Alte metode de integrare decât cele studiate la clasă

1. Prima metodă de schimbare de variabilă

a.Teoremă: Fie I, J interval din $\mathbb{R}$ si $g: I \rightarrow J,\ f: J \rightarrow \mathbb{R}$ funcții cu proprietățile:

1. g derivabilă pe I;
2. f admite primitive pe J (F-o primitivă a sa).

Atunci funcția $(f \circ g) \cdot g'(x)dx = F\big(g(x)\big) + C$.

b.În aplicarea primei metode de schimbare de variabilă distingem următoarele date şi etape:
- funcția de integrat: $h : I \rightarrow \mathbb{R}$
-se caută două funcții $I \xrightarrow{g} J \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, astfel încât să putem scrie: $h(x) = f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$;
-se caută o primitivă F a lui f, adică $\int f(t) = F(t) + C$;
-o primitivă H a lui h se obține prin relația $H = F \circ g$, adică :
$\int h(x)dx = \int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)dx = F\big(g(x)\big) + C$.

c. Practic, după identificarea funcțiilor g şi f , pentru a calcula integrala nedefinită $\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx$se procedează astfel: se face înlocuirea $g(x) = t$ şi se diferențiază ca o egalitate de funcții $dg(x) = dt$ sau $g'(x)dx - dt$. Făcând aceste înlocuiri în integrala inițială, se obține (formal) succesiv:

$$\int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)dx = \int f(t)dt = F(t) + C = F\big(u(x)\big) + C .$$

Egalitatea $\int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)dx = \int f(t)dt$ este formală, în sensul procedeului practic descris; ea nu trebuie interpretată ca o egalitate obişnuită de funcții (cele două mulțimi de funcții sunt definite pe intervale diferite I şi J).

Observație: Se poate proceda şi direct: identificând doar funcțiile f şi g, fără a trece efectiv la variabila t; în acest sens este util tabloul primitivelor unor funcții compuse.

1. $\int g^n(x) \cdot g'(x)dx = \frac{g^{n+1}(x)}{n+1} + c, n \in \mathbb{N};$

2. $\int g^{\propto}(x) \cdot g'(x) = \frac{g^{n+1}(x)}{\propto+1} + c, \propto \in \mathbb{R}, \propto \neq -1;$

3. $\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx = ln|g(x)| + c;$

4. $\int e^{g(x)}\, g'(x)dx = e^{g(x)} + c;$

5. $\int \frac{g'(x)}{g^2(x)-a^2}dx = \frac{1}{2a}ln\left|\frac{g(x)-a}{g(x)+a}\right| + c\ , a \neq 0;$

6. $\int \frac{1}{a^2+g^2(x)}g'(x)dx = \frac{1}{a}arctg\frac{g(x)}{a} + c, a \neq 0;$

7. $\int \sin g(x) \cdot g'(x)dx = -\cos g(x) + c;$

8. $\int \cos g(x) \cdot g'(x)dx = \sin g(x) + c;$

9. $\int \frac{1}{cos^2 g(x)}g'(x)dx = tg\ g(x) + c,\ \ x \in I\ a.\hat{\imath}.\cos g(x) \neq 0;$

10. $\int\left(1 + tg^2 g(x)\right) \cdot g'(x)dx = tg\ g(x) + c;$

11. $\int \frac{1}{sin^2 g(x)}g'(x)dx = -ctg\ g(x) + c;$

12. $\int\left(1 + ctg^2 g(x)\right) \cdot g'(x)dx = -ctg(x) + c;$

13. $\int tg\ g(x) \cdot g'(x)dx = -ln|\cos g(x)| + c;$

14. $\int ctg\ g(x) \cdot g'(x)dx = ln|\sin g(x)| + c;$

15. $\int \frac{1}{\sqrt{g^2(x)+a^2}}g'(x)dx = \ln\left(g(x) + \sqrt{g^2(x) + a^2}\right) + c, a \neq 0;$

16. $\int \frac{1}{\sqrt{g^2(x)-a^2}}g'(x)dx = ln\left|g(x) + \sqrt{g^2(x) - a^2}\right| + c, a \neq 0;$

17. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-g^2(x)}}g'(x)dx = \arcsin\frac{g(x)}{a} + c, a \neq 0;$

18. $\int \sqrt{a^2 - g^2(x)} \cdot g'(x)dx = \frac{1}{2}g(x)\sqrt{a^2 - g^{2(x)}} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{g(x)}{a} + c;$

19. $\int \sqrt{g^2(x)+\propto}\ g'(x)dx = \frac{1}{2}g(x)\sqrt{g^2(x)+\propto} + \frac{\propto}{2}ln\left|g(x) + \sqrt{g^2(x)+\propto}\right| + c.$

2. A doua metodă de schimbare de variabilă

a.Teoremă: Fie I,J interval din $\mathbb{R}$ si $g: I \to J, f: J \to \mathbb{R}$, funcții cu proprietățile:

1. g este bijectivă, derivabilă, cu derivată nenulă;
2. funcția $h = (f \circ g) \cdot g'$ admite primitive (H o primitivă a sa).

Atunci:

-funcția F admite primitive;

-funcția $H \circ g^{-1}$ este o primitivă a lui f, adică

$$\int f(x)dx = H(g^{-1}(x)) + C.$$

b.În aplicarea celei de a doua metodă de schimbare de variabilă distingem următoarele date şi etape:

-funcția de integrat: $: J \to \mathbb{R}$;

-se caută $: I \to J$, derivabilă şi cu derivată nenulă

-se formează funcția $h(t) = f(g(t)) \cdot g'(t)$ şi se caută o primitivă:

$$\int f(g(t)) \cdot g'(t)dt = H(t) + C;$$

-o primitivă a funcției f se obține din H prin relația $= H \circ g^{-1}$, adică

$$\int f(x)dx = H(g^{-1}(x)) + C$$

c.Practic, după precizarea funcției g , pentru a calcula integrala nedefinită $\int f(x)dx$, se procedează astfel:

se diferențiază egalitatea $x = g(t)$; $dx = g'(t)dt$. Se înlocuiesc în integrala inițială x şi dx şi se obține (formal) succesiv:

$$\int f(x)dx = \int f\big(g(t)\big) \cdot g'(t)dt = H(t) + C = H\big(g^{-1}(x)\big) + c\ .$$

Egalitatea $\int f(x)dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)dt$ este formală şi nu trebuie considerată ca o egalitate obişnuită de funcții.

Observație: În rezolvarea unor exercițoo de calcul al primitivelor prin schimbarea de variabilă vom folosi atât procedeul descris la puncrul b. , care presupune separarea calculelor în raport cu variabilele x şi t, cât şi procedeul descris la punctul c. unde vom accepta egalități formale câştigând în operativitate.

3. Integrarea funcțiilor raționale: Metoda lui Ostrogradsky

Dacă $Q(x)$ are rădăcini multiple, atunci

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{X(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{Y(x)}{Q_2(x)}dx$$

unde $Q_1(x)$ este cel mai mare divizor comun al polinoamelor $Q(x)$ şi $Q'(x)$;

$X(x)$ şi $Y(y)$ sunt polinoame cu coeficienti nedeterminați ale căror grade sunt, respectiv, cu o unitate mai mici decât ale polinoamelor $Q_1(x)$ şi $Q_1(x)$. Coeficienții polinoamelor $X(x)$ şi $Y(y)$ se determină prin derivarea egalității şi identificare.

Bibliografie: "Probleme de analiză matematică " Vol. II (clasa a XII-a), autori: Ion Petrică, Emil Constantinescu, Dumitru Petre, editura Petrion.