I. PERELMAN

Algebra distractivă

$x=$

$\sqrt[3]{3}$

$\sqrt{2}>$

$\sqrt[5]{5}$

$x+4y$

$\left(4-\frac{9}{2}\right)^2$

$\left(5-\frac{9}{2}\right)^2$

EDITURA ŞTIINŢIFICĂ

În românește de: *Carlenco Teofana, V. Suciu și M. Stoka*

Я. И. ПЕРЕЛЬМАН
ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ АЛГЕБРА
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва, 1958

I. I. PERELMAN

ALGEBRA DISTRACTIVĂ

EDITURA ŞTIINŢIFICĂ
Bucureşti, 1961

DIN PREFAȚA AUTORULUI LA EDIȚIA a III-a

Cartea de față nu trebuie privită ca un manual de algebră ușor de înțeles, destinat începătorilor. Ca și celelalte lucrări ale mele din același ciclu, Algebra distractivă nu este un manual, ci o carte de lectură liberă. Cititorii cărora li se adresează trebuie să posede anumite cunoștințe de algebră, măcar vag însușite sau pe jumătate uitate. Algebra distractivă își propune ca scop să precizeze, să reîmprospăteze și să fixeze aceste cunoștințe disparate și nesigure și, mai ales, să dezvolte cititorilor gustul pentru algebră, să trezească în ei dorința de a-și completa, în mod independent, cu ajutorul manualelor de specialitate, golurile existente în pregătirea lor. În această privință, orientarea Algebrei distractive este opusă obiectivelor urmărite de cărți ca, de exemplu, Numere și figuri de Rademacher și Toeplitz — carte care nu cere cititorilor „să țină minte ceea ce au învățat la matematică în anii adolescenței". Cartea mea, dimpotrivă, tinde să ajute la fixarea cunoștințelor și deprinderilor căpătate în școală.

Pentru a atribui acestui obiect un caracter atrăgător și a trezi interesul cititorilor, am folosit în cartea mea diferite mijloace, ca : probleme cu subiecte neobișnuite, care trezesc curiozitate, excursii distractive în domeniul istoriei și matematicii, aplicații neașteptate ale algebrei în viața practică etc.

Din punct de vedere al materialului de algebră conținut, cartea nu iese din cadrul programei școlare, atingînd aproape toate capitolele ei. Ținînd seama de scopul pe care-l are, Algebra distractivă evită problemele teoretice complicate.

CAPITOLUL I

A CINCEA OPERAȚIE MATEMATICĂ

A cincea operație

Algebra este adesea denumită „aritmetica celor şapte operaţii'', pentru a sublinia că la cele patru operații matematice cunoscute ea adaugă încă trei : ridicarea la putere și cele două operații inverse acesteia din urmă.

Convorbirile noastre despre algebră le vom începe cu cea de-a „cincea operație'' — ridicarea la putere.

Oare necesitatea acestei noi operații a fost dictată de practică? Indiscutabil. De ea ne izbim foarte des în viața de toate zilele. Să ne amintim numai de calculul suprafețelor şi volumelor cînd trebuie să ridicăm diferite numere la puterea a doua (la pătrat) și a treia (la cub). În afară de aceasta, forța de atracție universală, interacțiunile electrostatice şi cele magnetice, intensitatea luminii şi a sunetului scad proporțional cu pătratul distanței. Între timpul de rotație a planetelor în jurul Soarelui (şi a sateliților în jurul planetelor) și distanțele măsurate de la centrul de rotație există, de asemenea, o relație exprimată cu ajutorul puterilor : pătratele timpurilor de revoluție sînt proporționale cu cuburile distanțelor.

Dar să nu ne închipuim că în practică întîlnim numai puterile a doua și a treia, iar exponenții de grad superior există numai în exercițiile din manualele de algebră. Efectuînd calculele de rezistență, un inginer se izbeşte la orice pas de puterea a patra, iar în alte cazuri — de pildă la aflarea diametrului unei conducte de abur — chiar de puterea a şasea. Analizînd forța cu care o apă curgătoare antrenează pietrele întîlnite în calea ei, un hidrotehnician întîlnește mărimi ridicate la puterea a șasea : dacă viteza curentului de apă a unui rîu este de patru ori mai mare decît a altui rîu, atunci primul este capabil să rostogolească prin albia sa pietre mai grele de 4^6 ori, adică de 4 096 de ori, față de cel de-al doilea rîu *.

Cu exponenții mai mari ne întîlnim studiind variația strălucirii unui corp incandescent — de pildă, a filamentului unui bec electric — în funcție de temperatură. La incandescența de culoare albă-gălbuie, intensitatea luminoasă crește proporțional cu puterea a 12-a a temperaturii, iar la incandescența de culoare roșie — proporțional cu puterea a 30-a a temperaturii (se înțelege că este vorba de temperatura „absolută'', adică socotită de la —273°C). Aceasta înseamnă că, atunci cînd mărim temperatura unui corp, de exemplu de la 2 000° la 4 000°, adică de două ori, corpul dat devine de 2^{12} ori mai strălucitor, cu alte cuvinte luminează de 4 000 de ori mai mult. Vom reveni asupra importanței folosirii acestei dependențe în tehnica fabricării becurilor electrice.

Numere astronomice

Se poate spune că astronomii sînt cei care folosesc pe scara cea mai largă cea de-a cincea operație. Cercetătorii universului au de-a face la orice pas cu numere uriașe, compuse din una sau două cifre semnificative, urmate de un șir lung de zerouri. Scrierea obișnuită a acestor coloși numerici, denumiți pe drept cuvînt „numere astronomice'', ar duce inevitabil la mari complicații, mai ales în cazul efectuării calculelor. Astfel, distanța de la Pămînt la nebuloasa din Andromeda, exprimată în kilometri și scrisă în mod obișnuit, arată astfel :

9 500 000 000 000 000 000 km.

Dar la efectuarea calculelor astronomice se cere adesea ca distanțele să fie exprimate nu în kilometri sau în unități mai mari, ci în centimetri. În acest caz, distanța de mai sus va fi redată printr-un număr care are cu 5 zerouri mai mult :

950 000 000 000 000 000 000 000.

* Mai detaliat despre această problemă, vezi cartea mea *Zanimatelnaia mehanika* (Mecanica distractivă), cap. IX.

Masele stelelor sînt exprimate prin numere şi mai mari, mai ales atunci cînd dorim să le exprimăm în grame, aşa cum se cere în numeroase calcule. Masa Soarelui în grame este egală cu :

1 983 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000.

E lesne de înţeles cît de complicată ar fi efectuarea calculelor cu ajutorul acestor numere uriaşe şi cît de uşor s-ar putea comite greşeli. Şi încă numerele citate mai sus nu sînt cele mai mari numere astronomice.

A cincea operaţie matematică permite o rezolvare simplă a problemei. Cifra unu urmată de un şir de zerouri reprezintă o anumită putere a numărului 10 :

$100 = 10^2$, $1\,000 = 10^3$, $10\,000 = 10^4$ etc.

Deci, coloşii numerici de mai sus pot fi reprezentaţi sub forma următoare :

primul . . . . $950 . 10^{21}$
al doilea . . . . $1\,983 . 10^{30}$

Această reprezentare se face nu numai pentru economisirea spaţiului, ci şi pentru simplificarea calculelor. Dacă ni s-ar cere să înmulţim aceste numere între ele, ar fi suficient să aflăm produsul $950 \cdot 1\,983 = 1\,883\,850$ şi să-l punem înaintea factorului $10^{21+30} = 10^{51}$:

$$950 \cdot 10^{21} \cdot 1\,983 \cdot 10^{30} = 188\,385 \cdot 10^{52}$$

Această notaţie este, desigur, mult mai comodă decît aceea în care am scrie numărul cu 21 de zerouri, apoi cel cu 30 şi, în sfîrşit, numărul rezultant cu 52 de zerouri. Este nu numai mai comod, ci şi mult mai sigur, deoarece la scrierea a zeci de zerouri se poate omite unul sau două dintre ele, obţinîndu-se astfel un rezultat greşit.

Cît cîntăreşte tot aerul care înconjoară Pămîntul?

Ca să ne convingem în ce măsură se simplifică calculele atunci cînd ne folosim de reprezentarea numerelor mari cu ajutorul puterilor lui 10, să facem următorul calcul : să determinăm de cîte ori masa globului terestru este mai mare decît masa stratului de aer care îl înconjoară?

Ştim că pe fiecare centimetru pătrat din suprafaţa Pămîntului, aerul apasă cu o forţă de aproximativ un kilogram. Aceasta înseamnă că greutatea întregii coloane de aer care se sprijină pe 1 cm^2 din suprafaţa Pămîntului este egală cu 1 kg. Atmosfera care înconjoară Pămîntul poate fi considerată ca fiind compusă din asemenea coloane de aer; există atîtea coloane cîţi centimetri pătraţi sînt cuprinşi în suprafaţa planetei noastre, deci tot atîtea kilograme cîntăreşte întreaga atmosferă. Cercetînd manualele, aflăm că suprafaţa globului terestru este egală cu 510 000 000 km^2, ceea ce înseamnă $51 \cdot 10^7$ km^2.

Să calculăm cîţi centimetri pătraţi sînt cuprinşi într-un kilometru pătrat. Un kilometru liniar are 1 000 m, un metru — 100 cm, deci, 1 km liniar este egal cu 10^5 cm, iar 1 km^2 are $(10^5)^2 = 10^{10}$ cm^2. Prin urmare, suprafaţa Pămîntului este de :

$$51 \cdot 10^7 \cdot 10^{10} = 51 \cdot 10^{17}$$

cm^2. Tot atîtea kilograme cîntăreşte şi întreaga atmosferă a Pămîntului. Transformînd acestea în tone, obţinem :

$$51 \cdot 10^{17} : 1\,000 = 51 \cdot 10^{17} : 10^3 = 51 \cdot 10^{17-3} = 51 \cdot 10^{14}.$$

Masa globului pămîntesc se exprimă prin numărul :

$$6 \cdot 10^{21} \text{ t.}$$

Ca să aflăm de cîte ori planeta noastră este mai grea decît stratul de aer ce o înconjoară, facem împărţirea :

$$6 \cdot 10^{21} : 51 \cdot 10^{14} \approx 10^6,$$

adică masa atmosferei reprezintă aproximativ o milionime din masa globului pămîntesc *.

Ardere fără flacără şi fără căldură

Dacă veţi întreba un chimist de ce lemnul şi cărbunele ard numai la temperaturi înalte, vă va răspunde că de fapt combinarea oxigenului cu carbonul poate avea loc la

* Semnul $\approx$ înseamnă aproximativ egal.

orice temperatură, dar că la temperaturi joase acest proces decurge foarte lent (adică în reacție intră un număr neînsemnat de molecule) el scapă observației noastre. Legea care determină viteza reacțiilor chimice arată că, atunci cînd temperatura scade cu 10°, viteza de reacție (numărul de molecule cuprinse în aceasta) se reduce la jumătate.

Să aplicăm cele de mai sus la reacția oxidării lemnului, adică la procesul de ardere a lemnului. Să presupunem că un gram de lemn arde la temperatura de 600° a unei flăcări, în timp de o secundă. În cît timp va arde un gram de lemn la temperatura de 20°? La această temperatură, care este cu $580 = 58 \cdot 10°$ mai mică, viteza reacției va scădea de

$$2^{58} \text{ ori,}$$

deci, un gram de lemn va arde în timp de 2^{58} secunde.

Cu cîți ani este egal acest interval de timp? Putem calcula acest lucru cu aproximație, fără să înmulțim 2×2 de 57 de ori, și fără ajutorul tabelelor de logaritmi. Vom folosi faptul că

$$2^{10} = 1\,024 \approx 10^3.$$

Deci:

$$2^{58} = 2^{60-2} = 2^{60} : 2^2 = \frac{1}{4} \cdot 2^{60} = \frac{1}{4} \cdot (2^{10})^6 \approx \frac{1}{4} \cdot 10^{18},$$

adică circa $\frac{1}{4}$ dintr-un trilion de secunde. Un an are circa 30 000 000 sau $3 \cdot 10^7$ secunde, de aceea $\left(\frac{1}{4} \cdot 10^{18}\right) : (3 \cdot 10^7) = \frac{1}{12} \cdot 10^{11} \approx 10^{10}$ ani.

Zece miliarde ani! Iată în cît timp ar arde un gram de lemn fără flacără și fără căldură.

Așadar, lemnul și cărbunele ard și la temperaturi obișnuite, fără să fie aprinse. Inventarea uneltelor pentru producerea focului a accelerat de miliarde de ori acest proces extrem de lent.

Schimbarea timpului

Problemă

Vom caracteriza vremea numai după un singur criteriu, şi anume dacă cerul este sau nu acoperit, adică vom face deosebirea numai între zilele senine şi cele înnorate. Ce părere aveţi, în aceste condiţii, sînt oare posibile multe săptămîni în care alternarea zilelor senine cu cele înnorate să nu fie niciodată aceeaşi?

S-ar părea că nu sînt prea multe, că vor trece vreo două luni şi că toate combinaţiile de zile senine şi înnorate vor fi epuizate; atunci, în mod inevitabil se va repeta una din combinaţiile care a avut loc înainte.

Să încercăm, totuşi, să calculăm precis cîte combinaţii diferite sînt posibile în condiţiile date. Aceasta este una din problemele care conduc în mod neaşteptat la a cincea operaţie matematică. Prin urmare, în cîte feluri pot alterna, în cursul unei săptămîni, zilele senine cu cele înnorate?

Rezolvare

Prima zi din săptămînă poate fi senină sau înnorată: deci avem deocamdată două „combinaţii".

În decurs de două zile sînt posibile următoarele alternări de zile senine cu cele înnorate:

senină şi senină,
senină şi înnorată,
înnorată şi senină,
înnorată şi înnorată.

Deci 2^2 alternări diferite. În decurs de trei zile, la fiecare din cele patru combinaţii de mai sus le vor corespunde cîte două posibilităţi pentru ziua a treia; în total vom avea un număr de alternări egal cu:

$$2^2 \cdot 2 = 2^3.$$

În decurs de patru zile, numărul alternărilor va fi:

$$2^3 \cdot 2 = 2^4.$$

În cinci zile sînt posibile 2^5, în şase zile, 2^6 şi, în sfîrşit, în decurs de o săptămînă, $2^7 = 128$ alternări diferite.

De aci reiese că există 128 de săptămîni cu ordine diferită de alternare a zilelor senine cu cele înnorate. Peste $128 \cdot 7 = 896$ zile trebuie neapărat să se repete una din combinațiile care au avut loc înainte. Repetarea poate să se întîmple și mai curînd, dar 896 de zile reprezintă termenul la expirarea căruia această repetare este inevitabilă. Și invers : pot să treacă doi ani întregi, chiar mai mult (2 ani și 166 de zile), în decursul cărora nici o săptămînă nu va semăna cu alta din acest punct de vedere.

Broasca cu cifru

Problemă

Într-o instituție sovietică s-a descoperit o casă de bani care exista încă dinaintea Revoluției. S-a găsit și cheia ei, dar pentru a o deschide trebuia cunoscut secretul broaștei, deoarece ușa casei de fier se deschidea numai atunci cînd cele cinci discuri, pe care erau gravate literele alfabetului (36 de litere), erau astfel așezate încît aceste litere să formeze un anumit cuvînt. Deoarece nimeni nu cunoștea cuvîntul ce trebuia format, pentru a se evita spargerea casei, s-a hotărît să fie încercate toate combinațiile de litere posibile de pe cele cinci discuri. Pentru formarea unei combinații erau necesare 3 secunde.

Exista oare speranța ca această casă de fier să fie deschisă în următoarele zece zile ?

Rezolvare

Să calculăm cîte combinații de litere trebuiau încercate.

Fiecare din cele 36 de litere de pe primul disc poate fi combinată cu fiecare din cele 36 litere de pe discul al doilea. Deci, sînt posibile :

$$36 \cdot 36 = 36^2$$

combinații de două litere.

Fiecăreia din aceste combinații i se poate adăuga oricare din cele 36 de litere de pe discul al treilea. De aceea, numărul combinațiilor de trei litere va fi :

$$36^2 \cdot 36 = 36^3.$$

În acelaşi mod, aflăm că numărul combinaţiilor de 4 litere poate fi 36^4, iar de 5 litere — 36^5, sau 60 466 176. Pentru a forma aceste peste 60 milioane de combinaţii, ar fi necesar un interval de timp (socotind cîte 3 secunde pentru fiecare combinaţie) de

$$3 \cdot 60\,466\,176 = 181\,398\,528$$

sec. Aceasta reprezintă 50 000 ore sau circa 6 300 zile lucrătoare de cîte 8 ore, adică peste 20 de ani.

Există şanse doar 10 la 6 300, sau 1 la 630, pentru ca în următoarele 10 zile casa de fier să fie deschisă. Aceasta reprezintă o probabilitate foarte mică.

Ciclistul superstiţios

Problemă

Cineva şi-a cumpărat o bicicletă, în dorinţa de a învăţa să meargă pe ea. Proprietarul bicicletei s-a dovedit a fi un om extrem de superstiţios. Auzind că o bicicletă se poate avaria astfel încît o roată să se deformeze într-un „opt", el s-a gîndit că nu-i va merge bine dacă în numărul lui de circulaţie va figura măcar o singură cifră 8. Mergînd să obţină numărul, el raţiona în felul următor : În scrierea oricărui număr pot figura 10 cifre : 0, 1, . . ., 9. Dintre acestea, cea cu ghinion este numai cifra 8. Există deci doar o singură şansă la zece ca numărul bicicletei să fie „cu ghinion".

Este just acest raţionament ?

Rezolvare

Numerele de bicicletă sînt formate din şase cifre. În total există 999 999 numere : de la 000001, 000002 etc. pînă la 999 999. Să calculăm cîte „numere fericite" există. Prima cifră poate fi oricare dintre cele nouă „fericite" : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9. A doua cifră poate fi, de asemenea, oricare din aceste 9 cifre. De aceea există $9 \cdot 9 = 9^2$ combinaţii de două cifre „fericite".

În acelaşi mod aflăm că numărul combinaţiilor „fericite" formate din 6 cifre este egal cu 9^6. Dar, ţinînd seama că în acest număr intră şi combinaţia 000 000, care nu poate fi considerată ca număr de bicicletă, vom avea în total $9^6 - 1 = 531\ 440$ numere „fericite", ceea ce constituie cam 53% din numărul total şi nu 90% — aşa cum îşi închipuia biciclistul.

Propunem ca cititorul să se convingă personal că printre numerele formate din 7 cifre, există mai multe numere „cu ghinion" decît numere „fericite".

Rezultatele dublării repetate

Cunoscuta legendă despre răsplata cuvenită inventatorului jocului de şah * ne oferă un exemplu caracteristic de creştere extrem de rapidă a unei cantităţi foarte mici, în cazul dublării ei repetate. Fără să mă opresc la acest exemplu clasic, voi da alte exemple, mai puţin cunoscute.

Problemă

În medie, parameciurn se divide în două la fiecare 27 de ore. Dacă toţi indivizii rezultaţi ar rămîne în viaţă, cît timp ar fi necesar ca urmaşii unui paramecium să ocupe un volum egal cu volumul Soarelui ?

Datele necesare pentru calcul : admiţînd că toate generaţiile rămîn în viaţă după divizare, a 40-a generaţie a unui paramecium ocupă un volum de 1 m^3; volumul Soarelui este egal cu 10^{27} m^3.

Rezolvare

Problema se reduce la a determina de cîte ori trebuie dublat 1 m^3 pentru a se obţine un volum de 10^{27} m^3. Facem următoarea transformare, ţinînd seama că $2^{10} \approx$ $\approx 1\ 000$:

$$10^{27} = (10^3)^9 \approx (2^{10})^9 = 2^{90}.$$

Deci, a 40-a generaţie trebuie să treacă prin încă 90 de divizări, pentru a ocupa un volum egal cu volumul Soarelui. Numărul total de generaţii, socotind de la prima,

* Vezi cartea mea *Jivaia matematica* (Matematica vie), cap. VII.

este egal cu $40 + 90 = 130$. Se poate uşor afla timpul necesar pentru formarea lor care este de peste 147 de zile.

Un singur microbiolog (Metalnikov) a reuşit să urmărească a 8 061-a divizare a unui paramecium. Cititorul poate să calculeze volumul imens pe care l-ar ocupa ultima generaţie, dacă s-ar considera că din acest număr n-ar pieri nici un individ. Aceeaşi problemă poate fi prezentată şi invers...

Să presupunem că Soarele s-a divizat în două părţi egale, şi fiecare jumătate — din nou în două etc. De cîte ori ar fi trebuit să se repete această operaţie, pentru a se obţine particule de mărimea unui infuzor?

Deşi răspunsul este deja cunoscut cititorului — adică 130, el surprinde totuşi prin modestia lui.

Mie mi s-a pus problema sub forma următoare:

Avem o coală de hîrtie pe care o rupem în două părţi egale: una din jumătăţile obţinute o rupem, de asemenea, în două etc. Cîte împărţiri trebuie făcute pentru a obţine particule de dimensiuni atomice?

Să presupunem că o coală de hîrtie cîntăreşte un gram, iar un atom, $\frac{1}{10^{24}}$ g. Deoarece 10^{24} poate fi aproximat cu 2^{80}, rezultă că în total vor fi necesare 80 de împărţiri, dar în nici un caz milioane — aşa cum se răspunde cîteodată.

De 100 000 de ori mai repede

Triggerul (sau circuitul basculant) este un dispozitiv electric format din două lămpi electronice, asemănătoare celor folosite în aparatele de radiorecepţie. În interiorul său, curentul poate circula numai printr-o singură lampă: fie prin cea „din stînga", fie prin cea „din dreapta". Dispozitivul este prevăzut cu două borne de intrare — la care se poate aplica, din exterior, un semnal electric (impuls) de scurtă durată — şi două borne de ieşire, la care apare impulsul de răspuns al triggerului. În momentul aplicării impulsului electric de intrare se produce comutarea triggerului: lampa prin care trecea curentul este scoasă din circuit, iar curentul începe să circule prin cealaltă. Impulsul de răspuns este dat de trigger în momentul cînd lampa din dreapta este deconectată (curentul care trecea prin ea este întrerupt), iar prin lampa din stînga începe să circule curentul.

Să urmărim cum va funcționa triggerul dacă îi vom aplica succesiv cîteva impulsuri electrice. Vom caracteriza poziția triggerului după lampa din dreapta: dacă curentul nu trece prin lampa din dreapta, spunem că triggerul se află în „poziția 0”, iar dacă curentul trece prin această lampă — triggerul va fi în „poziția 1”.

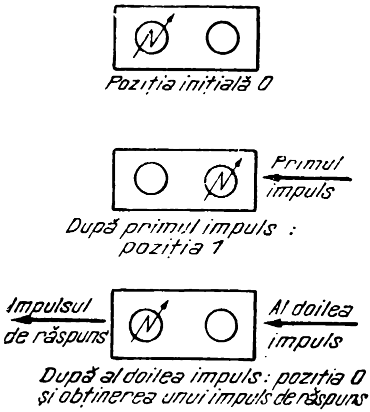


Fig. 1

Să presupunem că la început triggerul se află în poziția 0, adică curentul trece prin lampa din stînga (fig. 1). După primul impuls, așa cum am spus, curentul va circula prin lampa din dreapta, adică triggerul va fi în poziția 1. În acest caz însă nu va urma impulsul de răspuns al triggerului, deoarece acesta apare numai în momentul ieșirii din circuit a lămpii din dreapta (nu a celei din stînga).

După al doilea impuls, curentul va circula prin lampa din stînga, deci triggerul va fi din nou în poziția 0 și va da semnalul (impulsul) de răspuns.

Deci, după două impulsuri, triggerul revine la poziția inițială. După al treilea impuls, ca și după primul, triggerul va fi din nou în poziția 1, iar după al patrulea, ca și după al doilea, în poziția 0, obținîndu-se din nou semnalul de răspuns etc. După fiecare două impulsuri, pozițiile triggerului se repetă.

Să ne închipuim cîteva triggere montate astfel încît impulsurile de intrare să fie aplicate primului trigger, impulsurile de răspuns ale primului —la bornele de intrare a celui de-al doilea, impulsurile de răspuns ale celui de-al doilea să fie aplicate la intrarea celui de-al treilea trigger etc. (în fig. 2 triggerele sînt așezate unul după altul, de la dreapta spre stînga). Să vedem cum funcționează acest sistem de triggere.

Să presupunem că la început toate triggerele se află în pozițiile 0. Astfel, pentru un circuit format din 5 triggere poziția inițială este caracterizată prin combinația 00000. După primul impuls, primul trigger va ajunge în poziția 1, dar pentru că în această poziție nu se obține un semnal de răspuns, toate celelalte triggere vor continua să rămînă în pozițiile 0, adică circuitul va fi caracterizat prin combi-

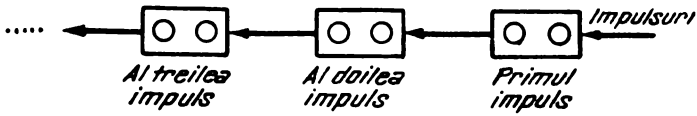


Fig. 2

nația 00001. După al doilea impuls, primul trigger va fi deconectat (ajunge în poziția 0) și va da un semnal de răspuns, care conectează (pune în funcțiune) cel de-al doilea trigger. Celelalte triggere vor continua să rămînă în poziția 0 și circuitul va fi caracterizat prin combinația 00010. După al treilea impuls va fi conectat din nou primul trigger, celelalte rămînînd însă în aceleași poziții. Circuitul va fi caracterizat de data aceasta prin combinația 00011. După al patrulea impuls, primul trigger va fi deconectat și va da semnalul de răspuns ; sub acțiunea acestui impuls se va deconecta cel de-al doilea trigger care dă, de asemenea, un impuls de răspuns ; și, în sfîrșit, acest din urmă impuls va deconecta cel de-al treilea trigger ; se obține astfel combinația 00100.

Să vedem ce rezultă dacă continuăm raționamentul nostru și mai departe :

Primul impuls	combinația	00001
al 2-lea impuls	combinația	00010
al 3-lea impuls	combinația	00011
al 4-lea impuls	combinația	00100
al 5-lea impuls	combinația	00101
al 6-lea impuls	combinația	00110
al 7-lea impuls	combinația	00111
al 8-lea impuls	combinația	01000

. . . .

Observăm că un circuit format din triggere „numără" semnalele aplicate la intrare și „notează", într-un fel original, numărul acestor semnale. Este ușor de reținut că „notarea" numărului de semnale nu se face cu ajutorul sistemului de numerație zecimal ci al sistemului de numerație în baza doi.

În această bază se folosesc numai cifrele 0 și 1, și orice număr este notat cu zerouri sau unități. Aci, o unitate de ordin superior nu este de zece ori mai mare decît cea precedentă (ca la sistemul zecimal), ci numai de două ori. Unitatea care ocupă ultimul loc (extrema dreaptă) este unitatea obișnuită. Unitatea de ordin superior unității obișnuite (al doilea loc de la dreapta la stînga) este numărul 2; al treilea loc îl ocupă numărul 4, urmează apoi 8 etc.

De exemplu, numărul $19 = 16 + 2 + 1$ se scrie în baza doi sub forma 10011.

Prin urmare, circuitul format din triggere „numără" semnalele aplicate și „înregistrează" numărul lor folosind numai cifrele 0 și 1. Menționăm că durata de înregistrare a unui impuls care trece prin trigger este de ordinul a 10^{-6} *s*. Triggerele moderne pot „înregistra" pînă la 1 000 000 de impulsuri pe secundă și chiar mai mult. Aceasta înseamnă de 100 000 ori mai mult decît poate socoti un om fără ajutorul mașinii (ochiul omului poate distinge clar semnale care se succed la un interval de cel mult 0,1 *s*).

Dacă vom lega în serie douăzeci de triggere, adică vom înregistra numărul de semnale aplicate cu ajutorul a cel mult 20 de cifre, putem număra pînă la $2^{20} - 1$; acest număr depășește 1 milion. Formînd o serie de 64 de triggere, se poate înregistra, cu ajutorul lor, faimosul număr din legenda „tablei de șah" (18 446 744 073 709 551 615 *N.T.*).

Posibilitatea de a număra sute de mii de semnale pe secundă este de foarte mare importanță pentru fizica nucleară. De exemplu, se poate înregistra numărul de particule eliberate la dezintegrarea nucleului atomic.

10 000 de operații pe secundă

Este interesant faptul că montajele cu triggere permit și efectuarea operațiilor cu numere. Să vedem cum se poate face, de exemplu, adunarea a două numere.

Să presupunem trei circuite, formate din triggere, conectate între ele așa cum se arată în fig. 3. Circuitul de sus servește pentru înregistrarea primului termen al sumei, circuitul al doilea (de mijloc) — pentru înregistrarea celui de-al doilea termen al sumei, iar circuitul de jos — pentru înregistrarea sumei totale. În momentul punerii în func-

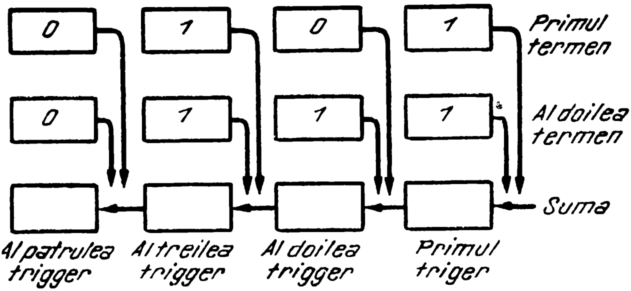


Fig. 3

țiune a dispozitivului, la triggerele din circuitul de jos sosesc impulsurile de la triggerele din primul și al doilea circuit (cel de sus și cel de mijloc), care se află în poziția 1.

Să presupunem, așa cum se vede în fig. 3, că cei doi termeni ai sumei, scriși în primele două circuite, sînt 101 și 111 (în sistemul de numerație cu baza 2). În acest caz, în primul trigger al circuitului de jos (cel din dreapta) vor sosi două impulsuri : de la primele două triggere ale fiecărui termen al sumei. După cum am spus mai înainte, la aplicarea a două impulsuri, primul trigger va rămîne în poziția 0, însă va trimite un impuls de răspuns celui de-al doilea trigger. În afară de aceasta, la al doilea trigger sosește și semnalul de la al doilea termen al sumei. Deci al doilea trigger primește două impulsuri din care cauză rămîne și el în poziția 0, dar va trimite semnalul de răspuns celui de-al treilea trigger. Pe lîngă aceasta, asupra triggerului al treilea vor fi aplicate încă două impulsuri (de la fiecare termen al sumei). Primind cele trei semnale (impulsuri), triggerul trei va trece în poziția 1 și va transmite semnalul de răspuns triggerului al patrulea, care va trece în poziția 1 (alte semnale nu mai sosesc la triggerul patru). În felul acesta, dispozitivul reprezentat în fig. 3 a efectuat (în sistemul de numerație în baza doi) adunarea a două numere „pe coloane" :

$$\begin{array}{r} 101 + \\ 111 \\ \hline 1100 \end{array}$$

sau în sistemul zecimal : $5 + 7 = 12$. S-ar putea spune că impulsurile de răspuns din circuitul de jos corespund faptului următor : dispozitivul „memorează" o unitate pe care o trece în ordinul următor (superior), adică efectuează același lucru pe care îl facem noi atunci cînd adunăm „pe coloane".

Dacă fiecare circuit ar fi format nu din patru, ci din 20 de triggere, s-ar putea face adunarea pînă la un milion, iar cînd se folosește un număr și mai mare de triggere se pot aduna numere și mai mari.

În realitate, dispozitivul destinat pentru efectuarea adunării trebuie să aibă o schemă mai complicată decît cea din fig. 3. Printre altele, el trebuie să fie prevăzut cu mecanisme speciale, menite să „decaleze" semnalele. Într-adevăr, în cazul schemei din fig. 3, semnalele de la cei doi termeni ai sumei sosesc la primul trigger din circuitul de jos simultan (în momentul conectării dispozitivului). De aceea, cele două semnale se vor contopi și triggerul le va percepe ca pe unul singur, și nu ca două semnale diferite. Spre a evita aceasta, este necesar ca semnalele sosite de la cei doi termeni ai sumei să nu fie aplicate simultan, ci cu un „decalaj" între ele, unul după altul. Datorită acestui „decalaj", timpul necesar adunării celor doi termeni este mai lung decît cel necesar înregistrării unui singur semnal, în cazul calculatoarelor cu triggere.

Modificînd schema, se poate obține un dispozitiv care în loc de adunări să efectueze scăderi sau chiar înmulțiri (înmulțirea se reduce la efectuarea succesivă a unor adunări și de aceea cere un interval de timp de cîteva ori mai mare), împărțiri și alte operații.

Dispozitivele despre care am vorbit mai sus sînt folosite la mașinile de calculat. Ele pot efectua peste 10 000 de operații într-o secundă ! S-ar părea că această viteză ameţitoare n-are nici un sens practic. De exemplu, noi nu sesizăm nici o deosebire dacă o maşină de calculat ridică la pătrat un număr de 15 cifre într-o zecime de miime de secundă sau, să zicem, într-un sfert de secundă. Ni se pare că şi într-un caz şi în celălalt problema este rezolvată „instantaneu".

Dar să nu ne grăbim cu concluziile. Să luăm următorul exemplu. Un şahist bun, înainte de a face o mutare, analizează zeci şi chiar sute de variante posibile. Dacă admitem că pentru studierea unei variante sînt necesare cîteva secunde, atunci pentru analiza unei sute de variante vor fi necesare minute şi zeci de minute. Se întîmplă adesea ca jucătorii de şah să ajungă în „criza de timp", adică să fie nevoiţi să mute repede, tocmai pentru că au pierdut aproape întregul timp fixat pentru gîndire studiind mutările anterioare. Ce s-ar întîmpla dacă analiza variantelor unei partide de şah ar fi încredinţată unei maşini? Efectuînd mii de calcule într-o secundă, maşina analizează toate variantele „instantaneu" şi nu va ajunge niciodată în „criză de timp".

Dar, evident, veţi spune că una este să efectuezi calcule (chiar destul de complicate) şi alta — să joci şah: maşina nu va putea niciodată să facă acest lucru! Un şahist analizînd variantele nu calculează, ci gîndeşte! Să nu ne grăbim, vom reveni asupra acestui subiect.

Numărul partidelor de şah posibile

Să calculăm cu aproximaţie numărul total al partidelor de şah diferite, ce pot fi jucate. Un calcul precis este practic imposibil de făcut, dar vom încerca să arătăm cititorului cum se poate aprecia, în mod aproximativ, acest număr. În cartea matematicianului belgian M. Craitohik *Matematica jocurilor şi distracţii matematice*, există următoarea evaluare:

„La prima mutare, albul are posibilitatea să aleagă una dintre cele 20 de mutări (16 mutări ale celor 8 pioni, fiecare dintre ei putîndu-se deplasa cu unul sau două cîmpuri, şi cîte două mutări ale fiecărui cal). La fiecare mutare a albului, negrul poate răspunde cu una dintre cele 20 de mutări. Înmulţind fiecare mutare a albului cu fiecare mutare a negrului, vom avea 20 · 20 = 400 partide diferite numai după prima mutare efectuată de ambii concurenți.

Începînd cu a doua mutare, numărul variantelor posibile crește. Astfel, dacă prima mutare a albului a fost *e*2 — *e*4, atunci la a doua mutare el are posibilitate să aleagă una dintre cele 29 de variante posibile. Mai departe, numărul mutărilor posibile crește și mai mult. Numai dama ocupînd, de exemplu, cîmpul *d*5 poate alege o variantă dintre cele 27 posibile (presupunînd că toate cîmpurile, unde ea poate fi mutată, sînt libere). În vederea simplificării calculelor, vom adopta următoarele valori medii :

pentru fiecare tabără la cîte 20 de mutări posibile primele cinci mutări ;

cîte 30 de mutări posibile la mutările următoare.

În afară de aceasta admitem ca, în medie, într-o partidă normală să fie cam 40 de mutări. Atunci, pentru numărul de partide posibile, vom avea expresia :

$$(20 \cdot 20)^5 \cdot (30 \cdot 30)^{35}\text{''}.$$

Pentru a ne putea da seama, cu aproximație, de valoarea acestei expresii, să facem următoarele transformări și simplificări :

$$(20 \cdot 20)^5 \cdot (30 \cdot 30)^{35} = 20^{10} \cdot 30^{70} = 2^{10} \cdot 3^{70} \cdot 10^{80}.$$

Să înlocuim pe 2^{10} cu numărul aproximativ egal 1 000, adică 10^3.

Reprezentăm expresia 3^{70} sub forma :

$$3^{70} = 3^{68} \cdot 3^2 \approx 10\ (3^4)^{17} \approx 10 \cdot 80^{17} = 10 \cdot 8^{17} \cdot 10^{17} = 2^{51} \cdot 10^{18} =$$
$$= 2\ (2^{10})^5 \cdot 10^{18} \approx 2 \cdot 10^{15} \cdot 10^{18} = 2 \cdot 10^{33}.$$

Prin urmare,

$$(20 \cdot 20)^5 \cdot (30 \cdot 30)^{35} \approx 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{33} \cdot 10^{80} = 2 \cdot 10^{116}.$$

Acest număr întrece cu mult numărul legendar al boabelor de grîu, cerute drept răsplată pentru inventarea jocului de șah ($2^{64} - 1 \approx 18 \cdot 10^{18}$). Dacă întreaga populație de pe glob ar juca șah zi și noapte, făcînd cîte o mutare pe secundă, atunci pentru epuizarea tuturor partidelor de şah posibile ar fi necesar ca acest joc să dureze nu mai puţin de 10^{100} secole!

Secretul maşinii automate de şah

Vă veţi mira, desigur, aflînd că odinioară au existat maşini automate de şah. Într-adevăr, cum putem să ne imaginăm aceasta, cînd ştim că numărul combinaţiilor posibile ale pieselor pe tabla de şah este practic infinit?

Toate acestea se pot explica foarte simplu. De fapt a existat nu maşina automată, ci numai încrederea în posibilitatea existenţei ei. În special, maşina automată a mecanicului ungur Wolfgang von Kempelen (1734—1804) s-a bucurat de foarte multă popularitate; ea a fost prezentată la curţile imperiale ale Austriei şi Rusiei, iar mai tîrziu a făcut obiectul unor demonstraţii publice la Paris şi Londra. Napoleon I a jucat cu acest automat, fiind convins că îşi măsoară forţele cu o maşină. Pe la jumătatea secolului trecut, faimosul automat a ajuns în America unde şi-a încheiat existenţa (la Philadelphia) cu ocazia unui incendiu.

Alte maşini automate de şah s-au bucurat de mai puţină popularitate, dar credinţa în existenţa lor s-a păstrat încă mult timp.

În realitate, nici una dintre aceste maşini de şah nu funcţionau automat. În interior se ascundea întotdeauna un jucător de şah iscusit care mişca figurile. Acel automat închipuit era format dintr-o ladă destul de voluminoasă încărcată cu un mecanism complicat. Deasupra lăzii se afla o tablă de şah cu figuri care erau mutate de mîna unei păpuşi mari. Înainte de începerea jocului se arăta publicului că în interiorul lăzii nu se găsesc decît mecanisme. Dar compartimentele lăzii fiind deschise pe rînd, jucătorul care se ascundea înăuntru avea timp să se mute dintr-un compartiment într-altul fără să fie observat de asistenţă. (Acest rol l-au îndeplinit un timp celebrii jucători de şah Johann Allgauer şi William Lewis). În felul acesta, mecanismul mașinii automate nu participa cîtuși de puțin la joc, ci masca doar prezența jucătorului.

Din cele spuse s-ar putea trage următoarea concluzie : numărul partidelor de șah este practic infinit, dar mașinile, automatele care ar putea să aleagă soluția cea mai fericită, există doar în închipuirea oamenilor naivi. De aceea nu trebuie să ne temem de o criză a șahului.

În ultimii ani însă s-au petrecut evenimente care pun la îndoială justețea acestei afirmații : astăzi există mașini care „joacă" șah. Acestea sînt mașini de calculat complicate, care pot efectua mii de operații pe secundă. Despre aceste mașini am vorbit mai sus. Dar în ce fel poate o mașină „juca" șah?

Desigur, nici o mașină de calcul nu poate face altceva decît operații cu numere. Dar calculele sînt efectuate de mașină după o schemă de operații stabilită, după un „program" întocmit dinainte.

„Programul" jocului de șah este întocmit de matematicieni pe baza unei anumite tactici a jocului, înțelegînd prin aceasta un sistem de reguli, potrivit cărora pentru orice poziție poate fi aleasă o singură mutare („cea mai bună", în sensul tacticii date). Iată un exemplu de tactică. Pentru fiecare figură este prevăzut un număr determinat de puncte :

Rege	+ 200 de puncte	Pion	+ 1 punct
Damă . . .	+ 9 puncte	Pion rămas în urmă	— 0,5 puncte
Turn	+ 5 puncte	Pion izolat	— 0,5 puncte
Nebun . . .	+ 3 puncte	Pion dublat . . .	— 0,5 puncte
Cal	+ 3 puncte		

Afară de aceasta, se apreciază într-un mod determinat avantajele de poziție ale pieselor (mobilitatea figurilor, așezarea lor mai aproape de centru decît de flancuri etc.) care se exprimă în zecimi de punct. Dacă se scade din suma totală a punctelor corespunzătoare pieselor albe, suma totală a punctelor corespunzătoare pieselor negre, diferența obținută caracterizează, într-o anumită măsură, superioritatea materială și pozițională a albului față de negru. Mașina de calculat socotește în ce fel poate varia diferența dată, în decursul următoarelor 3 mutări, alege cea mai bună variantă din toate combinațiile posibile și imprimă rezultatul pe o fişă specială: „mutarea" a fost făcută *. Pentru efectuarea unei mutări, maşina are nevoie de foarte puţin timp (în funcţie de felul programului şi de viteza de funcţionare a maşinii), astfel încît ea nu se teme de „criza de timp".

Desigur că studierea „pentru numai 3 mutări" denotă că maşina este un „jucător" destul de slab **. Nu ne îndoim însă de faptul că, datorită progresului tehnic, maşinile vor „învăţa" în curînd să „joace" şah mult mai bine.

Cu ajutorul a trei cifre de 2

Evident, oricine ştie în ce fel trebuie scrise trei cifre pentru ca ele să reprezinte un număr cît mai mare. De exemplu, trei cifre de 9 trebuie aşezate în trei etaje:

$$9^{9^{9}}.$$

Numărul acesta este atît de mare, încît prin comparaţie nu s-ar putea reda mărimea sa. Numărul de electroni din întregul univers accesibil observaţiei este infim în comparaţie cu numărul dat. În cartea mea *Aritmetica distractivă*, cap. X, am mai vorbit despre acest număr. Revin asupra acestei probleme, deoarece doresc ca, după modelul ei, să vă prezint o alta:

Să se scrie cu ajutorul a trei cifre de 2, fără a folosi semne de operaţii, cel mai mare număr posibil.

Rezolvare

Poate prin analogie cu aşezarea celor trei cifre de 9 veţi fi tentaţi să dispuneţi la fel şi cele trei cifre de 2:

$$2^{2^{2}}.$$

* Există şi o altă „tactică" de şah. Astfel, la efectuarea calculelor, în loc să fie analizate toate mutările posibile ale adversarului, pot fi analizate numai mutările „tari" (şah, capturare, atac, apărare etc.). Apoi, cînd adversarul face mutări deosebit de „tari", maşina poate analiza variantele cele mai bune pentru mai mult de 3 mutări. Se poate, de asemenea, folosi o altă scară pentru aprecierea numărului de puncte. În funcţie de tactica adoptată se schimbă „stilul de joc" al maşinii.

** În partidele jucate de cei mai buni maeştri ai şahului sînt prevăzute combinaţii pentru 10 şi chiar mai multe mutări.

De data aceasta, nu veți obține rezultatul așteptat. Numărul scris este mic, mai mic chiar decît 222. Într-adevăr: nu am scris decît 2^4, adică 16.

Numărul cel mai mare care poate fi format cu ajutorul a trei cifre de 2 nu este nici 222 și nici 22^2 (adică 484), ci

$$2^{22} = 4\,194\,304.$$

Exemplul este foarte instructiv. El arată că în matematică este periculos să se procedeze prin analogie, deoarece aceasta poate duce uneori la concluzii greșite.

Cu ajutorul a trei cifre de 3

Problemă

Acum, cred că veți fi prudenți în rezolvarea următoarei probleme:

Să se scrie cu ajutorul a trei cifre de 3, fără a folosi semne de operații, cel mai mare număr posibil.

Rezolvare

Așezarea cifrelor în trei etaje nu duce nici de data aceasta la rezultatul dorit, deoarece:

$$3^{3^3}, \text{ adică } 3^{27}, \text{ este mai mic decît } 3^{33}.$$

Această ultimă așezare dă răspunsul la problemă.

Cu ajutorul a trei cifre de 4

Problemă

Să se scrie cel mai mare număr posibil cu ajutorul a trei cifre de 4, fără a folosi semne de operații.

Rezolvare

Dacă în cazul de față veți proceda după modelul celor două probleme precedente, adică veți da răspunsul

$$4^{44},$$

veţi greşi, deoarece de data aceasta aşezarea cifrelor în trei etaje

$$4^{4^4},$$

este cea care dă numărul cel mai mare. Într-adevăr, $4^4 = 256$, iar 4^{256} este mai mare decît 4^{44}.

Cu ajutorul a trei cifre identice

Să încercăm să pătrundem în esenţa acestui fenomen neaşteptat şi să stabilim de ce unele cifre, atunci cînd sînt aşezate în trei etaje, dau naştere la numere uriaşe, iar altele — nu. Să analizăm cazul general.

Să se scrie cu ajutorul a trei cifre identice, fără a folosi semnele operaţiilor, cel mai mare număr posibil.

Să notăm cifra cu litera a. Aşezării

$$2^{22},\ 3^{33},\ 4^{44}$$

îi corespunde reprezentarea :

$$a^{10a+a}, \text{ adică } a^{11a}.$$

Cît priveşte aşezarea în trei etape, aceasta va fi de forma :

$$a^{a^a}.$$

Să determinăm pentru ce valoare a lui a va da ultimul mod de aşezare un număr mai mare decît primul. Deoarece baza ambelor expresii este aceeaşi, valoarea mai mare o va avea expresia cu exponentul mai mare. Dar cînd avem :

$$a^a > 11\ a?$$

Să împărţim ambii membri ai inegalităţii prin a. Obţinem :

$$a^{a-1} > 11.$$

Observăm că a^{a-1} este mai mare ca 11 numai în cazul cînd a este mai mare decît 3, deoarece :

$$4^{4-1} > 11,$$

iar

$$3^2 \text{ şi } 2^1$$

sînt mai mici decît 11.

Acum se explică surprizele pe care le-am întîlnit în rezolvarea problemelor precedente : pentru cifrele 2 şi 3 trebuie să adoptăm un mod de aşezare, iar pentru cifra 4 şi celelalte cifre mai mari — un altul.

Cu ajutorul a patru cifre de 1

Problemă

Să se scrie numărul cel mai mare posibil cu ajutorul a patru cifre de 1 fără a folosi semnele operaţiilor matematice.

Rezolvare

Numărul 1111, care ne vine îndată în minte, nu răspunde cerinţelor problemei, deoarece

$$11^{11}$$

este mult mai mare. Este prea greu să calculăm acest număr înmulţind pe 11 de 10 ori cu el însuşi. Dar el poate fi uşor evaluat cu ajutorul tabelelor de logaritmi.

Valoarea sa întrece 285 de miliarde şi, prin urmare, este mai mare decît 1111 de 25 000 000 de ori.

Cu ajutorul a patru cifre de 2

Problemă

Să facem un pas mai departe în dezvoltarea problemelor de tipul considerat şi să abordăm problema pentru cazul a patru cifre de 2.

Pentru ce aşezare formează patru cifre de 2 cel mai mare număr posibil?

Rezolvare

Sînt posibile 8 combinaţii :

$$2222,\ 222^2,\ 22^{22},\ 2^{222},$$

$$22^{2^2},\ 2^{22^2},\ 2^{2^{22}},\ 2^{2^{2^2}}.$$

Care este cel mai mare dintre aceste numere?

Să analizăm mai întîi primul rînd, adică numerele așezate în două etaje.

Primul număr — 2222 — este mai mic decît celelalte trei. Pentru a compara numerele

$$222^2 \text{ și } 22^{22},$$

vom transforma cel de-al doilea număr :

$$22^{22} = 22^{2 \cdot 11} = (22^2)^{11} = 484^{11}.$$

Numărul obținut este mai mare decît 222^2, deoarece pentru 484^{11} atît baza cît și exponentul sînt mai mari decît pentru numărul 222^2.

Să comparăm numerele 22^{22} și 2^{222}. Pentru aceasta să-l înlocuim pe 22^{22} cu un număr mai mare, 32^{22} și să demonstrăm că și acest număr mai mare este mai mic decît 2^{222}.

Într-adevăr,

$$32^{22} = (2^5)^{22} = 2^{110}$$

și exponentul este mai mic decît 222.

Cel mai mare număr din primul rînd considerat este 2^{222}.

Acum ne rămîne să comparăm între ele cinci numere : cel obținut mai înainte și următoarele patru :

$$22^{2^2}, 2^{22^2}, 2^{2^{22}} \ 2^{2^{2^2}}.$$

Ultimul număr, egal cu 2^{16}, iese imediat din competiție. Mai departe, numărul 22^{2^2} egal cu 22^4 este mai mic decît 32^4 sau 2^{20}, dacă este mai mic decît următoarele două numere (2^{22^2} și $2^{2^{22}}$). Rămîne doar să comparăm între ele trei numere, fiecare din ele reprezentînd o putere a lui 2. Este clar că va fi mai mare acela dintre numere al cărui exponent este mai mare. Dintre cei trei exponenți :

$$222, \ 484 \text{ și } 2^{20+2} \ (= 2^{10 \cdot 2} \cdot 2^2 \approx 10^6 \cdot 4),$$

ultimul este cel mai mare.

Deci, numărul cel mai mare, care poate fi scris cu ajutorul a patru cifre de 2, este :

$$2^{2^{22}}.$$

Fără a folosi tabelele de logaritmi, ne putem forma o idee despre valoarea acestui număr cu ajutorul aproximației :

$$2^{10} \approx 1000.$$

Într-adevăr,

$$2^{22} = 2^{20} \cdot 2^2 \approx 4 \cdot 10^6,$$

$$2^{2^{22}} \approx 2^{4\,000\,000} = (2^{10})^{400\,000} > 10^{1\,200\,000}.$$

Deci acest număr este format din peste 1 milion de cifre.

CAPITOLUL II

LIMBAJUL ALGEBRIC

Arta de a forma ecuații

Limbajul algebric este compus din ecuații.

„Ca să putem rezolva o problemă privind numerele sau relațiile între mărimile abstracte, este suficient să traducem problema dată din limba maternă (vorbirea curentă) în limbaj algebric", scria marele Newton în manualul său intitulat *Aritmetica universală*. El a arătat prin exemple cum se face o asemenea transpunere. Iată unul dintre ele :

În vorbirea curentă	În limbaj algebric
Un negustor posedă o sumă de bani.	x
În primul an el a cheltuit 100 lire sterline.	$x - 100$
La suma rămasă a adăugat a treia parte din aceasta.	$(x - 100) + \frac{x-100}{3} = \frac{4x - 400}{3}$
În anul următor a cheltuit din nou 100 lire sterline	$\frac{4x - 400}{3} - 100 = \frac{4x - 700}{3}$
Apoi și-a mărit suma rămasă cu a treia parte din valoarea ei	$\frac{4x - 700}{3} + \frac{4x-700}{9} = \frac{16x-2800}{9}$
În al treilea an a cheltuit din nou 100 de lire sterline.	$\frac{16x - 2800}{9} - 100 = \frac{16x - 3700}{9}$
După cea a mai adăugat la suma rămasă a treia parte din valoarea ei.	$\frac{16x - 3700}{9} + \frac{16x - 3700}{27} = \frac{64x - 14\,800}{27}$
Capitalul lui s-a dublat față de cel inițial.	$\frac{64x - 14\,800}{27} = 2x$

Pentru aflarea capitalului inițial al negustorului, rămîne să rezolvăm această din urmă ecuație.

În general, rezolvarea ecuațiilor nu este un lucru greu; mai dificilă este alcătuirea lor după datele problemei. După cum vedeți, arta de a construi ecuații se reduce într-adevăr la iscusința de a transpune o problemă din vorbirea curentă în limbaj algebric. Transpunerea textului în ecuații poate fi mai ușoară sau mai grea, după cum vă veți convinge din cele cîteva exemple ce vor urma relative la compunerea ecuațiilor de gradul I.

Viața lui Diofant

Problemă

Din istorie se cunosc puține date privitoare la biografia lui Diofant, celebru matematician al antichității. Tot ce se știe despre el s-a aflat din epitaful său, scris sub forma unei probleme matematice. Redăm mai jos acest epitaf:

În vorbirea curentă	În limbaj algebric
Călătorule! Aci se odihnesc osemintele lui Diofant. Şi numerele pot, o minune, să spună cît i-a fost pe pămînt drumul vieții	x
Partea a șasea din drumul acesta s-a scurs în fericita sa copilărie	$\frac{x}{6}$
A mai trecut a 12-a parte din viață, după ce îi dăduseră tuleiele pe față	$\frac{x}{12}$
A șaptea parte, Diofant și-o petrecuse în căsătorie, fără copii	$\frac{x}{7}$
Au trecut încă 5 ani; el a fost fericit de nașterea primului său fiu,	5
căruia destinul i-a hărăzit pe pămînt doar jumătate din viața senină în comparație cu a părintelui său	$\frac{x}{2}$
Și-n mîhnire adîncă și-a încheiat bătrînul drumul vieții, supraviețuind cu patru ani fiului său	$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$

Spune, ce vîrstă avea
Cînd a întîmpinat Diofant moartea?

Rezolvare

Rezolvînd ecuația și găsind $x = 84$, aflăm următoarele date din biografia lui Diofant: s-a căsătorit la 21 de ani, la 38 de ani a devenit tată, la 80 de ani și-a pierdut fiul și a murit în vîrstă de 84 de ani.

Calul și catîrul

Problemă

Iată încă o problemă simplă, din timpuri străvechi, care poate fi ușor transpusă în limbaj algebric.

,,Un cal și un catîr pășeau alături avînd fiecare în spate cîte o povară. Calul se văita de greutatea poverii sale. «De ce te vaieți? l-a întrebat catîrul. Dacă aș lua de la tine un sac, povara mea ar deveni de două ori mai grea decît a ta. Iar dacă tu ai lua un sac de pe spinarea mea, povara ta ar deveni egală cu a mea».

Spuneți, matematicieni înțelepți, cîți saci ducea calul și cîți catîrul?''.

Rezolvare

Dacă aș lua de la tine un sac,	$x - 1$
povara mea	$y + 1$
ar deveni de două ori mai grea decît a ta	$y + 1 = 2(x - 1)$
Iar dacă tu ai lua un sac de pe spinarea mea,	$y - 1$
povara ta	$x + 1$
ar deveni egală cu a mea	$y - 1 = x + 1$

Am redus problema la un sistem de ecuații cu două necunoscute :

$$\begin{cases} y + 1 = 2(x - 1) \\ y - 1 = x + 1 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} 2x - y = 3 \\ y - x = 2. \end{cases}$$

Rezolvînd acest sistem, aflăm : $x = 5$, $y = 7$. Calul ducea 5 saci, iar catîrul — 7.

Patru frați

Problemă

Patru frați aveau împreună 45 ruble. Dacă suma pe care o avea primul frate s-ar mări cu 2 ruble, cea a celui de-al doilea frate s-ar micșora cu 2 ruble, cea a celui de-al treilea s-ar dubla, iar suma celui de-al patrulea s-ar micșora de două ori, atunci fiecare frate ar avea aceeași sumă de bani. Cîte ruble avea fiecare în parte la început ?

Rezolvare

Cei patru frați au împreună 45 de ruble	$x + y + z + t = 45$
Dacă suma primului frate s-ar mări cu 2 ruble,	$x + 2$
suma celui de-al doilea frate s-ar micșora cu 2 ruble,	$y - 2$
suma celui de-al treilea s-ar dubla	$2z$
și suma celui de-al patrulea s-ar micșora de două ori	$\frac{t}{2}$
Fiecare frate ar avea aceeași sumă de bani	$x + 2 = y - 2 = 2z = \frac{t}{2}$

Să scriem aceste egalități din urmă sub forma de trei ecuații :

$$x + 2 = y - 2,$$

$$x + 2 = 2z,$$

$$x + 2 = \frac{t}{2}$$

de unde :

$$y = x + 4,$$

$$z = \frac{x + 2}{2},$$

$$t = 2x + 4.$$

Substituind lui x, y, z aceste expresii în prima ecuație. obținem :

$$x + x + 4 + \frac{x + 2}{2} + 2x + 4 = 45,$$

de unde $x = 8$. Mai departe obținem : $y = 12$, $z = 5$, $t = 20$. Deci primul frate avea 8 ruble, al doilea, 12, al treilea, 5 și al patrulea, 20 de ruble.

Păsările de pe malurile unui rîu

Problemă

La un matematician arab din secolul al XI-lea găsim următoarea problemă :

,,Pe malurile unui rîu cresc, față în față, doi palmieri. Înălțimea unui palmier este de 30 de coți * şi a celuilalt — de 20 de coți, distanța dintre palmieri fiind de 50 de coți. Pe vîrful fiecărui palmier stă cîte o pasăre. La un moment dat, ambele păsări au observat un peşte care a apărut la suprafața apei între cei doi palmieri; ele s-au repezit deodată asupra peştelui și l-au ajuns în același timp (fig. 4).

* 1 cot $\approx$ 33 cm — *N.T.*

Fig. 4

La ce distanță de palmierul mai înalt a apărut peștele ?

Rezolvare

Din fig. 5, folosind teorema lui Pitagora, obținem :

$$\overline{AB}^2 = 30^2 + x^2, \qquad \overline{AC}^2 = 20^2 + (50 - x)^2.$$

Dar $\overline{AB} = \overline{AC}$, deoarece ambele păsări au parcurs aceste distanțe în același timp. De aceea,

$$30^2 + x^2 = 20^2 + (50 - x)^2.$$

Desfăcînd parantezele și făcînd reducerile, obținem ecuația de gradul I

$$100x = 2000,$$

de unde :

$$x = 20.$$

Peștele a apărut la o distanță de 20 de coți de palmierul mai înalt.

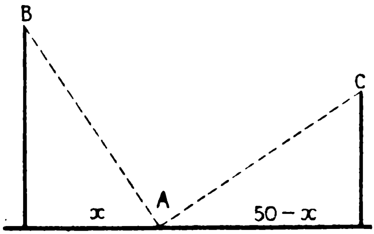


Fig. 5

O plimbare pe jos

Problemă

— Poftiţi mîine pe la mine — zise bătrînul doctor unui prieten al său.

— Vă mulţumesc. Voi pleca de acasă la ora trei. Dacă şi dv. intenţionaţi să faceţi o plimbare, ieşiţi din casă la aceeaşi oră şi ne vom întîlni la jumătatea drumului.

— Dv. uitaţi că eu sînt om bătrîn şi nu pot face mai mult de 3 *km* pe oră, în timp ce dv. puteţi parcurge uşor 4 *km*. Cred că ar fi cazul să mă avantajaţi puţin.

— Aveţi dreptate. Dat fiind că eu fac cu 1 *km* pe oră mai mult decît dv., pentru a nivela condiţiile, vă dau acest kilometru, adică voi ieşi din casă cu un sfert de oră mai devreme. Vă este suficient?

— E foarte amabil din partea dv. — se grăbi să-i răspundă bătrînul.

A doua zi, conform înţelegerii din ajun tînărul a plecat de acasă la ora trei fără un sfert şi s-a îndreptat spre locuinţa doctorului, mergînd cu 4 *km* pe oră. Doctorul a plecat de acasă la ora 3 fix şi a mers cu 3 *km* pe oră. Cînd bătrînul şi tînărul s-au întîlnit, ei s-au îndreptat împreună spre locuinţa doctorului.

Întorcîndu-se acasă, tînărul şi-a dat seama că, acordînd doctorului sfertul de oră respectiv, el a parcurs în total o distanţă nu de două ori, ci de patru ori mai mare decît doctorul. La ce distanţă de casa doctorului se afla locuinţa tînărului?

Rezolvare

Să notăm distanţa între cele două case cu x (*km*).

Tînărul a parcurs în total o distanţă de $2x$, iar doctorul — de patru ori mai puţin, adică $\frac{x}{2}$. Pînă la întîlnire, doctorul a făcut jumătate din drumul parcurs de el, adică $\frac{x}{4}$, iar tînărul — restul de drum, adică $\frac{3x}{4}$. Doctorul a parcurs partea sa de drum în $\frac{x}{12}$ ore, iar tînărul — în $\frac{3x}{16}$ ore; mai ştim că tînărul pornise la drum cu un sfert de oră înaintea doctorului.

Obținem ecuația :

$$\frac{3x}{16} - \frac{x}{12} = \frac{1}{4},$$

de unde : $x = 2{,}4$ *km*.

Locuința tînărului se afla la o distanță de 2,4 *km* de casa doctorului.

Echipa de cosași

În amintirile sale despre L. N. Tolstoi, cunoscutul fizician A. V. Țingher vorbește despre următoarea problemă, care plăcea foarte mult marelui scriitor :

,,O echipă de cosași trebuia să cosească două izlazuri din care unul de două ori mai mare decît celălalt. O jumătate de zi, echipa a cosit izlazul cel mare. După aceea ea s-a împărțit în două părți egale : prima jumătate a rămas să cosească mai departe izlazul mare, pe care l-a terminat pînă seara ; a doua jumătate a trecut pe izlazul

Fig. 6

mic, unde a cosit pînă seara fără să-l termine, rămînînd o suprafață pe care ulterior un cosaș a cosit-o într-o zi.
Cîți cosași au fost în echipă ?''

Rezolvare

În cazul dat, în afară de necunoscuta principală — numărul cosaşilor — pe care o vom nota cu x, mai introducem o necunoscută auxiliară — suprafața pe care o coseşte un cosaş într-o zi — pe care o notăm cu y. Cu toate că nu se cere determinarea acestei necunoscute, cu ajutorul ei vom putea afla mai uşor necunoscuta principală x. Să exprimăm suprafața izlazului mare cu ajutorul lui x şi y. Acest izlaz l-au cosit o jumătate de zi x cosaşi ; ei au cosit o suprafață de $x \cdot \frac{1}{2} \cdot y = \frac{xy}{2}$.

Suprafața a fost cosită în a doua jumătate de zi de $\frac{x}{2}$ cosaşi, care au cosit

$$\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot y = \frac{xy}{4}.$$

Deoarece pînă seara izlazul mare a fost terminat, suprafața lui este egală cu :

$$\frac{xy}{2} + \frac{xy}{4} = \frac{3xy}{4}.$$

Să trecem acum la izlazul mic, a cărui suprafață o vom exprima, de asemenea, cu ajutorul lui x şi y. O jumătate de zi au lucrat la el $\frac{x}{2}$ cosaşi, care au cosit o suprafață de $\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot y = \frac{xy}{4}$. Să adăugăm la aceasta lotul rămas, egal cu y (suprafața cosită de un cosaş într-o zi), şi vom obține suprafața izlazului mic :

$$\frac{xy}{4} + y = \frac{xy + 4y}{4}.$$

Ne rămîne să transpunem în limbajul algebric fraza „primul izlaz este de două ori mai mare decît cel de-al doilea” şi ecuaţia este construită :

$$\frac{3xy}{4} : \frac{xy + 4y}{4} = 2, \text{ sau } \frac{3xy}{xy + 4y} = 2.$$

Simplificînd fracţia cu y, această necunoscută auxiliară se elimină şi ecuaţia capătă forma :

$$\frac{3x}{x + 4} = 2, \text{ sau } 3x = 2x + 8,$$

de unde $x = 8$.

În echipă au lucrat, deci, 8 cosaşi.

După publicarea primei ediţii a *Algebrei distractive*, profesorul A. V. Ţingher mi-a făcut o interesantă comunicare în legătură cu această problemă. După părerea sa, efectul principal al problemei constă în aceea că „ea nu este de loc algebrică, ci aritmetică, şi încă foarte simplă, dificilă numai prin forma sa mai puţin obişnuită”.

„Istoricul acestei probleme este următorul — continuă mai departe profesorul A. V. Ţingher. La Facultatea de medicină a Universităţii din Moscova, în perioada cînd au studiat tatăl şi unchiul meu, I. I. Raevski (prieten intim al lui L. Tolstoi), între alte discipline se preda şi pedagogia. Pe lîngă universitate exista o şcoală de aplicaţie, unde, sub îndrumarea unor profesori cu experienţă, studenţii ţineau lecţii deschise. Printre colegii lui Ţingher şi Raevski, a fost şi un oarecare Petrov — un tînăr foarte capabil şi original. Petrov (care a murit foarte tînăr — se pare de tuberculoză) afirma că la lecţiile de aritmetică pedagogii îi limitează pe elevi, dîndu-le să rezolve numai probleme tip şi numai după aceleaşi metode. Pentru a demonstra justeţea afirmaţiei sale, Petrov inventa probleme care, fiind formulate într-un mod original, diferit de cel al problemelor tip, îi încurcă pe „pedagogii iscusiţi şi cu experienţă”, dar care adesea erau rezolvate destul de uşor de elevii mai capabili, care vedeau şi alte căi de rezolvare a problemelor în afara metodelor de predare greşite. Din categoria acestor probleme face parte şi aceea despre echipa de cosaşi. Se înţelege că învăţătorii cu experienţă o rezolvau uşor cu

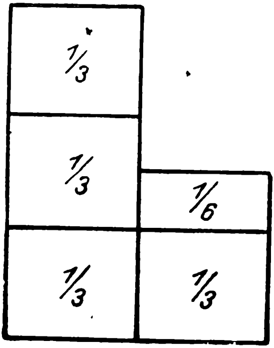


Fig. 7

ajutorul ecuației, dar rezolvarea simplă, aritmetică, le scăpa. Cu toate acestea, problema este atît de simplă, încît nu este nevoie de algebră pentru rezolvarea ei.

Dacă pe izlazul mare a lucrat o jumătate de zi întreaga echipă și o jumătate de zi numai o jumătate din echipă, este clar că, într-o jumătate de zi, o jumătate din echipă cosește $\frac{1}{3}$ din izlaz. Prin urmare, pe izlazul mic a rămas necosită o suprafață de $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

Dacă un cosaș cosește într-o zi $\frac{1}{6}$ din izlaz, iar în total a fost cosit $\frac{6}{6} + \frac{2}{6} = \frac{8}{6}$, reiese că, în total, au fost 8 cosași.

Tolstoi, căruia îi plăceau problemele ingenioase dar nu prea complicate, cunoștea această problemă de la tatăl meu încă din tinerețe. Cînd am discutat cu Tolstoi, deja bătrîn, despre problema dată, scriitorul s-a amuzat mult aflînd că problema devine mult mai clară și mai transparentă dacă se folosește schema simplă din fig. 7.

În cele ce vor urma, vom mai întîlni cîteva probleme care pot fi rezolvate mult mai ușor aritmetic decît algebric.

Vacile de pe luncă

Problemă

„În studiul științelor, problemele sînt mai utile decît regulile” — scria Newton în cartea sa *Aritmetica universală*, și-și însoțea demonstrațiile teoretice cu o serie de exemple practice. Printre aceste exerciții se numără și problema, prima din seria de probleme originale, referitoare la vacile care pasc pe o luncă asemănătoare celei de mai jos :

„Pe întreaga întindere a luncii, iarba crește uniform și la fel de repede. Știind că 70 de vaci ar putea paște

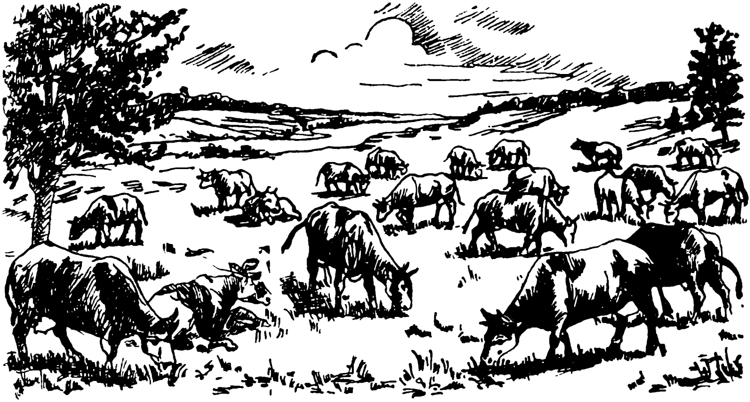


Fig. 8

această iarbă în 24 de zile, iar 30 de vaci — în 60 de zile, cîte vaci ar fi păscut iarba de pe luncă în 96 de zile''.

Această problemă a servit drept subiect pentru o schiță umoristică care amintește de *Meditatorul* lui Cehov. Doi oameni maturi, rude ale unui elev care trebuia să rezolve această problemă, încearcă ei să o facă fără rezultat și stau nedumeriți :

— Este ceva ciudat, spune unul dintre ei, dacă în 24 de zile 70 de vaci pasc toată iarba de pe luncă, atunci cîte vaci o vor paște în 96 de zile? Desigur 1/4 din 70, adică 17 1/2 vaci...Prima absurditate ! Iat-o și pe a doua : 30 de vaci pasc iarba în 60 de zile ; cîte vaci ar paște-o în 96 de zile? Iese și mai prost : 18 și 3/4 vaci. Afară de aceasta : dacă 70 de vaci pasc iarba în 24 de zile, atunci 30 de vaci o pasc în 56 de zile și nicidecum în 60, așa cum afirmă problema.

— Dar ați ținut seama că iarba crește tot timpul? întreabă celălalt.

Observația este justă : iarba crește continuu și dacă nu vom ține seamă de acest fapt, nu numai că nu vom putea rezolva problema, dar și enunțul ne va părea contradictoriu.

Deci, în ce fel se rezolvă problema?

Şi de data aceasta vom introduce o necunoscută auxiliară, y, prin care vom nota creşterea cantităţii de iarbă în 24 de ore. Deci, dacă în 24 de ore creşte o cantitate de iarbă egală cu y, în 24 de zile această creştere va fi egală cu 24 y; notînd cu 1 cantitatea totală de iarbă existentă pe luncă în momentul iniţial, rezultă că în 24 de zile vacile vor paşte

$$1 + 24y.$$

În 24 de ore, întreaga cireadă (compusă din 70 de vaci) va paşte

$$\frac{1 + 24y}{24},$$

iar o singură vacă va paşte :

$$\frac{1 + 24y}{24 \cdot 70}.$$

Raţionînd ca mai sus, putem demonstra că, dacă 30 de vaci ar fi păscut iarba din aceeaşi luncă în 60 de zile, o vacă paşte într-o zi :

$$\frac{1 + 60y}{30 \cdot 60}.$$

Dar cantitatea de iarbă pe care o paşte o vacă într-o zi este aceeaşi în cazul ambelor cirezi. Deci vom avea :

$$\frac{1 + 24y}{24 \cdot 70} = \frac{1 + 60y}{30 \cdot 60},$$

de unde :

$$y = \frac{1}{480}.$$

Aflîndu-l pe y (creşterea cantităţii de iarbă în 24 de ore), este uşor să determinăm a cîta parte din cantitatea iniţială de iarbă paşte o vacă într-o zi :

$$\frac{1 + 24y}{24 \cdot 70} = \frac{1 + 24 \cdot \frac{1}{480}}{24 \cdot 70} = \frac{1}{1\,600}.$$

În sfîrşit, să alcătuim ecuaţia necesară rezolvării complete a problemei : dacă notăm cu x numărul vacilor care ar fi putut paşte întreaga iarbă de pe luncă în 96 de zile, rezultă că :

$$\frac{1 + 96 \cdot \dfrac{1}{480}}{96\,x} = \frac{1}{1\,600},$$

de unde $x = 20$.

20 de vaci ar fi păscut iarba în 96 de zile.

Problema lui Newton

Să analizăm acum problema lui Newton, după modelul căreia a fost compusă problema precedentă.

De altfel, această problemă n-a fost inventată de Newton, ea este produsul creaţiei matematice populare.

„Trei lunci, acoperite cu iarbă de aceeaşi desime şi cu aceeaşi viteză de creştere, au următoarele arii : $3\frac{1}{3}$ *ha*, 10 *ha* şi 24 *ha*. Prima luncă a hrănit 12 boi timp de 4 săptămîni ; a doua, 21 de boi timp de 9 săptămîni. Cîţi boi poate hrăni a treia luncă timp de 18 săptămîni ?

Rezolvare

Să introducem necunoscuta auxiliară y, care reprezintă cantitatea cu care creşte într-o săptămînă cantitatea iniţială de iarbă de pe 1 *ha*. Pe prima luncă, în interval de o săptămînă, sporul cantităţii de iarbă care a existat iniţial este de $3\frac{1}{3}\,y$, iar în interval de patru săptămîni, $3\frac{1}{3}\,y \cdot 4 = \frac{40}{3}\,y$. Acelaşi lucru s-ar întîmpla dacă am presupune că aria iniţială a luncii se măreşte şi devine egală cu :

$$\left(3\frac{1}{3} + \frac{40}{3}\,y\right)$$

hectare. Cu alte cuvinte, boii au mîncat atîta iarbă cîtă există într-o luncă cu o arie de $\left(3\frac{1}{3}+\frac{40}{3}y\right)$ *ha*. Într-o săptămînă, 12 boi au mîncat $\frac{1}{4}$ din această cantitate, iar un bou, $\frac{1}{48}$ parte, deci cantitatea de iarbă existentă pe o suprafață de

$$\left(3\frac{1}{3}+\frac{40y}{3}\right):48=\frac{10+40y}{144}$$

hectare.

Prin aceeaşi metodă calculăm suprafața luncii care hrăneşte un bou timp de o săptămînă (din datele privind lunca a doua).

Într-o săptămînă	sporul la 1 $ha = y$,
În 9 săptămîni	sporul la 1 $ha = 9y$,
În 9 săptămîni	sporul la 10 $ha = 90y$.

Suprafața luncii, care conține rezerva de iarbă necesară pentru a hrăni 21 de boi timp de 9 săptămîni, este astfel egală cu

$$10+90y.$$

Deci, suprafața necesară pentru a hrăni un bou timp de o săptămînă este de :

$$\frac{10+90y}{9\cdot 21}=\frac{10+90y}{189}$$

hectare. Cum cele două norme de hrănire trebuie să fie egale între ele, rezultă :

$$\frac{10+40y}{144}=\frac{10+90y}{189}.$$

Rezolvînd această ecuație, obținem : $y=\frac{1}{12}$.

Să determinăm acum suprafața luncii, a cărei cantitate de iarbă este suficientă pentru hrănirea unui bou timp de o săptămînă :

$$\frac{10+40y}{144}=\frac{10+40\cdot\frac{1}{12}}{144}=\frac{5}{54}$$

hectare. În sfîrşit, să trecem la rezolvarea problemei. Notînd numărul de boi căutat prin x, avem:

$$\frac{24 + 24 \cdot 18 \cdot \frac{1}{12}}{18x} = \frac{5}{54},$$

de unde $x = 36$. A treia luncă poate hrăni timp de 18 săptămîni 36 de boi.

Permutarea acelor unui ceasornic

Problemă

A. Moskowski, biograful şi prietenul celebrului fizician A. Einstein, dorind să-şi distreze prietenul pe cînd acesta era bolnav, i-a propus următoarea problemă (fig. 9):

„Să luăm — a spus Moskowski — poziţia acelor de ceasornic la ora 12. Dacă în această poziţie orarul şi minutarul şi-ar fi schimbat reciproc poziţiile, ar indica totuşi ora exactă. În alte momente, de pildă la ora 6, schimbarea reciprocă a poziţiei arătătoarelor ar duce la o situaţie absurdă, inadmisibilă la un ceas care merge normal: minutarul nu poate să arate 6, atunci cînd orarul indică 12. Apare întrebarea: cînd şi cît de des acele unui ceasornic ocupă o astfel de poziţie, încît înlocuind un ac prin celălalt obţinem o soluţie nouă, posibilă pentru un ceasornic care merge normal?

— Da, răspunse Einstein, aceasta este o problemă foarte interesantă pentru un om care, din cauza bolii, este nevoit să stea în pat: destul de interesantă şi nu prea uşoară. Mă tem însă că distracţia nu va dura prea mult; am şi găsit calea de rezolvare.

Şi, ridicîndu-se din pat, schiţă în cîteva trăsături o schemă care reprezenta condiţiile problemei. Pentru găsirea soluţiei nu i-a trebuit mai mult timp decît mi-a trebuit mie pentru formularea ei..."

Cum se rezolvă această problemă?

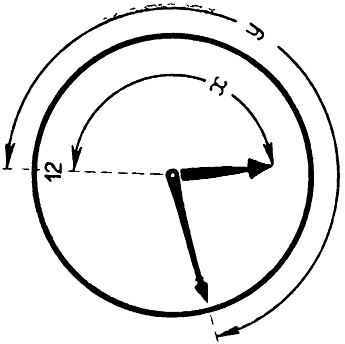


Fig. 9

Vom măsura distanțele acelor pe cercul cadranului de la poziția cifrei 12, în șaizeci de zecimi din 60 de circumferințe.

Să presupunem că una din pozițiile cerute ale acelor a fost înregistrată la un moment, în care — acul orar s-a deplasat de la cifra 12 cu x diviziuni, iar minutarul — cu y diviziuni. Deoarece acul orar parcurge cele 60 de diviziuni în 12 ore, deci 5 diviziuni pe oră, urmează că x diviziuni vor fi parcurse în $\frac{x}{5}$ ore. Minutarul a parcurs y diviziuni în decurs de y minute, adică în $\frac{y}{60}$ ore. Cu alte cuvinte, minutarul a fost în dreptul cifrei 12 cu $\frac{y}{60}$ ore în urmă, sau cu :

$$\frac{x}{5} - \frac{y}{60}$$

ore după ce ambele ace erau situate în dreptul cifrei 12. Acesta este un număr întreg (cuprins între 0 și 11), deoarece el indică cîte ore întregi au trecut după 12.

După schimbarea reciprocă a pozițiilor acelor, vom găsi, în mod analog, că de la ora 12 pînă la ora indicată de ace au trecut

$$\frac{y}{5} - \frac{x}{60}$$

ore întregi. Acesta este, de asemenea, un număr întreg (cuprins între 0 și 11).

Avem sistemul de ecuații :

$$\begin{cases} \dfrac{x}{5} - \dfrac{y}{60} = m, \\ \dfrac{y}{5} - \dfrac{x}{60} = n, \end{cases}$$

unde m şi n sînt numere întregi, care iau valori între 0 şi 11. Rezolvînd acest sistem obţinem:

$$x = \frac{60(12m + n)}{143},$$

$$y = \frac{60(12n + m)}{143}.$$

Atribuind lui m şi n valori de la 0 la 11, vom determina toate poziţiile cerute ale acelor. Deoarece oricare din cele 12 valori ale lui m poate fi asociată cu oricare din cele 12 valori ale lui n, s-ar părea că numărul total al soluţiilor este egal cu $12 \cdot 12 = 144$. În realitate însă, acest număr este egal cu 143, deoarece la $m = 0$, $n = 0$ şi la $m = 11$, $n = 11$, poziţia acelor este aceeaşi.

La $m = 11$, $n = 11$, avem:

$$x = 60, \; y = 60,$$

adică ceasornicul indică ora 12, la fel ca şi în cazul în care $m = 0$, $n = 0$.

Nu vom analiza aci toate poziţiile posibile ale acelor; ne vom limita doar la două dintre ele.

Primul exemplu:

$$m = 1, \quad n = 1;$$

$$x = \frac{60 \cdot 13}{143} = 5\frac{5}{11} \quad y = 5\frac{5}{11},$$

adică ceasornicul arată ora 1 şi $5\frac{5}{11}$ minute; în acest moment acele se suprapun; se înţelege că ele îşi pot schimba poziţiile reciproc (ca şi în toate celelalte cazuri de suprapunere a acelor).

Al doilea exemplu:

$$m = 8, \quad n = 5;$$

$$x = \frac{60(5 + 12 \cdot 8)}{143} \approx 42{,}38, \qquad y = \frac{90(8 + 12 \cdot 5)}{143} \approx 28{,}53.$$

Momentele corespunzătoare: ora 8 şi 28,53 de minute şi ora 5 şi 42,38 de minute.

Numărul de soluţii îl cunoaştem: 143. Pentru a afla toate punctele de pe cadran care indică poziţiile cerute ale acelor, trebuie să împărțim circumferința cadranului în 143 părți egale ; vom obține 143 puncte (cele căutate). În punctele intermediare, pozițiile cerute ale acelor sînt imposibile.

Coincidența acelor unui ceasornic

Problemă

De cîte ori orarul și minutarul unui ceasornic, care funcționează normal, se suprapun?

Rezolvare

Putem să folosim ecuațiile deduse la rezolvarea problemei precedente : într-adevăr, atunci cînd orarul și minutarul s-au suprapus, pozițiile lor pot fi schimbate reciproc fără a modifica ora exactă. În acest caz, ambele ace au parcurs același număr de diviziuni de la cifra 12, adică $x = y$. Astfel, din raționamentul problemei precedente deducem ecuația :

$$\frac{x}{5} - \frac{x}{60} = m,$$

unde m este un număr întreg cuprins între 0 și 11. Din această ecuație obținem :

$$x = \frac{60\,m}{11}.$$

Dintre cele 12 valori posibile ale lui m, vom obține nu 12 ci numai 11 poziții diferite ale acelor, deoarece pentru $m = 11$, $x = 60$, adică ambele ace au parcurs 60 de diviziuni și se află în dreptul cifrei 12 ; același lucru se întîmplă cînd $m = 0$.

Cei șapte jucători

Problemă

Șapte jucători s-au învoit ca cel care va pierde partida să plătească celorlalți o sumă de bani echivalentă cu cea pe care o posedă persoana respectivă — cu alte cuvinte să dubleze banii fiecărui partener.

Au jucat şapte partide. Fiecare a pierdut cîte una.

După terminarea jocului, au socotit cîţi bani au fiecare. S-a aflat că toţi aveau aceeaşi sumă — 12 ruble şi 80 de copeici.

Cîţi bani poseda fiecare jucător la începutul jocului?

Rezolvare

Deşi pare complicată, problema se rezolvă destul de uşor, avînd în vedere că în timpul jocului suma totală de bani rămînea invariabilă: banii nu făceau decît să treacă din buzunarul unuia în buzunarul altuia. De aici rezultă că la începutul jocului suma totală a fost aceeaşi ca şi la terminarea lui, adică egală cu $7 \cdot 12{,}8$ ruble.

Să urmărim cum a variat în procesul jocului suma de bani a jucătorului care a pierdut primul.

La începutul jocului, el poseda x ruble. Pierzînd prima partidă, el a plătit celorlalţi 6 parteneri suma pe care o posedau aceştia, deci $7 \cdot 12{,}8 - x$. După *prima* partidă i-a rămas:

$$x - (7 \cdot 12{,}8 - x) = 2x - 7 \cdot 12{,}8.$$

După a *doua* partidă banii lui s-au dublat, deci

$$2(2x - 7 \cdot 12{,}8).$$

După a *treia* partidă, s-au dublat din nou

$$2^2(2x - 7 \cdot 12{,}8).$$

După a *patra* partidă, s-au dublat din nou

$$2^3(2x - 7 \cdot 12{,}8).$$

După partida a *şaptea*, adică la terminarea jocului, el a rămas cu 12,8 ruble; prin urmare:

$$2^6(2x - 7 \cdot 12{,}8) = 12{,}8.$$

Să rezolvăm această ecuaţie:

$$64(2x - 7 \cdot 12{,}8) = 12{,}8,$$
$$2x - 7 \cdot 12{,}8 = 0{,}2,$$
$$2x - 89{,}6 = 0{,}2; \quad x = 44{,}9.$$

Deci, la începutul jocului, primul jucător poseda 44 de ruble și 90 de copeici.

În același fel procedăm pentru a afla banii jucătorului, care a pierdut al doilea. La începutul jocului el poseda y ruble.

După p r i m a partidă banii lui s-au dublat, deci au devenit egali cu $2y$.

Partida a d o u a el a pierdut-o și a plătit celorlalți suma de $7 \cdot 12{,}8 - 2y$ ruble; deci i-au rămas $2y - (7 \cdot 12{,}8 - 2y) = 4y - 7 \cdot 12{,}8$.

După a t r e i a partidă avea:

$$2(4y - 7 \cdot 12{,}8).$$

După a p a t r a:

$$2^2(4y - 7 \cdot 12{,}8).$$

După a ș a p t e a:

$$2^5(4y - 7 \cdot 12{,}8).$$

Obținem astfel ecuația:

$$2^5(4y - 7 \cdot 12{,}8) = 12{,}8,$$

de unde:

$$y = 22 \text{ ruble și } 50 \text{ copeici}.$$

Rămîne ca cititorul să determine sumele de bani pe care le aveau ceilalți jucători. Proba problemei o constituie faptul că suma totală, la începutul și la finele jocului, trebuie să rămînă aceeași.

Absurditate aparentă

Problemă

Iată o problemă care, la prima vedere, pare cu totul absurdă:

Cu ce este egal 84, dacă $8 \cdot 8 = 54$?

Această întrebare curioasă nu este totuși lipsită de sens, și problema poate fi rezolvată cu ajutorul ecuațiilor.

Să căutăm s-o descifrăm.

V-ați dat seama, desigur, că numerele ce apar în problemă nu sînt scrise după sistemul zecimal — altfel întrebarea „cu ce este egal 84" ar fi absurdă. Să presupunem că baza sistemului de numerație necunoscut este x. În acest caz, numărul 84 înseamnă 8 unități de ordinul al doilea și 4 unități de ordinul întîi adică :

$$„84" = 8x + 4.$$

Numărul „54" înseamnă $5x + 4$.
Avem ecuația

$$8 \cdot 8 = 5x + 4,$$

ceea ce în sistemul zecimal înseamnă :

$$64 = 5x + 4,$$

de unde $x = 12$. Numerele sînt scrise în sistemul cu baza 12 și „84" $= 8 \cdot 12 + 4 = 100$. Înseamnă că dacă $8 \cdot 8 =$ $=$ „54", atunci : „84" $= 100$.

În mod analog se rezolvă și o altă problemă de acest gen :

Cu ce este egal 100, cînd $5 \cdot 6 = 33$?

Răspuns : 81 (în sistemul de numerație în baza 9).

Ecuația gîndește pentru noi

Dacă vă îndoiți de faptul că adeseori ecuația este mai prevăzătoare decît dv. înșivă, rezolvați următoarea problemă :

„Tatăl are 32 ani, fiul, 5 ani. Peste cîți ani tatăl va fi de 10 ori mai în vîrstă decît fiul?"

Să notăm mărimea căutată cu x. După x ani, tatăl va avea $32 + x$ ani, iar fiul, $5 + x$. Și, deoarece la data căutată, tatăl trebuie să fie de 10 ori mai în vîrstă decît fiul, avem ecuația :

$$32 + x = 10(5 + x).$$

Rezolvînd-o deducem că $x = -2$.

„Peste minus 2 ani" înseamnă „cu doi ani în urmă". Cînd am format ecuația, nu ne-am gîndit la faptul că în viitor vîrsta tatălui nu va întrece niciodată vîrsta fiului de 10 ori; această situație a fost posibilă numai în trecut. Ecuația s-a dovedit a fi mai chibzuită decît noi și a pus în evidență greșeala comisă.

Curiozități și surprize

La rezolvarea ecuațiilor ne lovim adesea de răspunsuri care pot pune în încurcătură pe un matematician neexperimentat și dăm cîteva exemple:

I. Să se afle un număr format din două cifre, care să posede următoarele proprietăți: cifra zecilor să fie mai mică decît cifra unităților cu 4. Dacă din numărul format din aceleași cifre, dar scris în ordinea inversă, scădem numărul căutat, obținem 27.

Notînd cifra zecilor cu x, iar cifra unităților cu y, putem ușor forma sistemul de ecuații care să dea soluția acestei probleme:

$$\begin{cases} x = y - 4, \\ (10y + x) - (10x + y) = 27. \end{cases}$$

Înlocuind în ecuația a doua valoarea lui x scoasă din prima ecuație, obținem:

$$10y + y - 4 - [10(y - 4) + y] = 27,$$

și, după reducerea termenilor asemenea:

$$36 = 27.$$

N-am determinat valorile necunoscutelor, în schimb am aflat că $36 = 27$... Ce înseamnă aceasta?

Aceasta înseamnă că în realitate nu există un număr format din două cifre, care să satisfacă condițiile cerute, și că ecuațiile formate se contrazic. Într-adevăr, înmulțind cu 9 ambii termeni ai primei ecuații, obținem:

$$9y - 9x = 36,$$

iar din ecuația a doua (după desfacerea parantezelor și reducerea termenilor asemenea):

$$9y - 9x = 27.$$

Una şi aceeaşi valoare $9y - 9x$, în virtutea primei ecuaţii, este egală cu 36, iar conform ecuaţiei a doua, cu 27. Acest lucru este imposibil, deoarece $36 \neq 27$.

O situaţie analogă se prezintă şi pentru cel care încearcă să rezolve următorul sistem de ecuaţii:

$$\begin{cases} x^2y^2 = 8 \\ xy = 4. \end{cases}$$

Împărţind prima ecuaţie la a doua, obţinem:

$$xy = 2,$$

dar din compararea ecuaţiei obţinute cu ecuaţia a doua, observăm că:

$$\begin{cases} xy = 4 \\ xy = 2, \end{cases}$$

adică $4 = 2$. Deci nu există numere care să satisfacă sistemul dat. (Sistemele de ecuaţii, de tipul celor de mai sus, care nu pot fi rezolvate, se numesc *incompatibile.*)

II. Dacă modificăm puţin enunţul problemei precedente, vom avea o altă surpriză. Să presupunem că cifra zecilor este mai mică decît cifra unităţilor nu cu 4, ci cu 3, enunţul problemei rămînînd în rest acelaşi. Ce fel de număr este acesta?

Să formăm ecuaţia. Dacă notăm cifra zecilor cu x, numărul de unităţi va fi egal cu $x + 3$. Transpunînd problema în limbaj algebric, obţinem:

$$10(x + 3) + x - [10x + (x + 3)] = 27.$$

Efectuînd reducerile, ajungem la egalitatea

$$27 = 27.$$

Această egalitate este indiscutabil adevărată dar ea nu ne spune nimic despre valoarea lui x. Oare aceasta înseamnă că nu există numere care să satisfacă condiţiile problemei?

Dimpotrivă, aceasta înseamnă că ecuaţia formată de noi este o identitate, adică ea este verificată pentru orice valoare atribuită necunoscutei x. Într-adevăr, nu este greu să ne convingem de faptul că orice număr format din două cifre, la care cifra unităților este mai mare decît cifra zecilor cu 3, posedă proprietățile enunțate în problemă :

$$14 + 27 = 41, \qquad 47 + 27 = 74,$$

$$25 + 27 = 52, \qquad 58 + 27 = 85,$$

$$36 + 27 = 63, \qquad 69 + 27 = 96.$$

III. Să se afle un număr format din trei cifre care să posede următoarele proprietăți :

1. cifra zecilor să fie 7 ;

2. cifra sutelor să fie mai mică decît cifra unităților cu 4 ;

3. dacă așezăm cifrele acestui număr în ordine inversă, să obținem un număr cu 396 mai mare decît numărul căutat.

Să formăm ecuația, notînd cifra unităților cu x :

$$100x + 70 + x - 4 - [100(x - 4) + 70 + x] = 396.$$

După efectuarea reducerilor, această ecuație conduce la egalitatea

$$396 = 396.$$

Cititorii cunosc deja cum trebuie interpretat un astfel de rezultat. Aceasta înseamnă că orice număr format din trei cifre, la care prima cifră este mai mică decît cifra a treia cu 4*, se mărește cu 396 atunci cînd aranjăm cifrele în ordine inversă.

Pînă acum am analizat probleme cu un caracter mai mult sau mai puțin artificial, teoretic ; scopul lor a fost acela de a ajuta formarea deprinderii de a forma și rezolva ecuații. În cele ce vor urma, fiind înarmați, din punct de vedere teoretic, ne vom ocupa de unele probleme practice — din domeniul producției, al vieții de toate zilele, al artei militare, al sportului etc.

---

* În cazul de față, cifra zecilor nu joacă nici un rol.

La frizerie

Problemă

Îi este oare necesară frizerului algebra? După cum veți vedea, da. M-am convins de acest lucru atunci cînd, aflîndu-mă la frizerie, responsabilul mi se adresă cu o rugăminte neașteptată:

— Ne permiteți să vă punem o problemă pe care noi nu o putem rezolva în nici un fel?

— Și cîtă soluție am stricat pentru asta! îl completă un altul.

— În ce constă problema? am întrebat eu.

— Avem două feluri de apă oxigenată, de două concentrații, 30% și 3%. Trebuie s-o amestecăm astfel încît să obținem o soluție de 12%. Am încercat diferite combinații și nu am reușit să aflăm proporția corectă...

Mi s-a dat o hîrtie și proporția cerută a fost găsită. Rezolvarea s-a dovedit a fi foarte simplă. Cum anume?

Rezolvare

Problema poate fi rezolvată și aritmetic, dar limbajul algebric ne conduce la un rezultat mai ușor și mai simplu. Pentru obținerea soluției de 12%, se cere să luăm x grame de apă oxigenată de 3% și y grame de 30%. În felul acesta, prima cantitate va conține 0,03 x grame perhidrol, a doua, 0,3 y grame, iar în total:

$$0{,}03x + 0{,}3y.$$

La sfîrșitul acestor operații, trebuie să obținem $(x + y)$ grame de soluție, care să conțină 0,12 $(x + y)$ apă oxigenată pură.

Avem ecuația:

$$0{,}03x + 0{,}3y = 0{,}12\,(x + y).$$

Din această ecuație rezultă $x = 2y$, adică trebuie să luăm două părți soluție 3% și o parte soluție 30%.

Tramvaiul şi pietonul

Problemă

Mergînd de-a lungul unei linii de tramvai, am observat că la fiecare 12 minute mă ajunge din urmă un tramvai, iar la fiecare 4 minute întîlnesc cu unul. Atît eu, cît şi tramvaiele ne deplasăm uniform.

La ce intervale de timp pornesc tramvaiele de la capetele de linie ?

Rezolvare

Dacă tramvaiele pleacă de la capetele de linie la fiecare x minute, aceasta înseamnă că în locul unde m-am întîlnit cu unul din ele, soseşte după x minute tramvaiul următor. Atunci cînd un tramvai mă ajunge din urmă, înseamnă că în restul timpului de $12-x$ minute, el trebuie să parcurgă drumul pe care eu îl fac în 12 minute. Deci, drumul pe care eu îl parcurg într-un minut, tramvaiul îl parcurge în $\frac{12-x}{12}$ minute.

În cazul în care tramvaiul vine în întîmpinarea mea, el mă va întîlni la 4 minute după tramvaiul care l-a precedat, iar în cele $(x-4)$ minute rămase, el trebuie să parcurgă acel drum, pe care eu am reuşit să-l parcurg în 4 minute. Prin urmare, drumul parcurs de mine într-un minut este parcurs de tramvai în $\frac{x-4}{4}$ minute.

Avem deci ecuaţia

$$\frac{12-x}{12} = \frac{x-4}{4}.$$

Rezultă $x = 6$. Deci, vagoanele pleacă de la capetele de linie din şase în şase minute.

Problema poate fi rezolvată şi în felul următor (pe cale aritmetică). Să notăm distanţa dintre două tramvaie succesive prin a. Atunci distanţa dintre mine şi tramvaiul pe care îl întîlnesc se va micşora cu $\frac{a}{4}$ într-un minut (deoarece tramvaiul şi cu mine parcurgem în 4 minute distanța dintre tramvaiul care a trecut și cel următor, care este egală cu a). În cazul în care un tramvai mă ajunge din urmă, distanța scade în fiecare minut cu $\frac{a}{12}$. Să presupunem acum că, timp de un minut, eu am mers înainte, după care m-am întors și am mai mers un minut (adică m-am întors la locul de unde am plecat). În acest caz, distanța dintre mine și tramvaiul pe care l-am întîlnit s-a redus în primul minut cu $\frac{a}{4}$, iar în al doilea minut (cînd tramvaiul mă ajungea din urmă), cu $\frac{a}{12}$. Deci, în decurs de 2 minute, distanța s-a redus cu $\frac{a}{4} + \frac{a}{12} = \frac{a}{3}$. Același lucru s-ar fi întîmplat și dacă eu aș fi stat tot timpul pe loc. Așadar, dacă nu m-aș fi mișcat din loc timp de un minut (și nu de două minute), tramvaiul s-ar fi apropiat de mine cu $\frac{a}{3} : 2 = \frac{a}{6}$, și el ar fi parcurs întreaga distanță a în 6 minute. Aceasta înseamnă că, pe lîngă un observator care stă pe loc, tramvaiele trec la intervale de 6 minute.

Vaporul și plutele

Problemă

Un vapor plecat din orașul A spre orașul B, situat mai aproape de gura rîului, a parcurs această distanță, fără oprire, în 5 ore. La întoarcere, mergînd împotriva curentului, a parcurs aceeași distanță în 7 ore (se consideră că a dezvoltat aceeași viteză proprie și că nu a făcut nici o oprire). În cîte ore plutele plecate din A ajung în B, (știindu-se că ele se deplasează cu viteza de curgere a apei)?

Rezolvare

Să notăm cu x timpul (în ore) în care vaporul parcurge distanța de la A la B în apa staționară (adică viteza proprie de deplasare a vaporului), și cu y timpul în care plutele parcurg această distanță. Atunci, în timp de o

oră, vaporul parcurge $\frac{1}{x}$ din distanța AB, iar plutele, $\frac{1}{y}$.
De aceea, în josul rîului vaporul parcurge, în timp de o oră, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ din distanța AB, iar în susul lui (împotriva curentului), $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$. Dar din enunțul problemei știm că în josul apei vaporul parcurge (într-o oră) $\frac{1}{5}$ din întreaga distanță, iar în susul ei, $\frac{1}{7}$. Obținem sistemul

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{5}, \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{7}. \end{cases}$$

Observăm că pentru rezolvarea acestui sistem nu este nevoie să aducem la același numitor: este suficient să scădem ecuația a doua din prima. Obținem rezultatul:

$$\frac{2}{y}=\frac{2}{35},$$

de unde $y = 35$. Plutele parcurg distanța de la A la B în 35 de ore.

Două cutii cu cafea

Problemă

Două cutii de tablă, umplute cu cafea, au aceeași formă și sînt executate din același material. Prima cutie cîntărește 2 *kg* și are înălțimea de 12 *cm*; a doua cîntărește 1 *kg* și are înălțimea de 9,5 *cm*. Ce cantitate de cafea conțin cele două cutii?

Rezolvare

Să notăm greutatea conținutului cutiei mai mari cu x, iar a cutiei mai mici cu y. Greutatea proprie a cutiilor o notăm respectiv cu z și t. Obținem ecuațiile:

$$\begin{cases} x+z=2, \\ y+t=1. \end{cases}$$

Deoarece greutățile conținuturilor cutiilor pline sînt proporționale, ca și volumele, cu cuburile înălțimilor cutiilor,* avem :

$$\frac{x}{y} = \frac{12^3}{9,5^3} \approx 2,02 \text{ sau } x = 2,02y.$$

Greutățile cutiilor goale, fiind proporționale, ca și suprafețele lor totale, cu pătratele înălțimilor lor, obținem :

$$\frac{z}{t} = \frac{12^2}{9,5^2} \approx 1,60 \text{ sau } z = 1,60\,t.$$

Substituind valorile lui x și z în prima ecuație, se obține sistemul :

$$\begin{cases} 2,02y + 1,60t = 2, \\ y + t = 1. \end{cases}$$

Rezolvîndu-l, obținem :

$$y = \frac{20}{21} = 0,95 \qquad t = 0,05.$$

Prin urmare :

$$x = 1,92, \qquad z = 0,08.$$

Deci, greutatea netă a cafelei din prima cutie este de 1,92 *kg*, iar din a doua de 0,94 *kg*.

Serata

Problemă

La o serată au fost invitate 20 de persoane. Maria a dansat cu 7 tineri, Olga — cu 8, Veronica — cu 9 și așa mai departe, pînă la Nina, care a dansat cu toți tinerii. Cîți tineri (bărbați) au fost la serată ?

---

* Acest raport poate fi folosit numai în cazul în care pereții cutiilor nu sînt prea groși (deoarece cele două suprafețe — exterioară și interioară — ale cutiilor nu sînt identice și, afară de aceasta, înălțimea cavității interioare a cutiei este de fapt diferită de înălțimea cutiei).

Rezolvare

Dacă alegem bine necunoscuta, problema se rezolvă foarte simplu. Vom căuta să aflăm, în primul rînd, numărul fetelor, pe care îl vom nota cu x:

Prima, Maria, a dansat cu $6 + 1$ tineri,
A doua, Olga, a dansat cu $6 + 2$ tineri,
A treia, Veronica a dansat cu $6 + 3$ tineri,
. . . .
A x-a, Nina, a dansat cu $6 + x$ tineri.

Avem ecuaţia:

$$x + (6 + x) = 20,$$

de unde:

$$x = 7,$$

deci, numărul bărbaţilor a fost:

$$20 - 7 = 13.$$

Recunoaştere maritimă

Problema I

O navă de recunoaştere a primit misiunea de a cerceta regiunea mării pe o distanţă de 70 mile*, în direcţia deplasării unei escadre. Viteza escadrei era de 15 mile pe oră, iar viteza navei de recunoaştere de 28 mile pe oră. Se cere să se determine intervalul de timp după care nava de recunoaştere s-a întors la escadră.

Rezolvare

Să notăm numărul de ore căutat cu x. În acest interval de timp, escadra a parcurs $15x$ mile, iar nava de recunoaştere $28x$ mile. Nava de recunoaştere a străbătut 70 mile, după care s-a întors o parte din drum pînă a întîlnit escadra care parcursese restul din drumul rămas.

* O milă marină este echivalentă cu 1,852 *km* (*N.T.*).

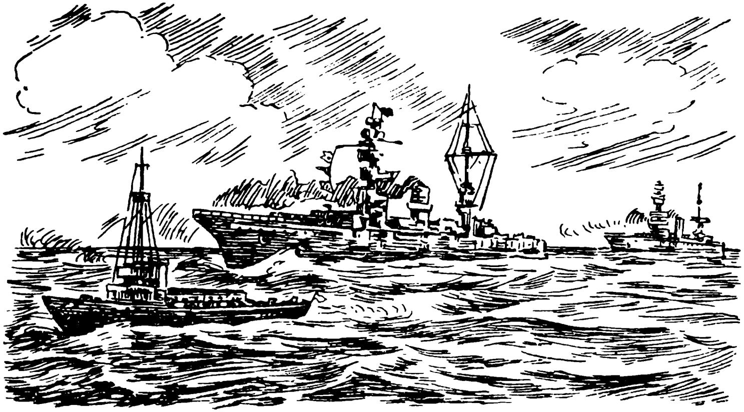


Fig. 10

Împreună, ele au străbătut un drum de $28x + 15x$ mile, egal cu $2 \cdot 70$ mile. Rezultă ecuația

$$28x + 15x = 140,$$

de unde

$$x = \frac{140}{43} = 3\frac{11}{43}$$

ore. Nava de recunoaştere s-a întors la escadră după 3 ore şi 15 minute.

Problema a II-a

Nava de recunoaştere trebuie să cerceteze drumul din fața escadrei în direcția deplasării acesteia, urmînd să se întoarcă după 3 ore. După cît timp trebuie să pornească înapoi spre escadră nava de recunoaştere, dacă viteza ei este de 25 noduri*, iar viteza escadrei de 15 noduri?

Rezolvare

Să presupunem că nava de recunoaştere trebuie să pornească înapoi spre escadră peste x ore; înseamnă că ea s-a depărtat de escadră timp de x ore, iar în întîmpi-

* Nodul marin este o unitate de măsură a vitezei vapoarelor echivalentă cu 15,43 m/s. ($N.T.$).

narea ei a mers $3-x$ ore. Atîta timp cît toate navele se deplasau în aceeași direcție, nava de recunoaștere s-a depărtat de escadră, timp de x ore, cu diferența drumurilor parcurse, adică cu :

$$25x - 15x = 10x.$$

La întoarcere, nava de recunoaștere a parcurs un drum egal cu 25 $(3-x)$ noduri, iar escadra, de 15 $(3-x)$. Împreună, escadra și nava de recunoaștere au parcurs $10x$ noduri. Prin urmare,

$$25(3-x) + 15(3-x) = 10x,$$

de unde

$$x = 2\frac{2}{5}\cdot$$

Nava de recunoaștere trebuie să-și schimbe direcția după 2 ore și 24 minute de la părăsirea escadrei.

Pe Velodrom

Problemă

Pe pista circulară a unui velodrom pedalează doi cicliști, cu viteze constante. Mergînd în sensuri opuse, ei se întîlnesc la fiecare 10 secunde ; mergînd în același sens, unul dintre ei îl ajunge pe celălalt la fiecare 170 secunde. Care este viteza fiecăruia dintre cicliști dacă lungimea pistei este de 170 *m*?

Rezolvare

Dacă viteza primului ciclist este egală cu x, atunci în 10 secunde el parcurge 10 x m. Al doilea ciclist, mergînd în întîmpinarea primului, parcurge de la o întîlnire la alta restul drumului, adică $170-10x$ m. Dacă notăm viteza celui de-al doilea ciclist cu y, distanța parcursă va fi egală cu 10 y metri, deci

$$170 - 10x = 10y.$$

Atunci cînd cicliştii merg în acelaşi sens, în 170 secunde primul parcurge 170 x m, iar al doilea 170 y m. Dacă primul merge mai repede decît al doilea, de la o întîlnire la alta, el va parcurge cu un cerc mai mult decît al doilea, adică

$$170x - 170y = 170.$$

Făcînd simplificările în ecuații, obținem:

$$x + y = 17, \quad x - y = 1,$$

de unde

$$x = 9,\ y = 8 \text{ (metri pe secundă)}.$$

Cursa de motociclete

Problemă

La un concurs de motociclete, una din cele trei motociclete, care au luat startul în acelaşi timp, făcînd pe oră cu 15 km mai puțin decît prima şi cu 3 km mai mult decît a treia, a sosit la punctul final cu 12 minute după prima şi cu 3 minute înaintea celei de-a treia. Cursa a fost fără opriri.

Se cere să se determine:

a) Cît de lung a fost drumul?
b) Care a fost viteza fiecărei motociclete?
c) Care a fost durata de parcurs a fiecărei motociclete?

Rezolvare

Deşi se cere să se determine şapte valori, ne putem limita la două necunoscute, şi forma un sistem de două ecuații cu două necunoscute.

Să notăm viteza celei de-a doua motociclete cu x. În acest caz, viteza primei motociclete va fi $x + 15$, iar a celei de-a treia $x - 3$.

Vom nota lungimea parcursului cu y. Atunci durata cursei va fi:

pentru prima motocicletă ... $\frac{y}{x + 15}$,

pentru a doua motocicletă ... $\frac{y}{x}$,

pentru a treia motocicletă ... $\frac{y}{x - 3}$.

Ştiind că a doua motocicletă şi-a terminat cursa la 12 minute după prima (adică la $\frac{1}{5}$ ore), obţinem:

$$\frac{y}{x} - \frac{y}{x+15} = \frac{1}{5}.$$

A treia motocicletă sosind cu 3 minute (adică cu $\frac{1}{20}$ ore) mai tîrziu decît a doua, avem:

$$\frac{y}{x-3} - \frac{y}{x} = \frac{1}{20}.$$

Înmulţind a doua ecuaţie cu 4 şi scăzînd-o din prima, obţinem ecuaţia:

$$\frac{y}{x} - \frac{y}{x+15} - 4\left(\frac{y}{x-3} - \frac{y}{x}\right) = 0.$$

Împărţind toţi membrii ecuaţiei prin y (după cum ştim, această mărime este diferită de zero) şi scăpînd de numitori, obţinem:

$$(x+15)(x-3) - x(x-3) - 4x(x+15) + 4(x+15)(x-3) = 0,$$

sau, după desfacerea parantezelor şi reducerea termenilor asemenea,

$$3x - 225 = 0,$$

de unde:

$$x = 75.$$

Cunoscîndu-l pe x, îl determinăm pe y din prima ecuaţie:

$$\frac{y}{75} - \frac{y}{90} = \frac{1}{5},$$

de unde $y = 90$.

Am determinat astfel vitezele motocicletelor:

90, 75 şi 72 km pe oră.

Lungimea întregului parcurs = 90 km.

Împărţind lungimea drumului la viteza fiecărei motociclete, aflăm durata parcursului lor:

a primei motociclete	1 oră,
a celei de-a doua	1 oră şi 12 minute,
a celei de-a treia	1 oră şi 15 minute.

În felul acesta, am determinat toate cele 7 necunoscute.

Viteza medie a unui automobil

Problemă

Un automobil a parcurs distanța dintre două orașe mergînd cu o viteză de 60 km pe oră ; la întoarcere însă a mers cu 40 km pe oră. Care a fost viteza medie a automobilului ?

Rezolvare

Simplitatea aparentă a problemei induce pe mulți în eroare. Fără a pătrunde condițiile problemei, ei calculează media aritmetică între 60 și 40, adică află semisuma

$$\frac{60+40}{2}=50.$$

Această soluție „simplă" ar fi corectă, dacă drumul în ambele direcții (dus și întors) ar fi fost de aceeași durată. Dar este clar că pentru drumul de întoarcere (cu o viteză mai mică) s-a pierdut mai mult timp decît pentru drumul la dus. Ținînd seama de acest fapt, este evident că răspunsul 50 nu este corect.

Și într-adevăr, ecuația dă alt răspuns. Nu este greu să formăm ecuația dacă introducem o necunoscută auxiliară — și anume mărimea l, care reprezintă distanța dintre orașe. Notînd viteza medie (cea căutată) cu x, vom putea scrie ecuația :

$$\frac{2l}{x}=\frac{l}{60}+\frac{l}{40}.$$

Întrucît l este diferit de zero, rezultă că ambii membri ai ecuației pot fi împărțiți prin l și obținem :

$$\frac{2}{x}=\frac{1}{60}+\frac{1}{40},$$

de unde :

$$x = \frac{2}{\frac{1}{60} + \frac{1}{40}} = 48.$$

Astfel, răspunsul corect este 48 km pe oră, şi nu 50.

În cazul în care am fi rezolvat problema dată în valori literale (la dus automobilul a mers cu o viteză de a km pe oră, iar la întoarcere cu b km pe oră), am fi obţinut ecuaţia :

$$\frac{2l}{x} = \frac{l}{a} + \frac{l}{b},$$

de unde rezultă pentru x valoarea

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

Mărimea x se numeşte *media armonică* a mărimilor a şi b.

Deci, viteza medie nu este dată de media aritmetică, ci de media armonică a vitezelor de deplasare. Dacă a şi b sînt numere pozitive, media armonică este, întotdeauna, mai mică decît media aritmetică :

$$\frac{a+b}{2},$$

lucru de care ne-am convins din exemplul numeric (48 este mai mic decît 50).

Maşini de calculat rapide

Vorbind despre ecuaţii algebrice în cadrul *Algebrei distractive*, nu putem să nu amintim problema rezolvării ecuaţiilor cu ajutorul maşinilor de calculat. După cum am spus, maşinile de calculat pot „juca" şah. Dar maşinile matematice pot executa şi alte operaţii, de exemplu traducerea dintr-o limbă într-alta, orchestraţia unei compoziţii muzicale etc. Pentru aceasta trebuie elaborat doar un „program" corespunzător, după care să acţioneze maşina.

Se înțelege că noi nu vom analiza aici „programele" jocului de șah sau ale traducerii dintr-o limbă în alta, ele fiind extrem de complicate, ci vom analiza numai două programe foarte simple. Înainte însă vom spune cîteva cuvinte despre construcția mașinilor de calculat.

În Capitolul I am vorbit despre dispozitivele cu ajutorul cărora se pot face mii și zeci de mii de calcule pe secundă. Această parte a unei mașini de calculat, care efectuează direct operațiile, se numește *dispozitiv aritmetic*. Afară de aceasta, mașina are un dispozitiv de comandă (care reglează funcționarea întregii mașini) și o așa-zisă „memorie". Memoria, sau dispozitivul de memorare, este un sistem de numere și semnale convenționale. În sfîrșit, mașina este prevăzută cu dispozitive speciale pentru introducerea datelor numerice noi și pentru eliberarea rezultatelor obținute. Aceste rezultate sînt imprimate (în sistemul zecimal) pe fișe speciale. Știm cu toții că sunetul poate fi înregistrat pe un disc sau pe o bandă de magnetofon și apoi reprodus. Dar înregistrarea sunetului pe disc poate fi făcută o singură dată, pentru o nouă înregistrare fiind nevoie de un alt disc. La magnetofon sunetul se înregistrează magnetizîndu-se o bandă specială. Sunetul înregistrat poate fi reprodus de cîte ori vrem, iar atunci cînd nu ne mai este necesar, banda poate fi „demagnetizată" putîndu-se înregistra altceva. Pe una și aceeași bandă se pot face cîteva înregistrări (una după alta), cu condiția ca pentru fiecare înregistrare nouă să fie „ștearsă" înregistrarea precedentă.

Pe același principiu se bazează funcționarea dispozitivelor de memorie. Numerele și semnalele convenționale sînt înregistrate (cu ajutorul semnalelor electrice, magnetice sau mecanice) pe un tambur special, pe o bandă sau pe un alt dispozitiv. După nevoie, numărul înregistrat poate fi citit sau șters, iar în locul lui poate fi înregistrat un alt număr. „Memorarea" și „citirea" unui număr sau a unui semnal convențional durează doar cîteva milionimi de secundă.

„Memoria" poate cuprinde cîteva mii de „celule", iar fiecare celulă — cîteva zeci de elemente, de exemplu magnetice. Pentru înregistrarea numerelor în sistemul de numerație binar, vom conveni ca fiecare element magnetizat să fie reprezentat prin cifra 1, iar fiecare element nemagnetizat prin cifra 0. Să presupunem că fiecare celulă de memorie conține 25 elemente sau, cum se spune, 25 ordine sau poziții binare, unde primul element servește pentru notarea semnului numărului (+ sau —), următoarele 14 poziții servesc pentru înregistrarea numerelor

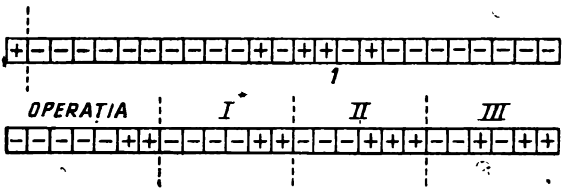


Fig. 11

întregi, iar ultimele 10 poziții pentru înregistrarea părții fracționare. În fig. 11 este dată reprezentarea schematică a două celule de memorie, fiecare din ele conținînd cîte 25 ordine. Elementele magnetizate sînt notate prin semnul +, iar cele nemagnetizate prin semnul — . Să analizăm prima celulă, cea de sus, (virgula arată unde începe partea fracționară a numărului, iar linia întreruptă desparte prima poziție, care servește pentru înregistrarea semnului, de celelalte). În această celulă este înregistrat (în sistemul de numerație binar) numărul +1011,01 sau, în sistemul zecimal, numărul 11,25.

Afară de numere, în celulele memoriei sînt înregistrate comenzile, din care este compus programul. Să vedem cum arată comenzile destinate pentru o așa-numită „mașină cu trei adrese". În acest caz, la înregistrarea unei comenzi, celula de memorie se împarte în patru părți (liniile întrerupte la celula de jos din fig. 11). Prima parte servește pentru notarea operației și este înregistrată cu numere. De exemplu :

adunare — operația I,
scădere — operația a II-a,
înmulțire — operația a III-a etc.

Comenzile se descifrează în felul următor : prima parte a celulei — numărul operației, părțile a doua și a treia — numerele celulelor (adresele), din care trebuie luate numerele pentru efectuarea operației date, partea a patra — numărul celulei (adresa) unde urmează a fi dirijat rezultatul obținut. Astfel, în fig. 11 (celula de jos) sînt înregistrate, în sistemul binar, numerele 11, 11, 111, 1011 sau în sistemul zecimal : 3, 3, 7, 11, ceea ce înseamnă următoarea comandă : să se efectueze operația a III-a (adică înmulțirea) a numerelor aflate în celulele de memorare a t r e i a și a ș a p t e a , iar rezultatul obținut să fie „memorat'' (adică înregistrat) în celula a *11*-a.

Pe viitor vom desemna numerele și comenzile nu prin semne convenționale, așa cum se arată în fig. 11, ci direct în sistemul de numerație zecimal. Deci, comanda reprezentată în celula de jos din fig. 11 va fi înregistrată astfel :

înmulțire 3 7 11

Să analizăm acum două exemple de programe simple.

Programul I

1) adunare	4	5	4
2) înmulțire	4	4	$\longrightarrow$
3) predarea conducerii			1
4) 0			
5) 1			

Să vedem cum va lucra mașina, dacă în primele cinci celule sînt înregistrate aceste date.

Comanda 1 : adunarea numerelor înregistrate în celulele 4 și 5, și dirijarea rezultatului obținut din nou în celula a 4-a (în locul numărului care fusese înscris mai înainte). În felul acesta, mașina va înregistra în celula a 4-a numărul $0 + 1 = 1$. După executarea primei comenzi, în celulele 4 și 5 vor figura următoarele numere :

4) 1,
5) 1.

Comanda a 2-a : înmulțirea cu el însuși a numărului aflat în celula a 4-a (adică ridicarea la pătrat) și imprimarea rezultatului, adică a lui 1^2, pe fișă (săgeata arată eliberarea rezultatului obținut).

Comanda a 3-a : predarea conducerii celulei 1. Cu alte cuvinte, aceasta înseamnă că trebuie efectuate din nou toate comenzile, începînd cu prima. Deci, din nou comanda 1.

Comanda 1: Adunarea numerelor aflate în celulele 4 şi 5 şi înregistrarea rezultatului obţinut din nou în celula a 4-a. Ca urmare, în celula a 4-a va figura numărul 1 + + 1 = 2:

4) 2,
5) 1.

Comanda a 2-a: ridicarea la pătrat a numărului aflat în celula a 4-a şi trecerea pe fişă a rezultatului obţinut, adică a lui 2^2.

Comanda a 3-a: predarea conducerii celulei 1 (deci din nou revenire la comanda 1).

Comanda 1: trimiterea numărului 2+1 = 3 în celula a 4-a:

4) 3,
5) 1.

Comanda a 2-a: înregistrarea pe fişă a numărului 3^2.

Comanda a 3-a: predarea conducerii celulei 1 etc.

Astfel, maşina calculează unul după altul pătratele numerelor întregi şi le înregistrează pe fişă. Observaţi că, de fiecare dată, maşina ia pe rînd singură numerele întregi şi le ridică la pătrat. Acţionînd după acest program, maşina poate calcula pătratele tuturor numerelor întregi de la 1 la 10 000 într-un interval de cîteva zeci de secunde.

Trebuie subliniat faptul că în realitate programul pentru calcularea pătratelor numerelor întregi este mai complicat decît cel arătat. Acest lucru se referă, în primul rînd, la comanda a 2-a, deoarece pentru imprimarea rezultatului pe fişă este nevoie de mai mult timp decît pentru efectuarea unei operaţii. De aceea, rezultatele obţinute se „memorează" în celulele libere din memorie, iar după aceea („fără grabă") sînt imprimate pe fişe. În felul acesta, primul rezultat final este „memorat" în prima celulă liberă din memorie, rezultatul al doilea — în cea de a 2-a celulă liberă, al treilea rezultat — în cea de-a 3-a celulă etc. În programul simplificat de mai sus nu s-a ţinut seama de acest fapt.

Afară de aceasta, maşina nu poate să se ocupe mult timp cu calcularea pătratelor, nu-i vor ajunge celulele din „memorie", şi a putea „ghici" momentul în care maşina a terminat de calculat numărul cerut de pătrate, pentru a fi deconectată, este imposibil (căci maşina efectuează mii de operaţii pe secundă !). De aceea, sînt prevăzute comenzi speciale pentru oprirea maşinii la momentul oportun. De pildă, un program poate fi întocmit în aşa fel, încît maşina să se oprească automat după ce a calculat pătratele tuturor numerelor întregi de la 1 la 10 000.

Există şi alte feluri de comenzi mai complicate, asupra cărora nu ne vom opri aici.

Iată cum arată în realitate programul pentru calcularea pătratelor tuturor numerelor întregi de la 1 la 10 000 :

Programul I

1)	adunare	8	9	8
2)	înmulţire	8	8	10
3)	adunare	2	6	2
4)	predarea condiţionată a conducerii	8	7	1
5)	stop			
6)		0	0	1
7)	10 000			
8)	0			
9)	1			
10)	0			
11)	0			
12)	0			

. . . .

Primele două comenzi se deosebesc puţin de cele din programul simplificat de mai înainte. După executarea acestor două comenzi, în celulele a 8-a, a 9-a şi a 10-a vor figura următoarele numere :

8) 1
9) 1
10) 1^2

Comanda a 3-a este foarte interesantă : se adună numerele din celulele a 2-a şi a 6-a, iar rezultatul obţinut trebuie înregistrat din nou în celula a 2-a, după care aceasta va avea aspectul următor :

2) înmulţire 8 8 11.

După cum vedeţi, după executarea celei de-a 3-a comenzi, c o m a n d a a 2 - a se schimbă, mai precis se schimbă una din adresele c o m e n z i i a 2 - a . În cele ce vor urma, vom explica în ce scop se face acest lucru.

Comanda a 4-a : predarea c o n d i ț i o n a t ă a conducerii (în locul comenzii a 3-a din programul analizat mai înainte). Această comandă se execută astfel : dacă numărul din celula a 8-a este mai mic decît numărul din celula a 7-a, conducerea este predată celulei 1 ; în caz contrar, este executată comanda următoare (adică a 5-a). În cazul nostru, dat fiind că $1 < 10\,000$, predarea conducerii se face către celula 1 și revenim astfel la comanda 1.

După executarea primei comenzi, în celula a 8-a va figura numărul 2.

A doua comandă, care de data aceasta se prezintă sub forma

2) înmulțire 8 8 11,

constă în aceea că numărul 2^2 este dirijat în celula a 11-a. Acum devine clar de ce comanda a 3-a a fost executată înaintea comenzii a 2-a : numărul nou, adică 2^2, nu trebuia să ajungă în celula a 10-a, care este ocupată, ci în celula următoare (a 11-a). După executarea comenzilor 1 și a 2-a, vom avea următoarele numere :

8) 2
9) 1
10) 1^2
11) 2^2.

După executarea comenzii a 3-a, celula a 2-a va avea aspectul

2) înmulțire 8 8 12.

Deoarece în celula a 8-a continuă să figureze un număr mai mic, decît în celula a 9-a, comanda a 4-a înseamnă din nou predarea conducerii celulei 1.

Acum după executarea comenzilor 1 și a 2-a, obținem :

8) 3
9) 1
10) 1^2
11) 2^2
12) 3^2

Maşina va continua să calculeze pătratele după acest program, pînă cînd în celula a 8-a va apare numărul 10 000, adică pînă cînd vor fi calculate pătratele numerelor de la 1 la 10 000. După aceea, comanda a 4-a nu va mai preda conducerea celulei 1 (deoarece în celula a 8-a va figura un număr egal cu cel din celula a 7-a şi nu mai mic); deci, după comanda a 4-a maşina va executa comanda a 5-a: aci se va opri (se va deconecta).

Să analizăm acum un program mai complicat: rezolvarea sistemelor de ecuaţii. Pentru ca expunerea să fie mai clară, vom simplifica întrucîtva acest program; cititorul va putea să-şi dea seama singur cum arată programul în forma sa completă.

Fie sistemul de ecuaţii

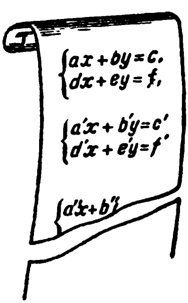
$$\begin{cases} ax + by = c, \\ dx + ey = f. \end{cases}$$

Acest sistem nu este greu de rezolvat:

$$x = \frac{ce - bf}{ae - bd}, \quad y = \frac{af - cd}{ae - bd}.$$

Pentru rezolvarea unui astfel de sistem (cu valori numerice date ale coeficienţilor *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*), unui om îi sînt necesare cîteva zeci de secunde. Maşina poate rezolva sute de asemenea sisteme într-o secundă.

Să analizăm programul corespunzător. Vom presupune că sînt date cîteva din aceste sisteme:



cu valori numerice date pentru coeficienţii *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *a'*, *b'*,...

Iată programul corespunzător :

Programul II

1)	× 28	30	20	14)	+ 3	19	3	27)	b
2)	× 27	31	21	15)	+ 4	19	4	28)	c
3)	× 26	30	22	16)	+ 5	19	5	29)	d
4)	× 27	29	23	17)	+ 6	19	6	30)	e
5)	× 26	31	24	18)	p.c.		1	31)	f
6)	× 28	29	25	19)	6	6	0	32)	a'
7)	– 20	21	20	20)	0			33)	b'
8)	– 22	23	21	21)	0			34)	c'
9)	– 24	25	22	22)	0			35)	d'
10)	: 20	21	→	23)	0			36)	e'
11)	: 22	21	→	24)	0			37)	f'
12)	÷ 1	19	1	25)	0			38)	a''
13)	÷ 2	19	2	26)	a				. . . .

Comanda 1 : să se afle produsul numerelor din celulele 28 și 30, iar rezultatul să fie dirijat în celula a 20-a. Cu alte cuvinte, în celula a 20-a va figura numărul ce.

În mod analog se execută comenzile a 2-a și a 6-a. După executarea lor în celulele a 20-a și a 25-a vor figura următoarele numere :

20) ce
21) bf
22) ae
23) bd
24) af
25) cd

Comanda a 7-a : din numărul aflat în celula a 20-a, să se scadă numărul aflat în celula a 21-a, iar rezultatul (adică $ce - bf$) să fie înregistrat din nou în celula a 20-a.

În mod analog se execută comenzile a 8-a și a 9-a. Ca urmare, în celulele a 20-a, a 21-a și a 22-a vor figura următoarele numere :

20) $ce-bf$
21) $ae-bd$
22) $af-cd$.

Comenzile a 10-a și a 11-a : se formează câturile :

$$\frac{ce-bf}{ae-bd} \text{ și } \frac{af-cd}{ae-bd}$$

care sînt imprimate pe o fişă (adică sînt eliberate ca rezultate finale). Ele reprezintă valorile necunoscutelor, obţinute din primul sistem de ecuaţii.

Deci, primul sistem a fost rezolvat. Atunci la ce sînt necesare comenzile ulterioare? Partea următoare a programului (celulele 12 şi 19) trebuie să determine maşina „să treacă" la rezolvarea celui de-al doilea sistem de ecuaţii. Să vedem cum anume.

Comenzile 10 şi 17 constau în aceea că, la conţinutul celulelor 1 şi 6, se adaugă înregistrarea din celula a 19-a, iar rezultatele obţinute rămîn mai departe în celulele 1 şi 6. În felul acesta, după executarea comenzii a 17-a, primele 6 celule vor avea următorul aspect:

1)	×	34	36	20
2)	×	33	37	21
3)	×	32	36	22
4)	×	33	35	23
5)	×	32	37	24
6)	×	34	35	25

Comanda a 18-a: să se predea conducerea primei celule.

Prin ce se deosebesc noile înregistrări din primele 6 celule de înregistrările anterioare? Prin aceea că primele două adrese din aceste celule nu conţin numerele de la 26 la 31, ca mai înainte, ci pe acelea de la 32 la 37. Cu alte cuvinte, maşina va executa din nou aceleaşi operaţii, dar numerele vor fi luate nu din celulele 26 şi 31, ci din celulele 32 şi 37, unde se află termenii celui de-al doilea sistem de ecuaţii. După rezolvarea lui, maşina va trece la rezolvarea celui de-al treilea sistem etc.

După cum am văzut, maşina nu „ştie" să lucreze „singură", nu poate decît să execute un „program" dat, deci pentru a obţine rezultatele necesare trebuie întocmit un „program" de lucru bun. Există programe pentru calculul rădăcinilor, al logaritmilor, al sinusurilor, pentru rezolvarea ecuaţiilor de grad superior şi altele. Am mai spus că există programe pentru jocul de şah, pentru traducerea textelor dintr-o limbă într-alta... Se înţelege că programul corespunzător va fi cu atît mai complicat cu cît problema este mai complicată.

În încheiere, vom aminti că există aşa-numite programe de programare, cu ajutorul cărora maşina însăşi poate să întocmească programul necesar rezolvării unei probleme. Acest fapt uşurează considerabil întocmirea programului, care cere adesea foarte multă muncă.

CAPITOLUL III

ÎN AJUTORUL ARITMETICII

Adeseori aritmetica nu este în măsură să demonstreze riguros adevărul unora dintre afirmațiile sale, numai cu metode proprii. Din această cauză, ea este nevoită să recurgă la metodele de generalizare ale algebrei. Printre aceste cazuri aritmetice, care trebuie demonstrate pe cale algebrică, se numără multe reguli de efectuare simplificată a calculelor, unele proprietăți interesante ale numerelor, criterii de divizibilitate etc. În capitolul de față vor fi analizate o serie de probleme de acest gen.

Înmulțirea rapidă

Pentru simplificarea calculelor, calculatorii experimentați recurg adesea la transformări algebrice. De exemplu, calculul

$$988^2$$

se efectuează astfel:

$$988 \cdot 988 = (988 + 12) \cdot (988 - 12) + 12^2 = 1000 \cdot 976 + 144 = 976\,144.$$

Este ușor de observat că, în cazul de față, calculatorul folosește următoarea transformare algebrică:

$$a^2 = a^2 - b^2 + b^2 = (a + b)\,(a - b) + b^2.$$

În practică se poate folosi cu succes această formulă în calculele mintale.
De exemplu:

$$\begin{aligned}
27^2 &= (27 + 3)\,(27 - 3) + 3^2 = 729,\\
63^2 &= 66 \cdot 60 + 3^2 = 3\,969,\\
18^2 &= 20 \cdot 16 + 2^2 = 324,\\
37^2 &= 40 \cdot 34 + 3^2 = 1\,369,\\
48^2 &= 50 \cdot 46 + 2^2 = 2\,304,\\
54^2 &= 58 \cdot 50 + 4^2 = 2\,916.
\end{aligned}$$

Mai departe, înmulţirea 986 · 997 se face astfel:

$$986 \cdot 997 = (986-3) \cdot 1\,000 + 3 \cdot 14 = 983\,042.$$

Pe ce se bazează acest procedeu? Să reprezentăm termenii sub forma:

$$(1\,000-14) \cdot (1\,000-3)$$

şi să înmulţim aceste binoame după regulile algebrei:

$$1\,000 \cdot 1\,000 - 1\,000 \cdot 14 - 1\,000 \cdot 3 + 14 \cdot 3$$

Efectuăm transformările:

$$\begin{aligned} 1\,000\ (1\,000 - 14) - 1\,000 \cdot 3 + 14 \cdot 3 &= \\ = 1\,000 \cdot 986 - 1\,000 \cdot 3 + 14 \cdot 3 &= \\ = 1\,000\ (986-3) + 14 \cdot 3. \end{aligned}$$

Ultimul rînd reprezintă procedeul folosit de calculator.

Este interesantă metoda de înmulţire a două numere formate din 3 cifre, la care cifra zecilor este aceeaşi, iar suma unităţilor — egală cu 10. De exemplu, înmulţirea

$$783 \cdot 787$$

se efectuează astfel:

$$78 \cdot 79 = 6\,162;\ 3 \cdot 7 = 21;$$

iar rezultatul va fi:

$$616\,221.$$

Justificarea metodei folosite rezultă din următoarele transformări:

$$\begin{aligned} &(780 + 3)(780 + 7) = \\ &= 780 \cdot 780 + 780 \cdot 3 + 780 \cdot 7 + 3 \cdot 7 = \\ &= 780 \cdot 780 + 780 \cdot 10 + 3 \cdot 7 = \\ &= 780\,(780 + 10) + 3 \cdot 7 = 780 \cdot 790 + 21 = \\ &= 616\,200 + 21. \end{aligned}$$

O altă metodă pentru efectuarea unor înmulţiri de acest fel este şi mai simplă:

$$\begin{aligned} 783 \cdot 787 &= (785-2)(785+2) = 785^2 - 4 = \\ &= 616\,225 - 4 = 616\,221. \end{aligned}$$

În acest din urmă exemplu am avut de ridicat la pătrat numărul 785.

Pentru ridicarea la pătrat a numerelor care se termină cu cifra 5, este foarte utilă următoarea metodă :

$35^2; 3 \cdot 4 = 12$ Răspuns 1 225.
$65^2; 6 \cdot 7 = 42$ Răspuns 4 225.
$75^2; 7 \cdot 8 = 56$ Răspuns 5 625.

Regula constă în înmulțirea cifrei zecilor cu cifra imediat superioară ei, şi la produsul obținut se ataşează numărul 25.

Procedeul se bazează pe următoarele considerente : dacă cifra zecilor este a, întregul număr poate fi reprezentat astfel :

$$10a + 5.$$

Pătratul acestui număr, ca pătrat al unui binom, va fi egal cu :

$$100\,a^2 + 100\,a + 25 = 100\,a\ (a + 1) + 25.$$

Termenul $a\ (a + 1)$ reprezintă produsul dintre cifra zecilor şi cifra imediat superioară. A înmulți numărul obținut cu 100 şi a aduna la el 25 sau a adăuga la numărul obținut 25 este acelaşi lucru.

Tot din acest procedeu rezultă o altă metodă simplă de a ridica la pătrat numerele formate dintr-un număr întreg şi $\frac{1}{2}$. De exemplu :

$$\left(3\frac{1}{2}\right)^2 = 3,5^2 = 12,25 = 12\frac{1}{4},$$

$$\left(7\frac{1}{2}\right)^2 = 56\frac{1}{4},$$

$$\left(8\frac{1}{2}\right)^2 = 72\frac{1}{4}\ \text{etc.}$$

Cifrele 1, 5 şi 6

Probabil ați observat că la înmulțirea unei serii de numere care se termină cu cifra 1 sau 5, se obține un număr terminat cu aceeaşi cifră. Este însă mai puțin cunoscut faptul că acelaşi lucru este adevărat şi pentru cifra 6. De aceea, orice putere a unui număr terminat cu cifra 6 se termină de asemenea cu 6.

De exemplu:

$$46^2 = 2116;\ 46^3 = 97\,336.$$

Această proprietate interesantă a cifrelor 1, 5 şi 6 poate fi demonstrată pe cale algebrică. S-o analizăm pentru cifra 6.

Numerele terminate cu 6 pot fi reprezentate astfel:

$$10a + 6,\ 10b + 6 \text{ etc.}$$

unde a şi b sînt numere întregi.

Produsul acestor două numere este egal cu:

$$\begin{aligned}&100\,ab + 60\,b + 60a + 36 =\\&= 10\,(10\,ab + 6b + 6a) + 30 + 6 =\\&= 10\,(10\,ab + 6b + 6a + 3) + 6.\end{aligned}$$

După cum se vede, produsul este format dintr-un număr de zeci şi din cifra 6 care, se înţelege, trebuie să fie la urmă.

Aceeaşi demonstraţie poate fi folosită şi pentru cifrele 1 şi 5.

Cele spuse ne îndreptăţesc să afirmăm că:

386^{2567} se termină cu 6,
825^{723} se termină cu 5,
491^{1732} se termină cu 1 etc.

Numerele 25 şi 76

Există şi numere formate din două cifre, care posedă aceeaşi proprietate ca şi cifrele 1, 5 şi 6. Ele sînt numărul 25 şi, — pentru mulţi va fi o surpriză — numărul 76. Produsul a două numere terminate cu 76 se termină de asemenea cu 76.

Să demonstrăm acest lucru. Expresia generală pentru aceste numere va fi:

$$100\,a + 76,\ 100b + 76 \text{ etc.}$$

Înmulţind între ele două numere de acest fel, obţinem:

$$\begin{aligned}&10\,000\,ab + 7\,600\,b + 7\,600\,a + 5\,776 =\\&= 10\,000\,ab + 7\,600\,b + 7\,600\,a + 5\,700 + 76 =\\&= 100\,(100\,ab + 76\,b + 76\,a + 57) + 76.\end{aligned}$$

Afirmația este demonstrată : produsul se termină cu 76.
De aici rezultă că orice putere a unui număr terminat cu 76 va fi un număr terminat tot cu 76 :

$$376^2 = 141\,376,\ 576^3 = 191\,102\,976 \text{ etc.}$$

„Numere" infinite

Există și grupuri mai mari de cifre care, aflîndu-se la sfîrșitul numerelor, se păstrează și în produsul lor. Vom arăta că numărul acestor grupuri este infinit.

Cunoaștem deja grupuri de numere formate din două cifre care posedă proprietatea enunțată : 25 și 76. Pentru a găsi grupuri formate din trei cifre, trebuie să punem înaintea numărului 25 sau a numărului 76 o astfel de cifră, încît grupul de trei cifre obținut să posede proprietatea cerută.

Să vedem, de exemplu, ce cifră trebuie să adăugăm la numărul 76. Să o notăm cu litera k: Atunci numărul căutat va fi de forma :

$$100\,k + 76.$$

Expresia generală a numerelor terminate cu acest grup de cifre va fi :

$$1\,000\,a + 100k + 76\,;\ 1\,000\,b + 100\,k + 76 \text{ ş.a.m.d.}$$

Înmulțind între ele două numere de acest fel, obținem :

$$1\,000\,000\,ab + 100\,000\,ak + 100\,000\,bk + 76\,000\,a + \\ 76\,000\,b + 10\,000\,k^2 + 15\,200\,k + 5\,776.$$

Toți termenii, afară de ultimii doi, au la urmă cel puțin trei zerouri. De aceea, produsul se termină cu $100k + 76$, dacă diferența

$$15\,200\,k + 5\,776 - (100\,k + 76) = 15\,100\,k + 5\,700 = \\ = 15\,000\,k + 5\,000 + 100\,(k + 7)$$

este divizibilă prin 1 000. Acest lucru va fi adevărat numai pentru $k = 3$.

Deci, grupul de cifre căutat va fi de forma 376. De aceea și orice putere a numărului 376 se termină cu 376.

De exemplu :

$$376^2 = 141\,376.$$

Dacă am dori să aflăm un grup de numere format din patru cifre, care să posede aceeași proprietate, va trebui să scriem înaintea numărului 376 încă o cifră. Însemnînd această cifră cu l, vom ajunge la următoarea problemă : pentru ce valoare a lui l produsul :

$$(10\,000\,a + 1\,000\,l + 376)\ (10\,000\,b + 1\,000\,l + 376)$$

se va termina cu $1000\,l + 376$? Dacă în acest produs desfacem parantezele și facem abstracție de toți termenii sumei care se termină cu cel puțin 4 zerouri rămîn termenii :

$$752\,000\,l + 141\,376.$$

Produsul se termină cu $1000\,l + 376$, atunci cînd diferența

$$\begin{aligned} &752\,000\,l + 141\,376 - (1000\,l + 376) = \\ &= 751\,000\,l + 141\,000 = \\ &= (750\,000\,l + 140\,000) + 1\,000\,(l + 1) \end{aligned}$$

este divizibilă prin 10 000. Acest lucru este adevărat numai dacă $l = 9$.

Grupul căutat este 9 376.

Continuînd raționamentul de mai sus, grupul de patru cifre obținut poate fi completat cu încă o cifră. Se obține 09 376. Continuînd astfel obținem grupul 109 376, apoi 7 109 376 etc. Deci putem repeta operația de o infinitate de ori. În concluzie, vom obține un „număr'' format dintr-o infinitate de cifre :

$$\ldots 7\,109\,376.$$

Asemenea „numere'' pot fi adunate și înmulțite după regulile obișnuite : într-adevăr, ele se scriu de la dreapta la stînga, iar adunarea și înmulțirea (în coloane) se fac, de asemenea, de la dreapta la stînga, astfel încît făcînd suma sau produsul numerelor date se pot calcula pe rînd oricîte cifre.

Este interesant că „numărul'' infinit de mai sus satisface, oricît ar fi de curios, ecuația

$$x^2 = x.$$

Într-adevăr, pătratul acestui „număr" (adică numărul înmulţit prin el însuşi) se termină cu 76, deoarece fiecare dintre factori se termină cu 76; tot din această cauză pătratul „numărului" dat se termină cu 376; se termină cu 9 376 etc. Cu alte cuvinte, calculînd una după alta cifrele „numărului" x^2, unde $x = \ldots 7\,109\,376$, obţinem aceleaşi cifre, care figurează în numărul x, astfel că $x^2 = x$.

Am analizat grupurile de cifre terminate cu 76 *. Dacă vom urma acelaşi raţionament pentru grupurile de cifre terminate cu 5, vom obţine :

5, 25, 625, 0625, 90 625, 890 625, 2 890 625 etc.

Ca urmare, vom putea scrie încă un „număr" infinit

$$\ldots 2\,890\,625,$$

care satisface de asemenea ecuaţia $x^2 = x$. S-ar putea demonstra că acest „număr" infinit „este egal" cu :

$$\left(\left((5^2)^2\right)^2\right)^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}$$

În limbajul „numerelor", infinite, acest interesant rezultat se formulează astfel : ecuaţia $x^2 = x$ are (afară de soluţiile banale $x = 0$ şi $x = 1$) două soluţii „infinite" :

$$x = \ldots 7\,109\,376 \text{ şi } x = \ldots 2\,890\,625$$

şi nu mai are alte soluţii (în sistemul zecimal) **.

---

* Subliniem că grupul de două cifre 76 poate fi determinat cu ajutorul raţionamentelor de mai sus; pentru aceasta este suficient să găsim cifra ce trebuie aşezată înaintea lui 6, astfel încît grupul de două cifre obţinut să posede proprietatea enunţată. De aceea, „numărul"... 7 109 376 poate fi obţinut pornind nu de la 76, ci de la cifra 6.

** Numerele „infinite" pot fi analizate atît în sistemul zecimal, cît şi în alte sisteme de numeraţie. Astfel, numerele cu sistemul de numeraţie în baza *p* se numesc *p*—aditive. Despre aceste numere puteţi afla cîte ceva din cartea lui E. B. D î n k i n şi V. A. U s p e n s k i, *Discuţii matematice*, Gostehizdat, 1952.

Plata suplimentară

Veche problemă populară

Cîndva, în vremuri de demult, doi negustori de vite au vîndut o cireadă de boi, încasînd pentru fiecare bou atîtea ruble cîți boi aveau în cireadă. Cu banii obținuți, au cumpărat o turmă de oi, plătind cîte 10 ruble pentru o oaie cu un miel. Împărțind turma în părți egale, unul dintre ei a căpătat cu o oaie, iar celălalt cu un miel mai mult, primind însă în plus o sumă suplimentară. Cît de mare a fost această sumă (se presupune că este exprimată de un număr întreg de ruble)?

Rezolvare

Problema nu poate fi transpusă direct în „limbaj algebric", deoarece nu poate fi pusă în ecuație. Ea trebuie rezolvată într-un mod deosebit, să spunem așa cu ajutorul unui raționament matematic liber. Dar și de data aceasta algebra dă un ajutor esențial aritmeticii.

Costul în ruble a întregii turme este un pătrat perfect, deoarece turma fusese cumpărată pe banii obținuți din vînzarea a n boi cu cîte n ruble pentru fiecare bou. Unuia din tovarăși i-a revenit o oaie în plus, deci numărul de oi a fost impar; urmează că și numărul zecilor din n^2 a fost impar; atunci care este cifra unităților?

Se poate demonstra că, dacă într-un pătrat perfect numărul zecilor este impar, cifra unităților nu poate fi alta decît 6.

Într-adevăr, pătratul oricărui număr format dintr-un număr de a zeci și b unități, adică $(10\,a + b)^2$, este egal cu

$$100\,a^2 + 20\,ab + b^2 = (10a^2 + 2\,ab)\cdot 10 + b^2.$$

În cazul dat, numărul zecilor este $10a^2 + 2ab$ și un număr oarecare de zeci cuprins în b^2. Dar $10a^2 + 2ab$ se divide prin 2, deci este un număr par. De aceea, numărul zecilor, conținut în $(10a + b)^2$, va fi impar, atunci cînd numărul b^2 va cuprinde un număr impar de zeci. Să ne amintim ce reprezintă b^2. Acesta este pătratul unităților, adică unul din următoarele zece numere:

$$0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64,\ 81.$$

Dintre acestea, numerele care conțin un număr impar de zeci sînt numai 16 și 36 — ambele terminîndu-se cu 6. Deci, pătratul perfect

$$100\,a^2 + 20\,ab + b^2$$

poate avea un număr impar de zeci numai în cazul în care se termină cu 6.

Acum este ușor să găsim răspunsul la problemă. Devine clar că mielul a fost evaluat la 6 ruble. Negustorul, căruia i-a revenit mielul, a primit cu 4 ruble mai puțin decît tovarășul lui, care a primit o oaie în plus. Ca să se egaleze părțile, proprietarul mielului a primit o sumă suplimentară de 2 ruble.

Plata suplimentară este de 2 ruble.

Divizibilitatea prin 11

Algebra ușurează în mod simțitor aflarea criteriilor de divizibilitate a unui număr prin altul, fără a recurge la împărțire. Criteriile de divizibilitate prin 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 sînt binecunoscute. Să deducem acum criteriul de divizibilitate prin 11; el este destul de simplu și practic.

Să presupunem că un număr N format din mai multe cifre are cifra unităților a, cifra zecilor b, cifra sutelor c, cifra miilor d etc., adică

$$N = a + 10b + 100c + 1\,000d + \ldots =$$
$$= a + 10\,(b + 10c + 100d + \ldots\,),$$

unde punctele arată suma ordinelor următoare. Să scădem din N numărul $11\,(b + 10c + 100d + \ldots)$, care este un multiplu de 11. Atunci diferența obținută

$$a - b - 10\,(c + 10\,d + \ldots),$$

împărțită la 11, va da același rest ca și numărul N. Adăugînd la acest rest numărul $11(c + 10d + \ldots)$, iarăși un multiplu al lui 11, obținem numărul

$$a - b + c + 10\,(d + \ldots),$$

care împărțit la 11 dă, de asemenea, același rest ca numărul N. Scăzînd din acest număr $11(d + \ldots)$, obținem din nou un multiplu al lui 11, etc. Din rezultate, obţinem astfel numărul

$$a - b + c - d + \ldots = (a + c + \ldots) - (b + d + \ldots)$$

care împărţit la 11, va da şi el acelaşi rest ca N.

De aci reiese următorul criteriu de divizibilitate prin 11 : dacă din suma tuturor cifrelor aşezate în locuri impare scădem suma tuturor cifrelor ce ocupă locuri pare, şi dacă diferenţa obţinută este egală cu 0 sau cu un număr (pozitiv sau negativ) multiplu de 11, — atunci şi numărul considerat este un multiplu de 11 ; în caz contrar, numărul nostru nu este divizibil prin 11.

Să luăm, de exemplu, numărul 87 635 064 :

$$8 + 6 + 5 + 6 = 25,$$
$$7 + 3 + 0 + 4 = 14,$$
$$25 - 14 = 11.$$

Evident, numărul dat este divizibil prin 11.

Există şi un alt criteriu de divizibilitate prin 11, care este comod pentru numere nu prea mari. Împărţim numărul considerat de la dreapta spre stînga, în grupe de cîte 2 cifre, şi le adunăm; dacă suma obţinută se împarte exact la 11, atunci şi numărul considerat este un multiplu al lui 11, şi invers. De exemplu, fie numărul 528. Să împărţim acest număr în grupe (5 | 28) şi să le adunăm :

$$5 + 28 = 33.$$

Deoarece 33 se împarte exact la 11, numărul 528 este un multiplu al lui 11 :

$$528 : 11 = 48.$$

Să demonstrăm acest criteriu de divizibilitate. Împărţim numărul N (format din mai multe cifre) în grupe. Vom obţine numere formate dintr-o cifră sau din două *, pe care

---

* Dacă numărul N este format dintr-un număr impar de cifre, atunci ultima grupă (extrema stîngă) va fi formată dintr-o cifră. În afară de aceasta, o grupă de forma 03 va fi considerată, de asemenea, ca un număr format dintr-o singură cifră 3.

le vom nota (de la dreapta spre stînga) cu a, b, c etc., astfel încît numărul N va putea fi scris sub forma

$$N = a + 100\,b + 10\,000\,c + \ldots =$$
$$= a + 100\,(b + 100\,c + \ldots).$$

Scăzînd din N numărul $99(b + 100c + \ldots)$, care este un multiplu al lui 11, obținem

$$a + (b + 100\,c + \ldots) = a + b + 100\,(c + \ldots),$$

care, împărțit la 11, dă același rest ca N. Din acest număr scădem numărul $99(c + \ldots)$, care este iarăși un multiplu de 11 etc. Din rezultate deducem că, fiind împărțit la 11, numărul N, dă același rest ca numărul

$$a + b + c + \ldots$$

Numărul unui autocamion

Problemă

Făcînd o plimbare prin oraș, trei studenți de la Facultatea de matematică au observat că șoferul unui autocamion a încălcat regulile de circulație. Nici unul dintre ei n-a memorat numărul mașinii (format din 4 cifre); fiind însă studenți la matematici, fiecare dintre ei a observat cîte o particularitate a acestui număr. Unul și-a amintit că primele două cifre erau identice. Al doilea — că ultimele două cifre coincideau. În sfîrșit, al treilea student afirma că numărul dat este un pătrat perfect. Oare se poate afla numărul mașinii după aceste indicii?

Rezolvare

Să notăm prima (și a doua) cifră a numărului căutat cu a, iar cifra a treia (și a patra) — cu b. Atunci întregul număr va fi

$$1\,000a + 100a + 10b + b = 1\,100a + 11b = 11\ (100a + b).$$

Acest număr este divizibil cu 11, și de aceea (fiind un pătrat perfect) el se împarte exact și cu 11^2. Deci, numărul $100a + b$ se împarte exact prin 11. Folosind oricare din cele două criterii de divizibilitate prin 11 arătate mai sus, deducem că şi numărul $a + b$ este divizibil prin 11. Deci

$$a + b = 11,$$

deoarece atît a cît şi b sînt mai mici decît 10.

Ultima cifră b, a unui pătrat perfect, poate avea numai următoarele valori :

$$0,\ 1,\ 4,\ 5,\ 6,\ 9.$$

De aceea, pentru cifra a, care este egală cu $11 - b$, putem avea următoarele valori :

$$11,\ 10,\ 7,\ 6,\ 5,\ 2.$$

Primele două posibilităţi se exclud, deci ne rămîn următoarele patru :

$$b = 4, \qquad a = 7;$$
$$b = 5, \qquad a = 6;$$
$$b = 6, \qquad a = 5;$$
$$b = 9, \qquad a = 2.$$

Rezultă că numărul autocamionului trebuie căutat printre următoarele patru numere :

$$7744,\ 6655,\ 5566,\ 2299.$$

Dar ultimele trei numere nu sînt pătrate perfecte : numărul 6655 se împarte la 5, dar nu se împarte la 25 ; numărul 5566 se împarte la 2, dar nu se împarte la 4 ; numărul $2299 = 121 \cdot 19$ nu este, nici el, un pătrat perfect. Rămîne deci numai numărul $7744 = 88^2$ care dă soluţia problemei.

Divizibilitatea prin 19

Să se demonstreze următorul criteriu de divizibilitate prin 19 :

Un număr se împarte exact la 19 numai dacă numărul zecilor adunat cu de două ori numărul unităţilor este un multiplu al lui 19.

Rezolvare

Orice număr N poate fi reprezentat sub forma

$$N = 10x + y,$$

unde x este numărul zecilor (nu c i f r a din ordinul zecilor, ci numărul total al zecilor cuprinse în numărul dat), y — cifra unităţilor. Trebuie demonstrat că N este un multiplu al lui 19, numai dacă

$$N' = x + 2y$$

este un multiplu al lui 19. Pentru aceasta, înmulţim pe N' cu 10, şi scădem pe N din produs ; obţinem :

$$10N' - N = 10\,(x + 2y) - (10\,x + y) = 19y.$$

De aici rezultă că dacă N' este un multiplu al lui 19, atunci şi

$$N = 10\,N' - 19\,y$$

este divizibil cu 19 ; şi reciproc, dacă N se împarte exact la 19, şi

$$10N' = N + 19\,y$$

este un multiplu al lui 19, şi, ca atare, devine evident că N' este divizibil cu 19.

Să presupunem că se cere să determinăm dacă numărul 47 045 881 este un multiplu al lui 19.

Aplicăm iterat criteriul nostru de divizibilitate :

$$\begin{array}{r|l}
4704588 & 1 \\
+\ 2 & \\
\hline
47045 & 9 \\
+\ 18 & \\
\hline
4706 & 3 \\
+\ 6 & \\
\hline
471 & 2 \\
+\ 4 & \\
\hline
47 & 5 \\
+\ 10 & \\
\hline
5 & 7 \\
+\ 14 & \\
\hline
19. &
\end{array}$$

Deoarece 19 este divizibil cu 19, rezultă că şi numerele 57, 475, 4 712, 47 063, 470 459, 4 704 590 şi 47 045 881 sînt multipli ai lui 19.

Deci, numărul nostru se împarte exact la 19.

Teorema Sophiei Germain

Iată o problemă formulată de cunoscuta matematiciană franceză Sophie Germain :

Să se demonstreze că orice număr de forma $a^4 + 4$, unde a este diferit de 1, este un număr neprim.

Rezolvare

Demonstraţia reiese din următoarele transformări :

$$a^4 + 4 = a^4 + 4a^2 + 4 - 4a^2 = (a^2 + 2)^2 - 4a^2 =$$
$$= (a^2 + 2)^2 - (2a)^2 = (a^2 + 2 - 2a)\ (a^2 + 2 + 2a).$$

Numărul $a^4 + 4$ poate fi deci pus sub forma unui produs de doi factori care nu sînt egali cu numărul dat şi nici cu 1 *, deci acest număr nu este prim.

Numere neprime

Există o infinitate de numere prime, adică de numere întregi mai mari decît unu, care nu se împart decît prin ele însele sau prin unu.

Începînd cu numerele 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31,. . ., şirul lor se extinde la infinit. Intercalate între numerele neprime, ele împart şirul numerelor naturale în grupe mai mult sau mai puţin mari de numere neprime consecutive. Cît de lungi pot fi aceste grupe? Oare pot să existe la rînd, să zicem, o mie de numere neprime, fără ca ele să fie întrerupte de un număr prim?

Se poate demonstra — deşi acest lucru poate părea neverosimil — că grupele formate din numere compuse pot fi oricît de lungi. Nu există limită pentru lungimea acestor

---

* Aceasta din urmă deoarece

$$a^2 + 2 - 2a = (a^2 - 2a + 1) + 1 = (a - 1)^2 + 1 \neq 1,$$

dacă $a \neq 1$.

grupe : ele pot fi formate dintr-o mie, un milion, un trilion etc. de numere neprime consecutive.

Pentru comoditate, vom folosi simbolul convențional $n\,!$, care reprezintă produsul tuturor numerelor de la 1 la n inclusiv. De exemplu $5\,! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$. Vom demonstra acum că şirul

$$[(n+1)!+2],\ [(n+1)!+3],\ [(n+1)!+4],\ldots$$
$$\text{pînă la } [(n+1)!+n+1] \text{ inclusiv}$$

este format din n numere neprime consecutive.

Aceste numere se succed în şirul numerelor naturale, deoarece fiecare din ele este mai mare decît precedentul cu o unitate. Rămîne de demonstrat că nici unul din aceste numere nu este prim.

Primul număr

$$(n+1)!+2 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (n+1)+2$$

este par, deoarece ambii termeni ai sumei conțin factorul 2. Un număr par, mai mare decît 2, nu poate fi prim.

Al doilea număr

$$(n+1)!+3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (n+1)+3$$

reprezintă o sumă de doi termeni, fiecare din ei fiind un multiplu al lui 3. Deci, nici acest număr nu este prim.

Al treilea număr

$$(n+1)!+4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (n+1)+4$$

se împarte exact la 4, deoarece reprezintă o sumă de multipli ai lui 4.

În acelaşi mod, stabilim că numărul

$$(n+1)!+5$$

este un multiplu al lui 5 etc. Cu alte cuvinte, orice număr din şirul nostru conține un factor diferit de el însuşi şi diferit de 1 ; deci numărul dat nu este prim.

Dacă doriți să scrieți, de pildă, un şir de cinci numere neprime, este suficient ca în şirul de mai sus numărul n să fie înlocuit cu 5. Veți obține şirul

$$722,\ 723,\ 724,\ 725,\ 726.$$

Dar acesta nu este singurul şir format din cinci numere neprime. Există şi alte şiruri de acest fel, ca de pildă

62, 63, 64, 65, 66.

Sau numere şi mai mici :

24, 25, 26, 27, 28.

Să încercăm acum să rezolvăm problema următoare : Să se scrie un şir de zece numere neprime.

Rezolvare

Pe baza celor demonstrate mai sus stabilim că putem lua, drept prim număr dintre cele zece numere căutate, pe

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 10 \cdot 11 + 2 = 39\,816\,802.$$

Şirul de numere căutat poate fi următorul :

39 816 802, 39 816 803, 39 816 804 etc.

Dar există şi şiruri formate din zece numere neprime care au valori mult mai mici. De exemplu, există un şir cuprins între o sută şi două sute, format nu din 10 ci din 13 numere neprime :

114, 115, 116, 117 etc. pînă la 126 inclusiv.

Cîte numere prime există

Existenţa unor şiruri oricît de lungi de numere neprime consecutive ne face să punem la îndoială faptul că şirul numerelor prime este infinit. De aceea, credem că este oportun să demonstrăm aci această afirmaţie.

Ea aparţine matematicianului grec antic Euclid şi este conţinută în celebra sa lucrare *Elemente*, numărîndu-se printre problemele rezolvate ,,prin reducere la absurd''. Să presupunem că şirul numerelor prime ar fi finit, şi să notăm ultimul număr prim din acest şir cu N. Formăm produsul

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot N = N!$$

și adăugăm cifra 1. Obținem:

$$N! + 1.$$

Fiind un număr întreg, acesta trebuie să conțină măcar un factor prim, adică să fie divizibil măcar printr-un număr prim. Dar am presupus că toate numerele prime sînt mai mici sau egale cu N, iar numărul $N! + 1$ nu se împarte exact la nici un număr care este mai mic sau egal cu N; de fiecare dată va rămîne un rest egal cu 1.

Ca atare, nu se poate presupune că şirul numerelor prime este finit; această ipoteză duce la o contradicție. Așadar, dacă în şirul numerelor naturale am întîlni o serie oricît de lungă de numere neprime consecutive, putem fi siguri că după această serie există încă o infinitate de numere prime.

Cel mai mare număr prim cunoscut

Este un fapt acela de a fi convinşi că există numere prime oricît de mari şi este altceva de a şti care anume numere sînt prime. Cu cît un număr natural este mai mare, cu atît trebuie să efectuăm mai multe calcule pentru a verifica dacă acest număr este prim sau nu. Iată cel mai mare număr despre care se știe în prezent că este prim:

$$2^{2281} - 1.$$

El are circa 700 de cifre. Calculele, pe baza cărora s-a stabilit această afirmație, au fost efectuate cu ajutorul mașinilor de calculat moderne (vezi Cap. I, II).

Un calcul important

În practică se pune problema multor calcule pur aritmetice a căror efectuare, fără ajutorul algebrei, este extrem de anevoioasă. Să presupunem că trebuie să aflăm rezultatul următoarelor operații:

$$\frac{2}{1 + \frac{1}{90\,000\,000\,000}}.$$

(Acest calcul este necesar pentru a stabili dacă tehnica, care se ocupă cu mişcarea corpurilor macroscopice, cu viteze mici în comparaţie cu viteza de propagare a undelor electromagnetice, este îndreptăţită să folosească vechea lege de compunere a vitezelor, fără să ţină seama de modificările survenite în mecanică datorite teoriei relativităţii. Potrivit mecanicii clasice, atunci cînd un corp ia parte concomitent la două mişcări rectilinii uniforme, dirijate la fel cu vitezele v_1 şi v_2 *km/s*, mişcarea rezultantă are viteza egală cu suma vitezelor mişcărilor componente $v_1 + v_2$ *km/s*. Cît priveşte noua teorie, aceasta dă pentru viteza rezultantă a corpului expresia :

$$\frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}\ km/s,$$

unde c este viteza de propagare a luminii în vid, egală cu aproximativ 300 000 *km/s*. În particular, viteza unui corp care ia parte concomitent la două mişcări rectilinii uniforme, dirijate la fel, avînd fiecare viteza de 1 *km/s*, va fi egală, conform mecanicii clasice, cu 2 *km/s*, iar potrivit noii teorii, cu

$$\frac{2}{1 + \frac{1}{90\,000\,000\,000}}\ km/s.$$

Prin ce se deosebesc aceste două rezultate? Oare această deosebire este perceptibilă pentru cele mai sensibile aparate de măsură? Pentru clarificarea acestei importante probleme, trebuie să calculăm expresia de mai sus).

Vom proceda în două feluri : la început pe cale aritmetică obişnuită, iar apoi vom arăta cum se poate obţine rezultatul dorit cu ajutorul algebrei. Este suficient să aruncăm o privire asupra şirurilor lungi de cifre de mai jos ca să ne convingem de superioritatea metodei algebrice.

În primul rînd, să transformăm fracţia noastră „cu mai multe etaje" :

$$\frac{2}{1 + \frac{1}{90\,000\,000\,000}} = \frac{180\,000\,000\,000}{90\,000\,000\,001}.$$

Acum să trecem la împărțire :

```
180 000 000 000      | 90 000 000 001
                     |------------------
 90 000 000 001      | 1,999 999 999 977 . . .
----------------
 899 999 999 990
 810 000 000 009
----------------
  899 999 999 810
  810 000 000 009
 ----------------
   899 999 998 010
   810 000 000 009
  ----------------
    899 999 980 010
    810 000 000 009
   ----------------
     899 999 800 010
     810 000 000 009
    ----------------
      899 998 000 010
      810 000 000 009
     ----------------
       899 980 000 010
       810 000 000 009
      ----------------
        899 800 000 010
        810 000 000 009
       ----------------
         898 000 000 010
         810 000 000 009
        ----------------
          880 000 000 010
          810 000 000 009
         ----------------
           700 000 000 010
           630 000 000 007
          ----------------
            70 000 000 003
```

După cum vedeți, calculul este meticulos și obositor ; se poate ușor să ne încurcăm și să greșim. Iar pentru rezolvarea problemei este important să știm precis, în ce loc anume se termină șirul cifrelor de 9 și începe o serie de alte cifre.

Să comparăm acum cu modul rapid în care se poate rezolva aceeași problemă cu ajutorul algebrei. Vom folosi următoarea egalitate aproximativă : dacă a este un număr foarte mic, atunci :

$$\frac{1}{1+a} \approx 1 - a$$

unde semnul $\approx$ înseamnă „aproximativ egal”.

Ne putem convinge de valabilitatea acestei afirmații foarte ușor: vom compara deîmpărțitul 1 cu produsul dintre împărțitor și cît:

$$1 = (1 + a)\ (1 - a),$$

adică:

$$1 = 1 - a^2.$$

Deoarece a este un număr foarte mic (de exemplu, 0,001), pătratul lui a^2 va fi un număr și mai mic (0,000001) și poate fi neglijat.

Să aplicăm cele spuse calculului nostru *:

$$\frac{2}{1 + \dfrac{1}{90\,000\,000\,000}} = \frac{2}{1 + \dfrac{1}{9 \cdot 10^{10}}} \approx 2\,(1 - 0{,}111 \ldots \cdot 10^{-10}) =$$

$$= 2 - 0{,}0000000000222 \ldots = 1{,}999\,999\,999\,9777 \ldots$$

Am ajuns la același rezultat ca și înainte, dar pe o cale mult mai rapidă.

Cititorul va fi, desigur, curios să afle ce importanță prezintă rezultatul obținut în problema de mecanică despre care a fost vorba mai sus. Acest rezultat arată că deoarece am considerat viteze mici în comparație cu viteza de propagare a luminii, abaterea de la vechea lege de compunere a vitezelor este neglijabilă din punct de vedere practic: ea se manifestă la a unsprezecea cifră a numărului pe care l-am determinat, iar măsurătorile cele mai precise ale lungimii nu merg mai departe de cifra a 9-a; cît privește tehnica — calculele practice se limitează la 3—4 cifre. De aceea, sîntem îndreptățiți să afirmăm, fără nici o rezervă că, practic, mecanica nouă, a lui Einstein, nu aduce nici o schimbare în calculele tehnice privitoare la deplasarea corpurilor, care se mișcă „încet" (în comparație cu viteza de propagare a luminii).

---

* Mai departe vom folosi egalitatea aproximativă

$$\frac{A}{1 + a} \approx A\,(1 - a).$$

Atunci cînd este mai simplu fără algebră

Pe lîngă cazurile în care algebra acordă un ajutor prețios aritmeticii, există și altele, cînd intervenția algebrei duce la complicații inutile. Adevărata cunoaștere a matematicii constă în iscusința de a dispune de metodele matematice, astfel încît să fie aleasă calea cea mai directă și mai sigură, pentru fiecare caz în parte fără a se ține seama dacă metoda de rezolvare a problemei aparține de domeniul aritmeticii, algebrei, geometriei etc. De aceea, credem că este util să analizăm un caz care, rezolvat prin metode algebrice, duce la complicații inutile.

Să se afle cel mai mic dintre numerele care împărțite

la	2	dau	un rest	egal	cu	1,
,,	3	,,	,,	,,	,,	2,
,,	4	,,	,,	,,	,,	3,
,,	5	,,	,,	,,	,,	4,
,,	6	,,	,,	,,	,,	5,
,,	7	,,	,,	,,	,,	6,
,,	8	,,	,,	,,	,,	7,
,,	9	,,	,,	,,	,,	8.

Rezolvare

Această problemă mi-a fost propusă cu următoarele cuvinte : ,,Cum ați rezolva dv. această problemă ? Sînt prea multe ecuații și este foarte greu să te descurci în ele''.

Lucrurile se explică simplu ; pentru rezolvarea problemei nu este nevoie de nici un fel de ecuații, de nici un fel de algebră — ea poate fi rezolvată printr-un raționament aritmetic foarte simplu.

Să adăugăm la numărul căutat o unitate. Restul va fi : $1 + 1 = 2$; deci numărul nostru se va împărți exact la 2.

La fel, el se va împărți exact și la 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Cel mai mic dintre aceste numere va fi $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 = 2\,520$, și deci numărul căutat va fi egal cu 2 519, ceea ce se poate verifica ușor.

CAPITOLUL IV

ECUAȚII DIOFANTICE

Cumpărarea unei cravate

Problemă

Un cetățean trebuie să plătească pentru o cravată 19 ruble. Cum trebuie să procedeze cumpărătorul care are la el numai hîrtii de 3 ruble, și casierul care are numai hîrtii de 5 ruble, astfel ca plata să se facă fără ca banii lor să fie schimbați?

Problema se reduce la a afla cîte hîrtii de 3 ruble trebuie să dea cetățeanul ca să poată primi restul în hîrtii de 5 ruble. Problema are două necunoscute — numărul hîrtiilor de 3 ruble (x) și numărul hîrtiilor de 5 ruble (y) — legate printr-o singură ecuație:

$$3x - 5y = 19.$$

Deși o ecuație cu două necunoscute are o infinitate de soluții, nu rezultă de loc că printre ele se va găsi măcar o soluție în care x și y să fie întregi și pozitivi, (fiind vorba de numărul unor bilete de bancă). Iată de ce algebra a elaborat metoda de rezolvare a unor astfel de ecuații „nedeterminate". Meritul introducerii lor în algebră aparține primului reprezentant european din antichitate al acestei științe, Diofant, din care cauză ecuațiile de acest gen sînt adesea numite „ecuații diofantice".

Rezolvare

Vom arăta, pe exemplul dat, modul în care se rezolvă ecuațiile de acest gen.

Trebuie aflate valorile lui x şi y din ecuaţia

$$3x - 5y = 19,$$

ştiind că x şi y sînt numere **întregi** şi **pozitive**.

Să izolăm necunoscuta cu coeficientul mai mic, adică termenul $3x$; obţinem:

$$3x = 19 + 5y,$$

de unde

$$x = \frac{19 + 5y}{3} = 6 + y + \frac{1 + 2y}{3}.$$

Deoarece x, 6 şi y sînt numere întregi, egalitatea poate avea loc numai dacă $\frac{1 + 2y}{3}$ este, de asemenea, un număr întreg. Să notăm această fracţie cu litera t. Atunci

$$x = 6 + y + t,$$

unde

$$t = \frac{1 + 2y}{3},$$

şi deci

$$3t = 1 + 2y, \ 2y = 3t - 1.$$

Din această ultimă ecuaţie îl determinăm pe y:

$$y = \frac{3t - 1}{2} = t + \frac{t - 1}{2}.$$

Deoarece y şi t sînt numere întregi, rezultă că şi $\frac{t - 1}{2}$ trebuie să fie un număr întreg (pe care îl vom nota cu t_1). Prin urmare

$$y = t + t_1,$$

în care

$$t_1 = \frac{t - 1}{2},$$

de unde

$$2t_1 = t - 1 \text{ şi } t = 2t_1 + 1.$$

Înlocuind valoarea $t = 2t_1 + 1$ în ecuațiile precedente obținem :

$$y = t + t_1 = (2t_1 + 1) + t_1 = 3t_1 + 1,$$
$$x = 6 + y + t = 6 + (3t_1 + 1) + (2t_1 + 1) = 8 + 5t_1.$$

Astfel, pentru x și y rezultă expresiile*

$$x = 8 + 5t_1,$$
$$y = 1 + 3t_1.$$

Știm că x și y sînt numere întregi și pozitive, adică mai mari decît zero. Prin urmare,

$$8 + 5t_1 > 0,$$
$$1 + 3t_1 > 0.$$

Din aceste inegalități rezultă :

$$5t_1 > -8 \text{ și } t_1 > -\frac{8}{5},$$

$$3t_1 > -1 \text{ și } t_1 > -\frac{1}{3}.$$

Inegalitățile de mai sus limitează valorile lui t_1; ea este mai mare decît $-\frac{1}{3}$ $\left(\text{și ca atare mai mare decît } -\frac{8}{5}\right)$. Dar cum t_1 este un număr întreg, deducem că pentru el sînt posibile numai următoarele valori :

$$t_1 = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots$$

Valorile corespunzătoare pentru x și y vor fi :

$$x = 8 + 5t_1 = 8,\ 13,\ 18,\ 23, \ldots,$$
$$y = 1 + 3t_1 = 1,\ 4,\ 7,\ 10, \ldots$$

Am stabilit astfel modul în care poate fi făcută plata : cetățeanul va da casierului 8 hîrtii de 3 ruble și va primi de la acesta din urmă o hîrtie de 5 ruble :

$$8 \cdot 3 - 5 = 19,$$

* De fapt, am demonstrat doar că orice soluție cu numere întregi a ecuației $3x - 5y = 19$ este de forma $x = 8 + 5t_1$, $y = 1 + 3t_1$, unde t_1 este un număr întreg oarecare. Demonstrația afirmației reciproce (anume că pentru oricare valoare întreagă a lui t_1 obținem o soluție cu numere întregi a ecuației date) nu am făcut-o. Dar de acest fapt ne putem convinge ușor, raționînd în ordine inversă sau înlocuind valorile aflate ale lui x și y în ecuația inițială.

sau va plăti 13 hîrtii de 3 ruble şi va primi un rest de 4 hîrtii de 5 ruble :

$$13 \cdot 3 - 4 \cdot 5 = 19$$

ş.a.m.d.

Teoretic, problema are o infinitate de soluţii, însă practic numărul acestora este limitat, deoarece atît cumpărătorul cît şi casierul nu au o infinitate de bilete de bancă. Dacă fiecare dintre ei are, să spunem, cîte 10 bilete, plata poate fi făcută numai într-un singur fel : se plăteşte cu 8 hîrtii de 3 ruble şi se primeşte rest o hîrtie de 5 ruble. După cum vedeţi, ecuaţiile nedeterminate pot da în practică soluţii bine determinate.

Revenind la problema noastră, propunem cititorului să rezolve el însuşi o variantă a problemei de mai sus, şi anume să analizeze cazul în care cumpărătorul are numai hîrtii de 5 ruble, iar casierul numai hîrtii de 3 ruble. În acest caz, se obţin următoarele soluţii :

$$x = 5,\ 8,\ 11, \ldots,$$
$$y = 2,\ 7,\ 12, \ldots$$

Într-adevăr,

$$5 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 19,$$
$$8 \cdot 5 - 7 \cdot 3 = 19,$$
$$11 \cdot 5 - 12 \cdot 3 = 19,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Am fi putut obţine aceste rezultate şi din soluţia problemei iniţiale, folosind un procedeu algebric simplu. Deoarece a da hîrtii de 5 ruble şi a primi hîrtii de 3 ruble este echivalent cu „a primi hîrtii de 5 ruble negative”, şi „a da hîrtii de 3 ruble negative”, noua variantă a problemei se rezolvă cu ajutorul aceleiaşi ecuaţii, care reiese din problema iniţială :

$$3x - 5y = 19,$$

dar cu condiţia ca x şi y să fie numere **negative**. De aceea, din egalităţile :

$$x = 8 + 5t_1,$$
$$y = 1 + 3t_1$$

ținînd seama de $x < 0$ și $y < 0$, deducem:

$$8 + 5t_1 < 0,$$
$$1 + 3t_1 < 0$$

și, prin urmare,

$$t_1 < -\frac{8}{5}.$$

Luînd $t_1 = -2, -3, -4$ etc., obținem din formulele precedente următoarele valori pentru x și y:

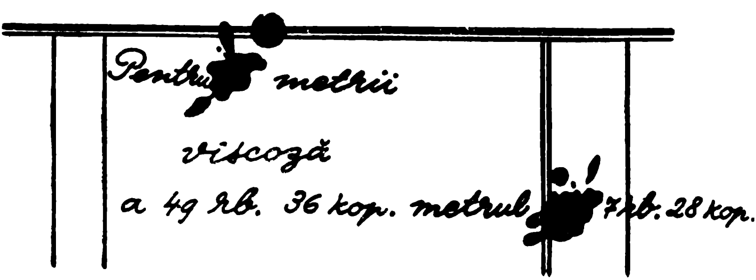
$t_1 = -2$	-3	-4
$x = -2$	-7	-12
$y = -5$	-8	-11

Prima pereche de soluții, $x = -2$, $y = -5$, arată că cumpărătorul „plătește minus 2 hîrtii de 3 ruble'' și „primește minus 5 hîrtii de 5 ruble'', adică, în vorbirea obișnuită, plătește 5 hîrtii de 5 ruble și primește 2 hîrtii de 3 ruble.

Controlul unei cooperative

Problemă

La controlul registrelor de comerț ale unei cooperative, una din înscrieri a fost pătată cu cerneală și avea aspectul de mai jos:



Nu s-a putut distinge cîți metri au fost vînduți, însă era sigur că acest număr nu era fracționar. La suma realizată s-au putut distinge doar ultimele trei cifre, stabilindu-se că înaintea lor au fost încă trei cifre.

Poate, oare, comisia de control să stabilească din aceste date înscrierea ?

Rezolvare

Notăm numărul de metri prin x. Suma realizată va fi dată în copeici prin :

$$4936\,x.$$

Numărul exprimat prin cele trei cifre pătate cu cerneală va fi notat prin y. Este evident că acesta reprezintă mii de copeici, iar suma întreagă în copeici va fi :

$$1000\,y + 728.$$

Avem ecuația

$$4936\,x = 1000\,y + 728,$$

sau, după simplificarea cu 8,

$$617\,x - 125\,y = 91.$$

În această ecuație x și y sînt numere întregi, iar y nu poate fi mai mare ca 999, deoarece el nu poate fi format decît din 3 cifre. Rezolvăm ecuația, așa cum am arătat mai sus :

$$125\,y = 617\,x - 91,$$

$$y = 5x - 1 + \frac{34 - 8x}{125} = 5x - 1 + \frac{2\,(17 - 4x)}{125} = 5x - 1 + 2t.$$

(Aci am luat $\frac{617}{125} = 5 - \frac{8}{125}$, deoarece ne interesează ca resturile să fie cît mai mici. Raportul

$$\frac{2\,(17 - 4x)}{125}$$

este un număr întreg, și deoarece 2 nu se împarte la 125, rezultă că $\frac{17 - 4x}{125}$ este un număr întreg pe care l-am și notat cu t).

Mai departe din ecuația

$$\frac{17-4x}{125} = t,$$

rezultă :

$$17-4x = 125\ t,$$

$$x = 4-31\ t + \frac{1-t}{4} = 4-31t + t_1,$$

unde

$$t_1 = \frac{1-t}{4},$$

și, prin urmare,

$$4t_1 = 1-t;\ t = 1-4t_1;$$
$$x = 125\,t_1-27,\ \ y = 617\,t_1-134\ ^*.$$

Știm că

$$100 \leqslant y < 1\,000.$$

Deducem :

$$100 \leqslant 617\,t_1-134 < 1\,000,$$

de unde :

$$t_1 \geqslant \frac{234}{617} \text{ și } t_1 < \frac{1\,134}{617}.$$

Este evident că pentru t_1 există o singură valoare întreagă :

$$t_1 = 1,$$

și deci $x = 98$, $y = 483$, adică au fost vînduți 98 metri în valoare de 4 837 ruble, 28 de copeici.

Cumpărarea unor timbre poștale

Problemă

Cineva are 5 ruble și dorește să cumpere 20 de timbre poștale a 40 de copeici, a 25 de copeici și a 5 copeici. Cîte timbre se pot cumpăra de fiecare fel?

---

* Observați că coeficienții lui t_1 sînt egali cu coeficienții lui x și y din ecuația inițială $617x-125y = 91$ și unul din coeficienți are semnul schimbat. Acest lucru nu este întîmplător; se poate demonstra că așa este ori de cîte ori coeficienții lui x și y sînt numere prime între ele.

Rezolvare

În cazul de față, avem două ecuații cu trei necunoscute :

$$40x + 25y + 5z = 500,$$
$$x + y + z = 20,$$

unde x este numărul de timbre de 40 de copeici, y — de 25 de copeici, z — de 5 copeici. Împărțind prima ecuație la 5 și scăzînd din ea a doua ecuație, vom obține o ecuație cu 2 necunoscute :

$$7x + 4y = 80.$$

Obținem pentru y :

$$y = 20 - 7 \cdot \frac{x}{4}.$$

Evident, $\frac{x}{4}$ este un număr întreg. Îl vom nota cu t. Avem :

$$y = 20 - 7t, \quad x = 4t.$$

Înlocuim valorile obținute pentru x și y în a doua ecuație :

$$4t + 20 - 7t + z = 20;$$

obținem :

$$z = 3t.$$

Deoarece $x > 0$, $y > 0$ și $z > 0$, nu este greu să stabilim marginile între care poate varia t :

$$0 < t < 2\frac{6}{7},$$

de unde deducem că pentru t sînt posibile numai două valori întregi :

$$t = 1 \text{ și } t = 2.$$

Valorile corespunzătoare pentru x, y, z vor fi :

$t =$	1	2
$x =$	4	8
$y =$	13	6
$z =$	3	6

Verificare

$$4 \cdot 40 + 13 \cdot 25 + 3 \cdot 5 = 500,$$
$$8 \cdot 40 + 6 \cdot 25 + 6 \cdot 5 = 500.$$

Deci timbrele pot fi cumpărate numai în două feluri. Problema următoare este de același gen.

Fig. 12

Cumpărarea unor fructe

Problemă

Cu 50 de ruble au fost cumpărate 100 de bucăți de diferite fructe. Prețurile fructelor sînt următoarele :

pepene verde	5 ruble bucata
mere	1 rublă bucata
prune	10 copeici bucata

Cîte bucăți din fiecare fel de fructe au fost cumpărate ?

Rezolvare

Notînd numărul pepenilor cu x, al merelor cu y și al prunelor cu z, formăm două ecuații :

$$\begin{cases} 500x + 100y + 10z = 5\,000, \\ x + y + z = 100. \end{cases}$$

Împărțind prima ecuație la 10 și scăzînd din ea ecuația a doua, obținem o ecuație cu două necunoscute :

$$49x + 9y = 400.$$

Mai departe se procedează astfel :

$$y = \frac{400-49x}{9} = 44 + 5x + \frac{4(1-x)}{9} = 44-5x + 4t;$$

$$t = \frac{1-x}{9}, \quad x = 1-9t,$$

$$y = 44-5\ (1-9t) + 4t = 39 + 49t.$$

Din inegalitățile :

$$1-9t > 0 \text{ și } 39 + 49t > 0,$$

deducem că

$$\frac{1}{9} > t > -\frac{39}{49},$$

și deci $t = 0$. De aceea,

$$x = 1, \ y = 39.$$

Înlocuind aceste valori ale lui x și y în ecuația a doua, obținem : $z = 60$.

Deci, s-au cumpărat : 1 pepene, 39 de mere şi 60 de prune.

Alte combinații nu există.

Să se afle ziua nașterii

Problemă

Îndemînarea de a rezolva ecuații nedeterminate permite efectuarea următoarei scamatorii matematice.

Propuneți unui prieten să înmulțească ziua naşterii sale cu 12, iar luna — cu 31. El vă comunică suma celor două produse şi pe baza lor îi calculați data naşterii.

Astfel, dacă prietenul s-a născut la 9 februarie, el va face următoarele calcule :

$$9 \cdot 12 = 108, \ 2 \cdot 31 = 62,$$

$$108 + 62 = 170.$$

Pe baza acestui din urmă rezultat, 170, se poate determina data naşterii. Cum ?

Problema se reduce la rezolvarea ecuației nedeterminate

$$12x + 31y = 170$$

în numere întregi și pozitive, în care data (ziua) x nu este mai mare decît 31, iar numărul lunii y nu este mai mare decît 12.

$$x = \frac{170-31y}{12} = 14-3y + \frac{2+5y}{12} = 14-3y + t,$$

$$2 + 5y = 12t,$$

$$y = \frac{-2+12t}{5} = 2t-2 \cdot \frac{1-t}{5} = 2t-2t_1,$$

$$1-t = 5t_1, \ t = 1-5t_1,$$

$$y = 2(1-5t_1)-2t_1 = 2-12t_1,$$

$$x = 14-3(2-12t_1) + 1-5t_1 = 9 + 31t_1.$$

Știind că $31 \geqslant x > 0$ și $12 \geqslant y > 0$, aflăm marginile între care poate varia t_1:

$$-\frac{9}{31} < t_1 < \frac{6}{1}.$$

Prin urmare

$$t_1 = 0, \quad x = 9, \quad y = 2.$$

Data nașterii : luna a doua, ziua a 9-a, adică 9 februarie.

Să demonstrăm că scamatoria reușește întotdeauna, adică ecuația are întotdeauna o singură soluție cu numere întregi și pozitive. Dacă notăm numărul comunicat de prieten prin a, aflarea datei nașterii lui se reduce la rezolvarea ecuației :

$$12x + 31y = a.$$

Să raționăm „prin reducere la absurd''. Presupunem că această ecuație are două soluții diferite în numere întregi și pozitive, și anume soluția x_1, y_1 și soluția x_2, y_2, unde x_1 și x_2 nu-l depășesc pe 31, iar y_1 și y_2 nu-l depășesc pe 12.

Avem :

$$12x_1 + 31y_1 = a$$
$$12x_2 + 31y_2 = a$$

Scăzînd ecuația a doua din prima, obținem :

$$12(x_1 - x_2) + 31(y_1 - y_2) = 0.$$

Din această egalitate reiese că numărul $12(x_1 - x_2)$ se împarte la 31. Deoarece x_1 şi x_2 sînt numere pozitive mai mici sau egale cu 31, diferența lor $(x_1 - x_2)$ este mai mică decît 31. De aceea, numărul $12(x_1 - x_2)$ poate să fie divizibil prin 31 numai în cazul cînd $x_1 = x_2$, adică atunci cînd prima soluție coincide cu a doua. În felul acesta, presupunerea existenței a două soluții diferite duce la o contradicție.

Vînzarea unor pui de găină

O veche problemă

Trei surori au venit la tîrg cu nişte pui de găină. Una dintre ele a adus pentru vînzare 10 pui, a doua — 16, a treia — 26. Pînă la prînz ele şi-au vîndut o parte din pui încasînd acelaşi preț de bucată. După amiază ele au scăzut prețul şi au vîndut restul de pui la acelaşi preț. Acasă, toate trei s-au întors cu aceeaşi sumă de bani : fiecare dintre surori a realizat din vînzare cîte 35 de ruble.

La ce preț au vîndut ele puii de găină înainte şi după-amiază ?

Rezolvare

Să notăm numărul de pui vînduți pînă la prînz de fiecare dintre surori cu x, y, z. În a doua jumătate a zilei ele au vîndut $10 - x$, $16 - y$, $26 - z$ pui. Prețul pînă la prînz îl vom nota cu m, iar cel de după-amiază — cu n. Pentru a fi mai clar, strîngem la un loc aceste notații :

	Numărul de pui vînduți			Prețul
Pînă la prînz	x	y	z	m
După prînz	$10-x$	$16-y$	$26-z$	n

Prima a realizat :

$mx + n(10-x)$; prin urmare, $mx + n(10-x) = 35$;
a doua :

$my + n(16-y)$; prin urmare, $my + n(16-y) = 35$;
a treia :

$mz + n(26-z)$; prin urmare, $mz + n(26-z) = 35$.

Să transformăm aceste trei ecuații :

$$\begin{cases} (m-n)\,x + 10\,n = 35, \\ (m-n)\,y + 16\,n = 35, \\ (m-n)\,z + 26\,n = 35. \end{cases}$$

Scăzînd din ecuația a treia prima și apoi a doua ecuație, obținem succesiv :

$$\begin{cases} (m-n)\,(z-x) + 16n = 0, \\ (m-n)\,(z-y) + 10\,n = 0, \end{cases}$$

sau :

$$\begin{cases} (m-n)\,(x-z) = 16\,n, \\ (m-n)\,(y-z) = 10\,n. \end{cases}$$

Să împărțim prima din aceste ecuații la a doua :

$$\frac{x-z}{y-z} = \frac{8}{5}, \text{ sau } \frac{x-z}{8} = \frac{y-z}{5}.$$

Deoarece x, y, z sînt numere întregi, diferențele $x - z$, $y - z$ vor fi de asemenea numere întregi. De aceea, pentru obținerea egalității :

$$\frac{x-z}{8} = \frac{y-z}{5},$$

este necesar ca $x - z$ să fie divizibil prin 8, iar $y - z$, prin 5. Prin urmare,

$$\frac{x-z}{8} = t = \frac{y-z}{5},$$

de unde :

$$x = z + 8t,$$
$$y = z + 5t.$$

Observăm că numărul t este un număr întreg şi pozitiv, deoarece $x > z$ (în cazul contrar prima dintre surori n-ar fi putut realiza acelaşi cîştig ca cea de-a treia).

Deoarece $x < 10$, reiese că

$$z + 8t < 10.$$

Pentru z şi t întregi şi pozitivi această din urmă inegalitate va fi satisfăcută numai în cazul cînd $z = 1$ şi $t = 1$. Înlocuind aceste valori în ecuaţiile :

$$x = z + 8t \text{ şi } y = z + 5t,$$

obţinem :

$$x = 9, \ y = 6.$$

Revenind la ecuaţiile :

$$mx + n(10-x) = 35,$$
$$my + n(16-y) = 35,$$
$$mz + n(26-z) = 35$$

şi introducînd în aceasta valorile obţinute pentru x, y şi z, obţinem preţurile cu care au fost vînduţi puii de găină :

$$m = 3\frac{3}{4}\text{ rb}, \ \ n = 1\frac{1}{4}\text{ rb}.$$

Deci, pînă la prînz puii s-au vîndut cu 3,75 de ruble, iar după prînz — cu 1,25 de ruble.

Două numere şi patru operaţii

Problemă

Problema precedentă, cu trei ecuaţii şi cinci necunoscute, nu am rezolvat-o prin metoda generală, ci cu ajutorul unui raţionament matematic liber. La fel vom rezolva şi problemele următoare, care duc la ecuaţii nedeterminate de gradul doi.

Iată prima dintre ele.

Cu două numere întregi şi pozitive au fost efectuate următoarele patru operaţii :

1. adunarea ;
2. scăderea numărului mai mic din numărul mai mare ;
3. înmulţirea ;
4. împărţirea numărului mai mare la numărul mai mic.

Rezultatele obținute fiind adunate au dat numărul 243. Să se afle numerele date.

Rezolvare

Dacă vom nota numărul mai mare cu x și numărul mai mic cu y, atunci :

$$(x + y) + (x - y) + xy + \frac{x}{y} = 243.$$

Dacă înmulțim această ecuație cu y, desfacem parantezele și apoi reducem termenii asemenea, obținem :

$$x(2y + y^2 + 1) = 243y.$$

Dar

$$2y + y^2 + 1 = (y + 1)^2, \text{ și de aceea :}$$

$$x = \frac{243\ y}{(y + 1)^2}.$$

Pentru ca x să fie un număr întreg, numitorul $(y + 1)^2$ trebuie să fie unul din divizorii numărului 243 (deoarece y nu poate să aibă factori comuni cu $y + 1$). Dacă $243 = 3^5$, reiese că 243 se divide la următoarele numere, care sînt pătrate perfecte : 1, 3^2, 9^2. Deci, $(y + 1)^2$ trebuie să fie egal cu 1, 3^2 sau 9^2, de unde rezultă (avînd în vedere că y trebuie să fie un număr pozitiv) că y este egal cu 8 sau cu 2.

Atunci x va fi egal cu :

$$\frac{243 \cdot 8}{81} \text{ sau } \frac{243 \cdot 2}{9}.$$

Deci numerele căutate vor fi 24 și 8 sau 54 și 2.

Ce fel de dreptunghi?

Problemă

Laturile unui dreptunghi sînt exprimate prin numere întregi. Ce lungime trebuie să aibă aceste laturi, ca perimetrul dreptunghiului să fie egal cu suprafața lui?

Rezolvare

Notînd laturile dreptunghiului cu x şi y, formăm ecuaţia :

$$2x + 2y = xy,$$

de unde :

$$x = \frac{2y}{y-2}.$$

Deoarece x şi y sînt pozitivi, numărul $y - 2$ trebuie să fie pozitiv, adică y trebuie să fie mai mare decît 2.

Observăm că :

$$x = \frac{2y}{y-2} = \frac{2(y-2)+4}{y-2} = 2 + \frac{4}{y-2},$$

şi cum x trebuie să fie un număr întreg, expresia $\frac{4}{y-2}$ trebuie să fie de asemenea un număr întreg. Dar în cazul $y > 2$ acest lucru este posibil numai dacă y este egal cu 3, 4 sau 6. Valorile corespunzătoare ale lui x vor fi : 6, 4, 3.

Aşadar, figura căutată este fie un dreptunghi cu laturile 3 şi 6, fie un pătrat cu latura 4.

Două numere formate din două cifre

Problemă

Numerele 46 şi 96 posedă o particularitate interesantă : produsul lor rămîne acelaşi, atunci cînd permutăm cifrele lor.

Într-adevăr,

$$46 \cdot 96 = 4416 = 64 \cdot 69.$$

Se cere să se stabilească dacă există şi alte perechi de numere formate din două cifre, care posedă aceeaşi proprietate.

Rezolvare

Să notăm cifrele numerelor căutate cu x şi y, z şi t şi să formăm ecuaţia :

$$(10x + y)(10z + t) = (10y + x)(10t + z).$$

Desfăcînd parantezele şi făcînd reducerile obţinem:

$$xz = yt,$$

unde x, y, z, t sînt numere întregi, mai mici decît 10. Pentru aflarea soluţiilor, formăm din 9 cifre toate perechile cu produsele egale:

$1 \cdot 4 = 2 \cdot 2$	$2 \cdot 8 = 4 \cdot 4$
$1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$	$2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$
$1 \cdot 8 = 2 \cdot 4$	$3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$
$1 \cdot 9 = 3 \cdot 3$	$4 \cdot 9 = 6 \cdot 6$
$2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$	

În total avem 9 egalităţi. Din fiecare se pot forma una sau două grupe de numere căutate. De pildă, din egalitatea $1 \cdot 4 = 2 \cdot 2$ avem o singură soluţie:

$$12 \cdot 42 = 21 \cdot 24.$$

Din egalitatea $1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$ avem două soluţii:

$$12 \cdot 63 = 21 \cdot 36; \quad 13 \cdot 62 = 31 \cdot 26.$$

În felul acesta aflăm următoarele 14 soluţii:

$12 \cdot 42 = 21 \cdot 24$	$23 \cdot 96 = 32 \cdot 69$
$12 \cdot 63 = 21 \cdot 36$	$24 \cdot 63 = 42 \cdot 36$
$12 \cdot 84 = 21 \cdot 48$	$24 \cdot 84 = 42 \cdot 48$
$13 \cdot 62 = 31 \cdot 26$	$26 \cdot 93 = 62 \cdot 39$
$13 \cdot 93 = 31 \cdot 39$	$34 \cdot 86 = 43 \cdot 68$
$14 \cdot 82 = 41 \cdot 28$	$36 \cdot 84 = 63 \cdot 48$
$23 \cdot 64 = 32 \cdot 46$	$46 \cdot 96 = 64 \cdot 69$

Numerele pitagorice

O metodă comodă şi foarte precisă, folosită pentru trasarea liniilor perpendiculare pe teren, constă în următoarele. Să presupunem că în punctul A trebuie să ridicăm o perpendiculară pe MN (fig. 13). Din punctul A, pe direcţia lui AM, se ia de trei ori o distanţă oarecare a. Apoi, pe o sfoară se leagă trei noduri avînd între ele distanţele egale cu $4a$ şi $5a$. Fixînd nodurile extreme în punctele A şi B, se întinde sfoara din nodul din mijloc C. Sfoara va forma un triunghi, în care unghiul A va fi drept.

Această metodă veche, folosită cu mii de ani în urmă de constructorii piramidelor egiptene, se bazează pe faptul că orice triunghi ale cărui laturi se prezintă în raportul 3 : 4 : 5 este, potrivit cunoscutei teoreme a lui Pitagora, un triunghi dreptunghi, deoarece :

$$3^2 + 4^2 = 5^2.$$

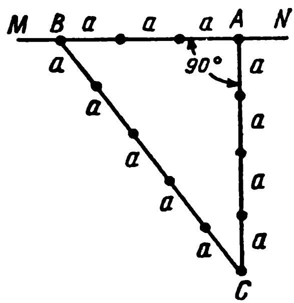


Fig. 13

Afară de numerele 3, 4, 5, există o infinitate de numere întregi şi pozitive a, b, c, care satisfac relaţia

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Aceste numere se numesc p i t a g o r i c e. După teorema lui Pitagora, ele pot fi lungimile laturilor unui triunghi dreptunghi ; de aceea a şi b se numesc „catete", iar c „ipotenuză".

Este clar că atunci cînd a, b şi c sînt numere pitagorice, atunci şi pa, pb şi pc (unde p este un număr întreg) vor fi numere pitagorice. Cînd numerele pitagorice au factor comun, numerele date pot fi simplificate prin acest factor comun şi vom obţine din nou trei numere pitagorice. De aceea, vom analiza la început numai numerele pitagorice prime între ele (celelalte le vom obţine înmulţindu-le cu diferite numere întregi pozitive).

Să demonstrăm că în fiecare triplet a, b, c una din catete trebuie să fie un număr par, iar cealaltă — un număr impar. Vom raţiona prin „reducere la absurd". Dacă ambele „catete" a şi b sînt pare, atunci şi numărul $a^2 + b^2$ va fi par, şi deci şi „ipotenuza". Aceasta este însă în contradicţie cu faptul că numerele a, b, c nu au factor comun, trei numere pare avînd factorul comun 2. În felul acesta, una din „catetele" a, b trebuie să fie un număr impar.

Mai există o posibilitate : ambele „catete" sînt numere impare, iar „ipotenuza" — un număr par. Nu este greu să demonstrăm că această situaţie nu poate avea loc. Într-adevăr, dacă „catetele" vor fi de forma :

$$2x + 1 \text{ şi } 2y + 1,$$

atunci suma pătratelor lor va fi egală cu :

$$4x^2 + 4x + 1 + 4y^2 + 4y + 1 = 4\ (x^2 + x + y^2 + y) + 2,$$

adică un număr care, împărțit la 4, va da un rest egal cu 2. Dar noi știm că pătratul oricărui număr par trebuie să se împartă la 4 fără rest. Deci, suma pătratelor a două numere impare nu poate fi pătratul unui număr par; cu alte cuvinte, cele trei numere nu sînt pitagorice.

Prin urmare, una din „catetele'' a, b este pară, iar cealaltă — impară. Atunci numărul $a^2 + b^2$ este impar și deci „ipotenuza'' c este impară.

Pentru fixarea ideilor, presupunem „cateta'' a impară, iar „cateta'' b — pară. Din egalitatea :

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

obținem ușor :

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c + b)\ (c - b).$$

Factorii $c + b$ și $c - b$, din membrul al doilea al egalității, sînt numere prime între ele. Într-adevăr, dacă aceste numere ar avea un factor comun prim, diferit de unitate, atunci și suma :

$$(c + b) + (c - b) = 2c,$$

și diferența :

$$(c + b) - (c - b) = 2b,$$

și produsul :

$$(c + b)\ (c - b) = a^2$$

s-ar divide prin el, adică numerele $2c$, $2b$ și a ar avea un factor comun. Deoarece a este impar, acest factor este diferit de 2. Același factor comun l-ar avea și numerele a, b, c, ceea ce nu se poate. Contradicția obținută arată că numerele $c + b$ și $c - b$ sînt prime între ele.

Însă cînd produsul a două numere prime între ele este un pătrat perfect, atunci fiecare din ele este un pătrat perfect, adică :

$$\begin{cases} c + b = m^2, \\ c - b = n^2, \end{cases}$$

Rezolvînd acest sistem, obținem :

$$c = \frac{m^2 + n^2}{2}, \qquad b = \frac{m^2 - n^2}{2},$$

$$a^2 = (c + b)\ (c - b) = m^2 n^2, \quad a = mn.$$

Aşadar, numerele pitagorice considerate sînt de forma :

$$a = m\,n, \qquad b = \frac{m^2 - n^2}{2}, \qquad c = \frac{m^2 + n^2}{2},$$

unde m şi n sînt numere impare prime între ele. Cititorul se poate convinge uşor că şi pentru orice valori impare ale lui m şi n, formulele de mai sus dau trei numere pitagorice a, b, c.

Iată cîteva triplete de numere pitagorice, obținute pentru diferite valori atribuite lui m şi n :

$m = 3,\ n = 1$	$3^2 + 4^2 = 5^2$
$m = 5,\ n = 1$	$5^2 + 12^2 = 13^2$
$m = 7,\ n = 1$	$7^2 + 24^2 = 25^2$
$m = 9,\ n = 1$	$9^2 + 40^2 = 41^2$
$m = 11,\ n = 1$	$11^2 + 60^2 = 61^2$
$m = 13,\ n = 1$	$13^2 + 84^2 = 85^2$
$m = 5,\ n = 3$	$15^2 + 8^2 = 17^2$
$m = 7,\ n = 3$	$21^2 + 20^2 = 29^2$
$m = 11,\ n = 3$	$33^2 + 56^2 = 65^2$
$m = 13,\ n = 3$	$39^2 + 80^2 = 89^2$
$m = 7,\ n = 5$	$35^2 + 12^2 = 37^2$
$m = 9,\ n = 5$	$45^2 + 28^2 = 53^2$
$m = 11,\ n = 5$	$55^2 + 48^2 = 73^2$
$m = 13,\ n = 5$	$65^2 + 72^2 = 97^2$
$m = 9,\ n = 7$	$63^2 + 16^2 = 65^2$
$m = 11,\ n = 7$	$77^2 + 36^2 = 85^2.$

(Toate celelalte triplete de numere pitagorice, fie că au factori comuni, fie că sînt compuse din numere mai mari decît 100).

Numerele pitagorice posedă cîteva particularități interesante, pe care le vom indica, fără demonstrație :

1. Una din „catete'' trebuie să fie multiplu de 3.
2. Una din „catete'' trebuie să fie multiplu de 4.
3. Unul din numerele pitagorice trebuie să fie multiplu de 5.

Cititorul poate să se convingă de existența acestor proprietăți analizînd exemplele de mai sus.

Ecuația nedeterminată de gradul trei

Suma cuburilor a trei numere întregi și pozitive poate fi cubul unui al patrulea număr. De exemplu :

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3.$$

Aceasta înseamnă că un cub cu muchia egală cu 6 cm este la fel de mare cu suma a trei cuburi, ale căror

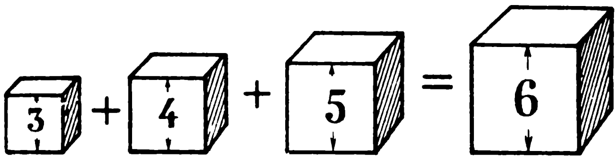


Fig. 14

muchii sînt egale respectiv cu 3, 4 și 5 cm (fig. 14). Potrivit legendei, această proprietate l-a preocupat mult pe Platon.

Să încercăm să găsim alte relații de acest gen, adică să punem următoarea problemă : să se rezolve ecuația $x^3 + y^3 + z^3 = u^3$. Este însă mai comod să notăm necunoscuta u cu $-t$. Atunci ecuația va căpăta o formă mai simplă

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 0.$$

Vom examina o metodă cu ajutorul căreia putem afla o infinitate de soluții ale acestei ecuații, exprimate prin numere întregi (pozitive și negative). Fie a, b, c, d și α, β, γ, δ, două grupuri de cîte 4 numere, care satisfac ecuația de mai sus. Să adăugăm la numerele din primul grup numerele din grupul al doilea înmulțite cu un număr k și să căutăm să-l alegem pe k, astfel încît numerele obținute :

$$a + k\alpha,\quad b + k\beta,\quad c + k\gamma,\quad d + k\delta\,,$$

să satisfacă, de asemenea, ecuația noastră. Cu alte cuvinte, să-l alegem pe k astfel ca să rezulte egalitatea :

$$(a + k\alpha)^3 + (b + k\beta)^3 + (c + k\gamma)^3 + (d + k\delta)^3 = 0.$$

Desfăcînd parantezele şi avînd în vedere că grupurile a, b, c, d şi α, β, γ, δ satisfac ecuaţia noastră, adică au loc egalităţile :

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 0, \quad \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 = 0,$$

obţinem :

$$3a^2k\alpha + 3ak^2\alpha^2 + 3b^2k\beta + 3bk^2\beta^2 + 3c^2k\gamma + 3ck^2\gamma^2 + 3d^2k\delta + \\ + 3dk^2\delta^2 = 0,$$

sau

$$3k\,[(a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma + d^2\delta) + k(a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + d\delta^2) = 0.$$

Acest produs va fi egal cu zero numai în cazul cînd măcar unul din factorii lui este egal cu zero. Egalînd fiecare din factori cu zero, obţinem două valori pentru k. Prima valoare, $k = 0$, nu ne interesează, deoarece aceasta înseamnă că dacă la numerele a, b, c, d nu se adaugă nimic, atunci numerele obţinute satisfac ecuaţia noastră. De aceea vom lua numai valoarea a doua pentru k :

$$k = \frac{a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma + d^2\delta}{a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + d\delta^2}.$$

Astfel, cunoscînd două grupuri de 4 numere, care satisfac ecuaţia iniţială, putem afla un al treilea grup de 4 numere de acest fel ; pentru aceasta trebuie să adunăm la numerele din primul grup de 4 numere, numerele din grupul al doilea înmulţite cu k, unde k are valoarea dată mai sus.

Ca să putem folosi această metodă, trebuie să cunoaştem două grupuri de 4 numere, care satisfac ecuaţia iniţială. Unul din aceste grupuri (3, 4, 5, — 6) îl cunoaştem. De unde să luăm încă un grup? Soluţia o putem afla simplu : pentru cel de-al doilea grup putem lua numerele r, $-r$, s, $-s$ care, evident, satisfac ecuaţia iniţială. Cu alte cuvinte să luăm :

$$a = 3,\ b = 4,\ c = 5,\ d = -6,$$
$$\alpha = r,\ \beta = -r,\ \gamma = s,\ \delta = -s.$$

Atunci pentru k vom obţine următoarea valoare :

$$k = -\frac{-7r - 11s}{7r^2 - s^2} = \frac{7r + 11s}{7r^2 - s^2},$$

iar numerele $a + k\alpha$, $b + k\beta$, $c + k\gamma$, $d + k\delta$ vor fi respectiv egale cu :

$$\frac{28r^2 + 11rs - 3s^2}{7r^2 - s^2}, \quad \frac{21r^2 - 11rs - 4s^2}{7r^2 - s^2},$$

$$\frac{35r^2 + 7rs + 6s^2}{7r^2 - s^2}, \quad \frac{-42r^2 - 7rs - 5s^2}{7r^2 - s^2}.$$

Potrivit celor relatate mai sus, aceste patru expresii satisfac ecuația inițială :

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 0.$$

Deoarece toate cele patru expresii au același numitor, îl putem lăsa la o parte (adică numărătorii acestor fracții, satisfac, de asemenea, ecuația considerată). Deci, pentru orice valori atribuite lui r și s, ecuația dată va fi satisfăcută de următoarele numere :

$$\begin{aligned} x &= 28r^2 + 11rs - 3s^2, \\ y &= 21r^2 - 11rs - 4s^2, \\ z &= 35r^2 + 7rs + 6s^2, \\ t &= -42r^2 - 7rs - 5s^2, \end{aligned}$$

de aceasta putîndu-ne convinge și direct, ridicînd aceste expresii la cub și adunîndu-le. Atribuind lui r și s diferite valori întregi, vom obține un șir de soluții întregi ale ecuației noastre. În cazul cînd numerele obținute au un factor comun, atunci le putem împărți prin el. De exemplu, pentru $r = 1$, $s = 1$, obținem pentru x, y, z, t următoarele valori : 36, 6, 48, -54, sau simplificînd cu 6, valorile 6, 1, 8, -9. În felul acesta,

$$6^3 + 1^3 + 8^3 = 9^3.$$

Iată încă o serie de egalități de același tip (obținute după împărțirea prin divizorul comun) :

pentru $r = 1$, $s = 2$	$38^3 + 73^3 = 17^3 + 76^3$,
pentru $r = 1$, $s = 3$	$17^3 + 55^3 = 24^3 + 54^3$,
pentru $r = 1$, $s = 5$	$4^3 + 110^3 = 67^3 + 101^3$,
pentru $r = 1$, $s = 4$	$8^3 + 53^3 = 29^3 + 50^3$,
pentru $r = 1$, $s = -1$	$7^3 + 14^3 + 17^3 = 20^3$,
pentru $r = 1$, $s = -2$	$2^3 + 16^3 = 9^3 + 15^3$,
pentru $r = 2$, $s = -1$	$29^3 + 34^3 + 44^3 = 53^3$,

. . . .

Se observă că dacă în primul grup de 4 numere 3, 4, 5, —6, sau într-unul din grupurile obţinute de noi, schimbăm locul numerelor şi aplicăm aceeaşi metodă, obţinem o nouă serie de soluţii. De pildă, dacă luăm grupul 3, 5, 4, —6 (adică $a = 3$, $b = 5$, $c = 4$, $d = -6$), obţinem pentru x, y, z, şi t valorile :

$$\begin{aligned} x &= 20r^2 + 10rs - 3s^2 \\ y &= 12r^2 - 10rs - 5s^2, \\ z &= 16r^2 + 8rs + 6s^2, \\ t &= -24r^2 - 8rs - 4s^2. \end{aligned}$$

De aici, pentru diferite valori ale lui r şi s, obţinem o serie de relaţii noi :

pentru $r = 1$, $s = 1$	$9^3 + 10^3 = 1^3 + 12^3$,
pentru $r = 1$, $s = 3$	$23^3 + 94^3 = 63^3 + 84^3$,
pentru $r = 1$, $s = 5$	$5^3 + 163^3 + 164^3 = 206^3$,
pentru $r = 1$, $s = 6$	$7^3 + 54^3 + 57^3 = 70^3$,
pentru $r = 2$, $s = 1$	$23^3 + 97^3 + 86^3 = 116^3$,
pentru $r = 1$, $s = -3$	$3^3 + 36^3 + 37^3 = 46^3$ etc.

În felul acesta se poate obţine o infinitate de soluţii pentru ecuaţia considerată.

O sută de mii de mărci pentru demonstrarea unei teoreme

Una din problemele din domeniul ecuaţiilor nedeterminate a devenit celebră, deoarece pentru rezolvarea ei s-a oferit o avere : 100 000 de mărci germane !

Problema constă în a demonstra următoarea propoziţie, cunoscută sub denumirea de „marea teoremă" a lui Fermat * :

Suma a două numere întregi ridicate la aceeaşi putere nu poate fi egală cu un al treilea număr întreg ridicat şi el la aceeaşi putere. Excepţie face numai puterea a doua pentru care acest fapt este posibil.

---

* Fermat (1603—1665) n-a fost matematician de profesie. Jurist şi consilier în parlament, el se ocupa cu studii matematice numai în timpul liber. Cu toate acestea, el a făcut o serie de descoperiri extrem de importante pe care nu le-a publicat, ci, după obiceiul epocii, le-a comunicat în scrisorile sale adresate prietenilor săi savanţi : Pascal, Descartes, Huyghens, Roberval şi alţii.

Cu alte cuvinte, trebuie demonstrat că ecuația

$$x^n + y^n = z^n$$

nu poate fi rezolvată în numere întregi pentru $n > 2$.

Să explicăm cele spuse mai sus. Am văzut că ecuațiile :

$$x^2 + y^2 = z^2,$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = t^3$$

admit mai multe soluții întregi. Dar încercați să găsiți trei numere întregi pozitive, care să satisfacă condiția $x^3 + y^3 = z^3$, și veți vedea că munca voastră va fi zadarnică.

Același eșec vă așteaptă și la căutarea exemplelor pentru puterile 4, 5, 6 etc. Tocmai în aceasta constă „marea teoremă a lui Fermat".

Ce se cere, deci, de la concurenți pentru obținerea premiului ? Ei trebuie să demonstreze teorema pentru toate puterile pentru care ea este valabilă. Într-adevăr, teorema lui Fermat nu este încă demonstrată și ea, cum s-ar zice, atîrnă în aer.

Au trecut trei secole de cînd ea a fost enunțată, dar matematicienii n-au reușit s-o demonstreze. Cei mai mari matematicieni au muncit la rezolvarea acestei probleme, dar în cazul cel mai fericit ei reușeau să demonstreze teorema numai pentru anumiți exponenți ; or, este necesar să se găsească demonstrația generală pentru orice exponent întreg.

Este interesant de remarcat că demonstrația teoremei lui Fermat a fost deja găsită, dar s-a pierdut ulterior.

Autorul teoremei, genialul matematician din secolul al XVII-lea, Pierre Fermat, afirma că el a demonstrat această teoremă. El și-a notat „marea sa teoremă" (ca și o serie de alte teoreme din teoria numerelor) sub formă de însemnare pe marginile lucrării lui Diofant, adăugînd :

„Am găsit o demonstrație cu adevărat uimitoare a acestei propoziții, dar aci este prea puțin spațiu ca s-o pot reda".

Nici printre hîrtiile marelui matematician, nici în corespondența lui, nicăieri nu s-au găsit urmele acestei demonstrații.

Urmașii lui Fermat au fost nevoiți să urmeze căi proprii. Iată rezultatele eforturilor lor : Euler (1797) a demonstrat teorema lui Fermat pentru puterea a 3-a ; pentru puterea a 5-a a demonstrat-o Legendre (1823), pentru puterea a 7-a * — Lamé (1840). În 1849, Kummer a demonstrat teorema pentru un grup destul de mare de puteri şi, printre altele pentru toţi exponenţii mai mici ca 100. Aceste lucrări depăşesc limitele domeniului din matematică pe care l-a cunoscut Fermat şi este de neînţeles cum a putut Fermat să găsească o demonstraţie generală pentru „marea sa teoremă”.

Celor care se interesează de istoricul şi starea actuală în care se află problema lui Fermat le recomandăm broşura lui A. I. Hincin — *Marea teoremă a lui Fermat*. Scrisă de un specialist, broşura aceasta presupune din partea cititorului numai cunoştinţe elementare de matematică.

---

* Pentru exponenţii neprimi (afară de 4) nu se cere o demonstraţie specială : aceste cazuri se reduc la cazurile cu exponenţi primi.

CAPITOLUL V

A ȘASEA OPERAȚIE MATEMATICĂ

A șasea operație

Adunarea și înmulțirea au cîte o operație inversă, care se numesc scăderea și împărțirea. A *cincea* operație matematică — ridicarea la putere — are *două* operații inverse : aflarea bazei și aflarea exponentului. Aflarea bazei este a *șasea* operație matematică și se numește extragerea rădăcinii. Aflarea exponentului — a *șaptea* operație — se numește logaritmare. Nu este greu să înțelegem de ce ridicarea la putere are două operații inverse, în timp ce adunarea și înmulțirea au numai cîte o operație inversă : ambii termeni ai unei sume (primul și al doilea) joacă același rol, ei pot să-și schimbe reciproc locurile ; aceeași afirmație este valabilă în cazul înmulțirii ; în ceea ce privește numerele care intervin în operația de ridicare la putere, adică baza și exponentul, ele nu au același rol ; în general, ele nu pot fi permutate (de exemplu, $3^5 \neq 5^3$). De aceea, aflarea fiecăruia din numerele care iau parte la adunare și înmulțire se face prin aceleași procedee, pe cînd aflarea bazei și exponentului se face în mod diferit.

A șasea operație, extragerea rădăcinii, se notează cu $\sqrt{\ }$. Nu toată lumea știe că acest semn nu este altceva decît forma puțin schimbată a literei latine *r*, prima literă a cuvîntului latinesc care înseamnă „rădăcină". A fost un timp (secolul al XVI-lea), cînd semnul radicalului n-a fost litera *r* mică, ci litera *R*, iar alături de ea se punea prima literă a cuvintelor latine „pătrată" (q) sau „cubică" (c), pentru a se arăta care anume rădăcină trebuie extrasă *.

* În manualul de matematică al lui Magnițki, după care se învăța în Rusia în prima jumătate a secolului al XVIII-lea, nu există de loc semnul radicalului.

De exemplu, se scria :

R. q. 4352

în loc de notația de astăzi :

$$\sqrt{4352}.$$

Dacă mai adăugăm la aceasta că în acea epocă nu intraseră încă în uz semnele actuale pentru plus și minus, ci în locul lor se scriau literele *p.* și *m.*, și că parantezele noastre erau înlocuite cu semnele ⌊ ⌋, ne putem da seama ce aspect neobișnuit pentru ochiul nostru aveau expresiile algebrice de atunci.

Iată un exemplu din cartea matematicianului italian Bombelli (1572) :

$$R \cdot c \cdot \lfloor\ R \cdot q \cdot 4352\ p \cdot 16\ \rfloor\ m \cdot R \cdot c \cdot \lfloor\ R \cdot q \cdot 4352\ m \cdot 16\ \rfloor .$$

Noi am fi scris această expresie astfel :

$$\sqrt[3]{\sqrt{4352}+16}-\sqrt[3]{\sqrt{4352}-16}.$$

În afară de notația $\sqrt[n]{a}$ se mai folosește pentru această operație și notația $a^{1/n}$, care este foarte comodă în sensul generalizării : ea pune în evidență faptul că orice rădăcină nu este altceva decît o putere, a cărui exponent este un număr fracționar.

Această notație a fost propusă de eminentul matematician olandez din secolul al XVI-lea, Stevin.

Ce este mai mare?

Prima problemă

Ce este mai mare : $\sqrt[5]{5}$ sau $\sqrt{2}$?

Această problemă ca și cele ce vor urma trebuie rezolvate fără a calcula valoarea rădăcinilor.

Rezolvare

Ridicînd ambele expresii la puterea a 10-a, obținem :

$$(\sqrt[5]{5})^{10}=5^2=25,\quad (\sqrt{2})^{10}=2^5=32;$$

deoarece $32 > 25$, rezultă că şi

$$\sqrt{2} > \sqrt[5]{5}.$$

Problema a doua

Ce este mai mare: $\sqrt[4]{4}$ sau $\sqrt[7]{7}$?

Rezolvare

Ridicînd ambele expresii la puterea a 28-a, obţinem:

$$\left(\sqrt[4]{4}\right)^{28} = 4^7 = 2^{14} = 2^7 \cdot 2^7 = 128^2,$$

$$\left(\sqrt[7]{7}\right)^{28} = 7^4 = 7^2 \cdot 7^2 = 49^2.$$

Deoarece $128 > 49$, rezultă că

$$\sqrt[4]{4} > \sqrt[7]{7}.$$

Problema a treia

Ce este mai mare: $\sqrt{7} + \sqrt{10}$ sau $\sqrt{3} + \sqrt{19}$?

Rezolvare

Ridicînd ambele expresii la pătrat obţinem:

$$(\sqrt{7} + \sqrt{10})^2 = 17 + 2\sqrt{70},$$

$$(\sqrt{3} + \sqrt{19})^2 = 22 + 2\sqrt{57}.$$

Să micşorăm ambele expresii cu 17; rămîne:

$$2\sqrt{70} \text{ şi } 5 + 2\sqrt{57}.$$

Ridicăm aceste expresii la pătrat. Avem:

$$280 \text{ şi } 253 + 20\sqrt{57}.$$

Scăzînd din fiecare expresie numărul 253, să comparăm numerele

$$27 \text{ şi } 20\sqrt{57}.$$

Deoarece $\sqrt{57}$ este mai mare decît 2, reiese că: $20\sqrt{57} > 40$; prin urmare,

$$\sqrt{3} + \sqrt{19} > \sqrt{7} + \sqrt{10}.$$

Să se rezolve dintr-o privire

Problemă

Uitați-vă mai atent la ecuația :

$$x^{x^3} = 3$$

și spuneți cu ce este egal x.

Rezolvare

Orice persoană familiarizată cu simbolurile algebrice își va da seama că :

$$x = \sqrt[3]{3}.$$

Într-adevăr :

$$x^3 = \left(\sqrt[3]{3}\right)^3 = 3$$

și, prin urmare,

$$x^{x^3} = x^3 = 3,$$

adică ceea ce se cere.

Cei care nu sînt în măsură să rezolve ecuația dată „dintr-o privire" pot afla necunoscuta în felul următor.

Fie :

$$x^3 = y.$$

Atunci :

$$x = \sqrt[3]{y}$$

și ecuația capătă forma :

$$\left(\sqrt[3]{y}\right)^y = 3,$$

sau, ridicînd la cub :

$$y^y = 3^3.$$

Este clar că $y = 3$, și deci

$$x = \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{3}.$$

9 – c. 1934

Farse algebrice

Prima problemă

A şasea operaţie algebrică ne permite să prezentăm adevărate farse algebrice, ca : în ce fel $2 \cdot 2 = 5$, $2 = 3$ etc. Umorul acestor reprezentaţii algebrice constă în aceea că eroarea — destul de elementară — este mascată şi nu bate la ochi. Vom prezenta două piese din acest repertoriu comic din domeniul algebrei.

Prima :

$$2 = 3.$$

Pe scenă apare la început egalitatea indiscutabilă :

$$4-10 = 9-15.$$

În „actul'' al doilea, la ambii membri ai egalităţii se adaugă valoarea $6\frac{1}{4}$:

$$4-10+6\frac{1}{4} = 9-15+6\frac{1}{4}.$$

Desfăşurarea ulterioară a farsei constă în transformările :

$$2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2,$$

$$\left(2-\frac{5}{2}\right)^2 = \left(3-\frac{5}{2}\right).$$

Extrăgînd rădăcina pătrată din ambii termeni, obţinem :

$$2-\frac{5}{2} = 3-\frac{5}{2}.$$

Adăugînd la ambii membri fracţia $\frac{5}{2}$, ajungem la următoarea egalitate absurdă :

$$2 = 3.$$

În ce constă greşeala ?

Greşeala s-a strecurat în următorul loc : din egalitatea

$$\left(2-\frac{5}{2}\right)^2=\left(3-\frac{5}{2}\right)^2,$$

s-a dedus că :

$$2-\frac{5}{2}=3-\frac{5}{2}.$$

Dacă pătratele a două cantităţi sînt egale, nu reiese că şi aceste cantităţi sînt egale între ele. De exemplu $(-5)^2 = 5^2$, dar -5 nu este egal cu 5. Pătratele pot fi egale între ele şi atunci cînd cantităţile ridicate la pătrat sînt diferite între ele. Exemplul nostru prezintă chiar cazul acesta :

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

dar $-\frac{1}{2}$ nu este egal cu $\frac{1}{2}$.

Problema a doua

O altă farsă algebrică (fig. 15) :

$$2\cdot 2=5$$

se demonstrează după exemplul din problema precedentă şi se bazează pe acelaşi truc. Pe scenă apare egalitatea asupra căreia nu încape nici o îndoială :

$$16-36=25-45.$$

Se adaugă două numere egale :

$$16-36+20\frac{1}{4}=25-45+20\frac{1}{4},$$

şi se fac următoarele transformări :

$$4^2-2\cdot 4\cdot\frac{9}{2}+\left(\frac{9}{2}\right)^2=5^2-2\cdot 5\cdot\frac{9}{2}+\left(\frac{9}{2}\right)^2,$$

$$\left(4-\frac{9}{2}\right)^2=\left(5-\frac{9}{2}\right)^2.$$

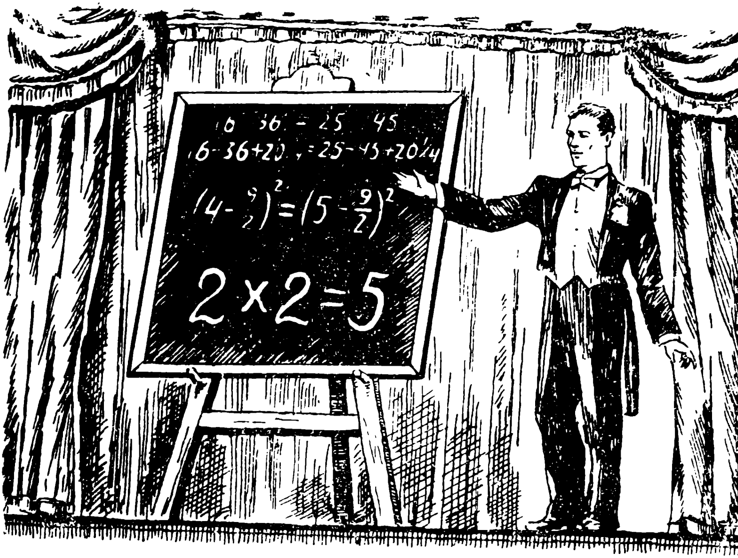


Fig. 15

Apoi prin acelaşi raţionament nejustificat se trece la final :

$$4 - \frac{9}{2} = 5 - \frac{9}{2},$$

$$4 = 5,$$

$$2 \cdot 2 = 5.$$

Aceste cazuri comice au ca scop să pună în gardă pe cei care nu posedă o experienţă suficientă în domeniul matematicii faţă de operaţiile imprudente cu ecuaţiile care conţin necunoscute sub radical.

CAPITOLUL VI

ECUAȚIILE DE GRADUL DOI

Strîngerile de mînă

Problemă

Participanții la o ședință și-au strîns mîinile și cineva a calculat că în total au fost 66 de strîngeri de mînă. Cîți oameni au fost la ședință?

Rezolvare

Problema se rezolvă destul de simplu pe cale algebrică. Fiecare din cei x participanți a strîns $x - 1$ mîini. Deci, în total au avut loc $x(x - 1)$ strîngeri de mînă; dar trebuie ținut seama că, atunci cînd Ivanov strînge mîna lui Petrov, la rîndul lui și Petrov strînge mîna lui Ivanov; aceste două strîngeri de mînă trebuie considerate ca una singură. De aceea, numărul strîngerilor de mînă calculate este de două ori mai mic decît $x(x - 1)$. Avem ecuația:

$$\frac{x(x-1)}{2} = 66$$

sau, după transformare,

$$x^2 - x - 132 = 0,$$

de unde:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 528}}{2},$$

$$x_1 = 12, \; x_2 = -11.$$

Deoarece în cazul de față, soluția negativă (-11 oameni) este lipsită de sens, o neglijăm și păstrăm numai prima rădăcină : la ședință au participat 12 oameni.

Un roi de albine

Problemă

În India antică a fost foarte popular un gen de sport foarte original — întrecerea publică în rezolvarea problemelor dificile. Manualele de matematică indiene erau folosite ca îndreptare pentru asemenea întreceri. „Potrivit regulilor expuse aici — scrie autorul unuia din aceste manuale — cel înțelept poate să întocmească o mie de alte probleme. Așa cum soarele prin strălucirea sa întunecă stelele, la fel un om învățat va întuneca gloria altuia în întreceri populare, propunînd și rezolvînd diferite probleme algebrice". În original aceste cuvinte sînt spuse mai poetic, deoarece întreaga carte este scrisă în versuri. Problemele erau scrise, de asemenea, în versuri. Dăm una din ele, bineînțeles, în proză.

Un număr de albine, egal cu rădăcina pătrată din jumătatea întregului roi, s-a așezat pe o tufă de iasomie, lăsînd în urma lor $\frac{8}{9}$ din roi. Numai o singură albină se învîrtește în jurul unui lotus fiind atrasă de zumzetul prietenei ei, care a fost prinsă în cursa florii mirositoare. Cîte albine au fost în total în roi ?

Rezolvare

Dacă vom nota numărul de albine căutat cu x, ecuația va fi de forma :

$$\sqrt{\frac{x}{2}} + \frac{8}{9}x + 2 = x,$$

pe care o putem prezenta sub o formă mai simplă introducînd necunoscuta auxiliară :

$$y = \sqrt{\frac{x}{2}}.$$

Atunci $x = 2y^2$, şi ecuaţia va fi :

$$y + \frac{16\,y^2}{9} + 2 = 2y^2, \text{ sau } 2y^2 - 9y - 18 = 0.$$

Rezolvînd-o, obţinem două valori pentru y :

$$y_1 = 6, \quad y_2 = -\frac{3}{2}.$$

Valorile corespunzătoare pentru x :

$$x_1 = 72, \; x_2 = 4{,}5.$$

Deoarece numărul albinelor trebuie să fie un număr întreg şi pozitiv, numai prima rădăcină satisface problema : roiul era compus din 72 de albine. Să verificăm :

$$\sqrt{\frac{72}{2}} + \frac{8}{9} \cdot 72 + 2 = 6 + 64 + 2 = 72.$$

O ceată de maimuţe

Problemă

O altă problemă indiană, o vom da în versuri, aşa cum a tradus-o autorul cărţii *Cine a inventat algebra?* V. I. Lebedev :

Împărţite-n două grupe
Se jucau nişte maimuţe.
O optime dintre ele ridicată la pătrat
Se jucau într-un tufiş ;
Alte douăsprezece
Se hîrjoneau în poiana din apropiere,
Spune-mi cititorule
Cîte maimuţe erau acolo?

Rezolvare

Dacă numărul total de maimuțe este x, atunci :

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x,$$

de unde :

$$x_1 = 48, \; x_2 = 16.$$

Problema are două soluții pozitive : în ceată erau fie 48 de maimuțe, fie 16. Ambele soluții satisfac problema.

Cît de prevăzătoare pot fi ecuațiile

În cazurile analizate, atunci cînd am obținut două soluții, am procedat diferit, în funcție de condițiile problemei. În primul caz, am neglijat rădăcina negativă ca una care nu corespunde conținutului problemei, în al doilea caz, am lăsat la o parte rădăcina fracționară și negativă, iar în problema a treia, dimpotrivă, am folosit ambele rădăcini. Existența unei a doua soluții constituie adesea o surpriză pentru cel care a rezolvat problema, sau chiar pentru cel care a întocmit-o. Vom da un exemplu în care ecuația este mai prevăzătoare decît creatorul ei.

O minge este aruncată în sus cu o viteză de 25 m pe secundă. Peste cîte secunde ea va fi la o înălțime de 20 m deasupra pămîntului ?

Rezolvare

Pentru corpurile aruncate în sus, dacă facem abstracție de rezistența aerului, mecanica stabilește următoarea relație între înălțimea la care s-a ridicat corpul deasupra pămîntului (h), viteza inițială (v), accelerația gravitației (g) și timpul (t) :

$$h = vt - \frac{gt^2}{2}.$$

În cazul de față, putem neglija rezistența aerului, deoarece la viteze neînsemnate aceasta este mică. Pentru simplificarea calculelor, admitem că $g = 10$ m pe secundă, în loc de 9,8 (eroarea este de 2 %). Substituind în formula de mai sus valorile lui h, v şi g, obţinem ecuaţia :

$$20 = 25\,t - \frac{10\,t^2}{2},$$

iar după simplificare :

$$t^2 - 5t + 4 = 0.$$

Rezolvînd ecuaţia, găsim :

$$t_1 = 1 \text{ şi } t_2 = 4.$$

Mingea va fi la înălţimea de 20 m de două ori : peste o secundă şi peste 4 secunde.

Acest fapt poate să pară neobişnuit şi, dacă nu stăm pe gînduri, sîntem gata să neglijăm soluţia a doua. Dar ar fi o greşeală să procedăm astfel ! Soluţia a doua îşi are sensul ei ; mingea trebuie să fie de două ori la înălţimea de 20 m : o dată la urcare şi a doua oară la cădere. Într-adevăr, la viteza iniţială de 25 m/s mingea trebuie să zboare în sus 2,5 secunde şi să ajungă la o înălţime de 31,25 m. Atingînd după o secundă înălţimea de 20 m, mingea va mai urca 1,5 secunde, apoi va coborî tot atîta timp pînă la nivelul de 20 m şi, după încă o secundă, va atinge pămîntul.

Problema lui Euler

În *Autobiografia* sa, Stendhal povesteşte următoarele despre anii săi de învăţătură :

,,L-am găsit la el (profesorul de matematică) pe Euler şi problema lui despre numărul de ouă, pe care o ţărancă le ducea la tîrg... Pentru mine aceasta a fost o descoperire. Am înţeles ce înseamnă să te poţi folosi de instrumentul numit algebră. Dar, drace, nimeni nu mi-a vorbit despre asta...''.

Iată această problemă din *Introducerea în algebră* a lui Euler, care a exercitat un efect atît de puternic asupra minţii tînărului Stendhal.

Două ţărănci au adus împreună la tîrg 100 de ouă, una avea mai multe decît cealaltă ; ambele au încasat sume egale. Atunci prima i-a spus celeilalte : „Dacă aş avea ouăle tale, aş fi încasat 15 creițari". Cea de-a doua i-a răspuns : „Iar dacă eu aş fi avut ouăle tale, aş fi încasat pentru ele $6\frac{2}{3}$ creițari". Cîte ouă avea fiecare ?

Rezolvare

Să presupunem că prima țărancă avea x ouă, atunci cealaltă avea $100 - x$. Dacă prima ar fi avut $100 - x$ ouă, ea ar fi încasat 15 creițari. Înseamnă că prima țărancă a vîndut ouăle cu

$$\frac{15}{100-x}$$

creiţari bucata.

În acelaşi mod aflăm că a doua țărancă le-a vîndut cu

$$6\frac{2}{3} : x = \frac{20}{3x}$$

creiţari.

Acum se poate stabili cît a încasat fiecare :

$$\text{prima} : \quad x \cdot \frac{15}{100-x} = \frac{15x}{100-x},$$

$$\text{a doua} : (100-x) \cdot \frac{20}{3x} = \frac{20(100-x)}{3x}.$$

Deoarece ambele au încasat aceeaşi sumă, rezultă că :

$$\frac{15x}{100-x} = \frac{20(100-x)}{3x},$$

şi după transformare :

$$x^2 + 160x - 8\,000 = 0,$$

de unde :

$$x_1 = 40, \; x_2 = -200.$$

În cazul de față, rădăcina negativă n-are sens; problema este satisfăcută de o singură soluție: prima țărancă a adus 40 de ouă, a doua — 60.

Problema poate fi rezolvată și cu o altă metodă, care este mult mai ingenioasă, dar și mai greu de găsit.

Presupunem că a doua țărancă a adus de k ori mai multe ouă decît prima. Amîndouă au încasat sume egale; aceasta înseamnă că prima țărancă și-a vîndut ouăle de k ori mai scump decît a doua. Dacă înainte de a începe vînzarea ele și-ar fi schimbat ouăle, atunci prima țărancă ar fi avut de k ori mai multe ouă decît a doua și le-ar fi vîndut de k ori mai scump. Ca atare, ea ar fi încasat de k^2 ori mai mult decît a doua. Prin urmare, avem:

$$k^2 = 15 : 6\frac{2}{3} = \frac{45}{20} = \frac{9}{4},$$

de unde:

$$k = \frac{3}{2}.$$

Acum ne rămîne să împărțim 100 de ouă în părți proporționale cu 2 și 3. Aflăm că prima țărancă avea 40, iar a doua 60 de ouă.

Megafoanele

Problemă

În piață sînt instalate 5 megafoane, împărțite în două grupuri: în primul — două, iar în al doilea — trei aparate. Distanța dintre grupuri este de 50 m. În ce loc trebuie să stăm pentru ca sunetele de la ambele grupuri să fie auzite cu aceeași intensitate?

Rezolvare

Dacă notăm cu x distanța de la grupul mai mic pînă la punctul căutat, atunci distanța de la grupul mai mare pînă la acest punct va fi dată de expresia $50 - x$ (fig. 16).

Cunoscînd că intensitatea sunetului scade proporțional cu pătratul distanței, avem ecuația :

$$\frac{2}{3} = \frac{x^2}{(50-x)^2},$$

care după simplificare devine :

$$x^2 + 200x - 5\,000 = 0.$$

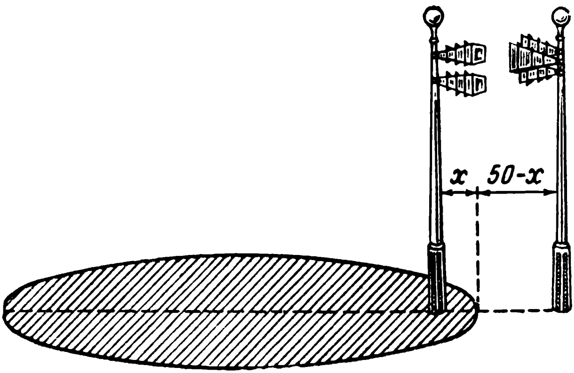


Fig. 16

Rezolvînd-o, obținem două rădăcini :

$$x_1 = 22.5,$$
$$x_2 = -222{,}5.$$

Rădăcina pozitivă răspunde direct la întrebarea problemei : punctul de egală intensitate a audibilității se află la 22,5 m de grupul format din două megafoane și, prin urmare, la 27,5 m de grupul format din trei aparate.

Dar ce înseamnă rădăcina negativă a ecuației ? Oare aceasta are sens ?

Incontestabil, semnul minus înseamnă că al doilea punct de egală intensitate a audibilității este așezat în direcția opusă aceleia care a fost adoptată ca pozitivă la întocmirea ecuației.

Măsurînd de la amplasarea celor două aparate în direcția cerută 222,5 m, aflăm punctul unde sunetele ambelor grupuri de megafoane se aud cu aceeași intensitate. De la grupul de trei aparate acest punct se află la 222,5 m + + 50 m = 272,5 m.

În felul acesta am aflat două puncte de egală intensitate a audibilității, situate pe dreapta care unește sursele de sunete. Alte puncte pe această dreaptă nu există, dar ele există în afară de ea. Se poate demonstra că locul geometric al punctelor, care satisfac condițiile problemei noastre, este cercul care are ca diametru segmentul care unește cele două puncte aflate. Acest cerc delimitează un sector destul de vast (hașurat pe figură), în interiorul căruia audibilitatea grupului format din două aparate întrece audibilitatea grupului de trei aparate, iar dincolo de limitele acestui cerc observăm fenomenul invers.

Algebra zborului spre Lună

Problema cu megafoane este foarte apropiată de cea a zborului spre Lună cu ajutorul unor rachete. Mulți oameni sînt sceptici în ceea ce privește atingerea acestui scop, deoarece diametrul aparent al Lunii, pentru un observator de pe Pămînt, este aproximativ de 0,5°. Un studiu mai amănunțit al problemei arată că dacă racheta va putea trece mai departe de punctul de egală atracție a Pămîntului și a Lunii — ea se va deplasa spre Lună sub acțiunea numai a atracției ei. Să căutăm acest punct de atracție egală.

Potrivit legii lui Newton, forța cu care se atrag două mase este proporțională cu produsul maselor ce se atrag și invers proporțională cu pătratul distanței dintre ele. Dacă masa Pămîntului este M, iar distanța rachetei de la Pămînt este x, atunci forța cu care Pămîntul va atrage un gram de masă a rachetei va fi dată de expresia :

$$\frac{Mk}{x^2},$$

unde k este forța cu care se atrag două mase de cîte un gram la distanța de 1 cm.

Forța cu care Luna atrage un gram de masă a rachetei în același punct este egală cu :

$$\frac{mk}{(l-x)^2},$$

unde m este masa Lunii, iar l — distanța între Lună și Pămînt (se presupune că racheta se află între Lună și Pămînt, pe dreapta care unește centrele lor). Se cere ca :

$$\frac{Mk}{x^2}=\frac{mk}{(l-x)^2},$$

sau :

$$\frac{M}{m}=\frac{x^2}{l^2-2lx+x^2}.$$

Se știe din astronomie că raportul $\frac{M}{m}\approx 81{,}5$; deci :

$$\frac{x^2}{l^2-2lx+x^2}=81{,}5$$

de unde :

$$80{,}5x^2-163{,}0lx+81{,}5l^2=0.$$

Rezolvînd ecuația în raport cu x, obținem :

$$x_1=0{,}9\,l,\ x_2=1{,}12\,l.$$

Ca și în problema cu megafoanele, ajungem la concluzia că, pe linia Pămînt — Lună, există două puncte unde racheta va fi atrasă la fel de cele două planete ; unul situat la distanța de 0,9 l de centrul Pămîntului, al doilea — la distanța de 1,12 l de același centru. Deoarece distanța l între cele două planete este $\approx$ 384 000 km, unul din punctele căutate va fi la distanța de 346 000 km de centrul Pămîntului, iar celălalt — la 430 000 km.

Dar noi știm (vezi problema precedentă) că aceeași proprietate o au toate punctele situate pe un cerc care trece prin cele două puncte avînd ca diametru segmentul care le unește. Dacă rotim acest cerc în jurul liniei care unește centrele Pămîntului și al Lunii, el va descrie o

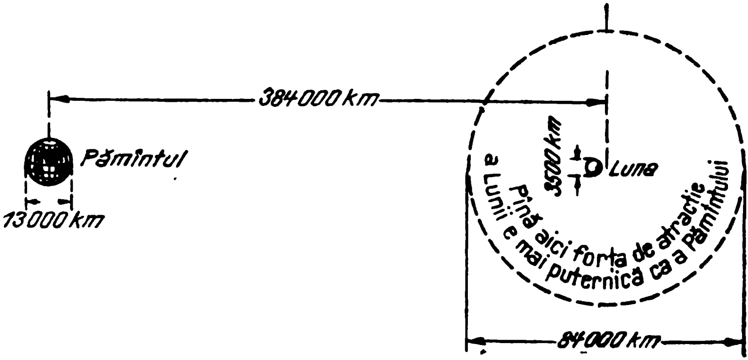


Fig. 17

suprafață sferică, cu proprietatea că toate punctele ei satisfac cerințele problemei.

Diametrul acestei sfere este egal cu:

$$1{,}12l - 0{,}9l = 0{,}22l \approx 84\,000 \text{ km}.$$

Cînd racheta se va afla în interiorul acestei sfere (avînd o viteză nu prea mare), ea va trebui neapărat să cadă pe suprafața Lunii, deoarece forța de atracție a Lunii în această regiune întrece forța de atracție a Pămîntului (fig. 17).

Ținta în care trebuie să nimerească racheta este mult mai mare decît s-ar crede și ocupă pe cer nu 0,5°, ci, așa cum reiese dintr-un calcul geometric simplu, circa 12°. Acest fapt ușurează considerabil sarcina navigatorilor în spațiul interastral.

De data aceasta ecuația s-a dovedit a fi mai prevăzătoare decît cel care a întocmit-o.

Trecînd la rezolvarea problemei, v-ați gîndit oare că atracția Pămîntului este mai mare decît a Lunii, atît înaintea Lunii cît și după ea? Analiza algebrică a arătat această situație și ne-a ajutat să delimităm precis sferele de influență ale celor două planete.

„O problemă grea"

Tabloul lui Bogdanov-Belski „O problemă grea" este cunoscut de mulți, dar puțini dintre acei care l-au văzut au pătruns sensul „problemei grele" redate. Ea constă în

Fig. 18

aceea că pe cale mintală trebuie să se afle repede rezultatul calculului :

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365}.$$

Într-adevăr, problema nu este prea ușoară, dar știau să o rezolve și elevii învățătorului al cărui portret este redat în tabloul din fig. 18, și anume S. A. Racinski, profesor de ştiinţe naturale care a părăsit catedra universitară pentru a deveni un simplu învăţător de ţară. Acest pedagog talentat a cultivat în şcoala sa calculele mintale, bazate pe folosirea cu virtuozitate a proprietăţilor numerelor. Numerele 10, 11, 12, 13 şi 14 posedă o proprietate interesantă :

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2.$$

Deoarece $100 + 121 + 144 = 365$, este uşor de aflat că expresia din tablou este egală cu 2.

Cu ajutorul algebrei putem aborda mai general problema acestei interesante proprietăţi a unui şir de numere : oare şirul de mai sus, format din cinci numere consecutive, este unicul în care suma pătratelor primelor trei numere este egală cu suma pătratelor ultimelor două ?

Rezolvare

Notînd primul număr din cele căutate cu x, avem ecuaţia :

$$x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 = (x + 3)^2 + (x + 4)^2.$$

Este mai comod însă să notăm cu x nu primul, ci al doilea număr căutat. Atunci ecuaţia va avea forma următoare :

$$(x-1)^2 + x^2 + (x + 1)^2 = (x + 2)^2 + (x + 3)^2.$$

Desfăcînd parantezele şi făcînd reducerile, obţinem :

$$x^2 - 10x - 11 = 0,$$

de unde :

$$x = 5 \pm \sqrt{25 + 11},\ x_1 = 11,\ x_2 = -1.$$

Există, deci, două şiruri de numere care posedă proprietăţile date : şirul lui Racinski :

$$10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,$$

şi şirul :

$$-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2.$$

Într-adevăr,

$$(-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 = 1^2 + 2^2.$$

Ce fel de numere?

Problemă

Să se afle trei numere consecutive care au proprietatea că pătratul numărului de mijloc este mai mare cu unu decît produsul celorlalte două.

Rezolvare

Dacă primul număr din cele căutate este x, ecuația va fi de forma:

$$(x+1)^2 = x(x+2)+1.$$

Desfăcînd parantezele, obținem egalitatea:

$$x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2x + 1,$$

din care nu se poate determina valoarea lui x. Aceasta înseamnă că egalitatea noastră este o indentitate; ea este adevărată pentru orice valoare a lui x, şi nu numai pentru anumite valori, cum se întîmplă în cazul unei ecuații. Deci, oricare trei numere consecutive posedă proprietetea cerută. Să luăm la întîmplare numerele:

17, 18, 19.

Ne convingem că:

$$18^2 - 17 \cdot 19 = 324 - 323 = 1.$$

Existența acestei relații apare mai clar dacă vom nota cu x al doilea număr. Atunci vom avea egalitatea:

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1),$$

care este o indentitate evidentă.

CELE MAI MARI ȘI CELE MAI MICI VALORI

Problemele cuprinse în acest capitol fac parte dintr-o categorie interesantă de probleme necesare pentru aflarea celei mai mari sau a celei mai mici valori a unei mărimi. Ele pot fi rezolvate prin diferite metode, dintre care una o vom prezenta mai jos.

Două trenuri

Problemă

Două linii ferate se încrucişează sub un unghi drept. Spre locul de încrucișare se îndreaptă în acelaşi timp două trenuri : unul care a plecat de la o gară situată la 40 km de încrucișare și altul — de la o altă gară aflată la 50 km. Primul tren parcurge într-un minut 800 m, iar al doilea, 600 m.

Pentru cîte minute (din momentul pornirii lor) cele două trenuri se vor afla la distanța minimă unul de celălalt ? Și cît este de mare această distanță ?

Rezolvare

Să desenăm o schemă care să reprezinte mişcarea celor două trenuri din problema noastră (fig. 19). Liniile care se încrucişează le figurăm prin dreptele AB şi CD. Gara B este situată la 40 km de punctul de încrucişare O, gara D — la 50 km. Presupunem că peste x minute cele două trenuri se vor afla la distanța minimă unul de celălalt, $MN = m$. Trenul care a plecat din B a parcurs pînă la acest moment un drum $BM = 0{,}8x$, deoarece în timp de un minut el parcurge 800 m $= 0{,}8$ km. Prin urmare,

$OM = 40 - 0{,}8x$. În acelaşi fel vom afla că $ON = 50 - 0{,}6x$. Conform teoremei lui Pitagora:

$$MN = m = \sqrt{\overline{OM}^2 + \overline{ON}^2} = \sqrt{(40 - 0{,}8x)^2 + (50 - 0{,}6x)^2}\,.$$

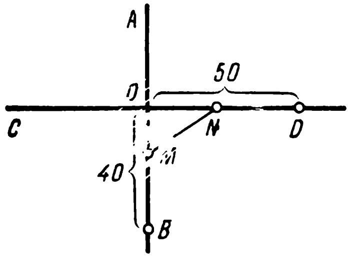


Fig. 19

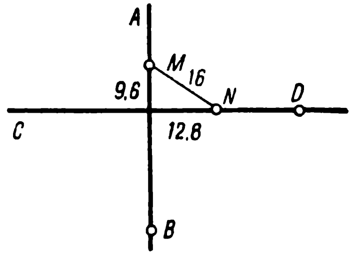


Fig. 20

Ridicînd la pătrat ambii membri ai ecuaţiei:

$$m = \sqrt{(40 - 0{,}8\,x)^2 + (50 - 0{,}6x)^2}$$

şi făcînd reducerile, obţinem:

$$x^2 - 124x + 4\,100 - m^2 = 0.$$

Rezolvînd această ecuaţie în raport cu x, avem:

$$x = 62 \pm \sqrt{m^2 - 256}.$$

Deoarece x reprezintă un număr de minute, deci nu poate fi imaginar, rezultă că $m^2 - 256$ trebuie să fie o mărime pozitivă sau, în cazul extrem, să fie egal cu zero. Cînd $m^2 - 256 = 0$, se obţine valoarea minimă a lui m, şi atunci:

$$m^2 = 256, \text{ de unde } m = 16.$$

Este evident că m nu poate fi mai mic decît 16, deoarece x ar deveni imaginar. Atunci cînd $m^2 - 256 = 0$, $x = 62$.

Aşadar, trenurile noastre se vor afla la cea mai mică distanţă unul de celălalt după 62 minute, iar distanţa lor va fi de 16 km.

Să stabilim cum sînt situate trenurile în acest moment. Să calculăm distanţa OM; ea este egală cu:

$$40 - 62 \cdot 0{,}8 = -9{,}6.$$

Semnul minus înseamnă că primul tren va depăşi punctul de încrucişare cu o distanţă de 9,6 km. Distanţa ON este egală cu :

$$50 - 62 \cdot 0,6 = 12,8,$$

adică al doilea tren mai are de parcurs pînă la punctul de încrucişare 12,8 km.

Poziţia trenurilor este arătată în fig. 20. După cum vedem nu este aceea pe care ne-am închipuit-o înainte de rezolvarea problemei. Ecuaţia s-a dovedit a fi tolerantă şi, cu toate că schema a fost dată greşit, a dat o rezolvare corectă. Nu este greu de dedus de unde decurge acest lucru : el este determinat de regulile algebrice ale semnelor.

Unde este mai bine să fie construită halta?

Problemă

La o distanţă de 20 km de calea ferată se află satul B (fig. 21). Unde trebuie să fie construită halta C astfel ca drumul de la A la B (porţiunea AC — pe calea ferată şi CB — pe şosea) să poată fi parcurs în cel mai scurt timp? Viteza de deplasare pe calea ferată este de 0,8 km pe minut, iar pe şosea — de 0,2 km pe minut.

Rezolvare

Vom nota distanţa AD (de la A pînă la perpendiculara BD la AD) cu a, iar distanţa CD, cu x. Atunci $AC = AD - CD = a - x$, iar $CB = \sqrt{CD^2 + BD^2} = \sqrt{x^2 + 20^2}$. Timpul în care trenul parcurge distanţa AC este :

$$\frac{AC}{0,8} = \frac{a - x}{0,8}.$$

Timpul necesar pentru a parcurge distanţa CB (pe şosea) este :

$$\frac{CB}{0,2} = \frac{\sqrt{x^2 + 20^2}}{0,2}.$$

Timpul în care este parcursă distanța de la A la B este de :

$$\frac{a-x}{0,8}+\frac{\sqrt{x^2+20^2}}{0,2}.$$

Această sumă, pe care o vom nota cu m, trebuie să aibă o valoare minimă.

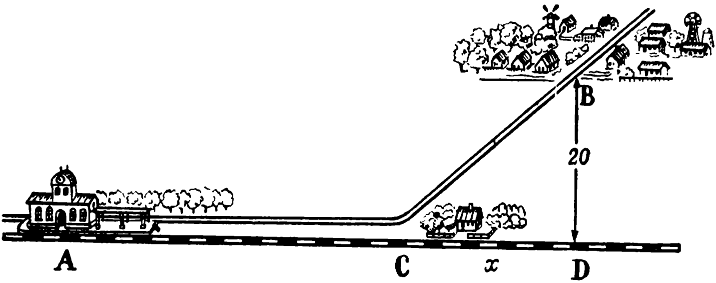


Fig. 21

Ecuația :

$$\frac{a-x}{0,8}+\frac{\sqrt{x^2+20^2}}{0,2}=m$$

o scriem sub forma :

$$-\frac{x}{0,8}+\frac{\sqrt{x^2+20^2}}{0,2}=m-\frac{a}{0,8}.$$

Înmulțind-o cu 0,8, ea devine :

$$-x+4\sqrt{x^2+20^2}=0,8\,m-a.$$

Notînd membrul drept cu k și eliminînd radicalul, obținem o ecuație de gradul al doilea :

$$15x^2-2kx+6\,400-k^2=0,$$

de unde :

$$x=\frac{k\pm\sqrt{16\,k^2-96\,000}}{15}.$$

Deoarece $k = 0{,}8\ m - a$, rezultă că pentru valoarea minimă a lui m se obține și valoarea minimă a lui k și invers *. Dar pentru ca x să fie real, $16k^2$ nu poate fi mai mic de 96 000. Deci, cea mai mică valoare pentru $16k^2$ este 96 000. De aceea m devine minim atunci cînd :

$$16k^2 = 96\,000,$$

de unde :

$$k = \sqrt{6\,000}$$

și deci,

$$x = \frac{k \pm 0}{15} = \frac{\sqrt{6\,000}}{15} \approx 5{,}16.$$

Halta trebuie să fie construită la aproximativ 5 km de punctul D, *oricare ar fi distanța* $a = AD$.

Dar, se înțelege că soluția noastră are sens numai pentru cazurile cînd $x < a$, deoarece formînd ecuația, am considerat expresia $a - x$ ca fiind pozitivă.

Dacă $x = a \approx 5{,}16$, nu este nevoie de haltă și șoseaua poate fi dusă direct la gară. La fel se va proceda și în cazul cînd distanța a este mai mică de 5,16 km.

De data aceasta ne-am dovedit mai prevăzători decît ecuația. Dacă ne-am fi luat după ea, ar fi trebuit ca luînd $x > a$, să construim halta dincolo de gară, ceea ce ar fi o adevărată absurditate, deoarece pentru $x > a$, timpul în decursul căruia ar fi trebuit să mergem pe calea ferată

$$\frac{a - x}{0{,}8}$$

ar fi avut o valoare negativă. Problema de față ne arată că, folosind calculele matematice, trebuie să fim totdeauna atenți la rezultatele obținute, deoarece ele își pot pierde sensul real, dacă premisele pe care se bazează calculul nostru matematic nu sînt realizate.

---

* Trebuie ținut seamă că avem $k > 0$, deoarece

$$0{,}8\ m = a - x + 4\sqrt{x^2 + 20^2} > a - x + x = a.$$

Cum trebuie să fie construită şoseaua?

Problemă

Din oraşul A, situat pe malul unui rîu, trebuie să transportăm mărfuri în punctul B, aşezat la a km pe cursul inferior al rîului şi la d km de mal (fig. 22). Cum

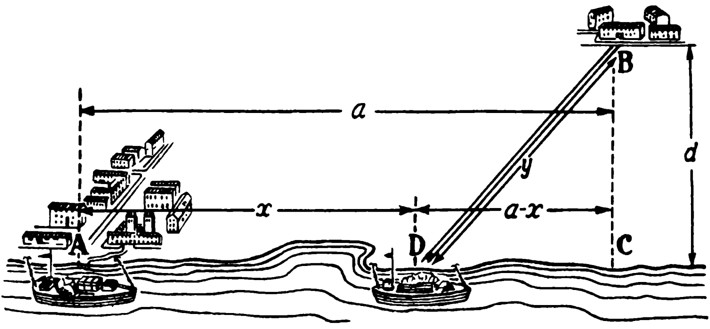


Fig. 22

trebuie construită şoseaua B spre rîu, astfel ca transportul mărfurilor din A în B să fie cel mai ieftin posibil şi avînd în vedere că pe rîu costul unei tone-kilometru este de două ori mai ieftin decît pe şosea?

Rezolvare

Să notăm distanţa AD cu x şi lungimea şoselei DB cu y. Se dă distanţa $AC = a$ şi $BC = d$.

Avînd în vedere că transportul mărfurilor pe şosea costă de două ori mai scump decît transportul pe rîu, suma

$$x + 2y$$

trebuie să fie minimă. Vom nota această valoare minimă cu m. Avem ecuaţia:

$$x + 2y = m,$$

Deoarece $x = a - DC$, iar $DC = \sqrt{y^2 - d^2}$, ecuația noastră capătă forma:

$$a - \sqrt{y^2 - d^2} + 2y = m,$$

sau:

$$3y^2 - 4(m - a)y + (m - a)^2 + d^2 = 0.$$

Rezolvînd această ecuație, obținem:

$$y = \frac{2}{3}(m-a) \pm \frac{\sqrt{(m-a)^2 - 3d^2}}{3}.$$

Pentru ca y să fie real, $(m - a)^2$ nu poate fi mai mic decît $3d^2$. Valoarea cea mai mică se obține atunci cînd $(m - a)^2$ este egal cu $3d^2$, adică:

$m - a = d\sqrt{3}$, de unde $y = \frac{2(m-a) + 0}{3} = \frac{2d\sqrt{3}}{3}$;

$\sin BDC = d : y$, adică

$$\sin BDC = \frac{d}{y} = d : \frac{2d\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Dar unghiul al cărui sinus este egal cu $\frac{\sqrt{3}}{2}$ este egal cu 60°. Deci șoseaua trebuie să fie construită sub un unghi de 60° față de rîu, oricare ar fi distanța AC.

Aici ne izbim din nou de aceeași particularitate pe care am întîlnit-o în problema anterioară. Soluția poate avea sens numai în anumite condiții. Dacă punctul B este situat astfel, încît șoseaua construită sub un unghi de 60° față de rîu să treacă de cealaltă parte a orașului A, atunci soluția este inaplicabilă; punctul B ar putea fi legat de orașul A prin șosea, nemaifiind nevoie de rîu.

Cînd este produsul maxim?

Pentru rezolvarea multor probleme „de maxim și minim", adică pentru aflarea celor mai mari și celor mai mici valori ale unei mărimi variabile, putem folosi cu succes o teoremă de algebră, pe care o vom enunța îndată. Să considerăm următoarea problemă :

Cum trebuie să descompunem un număr în două părți, astfel ca produsul lor să fie maxim?

Rezolvare

Fie a numărul dat. Atunci vom nota părțile în care am descompus numărul a cu :

$$\frac{a}{2} + x \text{ și } \frac{a}{2} - x;$$

numărul x arată mărimea prin care diferă aceste părți de jumătatea numărului a. Produsul lor este egal cu :

$$\left(\frac{a}{2} + x\right)\left(\frac{a}{2} - x\right) = \frac{a^2}{4} - x^2.$$

Devine clar că produsul celor doi factori crește atunci cînd x scade, adică atunci cînd scade diferența dintre ei. Produsul maxim se va obține atunci cînd $x = 0$, deci cînd ambele părți vor fi egale cu $\frac{a}{2}$.

Prin urmare numărul nostru trebuie să fie împărțit în părți egale ; cînd suma a două numere rămîne constantă, produsul lor este maxim atunci cînd numerele date sînt egale între ele.

Să examinăm aceeași problemă pentru cazul a 3 numere.

Cum trebuie să descompunem un număr în 3 părți, astfel ca produsul acestor părți să fie maxim?

Rezolvare

La rezolvarea acestei probleme vom ține seama de exemplul precedent.

Numărul a trebuie descompus în 3 părți. Să presupunem că nici una din părți nu este egală cu $\frac{a}{3}$. Atunci printre ele se va găsi o parte mai mare decît $\frac{a}{3}$ (toate trei nu pot fi mai mici decît $\frac{a}{3}$) ; o vom nota cu :

$$\frac{a}{3} + x.$$

De asemenea, una dintre ele trebuie să fie neapărat mai mică decît $\frac{a}{3}$; o vom nota cu :

$$\frac{a}{3} - y.$$

Numerele x și y sînt pozitive. Partea a treia va fi egală cu :

$$\frac{a}{3} + y - x.$$

Suma numerelor $\frac{a}{3}$ și $\frac{a}{3} + x - y$ este egală cu suma primelor două părți ale numărului a, iar diferența lor, adică $x - y$, este mai mică decît diferența primelor două părți, care este egală cu $x + y$. Din rezolvarea problemei precedente rezultă că produsul

$$\frac{a}{3}\left(\frac{a}{3} + x - y\right)$$

este mai mare decît produsul primelor două părți ale numărului a.

Ca atare, dacă vom înlocui primele două părți ale numărului a cu numerele :

$$\frac{a}{3} \text{ și } \frac{a}{3} + x - y,$$

iar pe a treia o vom lăsa neschimbată, produsul va crește.

Să admitem că una din părți este egală cu $\frac{a}{3}$. Atunci celelalte două părți vor fi de forma :

$$\frac{a}{3} + z \text{ și } \frac{a}{3} - z.$$

Dacă vom face aceste două părți din urmă egale cu $\frac{a}{3}$ (în care caz suma lor va rămîne neschimbată), produsul lor va crește din nou și va fi egal cu :

$$\frac{a}{3} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{3} = \frac{a^3}{27}.$$

Deci, dacă vom descompune numărul a în trei părți, care nu sînt egale între ele, produsul lor va fi mai mic decît $\frac{a^3}{27}$, adică el va fi mai mic decît produsul a trei factori egali între ei a căror sumă este egală cu a.

Teorema poate fi demonstrată în mod asemănător pentru patru, cinci etc., factori.

Să analizăm acum un caz mai general.

Să se afle pentru ce valori atribuite lui x și y expresia $x^p y^q$ ia valoarea maximă cînd $x + y = a$.

Rezolvare

Trebuie să aflăm pentru ce valoare a lui x expresia

$$x^p (a - x)^q$$

ia valoarea maximă.

Să înmulțim această expresie cu numărul $\frac{1}{p^p q^q}$. Obținem o altă expresie :

$$\frac{x^p}{p^p} \frac{(a - x)^q}{q^q},$$

care, evident, va lua valoarea maximă o dată cu ecuația inițială.

Să punem expresia obținută sub forma :

$$\underbrace{\frac{x}{p} \cdot \frac{x}{p} \cdot \frac{x}{p} \cdot \frac{x}{p} \cdots}_{\text{de } p \text{ ori}} \cdot \underbrace{\frac{a-x}{q} \cdot \frac{a-x}{q} \cdot \frac{a-x}{q} \cdots}_{\text{de } q \text{ ori}}$$

Suma tuturor factorilor acestei expresii este egală cu :

$$\underbrace{\frac{x}{p}+\frac{x}{p}+\frac{x}{p}+\ldots}_{\text{de } p \text{ ori}}+\underbrace{\frac{a-x}{q}+\frac{a-x}{q}+\ldots}_{\text{de } q \text{ ori}}=$$

$$=\frac{px}{p}+\frac{q(a-x)}{q}=x+a-x=a,$$

adică cu o mărime constantă.

Pe baza celor demonstrate anterior deducem că produsul

$$\frac{x}{p}\cdot\frac{x}{p}\cdot\frac{x}{p}\ldots\cdot\frac{a-x}{q}\cdot\frac{a-x}{q}\cdot\frac{a-x}{q}\ldots$$

ia valoarea maximă atunci cînd toți factorii sînt egali între ei, adică atunci cînd :

$$\frac{x}{p}=\frac{a-x}{q}.$$

Știind că $a - x = y$, obținem proporția :

$$\frac{x}{y}=\frac{p}{q}.$$

Deci, dacă suma $x + y$ este constantă, produsul $x^p y^q$ ia valoarea maximă atunci cînd :

$$x : y = p : q.$$

La fel se poate demonstra că atunci cînd sumele $x + y + z$, $x + y + z + t$ etc. rămîn neschimbate, produsele

$$x^p\ y^q\ z^r,\ x^p\ y^q\ z^r\ t^u \text{ etc.}$$

iau valoarea maximă cînd :

$$x : y : z = p : q : r;\ x : y : z : t = p : q : r : u \text{ etc.}$$

Cînd are o sumă valoarea minimă?

Cititorul care dorește să-și încerce forțele în demonstrarea unor teoreme de algebră utilă să rezolve următoarele probleme :

1. Suma a două numere, al căror produs rămîne constant, este minimă atunci cînd cele două numere sînt egale între ele.

De exemplu, pentru produsul 36 avem: $4 + 9 = 13$, $3 + 12 = 15$, $2 + 18 = 20$, $1 + 36 = 37$ şi, în sfîrşit, $6 + 6 = 12$.

2. Suma mai multor numere, al căror produs este constant, este minimă atunci cînd aceste numere sînt egale între ele.

De exemplu, pentru produsul 216 avem:

$$3 + 12 + 6 = 21,\ 2 + 18 + 6 = 26,\ 9 + 6 + 4 = 19,$$

în timp ce $6 + 6 + 6 = 18$.

Vom arăta prin cîteva exemple cum se aplică aceste teoreme în practică.

Grinda de volum maxim

Problemă

Se cere ca dintr-un buştean de formă cilindrică să fie tăiată o grindă dreptunghiulară de volum maxim. Ce formă trebuie să aibă secţiunea grinzii (fig. 23)?

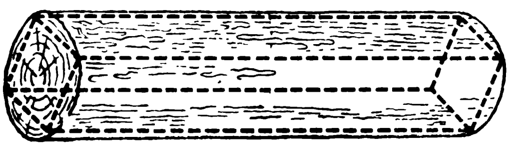


Fig. 23

Rezolvare

Dacă laturile secţiunii dreptunghiulare sînt x şi y, atunci, conform teoremei lui Pitagora,

$$x^2 + y^2 = d^2,$$

unde d este diametrul buşteanului. Volumul grinzii va fi maxim, atunci cînd xy va avea valoarea maximă. Dar atunci cînd xy este maxim, produsul x^2y^2 va fi, de asemenea, maxim. Deoarece suma $x^2 + y^2$ rămîne constantă, produsul x^2y^2 devine maxim cînd $x^2 = y^2$ sau $x = y$.

Deci, secţiunea grinzii trebuie să fie pătrată.

Două loturi de pămînt

Probleme

1. Ce formă trebuie să aibă un lot dreptunghiular de arie dată, pentru ca lungimea gardului care îl mărginește să fie minimă?

2. Ce formă trebuie să aibă un lot dreptunghiular pentru ca, pentru o lungime dată a gardului, aria lui să fie maximă?

Rezolvare

1. Forma lotului dreptunghiular este determinată de raportul dintre laturile sale x și y. Aria lotului cu laturile x și y este egală cu xy, iar lungimea gardului — cu $2x + 2y$. Lungimea gardului va fi minimă atunci cînd $x + y$ va avea valoarea minimă.

La un produs constant xy, suma $x + y$ va fi minimă în cazul egalității $x = y$. Prin urmare, dreptunghiul căutat este un pătrat.

2. Dacă x și y sînt laturile unui dreptunghi, atunci lungimea gardului va fi $2x + 2y$, iar aria lotului, xy. Acest produs va avea valoarea maximă atunci cînd produsul $4xy$, adică $2x \cdot 2y$, va fi maxim; produsul $2x \cdot 2y$ devine maxim cînd $2x = 2y$, adică atunci cînd lotul este un pătrat.

Deci, la proprietățile unui pătrat, cunoscute din geometrie, putem să mai adăugăm una nouă: dintre toate dreptunghiurile, pătratul are cel mai mic perimetru la o arie dată și cea mai mare arie la un perimetru dat.

Zmeul de hîrtie

Problemă

Un zmeu avînd aspectul unui sector circular trebuie să aibă o astfel de formă încît, la un perimetru dat, suprafața lui să fie maximă. Care trebuie să fie forma acestui sector?

Rezolvare

Să precizăm condițiile problemei: trebuie să aflăm pentru ce raport dintre lungimea arcului sectorului şi raza lui, aria acestuia devine maximă la un perimetru dat.

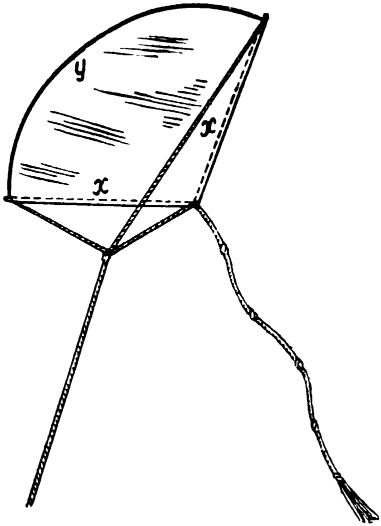


Fig. 24

Dacă raza sectorului este x, iar arcul y, atunci perimetrul său l şi aria S vor fi exprimate astfel (figura 24):

$$l = 2x + y, S = \frac{xy}{2} = \frac{x(l-2x)}{2}.$$

Mărimea S ia valoarea maximă pentru aceeaşi valoare a lui x, ca şi produsul $2x(l-2x)$. Deoarece suma factorilor $2x + (l-2x) = l$ este o mărime constantă, produsul lor va fi maxim cînd $2x = l - 2x$, de unde:

$$x = \frac{l}{4}, \; y = l - 2\cdot\frac{l}{4} = \frac{l}{2}.$$

Astfel, la un perimetru dat, sectorul va cuprinde suprafaţa maximă atunci cînd raza lui va fi egală cu $\frac{1}{2}$ din arc (adică lungimea arcului va fi egală cu suma razelor sau lungimea părţii curbe a perimetrului va fi egală cu lungimea liniei frînte). Unghiul sectorului este $\approx 115°$, adică doi radiani. Care sînt proprietăţile de zbor al unui zmeu cu o deschidere atît de mare este o problemă care nu intră în preocupările noastre.

Construcţia unei case

Problemă

În locul unei case ruinate, de la care a rămas doar un singur zid, se proiectează să se construiască o casă nouă. Lungimea zidului existent este de 12 m. Suprafaţa noii case trebuie să fie egală cu 112 m². Condițiile lucrărilor sînt următoarele :

1. Reparația unui metru liniar de zid costă 25 % din costul unui zid nou construit.

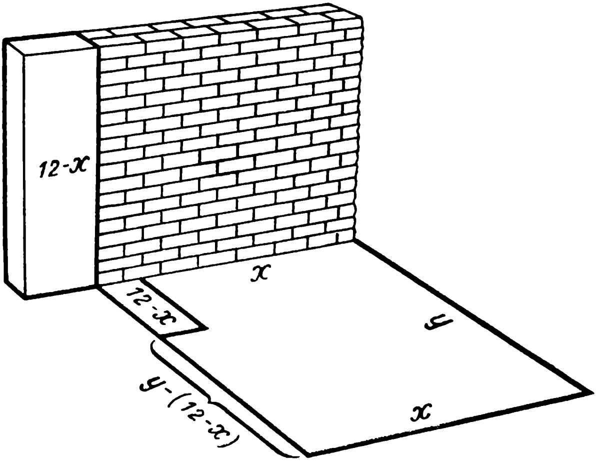


Fig. 25

2. Dărîmarea peretelui vechi și construirea unui zid nou din materialul obținut costă 50 % din costul unui metru liniar construit din material nou.

În asemenea condiții, cum se poate folosi în modul cel mai avantajos zidul rămas ?

Rezolvare

Să presupunem că din zidul vechi se păstrează x metri, iar restul de $12 - x$ se demolează pentru ca materialul obținut să fie folosit la un zid nou (fig. 25). Dacă costul executării unui metru liniar de zid din material nou este egal cu a, atunci reparația a x metri din zidul vechi va costa $\frac{ax}{4}$; executarea porțiunii din zid cu o lungime de $12 - x$ va costa $\frac{a(12-x)}{2}$; executarea celeilalte porțiuni va costa $a\ [y - (12 - x)]$, adică $a(y + x - 12)$; al treilea zid va costa ax, iar al patrulea, ay. Întreaga lucrare va costa deci :

$$\frac{ax}{4} + \frac{a(12-x)}{2} + a(y+x-12) + ax + ay = \frac{a(7x+8y)}{4} - 6a.$$

Această din urmă expresie este minimă atunci cînd şi suma

$$7x + 8y$$

este minimă.

Ştim însă că suprafaţa casei xy este egală cu 112 ; prin urmare :

$$7x \cdot 8y = 56 \cdot 112.$$

Produsul rămînînd constant, suma $7x + 8y$ ia valoarea minimă atunci cînd :

$$7x = 8y,$$

de unde :

$$y = \frac{7}{8}x.$$

Înlocuindu-l pe y din această expresie în ecuaţia :

$$xy = 112,$$

obţinem :

$$\frac{7}{8}x^2 = 112, \qquad x = \sqrt{128} \approx 11,3.$$

Deoarece lungimea zidului vechi este de 12 m, urmează că trebuie demolaţi doar 0,7 m din acest perete.

Un lot de vilă

Problemă

Înainte de a se începe construcţia unei vile, trebuia îngrădit lotul de pămînt pe care urma să fie construită. Materialul existent ajungea pentru l metri liniari de gard.

Afară de aceasta, mai putea fi folosit şi un gard mai vechi (care mărginea o parte a lotului). Cum trebuie procedat ca suprafaţa îngrădită să fie maximă?

Rezolvare

Să admitem că lungimea lotului (în direcţia gardului vechi) este egală cu x, iar lăţimea (adică dimensiunea

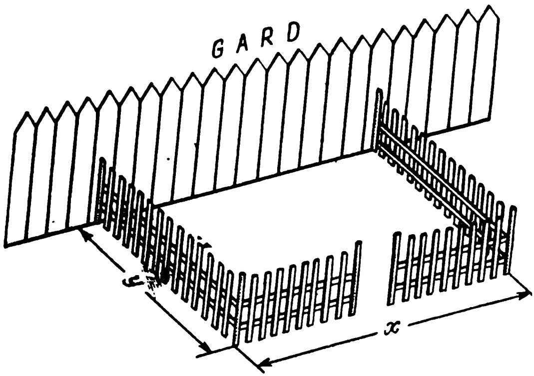


Fig. 26

lotului în direcţia perpendiculară pe acest gard) este egală cu y (fig. 26). Atunci, pentru îngrădirea acestui lot sînt necesari $x + 2y$ metri de gard, deoarece:

$$x + 2y = l.$$

Aria lotului este egală cu:

$$S = xy = y(l-2y).$$

Ea este maximă o dată cu mărimea:

$$2y(l-2y),$$

(dublul ariei), care reprezintă produsul a doi factori cu suma constantă l. De aceea, pentru a obţine aria maximă trebuie ca:

$$2y = l-2y,$$

de unde:

$$y = \frac{l}{4}, \quad x = l - 2y = \frac{l}{2},$$

Cu alte cuvinte, $x = 2y$ (lungimea lotului) trebuie să fie de două ori mai mare decît lățimea sa.

Jgheabul cu cea mai mică secțiune

Problemă

O tablă metalică dreptunghiulară (fig. 27) trebuie să fie îndoită sub formă de jgheab, avînd secțiunea de forma unui trapez isoscel. Acest lucru poate fi realizat în diverse moduri, așa cum se vede în fig. 28. Ce lățime trebuie să aibă pereții laterali ai jgheabului și sub ce unghi trebuie să fie îndoiți, pentru ca secțiunea jgheabului să aibă aria maximă (fig. 29)?

Rezolvare

Fie l lățimea tablei. Lățimea pereților laterali ai jgheabului o vom nota cu x, iar lățimea fundului jgheabului — cu y. Să introducem încă o necunoscută z, a cărei semnificație reiese din fig. 30.

Aria trapezului, care reprezintă secțiunea jgheabului, este:

$$S = \frac{(z + y + z) + y}{2} \sqrt{x^2 - z^2} = \sqrt{(y + z)^2 (x^2 - z^2)}.$$

Problema a fost redusă la determinarea acelor valori ale lui x, y, z pentru care S ia valoarea maximă, în ipoteza că suma $2x + y$ (adică lățimea tablei) păstrează o valoare constantă l. Facem următoarea transformare:

$$S^2 = (y + z)^2 (x + z)(x - z).$$

Mărimea S^2 ia valoarea maximă pentru aceleași valori ale lui x, y și z ca și $3S^2$; această din urmă expresie poate fi pusă sub formă de produs:

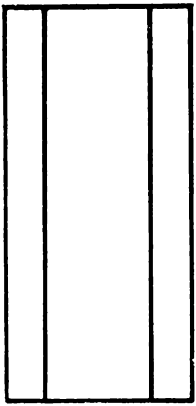
$$(y + z)(y + z)(x + z)(3x - 3z).$$

Suma acestor patru factori :

$$y + z + y + z + x + z + 3x - 3z = 2y + 4x = 2l,$$

rămîne constantă. De aceea, produsul lor va fi maxim, atunci cînd factorii vor fi egali între ei, adică atunci cînd :

$$y + z = x + z \text{ și } x + z = 3x - 3z.$$



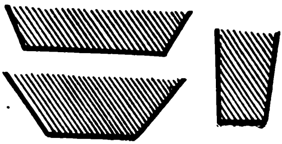
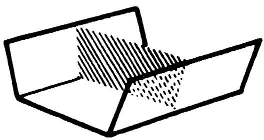


Fig. 28



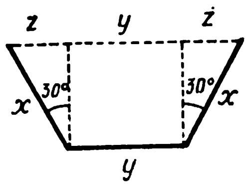


Fig. 27 Fig. 29 Fig. 30

Deci, obținem prima ecuație :

$$y = x,$$

și, deoarece $y + 2x = l$, rezultă că $x = y = \frac{l}{3}$.

Din ecuația a doua obținem :

$$z = \frac{x}{2} = \frac{l}{6}.$$

Mai departe, deoarece cateta z este egală cu jumătatea ipotenuzei x (fig. 30), reiese că unghiul opus acestei catete este egal cu 30°, iar unghiul de înclinare a pereților laterali ai jgheabului față de fund este egal cu 90° + 30° = 120°.

Deci, jgheabul va avea secțiunea maximă atunci cînd fețele sale vor fi îndoite după trei laturi alăturate ale unui hexagon regulat.

Pîlnia de capacitate maximă

Problemă

Dintr-o tablă circulară trebuie să confecționăm partea conică a unei pîlnii. În acest scop, vom tăia din tablă un sector, iar partea rămasă o vom îndoi sub formă de con

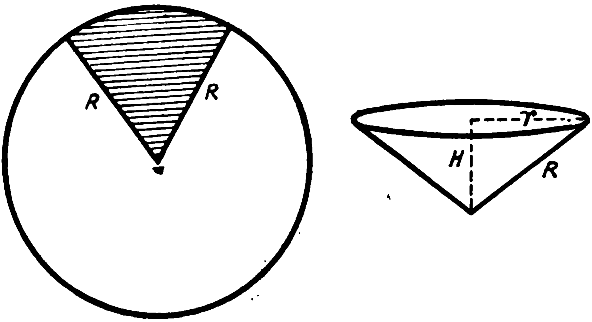


Fig. 31

(fig. 31). Cîte grade trebuie să aibă sectorul astfel tăiat, pentru ca acest con să aibă capacitatea maximă?

Rezolvare

Vom nota cu x lungimea arcului corespunzător părții de cerc care urmează să fie îndoită pentru pîlnie. Prin urmare, generatoarea conului va fi raza R a tablei circulare, iar lungimea circumferinței bazei va fi x. Raza r a bazei conului se determină din egalitatea:

$$2\pi r = x, \text{ de unde } r = \frac{x}{2\pi}.$$

Înălțimea conului (conform teoremei lui Pitagora) va fi:

$$H = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}$$

(fig. 31). Volumul acestui con va fi:

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 H = \frac{\pi}{3} \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}$$

Această expresie ia valoarea maximă o dată cu expresia:

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 \sqrt{R^2-\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2}$$

şi cu pătratul ei:

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^4 \left[R^2-\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\right].$$

Deoarece

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 + R^2 - \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = R^2$$

este o mărime constantă (din cele demonstrate anterior), rezultă că ultimul produs ia valoarea maximă pentru o valoare a lui x care verifică relația:

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 : \left[R^2-\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\right] = 2:1,$$

de unde:

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = 2R^2 - 2\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2,$$

$$3\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = 2R^2 \text{ şi } x = \frac{2\pi}{3} R\sqrt{6} \approx 5{,}15\,R.$$

În grade, arcul $x \approx 295°$, ceea ce înseamnă că arcul sectorului tăiat trebuie să fie de $\approx 65°$.

Iluminarea maximă

Problemă

La ce înălțime deasupra mesei trebuie să fie aşezată flacăra unei lumînări astfel ca ea să lumineze cel mai bine o monedă aflată pe masă?

Rezolvare

S-ar părea că pentru atingerea scopului propus ar trebui ca flacăra să fie cît mai aproape de masă. Dar această presupunere nu este adevărată: atunci cînd flacăra este așezată prea jos, razele cad oblic. Trebuie deci să ridicăm lumînarea astfel ca razele să cadă cît mai aproape de verticală, ceea ce înseamnă să îndepărtăm sursa de lumină. În acest caz, înălțimea optimă (din

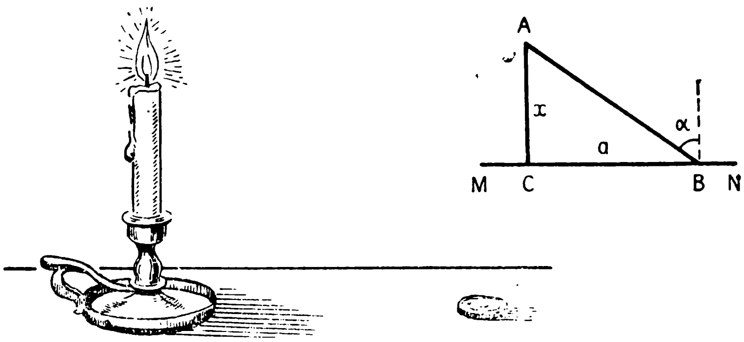


Fig. 32

punctul de vedere al iluminării) va fi o înălțime oarecare medie la care trebuie să se găsească flacăra deasupra mesei. O vom nota cu x (fig. 32). Distanța BC, la care se află moneda B de piciorul C al perpendicularei care trece prin flacăra A, o vom nota cu a. Dacă strălucirea flăcării este i, atunci (potrivit legilor opticii) iluminarea monedei va fi :

$$\frac{i}{AB^2}\cos\alpha = \frac{i\cos\alpha}{(\sqrt{a^2+x^2})^2} = \frac{i\cos\alpha}{a^2+x^2},$$

unde α este unghiul de incidență al fasciculului de raze AB. Deoarece

$$\cos\alpha = \cos A = \frac{x}{AB} = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}},$$

iluminarea monedei va fi :

$$\frac{i}{a^2+x^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{ix}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Această expresie ia valoarea maximă pentru aceeași valoare a lui x, ca și pătratul ei, adică:

$$\frac{i^2x^2}{(a^2+x^2)^3}.$$

Omitem factorul i^2 care este o mărime constantă, iar expresia rămasă o transformăm în felul următor:

$$\frac{x^2}{(a^2+x^2)^3}=\frac{1}{(x^2+a^2)^2}\left(1-\frac{a^2}{x^2+a^2}\right)=\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)^2\left(1-\frac{a^2}{x^2+a^2}\right).$$

Expresia transformată ia valoarea maximă o dată cu expresia:

$$\left(\frac{a^2}{x^2+a^2}\right)^2\left(1-\frac{a^2}{x^2+a^2}\right),$$

deoarece factorul constant introdus a^4 nu influențează valoarea lui x pentru care produsul ia valoarea maximă. Observînd că suma factorilor la puterea întîia

$$\frac{a^2}{x^2+a^2}+\left(1-\frac{a^2}{x^2+a^2}\right)=1$$

este constantă, deducem că produsul considerat ia valoarea maximă atunci cînd:

$$\frac{a^2}{x^2+a^2}:\left(1-\frac{a^2}{x^2+a^2}\right)=2:1.$$

Avem ecuația:

$$a^2=2x^2+2a^2-2a^2.$$

Rezolvînd această ecuație, aflăm:

$$x=\frac{a}{\sqrt{2}}\approx 0{,}71\,a.$$

Moneda va fi iluminată cel mai bine atunci cînd sursa de lumină se va afla la o înălțime de 0,71 din distanța între proiecția sursei și monedă. Cunoașterea acestei relații ajută la stabilirea celei mai bune iluminări a locurilor de muncă.

CAPITOLUL VIII

PROGRESII

Cea mai veche progresie

Problemă

Cea mai veche problemă cu progresii nu este cea a jocului de şah, cunoscută de două mii de ani, ci una mult mai veche relativă la împărţirea cerealelor, înscrisă în vestitul papirus egiptean Rhind. Acest papirus, descoperit de Rhind la sfîrşitul secolului trecut, a fost întocmit cu circa 2 000 de ani înaintea erei noastre, şi este copia unei alte lucrări matematice cu o vechime de aproape 3 000 de ani î.e.n. Printre problemele aritmetice, algebrice şi geometrice cuprinse în acest document, există şi cea de mai jos (o dăm în traducere liberă):

Se cere ca 100 măsuri de cereale să fie împărţite între 5 oameni, astfel, încît cel de-al doilea să primească mai mult decît primul cu atît cu cît cel de-al treilea a primit mai mult decît cel de-al doilea, cel de-al patrulea mai mult decît cel de-al treilea, iar cel de-al cincilea mai mult decît cel de-al patrulea. Afară de aceasta, primii doi trebuie să primească de 7 ori mai puţin decît următorii trei. Cît trebuie să primească fiecare dintre ei?

Rezolvare

Cantitatea de cereale primită de cei interesaţi formează o progresie aritmetică crescătoare. Notînd primul său termen cu x, iar raţia cu y, rezultă că:

partea primului om x
partea celui de-al doilea . . . . $x + y$
partea celui de-al treilea . . . . $x + 2y$
partea celui de-al patrulea . . . . $x + 3y$
partea celui de-al cincilea . . . . $x + 4y$.

În virtutea enunțului problemei, formăm următoarele două ecuații :

$$\begin{cases} x + (x + y) + (x + 2y) + (x + 3y) + (x + 4y) = 100, \\ 7\,[x + (x + y)] = (x + 2y) + (x + 3y) + (x + 4y). \end{cases}$$

După simplificări, prima ecuație ia forma :

$$x + 2y = 20,$$

iar ecuația a doua :

$$11x = 2y.$$

Rezolvînd sistemul, obținem :

$$x = 1\frac{2}{3}\ ; \quad y = 9\frac{1}{6}.$$

Deci, cerealele trebuie împărțite în următoarele părți :

$$1\frac{2}{3}, \quad 10\frac{5}{6}, \quad 20, \quad 29\frac{1}{6}, \quad 38\frac{1}{3}.$$

Algebra pe hîrtia cu pătrățele

Cu toate că această problemă cu progresii datează de 50 de secole, în practica școlară progresiile au început să fie folosite de relativ puțin timp. În manualul lui Magnițki, publicat acum 200 de ani și care timp de 50 de ani a fost principalul manual folosit în școlile ruse, deși există progresii, nu sînt însă date formule generale care să exprime legătura dintre termenii lor. De aceea, însuși autorul manualului întîmpină greutăți la rezolvarea problemelor cu progresii. Cu toate acestea, formula sumei termenilor unei progresii aritmetice poate fi dedusă foarte ușor printr-o metodă simplă, cu ajutorul hîrtiei cu pătrățele. Pe această hîrtie, orice progresie aritmetică este reprezentată printr-o figură în scară. De exemplu, figura *ABCD* (fig. 33) reprezintă progresia :

$$2\,;\,5\,;\,8\,;\,11\,;\,14.$$

Pentru aflarea sumei termenilor ei, vom completa figura pînă la dreptunghiul *ABGE*. Obținem două figuri egale *ABDC* și *DGEC*. Aria fiecăreia din ele reprezintă

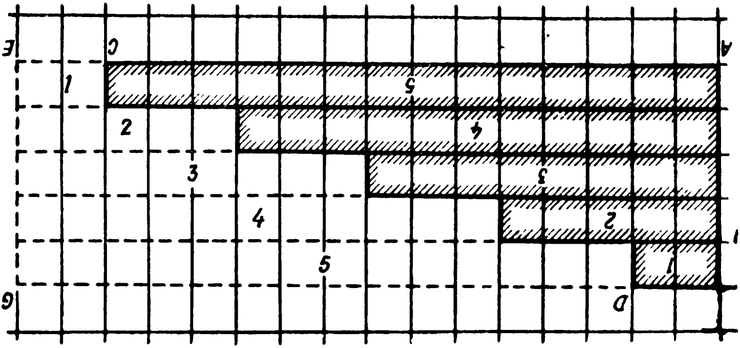


Fig. 33

suma termenilor progresiei noastre. Deci, dublul sumei progresiei este egal cu aria dreptunghiului $ABGE$, adică :

$$(AC + CE) \cdot AB.$$

Dar $AC + CE$ reprezintă suma dintre primul și cel de al cincilea termen al progresiei ; AB este numărul termenilor progresiei. De aceea, avem :

$$2S = (\text{suma termenilor extremi}) \cdot (\text{numărul termenilor})$$

sau :

$$S = \frac{(\text{primul termen} + \text{ultimul termen}) \cdot (\text{numărul termenilor})}{2}$$

Udarea unei grădini de zarzavat

Problemă

Într-o grădină de zarzavat sînt 30 de straturi, de 16 m lungime și 2,5 m lățime fiecare. Pentru a le uda, grădinarul aduce apa cu gălețile de la o fîntînă situată la o distanță de 14 m de marginea grădinii (fig. 34) și ocolește straturile de răzoare. Știind că apa adusă, de fiecare dată, ajunge pentru udarea unui singur strat, să calculăm cît de lung este drumul pe care trebuie să-l parcurgă grădinarul pentru a uda întreaga grădină. Drumul începe și se încheie la fîntînă.

Fig. 34

Rezolvare

Pentru udarea primului strat, grădinarul trebuie să parcurgă un drum de :

$$14 + 16 + 2{,}5 + 16 + 2{,}5 + 14 = 65 \text{ m}.$$

Pentru udarea celui de-al doilea strat, el parcurge :

$$14 + 2{,}5 + 16 + 2{,}5 + 16 + 2{,}5 + 2{,}5 + 14 = 65 + 5 = 70 \text{ m}.$$

Fiecare din straturile următoare necesită un drum cu 5 m mai lung decît cel precedent. Obținem progresia :

$$65\,;\ 70\,;\ 75\,;\ldots;\ 65 + 5 \cdot 29.$$

Suma termenilor ei este egală cu :

$$\frac{(65 + 65 + 29 \cdot 5) \cdot 30}{2} = 4\,125 \text{ m}.$$

Pentru udarea întregii grădini grădinarul parcurge un drum de 4,125 km.

Hrănirea găinilor

Problemă

Pentru 31 de găini a fost pregătită o anumită cantitate de hrană, și anume cîte un decalitru pentru o găină pe săptămînă. Să presupunem că numărul găinilor rămîne constant. Deoarece în fiecare săptămînă numărul găinilor scădea cu 1, hrana pregătită a ajuns pentru un interval de timp de două ori mai lung decît cel prevăzut. Care a fost rezerva de hrană și pentru cît timp a fost ea calculată inițial?

Rezolvare

Să considerăm că s-au pregătit x dal de hrană pentru y săptămîni. Deoarece hrana a fost calculată pentru 31 de găini a cîte 1 dal pe săptămînă pentru fiecare găină, rezultă că:

$$x = 31\ y.$$

În prima săptămînă au fost consumați 31 dal, în săptămîna a doua, 30 dal, în a treia, 29 dal etc., pînă la ultima săptămînă a termenului dublu, cînd au fost consumați:

$$(31 - 2y + 1)\ \text{dal.}\ *$$

Deci întreaga rezervă a fost de:

$$x = 31y = 31 + 30 + 29 + \ldots + (31 - 2y + 1)\ \text{dal.}$$

Suma a $2y$ termeni ai unei progresii, în care primul termen este 31, iar ultimul, $31 - 2y + 1$, este egală cu:

$$31y = \frac{(31 + 31 - 2y + 1)\,2y}{2} = (63 - 2y)\,y.$$

Deoarece y nu poate fi egal cu zero, putem simplifica ambii membri ai egalității cu acest factor. Obținem:

$$31 = 63 - 2y \text{ și } y = 16,$$

de unde:

$$x = 31\ y = 496.$$

Au fost rezervați deci 496 dal de hrană pentru 16 săptămîni.

---

* Explicație: consumul hranei în cursul:
primei săptămîni . . . . .31 dal
celei de-a doua săptămîni . . . .$31 - 1$ dal
celei de-a treia săptămîni. . . . .$31 - 2$ dal
. . . .
celei de-a $2y$ săptămîni . . . . $31 - (2y - 1) = 31 - 2y + 1$ dal

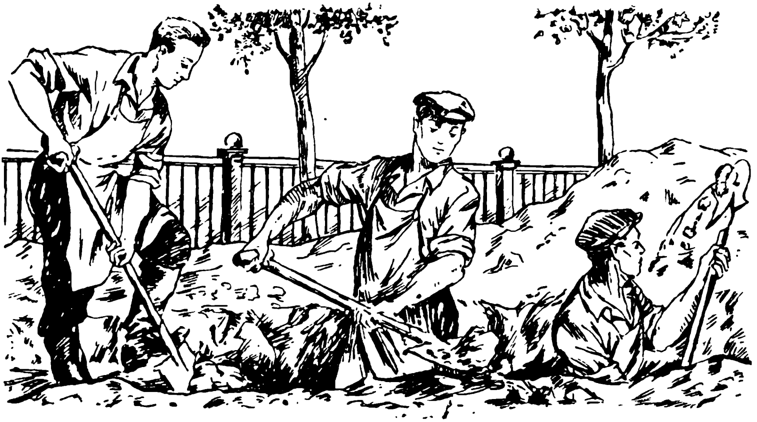


Fig. 35

Echipa de săpători

Problemă

O echipă de săpători s-a angajat să sape un șanț. Dacă ea ar fi lucrat cu întregul ei efectiv, șanțul ar fi fost săpat în 24 de ore. În realitate însă lucrarea a început-o un singur muncitor, căruia după un timp oarecare i s-a asociat un al doilea, după tot atîta timp — al treilea, apoi după același interval de timp — al patrulea și așa mai departe pînă la ultimul lucrător. La terminarea lucrării s-a constatat că primul a lucrat de 11 ori mai mult decît ultimul.

Cît timp a lucrat ultimul lucrător?

Rezolvare

Să presupunem că ultimul săpător a lucrat x ore; atunci primul a lucrat $11x$ ore. Dacă numărul lucrătorilor din echipă este y, atunci numărul total de ore va reprezenta suma a y termeni ai unei progresii descrescătoare al cărei prim termen va fi $11x$, iar ultimul x, adică:

$$\frac{(11x + x)y}{2} = 6xy.$$

Pe de altă parte, se ştie că dacă echipa, compusă din y oameni, ar fi lucrat cu întregul ei efectiv, ea ar fi săpat şanţul dat în 24 de ore, adică pentru executarea lucrării sînt necesare $24y$ ore de muncă. Prin urmare :

$$6xy = 24y.$$

Numărul y nu poate fi egal cu zero ; de aceea, ecuaţia poate fi simplificată cu acest factor, după care obţinem :

$$6x = 24 \text{ şi } x = 4.$$

Astfel, săpătorul care a început lucrul ultimul, a lucrat 4 ore.

Am răspuns la întrebarea problemei ; iar dacă am fi dorit să aflăm cîţi lucrători au fost în echipă, n-am fi putut răspunde, cu toate că în ecuaţie acest număr figurează (sub litera y). Pentru a răspunde la această întrebare problema nu furnizează date suficiente.

Merele

Problemă

Un pomicultor a vîndut primului cumpărător jumătate din cantitatea de mere pe care le avea şi încă o jumătate de măr ; celui de-al doilea cumpărător — jumătate din merele rămase şi încă o jumătate de măr ; celui de-al treilea — jumătate din merele rămase şi încă o jumătate de măr etc. pînă la al şaptelea cumpărător, căruia i-a vîndut şi lui jumătate din merele rămase şi încă o jumătate de măr, după care pomicultorului nu i-a mai rămas nimic. Cîte mere a avut pomicultorul ?

Rezolvare

Dacă notăm numărul iniţial de mere cu x, atunci primul cumpărător a cumpărat :

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{2},$$

al doilea :

$$\frac{1}{2}\left(x - \frac{x+1}{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{2^2},$$

al treilea:

$$\frac{1}{2}\left(x-\frac{x+1}{2}-\frac{x+1}{4}\right)+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{2^3},$$

. . . .

al șaptelea:

$$\frac{x+1}{2^7}.$$

Avem ecuația:

$$\frac{x+1}{2}+\frac{x+1}{2^2}+\frac{x+1}{2^3}+\ldots+\frac{x+1}{2^7}=x,$$

sau

$$(x+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^7}\right)=x.$$

Calculînd suma termenilor progresiei geometrice din paranteze, găsim:

$$\frac{x}{x+1}=1-\frac{1}{2^7} \text{ și } x=2^7-1=127.$$

În total, pomicultorul a avut 127 de mere.

Cumpărarea unui cal

Problemă

În vechiul manual de aritmetică al lui Magnițki găsim următoarea problemă amuzantă pe care o redăm mai jos:

Cineva a vîndut un cal cu 156 de ruble. Dar cumpărătorul s-a răzgîndit și a restituit vînzătorului calul spunîndu-i:

— Nu-mi convine să cumpăr calul la acest preț, nu face atîția bani!

Atunci vînzătorul i-a propus alte condiții:

— Dacă găsești că prețul pentru cal este prea mare, atunci cumpără numai caielele de la potcoavele calului; în acest caz calul îl vei primi pe gratis. Fiecare potcoavă

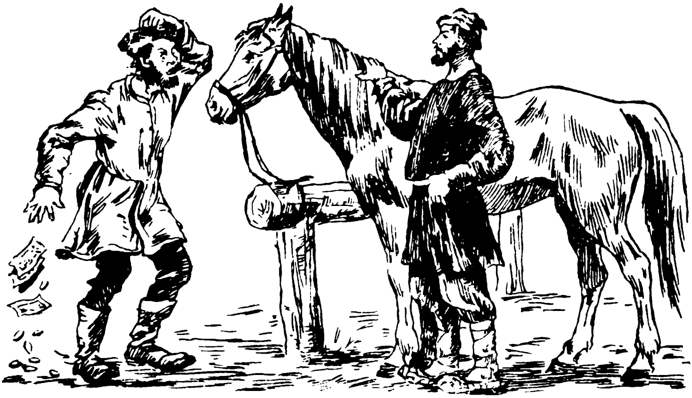


Fig. 36

are 6 caiele. Pentru prima caia îmi vei da $\frac{1}{4}$ copeică, pentru a doua, $\frac{1}{2}$ copeică, pentru a treia, o copeică etc.

Cumpărătorul, ispitit de prețul mic al caielelor și în dorința de a obține calul gratis, a acceptat condițiile vînzătorului, socotind că pentru caiele nu va plăti mai mult de 10 ruble.

Cu cît s-a înșelat cumpărătorul?

Rezolvare

Pentru 24 de caiele el a trebuit să plătească:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{24-3}$$

copeici. Această sumă este egală cu:

$$\frac{2^{21} \cdot 2 - \frac{1}{4}}{2 - 1} = 2^{22} - \frac{1}{4} = 4\,194\,303\ \frac{3}{4} \text{ copeici,}$$

deci circa 42 000 de ruble. În asemenea condiții nu este greu să dai un cal drept supliment.

Răsplata ostaşului

Problemă

Dintr-un alt manual vechi de matematici cu titlul : ,,*Curs complet de matematică pură, alcătuit de ofiţerul de artilerie şi profesorul particular de matematici Efim Voiţeahovski spre folosul şi pentru uzul tineretului şi al celor care se ocupă de matematici*'' (1795), reproducem următoarea problemă :

,,Pentru serviciile aduse patriei, un ostaş a primit o răsplată : pentru prima rană o copeică, pentru a doua, 2 copeici, pentru a treia, 4 copeici etc. Făcîndu-se calculul, s-a dovedit că ostaşul a primit în total suma de 655 de ruble şi 35 de copeici. Se întreabă cîte răni a avut ostaşul''.

Rezolvare

Formăm ecuaţia :

$$65\,535 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{x-1},$$

sau :

$$65\,535 = \frac{2^{x-1} \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 2^x - 1,$$

de unde obţinem :

$$65\,536 = 2^x \text{ şi } x = 16,$$

rezultat la care ajungem uşor prin încercări.

La un sistem de recompensă atît de generos, ostaşul trebuie să aibă 16 răni şi să rămînă viu ca să obţină o recompensă în valoare de 655 de ruble şi 35 de copeici.

CAPITOLUL IX

A ȘAPTEA OPERAȚIE MATEMATICĂ

A șaptea operație

Am spus că a cincea operație — ridicarea la putere — admite două operații inverse. Dacă :

$$a^b = c,$$

atunci aflarea lui a este o operație inversă — extragerea rădăcinii ; aflarea lui b este a doua operație inversă — logaritmarea. Se presupune că cititorul cunoaşte bazele teoriei logaritmilor, atît cît se învață în şcoala medie, și nu constituie pentru el o greutate să înțeleagă cu ce este egală, de pildă, expresia :

$$a^{\log_a b}$$

Este uşor de înțeles că, ridicînd baza logaritmilor a la o putere egală cu logaritmul numărului b, vom obține chiar numărul b.

Pentru ce au fost inventați logaritmii? Desigur pentru accelerarea şi simplificarea calculelor. Inventatorul primelor table de logaritmi, Neper, vorbeşte astfel despre intenția sa :

,,Am căutat, pe cît mi-a fost posibil, să mă debarasez de greutatea și plictiseala calculelor, care îndepărtează pe mulți de matematică".

Într-adevăr, logaritmii înlesnesc şi accelerează foarte mult calculele, fără să mai vorbim de faptul că ei ne oferă posibilitatea să efectuăm operații care, fără ajutorul lor, ar fi cu greu accesibile (extragerea rădăcinii de orice ordin).

Laplace scria, pe bună dreptate, că ,,inventarea logaritmilor, reducînd calcule de mai multe luni la o muncă de cîteva zile, parcă a prelungit de două ori viața astronomilor''. Marele matematician vorbește despre astronomi, deoarece aceștia trebuie să facă calcule deosebit de complicate și obositoare, dar cuvintele lui pot fi aplicate oricui are de-a face cu calcule numerice.

Noi, care sîntem obișnuiți cu logaritmii și deci cu simplificările calculelor pe care ni le oferă aceștia, cu greu ne putem închipui mirarea și admirația ce au stîrnit tablele de logaritmi la apariția lor. Contemporanul lui Neper, Briggs, devenit mai tîrziu celebru prin inventarea logaritmilor zecimali, scria despre opera acestuia : ,,Datorită noilor și minunaților săi logaritmi, Neper m-a determinat să muncesc fără încetare — și cu capul și cu mîinile. Nădăjduiesc să-l văd la vară, fiindcă niciodată n-am citit o carte care să-mi fi plăcut mai mult și care să mă fi uimit atît''. Briggs și-a realizat intenția și a plecat în Scoția să-l viziteze pe inventatorul logaritmilor. La întîlnire, Briggs i-a spus :

,,Am întreprins această lungă călătorie cu un singur scop : să vă cunosc și să aflu prin ce mijloace și prin ce artă ați ajuns la ideea acestui minunat ajutor pentru astronomie — logaritmii. De altfel, acum mă miră mai mult faptul că nimeni nu i-a găsit mai înainte — atît de simpli par după ce îi cunoști''.

Rivalii logaritmilor

Înainte de inventarea logaritmilor, pentru accelerarea calculelor existau tabele cu ajutorul cărora operația de înmulțire nu era înlocuită prin adunare, ci prin scădere. La baza acestor calcule stătea identitatea :

$$ab = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4},$$

de adevărul căreia ne putem convinge desfăcînd parantezele.

Avînd la îndemînă sferturile pătratelor, se putea afla produsul a două numere fără a se face înmulțirea, ci scăzînd din sfertul pătratului sumei acestor numere sfertul pătratului diferenței lor. Cu ajutorul acelorași tabele se putea ridica la pătrat și extrage rădăcina pătrată a unui număr, iar dacă se foloseau tabelele numerelor inverse se putea simplifica și operația de împărțire. Superioritatea acestor tabele față de tabelele de logaritmi constă în aceea că, cu ajutorul lor, se pot obține rezultate exacte și nu aproximative. În schimb, tabelele de logaritmi prezintă alte avantaje, mult mai importante din punct de vedere practic. În timp ce cu ajutorul tabelelor sferturilor de pătrate se pot înmulți numai două numere, logaritmii ne oferă posibilitatea de a afla dintr-o dată produsul oricărui număr de factori și, afară de aceasta, de a ridica un număr la orice putere și de a extrage rădăcina de orice ordin (întreg sau fracționar). De exemplu, cu ajutorul tabelelor sferturilor de pătrate nu putem calcula dobînda compusă.

Cu toate acestea, aceste tabele au continuat să fie publicate și după apariția tabelelor de logaritmi. În 1856 a apărut în Franța o lucrare cu titlul:

Tabela pătratelor numerelor de la 1 *pînă la* 1 000 *milioane, cu ajutorul căreia putem afla produsul exact al numerelor folosind o metodă simplă, mai comodă decît cu ajutorul logaritmilor. A întocmit-o Alexandre Cossart.*

Această idee se naște la mulți oameni, fără ca ei să bănuiască că ea a fost realizată de mult. Mie mi s-au adresat mai mulți inventatori ai tabelelor de acest gen, crezînd că au inventat ceva nou, și au rămas foarte uimiți cînd au aflat că invenția lor datează de circa 300 de ani.

Un alt rival al logaritmilor, mai tînăr, sînt tabelele care există în multe îndreptare tehnice. Acestea sînt tabele cumulative care cuprind următoarele rubrici: pătratele numerelor, cuburile, rădăcinile pătrate, rădăcinile cubice, inversele numerelor, lungimile cercurilor și ariile lor pentru numerele de la 2 la 1 000.

În multe calcule tehnice, aceste tabele sînt foarte comode, dar ele nu sînt întotdeauna satisfăcătoare, tabelele de logaritmi putînd fi folosite pe o scară mult mai largă.

Evoluția tabelelor de logaritmi

Pînă nu demult, în școlile noastre au fost folosite tabele de logaritmi cu 5 zecimale. Astăzi există tabele cu 4 zecimale, deoarece acestea sînt perfect suficiente în calculele tehnice. Însă pentru unele nevoi practice ajung şi mantise cu 3 zecimale.

Ideea că ar fi suficiente mantise mai scurte a fost adoptată relativ recent. Îmi aduc aminte de timpul cînd în şcolile noastre se foloseau volume groase de logaritmi cu 7 zecimale, care mai tîrziu au fost înlocuite cu logaritmi cu 5 zecimale. Dar şi logaritmii cu 7 zecimale păreau, la apariţia lor (1794), o inovaţie revoluţionară. Primii logaritmi zecimali, creaţi prin munca matematicianului londonez Briggs (1624), au avut 14 zecimale. După cîţiva ani ei au fost înlocuiţi prin tabelele cu 10 zecimale ale matematicianului olandez Adrian Vlacq.

După cum se vede, evoluţia tabelelor de logaritmi a mers de la mantisele cu multe zecimale la mantise mai scurte şi nu s-a terminat nici în zilele noastre, deoarece şi astăzi mulţi oameni nu vor să înţeleagă ideea simplă că precizia calculelor nu poate depăşi precizia măsurătorilor.

Reducerea mantiselor atrage după sine două urmări practice importante : 1) micşorarea considerabilă a volumului tabelelor de logaritmi şi, deci, 2) simplificarea folosirii lor, ceea ce înseamnă accelerarea calculelor care se fac cu ajutorul lor. Logaritmii cu 7 zecimale ocupă circa 200 de pagini de format mare, cei cu 5 zecimale, 30 de pagini de format pe jumătate cît primul ; cei cu 4 zecimale ocupă un volum de zece ori mai mic, ei putînd fi cuprinşi în 2 pagini de format mare, iar logaritmii cu 3 zecimale — pe o singură pagină.

Cît priveşte rapiditatea calculelor, s-a stabilit că un calcul efectuat cu ajutorul tabelelor cu 5 zecimale necesită un timp de 3 ori mai mic decît acelaşi calcul efectuat cu tabele cu 7 zecimale.

Curiozităţile logaritmilor

Dacă nevoile de calcul ale vieţii practice şi ale tehnicii pot fi satisfăcute cu ajutorul tabelelor de logaritmi cu 3 şi 4 zecimale, în schimb la dispoziţia cercetătorilor teoreticieni stau tabele cu mai multe zecimale, mai multe chiar decît cele 14 zecimale ale lui Briggs. Un logaritm este în general un număr iraţional şi nu poate fi exprimat exact prin nici un număr de cifre ; logaritmii majorităţii numerelor, oricîte zecimale ar avea, sînt daţi aproximativ — ei sînt cu atît mai precişi cu cît mantisa cuprinde mai multe cifre. Pentru unele lucrări ştiinţifice, logaritmii cu 14 zecimale nu prezintă o precizie suficientă* ; dar printre cele 500 de variante de tabele de logaritmi, apărute de la inventarea lor, un cercetător va găsi întotdeauna una care să-l satisfacă. Să luăm, de pildă, tabelele de logaritmi cu 20 de zecimale (pentru numerele de la 2 la 1 200) publicate în Franţa de Callet (1795). Pentru un grup de numere şi mai restrîns există tabele de logaritmi cu un număr foarte mare de zecimale — adevărate curiozităţi logaritmice a căror existenţă nici nu este bănuită de mulţi dintre matematicieni.

Iată aceşti coloşi logaritmici : nu este vorba de logaritmi zecimali, ci de cei naturali** :

Tabelele lui Wolfram cu 48 de zecimale pentru numerele pînă la 10 000.

Tabelele lui Sharp cu 61 de zecimale şi, în sfîrşit, o supracuriozitate logaritmică — tabelele lui Adams cu 260 de zecimale.

În acest din urmă caz nu este de fapt vorba de tabele, ci numai de aşa-zişii logaritmi naturali pentru cinci numere : 2, 3, 5, 7 şi 10 şi un multiplicator (cu 260 de zecimale) pentru transformarea lor în logaritmi zecimali. Nu este greu să ne dăm seama că, avînd la dispoziţie logaritmii acestor 5 numere, putem obţine prin adunare şi înmulţire logaritmii unui întreg şir de numere compuse ; de exemplu, log 12 este egal cu suma log 2 + log 2 + log 3 etc.

Printre curiozităţile logaritmice am mai putea cita şi rigla de calcul — „logaritmii de lemn" — dacă acest instrument ingenios n-ar fi devenit pentru tehnicieni o unealtă de calcul tot atît de obişnuită ca sciotul pentru contabili. O dată cu obişnuinţa scade şi sentimentul de uimire faţă de acest instrument, care de fapt funcţionează după principiul logaritmilor, deşi nu cere ca cei care îl folosesc să ştie ce este un logaritm.

---

* Logaritmii lui Briggs nu există decît de la 1 la 20 000 şi de la 90 000 la 101 000.

** Se numesc naturali logaritmii cu baza 2,718... despre care vom vorbi în cele ce vor urma.

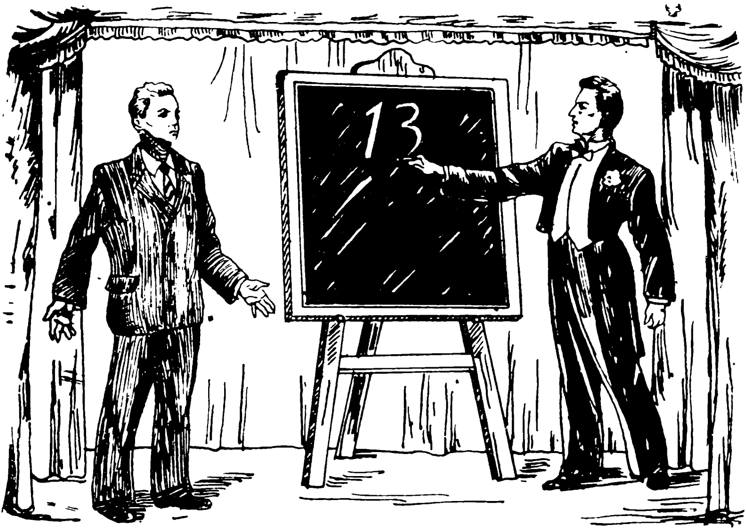


Fig. 37

Logaritmii pe estradă

Într-un concert de estradă, numărul cel mai izbitor, realizat de calculatori de profesie, este fără îndoială următorul. Fiind anunțați prin afișe că un virtuos în arta calculelor va extrage în minte rădăcinile de orice ordin ale numerelor formate din mai multe cifre, vă pregătiți de acasă, făcînd calculele complicate, a 31-a putere a unui număr oarecare, și sînteți deciși să răpuneți pe calculator cu un colos numeric, compus din 35 de cifre. La momentul oportun vă adresați calculatorului cu următoarele cuvinte :

— Încercați, vă rog, să extrageți rădăcina de ordinul 31 din următorul număr format din 35 de cifre ! Notați, vă dictez.

Calculatorul ia creta, dar înainte ca dv. să spuneți prima cifră, el a și scris rezultatul : 13.

Fără să cunoască numărul, el a extras din el rădăcina de ordinul 31 și încă în minte, și toate acestea cu o viteză fulgerătoare.

Sînteţi uimiţi, şi totuşi în toate acestea nu există nimic extraordinar. Secretul constă în aceea că există numai un singur număr, şi anume 13, care ridicat la puterea 31 dă un rezultat compus din 35 de cifre. Numerele mai mici de 13 dau un rezultat cu mai puţine cifre; iar numerele mai mari — un rezultat format din mai mult de 35 de cifre.

Dar de unde ştia calculatorul acest lucru? Cum a aflat el numărul 13? I-au ajutat logaritmii cu două zecimale pe care îi cunoaşte pe dinafară pentru primele 15—20 de numere. Nu este de loc greu de memorat aceste numere, dacă se are în vedere că logaritmul unui produs este egal cu suma logaritmilor factorilor lui. Cunoscînd bine logaritmii numerelor doi, trei şi şapte*, se pot cunoaşte logaritmii primelor 10 numere; pentru următoarele 10 numere trebuie să se ţină minte numai logaritmii a încă 4 numere.

Oricum ar fi calculatorul, ţine minte următoarea tablă de logaritmi cu două zecimale:

Număr	Log	Număr	Log
2	0,30	11	1,04
3	0,48	12	1,08
4	0,60	13	1,11
5	0,70	14	1,15
6	0,78	15	1,18
7	0,85	16	1,20
8	0,90	17	1,23
9	0,95	18	1,26
		19	1,28

Trucul matematic care v-a uimit atît a constat în următoarele:

$$\log \sqrt[31]{(35 \text{ de cifre})} = \frac{34, \ldots}{31}.$$

---

* Amintim că logaritmi de $5 = \log \frac{10}{2} = 1 - \log 2$.

Logaritmul căutat poate fi cuprins între :

$$\frac{34}{31} \text{ şi } \frac{34{,}99}{31} \text{ sau între } 1{,}09 \text{ şi } 1{,}13.$$

În acest interval există numai logaritmul unui singur număr între 1,11, logaritmul lui 13. Desigur, pentru ca aceste calcule să poată fi făcute repede în minte, trebuie să existe ingeniozitatea şi îndemînarea unui profesionist ; în fond însă lucrurile stau destul de simplu. De acum puteţi face singuri asemenea scamatorii, dacă nu în minte, atunci pe hîrtie.

Să presupunem că aveţi de rezolvat problema următoare :

Să se extragă rădăcina de ordinul 64 dintr-un număr format din 20 de cifre.

Fără să cunoaşteţi numărul dat puteţi spune rezultatul : rădăcina este egală cu 2.

Într-adevăr, $\log \sqrt[64]{(20 \text{ de cifre})} = \frac{19,\ldots}{64}$; prin urmare el trebuie să fie cuprins între $\frac{19}{64}$ şi $\frac{19{,}99}{64}$, adică între 0,29 şi 0,32. Un asemenea logaritm pentru un număr întreg este unul singur : 0,30..., adică logaritmul numărului 2.

Puteţi chiar să-l uimiţi pe interlocutorul dv., comunicîndu-i ce număr a avut el de gînd să vă dicteze : celebrul număr de şah

$$2^{64} = 18446744073709551616.$$

Logaritmii în grajd

Problemă

Cantitatea aşa-zisei hrane „de întreţinere'' (adică cantitatea minimă necesară pentru înlocuirea caloriilor cheltuite de organism prin funcţionarea organelor interne, refacerea celulelor etc.) este proporţională cu suprafaţa exterioară a corpului animalului. Cunoscînd acest fapt, să se stabilească numărul caloriilor din hrana de întreţinere a unui bou care cîntărește 420 kg, ținîndu-se seamă că în aceleași condiții, un bou de 630 kg are nevoie de 13 500 de calorii.

Rezolvare

Pentru rezolvarea acestei probleme practice din domeniul creșterii animalelor, este necesar ca pe lîngă algebră să apelăm și la geometrie. Conform enunțului problemei, numărul de calorii x este proporțional cu suprafața (s) a boului, adică :

$$\frac{x}{13\,500} = \frac{s}{s_1},$$

unde s_1 este suprafața corpului boului care cîntărește 630 kg. Din geometrie știm că suprafețele (ariile) (s) ale corpurilor asemenea sînt proporționale cu pătratele dimensiunilor lor liniare (l), iar volumele (și deci și greutățile) — — cu cuburile dimensiunilor liniare. De aceea :

$$\frac{s}{s_1} = \frac{l^2}{l_1^2}, \quad \frac{420}{630} = \frac{l^3}{l_1^3}$$

și deci :

$$\frac{l}{l_1} = \frac{\sqrt[3]{420}}{\sqrt[3]{630}},$$

de unde :

$$\frac{x}{13\,500} = \frac{\sqrt[3]{420^2}}{\sqrt[3]{630^2}} = \sqrt[3]{\left(\frac{420}{630}\right)^2} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^2}, \quad x = 13\,500\sqrt[3]{\frac{4}{9}}.$$

Cu ajutorul tabelelor de logaritmi aflăm :

$$x = 10\,300.$$

Boul nostru are nevoie de 10 300 de calorii.

Muzicienii se interesează rar de matematică; cea mai mare parte dintre ei, acordînd stima cuvenită acestei științe, preferă să stea mai departe de ea. Cu toate acestea, muzicienii — chiar cei care nu verifică, ca Salieri la Pușkin, „armonia cu ajutorul algebrei" — vin în contact cu matematica mult mai des decît își închipuie ei și încă cu lucruri „atît de grozave" cum sînt logaritmii.

Îmi voi permite cu această ocazie să citez un fragment din articolul regretatului fizician rus, prof. A. Eichenwald*.

„Unui coleg de-al meu de liceu îi plăcea să cînte la pian, dar nu-i plăcea matematica. El spunea cu o nuanță de dispreț că muzica și matematica nu au nimic comun. «Este adevărat că Pitagora a găsit unele corelații între vibrațiile sonore — dar această gamă a lui Pitagora s-a dovedit a fi inaplicabilă muzicii noastre».

Vă închipuiți cît de surprins a rămas el, cînd eu i-am demonstrat că, apăsînd clapele unui pian modern, el cîntă propriu-zis la logaritmi..." Și, într-adevăr, așa-zisele „trepte" ale unei game cromatice temperate nu sînt dispuse la distanțe egale, nici în raport cu frecvențele vibrațiilor, nici în raport cu lungimile de undă ale sunetelor corespunzătoare, ci ele reprezintă logaritmii acestor mărimi. Numai că baza acestor logaritmi este 2 și nu 10, așa cum se obișnuiește în alte cazuri.

Să presupunem că nota *do* din cea mai joasă octavă — o vom numi octava zero — este determinată de n oscilații pe secundă. Atunci notei *do* din octava I îi corespund $2n$ oscilații pe secundă, iar notei *do* din octava m, $n \cdot 2$ oscilații pe secundă etc. Să atribuim tuturor notelor gamei cromatice a pianului numere de ordin p, atribuind tonului fundamental *do* al fiecărei octave numărul zero; atunci, de pildă, tonul *sol* va fi al 7-lea, tonul *la* al 9-lea etc.; al

* Acest articol a fost publicat în „Calendarul astronomic rus din 1919" sub titlul *Despre distanțe mari și mici*.

12-lea ton va fi din nou *do*, dar dintr-o octavă superioară. Deoarece în gama cromatică temperată orice ton are de $\sqrt[12]{2}$ mai multe oscilații decît tonul precedent, numărul de oscilații al oricărui ton poate fi dat de formula :

$$N_{pm} = n \cdot 2^m \left(\sqrt[12]{2}\right)_p.$$

Logaritmînd această formulă, obținem :

$$\log N_{pm} = \log n + m \log 2 + p \frac{\log 2}{12},$$

sau :

$$\log N_{pm} = \log n + \left(m + \frac{p}{12}\right) \log 2$$

și luînd ca unitate ($n = 1$) numărul de oscilații ale notei *do* din cel mai jos registru și $\log 2 = 1$, avem :

$$\log_2 N_{pm} = m + \frac{p}{12}.$$

Observăm, deci, că numerele de ordine ale clapelor unui pian reprezintă logaritmii numerelor de oscilații ale sunetelor corespunzătoare*. Putem spune chiar că numărul unei octave reprezintă caracteristica, iar numărul de ordine al sunetului în octava dată** —mantisa logaritmului.

Astfel, de exemplu, dacă luăm nota *sol* din octava a treia, atunci în expresia corespunzătoare $3 + \frac{7}{12}$ ($\approx 3{,}583$) numărul 3 este caracteristica logaritmului numărului de oscilații al notei date, iar $\frac{7}{12}$ ($\approx 0{,}583$) — mantisa aceluiași logaritm cu baza 2 ; prin urmare numărul de oscilații este de $2^{3,583}$, adică de 11,98 ori mai mare decît numărul de oscilații al tonului *do* din prima octavă.

---

* Înmulțite cu 12.

** Împărțit la 12.

Stelele, zgomotul și logaritmii

Acest titlu, care leagă lucruri atît de diferite, n-are pretenția să fie o parodie la operele lui Cuzma Prutkov; va fi vorba într-adevăr de stele și de zgomot în strînsă legătură cu logaritmii.

Aci zgomotul și stelele stau alături, deoarece intensitatea sunetului și strălucirea stelelor sînt evaluate în același fel — după o scară logaritmică.

Astronomii clasifică stelele, după gradul lor de strălucire aparentă, în: stele de prima magnitudine aparentă, a doua magnitudine aparentă, a treia etc. Magnitudinile aparente consecutive sînt percepute de ochi ca termenii unei progresii aritmetice. Dar strălucirea fizică a stelelor variază după o altă lege: strălucirile obiective formează o progresie geometrică cu rația 2,5. Este ușor de înțeles că „magnitudinea" unei stele nu este altceva decît logaritmul strălucirii ei fizice. Astfel, o stea de-a treia magnitudine aparentă este mai strălucitoare decît una din prima magnitudine aparentă de $2{,}5^{3-1}$ ori, adică de 6,25 ori. Sau mai pe scurt, evaluînd strălucirea aparentă a stelelor, astronomii operează cu tabele de logaritmi cu baza 2,5. Nu ne vom opri aici prea mult asupra acestor corelații interesante, deoarece le-am consacrat destule pagini în *Astronomia distractivă**.

În mod asemănător se evaluează și intensitatea zgomotului. Efectul dăunător al zgomotelor industriale asupra sănătății muncitorilor și asupra productivității muncii a determinat elaborarea unor procedee pentru evaluarea cantitativă a intensității zgomotelor. Unitatea pentru măsurarea intensității sunetului este *belul*, iar în mod practic — *decibelul* (1/10 dintr-un bel). Gradele consecutive de tărie a sunetului — 1 bel, 2 beli etc. (practic 10 decibeli, 20 decibeli etc.) — reprezintă pentru urechea noastră o progresie aritmetică. Iar „intensitatea" fizică a acestor zgomote (sau mai precis energia) formează o progresie geometrică cu rația 10. Unei diferențe de 1 bel îi corespunde o creștere de 10 ori a energiei zgomotului. Deci, tăria zgomotului, exprimată în beli, este egală cu logaritmul zecimal al energiei lui fizice.

---

* I. I. Perelman, *Astronomia distractivă*, Editura Tineretului, 1959.

Lucrurile vor deveni mai clare dacă le vom ilustra cu cîteva exemple. Freamătul uşor al frunzelor este evaluat la 1 bel; o discuţie cu glas tare — la 6,5 beli; răcnetul unui leu — la 8,7 beli. De aici reiese că, în ceea ce priveşte intensitatea sunetului, graiul omenesc întrece freamătul frunzelor de:

$$10^{6,5-1} = 10^{5,5} = 316\,000 \text{ ori};$$

iar răcnetul unui leu este mai tare decît graiul omenesc de:

$$10^{8,7-6,5} = 10^{2,2} = 158 \text{ ori}.$$

Un zgomot care întrece 8 beli este considerat ca dăunător pentru organismul omenesc. În multe uzine norma indicată este întrecută, există sunete de 10 beli şi mai mult; loviturile unui ciocan într-o tablă de oţel produc un zgomot de 11 beli. Aceste zgomote întrec de 100 şi 1 000 de ori norma admisibilă şi sînt de 10—100 ori mai intense decît zgomotul cascadei Niagara (9 beli).

Oare este o coincidenţă faptul că la evaluarea strălucirii aparente a stelelor şi la măsurarea tăriei sunetului avem de-a face cu dependenţa logaritmică între intensitatea senzaţiei şi mărimea excitaţiei care a generat-o? Nu, atît prima cît şi a doua sînt urmare a unei legi generale (numită „legea psihofizică a lui Fechner"), care sună astfel: intensitatea senzaţiei este proporţională cu logaritmul mărimii excitaţiei.

După cum observăm, logaritmii pătrund şi în domeniul psihologiei.

Logaritmii în iluminatul electric

Problemă

Faptul că becurile care au acelaşi filament metalic umplute cu gaz dau o lumină mai strălucitoare decît becurile cu vid, se explică prin temperatura diferită a filamentului în aceste două condiţii. După cum se ştie din fizică, cantitatea totală de lumină radiată la incandescenţă creşte proporţional cu puterea a 12-a a temperaturii absolute. Cunoscînd acest fapt, facem următorul calcul: să stabilim de cîte ori un bec „cu gaz", la care temperatura filamentului este egală, în scara absolută, cu 2 500° (adică socotind de la —273°C), radiază mai multă lumină decît un bec cu vid, cu temperatura filamentului de 2 200°.

Rezolvare

Notînd raportul căutat cu x, avem ecuația :

$$x = \left(\frac{2\,500}{2\,200}\right)^{12} = \left(\frac{25}{22}\right)^{12},$$

de unde

$$\log x = 12\,(\log 25 - \log 22)\,;\; x = 4{,}6.$$

Becul cu gaz radiază de 4,6 ori mai multă lumină decît cel cu vid. Deci, dacă un bec cu vid dă o lumină de 50 de lumînări, în aceleași condiții becul cu gaz va da o lumină de 230 de lumînări.

Să facem încă un calcul : cu cît trebuie să crească temperatura absolută (în procente) pentru ca strălucirea unui bec să devină de două ori mai mare ?

Rezolvare

Formăm ecuația :

$$\left(1 + \frac{x}{100}\right)^{12} = 2$$

de unde :

$$\log\left(1 + \frac{x}{100}\right) = \frac{\log 2}{12} \text{ și } x = 6\%.$$

În sfîrșit, al treilea calcul : cu cît va crește (în procente) strălucirea unui bec dacă temperatura absolută a filamentului ei va crește cu 1 % ?

Rezolvare

Efectuînd calculul (cu ajutorul logaritmilor)

$$x = 1{,}01^{12},$$

găsim :

$$x = 1{,}13.$$

Strălucirea crește cu 13 %.

Dacă facem calculul pentru creşterea temperaturii cu 2%, aflăm că strălucirea creşte cu 27%; în cazul creşterii temperaturii cu 3% — strălucirea va creşte cu 43%.

De aici reiese clar de ce în tehnica fabricării becurilor electrice se caută atît de mult să se obţină creşterea temperaturii filamentului, preţuindu-se fiecare grad cîştigat.

Testamente de sute de ani

Cine n-a auzit de acel număr legendar de grăunţe de grîu, pe care l-ar fi cerut drept recompensă inventatorul jocului de şah? Acest număr se obţine prin dublarea consecutivă a unităţii: pentru primul cîmp s-a cerut 1 grăunte, pentru cîmpul al doilea, 2 grăunţe etc., mereu dublînd pînă la ultimul, al 64-lea cîmp.

Dar numerele cresc vertiginos nu numai la dublarea lor consecutivă, ci şi la o normă de creştere mult mai moderată. Un capital care aduce 5% creşte anual de 1,05 ori. S-ar părea că creşterea nu este prea mare. Cu toate acestea, după trecerea unui interval de timp destul de lung, capitalul ajunge la o sumă imensă. Prin aceasta se explică creşterea uimitoare a capitalurilor lăsate cu testament pe un timp lung. Pare curios că lăsînd o sumă destul de modestă, testatorul dispune de repartizarea unor capitaluri imense. Este cunoscut testamentul lui Benjamin Franklin, publicat în *Culegerea diverselor opere ale lui B. Franklin*. Iată un extras din acest testament:

„Las 1 000 de lire locuitorilor din Boston. Primind această mie de lire ei o vor încredinţa celor mai onorabili cetăţeni, iar aceştia la rîndul lor o vor da cu dobîndă, cu 5% pe an, tinerilor meseriaşi*. Peste 100 de ani această sumă va creşte pînă la 131 000 de lire. Doresc ca atunci, cele 100 000 de lire să fie întrebuinţate pentru construcţii de clădiri publice, iar restul de 31 000 să fie date cu dobîndă pe 100 de ani. După trecerea celui de-al doilea secol suma va creşte pînă la 4 061 000 de lire, din care 1 060 000 las la dispoziţia locuitorilor din Boston, iar 3 000 000 — obştei

---

* În acea epocă în America nu existau instituţii de credit.

din Massachusetts. Mai departe nu îndrăznesc să-mi extind planurile''.

Lăsînd în total 1 000 de lire, Franklin repartizează milioane. Dar aici nu există nici un fel de confuzie. Calculul matematic demonstrează că sînt întru totul reale considerentele testamentului. Crescînd anual de 1,05 ori, peste 100 de ani 1 000 de lire vor deveni :

$$x = 1\,000 \cdot 1{,}05^{100} \text{ lire.}$$

Această expresie poate fi calculată cu ajutorul logaritmilor :

$$\log x = \log 1\,000 + 100 \log 1{,}05 = 5{,}11893,$$

de unde :

$$x = 131\,000$$

ceea ce corespunde testamentului. Mai departe, în următorii 100 de ani, 31 000 de lire se vor transforma în :

$$y = 31\,000 \cdot 1{,}05^{100},$$

de unde :

$$y = 4\,076\,500$$

— suma care diferă puțin de cea indicată în testament.

Propun cititorului să rezolve el singur problema de mai jos extrasă din *Domnii Golovliov* de Saltîkov-Şcedrin :

Porfirii Vladimirovici stă în cabinetul lui umplînd coli de hîrtie cu calcule numerice. De data aceasta îl preocupă următoarea problemă : cîți bani ar fi avut el acuma, dacă mama lui nu şi-ar fi însuşit cele 100 de ruble dăruite lui la naştere de bunicul său, şi ar fi pus aceşti bani la muntele de pietate pe numele minorului Porfirie? Rezultă, totuşi, destul de puțin: în total 800 de ruble''.

Presupunînd că la data calculului efectuat Porfirii avea 50 de ani, şi admițînd că el a efectuat corect calculul (ceea ce este puțin probabil, deoarece e îndoielnic că Golovliov cunoştea logaritmii şi ştia să calculeze dobînda compusă), se cere să se stabilească ce dobîndă se plătea pe atunci în instituțiile de credit.

Creşterea continuă a capitalului

La casele de depuneri banii proveniți din dobîndă se adaugă anual la capitalul de bază. Dacă dobînda se adaugă la capital mai des, acesta creşte mai repede, deoarece dobînda se calculează la o sumă mai mare. Să luăm un exemplu simplu, pur teoretic . Să presupunem că la Casa de Depuneri au fost depuse 100 de ruble cu 100% anual. Dacă banii din dobîndă vor fi adăugați la capitalul de bază după un an, atunci cele 100 de ruble vor deveni 200. Să vedem ce vor deveni cele 100 de ruble dacă dobînda ar fi adăugată la capital la fiecare şase luni :

$$100 \cdot 1{,}5 = 150 \text{ ruble},$$

şi după încă 6 luni :

$$100 \cdot 1{,}5 = 225 \text{ ruble}.$$

Adăugînd dobînda la capital la fiecare 1/3 de an, după un an cele 100 ruble vor deveni :

$$100\left(1 \cdot \frac{1}{3}\right)^3 \approx 237{,}03 \text{ ruble}.$$

Micşorînd termenele de adăugare a dobînzii la 0,1 ani, 0,01 ani, 0,001 ani etc., peste un an cele 100 de ruble vor deveni :

$$100 \text{ ruble} \cdot 1{,}1^{10} \approx 259{,}37 \text{ ruble}$$
$$100 \text{ ruble} \cdot 1{,}01^{100} \approx 270{,}48 \text{ ruble},$$
$$100 \text{ ruble} \cdot 1{,}001^{1000} \approx 271{,}69 \text{ ruble}.$$

Prin metodele matematicii superioare se demonstrează că dacă reducem nelimitat termenele de adăugare a dobînzii, atunci capitalul nu va creşte la infinit, ci se apropie de o limită anumită, egală aproximativ* cu :

271,83 ruble.

Mai mult decît de 2,7183 ori un capital depus cu 100% nu poate să crească chiar dacă dobînda s-ar adăuga la capital în fiecare secundă.

---

* Am neglijat submultiplii rublelor.

Numărul „e"

Numărul obținut 2,718..., care joacă în matematica superioară un rol uriaş — nu mai puțin important ca vestitul număr π — se notează cu e. Acest număr este irațional : el nu poate fi exprimat printr-un număr finit de cifre*, dar poate fi calculat cu o aproximație oricît de bună cu ajutorul următoarei serii :

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{1.2.3.4.5}+\dots$$

Din exemplul de mai sus, în care a fost vorba de creşterea capitalului depus cu o dobîndă compusă, rezultă că numărul e este limita expresiei :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

cînd n creşte la infinit.

Din mai multe motive, pe care nu le putem expune aici, este foarte convenabil să se ia numărul e drept baza unui sistem de logaritmi. Asemenea tabele (de „logar tmi naturali") există şi au multe aplicații în ştiință şi tehnică. Logaritmii — coloşi, formați din 48, din 61, din 102 şi din 260 de cifre — despre care am vorbit, au ca bază pe e.

Numărul e apare adeseori acolo unde nici nu ne aşteptăm. Să punem, de exemplu, următoarea problemă :

Cum trebuie descompus într-o sumă un număr dat a pentru ca produsul tuturor termenilor să fie maxim?

Ştim că la o sumă constantă mai multe numere vor da produsul maxim atunci cînd factorii sînt egali între ei. Devine clar că numărul a trebuie împărțit în părți egale. Dar în cîte anume părți egale? În două, în trei, în zece? Cu ajutorul metodelor matematicii superioare se poate stabili că cel mai mare produs se obține atunci cînd factorii se apropie cel mai mult de numărul e.

De pildă, 10 trebuie să fie descompus într-un număr de părți egale, astfel ca ele să fie cît mai apropiate de

* În afară de aceasta, numărul e, ca şi numărul π, este un număr transcendent, adică el nu poate fi obținut prin rezolvarea unei ecuații algebrice cu coeficienți întregi.

numărul 2,718... Pentru aceasta este necesar să aflăm cîtul :

$$\frac{10}{2,718\ldots} = 3,678\ldots$$

Deoarece nu putem descompune un număr în 3,678... părți egale, sîntem nevoiți să alegem numărul întreg cel mai apropiat, 4. Prin, urmare, vom obține cel mai mare produs al părților atunci cînd acestea vor fi egale cu $\frac{10}{4}$, adică cu 2,5.

Deci

$$(2,5)4 = 39,0625$$

este cel mai mare număr care poate fi obținut prin înmulțirea unor părți egale ale numărului 10. Într-adevăr, dacă descompunem numărul 10 în 3 sau în 5 părți egale, obținem produse mai mici :

$$\left(\frac{10}{3}\right)^3 = 37 ; \left(\frac{10}{5}\right)^5 = 32.$$

In cazul numărului 20, ca să obținem produsul maxim trebuie să-l descompunem în 7 părți egale, deoarece :

$$20 : 2,718 \ldots = 7,36 \approx 7.$$

În aceleași condiții, numărul 50 trebuie descompus în 18 părți egale, iar 100 în 37 de părți egale :

$$50 : 2,718 \ldots = 18,4,$$

$$100 : 2,718 \ldots = 36,8.$$

Numărul *e* joacă un rol imens în matematică, fizică, astronomie și alte științe. Iată unele probleme care, la analizarea lor matematică, reclamă folosirea numărului *e* (lista poate fi extinsă oricît de mult):

Formula barometrică (scăderea presiunii cu înălțimea).

Formula lui Euler *.

* Vezi despre această formulă în articolul „Voinicul lui Jules Verne și formula lui Euler" în cartea a doua din *Zanimatelnoi fiziki* (Fizica distractivă) de I. I. Perelman.

Legea răcirii corpurilor.
Dezintegrarea radioactivă şi vîrsta Pămîntului.
Oscilaţiile pendulului în aer.
Formula lui Ţiolkovski pentru viteza unei rachete. *
Fenomene oscilatorii într-un circuit de radio.
Înmulţirea celulelor.

Farsa logaritmică

Problemă

Vom adăuga la farsele matematice, pe care cititorul le-a cunoscut în Cap. V, încă una, şi anume „demonstrarea" inegalităţii $2 > 3$. De data aceasta demonstraţia o vom face cu ajutorul logaritmilor. Farsa începe cu inegalitatea incontestabilă :

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{8}$$

după care urmează transformarea :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3,$$

care nici ea nu poate fi pusă la îndoială. Unui număr mai mare îi corespunde un logaritm mai mare, deci :

$$2 \log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) > 3 \log_{10}\left(\frac{1}{2}\right).$$

După simplificare cu $\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)$ avem : $2 > 3$. În ce a constat greşeala acestei demonstraţii ?

Rezolvare

Greşeala constă în aceea că, făcînd simplificarea cu $\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)$, noi nu am schimbat semnul inegalităţii ($>$ în $<$) ;

---

* Vezi cartea autorului *Mejplanetnîie puteşestvia* (Călătoriile interplanetare).

or, acest lucru era absolut necesar, deoarece $\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)$ este un număr negativ. (Dacă am fi calculat cu logaritmi în altă bază decît 10, mai mică decît $\frac{1}{2}$, atunci $\log\left(\frac{1}{2}\right)$ ar fi fost pozitiv, dar în acest caz n-am fi îndreptățiți să afirmăm că unui număr mai mare îi corespunde un logaritm mai mare).

Orice număr exprimat cu ajutorul a trei cifre de doi

Vom încheia cartea cu un truc algebric ingenios, cu care s-au distrat participanții la un Congres de fizică ținut la Odessa. Se pune problema : să se exprime orice număr întreg și pozitiv dat cu ajutorul a trei cifre de doi și al unor simboluri matematice.

Rezolvare

Să vedem cum se rezolvă această problemă într-un caz particular. Fie numărul 3. Atunci problema se rezolvă astfel :

$$3 = -\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}.$$

Este ușor să ne convingem de exactitatea acestei egalități. Într-adevăr :

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = \left[\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2^3}} = 2^{2^{-3}},$$

$$\log_2 2^{2^{-3}} = 2^{-3},\ -\log_2 2^{-3} = 3.$$

Dacă numărul dat ar fi fost 5, am fi rezolvat problema prin aceeași metodă :

$$5 = -\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}}.$$

După cum se vede, ne bazăm pe faptul că la un radical pătrat nu se scrie indicele radicalului.

Soluția generală a problemei este următoarea. Dacă numărul dat este N, atunci:

$$N = -\log_2 \log_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{\sqrt{2}}}}}_{\text{de } N \text{ ori}},$$

numărul radicalilor fiind egal cu numărul unităților cuprinse în numărul dat.

CUPRINS