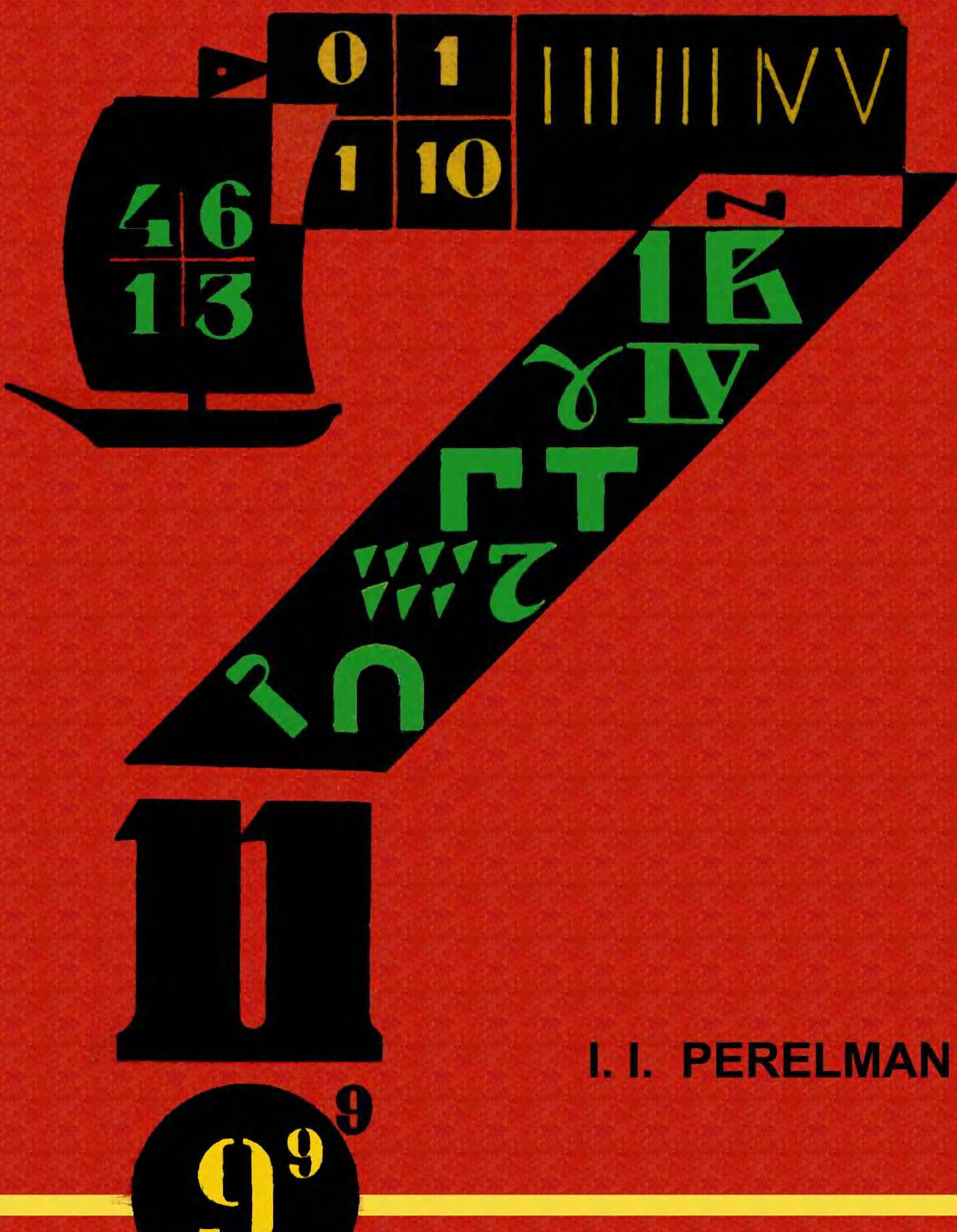
ARITMETICA



I. I. PERELMAN

DISTRACTIVĂ

I. I. PERELMAN

ARITMETICA DISTRACTIVĂ

PROBLEME CURIOASE ȘI GHICITORI DIN LUMEA CIFRELOR

EDITURA TINERETULUI

Traducere din limba rusă de **MARIUS STOKA**

Desenele reproduse după originalul în limba rusă
Coperta de *D. IONESCU*

Я. И. ПЕРЕЛЬМАН
ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ АРИФМЕТИКА
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1959

Cuvînt înainte

În șirul lung al pedagogilor sovietici care au inițiat și au popularizat introducerea învățămîntului politehnic în programul școlilor din U.R.S.S., Iakov Isidorovici Perelman, autorul lucrării „Aritmetica distractivă", tradusă și publicată acum în limba romînă, ocupă un loc deosebit. Prin numeroasele sale scrieri de popularizare a științelor pozitive — articole și cărți distractive de matematică, de fizică, de astronomie și romane științifico-fantastice — el a ușurat unei întregi generații de dascăli și de școlari orientarea spre învățămîntul politehnic, fiind azi unul din cei mai cunoscuți autori ai genului didactic-distractiv. Dacă pînă la Marea Revoluție Socialistă din Octombrie tirajul total al cărților lui n-a trecut de 10 000 exemplare, în anii Puterii Sovietice s-au editat și s-au difuzat peste 5 000 000 exemplare, cu rezultate pedagogice unanim recunoscute.

Felul cum și-a întocmit I.I. Perelman studiile, cărțile și romanele sale satisface cele mai pretențioase exigențe ale genului, trezind simpatie activă față de disciplinele prezentate și interes constant față de frumoasele și uneori surprinzătoarele jocuri ale minții, cu cifre, cu relații matematice și cu cele mai felurite surprize ale cunoașterii științifice. Autorul ne demonstrează posibilitatea de a învăța, distrîndu-ne. Atenția involuntară, lipsită de efort cu care urmărim construcțiile sale științifico-distractive, ne menține integral pe planul jocului, dar acest joc e unul din mijloacele cele mai eficace — la o anumită vîrstă — în acumularea de cunoștințe. Curiozitatea pe care *o generează produce în conștiință o concentrare către activitate însoțită de un sentiment pe care nu-l putem denumi decît interes. Din acest moment jocul își însușește tot mai mult caracterele muncii și ale activității conștiente, îndreptată spre înțelegerea realității.*

Munca, spunea marele pedagog sovietic A.S. Makarenko, este participarea omului la producția socială, la crearea de valori materiale și culturale. Jocul nu urmărește astfel de scopuri, dar le favorizează indirect, obișnuind treptat copilul sau adolescentul cu efortul fizic și psihic necesar pentru muncă, dezvoltînd agerimea minții, prezența de spirit, inițiativa, stăpînirea de sine, priceperea de a cîntări împrejurările și obișnuința de a duce lucrurile începute pînă la sfîrșit. Lucrările de știință distractivă ale lui I.I. Perelman corespund tuturor acestor cerințe, efectul lor pedagogic realizîndu-se îndeosebi prin îndrumarea cititorului spre o activitate voluntară precis orientată, spre realizarea unor scopuri conștient fixate. În această perspectivă trebuie privită și înțeleasă și „Aritmetica distractivă".

Iakov Isidorovici Perelman s-a născut în vechea Rusie, la 29 noiembrie 1882, în orașul Belostok din gubernia Grodenenskaia, dintr-o familie de mici slujbași, în care tatăl era contabil, iar mama învățătoare. Studiile primare și medii-reale le-a făcut la școlile din orașul natal, sub ochii părinților, care l-au ajutat să îndrăgească de timpuriu numerele și socotelile și i-au dezvoltat armonios înclinațiile pedagogice. Studiile superioare le-a urmat la Institutul silvic din Petersburg, obținînd în 1909 titlul de silvicultor de categoria I, profesiune pe care n-a exercitat-o, dedicîndu-se de la început carierei profesorale în care s-a evidențiat în mod deosebit, atît în ciclul mediu, cît și în învățămîntul superior.

Adevărata vocație a lui I.I. Perelman era însă cea de scriitor și astfel, încă de pe băncile școlii, colaborează la reviste de popularizare a științei. Primul lui articol apare în „Buletinul guberniei Grodenenskaia" în anul 1899, avînd titlul „În legătură cu ploaia de meteoriți care se așteaptă", unde explică pe înțelesul tuturor semnificația acestui fenomen căruia i se dădeau cele mai felurite interpretări obscurantiste.

Din anul 1901 colaborează la revista „Natura şi oamenii", şi în continuare la revistele de ştiinţă popularizată „În atelierul naturii", „Ştiinţa e puterea", „Tehnica tineretului" şi „Informatorul ştiinţific", publicînd în paginile lor articole din domeniul fizicii, astronomiei şi matematicilor, care au contribuit foarte mult la formarea vocaţiei politehnice a tineretului sovietic. Astfel, cunoscutul astronom şi doctor în ştiinţele fizico-matematice A.G. Masevici recunoaşte într-una din scrierile sale că şi-a ales profesiunea sub influenţa cărţii lui Perelman „Astronomia distractivă".

Originalitatea scrierilor lui I.I. Perelman apare în lucrările publicate în volum, lucrări de popularizare a ştiinţei scrise în genul didactic-distractiv, care cunoaşte azi în lume un deosebit succes. Cărţile sale „Matematica vie", „Aritmetica distractivă", „Astronomia distractivă", „Fizica distractivă", „Mecanica distractivă", „Probleme şi experienţe distractive" şi altele, apărute pînă acum în zeci de ediţii, sînt unanim apreciate de cititori şi de critică. Ele prezintă, pe sute de pagini, un material vast, selecţionat cu deosebita grijă de a apropia cît mai mult teoria de practică şi şcoala de viaţă.

I.I. Perelman a scris şi literatură ştiinţifico-fantastică. Primul său roman, cu titlul „Călătorii interplanetare", a apărut în 1924, urmat de romanele „Spre stele cu racheta", „Depărtările", „Zborul în Lună" şi altele. În toate autorul susţine cu talent şi cu entuziasm tineresc ipotezele marilor teoreticieni sovietici ai cuceririi spaţiului cosmic, subliniind faptul că voinţa de a lupta şi a învinge este caracteristică numai claselor sociale în ascensiune, claselor care au rol istoric progresist.

Activitatea publicistică a lui I.I. Perelman se completează şi cu o seamă de cărţi didactice scrise în cursul celor patru decenii de profesorat. Dintre acestea cele mai importante sînt „Geometria şi bazele trigonometriei", „Matematica meşteşugarului", „Matematica politehnică" şi „Culegeri de probleme de geometrie".

În afara publicisticii, I.I. Perelman a desfăşurat şi activitate pedagogică la numeroase instituţii de învăţămînt mediu şi superior, dintre care reţinem: „Institutul de învăţămînt public din Pskov", „Politehnica muncitorească *din Petrograd" și „Școala medie de electrotehnică din Leningrad".*

I.I. Perelman iubea tineretul sovietic nu numai ca pedagog, ci și ca patriot. El era conștient că generației care a înfăptuit revoluția proletară trebuie să-i urmeze cadre noi, bine pregătite sub raport tehnic, care să poată duce la bun sfîrșit construcția socialismului. Aceste cadre trebuiau ajutate să-și însușească, fără întîrziere, temeinice cunoștințe fizico-matematice și să îndrăgească tehnica. Trebuiau găsite, deci, metode noi pentru predarea acestor discipline în școli și îndeosebi metode noi pentru stimularea formelor de învățămînt fără frecvență și a cursurilor prin corespondență. „Făurirea unei discipline noi în muncă — scria V.I. Lenin — făurirea unor forme noi de legături sociale între oameni, făurirea unor forme și metode noi de antrenarea oamenilor în muncă, aceasta este o sarcină care necesită mulți ani și multe decenii". Pe linia acestei recomandări a lui Lenin, I.I. Perelman a întocmit un plan de lungă perspectivă pentru politehnizarea învățămîntului sovietic, susținîndu-și ideea și prin întemeierea așa-numitei „științe-distractive", în care tratarea problemelor de matematică, de fizică și de astronomie, în stil distractiv, reprezenta, la acea vreme, optimismul cu care noua generație sovietică privea viitorul, noua ei concepție despre muncă și despre plăcerea de a munci.

Plăcerea de a munci e o calitate morală esențială omului. A pregăti tineretul înseamnă a-l orienta în primul rînd sub raport moral, a-i insufla dragoste de muncă, a-l pune în situația de a se convinge că munca este o plăcere, cea mai importantă necesitate vitală a omului.

Întocmind cărți de știință distractivă, I.I. Perelman a investit munca intelectuală cu unele din caracteristicile jocului, a ușurat tineretului apropierea de materialul care pare la început arid, al științelor fizico-matematice. El a văzut că valoarea educativă a specializării depinde, în primul rînd, de raportul dintre respectiva specializare și suma cunoștințelor politehnice ale tinerilor. În consecință, în problemele sale distractive el a abordat toate domeniile științelor.

Plăcerea de a se juca izvorăște din plăcerea de a fi în acțiune. Sub acest raport munca și jocul nu se deosebesc *decît prin rezultat. Jocurile intelectuale au o deosebită importanță pentru tineret, mai ales în urma faptului că plasticitatea spirituală e mult mai mare în timpul creșterii decît în perioada maturității.*

Problemele publicate de I.I. Perelman în cărțile sale de știință distractivă sînt luate din cîmpul vast al muncii cotidiene și sînt prezentate sugestiv și original. Ele introduc elevii în mod treptat în tainele calculelor și judecăților matematice.

În „Aritmetica distractivă", I.I. Perelman îl apropie pe cititor de tainele numerelor, fără a-l rătăci prin dificultăți care intimidează și nici pe cărări care ocolesc realitatea. Cartea începe cu cunoștințe vechi și noi despre numere și sfîrșește cu așa-zise „călătorii aritmetice" în jurul lumii, pe creste de munți, în adîncuri de oceane sau „stînd pe loc". În 11 capitole și pe circa 200 de pagini autorul tratează un material vast, însumînd evoluția principiilor de calcul mecanic cu abaca străveche, dezvoltarea istorică a calculului aritmetic, diferite sisteme de numerație, galeria curiozităților numerice, scamatoriile numerice, calculele rapide, calculele aproximative, giganții și piticii numerici, curiozități aritmetice etc.

Meritul cel mai de seamă al „Aritmeticii distractive" este că depășind pe nesimțite expunerea distractiv-didactică, ne face să urcăm cu încredere și optimism primele trepte ale alfabetului matematic. Nu se poate imagina o pedagogie mai bună și o metodă mai eficientă pentru popularizarea acestei discipline.

Iakov Isidorovici Perelman nu își poartă cititorii pe linia celei mai mici rezistențe posibile. Nu-i leagănă în răsfăț, adică în credința că nu sînt necesare eforturi spre a se obține cunoștințe și deprinderi. El combate, prin toate mijloacele, ca dăunătoare muncii educative, concepția potrivit căreia jocul este o distracție, o pierdere inutilă de timp. Copiii se joacă totdeauna în mod serios și Perelman invită numai la astfel de jocuri, oricît de distractive ar fi ele. În felul acesta scopul pedagogic urmărit este pe deplin atins, iar jocul devine o școală a voinței și a caracterului.

La începutul Marelui Război pentru Apărarea Patriei, deși bolnav, I.I. Perelman a desfășurat o muncă susținută în mijlocul populației din Leningrad în legătură cu apăra-

rea antiaeriană. Cînd cercul blocadei inamice s-a închis în jurul orașului-erou, el a refuzat propunerile de evacuare, socotind că experiența și cunoștințele sale vor fi utile pentru apărarea Leningradului. Organismul lui slăbit nu a rezistat însă lipsurilor provocate de blocadă și la 16 martie 1942 Iakov Isidorovici Perelman a murit.

Traducerea „Aritmeticei distractive“ în limba romînă va fi de un real folos tineretului. Avîntul cu care se dezvoltă industria și agricultura în patria noastră în anii puterii populare aduce cu sine reforme succesive ale învățămîntului de toate gradele, o apropiere tot mai mare a școlii de viață. În aceste condiții, cărțile lui I.I. Perelman pot fi de foarte mare folos tineretului nostru, stimulîndu-i interesul pentru științele fizico-matematice și ușurîndu-i însușirea acestora.

VASILE SUCIU

CAPITOLUL I

VECHI ŞI NOU ÎN NUMERAŢIE ŞI NUMERE

CEA MAI RĂSPÎNDITĂ NUMERAŢIE SCRISĂ

Pentru oricare din voi, cititorii acestei cărţi, nu prezintă nici o greutate să scrieţi un număr întreg oarecare, chiar pînă la un milion. Pentru scrierea numerelor folosim 10 semne bine cunoscute fiecăruia: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, care se numesc *cifre*. Nimănui nu i se mai pare curios că putem scrie orice număr, foarte mare sau foarte mic, întreg sau fracţionar cu ajutorul acestor zece semne (cifre).

Numerele de la 1 pînă la 9 le scriem cu ajutorul a numai una din primele nouă cifre de mai sus. Pentru scrierea numerelor de la 10 pînă la 99 ne folosim de două cifre, dintre care una poate fi şi zero.

Ca bază a numerației luăm numărul „zece", de aceea sistemul nostru de numerație se numește zecimal. Aceasta înseamnă că zece unități simple (unități de ordinul I) formează un zece (o unitate de ordinul al II-lea), zece zeci formează o sută (o unitate de ordinul al III-lea), zece sute formează o mie (o unitate de ordinul al IV-lea) și, în general, fiecare zece unități de un ordin oarecare formează o unitate de ordin imediat superior.

Sistemele de numerație au fost zecimale la multe popoare. Aceasta este legat de faptul că mîinile omului au zece degete.

La scrierea numerelor, în marginea din dreapta scriem cifra care arată numărul de unități simple; în stînga ei scriem cifra care notează numărul zecilor, și mai la stînga cifra ce desemnează sutele; în locul al patrulea din stînga scriem cifra cu care se notează miile etc. Astfel, de exemplu, dacă scriem 2 746, aceasta înseamnă că numărul este format din șase unități, patru zeci, șapte sute și două mii.

Dacă numărul nu conține unități dintr-un ordin oarecare, atunci în locul corespunzător punem un zero. De exemplu, numărul format din trei mii și cinci unități se scrie astfel: 3 005. În acest număr lipsesc zecile și sutele, adică unitățile de ordinul al doilea și al treilea, de aceea în locul al doilea și al treilea din dreapta scriem cîte un zero.

Iată încă o particularitate curioasă a sistemului de numerație pe care-l utilizăm curent: Pentru scrierea numărului 14 742 noi am folosit de două ori cifra 4: o dată pe locul al doilea de la dreapta la stînga, indicînd că numărul respectiv conține 4 zeci; și aceeași cifră 4, aflată pe locul al patrulea de la dreapta spre stînga, arată că acest număr conține patru mii. Prin urmare, una și aceeași cifră poate indica atît numărul unităților cît și cel al zecilor, al sutelor etc., în funcție de poziția pe care cifra o ocupă în scrierea numărului. De aici a și venit denumirea de sistem de numerație pozițional.

Să ne întoarcem la numărul 2 746, despre care am vorbit mai înainte. În el, prima cifră din dreapta (cifra 6) înseamnă 6 unităţi, cifra a doua din dreapta (4) arată că e vorba de 4 zeci, adică de numărul

$$40 = 4 \cdot 10;$$

cifra a treia din dreapta (7) înseamnă 7 sute, adică numărul

$$700 = 7 \cdot 10 \cdot 10 = 7 \cdot 10^2,$$

şi, în sfîrşit, cifra a patra (2) indică două mii, adică numărul

$$2\,000 = 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 2 \cdot 10^3$$

Prin urmare, numărul 2 746 poate fi scris sub forma

$$2\,746 = 2\,000 + 700 + 40 + 6 = 2 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 6$$

Fiecare grup de cîte trei ordine din număr formează o clasă. Numărătoarea claselor se face tot de la dreapta spre stînga. Pe primul loc stă clasa întîi, formată din unităţi, zeci şi sute, apoi clasa a doua formată din mii, zeci de mii şi sute de mii; urmează clasa a treia formată din milioane, zeci de milioane şi sute de milioane etc.

V-aţi pus oare întrebarea: de ce se fac atît de simplu, de uşor şi de repede cele patru operaţii cu numere: adunarea, scăderea, înmulţirea şi împărţirea? Aceasta se realizează pe baza principiului de scriere poziţională a numerelor.

Într-adevăr, atunci cînd avem de făcut o operaţie aritmetică cu numere oarecare noi lucrăm cu zeci, sute şi mii, tot aşa cum am lucra cu ele dacă ar fi simple unităţi, şi numai la obţinerea rezultatului final ţinem seama de ordinul lor.

Prin urmare, pentru scrierea numerelor, noi folosim sistemul de numeraţie zecimal poziţional. Iată ce scrie despre aceasta cunoscutul matematician şi fizician francez Laplace (sec. XVIII-XIX): „Ideea de a exprima numerele prin nouă semne, acordîndu-le în afară de valoarea dată de formă şi pe cea de loc, este atît de simplă, încît tocmai din cauza simplităţii este greu de înţeles cît de minunată este ea“.

Aproape întreaga omenire foloseşte acum acest sistem de numeraţie, cu aceleaşi principii de construire a sistemului şi descriere a cifrelor.

Cum a apărut acest minunat sistem de numeraţie zecimal poziţional?

Cu toată simplitatea lui aparentă oamenii au avut nevoie de cîteva milenii pentru a-l găsi. Şi nu vom exagera dacă spunem că la crearea acestui sistem au participat toate popoarele lumii.

Sistemul de numeraţie zecimal poziţional a apărut la început în India, şi la mijlocul sec. al VIII-lea el căpătase deja o mare extindere. Aproximativ în aceeaşi perioadă sistemul zecimal a pătruns în China şi în alte cîteva ţări ale Orientului. Europenii au adoptat acest sistem de numeraţie indian în sec. al XIII-lea, prin intermediul arabilor. De aici i se trage denumirea incorectă de „numeraţie arabă".

Ce sisteme de numeraţie au fost folosite înainte de cel zecimal poziţional? Această problemă este destul de interesantă şi merită să ne oprim asupra ei mai amănunţit. Numai aşa vom avea posibilitatea să apreciem mai bine avantajele sistemului nostru de numeraţie.

NUMERAŢIA EGIPTEANĂ VECHE

Vom începe cu unul din cele mai vechi sisteme de numeraţie, cu sistemul de numeraţie egiptean. El a luat naştere pare-se cu peste cinci mii de ani în urmă, adică cu aproximativ trei mii de ani înaintea erei noastre. În decursul primelor trei milenii sistemul egiptean nu a suferit aproape nici un fel de schimbări. Vom face cunoştinţă mai îndeaproape cu această numeraţie veche şi vom vedea cum se notau cifrele şi cum se scriau numerele cu ajutorul lor.

În numeraţia egipteană au existat semne speciale (hieroglife) pentru scrierea numerelor: unitate, zece, sută, mie, zece mii, o sută de mii, un milion. Aceste semne sînt reprezentate în figura 1. Pentru a scrie, de exemplu, numărul întreg 23 145 este suficient să se scrie alături două hieroglife cu care se notează zecile de mii, apoi trei hieroglife pentru mii, una pentru sută, patru pentru zeci şi cinci hieroglife pentru unitate (fig. 2).

Astfel, la scrierea numărului fiecare hieroglifă poate fi repetată de cel mult nouă ori. În sistemul de numerație egiptean nu existau semne pentru zero.

Acest unic exemplu este suficient pentru a înțelege cum scriau numerele vechii egipteni. Sistemul de numerație

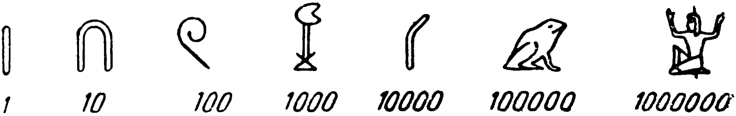


Fig. 1 — Aceste semne (hieroglife) erau folosite de vechii egipteni pentru notarea numerelor.

egiptean este foarte simplu și primitiv; el este pur zecimal, deoarece în reprezentarea numerelor întregi se recurge la principiul zecimal. În acest sistem de scriere fiecare semn reprezintă doar un număr. Astfel,

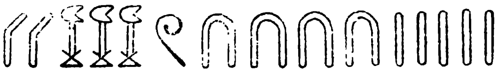


Fig. 2 — Scrierea numărului 23 145 în sistemul de numerație egiptean.

de exemplu, semnul pentru zece (fig. 1) indică numai zece unități și nu zece zeci sau zece sute. Prin urmare, sistemul de numerație egiptean nu este un sistem pozițional.

VECHE NUMERAȚIE POPULARĂ ÎN RUSIA

După principiul vechii numerații egiptene au fost construite sistemele de numerație și la alte popoare, de exemplu la grecii antici. Vom reveni (pag. 20) mai amănunțit asupra acestui sistem de numerație.

În vechime, în Rusia era răspîndit destul de mult sistemul popular de numerație construit de asemenea după principiul vechi egiptean; se deosebeau doar semnele prin care se notau numerele.

Este interesant faptul că această numerație populară a fost chiar legiferată; după acest sistem, ceva mai dezvoltat însă, urmau să fie făcute însemnările în caietele de biruri ținute de încasatorii de bir.

« Încasatorul — citim în vechiul „Cod de legi“ — primind de la un proprietar de casă banii ce se cuvin statului, trebuie el însuși sau prin scrib să noteze în caietul de biruri, în dreptul numelui proprietarului de casă care a vărsat banii, cîți bani au fost primiți, indicînd mărimea sumei primite prin cifre și s e m n e. Aceste semne sînt aceleași pentru toți și pretutindeni, și anume:

zece ruble să se noteze cu semnul .... □
rubla .... ○
zece copeici .... ×
copeica .... |
sfertul de copeică .... —

De exemplu, douăzeci și opt de ruble cinci zeci și șapte copeici și trei sferturi se scriau:

(□□ ○○○○○○○○ × × × × × ||||||| ≡)».

Într-un alt loc din același volum al „Codului de legi“ se mai menționează încă o dată folosirea obligatorie a simbolurilor numerice populare. Se indică simboluri speciale pentru o mie de ruble, sub formă de o stea cu șase colțuri și cu o cruce în centrul ei, și pentru o sută de ruble — sub forma unei roți cu opt spițe. Însă aici simbolurile pentru rublă și pentru zece copeici sînt altele decît cele din legea precedentă.

Iată textul de lege pentru așa-numitele semne de „iasak“[1].

---

[1] Iasak — bir.

„În fiecare chitanţă dată starostelui de clan de la care se va primi iasak-ul, în afara expunerii în cuvinte să fie indicat cu semne speciale numărul de ruble şi de copeici primite, astfel încît platnicii să fie convinşi

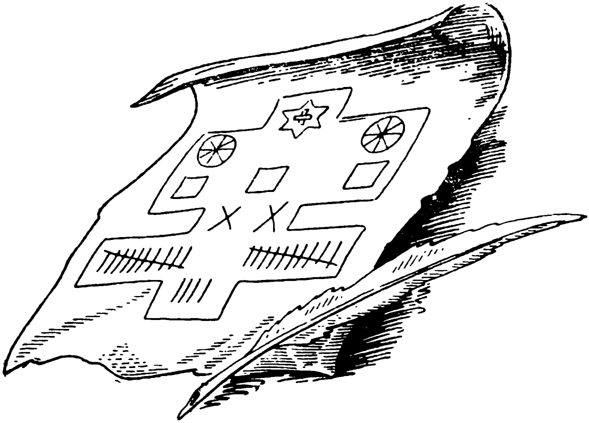


Fig. 3 — Inscripţie veche pe chitanţa de plată a impozitului („iasak"). Această inscripţie indică suma de 1 232 ruble şi 24 copeici.

de justeţea celor însemnate"[1]. Semnele folosite în chitanţă erau:

(steaua) o mie de ruble
(roata) o sută de ruble
□ zece ruble   × o rublă
zece copeici | copeica

Ca să nu poată fi făcute nici un fel de adaosuri, aceste semne trebuiau încercuite cu linii drepte. De exemplu, 1 232 ruble 24 copeici se reprezentau ca în figura 3.

NUMERAŢIA ROMANĂ

Dintre toate numeraţiile vechi cea romană este poate singura care s-a păstrat pînă în prezent, fiind încă folosită pe o scară largă. Şi astăzi cifrele romane sînt

[1] Aceasta arată că semnele descrise erau folosite pe scară largă.

utilizate pentru indicarea secolelor, numerotarea capitolelor din cărţi etc.

Pentru scrierea numerelor întregi, în numeraţia romană trebuie să ţinem minte modul de reprezentare a următoarelor şapte numere de bază (fundamentale):

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1 000

Cu ajutorul lor putem scrie orice număr întreg care nu depăşeşte 4 000; unele cifre (I, X, C, M) se pot repeta, dar cel mult de trei ori.

La scrierea numerelor în sistemul roman cifra mai mică poate sta în dreapta celei mari; în acest caz ea i se adaugă. De exemplu, numărul 283 îl scriem în sistemul roman în felul următor:

CCLXXXIII,

adică $200 + 50 + 30 + 3 = 283$. Aici semnul care reprezintă suta este repetat de două ori, iar semnele care indică zecile şi respectiv unităţile se repetă de cîte trei ori.

Cifra mai mică poate sta şi în stînga celei mari, dar atunci ea trebuie scăzută din cea mare. În acest caz repetarea cifrei mai mici nu este admisă. Exemplele de mai jos vă vor ajuta să vă lămuriţi pe deplin asupra metodei de scriere a numerelor în sistemul de numeraţie roman.

Să scriem numerele 94, 944, 1 809, 1 959:

$$\mathrm{XCIV} = 100 - 10 + 5 - 1 = 94$$
$$\mathrm{CMXLIV} = 1000 - 100 + 50 - 10 + 5 - 1 = 944$$
$$\mathrm{MDCCCIX} = 1000 + 500 + 300 + 10 - 1 = 1\,809$$
$$\mathrm{MCMLIX} = 1000 + 1000 - 100 + 50 + 10 - 1 = 1959$$

Aţi observat că în acest sistem nu există nici un semn pentru reprezentarea zeroului? Şi totuşi ne-am lipsit foarte bine de el la scrierea numărului 1 809.

În figura 4 este reprezentată scrierea, în numeraţie romană, a tuturor numerelor întregi de la 1 pînă la 100.

Cu ajutorul cifrelor romane se pot totuşi scrie şi numere mai mari. În acest scop, după ce s-au scris miile se pune jos în dreapta litera m. Pentru exemplificare să reprezentăm numărul 417 986:

$$\mathrm{CDXVII}_{\mathrm{m}}\,\mathrm{CMLXXXVI}$$

Sistemul de numerație roman, la fel ca și cel vechi egiptean, nu este pozițional: fiecare cifră reprezintă

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
XXI	XXII	XXIII	XXIV	XXV	XXVI	XXVII	XXVIII	XXIX	XXX
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
XXXI	XXXII	XXXIII	XXXIV	XXXV	XXXVI	XXXVII	XXXVIII	XXXIX	XL
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
XLI	XLII	XLIII	XLIV	XLV	XLVI	XLVII	XLVIII	IL	L
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
LI	LII	LIII	LIV	LV	LVI	LVII	LVIII	LIX	LX
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
LXI	LXII	LXIII	LXIV	LXV	LXVI	LXVII	LXVIII	LXIX	LXX
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
LXXI	LXXII	LXXIII	LXXIV	LXXV	LXXVI	LXXVII	LXXVIII	LXXIX	LXXX
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
LXXXI	LXXXII	LXXXIII	LXXXIV	LXXXV	LXXXVI	LXXXVII	LXXXVIII	LXXXIX	XC
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
XCI	XCII	XCIII	XCIV	XCV	XCVI	XCVII	XCVIII	IC	C
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Fig. 4 — Astfel se scriu numerele întregi de la 1 pînă la 100 în sistemul de numerație roman.

un singur număr pe deplin determinat. Însă, spre deosebire de sistemul vechi egiptean, cel roman nu este nici pur zecimal. Existența în sistemul roman a unor semne speciale pentru numerele cinci, cincizeci, cinci sute arată că în el există urme destul de pronunțate ale sistemului de numerație cincinal[1].

Numerația romană nu este de loc adaptabilă operațiilor aritmetice în formă scrisă. Acesta este marele ei neajuns.

NUMERAȚIA GREACĂ ANTICĂ

Continuăm prezentarea sistemelor de numerație nepoziționale și numai la sfîrșitul capitolului de față vom descrie amănunțit unul dintre cele mai vechi sisteme de numerație (apărut însă mai tîrziu decît cel egiptean) — sistemul babilonian, p r i m u l   s i s t e m   p o z i ț i o n a l .

Multă asemănare cu sistemul de numerație roman găsim și la numerația așa-zisă a t i c ă sau h e r o-

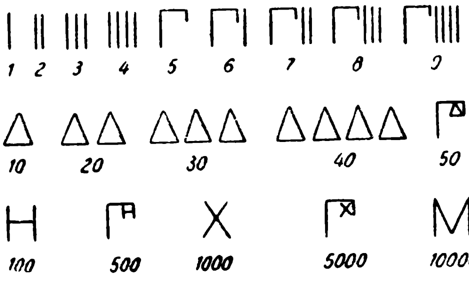


Fig. 5 — Scrierea unor numere în sistemul de numerație atic sau herodianic.

d i a n ă[2], care era folosită în Grecia antică. În figura 5 sînt reprezentate cîteva numere folosite în acest sistem. Desenul arată că spre deosebire de nume-

---

[1] Sistemelor de numerație diferite de cel zecimal le vom consacra un capitol întreg (vezi Cap. IV).

[2] Herodian — istoric grec din secolul II—III e.n. Din operele lui, oamenii de știință au aflat pentru prima oară despre numerația atică. Cea mai veche mențiune despre această numerație datează din secolul VI î.e.n.

rația romană simbolurile pentru numerele 1, 10, 100, 1 000 pot fi repetate de 4 ori, în schimb **e s t e i n t e r z i s** să se scrie numărul mai mic în stînga celui mai mare.

Fig. 6 — Exemple care explică modul de scriere a numerelor întregi în sistemul de numerație atic.

În figura 6 sînt date exemple de scriere a numerelor întregi în sistemul de numerație atic, care explică pe deplin metoda unei astfel de scrieri.

În secolul III î.e.n., în Grecia, în locul numerației atice, începe să se folosească așa-zisa numerație **i o n i a n ă**, în care numerele întregi sînt reprezentate prin literele alfabetului grecesc. Deasupra literelor care reprezintă numere se trage o linioară. Acest sistem de numerație se numește **a l f a b e t i c**.

Numerația alfabetică ioniană este formată din 27 litere (vezi fig. 7; sub fiecare literă este trecută denumirea și valoarea ei numerică). În figura 7 sînt menționate trei litere (fau, coppa și sampi), care în prezent au ieșit din uz. Nu ne putem însă lipsi de ele deoarece sînt necesare 27 de semne pentru notarea celor 27 de numere cheie.

Cu ajutorul tabelei din figura 7 putem scrie ușor orice număr întreg de la 1 pînă la 999 inclusiv. Drept exemplu, vom scrie în numerația ioniană numerele 234, 805, 560:

$$\overline{\sigma\lambda\delta} \qquad \overline{\omega\varepsilon} \qquad \overline{\varphi\xi}$$
$$234 \qquad 805 \qquad 560$$

α̅	β̅	γ̅	δ̅	ε̅	ϛ̅	ζ̅	η̅	θ̅
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ι̅	κ̅	λ̅	μ̅	ν̅	ξ̅	ο̅	π̅	ϟ̅
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ρ̅	σ̅	τ̅	υ̅	φ̅	χ̅	ψ̅	ω̅	ϡ̅
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Fig. 7 — Scrierea numerelor în numerația alfabetică ioniană.

А҃	В҃	Г҃	Д҃	Є҃	Ѕ҃	З҃	И҃	Ѳ҃
1	2	3	4	5	6	7	8	9
І҃	К҃	Л҃	М҃	Н҃	Ѯ҃	О҃	П҃	Ч҃
10	20	30	40	50	60	70	80	90
Р҃	С҃	Т҃	Ѵ҃	Ф҃	Х҃	Ѱ҃	Ѡ҃	Ц҃
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Fig. 8 — Scrierea numerelor în numerația alfabetică slavă.

Într-un astfel de sistem de numeraţie pot fi scrise şi numere mai mari decît o mie. Pentru aceasta, lîngă literă (în stînga sus) se pune un apostrof ' (existenţa apostrofului indică că valoarea literei respective este de o mie de ori mai mare), de exemplu:

'α înseamnă 1 000, 'β înseamnă 2 000,
'ι înseamnă 10 000, 'χ înseamnă 20 000.

Probabil că aţi observat că numeraţia ioniană este zecimală, dar nu şi poziţională. Această menţiune se referă şi la celelalte numeraţii alfabetice.

NUMERAŢIA SLAVĂ

Popoarele slave au folosit şi ele numeraţia alfabetică. În figura 8 sînt reprezentate 27 de litere ale alfabetului slav.

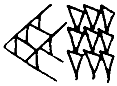
Sub fiecare literă este scrisă valoarea ei numerică. Deasupra literei care reprezintă un număr se pune un semn numit „titlo" (fig. 8).

NUMERAŢIA BABILONIANĂ

Una din cele mai interesante dintre numeraţiile vechi este cea b a b i l o n i a n ă, care a apărut aproximativ cu 2 000 de ani înaintea erei noastre. Acesta este primul sistem de numeraţie poziţională pe care-l cunoaştem. În sistemul babilonian numerele erau reprezentate numai cu ajutorul a două semne: o pană verticală , cu care se notau unităţile şi o pană orizontală , care nota zecile. Astfel de pene se imprimau pe plăci de lut cu nişte beţişoare ascuţite de forma unei prisme triunghiulare. De aici a şi venit denumirea de „cuneiform" — pe care o poartă scrierea babilonienilor.

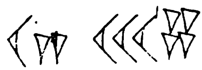
Cu ajutorul celor două semne toate numerele întregi de la 1 pînă la 59 se scriau după sistemul zecimal, ca și în numerația egipteană; adică semnele pentru zeci și pentru unități erau repetate de atîtea ori cîte zeci și unități existau în număr. Dăm cîteva exemple explicative:

 $=20+5=25$  $=40+7=47$

 $=50+9=59$

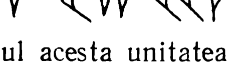
Pînă aici nu observăm încă nimic deosebit. Începînd însă cu numărul 60 apare o noutate: numărul 60 se scrie cu același semn care e folosit și pentru 1, numai cu un interval mai mare între el și celelalte semne. Mai departe scrierea se face după sistemul zecimal, atît cu unități cît și cu zeci. Dăm și aici exemple:

 $=1\ 60+5=65,$  $=1\cdot 60+23=83,$

 $=5\ 60+2=302,$  $=12\ 60+34=754$

Astfel pot fi reprezentate numerele de la 1 pînă la $59.60 + 59 = 3\,599$.

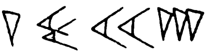
Mai departe vine unitatea din noua categorie (adică numărul $1.60.60 = 3\,600$), care de asemenea se notează cu semnul prevăzut pentru unități, de exemplu:

 $=1\cdot 60\ 60+12\cdot 60+21=4341$

În felul acesta unitatea de ordinul al doilea reprezentată cu același semn este de 60 de ori mai mare decît unitatea de ordinul întîi, iar unitatea de ordinul al treilea este de 60 de ori mai mare decît unitatea de ordinul al doilea și de $60.60 = 60^2 = 3\,600$ ori mai mare decît unitatea de ordinul întîi etc.

— Ei, dar ce facem dacă lipsesc unităţile de un ordin intermediar? veţi spune dumneavoastră. Cum se scrie, de exemplu, numărul $1.60.60 + 23 = 3\,623$? Dacă-l vom scrie sub forma:

atunci el poate fi confundat cu numărul $1.60 + 23 = 83$. Pentru a evita o asemenea greşeală s-a introdus mai tîrziu semnul separator ce a jucat acelaşi rol pe care îl are în numeraţia noastră semnul „zero". Cu ajutorul acestui semn separator numărul 3 623 se scrie astfel:

 $= 1 \cdot 60 \cdot 60 + 0 \cdot 60 + 23 = 3623$

La sfîrşitul numărului babilonienii nu puneau niciodată semnul separator. De aceea, numerele 3, $3.60 = 180$, $3.60.60 = 10\,800$ etc. erau reprezentate la fel. Trebuia deci să se ghicească după sensul textului despre care din aceste numere este vorba.

Este interesant faptul că în matematica babiloniană pentru scrierea fracţiilor se folosea aceeaşi scriere ca şi pentru numerele întregi. De exemplu, trei pene verticale scrise alături puteau să însemne $\frac{3}{60}$, sau $\frac{3}{60.60} = \frac{3}{3\,600}$, sau $\frac{3}{60.60.60} = \frac{3}{216\,000}$ etc.

Prin urmare, ce concluzie putem trage acum asupra particularităţilor numeraţiei babiloniene?

În primul rînd observăm că acest sistem de numeraţie este poziţional. Într-adevăr, un acelaşi semn poate să reprezinte atît 1 cît şi 1.60 şi $1.60.60 = 1.60^2 = 1.3\,600$ etc., în funcţie de locul pe care-l ocupă în scriere. Tot aşa ca şi în sistemul nostru de numeraţie, o aceeaşi cifră, de exemplu cifra 2, poate reprezenta numerele: 2, ori $2.10 = 20$, ori $2.10.10 = 2.10^2 = 2.100 = 200$ etc., după locul pe care-l ocupă. Dar principiul poziţional se foloseşte în numeraţia babiloniană numai în ordinele multiple de 60. De aceea ea se numeşte numeraţie poziţională sexagesimală. Numerele pînă la 60 se scriau în acest sistem după principiul zecimal.

În al doilea rînd, numeraţia babiloniană admite scrierea simplă a fracţiilor cu numitori multiplii lui 60, adică a fracţiilor cu numitorul 60, 60.60 = =3 600, 60.60.60 = 216 000 etc.

Fracţiile cu numitori multipli lui 60 au fost, la timpul lor, foarte răspîndite. Chiar şi astăzi noi împărţim o oră în 60 minute, iar un minut în 60 secunde. Tot astfel, împărţim cercul în 360 de părţi, iar fiecare parte constituie un grad; gradul îl divizăm în 60 minute, iar un minut în 60 secunde.

După cum vedeţi sistemul indian de numeraţie pe care-l folosim pe scară largă nu este singurul mijloc de scriere a numerelor.

Au existat încă multe alte metode de reprezentare a numerelor; astfel, de exemplu, mulţi negustori îşi aveau semnele lor secrete pentru notarea numerelor — aşa-numitele „simboluri" comerciale. Să vorbim acum şi despre ele.

„SIMBOLURILE" COMERCIALE SECRETE

În perioada de dinainte de revoluţie [1], pe obiectele cumpărate de la „ofeni" [2] sau din magazinele particulare, mai ales în cele de provincie, se puteau observa adesea însemnări cu litere ca:

a ve v uo

Aceste semne reprezentau preţul fix al obiectului, pe care negustorul rus îl însemna pe marfă, astfel încît el să nu poată fi cunoscut de cumpărător. Aruncînd o privire asupra acestor litere, negustorul le înţelegea sensul ascuns şi, adăugînd un supliment la preţ, spunea cumpărătorului preţul cerut (bineînţeles, încărcat).

---

[1] Marea Revoluţie Socialistă din Octombrie.

[2] „Ofenia" este negustorul ambulant care vindea în sate obiecte de galanterie, manufactură, cărţi, gravuri.

Sistemul era foarte simplu. Negustorul alegea un cuvînt oarecare, format din zece litere diferite; de cele mai multe ori erau alese cuvintele: „trudoliubie“ [1] „pravosudie“. Prima literă din cuvînt însemna 1, a doua 2, a treia 3 etc; cu litera a zecea era notat zeroul. Cu ajutorul acestor litere-cifre negustorul scria pe mărfuri prețul lor, ținînd în secret „cheia“ sistemului său.

Dacă, de exemplu, era ales cuvîntul:

p r a v o s u d i e
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

atunci prețul de 4 ruble și 75 copeici se scria astfel:

v   uo

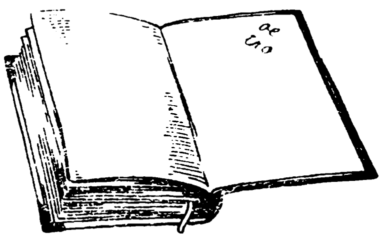


Fig. 9 — „Nota“ comercială de pe copertă (nota reprezentată aici arată că valoarea cărții este de 50 copeici, iar prețul de vînzare 1 rublă și 25 copeici).

Uneori prețul se scria pe marfă sub forma unei fracții; de exemplu, dacă pe o carte era notat (fig. 9)

$$\frac{oe}{tro}$$

aceasta, după cheia „trudoliubie“, însemna că prețul cărții este de 50 copeici, iar negustorul cerea pe ea o rublă și 25 de copeici.

PIONI ÎN LOC DE CIFRE

Din cele spuse mai sus este ușor de înțeles că numerele pot fi reprezentate nu numai cu ajutorul cifrelor, ci și al oricăror alte semne sau chiar obiecte: creioane,

[1] În limba rusă diftongul iu se scrie cu o singură literă (ю), astfel încît cuvîntul „trudoliubie“ (hărnicie) este format din zece litere.

peniţe, rigle, radiere etc., dacă convenim să-i atribuim fiecărui obiect semnificaţia unei anumite cifre. Putem reprezenta cu ajutorul acestor cifre-obiecte chiar şi operaţiuni aritmetice cu numere: adunarea, scăderea, înmulţirea, împărţirea.

Într-o revistă de şah era propusă următoarea problemă: Să se dezvăluie adevăratul sens al exemplului de împărţire al numerelor reprezentată în figura 10, în care aproape toate cifrele sînt înlocuite cu pioni. Din 28 de cifre se cunosc numai două: una (8) la cît şi cealaltă (1) în rest. S-ar părea că este imposibil de găsit valoarea celorlalte 26 de cifre notate cu pioni. Şi totuşi această problemă este relativ simplă pentru oricine, dacă îşi dă seama de sensul diferitelor operaţii care intră în componenţa împărţirii.

Iată raţionamentul care ne conduce la rezultat:

Cea de-a doua cifră a cîtului este, fără îndoială, zero, pentru că la restul de la prima scădere nu s-a coborît o singură cifră, ci două. Într-adevăr, după ce am coborît prima cifră s-a format un număr mai mic decît împărţitorul, iar în astfel de cazuri la cît apare în locul respectiv un zero.

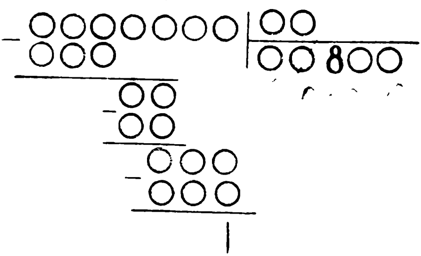


Fig. 10 — Găsiţi sensul adevărat al exemplului de împărţire a numerelor din această figură.

Prin raţionamente asemănătoare stabilim că cea de-a patra cifră a cîtului este de asemenea zero.

Privind bine aşezarea pionilor observăm că împărţitorul format din două cifre, fiind înmulţit cu 8, dă un număr cu două cifre; iar la înmulţirea lui cu prima cifră (deocamdată necunoscută) a cîtului se obține un număr format din trei cifre. Prin urmare, această primă cifră a cîtului este mai mare decît 8; o astfel de cifră nu poate fi decît 9.

În același mod stabilim că și ultima cifră a cîtului este 9.

Acum cunoaștem cîtul; el este egal cu 90 809. Rămîne să stabilim împărțitorul. După cum se vede în figura 10, împărțitorul este format din două cifre; în afară de aceasta, așezarea pionilor arată că numărul din două cifre, la înmulțirea cu 8, dă tot un număr format din două cifre; dacă însă el este înmulțit cu 9, atunci produsul este format din trei cifre. Ce număr este acesta? Facem încercări începînd cu numărul cel mai mic cu două cifre, 10:

$$10 \times 8 = 80$$
$$10 \times 9 = 90$$

După cum vedem numărul 10 nu satisface condițiile cerute: ambele produse de mai sus sînt numere de cîte două cifre. Facem încercarea cu următorul număr format din două cifre, 11:

$$11 \times 8 = 88$$
$$11 \times 9 = 99$$

După cum se vede, nici numărul 11 nu este bun: din nou ambele produse sînt numere alcătuite din două cifre. Să refacem calculul pentru numărul 12:

$$12 \times 8 = 96$$
$$12 \times 9 = 108$$

Numărul 12 satisface cerințele de mai sus. Oare mai există numere de acest fel? Să încercăm cu 13:

$$13 \times 8 = 104$$
$$13 \times 9 = 117$$

Ambele produse sînt numere formate din trei cifre; prin urmare, 13 nu este bun. Desigur că nici numerele mai mari decît 13 nu pot fi de folos.

Deci, singurul împărţitor posibil este numărul 12. Cunoscînd împărţitorul, cîtul şi restul, găsim uşor deîmpărţitul şi putem reface întregul proces al împărţirii:

$$\text{deîmpărţitul} = 90\,809 \times 12 + 1 = 1\,089\,709$$

Aşadar, avem următorul exemplu de împărţire inexactă:

```
 1089709 | 12
-108     |-----
         | 90809
 ----
    97
   -96
   ---
     109
    -108
    ----
       1
```

După cum se vede, cunoscînd numai două cifre am reuşit să aflăm 26 de cifre necunoscute.

ARITMETICA LA MICUL DEJUN

În faţa noastră sînt o serie de operaţii cu numere notate cu ajutorul pieselor din serviciul de masă (fig. 11). Furculiţa, lingura, cuţitul, urciorul, ceainicul, farfuria — toate acestea sînt simboluri care înlocuiesc fiecare o anumită cifră.

Privind acest grup de cuţite, furculiţe, vase etc. căutaţi să ghiciţi ce anume cifre sînt reprezentate aici.

La prima vedere problema pare foarte grea: trebuie să ghicim adevărate hieroglife, după cum a făcut cîndva francezul Champollion[1]. Problema noastră este de fapt mult mai uşoară: ştim doar că aici cifrele, deşi sînt notate cu furculiţe, cuţite, linguri etc., sînt

[1] Champollion (1790—1832) este un cunoscut filolog francez, fondator al egiptologiei — ştiinţă care studiază limba, istoria şi cultura Egiptului antic şi a ţărilor învecinate lui.

totuși scrise după sistemul numerelor zecimale; adică știm că farfuria care se află pe locul al doilea (numărînd din dreapta) este cifra zecilor, că obiectul din dreapta ei este cifra unităților, iar în stînga se află cifra sutelor. Pe urmă, se cunoaște că așezarea tuturor acestor obiecte are un anumit sens, care decurge din esența operațiilor aritmetice efectuate cu numerele reprezentate cu ajutorul lor. Toate acestea pot însemna mult în rezolvarea problemei propuse.

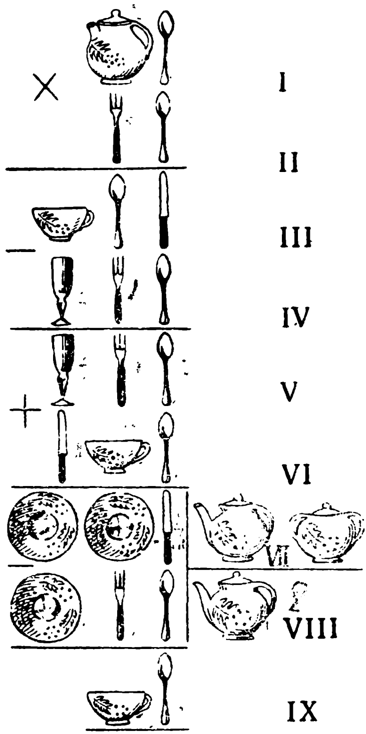


Fig. 11 — Care sînt numerele cu care se efectuează operațiile aritmetice aici?

Iată cum putem găsi sensul obiectelor reprezentate aici: Privind primele trei rînduri din desenul nostru, vedeți că „lingura“ înmulțită cu „lingura“ dă un „cuțit“. În rîndurile următoare se observă că „cuțitul“ minus „lingura“ dă „lingură“ sau că „lingura“ + „lingura“ = = „cuțit“. Care este cifra care dă același rezultat atît la adunare cît și la înmulțire? Această cifră nu poate fi decît doi, pentru că 2 × 2 = 2 + 2. Astfel, aflăm că „lingura“ = 2 și, prin urmare, „cuțitul“ = 4.

Acum mergem mai departe. Ce cifră este notată cu „furculița“? Vom încerca să ghicim privind primele trei rînduri în care furculița participă la înmulțire și rîndurile III, IV și V, unde aceeași furculiță figurează în operațiunea de scădere. Din grupa scăderii se observă că scăzînd în ordinul zecilor furculița din lingură se obține la rezultat o furculiță, adică la scăderea 2 — „furculița“ se obține „furculița“. Acest lucru se poate întîmpla în două cazuri: fie „furculița“ = 1 și atunci 2 — 1 = 1; fie „furculița“ = 6 și atunci scăzînd 6 din 12 (unitatea de ordin superior se împrumută de la „ceașcă“) rezultă 6. Ce alegem: 1 sau 6?

Să vedem dacă 6 este potrivit pentru „furculiță“ și în celelalte operații. Priviți cu atenție înmulțirea numerelor aflate în rîndul I și II. Cînd „furculița“ = 6, atunci în rîndul al II-lea se află numărul 62 (noi știm de acum că lingura = 2). Nu este greu de înțeles că în acest caz în rîndul I trebuie să se afle numărul 12, adică „urciorul“ notează cifra 1. Într-adevăr, dacă „urciorul“ ar fi notat cifra 2 sau orice cifră mai mare, atunci produsul numerelor din rîndul I și II ar fi fost un număr format din patru și nu din trei cifre. Astfel, dacă „furculița“=6, atunci în rîndul I se află numărul 12, iar în rîndul II este 62. Produsul lor este 12×62=744.

Dar acest lucru nu se poate întîmpla deoarece cifra zecilor din produs este „lingura“, adică 2 și nu 4, cum am obținut noi. Prin urmare, nu putem admite că „furculița“ = 6, ci trebuie să o acceptăm egală cu unu.

Aflînd pe această cale, prin încercări repetate, că „furculița“ înseamnă cifra 1, mergem mai departe cu pași mult mai siguri și rapizi. Din operația de scădere din rîndurile III și IV se constată că „ceașca“ simbolizează fie 6, fie 8. La 8 însă trebuie să renunțăm, pentru că ar însemna că „păhărelul“ = 4, iar noi știm că cu cifra 4 este notat „cuțitul“. Astfel, „ceașca“ reprezintă cifra 6 și, prin urmare, „păhărelul“ — cifra 3.

Ce cifră este notată în rîndul I cu „urcior“? Acest lucru poate fi aflat ușor cunoscînd produsul (rîndul III, 624) și unul din factorii înmulțirii (rîndul II, 12). Împărțind 624 cu 12, obținem 52. Prin urmare „ulciorul“ = 5.

Semnul „farfurie“ se determină simplu: în rîndul 7 „farfuria“ = „furculița“ + „ceașca“ = „păhărel“ + „cuțit“, adică „farfuria“ = 1 + 6 = 3 + 4 = 7.

Rămîne să se stabilească valoarea cifrică a „ceainicului“ și a „zaharniței“ din rîndul 7. Deoarece pentru cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6 şi 7 s-au găsit obiectele respective, rămîne să alegem numai între 8 şi 9 şi 0. Înlocuind obiectele cu cifrele corespunzătoare, în scăderea reprezentată în ultimele trei rînduri obţinem următoarea aşezare (cu literele c şi z sînt notate „ceainicul" şi „zaharniţa"):

$$\begin{array}{r} 774 : cz = c \\ \underline{712} \\ 62 \end{array}$$

După cum vedem, numărul 712 este produsul dintre două numere necunoscute cz şi c, care, desigur, nu pot fi nici zero şi nici un număr oarecare terminat în zero, deci, nici c şi nici z nu pot fi zero. Rămîn două presupuneri: $c = 8$ şi $z = 9$ sau invers $c = 9$ şi $z = 8$. Însă înmulţind 98 cu 8 noi nu obţinem 712; prin urmare, „ceainicul" simbolizează 8, iar „zaharniţa" 9 (într-adevăr: $89 \times 8 = 712$).

Astfel, pe baza unor calcule aritmetice simple noi am dezlegat scrierea hieroglifică cu obiectele ce fac parte din serviciul de masă:

urciorul înseamnă 5
lingura 2
furculiţa 1
ceainicul 8
farfuria 7
cuţitul 4
ceaşca 6
păhărelul 3
zaharniţa 9

Iar întregul şir de operaţii aritmetice, reprezentat prin acest serviciu original, capătă următorul sens:

$$\begin{array}{rl} \times & 52 \\ & \underline{12} \\ - & 624 \\ & \underline{312} \\ + & 312 \\ & \underline{462} \\ - & 774 : 89 = 8 \\ & \underline{712} \\ & 62 \end{array}$$

Rebusurile aritmetice reprezintă un joc interesant: ghicirea unui cuvînt prin rezolvarea unei probleme asemenea aceleia date în paragraful precedent. De exemplu: să presupunem că o persoană se gîndeşte la un cuvînt format din 10 litere care nu se repetă, cum ar fi „potîrniche", „importanţă". Luînd literele acestui cuvînt drept cifre, se reprezintă cu ajutorul literelor un oarecare caz de împărţire. Dacă cuvîntul ales este „potîrniche", atunci poate fi luat următorul exemplu de împărţire:

p o t î r n i c h e
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

deîmpărţitul — potrnî, 123564

împărţitorul — trîc, 3548

```
_ 123564 | 3548      _ potrnî | trîc
  10644  |-----        penîî  |-----
  ------   34          ------   tî
_  17124             _  pipoî
   14192                pîpho
  ------               ------
    2932                 ohto
```

Reprezentarea în litere a unui anumit caz de împărţire i se înmînează celui ce ghiceşte rebusul şi care trebuie, privind această îngrămădire de litere lipsită de sens la prima vedere, să afle cuvîntul ales. Cititorul ştie deja cum trebuie căutată valoarea cifrică a literelor în cazurile de acest fel; s-a explicat la problema din paragraful precedent. Cu puţină răbdare aceste rebusuri aritmetice pot fi ghicite, dacă exemplul este suficient de lung şi dă un material necesar pentru presupuneri şi verificări. Cînd sînt alese cuvinte care dau un caz de împărţire prea scurt, de exemplu:

i m p o r t a n ţ ă
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

deîmpărţitul — ntaor, 86745

împărţitorul — impo, 1234

```
_ ntaor | impo
  impo  |-----
  -----   aă
   ptr
```

atunci dezlegarea rebusului este foarte grea. În asemenea cazuri trebuie să-l rugăm pe cel care a ales cuvîntul să continue împărţirea pînă la sutimi sau chiar miimi, adică să obţină la cît încă două sau trei zecimale. Iată un exemplu de împărţire pînă la sutimi:

```
j u d e c ă t o r i              _ uătde  | uctă
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0                uctă   |------
                                 -------    ji, dt
deîmpărţitul — uătde, 26734      _ rtei
împărţitorul — uctă, 2576          ttuo
                                 -------
                                 _ uijui
                                   joidu
                                 -------
                                    uioo
```

Dacă în cazul acesta ne-am fi oprit la numărul întreg (ji), atunci ghicirea cuvîntului ales nu ar fi fost posibilă.

Cuvintele care pot fi alese drept „cheie“ pentru asemenea rebusuri nu sînt chiar atît de puţine pe cît s-ar părea; în afara celor indicate mai sus pot fi folosite cuvintele:

exhaustori , planetobus.

Propunem mai departe cititorului să dezlege singur următorul şir de rebusuri:

```
Rebusul nr. 1                       Rebusul nr. 2

_ mdnţnp | iear                     _ socnra | dte
  i e a r |-----                      ndso   |-----
---------   iue                     ---------  das
_ ţnun                              _ iecr
  numa                                isdn
---------                           ---------
_ ippnp                             _ oiia
  iiţmn                               osor
---------                           ---------
  iruu                                cnc
```

Rezolvarea acestor rebusuri o puteţi vedea la sfîrşitul cărţii.

SĂ SE GĂSEASCĂ UN NUMĂR DIN TREI CIFRE

Vom examina încă un rebus aritmetic de un alt tip. Numărul căutat este format din trei cifre diferite A, B, C. Vom scrie acest lucru astfel: ABC, ţinînd minte că C este cifra unităţilor, B — a zecilor, A — a sutelor. Trebuie găsit acest număr cînd se ştie că:

```
   × ABC
     BAC
  ─────────
     ****
+   **A
  ***B
  ─────────
  ******
```

Cu steluţe s-au notat cifrele necunoscute.

Rezolvarea rebusului o facem în ordinea următoare:

Constatăm pentru început că nici A, nici B şi nici C nu sînt egale cu 0. Sîntem convinşi de lucrul acesta pentru că, în caz contrar, nu s-ar fi putut obţine trei produse parţiale.

Observăm mai departe că:

produsul C × A se termină cu A,

Produsul C × B se termină cu B;

deducem de aici că C poate fi ori 1, ori 6. În ce priveşte 1 raţionamentul este evident; pentru 6 el se ilustrează cu exemple:

$$6 \times 2 = 12; \quad 6 \times 8 = 48; \quad 6 \times 4 = 24$$

Celelalte cifre nu au aceste proprietăţi. Dacă C ar fi egal cu 1, atunci primul produs parţial nu ar fi format din patru cifre, ci numai din trei. Rămîne, evident, o singură posibilitate, C = 6.

Ne-am convins acum că C = 6 şi că, prin urmare, A şi B pot fi numai 2, 4 sau 8. Cum cel de-al doilea produs parţial este format numai din trei cifre, înseamnă că A nu poate fi nici 4 şi nici 8. Aşadar, A = 2.

Pentru B rămîn două posibilităţi: B = 4 şi B = 8. Cum A = 2 şi B = 4, ultimul produs parţial ar avea trei, şi nu patru cifre. Prin urmare, B = 8.

Astfel, avem: A = 2, B = 8, C = 6. Numărul căutat este 286, iar înmulţirea are forma următoare:

$$
\begin{array}{r}
\times \begin{array}{r} 286 \\ 826 \end{array} \\
\hline
1716 \\
572 \\
2288 \\
\hline
236236
\end{array}
$$

SISTEMUL ZECIMAL ÎN RAFTURILE CU CĂRŢI

Sistemul de numeraţie zecimal îşi găseşte utilizarea pînă şi acolo unde s-ar părea că nu ne putem aştepta, şi anume în biblioteci, la aşezarea cărţilor pe domenii.

În unele biblioteci publice se foloseşte o astfel de clasificare a cărţilor, în care o aceeaşi carte este notată pretutindeni cu acelaşi număr („cifru"). Acest sistem se numeşte z e c i m a l ; el absolvă cititorul de necesitatea de a consulta catalogul atunci cînd vrea să-şi aleagă o carte dintr-un anumit domeniu.

Sistemul este simplu şi foarte comod. El constă în aceea că fiecare domeniu de cunoştinţe este notat cu un număr, care arată prin el însuşi locul ce-l ocupă domeniul respectiv în sistemul general de cunoştinţe.

Toate domeniile de cunoştinţe sînt împărţite, în primul rînd, la zece; notarea se face cu cifre de la 0 pînă la 9:

0. Publicaţii cu caracter general.
1. Filozofie.
2. Istoria religiei şi literatura antireligioasă.
3. Ştiinţe sociale. Drept.
4. Filologie. Limbi.
5. Ştiinţe fizico-matematice şi alte ştiinţe ale naturii.
6. Ştiinţe aplicate (medicină, tehnică, agricultură etc.).
7. Artă.
8. Literatură.
9. Istoria, geografia, bibliografiile.

Prima cifră a semnului numeric (adică a cifrului) arată direct, conform acestui sistem, domeniul din care face parte cartea respectivă. Fiecare carte de filozofie are un cifru care începe cu 1, de matematică — cu 5, de tehnică — cu 6 etc. Dacă, de exemplu, cifrul începe cu 4, atunci, chiar fără a deschide cartea, vom şti că ea face parte din domeniul lingvisticii.

Mai departe, fiecare din domeniile enumerate mai sus se împart în zece subdomenii, care se notează de asemenea cu cifre de la 0 pînă la 9; aceste cifre se scriu în cifru pe locul al doilea. De exemplu, capitolul 5, care conţine cărţile de fizică, matematică şi ştiinţe naturale, se împarte în următoarele subcapitole:

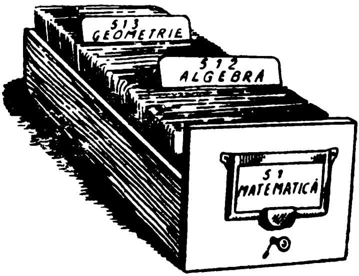


Fig. 12 — Cutia cartonaşelor catalogului de bibliotecă întocmit după sistemul zecimal.

50. Lucrări generale de fizică, matematică şi ştiinţe naturale.
51. Matematica.
52. Astronomia. Geodezia.
53. Fizica. Mecanica teoretică.
54. Chimia. Mineralogia.
55. Geologia.
56. Paleontologia.
57. Biologia. Antropologia.
58. Botanica.
59. Zoologia.

În mod corespunzător se împart şi celelalte capitole. De exemplu, în capitolul ştiinţelor aplicate (6) subcapitolul medicinei se numerotează cu 61; agricultura — 63, comerţ şi căi de comunicaţii — 65; industria chimică şi tehnologie — 66 etc. Tot astfel în capitolul 9 toate cărţile de geografie se notează cu 91 etc.

Adăugînd la primele două cifre o a treia, caracterizăm conţinutul cărţii şi mai precis, arătăm din ce ramură a subdomeniului respectiv face parte (fig. 12). De exemplu, la subcapitolul matematică (51) cifra 1 aşezată în locul al treilea arată că lucrarea face parte din domeniul aritmeticii (511); cu cifrul 512 se notează cărţile de algebră, cu 513 — de geometrie. La capitolul fizicii (53) cărţile de electricitate cu cifrul 537, de optică — 535, de termodinamică — 536.

Într-o astfel de bibliotecă organizată după sistemul zecimal căutarea cărții cerute este foarte mult simplificată. Dacă vă interesează geometria, vă duceți direct la dulapurile unde cifrele încep cu 5, găsiți dulapul unde sînt păstrate cărțile cu cifrul 51... și examinați numai acele rafturi în care se găsesc cărțile cu cifrul 513... Aici sînt adunate toate cărțile de geometrie existente în biblioteca respectivă.

Oricît de bogată ar fi biblioteca nu se poate întîmpla să iasă vreo carte din acest sistem de notare.

SEMNELE ȘI DENUMIRILE ARITMETICE LA DIFERITE POPOARE

Se obișnuiește să se creadă că semnele aritmetice sînt, într-o anumită măsură, internaționale, că ele sînt aceleași pentru toate popoarele de cultură europeană. Aceasta este just doar în ce privește majoritatea semnelor, dar nu pentru toate semnele. Semnele + și —, semnele × și: sînt folosite, cu același sens, atît de nemți, cît și de francezi și englezi. Însă punctul ca semn al înmulțirii nu se folosește la diferite popoare în mod identic. Unii scriu 7.8, alții — 7·8, ridicînd punctul pînă la mijlocul cifrei. Același lucru trebuie să-l spunem și despre semnul cu care indicăm fracția, adică despre semnul care separă partea zecimală de numărul întreg. Unii scriu, ca și noi, 4,5, alții 4.5, iar alții 4·5; așezînd punctul mai sus de mijloc. Englezii și americanii neglijează zeroul din fața fracției zecimale, lucru pe care în continentul european nu-l face nimeni. În cărțile americane întîlnim notații ca: .725, sau ·725, sau chiar ,725 în loc de 0,725. Nici împărțirea numărului în clase nu se face în același mod. În unele țări se pun între clase puncte (15.000.000), în altele virgule (15,000,000). La noi se obișnuiește să nu se pună între clase nici un semn, lăsînd doar o distanță între ele (15 000 000).

Este interesant de urmărit cum se schimbă denumirea aceluiași număr de la o limbă la alta. De exemplu, numărul 18 îl numim „optsprezece", adică se pronunță întîi unităţile (8), şi apoi zecile (10). În aceeaşi succesiune este spus acest număr de un german: achtzen, adică 8...10. Francezul pronunţă altfel: 10...8 (dixhuit). Cît de variată este denumirea aceluiaşi număr 18 la diferitele popoare o arată următorul fragment dintr-o tabelă întocmită de un cercetător:

în rusă	8...10
în germană	8...10
în franceză	10...8
în armeană	$10 + 8$
în greacă	$8 + 10$
în latină	fără 2, 20
în noua zeelandeză	$11 + 7$
în valeză	$3 + 5$...10
în lituană	8 peste 10
în ainosă	10—2 peste 10
în careacă	3...5 peste 10

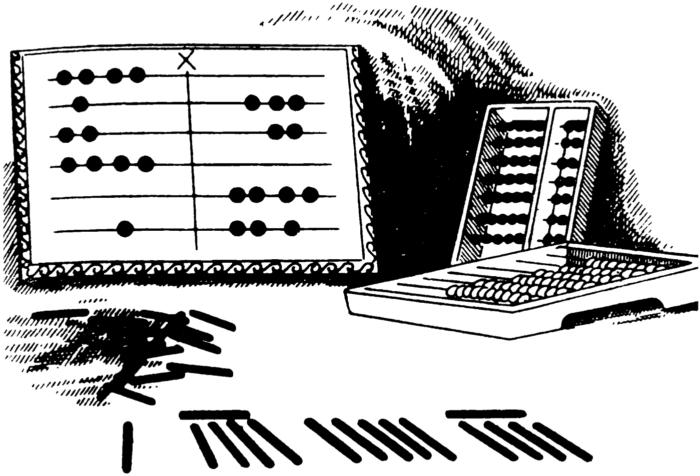
Este curioasă denumirea pe care a căpătat-o acelaşi număr 18 la un trib din Groenlanda: „de pe celălalt picior 3“. Cu toate că această denumire este neobişnuită, ea se explică în mod natural prin metoda de a număra cu ajutorul degetelor de la mîini şi de la picioare. Să dezvăluim sensul ei:

numărul degetelor ambelor mîini	10
„ „ de la un picior	5
„ „ de la celălalt picior	3
Total	18

Într-un mod asemănător se explică şi denumirea caraibă a numărului 18: „toate mîinile mele, 3, mîna mea“ (adică $10 + 3 + 5$).

CURIOZITĂŢI ARITMETICE:

$$100 = \begin{cases} 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \times 9 \\ 1 + 2 \times 3 + 4 \times 5 - 6 + 7 + 8 \times 9 \\ 1 + 2 \times 3 + 4 + 5 + 67 + 8 + 9 \\ 1 \times 2 + 34 + 56 + 7 - 8 + 9 \end{cases}$$



CAPITOLUL II

VECHIUL ABAC ŞI URMAŞII SĂI

PROBLEMA CEHOVIANĂ

Să ne amintim problema de aritmetică, renumită în felul ei, care l-a pus în încurcătură atît de mult pe elevul de clasa a VII-a Ziberov, din povestirea lui Cehov „Meditatorul".

„Un negustor a cumpărat 138 arşini de stofă neagră şi de stofă albastră cu 540 ruble. Cîţi arşini a cumpărat el din fiecare, dacă stofa albastră a costat 5 ruble arşinul, iar cea neagră 3 ruble?"

Cehov descrie cu umor fin cît de mult s-au zbătut la această problemă atît meditatorul cît şi elevul său Petea, de 12 ani; pînă la urmă i-a scos din încurcătură tatăl lui Petea Udodov.

«Petea repetă problema și pe loc, fără să spună un cuvînt, începe să împartă 540 cu 138.

— Pentru ce împarți? Stai nițel! De altfel, așa-i... continuă! Rămîne un rest? Aici nu poate fi rest. Dă-mi tabla, să fac eu împărțirea!

Ziberov face împărțirea, obține 3 cu un rest și șterge repede totul.

„Ciudat... gîndește el, trecîndu-și degetele prin păr și roșind. Cum naiba s-o fi rezolvînd? Hm!... Asta e

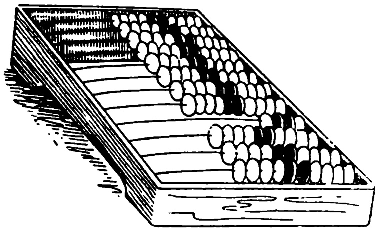


Fig. 13 — Abacul rus.

o problemă de algebră cu două necunoscute și nu o problemă de aritmetică...“

Meditatorul se uită la soluții și vede 75 și 63.

„Hm!... curios... Oare cum se face? Se adună 5 cu 3, și apoi se împarte 540 la 8? Așa o fi? Nu, nu-i așa“.

— Hai, rezolv-o! — îi spune el băiatului.

— Ce te gîndești atîta? Problema e simplă de tot! — îi spune și Udodov lui Petea. — Mare tîmpit mai ești! Rezolvă-i-o dumneata, Egor Alexeici.

Egor Alexeici ia condeiul în mînă și se apucă să rezolve. Începe să se bîlbîie, roșește, pălește.

— La drept vorbind, e o problemă de algebră, — spune el. — Poate fi rezolvată prin x și y. Dar poate fi rezolvată și așa. Vezi, facem împărțirea... ai înțeles de ce? Pe urmă scăderea... Pricepi? Sau știi ce... Gîndește-te și rezolv-o singur pentru mîine...

Petea zîmbește șiret. Udodov zîmbește și el. Amîndoi au înțeles încurcătura profesorului. Elevul de clasa a VII-a se rușinează și mai rău, se scoală în picioare și începe să se plimbe dintr-un colț în altul al încăperii.

— Se poate rezolva și fără algebră, — spune Udodov oftînd și întinzînd mîna spre abac. Poftim...

Țăcănește cu bilele abacului și obține 75 și 63, ceea ce și trebuia.

— Uite... așa socotim noi, cei fără multă știință.»

Această istorioară, care ne face să rîdem de stînjeneala sărmanului meditator, pune trei probleme noi, și anume:

1. Cum intenționa meditatorul să rezolve problema pe cale algebrică?

2. Cum trebuia s-o rezolve Petea?

3. Cum a rezolvat-o tatăl lui Petea, la abac, „fără multă știință“?

La primele două probleme, probabil, vom răspunde fără greutate, dacă nu chiar toți, dar foarte mulți cititori ai cărții noastre.

Cea de a treia problemă nu este tot atît de simplă. Dar, să le examinăm pe rînd.

1. Elevul din clasa a VII-a (meditatorul) era gata să rezolve problema „prin x și y“, fiind convins de faptul că, „la drept vorbind, e o problemă de algebră“. Și el, credem, ar fi rezolvat-o cu ușurință recurgînd la ajutorul unui sistem de ecuații. Întocmirea unui sistem de două ecuații cu două necunoscute, pentru problema dată, este foarte simplă; iată aceste două ecuații:

$$x + y = 138,$$

$$5x + 3y = 540,$$

unde x este numărul de arșini de stofă albastră, iar y — de stofă neagră.

2. Problema poate fi rezolvată ușor și pe cale aritmetică. Dacă ați fi nevoiți să o rezolvați, ați începe cu presupunerea că întreaga cantitate de stofă cumpărată a fost albastră. Atunci pentru 138 arșini de stofă albastră ar fi trebuit să se plătească $5 \times 138 = 690$ ruble; aceasta ar fi fost cu $690 - 540 = 150$ ruble mai mult decît s-a plătit în realitate. Diferența de 150 de ruble arată că s-a cumpărat și o stofă neagră mai ieftină, cu 3 ruble arșinul. S-a cumpărat atîta

stofă ieftină încît din diferența de 2 ruble pentru fiecare arşin s-ar fi format 150 de ruble; este evident că numărul arşinilor de stofă neagră se va afla împărţind 150 cu 2. Obţinem răspunsul 75; scăzînd aceşti 75 arşini din numărul total de 138 arşini, aflăm cîtă stofă albastră s-a cumpărat: 138 — 75 = 63. Aşa trebuia să rezolve problema și Petea.

3. A venit rîndul întrebării a treia: cum a rezolvat problema Udodov senior?

În povestire se spune pe scurt: „Țăcănește cu bilele abacului și obţine 75 și 63, ceea ce și trebuia".

Dar în ce constă oare acest calcul la abac? Care este metoda de rezolvare a problemei cu ajutorul abacului?

Soluţia este următoarea: problema se rezolvă la abac prin aceeași metodă ca și pe hîrtie, cu ajutorul acelorași operaţii aritmetice. Dar efectuarea lor se simplifică datorită avantajelor pe care abacele le oferă oricui știe să le manevreze. Este evident că „secretarul de gubernie la pensie" Udodov știa să calculeze bine la abac, pentru că bilele lui, fără ajutorul algebrei, i-au dezvăluit rapid ceea ce meditatorul căuta să afle cu x și y. Să urmărim deci care erau operaţiile făcute la abac de tatăl lui Petea.

Înainte de toate el trebuie, după cum ştim, să înmulţească 138 cu 5. Pentru aceasta, conform regulelor de efectuare a calculelor la abac, a înmulţit întîi 138 cu 10, adică pur şi simplu a trecut numărul 138 cu un rînd mai sus (vezi fig. 14 b), iar apoi a împărţit acest număr în două, tot la abac. Împărţirea se începe de jos: se înjumătăţeşte numărul de bile luate pe fiecare sîrmă: dacă numărul de bile de pe sîrma respectivă este impar, atunci se transformă o bilă de pe această sîrmă în 10 bile de pe sîrma de jos.

În cazul nostru, de exemplu, 1 380 se împarte în două astfel: pe sîrma de jos unde s-au luat 8 bile se îndepărtează 4 bile (4 zeci), pe sîrma de mijloc din trei bile se îndepărtează una, una rămîne, iar a treia se înlocuieşte, în gînd, cu zece bile de pe sîrma de jos și se împarte în două, adăugîndu-se 5 (zeci) la bilele de pe sîrma de jos; bila de pe sîrma de sus se transformă în 10 (sute), adăugînd 5 (sute) la bilele de pe sîrma

mijlocie. În rezultat pe sîrma de sus nu mai rămîne nici o bilă, pe sîrma din mijloc
$1 + 5 = 6$ sute, pe cea de jos $4 + 5 = 9$ zeci (fig. 14 c). În total sînt 690 unități. Operațiile se fac repede, automat.

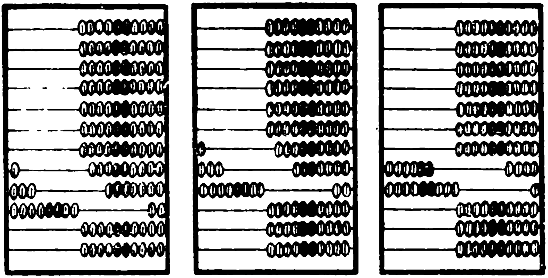


Fig. 14 — El a înmulțit mai întîi 138 cu 10, adică a mutat pe abac numărul 138 cu un rînd mai sus, iar apoi a împărțit numărul cu 2.

Mai departe Udodov senior urma să scadă 540 din 690. Cunoaștem cu toții cum se face această operație la abac.

În sfîrșit, diferența obținută, 150, trebuia împărțită în două: Udodov a îndepărtat din 5 bile (zeci) 2,adăugînd 5 unități la rîndul de jos; apoi din bila de pe sîrma sutelor a adunat 5 (zeci) la rîndul de jos: s-au obținut 7 zeci și 5 unități, adică 75.

Toate aceste operații simple se efectuează la abac mult mai repede decît s-a descris aici.

CUM SE SOCOTEA ÎN ANTICHITATE

Oamenii au învățat să socotească din timpuri foarte vechi. Primul instrument natural pentru socotit au fost degetele mîinilor. Aici își are originea sistemul zecimal de numerație al multor popoare antice. Trebuie să spunem că socotirea cu ajutorul degetelor a servit mult timp drept mijloc practic la diverse popoare, printre care şi grecii antici. Să nu credeţi că cu ajutorul degetelor se poate socoti numai pînă la zece. Din monumentele literaturii antice greceşti, ajunse pînă la noi, aflăm că în secolele V şi VI înainte de era noastră cal-

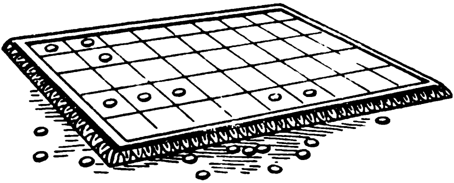


Fig. 15 — Anticii foloseau pentru calcul „abaca".

culul pe degete era foarte răspîndit şi putea să depăşească o mie.

Mai tîrziu la egipteni, greci, romani, chinezi şi la alte cîteva popoare antice apare un dispozitiv pentru socoteli, care prin ideea lui aminteşte abacul nostru şi se cunoştea în antichitate sub denumirea de „abacă". Aspectul lui era diferit la diferite popoare. Astfel, abaca greacă reprezenta o tablă (o masă), împărţită în benzi (fig. 15), pe care se deplasau nişte fişe speciale, ce

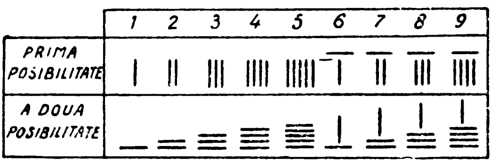


Fig. 16 — Două metode de reprezentare a cifrelor pe tabla de calcul chineză.

aveau acelaşi rol ca şi bilele de pe abacul nostru. Abaca romană avea forma unei plăci de cupru cu şănţuleţe (tăieturi), în care se deplasau nişte butoni.

In China antică pentru reprezentarea numerelor pe placa de socoteli se foloseau nişte bastonaşe cu lungimea de 10 cm şi grosimea de 1 cm. În jurul anului 150 e. n. în China se cunoşteau pe o scară destul de largă chiar metodele de efectuare, cu ajutorul plăcii de socoteli, a celor patru operaţii aritmetice.

Existau două metode de reprezentare a cifrelor pe placa de socoteli chineză. Ele sînt arătate în tabela din fig. 16.

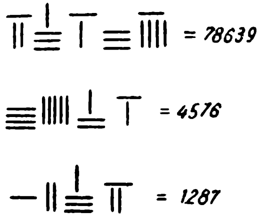
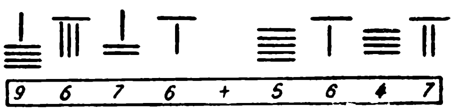


Fig. 17 — Reprezentarea cîtorva numere pe tabla de calcul chineză.

La scrierea numărului pe placa de socoteli de obicei se proceda în felul următor: prima lui cifră (numărînd din dreapta spre stînga) se reprezenta prin prima metodă, cea de-a doua cifră — prin metoda a doua, cea de a treia se reprezenta din nou prin metoda întîi, iar a patra prin metoda a doua etc. Cu alte cuvinte, toate cifrele numărului aflate pe locuri i m p a r e (numărînd dinspre dreapta) erau reprezentate prin metoda întîi, iar cifrele de pe locurile p a r e — prin metoda a doua. De exemplu, numerele 78 639, 4 576 şi 1 287 erau reprezentate pe placa de socoteli aşa cum se arată în fig. 17.

Să vedem pe scurt cum se efectuau adunările şi înmulţirile pe o astfel de placă de socoteli.

A d u n a r e a. Se cere de exemplu să se găsească suma a două numere: 9 876 şi 5 647. Le reprezentăm întîi pe placa de socoteli:

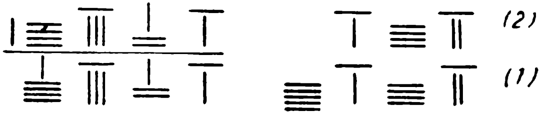


Adunarea se efectua începînd cu unităţile de ordin superior, adică din stînga.

E t a p a 1 : adunăm miile

$$9 + 5 = 14$$

Reprezentăm aceasta în felul următor:



adică deasupra termenilor adunării formăm un al doilea rînd, scriind în stînga cifrei 9 numărul 14, aşa încît cifra 4 să fie exact deasupra cifrei 9, iar restul primului termen al adunării îl transcriem fără schimbări. Deasupra celui de-al doilea termen al adunării îi repetăm toate cifrele, afară de cifra 5 care a fost deja folosită.

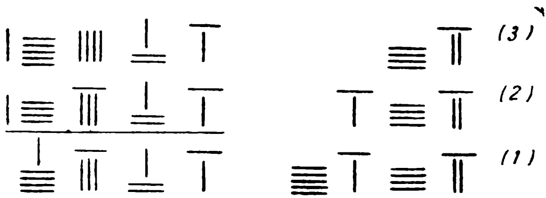
E t a p a 2: adunăm sutele

$$8 + 6 = 14$$

şi pentru că am obţinut la adunare o unitate de ordin superior, o adăugăm la suma dinainte:

$$\begin{array}{r} 14 \\ + \quad 14 \\ \hline 154 \end{array}$$

Astfel, rîndul 3 se va scrie (primele două rînduri le repetăm fără nici o schimbare):



In stînga, în rîndul 3 este scris 154, iar apoi s-au repetat ultimele două cifre (76) ale primului termen al adunării; în dreapta sînt repetate ultimele două cifre (47) ale celui de-al doilea termen al adunării (celelalte cifre au fost deja folosite).

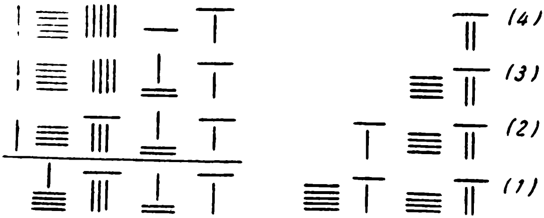
E t a p a 3 : adunăm zecile

$$7 + 4 = 11$$

prin urmare, împreună cu rezultatul precedent obţinem:

$$\begin{array}{r} 154 \\ +\quad 11 \\ \hline 1551 \end{array}$$

Acest număr 1 551 îl reprezentăm în stînga, în rîndul 4;



E t a p a 4: a rămas să adunăm unităţile

$$6 + 7 = 13$$

şi suma celor două numere date va fi găsită; ea este egală cu 15 523:

$$\begin{array}{r} 1551 \\ +\quad 13 \\ \hline 15523 \end{array}$$

Numărul obţinut, 15 523, se scrie în rîndul al cincilea din coloana stîngă şi schema adunării are, definitiv, înfăţişarea din fig. 18.

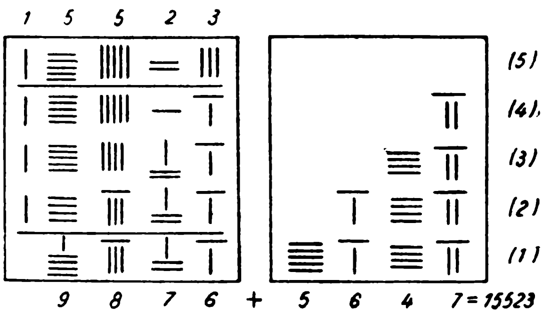


Fig. 18 — Aceasta este schema după care s-ar efectua adunarea numerelor 9876 şi 5647 pe tabla de calcul chineză.

Î n m u l ț i r e a . In China antică înmulțirea se făcea cu ajutorul plăcii de socoteli, începînd cu cifrele care reprezintă unități de ordin superior, și trecînd treptat la cele de ordin inferior. În secolul I al erei noastre se folosea deja tabla înmulțirii.

Să presupunem că trebuie să înmulțim 346 cu 27. În notațiile noastre procesul înmulțirii cu placa de socoteli ar fi arătat aproximativ astfel:

$$
\begin{array}{r@{}c@{}c@{}c@{}c}
 & & 3 & 4 & 6 \\
\times & & & 2 & 7 \\
\hline
 & 6 & & & \\
 & 2 & 1 & & \\
 & & 8 & & \\
 & & 2 & 8 & \\
 & & 1 & 2 & \\
 & & & 4 & 2 \\
\hline
 & 9 & 3 & 4 & 2
\end{array}
$$

Noi am înmulțit întîi 3 cu 2 și am obținut 6 — cifra unităților de ordin superior al produsului (miile). După aceea am înmulțit 3 cu 7, iar 4 cu 2; numerele obținute pentru sute, 21 și 8, le-am scris sub cifra 6 ținînd seama de ordinul lor, arătat mai sus. Apoi am înmulțit 4 cu 7, iar 6 cu 2 (aceasta ne-a dat numărul zecilor 28 și 12) și, în sfîrșit, am înmulțit 6 cu 7 (am obținut 42 de unități). Toate aceste numere le-am scris după cum s-a arătat mai sus și am adunat. Ca rezultat am obținut produsul 9 342.

Placa de socoteli și metodele de efectuare a calculelor cu ajutorul ei (despre metodele adunării și înmulțirii am mai vorbit) s-au păstrat în China pînă în secolul XIII. În acea vreme au început să folosească zeroul, care cu ajutorul bastonașelor de calcul se reprezenta sub forma unui pătrat □.

În secolul al XIII-lea pe placa de socoteli se reprezentau și fracțiile zecimale. De exemplu numărul 106 368,6312 era reprezentat aproximativ așa cum se arată în fig. 19.

În secolul al XV-lea în China și în Japonia, pentru efectuarea celor patru operații aritmetice, se folosea deja abacul cu şapte bile (în China se numea „suan-pan"[1], iar în Japonia — „soroban", vezi fig. 20). Aceste dispozitive de calcul originale s-au păstrat pînă în zilele noastre şi se bucură de o mare popularitate.

Iată, de exemplu, ce spunea cîndva despre soroban un savant japonez: „cu toată vechimea lui sorobanul depăşeşte toate dispozitivele

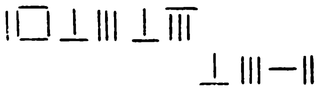


Fig. 19 — Reprezentarea numărului mixt 106 368,6312 pe tabla de calcul chineză.

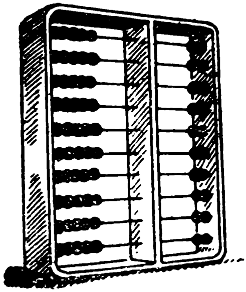


Fig. 20 — Abacul cu 7 bile folosit în China şi Japonia.

de calcul modern prin uşurinţa de manevrare, simplitatea construcţiei şi preţul redus".

ABACUL RUS (SCIOTÎ).

Există multe obiecte utile pe care nu le apreciem suficient numai pentru că, găsindu-le mereu la îndemînă, ele au devenit prea banale. Printre aceste obiecte insuficient apreciate se numără şi abacul de contabilitate — dispozitiv de calcul popular rus, care reprezintă o variantă a renumitei „abace" sau „placă de socoteli" a înaintaşilor.

Occidentul nu cunoaşte aproape de loc abacele. Ele se folosesc numai în şcolile elementare ca material demonstrativ în predarea numeraţiei.

Abacul de contabilitate, cu toată simplitatea construcţiei, prin rezultatele ce le dă poate concura, în unele privinţe, chiar şi maşinile de calcul. În mîini pricepute acest dispozitiv simplu face adevărate minuni. Un specialist care înainte de revoluţie a lucrat

[1] Abacul suan-pan prezintă dimensiuni diferite, unele dintre cele mai mici (17 mm lungime şi 8 mm lăţime). Se folosesc abace şi cu 6 bile: 5 bile de o parte a despărţiturii, una de cealaltă parte. (Pe modelul pe care-l posed sînt 21 de şiruri de bile.)

într-o mare firmă rusească la vînzarea maşinilor de calcul povestea că de multe ori a uimit cu abacul rus pe străinii care aduceau mostre de mecanisme de calcul complicate. El organiza întreceri între doi calculatori, dintre care unul lucra cu o maşină străină „de adiţie" scumpă (adică maşină de adunat), iar celălalt se folosea de abacul rus. Şi nu o dată se întîmpla că acesta din urmă — ce e drept un mare maestru — cîştiga în concursul cu posesorul minunii străine în ce priveşte rapiditatea şi exactitatea calculelor. Se întîmpla uneori că străinul uimit de rapiditatea calcului la abac, se recunoştea imediat învins, îşi aşeza maşina în geamantan, nemaisperînd să vîndă în Rusia nici un exemplar.

Ce este drept, la abacul rus nu se pot efectua toate operaţiile care se fac cu ajutorul maşinilor. Însă în multe privinţe — de exemplu la adunare şi scădere — el poate rivaliza cu aparatele cele mai complexe. De altfel, în mîini dibace înmulţirea şi împărţirea sînt de asemenea efectuate cu rapiditate la abac, dacă se cunosc metodele de efectuare a acestor operaţii.

Să facem cunoştinţă cu cîteva din ele.

ÎNMULŢIREA LA ABAC

Iată cîteva metode care vor permite oricărei persoane care ştie să adune la abac să efectueze în mod rapid î n m u l ţ i r i l e ce se ivesc în practică.

Înmulţirea cu 2 şi 3 este înlocuită cu adunarea dublă şi triplă.

La înmulţirea cu 4 se înmulţeşte întîi cu 2 şi apoi se adună rezultatul cu el însuşi.

Înmulţirea unui număr cu 5 se efectuează la abac astfel: se mută întregul număr cu o sîrmă mai sus, adică se înmulţeşte cu 10, iar apoi se împarte numărul astfel obţinut în două (împărţirea cu doi la abac am explicat-o la pag. 44).

În locul înmulţirii cu 6 se înmulţeşte cu 5 şi se adaugă deînmulţitul. Pentru înmulţirea cu 7 se înmulţeşte cu 10 şi se scade deînmulţitul de 3 ori.

Înmulţirea cu 8 se înlocuieşte prin înmulţirea cu 10—2.

În acelaşi fel se face înmulţirea cu 9: se înlocuieşte cu înmulţirea cu 10—1.

La înmulţirea cu 10 întregul număr se mută, după cum am mai spus, cu un rînd mai sus.

Probabil că cititorul şi-a dat deja seama cum trebuie să procedeze în cazul înmulţirii cu numere mai mari ca 10 şi ce fel de înlocuiri sînt mai potrivite. Înmulţitorul 11 va trebui, desigur, înlocuit cu 10 + 1.

Înmulţitorul 12 se înlocuieşte cu 10 + 2, sau practic cu 2 + 10; adică întîi se dublează numărul, iar apoi i se adaugă numărul înmulţit cu 10. Înmulţitorul 13 se înlocuieşte cu 10 + 3 etc.

Să examinăm cîteva cazuri particulare de înmulţitori care nu depăşesc o sută:

$20=10\times2$	$32=22+10$
$22=11\times2$	$42=22+20$
$25=(100:2):2$	$43=33+10$
$26=25+1$	$45=50—5$
$27=30—3$	$63=33+30$ etc.

De altfel, se vede uşor că la abac este foarte comod să se facă înmulţirea cu numere ca: 22, 33, 44, 55 etc.; de aceea trebuie să căutăm ca la descompunerea înmulţitorului să ne folosim de astfel de numere formate prin repetarea unei cifre.

La aceleaşi procedee se recurge şi la înmulţirea cu numere mai mari decît o sută. Dacă asemenea metode artificiale sînt obositoare, putem, desigur, să facem înmulţirea la abac după regula generală, înmulţind cu fiecare cifră a înmulţitorului şi scriind produsele parţiale — chiar şi această metodă scurtează întrucîtva timpul necesar efectuării operaţiei.

ÎMPĂRŢIREA LA ABAC

Efectuarea împărţirii la un abac de contabilitate este mult mai grea decît înmulţirea; pentru aceasta trebuie să se memoreze o serie întreagă de metode speciale, uneori destul de complicate. Cei pe care-i interesează asemenea metode pot apela la manuale speciale. Aici vom prezenta doar cele mai comode metode de împărțire la abac, cu numere care nu-l depășesc pe zece (cu excepția numărului 7 cu care împărțirea se face mult mai greu).

Știm deja cum se face împărțirea cu doi (pag. 44), această metodă este foarte simplă.

Mult mai complicată este metoda de împărțire cu 3: ea constă în înlocuirea împărțirii prin înmulțirea cu fracția periodică infinită 0,333... $\left(\text{se știe că } 0{,}33\ldots = \frac{1}{3}\right)$. Ne este cunoscut deja procedeul înmulțirii la abac cu 3; este ușoară de asemenea împărțirea cu 10: trebuie doar să mutăm deîmpărțitul cu un rînd mai jos. După cîteva exerciții această metodă de împărțire cu 3, care la prima vedere apare cam complicată, practic este destul de comodă.

Împărțirea cu 4 este înlocuită, desigur, prin împărțirea dublă cu 2.

Și mai simplă este împărțirea cu 5: ea se substituie prin împărțirea la 10 și dublarea rezultatului.

Împărțirea cu 6 se face în două etape: întîi la 2, iar apoi rezultatul se împarte la 3.

Împărțirea cu 7, după cum am mai arătat, nu o vom expune aici.

Împărțirea cu 8 se face în trei etape: întîi cu 2, rezultatul iar cu 2 și apoi încă o dată cu 2.

Este interesantă metoda împărțirii cu 9. Ea se bazează pe faptul că $\frac{1}{9} = 0{,}1111\ldots$ Evident, în locul împărțirii cu 9 se pot aduna succesiv 0,1 din deîmpărțit + 0,01 din același număr[1] și așa mai departe.

După cum vedem, cea mai simplă este împărțirea cu 2, 10 și 5 și, desigur, cu multiplii lor pari: 4, 8, 16, 20, 25, 40, 50, 75, 80, 100. Aceste cazuri de împărțire nu prezintă greutăți nici chiar pentru un manipulator mai puțin experimentat.

---

[1] Acest procedeu este util și pentru împărțirea în minte cu 9

De strămoşii îndepărtaţi ai abacei noastre de contabilitate sînt legate unele rămăşiţe ale vremurilor vechi în limbă şi obiceiuri. Puţini îşi dau seama, de exemplu, că făcînd uneori nod la batistă ca să nu uităm ceva, imităm un gest cu mult substrat al strămoşilor noştri —

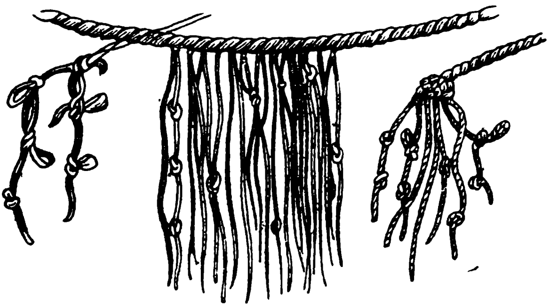


Fig. 21 — Dispozitivul de calcul al locuitorilor antici din Peru — „cvipos".

în felul acesta notau ei rezultatul unei socoteli efectuate cu ajutorul şireturilor. Un număr oarecare de curele sau de frînghii cu noduri reprezentau cîndva un aparat de socotit (fig. 21), analog în principiu cu abacul. Aceasta era „abaca de frînghie" peruviană, aşa-numitul „cvipos". Un nod simplu pe frînghie însemna 10, unul dublu 100, triplu — 1000 etc.

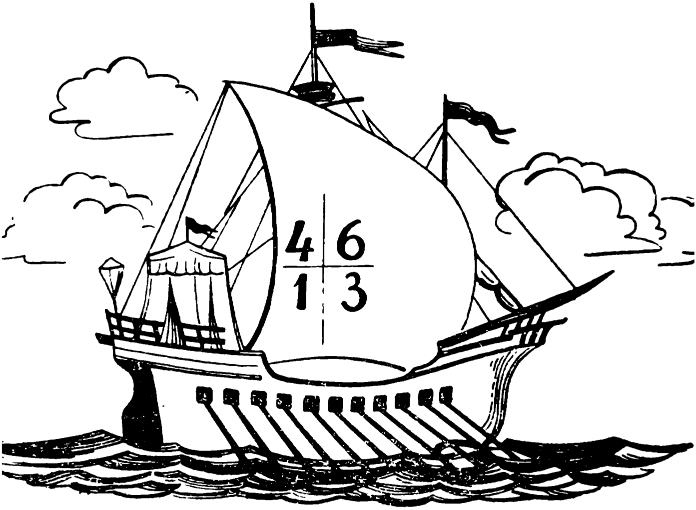
Tot de abac sînt legate şi cuvintele, atît de răspîndite astăzi, „bancă" şi „cec". În limba germană „bank" înseamnă bancă (de grădină). Ce poate exista comun între o instituţie financiară — bancă în sensul actual al cuvîntului, şi o bancă de grădină ? S-a constatat că aceasta nu este doar o simplă coincidenţă a denumirilor. Abacul în formă de bancă a fost folosit pe scară largă în cercurile comerciale ale Germaniei. În secolele XV—XVI, fiecare birou de schimb sau oficiu bancar se caracteriza, în primul rînd, prin existenţa unei „bănci de calcul"; deci apare natural faptul că banca ca instituţie financiară şi banca de grădină au devenit sinonime.

Contingență mai puțin directă cu abacul are cuvîntul „cec". Acest cuvînt este de origine engleză şi derivă de la verbul „checker" — a linia. În secolele XVI—XVII „checkered" se numea un şervețel de piele, liniat în formă de abac; el era purtat de comercianții englezi și în caz de necesitate desfăcut pe masă pentru efectuarea calculelor. Formularele pentru calcule se liniau după modelul acestor abace, şi nu este de mirare că asupra lor a trecut, în formă prescurtată, însăşi denumirea acestor dispozitive de calcul: de la cuvîntul „checkered" s-a format cuvîntul „ceck".

Este interesantă providența expresiei „a rămîne pe bobi", pe care o folosim astăzi vorbind despre un om care şi-a pierdut toți banii. Ea își are originea de asemenea în vremurile cînd toate calculele băneşti se efectuau cu ajutorul abacei, a mesei de numărătoare sau a băncii cu ajutorul **bobilor**, care înlocuiau bilele de pe abac. „Unul numără cu ajutorul pietricelelor, iar altul — cu al bobilor", — citim în cartea lui Campanella „Cetatea Soarelui" (1602). Omul ce își pierdea banii rămînea numai cu bobii, care exprimau suma pierderii lui, — de aici și expresia respectivă.

CURIOZITĂŢI ARITMETICE:

$$100 = \begin{cases} 12+3-4+5+67+8+9 \\ 12-3-4+5-6+7+89 \\ 123+4-5+67-89 \end{cases}$$



CAPITOLUL III

PUŢINĂ ISTORIE

„ÎMPĂRŢIREA-I TREABĂ GREA"

Puţini îşi dau seama că metodele de astăzi folosite pentru efectuarea operaţiilor aritmetice n-au fost totdeauna chiar atît de simple şi comode, şi nu au dus direct şi rapid la rezultatul căutat.

Strămoşii noştri foloseau metode mult mai greoaie şi mai încete. Dacă un elev din sec. al XX-lea ar putea să se transporte cu patru sau chiar numai cu trei secole înapoi, el i-ar uimi pe înaintaşi prin rapiditatea şi corectitudinea calculelor sale aritmetice. I s-ar fi dus vestea prin şcolile şi mînăstirile învecinate, întunecînd gloria celor mai abili calculatori din acea epocă, și din toate colțurile ar fi venit oameni pentru a învăța metodele de calcul ale marelui maestru nou apărut.

În vechime erau deosebit de complicate și grele operațiile de înmulțire și mai ales cele de împărțire. „Înmulțirea e chinul meu, iar cu împărțirea e curată nenorocire", — se spunea în vechime. Pe atunci nu existau încă metode unice elaborate și confirmate de practică pentru fiecare operație. Dimpotrivă, erau în vigoare, simultan, aproape o duzină de metode diferite de înmulțire și împărțire, metode foarte încurcate, pe care nu reușea să le memoreze un om cu aptitudini mediocre. Fiecare profesor care învăța pe alții să socotească își apăra metoda favorită, fiecare „magistru al împărțirii" (existau astfel de specialiști) lăuda o metodă proprie de efectuare a acestei operații.

În cartea lui V. V. Belliustin „Cum au ajuns oamenii pînă la aritmetica actuală" (1914) sînt expuse 27 de metode de înmulțire. Autorul menționează: „Este foarte posibil că mai există și altele (metode), păstrate în ascunzătorile depozitelor de cărți, risipite în lucrări numeroase, mai ales în manuscrise". Și toate aceste metode — „în șah", „prin îndoire", „pe părți sau rupt", „în cruciulițe", „în rețea", „cu spatele în față", „în romb", „în triunghi", „în cupe", „în diamant" etc.[1], precum și toate metodele de împărțire, care purtau și ele denumiri destul de curioase, se întreceau în ce privește complexitatea și greutatea folosirii. Ele se învățau cu mare greutate și numai după o practică îndelungată. Pentru însușirea unei înmulțiri și împărțiri rapide și corecte a numerelor formate din mai multe cifre se considera necesar un talent înnăscut, aptitudini deosebite; se credea că oamenii de rînd nu pot să-și însușească această înțelepciune. „Împărțirea-i treabă grea" (dura cosa e la partita) — spunea o veche zicală italiană; ea era într-adevăr o treabă grea dacă se luau în considerație metodele obositoare, folosite pe atunci pentru efectuarea a-

[1] Exemplele de înmulțire enumerate mai sus sînt indicate în vechea „aritmetică" a lui Niccolo Tartaglia. Metoda actuală de înmulțire este descrisă acolo sub denumirea de metodă „în șah".

cestor operaţii. Unele metode purtau cîteodată denumiri destul de jucăuşe, sub o denumire hazlie se ascundeau un şir de operaţii lungi şi încurcate. În sec. XVI, cea mai scurtă şi cea mai comodă era împărţirea „în barcă sau galeră". Renumitul matematician italian din acele

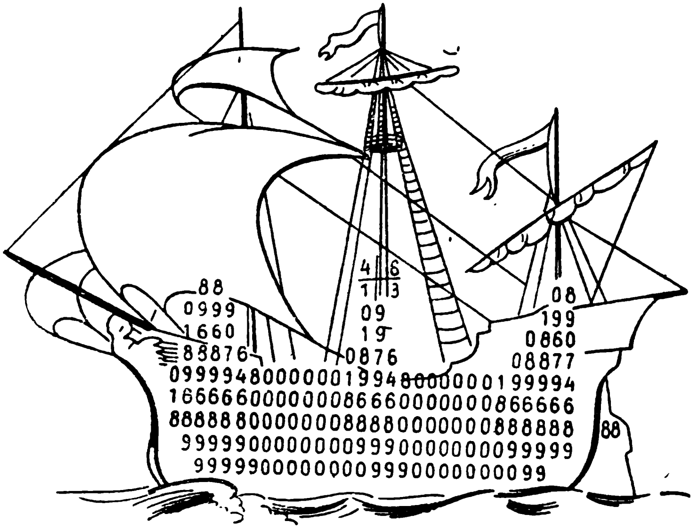


Fig. 22 — Împărţirea numerelor după vechea metodă a „galerei". „Figura formează din numere o galeră cu proră şi pupă, catarg, vele şi lopeţi", — scria matematicianul Tartaglia în sec. XVI.

timpuri, Niccolo Tartaglia, scria în cuprinzătorul său manual de aritmetică următoarele:

„Cea de-a doua metodă a împărţirii se numeşte la Veneţia[1] b a r c ă sau g a l e r ă, datorită unei oarecare asemănări a figurii obţinute (fig. 22), la îm-

[1] În sec. XIV—XVI Veneţia şi cîteva alte state din Italia făceau comerţ maritim pe scară largă; în aceste ţări metodele de calcul au fost elaborate în scopuri comerciale, mai înainte decît în altele. Cele mai bune lucrări de aritmetică au apărut în Veneţia. Mulţi termeni italieni din aritmetica comercială s-au păstrat pînă în prezent. Vechiul manual de matematică rusesc cuprinde toate capitolele matematicii cunoscute în acea epocă (inclusiv cunoştinţe de astronomie maritimă). El reprezintă una din

părţirea unor numere — cu o barcă, iar a altora — cu galera; uneori se obţine o galeră utilată cu toate cele necesare, ea este formată din numere aşezate astfel încît se disting pupa şi prova, catargul, pînzele, şi vîslele“.

Fig. 23 — Vinieta din „Aritmetica“ lui Magniţki (ed. 1703). În figură este reprezentat „Templul Înţelepciunii“. Înţelepciunea stă pe tron, iar pe trepte sînt indicate operaţiile aritmetice. Pe coloane sînt înscrise denumirile fiinţelor în care îşi găseşte aritmetica aplicarea: geometria, stereometria, astronomia, optica (cunoştinţe asimilate prin „străduinţă“), mercatoria (adică cartografia), geografia, fortificaţia, arhitectura (cunoştinţe obţinute prin „învăţătură“).

Este interesant să recunoşti acest lucru: imediat îţi imaginezi că pluteşti pe o mare de cifre cu galera artimetică cu pînze. Şi, deşi acest matematician reco-

---

cele două cărţi pe care Lomonosov le-a denumit „porţile ştiinţei sale“. Titlul ei amănunţit este următorul:

„Aritmetica, adică ştiinţa numerelor, la porunca ţarului Petru Alexeevici în marele oraş Moscova, pentru uzul tinerilor ruşi iubitori de înţelepciune şi al celorlalţi oameni de orice rang şi vîrstă, a fost tipărită în anul 1703 de la naşterea cuvîntului lui D-zeu“.

mandă metoda respectivă ca „cea mai elegantă, cea mai ușoară, cea mai sigură, cea mai uzuală și cea mai generală din cele existente, utilă pentru împărțirea tuturor numerelor“, eu nu mă încumet s-o expun aici, temîndu-mă că însăși cel mai răbdător dintre dumneavoastră va închide cartea, refuzînd să citească mai departe. Cu toate acestea, deși o metodă obositoare, era cea mai bună din acea epocă. În Rusia ea a fost folosită pînă la mijlocul secolului al XVIII-lea în „Aritmetica“ lui Leontie Magnițki, fiind descrisă printre cele șase metode propuse acolo (din care nici una nu se aseamănă cu cea actuală) și recomandată în mod special de autor; pe parcursul întregii sale cărți voluminoase — 640 de pagini de format mare — Magnițki utilizează exclusiv „metoda galerei“, fără a folosi însă această denumire.

În continuare vom prezenta cititorului această „galeră“ numerică, folosind un exemplu din cartea lui Tartaglia, pomenită mai sus:

```
                    4|6
         88         1|3        08
       0999         09        199
       1660         19       0860
      88876       0876      08877

           0999948000000199480000000199994
           1666660000000866600000000866666
deîmpărțitul—8888880000000888800000000888888
                                          (88–cîtul)
împărțitorul¹ — 9999900000000999000000000099999
                9999900000000999000000000099
```

Ajungînd aici după un calcul atît de greu, strămoșii noștri considerau ca absolut necesară verificarea acestui rezultat obținut cu sudoarea frunții. Desigur, asemenea metode greoaie trezeau neîncrederea față de rezultatele lor. Pe o cale lungă și întortocheată este mai ușor să te rătăcești, decît pe calea dreaptă a metodelor contemporane. Iată cum a apărut vechiul obicei de a

[1] Ultimii doi de 9 au fost adăugați la împărțitor în procesul împărțirii.

v e r i f i c a fiecare operaţie aritmetică efectuată— o regulă bună pe care ar trebui s-o respectăm şi noi.

Metoda de verificare preferată era aşa-numita „metodă a lui nouă“. Dat fiind eleganţa ei este descrisă adesea şi în unele manuale contemporane de aritmetică.

Verificarea cu nouă se bazează pe „regula restului“ care spune: restul de la împărţirea unei sume cu un număr oarecare este egal cu suma resturilor de la împărţirea fiecărui termen cu acelaşi număr. Tot astfel, restul produsului este egal cu produsul dintre resturile factorilor. Pe de altă parte se ştie[1] că la împărţirea cu nouă a numărului se obţine acelaşi rest ca şi la împărţirea sumei cifrelor acestui număr cu nouă; de exemplu, dacă împărţim 758 la 9 obţinem rest 2 şi acelaşi lucru se întîmplă dacă împărţim $7 + 5 + 8$ la 9. Comparînd ambele proprietăţi arătate mai sus, ajungem la metoda de verificare cu 9, adică prin împărţirea cu 9. Pentru a arăta în ce constă această metodă e suficient un singur exemplu.

Se cere să se verifice rezultatul a d u n ă r i i din următoarea coloană:

	38932 ...	7
	1096 ...	7
+	4710043 ...	1
	589106 ...	2
	5339177 ...	8

Adunăm în minte cifrele fiecărui termen al adunării şi dacă obţinem numere din două cifre le adunăm din nou (lucrul acesta se face în însuşi procesul adunării numerelor) pînă cînd obţinem un număr format dintr-o singură cifră. Aceste rezultate (resturi de la împărţirea cu 9) le scriem, aşa cum s-a arătat în exemplu, alături de termenul respectiv al adunării. Adunînd toate resturile ($7+7+1+2=17$; $1+7=8$) obţinem 8. Tot 8 trebuie să fie suma cifrelor rezultatului (5 339 177), dacă operaţia a fost corect efectuată; într-adevăr: $5+3+3+$ $+9+1+7+7=35$, iar $3+5=8$.

[1] Se clarifică la deducerea regulii de divizibilitate prin 9.

Verificarea s c ă d e r i i se efectuează la fel, dacă se consideră descăzutul drept sumă, iar scăzătorul şi diferenţa drept termeni ai adunării. De exemplu:

$$\begin{array}{r l c r} & 6913 \ldots & & 1 \\ - & 2587 \ldots & & 4 \\ \hline & 4326 \ldots & & 6 \end{array}$$

$4+6=10$; $\qquad 1+0=1$

Această metodă este deosebit de comodă pentru verificarea înmulţirii după cum se vede din următorul exemplu:

$$\begin{array}{r l c r} \times & 8713 \ldots & \times & 1 \\ & 264 \ldots & & 3 \\ \hline & 34852 & & 3 \\ & 52278 & & \\ & 17426 & & \\ \hline & 2300232 \ldots & & 3 \end{array}$$

Dacă la o astfel de verificare a înmulţirii se va descoperi că rezultatul e greşit, pentru a determina unde anume se ascunde greşeala se poate verifica prin metoda lui nouă fiecare produs parţial în parte; iar dacă aici totul este corect, atunci rămîne să se verifice a d u n a r e a produselor parţiale.

Cum putem verifica prin această metodă împărţirea? Dacă avem un caz de împărţire exactă, atunci deîmpărţitul este produsul dintre împărţitor şi cît. Cînd însă împărţirea este cu rest, ne folosim de faptul că deîmpărţitul = împărţitorul × cîtul + restul.

De exemplu:

$$\underbrace{16201387}_{1} : \underbrace{4457}_{2} = \underbrace{3635}_{8}; \text{ rest } \underbrace{192}_{3}$$

suma cifrelor:

$2\times8+3=19 \qquad 1+9=10; \qquad 1+0=1$

Redăm din „Aritmetica“ lui Magniţki o aşezare comodă propusă pentru verificarea cu 9:

P e n t r u î n m u l ţ i r e:

```
 365        5
  24    3 ——|—— 3   „Este conform, deci este bine“.
————        |
1460        6
 730       ——
————       30
8760
```

P e n t r u î m p ă r ţ i r e:

```
                  cîtul
                    8
deîmpărţitul    1 ——|—— 1    „Este conform, împărţirea este
împărţitorul        2         bună“.
                ——————————
                   16

restul total        3
                ————|————
                    1
```

Este neîndoielnic faptul că o asemenea verificare a operaţiilor este ideală în ce priveşte rapiditatea şi comoditatea în calcul. Nu se poate spune acelaşi lucru şi despre siguranţă: greşeala poate totuşi să se strecoare. Într-adevăr, o aceeaşi sumă a cifrelor o pot avea numere diferite; nu numai inversarea cifrelor, dar uneori chiar şi înlocuirea unor cifre cu altele rămîne nedescoperită la verificare. Nedescoperite vor fi şi nouăle, precum şi zerourile de prisos, pentru că ele nu influenţează suma cifrelor. De aceea ar fi fost greşit să ne bazăm întru-totul pe un asemenea mod de verificare. Strămoşii noştri îşi dădeau seama de acest lucru şi nu se limitau numai la verificarea prin metoda lui nouă; ei efectuau o verificare suplimentară, de cele mai multe ori cu ajutorul lui ş a p t e. Această metodă se bazează pe aceeaşi „regulă a resturilor“, dar nu este atît de comodă ca metoda lui nouă, pentru că împărţirea cu şapte trebuie efectuată complet pentru a găsi resturile (şi în această situaţie sînt posibile greşeli chiar în cursul verificării).

Cele două verificări — cu nouă şi cu şapte — dau posibilitatea unui control mai sigur: ceea ce scapă unuia va fi descoperit în cursul celuilalt. Greşeala nu va fi descoperită numai în cazul cînd diferenţa dintre rezultatul real şi cel obţinut este multiplul numărului $7\times9=63$. Cum această întîmplare este totuşi posibilă, nici verificarea dublă nu dă siguranţă deplină că rezultatul este corect.

De altfel, pentru calculele obişnuite, unde greşeala nu poate fi mai mare decît una sau două unităţi, ne putem limita numai la verificarea cu 9. Verificarea suplimentară cu 7 este prea greoaie, şi nu ne poate asigura un control bun.

Dacă, cu toate acestea, efectuînd un calcul de mare importanţă, veţi dori să faceţi pentru siguranţă o verificare dublă, atunci în locul împărţitorului 7 este mai bine să folosiţi împărţitorul 11. Această verificare poate fi mult simplificată dacă se utilizează următoarea regulă de divizibilitate prin 11: numărul dat se împarte de la dreapta spre stînga în grupuri, cîte două cifre în fiecare grup (grupul din extrema stîngă poate să cuprindă o singură cifră); grupurile se adună şi suma obţinută va avea, la împărţirea cu 11, acelaşi rest ca şi numărul dat.

Vom explica cele afirmate cu ajutorul unui exemplu.

Se cere să se găsească restul de la împărţirea numărului 24 716 cu 11.

Împărţim numărul în grupuri şi le adunăm:

$$2+47+16=65$$

Deoarece 65 împărţit cu 11 dă rest 10, şi numărul 24 716, la împărţirea lui cu 11 trebuie să dea acelaşi rest, ceea ce se întîmplă într-adevăr[1].

Propun această metodă pentru că ea dă simultan numărul care la împărţirea cu 9 are acelaşi rest ca şi numărul dat. Astfel noi avem posibilitatea de a efectua verificarea concomitent cu ajutorul a doi divizori: 9 şi 11. Acestei verificări poate să-i scape numai o greşeală multiplă de 99, adică o greşeală foarte puţin probabilă.

---

[1] Motivarea acestei metode este dată în cartea „Matematica vie" de I. Perelman.

OARE NOI ÎNMULŢIM BINE?

Metodele de înmulţire vechi erau greoaie şi incomode; se pune însă întrebarea: metoda pe care o folosim astăzi este chiar atît de bună încît nu i se mai pot aduce nici un fel de îmbunătăţiri. Nu, nici metoda noastră nu este perfectă; pot fi găsite metode de calcul mai rapide şi mai sigure. Din cîteva îmbunătăţiri ce pot fi propuse vom arăta deocamdată numai una, care nu accelerează efectuarea operaţiei, ci îmbunătăţeşte siguranţa ei. Ea constă în aceea că, atunci cînd avem un înmulţitor cu mai multe cifre, înmulţirea nu începe cu ultima cifră a înmulţitorului, ci cu p r i m a c i f r ă . Înmulţirea efectuată la pag. 63 va deveni:

$$\begin{array}{r} \times\ 8713 \\ 264 \\ \hline 17426 \\ 52278 \\ 34852 \\ \hline 2300232 \end{array}$$

După cum vedem, ultima cifră a fiecărui produs parţial se scrie sub cifra înmulţitorului cu care se face înmulţirea.

Avantajul unei asemenea aşezări constă în aceea că cifrele produselor parţiale, de care depind primele, cele mai de răspundere cifre ale rezultatului, se obţin la începutul operaţiei cînd atenţia nu este încă obosită şi, prin urmare, probabilitatea de a face o greşeală este mai mică (afară de aceasta, metoda simplifică folosirea aşa-numitei înmulţiri „prescurtate“, despre care nu vom vorbi aici).

METODA DE ÎNMULŢIRE „RUSĂ“

Nu puteţi efectua înmulţirea unor numere formate din mai multe cifre — chiar nici din două cifre, — dacă nu ţineţi minte toate rezultatele obţinute prin înmulțirea numerelor de o cifră, adică ceea ce se numește tabla înmulțirii. În „Aritmetica“ lui Magnițki, despre care am mai vorbit, necesitatea cunoașterii tablei înmulțirii este cîntată în versuri — atît de stranii pentru urechea contemporanului — ca:

Acel ce nu reține
tabelele-nmulțirii,
aceluia, vezi bine,
că nu-i va fi ușor
să se descurce-n știință
fără ajutorul lor.
Cu sîrguință-nvață,
că n-o să-ți prindă
rău tabelele de față.

Autorul acestor versuri probabil nu știa sau a scăpat din vedere faptul că există o metodă de a înmulți numerele și fără cunoașterea tablei înmulțirii. Metoda, care nu aduce cu metodele școlare de astăzi, se folosea în calculele vechi rusești și a fost moștenită din timpurile cele mai îndepărtate. Esența constă în aceea că înmulțirea oricăror două numere se reduce la un șir de împărțiri succesive ale unuia din numere cu doi și dublarea simultană a celuilalt număr. Iată, de pildă:

$$\begin{array}{r} 32\times 13 \\ 16\times 26 \\ 8\times 52 \\ 4\times 104 \\ 2\times 208 \\ 1\times 416 \end{array}$$

Înjumătățirea continuă pînă cînd se obține la cît 1, dublîndu-se totodată cel de-al doilea număr. Ultimul număr dublat reprezintă tocmai rezultatul căutat.

Nu este greu de înțeles pe ce se bazează această metodă. Produsul nu se schimbă dacă un factor se împarte cu 2, iar celălalt se înmulțește cu 2. De aceea este clar că în rezultatul unei repetări multiple a acestei operații se va obține produsul căutat:

$$32\times 13=1\times 416$$

Cum trebuie să procedăm cînd avem de-a face cu un număr impar?

Metoda populară învinge uşor această greutate. Regula spune că în cazul numărului impar trebuie să i se scadă o unitate şi restul să se împartă cu doi; în schimb, la ultimul număr din coloana dreaptă va trebui să se a d a u g e toate acele numere din coloană care stau în dreptul numerelor i m p a r e din coloana stîngă; suma va fi tocmai produsul căutat. Practic aceasta se face astfel: toate rîndurile cu numere pare, din coloana stîngă, se şterg; rămîn numai acelea care conţin în stînga un număr impar. Dăm următorul exemplu (steluţele indică că rîndul respectiv trebuie şters):

$$\begin{array}{r} 19\times 17 \\ 9\times 34 \\ 4\times 68^{*} \\ 2\times 136^{*} \\ 1\times 272 \end{array}$$

Adunînd numerele care nu au fost şterse, obţinem rezultatul perfect corect: $17+34+272=323$

Pe ce se bazează această metodă?

Justeţea metodei devine clară dacă vom ţine seama că:

$$19\times 17=(18+1)\times 17=18\times 17+17$$
$$9\times 34=(8+1)\times 34=8\times 34+34 \text{ etc.}$$

Se înţelege că numerele 17, 34 etc., pierdute în timpul împărţirii în două a numărului impar, trebuie adăugate la rezultatul ultimei înmulţiri pentru a obţine produsul respectiv.

DIN ŢARA PIRAMIDELOR

Este foarte probabil că metoda descrisă mai sus ne-a venit dintr-o ţară îndepărtată a antichităţii — Egipt. Noi ştim foarte puţin despre modul de a efectua operaţiile aritmetice în ţara piramidelor. S-a păstrat însă un document interesant — un papirus în care au fost scrise exercițiile aritmetice ale unui elev din școala de hotarnici din Egiptul antic; acesta este așa-numitul „papirus al lui Rhind“, ce datează din perioada dintre anii 2 000 și 1 700 î.e.n.[1] și care este o copie a unui manuscris și mai vechi, scris de un oarecare Ahmes. Scribul[2] Ahmes, găsind „caietul de școlar“ al unui elev din această epocă îndepărtată, a reprodus cu grijă toate exercițiile aritmetice ale viitorului hotarnic — împreună cu greșelile și corecturile profesorului — și a dat copiei sale un titlu fastuos, care a ajuns pînă la noi în următoarea formă incompletă:

„Indicație cum pot fi obținute cunoștințe asupra tuturor lucrurilor întunecate... tuturor tainelor ascunse în lucruri.

Întocmit în timpul regelui Egiptului de Sus și de Jos Ra-a-use, care dă viață, după modelul vechilor opere de pe timpul regelui Ra-en-mat de către scribul Ahmes“.

Papirusul lui Rhind se termină cu sfaturi foarte originale: „Prinde șerpii, șoarecii; smulge buruienele la timp; capătă țesături din belșug. Cere-i zeului Ra căldură, vînt și apă multă“.

Unul din papirusurile matematice egiptene este păstrat la Moscova, la Muzeul de arte „A.S. Pușkin“. Descifrarea acestui papirus a fost începută de academicianul B.A. Turaev în anul 1914 și terminată de academicianul V.V. Struve în anul 1927.

În papirusul lui Rhind — acest document interesant care are aproape 40 de veacuri și este o mărturie a unei antichități și mai îndepărtate — găsim patru

[1] Papirusul a fost găsit de egiptologul englez Henri Rhind. Desfășurat, are o lungime de 20 m și lățimea de 30 cm. E păstrat la Muzeul britanic din Londra.

[2] Scribii făceau parte din clasa a III-a a preoților egipteni; în competența lor intra „tot ce era legat de construcția și proprietatea imobilă a templului. Preocuparea lor principală o formau științele matematice, astronomice și geografice (V. Bobînin).

exemple de înmulţire, efectuate după o metodă care amintește foarte mult de metoda rusă populară. Iată aceste exemple (punctele din fața numerelor indică numărul unităţilor înmulţitorului; cu semnul + s-au notat numerele care urmează să fie adunate):

(8×8)	(9×9)
.8	.9 +
..16	..18
....32	36
::::64	::::72+
	Total.....81

(8×365)	(7×2801)
.365	.2801 +
..730	..5602 +
....1460	....11204 +
::::2920	Total...19607

Se vede că încă cu cîteva milenii înaintea noastră egiptenii au folosit o metodă de înmulţire foarte asemănătoare cu metoda rusă populară (fig. 24); această me-

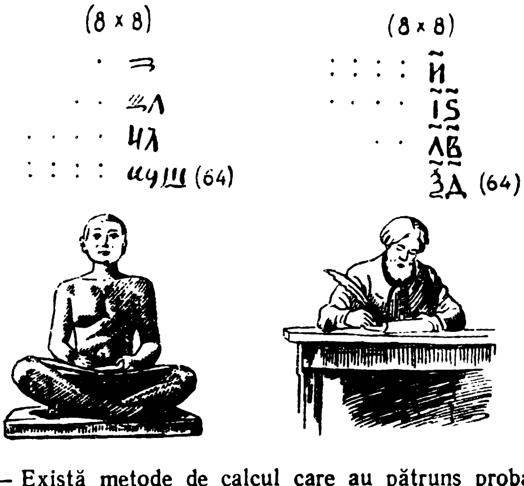


Fig. 24 — Există metode de calcul care au pătruns probabil în Rusia din Egiptul antic.

todă a ajuns pe căi necunoscute din antica țară a piramidelor în epoca contemporană. Dacă i s-ar fi propus, de exemplu, unui locuitor din pămîntul faraonilor să înmulțească 19×17, el ar fi efectuat această operație în modul următor: ar fi scris o serie de dublări ale numărului 17:

1	17+
2	34+
4	68
8	136
16	272+

și apoi ar fi adunat acele numere care sînt notate cu semnul +, adică $17+34+272$. El ar fi obținut, desigur, un rezultat corect: $17+(2\times 17)+(16\times 17)=19\times 17$. În esență, această metodă este foarte apropiată de metoda rusă populară (înlocuirea înmulțirii printr-o serie de dublări succesive).

Este greu de spus dacă numai țăranii ruși foloseau această metodă veche de înmulțire; autorii englezi o numesc însă „metodă țărănească rusă".

Ne-ar interesa foarte mult să primim de la cititori informații cu privire la faptul dacă în prezent se folosește undeva această metodă veche de înmulțire, care are un trecut atît de îndelungat și original.

În general ar trebui să acordăm o mare atenție matematicii populare: să căutăm să înțelegem metodele de calcul și măsurătoare folosite de popor, să culegem și să notăm aceste monumente ale creației matematice populare ajunse pînă azi din adîncurile vremurilor îndepărtate.

Lucrul acesta a fost arătat încă de mult de V.V. Bobînin, care s-a ocupat de istoria matematicii și a propus chiar un program scurt de culegere a monumentelor matematicii populare. Credem că nu va fi de prisos să dăm aici lista a ceea ce a crezut el că trebuie cules și notat:

1) numerația și calculul,
2) metode de măsurătoare și cîntărire,
3) informații în legătură cu geometria și expresia lor concretizată în construcții, îmbrăcăminte și podoabe,

4) metode de parcelare,

5) probleme populare,

6) zicători, ghicitori, în general, opere din folclorul popular care au vreo legătură cu cunoştinţele de matematică;

7) monumentele matematicii populare aflate în manuscrise, muzee, colecţii etc. sau găsite cu prilejul săpăturilor făcute în vechile cimitire, cetăţi etc.

În continuare dau o mică informaţie asupra faptului cînd au apărut pentru prima dată semnele operaţiilor aritmetice, atît de uzuale astăzi, notàrea fracţiilor, a puterii etc.:

$+$ şi $-$ în manuscrisele lui Leonardo da Vinci (1452—1519);

$\times$ în lucrarea lui Utred (1631);

. şi : în lucrarea lui Leibnitz (1646—1716);

$\frac{a}{b}$ în lucrarea lui Fibonacci (1202);

a^n în lucrarea lui Chuget (1484);

$=$ în lucrarea lui Recorde (1557);

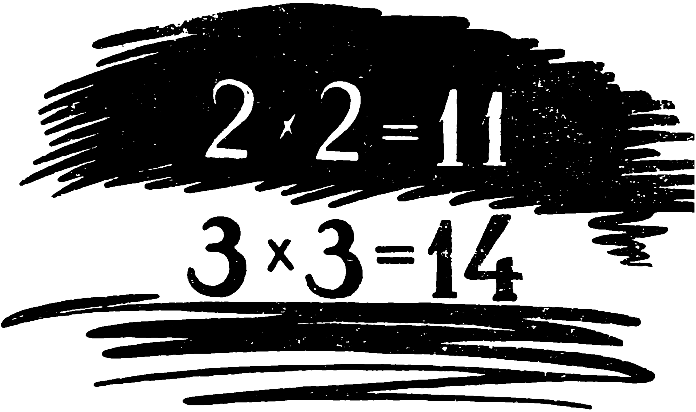
$<$ şi $>$ în lucrarea lui Harriot (1631);

() şi [ ] în lucrarea lui Girard (1629).

Pe cel care doreşte să cunoască mai amănunţit istoria aritmeticii îl sfătuiesc să citească cartea lui V. Belliustin „Cum au ajuns oamenii treptat pînă la aritmetica actuală. Studii accesibile pentru amatorii de aritmetică“ (1914).

CURIOZITĂŢI ARITMETICE:

$$100 = \begin{cases} 123+45-67+8-9 \\ 123-45-67+89 \\ (1+2-3-4)\cdot(5-6-7-8-9) \end{cases}$$



CAPITOLUL IV

SISTEMELE DE NUMERAŢIE NEZECIMALE

O AUTOBIOGRAFIE MISTERIOASĂ

Îmi voi permite să încep acest capitol cu o problemă pe care am prezentat-o cîndva pentru cititorii unui vechi jurnal foarte răspîndit[1], drept exemplu de „problemă pentru premiu". Iat-o:

Printre hîrtiile unui matematician a fost găsită autobiografia lui. Ea începea cu următoarele rînduri:

„Eu am terminat universitatea la vîrsta de 44 de ani. După un an, fiind un tînăr de 100 ani, m-am însurat cu o fată de 34 ani. Diferenţa neînsemnată de vîrstă dintre noi — de numai 11 ani — a contribuit la comunitatea noastră de interese şi idei. Peste cîţiva ani aveam deja

[1] „Priroda i lidi" (Ulterior problema a fost publicată în culegerea lui E. I. Ignatiev „În împărăţia isteţimii").

o mică familie cu 10 copii. Salariul meu era de 200 ruble, din care $^1/_{10}$ îi dădeam surorii mele, aşa încît noi, cu copiii, am trăit cu 130 ruble pe lună" etc.

Cum pot fi explicate contradicţiile curioase dintre numerele prezentate în acest fragment?

Rezolvarea problemei este dictată de însăşi denumirea acestui capitol: sistem de numeraţie nezecimal— iată singura cauză a contradicţiei aparente dintre numerele date mai sus. Sesizînd această idee nu este greu să ne dăm seama în ce anume sistem de numeraţie au fost reprezentate numerele găsite printre însemnările matematicianului. Secretul este trădat de fraza: „după un an (peste 44 ani), fiind un tînăr de 100 ani..." Dacă prin adăugarea unei unităţi numărul 44 se transformă în 100, aceasta înseamnă că cifra 4 este cea m a i m a r e în acest sistem (aşa cum este 9 în sistemul zecimal) şi prin urmare baza sistemului este 5. Fantezistului matematician i-a venit ideea de a scrie toate datele biografiei sale în s i s t e m u l d e n u m e r a ţ i e c i n c i n a l, adică într-un sistem în care unitatea de ordin superior nu este de 10, ci de 5 ori mai mare decît unitatea de ordin inferior. În primul loc din dreapta sînt aşezate unităţile simple (care nu depăşesc 4), în locul al doilea nu sînt zecile, ci cincile; pe locul al treilea nu se află sutele, ci „douăzeci şi cincile" etc. De aceea numărul „44" dat în textul de mai sus nu înseamnă $4\times10+4$, ca în sistemul zecimal, ci $4\times5+4$, adică douăzeci şi patru. Tot astfel numărul „100" din autobiografie indică o unitate de ordinul al treilea în sistemul cincinal, adică 25. Celelalte numere înseamnă respectiv [1]:

$$„34“=3\times5+4=19$$
$$„11“=5+1=6$$
$$„200“=2\times25=50$$
$$„10“=5$$
$$„\frac{1}{10}“=\frac{1}{5}$$
$$„130“=25+3\times5=40$$

---

[1] Aici şi în cele ce urmează se pun între ghilimele numerele care nu sînt scrise în sistemul de numeraţie zecimal.

Restabilind adevăratul sens al numerelor din notiţă, vedem că în ea nu există nici un fel de contradicţii:

„Eu am terminat universitatea la vîrsta de 24 ani. După un an m-am însurat, fiind tînăr de 25 ani, cu o fată de 19 ani. Diferenţa mică de vîrstă dintre noi — de numai 6 ani — a contribuit la comunitatea noastră de interese şi idei. Peste cîţiva ani aveam deja o mică familie cu 5 copii. Salariul meu lunar era de 50 ruble, din care 1/5 îi dădeam surorii mele, aşa încît noi, cu copiii, am trăit cu 40 ruble pe lună“.

Este oare greu să reprezentăm numerele în alte sisteme de numeraţie? Nicidecum. Presupunem că doriţi să reprezentaţi numărul 119 în sistemul cincinal. Împărţiţi 119 cu 5 pentru a afla cîte unităţi de ordinul întîi are acest număr:

$$119 : 5 = 23, \text{ rest } 4$$

Prin urmare, numărul unităţilor simple va fi 4. Mai departe, cele 23 de cinci nu pot sta toate în ordinul al doilea; cifra superioară în sistemul cincinal este 4, și nu pot exista mai mult de 4 unităţi în nici un ordin. De aceea împărţim 23 cu 5:

$$23 : 5 = 4, \text{ rest } 3$$

Aceasta arată că în ordinul al doilea („al cincilor“) se va afla cifra 3, iar ordinul al treilea („al douăzeci și cincilor“) 4.

Astfel, $119 = 4 \times 25 + 3 \times 5 + 4$ sau, în sistemul cincinal, „434“.

Pentru comoditate, operaţiile de mai sus se orînduiesc în modul următor:

$$\begin{array}{r|c|c} 119 & 5 & \\ \hline \mathit{4} & 23 & 5 \\ \hline & \mathit{3} & \mathit{4} \end{array}$$

Cifrele notate cursiv (putem să le şi subliniem cînd le scriem) se scriu de la dreapta spre stînga şi se obţine imediat reprezentarea căutată a numărului într-alt sistem.

Dăm încă cîteva exemple:

Exemplul 1. Să se reprezinte 47 în sistemul cu baza 3.

Rezolvare:

47	3		
2	15	3	
	0	5	3
		2	*1*

Răspuns: „1202". Verificarea: $1 \times 27 + 2 \times 9 + 0 \times 3 + 2 = 47$

Exemplul 2. Să se reprezinte numărul 200 în sistemul septenal.

Rezolvare:

200	7	
60	28	7
4	*0*	*4*

Răspuns: „404". Verificarea: $4 \times 49 + 0 \times 7 + 4 = 200$

Exemplul 3. Să se reprezinte numărul 163 în sistemul cu baza doisprezece.

Rezolvare:

163	12	
43	13	12
7	*1*	*1*

Răspuns: „117". Verificarea: $1 \times 144 + 1 \times 12 + 7 = 163$.

Acum nu-i va fi greu cititorului să reprezinte orice număr în orice sistem de numerație. Singura piedică care poate interveni este datorită faptului că în unele cazuri vor fi insuficiente simbolurile pentru cifre. Într-adevăr, la reprezentarea numărului în sistemele cu baza mai mare decît zece (de exemplu în sistemul cu baza 12) apare necesitatea de a avea simboluri — cifre pentru „zece" și „unsprezece". Nu este greu de învins această piedică, alegînd pentru cifrele noi oarecare semne convenționale sau litere, fie chiar, de exemplu, literele k și l care în alfabetul rusesc ocupă locul al zecelea şi al unsprezecelea. Astfel numărul 1 579 în sistemul cu baza 12 se va reprezenta în modul următor.:

```
1579 | 12
12   |------
---- | 131   12
 37  |------------
---- |  11   10
  19
 ----
   7
```

Răspuns: „(10) (11) 7“, sau KL7.
Verificarea: $10 \times 144 + 11 \times 12 + 7 = 1\,579$

P r o b l e m a 1. Să se exprime numărul 1 926 în sistemul cu baza 12[1].

P r o b l e m a 2. Să se exprime numărul 273 în sistemul cu baza 12.

CEL MAI SIMPLU SISTEM DE NUMERAŢIE

Nu este greu să ne dăm seama că în fiecare sistem cifra cea mai mare care poate fi necesară este egală cu baza acestui sistem minus 1. De exemplu, în sistemul zecimal, cifra cea mai mare este 9, în cel şesenal —5, în cel cu baza 3 este 2, în sistemul cu baza 15 va fi 14 etc.

Sistemul de numeraţie cel mai simplu este, desigur, acela pentru care sînt necesare cele mai puţine cifre. În sistemul zecimal sînt necesare 10 cifre (considerîndu-l şi pe zero), în cel cincinal — 5 cifre, în sistemul cu baza 3—3 cifre (1,2 şi 0), în cel binar — numai două cifre (1 şi 0). Există oare un sistem cu baza 1? Desigur: acesta este sistemul în care unităţile de ordin superior sînt o dată mai mari decît unităţile de ordin inferior, adică sînt egale; cu alte cuvinte, se poate numi sistem cu baza 1 sistemul în care unităţile din toate ordinele au aceeaşi valoare. Acesta este sistemul „cel mai pri-

[1] Vezi răspunsul de la sfîrşitul cărţii.

mitiv"; el a fost folosit de omul primitiv care făcea pe copaci atîtea semne cîte obiecte număra. Între acest sistem şi toate celelalte sisteme de numeraţie există însă o deosebire foarte mare: el este lipsit de avantajul principal pe care-l oferă numeraţia noastră — de aşa-numita valoare poziţională a cifrelor (în funcţie de locul pe care-l ocupă). Într-adevăr, în sistemul cu baza 1, semnul care ocupă locul 3 sau 5 are aceeaşi valoare ca şi cel de pe locul 1. În acelaşi timp, în sistemul binar unitatea ce stă pe locul 3 (numărînd din dreapta) este deja de 4 ori (2×2) mai mare decît aceea care ocupă locul 1, iar cea din locul 5 este de 16 ori mai mare ($2 \times 2 \times 2 \times 2$). Pentru reprezentarea unui număr oarecare în sistemul cu baza 1 este nevoie de atîtea semne cîte obiecte sînt numărate. Pentru a scrie 100 de obiecte sînt necesare o sută de semne. În sistemul binar însă sînt necesare numai 7 semne („1100100"), iar în cel cincinal numai 3 („400").

Iată de ce sistemul cu baza 1, de fapt, nici nu poate fi numit un „sistem"; el nu poate fi pus alături de celelalte sisteme, deoarece se deosebeşte de ele în mod principial — nu dă nici o economie în ce priveşte reprezentarea numerelor. Dacă nu ţinem seama de acest sistem, atunci sistemul de numeraţie cel mai simplu trebuie considerat sistemul binar, care foloseşte numai două cifre: 1 şi 0. Cu ajutorul unităţii şi al zeroului poate fi reprezentată mulţimea infinită a numerelor! Acest sistem este însă puţin comod pentru numeraţia verbală şi scrisă: se obţin numere prea lungi [1]. Sistemul binar însă s-a dovedit foarte util într-o serie de studii teoretice. În ultimul timp rolul sistemului binar a crescut deosebit de mult, pentru că el stă la baza efectuării calculelor cu maşinile electronice de calcul. El are cîteva particularităţi interesante, care sînt proprii numai acestui sistem; de altfel, aceste particularităţi pot fi folosite într-o serie de scamatorii matematice, despre care vom vorbi amănunţit într-un capitol viitor.

---

[1] În schimb, după cum vom vedea mai departe, pentru acest sistem, se simplifică la extrem tabla adunării şi tabla înmulţirii.

Noi ne-am obişnuit atît de mult cu operaţiile aritmetice, încît le efectuăm în mod mecanic, fără să ne mai gîndim aproape la ceea ce facem. Dar aceleaşi operaţii ne cer un efort destul de mare, dacă vom încerca să le aplicăm la numerele care nu sînt scrise în sistemul zecimal. Să încercăm, de exemplu, să efectuăm adunarea următoarelor două numere scrise în sistemul c i n c i n a l:

$$+\begin{array}{r}„4203“\\ „2132“\\ \hline\end{array}\quad \text{(în sistem cincinal)}$$

Adunăm începînd cu unităţile, adică din dreapta spre stînga: 3 + 2 este egal cu cinci; dar noi nu putem scrie 5, pentru că o astfel de cifră nu există în sistemul cincinal: 5 este deja o unitate de ordin superior. Prin urmare suma nu conţine de loc unităţi; scriem zero, iar 5, adică unitatea de ordin imediat superior o ţinem minte. Mai departe: 0 + 3 = 3 plus unitatea pe care am reţinut-o dă în total 4 unităţi de ordinul al doilea. Pentru ordinul al treilea obţinem 2 + 1 = 3. În ordinul al patrulea 4 + 2 = 6, adică 5 + 1; scriem 1, iar cinci, unitate de ordin superior, o scriem mai la stînga. Suma căutată = „11340“.

$$+\begin{array}{r}„4203“\\ „2132“\\ \hline „11340“\end{array}\quad \text{(în sistem cincinal)}$$

Îl lăsăm pe cititor să verifice această adunare, transformînd în prealabil numerele între ghilimele în numere scrise în sistem zecimal.

În mod asemănător se efectuează şi celelalte operaţii aritmetice. Dăm mai jos, pentru exerciţiu, cîteva probleme[1] al căror număr cititorul îl poate mări şi singur:

	Problema 3	Problema 4	Problema 5
În sistem cincinal	$-\begin{array}{r}„2143“\\ „334“\\ \hline\end{array}$	$\times\begin{array}{r}„213“\\ „3“\\ \hline\end{array}$	$\times\begin{array}{r}„42“\\ „31“\\ \hline\end{array}$

[1] Răspunsul la probleme este dat la sfîrşitul cărţii.

	Problemele 6 şi 7		Problemele 8 şi 9
În sistem cu baza 3	„212“ + „120“ „201“ ———	× „122“ „20“ ———	„220“ : „2“ = „201“ : „12“ =

La efectuarea acestor operaţii reprezentăm mai întîi în minte numerele scrise în sistemul zecimal cu care sîntem obişnuiţi; obţinînd rezultatul, le reprezentăm din nou în sistemul nezecimal cerut de problemă. Putem proceda şi altfel: întocmim o „tablă a adunării“ şi o „tablă a înmulţirii“ în aceleaşi sisteme în care ne sînt date numerele şi ne folosim direct de aceste table.

De exemplu, tabla adunării în sistem c i n c i n a l se prezintă astfel:

0	1	2	3	4
1	2	3	4	10
2	3	4	10	11
3	4	10	11	12
4	10	11	12	13

Cu ajutorul acestei table noi am fi putut aduna numerele „4203“ şi „2132“, scrise în sistemul cincinal, concentrîndu-ne mai puţin atenţia decît în metoda aplicată mai sus.

Se înţelege uşor că se simplifică şi operaţia de scădere.

Întocmim tabla înmulţirii („ lui Pitagora“) pentru sistemul c i n c i n a l:

1	2	3	4
2	4	11	13
3	11	14	22
4	13	22	31

Avînd acest tabel în fața ochilor putem ușura foarte mult operația de înmulțire (și împărțire) a numerelor în sistemul cincinal. De exemplu, la înmulțire:

$$\text{În sistem cincinal}\left\{\begin{array}{r} \text{„}213\text{“} \\ \times\quad \text{„}3\text{“} \\ \hline \text{„}1144\text{“} \end{array}\right.$$

raționăm astfel: 3 ori 3 „14“ (din tabel); scriem 4, ținem 1 minte. 1 înmulțit cu 3 dă 3, plus încă unu — scriem 4. 2 ori 3 = „11“; scriem 1 și mutăm 1 în stînga. Ca rezultat obținem „1144“.

Cu cît este mai mică baza sistemului, cu atît sînt mai mici și tablele adunării și înmulțirii respective. De exemplu, pentru sistemul cu baza 3, cele două table se prezintă astfel:

Tabla adunării pentru sistemul cu baza 3:

0	1	2
1	2	10
2	10	11

Tabla lui Pitagora pentru sistemul cu baza 3:

1	2
2	11

Ele pot fi ținute minte și folosite la efectuarea operațiilor. Tablele de adunare și de înmulțire cele mai mici se obțin pentru sistemul b i n a r:

Tabla adunării pentru sistemul binar:

0	1
1	10

Tabla înmulțirii pentru sistemul binar:

1×1=1

Cu ajutorul acestor „table“ simple pot fi efectuate în sistemul binar t o a t e c e l e p a t r u o p e r a ț i i! Cît privește înmulțirea în acest sistem, în esență ea parcă nici n-ar exista: doar a înmulți cu 1 înseamnă a lăsa numărul fără nici o schimbare; iar înmulțirea cu „10“, „100“, „1000“ (adică cu 2,4,8) se reduce la simpla adăugare în dreapta deînmulțitului a unui număr corespunzător de zerouri. Pentru efectuarea adunării trebuie să ţinem minte un singur lucru, şi anume că în sistemul binar $1 + 1 = 10$. Deci am avut dreptate cînd am numit sistemul binar cel mai simplu sistem din toate cele posibile. Lungimea numerelor din această aritmetică originală este compensată de simplitatea efectuării tuturor operaţiilor aritmetice.

Presupunem, de exemplu, că trebuie să înmulţim;

$$\text{În sistemul binar}\left\{\begin{array}{r}
\times\ \text{„1001011101“} \\
\text{„100101“} \\
\hline
\text{„1001011101“} \\
+\ \text{„1001011101“} \\
\text{„1001011101“} \\
\hline
\text{„10101101110001“}
\end{array}\right.$$

Efectuarea operaţiei se reduce la transcrierea numerelor date într-o anumită ordine; aceasta cere eforturi mintale mult mai mici decît înmulţirea aceloraşi numere în sistemul zecimal ($605 \times 37 = 22\,385$). Dacă am fi adoptat sistemul binar, atunci studiul calculelor scrise ar fi cerut un efort mintal mai mic (în schimb o cantitate maximă de hîrtie şi cerneală). În calculul oral însă aritmetica binară este mult inferioară celei zecimale, în ce priveşte efectuarea operaţiilor.

Dăm mai jos şi un model de î m p ă r ţ i r e, efectuată în sistemul de calcul binar:

$$\begin{array}{l}
10000010 : 111 = 10010 \\
\underline{\ 111} \\
\ 1001 \\
\underline{\ \ 111} \\
\ 100
\end{array}$$

În sistemul zecimal, obişnuit nouă, această operaţie s-ar fi prezentat astfel:

$$\begin{array}{l}
130 : 7 = 18 \\
\underline{\ 7} \\
\ 60 \\
\underline{\ 56} \\
\ 4
\end{array}$$

În ambele cazuri deîmpărțitul, împărțitorul, cîtul și restul sînt, în esență, egale, fiind diferite doar calculele intermediare.

PAR SAU IMPAR?

Fără a vedea numărul este greu, desigur, să ghicim dacă el este par sau impar. Dar să nu credeți că veți putea totdeauna să răspundeți la această întrebare imediat ce veți vedea numărul dat. Spuneți, de exemplu, dacă numărul 16 este par sau impar?

Dacă știți că el este scris în sistemul zecimal, atunci sînteți în drept să afirmați că acest număr este par. Dar cînd este scris într-un alt sistem, atunci putem fi oare convinși că el reprezintă într-adevăr un număr par?

Constatăm că nu este așa. Dacă, de exemplu, baza este 7, atunci „șaisprezece" înseamnă $7 + 6 = 13$, adică un număr impar. Același lucru se va întîmpla pentru orice bază impară (pentru că orice număr impar $+ 6$ este de asemenea un număr impar).

De aici tragem concluzia că regula cunoscută nouă de divizibilitate prin 2 (ultima cifră pară) este sigur utilă numai pentru sistemul de numerație zecimal, iar pentru celelalte sisteme nu este totdeauna utilă. Și anume, ea mai servește numai în sistemele de numerație cu baza p a r ă: 6, 8 etc. Care este deci regula de divizibilitate prin 2 pentru sistemul cu baza i m p a r ă? Este suficient să ne gîndim puțin pentru a stabili această regulă: suma cifrelor trebuie să fie pară. De exemplu, numărul „136" este par în orice sistem de numerație, chiar și în cel cu baza impară; într-adevăr, în ultimul caz avem: numărul impar[1] + număr impar + par = număr par.

Tot atît de prudenți trebuie să fim și la rezolvarea următoarei probleme: numărul 25 se împarte întot-

---

[1] Numărul impar · înmulțit cu el însuși (adică cu impar) dă totdeauna un număr impar (de ex.: $7 \times 7 = 49$; $11 \times 11 = 121$ etc.).

deauna cu 5? În sistemul cu baza 7 sau 8 numărul astfel reprezentat nu se împarte cu 5 (pentru că el este egal cu 19 sau cu 21). Cît priveşte regula binecunoscută a divizibilităţii prin 9 (dacă suma cifrelor este divizibilă cu 9), ea este justă numai pentru sistemul zecimal. În sistemul cincinal însă această regulă este valabilă pentru 4, iar în cel cu baza 7 — pentru 6. Astfel, numărul „323" în sistemul cincinal se împarte cu 4, pentru că $3 + 2 + 3 = 8$, iar numărul „51" în sistemul cu baza 7 — cu 6 (ne convingem de lucrul acesta transformînd numerele în sistemul zecimal: obţinem respectiv 88 şi 36). De ce este aşa, cititorul îşi va da seama singur, dacă va înţelege bine modul de deducere a regulii de divizibilitate prin 9 şi va folosi acelaşi raţionament la deducerea regulii de divizibilitate cu 6, cu schimbările respective pentru sistemul cu baza 7.

Este mai greu să se demonstreze pe cale pur aritmetică justeţea următoarelor:

$$\left.\begin{aligned} 121 : 11 &= 11 \\ 144 : 12 &= 12 \\ 21 \times 21 &= 441 \end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{în toate sistemele de numeraţie} \\ \text{(în care există cifrele respective).}\end{array}$$

Cei care cunosc bazele algebrei vor găsi uşor explicaţia acestor egalităţi. Ceilalţi cititori pot să le verifice pentru diferite sisteme de numeraţie.

PROBLEME INSTRUCTIVE

1) Cînd $2 \times 2 = 100$?
2) Cînd $2 \times 2 = 11$?
3) Cînd 10 este număr impar?
4) Cînd $2 \times 3 = 11$?
5) Cînd $3 \times 3 = 14$?

Răspunsul la aceste întrebări nu va părea greu de găsit celor care au citit capitolul de faţă.

1) $2 \times 2 = 100$ cînd 100 este scris în sistemul binar.
2) $2 \times 2 = 11$ cînd 11 s-a scris în sistemul cu baza 3.

3) 10 este număr impar cînd el a fost scris în sistemul cu baza 5, precum şi în sistemele cu bazele 3,7 şi 9.
4) $2 \times 3 = 11$ cînd 11 s-a scris în sistemul cu baza 5.
5) $3 \times 3 = 14$ cînd 14 s-a scris în sistemul cu baza 5.

FRACŢII FĂRĂ NUMITOR

Noi ne-am obişnuit cu faptul că se scriu fără linie de fracţie numai fracţiile z e c i m a l e. De aceea, la prima vedere se pare că fracţiile 2/7 sau 1/3 nu pot fi scrise fără linie de fracţie. Lucrurile ni se vor prezenta însă altfel, dacă ne vom aminti că fracţiile fără linie de fracţie sînt posibile şi în alte sisteme de numeraţie. Ce înseamnă, de exemplu, fracţia „0,4" în sistemul cu baza 5? Desigur, 4/5. Fracţia „1,2" în sistemul cu baza 7 înseamnă $1^2/_7$. Dar ce înseamnă, în acelaşi sistem cu baza 7, fracţia „0,33"? Aici rezultatul este mai complicat: $3/7 + 3/49 = 24/49$.

Vom examina cîteva fracţii nezecimale fără linie de fracţie. Cu cît sînt egale:

a) „2,121" în sistemul cu baza 3?
b) „1,011" în sistemul binar?
c) „3,431" în sistemul cu baza 5?
d) „2,(5)" în sistemul cu baza 7?

Răspunsuri:

$$\text{a)}\ 2+\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{1}{27}=2\frac{16}{27}$$

$$\text{b)}\ 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=1\frac{3}{8}$$

$$\text{c)}\ 3+\frac{4}{5}+\frac{3}{25}+\frac{1}{125}=3\frac{116}{125}.$$

$$\text{d)}\ 2+\frac{5}{7}+\frac{5}{49}+\frac{5}{343}+\ldots=2\frac{5}{6}$$

Cititorul se va convinge de justeţea ultimei egalităţi, dacă va încerca să aplice la cazul de faţă, cu schimbărîle corespunzătoare, raţionamentele legate de transformarea fracţiilor zecimale şi periodice în fracţii simple.

Acum vom examina cîteva probleme speciale (vezi răspunsul la sfîrşitul cărţii).

P r o b l e m a 10. În ce sistem de numeraţie este efectuată următoarea adunare:

$$
\begin{array}{r}
756 \\
307 \\
+\ 2456 \\
24 \\
\hline
3767
\end{array}
$$

P r o b l e m a 11. În ce sistem de numeraţie este efectuată împărţirea:

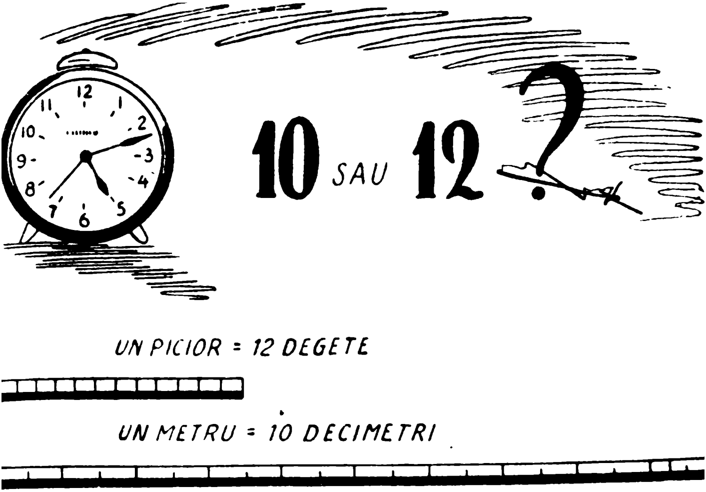
$$
\begin{array}{l}
4415400 : 4532 = 543 \\
-\underline{40344} \\
34100 \\
-\underline{31412} \\
22440 \\
-\underline{22440} \\
0
\end{array}
$$

P r o b l e m a 12. Scrieţi numărul „o sută treizeci" în toate sistemele de numeraţie, de la cel binar pînă la cel zecimal inclusiv.

P r o b l e m a 13. Cu cît este egal numărul „123" dacă-l considerăm scris în toate sistemele de numeraţie, inclusiv cel cu baza 9? Este posibil ca acest număr să fi fost scris în sistemul binar? Dar în cel cu baza 3? În cazul că a fost scris în sistemul cu baza 5, atunci puteţi afla, fără a-l transforma în sistemul zecimal, dacă el se împarte fără rest cu 6? Dacă numărul a fost scris în sistemul zecimal, atunci se împarte fără rest cu 4?

CURIOZITATE ARITMETICĂ:

$$2^5 \cdot 9^2 = 2\,592$$



CAPITOLUL V

GALERIA CURIOZITĂŢILOR NUMERICE

MUZEUL DE CURIOZITĂŢI ARITMETICE

În lumea cifrelor, ca şi în lumea fiinţelor, se întîlnesc adevărate curiozităţi, exemplare rare care posedă proprietăţi excepţionale. Din astfel de numere s-ar fi putut întocmi un muzeu de rarităţi numerice, un adevărat muzeu „de curiozităţi aritmetice". În vitrinele lui şi-ar fi găsit loc nu numai uriaşii numerici, despre care vom vorbi într-un capitol aparte, ci şi numere de dimensiuni modeste, care ies din comun prin anumite proprietăţi neobişnuite. Unele dintre ele atrag atenţia cititorului chiar la prima vedere, celelalte îşi manifestă particularităţile lor deosebite numai la examinarea mai atentă.

Exemplarele interesante prezentate în „galeria“ noastră de numere nu au nimic comun cu acele curiozităţi imaginare, pe care le întrezăresc în unele numere amatorii a tot ce este misterios. Un exemplu de asemenea superstiţie în legătură cu numerele îl poate prezenta următorul raţionament aritmetic, exprimat cu imprudenţă de cunoscutul scriitor francez Victor Hugo:

„Trei — este un număr perfect. Pentru numărul 3 unitatea este acelaşi lucru ca şi diametrul pentru cerc. Printre celelalte numere 3 reprezintă acelaşi lucru ca şi cercul printre figuri. Numărul 3 este singurul care are un centru. Celelalte numere sînt nişte elipse, care au două focare. De aici următoarea particularitate, caracteristică numai pentru numărul 3: adunaţi cifrele oricărui număr multiplu de 3 — suma se împarte totdeauna cu 3, fără rest.“

În acest raţionament nebulos şi aparent „profund“ nu este nimic just; în fiecare frază fie o prostie, fie o totală lipsă de sens. Este justă numai observaţia cu privire la proprietatea sumei cifrelor, însă această proprietate nu decurge din cele spuse şi, pe lîngă aceasta, nu reprezintă o particularitate exclusivă a numărului 3; aceeaşi proprietate caracterizează, în sistemul zecimal, şi numărul 9,

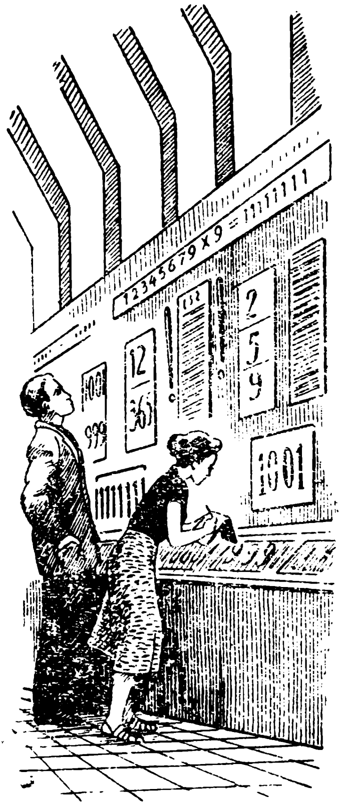


Fig. 25 — Vitrina curiozităţilor numerice.

iar în celelalte sisteme — numerele mai mici cu o unitate decît baza.

Curiozitățile din „galeria“ noastră sînt de alt gen: în ele nu există nimic misterios, nimic de neînțeles.

Îl invit pe cititor să facă o vizită în galeria acestor curiozități numerice și să cunoască unele din ele.

Vom trece, fără se ne oprim, pe lîngă primele vitrine care cuprind numere ale căror proprietăți le cunoaștem bine. Bănuim deja de ce a nimerit în galeria curiozităților numărul 2: nu pentru că el este primul număr par[1], ci pentru că el este baza celui mai interesant sistem de numerație (vezi pag. 81-82).

Nu ne vom mira nici atunci cînd vom găsi aici numărul 9, desigur, nu ca „simbolul fidelității“[2], ci ca număr care ne ușurează verificarea tuturor operațiilor aritmetice (vezi pag. 61-65).

NUMĂRUL 12

Ce particularitate are acest număr? Este numărul lunilor dintr-un an și numărul de unități dintr-o duzină. Dar ce reprezintă, în fond,neobișnuit o duzină? Sînt puțini cei care cunosc că 12 este un concurent vechi și cît p-aci învingător al numărului 10 în lupta pentru locul de onoare ca bază a sistemului de numerație. Unul din popoarele cele mai culte din Orientul antic — babilonienii și strămoșii lor sumerienii — efectuau calcule în sistemul de numerație cu baza 12. În unele domenii folosim și noi acest sistem, cu toate că victorios a ieșit sistemul zecimal. Predilecția noastră pentru duzine și „groși“[3]), împărțirea unei zile și nopți în două duzini de ore și a orei în cinci duzini de minute, împărțirea minutului în tot atîtea secunde, împărțirea cercului în 30 de duzini de grade și, în sfîrșit, împărțirea piciorului în 12 țoli — toate acestea nu sînt oare o mărturie a marii influențe a sistemului antic în zilele noastre?

---

[1] Primul număr par poate fi considerat 0 și nu 2.

[2] Anticii (urmașii lui Pitagora) considerau că 9 este simbolul fidelității „pentru că toate numerele multiple lui 9 au suma cifrelor multiplă lui 9“.

[3] Un gros = 12 duzini. Într-o cutie de penițe este 1 gros — 144 bucăți.

Este bine oare că în lupta dintre duzină și zece a învins acesta din urmă? Desigur că aliații cei mai puternici ai zecelui au fost și rămîn mîinile noastre proprii cu cele 10 degete — mașini de calcul vii. Dacă nu ar fi fost acest lucru atunci ar fi trebuit, fără îndoială, să-l preferăm pe 12 în loc de 10. Este mult mai comodă efectuarea calculelor în sistemul cu baza 12, decît în sistemul zecimal. Aceasta pentru că numărul 10 se împarte fără rest cu 2 și cu 5, în timp ce 12 se împarte cu 2,3,4,6. Numărul 10 nu poate fi împărțit decît de două numere fără rest, pe cînd 12 are patru divizori. Avantajele sistemului cu baza 12 ne vor deveni și mai clare dacă vom ține seama de faptul că în acest sistem numărul care se termină cu zero este divizibil și cu 2, și cu 3, și cu 4, și cu 6; gîndiți-vă cît de comod este să împarți un număr cînd și 1/2, și 1/3, și 1/4, și 1/6 din el sînt numere întregi! Dacă însă numărul exprimat în sistemul cu baza 12 se termină cu două zerouri, atunci el trebuie să se împartă fără rest cu 144, prin urmare și la toți divizorii lui 144, adică la următorul șir de numere:

2,3,4,6,8,9,12,16,18,24,36,48,72,144

Avem deci 14 divizori în locul celor 8 pe care-i au numerele scrise în sistemul zecimal, atunci cînd ele se termină cu două zerouri (2,4,5,10,20,25,50, și 100). În sistemul nostru numai fracțiile de tipul 1/2, 1/4, 1/5, 1/20 etc. pot fi transformate în zecimale finite; în sistemul cu baza 12 putem scrie, fără numitor, fracții mult mai variate: 1/2, 1/3, 1/4, 1/6, 1/8, 1/9, 1/12, 1/16, 1/18, 1/24, 1/36, 1/48, 1/72, 1/144 care, respectiv, vor deveni:

0,6; 0,4; 0,3; 0,2; 0,16; 0,14; 0,1; 0,09; 0,08; 0,06; 0,04; 0,03; 0,02; 0,01

Am greși însă dacă am crede că divizibilitatea numărului poate depinde de sistemul în care este reprezentat. Dacă nucile cuprinse într-un sac pot fi împărțite în 5 grămezi egale, atunci, desigur, această proprietate a lor nu se va schimba în funcție de sistemul de numerație în care va fi reprezentat numărul și nici de faptul că acest număr a fost luat pe abacă, scris cursiv, sau, în sfîrșit, într-un oarecare alt mod. Cînd numărul scris în sistemul cu baza 12 se împarte cu 6 sau cu 72, atunci fiind exprimat într-un alt sistem de numerație, de exemplu în cel zecimal, el trebuie să aibă aceiași divizori. Diferența constă numai în faptul că în sistemul cu baza 12 divizibilitatea cu 6 sau cu 72 poate fi mai ușor remarcată (numărul se termină cu unul sau cu două zerouri).

Ținînd seama de avantajele oferite de sistemul cu baza 12, nu este de mirare că printre matematicieni unii cereau trecerea completă în acest sistem. Noi însă ne-am obișnuit prea mult cu sistemul zecimal pentru a ne hotărî să facem o astfel de reformă.

Marele matematician francez Laplace spunea în legătură cu această problemă: „baza sistemului nostru de numerație nu se împarte cu 3 și cu 4, adică cu cei doi divizori care sînt atît de mult folosiți datorită simplității lor. Adăugarea a două semne (cifre) ar fi dat sistemului de numerație acest avantaj; însă inovația ar fi fost, fără îndoială, refuzată. Noi am fi pierdut avantajul care a dat naștere aritmeticii noastre — posibilitatea de a număra cu ajutorul degetelor de la mîini“.

Pentru a introduce însă uniformitate în toate calculele ar fi trebuit să se treacă la același sistem de numerație și pentru măsurarea arcelor de cerc.

S-a încercat să se facă această reformă în Franța, dar ea nu a prins. Însuși Laplace a fost un partizan convins al acestei reforme. Cunoscuta lui carte „Expunerea sistemului lumii“ este un exemplu de folosire a subîmpărțirii zecimale a unghiurilor; la el este numit grad fracțiunea a o suta și nu a nouăzecea parte din unghiul drept, minutul constituie a suta parte din grad etc. Laplace milita chiar pentru subîmpărțirea zecimală a orelor și a minutelor. „Uniformitatea sistemelor de măsură necesită ca ziua să fie împărțită în 100 ore, ora în 100 minute și minutul în 100 secunde“, scria el.

Vedeți prin urmare că duzina are o istorie îndelungată și că pe bună dreptate numărul 12 a intrat în galeria curiozităților numerice. În schimb, vecina lui, „duzina dracului“, 13, nu figurează aici pentru că ar fi deosebit de interesantă, ci poate tocmai datorită faptului că nu prezintă nici un interes, deşi are o faimă atît de sumbră. Oare nu este de mirare faptul că un număr, care nu are nici un fel de particularităţi interesante, a putut deveni atît de „teribil" pentru oamenii superstiţioşi?

Cît de răspîndită era această superstiţie (care a luat naştere în Babilonul antic), se vede din faptul că în epoca ţarismului, cînd s-a construit linia de tramvai electric la Petersburg, mult timp nu au îndrăznit să introducă linia nr. 13 şi s-a trecut dintr-o dată la nr. 14; autorităţile credeau că publicul nu va accepta transportul în vagoane care poartă un număr atît de „nenorocos". Este curios de asemenea că la Petersburg erau multe case în care lipseau locuinţele cu nr. 13... Adesea în hoteluri nu existau camere cu nr. 13. Cîndva, în apus (de exemplu în Anglia) erau înfiinţate chiar „cluburi ale nr. 13" pentru a lupta împotriva acestei superstiţii numerice nefondate...

În vitrina următoare a muzeului de curiozităţi aritmetice avem în faţa noastră:

NUMĂRUL 365

El este remarcabil, înainte de toate, prin faptul că indică numărul zilelor dintr-un an. Mai departe, la împărţirea cu 7 el dă ca rest 1; această particularitate a numărului 365, deşi aparent neesenţială, are mare importanţă pentru calendarul nostru bazat pe săptămîna de 7 zile.

O altă particularitate a numărului 365, care nu este legată de calendar:

$$365 = 10 \times 10 + 11 \times 11 + 12 \times 12,$$

adică, 365 este egal cu suma pătratelor a trei numere consecutive, începînd cu 10:

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 100 + 121 + 144 = 365$$

365

Fig. 26 — Cunoaşteţi particularităţile acestui număr?

Fig. 27 — Tabloul pictorului Bogdanov-Belski „O problemă grea“.

Cu aceasta însă nu am terminat, acelaşi rezultat îl dă şi suma pătratelor a două numere imediat următoare, 13 şi 14:

$$13^2 + 14^2 = 169 + 196 = 365$$

Pe această proprietate a numărului 365 s-a bazat problema lui S. A. Racinski, reprezentată în cunoscutul tablou „O problemă grea" a lui Bogdanov-Belski (fig. 27):

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365} = ?$$

Sînt puţine numere de acest fel în galeria noastră de curiozităţi aritmetice.

TREI DE NOUĂ

În vitrina următoare găsim numărul cel mai mare dintre toate numerele de trei cifre: 999. Este neîndoielnic faptul că acest număr este mult mai interesant decît imaginea lui răsturnată — 666 — renumitul „număr al fiarelor" din apocalips, care trezea o frică neîntemeiată în sufletele multor oameni superstiţioşi, dar prin proprietăţile sale aritmetice nu prezintă nimic deosebit în rîndul celorlalte numere.

Fig. 28 — Un număr cu care se înmulţeşte uşor.

O particularitate curioasă a numărului 999 se manifestă la înmulţirea lui cu orice alt număr format din trei cifre. În urma înmulţirii se obţine un produs format din şase cifre: primele trei cifre reprezintă numărul cu care am înmulțit, micșorat cu o unitate, iar celelalte trei cifre „completează“ pe cele dintîi pînă la 9. De exemplu:

$$573 \times 999 = \begin{array}{r} 572 \\ 572\,427 \\ \hline 999 \end{array}$$

Pentru a înțelege de unde provine această particularitate este suficient să urmărim rîndul care urmează:

$$573 \times 999 = 573 \times (1\,000 - 1) = \left\{ \begin{array}{r} 573\,000 \\ -\quad 573 \\ \hline 572\,427 \end{array} \right.$$

Cunoscînd această particularitate, putem înmulți „instantaneu“ cu numărul 999 orice număr format din trei cifre:

$$947 \times 999 = 946\,053$$
$$509 \times 999 = 508\,491$$
$$981 \times 999 = 980\,019 \text{ etc.}$$

Și, deoarece $999 = 9 \times 111 = 3 \times 3 \times 3 \times 37$ puteți scrie cu o rapiditate uimitoare coloane întregi de numere formate din șase cifre, multiple lui 37; cititorul care nu cunoaște proprietățile numărului 999, desigur, nu va fi în stare să facă acest lucru. Cu alte cuvinte, veți putea face încercări de „înmulțiri și împărțiri instantanee“.

NUMĂRUL ȘEHERAZADEI

Numărul care vine la rînd este numărul 1 001 — cunoscutul număr al Șeherazadei. Probabil nici nu știați că în însăși denumirea vestitei culegeri de povești arabe găsim o minune sui-generis, care ar fi putut să frapeze imaginația sultanului din povești, cel puțin în aceeași măsură ca celelalte minuni ale Orientului, dacă el ar fi fost capabil să se intereseze de curiozitățile aritmetice.

Prin ce este oare remarcabil numărul 1 001? La prima vedere el pare foarte obişnuit. Nici măcar nu face parte din categoria numerelor „prime“ — o categorie a numerelor alese. El se împarte însă fără rest

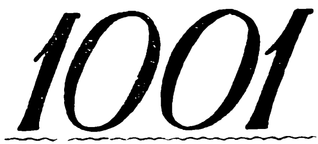


Fig. 29 — Numărul Şeherazadei.

şi cu 7, şi cu 11 şi cu 13 — adică cu trei numere prime consecutive, al căror produs este de fapt. Dar aceasta nu constituie trăsătura care imprimă curiozitatea numărului; este interesant că atunci cînd un număr alcătuit din trei cifre este înmulţit cu 1 001, rezultatul va fi format din deînmulţitul însuşi scris de două ori, de exemplu:

$$873 \times 1\,001 = 873\,873$$
$$207 \times 1\,001 = 207\,207 \text{ etc.}$$

Rezultatul este evident, pentru că $873 \times 1\,001 = 873 \times 1\,000 + 873 = 873\,000 + 873$; totuşi, folosind proprietatea arătată mai sus a „numărului Şeherazadei“, se pot obţine rezultate cu totul neaşteptate, cel puţin pentru un om neiniţiat.

Iată, puteţi să uimiţi un cerc de tovarăşi, care nu cunosc tainele aritmeticii, arătîndu-le următoarea scamatorie. Cereţi unuia dintre ei să scrie pe o hîrtie, fără să v-o arate, un număr cu trei cifre, iar apoi să alăture la acesta încă o dată acelaşi număr. Se obţine un număr de 6 cifre, compus din trei cifre care se repetă. Propuneţi acum aceluiaşi tovarăş sau vecinului lui să împartă, fără să vedeţi ce scrie el, acest număr cu 7; îl preveniţi totodată că nu va avea rest. Rezultatul este transmis unui alt vecin, care la propunerea dumneavoastră îl împarte cu 11; şi, deşi nu cunoaşteţi deîmpărţitul, afirmaţi totuşi cu curaj că şi acesta se va împărţi fără rest. Rezultatul obţinut îl treceţi unui alt tovarăş, pe care-l rugaţi să împartă numărul cu 13, prevenindu-l că împărţirea se face tot fără rest. Rezultatul celei de-a treia împărţiri, fără a privi numărul obţinut, îl înmînaţi primului tovarăş spunîndu-i: „Acesta este numărul pe care l-aţi scris!“

Este just, aţi ghicit.

Care este secretul scamatoriei?

Această frumoasă scamatorie aritmetică se explică foarte simplu: amintiţi-vă că a scrie în dreapta unui număr de trei cifre acelaşi număr înseamnă a-l înmulţi cu 1 001, adică cu produsul $7 \times 11 \times 13$. Numărul de şase cifre, pe care tovarăşul dumneavoastră îl obţine după ce scrie alături de două ori numărul ales, va trebui, prin urmare, să se împartă fără rest şi cu 7, şi cu 11, şi cu 13; rezultatul împărţirii succesive cu aceste trei numere (adică cu produsul lor — 1 001) va trebui să dea din nou numărul iniţial.

Această scamatorie poate să fie schimbată, după dorinţă, astfel încît totuşi să avem posibilitatea de a declara celui care şi-a ales un număr rezultatul calculelor lui. Ştiţi că numărul de şase cifre, care stă la baza calculelor, este egal cu produsul dintre: numărul ales $\times 7 \times 11 \times 13$.

De aceea, dacă cereţi să se împartă acest număr de şase cifre întîi cu 7, apoi cu 11, iar după aceea cu numărul ales, atunci puteţi să afirmaţi cu convingere că rezultatul final al tuturor împărţirilor este 13.

Repetînd scamatoria veţi cere să se efectueze împărţirile într-o altă ordine: întîi cu 11, apoi cu numărul ales şi, în sfîrşit, cu 13. Ultima împărţire trebuie să dea rezultatul 7. Ordinea mai poate fi următoarea: întîi 13, apoi numărul ales şi la sfîrşit 7; rezultatul final — 11.

NUMĂRUL 10101

După cele spuse despre numărul 1 001 nu ne vom mira găsind în vitrinele galeriei noastre numărul 10 101. Vă daţi seama, cred, ce proprietate anume îl face să se bucure de atîta cinste. El, ca şi numărul 1 001, dă rezultate interesante la înmulțirea numerelor formate din d o u ă cifre; fiecare număr de două cifre înmulțit

10101

Fig. 30 — Număr util pentru scamatorii.

cu 10 101 dă ca rezultat un număr egal cu de trei ori numărul ales.
De exemplu:

$$73 \times 10\,101 = 737\,373$$
$$21 \times 10\,101 = 212\,121$$

Cauza se află din:

$$73 \times 10\,101 = 73\,(10\,000 + 100 + 1) = \left|\begin{array}{r} 730\,000 \\ +\quad 7\,300 \\ 73 \\ \hline 737\,373 \end{array}\right.$$

Putem face oare cu ajutorul acestui număr scamatorii de genul celor prezentate anterior, la numărul 1 001?

Da, putem. Scamatoria aceasta este chiar mai interesantă, dacă avem în vedere faptul că 10 101 este un produs a patru numere simple:

$$10\,101 = 3 \times 7 \times 13 \times 37$$

Propunînd unui tovarăș să scrie un număr oarecare format din două cifre, îi cereți celui de-al doilea să adauge același număr, iar unui al treilea să repete încă o dată numărul. Pe cel de-al patrulea îl rugați să împartă numărul de 6 cifre, astfel obținut, de exemplu cu 7; al cincilea tovarăș trebuie să împartă rezultatul cu 3; un al șaselea face împărțirea rezultatului cu 37, și, în sfîrșit, al șaptelea împarte acest rezultat cu 13; anunțați în prealabil că toate cele patru operații se efectuează fără rest. Rezultatul ultimei împărțiri rugați să fie transcris primului tovarăș; acest rezultat este chiar numărul pe care l-a ales.

La repetare, scamatoria puteți s-o variați în oarecare măsură, folosind de fiecare dată alți divizori. Astfel, în loc de patru divizori $3 \times 7 \times 13 \times 37$ veți lua următoarele grupuri de trei termeni:

$$21 \times 13 \times 37; 7 \times 39 \times 37; 3 \times 91 \times 37; 7 \times 13 \times 111$$

Această scamatorie poate fi ușor schimbată, așa cum s-a explicat în cazul precedent (în legătură cu numărul 1 001).

S-ar putea spune chiar că numărul 10 101 este mai interesant decît numărul Șeherazadei, deși proprietățile lui extraordinare sînt mai puțin cunoscute. De altfel, despre el s-a scris încă cu 200 de ani în urmă, în „Aritmetica“ lui Magnițki. Aici e citat ca exemplu de înmulțire care prezintă „oarecari curiozități“. Cu atît mai îndreptățiți sîntem noi să-l includem în colecția noastră de curiozități aritmetice.

NUMĂRUL 10 001

Și acest număr se pretează la scamatoriile de genul celor de mai sus, deși ele nu sînt chiar atît de atră-

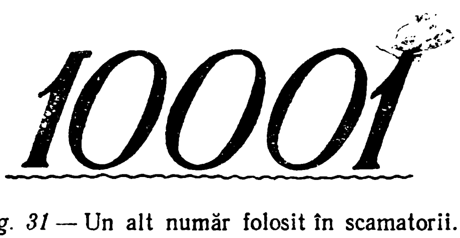


Fig. 31 — Un alt număr folosit în scamatorii.

gătoare. Aceasta pentru că numărul din paragraful de față este un produs a numai două numere simple: $10\,001 = 73 \times 137$.

Cum putem folosi acest lucru la efectuarea operaţiilor aritmetice care prezintă „oarecari curiozităţi“, cred că cititorul şi-a dat seama din cele spuse mai sus.

ŞASE UNITĂŢI

În vitrina următoare întîlnim o nouă curiozitate a muzeului de rarităţi aritmetice — un număr format din şase unităţi. Cunoscînd proprietăţile numărului 1 001 ne dăm seama imediat că 111 111 = 111 × × 1 001.

Fig. 32 — Un număr util pentru cel care ghiceşte.

Cum 111 = 3 × 37, iar 1 001 = 7 × 11 × 13, decurge că noul nostru fenomen numeric, format numai din unităţi, reprezintă un produs de cinci factori simpli. Combinînd aceşti cinci factori în două grupuri, în diferite feluri, obţinem 15 perechi de termeni care dau acelaşi număr 111 111:

$$
\begin{aligned}
3 \times (7 \times 11 \times 13 \times 37) &= 3 \times 37\,037 = 111\,111\\
7 \times (3 \times 11 \times 13 \times 37) &= 7 \times 13\,873 = 111\,111\\
11 \times (3 \times 7 \times 13 \times 37) &= 11 \times 10\,101 = 111\,111\\
13 \times (3 \times 7 \times 11 \times 37) &= 13 \times 8\,547 = 111\,111\\
37 \times (3 \times 7 \times 11 \times 13) &= 37 \times 3\,003 = 111\,111\\
(3 \times 7) \times (11 \times 13 \times 37) &= 21 \times 5\,291 = 111\,111\\
(3 \times 11) \times (7 \times 13 \times 37) &= 33 \times 3\,367 = 111\,111
\end{aligned}
$$

etc.

Prin urmare, puteţi da la 13 tovarăşi să se ocupe cu înmulţirea şi, deşi fiecare va înmulţi o altă pereche de numere, toţi vor obţine acelaşi rezultat: 111 111.

Numărul 111 111 poate fi folosit şi pentru ghicirea numerelor alese, de genul scamatoriilor efectuate cu ajutorul lui 1 001 şi 10 101. În cazul de faţă se propune să se aleagă numere formate dintr-o singură cifră, care să se repete de şase ori. Drept divizori aici pot servi cinci numere simple: 3,7,11,13,37 şi produsele lor: 21, 33, 39 etc. Aceasta dă posibilitatea de a varia foarte mult efectuarea scamatoriei.

Din exemplul numărului 111 111 cititorul vede cum poate fi folosit, în scamatoriile aritmetice, un număr format numai din unităţi, dacă acest număr se descompune în factori. Din fericire pentru amatorii unor asemenea scamatorii, multe numere nu sînt prime, ci compuse.

Din primele 17 numere de acest gen numai două (cele mai mici) — 1 şi 11 — sînt numere prime, iar celelalte sînt compuse. Iată cum se descompun în factori primi primele zece numere compuse formate numai din unităţi:

$$\begin{aligned}
111 &= 3\times37\\
1\ 111 &= 11\times101\\
11\ 111 &= 41\times271\\
111\ 111 &= 3\times7\times11\times13\times37\\
1\ 111\ 111 &= 239\times4\ 649\\
11\ 111\ 111 &= 11\times73\times101\times137\\
111\ 111\ 111 &= 9\times37\times333\ 667\\
1\ 111\ 111\ 111 &= 11\times41\times271\times9\ 091\\
11\ 111\ 111\ 111 &= 21\ 649\times513\ 239\\
111\ 111\ 111\ 111 &= 3\times7\times11\times13\times37\times101\times9\ 901
\end{aligned}$$

Toate numerele de mai sus pot fi folosite pentru scamatorie; în unele cazuri însă această scamatorie l-ar sili pe cel care efectuează operaţiile să facă o muncă prea complicată. Numerele formate din 3, 4, 5, 6, 8, 9, 12 unităţi sînt cele mai utile în acest scop. Modelele de folosire a acestora pentru scamatorii aritmetice vor fi date la sfîrşitul capitolului următor.

În vitrinele următoare ale galeriei noastre ne uimesc curiozităţi aritmetice de un alt gen — un fel de piramide formate din cifre.

Cum se explică asemenea rezultate originale ale înmulţirii?

Pentru a înţelege această regularitate curioasă, luăm ca exemplu unul din rîndurile primei piramide (fig. 33) numerice: $123\,456 \times 9 + 7$. În locul înmulţirii cu 9 se poate face înmulţirea cu (10—1), adică să se adauge 0 şi să se scadă deînmulţitul:

$$123\,456 \times 9 + 7 = 1\,234\,560 + 7 - 123\,456 = \left\{ \begin{array}{r} -\begin{array}{r} 1\,234\,567 \\ 123\,456 \end{array} \\ \hline 1\,111\,111 \end{array} \right.$$

Este suficient să privim ultima scădere ca să înţelegem de ce obţinem un rezultat format numai din unităţi.

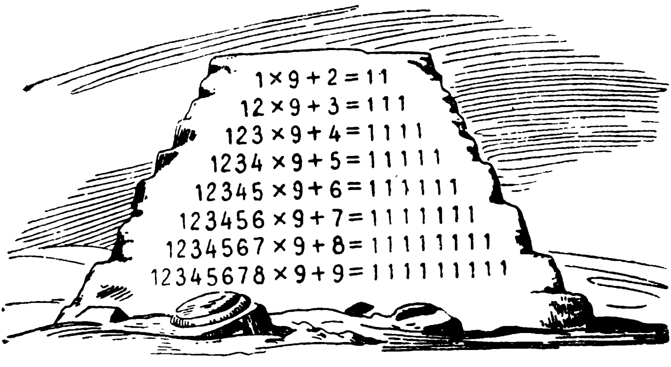


Fig. 33 — Prima piramidă numerică.

Putem să ne lămurim şi pornind de la alte raţionamente. Pentru ca numărul de forma 12 345... să se transforme într-un număr de forma 11 111... este necesar ca din cifra lui a doua să se scadă 1, din cea de-a treia —2, din cea de-a patra —3, din a cincea —4 etc.; sau, cu alte cuvinte, să se scadă din el acelaşi număr de tipul 12 345..., scurtat cu ultima lui unitate, adică micşorat de 10 ori şi lipsit în prealabil de ultima lui cifră. Acum este limpede că pentru obţinerea rezultatului căutat numărul nostru trebuie înmulţit cu 10, să i se adauge cifra care urmează după ultima şi să

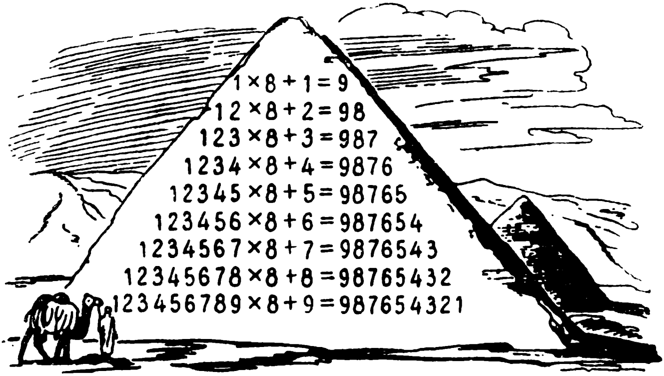


Fig. 34 — A doua piramidă numerică.

se scadă din rezultat numărul iniţial (or a înmulţi cu 10 şi a scădea numărul iniţial înseamnă a înmulţi cu 9).

În mod asemănător se explică şi formarea piramidei numerice următoare (fig. 34), care se obţine la înmulţirea unui anumit şir de cifre cu 8 şi adăugarea cifrelor care cresc succesiv. Deosebit de interesant este ultimul şir din piramidă, unde în rezultatul înmulţirii cu 8 şi a adăugirii lui 9 are loc transformarea şirului natural al cifrelor în acelaşi şir, dar cu aşezarea inversă.

Vom încerca să explicăm această particularitate. Dacă privim rîndul care urmează observăm:

$$12\,345\times8+5=\left\{-\begin{matrix}12\,345\times9+6\\12\,345\times1+1\end{matrix}\right.=\left\{-\begin{matrix}111\,111\text{[1]}\\12\,346\end{matrix}\right.$$

[1] De ce $12\,345\times9+6$ dă tocmai 111 111 s-a arătat la piramida numerică precedentă.

adică $12\,345\times8+5 = 111\,111-12\,346$. Scăzînd însă din numărul 111 111 numărul 12 346, format dintr-un şir de cifre crescătoare, noi, cum se poate uşor înţelege, trebuie să obţinem un şir de cifre descrescătoare 98 765.

Iată, în sfîrşit, cea de-a treia piramidă numerică care necesită de asemenea explicaţii (fig. 35).

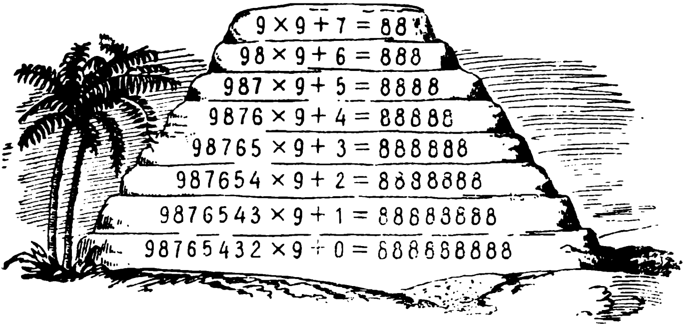


Fig. 35 — **A treia piramidă numerică.**

Această piramidă este urmarea directă a primelor două. Legătura se stabileşte foarte uşor. Din p r i m a piramidă, de exemplu, ştim deja că:

$$12\,345\times9+6=111\,111$$

Înmulţind ambele părţi cu 8 avem:

$$(12\,345\times8\times9)+(6\times8)=888\,888$$

Din cea de-a d o u a piramidă se ştie că:

$$12\,345\times8+5=98\,765, \quad \text{deci} \quad 12\,345\times8=98\,760$$

Prin urmare,

$$888\,888=(12\,345\times8\times9) + (6\times8) = (98\,760\times9)+48=$$
$$=(98\,760\times9)+(5\times9)+3=(98\,760+5)\times9+3=$$
$$=98\,765\times9+3$$

Iată deci, că toate aceste piramide numerice nu sînt chiar atît de misterioase pe cît ni se par. Totuşi mulţi le consideră încă inexplicabile. Mi s-a întîmplat să le văd tipărite într-un ziar german cu explicaţia: „Cauza acestei regularităţi uimitoare nu a fost explicată pînă în prezent de nimeni“...

NOUĂ CIFRE EGALE

Ultimul rînd din prima „piramidă“ examinată (fig. 33)

$$12\,345\,678\times9+9=111\,111\,111$$

reprezintă un model de un întreg grup de curiozităţi aritmetice interesante, culese în muzeul nostru şi aranjate într-un tabel (vezi fig. 36).

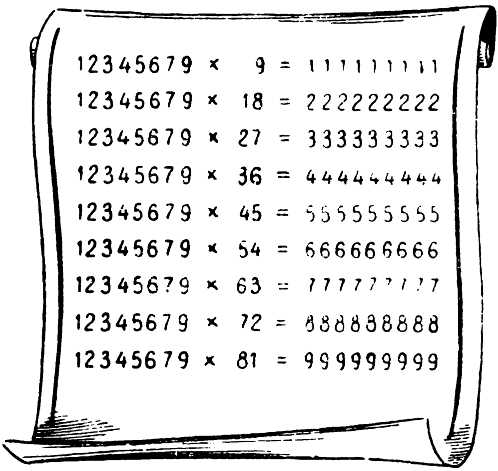


Fig. 36 **— Cazuri interesante de înmulţire.**

De unde provine această regularitate observată în rezultate?

Vom ţine seama de faptul că

$$12\,354\,678\times9+9=(12\,345\,678+1)\times9=$$
$$=12\,345\,679\times9$$

De aceea,

$$12\,345\,679\times9 = 111\,111\,111$$

Iar de aici decurge direct că:

$$12\,345\,679 \times 9 \times 2 = 222\,222\,222$$
$$12\,345\,679 \times 9 \times 3 = 333\,333\,333$$
$$12\,345\,679 \times 9 \times 4 = 444\,444\,444$$

SCARA NUMERICĂ

Este interesant ce se va întîmpla dacă numărul 111 111 111, cu care am avut de-a face mai sus, va fi înmulţit cu el însuşi?

Dacă ştiţi să desenaţi bine în imaginaţie rîndurile de cifre, atunci veţi reuşi să găsiţi rezultatul chiar fără să recurgeţi la calcule pe hîrtie. De fapt aici lucrurile se reduc numai la aşezarea corespunzătoare a produselor parţiale, pentru că înmulţirea se face tot timpul numai cu 1. O asemenea operaţie poate să prezinte greutăţi cel mult lui Mitrofanuşka al lui Fonvizin, care a stat pe gînduri la înmulţirea lui „unu cu unu“. Iar adunarea produselor parţiale se reduce la o simplă numărătoare a unităţilor.[1] Iată rezultatul acestei înmulţiri unice în genul ei (la efectuarea căreia nu trebuie niciodată să recurgem la înmulţirea propriu-zisă):

$$\begin{array}{r}
111111111\\
\underline{111111111}\\
111111111\\
111111111\\
111111111\\
111111111\\
111111111\\
111111111\\
111111111\\
111111111\\
\underline{111111111}\\
12345678987654321
\end{array}$$

[1] După cum am mai explicat, în sistemul de numeraţie binar (vezi pag. 82) toate înmulţirile sînt de acest gen. Exemplul de mai sus ne convinge încă o dată de avantajele sistemului binar.

Cifrele rezultatului descresc simetric de la mijloc spre ambele capete.

Cititorii, pe care i-a obosit trecerea în revistă a curiozităţilor numerice, pot părăsi aici „galeria", trecînd la celelalte secţiuni, unde se arată scamatorii, şi sînt expuşi uriaşii şi piticii numerici; vreau să spun că ei pot întrerupe citirea acestui capitol, trecînd la capitolele următoare. Cei ce doresc să mai cunoască cîteva rarităţi din lumea numerelor, pot vizita împreună cu mine încă cîteva vitrine din vecinătate.

Curiozităţile numerice, despre care va fi vorba acum, necesită o întrevedere cu aşa-numitele fracţii periodice infinite. Pe cei care nu cunosc aceste fracţii îi rog să transforme, după metoda cunoscută, următoarele fracţii ordinare în fracţii zecimale:

$$\frac{1}{4}\,;\ \frac{1}{8}\,;\ \frac{1}{3}\,;\ \text{şi}\ \frac{1}{11}$$

Este uşor să ne convingem de faptul că primele două fracţii, la transformarea lor în fracţii zecimale, dau un număr de cifre finit: $\frac{1}{4} = 0{,}25$; $\frac{1}{8} = 0{,}125$. La transformarea celorlalte fracţii în fracţii zecimale se obţin şiruri infinite de cifre, care se repetă într-o anumită ordine:

$$\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots;\ \frac{1}{11} = 0{,}090909090\ldots$$

Aceste fracţii se numesc *periodice*, iar grupul de cifre care se repetă — *perioadă*.

INELE MAGICE

Ce inele interesante sînt expuse în următoarea vitrină a galeriei noastre! În faţa noastră (fig. 37) se află trei inele plane, care se rotesc unul în altul.

Pe fiecare inel sînt scrise şase cifre în aceeaşi ordine, şi anume, ele formează numărul: 142 857. Inelele au următoarea proprietate: oricum ar fi rotite, la adunarea a două numere scrise pe ele — începînd de la orice cifră în direcţia de rotire a acelor de ceasornic — obţinem în toate cazurile același număr de șase cifre (bineînţeles dacă rezultatul va fi un număr format din șase cifre), deplasat numai puţin! De exemplu, în poziţia reprezentată în figura alăturată obţinem la adunarea celor două inele exterioare:

$$\begin{array}{r} 142\,857 \\ +\ 428\,571 \\ \hline 571\,428 \end{array}$$

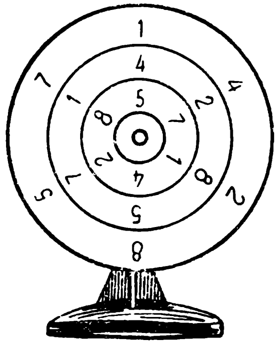


Fig. 37 — Inele numerice ce se rotesc.

adică din nou aceeași serie de cifre: 142 857, doar că cifrele 5 și 7 au trecut la început.

Dacă inelele sînt așezate altfel unul faţă de celălalt, atunci avem următoarele cazuri:

$$\begin{array}{r} 285\,714 \\ +\ 571\,428 \\ \hline 857\,142 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 714\,285 \\ +\ 142\,857 \\ \hline 857\,142 \end{array} \quad \text{etc.}$$

Excepţie face cazul cînd la rezultat se obţine 999 999

$$\begin{array}{r} 285\,714 \\ +\ 714\,285 \\ \hline 999\,999 \end{array}$$

(Cititorul va înţelege cauza altor abateri de la regula arătată mai sus, cînd va citi acest paragraf pînă la capăt).

Nu numai atît. Același șir de cifre, în aceeași succesiune, se obţine și la s c ă d e r e a numerelor scrise pe inele.

E x e m p l u :

$$\begin{array}{r} 428\,571 \\ -\ 142\,857 \\ \hline 285\,714 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 571\,428 \\ -\ 285\,714 \\ \hline 285\,714 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 714\,285 \\ -\ 142\,857 \\ \hline 571\,428 \end{array}$$

Excepţie face cazul cînd coincid cifre de acelaşi fel; se înţelege că atunci diferenţa este egală cu zero.

Dar nici cu aceasta nu am terminat. Î n m u l ţ i ţ i numărul 142 857 cu 2,3,4,5 sau cu 6. Veţi obţine un număr format din aceleaşi cifre însă permutate circular cu una sau mai multe cifre:

$$142\,857 \times 2 = 285\,714$$
$$142\,857 \times 3 = 428\,571$$
$$142\,857 \times 4 = 571\,428$$
$$142\,857 \times 5 = 714\,285$$
$$142\,857 \times 6 = 857\,142$$

Cărui fapt se datoresc toate aceste particularităţi misterioase ale numărului nostru?

Vom găsi calea spre rezolvare dacă vom continua puţin tabelul de mai sus şi vom încerca să înmulţim numărul nostru cu 7: se va obţine ca rezultat 999 999. Aceasta înseamnă că numărul 142 857 nu este altceva decît a şaptea parte din 999 999 şi, prin urmare, fracţia $\frac{142\,857}{999\,999} = \frac{1}{7}$. Într-adevăr, dacă veţi transforma $\frac{1}{7}$ în fracţie zecimală, obţineţi:

$$1 : 7 = 0{,}142\,857\ldots \text{adică } 1/7 = 0{,}(142\,857)$$

$$\begin{array}{l} 10 \\ \hline \ \ 30 \\ \hline \ \ \ \ 20 \\ \hline \ \ \ \ \ \ 60 \\ \hline \ \ \ \ \ \ \ \ 40 \\ \hline \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 50 \\ \hline \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 1 \end{array}$$

Deci numărul de mai sus este perioada unei fracţii periodice infinite, care se obţine la transformarea fracţiei 1/7 în fracţie zecimală. Acum înţelegem de ce la dublarea, triplarea etc. a acestui număr are loc doar o mutare a unui grup de cifre în alt loc. Numai înmulțirea acestui număr cu doi îl face egal cu 2/7 și, prin urmare, este echivalentă cu transformarea în fracție zecimală a lui 2/7 și nu a lui 1/7. Încercînd să transformați fracția 2/7 în fracție zecimală, veți observa imediat că cifra 2 este unul din acele resturi pe care le-am obținut și la transformarea lui 1/7; desigur că trebuie să se repete din nou șirul de cifre ale cîtului, începînd însă cu o altă cifră; cu alte cuvinte trebuie să se obțină aceeași perioadă, dar numai cîteva cifre de la începutul ei se vor găsi la sfîrșit. Același lucru se va petrece și la înmulțirea cu 3,4,5 și 6, adică cu toate numerele obținute în rest. La înmulțirea cu 7 trebuie să obținem 1, sau — ceea ce este același lucru — 0,9999...

Rezultatele interesante obținute prin a d u n a r e a și s c ă d e r e a numerelor de pe inele își găsesc explicația în același fapt că 142 857 este perioada fracției egale cu 1/7. Într-adevăr, ce facem, propriu-zis, rotind inelul cu cîteva cifre? Noi mutăm grupul de cifre de la început la sfîrșit, adică, conform celor spuse mai sus, înmulțim numărul 142 857 cu 2,3, 4 etc. Prin urmare, toate operațiile de adunare sau scădere a numerelor scrise pe inele se reduc la adunarea sau scăderea fracțiilor 1/7, 2/7, 3/7 etc. Desigur că, în rezultat, noi trebuie să obținem cîteva șeptimi, adică din nou șirul de cifre 142 857, într-o altă permutare circulară. Face excepție numai cazul cînd se adună fracțiile care dau în sumă 1 sau mai mult de 1.

Chiar aceste din urmă cazuri nu sînt complet deosebite; ele, ce e drept, nu dau un rezultat identic cu cele examinate, dar cu toate acestea asemănător. Să vedem ce trebuie să se întîmple dacă înmulțim respectiv cu un factor mai mare decît 7, adică cu 8, 9 etc. Pentru a înmulți 142 857, de exemplu, cu 8 procedăm astfel: înmulțim întîi numărul cu 7 și adăugăm apoi la produs (adică la 999 999) numărul nostru:

$$142\,857 \times 8 = 142\,857 \times 7 + 142\,857 = 999\,999 + 142\,857 = 1\,000\,000 - 1 + 142\,857 = 1\,000\,000 + (142\,857 - 1)$$

Rezultatul final — 1 142 856 — diferă față de deînmulțitul 142 857 numai prin faptul că înaintea lui mai avem un unu, iar ultima cifră este micșorată cu o unitate. După o regulă asemănătoare se obțin produsele lui 142 857 cu orice alt număr mai mare decît 7 după cum putem vedea imediat mai jos:

$$
\begin{aligned}
142\,857 \times 8 &= (142\,857 \times 7) \quad + \\
142\,857 \times 9 &= (142\,857 \times 7) \quad + \\
142\,857 \times 10 &= (142\,857 \times 7) \quad + \\
142\,857 \times 16 &= (142\,857 \times 7 \times 2) + \\
142\,857 \times 39 &= (142\,857 \times 7 \times 5) +
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
+\ 142\,857 \qquad\quad &= 1\,142\,856 \\
+\ (142\,857 \times 2) &= 1\,285\,713 \\
+\ (142\,857 \times 3) &= 1\,428\,570 \\
+\ (142\,857 \times 2) &= 2\,285\,712 \\
+\ (142\,857 \times 4) &= 5\,571\,423
\end{aligned}
$$

Aici regula generală este următoarea: la înmulțirea lui 142 857 cu orice înmulțitor trebuie să se înmulțească numai cu restul de la împărțirea înmulțitorului cu 7; în fața acestui produs se pune numărul care arată cîți de 7 sînt cuprinși în înmulțitor, același număr scăzîndu-se și din rezultat[1]. Presupunem că dorim să înmulțim 142 857 cu 88. Înmulțitorul 88, la împărțirea lui cu 7, dă cîtul 12 și rest 4. Prin urmare rezultatul înmulțirii este următorul:

$$12\,571\,428 - 12 = 12\,571\,416$$

Efectuînd înmulțirea 142 857 × 365 obținem (deoarece 365 la împărțirea lui cu 7 dă cîtul 52 și rest 1):

$$52\,142\,857 - 52 = 52\,142\,805$$

Însușindu-ne această regulă simplă și ținînd minte rezultatele înmulțirii numărului cu înmulțitorii de la 2 pînă la 6 (ceea ce nu este greu, pentru că trebuie să

[1] Dacă înmulțitorul este un multiplu de 7, atunci rezultatul este egal cu numărul 999 999 înmulțit cu numărul care arată de cîte ori 7 se cuprinde în înmulțitor; această înmulțire poate fi efectuată în minte. De exemplu:
$142\,857 \times 28 = 999\,999 \times 4 = 4\,000\,000 - 4 = 3\,999\,996$

ţinem minte numai cu ce cifră încep ele), puteţi să-i uimiţi pe cei da faţă înmulţind rapid numere formate din şase cifre. Iar pentru a reţine acest număr util în calcule, observăm că el a provenit de la 1/7 sau — ceea ce este acelaşi lucru — de la 2/14: să zicem că aţi aflat primele trei cifre din numărul nostru: 142. Celelalte trei se obţin prin scăderea acestora din 999:

$$\begin{array}{r} 999 \\ -\;142\,857 \\ \hline 857 \end{array}$$

Noi am mai avut de-a face cu astfel de numere, şi anume, atunci cînd am făcut cunoştinţă cu proprietăţile numărului 999. Amintindu-ne de cele spuse la paragraful respectiv, ne vom da seama imediat că numărul 142 857 este, evident, rezultatul înmulţirii numărului 143 cu 999:

$$142\,857 = 143 \times 999$$

Însă $143 = 13 \times 11$. Ţinînd seama de observaţia făcută mai înainte cu privire la numărul 1 001, egal cu $7 \times 11 \times 13$, vom putea, fără să efectuăm vreo operaţie, să spunem ce rezultat se obţine prin înmulţirea $142\,857 \times 7$:

$$142\,857 \times 7 = 143 \times 999 \times 7 = 999 \times 11 \times 13 \times 7 =$$
$$= 999 \times 1\,001 = 999\,999$$

(toate aceste transformări le putem face, desigur, în minte).

O FAMILIE FENOMENALĂ

Numărul 142 857 este membru al unei familii întregi de numere care posedă aceeaşi proprietate. Iată încă un număr de acest gen: 0 588 235 294 117 647 (0 din faţă este necesar). Dacă înmulţim numărul acesta de exemplu cu 4, atunci vom obţine acelaşi şir de cifre numai că primele patru cifre se vor afla la sfîrşit:

$$0\,588\,235\,294\,117\,647 \times 4 = 2\,352\,941\,176\,470\,588$$

Aşezînd cifrele care formează numărul pe cîteva inele mobile (fig. 38), ca şi în cazul precedent, la adunarea numerelor de pe două inele vom obţine un număr format din aceleaşi cifre permutate însă circular:

$$\begin{array}{r} 0\,588\,235\,294\,117\,647 \\ +\ 2\,352\,941\,176\,470\,588 \\ \hline 2\,941\,176\,470\,588\,235 \end{array}$$

La aşezarea pe inele numerele celor trei rînduri sînt, desigur, identice.

Scăzînd numerele de pe două inele obţinem din nou acelaşi cerc de cifre:

$$\begin{array}{r} 2\,352\,941\,176\,470\,588 \\ -\ 0\,588\,235\,294\,117\,647 \\ \hline 1\,764\,705\,882\,352\,941 \end{array}$$

În sfîrşit, acest număr, ca şi cel examinat mai sus, este format din două jumătăţi; cifrele din cea de-a doua jumătate completează cifrele din prima jumătate pînă la 9.

Vom căuta să găsim explicaţia unor asemenea particularităţi. Nu este greu să ne dăm seama în ce mod numărul acesta a devenit o rudă apropiată a numărului 142 857; 142 857 reprezintă perioada fracţiei periodice infinite egale cu 1/7, iar numărul nou este, probabil, perioada unei alte fracţii periodice. Într-adevăr aşa este, numărul lung de cifre nu este altceva decît perioada fracţiei periodice infinite care se obţine prin transformarea în fracţie zecimală a fracţiei 1/17:

$$1/17 = 0,\ (0588235294117647)$$

Iată de ce la înmulţirea acestui număr cu un înmulţitor de la 1 pînă la 16 se obţine acelaşi şir de cifre, în care numai una sau cîteva din cifrele de la începutul numărului sînt trecute la sfîrşitul lui. Dimpotrivă, trecîndu-se una sau cîteva cifre de la începutul şirului la sfîrşitul lui, mărim astfel numărul de cîteva ori (de la 1 pînă la 16 inclusiv). Adunînd două inele, rotite unul faţă de celălalt, noi efectuăm adunarea a două numere î n m u l ţ i t e — de exemplu, triplate sau înmulţite cu 10; desigur, trebuie să obţinem acelaşi inel de cifre, pentru că înmulţirea cu $3+10$, adică cu 13, duce doar la o deplasare în grupul de cifre, deplasare care nu se observă la aşezarea circulară.

La o anumită poziţie a inelelor se obţin însă sume care diferă puţin de şirul iniţial. Dacă, de exemplu, rotim inelul astfel încît să fim nevoiţi să adunăm un număr înmulţit cu 6 cu un număr înmulţit cu 15, atunci în sumă trebuie să obţinem un număr înmulţit cu $6+15=21$. Acest produs se prezintă întrucîtva altfel decît produsul cu un factor mai mic decît 17. Într-adevăr, deoarece numărul nostru este perioada unei fracţii egale cu 1/17, el fiind înmulţit cu 17 trebuie să dea 17 de 9 (adică atîţia cîte cifre sînt în perioada fracţiei noastre periodice), sau 1 cu 17 zerouri minus 1. De aceea la înmulţirea cu 21, adică cu $4+17$, trebuie să obţinem numărul nostru înmulţit cu 4, în faţa căruia stă un 1, iar din unităţi simple se scade 1. Dar numărul înmulţit cu 4 începe cu cifrele ce se obţin la transformarea în fracţie zecimală a fracţiei simple 4/17:

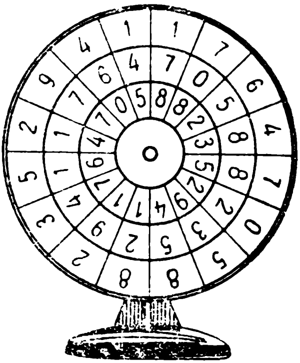


Fig. 38 — Încă un număr interesant.

$$\begin{array}{l} 4 : 17 = 0{,}23\ldots \\ \hline \ \ 40 \\ \hline \ \ 60 \\ \hline \ \ \ \ 9 \end{array}$$

Ordinea celorlalte cifre se cunoaşte: 5294... Prin urmare, numărul respectiv înmulţit cu 21 va fi:

12 352 941 176 470 587

Tot atîta se obţine şi prin adunarea cercurilor de cifre, cînd ele sînt aşezate corespunzător. Un astfel de caz, bineînţeles, nu poate fi obţinut prin s c ă d e r e a inelelor numerice.

Există foarte multe numere asemenea celor două cu care am făcut cunoştinţă mai sus. Ele formează o familie întreagă, pentru că au o origine comună — transformarea fracţiilor ordinare în fracţii zecimale infinite. Însă nu fiecare perioadă a fracţiei zecimale are proprietatea interesantă de a da la înmulţire o permutare circulară a cifrelor. Fără a mai aprofunda teoria, menţionăm că aceasta are loc numai pentru fracţiile pentru care numărul de cifre al perioadei este cu o unitate mai mică decît numitorul fracţiei ordinare corespunzătoare. Astfel, de exemplu:

1/7	dă	la	perioadă	6	cifre
1/17	„	„	„	16	„
1/19	„	„	„	18	„
1/23	„	„	„	22	„
1/29	„	„	„	28	„

Dacă proprietatea indicată mai sus (în ce priveşte numărul de cifre ale perioadei) nu este respectată, atunci perioada respectivă dă un număr care nu face parte din familia de numere de care ne ocupăm în acest paragraf. De exemplu, 1/13 dă o fracţie zecimală cu 6 (şi nu cu 12) cifre în perioadă:

$$1/13 = 0{,}076923$$

Înmulţind cu 2 obţinem un număr cu totul diferit:

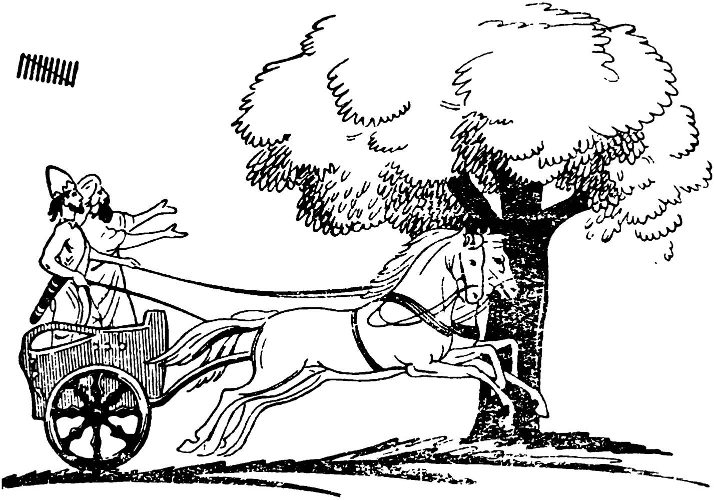
$$2/13 = 0{,}153846$$

De ce? Pentru că printre resturile împărţirii 1 : 13 nu există numărul 2. Resturi diferite au fost atîtea cîte cifre sînt în perioadă, adică 6; înmulţitori diferiţi pentru fracţia 1/13 avem 12; prin urmare, nu toţi înmulţitorii vor exista printre resturi, ci numai 6. Aceştia sînt următorii: 1, 3, 4, 9, 10, 12. Înmulţirea cu aceste 6 numere dă o permutare circulară a cifrelor

(076 923 × 3 = 230 769) iar înmulțirea, cu celelalte nu. Iată de ce fracția 1/13 dă un număr care este util numai în parte pentru „inelul magic".

CURIOZITĂȚI ARITMETICE

$$100 = \begin{cases} 91 + \dfrac{5823}{647} \\ 94 + \dfrac{1578}{263} \\ 96 + \dfrac{1428}{357} \end{cases}$$



CAPITOLUL VI

SCAMATORII FĂRĂ ÎNȘELĂTORIE

ARTA CALCULATORULUI INDIAN

Scamatoriile aritmetice nu caută să amăgească, să adoarmă atenția spectatorului. Pentru efectuarea scamatoriei aritmetice nu este necesară nici abilitatea extraordinară a mîinilor, nici rapiditatea uimitoare a mișcărilor, nici talente artistice sau deprinderi care să ceară antrenamente îndelungate. Secretul scamatoriei aritmetice constă în studiul amănunțit și în folosirea proprietăților interesante ale numerelor, cunoscînd particularitățile lor. Cine află dezlegarea unei astfel de scamatorii o va găsi simplă și clară; pentru cel care nu cunoaște însă aritmetica, chiar și operația cea mai obișnuită apare ca un fel de scamatorie.

A existat o vreme cînd priceperea de a efectua operaţii aritmetice obişnuite cu numere mari, operaţii cunoscute astăzi oricărui şcolar, era o artă cunoscută numai unor oameni care păreau că deţin aptitudini deosebite, supranaturale. În povestirea veche indiană „Nal şi Damaianti" găsim ecoul unei astfel de concepţii. Nal, care ştia foarte bine să conducă caii, îl plimba o dată pe calculatorul Ritupern pe lîngă un copac foarte ramificat — Vibitaka.

„Ascultă, spuse el. Aici pe pămînt nimeni nu cunoaşte totul: în arta de a conduce caii tu eşti primul; în schimb eu cunosc arta calculului..."

Şi pentru a-şi demonstra arta, calculatorul numără într-o clipă frunzele de pe Vibitaka stufoasă. Uimit, Nal îl rugă pe Ritupern să-i dezvăluie taina artei sale şi acesta se învoi.

„...Îndată ce şi-a rostit Ritupern cuvîntul său, lui Nal i s-au deschis ochii şi el a putut număra pe loc toate ramurile fructele şi frunzele Vibitakăi"...

Secretul consta în aceea că numărătoarea directă a frunzelor care necesita timp mult şi răbdare, era înlocuită prin numărătoarea frunzelor unei singure ramuri; rezultatul se obţinea prin înmulţirea acestui număr cu numărul de rămurele ale fiecărei crengi şi apoi cu numărul de crengi ale copacului (presupunînd că toate crengile conţineau acelaşi număr de rămurele, iar rămurelele acelaşi număr de frunze).

Dezlegarea celor mai multe scamatorii aritmetice este tot atît de simplă ca şi secretul lui Ritupern. Trebuie să aflăm doar în ce constă secretul scamatoriei şi vom cunoaşte imediat modul ei de efectuare. La baza fiecărei scamatorii aritmetice stă o anumită particularitate interesantă a numerelor şi, de aceea, cunoaşterea lor este distractivă şi instructivă în acelaşi timp.

FĂRĂ A DESCHIDE PUNGILE

Scamatorul pune pe masă o grămadă de monezi care însumează 3 ruble şi vă propune să rezolvaţi următoarea problemă: să repartizaţi banii în 9 pungi, astfel încît să puteţi plăti orice sumă pînă la trei ruble **fără a deschide pungile.**

Acest lucru poate să pară irealizabil. Să nu credeţi însă că scamatorul v-a întins o cursă, folosind un joc de cuvinte sau dînd acestor cuvinte o anumită răstălmăcire. Iată, scamatorul se apucă singur de treabă. Aşezînd monezile în pungi şi legînd de fiecare pungă cîte un bileţel pe care este notată suma ce-o cuprinde (fig. 39), el vă propune să numiţi orice sumă care să nu depăşească 3 ruble.

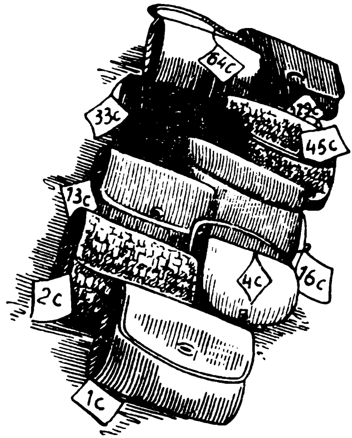


Fig. 39 — Scamatoria cu 9 portmonee

Numiţi prima sumă ce vă vine în minte: să zicem 2 ruble şi 69 copeici.

Fără să stea pe gînduri scamatorul alege şi vă întinde 4 pungi. Le deschideţi şi găsiţi:

în prima	64 c.
în a doua	45 c.
în a treia	1 r. 28 c.
în a patra	32 c.
Total:	2 r.69 c.

Sînteţi gata să-l învinuiţi că a înlocuit cu abilitate pungile şi cereţi să se repete scamatoria. El vă întinde pungile şi atunci numiţi o nouă sumă — de exemplu 1 rublă, sau 7 copeici, sau 2 ruble 93 copeici; el vă arată imediat care din pungile ce le aveţi în faţă reprezintă suma numită de dumneavoastră. Şi anume:

pentru 1 rublă — 6 pungi (32 copeici, 1 copeică, 45 copeici, 16 copeici, 2 copeici, 4 copeici);

pentru 7 copeici — 3 pungi (1 copeică, 2 copeici, 4 copeici);

pentru 2 ruble 93 copeici — 7 pungi (1 rublă 28 copeici, 32 copeici, 8 copeici, 45 copeici, 64 copeici, 16 copeici).

La dorința scamatorului pungile sînt gata totdeauna să formeze orice sumă numită (pînă la 3 ruble).

Cum se explică acest lucru?

Secretul constă în repartizarea corespunzătoare a monedelor: 1 copeică, 2 copeici, 4 copeici, 8 copeici, 16 copeici, 32 copeici, 64 copeici, 128 copeici și, în sfîrșit, în ultima pungă — restul banilor adică:

$$300 - (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128) =$$
$$= 300 - 255 = 45 \text{ copeici}$$

Din primele 8 pungi putem forma ușor orice sumă de la 1 pînă la 255 copeici; dacă se dă însă o sumă mai mare, atunci se folosește și ultima pungă cu 45 de copeici, iar diferența se completează din primele 8 pungi.

Puteți verifica utilitatea unei astfel de grupări a numerelor făcînd oricîte probe și vă veți convinge că din ele se poate întocmi, într-adevăr, orice număr care nu depășește trei sute. Vă interesează probabil și cauza pentru care șirul de numere 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 etc. are o proprietate atît de interesantă. Acest lucru nu este greu de înțeles dacă ne amintim că numerele din șirul nostru reprezintă puteri ale lui 2: 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4 etc[1]. și, prin urmare, pot fi privite ca niște categorii ale sistemului de numerație binar. Deoarece fiecare număr poate fi scris în sistemul binar, înseamnă că orice număr poate fi întocmit din suma puterilor lui 2, adică din numere ale seriei 1, 2, 4, 8, 16 etc. Atunci cînd alegeți pungile pentru a întocmi din conținutul lor numărul dat, exprimați de fapt numărul dat în sistemul de nume-

[1] Cei care au învățat algebră știu că numărul 1 poate fi considerat ca 2 la puterea zero.

rație binar. De exemplu, numărul 100 poate fi reprezentat cu ușurință în sistemul binar astfel:

100	2					
0	50	2				
	0	25	2			
		1	12	2		
			0	6	2	
				0	3	2
					1	*1*

100 =	1	1	0	0	1	0	0
	64	32	(16)	(8)	4	(2)	(1)

$$100 = 64 + 32 + 4$$

Amintim că în sistemul binar pe locul întîi din dreapta stau unitățile simple, pe locul al doilea unitățile de ordinul II, adică formate din 2 unități simple, pe locul al treilea — unități de ordinul III formate din 2^2 unități simple, pe locul al patrulea — unități de ordinul IV, formate din 2^3 adică 8 unități simple și așa mai departe.

SE GHICEȘTE NUMĂRUL CHIBRITURILOR

De proprietățile sistemului binar ne putem folosi și pentru scamatoria următoare. Propuneți unei persoane să pună pe masă o cutie de chibrituri nu tocmai plină; iar alături, în stînga ei, să așeze 7 bucățele de hîrtie de formă dreptunghiulară. Rugați apoi persoana să facă în lipsa dumneavoastră următoarele: lăsînd în cutie o jumătate din numărul chibriturilor, să pună cealaltă jumătate pe hîrtia cea mai apropiată; dacă numărul chibriturilor este impar, atunci chibritul de prisos să-l așeze alături de hîrtie. Chibriturile de pe hîrtie (în afara celui de alături) trebuie împărțite în două părți egale: jumătate în cutie, iar cealaltă jumătate se trece pe hîrtia de-alături; cînd numărul este impar, chibritul rămas se pune alături de cea de-a doua hîrtie. Mai departe se procedează în acelaşi fel, punînd de fiecare dată jumătate de chibrituri înapoi în cutie,

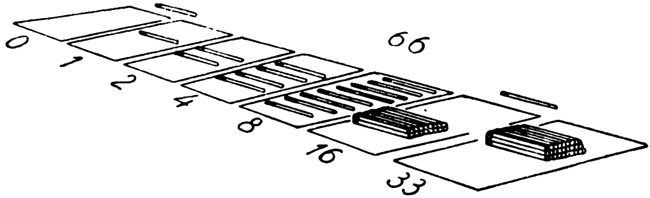


Fig. 40 — Aflarea numărului de chibrite. Se pot urmări operaţiile succesive efectuate de cel care rezolvă problema.

iar cealaltă jumătate mutînd-o pe hîrtia următoare; în cazul cînd numerele sînt impare, să nu se uite să se pună chibritul de prisos alături de hîrtie. În cele din urmă toate chibriturile, afară de cele rămase alături de bucăţelele de hîrtie, sînt introduse în cutie (fig. 40 şi 41).

După ce s-a făçut această operaţie vă înapoiaţi în cameră, şi, aruncînd o privire asupra bucăţelelor de hîrtie goale, spuneţi numărul de chibrituri care era în cutie.

Cum poate fi ghicit după hîrtioarele goale şi după cîteva chibrituri izolate, aşezate lîngă ele, numărul iniţial al chibriturilor din cutie?

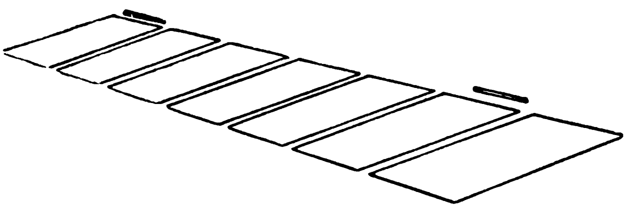


Fig. 41 — Continuarea scamatoriei — poziţia finală a hîrtiilor.

În cazul de faţă bucăţelele de hîrtie „goale“ sînt foarte edificatoare; cu ajutorul lor şi al chibriturilor izolate se poate citi numărul căutat, pentru că el este scris pe masă în sistemul de numeraţie binar. Explicăm aceasta cu ajutorul unui exemplu. Presupunem că în cutie au fost 66 de chibrituri. Operaţiile succesive, precum şi aspectul final al hîrtiilor, sînt date în schemele din figurile 40 şi 41.

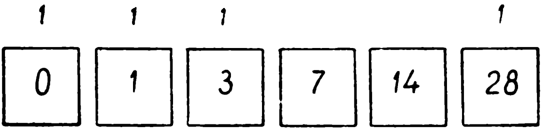


Fig. 42 — Un alt caz. Se poate observa prima operaţie a scamatoriei.

Nu este greu să ne dăm seama că operaţiile cu chibrituri sînt de fapt cele pe care le-am fi făcut dacă vream să exprimăm numărul chibriturilor din cutie în sistemul de numeraţie binar; schema finală va reprezenta direct acest număr în sistem binar, în cazul cînd hîrtioarele goale vor fi considerate drept zerouri, iar hîrtioarele marcate cu chibrituri drept unităţi. Citind schema de la stînga spre dreapta obţinem:

1 0 0 0 0 1 0
64 (32) (16) (8) (4) 2 (1)

iar în sistemul zecimal: $64 + 2 = 66$

Dacă am fi avut 57 de chibrituri, obţineam alte scheme, identice cu cele indicate în figurile 42 şi 43.

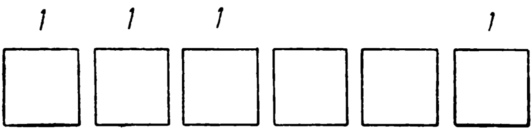


Fig. 43 — Sfîrşitul scamatoriei.

Numărul căutat, scris în sistemul binar, este:

1 1 1 0 0 1
32 16 8 (4) (2) 1

iar în sistem zecimal: $32 + 16 + 8 + 1 = 57$

Cea de-a treia variantă a aceleiaşi scamatorii reprezintă o metodă originală de ghicire a unui număr cu ajutorul chibriturilor. Cel care şi-a fixat în gînd un

Fig. 44 — Aflarea numărului ales cu ajutorul chibriturilor: ce face cel care propune problema.

număr trebuie să-l împartă, tot în gînd, în două, jumătatea obţinută din nou în două etc. (de la numărul impar se va scădea o unitate); la fiecare împărţire va pune în faţa sa, pe masă, un chibrit aşezat orizontal dacă numărul împărţit este par, şi vertical dacă acest număr este impar. La sfîrşitul operaţiei se obţine o figură de genul celei reprezentate alăturat.

Dumneavoastră priviţi această figură şi numiţi fără greş numărul ales: 137.

Cum îl aflaţi?

Metoda devine clară dacă în exemplul ales (137) se va nota succesiv, lîngă fiecare chibrit, acel număr a cărui împărţire a fost notată cu chibritul respectiv (fig. 45).

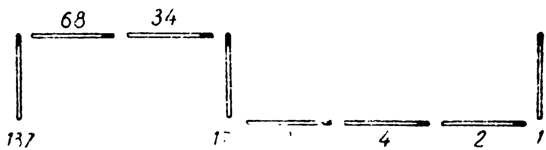


Fig. 45 — Secretul scamatoriei: ce face cel care rezolvă problema.

Deoarece ultimul chibrit indică în toate cazurile numărul 1, pornind de la el spre împărţirile precedente, nu este greu să ajungem la numărul ales iniţial. De exemplu, cu ajutorul figurii 46 puteţi afla că s-a ales iniţial numărul 664. Într-adevăr, efectuînd succesiv înmulţirea cu 2 (începînd de la capăt) şi adăugînd acolo unde este necesar 1, obţinem numărul ales (fig. 47).

În felul acesta, folosind chibriturile urmăriţi gîndul celui care a efectuat operaţia şi restabiliţi întregul lanţ al calculelor.

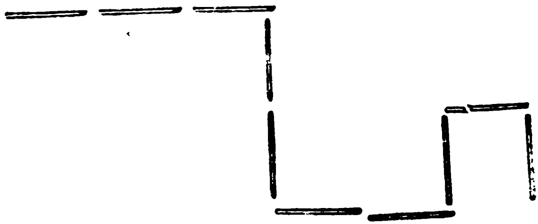


Fig. 46 — Ce număr a fost reprezentat aici?

Acelaşi rezultat se poate obţine şi altfel, dîndu-ne seama de faptul că chibritul orizontal trebuie să corespundă, în sistemul binar, zeroului (împărţirea cu 2 fară rest), iar cel vertical cu unitatea.

Astfel, în primul exemplu avem (citind de la dreapta spre stînga) numărul:

1	0	0	0	1	0	0	1
128	(64)	(32)	(16)	8	(4)	(2)	1

sau în sistem zecimal:

$$128 + 8 + 1 = 137$$

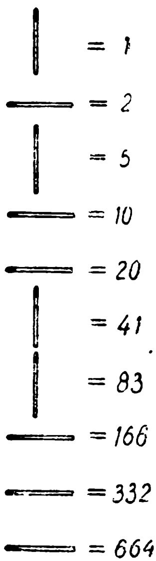


Fig. 47 — Răspuns la problema din fig. 46.

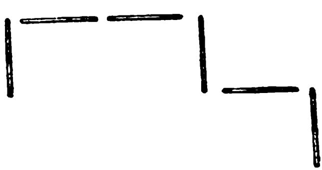


Fig. 48 — Ce număr este reprezentat în această figură?

În cel de-al doilea exemplu numărul ales se va reprezenta, în sistemul binar, în felul următor:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 512 & (256) & 128 & (64) & (32) & 16 & 8 & (4) & (2) & (1) \end{matrix}$$

sau în sistemul zecimal:

$$512 + 128 + 16 + 8 = 664$$

Acum încercaţi să aflaţi ce număr reprezintă schema din figura 48.

Acest lucru este relativ simplu. Într-adevăr, numărului „10010101“, în sistem binar, îi corespunde în sistemul zecimal:

$$128 + 16 + 4 + 1 = 149$$

Menţionăm că unitatea obţinută la ultima împărţire trebuie însemnată cu un chibrit v e r t i c a l.

GARNITURA DE GREUTĂŢI IDEALĂ PENTRU CÎNTAR

Probabil că unii cititori şi-au şi pus întrebarea: de ce oare pentru efectuarea experienţelor descrise mai sus folosim tocmai sistemul b i n a r? Doar fiecare număr poate fi reprezentat în orice sistem, inclusiv cel zecimal. Cum se explică preferinţa acordată aici sistemului binar?

Ea se explică prin faptul că în acest sistem în afară de zero se foloseşte o singură cifră — unitatea, şi prin urmare numărul este constituit din diferitele puteri ale lui 2, luate o singură dată. Dacă în scamatoria cu pungile am fi împărţit banii, de exemplu, după sistemul cincinal, atunci am fi putut forma orice sumă, fără a deschide pungile, numai cînd fiecare pungă s-ar repeta de cel puţin patru ori (pentru că în sistemul cincinal afară de zero se mai folosesc patru cifre).

De altfel, sînt cazuri cînd este mai comod să folosim sistemul cu baza 3 şi nu cel binar. Printre astfel de cazuri se numără cunoscuta „problemă a greutăţilor“, care poate face subiectul unei scamatorii aritmetice.

Să zicem că vi s-a propus să găsiţi o garnitură de patru greutăţi, cu ajutorul cărora să puteţi cîntări orice număr de kilograme de la 1 pînă la 40. Sistemul binar vă ajută la aflarea garniturii următoare:

1 kg, 2 kg, 4 kg, 8 kg, 16 kg,

cu care pot fi cîntărite toate greutăţile de la 1 pînă la 31 de kg. Dar, evident, aceasta nu satisface condiţiile cerute nici cu privire la numărul greutăţilor, nici în ce priveşte greutatea maximă (sînt 31 kg în loc de 40). Pe de altă parte, dumneavoastră nu aţi folosit aici posibilitatea de a aşeza greutăţile numai pe un singur taler al cîntarului, ci pe ambele talere, adică de a utiliza atît suma greutăţilor, cît şi diferenţa lor. Această posibilitate permite aşa de multe combinaţii, încît vă puteţi pierde în căutări fără a alege un anumit sistem.

Desigur, dacă nu găsiţi calea cea justă, veţi fi tentaţi să vă îndoiţi chiar de posibilitatea de rezolvare a acestei probleme.

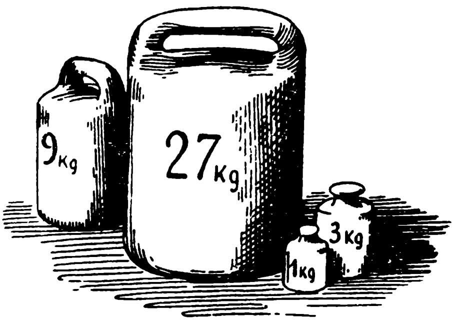


Fig. 49 — Cu ajutorul acestor patru greutăţi se poate cîntări orice obiect de la 1 kg pînă la 40 kg.

O persoană iniţiată alege însă cu uşurinţă aproape uimitoare următoarele patru greutăţi (fig. 49):

1 kg, 3 kg, 9 kg, 27 kg.

Orice număr întreg de kg, pînă la 40 kg, poate fi cîntărit cu aceste greutăţi, punîndu-le cînd pe un taler, cînd pe ambele talere ale cîntarului (vezi tabelul de la pag. 131).

Nu dăm exemple, pentru că oricine se poate convinge de utilitatea acestei garnituri de greutăţi în rezolvarea problemei noastre. Să ne oprim mai bine asupra întrebării: de ce oare acest şir are proprietatea enunţată? Cititorii au observat probabil că numerele de mai sus constituie şirul de puteri[1] ale numărului 3:

$$3^0,\ 3^1,\ 3^2,\ 3^3$$

Înseamnă că aici ne folosim de sistemul de numeraţie cu baza 3. Greutăţile sînt cifrele acestui sistem de numeraţie. Dar cum să-l utilizăm, dacă greutatea cerută se obţine sub forma d i f e r e n ţ e i a două greutăţi? Şi cum să se evite necesitatea de dublare a greutăţilor (doar în sistemul de numeraţie cu baza 3, afară de zero, se folosesc două cifre: 1 şi 2)?

Şi una, şi cealaltă se realizează prin introducerea cifrelor „negative". Aceasta se reduce la folosirea lui 3 — 1 în locul cifrei 2, adică a unităţii de ordin superior din care se s c a d e o unitate de ordin inferior. De exemplu, în sistemul de numeraţie cu baza 3 astfel transformat, numărul 2 nu se notează cu cifra 2, ci cu $1\bar{1}$, unde semnul — deasupra cifrei unităţilor arată că această unitate se scade. De asemenea, numărul 5 nu se va reprezenta prin 12, ci cu $1\bar{1}\bar{1}$ (adică $9-3-1=5$).

Acum este clar că dacă orice număr poate fi reprezentat în sistemul de numeraţie cu baza 3 cu ajutorul zeroului (adică a semnului care indică lipsa numărului) şi a unei singure cifre, şi anume a unităţii care se adaugă sau se scade, atunci din numerele 1, 3, 9, 27 se pot forma, adunîndu-le sau scăzîndu-le, toate numerele de la 1 la 40. Adunarea corespunde, la cîntărire, cazului cînd toate greutăţile se aşază pe acelaşi taler, iar scăderea — situaţiei cînd o parte din greutăţi sînt pe talerul cu marfă şi, prin urmare, greutatea lor se

[1] Unitatea poate fi privită ca puterea zero a lui 3 (în general ca puterea zero a oricărui număr).

Greutatea	Talerul drept	Talerul stîng	Greutatea	Talerul drept	Talerul stîng
1	1	0	21	27+3	9
2	3	1	22	27+3+1	9
3	3	0	23	27	3+1
4	3+1	0	24	27	3
5	9	3+1	25	27+1	3
6	9	3	26	27	1
7	9+1	3	27	27	0
8	9	1	28	27+1	0
9	9	0	29	27+3	1
10	9+1	0	30	27+3	0
11	9+3	1	31	27+3+1	0
12	9+3	0	32	27+9	3+1
13	9+3+1	0	33	27+9	3
14	27	9+3+1	34	27+9+1	3
15	27	9+3	35	27+9	1
16	27+1	9+3	36	27+9	0
17	27	9+1	37	27+9+1	0
18	27	9	38	27+9+3	1
19	27+1	9	39	27+9+3	0
20	27+3	9+1	40	27+9+3+1	0

s c a d e din celelalte greutăţi de măsură. Zeroul corespunde l i p s e i de greutate.

După cum se ştie, acest sistem nu se foloseşte în practică. În toate ţările lumii în care este introdus sistemul metric de măsură se foloseşte garnitura de 1, 2, 2, 5 unităţi şi nu de 1, 3, 9, 27, deşi cu ajutorul celor dintîi se pot cîntări mărfuri care nu depăşesc 10 unităţi, iar cu ajutorul celorlalte — pînă la 40. Garnitura de 1, 3, 9, 27 nu a fost folosită nici înainte de introducerea sistemului metric. Care este oare cauza renunţării în practică la această garnitură de greutăţi care ni se pare atît de perfectă?

Cauza constă în aceea că garnitura ideală este comodă numai pe hîrtie. În practică însă acest sistem de cîntărire este foarte greoi. Dacă ar trebui să cîntărim numai numărul dat de unităţi — de exemplu, 400 g de unt sau 2 500 g zahăr — atunci sistemul de greutăţi de 100, 300, 900, 2 700 ar fi putut folosi în practică (deşi chiar în aceste cazuri ar fi trebuit să alegem mult timp combinaţia corespunzătoare). Dar atunci cînd sîntem nevoiţi să determinăm cît cîntăreşte marfa respectivă, această garnitură este foarte incomodă: pentru a adăuga la greutăţile aşezate în taler o singură unitate, adesea ar trebui să înlocuim total combinaţia precedentă cu o altă combinaţie nouă. În aceste condiţii cîntărirea se face foarte încet şi este foarte obositoare. Nu oricine îşi va da uşor seama, de exemplu, că o greutate de 19 kg se va obţine dacă pe un taler se aşază greutăţile de 27 şi 1 kg, iar pe celălalt 9 kg; că greutatea de 20 kg se determină cînd pe un taler aşezăm greutăţile de 27 şi 3 kg, iar pe celălalt 9 kg şi 1 kg. La fiecare cîntărire am fi nevoiţi să rezolvăm asemenea probleme. Garnitura de greutăţi de 1, 2, 2, 5 nu prezintă astfel de neajunsuri.

AFLĂM SUMA UNOR NUMERE NESCRISE

Unul din „numerele“ cele mai uimitoare, efectuate de fenomenalul calculator sovietic R. S. Arrago, este adunarea fulgerătoare — dintr-o singură privire — a unei întregi coloane de numere formate din mai multe cifre.

Dar ce putem spune despre o persoană care scrie suma chiar înainte de a i se dicta toţi termenii adunării?

Este vorba, desigur, de o scamatorie care se desfăşoară în felul următor: Persoana care ghiceşte numerele vă propune să scrieţi la alegere un număr oarecare format din mai multe cifre. Aruncînd o privire asupra acestui prim termen al adunării, cel care ghicește scrie pe o hîrtie suma întregii coloane de termeni ce urmează și vă înmînează această hîrtie spre păstrare. Vă roagă (el sau o altă persoană din cele prezente) să mai scrieţi un termen oarecare. Iar apoi scrie repede un al treilea termen al adunării. Dumneavoastră adunaţi cei trei termeni şi obţineţi cu exactitate rezultatul scris în prealabil pe hîrtia ce o aveţi în păstrare.

Dacă, de exemplu, aţi scris pentru început numărul 83 267, atunci cine ghiceşte scrie suma 183 266. Apoi scrieţi, să zicem, 27 935, iar ghicitorul adaugă cel de-al treilea termen — 72 064:

I	........dumneavoastră	83 267
III	........dumneavoastră	27 935
IV	........cel care ghicește	72 064
II	........suma:	183 266

Se obţine exact suma prescrisă, deşi cel ce ghiceşte numărul nu putea şti care va fi al doilea termen al adunării. De asemenea se poate prezice suma a 5 sau 7 termeni, însă atunci însuși cel care ghiceşte scrie doi sau trei dintre aceștia. Aici nu poate fi nici o bănuială că hîrtia cu rezultatul a fost înlocuită, pentru că pînă în ultima clipă ea este păstrată în buzunarul dumneavoastră. Este evident că ghicitorul recurge la o proprietate anumită a numerelor, pe care cei de faţă nu o cunosc. Care anume?

Aici se foloseşte faptul că prin adăugarea la un număr, să zicem din cinci cifre, a unui număr format din 5 de 9 (99 999), primul crește cu 100 000 — 1, adică în faţa lui apare un 1, iar ultima cifră se micşorează cu 1. De exemplu:

$$\begin{array}{r} 83\,267 \\ +\;\; 99\,999 \\ \hline 183\,266 \end{array}$$

Această sumă, adică suma dintre numărul scris de dumneavoastră și 99 999, este înregistrată pe hîrtie ca viitorul rezultat al adunării. Iar pentru a obţine acest rezultat, cel care ghiceşte, văzînd al doilea termen dat de dumneavoastră, îşi alege un al treilea termen, astfel încît împreună cu al doilea să formeze numărul 99 999, adică scade fiecare cifră a celui de-al doilea termen din 9. Aceste operaţii le puteţi urmări în exemplul precedent, precum şi în următoarele două exemple:

I	........dumneavoastră	379 264
III	........dumneavoastră	4 873
IV	........cel care ghiceşte	995 126
II	........suma	1 379 263

I	...... .dumneavoastră	9 035
III	........dumneavoastră	5 669
IV	........cel care ghiceşte	4 330
II	........suma	19 034

Bineînţeles că-l veţi pune în încurcătură pe cel care ghiceşte dacă al doilea termen ales va avea mai multe cifre decît primul; el nu va putea scrie un termen care să micşoreze al doilea număr pentru a justifica rezultatul prea mic pe care l-a prezis. De aceea, trebuie să fim destul de prevăzători şi să limităm libertatea de alegere, punînd dinainte această condiţie.

Scamatoria este mai de efect dacă la alegerea termenilor adunării participă cîteva persoane. După ce s-a scris primul termen, de exemplu 437 692, cel care ghiceşte prezice deja suma tuturor celor 5 numere, scriind 2 437 690 (aici se vor adăuga de două ori cîte 999 999, adică 200 000 — 2). Cele ce urmează decurg ca în schema:

I	......dumneavoastră aţi scris:	437 692
III	......altul a scris:	822 541
V	......al treilea a scris:	263 009
IV	......cel care ghiceşte a adăugat:	177 458
VI	...... „ „ „ „ „	736 990
II	......s-a prezis:	2 437 690

Încă un exemplu:

I	......dumneavoastră ați scris:	7 400
III	......altul a scris:	4 732
V	......al treilea a scris:	9 000
IV	..... cel care ghicește a adăugat:	5 267
VI	...... „ „ „ „ „	999
II	......s-a prezis:	27 398

Cred că nu va fi lipsit de interes pentru cititor să facă cunoştinţă cu descrierea aceleiaşi scamatorii de către scriitorul sovietic Şișkov, în romanul său „Pelerinii".

„Ivan Petrovici a rupt din carnețel o foiță, a întins-o băiețașului, și a întrebat:

— Ai creion? Scrie orice număr.

Băiețelul a scris. Ivan Petrovici aruncă o privire asupra acestui număr, scrise pe o altă bucățică de hîrtie un număr oarecare, apoi ascunse hîrtia în paie și o acoperi cu o pălărie.

— Scrie sub el altul. Ai scris? Acum voi scrie și eu unul. Acum adună cele trei numere. Numai fii atent, nu greși.

După două minute era gata răspunsul. Inginerul Voșkin (porecla băiatului) i-a arătat calculele făcute:

$$\begin{array}{r} 46\,853 \\ +\ 21\,398 \\ 78\,601 \\ \hline 146\,852 \end{array}$$

— O sută patruzeci și șase de mii opt sute cincizeci și doi, Ivan Petrovici.

— Cam mult timp numeri. Iar răspunsul meu —iată-l. Eu îl cunoșteam atunci cînd tu ai scris numai primul număr. Ia-l de sub pălărie.

Băiatul a apucat hîrtia. Acolo scria: 146 852".

În roman scamatoria rămîne fără comentarii. Dumneavoastră însă acum cunoașteți care este explicația sa aritmetică.

În anul 1916, în toiul războiului imperialist, unele ziare din Elveția neutră se ocupau cu „ghicitul" aritmetic în legătură cu ... soarta viitoare a împăraților Germaniei și Austriei. „Prorocii" adunau următoarele coloane de numere:

Pentru Wilhelm al II-lea:

anul nașterii	1859
anul urcării pe tron	1888
numărul anilor domniei	28
vîrsta	57
suma:	3 832

Pentru Franz Iosef:

anul nașterii	1830
anul urcării pe tron	1848
numărul anilor domniei	68
vîrsta	86
suma:	3 832

În această coincidență a sumelor „prorocii" vedeau un semn rău pentru persoanele încoronate și, deoarece fiecare din sume reprezentau dublul lui 1916, ambilor împărați li se prezicea pieirea tocmai în acest an.

Din punct de vedere matematic, această coincidență a rezultatelor nu era ceva neașteptat. Este suficient să schimbăm doar puțin ordinea termenilor adunării și vom înțelege imediat de ce rezultatul reprezintă un număr de două ori mai mare decît 1916. Într-adevăr să așezăm termenii în modul următor:

anul nașterii,
vîrsta,
anul urcării pe tron,
numărul anilor domniei.

Ce se întîmplă dacă la anul nașterii se adaugă vîrsta? Bineînțeles că se obține anul în care se face calculul.

Tot astfel, dacă la anul urcării pe tron se adaugă numărul anilor de domnie rezultă, din nou, anul în care se efectuează calculul. Şi atunci rezultatul obţinut prin adunarea celor patru termeni nu poate fi decît dublul anului în care s-a efectuat calculul. Este evident deci că soarta împăraţilor nu depindea de loc de o asemenea aritmetică...

Cum nu toţi cunosc cele spuse mai sus, le putem folosi pentru o scamatorie aritmetică nostimă. Propuneţi-i cuiva să scrie, fără să vedeţi, patru numere:

anul naşterii,
anul intrării în şcoală (în serviciu etc.),
vîrsta,
numărul anilor de şcoală (de serviciu).

Anunţaţi că veţi ghici suma acestor numere, deşi nu cunoaşteţi nici unul din ele. Pentru aceasta dublaţi anul în care se face scamatoria şi spuneţi rezultatul. Dacă de exemplu, scamatoria este făcută în anul 1962, atunci suma va fi 3 924.

Pentru a avea posibilitatea de a repeta scamatoria de cîteva ori, fără a dezvălui secretul, îi siliţi pe interlocutorii dumneavoastră să facă cu suma pe care o obţin cîteva operaţii aritmetice, mascînd în felul acesta metoda folosită.

ÎMPĂRŢIREA INSTANTANEE

Din numeroasele variante ale scamatoriilor de acest gen vom descrie una bazată pe proprietatea factorului format numai din 9, pe care o cunoşteam deja; cînd se înmulţeşte cu acesta un număr care conţine tot atîtea cifre, atunci se obţine un rezultat format din două jumătăţi: prima este numărul înmulţit micşorat cu o unitate, iar a doua jumătate este rezultatul obţinut prin scăderea primei jumătăţi din înmulţitor.

De exemplu, $247 \times 999 = 246\,753$;

$1\,372 \times 9\,999 = 13\,718\,628$ etc. Cauza poate fi aflată din rîndul următor:

$$247 \times 999 = 247 \times (1\,000 - 1) = 247\,000 - 247 = \\ = 246\,999 - 246$$

Folosind această proprietate, propuneţi unui grup de tovarăşi să efectueze împărţirea unor numere formate din mai multe cifre: unuia — 68 933 106 : 6 894, altuia —8 765 112 348 : 99 999, celui de-al treilea—543 456 : 544, celui de-al patrulea — 12 948 705 : 1 295 etc. Declaraţi că-i veţi întrece pe toţi în rezolvarea aceloraşi probleme. Şi, înainte ca ei să se apuce de lucru, înmînaţi fiecăruia un bileţel pe care aţi notat rezultatul împărţirii efectuate: celui dintîi — 9 999, pentru al doilea — 87 652, al treilea — 999, iar celui de-al patrulea — 9 999.

După modelul de mai sus puteţi găsi singuri un şir de alte mijloace de a-i uimi pe cei neiniţiaţi cu metoda de efectuare rapidă a împărţirilor; pentru aceasta folosiţi cîteva proprietăţi ale numerelor despre care s-a vorbit în capitolul „Galeria curiozităţilor numerice“ (vezi Cap. V).

CIFRA PREFERATĂ

Rugaţi pe cineva să vă spună cifra lui preferată. Admitem că v-a fost numită cifra 6.

— Uimitor! — exclamaţi dumneavoastră. Aceasta este cifra cea mai minunată.

— Dar prin ce este ea minunată? întreabă interlocutorul cu interes.

— Iată: înmulţiţi cifra preferată cu numărul cifrelor semnificative, adică cu 9, şi numărul obţinut (54) scrieţi-l ca înmulţitor sub numărul 12 345 679:

$$\times \begin{array}{r} 12\,345\,679 \\ 54 \end{array}$$

Ce vom obţine drept produs:

Interlocutorul efectuează înmulţirea şi obţine, uimit, un rezultat format numai din cifra lui preferată:

666 666 666

— Vedeţi ce gust aritmetic fin aveţi — spuneţi dumneavoastră. Aţi ştiut să alegeţi dintre toate cifrele tocmai pe aceea care are această proprietate minunată!

Care este însă explicaţia:

De un gust tot atît de rafinat ar fi dat dovadă interlocutorul dacă ar fi ales orice altă cifră de la 1 pînă la 9, pentru că fiecare din ele are aceeaşi proprietate:

$$\begin{array}{r} 12\,345\,679 \\ \times 4 \times 9 \\ \hline 444\,444\,444 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12\,345\,679 \\ \times 7 \times 9 \\ \hline 777\,777\,777 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12\,345\,679 \\ \times 9 \times 9 \\ \hline 999\,999\,999 \end{array}$$

De ce se petrec lucrurile aşa, veţi înţelege imediat dacă vă amintiţi ceea ce s-a vorbit despre numărul 12 345 679 la „Galeria curiozităţilor numerice".

GHICIREA DATEI NAŞTERII

Scamatoriile din această categorie pot fi foarte diferite. Voi descrie una din variantele acestei scamatorii destul de complicată, dar deosebit de interesantă pentru cei neiniţiaţi.

Presupunem că v-aţi născut la 18 mai şi că aveţi acum 23 de ani. Eu, desigur, nu cunosc nici data naşterii, şi nici vîrsta dumneavoastră. Cu toate acestea vă promit că ghicesc şi una şi cealaltă, punîndu-vă să faceţi numai cîteva calcule.

Iată acest calcul: numărul de ordine al lunii (mai este luna a 5-a) trebuie înmulţit cu 100, se adaugă la produsul astfel obţinut ziua naşterii (18); se va dubla suma, şi se adună 8 la rezultat; numărul obţinut se înmulţeşte cu 5; se mai adaugă la produs 4; rezultatul se va înmulţi cu 10; se adaugă încă 4 şi la numărul astfel obţinut se adună vîrsta pe care o aveţi (23).

După ce efectuați toate operațiile îmi veți comunica rezultatul final al calculelor făcute. Eu voi scădea din el 444, iar rezultatul obținut îl voi împărți în grupuri de cîte două cifre, de la dreapta spre stînga; obțin imediat ziua și luna nașterii dumneavoastră, precum și vîrsta.

Într-adevăr, să efectuăm succesiv toate operațiile indicate mai sus:

$$
\begin{array}{rcrcr}
5 & \times & 100 & = & 500 \\
500 & + & 18 & = & 518 \\
518 & \times & 2 & = & 1\,036 \\
1\,036 & + & 8 & = & 1\,044 \\
1\,044 & \times & 5 & = & 5\,220 \\
5\,220 & + & 4 & = & 5\,224 \\
5\,224 & \times & 10 & = & 52\,240 \\
52\,240 & + & 4 & = & 52\,244 \\
52\,244 & + & 23 & = & 52\,267
\end{array}
$$

Făcînd scăderea 52 267—444, obținem numărul 51 823.

Acum împărțim acest număr în grupuri de cîte două cifre fiecare, de la dreapta spre stînga. Avem:

5—18—23

adică luna a 5-a (mai), ziua 18, vîrsta 23 ani.

Cum am obținut acest rezultat?

Secretul îl dă următoarea egalitate:

$$\{[(100\,m + t) \times 2 + 8] \times 5 + 4\} \times 10 + 4 + n - 444 =$$
$$= 10\,000\,m + 100\,t + n$$

Cu litera m s-a notat numărul de ordine al lunii, cu t — ziua, cu n — vîrsta. Partea stîngă a egalității exprimă toate operațiile efectuate succesiv, iar cea dreaptă — rezultatul care trebuie obținut dacă se fac toate operațiunile arătate de semne și paranteze. În expresia $10\,000\,m + 100\,t + n$ nici m, nici t și nici n nu pot fi mai mari decît niște numere de două cifre; de aceea numărul obținut drept rezultat, la împărțirea în grupuri de cîte două cifre, trebuie totdeauna să cuprindă trei părți, exprimate prin numerele căutate m, t, și n.

Credem că cititorul va fi suficient de inventiv pentru a găsi diferite variante ale acestei scamatorii, adică alte combinații ale operațiilor aritmetice care să dea același rezultat.

UNA DIN „OPERAŢIILE DISTRACTIVE" ALE LUI MAGNIŢKI

Propunem cititorului să găsească secretul următoarei scamatorii simple, care a fost descrisă în „Aritmetica" lui Magniţki în capitolul „Despre cîteva operaţii distractive bazate pe aritmetică".

Să aleagă cineva un număr oarecare referitor la bani, la zile, la ore sau la un obiect oarecare care poate fi numărat. Ne vom opri asupra exemplului cu inelul îmbrăcat pe falanga a doua a degetului mic (adică a celui de-al cincilea deget) de către o a patra persoană din cele opt de faţă. Cînd în această societate apare ghicitorul, el este întrebat: la care din cele opt persoane (numerotate cu cifre de la 1 pînă la 8), pe ce deget şi pe care falangă se găseşte inelul?

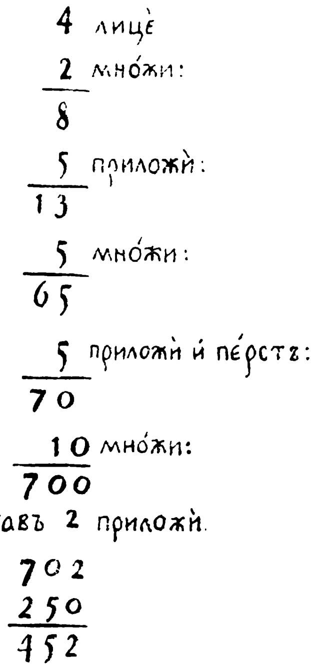


Fig. 50 — Aşa e prezentată scamatoria matematică în „Aritmetica" lui Magniţki.

„Iar el spune: cineva dintre dumneavoastră să-l înmulţească pe acela care l-a luat cu 2 şi să adauge 5, apoi să înmulţească din nou cu 5, să adune degetul pe care este inelul (adică numărul degetului cu inelul). În continuare înmulţeşte cu 10, adaugă falanga pe care se află inelul şi spune numărul obţinut.

Ei au procedat aşa cum le-a propus, înmulţindu-l pe al patrulea om care a luat inelul şi efectuînd toate celelalte operații cerute (vezi calculele); au găsit numărul 702, din care s-a scăzut 250, a rămas 452; răspunsul este: omul al patrulea, degetul al cincilea, falanga a doua."

Nu trebuie să ne mire faptul că această scamatorie aritmetică era cunoscută încă de acum 200 de ani; o problemă asemănătoare am găsit și într-una din primele culegeri de probleme distractive matematice — „Probleme numerice distractive și plăcute" a lui Bache-de-Mésiraique, care a apărut în 1612 — fiind luată din lucrarea lui Leonardo din Pisa (Fibonacci) (1202). Trebuie să menționăm că în general marea majoritate a jocurilor, ghicitorilor și scamatoriilor matematice care se folosesc și în prezent sînt de origine foarte veche.

GHICIREA NUMERELOR

Fără a vă întreba ceva, voi ghici rezultatul pe care îl veți obține în urma unor operații efectuate cu numărul ales de dumneavoastră.

Alegeți orice cifră afară de zero. Înmulțiți-o cu 37. Înmulțiți rezultatul cu 3. Tăiați ultima cifră a produsului, iar numărul rămas împărțiți-l cu cifra aleasă inițial; nu veți avea rest.

Eu nu pot să vă spun ce număr ați aflat, deși l-am scris cu mult înainte să începeți lectura acestei cărți.

Ați obținut numărul 11.

A doua oară facem această scamatorie cu mici schimbări. Alegeți un număr format din două cifre. Adăugați în dreapta lui încă o dată același număr. Numărul obținut astfel împărțiți-l la cel ales inițial; împărțirea se va face fără rest. Adunați toate cifrele cîtului.

Ați obținut 2.

Dacă nu este așa, atunci verificați cu atenție calculele și vă veți convinge de faptul că ați greșit dumneavoastră, și nu eu.

Care este explicația acestor scamatorii?

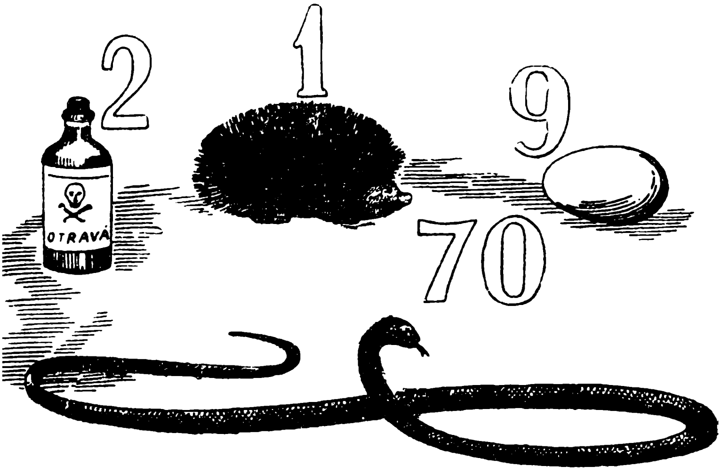
E x p l i c a ț i e. În primul exemplu numărul ales se înmulțea întîi cu 37, iar apoi cu 3. Dar $37 \times 3 = 111$, și a înmulți o cifră cu 111 înseamnă a obține un număr din trei cifre egale (de exemplu $4 \times 37 \times 3 = 444$). Ce-am făcut mai departe? Am tăiat ultima cifră și, prin urmare, am găsit un număr format din două cifre de același fel (44) care, desigur, trebuie să se împartă cu numărul ales și să dea cîtul 11.

În cel de-al doilea exemplu numărul de două cifre ales l-am scris de două ori; de exemplu, alegînd 29 am scris 2 929. Asta înseamnă că am înmulțit numărul ales cu 101 (într-adevăr, $29 \times 101 = 2\,929$). O dată ce știu acest lucru, pot să prevăd cu siguranță că în urma împărțirii unui astfel de număr format din patru cifre cu numărul ales inițial se va obține 101 și, prin urmare, suma cifrelor cîtului $(1+0+1)$ este egală cu 2.

După cum vedeți, explicația o găsim în înseși proprietățile numerelor 111 și 101; sîntem îndreptățiți deci să plasăm aceste două numere în vitrina noastră de curiozități aritmetice.

CURIOZITĂȚI ARITMETICE

$$100 = \begin{cases} 24\,\frac{3}{6} + 75\,\frac{9}{18} \\ 47\,\frac{3}{6} + 52\,\frac{9}{18} \end{cases}$$



CAPITOLUL VII

CALCULE RAPIDE

FENOMENE REALE ŞI IMAGINARE

Cei care au participat la spectacolele calculatorului sovietic Arrago, fără îndoială, nu au putut să nu rămînă uimiţi de rapiditatea cu care efectua calculele. De exemplu, Arrago a calculat în minte cubul numărului 4 729 în mai puţin de un minut (rezultatul: 105 756 712 489), iar pentru înmulţirea numerelor 679 321 × 887 064, efectuată tot în minte, lui nu i-au trebuit decît 1 1/2 minute. Aici nu mai este vorba de scamatorii, ci de aptitudini naturale deosebite. Eu am avut posibilitatea de a urmări calculele acestui calculator fenomenal nu numai pe estradă, ci şi în casă, între patru ochi, şi m-am convins că el nu foloseşte nici un fel de metode speciale de calcul, efectuînd operaţiile în minte aşa cum le facem noi pe hîrtie. Numai memoria lui neobişnuită în ce priveşte numerele îl ajută să nu se folosească de scrierea rezultatelor intermediare, ci să opereze cu numerele formate din două cifre tot aşa de uşor cum lucrăm noi cu numerele alcătuite dintr-o singură cifră. Datorită acestui fapt, pentru el înmulţirea unui număr format din şase cifre cu un alt număr de şase cifre nu prezintă mai multă greutate decît cea pe care o întîmpinăm cînd înmulţim două numere de cîte trei cifre.

Astfel de fenomene ca Arrago în U.R.S.S., sau ca Inodi, Diamandi Rückle, doctor Frid Brauns în apus, se întîlnesc rar. Pe lîngă ei însă apar pe scena de estradă matematicieni de alt gen, care îşi bazează arta pe anumite trucuri aritmetice. Poate că aţi auzit sau aţi participat la „spectacolele unor matematicieni geniali" care calculau cu o rapiditate uimitoare cîte zile aţi trăit, cîte minute, secunde, în ce zi a săptămînii v-aţi născut etc. Numai că pentru majoritatea acestor calcule nu sînt necesare aptitudini matematice deosebite. Trebuie să ştim numai cîteva secrete ale acestor scamatorii, de a căror dezvăluire ne vom şi ocupa imediat.

MEMORIZAREA NUMERELOR

Cel care efectuează calcule rapide trebuie să aibă în primul rînd o memorie deosebită a numerelor. Cît de dezvoltată poate fi această memorie la cei mai buni calculatori ne arată următoarele recorduri. Cunoscutul calculator german Rückle a învăţat pe dinafară un număr format din 504 cifre în numai 35 de minute, iar compatriotul lui, Dr. Brauns, a depăşit acest record învăţînd acelaşi număr în mai puţin de 13 minute!

Bineînţeles, puţini oameni au de la natură asemenea memorie fenomenală. Calculatorii profesionişti care nu au o memorie deosebită a numerelor se ajută de diferite metode artificiale (aşa-numite „mnemonice"). În viaţa de toate zilele şi noi încercăm să folosim aceste metode şi în majoritatea cazurilor trebuie să recunoaştem că le alegem destul de prost. Dorim, de exemplu, să memorăm numărul de telefon 25—49; noi ne punem speranţele în faptul că acest număr poate fi readus cu uşurinţă în memorie pentru că este format din două pătrate perfecte: $25 = 5^2$, $49 = 7^2$. Însă atunci cînd trebuie să ni-l reamintim, constatăm că avem la dispoziţie un şir de numere din care putem alege:

49—25, 36—64, 25—16, 64—16, 81—25 etc.

Încurcături se ivesc şi în alte cazuri. Fie numărul de telefon 17—53; ne hotărîm să-l memorăm folosindu-ne de faptul că suma primelor două cifre $(1 + 7)$ este egală cu suma ultimelor două $(5 + 3)$. Rezultatul final însă nici acum nu este mai bun decît în cazul precedent. Şi cînd te gîndeşti că mai trebuie să ţii minte cine este posesorul telefonului la a cărui memorare s-a folosit metoda respectivă. Este uimitor cu cîtă perseverenţă caută oamenii să folosească această metodă, evident inutilă. De această pasiune şi-a bătut joc cu mult spirit scriitorul I. Hašek în cunoscutele lui „Peripeţiile bravului soldat Švejk“:

«Iar Švejk citi pe patul carabinei numărul de serie şi izbucni:

— 4268! Numărul ăsta l-a avut o locomotivă de cale ferată de pe linia şaisprezece din gara Peciky. Trebuia dusă la depoul din Lysa pe Labem, pentru reparaţie, dar n-a fost chiar aşa de uşor, d-le plutonier, pentru că mecanicul care urma s-o conducă pînă acolo avea slabă ţinere de minte la cifre. Impiegatul de mişcare l-a chemat la el la canţelarie şi i-a spus:

„Pe linia şaisprezece se află locomotiva cu numărul 4268. Eu ştiu că dumneata n-ai ţinere de minte la cifre şi că, atunci cînd ţi se scrie un număr pe hîrtie, pierzi hîrtia. Dar fii cu băgare de seamă la ce-ţi spun, dacă nu ţii minte cifrele: am să-ţi arăt ce uşor e să ţii minte orice cifră. Numai să fii cu băgare de seamă: locomotiva pe care trebuie s-o duci la depoul din Lysa pe Labem are numărul 4268. Va să zică, atenţie: prima cifră e 4, a doua 2. Ţii minte 42, adică 2 ori 2; asta înseamnă că dacă începi de la stînga ai mai întîi 4 pe care-l împarți la 2, și-ți dă 2, așa că iar ai frumos aranjat, unul lîngă altul, 4 și 2. Ei, și acum să nu te sperii. Cît face doi ori 4, opt, nu? Bun, întipărește-ți în minte că din numărul 4268 cifra opt este ultima la rînd. Dacă ții minte că prima este 4, a doua 2, a patra 8, nu mai rămîne decît să fii deștept și să ții minte și pe 6, care vine înainte de opt. Lucru-i la mintea cocoșului: prima cifră este 4, a doua doi, patru și cu doi fac șase. Care va să zică, acum ești sigur că a doua de la capăt este șase; de acum în colo ordinea cifrelor nu-ți mai iese din minte. Îți rămîne în cap numărul 4268. Sau, putem ajunge la același rezultat, pe o cale și mai simplă...

....

Și atunci a început să-i explice o metodă mai simplă, ca să-și amintească de numărul 68. Șase fără doi fac 4, care va să zică are 4—68, nu mai rămîne decît să-l bage pe 2 și gata: 4—2—6—8. De altfel nu-i prea greu dacă socoteala se face și altfel: cu ajutorul înmulțirii și împărțirii. Se ajunge la același rezultat. Ții minte, — i-a spus impiegatul — că de două ori 42 fac 84. Anul are 12 luni. Se scade 12 din 84 și ne rămîne 72, din care mai scădem 12 luni și rămînem cu 60. Așadar pe 6 îl avem asigurat, iar pe zero îl ștergem. Va să zică avem așa: 42,68,4. Dacă l-am tăiat pe zero, îl tăiem și pe 4 din coadă și ne asigurăm iarăși, foarte ușor, 4268, numărul locomotivei pe care trebuie s-o duci la depoul din Lysa pe Labem."»

Metodele folosite de calculatorii de estradă sînt de cu totul alt gen. Iată una dintre ele, care la nevoie poate fi utilă pentru oricare din noi.

Calculatorul leagă de cifre anumite consoane. Deoarece s-au ales numai consoanele, ele pot fi, fără să ne temem de vreo încurcătură, combinate cu vocalele, formîndu-se cuvinte scurte.

Aceasta este numai una din metodele mnemotehnice folosite de calculatori [1]. Există, desigur, și alte metode, dar asupra lor nu ne vom opri.

---

[1] Vezi mai amănunțit în cartea mea „Scamatorii și distracții"

„CÎTE ZILE AM?"

Pentru a putea determina cu repeziciune, după numărul anilor, numărul zilelor, calculatorul recurge la următoarea metodă: înmulţeşte jumătate din numărul anilor cu 73 şi adaugă un zero — rezultatul va fi tocmai numărul căutat. Procedeul devine clar dacă observăm că $730 = 365 \times 2$. Dacă eu am 24 de ani, atunci numărul de zile se va obţine înmulţind $12 \times 73 = 876$ şi, adăugînd un zero — 8 760. Însăşi înmulţirea cu 73 se face într-un mod prescurtat, lucru despre care se va vorbi mai jos.

Corecţia de cîteva zile care provine de la anii bisecţi de obicei nu se ia în consideraţie, deşi ea poate fi făcută cu uşurinţă adăugîndu-se la rezultat un sfert din numărul anilor; în exemplul nostru, $24 : 4 = 6$; prin urmare, rezultatul total este 8 766 [1].

Bineînţeles, cu cunoştinţele de pînă acum cititorul va putea încerca calcularea minutelor.

„CÎTE SECUNDE AM?"

Cînd vîrsta celui ce întreabă este exprimată printr-un număr par care nu depăşeşte 26, atunci la această întrebare se poate răspunde destul de repede folosind următoarea metodă: jumătate din numărul anilor se înmulţeşte cu 63; apoi, aceeaşi jumătate se înmulţeşte cu 72, rezultatul se scrie alături de primul şi se adaugă trei zerouri. Dacă, de exemplu, numărul anilor este 24, atunci pentru determinarea numărului de secunde se procedează astfel:

$63 \times 12 = 756$; $72 \times 12 = 864$, rezultatul este 756 864 000.

---

[1] Cu ajutorul metodelor de înmulţire rapidă arătate mai departe, aceste operaţii sînt mult simplificate şi rezultatul, care conţine milioane, se obţine foarte rapid. Îl sfătuiesc pe cititor să încerce să efectueze aceleaşi calcule pe cale obişnuită, pentru a se convinge cîtă economie de timp se face prin folosirea formulei de mai sus şi a metodelor indicate mai departe.

Ca şi în exemplul precedent, aici nu se ţine seama de anii bisecţi — o eroare pe care nimeni nu i-o va imputa calculatorului atunci cînd el are de-a face cu sute de milioane (ea poate fi corectată adăugîndu-se numărul de secunde care sînt cuprinse în numărul de zile egal cu a patra parte din numărul anilor).

Pe ce se bazează metoda arătată mai sus?

Pentru a determina numărul de secunde cuprins în numărul respectiv de ani este necesar să se înmulţească anii (în exemplul nostru 24) cu numărul de secunde dintr-un an, adică: $365 \times 24 \times 60 \times 60 = 31\,536\,000$. Vom face acelaşi lucru numai că factorul 31 536 îl împărţim în două (adăugarea de zerouri se înţelege de la sine). În locul înmulţirii lui 24 cu 31 536, înmulţim 24 cu 31 500 şi cu 36; pentru comoditate însă înlocuim aceste calcule cu altele, după cum se vede din schema de mai jos:

$$24 \times 31\,536 = \begin{cases} 24 \times 31\,500 = 12 \times 63\,000 = 756\,000 \\ 24 \times 36 = 12 \times 72 = \underline{864} \end{cases}$$
$$756\,864$$

Rămîne doar să adăugăm trei zerouri şi avem rezultatul căutat: 756 864 000.

METODE DE ÎNMULŢIRE RAPIDĂ

Am menţionat mai sus că pentru efectuarea acelor operaţii de înmulţire, în care se defalcă fiecare din procedeele indicate mai sus există metode foarte potrivite. Unele din ele sînt extrem de simple; ele uşurează atît de mult calculele, încît credem că nu ar fi de prisos ca cititorul să le memoreze şi să le folosească în mod obişnuit. Astfel este, de exemplu, metoda înmulţirii încrucişate, foarte comodă pentru efectuarea operaţiilor cu numere de două cifre. Metoda nu este nouă; ea a fost folosită din antichitate de către greci şi indieni şi se numea „metoda fulgerului“ sau „înmulţirea în cruce“. Acum este aproape uitată şi credem că nu-i rău s-o amintim.

Presupunem că trebuie să înmulţim 24 × 32. Aşezăm în minte numerele unul sub altul după schema următoare:

$$\begin{matrix} 2 & & 4 \\ | & \times & | \\ 3 & & 2 \end{matrix}$$

Efectuăm succesiv următoarele operaţii:

1) $4 \times 2 = 8$, este ultima cifră a rezultatului.

2) $2 \times 2 = 4$; $4 \times 3 = 12$; $4 + 12 = 16$; 6 este penultima cifră a rezultatului; 1 ţinem minte.

3) $2 \times 3 = 6$, la care adăugăm unitatea ţinută minte; se obţine 7, adică prima cifră a rezultatului.

Prin urmare, avem produsul 768.

După cîteva exerciţii această metodă este foarte uşor însuşită.

În continuare vom prezenta altă metodă, care constă în folosirea aşa-numitelor „completări“, comodă în cazul cînd numerele înmulţite se apropie de 100.

Presupunem că este necesar să înmulţim 92 × 96. „Completarea“ pentru 92 pînă la 100 va fi 8, pentru 96 va fi 4. Operaţia se efectuează după schema următoare:

factorii:	92	şi	96
„completările“	8	şi	4

Primele două cifre ale rezultatului se obţin prin scădere simplă din deînmulţit a „completării“ înmulţitorului, sau invers din înmulţitor a „completării“ deînmulţitului; adică din 92 se scade 4 sau din 96 se scade 8. În ambele cazuri avem 88; lîngă număr se scrie produsul „completărilor“: $8 \times 4 = 32$. Obţinem rezultatul 8 832.

Din transformările de mai jos se vede că rezultatul este corect:

$$92 \times 96 = \begin{cases} 88 \times 96 = 88(100-4) = 88\times 100 - 88\times 4 \\ \underline{4 \times 96} = 4\,(88+8) = \underline{4\times 8 + 88\times 4} \end{cases}$$
$$92 \times 96 \quad = \quad 8\,832+0$$

Iată alt exemplu:
Trebuie înmulțit 78 cu 77.
Factorii înmulțirii: 78 și 77,
„completările": 22 și 23

$$78-23 = 55$$
$$22\times 23 = 506$$
$$5\,500+506 = 6\,006$$

Un al treilea exemplu:
Să se înmulțească 99×98.
Factorii înmulțirii: 99 și 98,
„completările": 1 și 2

$$99-2 = 97$$
$$1\times 2 = 2$$

În cazul de față trebuie să ținem minte că 97 reprezintă numărul de sute. De aceea adunăm:

$$9\,700+2 = 9\,702$$

PENTRU CALCULELE COTIDIENE

Există un număr foarte mare de metode pentru efectuarea rapidă a operațiilor aritmetice, care sînt destinate calculelor cotidiene. În legătură cu aceasta s-ar putea scrie o carte întreagă dacă ne-am propune chiar numai descrierea metodelor celor mai principale[1]. Mă voi limita doar la cîteva exemple mai ușor de efectuat.

[1] Vezi, de ex.: G. N. Berman, „Metode de calcul", ed. VI, Fizmatghiz, 1959.

În practica calculelor tehnice și comerciale sînt numeroase cazurile cînd trebuie să se adune coloane de numere apropiate între ele ca mărime. De exemplu:

$$\left.\begin{array}{r}43\\38\\39\\45\\41\\39\\42\end{array}\right\}$$

Adunarea acestor numere este mult simplificată dacă folosim metoda indicată mai jos, a cărei esență este ușor accesibilă.

$$\left.\begin{array}{l}43 = 40 + 3\\38 = 40 - 2\\39 = 40 - 1\\45 = 40 + 5\\41 = 40 + 1\\39 = 40 - 1\\42 = 40 + 2\end{array}\right\} \begin{array}{l}40 \times 7 = 280\\3 - 2 - 1 + 5 + 1 - 1 + 2 = 7\\280 + 7 = 287\end{array}$$

Tot astfel găsim suma:

$$\left.\begin{array}{l}752 = 750 + 2\\753 = 750 + 3\\746 = 750 - 4\\754 = 750 + 4\\745 = 750 - 5\\751 = 750 + 1\end{array}\right\} 750 \times 6 + 1 = 4\,501$$

În mod asemănător se procedează în calculul mediei aritmetice a numerelor apropiate ca mărime. Să aflăm de exemplu media următoarelor prețuri:

Ruble	*Copeici*
4	65
4	73
4	75
4	67
4	78
4	74
4	68
4	72

Stabilim din ochi prețul rotund apropiat de cel mediu — în cazul de față acesta va fi desigur 4 r. 70 c. Notăm devierile tuturor prețurilor în jurul celui mediu: surplusurile cu semnul +, lipsurile cu semnul —. Obținem: $-5+3+5-3+8+4-2+2 = 12$

Împărţind suma devierilor cu numărul lor avem: 12 : 8 = 1,5.

De aici, preţul mediu căutat este:

$$4 \text{ r.}70 \text{ c.} + 1{,}5 \text{ c.} = 4 \text{ r.}71 \frac{1}{2} \text{ c.}$$

Trecem la înmulţire. Aici vom arăta înainte de toate că înmulţirea cu numerele 5, cu 25 şi 125 este mult simplificată dacă avem în vedere următoarele:

$$5 = \frac{10}{2}; \; 25 = \frac{100}{4}; \; 125 = \frac{1\,000}{8}$$

De aceea, putem scrie:

$$36 \times 5 = \frac{360}{2} = 180;$$

$$36 \times 25 = \frac{3\,600}{4} = 900;$$

$$36 \times 125 = \frac{3\,600}{8} = 4\,500;$$

$$87 \times 5 = \frac{870}{2} = 435;$$

$$87 \times 25 = \frac{8\,700}{4} = 2\,175;$$

$$87 \times 125 = \frac{87\,000}{8} = 10\,875$$

La înmulţirea cu 15 putem folosi faptul că:

$$15 = 10 \times 1 \frac{1}{2}$$

Pe această bază se pot efectua în minte calcule de genul următor:

$$36 \times 15 = 360 \times 1 \frac{1}{2} = 360 + 180 = 540$$

sau, mai simplu,

$$36 \times 1\frac{1}{2} \times 10 = 540$$

$$87 \times 15 = 870 + 435 = 1\,305$$

La înmulțirea cu 11 nu este de loc necesar să se scrie cinci rînduri:

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 383 \\ 11 \end{array} \\ \hline + \begin{array}{r} 383 \\ 383 \end{array} \\ \hline 4213 \end{array}$$

Este suficient ca sub deînmulțit să copiem încă o dată același număr deplasat cu o cifră spre stînga:

$$+\begin{array}{r} 383 \\ 383 \\ \hline 4213 \end{array} \quad \text{sau} \quad +\begin{array}{r} 383 \\ 383 \\ \hline 4213 \end{array}$$

și să se efectueze adunarea.

Foarte util este să ținem minte rezultatele obținute prin înmulțirea primelor nouă cifre cu 12, 13, 14 şi 15. În felul acesta înmulțirea numerelor de mai multe cifre cu aceşti înmulțitori va fi simplificată. Să presupunem că trebuie să înmulțim:

$$\times \begin{array}{r} 4587 \\ 13 \\ \hline \end{array}$$

Procedăm în felul următor. Fiecare cifră a deînmulțitului o înmulțim în minte dintr-o dată cu 13:

$7 \times 13 = 91$; scriem 1, ținem minte 9
$8 \times 13 = 104$; $104+9 = 113$; scriem 3, ținem minte 11
$5 \times 13 = 65$; $65+11 = 76$; scriem 6, ținem minte 7;
$4 \times 13 = 52$; $52+7 = 59$
în total: 59 631

Metoda se însuşeşte uşor, chiar după cîteva exerciţii; Există un procedeu foarte comod pentru înmulţirea numerelor de două cifre cu 11: distanţăm cifrele deînmulţitului şi scriem între ele suma lor:

$$43 \times 11 = 473$$

Dacă suma cifrelor este formată din două cifre, atunci numărul zecilor ei se adaugă la prima cifră a deînmulţitului:

$$48 \times 11 = 4\ (12)\ 8, \text{ adică } 528$$

Să dăm, în sfîrşit, cîteva exemple de împărţire rapidă. La împărţirea cu 5 se înmulţeşte atît deîmpărţitul cît şi împărţitorul cu 2:

$$3\,471 : 5 = 6\,942 : 10 = 694{,}2$$

La împărţirea cu 25 se înmulţesc ambele numere cu 4:

$$3\,471 : 25 = 13\,884 : 100 = 138{,}84$$

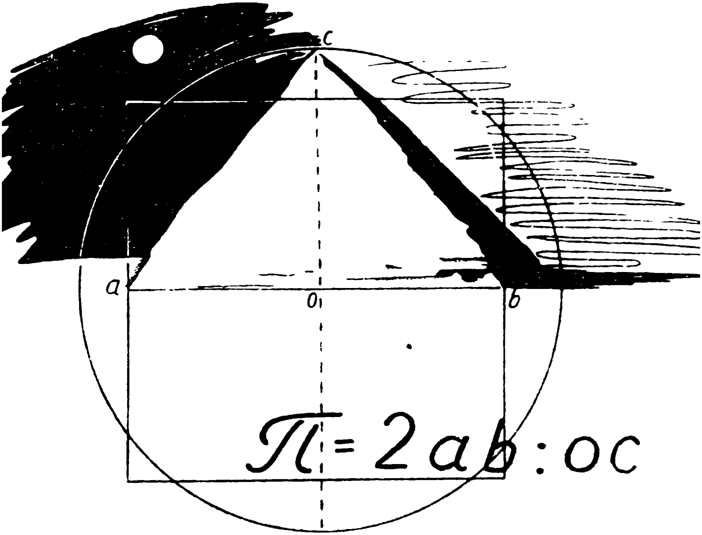
În mod asemănător se procedează la împărţirea cu $1^1/_2$ (egal cu 1,5) şi cu $2^1/_2$ (adică 2,5):

$$3\,471 : 1\frac{1}{2} = 6\,942 : 3 = 2\,314$$

$$3\,471 : 2{,}5 = 13\,884 : 10 = 1\,388{,}4$$

CURIOZITĂŢI ARITMETICE:

$$100 = \begin{cases} 74\frac{3}{6} + 25\frac{9}{18} \\ 95\frac{3}{7} + 4\frac{16}{28} \end{cases}$$



CAPITOLUL VIII

CALCULE APROXIMATIVE

GHICITORI MATEMATICE LEGATE DE PIRAMIDA LUI KEOPS

Cea mai înaltă piramidă din Egiptul antic — piramida lui Keops, bătută timp de 5 milenii de vînturile aride ale pustiului este fără îndoială cea mai minunată construcție rămasă din timpurile lumii antice (fig. 51). Avînd o înălțime de aproape 150 m, baza ei acoperă o suprafață de 40 000 m² și este formată din 200 de rînduri de pietre uriașe. 100 000 de sclavi în decurs de 30 de ani au muncit la ridicarea acestei piramide. Timp de 10 ani au construit numai drumul pentru transportul pietrelor de la cariera de piatră pînă la locul construcţiei, iar alţi 20 de ani le-au îngrămădit unele peste altele cu ajutorul maşinilor rudimentare din acele vremuri.

Este îndoielnic faptul că o astfel de construcţie uriaşă ar fi fost ridicată cu unicul scop de a servi drept

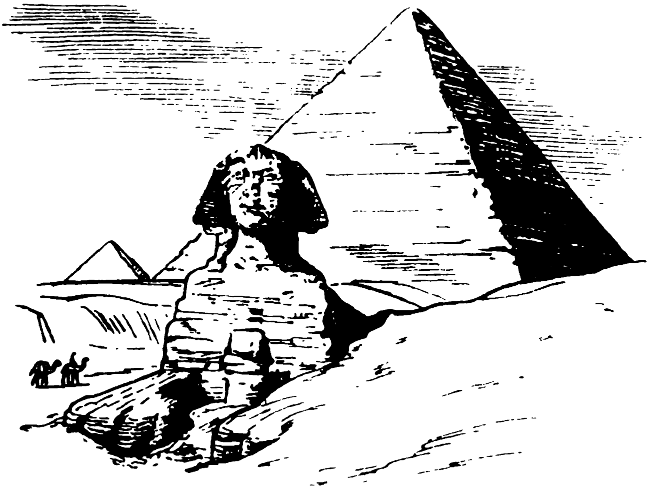


Fig. 51 — Ce enigme matematice ascund piramidele egiptene ?

mormînt pentru domnitorii ţării. De aceea unii cercetători au încercat să caute misterul ei în relaţiile dintre dimensiunile piramidei.

Reuşind să găsească o serie de corelaţii între elementele geometrice ale piramidei, aceşti cercetători credeau că preoţii, conducătorii lucrărilor de construcţie, aveau cunoştinţe largi de matematică şi astronomie şi că aceste cunoştinţe şi-au găsit expresia în formele de piatră ale piramidei.

« Herodot [1] povesteşte — citim în cartea astronomului francez Mauret („Ghicitorile ştiinţei“, 1926, vol. 1) — că preoţii egipteni au dezvăluit următoarea

[1] Cunoscutul istoric grec a vizitat Egiptul cu 300 de ani înaintea erei noastre.

relaţie între o latură a bazei piramidei şi înălţimea ei: aria patratului avînd ca latură înălţimea piramidei este egală cu aria fiecăruia din triunghiurile laterale. Lucrul acesta este pe deplin confirmat de cele mai noi măsurători, și constituie dovada faptului că în toate timpurile piramida lui Keops a fost privită ca un monument ale cărui dimensiuni s-au calculat pe cale matematică.

Voi da aici încă un argument apărut mai tîrziu: noi știm că raportul dintre lungimea circumferinţei şi diametrul cercului este o mărime constantă, bine cunoscută elevilor astăzi. Pentru a calcula lungimea cercului este suficient să se înmulţească diametrul lui cu 3,1416.

Matematicienii antichităţii cunoșteau acest raport numai cu aproximaţie.

Dacă adunăm însă cele patru laturi ale bazei piramidei, obţinem un perimetru de 931,22 m. Împărţind numărul 931,22 cu înălţimea dublă ($2 \times 148{,}208$) avem ca rezultat 3,1416, adică raportul dintre lungimea unui cerc și diametrul său. (Alţi autori calculează valoarea lui π din aceleaşi dimensiuni ale piramidei cu o exactitate şi mai mare: 3,14159 — I.P.)

Acest monument unic în felul lui reprezintă deci expresia materială a numărului „π", care a jucat un rol atît de important în istoria matematicii. După cum vedem preoţii egipteni aveau noţiuni exacte cu privire la o serie de probleme considerate drept descoperiri ale savanţilor din secolele de mai tîrziu»[1].

Mai curioasă este o altă corelaţie: dacă o latură a bazei piramidei se împarte la durata exactă a unui an — 365,2422 zile, atunci se obţine exact a 10-a milioana parte din semiaxa globului pămîntesc, cu o precizie pe care ar putea-o invidia astronomii contemporani...

Mai departe: înălţimea piramidei este exact a miliarda parte din distanţa Pămînt-Soare — mărime care a devenit cunoscută ştiinţei europene doar la sfîrșitul

---

[1] Valoarea lui „π", calculată cu precizia cu care a fost obţinută din raportul dintre dimensiunile piramidei, a devenit cunoscută matematicienilor europeni numai în sec. XVI.

sec. al XVIII-lea. Se constată, deci, că egiptenii cu 5 000 de ani în urmă știau cea ce nu cunoșteau încă contemporanii lui Galileu și Kepler și nici savanții din epoca lui Newton. Nu este de mirare faptul că cercetările de acest gen au dat naștere în apus unei literaturi vaste.

Și totuși, acestea nu sînt decît un joc al cifrelor. Lucrurile vor apare într-o cu totul altă lumină dacă le vom examina folosind rezultatele calculelor a p r o x i m a t i v e.

Să reluăm deci în aceeași ordine exemplele de mai sus.

1) Despre numărul „π". Aritmetica numerelor aproximative afirmă că dacă în rezultatul operației de împărțire dorim să obținem un număr de șase cifre exacte (3,14159), trebuie să avem la deîmpărțit și împărțitor cel puțin tot atîtea cifre exacte. Aceasta — aplicat la piramidă — înseamnă că pentru obținerea unui „π" format din șase cifre, atît latura bazei cît și înălțimea piramidei ar trebui măsurate cu o exactitate de pînă la o milionime, adică pînă la 1 mm. Astronomul Mauret dă pentru înălțimea piramidei rezultatul de 148,208 m, adică la prima vedere cu o exactitate de 1 mm.

Dar cine va garanta această precizie de măsurare a piramidei? Ne vom aminti că în laboratorul institutelor meteorologice, în care se efectuează măsurătorile cele mai exacte, nu se pot obține asemenea date precise asupra lungimii (la măsurarea lungimii se obțin numai șase cifre exacte). Se înțelege de la sine că rezultatul măsurării colosului de piatră din deșert va fi mult mai puțin exact. Este drept că la lucrările de măsurătoare ale terenurilor (la măsurarea așa-numitelor „baze") se poate realiza aceeași precizie ca în laborator, adică o precizie de șase cifre exacte în rezultat. Dar lucrul acesta este imposibil în condițiile măsurării piramidei: nu se pot cunoaște dimensiunile inițiale reale ale piramidei, pentru că materialul care a acoperit piramida a fost ros de vînturi și nimeni nu știe grosimea stratului acesta extern. Se impune deci să iei dimensiunile piramidei în metri întregi; și atunci se obţine un „π“ care nu este mai exact decît cel cunoscut din papirusul matematic al lui Rhind.

Dacă piramida reprezintă într-adevăr expresia în piatră a numărului „π“, atunci această expresie este, după cum vedem, departe de a fi perfectă. Foarte posibil este însă ca piramida să nu fi fost construită pentru a exprima acest raport. În limitele numerelor de trei cifre aproximative, pentru dimensiunile piramidei se pot face şi alte presupuneri. Se poate, de exemplu, ca pentru înălţimea piramidei să se fi luat 2/3 din muchia piramidei sau 2/3 din diagonala bazei ei. Este pe deplin posibilă şi relaţia indicată de Herodot: înălţimea piramidei este rădăcina patrată din aria unei feţe laterale. Dar acestea sînt tot atît de probabile ca şi „ipoteza lui π“.

2) Următoarea afirmaţie priveşte durata anului şi lungimea razei globului pămîntesc: dacă împărţim latura bazei piramidei cu durata exactă a anului (un număr format din şapte cifre) atunci obţinem cu precizie a zecea milioana parte din axa globului pămîntesc (un număr de cinci cifre). Însă o dată ce cunoaştem că în deîmpărţit nu avem mai mult de trei cifre exacte, este clar ce preţ putem pune pe cele şapte şi cinci cifre ale împărţitorului şi cîtului. Aritmetica poate garanta în cazul de faţă numai pentru primele trei cifre din durata anului şi ale razei globului pămîntesc. Anul de 365 de zile şi raza globului de aproximativ 6 400 km, iată numerele despre care avem dreptul să vorbim aici.

3) Cît priveşte distanţa de la Pămînt la Soare, aici există o nedumerire de altă natură. Este curios chiar că adepţii acestei teorii nu observă greşeala logică pe care o comit. Dacă, aşa cum afirmă ei, o latură a piramidei formează o anumită fracţie din raza globului pămîntesc, iar înălţimea — o anumită fracţie din bază, nu se mai poate spune că aceeaşi înălţime constituie o fracţie anumită din distanţa pînă la Soare. Ori una, ori alta. Iar dacă întîmplător se observă aici o corespondenţă interesantă între cele două lungimi, ea a existat totdeauna în sistemul nostru solar şi nu poate fi vorba de nici un merit din partea preoţilor.

Adepţii acestei teorii merg şi mai departe: ei afirmă că masa piramidei constituie exact a mia trilionimea parte din masa globului pămîntesc. După părerea lor această relaţie nu poate fi întîmplătoare şi arată că preoţii Egiptului antic cunoşteau nu numai dimensiunile geometrice ale planetei noastre, dar încă din acele vremuri au calculat masa ei, „au cîntărit“ globul pămîntesc.

Găsim aceeaşi lipsă de logică ca şi în exemplul privind distanţa Pămînt-Soare. Este cu totul absurd să spunem că masa piramidei a fost „aleasă“ într-o anumită relaţie cu masa globului pămîntesc. Masa piramidei s-a definit din momentul cînd a fost ales materialul ei şi dimensiunile bazei şi înălţimii. Nu se poate pune de acord înălţimea piramidei cu baza care formează o anumită fracţie din raza globului pămîntesc şi, independent de aceasta, să se realizeze legătura dintre masa ei şi masa Pămîntului. Una este determinată de cealaltă. Prin urmare, trebuie respinse orice presupuneri cu privire la cunoaşterea de către egipteni a masei globului pămîntesc. Cele expuse mai sus nu sînt decît o echilibristică numerică. Operînd cu abilitate cu numere, sprijinindu-ne pe coincidenţe întîmplătoare, se poate demonstra orice.

Am văzut ce fundament şubred stă la baza legendei despre cunoştinţele savante ale preoţilor — arhitecţi, constructori ai piramidei. Totodată avem aici o demonstraţie clară a utilităţii acelui capitol al aritmeticii care se ocupă de numerele aproximative.

NUMERELE APROXIMATIVE

Pentru cei ce nu cunosc regulile operaţiilor cu numere aproximative, va fi interesant să facă măcar pe scurt cunoştinţă cu ele, cu atît mai mult cu cît cunoaşterea acestora este utilă din punct de vedere practic, permiţînd economie de muncă şi timp la efectuarea calculelor.

Vom explica înainte de toate ce este un „număr aproximativ“ şi cum se obţin asemenea numere.

Datele care intră în calculele tehnice se obţin pe calea m ă s u r ă t o r i l o r. Dar nici o măsurătoare nu poate fi efectuată cu precizie absolută. Înainte de toate, înseşi unităţile de muncă folosite conţin o anumită eroare. Confecţionarea unor rigle, greutăţi de un kg, unităţi de măsură pentru litru este foarte grea, şi în construcţia lor se admit anumite erori. De exemplu, la confecţionarea unei rigle cu lungimea de 1 m se admite o toleranţă de pînă la 1 mm; pentru lanţul geodezic cu lungimea de 10 m, toleranţa este de pînă la 1 cm; pentru greutatea de 1 kg — pînă la 1 gram[1]; pentru greutăţile de 1 g ajunge la 0,01 g; pentru unitatea de măsură de 1 litru toleranţa merge pînă la 5 cm^3.

Efectuarea măsurătorilor comportă şi ea unele erori. Presupunem că măsuraţi o distanţă oarecare, de exemplu, lăţimea străzii. Unitatea de măsură, metrul, s-a cuprins în lăţimea ei, să zicem, de 13 ori şi a mai rămas o bucăţică mai mică de 1 metru. Puteţi spune că lăţimea străzii este de 13 metri; de fapt ea este egală cu 13 metri întregi şi încă un număr oarecare de zecimi, sutimi etc. de metru, de care nu aţi ţinut seama. Prin urmare, rezultatul măsurătorii noastre poate fi reprezentat astfel:

lăţimea străzii = 13,??? metri,

unde semnele întrebării indică cifrele necunoscute ale zecimilor, sutimilor etc.

Dacă aţi dori să măsuraţi lăţimea străzii cu mai multă precizie, aţi afla şi cîţi decimetri (zecimi de metru) se cuprind în porţiunea rămasă nemăsurată. Presupunem că am găsit 8 dm, dar a mai rămas o bucăţică mai mică decît un dm. Rezultatul noii măsurători este 13,8 m; desigur mai exact decît cel precedent şi totuşi nu ab-

---

[1] Afară de erorile admise pentru greutăţi se acceptă anumite toleranţe şi în construcţia balanţelor. Pentru balanţa folosită în gospodărie toleranţele sînt de pînă la 1 g la fiecare kg de marfă cîntărită.

solut exact, pentru că în afara celor 8 zecimi de metru lăţimea străzii cuprinde şi un număr oarecare de sutimi şi miimi de metru. Prin urmare, rezultatul obţinut acum poate fi exprimat aşa:

13,8 ?? metri.

La o măsurătoare şi mai exactă veţi ţine seama şi de sutimile de metru (cm), dar veţi neglija restul mai mic decît un cm; înseamnă că nici acest rezultat nu va fi absolut exact. În general, cu oricîtă atenţie veţi măsura, niciodată nu puteţi fi ferm convinşi de faptul că după cifra obţinută nu s-ar mai afla şi altele încă necunoscute.

Problema nu se rezolvă prin aceea că la măsurători resturile mai mari decît jumătatea de unitate de măsură sînt de obicei considerate ca întregi. Dacă la prima măsurătoare a străzii noi am fi considerat că lăţimea ei nu este de 13, ci de 14 m, acest rezultat ar fi fost şi el numai un rezultat aproximativ. El putea fi scris astfel:

14,??? metri,

unde semnele de întrebare înseamnă cifre zecimale (adică arată cu cîte zecimi, sutimi etc. numărul 14 este mai mare decît lăţimea reală a străzii).

Nici chiar rezultatul celei mai minuţioase măsurători nu poate fi privit ca fiind absolut exact: el exprimă mărimea reală într-un mod mai mult sau mai puţin aproximativ. Astfel de numere se numesc a p r o x i m a t i v e.

Aritmetica numerelor aproximative nu se aseamănă întru totul cu aritmetica numerelor exacte. Vom arăta această deosebire cu ajutorul unui exemplu.

Presupunem că trebuie să calculăm suprafaţa unui teren dreptunghiular a cărui lungime este de 68 metri, iar lăţimea de 42 metri. Dacă numerele 68 şi 42 ar fi exacte, atunci aria terenului ar avea exact

$$68 \times 42 = 2\,856 \text{ m}^2.$$

Dar numerele 68 şi 42 nu sînt exacte, ci aproximative: lungimea nu este exact egală cu 68 metri, ci ceva mai mare sau mai mică, pentru că este probabil ca metrul să nu se cuprindă în ea fix de 68 de ori. Pe urmă însăşi lungimea riglei de 1 metru nu credem să fi fost absolut egală cu 1 metru. În conformitate cu cele spuse mai sus, lungimea terenului în metri poate fi exprimată prin :

68,?

Tot astfel vom scrie lăţimea terenului :

42,?

Efectuăm acum înmulţirea numerelor aproximative:

68,? × 42,?

Operaţiile sînt reprezentate în schema următoare.

```
 ×68,?
   42,?
 ------
    ???
  136?
 272?
 ------
 285?,??
```

Observăm că cifra a patra a rezultatului ne este necunoscută; ea trebuie să se obţină din adunarea a trei cifre (? + 6 + ?) dintre care două sînt necunoscute. Nu este sigură nici cifra a treia a rezultatului: noi am scris 5, dar din adunarea coloanei ? + 6 + ? s-ar fi putut obţine un număr mai mare decît 10, şi chiar 20; aceasta înseamnă că în loc de 5 am fi putut avea 6 sau 7. Sînt pe deplin sigure numai primele două cifre ale rezultatului (28). De aceea, putem să afirmăm doar că suprafaţa căutată este de aproximativ 28 de sute de metri patraţi. Care sînt însă cifrele zecilor şi unităţilor nu putem şti.

Astfel, răspunsul corect la problemă este 2 800 m^2; aici zerourile nu indică absenţa unităţilor din ordinul respectiv, ci numai lipsa unor cunoştinţe sigure cu privire la aceste unităţi. Cu alte cuvinte zerourile au aici aceeași semnificație ca și semnele întrebării din notațiile folosite mai sus.

Este greșit să credem că răspunsul 2 856 obținut după regulile aritmeticii numerelor exacte este mai precis decît 2 800. Am văzut doar că ultimele două cifre ale rezultatului (56) nu sînt demne de o încredere absolută — nu putem garanta pentru ele. Răspunsul 2 800 este preferabil lui 2 856, pentru că el afirmă direct că sînt sigure numai cifrele 2 și 8, care ocupă locul miilor și sutelor, iar cifrele următoare sînt necunoscute. Dimpotrivă, 2 856 ne face să ne gîndim, în mod nejust, că ultimele două cifre sînt tot atît de sigure ca și primele două.

„Este necinstit să se scrie mai multe cifre decît cele pentru care putem garanta... Îmi pare foarte rău, dar trebuie să recunosc că sînt multe numere de acest fel, care duc la reprezentări cu totul eronate și care se întîlnesc în cele mai bune lucrări despre mașinile cu abur... Cînd am învățat la școală, ni s-a spus că distanța medie de la Pămînt la Soare este de 95 142 357 mile englezești[1]. Mă mir de ce nu s-a specificat cîți țoli și cîte picioare. Măsurătorile moderne cele mai exacte ne permit să afirmăm că această distanță nu depășește 93 de milioane și nu este mai mică de 92,5 milioane de mile", — scria în legătură cu aceasta matematicianul englez Pearry.

Așadar, în calculele cu numere aproximative nu trebuie să se țină seama de toate cifrele rezultatului, ci numai de unele. Care sînt cifrele ce trebuie reținute în aceste cazuri, și care sînt cele ce se înlocuiesc cu zerouri, vom vedea într-un alt paragraf. Ne vom opri întîi asupra r o t u n j i r i i numerelor.

ROTUNJIREA NUMERELOR

În efectuarea calculelor rotunjirea unui număr constă în aceea că una sau cîteva cifre de la capătul lui se înlocuiesc cu zerouri. Deoarece zerourile care stau după

[1] Mila engleză este egală cu 1852 metri.

virgulă nu au nici o importanţă, ele nici nu se scriu. De exemplu:

numerele	se rotunjesc la
3734....	3730 sau 3700
5,314.....	5,31 sau 5,3
0,00731.....	0,0073 sau 0,007

Dacă prima din cifrele neglijate la rotunjire este 6 sau o cifră mai mare, atunci cele precedente sînt sporite cu o unitate. De exemplu:

numerele	se rotunjesc la
4867	4870 sau 4900
5989	5990 sau 6000
3,666	3,67 sau 3,7

Tot astfel se procedează dacă se neglijează cifra 5, după care urmează şi alte cifre cu valori reale. De exemplu:

numerele	se rotunjesc la
4552	4600
38,1506	38,2

Dacă se neglijează însă *numai* cifra 5, s-a convenit ca cifra precedentă să fie mărită cu o unitate în cazul cînd ea este *impară*; cifra pară rămîne neschimbată. De exemplu:

numerele:	se rotunjesc la:
735	740
8645	8640
37,65	37,6
0,0275	0,028
70,5	70[1]

La prelucrarea rezultatelor operaţiilor cu numere aproximative se ţine seama de aceleaşi reguli de rotunjire.

---

[1] Zeroul este privit ca o cifră *pară*.

CIFRE CU VALORI REALE ŞI FĂRĂ VALOARE

În teoria calculelor aproximative, prin cifre cu valori reale se înţeleg toate cifrele cu excepţia zeroului, precum şi zeroul în cazul cînd el se găseşte între alte cifre cu valori reale. Astfel, în numerele 3 700 şi 0,0062 nu toate zerourile sînt cifre cu valori reale. În numerele 105 şi 2006 zerourile sînt nişte cifre cu valori reale. În 0,0708 primele două zerouri nu au valoarea reală; cel de-al treilea însă este o cifră cu valoare reală.

În unele cazuri zeroul ca valoare reală se poate găsi şi la sfîrşitul numărului; de exemplu, rotunjind numărul 2,540002 obţinem 2,54000, în care toate zerourile de la capăt sînt cifre cu valori reale, pentru că arată lipsa unor unităţi în categoriile respective. De aceea, dacă în condiţiile indicate într-o problemă sau într-o tabelă întîlnim numerele 4,0 sau 0,80, atunci trebuie să le privim ca pe nişte numere formate din două cifre. Rotunjind numărul 289,9 la 290, obţinem de asemenea la sfîrşitul numărului un zero care are valoare reală.

ADUNAREA ŞI SCĂDEREA NUMERELOR APROXIMATIVE

Rezultatul obţinut prin adunarea sau scăderea unor numere aproximative nu trebuie să se termine cu cifre cu valoare reală, în unităţi de acele ordine care lipsesc cel puţin într-unul din numerele respective. Dacă s-au obţinut astfel de cifre, atunci ele trebuie neglijate prin rotunjire:

$$
+\begin{array}{r} 3400 \\ 275 \\ \hline 3\,700 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 28{,}3 \\ +\ 146{,}85 \\ 108 \\ \hline 283 \end{array}
\qquad
-\begin{array}{r} 176{,}3 \\ 0{,}46 \\ \hline 175{,}8 \end{array}
$$

(şi nu 3 675) (şi nu 283,15) (şi nu 175,84)

Nu este greu de înțeles pe ce se bazează această regulă. Presupunem că se cere să se adauge la 3 400 m încă 275 m. Evident, la numărul 3 400 persoana care a executat măsurătorile a neglijat zecile de metri; este clar că adăugînd la acest număr 70 de metri și încă 5 metri, vom obține nu 3 675 m, ci mai curînd un rezultat cu alte cifre în locul zecilor și al unităților. De aceea, în locul zecilor și unităților vom scrie în sumă zerouri, care în cazul de față arată că nu se știe care anume cifre trebuie să stea aici.

ÎNMULȚIREA, ÎMPĂRȚIREA ȘI RIDICAREA LA PUTERE A NUMERELOR APROXIMATIVE

Rezultatul obținut prin înmulțirea și împărțirea numerelor aproximative nu trebuie să cuprindă mai multe cifre cu valori reale decît avem în factorul care cuprinde cele mai puține cifre cu valori reale. (Dintre două numere cel mai „scurt" este acela care conține mai puține cifre cu valori reale.) Cifrele în plus se înlocuiesc cu zerouri.

E x e m p l e :

$$\begin{array}{r} 37 \\ \times\ 245 \\ \hline 9\,100 \end{array}$$

(și nu 9 065)

$$57{,}8 : 3{,}2 = 18 \text{ (și nu } 18{,}06);$$
$$25 : 3{,}14 = 8{,}0 \text{ (și nu } 7{,}961)$$

La numărarea cifrelor nu se ține seama de virgulă; astfel, 4,57 se consideră drept un număr de trei cifre etc.

Numărul cifrelor cu valoare reală cuprins în puterea numărului aproximativ nu trebuie să depășească numărul lor cuprins în baza puterii. Cifrele în plus se înlocuiesc cu zerouri.

E x e m p l e :

$$157^2 = 24\,600 \text{ (și nu } 24\,649);$$
$$5{,}81^3 = 196 \text{ (și nu } 196{,}122941)$$

Aceste reguli se referă numai la rezultatele finale. Dacă prin operaţia efectuată calculul nu se termină încă, atunci în rezultatul acestei operaţii intermediare se reţine cu o cifră de valoare reală mai mult decît cere regula. Efectuînd, de exemplu, operaţia:

$$\frac{36 \times 1,4}{3,4}$$

se procedează în felul următor:

$36 \times 1,4 = 50,4$ (se reţin trei cifre şi nu două);
$50,4 : 3,4 = 15$

La calculele tehnice simple regulile de mai sus sînt utilizabile aproape în toate cazurile, folosindu-se următoarele simplificări. Înainte de a începe calculul se stabileşte în funcţie de numărul de cifre cu valori reale ale factorului cel mai „scurt", cîte cifre cu valoare reală poate conţine rezultatul final. După aceasta se trece la calcule, reţinîndu-se în toate operaţiile intermediare cu o cifră mai mult decît urmează a se reţine pentru rezultatul final. Dacă, de exemplu, prin condiţiile problemei s-au dat cîteva numere de trei cifre cu valori reale şi un număr de două cifre cu valori reale, atunci rezultatul final va avea două cifre sigure, iar rezultatele intermediare trebuie să conţină trei cifre.

Astfel la efectuarea lucrărilor toate regulile calculelor aproximative pot fi reduse la următoarele două:

1) se stabileşte cîte cifre cu valori reale se cuprind în factorul cel mai scurt al problemei respective; tot atîtea cifre cu valori reale trebuie menţinute în rezultatul final;

2) în rezultatele tuturor operaţiilor intermediare se reţine cu o cifră mai mult decît s-a stabilit pentru rezultatul final[1].

---

[1] Vezi mai amănunţit în broşura mea „Tabele şi reguli pentru calcule" (OGHIZ, 1931).

Celelalte cifre în toate cazurile se înlocuiesc cu zerouri, şi se neglijează după regulile rotunjirii.

Aceste reguli nu se aplică la problemele rar întîlnite pentru a căror rezolvare urmează să se efectueze numai operaţiile de adunare şi scădere. În aceste cazuri se respectă o altă regulă.

Rezultatul final nu trebuie să conţină cifre cu valori reale în acele ordine care lipsesc cel puţin într-una din datele aproximative. În rezultatele intermediare trebuie să se reţină cu o cifră, de valoare reală, mai mult decît s-a stabilit pentru rezultatul final. Celelalte cifre se neglijează prin rotunjire.

Dacă, de exemplu, datele problemei sînt următoarele:

37,5 m, 185,64 m, 0,6725 m

şi pentru rezolvare se cere să se scadă primul număr din suma celorlalte două, atunci, în sumă

$$\begin{array}{r} 185{,}64 \\ +\;\;\;0{,}6725 \\ \hline 186{,}3125 \end{array}$$

se neglijează ca într-un rezultat intermediar ultima cifră (adică se ia 186,312), iar în diferenţa

$$\begin{array}{r} 186{,}312 \\ -\;\;37{,}5 \\ \hline 148{,}812 \end{array}$$

ca rezultat final se reţine numai 148,8.

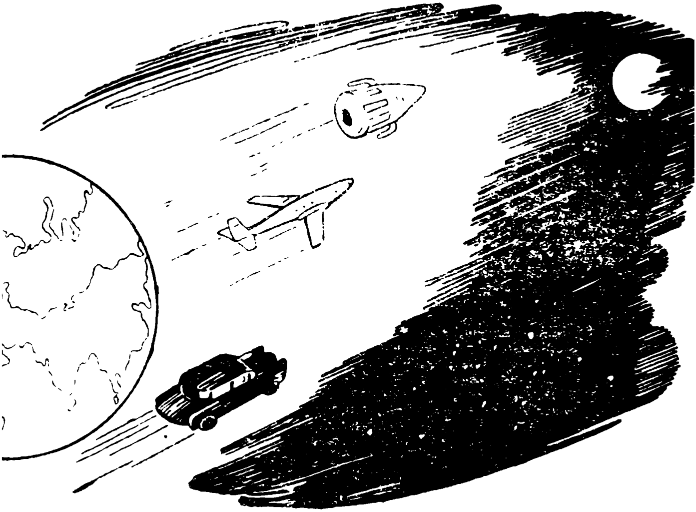
ECONOMISIREA EFORTULUI LA CALCULE

Cum putem calcula ce efort economisim noi la efectuarea calculelor prin metodele expuse mai sus? Pentru aceasta trebuie să facem un calcul oarecare complicat de două ori: o dată folosind regulile aritmetice obişnuite, iar a doua oară — aproximativ. Apoi se va calcula cu răbdare de cîte ori am fost nevoiţi să adunăm, să scădem şi să înmulţim diferitele cifre prin cele două metode. Se va constata că prin calculul aproximativ se fac de două ori şi jumătate mai puţine operaţii decît la calculul „precis“. Rezultatul obţinut prin acest calcul este aproape tot atît de corect.

Astfel, pentru calculele aproximative este necesar de aproximativ două ori şi jumătate mai puţin timp decît la calculul efectuat conform regulilor obişnuite. Dar nu numai atît: fiecare operaţie efectuată în timpul calculului, fiecare caz de adunare, scădere sau înmulţire a cifrelor este un prilej în plus de a face greşeli. La calculele aproximative probabilitatea greşelii va fi şi ea de $2\frac{1}{2}$ ori mai mică decît la calculele „exacte“. Este de ajuns să greşim o singură dată şi calculele trebuie efectuate din nou, dacă nu chiar complet, măcar în parte. Prin urmare, prin metoda calculului aproximativ se obţine o economie de timp mai mare decît $2\frac{1}{2}$ ori. Vedem, deci, că timpul consumat pentru cunoaşterea regulilor acestui calcul este compensat repede şi cu prisosinţă.

CURIOZITĂŢI ARITMETICE:

$$100 = \begin{cases} 98\frac{3}{6} + 1\frac{27}{54} \\ 94\frac{1}{2} + 5\frac{38}{76} \end{cases}$$



CAPITOLUL IX

URIAȘII NUMERICI

CÎT DE MARE ESTE MILIONUL?

Vom începe cu milionul. Cuvîntul „milion" înseamnă o mie de mii. În secolul al XIII-lea, cunoscutul călător Marco Polo a vizitat China și pentru a exprima imensele bogății ale acestei țări a inventat cuvîntul „milion".

Dacă vreți să vă dați seama de adevăratele dimensiuni ale milionului, încercați să faceți pe un caiet curat un milion de puncte. Eu nu vă sfătuiesc să duceți această muncă pînă la capăt. Nu știu dacă va avea cineva răbdare s-o facă, dar chiar de la începutul acestei lucrări, datorită mersului ei încetinit, vă veți da seama ce este un milion „adevărat".

Naturalistul englez A.R. Wallace acorda o foarte mare importanță formării unei noțiuni juste despre milion. El propunea[1] „ca în fiecare școală mare să se rezerve o cameră sau o sală pe ai cărei pereți să se poată arăta, în mod demonstrativ, ce este un milion. În acest scop sînt necesare o sută de foi patrate mari de hîrtie de cîte $4\frac{1}{2}$ picioare fiecare, care se împart în pătrățele de cîte un sfert de țol, lăsîndu-se un număr egal de intervale albe între petele negre. După fiecare zece pete trebuie să existe un interval dublu pentru a separa fiecare sută de pete (10×10). Astfel, pe fiecare foaie vor apare cîte 10 mii de pete negre, care se disting bine în mijlocul camerei, iar toate cele o sută de foi vor conține un milion de pete. O astfel de sală ar fi fost foarte instructivă... Nimeni nu poate aprecia realizările științei moderne, care are de-a face cu valori neobișnuit de mari sau mici, dacă nu știe să-și imagineze clar cît de mare este un milion. În orice caz este de dorit ca în fiecare oraș mare să fie amenajată o astfel de sală, pe ai cărei pereți să se arate cît de mare este un milion“[2]

Nu știu dacă dorința lui Wallace a fost îndeplinită în patria lui, dar eu am reușit să realizez această propunere la Leningrad în Parcul central de cultură și odihnă. Aici, în pavilionul special amenajat de știință distractivă s-au trasat pe tavan un milion de cerculețe negre. Cîmpul vast de puncte negre producea asupra vizitatorilor o impresie puternică și-i făcea într-adevăr să simtă imensitatea milionului. Impresia era intensificată prin compararea acestei mulțimi cu o altă mulțime — cu numărul stelelor ce pot fi văzute pe cer cu ochiul liber, care din timpurile cele mai vechi fusese considerată ca imposibil de numărat. Contrar convingerii atît de răspîndite, ochiul liber vede pe o emisferă a cerului de noapte numai $3\frac{1}{2}$ mii de stele. Acest nu-

---

[1] În cartea „Poziția omului în univers“.

[2] De exemplu, în astronomie distanțele dintre planete se măsoară în sute de milioane de km; distanțele pînă la stele sînt de milioane de milioane de km; în fizică numărul de molecule dintr-un cm^3 de aer reprezintă milioane de milioane de milioane.

măr este de 300 ori mai mic decît un milion. Un cerc mic albastru, trasat pe tavanul pavilionului despre care am vorbit mai sus, conţinea 3 500 de puncte întunecate şi reprezenta cerul înstelat, subliniind prin dimensiunile sale modeste imensitatea adevăratului uriaş numeric — milionul.

Cititorul va dori, probabil, să afle în ce fel s-au schiţat pe tavan un milion de cerculeţe negre. Cît timp le-a trebuit zugravilor să execute această lucrare migăloasă? Pavilionul nu ar fi fost gata prea repede dacă milionul de puncte de pe tavanul lui ar fi fost făcut manual. Lucrurile s-au petrecut mult mai simplu: s-au comandat tapete cu aşezarea respectivă a cerculeţelor şi au fost lipite de tavan.

UN MILION DE PINIOANE

Cu totul altfel este reprezentată mărimea unui milion în Casa de ştiinţă distractivă din Leningrad. Aici, milionul este realizat cu ajutorul unui mic dispozitiv, pe care-l reprezentăm în figura 52. Un rînd de roţi dinţate este astfel ales şi legat în acest dispozitiv, încît atunci cînd manivela se roteşte de zece ori acul primului cadran face o singură rotaţie. Cînd manivela este învîrtită de 100 de ori, acul acestui cadran va parcurge de 10 ori cercul şi totodată acul cadranului vecin va face o rotaţie. Pentru ca să se rotească acul cadranului al treilea manivela dispozitivului trebuie să fie învîrtită de o mie de ori. După zece mii de rotaţii ale manivelei se va roti o dată şi acul celui de-al patrulea cadran; după o sută de mii — se va roti acul al cincilea şi, în sfîrşit după un milion de rotaţii se va roti o dată ultimul ac, ca cel al cadranului al şaselea.

În timp ce milionul de cerculeţe de pe tavan frapează văzul, acest dispozitiv acţionează asupra muşchilor. Rotind manivela şi urmărind cît de încet se mişcă acele de pe ultimele cadrane, simţim parcă direct, cu mîinile noastre, greutatea celor 6 zerouri care însoţesc unitatea la reprezentarea milionului. Doar pentru a ajunge la cel de-al şaselea zero trebuie să învîrtim manivela dispozitivului fără odihnă şi fără opriri aproape 11 zile şi nopţi (considerînd cîte o rotaţie pe secundă).

UN MILION DE SECUNDE

Aici propun o metodă accesibilă fiecăruia pentru a-şi forma o noţiune cît mai clară despre mărimea unui milion. Pentru aceasta trebuie să ne străduim doar să numărăm pînă la un milion unele unităţi mici, dar care ne sînt bine cunoscute — paşi, minute, chibrituri, pahare etc. Rezultatele obţinute sînt adesea neaşteptate şi uimitoare.

Dăm cîteva exemple.

Cît timp v-ar fi luat numărarea unui milion de obiecte oarecare, cîte unul în fiecare secundă?

Se constată că numărînd fără întrerupere cîte zece ore din cele 24, v-ar fi trebuit o lună de zile. Nu este de loc greu să constatăm acest lucrul făcînd următorul

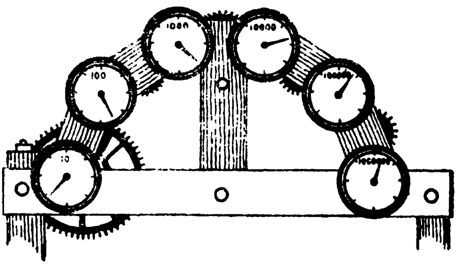


Fig. 52 — Pentru ca săgeţile să indice 1 000 000 rotaţii, **trebuie** să rotim manivela aparatului 11 zile şi nopţi.

calcul: Într-o oră sînt 3 600 secunde, iar în 10 ore — 36 000; prin urmare, în 3 zile veţi număra aproximativ 100 000 obiecte; deoarece milionul este de 10 ori mai mare vă vor trebui 30 de zile[1]. De aici rezultă

[1] Arătam cu titlu informativ că un an (astronomic) are 31 558 150 de secunde; 1 milion de secunde este egal cu 11 zile şi nopţi, 13 ore, 46 minute, 40 secunde.

că munca propusă mai sus — de a pune pe caiet un milion de puncte — ar fi cerut multe săptămîni de activitate asiduă și neobosită.

Măsura în care oamenii sînt înclinaţi să subaprecieze mărimea unui milion este arătată de însăşi eroarea făcută de Wallace: prevenindu-i pe ceilalţi de a nu subaprecia milionul, el termină fragmentul dat mai sus (pag. 172) cu următorul sfat:

„Pe scară redusă fiecare poate face acest lucru pentru el însuşi: este suficient să facă rost de 100 de foi de hîrtie groasă, să le linieze în pătrăţele şi să pună puncte negre mari. Această reprezentare ar fi foarte instructivă, deşi, desigur, nu în aceeaşi măsură cu cea realizată pe scară mare". Respectivul autor presupunea, bănuiesc, că această lucrare poate fi uşor îndeplinită de un singur om.

O BANDĂ DINTR-UN MILION DE FIRE DE PĂR

Toţi văd şi ştiu bine cît de subţire este un fir de păr. Grosimea unui fir de păr la om este de cca. 0,07 mm. O vom rotunji pînă la 0,1 mm. Imaginaţi-vă că aţi pus, unul lîngă altul, un milion de fire de păr. Ce lăţime ar fi avut o astfel de bandă. Am fi putut-o, de exemplu, întinde de-a latul uşii?

Dacă nu v-aţi pus niciodată această problemă, atunci puteţi fi siguri că înainte de a efectua calculele veţi da un răspuns cu totul greşit. Poate chiar nu veţi fi de acord cu răspunsul corect, atît de neverosimil va părea el. Care este acest răspuns?

Se constată că lăţimea unei benzi formate dintr-un milion de fire de păr ar fi atins aproximativ 100 de metri. Această bandă n-ar putea fi întinsă nici chiar de la o margine la cealaltă a unei străzi largi de capitală!

Pare neverosimil, însă faceţi calculul şi vă veţi convinge că am dreptate:

$$0{,}1 \text{ mm} \times 1\,000\,000 = 0{,}1 \text{ m} \times 1\,000 = 0{,}1 \text{ km} = 100 \text{ m}$$[1]

EXERCIŢII CU MILIONUL

Efectuaţi — oral — încă o serie de exerciţii pentru a vă da seama şi mai bine ce mărime reprezintă un milion.

1. Lungimea unei muşte obişnuite este de cca. 7 mm. Care ar fi fost lungimea ei dacă ar fi crescut de un milion de ori?

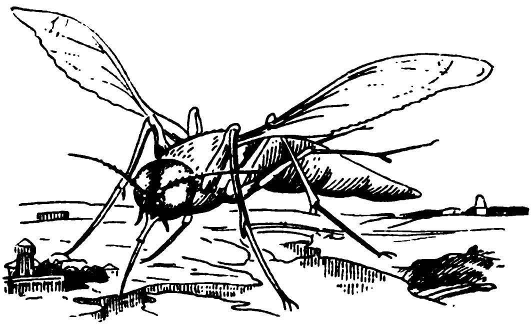


Fig. 53 — Un ţînţar mărit de un milion de ori.

R e z o l v a r e. Înmulţim 7 mm cu 1 000 000 şi obţinem 7 km, adică aproximativ lăţimea unui oraş mare. Prin urmare, o muscă ale cărei dimensiuni liniare au fost mărite de un milion de ori ar fi putut acoperi cu corpul său întregul oraş. Chiar un ţînţar mărit de un milion de ori ar fi apărut foarte impunător (vezi fig. 53).

[1] Aici înmulţirea s-a făcut în felul următor: în loc să înmulţim numerele am înlocuit unitatea de măsură cu alta de o mie de ori mai mare. Această metodă este foarte comodă pentru calculele orale şi trebuie folosită la calcule cu unităţi de măsură metrice.

2. Imaginaţi-vă că ceasul dumneavoastră de buzunar a crescut de un milion de ori (în lăţime), şi veţi obţine din nou un rezultat uimitor; nu cred că veţi reuşi să-l ghiciţi fără calcule. Care este rezultatul?

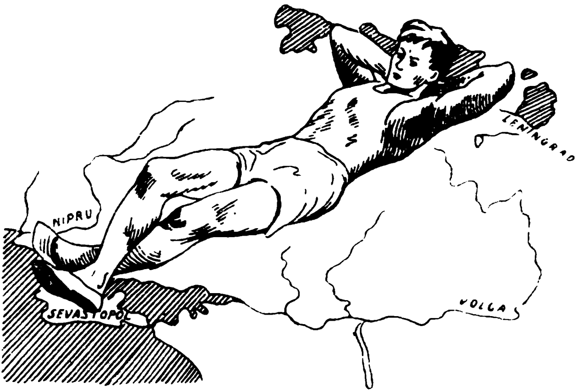


Fig. 54 — Omul mărit de un milion de ori ar ajunge de la golful finlandez pînă în Crimeea.

R e z o l v a r e. Ceasul ar fi avut o lăţime de 50 km, iar fiecare cifră a lui ar fi atins mărimea unei mile geografice (7 km).

3. Ce statură ar fi avut omul dacă ar fi fost de un milion de ori mai înalt decît în mod obişnuit?

R e z o l v a r e. 1 700 km. El ar fi fost de numai 8 ori mai mic decît diametrul globului terestru. Făcînd un pas, el ar fi putut ajunge din Leningrad la Moscova; dacă s-ar fi culcat (fig. 54), capul ar fi fost lîngă golful finlandez, iar picioarele în Crimeea...

Voi da încă cîteva exemple de acelaşi gen, lăsînd la latitudinea cititorului verificarea lor.

Făcînd un m i l i o n d e p a ş i într-o direcţie v-aţi depărta cu 600 de km. De la Moscova pînă la Leningrad sînt un milion şi ceva de paşi.

U n m i l i o n d e o a m e n i aşezaţi în rînd, umăr la umăr, ar fi ocupat 250 km.

Un milion de puncte tipografice — ca în această carte — așezate unul lîngă altul, ar fi format o linie cu lungimea de 100 metri.

Turnînd apă de un milion de ori cu degetarul, veți turna aproape o tonă de apă.

O carte de un milion de pagini ar avea o grosime de circa 50 m.

Un milion de litere alcătuiesc o carte de 600-800 pagini de format mediu.

Un milion de zile formează peste 27 de secole. De la începutul erei noastre nu au trecut încă un milion de zile!

Făcînd aceste exerciții cu milionul, putem aprecia calea imensă pe care a parcurs-o cel de-al treilea satelit artificial al pămîntului, lansat de Uniunea Sovietică la 15 mai 1958. Numai într-un an el a ocolit Pămîntul de aproape 5 100 ori, parcurgînd un drum care depășește 230 de milioane de km. Aceasta este $1\frac{1}{2}$ ori distanța pînă la Soare. Dacă cercetașul acesta cosmic ar fi făcut cursă între Pămînt și Lună, atunci într-un an el ar fi realizat 300 de drumuri![1]

Pentru comparație vom arăta că avionul TU-104, avînd o viteză medie de zbor de 800 km pe oră, ar fi putut parcurge această distanță numai în 32 de ani și 9 luni de zbor neîntrerupt. Dacă se consideră în medie viteza de mișcare a automobilului egală cu 80 km pe oră, rezultă că el ar străbate o asemenea cale numai în 330 de ani.

DENUMIREA URIAȘILOR NUMERICI

Am discutat pînă acum despre milioane. Înainte de a trece la uriași numerici mai mari, ne vom opri asupra denumirilor, adoptate în țara noastră și într-o serie de alte țări.

---

[1] În medie distanța de la Pămînt pînă la Soare este egală cu 150 milioane de km, iar de la Pămînt la Lună cu 384 400 km.

La începutul cărţii am vorbit despre ordinele şi clasele sistemului nostru de numeraţie zecimal poziţional. La cele spuse acolo vom adăuga că un milion este o mie de mii, adică o unitate de clasa a treia. După aceea urmează zecile şi sutele de milioane. O mie de milioane formează o unitate din clasa a patra, numită miliard. Uneori miliardul este numit bilion, însă la noi nu se obişnuieşte această denumire. Prin urmare, un miliard este egal cu o mie de milioane. El se scrie astfel:

1 000 000 000

adică 1 însoţit de 9 zerouri.

O mie de miliarde formează o unitate de clasa a cincea, care poartă denumirea de trilion. Astfel, un trilion este egal cu un milion de milioane şi se scrie sub forma unei unităţi urmate de 12 zerouri:

1 000 000 000 000

Dacă vă interesează denumirile ultrauriaşilor care urmează după trilion, puteţi studia tabela de mai jos:

Denumirea uriaşului numeric	De cîte zerouri este urmată unitatea
cvadrilion	15
cvintilion	18
sextilion	21
septilion	24
octilion	27
nonilion	30
decilion	33
undecilion	36
dodecilion	39

Mai departe nu există denumiri. De fapt nici acestea nu se folosesc aproape de loc, şi sînt puţini cei care le cunosc.

În unele ţări se obişnuieşte o altă ordine a denumirii claselor, astfel încît denumirile claselor care coincid cu cele adoptate la noi au acolo un alt sens. Aşa de pildă, prin cuvîntul bilion nu se înţelege o mie, ci un milion de milioane, adică o unitate urmată de 12 zerouri; prin trilion se înțelege o unitate urmată de 18 zerouri, adică un milion de milioane de milioane, iar cvadrilionul este o unitate cu 24 de zerouri, adică un milion de milioane de milioane de milioane. Mai scurt, în aceste țări fiecare denumire superioară se dă unui milion din cele inferioare (și nu o mie ca la noi). Pentru a evita neînțelegerile trebuie să însoțim întotdeauna denumirea cu cifre. S-ar putea ca acesta să fie unicul caz din practică cînd notarea sumei cu litere nu explică, ci, dimpotrivă, induce în eroare cu privire la cifrele scrise.

Trebuie să menționăm că în cărțile științifice și în practică s-a adoptat o metodă de notare a uriașilor numerici care exclude cu desăvîrșire orice posibilitate de dublă interpretare. Această metodă se bazează pe ridicarea la putere. De exemplu, un trilion, adică o unitate urmată de 12 zerouri, reprezintă numărul 10 înmulțit de 12 ori. Pe scurt, aceasta se scrie:

$$1\,000\,000\,000\,000 = 1 \times 10^{12}$$

adică un trilion este o unitate înmulțită cu 10 ridicat la puterea a 12-a.

Mai dăm un exemplu. Numărul 2 cvadrilioane 400 trilioane se va scrie prescurtat astfel: $2{,}4 \cdot 10^{15}$, pentru că un cvadrilion este o unitate cu 15 zerouri (vezi tabela de mai sus).

Folosind o astfel de metodă pentru notarea numerelor foarte mari, întîlnite adesea în fizică și astronomie, se face economie de loc și, afară de aceasta, se ușurează citirea precum și diferitele operații efectuate cu ele[1].

MILIARDUL

Miliardul este una din denumirile cele mai tinere ale numerelor. Ea a intrat în uz numai spre sfîrșitul războiului franco-prusac (1871), cînd francezii au fost nevo-

---

[1] Vezi despre aceasta mai amănunțit în cartea: I. I. Perelman, „Algebra distractivă", Ed. științifică, 1961.

iţi să plătească Germaniei o contribuţie de 5 000 000 000 franci. Ca şi milionul, cuvîntul miliard provine de la rădăcina „mile“ (mie) şi este un superlativ italian al acestui substantiv.

Pentru a ne face o idee despre imensitatea miliardului, să ne gîndim că în cartea pe care o citiţi acum sînt ceva mai mult de 300 000 de litere. În trei cărţi de acest fel vom avea un milion de litere. Un miliard de litere se vor cuprinde în 3 000 de exemplare ale acestei cărţi, care dacă ar fi aşezate unul peste celălalt ar forma o coloană de înălţimea Muzeului de ateism din Leningrad (fost catedrala Isaakievski).

Un metru cub conţine exact un miliard de mm cubi. (1 000 × 1 000 × 1 000). Să încercăm să calculăm înălţimea coloanei care s-ar obţine, dacă toate aceste cuburi milimetrice minuscule ar fi aşezate unul peste celălalt. Rezultatul este uimitor — 1 000 km!

Un miliard de minute formează peste 19 secole; numai cu aproximativ 50 de ani în urmă (29 aprilie 1902, ora 10 şi 40 minute) am intrat în cel de-al doilea miliard de minute de la începutul erei noastre.

Uriaşul numeric miliard îl putem găsi şi în interiorul corpului nostru. Cea mai mică înţepătură în orice parte a corpului provoacă apariţia sîngelui. V-aţi pus vreodată întrebarea: cîte vase sanguine extrem de mici, aşa-zise capilare, există în corpul nostru? S-a arătat că în corpul omului există peste 100 de miliarde de capilare. Lungimea lor totală atinge 60—80 de mii de km. Cu un fir format din capilarele omului s-ar putea înconjura Pămîntul aproape de două ori de-a lungul ecuatorului.

TRILIONUL

Este greu să ne dăm seama de imensitatea acestui uriaş numeric, chiar dacă sîntem obişnuiţi cu mînuirea milioanelor. Milionul este un pitic faţă de imensul trilion, aşa cum este unitatea în comparaţie cu milionul.

De obicei noi uităm de acest raport și în imaginația noastră nu facem o deosebire prea mare între milion şi trilion. Tot aşa, pentru popoarele primitive care nu ştiu să numere decît pînă la 2 sau 3, toate numerele mai mari decît acestea sînt notate cu m u l t .

Şi, după cum botocuzilor[1] le apare neesențială diferența mică între numerele 2 şi 3, multor oameni contemporani, deşi culți, li se pare ca neesențială deosebirea dintre milion şi trilion. Cel puțin ei nu se gîndesc la faptul că unul din aceste numere este de 1 milion de ori mai mare decît celălalt şi, prin urmare, raportul dintre ele este aproximativ acelaşi ca şi dintre distanța Moscova — San Francisco şi lățimea unei străzi.

Un fir de păr a cărui grosime ar fi mărită de un trilion de ori, ar fi de vreo 8 ori mai gros decît globul terestru, iar o muscă mărită tot de atîtea ori, ar avea o grosime de 70 de ori mai mare decît cea a Soarelui.

În anul 1958, în U.R.S.S. au apărut 1,1 miliarde de cărți. Dacă se consideră că în medie fiecare carte conține 160 000 de litere (acesta este aproximativ numărul de litere care se cuprinde în 80 de pagini cu formatul cărții de față), atunci numărul literelor din toate aceste exemplare va fi aproximativ egal cu 150 de trilioane. Aşezate una lîngă cealaltă, literele ar alcătui un fir care s-ar putea întinde de la Pămînt pînă la Soare.

Circulația de transport va constitui în U.R.S.S. în anul 1965 2,5 trilioane de tone-km. Aceasta înseamnă că pe toate tipurile de transport s-ar putea transporta în anul 1965 mărfuri de 16,5 mii de tone la o distanță care să fie egală cu cea de la Pămînt pînă la Soare.

NUMERELE ULTRAURIAŞE

În „Aritmetica" veche (sec. XVIII) a lui Magnițki despre care am mai vorbit, este dat un tabel al denu,

---

[1] Botocuzii sînt un trib indian din Brazilia, în prezent aproape în întregime exterminat.

mirilor pentru clasele de numere pînă la cvadrilion, adică pînă la unitatea cu 24 de zerouri[1].

Acesta a fost un mare pas înainte în comparaţie cu inventarul numeric mai vechi al înaintaşilor noştri. Scara slavă a numerelor mari era pînă în sec. al XV-lea mult mai modestă și ajungea abia la 100 de milioane. Iată această numerotare veche:

„tîsiaşcea“	1 000
„tima“	10 000
„leghion	100 000
„leodr“	1 000 000
„vran“	10 000 000
„koloda“	100 000 000

Magniţki a lărgit mult în tabelul său limitele vechi ale numerelor mari. El a considerat însă că practic este inutil să continue prea mult sistemul de denumiri al uriaşilor numerici. Imediat după tabel se plasează cîteva versuri, în care bătrînul matematician afirmă că deoarece mintea omenească nu poate cuprinde şirul infinit de numere, este inutil să formeze numere mai mari decît cele notate în tabelul lui. Numerele din acest tabel (de la unitate pînă la septilion, adică pînă la $1 \cdot 10^{24}$ inclusiv) sînt suficiente, după părerea lui, pentru numărarea tuturor obiectelor lumii vizibile — pentru fiecare „care doreşte să numere ceva în profunzimile cerului“.

Este interesant că şi astăzi tabelul lui Magniţki este aproape suficient pentru acei cercetători ai naturii care „au nevoie să numere ceva în profunzimea cerului“. La măsurarea distanţelor pînă la astrele îndepărtate, abia vizibile cu ajutorul celui mai puternic telescop sau radiotelescop, astronomii n-au nevoie de denumiri care să depăşească miliarde. Corpurile cereşti cele mai îndepărtate se află la o distanţă de peste un miliard de

---

[1] Magniţki folosea acea clasificare a numerelor care dă cîte o denumire nouă pentru fiecare milion de unităţi inferioare (bilionul — un milion de milioane etc.).

În sistemul nostru de denumiri unitatea urmată de 24 de zerouri se numeşte septilion (vezi tabelul de la pag. 179). În cele ce urmează se foloseşte sistemul de numiri indicat în tabel.

„ani lumină“ de Pămînt. Chiar dacă am vrea să exprimăm această distanță în cm, am obține aproximativ 10 000 de septilioane; prin urmare, nici așa nu ieșim din limitele tabelului lui Magnițki.

În lumea mărimilor foarte mici constatăm că de asemenea nu se face simțită nevoia de a folosi numere mai mari decît septilionul. Numărul de molecule dintr-un cm^3 de gaz — una din mulțimile cele mai mari calculate real — se exprimă în zeci de cvintilioane. Numărul oscilațiilor pe secundă pentru undele electromagnetice, cele mai scurte din cîte sînt cunoscute în prezent, nu depășește un sextilion, adică $1\ 10^{21}$. Dacă ne-am pune în gînd să calculăm cîte picături se cuprind în ocean (considerînd că volumul unei picături este egal cu 1 mm^3, ceea ce este destul de puțin) tot nu ar fi nevoie de numere mai mari ca septilionul, pentru că am obține cel mult mii de septilioane.

În cazul cînd am dori să exprimăm însă cîte grame de substanță cuprinde întregul nostru sistem solar, atunci ne trebuie o denumire superioară septilionului, pentru că acest număr cuprinde 34 de cifre (2 urmat de 33 de zerouri): $2 \cdot 10^{33}$.

CEL CARE ÎNGHITE URIAȘII NUMERICI

Să ne oprim puțin asupra unui uriaș aritmetic (mai bine zis geometric) de un gen aparte — asupra milei cubice[1]. Noi ne reprezentăm destul de greu mărimile cubice; de obicei subestimăm mărimea lor — mai ales cînd este vorba despre unități de măsură mari cu care avem de-a face în astronomie. Dacă însă ne închipuim greșit mărimea unei mile cubice — cea mai mare unitate de măsură folosită de noi pentru volum — atunci cît de greșite trebuie să fie noțiunile pe care le avem cu privire la volumul globului pămîntesc, al celorlalte planete, al Soarelui. De aceea trebuie să acordăm puțin

[1] Aici se are în vedere mila geografică, care reprezintă a 15-a parte dintr-un grad ecuatorial și măsoară 7 420 m.

timp şi atenţie încercărilor de a căpăta imaginea corespunzătoare cu privire la mila cubică.

În cele ce urmează ne vom folosi de expunerea pitorească dată într-o cărticică aproape uitată, „O călătorie fantastică prin Univers" (apărută cu circa 100 de ani în urmă).

„Presupunem că pe o şosea dreaptă putem vedea pînă la o distanţă de o milă întreagă ($7^1/_2$ m). Să facem un catarg cu lungimea de o milă şi să-l aşezăm la un capăt al drumului, lîngă un stîlp de telegraf. Ca să ne dăm seama cît de înalt este catargul, presupunem că lîngă el se află statuia unui om de aceeaşi înălţime cu catargul, adică de peste 7 km. Genunchiul acestei statui se va afla la o înălţime de 1 800 de m; ar trebui puse una peste alta 25 de piramide egiptene pentru a ajunge pînă la mijlocul statuii.

Să ne imaginăm acum că am aşeza două catarge cu înălţimea de o milă la distanţa de o milă unul de altul şi am unit aceste două catarge cu scînduri; s-ar fi obţinut un perete cu lungimea de o milă şi cu înălţimea tot de o milă. Aceasta este o milă patrată.

Am obţinut astfel un perete de lemn aşezat vertical. Să ne imaginăm că avem patru pereţi egali uniţi între ei în forma unei lăzi (fig. 55). Îi punem un capac de o milă lungime şi o milă lăţime. Această ladă va ocupa un volum egal cu o milă cubică. Să vedem cît este de mare o asemenea ladă, ce şi în ee cantitate poate încăpea în ea.

Ridicăm capacul şi începem prin a pune în ladă toate clădirile Leningradului. Ele vor ocupa foarte puţin loc. Plecăm la Moscova, adunînd din drum toate oraşele mari şi mici. Deoarece toate acestea au acoperit numai fundul lăzii, să căutăm material pentru umplerea ei şi în alt loc. Luăm Parisul, cu Arcul lui de Triumf şi Turnul Eifel şi le aruncăm tot acolo. Toate acestea zboară ca într-o prăpastie; aproape că nici nu se observă că am mai pus ceva. Adăugăm Londra, Viena, Berlinul. Dar cum toate acestea sînt încă puţin pentru a putea umple măcar în parte golul din ladă, vom începe să aruncăm, fără alegere, toate oraşele, cetăţile, castelele, satele, diferitele clădiri întîlnite în cale. Tot e puţin.

Adăugăm tot ce a fost făcut de miinile omului în Europa; dar și acum lada este umplută numai pe sfert. Aruncăm toate corăbiile din lume, dar și asta fără folos. Vom pune toate piramidele egiptene, toate căile ferate din

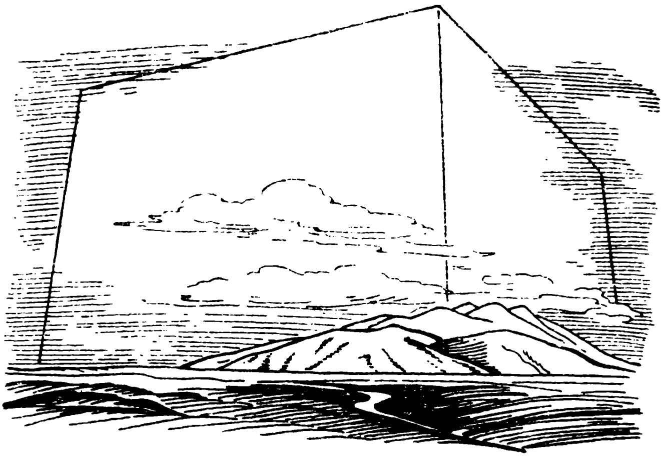


Fig. 55 — O ladă cu un volum de o milă geografică cubică ar cuprinde clădirile din lumea întreagă, flota tuturor țărilor, toate mașinile și construcțiile din cele cinci continente ale lumii, populația globului pămîntesc, toate animalele de pe planeta noastră și tot nu ar fi umplută.

lumea veche și nouă, toate mașinile și fabricile din lume — tot ce a fost făcut de mîna omului în Asia, Africa, America, Australia. Lada se umple numai pînă la jumătate. O scuturăm puțin ca să se așeze toate obiectele mai bine și încercăm să completăm golul cu oameni.

Adunăm toate paiele și tot bumbacul din lume și-l așezăm în ladă, obținînd astfel un strat care să-i ferească pe oameni de loviturile inerente unei asemenea experiențe. Întreaga populație a Germaniei va încăpea în primul strat. O acoperim cu un strat moale de grosimea unui picior și mai așezăm tot atîția oameni. Acoperim și acest strat și, așezînd strat după strat, vom închide în ladă întreaga populație a Europei, Asiei, Africii, Americii, Australiei... S-au format astfel 50 de straturi;

considerînd că un strat are grosimea de un metru, în total 50 de metri. Ar fi trebuit de cîteva zeci de ori mai mulţi oameni decît există pe lume pentru a putea umple cea de-a doua jumătate a lăzii...

Ce-i de făcut? Dacă am fi dorit să aşezăm în ladă toate vietăţile din lume — toţi caii, boii, măgarii, berbecii, cămilele, iar peste ele să punem toate păsările, peştii, şerpii, tot ce zboară şi se tîrăşte — nici atunci n-am fi umplut lada pînă sus fără ajutorul stîncilor sau al nisipului.

Iată ce înseamnă o milă cubică. Iar din globul terestru s-ar putea face 660 de milioane de asemenea lăzi."

La cele spuse mai sus adăugăm că o milă cubică de boabe de grîu ar fi cuprins cîteva cvintilioane de astfel de boabe. După cum vedeţi, acest uriaş cubic înghite toţi ceilalţi uriaşi[1].

URIAŞII TIMPULUI

Uriaşele intervale de timp ne apar şi mai puţin clare decît distanţele şi volumele uriaşe. Geologia ne învaţă că din timpul depunerii celor mai vechi straturi ale scoarţei pămîntului, s-au scurs sute de milioane de ani. Cum să ne dăm seama de imensitatea unor perioade de timp atît de îndelungate? Un savant propune următoarea metodă:

„Să ne imaginăm că întreaga istorie a Pămîntului poate fi reprezentată ca o linie dreaptă cu lungimea de 500 km. Presupunem că această distanţă reprezintă cele 500 de milioane de ani care s-au scurs de la începutul epocii cambriene (una din epocile cele mai vechi din istoria scoarţei Pămîntului). Deoarece 1 km reprezintă un milion de ani, ultimii 500 — 1 000 m vor corespunde duratei perioadei gheţarilor, iar cei 600 de ani ai istoriei mondiale vor fi de numai 6 m — lungimea unei

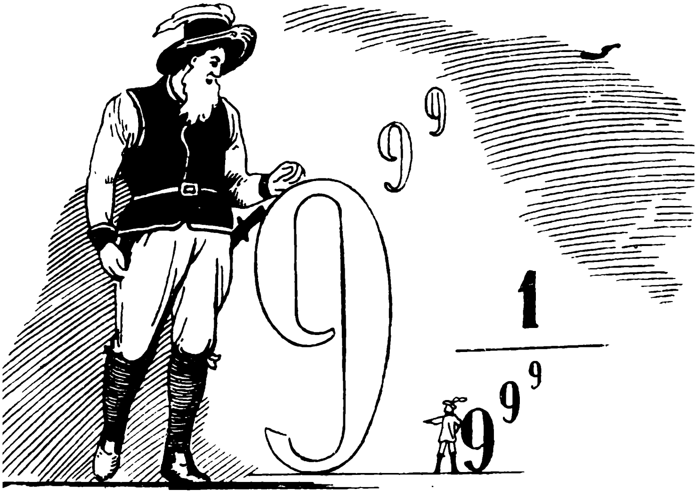
---

[1] Şi totuşi mila cubică pierde mult în ochii noştri, dacă se ţine seama de faptul că întreaga cantitate de gaze ce urmează să se extragă în 1965 în U.R.S.S. ar ocupa peste o treime din volumul unei astfel de lăzi.

camere, în care cei 70 de ani de viață ai omului se pot reprezenta printr-o linie de 7 cm. Dacă vom sili un melc să parcurgă această distanță cu viteza normală, de 3,1 mm pe secundă, atunci pentru întreaga distanță i-ar trebui 5 ani. Iar întreaga perioadă de la începutul primului război mondial pînă în zilele noastre o va parcurge în 40 de secunde... Vedem deci cît de mici sînt, raportat la scara istoriei Pămîntului, acele perioade mici pe care omul le poate cuprinde cu mintea sa".

CURIOZITĂȚI ARITMETICE:

$$100 = \begin{cases} 1\frac{6}{7} + 3 + 95\frac{4}{28} \\ 57\frac{3}{6} + 42\frac{9}{18} \end{cases}$$



CAPITOLUL X

PITICII NUMERICI

DE LA URIAŞI LA PITICI

În călătoriile sale Gulliver, părăsindu-i pe pitici, a nimerit printre uriaşi. Noi facem călătoria în sens invers: după ce am făcut cunoştinţă cu uriaşii numerici, trecem în lumea piticilor — a numerelor care sînt de atîtea ori mai mici ca unitatea, de cîte ori unitatea este mai mică decît uriaşul aritmetic.

Căutarea reprezentanţilor acestei lumi nu prezintă nici o greutate. Pentru aceasta este suficient să se scrie un şir de numere inverse milionului, miliardului, trilionului etc., adică să se împartă unitatea cu aceste numere. Fracţiile care se obţin:

$$\frac{1}{1\,000\,000},\quad \frac{1}{1\,000\,000\,000},\quad \frac{1}{1\,000\,000\,000\,000}\ \text{etc.}$$

sînt piticii numerici tipici, care sînt tot atît de mici în comparaţie cu unitatea, pe cît este de mică unitatea în comparaţie cu milionul, miliardul, trilionul şi cu ceilalţi uriaşi numerici.

După cum vedeţi fiecărui uriaş numeric îi corespunde un pitic numeric şi, prin urmare, pe lume nu există mai puţini pitici numerici decît uriaşi. Şi pentru reprezentarea lor s-a găsit o metodă de prescurtare. Am arătat mai înainte (pag. 180) că în lucrările ştiinţifice (de astronomie, fizică) numerele foarte mari se notează astfel:

$$1\,000\,000 \ldots\ldots 10^6$$
$$10\,000\,000 \ldots\ldots 10^7$$
$$400\,000\,000 \ldots\ldots 4 \cdot 10^8$$
$$6 \text{ cvadrilioane} \ldots\ldots 6 \cdot 10^{15} \text{ etc.}$$

În mod corespunzător piticii numerici se notează în felul următor:

$$\frac{1}{1\,000\,000} \ldots\ldots\ldots 10^{-6}$$

$$\frac{1}{100\,000\,000} \ldots\ldots\ldots 10^{-8}$$

$$\frac{3}{1\,000\,000\,000} \ldots\ldots\ldots 3 \cdot 10^{-9} \text{ etc.}$$

Există oare o necesitate reală de a folosi astfel de fracţii? Avem într-adevăr de-a face vreodată cu fracţii atît de mici ale unităţii? Este o problemă pe care credem că este interesant s-o discutăm mai amănunţit.

PITICII TIMPULUI

Este uşor de scris $\frac{1}{1\,000}$ secunde, şi s-ar părea că nu se poate petrece nimic într-un interval de timp atît de scurt.

Aşa îşi închipuie mulţi dintre dumneavoastră, dar într-o miime de secundă pot avea loc foarte multe fenomene.

Trenul care parcurge 36 km pe oră face pe secundă 10 m şi, prin urmare, într-o a mia parte din secundă reuşeşte să se deplaseze cu 1 cm. Sunetul se propagă în aer în decurs de o miime de secundă cu 33 cm, iar un glonte care părăseşte ţeava armei cu o viteză de 700—800 m/s parcurge în acelaşi interval de timp 70 cm. Globul pămîntesc se deplasează în fiecare miime de secundă, în rotaţia sa în jurul Soarelui, cu 30 m. O coardă care emite un sunet înalt face într-o miime de secundă 2—4 şi chiar mai multe oscilaţii complete; chiar şi ţînţarul reuşeşte să-şi ridice sau să-şi coboare aripioarele. Un fulger durează mult mai puţin decît o miime de secundă; în acest interval de timp reuşeşte să apară şi să înceteze (fulgerul se extinde pe o lungime de cîţiva km).

Vom spune că o miime de secundă nu poate fi considerată un pitic, aşa după cum nimeni nu va numi mia drept uriaş numeric. Dacă am lua însă o milionime de secundă, atunci am putea afirma că aceasta este o mărime ireală, un interval de timp în decursul căruia nu se poate întîmpla nimic? Nu! Chiar nici o milionime de secundă — de exemplu, pentru un fizician contemporan — nu este un interval de timp prea mic.

În domeniul fenomenelor luminoase (şi electrice) savantul are mereu de-a face cu fracţiuni mult mai mici de secundă. Amintim înainte de toate că o rază de lumină parcurge în fiecare secundă (în vid) 300 de mii de km; prin urmare, într-o milionime de secundă lumina se propagă la o distanţă de 300 m — aproximativ atît cît parcurge în aer sunetul în decurs de o secundă întreagă.

Dar lumina este un fenomen ondulatoriu şi numărul de unde luminoase care trec în fiecare secundă prin orice punct al spaţiului, ajunge la sute de trilioane. Acele unde luminoase care, acţionînd asupra ochiului nostru, provoacă senzaţia de lumină roşie, au o frecvenţă a oscilaţiilor de 400 trilioane pe secundă; aceasta înseamnă că într-o milionime de secundă în ochiul nostru intră 400 de milioane de unde şi că o undă pătrunde în ochi într-un interval de timp de 400 000 000 000 000 ori mai mic decît o secundă. Iată un adevărat pitic numeric!

Şi acest pitic real este însă un adevărat uriaş în comparaţie cu fracţiuni şi mai mici de secundă, cu care are de-a face fizicianul în studiul razelor Roentgen. Razele Roentgen, care au proprietatea de a pătrunde prin multe corpuri opace, reprezintă, ca şi razele vizibile, un fenomen ondulatoriu, numai că la ele frecvenţa oscilaţiilor este mult mai mare decît la razele vizibile — ea atinge 2 500 trilioane pe secundă. Undele se succed aici de 60 de ori mai des decît la radiaţiile vizibile ale luminii roşii. Razele „gamma“ au o frecvenţă şi mai mare decît razele Roentgen.

Deci, şi în lumea piticilor există uriaşi şi pitici proprii. Gulliver era mai înalt decît piticii numai de vreo 12 ori şi totuşi li se părea uriaş. Aici însă, un pitic este mai mare decît altul de vreo 60 de ori şi, prin urmare, are tot dreptul să se numească uriaş.

PITICII SPAŢIULUI

Acum este interesant de văzut care sînt distanţele cele mai mici măsurate şi evaluate astăzi de cercetătorii naturii.

În sistemul de unităţi metrice, unitatea de lungime cea mai mică folosită în mod curent este milimetrul, care este aproximativ de 2 ori mai mic decît grosimea unui băţ de chibrit. Pentru a măsura obiectele vizibile cu ochiul liber, această unitate de lungime este suficient de mică. Dar pentru măsurarea bacteriilor şi altor obiecte mici ce se pot distinge numai cu ajutorul microscoapelor puternice, milimetrul este prea mare. Pentru astfel de măsurători savanţii folosesc o unitate de măsură mai mică — micronul, care este de o mie de ori mai mic decît milimetrul. Globulele roşii, pe care le găsim cu zecile de milioane în fiecare picătură din sîngele nostru, au o lungime de 7 microni şi grosimea de 2 microni. O stivă formată din o mie de asemenea globule are chiar grosimea unui chibrit.

Oricît de mic ni s-ar părea micronul, el este totuşi mare pentru distanţele pe care este nevoie să le măsoare un fizician al zilelor noastre. Particulele cele mai mici de molecule invizibile chiar cu microscopul, din care este formată substanţa tuturor corpurilor din natură, şi atomii încă și mai mici, au dimensiuni cuprinse între a suta și a mia parte dintr-un micron[1]. Dacă ne oprim asupra primei mărimi, a celei mai mari, constatăm că un milion de astfel de particule (iar noi ştim de acum cît de mare este milionul) aşezate pe o aceeaşi dreaptă, una lîngă alta, ar ocupa doar un mm!

Pentru a ne da seama cît de mic este atomul, să ne imaginăm următorul tablou. Închipuiţi-vă că toate obiectele de pe globul pămîntesc ar fi crescut de un milion de ori. În acest caz turnul Eifel (300 m înălţime) s-ar fi înălţat la 300 000 de km în spaţiul cosmic şi vîrful lui s-ar fi aflat în imediata vecinătate a orbitei Lunii. Oamenii ar fi avut o înălţime egală cu un sfert din raza globului pămîntesc — 1 700 km; un pas al unui astfel de om uriaș l-ar fi deplasat cu 600—700 km. Globulele roșii, care s-ar fi numărat cu miliardele în sîngele lui, ar fi avut un diametru de peste 7 m. Firul de păr ar fi ajuns la o grosime de 100 m. Lungimea unui șoarece ar fi atins 100 km, iar a unei muște — 7 km.

Cît de mare ar fi fost în această situaţie un atom de substanţă?

Nici nu-ţi vine să crezi: dimensiunile lui ne vor apare sub forma... unui punct tipografic de mărimea celui din cartea de faţă!

Am atins oare în felul acesta limitele micimilor din spaţiu, care nu pot fi depăşite nici măcar de fizicianul care foloseşte metodele măsurătorilor celor mai fine? Pînă nu de mult aşa se credea. S-a demonstrat însă că atomul este o lume întreagă formată din particule mult mai mici şi servește drept arenă pentru acţiunea unor forţe mari. De exemplu, atomul de hidrogen este for-

[1] Cea mai mică unitate de lungime folosită în fizica modernă este „x"; el este egal cu a zecea milioana parte dintr-un micron.

mat dintr-un „nucleu“ central şi din „electronul“ care se roteşte repede în jurul lui. Fără a mai intra în alte amănunte vom spune că diametrul electronului se măsoară cu trilionimi de milimetru. Cu alte cuvinte, diametrul electronului este de aproape un milion de ori mai mic decît diametrul unui atom. Dacă doriţi însă să comparaţi dimensiunile electronului cu mărimea unui fir de praf, atunci calculele vă pot arăta că electronul este mai mic decît firul de praf de aproximativ tot atîtea ori de cîte ori firul de praf este mai mic decît globul pămîntesc!

Vedeţi, prin urmare, că atomul — acest pitic între pitici — este în acelaşi timp un adevărat uriaş în comparaţie cu electronul, care intră în componenţa lui, un uriaş de mărimea sistemului solar faţă de globul pămîntesc.

În acest sens se poate întocmi o scară instructivă, în care fiecare treaptă este un uriaş faţă de treapta precedentă și un pitic în raport cu următoarea:

electronul
atomul
firul de praf
casa
globul pămîntesc
sistemul solar
distanţa pînă la Steaua polară
Calea Lactee

Fiecare termen din acest şir este de aproape un sfert de milion de ori[1] mai mare decît cel precedent şi tot de atîtea ori mai mic decît următorul. Nimic nu arată atît de clar caracterul relativ al noţiunilor de „mare“ şi „mic“ ca acest tabel. În natură nu există un obiect absolut mare sau absolut mic. Fiecare obiect poate fi imens şi infinit de mic, în funcţie de modul de a-l privi, de obiectul cu care este comparat.

---

[1] Se au în vedere dimensiunile liniare (nu volumele), adică diametrul atomului, diametrul sistemului solar, înălţimea sau lungimea casei etc. Pentru amănunte de acest gen vezi cartea mea „Cunoaşteţi oare fizica“?.

Discuţia noastră cu privire la uriaşi şi pitici din lumea numerelor ar rămîne incompletă, dacă nu am prezenta cititorului unul din lucrurile cele mai ciudate de acest gen, care, ce-i drept, nu este nou, dar face cît o duzină de noutăţi. Pentru început vom da următoarea problemă care la prima vedere pare foarte simplă:

Care este numărul cel mai mare ce poate fi scris cu ajutorul a trei cifre, fără a folosi nici unul din semnele operaţiilor?

Vă gîndiţi, desigur, la 999, dar nu este acesta răspunsul; ar fi fost mult prea simplu. Răspunsul corect se scrie astfel:

$$9^{9^{9}}$$

Această expresie înseamnă „nouă la puterea a noua la puterea noua“[1]. Cu alte cuvinte, trebuie să calculăm un produs de atîţia de nouă cîte unităţi se obţin prin înmulţirea:

$$9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9$$

Este suficient să începem numai calculul pentru a ne da seama de imensitatea rezultatului care s-ar obţine. Dacă veţi avea răbdare să efectuaţi înmulţirea de mai sus obţineţi numărul:

$$387\,420\,489$$

De fapt, munca abia începe: trebuie să găsim acum

$$9^{387\,420\,489}$$

adică produsul a 387 420 489 de nouă. Prin urmare, rotunjit, înseamnă să facem 400 de milioane de înmulţiri...

Bineînţeles că nu veţi avea timp să duceţi pînă la capăt un asemenea calcul, iar eu sînt lipsit de posibi-

---

[1] În limbajul matematicii această expresie se numeşte „supraputerea a treia a lui nouă“.

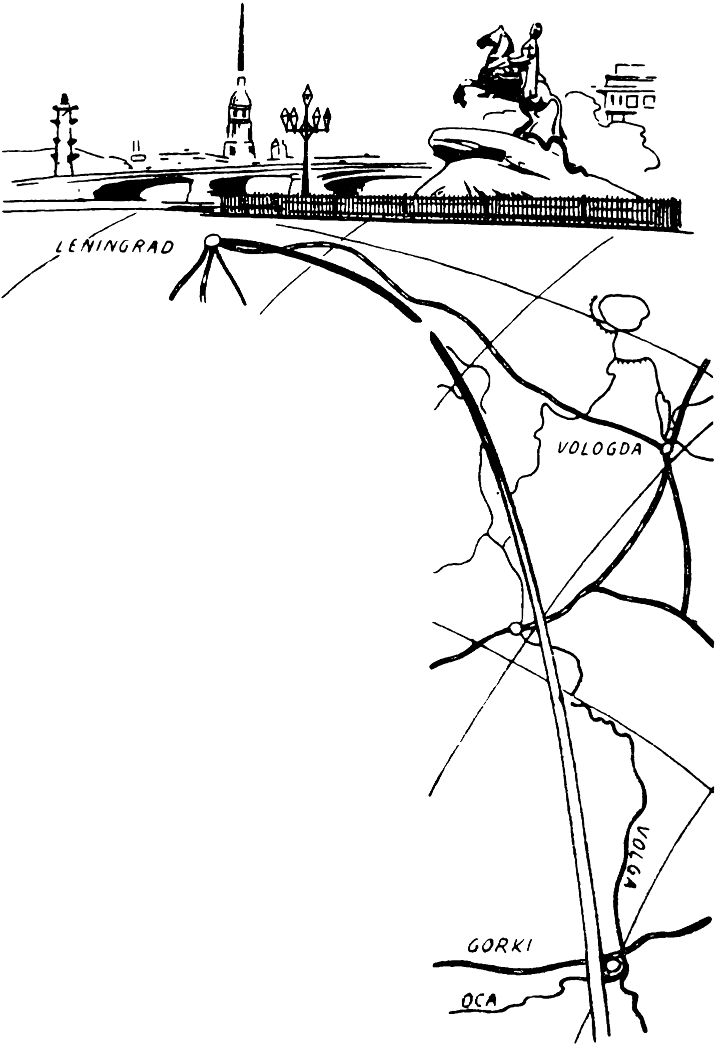


Fig. 56 — Numărul exprimat prin 9^{9^9} este format din 370 de milioane cifre. Dacă am scrie toate aceste cifre una lîngă alta pe o bandă de hîrtie, această bandă s-ar întinde pe 1 000 de km, de la Leningrad pînă la orașul Gorki.

litatea de a vă comunica rezultatul din trei cauze pe care sper că le veţi considera temeinice. În primul rînd acest număr nu a fost calculat încă niciodată de nimeni (se cunoaşte rezultatul aproximativ). În al doilea rînd, chiar dacă el ar fi fost calculat, atunci pentru a-l tipări ne-ar fi necesar cel puţin o mie de cărţi ca cea de faţă, pentru că numărul este format din 369 693 061 cifre; culese cu litere de tipar obişnuite ele s-ar întinde pe o lungime de 1 000 km — de la Leningrad pînă la oraşul Gorki. În sfîrşit, chiar dacă aş fi fost aprovizionat cu o cantitate suficientă de hîrtie şi de cerneală, nici atunci nu v-aş fi putut satisface curiozitatea. Cred că vă daţi seama de ce: să zicem că aş fi fost capabil să notez fără întrerupere cîte două cifre pe secundă, atunci într-o oră aş fi scris 7 200 de cifre; în 24 de ore, lucrînd neîntrerupt zi şi noapte, aş înregistra cel mult 172 800 cifre. De aici rezultă că fără să părăsesc o clipă pana din mînă, muncind neobosit zi şi noapte, mi-ar fi trebuit cel puţin şapte ani pentru a scrie acest număr.

Mă voi mulţumi să vă spun doar atît: numărul începe cu cifrele 428 124 773 175 747 048 036 987 118 şi se termină cu 89. Ce se găseşte între acest început şi sfîrşit nu se ştie.[1] În orice caz cuprinde 369 693 061 cifre!

Cît de mare trebuie să fie deci însuşi numărul de obiecte exprimat prin acest şir lung de cifre? Este greu să dăm măcar o noţiune aproximativă cu privire la imensitatea lui, pentru că o astfel de mulţime de obiecte, considerînd chiar că fiecare electron este un obiect separat, nu există în întreg Universul!

Archimede a calculat cîndva cîte fire de nisip ar fi existat în lume dacă întregul Univers, pînă la stelele fixe, ar fi fost umplut de nisipul cel mai fin. El a obţinut un rezultat care nu depăşea unitatea urmată de 63 de zerouri. Numărul nostru însă este format din 370 de milioane de cifre — prin urmare, cu mult mai mare decît numărul găsit de Archimede.

---

[1] Începutul numărului este calculat cu ajutorul logaritmilor, iar sfîrşitul lui este determinat prin raţionamente.

După ce am făcut cunoştinţă cu acest uriaş mascat să examinăm inversul lui.

$$9^{9^{9}}$$

Împărţind unitatea la acest număr vom obţine piticul numeric respectiv. Vom avea:

$$\frac{1}{9^{9^{9}}}$$

care este egal cu

$$\frac{1}{9^{387\,420\,489}}$$

La numitor se află numărul imens cu care am făcut cunoştinţă mai sus. Ultrauriaşul a fost transformat în ultrapitic.

Este necesar să facem o observaţie esenţială cu privire la uriaşul format din trei de nouă. Eu am primit multe scrisori de la cititorii mei, în care se afirmă că această expresie nu este chiar atît de greu de calculat; unii au efectuat calculele într-un timp relativ scurt. Rezultatul a fost însă mult mai modest decît acela despre care am vorbit eu. Într-adevăr, ei scriu că

$$9^{9} = 387\,420\,489;$$

ridicînd 387 420 489 la puterea a noua, obţinem un număr format „numai" din 72 de cifre. Nici aceasta nu este puţin, dar pînă la 370 de milioane de cifre mai este departe...

Cititorii poate sînt nedumeriţi, dar greşeala constă în aceea că ei nu au înţeles just sensul expresiei în trei etaje formate din nouă. Ei consideră numărul:

$$(9^{9})^{9}$$

în timp ce adevăratul înţeles este altul:

$$9^{(9^{9})}$$

De aici provine diferenţa uriaşă din rezultatele calculelor. Ambele posibilităţi de înţelegere duc la acelaşi rezultat într-un singur caz, şi anume, cînd avem expresia

$$2^{2^{2}}$$

Aici nu mai are importanţă cum se efectuează calculul: se obţine tot 16.

Este interesant că expresia de mai sus nu indică numărul cel mai mare care poate fi scris cu ajutorul a trei de doi. Se poate obţine un număr mult mai mare dacă cei trei de doi îi aşezăm astfel:

$$2^{22}$$

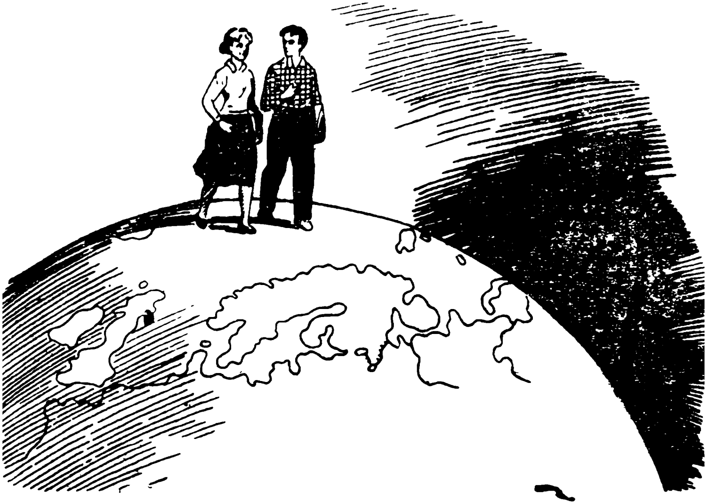
Această expresie este egală cu 4 194 304 şi mult mai mare decît 16.

După cum vedeţi, aşezarea cifrelor în trei trepte nu exprimă totdeauna numărul cel mai mare care poate fi reprezentat cu ajutorul a trei cifre identice. (Despre aceasta se vorbeşte mai amănunţit în „Algebra distractivă“, cap. I: „Cea de-a cincea operaţie matematică“).

CURIOZITĂŢI ARITMETICE:

$$2 \times 2 = 2 + 2 \qquad 11 \times 1{,}1 = 11 + 1{,}1$$

$$3 \times 1\frac{1}{2} = 3 + 1\frac{1}{2} \qquad 21 \times 1\frac{1}{20} = 21 + 1\frac{1}{20}$$



CAPITOLUL XI

CĂLĂTORII ARITMETICE

CĂLĂTORIE ÎN JURUL LUMII

În tinereţe am lucrat la redacţia unei reviste foarte răspîndite din Leningrad, al cărei secretar eram. Într-o zi mi s-a înmînat cartea de vizită a unui musafir. Am citit în ea o familie necunoscută şi o profesie foarte neobişnuită: „primul călător rus care a făcut pe jos o călătorie în jurul lumii". În cadrul serviciului mi s-a întîmplat de multe ori să stau de vorbă cu călători care au vizitat diferite continente şi chiar cu oameni care au întreprins călătorii în jurul lumii. Dar despre cel care a făcut pe jos o călătorie în jurul lumii eu nu auzisem încă. M-am grăbit să ies în sala de primire pentru a face cunoştinţă cu acest om neobosit.

Vizitatorul era tînăr și avea o înfățișare foarte modestă. La întrebarea mea, cînd a reușit să întreprindă această călătorie neobișnuită, „primul călător rus... în jurul lumii“ mi-a explicat că tocmai acuma este în toiul acestei călătorii. Ruta? Șuvalovo Leningrad[1]; despre cele ce vor urma dorește să se sfătuiască cu mine... Din discuții s-a lămurit că planurile „primului călător rus etc.“ sînt destul de nebuloase, dar în orice caz, nu intră în intențiile lui să părăsească Rusia.

— În acest caz cum veți întreprinde călătoria în jurul lumii? — am întrebat eu cu uimire.

— Principalul este de a parcurge distanța din jurul globului pămîntesc, iar aceasta se poate face și în Rusia. Zece km am și parcurs, și mai rămîn...

— Numai 39 990. Drum bun!

— Nu știu cum a călătorit „primul etc.“ de-a lungul drumului ce i-a mai rămas. Nu mă îndoiesc însă de faptul că el a reușit să-și realizeze intențiile. Chiar dacă nu a mai călătorit de loc și s-a înapoiat la Șuvalovo, locuind acolo fără să iasă din cadrul locului de baștină, și în acest caz el a parcurs cel puțin 40 000 de km. Singura nenorocire constă numai în faptul că el nu este primul și nici singurul om care a săvîrșit acest lucru. Și dumneavoastră, și eu, și majoritatea celorlalți cetățeni au tot atîtea drepturi să se numească „călători în jurul lumii pe jos“, ca și călătorul din Șuvalovo. Aceasta pentru că oricare din noi, oricît de puțin s-ar mișca, a reușit în decursul vieții sale, fără să-și dea seama, să parcurgă pe jos un drum mai lung chiar decît circumferința globului pămîntesc. Un mic calcul aritmetic ne va convinge de acest lucru.

În cursul unei zile petreceți, desigur, cel puțin 5 ore în picioare: umblați prin camere, prin curte, pe stradă, adică într-un fel sau altul, mergeți. Dacă ați fi avut în buzunar un dispozitiv pentru măsurarea pașilor făcuți, el v-ar fi arătat că zilnic faceți cel puțin 30 000 pași. Dar și fără dispozitivul de măsurat pași, este clar că distanța parcursă de dumneavoastră zilnic este destul de mare. Chiar dacă merge foarte încet, un om

[1] Șuvalovo — o stație mică la 10 km de Leningrad.

face pe oră 4—5 km. Considerînd că pe zi este cinci ore în picioare, el parcurge 20—25 km. Rămîne să înmulţim această cifră cu 360 şi vom afla cam cîţi km parcurge fiecare din noi în decursul unui an:

$$20 \times 360 = 7\,200 \text{ sau } 25 \times 360 = 9\,000$$

Astfel, chiar un om care se deplasează puţin, şi care nu şi-a părăsit niciodată oraşul natal, parcurge anual, pe jos, aproximativ 8 000 km. Cunoscînd că circumferinţa globului pămîntesc are 40 000 km nu este greu de calculat în cîţi ani putem face pe jos o călătorie egală cu cea în jurul lumii:

$$40\,000 : 8\,000 = 5$$

Prin urmare, în cinci ani dumneavoastră parcurgeţi un drum egal, ca lungime, cu circumferinţa globului pămîntesc. Fiecare băiat de 13 ani, dacă considerăm că el a început să meargă la vîrsta de 2 ani, a săvîrşit deja de două ori „călătoria în jurul lumii". Fiecare om la vîrsta de 25 de ani a săvîrşit cel puţin patru călătorii de acest fel. Atingînd vîrsta de 60 de ani, noi ocolim de zece ori globul pămîntesc, adică parcurgem o cale mai lungă decît de la Pămînt la Lună (380 000 km). Acesta este rezultatul neaşteptat al calculului cu privire la un fenomen atît de cotidian, cum este plimbarea noastră prin cameră şi în afară de casă.

ASCENSIUNE PE MONT BLANC

Dacă îl veţi întreba pe poştaşul care duce zilnic scrisorile adresanţilor sau pe medicul consultant, ocupat toată ziua cu vizitarea pacienţilor, dacă au făcut ascensiunea pe Mont Blanc, ei, desigur, vor fi miraţi de această întrebare. Şi, totuşi, puteţi demonstra cu uşurinţă fiecăruia din ei că, deşi nu sînt alpinişti au săvîrşit deja ascensiunea pe o culme care depăşeşte chiar şi cele mai înalte culmi ale Alpilor. E suficient să se calculeze doar cîte trepte urcă zilnic un poştaş repartizînd scrisorile sale sau un medic vizitîndu-şi bolnavii.

Se va constata că şi poştaşul cel mai modest, şi medicul cel mai ocupat, care nici n-au visat măcar să participe la întrecerile sportive, doboară recorduri mondiale de alpinism. Vă propunem să urmăriţi acest calcul.

Fig. 57 — În decurs de un an poştaşul urcă de 8 ori la înălţimea celor mai înalte piscuri din Europa.

Vom folosi pentru calcule cifre medii destul de modeste; presupunem că poştaşul duce într-o zi numai zece scrisori, unor oameni care locuiesc fie la etajul al II-lea, fie la al III-lea, al IV-lea, al V-lea. În medie, luăm etajul III. Vom considera că înălţimea etajului al treilea este rotunjită la 10 m; prin urmare poştaşul face zilnic ascensiuni la o înălţime de 10 × 10 = 100 m. Mont Blanc are o înălţime de 4 800 m. Împărţind-o cu 100 veţi afla că poştaşul nostru face o ascensiune pe Mont Blanc în 48 de zile...

Prin urmare, la fiecare 48 de zile, sau de aproximativ 8 ori pe an, poştaşul, urcînd scările, face o ascensiune la o înălţime egală cu a vîrfului cel mai înalt din Europa. Spuneţi-mi, vă rog, ce sportiv urcă de 8 ori pe an pe vîrful Mont Blanc?

În privinţa medicului nu am nevoie de presupuneri, pentru că sînt posesorul unor cifre reale. Medicii, care fac vizite la domiciliu în Leningrad, au calculat că în medie, fiecare din ei, într-o zi de lucru, fac o ascensiune de 2 500 de trepte. Considerînd că înălţimea unei trepte este de 15 cm şi că medicul lucrează 300 de zile pe an, obţinem că într-un an medicul face ascensiuni de 112 km, adică de 20 de ori înălţimea Mont Blanc.

Dar nu este neapărată nevoie să fii poştaş sau medic pentru a parcurge asemenea distanţe, de care nici măcar nu-ţi dai seama. Eu locuiesc la etajul al II-lea, într-un apartament spre care duce o scară cu 20 de trepte — un număr aparent modest. Sînt nevoit să urc această scară de 5 ori pe zi şi să mai vizitez două locuinţe aşezate aproximativ la aceeași înălţime. În medie, se poate considera că urc zilnic de 7 ori o scară cu 20 de trepte, adică 140 de trepte pe zi. Prin urmare, cîte trepte urc în decursul unui an?

$$140 \times 360 = 50\,400$$

Zilnic urc peste 50 000 de trepte! În 60 de ani ar însemna să ajung în vîrful unei scări uriaşe de 3 000 000 de trepte (450 km)! Cît de mult m-aş fi mirat dacă, pe cînd eram copil, aş fi fost dus la baza acestei scări care se ridică în infinit și dacă mi s-ar fi spus că, poate o dată voi ajunge în vîrful ei... Dar cît de mari sînt înălţimile pentru acei oameni care prin însăși profesia lor nu fac altceva decît să urce, cum sînt de exemplu liftierii?

O CĂLĂTORIE PE NESIMŢITE ÎN FUNDUL OCEANULUI

Călătorii foarte lungi efectuează locuitorii subsolurilor, funcţionarii din depozitele aşezate la subsol etc. Alergînd de multe ori pe zi, în sus şi în jos, pe treptele micii scări care duce la subsol, în decurs de cîteva luni ei parcurg distanţe de km întregi. Nu este greu de calculat cît timp îi trebuie unui funcţionar dintr-un depozit aşezat la subsol, să coboare astfel o distanţă egală cu adîncimea unui ocean. Dacă scara are, să zicem, numai 2 m şi omul este silit să coboare pe zi de 10 ori, atunci într-o lună el va coborî $30 \times 20 = 600$ m, iar pe an $600 \times 12 = 7\,200$ m (peste 7 km). Or cea mai adîncă mină coboară în adîncurile pămîntului numai cu 2 km şi ceva.

Fig. 58 — Un muncitor care lucrează într-un depozit de la subsol coboară în fiecare an pînă la adîncimea oceanului.

Astfel, dacă de la suprafaţa oceanului spre fundul său ar fi pusă o scară, atunci orice funcţionar dintr-un depozit aşezat la subsol ar putea pune piciorul pe fundul oceanului în numai un an.

CU TRACTORUL ÎN JURUL LUMII

Fiecare tractor lucrează pe cîmpiile colhozurilor şi sovhozurilor circa 2 500 de ore pe an. În medie el parcurge pe oră 5 km, iar într-un an:

$$5 \times 2\,500 = 12\,500 \text{ km}$$

Este uşor de văzut în cîţi ani parcurge tractorul un drum egal cu circumferinţa globului pămîntesc:

$$40\,000 : 12\,500 = 3{,}2$$

În numai 5 ani un tractor, dintre cele care lucrează în prezent în U.R.S.S., va reuşi să efectueze „o călătorie în jurul lumii" o dată și jumătate.

Evident, ne întrece pe noi, deoarece în 5 ani nu putem face decît o singură „călătorie în jurul lumii", în schimb rămîne mult în urma locomotivei (a trenului marfar, care reușește să parcurgă pe căile ferate ale țării un drum egal cu o „călătorie în jurul lumii", în numai opt luni trenul personal chiar în 6 luni).

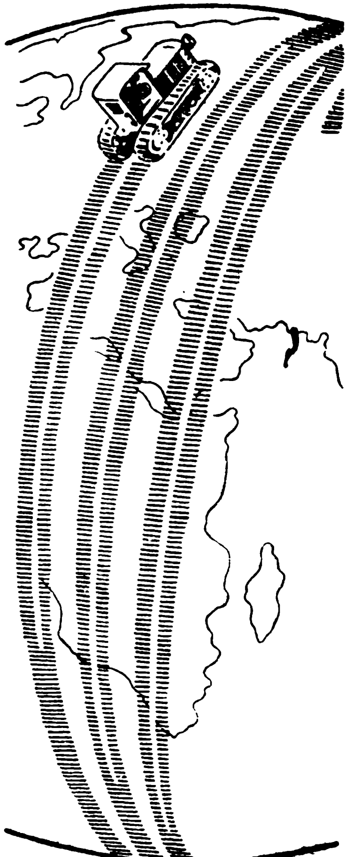


Fig. 59 — În zece ani de lucru tractorul ocolește de 3 ori globul pămîntesc.

O ROTIȚĂ NEOBOSITĂ

Mulți dintre noi dețin cîte un călător în jurul lumii în interiorul ceasului de mînă sau de buzunar. Deschideți capacul din spate al ceasului și priviți mecanismul. Rotițele lui dințate se învîrtesc atît de încet, încît la prima vedere ne par imobile. Trebuie să le urmărim mult timp și cu atenție pentru a putea observa mișcarea lor. Excepție face o singură rotiță — balansorul, care balansează neîncetat. Mișcările lui sînt atît de rapide, încît este greu să numărăm oscilațiile sale într-o secundă. Se roteşte de cinci ori în decursul fiecărei secunde, cînd într-o parte, cînd în cealaltă, succesiv. Şi de fiecare dată rotiţa face o rotaţie completă şi încă o cincime din ea.

Vom încerca să numărăm cîte rotaţii execută în decursul unui an; dacă omul este grijuliu, şi nu uită să-l întoarcă la timp, ceasul nu se opreşte niciodată. În fiecare minut rotiţa face $5 \times 60 = 300$ oscilaţii, iar în fiecare oră $300 \times 60 = 18\,000$; în 24 de ore: $18\,000 \times 24 = 432\,000$ oscilaţii. Considerăm în medie că anul are 360 de zile, atunci pentru fiecare balansor avem:

$$432\,000 \times 360 = 155\,520\,000 \text{ oscilaţii.}$$

Dar balansorul face la fiecare oscilaţie $1^1/_5$ rotaţii complete. Prin urmare, în decursul unui an, rotiţa se învîrteşte în jurul axei sale de

$$155\,520\,000 \times 1^1/_5 = 186\,624\,000 \text{ ori,}$$

rotunjit de 187 000 000 ori!

Veţi rămîne şi mai uimiţi dacă încercaţi să calculaţi ce drum ar fi parcurs un automobil dacă roţile lui s-ar fi învîrtit de 187 000 000 ori. Diametrul unei roţi de automobil este de 80 cm; prin urmare, circumferinţa ei este de aproximativ 250 cm sau $2^1/_2$ metri. Înmulţind $2^1/_2$ cu 187 000 000 obţinem lungimea drumului pe care dorim s-o aflăm: circa 470 000 km.

Aşadar, dacă roţile unui automobil ar fi fost tot atît de neobosite ca şi balansorul ceasului de buzunar, ar fi ocolit anual de peste zece ori globul pămîntesc, adică ar fi parcurs o cale mai lungă decît cea de la noi pînă la Lună! Nu este greu să ne imaginăm cît timp ar fi trebuit să consumăm pentru reparaţia întregii maşini şi pentru înlocuirea roţii de automobil. Iar micuţa rotiţă a ceasului de buzunar se mişcă neobosit ani întregi, fără reparaţie, fără unsoare, fără înlocuire, lucrînd cu o precizie uimitoare.

CĂLĂTORI STÎND PE LOC

Ultimele rînduri ale cărţii aş vrea să le dedic primilor ei cititori, fără a căror colaborare ea nu ar fi putut apare. Vorbesc, bineînţeles, despre tipografi. Şi ei fac călătorii aritmetice îndepărtate fără a ieşi din tipografie, ba chiar stînd în picioare lîngă maşinile de tipărit. Mîna îndemînatică a muncitorilor „armatei de plumb“, lunecînd în fiecare secundă pînă la caseta cu litere și înapoi, parcurge într-un an o distanță uriaşă. Faceţi calculul. Iată datele: tipograful culege în decursul unei zile de lucru 12 000 de litere şi pentru fiecare literă trebuie să-și deplaseze mîna încolo și înapoi la o distanță de circa jumătate de metru. Considerăm că anul are 300 de zile de lucru. Prin urmare, avem:

$$2 \times 0{,}5 \times 12\,000 \times 300 = 3\,600\,000 \text{ m},$$

adică 3 600 de km.

Deci, în 11 ani de lucru, chiar tipograful care nu face nici un pas de lîngă caseta lui cu litere, săvîrşeşte o călătorie în jurul lumii. „Un călător nemişcat în jurul lumii!“ Aceasta sună mult mai original decît „un călător în jurul lumii pe jos“.

Nu se găseşte nici un om care într-un fel sau altul să nu fi săvîrşit în acest sens o călătorie în jurul lumii. Se poate spune că un om neobișnuit nu este cel ce a săvîrşit călătoria în jurul lumii, ci acela care nu a săvîrşit-o. Şi, dacă cineva încearcă vreodată să vă convingă de contrariu, acum îi veţi putea demonstra „matematic“ că el nu face excepţie de la regula generală.

CURIOZITĂŢI ARITMETICE

$$1 \times \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$6 \times \frac{6}{7} = 6 - \frac{6}{7} \qquad \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

Răspunsuri:

La pag. 35

La rebusul nr. 1 — imprudenţa
La rebusul nr. 2 — considerat

La pag. 68

1. „1 146“. 2. NN, unde cu N s-a notat „cifra“ 13.

La pag. 77

3. „1 304“ 4. „1 144“. 5. „2 402“. 6. „2 010“ 7. „10 210“. 8. „110“. 9. „10“, rest „11“.

La pag. 86

10. Cu baza 8. 11. Cu baza 6. 12. Numărul „una sută treizeci“ în diferitele sisteme de numeraţie se exprimă în felul următor:

în binar „10 000 010“, cu baza 6 „334“,
cu baza 3 „11 211“, cu baza 7 „244“,
cu baza patru „2 002“, cu baza 8 „202“,
cu baza cinci „1 010“, cu baza 9 „154“.

13. În sistemul cu baza 4 „27“; cu baza 5 „38“; cu baza 6 „51“; cu baza 7 „66“; cu baza 8 „83“; cu baza 9 „102“. Acest număr nu poate fi scris nici în sistemul binar şi nici în cel cu baza 3, deoarece conţine cifra 3, care nu există în aceste sisteme. În sistemul cu baza 5, acest număr se împarte cu 2, pentru că suma cifrelor lui se divide cu 2; în sistemul cu baza 7 el se împarte cu 6, iar în sistemul cu baza 9 nu se împarte cu 4.

MATEMATICIENI CITAȚI DE AUTOR[1]

Bobînin, Viktor Viktorovici (1849—1919)

Primul istoric al matematicii în Rusia, profesor de matematici la Universitatea din Moscova.

A închinat studiului și popularizării istoriei matematicii peste 40 de ani de viață. A scris două studii de istoria matematicii în Rusia: „Starea cunoștințelor matematice în Rusia pînă în secolul al XVI-lea" (1884) și „Studii asupra dezvoltării cunoștințelor fizico-matematice în Rusia" (1885—1888).

A înființat și editat timp de 10 ani (1885—1894) revista „Științele fizico-matematice în prezent și în trecut" (Fiziko-matematiceskie nauki v ih nastoiașcem i proședșem"). Ca supliment la această revistă — în care Bobînin a publicat multe din articolele sale — el a editat „Bibliografia fizico-matematică rusă" („Russkaia fiziko-matematiceskaia bibliografiia") (1886—1900) care și-a păstrat valoarea și azi.

Activitatea lui științifică rodnică a fost apreciată în deplină măsură numai în timpul Puterii Sovietice, cînd i s-a acordat titlul de profesor.

Campanella Tommaso (1568—1631)

Filozof italian, unul din reprezentanții comunismului utopic timpuriu.

---

[1] Anexă introdusă de Editura tineretului.

A scris mai multe opere. Cea mai de seamă este „Cetatea Soarelui“ (scrisă în 1602, editată în 1623). Aici și-au găsit reflectarea năzuințele de eliberare a maselor populare din Italia de sub jugul exploatării.

Campanella nu a putut să-și învingă concepțiile idealiste religioase, tradiționale pentru acele timpuri, și a îmbinat tendințele materialiste progresiste cu idei reacționare, învechite. Totuși el a fost un om politic de seamă, patriot și luptător curajos pentru interesele maselor asuprite.

Chuquet, Nicolas

Matematician francez, a trăit în jurul anului 1484 în Lyon. A scris o carte de algebră intitulată „Triparty“, al cărei manuscris se păstrează în Biblioteca Națională din Paris. Cartea a fost tipărită în anul 1880. În această carte se găsește modul de notare a puterilor întrebuințat și astăzi.

Fibonnacci, Leonardo (Pisano) (1180—1250)

Matematician italian. Cu opera „Liber Abaci“ a introdus cifrele indiene (numite arabe) în Europa. A scris lucrări din teoria numerelor și a rezolvat ecuații de gradul III.

Galilei Galileo (1564—1642)

Născut în Pisa și mort în Toscana. Om de știință italian multilateral. A studiat mișcările pendulului, greutatea specifică a corpurilor, fenomenele hidrostatice, căderea liberă a corpurilor etc. A fost profesor de matematică la Universitatea din Padua. Pentru invențiile amintite și pentru descoperirile în legătură cu sistemul solar, la adînci bătrînețe a suferit mult din partea inchiziției bisericești, care l-a persecutat pînă la moarte.

Kepler, Johannes (1571—1630)

Astronom german, născut în Weil der Stadt și mort în Regensburg. A descoperit legile mișcării universale:

1) orbita unei planete este o elipsă, avînd în focar Soarele;

2) dreapta trasă de la centrul planetei la centrul Soarelui (radius vector) descrie suprafețe egale în timpuri egale;

3) pătratul timpului de rotație al planetelor este proporțional cu cuburile distanțelor medii de la Soare.

Opera lui este „Mysterium cosmographium“ (1596).

Laplace, Pierre Simon (1749—1827)

Matematician și astronom francez, născut în Beaumont en Auge, mort la Paris. A publicat lucrări de probabilitate, stabilitate, probleme de chimie, dar renumele şi l-a cîştigat prin lucrarea de astronomie „Mécanique céleste“, fiind savantul cel mai productiv și mai fecund al astronomiei după moartea lui Newton.

Leibniz, Gottfried Wilhelm (1646—1716)

Filozof şi naturalist german, născut în Leipzig și mort în Hanovra. A inventat o mașină de calculat. A descoperit și a arătat aplicațiile multiple și variate ale calculului diferențial. A scris lucrări istorice, juridice și multe lucrări filozofice idealiste.

Leonardo da Vinci (1452—1519)

Arhitect, sculptor, pictor și naturalist, născut în Villa Anchiana și mort în Franța. Artist multilateral, poet, muzician, inginer. A scris un studiu pentru elevi despre pictură. Are descoperiri în fizică, a construit pîrghii, a descoperit legile staticii, a studiat zborul păsărilor, frecarea corpurilor etc. A fost un mare matematician. A cunoscut anatomia și studiul perspectivei.

Newton, Isaac (1643—1727)

Învățat englez. Fondatorul fizicii matematice și astronomiei moderne. Născut în Woolsthorpe şi mort în Kensington. Activitate științifică multilaterală. Şirul binomial, calculul diferențial, gravitația generală, legile fundamentale ale mecanicii, aparate optice, teoria luminii şi alte multe probleme care l-au preocupat, l-au făcut nemuritor.

Pitagora (Pythagoras)

Filozof grec, născut în Samos, în jurul anului 575 î.e.n., mort la 500 î.e.n. Filozof idealist de la care n-a rămas nici o operă posterității. A înființat o şcoală care a existat pînă în secolul al IV-lea î.e.n. Şcoala aceasta s-a ocupat cu arta şi ştiinţa. A interesat-o în special matematica. Potrivit învățăturii filozofilor din această școală, numiți „pitagoricieni“, în natură există numai numere care formează esența lucrurilor și toate fenomenele se bazează pe raporturile numerice. Școala aceasta plină de idei mistice, către sfîrșitul veacului al IV-lea a devenit o organizație reacționară, pledînd pentru epoca sclavagistă pe atunci în destrămare.

Struve, Vasilii Iakovlevici (1793—1864)

Cunoscut astronom și geodez rus, academician din 1832 (din 1822 membru corespondent). Îi revine un rol conducător în construirea Observatorului astronomic de la Pulkovo. A lucrat neobosit în domeniul cercetărilor astronomice și geodezice. Lucrările lui Struve și ale elevilor lui au depășit în ce privește exactitatea lor cercetările analoge efectuate la alte observatoare astronomice. Struve a fost ales membru de onoare al tuturor universităților din Rusia și al multor academii și societăți științifice din străinătate.

Tartaglia, Nicolo

Matematician italian, născut în Brescia la începutul secolului al XVI-lea, mort în anul 1557. Opera sa principală intitulată „Generale trattato di numeri et misuri“ a fost cel mai apreciat manual de matematică din vremea sa.

Utred (Oughtred), William (1574—1660)

Matematician și teolog englez. În lucrarea sa „Clavis mathematicae“ (Cheia matematicii), apărută în anul 1631, a introdus mai multe simboluri matematice dintre care unele se întrebuințează și astăzi.

CUPRINS

Redactor responsabil: A. BALTARETU
Tehnoredactor: C. VULCANESCU

Dat la cules 26.11. 1963. Bun de tipar 11.05.1963. Apărut 1963. Comanda nr. 5807. Tiraj 30.140. Hîrtie tipar de 50 g/m² 540×840/16. Coli editoriale 10,08. Coli de tipar 13,75 A. T. 1205. C. Z. pentru bibliotecile mici 8 (A=R)

Tiparul executat sub comanda nr. 2816 la întreprinderea poligrafică „13 Decembrie 1918", str. Grigore Alexandrescu nr. 93—95, Bucureşti — R.P.R.