

J. CHIRIȚĂ

PROBLEME
J. CHIRIȚĂ

PROBLEME
J. CHIRIȚĂ

PROBLEME
J. CHIRIȚĂ

PROBLEME
J. CHIRIȚĂ

PROBLEME
J. CHIRIȚĂ

PROBLEME
J. CHIRIȚĂ

PROBLEME
J. CHIRIȚĂ

PROBLEME
J. CHIRIȚĂ

PROBLEME
J. CHIRIȚĂ

PROBLEME
J. CHIRIȚĂ

Dr. STAN CHIRIȚĂ

PROBLEME DE MATEMATICI SUPERIOARE



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ – BUCUREȘTI, 1989

Dr. STAN CHIRIȚĂ

PROBLEME DE MATEMATICI SUPERIOARE



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ - BUCUREȘTI, 1989

ISBN 973-30-0466-9

Redactor : prof. Valentin Radu
Tehnoredactor : Elena Opreșeanu
Coperta : Vladimir Baranovschi

Este un
matematică
tora. Teoria
citi, exem
tanța lor.

Prezentă
programelor
tărilor din
gat materia
al analizei.

Materia
graf sint
mează a fi
prezentative
unile teoretice
melor proprie
ținuturi a
a lucrării și
rezultatele

În înche
a făcut pos
parcursul

PREFAȚĂ

Este unanim recunoscut faptul că nu se poate înțelege, asimila, adânci și justifica matematica numai prin însușirea unor cunoștințe teoretice, fără aplicații ale acestora. Teoria se fixează și se aprofundează printr-un număr mare de probleme, exerciții, exemple și contraexemple care nuanțază rezultatele și pun în evidență importanța lor.

Prezenta culegere răspunde acestui deziderat. Conținutul ei este conturat pe baza programelor analitice ale disciplinelor de matematică ce se predau în cadrul facultăților din învățământul tehnic superior. Lucrarea furnizează celor interesați un bogat material din domeniul algebrei liniare, al geometriei analitice și diferențiale și al analizei matematice.

Materialul este structurat în douăsprezece capitole. La începutul fiecărui paragraf sînt prezentate sumar noțiunile elementare, precum și rezultatele teoretice ce urmează a fi aplicate în rezolvarea exercițiilor. Sînt date apoi numeroase probleme reprezentative complet rezolvate, selectate și aranjate în strînsă concordanță cu chestiunile teoretice prezentate anterior. Un larg spațiu este acordat exercițiilor și problemelor propuse spre rezolvare, unele asemănătoare cu cele rezolvate, altele fiind o continuare a acestora, respectîndu-se gradarea dificultății de rezolvare. În ultima parte a lucrării se dau soluții, indicații și răspunsuri. În cadrul unor probleme mai dificile, rezultatele sînt comentate și ilustrate prin exemple și contraexemple.

În încheiere doresc să aduc vii mulțumiri Editurii Didactice și Pedagogice, care a făcut posibilă publicarea lucrării în forma prezentă. Celor ce m-au încurajat pe parcursul elaborării lucrării le sînt profund recunoscător.

Autorul

CUPRINS

1.	MULȚIMI, RELAȚII, STRUCTURI	5
	1.1. Mulțimi	5
	1.2. Relații	7
	1.3. Structuri	8
2.	ELEMENTE DE ALGEBRĂ LINIARĂ	10
	2.1. Determinanți	10
	2.2. Matrice	18
	2.3. Sisteme de ecuații algebrice liniare	23
	2.4. Spații vectoriale	28
	2.5. Operatori liniari	35
	2.6. Forme liniare, Forme pătratice	40
3.	ALGEBRĂ VECTORIALĂ	46
4.	PLANUL ȘI DREAPȚA ÎN SPAȚIU	60
5.	ȘIRURI DE NUMERE REALE	75
6.	SERII NUMERICE	93
7.	LIMITE ȘI CONTINUITATE PENTRU FUNCȚII	111
	7.1. Limite pentru funcții	111
	7.2. Funcții continue	119
8.	TEORIA DIFERENȚIALĂ A FUNCȚILOR	127
	8.1. Funcții de o variabilă reală	127
	*8.2. Funcții de mai multe variabile reale	143
	*8.3. Funcții definite implicit, Schimbări de variabilă	160
9.	GEOMETRIA ANALITICĂ ȘI DIFERENȚIALĂ A CURBELOR ȘI SUPRAFETELOR	174
	9.1. Geometria diferențială a curbelor în spațiu	174
	9.2. Studiul conicelor pe ecuația generală	180
	9.3. Geometria diferențială a suprafețelor	184
	9.4. Suprafețe riglate și de rotație	192
	9.5. Cuadrice pe ecuațiile lor reduce	197
10.	INTEGRAREA FUNCȚILOR	201
	10.1. Primitive	201
	10.2. Integrala definită	211
	*10.3. Integrale improprii	223
	*10.4. Integrale care depind de un parametru	230
	10.5. Integrale curbilinii	234
	*10.6. Integrala dublă, Formula lui Green	243
	10.7. Integrale de suprafață, Formula lui Stokes	258
	10.8. Integrala triplă, Formula Gauss-Ostrogradski	265
11.	ȘIRURI ȘI SERII DE FUNCȚII	274
	11.1. Șiruri de funcții	274
	11.2. Serii de funcții	277
	11.3. Serii de puteri, Serii Taylor	281
	11.4. Serii Fourier	287
12.	ECUAȚII DIFERENȚIALE ȘI CU DERIVATE PARȚIALE	292
	*12.1. Ecuații diferențiale de ordinul întâi	292
	*12.2. Ecuații diferențiale de ordin superior rezolvabile prin cuadraturi	305
	12.3. Ecuații diferențiale liniare de ordin superior	309
	12.4. Sisteme de ecuații diferențiale, Sisteme simetrice	320
	*12.5. Sisteme de ecuații diferențiale liniare	324
	12.6. Ecuații cu derivate parțiale de ordinul întâi liniare și cvasiliniare	330
	INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI	333

1. MULȚIMI. RELAȚII. STRUCTURI

1.1. Mulțimi

Vom folosi notațiile: E – mulțime suport; \emptyset – mulțime vidă; A, B, C, \dots – submulțimi (părți) ale mulțimii suport E ; x, y, z, \dots – elemente ale unei mulțimi.

Mulțimea A este inclusă în mulțimea B , $A \subset B$, dacă orice x din A aparține și mulțimii B .

Două mulțimi A și B sînt egale dacă $A \subset B$ și $B \subset A$.

Reuniunea a două mulțimi A și B este mulțimea $A \cup B = \{x | x \in A \text{ sau } x \in B\}$. Intersecția mulțimilor A și B este mulțimea $A \cap B = \{x | x \in A \text{ și } x \in B\}$. Complementara mulțimii A este mulțimea $A^c = \{x | x \in E \text{ și } x \notin A\}$.

Diferența mulțimilor A și B , în această ordine, este mulțimea $A \setminus B = \{x | x \in A \text{ și } x \notin B\}$. Diferența simetrică a mulțimilor A și B este mulțimea $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Produsul cartezian al mulțimilor A și B , în această ordine, este mulțimea $A \times B = \{(x, y) | x \in A \text{ și } y \in B\}$.

1.1.1. Probleme rezolvate

1. Se dau mulțimile: $Z = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$, $N = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$, $A = \{-2, -1, 1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ și $C = \{-3, 0, 2, 4, 6, 8\}$.

a) Să se arate că mulțimile N, A, B, C sînt submulțimi stricte ale mulțimii Z .

b) Să se calculeze intersecțiile: $Z \cap N, N \cap A, A \cap B, B \cap C, C \cap A$.

c) Să se calculeze reuniunile: $Z \cup N, N \cup A, A \cup B, B \cup C, C \cup A$.

Rezolvare. a) Avem $N \subset Z, A \subset Z, B \subset Z, C \subset Z$. Deoarece mulțimea Z conține și alte elemente în afara elementelor din mulțimile respective, înseamnă că mulțimile N, A, B, C sînt submulțimi stricte ale lui Z .

b) Obținem $Z \cap N = N$; $N \cap A = \{1, 3, 5, 7\}$; $A \cap B = \{1, 3, 5\}$; $B \cap C = \{2, 4, 6\}$ și $C \cap A = \emptyset$.

c) Folosind definiția, obținem: $Z \cup N = Z$; $N \cup A = \{-2, -1, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$; $A \cup B = \{-2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; $B \cup C = \{-3, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ și $C \cup A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

2. Să se arate, că $A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$.

Rezolvare. Să arătăm întâi că $A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c$. Fie $x \in B^c$, deci $x \notin B$. Cum $A \subset B$, rezultă că $x \notin A$, adică $x \in A^c$. Deoarece x a fost ales arbitrar, rezultă că $B^c \subset A^c$.

Invers, dacă $B^c \subset A^c$, să arătăm că $A \subset B$. Fie $x \in A$, oarecare. Deci $x \notin A^c$ și cum $B^c \subset A^c$, deducem că $x \notin B^c$. Prin urmare, $x \in B$ și deci $A \subset B$.

3. Să se demonstreze următoarele egalități:

a) $A \setminus B = A \cap B^c$; b) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$.

Rezolvare. a) Fie $\forall x \in A \setminus B$. Deci $x \in A$ și $x \notin B$, prin urmare $x \in A$ și $x \in B^c$, adică $x \in A \cap B^c$. Aceasta arată că $A \setminus B \subset A \cap B^c$. Fie acum $x \in A \cap B^c$, adică $x \in A$ și $x \in B^c$. Prin urmare, $x \in A$ și $x \notin B$, adică $x \in A \setminus B$. Deci $A \cap B^c \subset A \setminus B$. Cele două incluziuni demonstrează egalitatea.

b) Să arătăm mai întâi egalitatea $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Fie $x \in A \Delta B$, astfel că $x \in A \setminus B$ sau $x \in B \setminus A$. Să considerăm mai întâi că $x \in A \setminus B$. Aceasta înseamnă că $x \in A$ și $x \notin B$, deci $x \in A \cup B$ și $x \notin B \cap A$. Prin urmare, $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Dacă $x \in B \setminus A$, atunci $x \in B$ și $x \notin A$ și deci $x \in B \cup A$ și $x \notin A \cap B$, adică $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Aceasta arată că $A \Delta B \subset (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Invers, să considerăm $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Deci $x \in A \cup B$ și $x \notin A \cap B$, adică ($x \in A$ sau $x \in B$) și $x \notin A \cap B$. Dacă $x \in A$ și $x \notin A \cap B$, rezultă că $x \in A$ și $x \notin B$, adică $x \in A \setminus B$. Dacă $x \in B$ și $x \notin A \cap B$, atunci $x \in B$ și $x \notin A$, astfel încât $x \in B \setminus A$. Deci $x \in A \setminus B$ sau $x \in B \setminus A$. Prin urmare, $(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subset A \Delta B$. Aceasta demonstrează egalitatea mulțimilor. Cealaltă egalitate se demonstrează similar.

4. Să se demonstreze că $(A \times C) \cup (B \times D) \subset (A \cup B) \times (C \cup D)$, incluziunea putând fi strictă.

Rezolvare. Fie $(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times D)$, (x, y) oarecare. Atunci $(x, y) \in A \times C$ sau $(x, y) \in B \times D$. Dacă $(x, y) \in A \times C$, atunci $x \in A$ și $y \in C$ și deci $x \in A \cup B$ și $y \in C \cup D$, adică $(x, y) \in (A \cup B) \times (C \cup D)$. Dacă $(x, y) \in B \times D$, atunci $x \in B$ și $y \in D$ și deci $x \in A \cup B$ și $y \in C \cup D$. Că incluziunea poate fi strictă se poate vedea din contraexemplul următor. Se ia $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{a, b\}$, $D = \{b, c\}$. Este ușor de văzut că elementul $(3, a) \in (A \cup B) \times (C \cup D)$, dar $(3, a) \notin (A \times C) \cup (B \times D)$.

1.1.2. Probleme propuse spre rezolvare

5. Să se precizeze în ce relație de incluziune se află următoarele mulțimi de șiruri de numere reale:

- a) $b = \{(a_n) \mid (a_n) \text{ șir mărginit}\}$; d) $c = \{(a_n) \mid (a_n) \text{ șir convergent}\}$;
 b) $m = \{(a_n) \mid (a_n) \text{ șir monoton}\}$; e) $f = \{(a_n) \mid (a_n) \text{ șir fundamental}\}$;
 c) $c_0 = \{(a_n) \mid (a_n) \text{ șir convergent la zero}\}$; f) $s = \{(a_n) \mid (a_n) \text{ șir arbitrar}\}$.

6. Să se demonstreze următoarele proprietăți ale operațiilor de reuniune și intersecție:

- a) $A \cup \emptyset = A$; b) $A \cup E = E$; c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
 d) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$; e) $A \subset C$ și $B \subset C \Rightarrow A \cup B \subset C$;
 a') $A \cap \emptyset = \emptyset$; b') $A \cap E = A$; c') $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
 d') $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$; e') $C \subset A$ și $C \subset B \Rightarrow C \subset A \cap B$.

7. Să se verifice următoarele proprietăți ale operației de trecere la complementară:

- a) $E^c = \emptyset$ și $\emptyset^c = E$; b) $(A^c)^c = A$; c) $A \cup A^c = E$, $A \cap A^c = \emptyset$; d) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (regulile De Morgan).

8. Să se verifice că diferența a două mulțimi are următoarele proprietăți:

- a) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \setminus B$; b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
 c) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$; e) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C) = (A \cap C) \setminus B$;
 f) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$; g) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

9. Să se demonstreze următoarele proprietăți:

- a) $A \setminus A = \emptyset$
 c) $A \setminus \emptyset = A$
 f) $A \setminus A^c = \emptyset$

10. Să se demonstreze următoarele proprietăți:

- a) $A \setminus A = \emptyset$
 b) $A \setminus \emptyset = A$

11. Dați un exemplu de mulțime care să nu fie...

12. Se dau două mulțimi...

13. Să se demonstreze următoarele proprietăți:

$A \cup B = (A \cup B) \cap (A \cup B)$

14. Să se demonstreze următoarele proprietăți:

a) $(A \cup B) \cap (A \cup B) = A \cup B$

15. Să se demonstreze următoarele proprietăți:

a) $(A \cup B) \cap (A \cup B) = A \cup B$

b) $(A \cup B) \cap (A \cup B) = A \cup B$

16. Să se demonstreze următoarele proprietăți:

a) $A \setminus A = \emptyset$

O relație...

$(x, y) \in R$

a) reflexivă

b) simetrică

c) antisimetrică

d) tranzitivă

O relație...

o relație de...

raport cu p.

O relație...

pe M, iar p...

și pentru ori...

1. Fie...

$\Leftrightarrow a_1 = a_2$

Rezolvare...

$(a_1, b_1) \rho (a_2, b_2)$

și $(a_2, b_2) \rho (a_3, b_3)$

echivalență.

9. Să se verifice următoarele proprietăți ale diferenței simetrice a două mulțimi:

- a) $A \Delta \emptyset = A$, $A \Delta E = A^c$; b) $A \Delta A = \emptyset$, $A \Delta A^c = E$;
 c) $A \Delta B = B \Delta A$; d) $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$;
 f) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

10. Să se demonstreze că:

- a) $A \times B \neq \emptyset \Leftrightarrow A \neq \emptyset$ și $B \neq \emptyset$;
 b) $A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = B$; c) $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$.

11. Dacă $A \cap C = B \cap C$ și $A \cup C = B \cup C$, să se arate că $A = B$.

12. Se dau mulțimile $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ și $B = \{d, e, f, g, h, k\}$. Să se determine mulțimea X astfel încât $A \Delta X = B$.

13. Să se determine mulțimile A, B, E ($A, B \subset E$) știind că

$$A \cup B = \{c, d, e\}, \quad A^c = \{a, b, e, f, g, h\}, \quad B^c = \{a, b, c, f, g, h\}.$$

14. Să se arate că:

$$a) (A \cap B) \cap (A \cup B)^c = \emptyset; \quad b) (A \cup B) \cap A^c = B \cap A^c.$$

15. Să se demonstreze că:

$$a) \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \times B = \bigcup_{i \in I} (A_i \times B), \quad \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \times B = \bigcap_{i \in I} (A_i \times B);$$

$$b) \left(\bigcup_{i \in I} A_i \times B_i\right) \subset \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \times \left(\bigcup_{i \in I} B_i\right), \quad \bigcap_{i \in I} (A_i \times B_i) = \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \times \left(\bigcap_{i \in I} B_i\right).$$

16. Să se scrie elementele mulțimii $A \times B \times C$, în cazurile:

- a) $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$, $C = \{x, y\}$; b) $A = \{1, 2\}$, $B = C = \{a, b, c\}$.

1.2. Relații

O relație ρ în mulțimea M este o submulțime a produsului cartezian $M \times M$. Faptul că $(x, y) \in \rho$, se mai notează $x\rho y$. O relație în M este:

- a) reflexivă, dacă pentru orice $x \in M$, avem $x\rho x$;
 b) simetrică, dacă $x\rho y \Rightarrow y\rho x$;
 c) antisimetrică, dacă $x\rho y$ și $y\rho x \Rightarrow x = y$;
 d) tranzitivă, dacă $x\rho y$ și $y\rho z \Rightarrow x\rho z$.

O relație ρ care este reflexivă, simetrică și tranzitivă se numește relație de echivalență. Fie ρ o relație de echivalență pe M . Mulțimea $[x] = \{y \mid y \in M, y\rho x\}$ se numește clasă de echivalență în raport cu ρ .

O relație ρ în M , care este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă, se numește relație de ordine pe M , iar perechea (M, ρ) se numește mulțime ordonată. Dacă (M, ρ) este o mulțime ordonată și pentru orice $x, y \in M$ are loc $x\rho y$ sau $y\rho x$, atunci (M, ρ) se numește total ordonată.

1.2.1. Probleme rezolvate

1. Fie $M = R \times R$. Să se arate că relația ρ în M , definită prin $(a_1, b_1)\rho(a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2$, este o relație de echivalență.

Rezolvare. Evident relația ρ este reflexivă, deoarece $(a_1, b_1)\rho(a_1, b_1)$; este simetrică, deoarece $(a_1, b_1)\rho(a_2, b_2) \Rightarrow (a_2, b_2)\rho(a_1, b_1)$; în sfârșit, este tranzitivă, deoarece $(a_1, b_1)\rho(a_2, b_2)$, adică $a_1 = a_2$, și $(a_2, b_2)\rho(a_3, b_3)$, adică $a_2 = a_3$, implică $(a_1, b_1)\rho(a_3, b_3)$, adică $a_1 = a_3$. Deci ρ este o relație de echivalență.

2. În mulțimea numerelor complexe C se definește relația ρ prin $z_1 \rho z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$. Să se arate că ρ este o relație de echivalență și să se precizeze clasele de echivalență.

Rezolvare. Se verifică ușor că relația ρ este reflexivă, simetrică și tranzitivă. Prin urmare, ρ este o relație de echivalență. Fiind dat $z_1 \in C$, clasa de echivalență $[z_1]$ este mulțimea $[z_1] = \{z \in C \mid |z| = |z_1|\}$. Dacă se pun $z = x + iy$ și $|z_1| = r$, atunci $[z_1] = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = r^2\}$, adică o clasă de echivalență oarecare reprezintă în plan un cerc cu centrul în origine.

3. Fie $M = \{a, b, c\}$ și relația $\rho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, c), (a, c)\}$. Să se arate că ρ este o relație de ordine totală pe M .

Rezolvare. Să arătăm mai întâi că relația ρ este o relație de ordine. În baza definiției relației ρ se vede că aceasta este reflexivă deoarece $(x, x) \in \rho$ pentru orice $x \in M$. Relația ρ este antisimetrică deoarece, dacă $(x, y) \in \rho$ și $(y, x) \in \rho$, atunci $x = y$. Se verifică ușor că ρ este și tranzitivă. Prin urmare, ρ este o relație de ordine. Apoi se observă că oricare două dintre elementele a, b, c se află în relația ρ și deci ρ este o ordine totală pe M .

1.2.2. Probleme propuse spre rezolvare

4. Se consideră mulțimea $M = \{1, 2, 3, 4\}$ și relația ρ în M , definită prin $\rho = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$. Să se verifice că relația ρ este simetrică și tranzitivă, dar nu este reflexivă.

5. În mulțimea numerelor întregi Z definim relația de congruență modulo m ($m \in N$), „ $\equiv \pmod{m}$ ”, prin $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a - b : m$. Să se arate că această relație este o relație de echivalență și să se precizeze clasele de echivalență.

6. Fie ρ o relație în mulțimea M , simetrică și tranzitivă. Să se arate că dacă pentru orice $a \in M$ există $a' \in M$ astfel încât $a' \rho a$, atunci ρ este o relație de echivalență.

7. Fie ρ_i o relație în mulțimea X_i , $i = 1, 2, \dots, n$, și ρ o relație în mulțimea produs cartezian $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ definită prin

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \rho (y_1, y_2, \dots, y_n) \Leftrightarrow x_i \rho_i y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Să se arate că ρ are una din proprietățile: reflexivă, simetrică, antisimetrică, tranzitivă, dacă și numai dacă relațiile ρ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, au aceeași proprietate.

8. În mulțimea $M = \{a, b, c, d\}$ se definește relația $\rho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, c), (c, d), (d, a)\}$. Este aceasta o relație de ordine?

9. În mulțimea numerelor naturale N se consideră relația \leq definită prin $x \leq y \Leftrightarrow \exists z \in N$ astfel că $y = x + z$. Să se arate că \leq este o relație de ordine totală pe N .

1.3. Structuri

Se numește grup o mulțime nevidă G , înzestrată cu o operație binară internă $\circ : G \times G \rightarrow G$, satisfăcând axiomele:

- 1) $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $\forall x, y, z \in G$ (asociativitate);
- 2) $\exists e \in G \mid x \circ e = e \circ x = x$, $\forall x \in G$ (e - element neutru);
- 3) $\forall x \in G$, $\exists x' \in G \mid x \circ x' = x' \circ x = e$ (x' - element simetric pentru x).

Dacă în grupul G are loc și axioma

- 4) $x \circ y = y \circ x$, $\forall x, y \in G$ (comutativitate),

atunci grupul G se numește comutativ sau abelian.

O mulțime \mathcal{I} pe care sînt definite două operații binare interne, una aditivă $\oplus : \mathcal{I} \times \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}$, față de care \mathcal{I} este grup abelian și una de înmulțire $\odot : \mathcal{I} \times \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}$, astfel că:

5) $(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$
 6) $x \odot (y \oplus z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z)$
 se numește în
 Dacă în
 Un corp
 se numește cor

1. Se c
 rația o, defi
 țimea G for

Rezolvare. A
 $= (x_1 y_1 z_1, x_2 y_1 z_1, \dots)$
 $+ y_2 z_1 + z_1, 0$

Elemente
 $\forall (x_1, x_2) \in G$
 $0) \in G$. Acest

Elemente
 sește pentru ele

Se observă

2. Mulțim
 țile obișnuit

Rezolvare.
 $+ (y + z); 2)$
 $= 0 \in \mathcal{I}; 3) \forall x$

4) $x + y = x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + \dots$
 $= x_1 y_1 z_1 + 2x_2 y_2 z_2 + \dots$

$= (x_1 + \sqrt{2x_2}) + x_2 z_2 + \dots$
 $+ x_2 z_2) = x \cdot y + \dots$
 Se observă

Se observă

3. Să se c
 definită prin

4. Fie $\mathcal{I} =$
 nare și înmul

5. Să se a
 de adunare

6. În mul
 $= x + y - 2$

de adunare și
 operații este

$|z_1| =$
clasele de

urmare,
[$z_1 =$
 r^2], adică

(a, c) .

rela-
p este
p este și
elemen-

prin $\rho =$
simetrică

modulo
această

că dacă
de echi-

mulțimea

tranzi-

(a, c, c) .

prin $x \leq$
totală

$G \times G \rightarrow G$.

$\mathcal{Q} \times \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}$.

5) $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z), \forall x, y, z \in \mathcal{Q}$.

6) $x \circ (y \oplus z) = x \circ y \oplus x \circ z, (y \oplus z) \circ x = y \circ x \oplus z \circ x, \forall x, y, z \in \mathcal{Q}$.
se numește inel.

Dacă înmulțirea este comutativă, inelul se numește comutativ.

Un corp K este un inel în care elementele nenule formează un grup pentru înmulțire. Corpul K se numește comutativ dacă el este inel comutativ.

1.3.1. Probleme rezolvate

1. Se consideră mulțimea $G = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, x_2 \in \mathbb{R}\}$ și operația \circ , definită astfel: $(x_1, x_2) \circ (y_1, y_2) = (x_1 \cdot y_1, x_2 y_1 + y_2)$. Să se arate că mulțimea G formează grup față de operația definită.

Rezolvare. Asociativitate. Avem $[(x_1, x_2) \circ (y_1, y_2)] \circ (z_1, z_2) = (x_1 y_1, x_2 y_1 + y_2) \circ (z_1, z_2) = (x_1 y_1 z_1, x_2 y_1 z_1 + y_2 z_1 + z_2)$ și $(x_1, x_2) \circ [(y_1, y_2) \circ (z_1, z_2)] = (x_1, x_2) \circ (y_1 z_1, y_2 z_1 + z_2) = (x_1 y_1 z_1, x_2 y_1 z_1 + y_2 z_1 + z_2)$. Comparând cele două rezultate, obținem asociativitatea.

Element neutru. Căutăm $e = (e_1, e_2) \in G \mid (e_1, e_2) \circ (x_1, x_2) = (x_1, x_2) \circ (e_1, e_2) = (x_1, x_2), \forall (x_1, x_2) \in G$. Obținem $(x_1 e_1, x_2 e_1 + e_2) = (x_1, x_2)$, de unde deducem $e_1 = 1, e_2 = 0$ și deci $e = (1, 0) \in G$. Acest element satisface egalitatea cerută.

Element simetric. Procedind în mod asemănător ca în cazul elementului neutru, se găsește pentru elementul $(x_1, x_2) \in G$ elementul simetric $\left(\frac{1}{x_1}, -\frac{x_2}{x_1}\right) \in G$.

Se observă că G nu este comutativ.

2. Mulțimea $\mathcal{Q} = \{x = x_1 + \sqrt{2}x_2 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{Z}\}$ formează inel față de operațiile obișnuite de adunare și înmulțire ale numerelor reale.

Rezolvare. Se verifică axiomele: 1) $(x + y) + z = x_1 + y_1 + z_1 + \sqrt{2}(x_2 + y_2 + z_2) = x + (y + z)$; 2) $x + e = e + x = x \Leftrightarrow x_1 + e_1 + \sqrt{2}x_2 = x_1 + \sqrt{2}x_2 \Leftrightarrow e_1 = 0$ și $e_2 = 0 \Rightarrow e = 0 \in \mathcal{Q}$; 3) $\forall x \in \mathcal{Q}, \exists x' \in \mathcal{Q} \mid x_1 + x'_1 + \sqrt{2}(x_2 + x'_2) = 0 \Rightarrow x'_1 = -x_1, x'_2 = -x_2$, deci $x' = -x \in \mathcal{Q}$; 4) $x + y = x_1 + y_1 + \sqrt{2}(x_2 + y_2) = y + x$; 5) $(x \cdot y) \cdot z = [x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + \sqrt{2}(x_2 y_1 + x_1 y_2)] \cdot (z_1 + \sqrt{2}z_2) = x_1 y_1 z_1 + 2x_2 y_2 z_2 + 2x_2 y_1 z_2 + 2x_1 y_2 z_1 + \sqrt{2}(x_1 y_1 z_2 + x_1 y_2 z_1 + x_2 y_1 z_1 + 2x_2 y_2 z_2) = x \cdot (y \cdot z)$; 6) $x \cdot (y + z) = (x_1 + \sqrt{2}x_2) \cdot [(y_1 + z_1) + \sqrt{2}(y_2 + z_2)] = x_1 y_1 + x_1 z_1 + 2x_2 y_2 + 2x_2 z_2 + \sqrt{2}(x_1 y_2 + x_1 z_2 + x_2 y_1 + x_2 z_1) = x \cdot y + x \cdot z$. Similar $(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$. Prin urmare, \mathcal{Q} este inel.

Se observă că \mathcal{Q} este inel comutativ, deoarece $x \cdot y = y \cdot x$.

1.3.2. Probleme propuse spre rezolvare

3. Să se cerceteze dacă mulțimea numerelor reale \mathbb{R} , înzestrată cu operația \circ , definită prin $x \circ y = x + y + xy$, formează grup. Dar mulțimea $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$?

4. Fie $\mathcal{Q} = \{x + i y \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$. Să se arate că, în raport cu operațiile de adunare și înmulțire a numerelor complexe, \mathcal{Q} este un inel comutativ.

5. Să se arate că mulțimea $K = \{x + i y \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$, înzestrată cu operațiile de adunare și înmulțire a numerelor complexe, este un corp comutativ.

6. În mulțimea numerelor reale \mathbb{R} se definesc operațiile interne: $x \oplus y = x + y - 2$ și $x \circ y = \frac{1}{4}x \cdot y - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + 3$, operațiile $+$ și \cdot fiind operațiile de adunare și înmulțire a numerelor reale. Să se arate că \mathbb{R} înzestrată cu cele două operații este corp comutativ.

2. ELEMENTE DE ALGEBRĂ LINIARĂ

2.1. Determinanți

Fie $A = \{1, 2, \dots, n\}$. Vom nota prin \mathcal{P}_n mulțimea tuturor grupurilor care se pot forma cu cele n elemente, două grupuri oarecare diferind între ele prin ordinea elementelor. Un element $P \in \mathcal{P}_n$ se numește permutare și se notează astfel:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}.$$

Două elemente într-o permutare formează o inversiune dacă sînt așezate în ordinea inversă aceleia din permutarea principală $U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$. Fiind dată permutarea $P \in \mathcal{P}_n$ (uu m prin $\sigma(P)$ numărul tuturor inversiunilor lui P . Se numește signatura lui P numărul $\varepsilon(P) = (-1)^{\sigma(P)}$.

Se numește determinant de ordinul n numărul notat prin $D = \det(a_{ij})$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, definit prin

$$D = \sum_{P \in \mathcal{P}_n} \varepsilon(P) a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Prin transpusul determinantului D se înțelege determinantul obținut din D prin schimbarea liniilor și coloanelor între ele.

Prin minorul complementar al elementului a_{ij} se înțelege determinantul de ordinul $n-1$, notat D_{ji} , obținut din D prin suprimarea liniei i și a coloanei j . Complementul algebric al lui a_{ij} este numărul $\alpha_{ji} = (-1)^{i+j} D_{ji}$. Avem

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} \alpha_{kj} = D \delta_{ij}, \quad \sum_{k=1}^n a_{ki} \alpha_{kj} = D \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases} \quad (2)$$

Pentru $i = j$ obținem

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} \alpha_{ki} = D, \quad \sum_{k=1}^n a_{ki} \alpha_{ki} = D, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

formule de dezvoltare a determinantului după elementele liniei (respectiv coloanei) i .

Fie $r < n$. Se numește *minor de ordin r* în D un determinant M format cu r linii și r coloane din D . Numim *minor complementar* minorului M de ordin r , minorul N obținut din D prin suprimarea celor r linii și r coloane ale lui M . Complementul algebric al minorului M este numărul $M' = (-1)^{s(M)} N$, $s(M)$ fiind suma indicilor liniilor și coloanelor care determină M .

Teorema lui Laplace. Determinantul $D = \det(a_{ij})$ este egal cu suma produselor minorilor de pe r linii fixate prin complementii lor algebrici.

Fie determinanții $D_1 = \det(a_{ij})$ și $D_2 = \det(b_{ij})$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Numărul $P = D_1 \cdot D_2$ este dat de $P = \det(c_{ij})$, unde $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$.

Linii determinantului $D = \det(a_{ij})$ sînt liniar dependente dacã existã constantele reale λ_j , $j = 1, 2, \dots, n$, nu toate nule, astfel încît $\sum_{i=1}^n \lambda_i a_{ij} = 0$, $j = 1, 2, \dots, n$. Determinantul D este egal cu zero dacã și numai dacã liniile sale sînt liniar dependente.

Determinantul care are toate elementele de sub diagonala principalã sau deasupra diagonalei principale egale cu zero se numește determinant de formã triunghiularã.

2.1.1. Probleme rezolvate

1. Sã se determine signatura permutãrii $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Rezolvare. Permutarea P prezintã $\sigma(P) = (n-1) + (n-2) + \dots + 1 = (n-1)n/2$ inversiuni. Prin urmare, $\varepsilon(P) = (-1)^{n(n-1)/2}$.

2. În dezvoltarea determinantului de ordin patru, sã se scrie termenii de forma $a_{1i}a_{2j}a_{3k}a_{4l}$ și de forma $a_{1i}a_{2j}a_{3l}a_{4k}$.

Rezolvare. a) Pentru a determina termenii de forma $a_{1i}a_{2j}a_{3k}a_{4l}$ trebuie, în baza formulei (1), sã cãutãm în \mathcal{D}_4 permutãri de forma $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i & j & k & l \end{pmatrix}$. Cum i și j nu pot lua decît valorile 2 și 4, obținem numai permutãrile $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ și $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Deoarece $\varepsilon(P_1) = (-1)^2 = 1$ și $\varepsilon(P_2) = (-1)^3 = -1$, obținem termenii $+a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}$ și $-a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$.

b) Pentru termeni de forma $a_{1i}a_{2j}a_{3k}a_{4l}$ cãutãm permutãrile de forma $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i & j & k & l \end{pmatrix}$. Deoarece i, j și k pot lua numai valorile 2, 3 și 4 se obțin termenii $-a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$; $-a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}$; $-a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$ + $a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}$; + $a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}$; + $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$.

3. Plecînd de la definiție, sã se demonstreze cã

$$(1) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}.$$

Rezolvare. Deoarece fiecare termen din suma (1) conține cîte un element de pe fiecare linie, rezultã cã pentru a avea termeni diferiți de zero trebuie ca i_1 sã fie 1. Prin urmare, i_2 poate lua valorile 2, 3, ..., n și cum $a_{2i_2} = 0$ pentru $i_2 = 3, 4, \dots, n$, rezultã cã $i_2 = 2$. Raționînd în acest mod mai departe, obținem cã singurul termen diferit de zero este acela corespunzãtor permutãrii principale.

4. Sã se calculeze complementãii algebrici ai elementelor determinantului $D =$

$$(3) \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -6 & -5 & 0 \\ 2 & 7 & 4 \end{vmatrix} \text{ și sã se verifice formulele (2).}$$

Rezolvare. Folosind definiția, avem $\alpha_{11} = -20$, $\alpha_{12} = -19$, $\alpha_{13} = -5$, $\alpha_{21} = 24$, $\alpha_{22} = 10$, $\alpha_{23} = 6$, $\alpha_{31} = -32$, $\alpha_{32} = -8$, $\alpha_{33} = 8$. Formulele (2) se scriu

$$a_{1i}\alpha_{i1} + a_{12}\alpha_{i2} + a_{13}\alpha_{i3} = D\delta_{i1}, \quad a_{2i}\alpha_{i1} + a_{22}\alpha_{i2} + a_{23}\alpha_{i3} = D\delta_{i2},$$

De exemplu, pentru $i = 1$ și $j = 2$ trebuie sã verificãm cã

$$a_{11}\alpha_{12} + a_{12}\alpha_{22} + a_{13}\alpha_{32} = 0 \text{ și } a_{21}\alpha_{21} + a_{22}\alpha_{22} + a_{23}\alpha_{23} = 0.$$

Avem: $2(-19) + 3 \cdot 10 + (-1) \cdot (-8) = 0$ și $2 \cdot 24 + (-6) \cdot 10 + 2 \cdot 6 = 0$. Similar se verificã pentru celelalte valori ale lui i și j .

5. Folosind reducerea la forma triunghiulară, să se calculeze determinantul

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

Rezolvare. Folosind proprietățile determinantilor, obținem succesiv

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 11 \\ 0 & -10 & -10 & -10 \\ 0 & -5 & -14 & -17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & -12 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -30 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot (-6) \cdot (-30) = 900.$$

În penultima egalitate s-a folosit faptul că valoarea unui determinant de formă triunghiulară este egală cu produsul elementelor de pe diagonala principală.

6. Să se calculeze determinantul Vandermonde.

$$V_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Rezolvare. Înmulțim linia $n-1$ cu $-a_1$ și adunăm aceasta la linia n ; apoi, înmulțim linia $n-2$ cu $-a_1$ și o adunăm la linia $n-1$; ș.a.m.d. Înmulțim linia întâi cu $-a_1$ și o adunăm la linia a doua. Obținem apoi, prin dezvoltare după elementele coloanei întâi,

$$V_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & \dots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & \dots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1) V_{n-1}(a_2, a_3, \dots, a_n).$$

Prin urmare,

$$V_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1) V_{n-1}(a_2, a_3, \dots, a_n).$$

Similar obținem

$$V_{n-1}(a_2, a_3, \dots, a_n) = (a_3 - a_2)(a_4 - a_2) \dots (a_n - a_2) V_{n-2}(a_3, a_4, \dots, a_n),$$

$$V_2(a_{n-1}, a_n) = (a_n - a_{n-1}).$$

Înmulțind membru cu membru aceste relații, obținem

$$V_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1) \times$$

$$\times (a_3 - a_2) \dots (a_n - a_2) \times$$

$$\dots \times (a_n - a_{n-1}) = \prod_{\substack{i, j=1 \\ i > j}}^n (a_i - a_j).$$

anantului

7. Fie $D_n = \det (a_{ij})$ și $\bar{D}_n = \det (\lambda^{i-j} a_{ij})$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Să se arate că $D_n = \bar{D}_n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Rezolvare. Scoatem factor forțat de pe coloana i ($i = 1, 2, \dots, n$) pe λ^{n-i} , astfel că obținem

$$\begin{aligned} \bar{D}_n &= \begin{vmatrix} a_{11} & \lambda^{-1}a_{12} & \dots & \lambda^{1-n}a_{1n} \\ \lambda a_{21} & a_{22} & \dots & \lambda^{2-n}a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^{n-1}a_{n1} & \lambda^{n-2}a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \\ &= \lambda^{n-1}\lambda^{n-2}\dots\lambda^1\lambda^0 \begin{vmatrix} \lambda^{1-n}a_{11} & \lambda^{1-n}a_{12} & \dots & \lambda^{1-n}a_{1n} \\ \lambda^{2-n}a_{21} & \lambda^{2-n}a_{22} & \dots & \lambda^{2-n}a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \\ &= \lambda^{(n-1)+(n-2)+\dots+1+(1-n)+(2-n)+\dots+(-1)} D_n = D_n. \end{aligned}$$

8. Să se demonstreze identitatea

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

Rezolvare. Deoarece determinantul este funcție aditivă de elementele unei coloane, prin descompunere în sume de determinanți, obținem

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} b & c+a & a+b \\ q & r+p & p+q \\ y & z+x & x+y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & c+a & a+b \\ r & r+p & p+q \\ z & z+x & x+y \end{vmatrix} = \dots \\ \dots &= \begin{vmatrix} b & c & a \\ q & r & p \\ y & z & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & b \\ q & r & q \\ y & z & y \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} c & a & b \\ r & p & q \\ z & x & y \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

9. Folosind teorema lui Laplace, să se calculeze determinantul

$$D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ x & 0 & 1 & 0 & 4 \\ x & x & 0 & 1 & 5 \\ x & x & x & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

Rezolvare. Vom dezvolta determinantul D_5 după primele două linii. Se pot forma $C_5^2 = 10$ minori de ordinul doi, cu elementele celor două linii. Diferiți de zero sînt numai minorii

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad M_{15} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \quad \text{și} \quad M_{25} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2.$$

Complementii algebrici ai acestora sînt:

$$\begin{aligned} M'_{12} &= (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ x & 0 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 4x, \quad M'_{15} = (-1)^9 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \\ x & x & 0 \end{vmatrix} = \\ &= -x, \quad M'_{25} = (-1)^{10} \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \\ x & x & 0 \end{vmatrix} = x - x^2. \end{aligned}$$

Prin urmare, $D_5 = 1 \cdot (6 - 4x) + 3 \cdot (-x) + (-2) \cdot (x - x^2) = 2x^2 - 9x + 6$.

10. Fie determinantul

$$[a_1, a_2, \dots, a_n] = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \dots & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & -1 & a_n \end{vmatrix}$$

Să se arate că

$$[a_1, a_2, \dots, a_n] = [a_1, a_2, a_3] \cdot [a_4, a_5, \dots, a_n] + [a_1, a_2] \cdot [a_5, a_6, \dots, a_n].$$

Rezolvare. Vom folosi teorema lui Laplace, dezvoltând determinantul după primele trei linii. Singurii minori de ordinul trei diferiți de zero formați din primele trei linii sînt:

$$M_{123} = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 \\ 0 & -1 & a_3 \end{vmatrix} = [a_1, a_2, a_3], \quad M_{124} = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ -1 & a_2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = [a_1, a_2],$$

$$M_{131} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & a_3 & 1 \end{vmatrix} = a_1, \quad M_{231} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_2 & 1 & 0 \\ -1 & a_3 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Complementii algebrici ai acestor minori sînt:

$$M'_{12} = (-1)^{12} \begin{vmatrix} a_4 & 1 & 0 \dots 0 \\ -1 & a_5 & 1 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots a_n \end{vmatrix} = [a_4, a_5, \dots, a_n], \quad M'_{124} = (-1)^{124} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & a_5 & 1 \dots 0 \\ 0 & -1 & a_6 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots a_n \end{vmatrix} =$$

$$= [a_5, a_6, \dots, a_n], \quad M'_{131} = 0, \quad M'_{231} = 0.$$

Prin urmare, după teorema lui Laplace obținem identitatea cerută.

11. Să se calculeze valoarea pătratului determinantului:

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & i & -\sqrt{2} & -\sqrt{3} \\ -i & 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 & -i \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & -i & 1 \end{vmatrix}$$

Rezolvare. Avem $D_4^2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5^4.$

2.1.2. Probleme propuse spre rezolvare

12. Cîte inversiuni prezintă fiecare din permutările:

- a) $(1\ 2\ 3\ 4\ 5); (5\ 1\ 4\ 2\ 3);$ b) $(1\ 2\ 3\ 4\ 5); (2\ 3\ 5\ 4\ 1);$ c) $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6); (6\ 3\ 1\ 2\ 5\ 4);$
 d) $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9); (9\ 2\ 7\ 1\ 8\ 5\ 4\ 3\ 6);$ e) $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7); (3\ 1\ 7\ 5\ 6\ 4\ 2);$ f) $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8); (2\ 8\ 6\ 4\ 3\ 3\ 1\ 7);$
 g) $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6); (2\ 4\ 3\ 6\ 5\ 1);$

13. Folosind definiția, să se dezvolte următorii determinanți :

$$a) D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \quad b) D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad c) D_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

14. Folosind definiția, să se calculeze următorii determinanți :

$$a) \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ -4 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix}; \quad b) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 7 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 6 & 3 & 2 & 1 \\ 10 & 2 & 2 & 6 \end{vmatrix}; \quad c) \begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 & 7 \\ 1 & 11 & 10 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

15. Să se scrie termenii de forma $a_{11}a_{22}a_{33}$ din dezvoltarea determinantului de ordinul 3, precizându-se semnul fiecăruia.

16. Să se scrie termenii de forma $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$, avînd semnul plus, din dezvoltarea determinantului de ordinul 4.

17. Folosind definiția, să se arate că

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

18. Fie

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 8 & 2 & 10 \\ 12 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 7 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 6 & 3 & 2 & 1 \\ 10 & 2 & 2 & 6 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

Să se calculeze complementii algebrici ai elementelor fiecărui determinant și să se verifice formulele (2).

19. Să se dezvolte determinantul $\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}$ după elementele coloanei a doua.

20. Să se arate că $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 8a + 15b + 12c - 19d$, dezvoltîndu-l după elementele liniei a treia.

21. Să se calculeze determinanții :

$$a) \begin{vmatrix} 0 & 1 & -i & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -i \\ i & -1 & 0 & 1 \\ 0 & i & -1 & 0 \end{vmatrix}; \quad b) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}; \quad c) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -6 \\ 2 & -1 & -5 & -13 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 5 & -4 & 3 & 1 \end{vmatrix};$$

$$d) \begin{vmatrix} 3 & 6 & 4 & -2 & 2 \\ 6 & 5 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 12 & 9 & 6 & -3 & 3 \\ 7 & 3 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad e) \begin{vmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & e & z & 0 & f \\ g & h & k & u & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{vmatrix}$$

22. Folosind reducerea la forma triunghiulară, să se calculeze determinanții

$$a) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 7 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 6 & 3 & 2 & 1 \\ 10 & 2 & 2 & 6 \end{vmatrix}; \quad b) \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ 4 & -2 & -2 & -6 & 0 \end{vmatrix}; \quad c) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

23. Un determinant în care $a_{ij} = -a_{ji}$ și $a_{ii} = 0$ se numește determinant strîmb simetric sau antisimetric. Să se calculeze valoarea determinantului strîmb simetric de ordinul 3.

Generalizare. Orice determinant strîmb simetric de ordin impar este egal cu zero.

24. Să se calculeze $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix}$, ω fiind rădăcină cubică complexă a unității.

25. Fără a se dezvolta, să se demonstreze egalitățile:

$$a) \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & -b & c \\ -a_1 & b_1 & -c_1 \\ a_2 & -b_2 & c_2 \end{vmatrix}; \quad b) \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ bc & ac & ab \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix};$$

$$c) \begin{vmatrix} a-b & \alpha-\beta & p-q \\ b-c & \beta-\gamma & q-r \\ c-a & \gamma-\alpha & r-p \end{vmatrix} = 0; \quad d) \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix};$$

$$e) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b & c \\ 1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 1 & a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+\lambda & b+\lambda & c+\lambda \\ 1 & a_1+\lambda_1 & b_1+\lambda_1 & c_1+\lambda_1 \\ 1 & a_2+\lambda_2 & b_2+\lambda_2 & c_2+\lambda_2 \end{vmatrix};$$

$$f) \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

26. Să se arate că

$$V'_n(a_1, a_2, \dots, a_n) \equiv \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) V_n(a_1, a_2, \dots, a_n),$$

unde $V_n(a_1, a_2, \dots, a_n)$ este determinantul Vandermonde.

27. Să se dezvolte după regula lui Laplace următorii determinanți:

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad b) \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix};$$

28. Să se
rezultatul pr

c)

29. Să se

30. Dacă

și să se calc

31. Să se
minanți:

d)

32. Să se

minanții

$$\begin{vmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

at strimb
simetric

cu zero.

tății.

$$c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 14 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 15 & 24 & 1 & 5 & 9 \\ 9 & 24 & 38 & 1 & 25 & 81 \end{vmatrix}; d) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 9 & 4 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

28. Să se efectueze următoarele produse de determinanți și apoi să se verifice rezultatul prin calcul direct:

$$a) \begin{vmatrix} 5 & 3 & 11 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 35 & -51 & -2 \\ -19 & 28 & 1 \end{vmatrix}; b) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix};$$

$$c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}; d) \begin{vmatrix} -1 & -9 & -2 & 3 \\ -5 & 5 & 3 & -2 \\ -12 & -6 & 1 & 1 \\ 9 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 2 & 2 \end{vmatrix};$$

$$e) \begin{vmatrix} \sin \alpha & \sin \alpha & -1 \\ \sin \alpha & -1 & \sin \alpha \\ -1 & \sin \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \sin \alpha & \sin \alpha & 1 \\ \sin \alpha & 1 & \sin \alpha \\ 1 & \sin \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix}$$

29. Să se calculeze pătratul determinantilor:

$$a) \begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}; b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}; c) \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}$$

30. Dacă ω este o rădăcină cubică complexă a unității, să se arate că

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 \\ \omega & \omega^2 & \omega^3 & 1 \\ \omega^2 & \omega^3 & 1 & \omega \\ \omega^3 & 1 & \omega & \omega^2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

și să se calculeze valoarea determinantului inițial.

31. Să se cerceteze dependența liniară a liniilor (coloanelor) următorilor determinanți:

$$a) \begin{vmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}; b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}; c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix};$$

$$d) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}; e) \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 7 & 4 & -9 & 5 \\ 4 & 8 & -3 & 7 \\ 5 & 5 & -5 & 5 \end{vmatrix}; f) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

32. Să se calculeze valorile determinantilor:

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \dots & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots & -1 & 2 \end{vmatrix}; b) \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} \dots & a_0 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}$$

2.2. Matrice

O matrice de tipul (m, n) pe un corp K este un tablou dreptunghiular cu m linii și n coloane, format cu elemente din K . Notăm prin $M_{m, n}$ mulțimea acestor matrice. Dacă $m = n$, se spune că matricea este pătrată.

Un minor de ordin p al matricei A este un determinant de ordin p obținut din A prin ștergerea a $m - p$ linii și $n - p$ coloane. Se numește rangul matricei $A \in M_{m, n}$ numărul rang $A \equiv r \leq \min(m, n)$ astfel încât cel puțin un minor de ordin r al matricei A este diferit de zero și toți minorii de ordin $p \geq r + 1$ sînt egali cu zero.

Numărul maxim de linii liniar independente ale unei matrice este egal cu numărul maxim de coloane liniar independente și egal cu rangul matricei.

Se numesc transformări elementare asupra lui $A \in M_{m, n}$ următoarele operații:

- schimbarea a două linii (coloane) între ele;
- înmulțirea elementelor unei linii (coloane) cu un scalar nenul;
- adunarea la elementele unei linii (coloane) a elementelor altei linii (coloane) înmulțite cu un scalar nenul.

Toate matricele obținute din A prin transformări elementare asupra sistemului de vectori linii (coloane) au același rang. Prin transformări elementare orice matrice A poate fi adusă la forma canonică diagonală, adică o matrice avînd toate elementele zero cu excepția primilor r elemente de pe diagonala principală care sînt egale cu 1; r este rangul matricei A .

Fie $A \in M_{m, n}$. Alegînd $p (< m)$ linii și $q (< n)$ coloane, cu ajutorul lor se poate forma o matrice de tipul (p, q) , numită o submatrice a matricei A . Dacă liniile și coloanele alese sînt adiacente, se spune că submatricea este un bloc de elemente din A . Împărțirea unei matrice în celule dreptunghiulare formînd submatrice ale sale se numește partiționare. Egalitatea și operațiile de la matrice pot fi extinse la matrice partiționate în blocuri.

2.2.1. Probleme rezolvate

- Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 2X - 5Y = A \\ -X + 3Y = B \end{cases}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rezolvare. Din a doua ecuație avem $X = 3Y - B$, astfel că, înlocuind în prima ecuație, obținem $Y = A + 2B$. Deci $X = 3A + 5B$. Înlocuind A și B , rezultă

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 15 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -1 \\ 15 & 3 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze $A_n = A^n$.

Rezolvare. Avem

$$A_2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = A \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots$$

$$\dots, \quad A_k = A \cdot A_{k-1} = \begin{pmatrix} 1 & k & \frac{k(k-1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demonstrăm această ultimă formulă prin inducție. Evident, pentru $k = 2$ aceasta este adevărată. Presupunem A_k dat de formula de mai sus. Trebuie să arătăm că

$$A_{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & \frac{k(k+1)}{2} \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dar

$$A_{k+1} = A \cdot A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k & \frac{k(k-1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & \frac{k(k+1)}{2} \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ceea ce demonstrează formula.

3. Fie matricile $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -13 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Există o matrice în așa fel încît $B = CA$?

Rezolvare. Deoarece $A \in M_{2,3}$, iar $B \in M_{2,3}$, căutăm C în $M_{2,2}$. Fie $C = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Relația $B = CA$ este echivalentă cu sistemul $x + 2y = 1$, $2x - y = 7$, $-3x + 4y = -13$, $z + 2t = 5$, $2z - t = 0$, $-3z + 4t = 5$. Rezolvînd acest sistem, obținem $x = 3$, $y = -1$, $z = 1$, $t = 2$. Deci răspunsul este afirmativ și

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Să se aducă matricile următoare la forma canonică diagonală și apoi să se deducă rangul. Să se pună în evidență liniile sau coloanele liniar independente:

$$a) A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}; b) A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{pmatrix}$$

Rezolvare. Vom nota faptul că două matrice A și B sînt obținute una din alta prin transformări elementare astfel: $A \sim B$.

a) Vom pune în evidență coloanele liniar independente: din această cauză vom face transformări elementare asupra liniilor. Avem:

$$A_1 = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-4, -10} \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & -20 & -50 & -5 \\ 0 & -52 & -130 & -13 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_1$$

Facem acum transformări elementare asupra coloanelor. Avem

$$B_1 = \begin{pmatrix} -7 & -17 & -3 & & & \\ 1 & 7 & 17 & 3 & & \\ 0 & 4 & 10 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} & & & 1/4 & 1/10 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 4 & 10 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} & & & & & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 1 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

Prin urmare, rang $A_1 = 2$. Din matricea B_1 se vede că pot fi luate ca liniar independente de exemplu coloanele e_1 și e_2 .

b) Vom pune în evidență liniile liniar independente. Vom face mai întâi transformări elementare asupra coloanelor. Avem

$$A_2 = \begin{matrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \\ l_5 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \\ 1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -5 & -4 & -8 \\ -1 & 1 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & 6 & -10 & -8 & -16 \\ 3 & -4 & 2 & 0 & 1 \\ & & & & 1 \\ & & & & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & 3 & -8 \\ -1 & -1 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & -10 & 6 & -16 \\ 3 & 0 & 2 & -4 & 1 \\ & & & & 5 & -3 & 8 \end{pmatrix} \sim \dots$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -4 & 1 \\ & & & & -1 & 1 \\ & & & & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Deci rang $A_2 = 3$. Din penultima matrice se vede că pot fi luate ca liniar independente liniile l_1 , l_2 și l_3 .

5. Utilizând submatricele indicate punctat, să se calculeze produsul $A \cdot B$, pentru

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Rezolvare. Fie A_{ij} și B_{ij} submatricele corespunzătoare partiționării în cele două matrice. Avem

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

Dar $A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (5, 0) = \begin{pmatrix} 13 & -3 \\ -9 & -1 \end{pmatrix}$,

$$A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot 2 = \begin{pmatrix} 16 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} = (-1 \ -3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 5 \cdot (5 \ 0) = (18 \ -8),$$

$$A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} = (-1 \ -3) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \cdot 2 = 6,$$

astfel că

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 13 & -3 & 16 \\ -9 & -1 & -10 \\ 18 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$

6. Utilizând (y_1, y_2) din

Rezolvare

$$B_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, B_2 = \dots$$

Înmulțim ecuațiile

$$= B_1 - A_{12}A_{21}$$

$$Y = A_{22}^{-1}B_2 = \dots$$

7. Să se

8. O mat

Matricea A este
orice matrice
una simetrică
Să se scrie

9. Să se

$$I = 2P - I$$

b) Dacă

potență.

c) Să se

d) Să se

10. Se c

Să se verifi

6. Utilizând submatricele, să se calculeze perechile de necunoscute (x_1, x_2) și (y_1, y_2) din sistemul

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Rezolvare. Fie $A_{11} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_{12} = A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

$$B_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Putem scrie } \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \text{ sau } \begin{cases} A_{11}X + A_{12}Y = B_1 \\ A_{21}X + A_{22}Y = B_2 \end{cases}.$$

Înmulțim ecuația a doua cu $-A_{12}A_{22}^{-1}$ și adunăm la prima. Obținem $(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})X = B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2$, de unde scoatem X . Găsim $X = A_{11}^{-1}B_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Din a doua ecuație obținem

$$Y = A_{22}^{-1}B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2.2.2. Probleme propuse spre rezolvare

7. Să se determine matricele pătrate X și Y , de ordinul 2, satisfăcând relațiile

$$3X + 4Y = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -12 & 9 \end{pmatrix}, \quad -2X + 3Y = \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}.$$

8. O matrice pătrată $A = (a_{ij})$ este simetrică dacă $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Matricea A este antisimetrică dacă $a_{ij} = -a_{ji}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Să se arate că orice matrice pătrată se poate descompune în mod unic ca suma a două matrice, una simetrică și una antisimetrică.

Să se scrie descompunerea pentru matricele

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 7 & 5 & 2 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} -4 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

9. Să se arate că dacă matricea P este idempotentă ($P^2 = P$), atunci matricea $I = 2P - E$ este involutivă ($I^2 = E$, E fiind matricea unitate).

b) Dacă matricea I este involutivă, atunci matricea $P = (I + E)/2$ este idempotentă.

c) Să se verifice că următoarele matrice sînt idempotente:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 25 & -20 \\ 30 & -24 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} -26 & -18 & -27 \\ 21 & 15 & 21 \\ 12 & 8 & 13 \end{pmatrix}.$$

d) Să se determine toate matricele idempotente de ordinu doi.

10. Se dau matricele

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să se verifice egalitatea $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

11. Se dau matricele

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

și se cer matricele $C = A \cdot B - B \cdot A$ și $D = B \cdot A - A \cdot B$.

12. Să se calculeze puterea de ordin p a matricelor următoare:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \dots 1 \\ 0 & 1 \dots 1 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots 1 \end{pmatrix}$.

13. Să se calculeze inversele matricelor:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

14. Să se rezolve ecuațiile:

a) $AX = B$ și $YA = B$, unde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

15. Să se aducă matricele următoare la forma canonică diagonală și să se deducă rangul. Să se pună în evidență liniile sau coloanele liniar independente:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} -2 & 7 & 2 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & 3 & -9 & -1 \\ -7 & 3 & -1 & -5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & -3 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & -2 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & -2 & -6 & 0 & -8 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & 8 & -20 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & 19 & -7 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

16. Care este, după valoarea parametrului $\lambda \in \mathbb{R}$, rangul fiecăreia din matricele:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ \lambda & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & -1 \\ -12 & -1 & \lambda & 2 \\ -1 & -3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$.

17. Folosind partiționarea indicată, să se calculeze produsul

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ \dots & \dots & \dots \\ -2 & -1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ \dots & \dots & \dots \\ 2 & 3 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

18. Folosind partiționarea matricelor, să se calculeze inversele matricelor:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}; \text{ b) } \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 6 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}; \text{ c) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}.$$

19. Se consideră polinomul $P(X) = X^3 - 7X^2 + 13X - 5$. Să se calculeze $P(A)$, pentru

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

20. Fie matricea $A = (a_{ij}) \in M_{n,n}$, unde $a_{ij} = \delta_{ij} + p_i p_j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Să se arate că $\det A = 1 + \sum_{i=1}^n p_i^2$. Să se determine A^{-1} .

21. Se consideră matricea $C = (a_{ij})$, $a_{ij} = x\delta_{ij} + y$; $i, j = 1, 2, \dots, n$.

a) Să se arate că $\det C = x^{n-1}(x + ny)$.

b) În ipoteza $\det C \neq 0$, să se verifice că C^{-1} are elementele

$$b_{ij} = [-y + \delta_{ij}(x + ny)] \cdot \frac{1}{x(x + ny)}.$$

2.3. Sisteme de ecuații algebrice liniare

Un sistem de ecuații algebrice liniare are forma

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \text{ sau } AX = B, \quad (1)$$

unde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Sistemul este dreptunghiular dacă $m \neq n$, pătratic dacă $m = n$. Dacă $B \neq 0$, sistemul este neomogen; este omogen dacă $B = 0$. Matricea $\bar{A} = (A, B)$ se numește matrice extinsă.

O soluție a sistemului (1) este un sistem ordonat de n numere $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, care, înlocuite în sistemul (1), îl transformă într-o identitate.

Sistemul (1) este compatibil determinat dacă are o singură soluție și compatibil nedeterminat dacă are mai multe soluții. Dacă nu are nici o soluție, sistemul este incompatibil.

Două sisteme de ecuații cu același număr de necunoscute se numesc echivalente dacă au aceleași soluții. Se obțin sisteme echivalente prin transformări elementare: 1) schimbarea ordinii ecuațiilor; 2) înmulțirea unei ecuații cu un scalar nenul; 3) adunarea la o ecuație a altei ecuații înmulțite cu un scalar nenul.

Un sistem pătrat pentru care rang $A = n$ se numește sistem Cramer. Orice sistem Cramer este compatibil determinat cu soluția

$$x_i = \frac{D_i}{D}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad D = \det A, \quad D_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} b_j, \quad (2)$$

α_{ij} fiind complementul algebraic al lui a_{ij} .

Teorema Kronecker-Capelli. O condiție necesară și suficientă ca un sistem de ecuații algebrice să fie compatibil este ca rang $A = \text{rang } \bar{A}$.

Un sistem omogen de ecuații admite și soluții nebanale dacă și numai dacă rang $A < n$.

2.3.1. Probleme rezolvate

1. Să se rezolve prin metoda eliminării (Gauss) următoarele sisteme:

a)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 6, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 8, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= -8; \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1, \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 2; \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 2, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= -1. \end{aligned}$$

Rezolvare. Metoda eliminării a lui Gauss constă în a aduce sistemul inițial la un sistem echivalent de formă triunghiulară.

a) Pentru prescurtare vom folosi scrierea schematică a sistemului sub forma

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & -1 & -2 & -3 & 8 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -18 & 36 & -54 \\ 0 & 0 & 36 & 18 & -72 \end{array} \right) &\sim \\ &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -4 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -10 \end{array} \right) &\sim \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ -5x_2 - 8x_3 + x_4 = -4, \\ x_3 - 2x_4 = 3, \\ 5x_4 = -10. \end{cases} \end{aligned}$$

Din ultima ecuație scoatem x_4 , înlocuim apoi în a treia și deducem x_3 ș.a.m.d. Obținem soluția $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1, x_4 = -2$.

b) Procedând similar, obținem

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 5 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -8 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & -13 & 5 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Avem $x_1 = \frac{(1+5a)}{6}$, $x_2 = \frac{(1-7a)}{6}$, $x_3 = \frac{(1+5a)}{6}$, $x_4 = a$, $a \in \mathbb{R}$. Prin urmare, sistemul este simplu nedeterminat.

c) Avem

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

Ultima ecuație arată că $0 = -2$, ceea ce nu se poate. Prin urmare, sistemul este incompatibil.

2. Să se rezolve, prin regula lui Cramer, sistemul

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \quad 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 7, \quad x_1 + x_2 + 2x_3 = 3.$$

Rezolvare. Deoarece $D = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -20 \neq 0$, avem un sistem Cramer.

Calculul arată că $D_1 = -52$, $D_2 = 8$, $D_3 = -8$, astfel că $x_1 = \frac{13}{5}$, $x_2 = -\frac{2}{5}$, $x_3 = \frac{2}{5}$.

3. Să se studieze compatibilitatea sistemului $AX = B$, unde

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 17 \\ 25 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 3 & 2 \\ 5 & -5 \\ 2 & -9 \\ 11 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \\ -2 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Rezolvare. Folosim teorema Kronecker-Capelli.

a) $\text{rang } A = 2$, $\text{rang } \bar{A} = 2$. Sistemul este compatibil simplu nedeterminat. Soluția sa este

$$x_1 = \frac{(8-4a)}{7}, \quad x_2 = \frac{(-3+5a)}{7}, \quad x_3 = a, \quad a \in \mathbb{R}.$$

b) $\text{rang } A = 4$, $\text{rang } \bar{A} = 4$. Sistemul este compatibil determinat. Rezolvându-l prin regula lui Cramer obținem $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 1$, $x_4 = 5$.

c) $\text{rang } A = 2$, $\text{rang } \bar{A} = 3$. Sistemul este incompatibil.

4. Să se determine parametrul $m \in \mathbb{R}$, astfel ca următorul sistem să admită și soluții diferite de zero și, în acest caz, să se rezolve:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + mx_3 - x_4 &= 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= 0, \\ mx_1 - 2x_2 - 2x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Rezolvare. Sistemul fiind pătrat, pentru a admite și soluții nebanale este necesar și suficient ca...

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ m & -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0, \text{ deci } m = 1.$$

Pentru $m = 1$ soluția este $x_1 = \frac{1}{2}a$, $x_2 = -\frac{3}{4}a$, $x_3 = \frac{5}{4}a$, $x_4 = a$, $a \in \mathbb{R}$.

2.3.2. Probleme propuse spre rezolvare

5. Să se rezolve, prin metoda eliminării, următoarele sisteme:

- a) $x_1 + x_2 + x_3 = 2$,
 $2x_1 - 8x_2 + x_3 = 11$,
 $4x_1 - x_2 + 3x_3 = 10$;
- b) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5$;
 $2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1$,
 $3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1$,
 $4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5$;
- c) $2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1$,
 $x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1$,
 $4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1$,
 $2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1$;
- d) $2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 6$,
 $6x_1 - 2x_2 + x_3 - x_5 = -3$,
 $-4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 - 2x_5 = -5$,
 $2x_1 + 4x_3 - 7x_4 - 3x_5 = -8$,
 $x_2 + 8x_3 - 5x_4 - x_5 = -3$;
- e) $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 20$,
 $-6x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -45$,
 $2x_1 + 7x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 5$,
 $4x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 58$.

6. Să se rezolve prin regula lui Cramer sistemele:

- a) $x_1 - x_2 + x_3 = -4$,
 $5x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -12$,
 $2x_1 + x_2 + x_3 = 11$;
- b) $x_1 + x_2 + x_3 = 4$,
 $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9$,
 $x_1 - x_2 - x_3 = -2$.

7. Să se rezolve ecuația matriceală $AX = B$, știind că:

- a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & -6 & -3 \\ 6 & 10 & -10 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 17 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$;
- c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

8. Să se determine valorile lui x_4 și x_5 din sistemul

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 &= 6, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_5 &= -3, \\ -4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 - 2x_5 &= -5, \\ 2x_1 + 4x_3 - 7x_4 - 3x_5 &= -8, \\ x_2 + 8x_3 - 5x_4 - x_5 &= -3, \end{aligned}$$

folosind o partiție convenabilă.

9. Să se studieze compatibilitatea sistemului $AX = B$, unde:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}; \text{ b) } A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & -2 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 6 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}, \lambda, a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

10. Să se determine parametrii reali m și n , astfel ca sistemul $AX = B$ să fie compatibil:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & -m \\ 2 & 1 \\ 3 & m-1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 \\ m \\ -m+1 \end{pmatrix}; \text{ b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ m & 2 \\ m^2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -2 \\ m & n \\ m^2 & n^2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}; \text{ d) } A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 8-n \\ 3m \\ 12m \\ n-2 \end{pmatrix}.$$

11. a) Să se găsească condiția ca sistemul

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5, \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 &= 4, \\ \alpha x_1 + \beta x_2 - 2x_3 &= \alpha + \beta \end{aligned}$$

să fie: 1) incompatibil; 2) nedeterminat.

b) Să se determine, α , β , m și n așa fel ca sistemul

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4, \\ 3x_1 - x_2 + 7x_3 &= 2, \\ \alpha x_1 + 9x_2 - 3x_3 &= m, \\ 2x_1 + \beta x_2 + 4x_3 &= n \end{aligned}$$

să fie simplu nedeterminat și în acest caz să se rezolve.

c) Să se determine α , β și m , astfel ca sistemul

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 &= -1, \\ x_1 + 9x_2 + \alpha x_3 + x_4 &= \beta, \\ 5x_1 - 6x_2 + 10x_3 + \beta x_4 &= m \end{aligned}$$

să fie dublu nedeterminat și în acest caz să se rezolve.

12. Să se determine parametrul real m , astfel încât sistemul să admită soluții nebanale și să se rezolve în acest caz:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 &= 0, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 0, \\ mx_1 - 6x_2 - 4x_3 + 2x_4 &= 0, \\ 2x_1 - mx_2 - 2x_3 &= 0. \end{aligned}$$

13. Să se arate că dacă $\bar{x}_j, j = 1, 2, \dots, n$, este o soluție a sistemului neomogen $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, i = 1, 2, \dots, m$, iar $x_j^0, j = 1, 2, \dots, n$ este soluție a sistemului omogen atașat $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0, i = 1, 2, \dots, m$, atunci $x_j = \bar{x}_j + x_j^0, j = 1, 2, \dots, n$, reprezintă de asemenea o soluție a sistemului neomogen.

2.4. Spații vectoriale

O mulțime V , înzestrată cu două operații: una internă, adunarea, și una externă față de corpul K , înmulțirea cu scalari din K , formează un spațiu vectorial peste K , dacă:

- 1) $(x + y) + z = x + (y + z), \forall x, y, z \in V$;
- 2) $\exists 0 \in V \mid x + 0 = 0 + x = x, \forall x \in V$;
- 3) $\forall x \in V, \exists -x \in V \mid x + (-x) = (-x) + x = 0$;
- 4) $x + y = y + x, \forall x, y \in V$;
- 5) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x, \forall x \in V, \forall \lambda, \mu \in K$;
- 6) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x, \forall \lambda, \mu \in K, \forall x \in V$;
- 7) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y, \forall \lambda \in K, \forall x, y \in V$;
- 8) $1 \cdot x = x, \forall x \in V, 1 \in K$.

Exemple. a) $M_{m,n}$ - mulțimea matricelor de tipul (m, n) cu elementele din R ;

b) $P(t)$ - mulțimea polinoamelor în t , cu coeficienți reali;

c) $P_n(t), n \in N$ - mulțimea polinoamelor de grad mai mic sau egal cu n ;

d) $R^n = \{x, x = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in R, i = 1, 2, \dots, n\}$;

e) C - mulțimea numerelor complexe este spațiu vectorial peste R ;

f) $F = \{f: [0, 1] \rightarrow R, f \text{ continuă pe } [0, 1]\}$.

Se numește subspațiu vectorial al unui spațiu vectorial V orice parte V' a sa care este ea însăși un spațiu vectorial pe același corp. O submulțime $V' \subset V$ este subspațiu vectorial al lui V , dacă și numai dacă $\lambda x + \mu y \in V', \forall x, y \in V'$ și $\forall \lambda, \mu \in K$.

Fie $u_1, u_2, \dots, u_m \in V$ un sistem dat de vectori. Mulțimea $V' = \{u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_m u_m, \lambda_i \in K, i = 1, 2, \dots, m\}$ formează un subspațiu vectorial al lui V . Mulțimea V' se numește spațiu generat de sistemul de vectori u_1, u_2, \dots, u_m , iar u_1, u_2, \dots, u_m se numește sistem de generatori pentru V' .

Un sistem de vectori $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$ este liniar dependent dacă există scalarii $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$,

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \neq 0, \text{ astfel încât}$$

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = 0.$$

Dacă această relație are loc numai dacă $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$, sistemul este liniar independent.

Un sistem de vectori din V constituie o bază a spațiului vectorial V , dacă: a) sistemul de vectori este liniar independent; b) orice alt vector din V este o combinație liniară de vectorii sistemului. Două baze oarecare în V au același număr de vectori. Numărul vectorilor unei baze reprezintă dimensiunea spațiului vectorial.

Fie $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ o bază în V . Orice vector $x \in V$ se descompune în mod unic sub forma

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n.$$

Scalarii x_1, x_2, \dots, x_n se numesc coordonatele vectorului x în baza B .

Fie V_n un spațiu vectorial real. Se numește produsul scalar al vectorilor $x, y \in V_n$, numărul real $\langle x, y \rangle$ satisfăcând proprietățile:

- a₁) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \forall x, y \in V_n$; a₂) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle, \forall \lambda \in R, \forall x, y \in V_n$;
- a₃) $\langle x + z, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle, \forall x, y, z \in V_n$;

$a_j \langle x, y \rangle$
Norma unui
 y_1, \dots, y_n .

Doi vec
dacă este fo

1. Să se
vectoriale

a) $P_n(t)$

c) $\{f\}$

Rezolvare

Avem $\lambda x +$
și μ . Deci P

b) Fie x

Rezultă

λx

Cum $\lambda, \mu \in K$
vectorial.

c) Fie $f(x)$

$= (\lambda a + \mu c) x$

2. Fie si

mulțimea so

Dacă $A =$

soluții liniar

liniare ale a

Rezolvare

$x = (x_1, x_2, \dots,$

Deoarece $\sum_{j=1}^n a_j$

rezultă $\lambda x + \mu y$

S este subspațiu

Fie $r = \text{rang}$

de zero, este fo

fi luate ca princ

și obținută prin

Obținem

astfel că soluția generală a sistemului omogen este

$$x = \left(\sum_{s=r+1}^n b_{1s}x_s, \dots, \sum_{s=r+1}^n b_{rs}x_s, x_{r+1}, \dots, x_n \right),$$

x_{r+1}, \dots, x_n rămânând arbitrari. Observăm că liniile matricii

$$\begin{pmatrix} b_{1r+1} & b_{2r+1} \dots b_{rr+1} & 1 & 0 \dots 0 \\ b_{1r+2} & b_{2r+2} \dots b_{rr+2} & 0 & 1 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{1n} & b_{2n} \dots b_{rn} & 0 & 0 \dots 1 \end{pmatrix}$$

obținute dând valori necunoscutele secundare x_{r+1}, \dots, x_n , reprezintă soluții ale sistemului omogen. Acestea sînt în număr de $n - r$, sînt liniar independente, deoarece rangul matricii soluțiilor este $n - r$. Dacă notăm liniile matricii prin

$$\begin{aligned} x^1 &= (b_{1r+1}, \dots, b_{rr+1}, 1, 0, \dots, 0), \\ x^2 &= (b_{1r+2}, \dots, b_{rr+2}, 0, 1, \dots, 0), \\ &\dots \\ x^{n-r} &= (b_{1n}, \dots, b_{rn}, 0, 0, \dots, 1), \end{aligned}$$

observă că soluția generală a sistemului omogen se scrie sub forma

$$x = x_{r+1}x^1 + x_{r+2}x^2 + \dots + x_n x^{n-r}.$$

Se poate spune că cele $n - r$ soluții x^1, x^2, \dots, x^{n-r} formează o bază a subspațiului S . Un asemenea sistem de $n - r$ soluții se numește sistem fundamental de soluții pentru sistemul omogen.

③ Să se studieze dependența liniară pentru sistemele de vectori:

- $v_1 = (2, 1, 3, 1), v_2 = (1, 2, 0, 1), v_3 = (-1, 1, -3, 0)$ în R^4 ;
- $v_1 = 8 - t + 7t^2, v_2 = 2 - t + 3t^2, v_3 = 1 + t - t^2$ în $P_2(t)$;
- $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ în $M_{2,2}$;
- $v_1 = (2, 0, 1, 3, -1), v_2 = (1, 1, 0, -1, 1), v_3 = (0, -2, 1, 5, -3),$
 $v_4 = (1, -3, 2, 9, -5)$ în R^5 .

Rezolvare. a) Considerăm relația $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$. Prin înlocuirea vectorilor v_1, v_2, v_3 această relație este echivalentă cu sistemul omogen $2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0, 3\lambda_1 - 3\lambda_3 = 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 0$.

Rangul matricii acestui sistem este doi. Prin urmare, sistemul admite și soluții nebanale și deci sistemul de vectori este liniar dependent. Un sistem fundamental de soluții pentru sistemul omogen este $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1$, astfel că o relație de dependență este $v_1 - v_2 + v_3 = 0$.

b) Relația $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$ este echivalentă cu sistemul omogen $8\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0, -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0, 7\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0$. Rangul matricii sistemului este doi și un sistem fundamental de soluții este format dintr-o singură soluție liniar independentă: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = -2$. Avem deci un sistem de vectori liniar dependent și o relație de dependență $v_1 - 3v_2 - 2v_3 = 0$.

c) Relația $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 = 0$ este echivalentă cu $2\lambda_1 + \lambda_2 = 0, -2\lambda_1 - 4\lambda_2 - 4\lambda_3 = 0, 4\lambda_1 + 5\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0, -6\lambda_1 + 3\lambda_2 + 8\lambda_3 = 0$. Rangul acestui sistem este doi, deci sistemul de matrice este liniar dependent. Avem o relație de dependență $-2A_1 + 4A_2 - 3A_3 = 0$.

d) Relația $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = 0$ este echivalentă cu sistemul omogen $2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 = 0, \lambda_2 - 2\lambda_3 - 3\lambda_4 = 0, \lambda_1 + \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0, 3\lambda_1 - \lambda_2 + 5\lambda_3 + 9\lambda_4 = 0, -\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 - 5\lambda_4 = 0$. Rangul acestui sistem este doi, deci sistemul de vectori este liniar dependent. Deoarece un sistem fundamental de soluții este format din două soluții liniar independente, avem două relații de de-

pendență. Să
 $\lambda_2 = -1, \lambda_3 =$

4. Să se
 $\{t^3 - t + 1,$

Rezolvare.
binație liniară

$$t^3 = x_1(t)$$

Aceste relații s

Se observă
doilea sistem e
spațiu.

5. În R^4
 $(-1, 1), v_4 =$
tele vectorulu

Rezolvare. D

pendenți. Consi

Rangul acest
 $+ x_2 v_2 + x_3 v_3 +$
 $+ x_2 + x_4 = 1,$
este $x_1 = \frac{1}{r}, x_2$

6. În R^5 s
 $(-4, 3, 1), v_2$

Rezolvare. S
liniar independen
Deoarece orice c
sultă că acestia f

$$v_4 = x_1 v_1 + x_2 v_2$$

7. Se dau
 $= -8a_1 + 4a_2$
 $= a_1 - a_2 +$

Rezolvare. S
matricii formate
natele vectorulu
temul de vector
această bază. Fic

$$-8a_1$$

pendență. Sistemul fundamental de soluții este $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -1$, $\lambda_4 = 0$ și $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -2$, $\lambda_4 = 1$, astfel că avem relațiile $v_1 - 2v_2 - v_3 = 0$ și $-v_2 - 2v_3 + v_4 = 0$.

4. Să se determine care din polinoamele t^2 și $t - 1$ aparțin spațiului generat de $\{t^3 - t + 1, 3t^2 + 2t, t^3\}$.

Rezolvare. Pentru ca cele două polinoame să aparțină spațiului, trebuie ca acestea să fie combinație liniară de elementele sistemului de generatori. Deci

$$t^2 = x_1(t^3 - t + 1) + x_2(3t^2 + 2t) + x_3t^3 \text{ și } t - 1 = y_1(t^3 - t + 1) + y_2(3t^2 + 2t) + y_3t^2.$$

Aceste relații sînt echivalente cu sistemele:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & + & x_3 = 0, \\ & 3x_2 & = 1, \\ -x_1 + 2x_2 & = & 0, \\ x_1 & = & 0 \end{array} \quad \text{și} \quad \begin{array}{rcl} y_1 & + & y_3 = 0, \\ & 3y_2 & = 0, \\ -y_1 + 2y_2 & = & 1, \\ y_1 & = & -1. \end{array}$$

Se observă că primul sistem este incompatibil și deci t^2 nu aparține spațiului, în timp ce al doilea sistem este compatibil ($y_1 = -1$, $y_2 = 0$, $y_3 = 1$), ceea ce arată că $t - 1$ aparține acestui spațiu.

5. În R^4 se dau vectorii $v_1 = (1, 1, 2, 1)$, $v_2 = (1, -1, 0, 1)$, $v_3 = (0, 0, -1, 1)$, $v_4 = (1, 2, 2, 0)$. Să se arate că aceștia formează o bază. Se cer coordonatele vectorului $v = (1, 1, 1, 1)$ în această bază.

Rezolvare. Deoarece $\dim R^4 = 4$ este suficient să arătăm că cei patru vectori sînt liniar independenți. Considerîndu-i ca vectori linie într-o matrice, obținem matricea

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rangul acestei matrice este patru, deci vectorii sînt liniar independenți. Scriem apoi $v = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4$. Pentru determinarea coordonatelor x_1, x_2, x_3 și x_4 obținem sistemul $x_1 + x_2 + x_4 = 1$, $x_1 - x_2 + 2x_4 = 1$, $2x_1 - x_3 + 2x_4 = 1$, $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Soluția acestui sistem este $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{4}$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = \frac{1}{2}$.

6. În R^5 să se determine o bază a subspațiului generat de vectorii $v_1 = (1, 2, -4, 3, 1)$, $v_2 = (2, 5, -3, 4, 8)$, $v_3 = (6, 17, -7, 10, 22)$, $v_4 = (1, 3, -3, 2, 0)$.

Rezolvare. Se verifică faptul că v_1, v_2, v_3, v_4 sînt liniar dependenți, dar trei dintre vectori sînt liniar independenți (de exemplu v_1, v_2, v_3). Prin urmare, v_4 este o combinație liniară de v_1, v_2 și v_3 . Deoarece orice combinație liniară de vectorii v_1, v_2, v_3 și v_4 este o combinație de v_1, v_2 și v_3 , rezultă că aceștia formează o bază a subspațiului. Descompunerea vectorului v_4 față de această bază

$$v_4 = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 \text{ conduce la coordonatele } x_1 = 1, x_2 = -\frac{3}{2}, x_3 = \frac{1}{2}.$$

7. Se dau vectorii $a_1 = (1, 0, 0)$, $a_2 = (2, 1, 0)$, $a_3 = (-3, 2, 1)$ și $a = -8a_1 + 4a_2 - a_3$ și vectorii $b_1 = a_1 + a_2 + a_3$, $b_2 = a_1 + a_2 - a_3$, $b_3 = a_1 - a_2 + a_3$. Să se calculeze coordonatele vectorului a în baza b_1, b_2, b_3 .

Rezolvare. Să observăm mai întîi că vectorii $a_1, a_2, a_3 \in R^3$ sînt liniar independenți (rangul matricii formate cu cei trei vectori ca linii este egal cu 3) și deci formează o bază în R^3 . Coordonatele vectorului în baza $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ sînt $a = (-8, 4, -1)_A$. Se poate verifica faptul că sistemul de vectori $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ formează o bază în R^3 . Se cer coordonatele vectorului a în această bază. Fie $a = x_1b_1 + x_2b_2 + x_3b_3$, adică

$$-8a_1 + 4a_2 - a_3 = x_1(a_1 + a_2 + a_3) + x_2(a_1 + a_2 - a_3) + x_3(a_1 - a_2 + a_3).$$

2.4.2. Probleme propuse spre rezolvare

11. Să se arate că următoarele mulțimi sînt subspații vectoriale ale spațiilor vectoriale indicate :

- a) $\{(a_1, a_2, 0), a_1, a_2 \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R}^3$; b) $\{at^3 + bt, a, b \in \mathbf{R}\} \subset P(t)$;
 c) $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = 3x_2, x_1 + x_2 = x_3\} \subset \mathbf{R}^3$; d) $D = \{f \in F \mid f \text{ este diferențabilă și } f' = f\} \subset F$.

12. Să se studieze dependența liniară pentru sistemele de vectori :

- a) $v_1 = (2, 1, 3, -1), v_2 = (-1, 1, -3, 1), v_3 = (4, 5, 0, 0), v_4 = (1, 5, 0, 1)$ în \mathbf{R}^4 ;
 b) $v_1 = (-5, 2, 8, -10), v_2 = (-5, 3, 17, -14), v_3 = (1, 1, 11, 6)$ în \mathbf{R}^4 ;
 c) $v_1 = (0, 1, 2, -1), v_2 = (1, 2, -1, 0), v_3 = (0, 2, -1, 1), v_4 = (4, 6, 1, 3)$ în \mathbf{R}^4 ;
 d) $v_1 = \sin x, v_2 = \cos x$ în F ;
 e) $v_1 = 1, v_2 = t, \dots, v_n = t^{n-1}, \dots$ în $P(t)$;
 f) $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ în $M_{2,2}$.

13. Să se determine $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ astfel ca matricele

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ și } A_3 = \begin{pmatrix} -11 & \lambda \\ 4 & \mu \end{pmatrix}$$

să fie liniar dependente.

14. Să se cerceteze dependența liniară a vectorilor :

- a) $v_1 = 2 - 3i, v_2 = 1 + i$ în \mathbf{C} ; b) $v_1 = e^x, v_2 = e^{2x}, v_3 = e^{3x}$ în F ; c) $v_1 = 4t, v_2 = t^2 + t, v_3 = 3t^2 - t$ în $P(t)$; d) $v_1 = \cos^2 x, v_2 = 17, v_3 = \sin^2 x$ în F .

15. Să se determine care din vectorii următori aparțin spațiului generat de vectorii $\{t^3 - t + 1, 3t^2 + 2t, t^3\}$:

- a) $5t^3 + 6t^2 + 4$; b) $t^3 + t^2 + t + 1$; c) $t^3 + 3t^2 + 3t - 1$.

16. a) În \mathbf{R}^3 se dau vectorii $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 1, 2), v_3 = (1, 2, 3)$. Să se arate că aceștia formează o bază și apoi să se determine coordonatele vectorilor $x = (5, -1, 3)$ și $y = (2, 3, -1)$ în această bază.

b) În \mathbf{R}^4 se dau vectorii $v_1 = (1, 0, 0, 1), v_2 = (2, 1, 3, 1), v_3 = (1, 1, 0, 0), v_4 = (0, 1, -1, 1)$. Să se arate că aceștia formează o bază. Se cer coordonatele vectorului $v = (0, 0, 0, 1)$ în această bază.

17. În \mathbf{R}^4 se consideră următoarele sisteme de vectori :

- a) $v_1 = (1, 2, 2, 1), v_2 = (5, 6, 6, 5), v_3 = (-1, -3, 4, 0), v_4 = (0, 4, -3, -1)$;
 b) $v_1 = (2, -5, 3, 10), v_2 = (1, -1, 1, 3), v_3 = (3, 3, 1, 1)$;
 c) $v_1 = (1, 2, 5, -1), v_2 = (3, 6, 5, -6), v_3 = (2, 4, 0, -2)$;
 d) $v_1 = (2, 0, 4, 2), v_2 = (1, 2, -2, -3), v_3 = (3, 1, 3, 4), v_4 = (2, 4, 9, 5)$.

Să se studieze dependența liniară a vectorilor și să se determine relațiile de dependență. Să se pună în evidență o bază în fiecare din subspațiile generate.

18. În spațiul \mathbf{R}^4 se dau vectorii $v_1 = (2, 4, 1, 3), v_2 = (7, 4, -9, 5), v_3 = (4, 8, -3, 7), v_4 = (5, 5, -5, 5), v_5 = (8, 4, -14, 6)$. Care este dimensiunea subspațiului generat de aceștia? Alegînd o bază în subspațiu, să se raporteze toți ceilalți vectori la baza aleasă.

19. Care din următoarele mulțimi de vectori :
- a) $v_1 = (1, 1, 0)$; $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (1, 1, 1)$ în \mathbf{R}^3 ;
 b) $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (4, 2, 0)$, $v_3 = (0, 1, 0)$, $v_4 = (0, 0, 0)$, $v_5 = (0, 0, 1)$ în \mathbf{R}^3 ;
 c) $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 2, 3)$ în \mathbf{R}^3 ;
 d) $v_1 = (1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1, 0)$, $v_3 = (1, 0, 0, 1)$, $v_4 = (1, 1, 1, 1)$ în \mathbf{R}^4 generează spațiul la care aparțin !

20. Să se determine coordonatele vectorului $v = (2, -3, 5)$ în raport cu baza :
- a) $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 1, 1)$;
 b) $v_1 = (1, -1, 0)$, $v_2 = (-4, 6, -10)$, $v_3 = (-1, 3, -9)$;
 c) $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (1, 0, 1)$;
 d) $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$, $v_3 = (0, -5, 5)$.

21. Să se determine coordonatele vectorilor :
- a) $u_1 = t^2 + 1$, $u_2 = t^3$, $u_3 = 4$, $u_4 = t^2$, $u_5 = t^3 - t^2$ și $u_6 = t^2 - t$ în baza $v_1 = t^3$, $v_2 = t^3 + t$, $v_3 = t^2 + 1$, $v_4 = t + 1$ din $P_4(t)$;
 b) $u_1 = 3 - i$, $u_2 = i$, $u_3 = -5$, $u_4 = 1 + 3i$, $u_5 = 3 + 4i$ în baza $v_1 = 1 - 2i$, $v_2 = i - 3$ din C .

22. Completați următoarele mulțimi de vectori ca să fie baze în spațiile considerate :

- a) $v_1 = (4, -7) \in \mathbf{R}^2$; b) $v_1 = (2, -1, 3)$, $v_2 = (4, 1, 1) \in \mathbf{R}^3$;
 c) $v_1 = t$, $v_2 = t^2 + 4 \in P_3(t)$; d) $v_1 = t - 1$, $v_2 = t^2 + 5 \in P_3(t)$.

23. Să se determine matricea trecerii de la baza B la baza B' în următoarele cazuri :

- a) $B = \{(2, 3), (0, 1)\}$, $B' = \{(6, 4), (4, 8)\}$ în \mathbf{R}^2 ;
 b) $B = \{(5, 1), (1, 2)\}$, $B' = \{(1, 0), (0, 1)\}$ în \mathbf{R}^2 ;
 c) $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$, $B' = \{(2, 0, 3), (-1, 4, 1), (3, 2, 5)\}$ în \mathbf{R}^3 ;
 d) $B = \{t, 1, t^2\}$, $B' = \{3 + 2t + t^2, t^2 - 4, 2 + t\}$ în $P_2(t)$;
 e) $B = \{t, t^2 + 1, t^2 + t\}$, $B' = \{t^2 + 3t - 3, 4t^2 + t + 2, t^2 - 2t + 1\}$ în $P_2(t)$.

24. Să se stabilească formulele de transformare ale coordonatelor când se trece de la baza B la baza B' :

$$B = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\},$$

$$B' = \{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (1, 1, 1, 1)\} \text{ în } \mathbf{R}^4.$$

25. Să se calculeze produsul scalar al vectorilor :

- a) $v_1 = (1, -1, 2, 3, 0)$, $v_2 = (1, 2, -1, 4, 1)$ în \mathbf{R}^5 ;
 b) $v_1 = (1, -1, -1, -1, 1, 2)$, $v_2 = (2, -2, -3, 3, 2, 1)$ în \mathbf{R}^6 .

26. Să se normeze vectorii

$$v_1 = (3, 1, 2, 1), v_2 = (2, 1, -1, 2), v_3 = (-2, 3, -5, -1) \text{ în } \mathbf{R}^4.$$

27. Să se construiască o bază ortonormată a spațiului \mathbf{R}^4 , admitînd că doi vectori ai bazei sînt $v_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ și $v_2 = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, -\frac{5}{6}\right)$.

28. Adăugați la matricea $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ alte două linii ortogonale între ele și ortogonale la primele trei.

29. Să se dea o interpretare sistemului de ecuații algebrice, liniar și omogen, $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0, i = 1, 2, \dots, m$, și sistemului său fundamental de soluții, considerând că coeficienții fiecărei ecuații sînt coordonatele unui vector din \mathbf{R}^n .

30. Să se determine sistemul fundamental ortonormat al soluțiilor sistemului $3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$.

31. Arătați că fiecare din următoarele mulțimi este ortonormată în \mathbf{R}^3 și pentru fiecare mulțime găsiți o bază ortonormată pentru \mathbf{R}^3 , care să conțină cei doi vectori :

a) $\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), (0, 1, 0) \right\}$; b) $\left\{ \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$;
 c) $\left\{ \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7} \right), \left(\frac{6}{7}, \frac{2}{7}, -\frac{3}{7} \right) \right\}$.

32. Fie $B = \{1, 1+t, 1+t+t^2\}$ o bază a spațiului $P_3(t)$. Definim produsul scalar $\langle x, y \rangle_B = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$, unde $x_i, y_i, i = 1, 2, 3$, sînt coordonatele vectorilor x și y în baza B . Să se calculeze produsele scalare :

a) $\langle 1+t, 1+t \rangle_B$; b) $\langle 1, 1+t+t^2 \rangle_B$; c) $\langle 2t-t^2, 4+t-3t^2 \rangle_B$;
 d) $\langle 3-t^2, 2+4t+6t^2 \rangle_B$.

2.5. Operatori liniari

Fie V și V' două spații vectoriale peste același corp K . Aplicația $f: V \rightarrow V'$ se numește operator liniar dacă $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y), \forall x, y \in V$ și $\forall \lambda, \mu \in K$.

Proprietăți. 1) Dacă $f: V \rightarrow V'$ și $g: V' \rightarrow V''$ sînt operatori liniari, atunci aplicația $g \circ f: V \rightarrow V''$ este tot un operator liniar.

2) Fie $f: V \rightarrow V'$ un operator liniar și fie $0_V \in V$ și $0_{V'} \in V'$ vectorii nuli în cele două spații. Atunci $f(0_V) = 0_{V'}$; $f(-x) = -f(x), \forall x \in V$.

3) Dacă $f: V \rightarrow V'$ este operator liniar și $H \subset V$ este un subspațiu vectorial al lui V , atunci $f(H) \subset V'$ este subspațiu vectorial al lui V' .

4) Dacă $f: V \rightarrow V'$ este operator liniar și $\{u_1, u_2, \dots, u_k\} \subset V$ este un sistem de vectori liniar dependent, atunci sistemul $\{f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_k)\} \subset V'$ este liniar dependent.

Două spații vectoriale V și V' , peste același corp K , se numesc izomorfe și se notează $V \cong V'$, dacă există un operator liniar $f: V \rightarrow V'$ bijectiv. În acest caz, f se numește izomorfism.

Proprietăți ale spațiilor vectoriale izomorfe. 1. $V \cong V, 2. V \cong V'$ și $V' \cong V'' \Rightarrow V \cong V''$. 3. $V \cong V' \Rightarrow V' \cong V$ (dacă $f: V \rightarrow V'$ este izomorfism, atunci $f^{-1}: V' \rightarrow V$ este tot izomorfism).

4. Dacă $V \cong V'$ (f fiind izomorfismul) și $\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset V$ este un sistem de vectori liniar independent, atunci sistemul $\{f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n)\} \subset V'$ este tot liniar independent. Două spații vectoriale izomorfe au aceeași dimensiune.

Un operator liniar $T: V \rightarrow V$ se numește transformare liniară. Dacă $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ este o bază în V , a da transformarea T înseamnă a specifica relațiile de transformare a bazei $B, Te_i =$

$$= \sum_{j=1}^n a_{ij}e_j, i = 1, 2, \dots, n. \text{ Matricea } A = (a_{ij}) \text{ se numește matricea transformării liniare. Dacă } x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, y = \sum_{i=1}^n y_i e_i \text{ și } y = Tx, \text{ atunci } y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j, i = 1, 2, \dots, n. \text{ La o schimbare a bazei în } V, \text{ matricea unei transformări liniare se schimbă după legea } B = SAS^{-1}, S \text{ fiind matricea schimbării bazei.}$$

Vectorul $u \neq 0, u \in V$, se numește vector propriu pentru transformarea liniară $T: V \rightarrow V$, dacă există $\lambda \in K$, așa ca $Tu = \lambda u$. Scalarul $\lambda \in K$ se numește valoare proprie.

O condiție necesară și suficientă ca matricea transformării liniare $T: V_n \rightarrow V_n$ să poată fi adusă la forma diagonală este ca ea să admită n vectori proprii liniar independenți. Dacă u_1, u_2, \dots, u_n sînt vectorii proprii, liniar independenți, corespunzători valorilor proprii $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, atunci matricea transformării este

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Valorile proprii se determină din ecuația caracteristică $\det(a_{ij} - \lambda\delta_{ij}) = 0$, $A = (a_{ij})$ fiind matricea transformării liniare. Vectorii proprii se determină ca soluții ale sistemului

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij} - \lambda\delta_{ij})x_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

O transformare liniară $T: V \rightarrow V$, $y = Tx$ se numește transformare ortogonală dacă păstrează lungimile vectorilor, adică $\|x\| = \|y\|$.

2.5.1. Probleme rezolvate

1. Să se arate că următoarele aplicații sînt operatori liniari:

- a) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2, 4x_3)$;
- b) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2) = (x_1, 3x_1 - x_2, 2x_1)$;
- c) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (0, 0)$;
- d) $f: P(t) \rightarrow P(t)$, $f(a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n) = a_1 + 2a_2t + \dots + na_nt^{n-1}$.

Rezolvare. a) Fie $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ și $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Avem $\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3)$, astfel că $f(\lambda x + \mu y) = (2(\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2), 4(\lambda x_3 + \mu y_3)) = (\lambda(2x_1 + x_2) + \mu(2y_1 + y_2), 4(\lambda x_3 + \mu y_3)) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.

Aceasta arată că f este operator liniar.

b) Fie $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Atunci $\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2)$ și $f(\lambda x + \mu y) = (\lambda x_1 + \mu y_1, 3(\lambda x_1 + \mu y_1) - (\lambda x_2 + \mu y_2), 2(\lambda x_1 + \mu y_1)) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ și deci f este operator liniar.

c) Evident, $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) = 0$.

d) Fie $x = a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n$, $y = b_0 + b_1t + \dots + b_nt^n \in P(t)$ și $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Deoarece $\lambda x + \mu y = (\lambda a_0 + \mu b_0) + (\lambda a_1 + \mu b_1)t + \dots + (\lambda a_n + \mu b_n)t^n$, rezultă $f(\lambda x + \mu y) = (\lambda a_1 + \mu b_1) + 2(\lambda a_2 + \mu b_2)t + \dots + n(\lambda a_n + \mu b_n)t^{n-1} = \lambda f(x) + \mu f(y)$ și deci f este operator liniar.

2. Fie aplicațiile $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_2)$ și $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x) = (x_2 - x_1, 4x_1)$. Să se arate că acestea sînt operatori liniari. Să se determine $f \circ g$ și $g \circ f$ și să se verifice că sînt operatori liniari.

Rezolvare. Fie $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ și $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Deoarece $f(\lambda x + \mu y) = (2(\lambda x_1 + \mu y_1) - (\lambda x_2 + \mu y_2), 3(\lambda x_2 + \mu y_2)) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ și $g(\lambda x + \mu y) = ((\lambda x_2 + \mu y_2) - (\lambda x_1 + \mu y_1), 4(\lambda x_1 + \mu y_1)) = \lambda g(x) + \mu g(y)$, rezultă că f și g sînt operatori liniari.

Apoi $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x_2 - x_1, 4x_1) = (2x_2 - x_1, 12x_1)$ și $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x_1 - x_2, 3x_2) = (4x_2 - 2x_1, 8x_1 - 4x_2)$. Să verificăm că aceste aplicații sînt operatori liniari. Avem $(f \circ g)(\lambda x + \mu y) = (2(\lambda x_2 + \mu y_2) - (\lambda x_1 + \mu y_1), 12(\lambda x_1 + \mu y_1)) = \lambda(f \circ g)(x) + \mu(f \circ g)(y)$, $(g \circ f)(\lambda x + \mu y) = (4(\lambda x_2 + \mu y_2) - 2(\lambda x_1 + \mu y_1), 8(\lambda x_1 + \mu y_1) - 4(\lambda x_2 + \mu y_2)) = \lambda(g \circ f)(x) + \mu(g \circ f)(y)$.

3. Fie operatorul liniar $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2 + x_3, 2x_1 + x_2 - x_3, x_2 - 3x_3)$. Să se arate că operatorul liniar f este inversabil și să se determine inversul său $f^{-1}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Să se verifice că f^{-1} este tot un operator liniar.

Rezolvare. Fie $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, $x \neq y$. Să presupunem că $f(x) = f(y)$, adică $f(x) - f(y) = f(x - y) = 0$, deoarece f este operator liniar. Prin urmare, pentru a arăta că un

operator liniar este echivalent
 ușor că acest s
 aplicația inver
 Fie $y = (y_1, 2x_1 + x_2, x_2 = 12^{-1}(-6y_2, f^{-1}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ verifică ușor că
 4. Fie op
 $8x_1 + 3x_2 +$
 Să se ar
 $f^{-1}(1, 5, 2)$
 Rezolvare
 operator liniar, este echivalentă
 Singura soluție
 $y_2) \in \mathbb{R}^3$; să ar
 valentă cu siste
 vat conduce la
 f este izomorfism
 $x_1 - x_2 + 2x_3) /$
 $= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$
 5. Fie tra
 $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 10 & -19 \\ 12 & -24 \end{pmatrix}$
 transformării
 Rezolvare. A
 năm mai întâi va
 are rădăcinile $\lambda_1 =$
 $(7 - \lambda)x_1 + 10$
 Pentru $\lambda_1 = -1$
 $\Leftrightarrow 14x_2 = 0$. Rang
 $= -2, x_3 = 1$. De
 $= -\lambda_2 = 1$ sistemul
 Rangul sistemului
 $x_2 = (-2, 0, 1)$.
 Față de această b

operator liniar este injectiv trebuie arătat că ecuația $f(x) = 0$ are numai soluția banală. Ecuația $f(x) = 0$ este echivalentă cu sistemul omogen $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$, $2x_1 + x_2 - x_3 = 0$, $x_2 - 3x_3 = 0$. Se verifică ușor că acest sistem are numai soluția banală. Prin urmare, f este o aplicație biunivocă și deci admite aplicația inversă.

Fie $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, fixat. Ecuația $y = f(x)$ este echivalentă cu sistemul $x_1 - 2x_2 + x_3 = y_1$, $2x_1 + x_2 - x_3 = y_2$, $x_2 - 3x_3 = y_3$. Soluția acestui sistem este $x_1 = 12^{-1}(2y_1 + 5y_2 - y_3)$, $x_2 = 12^{-1}(-6y_1 + 3y_2 - 3y_3)$, $x_3 = 12^{-1}(-2y_1 + y_2 - 5y_3)$. Prin urmare, aplicația inversă este $f^{-1}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definită prin $f^{-1}(x) = 12^{-1}(2x_1 + 5x_2 - x_3, -6x_1 + 3x_2 - 3x_3, -2x_1 + x_2 - 5x_3)$. Se verifică ușor că această aplicație este tot un operator liniar.

4. Fie operatorul liniar $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definit prin $f(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + x_2 + 2x_3, 3x_1 + 3x_2 + 4x_3, 2x_1 + x_2 + 2x_3)$.

Să se arate că f este un izomorfism. Să se determine $f^{-1}(0, 0, 0)$, $f^{-1}(0, 1, 2)$ și $f^{-1}(1, 5, 2)$.

Rezolvare. Să arătăm că f este o bijecție. Pentru a arăta că f este injectie, deoarece f este operator liniar, este de ajuns să arătăm că ecuația $f(x) = 0$ are numai soluția $x = 0$. Ecuația $f(x) = 0$ este echivalentă cu sistemul omogen $-x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$, $3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0$, $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$. Singura soluție a acestui sistem este $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Să arătăm că $f(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3$. Fie $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$; să arătăm că există $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ astfel încât $y = f(x)$. Această ecuație este echivalentă cu sistemul $-x_1 + x_2 + 2x_3 = y_1$, $3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = y_2$, $2x_1 + x_2 + 2x_3 = y_3$, care rezolvat conduce la $x_1 = (-y_1 + y_3)/3$, $x_2 = (-y_1 + 3y_2 - 5y_3)/3$, $x_3 = (y_1 - y_2 + 2y_3)/2$. Prin urmare, f este izomorfism. Operatorul liniar invers este $f^{-1}(x_1, x_2, x_3) = ((-x_1 + x_3)/3, (-x_1 + 3x_2 - 5x_3)/3,$

$$x_1 - x_2 + 2x_3)/2). \text{ Deci } f^{-1}(0, 0, 0) = (0, 0, 0); f^{-1}(0, 1, 2) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{7}{3}, \frac{3}{2}\right); f^{-1}(1, 5, 2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 0\right).$$

5. Fie transformarea liniară $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definită într-o bază B prin matricea $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$. Să se arate că există o bază B' în \mathbb{R}^3 față de care matricea transformării T are forma diagonală.

Rezolvare. Arătăm că transformarea T admite trei vectori proprii liniar independenți. Determinăm mai întâi valorile proprii. Ecuația caracteristică

$$\begin{vmatrix} 7 - \lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19 - \lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ sau } (\lambda + 1)(\lambda - 1)^2 = 0$$

are rădăcinile $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Vectorii proprii sînt soluții ale sistemului

$$(7 - \lambda)x_1 + 10x_2 + 12x_3 = 0, -12x_1 - (19 + \lambda)x_2 - 24x_3 = 0, 6x_1 + 10x_2 + (13 - \lambda)x_3 = 0.$$

Pentru $\lambda_1 = -1$ sistemul devine $8x_1 + 10x_2 + 12x_3 = 0$, $-12x_1 - 18x_2 - 24x_3 = 0$, $6x_1 + 10x_2 + 14x_3 = 0$. Rangul sistemului este doi, astfel că un sistem fundamental de soluții este $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$. Deci vectorul propriu corespunzător lui $\lambda_1 = -1$ este $u_1 = (1, -2, 1)$. Pentru $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ sistemul devine $6x_1 + 10x_2 + 12x_3 = 0$, $-12x_1 - 20x_2 - 24x_3 = 0$, $6x_1 + 10x_2 + 12x_3 = 0$.

Rangul sistemului este unu; un sistem fundamental de soluții este format din $u_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ și $u_3 = (-2, 0, 1)$. Vectorii proprii u_1, u_2, u_3 sînt liniar independenți și deci formează o bază în \mathbb{R}^3 . Față de această bază matricea transformării liniare este

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Fie transformarea liniară $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definită într-o bază B prin matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Să se arate că nu există nici o bază în \mathbb{R}^3 față de care matricea transformării T să aibă formă diagonală.

Rezolvare. Ecuația caracteristică este $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$. Valorile proprii sînt $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Să determinăm acum vectorii proprii. Pentru $\lambda_1 = 1$ coordonatele vectorului propriu u_1 satisfac sistemul $-x_2 + x_3 = 0, 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, x_1 - x_2 + x_3 = 0$. Prin urmare, vectorul propriu corespunzător este $u_1 = (0, 1, 1)$. Pentru $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ obținem sistemul $-x_1 - x_2 + x_3 = 0, 2x_1 - x_2 = 0, x_1 - x_2 = 0$. Rangul acestui sistem este doi, astfel că sistemul fundamental de soluții este format numai dintr-un vector, anume $u_2 = (1, 1, 2)$. Vectorii proprii u_1 și u_2 sînt liniar independenți, dar nu formează bază în \mathbb{R}^3 . Din această cauză rezultă că nu există o bază față de care matricea transformării să aibă forma diagonală.

7. Se consideră transformarea liniară $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definită prin matricea $A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -3 & -2 & 6 \\ 6 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, într-o bază dată B . Să se verifice că transformarea T este ortogonală.

Rezolvare. Fie $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ și $y = (y_1, y_2, y_3) = Tx$, astfel că $y_1 = (-3x_1 - 2x_2 + 6x_3)/7, y_2 = (6x_1 - 3x_2 + 2x_3)/7, y_3 = (2x_1 + 6x_2 + 3x_3)/7$. Verificăm că $\|x\| = \|y\|, \forall x \in \mathbb{R}^3$. Avem $\|y\|^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = \frac{1}{49}(9x_1^2 + 36x_2^2 + 4x_3^2 - 36x_1x_2 - 12x_1x_3 + 24x_2x_3 + 4x_1^2 + 9x_2^2 + 36x_3^2 + 12x_1x_2 - 24x_1x_3 - 36x_2x_3 + 36x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 + 24x_1x_2 + 36x_1x_3 + 12x_2x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \|x\|^2$. Prin urmare, $\|y\| = \|x\|$ și deci T este o transformare ortogonală.

2.5.2. Probleme propuse spre rezolvare

8. Să se determine care din următoarele aplicații sînt operatori liniari:

- $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (3x_1 - x_2, x_2^2)$;
- $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + 2x_3, x_2)$;
- $f: P_3(t) \rightarrow P_3(t), f(a_0 + a_1t + a_2t^2) = (a_0 - a_1)t^2 + 4a_2t - a_1$;
- $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 5x_2, 7, x_1, 0)$;
- $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, f(x_1 + ix_2) = x_1 + x_2$.

9. Să se arate că următoarele aplicații sînt operatori liniari. Care dintre acestea sînt izomorfisme?

- $f: M_{2,3} \rightarrow M_{2,2}, f \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 - a_3 \\ a_4 - a_5 & a_6 \end{pmatrix}$;
- $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f(x_1 + ix_2) = 0$;
- $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, 3x_2, x_2 - 4x_1)$;
- $f: P_2(t) \rightarrow P_2(t), f(a_0 + a_1t + a_2t^2) = a_0 + a_1 + (a_1 + a_2)t + (a_0 + a_2)t^2$;
- $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + 4x_2, 2x_1 + 3x_3, 4x_2 - 8x_3)$;
- $f: P(t) \rightarrow P(t), f(a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n) = a_0t + \frac{1}{2}a_1t^2 + \dots + \frac{1}{n+1}a_nt^{n+1}$.

10. Să se determine $f \circ g$ și (sau) $g \circ f$ și să se verifice că acestea sînt operatori liniari, dacă:

- $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_3), g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, g(y_1, y_2) = (y_1, y_1 - y_2, y_2)$;

b) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(y_1, y_2) = (2y_1, y_2)$
c) $f: P_1(t) \rightarrow P_1(t), f(b_1 + b_2t) = b_2 + b_1t$
11. Fie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Să se arate că f este inversabil dacă și numai dacă $\det A \neq 0$.
12. Să se determine matricea operatorului liniar $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ în baza $B = \{u_1, u_2\}$, unde $u_1 = (1, 2), u_2 = (2, 1)$.
13. O transformare liniară $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ este definită prin matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Să se determine matricea operatorului f în baza $B = \{u_1, u_2\}$, unde $u_1 = (1, 2), u_2 = (2, 1)$.
14. Să se determine dacă operatorul liniar $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ este un operator liniar normal.
15. Fie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (-2x_1 + 5x_2, x_1 + 2x_2)$. Să se determine matricea operatorului f în baza $B = \{u_1, u_2\}$, unde $u_1 = (1, 2), u_2 = (2, 1)$.
16. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Să se determine matricea A^k pentru $k \in \mathbb{N}$.
17. Să se determine matricea operatorului liniar $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ în baza $B = \{u_1, u_2\}$, unde $u_1 = (1, 2), u_2 = (2, 1)$.
18. Fie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Să se arate că f are forma diagonală dacă și numai dacă matricea transformării f în baza $B = \{u_1, u_2\}$ este diagonală.
a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

prin matricea
de care matricea
eșle proprii size
monatele vectorului
0. Prin urmare,
obținem sistemul
astfel că sistemul
Vectorii proprii u_i
că nu există o bază

prin matricea
ormarea T este
 $x_1 + 6x_2 + 2x_3)/7$
 $\forall x \in \mathbb{R}^3$. Avem
 $x_1^2 + 9x_2^2 + 36x_3^2 +$
 $x_2^2 + x_3^2 = \|x\|^2$.

liniari:
dintre acestea
 $(a_0 + a_2)t^2$;
 $\frac{1}{n+1} a_n t^{n+1}$;
sînt operatori
 $\mathbb{R}^3, g(y_1, y_2) =$

- b) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4, f(x_1, x_2) = (x_1, 3x_2 + x_1, 2x_1 - x_2, x_2)$. $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, g(y_1, y_2) = (2y_1, y_2)$;
c) $f: P_1(t) \rightarrow P_2(t), f(a_0 + a_1 t) = 2a_0 - a_1 t^2, g: P_2(t) \rightarrow P_2(t), g(b_0 + b_1 t + b_2 t^2) = b_2 + b_1 t^2 - 3b_0 t^3$.

11. Fie transformarea liniară $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x_1, x_2) = (x_1, 3x_1 - x_2)$. Să se arate că $T^2 = I, I$ fiind aplicația identitate.
12. Să se cerceteze dacă operatorul liniar:
a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2, x_2 - x_1)$;
b) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow P_3(t), f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_3 + x_2 t - (x_1 + x_2) t^2$;
c) $f: P_2(t) \rightarrow \mathbb{R}^2, f(a_0 + a_1 t) = (2a_0 + a_1, 3a_0 + a_1)$;
d) $f: P_2(t) \rightarrow P_3(t), f(a_0 + a_1 t) = a_0 + 3a_0 t + a_1 t^2$;
e) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2, 2x_1 + x_2, x_2 + 3x_3)$.

este inversabil și să se determine inversul său. Să se verifice că inversul este tot un operator liniar.
13. O translație în plan este dată de $f(x_1, x_2) = (x_1 + h, x_2 + k), h, k \in \mathbb{R}$. Este translația un izomorfism?

14. Să se arate că aplicația $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x_1, x_2) = (3x_1 - 2x_2, 2x_1 - x_2, -x_1 + x_2)$ este un operator liniar. În \mathbb{R}^2 se dau vectorii $u_1 = (1, -2), u_2 = (-1, 1)$ liniar independenți. Cum sînt imaginile lor, $f(u_1)$ și $f(u_2)$?
15. Fie operatorul liniar $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2, x_3) = (-2x_1 + 3x_2 - x_3, 3x_1 - 2x_2 + 5x_3)$. Să se cerceteze dependența liniară a vectorilor $u_1 = (1, -1, 0), u_2 = (1, 2, 3), u_3 = (0, 1, 1)$ în \mathbb{R}^3 și a vectorilor imagine $f(u_1), f(u_2), f(u_3)$ în \mathbb{R}^2 .

16. Se consideră transformarea liniară $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definită într-o bază prin matricea A . Să se verifice că T este o transformare ortogonală și că $A^{-1} = A'$ (A' este transpusa matricei A):

a) $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; b) $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

17. Să se determine care din următoarele transformări liniare sînt ortogonale:
a) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, y = T(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{\sqrt{2}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}}, \frac{x_2}{\sqrt{2}} - \frac{x_1}{\sqrt{2}}, -x_3 \right)$;
b) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, y = T(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_2}{\sqrt{2}} + \frac{x_3}{\sqrt{2}}, x_1, \frac{x_2}{\sqrt{2}} + \frac{x_3}{\sqrt{2}} \right)$;
c) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, y = T(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_2}{\sqrt{2}} - \frac{x_1}{\sqrt{2}}, \frac{x_1}{\sqrt{2}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}}, -x_3 \right)$;
d) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, y = T(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{\sqrt{2}} - \frac{x_3}{\sqrt{2}}, x_2, \frac{x_1}{\sqrt{2}} + \frac{x_3}{\sqrt{2}} \right)$;
e) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, y = T(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{\sqrt{2}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}}, \frac{x_2}{\sqrt{2}} - \frac{x_3}{\sqrt{2}}, \frac{x_1}{\sqrt{2}} + \frac{x_3}{\sqrt{2}} \right)$.

18. Fie transformarea liniară $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definită într-o bază B prin matricea A . Să se arate că există o bază B' în \mathbb{R}^3 față de care matricea transformării liniare are forma diagonală. Să se scrie matricea trecerii de la baza inițială B la baza B' . Matricea transformării este dată de

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 6 & 4 & -4 \\ 4 & 5 & -4 \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; d) $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 6 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.6. Forme liniare. Forme pătratice

Forme liniare. Se numește formă liniară pe spațiul vectorial R^n operatorul liniar $f: R^n \rightarrow R$, $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$, unde $a_i \in R$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Fie sistemul de forme liniare f_1, f_2, \dots, f_m , unde $f_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$, $i = 1, 2, \dots, m$. Matricea $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}$ se numește matricea sistemului de forme. Putem scrie matriceale sistemului de forme

$$f = AX, \text{ unde } f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \text{ Sistemul de forme } f_1, f_2, \dots, f_m \text{ este liniar dependent}$$

dacă există constantele $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, $\sum_{i=1}^m \lambda_i^2 \neq 0$, astfel încât

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_m f_m = 0.$$

Dacă această relație are loc numai când $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$, sistemul de forme este liniar independent.

Dacă rang $A = r$, atunci r forme sînt liniar independente, celelalte fiind combinații liniare de acestea.

Forme pătratice. Se numește formă pătratică pe spațiul vectorial R^n o aplicație $f: R^n \times R^n \rightarrow R$ de forma

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Matricea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ se numește matricea formei pătratice.

Fînd dată forma pătratică f , se pune problema ca aceasta, printr-o transformare liniară nedegenerată $x = Ty$, să fie adusă la forma canonică

$$f = b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + \dots + b_p y_p^2 - b_{p+1} y_{p+1}^2 - \dots - b_r y_r^2, \quad r \leq n,$$

unde $r = \text{rang } A$ și $b_s > 0$, $s = 1, 2, \dots, r$; p este indicele pozitiv de inerție, $p_1 = r - p$ este indicele negativ de inerție și $\sigma = p - p_1$ se numește semnatura formei pătratice.

Forma f este: a) pozitiv definită dacă este nedegenerată ($\text{rang } A = n$) și $p = n$; b) negativ definită dacă este nedegenerată și $p = 0$; c) pozitiv semidefinită dacă este degenerată ($\text{rang } A < n$) și $p = r$; d) negativ semidefinită dacă este degenerată și $p = 0$; e) nedefinită, dacă $p > 0$ și $p_1 > 0$.

2.6.1. Probleme rezolvate

1. Să se studieze natura sistemului de forme $f = AX$ și să se stabilească relațiile de dependență, cînd este cazul, pentru:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & -3 \\ 3 & 5 & -13 & 11 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Rezolvare. a) Calculând rangul matricei sistemului de forme, obținem numărul de forme egal cu rang $A = 3$. Prin urmare, sistemul de forme este liniar independent.

b) Obținem rang $A = 2$ și deci sistemul de forme este liniar dependent. Observăm că f_1 și f_2 sunt liniar independente și deci $f_3 = \lambda f_1 + \mu f_2$. Înlocuind aici formele f_i , $i = 1, 2, 3$ obținem pentru determinarea coeficienților λ și μ următorul sistem: $3\lambda + 5\mu = 3$, $2\lambda - \mu = 5$, $-5\lambda + 3\mu = -13$, $4\lambda - 3\mu = 11$. Acest sistem este compatibil determinat cu soluția $\lambda = 2$, $\mu = -1$. Prin urmare, relația de dependență este $f_3 = 2f_1 - f_2$.

c) Pentru acest exemplu vom proceda astfel. Atașăm matricea $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & f_1 \\ 3 & 2 & f_2 \\ 1 & 1 & f_3 \\ 2 & 3 & f_4 \end{array} \right)$ pe care o aducem

la forma triunghiulară prin transformări elementare asupra liniilor. Obținem succesiv:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & f_1 \\ 3 & 2 & f_2 \\ 1 & 1 & f_3 \\ 2 & 3 & f_4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & f_3 \\ 0 & -1 & f_1 - 2f_3 \\ 0 & -1 & f_2 - 3f_3 \\ 0 & 1 & f_4 - 2f_3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & f_3 \\ 0 & -1 & f_1 - 2f_3 \\ 0 & 0 & f_2 - f_1 - f_3 \\ 0 & 0 & f_2 + f_4 - 5f_3 \end{array} \right)$$

Cum se vede din ultima matrice, rangul matricei A este egal cu doi. Deci numai două dintre forme sînt liniar independente și avem două relații de dependență: $f_2 - f_1 - f_3 = 0$ și $f_2 + f_4 - 5f_3 = 0$.

2. Să se aducă la forma canonică, prin metoda lui Gauss, formele pătratice care urmează. Pentru fiecare formă în parte să se precizeze indicele pozitiv, semnatura și natura.

a) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_4^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4$;

b) $f(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4$; c) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$.

Rezolvare. a) În acest exemplu avem coeficientul unuia din pătrate diferit de zero. Ne fixăm asupra unuia din pătrate, de exemplu x_1^2 , și alegem toți termenii care conțin pe x_1 , formînd un pătrat cu aceștia. **Beci**

$$f = (x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4) + x_2^2 + x_3^2 - 2x_4^2 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4 = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 + 2x_2x_3 - 2x_2x_4 + 2x_3x_4 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_4^2 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4 = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 - 3x_4^2 + 4x_2x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4.$$

În continuare procedăm similar pentru forma pătratică $f_1 = -3x_4^2 + 4x_2x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4$:

$$f = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 - 3 \left(x_4^2 + 2x_2x_4 - \frac{2}{3}x_3x_4 \right) + 4x_2x_3 = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 - 3 \left[\left(x_4 + x_2 - \frac{1}{3}x_3 \right)^2 - x_2^2 - \frac{1}{9}x_3^2 + \frac{2}{3}x_2x_3 \right] + 4x_2x_3 = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 - 3 \left(x_2 - \frac{1}{3}x_3 + x_4 \right)^2 + 3 \left(x_2^2 + \frac{2}{3}x_2x_3 \right) + \frac{1}{3}x_3^2 = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 - 3 \left(x_2 - \frac{1}{3}x_3 + x_4 \right)^2 + 3 \left(x_2 + \frac{1}{3}x_3 \right)^2.$$

Dacă punem $y_1 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4$, $y_2 = x_2 - \frac{1}{3}x_3 + x_4$, $y_3 = x_2 + \frac{1}{3}x_3$, $y_4 = x_4$, putem scrie $f(y) = y_1^2 - 3y_2^2 + 3y_3^2$. În această formă canonică se vede că indicele pozitiv este $p = 2$, indicele nega-

tiv este $p_1 = 1$, semnatura este $\sigma = 1$. Deoarece $r = 3 < 4$, forma este degenerată și este nedefinită. Transformarea liniară care ne conduce la forma canonică este

$$T: y_1 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4, y_2 = x_2 - \frac{1}{3}x_3 + x_4, y_3 = x_3 + \frac{1}{3}x_4, y_4 = x_4.$$

b) În acest caz toți coeficienții pătratelor sînt egali cu zero și nu mai putem aplica procedeul de mai sus. Vom face însă o transformare liniară astfel încît problema să se reducă la cea de tipul de mai înainte. Facem deci transformarea liniară

$$(T_1): y_1 = (x_1 + x_2)/2, y_2 = (x_1 - x_2)/2, y_3 = x_3$$

astfel că forma devine

$$f = y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3.$$

În continuare procedăm ca în exemplul a). Avem

$$f = (y_1^2 + 2y_1y_3) - y_2^2 = (y_1 + y_3)^2 - y_2^2 - y_3^2.$$

Facem transformarea liniară

$$(T_2): z_1 = y_1 + y_3, z_2 = y_2, z_3 = y_3$$

astfel că $f = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$. Compușind transformările T_1 și T_2 , obținem transformarea

$$(T): z_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + x_3, z_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2), z_3 = x_3,$$

prin care f s-a redus la forma canonică. Se observă că $r = 3$, deci forma este nedegenerată. Deoarece indicele pozitiv este $p = 1$ și indicele negativ este $p_1 = 2$, forma este nedefinită.

c) Procedind ca la exercițiul a), obținem

$$\begin{aligned} f &= (x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4) + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \\ &= \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4\right)^2 - \frac{1}{4}(x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4) + \\ &\quad + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4. \end{aligned}$$

Facem transformarea

$$(T_1): y_1 = x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4, y_2 = x_2, y_3 = x_3, y_4 = x_4$$

astfel că

$$\begin{aligned} f &= y_1^2 + \frac{3}{4}\left(y_2^2 + \frac{2}{3}y_2y_3 + \frac{2}{3}y_2y_4\right) + \frac{3}{4}(y_3^2 + y_4^2) + \frac{1}{2}y_3y_4 = \\ &= y_1^2 + \frac{3}{4}\left[\left(y_2 + \frac{1}{3}y_3 + \frac{1}{3}y_4\right)^2 - \frac{1}{9}(y_3^2 + y_4^2 + 2y_3y_4)\right] + \frac{3}{4}(y_3^2 + y_4^2) + \frac{1}{2}y_3y_4. \end{aligned}$$

Facem transformarea

$$(T_2): z_1 = y_1, z_2 = y_2 + \frac{1}{3}y_3 + \frac{1}{3}y_4, z_3 = y_3, z_4 = y_4$$

deci

$$f = z_1^2 + \frac{3}{4}z_2^2 + \frac{2}{3}\left(z_3^2 + \frac{1}{2}z_3z_4\right) + \frac{2}{3}z_4^2 = z_1^2 + \frac{3}{4}z_2^2 + \frac{2}{3}\left(z_3 + \frac{1}{4}z_4\right)^2 + \frac{5}{8}z_4^2.$$

Facem o

și astfel $f = z_1^2 +$

canonică este

$$(T): z_1 =$$

Forma pătratică

3. Utilizăm să se aducă

$$a) f(x) =$$

Rezolvare. Matricea și se rezolvă

$\lambda_n \in \mathbb{R}$. Se rezolvă

normați $u_i = (x_i)$

$$= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 +$$

a) Matricea

Valorile proprii sînt

$$-2x_1 - x_3 = 0$$

$$\lambda_1 = -3, \text{ din}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$-2x_1 - 4x_3 = 0$$

Prin urmare,

$$(T): z_1 =$$

forma f este redusă

b) Matricea

admite rădăcinile

si este nedefinită

Facem o ultimă transformare

$$(T_3): u_1 = x_1, u_2 = x_2, u_3 = x_3 + x_4/4, u_4 = x_4.$$

astfel $f = u_1^2 + \frac{3}{4}u_2^2 + \frac{4}{6}u_3^2 + \frac{5}{8}u_4^2$. Transformarea liniară care ne-a condus la această formă

canonică este

$$(T): u_1 = x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4, u_2 = x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4, u_3 = x_3 + \frac{1}{4}x_4, u_4 = x_4.$$

Forma pătratică este nedegenerată și pozitiv definită deoarece $p = 4$.

3. Utilizând metoda transformărilor ortogonale (sau metoda valorilor proprii), să se aducă la forma canonică următoarele forme pătratice:

a) $f(x) = x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3$; b) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

Rezolvare. Metoda transformării ortogonale constă în următoarele. Se scrie matricea formei pătratice și se rezolvă ecuația caracteristică $\det(a_{ij} - \lambda\delta_{ij}) = 0$, obținându-se valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, \dots$,

$\lambda_i \in \mathbb{R}$. Se rezolvă apoi sistemul $\sum_{j=1}^n (a_{ij} - \lambda_i\delta_{ij})x_j = 0, i = 1, 2, \dots, n$, obținându-se vectorii proprii normatzi $u_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in}), i = 1, 2, \dots, n$. Forma pătratică este redusă la forma canonică $f =$

$$= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2, \text{ prin transformarea ortogonală } (T): x_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ji} y_j.$$

a) Matricea formei pătratice este $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, iar ecuația caracteristică se scrie

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda(-\lambda^2 + 9) = 0.$$

Valorile proprii sînt $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = 3$. Pentru $\lambda_1 = 0$, din sistemul $2x_2 - 2x_3 = 0, 2x_1 + x_2 =$

$-2x_1 - x_3 = 0$ determinăm vectorul propriu normat, adică $u_1 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. Pentru

$\lambda_2 = -3$, din sistemul $3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, 2x_1 + 4x_2 = 0, -2x_1 + 2x_3 = 0$, obținem $u_2 =$

$= \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. În sfîrșit, pentru $\lambda_3 = 3$, din sistemul $-3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, 2x_1 - 2x_2 = 0,$

$-2x_1 - 4x_3 = 0$ obținem $u_3 = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Prin urmare, cu transformarea ortogonală

$$(T): x_1 = (y_1 - 2y_2 - 2y_3)/3, x_2 = (-2y_1 + y_2 - 2y_3)/3, x_3 = (-2y_1 - 2y_2 + y_3)/3.$$

forma f este redusă la următoarea formă canonică:

$$f = -3y_2^2 + 3y_3^2.$$

b) Matricea formei pătratice este $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$. Ecuația caracteristică $\begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1-\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

admite rădăcinile $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{2}$. Pentru $\lambda_1 = 2$, din sistemul $-x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0,$

$\frac{1}{2}x_1 - x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0$, $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3 = 0$, obținem vectorul propriu normat $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$. Pentru $\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{2}$, se obține sistemul $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0$, $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 4\frac{1}{2}x_3 = 0$, $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0$. Sistemul fundamental de soluții al acestui sistem de ecuații este format din $v_1 = (-1, 1, 0)$ și $v_2 = (-1, 0, 1)$, soluția generală a sistemului fiind $v = \alpha v_1 + \beta v_2$. Deoarece vectorii v_1 și v_2 nu sînt ortogonali, se procedează astfel: se ia $u_2 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$ și se caută $u_3 = v$ normat și ortogonal lui u_2 . Deoarece $v = (-\alpha - \beta, \alpha, \beta)$ și $u_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$, din condiția de ortogonalitate a acestora obținem $\beta = -2\alpha$, astfel că $v = (\alpha, \alpha, -2\alpha)$. Normînd acest vector, obținem $u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}} \right)$.

Cu aceasta vectorii u_1, u_2, u_3 formează o bază ortonormată și cu transformarea ortogonală

$$(T): \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_3, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_3, \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 - \frac{2}{\sqrt{6}}y_3 \end{cases}$$

forma pătratică este redusă la forma canonică

$$f = 2y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 + \frac{1}{2}y_3^2$$

2.6.2. Probleme propuse spre rezolvare

4. Să se determine $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel ca între formele liniare $f_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4$, $f_2 = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4$, $f_3 = 3x_1 + x_2 + 2x_3 + \lambda x_4$, $f_4 = 4x_2 + 2x_3 + 5x_4$ să aibă loc relația $f_1 + f_2 - f_3 - f_4 = 0$.

5. Să se cerceteze natura sistemului de forme $f = AX$ și să se stabilească relațiile de dependență cînd este cazul:

$$a) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -7 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad b) A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -1 & 8 \\ 3 & 8 & -9 & -5 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix};$$

$$c) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -4 & 5 & 3 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}.$$

6. Să se aducă la forma canonică prin metoda lui Gauss și să se precizeze indicele pozitiv, signatura și natura pentru fiecare din formele pătratice:

a) $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3$;

b) $f(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3$;

c) $f(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_3x_4$;

d) $f(x)$

e) $f(x)$

7. Aplicații următoare:

a) $f(x)$

b) $f(x)$

c) $f(x)$

d) $f(x)$

e) $f(x)$

f) $f(x)$

g) $f(x)$

h) $f(x)$

i) $f(x)$

j) $f(x)$

$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

sistem de
 fiind $v =$
 $u_3 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$
 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$
 formind acest

$$3x_3 + x_4 + 5x_4$$

scă rela-

izeze indi-

$$d) f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_1x_5 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_2x_5 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5;$$

$$e) f(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_1x_n + x_2x_3 + \dots + x_2x_n + \dots + x_{n-1}x_n.$$

7. Aplicind metoda transformării ortogonale, să se aducă la forma canonică următoarele forme pătratice:

- a) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3;$
- b) $f(x) = 5x_1^2 + 6x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3;$
- c) $f(x) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 11x_3^2 - 20x_1x_2 + 4x_1x_3 + 16x_2x_3;$
- d) $f(x) = 4x_1x_2 - x_3^2;$
- e) $f(x) = 2x_2^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3;$
- f) $f(x) = 5x_1^2 + 7x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3;$
- g) $f(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_2x_3;$
- h) $f(x) = 8x_1x_2 + 6x_2^2 + x_3^2;$
- i) $f(x) = x_2^2 - x_3^2 + 2\sqrt{3}x_2x_3;$
- j) $f(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_3.$

3. ALGEBRĂ VECTORIALĂ

1. **Vectori.** Un segment orientat \overrightarrow{AB} , $A \neq B$, este caracterizat prin noțiunile geometrice: direcție, sens, mărime (lungime). Două segmente orientate \overrightarrow{AB} și \overrightarrow{CD} sînt echipolente ($\overrightarrow{AB} \rho \overrightarrow{CD}$) dacă au aceeași direcție, același sens și aceeași lungime. Numim vector v caracterizat de un segment orientat \overrightarrow{AB} mulțimea segmentelor orientate echipolente cu \overrightarrow{AB} : $v = \{\overrightarrow{CD} \mid \overrightarrow{AB} \rho \overrightarrow{CD}\}$. Doi vectori sînt egali dacă au aceeași direcție, același sens și aceeași lungime.

Un vector de lungime unu se numește versor sau vector unitar. Un vector de lungime egală cu zero se numește vector nul. Opusul unui vector v este un vector, $-v$, care are aceeași direcție și lungime cu v , dar sensul este opus celui al lui v .

Notăm prin \mathcal{M} mulțimea vectorilor din spațiu.

2. **Adunarea vectorilor.** Fie $v_1 = \overrightarrow{AB}$ și $v_2 = \overrightarrow{BC}$. Se numește suma vectorilor v_1 și v_2 vectorul notat prin $v_1 + v_2$ cu reprezentantul $v_1 + v_2 = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Prin diferența vectorilor v_1 și v_2 în această ordine se înțelege vectorul $v_1 - v_2 = v_1 + (-v_2)$.

3. **Înmulțirea unui vector cu un scalar.** Se numește produsul vectorului $v \in \mathcal{M}$, $v \neq 0$, cu scalarul $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, vectorul notat λv care are aceeași direcție cu v , are același sens cu v dacă $\lambda > 0$ și sens opus dacă $\lambda < 0$ și lungimea $|\lambda v| = |\lambda| \cdot |v|$. Dacă $\lambda = 0$ sau $v = 0$, atunci $\lambda v = 0$.

Mulțimea \mathcal{M} formează spațiu vectorial în raport cu cele două operații definite mai înainte.

Versorul unui vector $v \neq 0$ este dat de $v^0 = \frac{v}{|v|}$.

Doi vectori sînt coliniari dacă au aceeași direcție: $v_1 = kv_2$. Doi vectori sînt liniar dependenți dacă și numai dacă sînt coliniari.

Trei sau mai mulți vectori sînt coplanari dacă reprezentanții lor printr-un același punct din spațiu sînt situați în același plan. O condiție necesară și suficientă ca trei vectori $v_1, v_2, v_3 \in \mathcal{M}$ să fie coplanari este ca ei să fie liniar dependenți. Condiția de coplanaritate a trei vectori v_1, v_2, v_3 se scrie $v_3 = \lambda v_1 + \mu v_2$.

4. **Produsul scalar a doi vectori.** Se numește produsul scalar a doi vectori nenuli $v_1, v_2 \in \mathcal{M}$ scalarul real $v_1 \cdot v_2$ dat de

$$v_1 \cdot v_2 = |v_1| \cdot |v_2| \cos \theta, \quad \theta = \angle(v_1, v_2).$$

Dacă $v_1 = 0$ sau $v_2 = 0$, atunci $v_1 \cdot v_2 = 0$.

Proprietăți. a) $v \cdot v = |v|^2 > 0$, $\forall v \in \mathcal{M}$, $v \neq 0$ și $v \cdot v = 0 \Rightarrow v = 0$; b) $v_1 \cdot v_2 = v_2 \cdot v_1$; c) $v_1 \cdot (v_2 + v_3) = v_1 \cdot v_2 + v_1 \cdot v_3$; d) $(\lambda v_1) \cdot v_2 = \lambda(v_1 \cdot v_2)$; e) $v_1 \cdot v_2 = 0 \Leftrightarrow v_1 \perp v_2$; f) $\text{pr}_{v_1} v_2 = \frac{v_1 \cdot v_2}{|v_1|^2} \cdot v_1$, $v_1 \neq 0$; g) $\text{pr}_{v_1}^0 v_2 = v_2 \cdot v_1^0$. Dacă vectorii unei baze din \mathcal{M} sînt de mărime unitate și ortogonali doi cîte doi, acea bază se va numi ortonormată.

Fie $\mathcal{B} = \{i, j, k\}$ baza canonică a produsului s...

În particular, r...

5. **Produsul vectorial**
 luați în această ordi
 minat de vectorii v_1
 lui $v_1 \times v_2$ este astfe
 pe planul determina
 acelor de ceasornic,
 rului v_2). Dacă v_1 ...

Mărima produ
 vectori ca laturi.

Proprietăți. a) $v_1 \times (v_2 \times v_3) = (v_1 \cdot v_3)v_2 - (v_1 \cdot v_2)v_3$; e) $v \times v = 0$

Dacă $\mathcal{B} = \{i, j, k\}$ baza canonică a...

6. **Produsul mixt**
 ordine, se înțelege

Produsul mixt a tr
 cei trei vectori ca

Proprietăți. a) $(\lambda v_1, v_2, v_3) = \lambda(v_1, v_2, v_3)$

Fiind dați vec
 expresia analitică

Volumul paralelipi

O condiție ne

Fie $\mathcal{B} = \{i, j, k\}$ o bază ortonormată. Dacă $v_i = x_i i + y_i j + z_i k$, $i = 1, 2$, atunci expresia analitică a produsului scalar este

$$v_1 \cdot v_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

În particular, mărimea unui vector este $v_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}$.

5. **Produsul vectorial a doi vectori.** Numim produs vectorial al vectorilor nenuli $v_1, v_2 \in \mathcal{M}$, luați în această ordine, vectorul notat $v_1 \times v_2$ pentru care: a) direcția este ortogonală planului determinat de vectorii v_1 și v_2 ; b) lungimea este $|v_1 \times v_2| = v_1 v_2 \sin \theta$, $0 \leq \theta = \angle(v_1, v_2) < \pi$; c) sensul lui $v_1 \times v_2$ este astfel că triedrul $\{v_1, v_2, v_1 \times v_2\}$ este orientat drept (un observator situat perpendicular pe planul determinat de v_1 și v_2 , în sensul vectorului $v_1 \times v_2$, să poată roti vectorul v_1 în sens invers acelor de ceasornic, de unghi mai mic decât π , astfel încît versorul său să coincidă cu versorul vectorului v_2). Dacă $v_1 = 0$ sau $v_2 = 0$, atunci $v_1 \times v_2 = 0$.

Mărimea produsului vectorial $|v_1 \times v_2|$ reprezintă aria paralelogramului construit pe cei doi vectori ca laturi.

Proprietăți. a) $v \times v = 0$; b) $v_1 \times v_2 = 0 \Leftrightarrow v_1 = k v_2$; c) $v_1 \times v_2 = -v_2 \times v_1$; d) $(\lambda v_1) \times v_2 = \lambda(v_1 \times v_2)$; e) $v_1 \times (v_2 + v_3) = v_1 \times v_2 + v_1 \times v_3$.

Dacă $\mathcal{B} = \{i, j, k\}$ este o bază ortonormată în spațiu și $v_i = x_i i + y_i j + z_i k$, $i = 1, 2$, atunci expresia analitică a produsului vectorial este

$$v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

6. **Produsul mixt a trei vectori.** Prin produsul mixt al vectorilor $v_1, v_2, v_3 \in \mathcal{M}$, luați în această ordine, se înțelege scalarul, notat (v_1, v_2, v_3) , dat de

$$(v_1, v_2, v_3) = (v_1 \times v_2) \cdot v_3.$$

Produsul mixt a trei vectori reprezintă, în valoare absolută, volumul paralelipipedului construit pe cei trei vectori ca muchii.

Proprietăți. a) $(v_1, v_2, v_3) = (v_2, v_3, v_1) = (v_3, v_1, v_2)$; b) $(v_1, v_2, v_3) = - (v_2, v_1, v_3)$; c) $(\lambda v_1, v_2, v_3) = \lambda(v_1, v_2, v_3)$.

Fiind dați vectorii $v_i = x_i i + y_i j + z_i k$, $i = 1, 2, 3$, față de o bază ortonormată $\mathcal{B} = \{i, j, k\}$, expresia analitică a produsului mixt este

$$(v_1, v_2, v_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Volumul paralelipipedului construit pe vectorii v_1, v_2, v_3 este

$$V = \pm \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

O condiție necesară și suficientă ca trei vectori v_1, v_2 și v_3 să fie coplanari este ca

$$(v_1, v_2, v_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

7. Produsul dublu vectorial a trei vectori. Fie $v_1, v_2, v_3 \in \mathcal{M}$. Produsul dublu vectorial al vectorilor v_1, v_2, v_3 , luați în această ordine, este vectorul $v_1 \times (v_2 \times v_3)$. Are loc formula

$$v_1 \times (v_2 \times v_3) = (v_1 \cdot v_3)v_2 - (v_1 \cdot v_2)v_3.$$

8. Repere carteziene ortonormate. Un reper cartezian ortonormat în spațiu este figura formată dintr-un punct O din spațiu, origine, și o bază ortonormată. Se notează $\mathcal{R} = \{O, i, j, k\}$.

Fie $\mathcal{R} = \{O, i, j, k\}$ un reper cartezian. Vectorul de poziție al unui punct M din spațiu, față de reperul \mathcal{R} , este vectorul $r_M = \overrightarrow{OM}$. Coordonatele vectorului de poziție r_M față de baza i, j, k se numesc coordonatele punctului M . Dacă $r_M = xi + yj + zk$, atunci scriem $M(x, y, z)$.

Fie $\mathcal{R} = \{O, i, j, k\}$ și $\mathcal{R}' = \{O', i', j', k'\}$ două repere ortonormate și fie $O'(x_0, y_0, z_0)$ față de reperul \mathcal{R} . Dacă x, y, z și x', y', z' sînt coordonatele aceluiași punct față de cele două repere și dacă legătura dintre bazele $\{i, j, k\}$ și $\{i', j', k'\}$ este

$$i' = a_{11}i + a_{12}j + a_{13}k, \quad j' = a_{21}i + a_{22}j + a_{23}k, \quad k' = a_{31}i + a_{32}j + a_{33}k,$$

atunci

$$x = x_0 + a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z', \quad y = y_0 + a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z', \quad z = z_0 + a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z'.$$

Dacă $O \equiv O'$, atunci $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ și relațiile de mai sus exprimă schimbarea coordonatelor la o rotație a reperului. Dacă $a_{ii} = \delta_{ii}$, $i, j = 1, 2, 3$, atunci aceleași relații exprimă schimbarea coordonatelor la o translație.

În particular, la o translație în plan avem $x = x_0 + x'$, $y = y_0 + y'$, iar la o rotație de unghi α a axelor unui reper plan avem

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \quad y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha.$$

○ schimbare generală de reper în plan este caracterizată prin

$$x = x_0 + x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \quad y = y_0 + x' \sin \alpha + y' \cos \alpha.$$

9. Aplicații. a) Aria triunghiului de vîrfuri $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$, este dată de

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}| = \frac{1}{2} |(r_2 - r_1) \times (r_3 - r_1)| = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2 \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

b) Volumul tetraedrului de vîrfuri $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, este dat de

$$V = \pm \frac{1}{6} (\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M_4}) = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

c) Condiția necesară și suficientă ca patru puncte $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, să fie coplanare este ca

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

d) Coordonatele un

1. Să se arate c
necesar și suficient

Rezolvare. Fiind c

Invers, dacă vectorii a
relația anterioară obțin
triunghi.

2. Fie a, b, c v
ajutorul lor vectori
pot forma un triu

Rezolvare. Ipoteza
determinarea vectorilor
exercițiul precedent. A

$$\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC'} = b$$

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'} = c$$

$$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB'} = a$$

Deoarece $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'}$
zultă că vectorii medii

3. Fie vectorii
și c sînt necoplanari
descompunerii ast

Rezolvare. a) Rela

Deoarece vectorii a, b
 $n_1 = n_2, p_1 = p_2$.

b) Relația de c

Deoarece a, b, c sînt

Prin urmare, pentr
punerii lor după trei

4. Se cunoaște
nari a, b, c: v_1
cerceteze coplanar

Rezolvare. Trebu

+ $\lambda_3 v_3 = 0$ este ech
Deoarece a, b și c sînt

d) Coordonatele unui punct M care împarte segmentul M_1M_2 în raportul λ , $\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda$, sînt

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Probleme rezolvate

1. Să se arate că pentru ca trei vectori a, b, c să închidă un triunghi este necesar și suficient ca $a + b + c = 0$.

Rezolvare. Fiind dat triunghiul ABC , avem $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = 0$, adică $a + b + c = 0$. Invers, dacă vectorii a, b, c satisfac relația $a + b + c = 0$, atunci luînd $a = \vec{BC}$ și $b = \vec{CA}$, din relația anterioară obținem $c = -a - b = \vec{CB} + \vec{AC} = \vec{AB}$. Prin urmare, vectorii a, b, c închid un triunghi.

2. Fie a, b, c vectorii ce coincid cu laturile unui triunghi. Să se exprime cu ajutorul lor vectorii ce coincid cu medianele triunghiului și să se arate că aceștia pot forma un triunghi.

Rezolvare. Ipoteza arată că $a + b + c = 0$. Pentru determinarea vectorilor ce coincid cu medianele folosim exercițiul precedent. Astfel, din $\triangle ACC'$ (fig. 1):

$$\vec{CC'} = \vec{CA} + \vec{AC'} = b + c/2; \text{ din } \triangle AA'B:$$

$$\vec{AA'} = \vec{AB} + \vec{BA'} = c + a/2; \text{ din } \triangle BB'C:$$

$$\vec{BB'} = \vec{BC} + \vec{CB'} = a + b/2.$$

Deoarece $\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} = 1,5(a + b + c) = 0$, rezultă că vectorii mediană închid un triunghi.

3. Fie vectorii $v_1 = m_1a + n_1b + p_1c$ și $v_2 = m_2a + n_2b + p_2c$, unde a, b și c sînt necoplanari. Să se determine relațiile ce trebuie să existe între coeficienții descompunerii astfel încît: a) $v_1 = v_2$; b) $v_1 = \lambda v_2$.

Rezolvare. a) Relația $v_1 = v_2$ este echivalentă cu $(m_1 - m_2)a + (n_1 - n_2)b + (p_1 - p_2)c = 0$. Deoarece vectorii a, b, c sînt necoplanari (liniar independenți), relația anterioară implică $m_1 = m_2$, $n_1 = n_2$, $p_1 = p_2$.

b) Relația de coliniaritate $v_1 = \lambda v_2$ implică $(m_1 - \lambda m_2)a + (n_1 - \lambda n_2)b + (p_1 - \lambda p_2)c = 0$. Deoarece a, b, c sînt necoplanari această relație implică $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} = \lambda$.

Prin urmare, pentru ca doi vectori să fie coliniari este necesar și suficient să aibă coeficienții descompunerii lor după trei vectori necoplanari proporționali.

4. Se cunoaște descompunerea vectorilor v_1, v_2 și v_3 după trei vectori necoplanari a, b, c : $v_1 = 2a - b - c$; $v_2 = -a + 2b - c$, $v_3 = -a - b + 2c$. Să se cerceteze coplanaritatea vectorilor.

Rezolvare. Trebuie să cercetăm dependența liniară a vectorilor v_1, v_2, v_3 . Relația $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$ este echivalentă cu $(2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)a + (-\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3)b + (-\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3)c = 0$. Deoarece a, b și c sînt necoplanari, această relație implică $2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0$, $-\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0$.

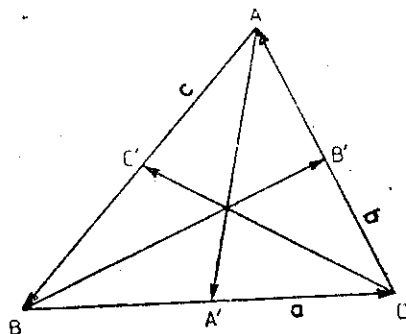


Fig. 1

$-\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0$. Acest sistem omogen are un sistem fundamental de soluții format numai dintr-o singură soluție (rangul sistemului este doi), anume $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Deci vectorii sînt coplanari și relația de coplanaritate este $v_1 + v_2 + v_3 = 0$ sau $v_3 = -v_1 - v_2$.

5. Să se descompună vectorul $v = a + b + c$ după trei vectori necoplanari $v_1 = a + b - 2c$, $v_2 = a - b$, $v_3 = 2b + 3c$, știind că vectorii a, b, c sînt necoplanari.

Rezolvare. Procedind ca la exercițiul precedent, se poate verifica faptul că v_1, v_2, v_3 sînt liniar independenți. Trebuie să avem $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$. Înlocuind expresiile vectorilor în această relație și ținînd seama că a, b, c sînt liniar independenți, obținem pentru determinarea coeficienților $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ următorul sistem: $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 1$, $-2\lambda_1 + 3\lambda_3 = 1$. Soluția acestui sistem este $\lambda_1 = \frac{2}{5}$, $\lambda_2 = \frac{3}{5}$, $\lambda_3 = \frac{3}{5}$, astfel că $v = (2v_1 + 3v_2 + 3v_3)/5$.

6. Să se determine $\lambda \in \mathbb{R}$ în așa fel ca vectorii $v_1 = 2i + (\lambda + 2)j + 3k$, $v_2 = i + \lambda j - k$, $v_3 = 4j + 2k$ să fie coplanari. Pentru λ astfel determinat să se descompună vectorul v_1 după direcțiile vectorilor v_2 și v_3 .

Rezolvare. Pentru ca relația $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$ să aibă loc cu măcar unul din $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ nenul, trebuie ca sistemul $2\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, $(\lambda + 2)\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 = 0$, $3\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0$ să aibă soluții nebanale. Pentru aceasta este necesar și suficient ca determinantul sistemului omogen să fie egal cu zero. Din această condiție obținem $\lambda = -8$. Scriem acum $v_1 = \alpha v_2 + \beta v_3$, relație echivalentă cu sistemul $\alpha = 2$, $-8\alpha + 4\beta = -6$, $-\alpha + 2\beta = 3$. Soluția acestui sistem este $\alpha = 2$, $\beta = \frac{5}{2}$, astfel că $v_1 = 2v_2 + \frac{5}{2}v_3$.

7. Să se calculeze scalarul $v_1 \cdot v_2 + 2v_2 \cdot v_3 + 3v_3 \cdot v_1$, știind că $v_1 = 3a - b$, $v_2 = a + 3b$ și $v_3 = a - b$, iar $a^2 = 9$, $b^2 = 3$ și $\angle(a, b) = \frac{\pi}{3}$.

Rezolvare. Avem $a \cdot b = a \cdot b \cos \angle(a, b) = \sqrt{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Apoi $v_1 \cdot v_2 = (3a - b) \cdot (a + 3b) = 3a^2 + 8a \cdot b - 3b^2 = 27 + 12\sqrt{3} - 9 = 18 + 12\sqrt{3}$. Similar obținem $v_2 \cdot v_3 = 3\sqrt{3}$ și $v_3 \cdot v_1 = 30 - 6\sqrt{3}$, astfel că $v_1 \cdot v_2 + 2v_2 \cdot v_3 + 3v_3 \cdot v_1 = 108$.

8. Să se determine $\lambda \in \mathbb{R}$ în așa fel încît vectorii $v_1 = i + 2\lambda j - (\lambda - 1)k$ și $v_2 = (3 - \lambda)i + j + 3k$ să fie perpendiculari.

Rezolvare. Condiția de ortogonalitate $v_1 \cdot v_2 = 0$ cere ca $1 \cdot (3 - \lambda) + 2\lambda \cdot 1 - (\lambda - 1) \cdot 3 = 0$, de unde $\lambda = 3$.

9. Să se calculeze proiecțiile vectorilor $v_1 = 2i - 3j$ și $v_2 = -i + 4j$ pe vectorii reprezentînd suma și diferența lor.

Rezolvare. Obținem $s = v_1 + v_2 = i + j$ și $d = v_1 - v_2 = 3i - 7j$. Prin urmare, $\text{pr}_s v_1 = \frac{v_1 \cdot s}{s} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\text{pr}_s v_2 = \frac{v_2 \cdot s}{s} = \frac{3}{\sqrt{2}}$, $\text{pr}_d v_1 = \frac{v_1 \cdot d}{d} = \frac{27}{\sqrt{58}}$ și $\text{pr}_d v_2 = \frac{v_2 \cdot d}{d} = -\frac{31}{\sqrt{58}}$.

10. Cunoscînd

$$\vec{BC} = i + 7j,$$

Rezolvare. Fo

$$= \frac{0}{\sqrt{40}\sqrt{10}} = \text{arc cos } \frac{1}{\sqrt{5}}$$

11. Să se c

$$v_2 = 2, -v_3 = \dots$$

Rezolvare. Dec

$$v_1 \cdot v_3 = 1, v_2 \cdot v_3 = \dots$$

12. Să se ca este perpendicular

$$= -a + 3b.$$

Rezolvare. Di

$$\cos \angle a, b = \frac{a \cdot b}{|a| |b|}$$

13. Să se ca

Rezolvare. Ob zintă lungimile di aria paralelogramu leogramului.

14. Fie vcc dusul lor vecto și $v_2 : c$) aria

Rezolvare. a)

$$b) v_1 \cdot (v_1 \times v_2)$$

$$c) A = |v_1 \times v_2|$$

15. Să se c

$$\text{și } v_2 = a - 3b$$

Rezolvare. Av

$$= 5b \cdot a \sin \angle(a, b)$$

10. Cunoscând vectorii care formează laturile unui triunghi: $\vec{AB} = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$, $\vec{BC} = \mathbf{i} + 7\mathbf{j}$, $\vec{CA} = -3\mathbf{i} - \mathbf{j}$, să se determine unghiurile acestui triunghi.

Rezolvare. Folosim formula $\cos \angle (v_1, v_2) = \frac{v_1 \cdot v_2}{|v_1| \cdot |v_2|}$. Obținem $\cos \angle A = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{0}{\sqrt{40} \sqrt{10}} = 0$, astfel că $\angle A = \frac{\pi}{2}$. Similar obținem $\angle B = \arccos \frac{2}{\sqrt{5}}$ și $\angle C = \arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$.

11. Să se determine lungimea vectorului $v = v_1 - v_2 + v_3$, știind că $v_1 = \mathbf{i}$, $v_2 = 2\mathbf{j}$, $v_3 = \sqrt{2}\mathbf{k}$ și $\angle(v_1, v_2) = \frac{\pi}{6}$, $\angle(v_1, v_3) = \frac{\pi}{4}$, $\angle(v_2, v_3) = \frac{\pi}{3}$.

Rezolvare. Deoarece $v^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - 2v_1 \cdot v_2 + 2v_1 \cdot v_3 - 2v_2 \cdot v_3$ și $v_1 \cdot v_2 = v_1 \cdot v_2 \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$, $v_1 \cdot v_3 = 1$, $v_2 \cdot v_3 = \sqrt{2}$, deducem că $v = \sqrt{9 - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}$.

12. Să se calculeze unghiul dintre vectorii \mathbf{a} și \mathbf{b} , știind că vectorul $v_1 = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ este perpendicular pe $v_2 = 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ și $v_3 = 3\mathbf{a} + \mathbf{b}$ este perpendicular pe $v_4 = -\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$.

Rezolvare. Din condițiile $v_1 \cdot v_2 = 0$ și $v_3 \cdot v_4 = 0$, obținem $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{a^2}{9}$ și $b^2 = \frac{19}{27} a^2$. Deci $\cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{a \cdot b} = \frac{1}{\sqrt{57}}$, astfel că $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \arccos \frac{1}{\sqrt{57}}$.

13. Să se calculeze $(v_1 + v_2) \times (v_1 - v_2)$ și să se interpreteze geometric rezultatul.

Rezolvare. Obținem $(v_1 + v_2) \times (v_1 - v_2) = 2v_2 \times v_1$. Deoarece $|v_1 + v_2|$ și $|v_1 - v_2|$ reprezintă lungimile diagonalelor paralelogramului construit pe v_1 și v_2 ca laturi, rezultă interpretarea: aria paralelogramului construit cu vectorii diagonale ale unui paralelogram este de două ori aria paralelogramului.

14. Fie vectorii $v_1 = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ și $v_2 = \mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$. Să se calculeze: a) produsul lor vectorial; b) să se verifice că vectorul $v_1 \times v_2$ este perpendicular pe v_1 și v_2 ; c) aria paralelogramului construit pe v_1 și v_2 .

Rezolvare. a) $v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} + 11\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$.

b) $v_1 \cdot (v_1 \times v_2) = -3 + 11 - 8 = 0$; $v_2 \cdot (v_1 \times v_2) = -1 - 11 + 12 = 0$.

c) $\mathcal{A} = |v_1 \times v_2| = \sqrt{1 + 121 + 16} = \sqrt{138}$.

15. Să se calculeze aria paralelogramului construit pe vectorii $v_1 = \mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ și $v_2 = \mathbf{a} - 3\mathbf{b}$, unde $a = 5$, $b = 3$ și $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\pi}{6}$.

Rezolvare. Avem $v_1 \times v_2 = (\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - 3\mathbf{b}) = 5\mathbf{b} \times \mathbf{a}$, astfel că $|v_1 \times v_2| = 5|b \times a| = 5b \cdot a \sin \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{75}{2}$. Prin urmare, aria paralelogramului este $\frac{75}{2}$.

16. Pentru ce valori ale parametrului $\lambda \in \mathbf{R}$, vectorii $\mathbf{v}_1 = \lambda \mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ și $\mathbf{v}_2 = \mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ sînt coliniari, \mathbf{a} și \mathbf{b} fiind necoliniari?

Rezolvare. Punem condiția ca $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ astfel că $(3 + 2\lambda)\mathbf{b} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$. Deoarece \mathbf{a} și \mathbf{b} sînt necoliniari rezultă că $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Prin urmare, $3 + 2\lambda = 0$ și deci $\lambda = -\frac{3}{2}$.

17. Cunoscînd două laturi $\vec{AB} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ și $\vec{BC} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ ale unui triunghi, să se calculeze lungimea înălțimii sale \vec{CD} .

Rezolvare: Aria $\Delta ABC = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{BC}| = \frac{1}{2} |\vec{AB}| \cdot |\vec{CD}|$, astfel că $|\vec{CD}| = \frac{|\vec{AB} \times \vec{BC}|}{|\vec{AB}|} = \frac{19}{5}$.

18. Dacă \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} coincid cu laturile unui triunghi, să se arate că $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$.

Rezolvare. Deoarece \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} coincid cu laturile unui triunghi, avem $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$. Înmulțind vectorial această relație cu \mathbf{a} obținem $\mathbf{b} \times \mathbf{a} + \mathbf{c} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$, adică $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$. Înmulțind vectorial cu \mathbf{b} , rezultă $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$.

19. Să se determine $\lambda \in \mathbf{R}$, astfel ca volumul paralelipipedului construit pe vectorii $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ și $\mathbf{v}_3 = \lambda\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ să fie egal cu 5.

Rezolvare. Volumul paralelipipedului construit pe cei trei vectori este

$$V = \pm \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ \lambda & 2 & 0 \end{vmatrix} = \pm (10 + 5\lambda).$$

Ecuatia $(10 + 5\lambda) = \pm 5$ are soluțiile $\lambda_1 = -1$ și $\lambda_2 = -3$.

20. Să se calculeze înălțimea paralelipipedului construit pe vectorii $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$, luînd ca bază paralelogramul construit pe vectorii \mathbf{v}_1 și \mathbf{v}_2 , știind că $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_2 = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_3 = -\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

Rezolvare. Volumul paralelipipedului este

$$V = \pm \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 7;$$

aria bazei este $\mathcal{A} = |\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2| = \sqrt{35}$. Prin urmare, înălțimea este $h = \frac{V}{\mathcal{A}} = \frac{7}{\sqrt{35}}$.

21. Să se cerceteze coplanaritatea vectorilor $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$. Să se determine relația de coplanaritate dacă este cazul.

Rezolvare: Deoarece $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 5 \\ 1 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 0$, vectorii sînt coplanari. Deoarece \mathbf{v}_1

și \mathbf{v}_2 nu sînt coliniari, putem scrie $\mathbf{v}_3 = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2$ relație ce este echivalentă cu sistemul $\alpha + 2\beta = 1$, $2\alpha - 2\beta = -4$, $-\alpha + 5\beta = 6$. Soluția sistemului este $\alpha = -1$, $\beta = 1$ și deci $\mathbf{v}_3 = -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.

22. Să se determine volumul paralelipipedului construit pe vectorii $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a} - 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{v}_2 = 3\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 2\mathbf{c}$, $\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{a} + 7\mathbf{b} - 4\mathbf{c}$, știind că $\mathbf{a} = 3$, $\mathbf{b} = \sqrt{2}$.

$\mathbf{c} = 1$, $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b}, \mathbf{c}) =$

vectorii \mathbf{b} și \mathbf{c} a

Rezolvare. Trebuie să se calculeze $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ și să se verifice dacă este mixt, obținem

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = (11\mathbf{a} \times \mathbf{b} - \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \dots)$$

Dar $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a})$

23. Să se verifice dacă vectorii $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ sînt coplanari.

Rezolvare. Deoarece

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) \mathbf{v}_3 + (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3) \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3) \mathbf{v}_2 + (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

24. În ce cazuri sînt coplanari vectorii $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$?

Rezolvare. Trebuie să se calculeze $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ și să se verifice dacă aceasta este egală cu zero.

25. Se dau vectorii $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Este verificată condiția $(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \times \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$?

Rezolvare. $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \mathbf{j} - \mathbf{k}$

$$(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \times \mathbf{v}_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Nu este verificată.

26. Fie vectorii $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Să se verifice dacă sînt coplanari.

Să se verifice dacă sînt coplanari vectorii $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

a) $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \delta$. Să se calculeze $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$.
Rezolvare. a) Să se calculeze $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ și să se verifice dacă este egală cu zero.

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \delta$$

$c = 1$, $\angle(b, c) = \frac{\pi}{6}$, iar unghiul format de vectorul a și planul determinat de vectorii b și c are măsura $\frac{\pi}{4}$.

Rezolvare. Trebuie să calculăm produsul mixt al celor trei vectori. Folosind proprietățile produsului mixt, obținem

$$\begin{aligned} (v_1, v_2, v_3) &= (v_1 \times v_2) \cdot v_3 = [(a - 2b + c) \times (3a + 5b - 2c)] \cdot (2a + 7b - 4c) = \\ &= (11a \times b - b \times c - 5a \times c) \cdot (2a + 7b - 4c) = -44(a, b, c) - 2(b, c, a) - 35(a, c, b) = \\ &= -11(a, b, c). \end{aligned}$$

Dar $(a, b, c) = (b, c, a) = (b \times c) \cdot a = |b \times c| \cdot a \cos \frac{\pi}{4} = bca \cdot \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}$, astfel că $V = \frac{33}{2}$.

23. Să se verifice formula de dezvoltare a dublului produs vectorial pentru vectorii $v_1 = i + 2j - k$, $v_2 = 2i - 3j$, $v_3 = 3i + k$.

Rezolvare. Deoarece $v_2 \times v_3 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3i - 2j + 9k$, avem $v_1 \times (v_2 \times v_3) =$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 9 \end{vmatrix} = 16i - 6j + 4k. \text{ Pe de altă parte, } v_1 \cdot v_2 = 2 \text{ și } v_1 \cdot v_3 = -4, \text{ arată că } \\ = (v_1 \cdot v_2)v_3 + (v_1 \cdot v_3)v_2 = 2(2i - 3j) + 4(3i + k) = 16i - 6j + 4k. \text{ Aceasta arată că } v_1 \times (v_2 \times v_3) = \\ = (v_1 \cdot v_3)v_2 - (v_1 \cdot v_2)v_3.$$

24. În ce caz vectorul $v_1 \times (v_2 \times v_3)$ este colinar cu vectorul $v_2 - v_3$?

Rezolvare. Trebuie ca produsul vectorial al celor doi vectori să fie zero. Dar $[v_1 \times (v_2 \times v_3)] \times (v_2 - v_3) = [(v_1 \cdot v_3)v_2 - (v_1 \cdot v_2)v_3] \times (v_2 - v_3) = (v_1 \cdot v_2 - v_1 \cdot v_3)v_2 \times v_3 = [v_1 \cdot (v_2 - v_3)](v_2 \times v_3)$ și aceasta este egală cu zero dacă v_1 este perpendicular pe $v_2 - v_3$ sau dacă vectorii v_2 și v_3 sînt colinari.

25. Se dau vectorii $v_1 = i + j - k$, $v_2 = 2i - 3j - k$ și $v_3 = i + 2j + 3k$. Este verificată egalitatea $v_1 \times (v_2 \times v_3) = (v_1 \times v_2) \times v_3$?

Rezolvare. $v_1 \times (v_2 \times v_3) = v_1 \times \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = 0$, în timp ce

$$(v_1 \times v_2) \times v_3 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} \times v_3 = \begin{vmatrix} 1 & j & k \\ -4 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 7i + 7j - 7k.$$

Nu este verificată.

26. Fie vectorii v'_1, v'_2, v'_3 reciprocii vectorilor v_1, v_2, v_3 definiți prin

$$v'_1 = \frac{v_2 \times v_3}{(v_1, v_2, v_3)}, \quad v'_2 = \frac{v_3 \times v_1}{(v_1, v_2, v_3)}, \quad v'_3 = \frac{v_1 \times v_2}{(v_1, v_2, v_3)}.$$

Să se verifice identitățile:

a) $v_i \cdot v'_j = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$; b) $(v_1 + v_2 + v_3) \cdot (v'_1 + v'_2 + v'_3) = 3$.

Să se calculeze reciprocii vectorilor $v_1 = -2i + j + 2k$, $v_2 = 5i - 3j + 9k$, $v_3 = 9i + 4j + 2k$ și să se verifice identitățile de mai sus pentru acest caz.

Rezolvare. a) Să verificăm pentru $i = j = 1$ și pentru $i = 1, j = 2$. Similar se procedează pentru celelalte valori. Avem

$$v_1 \cdot v'_1 = v_1 \cdot \frac{v_2 \times v_3}{(v_1, v_2, v_3)} = \frac{(v_2, v_3, v_1)}{(v_1, v_2, v_3)} = 1, \quad v_1 \cdot v'_2 = \frac{v_1 \cdot (v_3 \times v_1)}{(v_1, v_2, v_3)} = 0.$$

b) În baza rezultatelor de la punctul a) avem

$$(v_1 + v_2 + v_3) \cdot (v_1' + v_2' + v_3') = v_1 \cdot v_1' + v_2 \cdot v_2' + v_3 \cdot v_3' = 3.$$

În sfârșit, prin calcul obținem $(v_1, v_2, v_3) = 249$, astfel că $v_1' = (-42i + 71j + 47k)/249$, $v_2' = (6i - 22j + 17k)/249$, $v_3' = (15i + 28j + k)/249$.
Se verifică ușor relațiile a) și b).

27. Să se rezolve ecuația vectorială $v \times a = b$, știind că $a = i + 2j - k$ și $b = 2i + j + 4k$, iar v este perpendicular pe vectorul $c = i + j + k$.

Rezolvare. Căutăm $v = xi + yj + zk$. Din condițiile $v \times a = b$ și $v \cdot c = 0$ obținem pentru determinarea necunoscutelor x, y, z sistemul $-y - 2z = 2, x + z = 1, 2x - y = 4, x + y + z = 0$.

Soluția sistemului este $x = \frac{3}{2}, y = -1, z = -\frac{1}{2}$. Deci $v = \frac{3}{2}i - j - \frac{1}{2}k$.

28. Să se rezolve ecuația vectorială $v \times (v \times a) = b$, unde a și b sînt necoliniari.

Rezolvare. Ecuația se scrie $(v \cdot a)v - (v \cdot v)a = b$, relație ce arată că vectorii a, b și v sînt coplanari. Prin urmare, $v = \lambda a + \mu b$. Înlocuind această relație în ecuația de mai sus, obținem pentru determinarea coeficienților λ și μ următorul sistem:

$$\lambda\mu = b^2/(a \times b)^2, \mu^2 = -(a \cdot b)/(a \times b)^2.$$

29. Se consideră punctele A, B, C, O' ale căror coordonate față de reperul $(\mathcal{Q} = \{O, i, j, k\})$ sînt $A(-2, 3, 5), B(4, 8, -3), C(6, -1, 1), O'(4, 3, 1)$. Să se determine coordonatele punctelor A, B și C față de reperul $(\mathcal{Q}' = \{O', i', j', k'\})$ știind că matricea trecerii de la baza $\{i, j, k\}$ la baza $\{i', j', k'\}$ este

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rezolvare. Legătura dintre coordonatele unui punct față de cele două repere este $x = 4 + (2x' + y' - 2z')/3, y = 3 + (x' + 2y' + 2z')/3, z = 1 + (2x' - 2y' + z')/3$. Înlocuind x, y, z prin coordonatele punctului A , obținem $x' = -\frac{4}{3}, y' = -\frac{14}{3}, z' = \frac{16}{3}$. Deci față de reperul \mathcal{Q}' avem $A\left(-\frac{4}{3}, -\frac{14}{3}, \frac{16}{3}\right)$. Similar obținem $B(-1, 6, 2)$ și $C(0, -2, -4)$.

30. Ce devine ecuația $x^2 - y^2 - 2x - 2y - 1 = 0$ cînd se transportă axele în punctul $O'(1, -1)$, iar axa $O'x'$ face cu Ox un unghi de 45° ?

Rezolvare. Legătura între coordonatele față de cele două repere este $x = 1 + (x' - y')/\sqrt{2}, y = -1 + (x' + y')/\sqrt{2}$. Înlocuind acestea în ecuația dată, obținem $2x'y' + 1 = 0$.

31. Să se determine aria triunghiului ABC , știind că $A(1, -1, 2), B(-3, 0, 5)$ și $C(2, 1, 2)$.

$$\text{Rezolvare. } \mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} |-6i + 3j - 9k| = \frac{3}{2} \sqrt{14}$$

32. Să se calculeze volumul tetraedrului de vîrfuri $A(0, 6, 4), B(3, 5, 3), C(-2, 11, -5), D(1, -1, 4)$.

$$\text{Rezolvare. } V = \pm \frac{1}{6} (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 5 & -9 \\ 1 & -7 & 0 \end{vmatrix} = \frac{63}{2}$$

33. Para
surile direct

Rezolvare.

34. Se dau
 $v_1 = i - j + k$
 $= 4v_1 + 3v_2$

35. Ce leg
 $s = v_1 + v_2$

36. Se dă
este centrul

37. Fie A
cerc de centru
 $+ \overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{IO}$

38. Să se

a) $v_1 = k$
b) $v_1 = i$

39. Să se

a) $M_1(2, 1, 1)$
b) $M_1(1, 1, 1)$
c) $M_1(-1, 1, 1)$

40. Cuno
nari a, b, c ,
să se scrie și

a) $v_1 = c$
b) $v_1 = a$
c) $v_1 = b$

41. Să se
 $+ \lambda j + k$, v
vectorul v_1

42. Să se
 $v_1 = a + b$

43. Să se
dea o inter

44. Fie v

45. Să se
un triunghi

b) În baza rezultatelor de la punctul a) avem

$$(v_1 + v_2 + v_3) \cdot (v_1' + v_2' + v_3') = v_1 \cdot v_1' + v_2 \cdot v_2' + v_3 \cdot v_3' = 3.$$

În sfârșit, prin calcul obținem $(v_1, v_2, v_3) = 249$, astfel că $v_1 = (-42i + 71j + 47k)/249$, $v_2 = (6i - 22j + 17k)/249$, $v_3 = (15i + 28j + k)/249$.
Se verifică ușor relațiile a) și b).

27. Să se rezolve ecuația vectorială $v \times a = b$, știind că $a = i + 2j - k$ și $b = 2i + j + 4k$, iar v este perpendicular pe vectorul $c = i + j + k$.

Rezolvare. Căutăm $v = xi + yj + zk$. Din condițiile $v \times a = b$ și $v \cdot c = 0$ obținem pentru determinarea necunoscutelor x, y, z sistemul $-y - 2z = 2, x + z = 1, 2x - y = 4, x + y + z = 0$.

Soluția sistemului este $x = \frac{3}{2}, y = -1, z = -\frac{1}{2}$. Deci $v = \frac{3}{2}i - j - \frac{1}{2}k$.

28. Să se rezolve ecuația vectorială $v \times (v \times a) = b$, unde a și b sînt necoliniari.

Rezolvare. Ecuația se scrie $(v \cdot a)v - (v \cdot v)a = b$, relație ce arată că vectorii a, b și v sînt coplanari. Prin urmare, $v = \lambda a + \mu b$. Înlocuind această relație în ecuația de mai sus, obținem pentru determinarea coeficienților λ și μ următorul sistem:

$$\lambda\mu = b^2/(a \times b)^2, \mu^2 = -(a \cdot b)/(a \times b)^2.$$

29. Se consideră punctele A, B, C, O' ale căror coordonate față de reperul $(Q = \{O, i, j, k\})$ sînt $A(-2, 3, 5), B(4, 8, -3), C(6, -1, 1), O'(4, 3, 1)$. Să se determine coordonatele punctelor A, B și C față de reperul $Q' = \{O', i', j', k'\}$ știind că matricea trecerii de la baza $\{i, j, k\}$ la baza $\{i', j', k'\}$ este

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rezolvare. Legătura dintre coordonatele unui punct față de cele două repere este $x = 4 + (2x' + y' - 2z')/3, y = 3 + (x' + 2y' + 2z')/3, z = 1 + (2x' - 2y' + z')/3$. Înlocuind x, y, z prin coordonatele punctului A , obținem $x' = -\frac{4}{3}, y' = -\frac{14}{3}, z' = \frac{16}{3}$. Deci față de reperul Q' avem $A\left(-\frac{4}{3}, -\frac{14}{3}, \frac{16}{3}\right)$. Similar obținem $B(-1, 6, 2)$ și $C(0, -2, -4)$.

30. Ce devine ecuația $x^2 - y^2 - 2x - 2y - 1 = 0$ cînd se transportă axele în punctul $O'(1, -1)$, iar axa $O'x'$ face cu Ox un unghi de 45° ?

Rezolvare. Legătura între coordonatele față de cele două repere este $x = 1 + (x' - y')/\sqrt{2}, y = -1 + (x' + y')/\sqrt{2}$. Înlocuind acestea în ecuația dată, obținem $2x'y' + 1 = 0$.

31. Să se determine aria triunghiului ABC , știind că $A(1, -1, 2), B(-3, 0, 5)$ și $C(2, 1, 2)$.

$$\text{Rezolvare. } \mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} |-6i + 3j - 9k| = \frac{3}{2} \sqrt{14}$$

32. Să se calculeze volumul tetraedrului de vîrfuri $A(0, 6, 4), B(3, 5, 3), C(-2, 11, -5), D(1, -1, 4)$.

$$\text{Rezolvare. } V = \pm \frac{1}{6} (\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 5 & -9 \\ 1 & -7 & 0 \end{vmatrix} = \frac{63}{2}$$

33. Paralelismul și surile directe

Rezolvare.

34. Se dau $v_4 = i - j + k, v_1 = i + j + k, v_2 = 4v_1 + 3v_2$

35. Ce legătură există între $s = v_1 + v_2$ și $t = v_1 - v_2$?

36. Se dau v_1, v_2, v_3 și $v_4 = v_1 + v_2 + v_3$. Este centrul de greutate al tetraedrului?

37. Fie A, B, C, D un cerc de centru O și $\vec{AD} = 2\vec{AO}$

38. Să se determine

a) $v_1 = i + j + k$
b) $v_1 = i + j - k$

39. Să se determine

a) $M_1(2, 3, 4)$
b) $M_1(1, 2, 3)$
c) $M_1(-1, -2, -3)$

40. Cunoscînd vectorii a, b, c , să se scrie și vectorii a', b', c'

a) $v_1 = i + j + k$
b) $v_1 = i + j - k$
c) $v_1 = i - j + k$

41. Să se determine $\lambda j + k$, v_1 și vectorul v_1

42. Să se determine $v_1 = a + b + c$

43. Să se determine dea o intersecție

44. Fie v_1, v_2, v_3

45. Să se determine un triunghi

33. Parametrii directori ai unei direcții fiind $(2, 1, 2)$, să se găsească cosinurile directoare ale acestei direcții.

$$\text{Rezolvare. } \cos \alpha = \frac{2}{\pm \sqrt{4+1+4}} = \pm \frac{2}{3}, \cos \beta = \pm \frac{1}{3}, \cos \gamma = \pm \frac{2}{3}$$

Probleme propuse spre rezolvare

34. Se dau vectorii $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_2 = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_4 = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Să se determine vectorii $\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3 + 4\mathbf{v}_4$ și $\mathbf{v} = 4\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4$.

35. Ce legătură trebuie să existe între vectorii \mathbf{v}_1 și \mathbf{v}_2 , pentru ca vectorul $\mathbf{s} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ să fie situat pe bisectoarea unghiului format de ei?

36. Se dă triunghiul ABC și un punct oarecare M în planul său. Dacă G este centrul de greutate al triunghiului, atunci $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$.

37. Fie \vec{AB} și \vec{CD} vectorii ce coincid cu două coarde perpendiculare într-un cerc de centru O și fie I punctul lor de intersecție. Să se arate că $\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} + \vec{ID} = 2\vec{IO}$.

38. Să se determine $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ astfel ca vectorii \mathbf{v}_1 și \mathbf{v}_2 să fie coliniari:

$$\begin{aligned} \text{a) } \mathbf{v}_1 &= \mathbf{i} + (\lambda - \mu)\mathbf{j} + \mathbf{k}, & \mathbf{v}_2 &= -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \lambda\mathbf{k}; \\ \text{b) } \mathbf{v}_1 &= \mathbf{i} + \lambda\mathbf{j} + \mathbf{k}, & \mathbf{v}_2 &= \mu\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}. \end{aligned}$$

39. Să se cerceteze coliniaritatea punctelor

$$\begin{aligned} \text{a) } &M_1(2, 4, 1), M_2(3, 7, 5), M_3(4, 10, 9); \\ \text{b) } &M_1(1, 2, 3), M_2(2, 5, 8), M_3(3, 8, 13), M_4(4, 11, 18); \\ \text{c) } &M_1(-1, 2, 0), M_2(1, 1, 1), M_3(2, 3, 4). \end{aligned}$$

40. Cunoscând descompunerea vectorilor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ după trei vectori necoplanari $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, să se cerceteze coplanaritatea vectorilor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ și în caz afirmativ să se scrie și relația liniară care leagă acești vectori:

$$\begin{aligned} \text{a) } \mathbf{v}_1 &= \mathbf{c}, \mathbf{v}_2 = \mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}, \mathbf{v}_3 = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}; \\ \text{b) } \mathbf{v}_1 &= \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{v}_2 = \mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{v}_3 = -\mathbf{a} + \mathbf{c}; \\ \text{c) } \mathbf{v}_1 &= -2\mathbf{a} - \mathbf{b} + 3\mathbf{c}, \mathbf{v}_2 = 3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} - \mathbf{c}, \mathbf{v}_3 = -\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - 2\mathbf{c}. \end{aligned}$$

41. Să se determine $\lambda \in \mathbb{R}$ în așa fel ca vectorii $\mathbf{v}_1 = \lambda\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{i} + \lambda\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \lambda\mathbf{k}$ să fie coplanari și în acest caz să se descompună vectorul \mathbf{v}_1 după direcțiile vectorilor \mathbf{v}_2 și \mathbf{v}_3 .

42. Să se descompună vectorul $\mathbf{v} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$ după vectorii necoplanari $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{b} + \mathbf{c}/2$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{b} - \mathbf{c}$, știind că $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ sînt necoplanari.

43. Să se verifice identitatea $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)^2 + (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 = 2(\mathbf{v}_1^2 + \mathbf{v}_2^2)$ și să i se dea o interpretare geometrică.

44. Fie vectorii $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})$ și $\mathbf{v}_2 = \mathbf{c}$. Să se arate că sînt perpendiculari.

45. Să se calculeze scalarul $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}$, știind că vectorii $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ închid un triunghi.

46. Se dau vectorii $v_1 = 3a - 2b$ și $v_2 = a + 2b$; unde $a = 1$, $b = 2$ și $\ast(a, b) = \frac{\pi}{3}$. Se cer:

- a) lungimea diagonalelor paralelogramului construit pe vectorii v_1 și v_2 ;
b) unghiul dintre diagonale.

47. Se dau vectorii $v_1 = 2i - 3j + 4k$ și $v_2 = 4i + 2j + k$. Se cer:

- a) proiecția vectorului $2v_1 - v_2$ pe vectorul $v_1 - 2v_2$;
b) unghiurile dintre vectorul v_2 și axele de coordonate.

48. Două forțe F_1 și F_2 au același punct de aplicație și au mărimile $F_1 = 3$ și $F_2 = 4$, iar $\ast(F_1, F_2) = \frac{\pi}{3}$. Să se determine mărimea forței rezultante $R = F_1 + F_2$.

49. Ce unghi formează între ei vectorii unitari a și b , dacă se știe că vectorii $v_1 = a + 2b$ și $v_2 = 5a - 4b$ sînt perpendiculari?

50. Cunoscînd vectorii a , b , c care formează laturile unui triunghi, să se determine vectorii ce coincid cu înălțimile triunghiului. *Aplicație*: $a = 5i + 2j$, $b = 2i - 4j$, $c = -7i + 2j$.

51. Se dau vectorii $v_1 = i + (\lambda + 1)j - (\lambda - 1)k$ și $v_2 = (2 - \lambda)i + k + j$. Se cer:

- a) valoarea lui λ pentru care v_1 și v_2 sînt ortogonali;
b) proiecția vectorului v_1 pe vectorul $v_1 + v_2$, λ fiind determinat mai sus;
c) expresia analitică a versorului perpendicular simultan pe v_1 și v_2 .

52. Se consideră triunghiul ABC pentru care vectorii de poziție ai vîrfurilor sînt $\vec{OA} = 2i + 6j + 7k$, $\vec{OB} = -3i - 2j$ și $\vec{OC} = i + j + 2k$. Se cer: a) măsura unghiului ABC ; b) perimetrul triunghiului ABC ; c) lungimea înălțimii BB' ; d) aria triunghiului ABC .

53. Să se calculeze aria paralelogramului din spațiu construit pe vectorii:

- a) $v_1 = i + 2j - k$, $v_2 = 2i - j + 3k$;
b) $v_1 = 2i - j + 2k$, $v_2 = -i + 3j + k$;
c) $v_1 = 2i - 3j + 4k$, $v_2 = i + 2j - 3k$;

d) $v_1 = a + 3b$, $v_2 = 2a - b$, unde $a = 3$, $b = 4$ și $\ast(a, b) = \frac{\pi}{3}$.

54. Să se calculeze proiecția vectorului $v_1 = 2i - 3j + 4k$ pe direcția vectorului $v_2 = (i + j + 2k) \times (i - 2j + 5k)$.

55. Se dau vectorii v_1 , v_2 și v_3 cu mărimile $v_1 = 1/3$, $v_2 = 2$, $v_3 = 1$, iar $\ast(v_1, v_2) = \pi/6$, $\ast(v_2, v_3) = \pi/2$ și $\ast(v_3, v_1) = \pi/4$. Să se calculeze ariile paralelogramelor construite pe cîte doi vectori.

56. Se dau vectorii $v_1 = 2i + 3j + 5k$, $v_2 = 4i + 6j - k$ și $v_3 = 6i + 9j + 2k$. Să se arate că vectorii $v_1 \times v_2$, $v_1 \times v_3$ și $v_2 \times v_3$ sînt coliniari.

57. Să se determine aria triunghiului ABC , cunoscînd vectorii de poziție ai vîrfurilor $\vec{OA} = 2i + 3j - k$, $\vec{OB} = i - 2j + 2k$ și $\vec{OC} = 3i + j + k$.

58. Să se calculeze lungimile diagonalelor și aria paralelogramului construit pe vectorii $v_1 = 5a - 3b$ și $v_2 = a + 2b$, știind că $a = 3$, $b = 2$, iar $\ast(a, b) = \pi/6$.

59. Să
 $v_2 = a - b$

60. Să

a) $v_1 =$

b) $v_2 =$

c) $v_3 =$

61. Să

știind ca ba

a) $v_1 =$

b) $v_2 =$

62. Să s

de coplanar

a) $v_1 =$

b) $v_2 =$

$v_3 =$

c) $v_1 =$

$v_2 =$

d) $v_1 =$

e) $v_2 =$

f) $v_3 =$

63. Să

$= i + \lambda j -$

64. Să

a) $(v_1,$

$v_2 +$

$v_1 -$

Ce devin

65. Să s

a) $v_1 =$

b) $v_2 =$

știind că a

și planul de

66. Să s

a) $v_1 =$

b) $v_2 =$

67. Să s

a) $v_1 \times$

b) $(v_1 \times$

c) $(v_1 \times$

d) $v_1 \times$

e) $(v_1 -$

f) $(v_1 \times$

59. Să se calculeze produsul mixt $(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_3$, știind că $\mathbf{v}_1 = -\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$ și $\mathbf{v}_3 = \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$.

60. Să se calculeze volumul paralelipipedului construit pe vectorii:

a) $\mathbf{v}_1 = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$;

b) $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$;

c) $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$; $\mathbf{v}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

61. Să se calculeze înălțimea paralelipipedului construit pe vectorii $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$, fiind ca bază paralelogramul construit pe vectorii \mathbf{v}_1 și \mathbf{v}_2 :

a) $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_3 = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$;

b) $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_3 = -\mathbf{i} + \mathbf{k}$.

62. Să se cerceteze coplanaritatea vectorilor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ și să se determine relația de coplanaritate când este cazul:

a) $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_3 = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$;

b) $\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{i} + (3 + \alpha)\mathbf{j} + (3 + 7\alpha)\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{i} + (2 + \beta)\mathbf{j} + (2 + 7\beta)\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_3 = 5\mathbf{i} + (5 + \gamma)\mathbf{j} + (5 + 7\gamma)\mathbf{k}$;

c) $\mathbf{v}_1 = -\alpha\mathbf{i} - \beta\mathbf{j} + (\alpha + \beta)\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_2 = -3\mathbf{i} + (\alpha + \beta)\mathbf{j} - \alpha\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_3 = (\alpha + \beta)\mathbf{i} - \alpha\mathbf{j} - \beta\mathbf{k}$;

d) $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_2 = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_3 = 7\mathbf{i} + 14\mathbf{j} - 13\mathbf{k}$;

e) $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$; $\mathbf{v}_2 = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_3 = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$;

f) $\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{v}_3 = 3\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

63. Să se determine $\lambda \in \mathbb{R}$ în așa fel ca vectorii $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{i} + \lambda\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ și $\mathbf{v}_3 = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ să fie coplanari.

64. Să se calculeze produsele mixte:

a) $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)$; b) $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)$; c) $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_1)$;

d) $\left(\frac{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2}{2}, \frac{\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3}{2}, \frac{\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_1}{2} \right)$; e) $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \oplus \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3)$.

Ce devin aceste produse dacă vectorii $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ coincid cu $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$?

65. Să se determine volumul paralelipipedului construit pe vectorii:

a) $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a} + 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{a} + 5\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$; $\mathbf{v}_3 = \mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 3\mathbf{c}$;

b) $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a} - 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{v}_2 = 3\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 2\mathbf{c}$; $\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{a} + 7\mathbf{b} - 3\mathbf{c}$,

știind că $a = 6$, $b = \sqrt{2}$, $c = 2$, $\angle(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = \frac{\pi}{6}$, iar unghiul format de vectorul \mathbf{a} și planul determinat de vectorii \mathbf{b} și \mathbf{c} are măsura $\frac{\pi}{4}$.

66. Să se verifice formula de dezvoltare a dublului produs vectorial, pentru:

a) $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{j} - \mathbf{k}$; $\mathbf{v}_3 = -\mathbf{i} + \mathbf{k}$;

b) $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

67. Să se verifice identitățile

a) $\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) + \mathbf{v}_2 \times (\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1) + \mathbf{v}_3 \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) = \mathbf{0}$;

b) $(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \cdot [\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)] = -(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$;

c) $(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1) = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)^2$;

d) $\mathbf{v}_1 \times [\mathbf{v}_2 \times (\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_4)] = (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_4)(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_3) - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3)(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_4)$;

e) $(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_4) \times (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) + (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_4) \times (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1) + (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1) \times (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) =$
 $= 2(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_4)$;

f) $(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \times (\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_4) = \mathbf{v}_3(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4) - \mathbf{v}_4(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) =$
 $= \mathbf{v}_2(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4) - \mathbf{v}_1(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$.

68. Fie v'_1, v'_2, v'_3 reciprocii vectorilor v_1, v_2, v_3 . Să se verifice identitățile:

a) $v_1 \times v'_1 + v_2 \times v'_2 + v_3 \times v'_3 = 0$;

b) $(v'_1 \times v'_2, v'_2 \times v'_3, v'_3 \times v'_1) = \frac{1}{(v_1, v_2, v_3)^2}$;

c) $\frac{(v'_1, v'_2, v'_3) + (v_1, v'_2, v_3) + (v_1, v_2, v'_3)}{(v_1, v'_3, v'_2) + (v_2, v'_3, v'_1) + (v_3, v'_1, v'_2)} = \frac{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} (v_1, v_2, v_3)^2$.

Să se verifice identitățile pentru vectorii

$$v_1 = i - j + k, v_2 = i + 2j + 2k, v_3 = i + j.$$

69. Se dau vectorii $v_1 = 2i + j - k, v_2 = 3i + 2j + k, v_3 = -j + 2k$. Se cer:

a) volumul paralelipipedului construit pe vectorii v_1, v_2, v_3 ;

b) expresia analitică a vectorilor reciproci;

c) volumul paralelipipedului construit pe vectorii reciproci;

d) să se arate că $v_1 \times (v_2 \times v_3) \neq (v_1 \times v_2) \times v_3$.

70. Să se determine v astfel ca $v \cdot a = 18, v \times a = b$, știind că $a = i - j + k$,
ar $b = i + 2j + k$.

71. Să se determine aria triunghiului ABC , știind că:

a) $A(-1, -1, 0), B(0, 2, 3), C(1, 1, 1)$; b) $A(1, 2, 3), B(-5, 1, -3), C(-2, 1, 1)$.

72. Să se determine înălțimile triunghiului ABC , știind că

a) $A(3, 1, 0), B(0, 7, 2), C(4, 1, 5)$; b) $A(1, -1, 1), B(1, 3, 3), C(4, 0, -3)$;

c) $A(1, -1, 1), B(0, 2, 4), C(-1, -1, -1)$.

73. Să se calculeze volumul tetraedrului de vîrfuri

a) $A(-1, 1, 0), B(2, -1, 3), C(3, 3, 1), D(4, 2, 2)$;

b) $A(1, 1, -3), B(2, -1, -1), C(3, 3, 1), D(-1, 4, 2)$.

74. Să se calculeze înălțimile tetraedrului de vîrfuri $A(1, -3, 4), B(0, -3, 1), C(-2, -4, 3), D(4, 4, -2)$.

75. Se dau punctele $A(-2, 3, 1)$ și $B(2, 4, 1)$. Să se determine punctele care împart segmentul AB în raportul: $\lambda_1 = 3$ și $\lambda_2 = -2$.

76. Să se găsească cosinusurile directoare ale direcției din spațiu ce face cu Ox unghiul $\alpha = 60^\circ$ și cu axa Oy unghiul $\beta = 30^\circ$.

77. Să se calculeze parametrii directori ai unei direcții, care este simultan perpendiculară pe direcțiile $(2, -1, 3)$ și $(-3, 4, 2)$.

78. Să se afle cosinusurile directoare ale vectorului director v , știind că este perpendicular pe vectorii $u_1(2, -3, -11)$ și $u_2(2, 1, 0)$.

79. Se dau două direcții de parametri directori, respectiv, $(2, 1, 2)$ și $(1, m, 0)$. Să se determine $m \in R$ astfel că direcțiile date: a) să formeze un unghi de 45° ; b) să fie perpendiculare între ele.

80. Translînd axele paralel cu ele însele, să se determine translația sistemului de axe astfel ca ecuația $x^2 - y^2 + 2xy - xz - 6y - z + 1 = 0$ să se transforme într-o ecuație ce nu mai conține termeni liniari.

81. Se consideră punctele M din plan ale căror coordonate relativ la reperul $\mathcal{Q} = \{O, i, j\}$ verifică ecuația $3x^2 - 4xy + 3y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$. Ce relație satisfac coordonatele aceluiași puncte față de reperul ortonormat, avînd originea $O'(1, 1)$ și axele de coordonate rotite direct cu unghiul 45° față de axele reperului \mathcal{Q} ?

82. Ce devine ecuația $x^2 - y^2 + 4x - 6y - 9 = 0$ față de noul reper ortonormat, \mathcal{R}' cu originea $O'(-2, -3)$ și axele de coordonate rotite direct cu unghiul 45° față de axele vechiului reper?

83. Translând axele paralel cu ele însele în punctul $O'(1, 1)$, să se determine unghiul cu care trebuie rotite noile axe pentru ca ecuația $x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 4y - 4 = 0$ să se transforme în alta care să nu mai conțină termen în $x \cdot y$.

84. Să se arate că expresia $E = x_1 y_2 - x_2 y_1$ este un invariant față de o rotație a axelor în plan.

85. Ce devine ecuația $x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 4yz - 6z + 1 = 0$ satisfăcută de coordonatele unor puncte relativ la reperul ortonormat $\mathcal{R} = \{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, dacă se trece la reperul ortonormat cu originea $O'\left(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ și cu baza $\{\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'\}$, obținută din baza $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ prin matricea

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} ?$$

4. PLANUL ȘI DREAPTA ÎN SPAȚIU

1. Planul. Acesta poate fi dat sub următoarele forme:

a) Ecuația planului printr-un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și perpendicular pe un vector dat $N(A, B, C)$ (vectorul normală) este

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (1)$$

b) Ecuația generală a planului este

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (2)$$

c) Ecuația planului determinat de trei puncte necoliniare $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$, este

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

d) Ecuația planului prin tăieturi este

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0, \quad (4)$$

a, b, c fiind segmentele determinate de plan pe axele de coordonate.

e) Ecuația normală a planului este

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0, \quad (5)$$

$\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ fiind cosinusurile direcțoare ale normalei la plan, iar p este distanța de la origine la plan

Ecuația planului sub forma generală (2) se poate scrie sub forma normală

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0, \quad (6)$$

semnul \pm alegându-se astfel ca termenul liber să fie negativ.

Distanța de la punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ la un plan P este dată de

$$d(M_0, P) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \text{ sau } d(M_0, P) = |x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - p|, \quad (7)$$

după cum planul P este dat prin ecuația (2) sau (5).

Unghiul format de două plane este unghiul format de direcțiile normalelor celor două plane,

Condiția necesară și suficientă ca patru puncte $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, să fie coplanare este

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

2. Dreapta în spațiu. a) Ecuațiile dreptei prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și cu vectorul director $v(l, m, n)$ sînt

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \quad (\text{ecuațiile canonice}); \quad (9)$$

$$x = x_0 + \lambda l, \quad y = y_0 + \lambda m, \quad z = z_0 + \lambda n, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{ecuațiile parametrice}); \quad (10)$$

$$x = \alpha z + p, \quad y = \beta z + q \quad (\text{ecuațiile reduse}). \quad (11)$$

b) Ecuațiile dreptei prin două puncte $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ sînt

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (\text{ecuațiile canonice}); \quad (12)$$

$$x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1), \quad y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1), \quad z = z_1 + \lambda(z_2 - z_1), \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{ecuațiile parametrice}). \quad (13)$$

c) Ecuațiile dreptei sub forma generală sînt

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \quad (14)$$

în ipoteza că vectorii $N_1(A_1, B_1, C_1)$ și $N_2(A_2, B_2, C_2)$ sînt necoliniari. Vectorul director pentru dreapta dată sub forma generală (14) este dat de

$$v = N_1 \times N_2. \quad (15)$$

Unghiul a două drepte în spațiu este egal cu unghiul vectorilor lor directori.

$$3. \text{ Dreapta și planul. Fie dreptele date prin ecuațiile } (d_1) \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1},$$

$(d_2) \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$. Condiția necesară și suficientă ca cele două drepte să fie conținute în același plan este

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (16)$$

Dacă vectorii directori ai celor două drepte nu sînt coliniari, relația (16) reprezintă condiția de concurență a dreptelor.

Ecuația planului determinat de un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și două direcții necoliniare $v_1(l_1, m_1, n_1)$ și $v_2(l_2, m_2, n_2)$ este

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (17)$$

Ecuația planului determinat de un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și dreapta $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$ este

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0. \quad (18)$$

Mulțimea tuturor planelor care trece prin dreapta de intersecție a două plane date, numite plane de bază, formează un fascicul de plane, având ca axă aceea dreaptă. Dacă planele bază sînt

$$(P_1) \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{și} \quad (P_2) \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

atunci ecuația fasciculului de plane este

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (19)$$

Se numește unghiul unei drepte cu un plan unghiul format de dreaptă și proiecția sa în plan.

Probleme rezolvate

1. Să se scrie ecuația unui plan, care :

a) este paralel cu planul xOy și trece prin punctul $M_0(2, -5, 3)$;

b) trece prin Oz și prin punctul $M_0(-3, 1, -2)$;

c) este paralel cu axa Ox și trece prin punctele $M_1(4, 0, -2)$ și $M_2(5, 1, 7)$.

Rezolvare. a) Este convenabil să folosim ecuația (1). Deoarece planul este paralel cu planul xOy , rezultă că are același vector normal ca xOy , adică $\mathbf{k}(0, 0, 1)$. Prin urmare, ecuația planului este $0 \cdot (x - 2) + 0 \cdot (y + 5) + 1 \cdot (z - 3) = 0$, sau $z - 3 = 0$.

b) Putem folosi ecuația (18). Ecuațiile axei Oz sînt $\frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}$, astfel că ecuația (18) se scrie

$$\begin{vmatrix} x+3 & y-1 & z+2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{sau} \quad x + 3y = 0.$$

c) Deoarece planul este paralel cu Ox , putem spune că este determinat de punctele M_1 și M_2 și direcția lui Ox , adică $\mathbf{i}(1, 0, 0)$. Folosind ecuația (18), obținem ecuația planului

$$\begin{vmatrix} x-4 & y & z+2 \\ 1 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{sau} \quad -9y + z + 2 = 0.$$

2. Să se scrie ecuația planului determinat de punctele $M_1(3, 1, 0)$, $M_2(0, 7, 2)$ și $M_3(4, 1, 5)$.

Rezolvare. Folosim ecuația (3), astfel că obținem

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{sau} \quad 30x + 17y - 6z - 107 = 0.$$

3. Să se verifice dacă următoarele patru puncte se află în același plan : $M_1(1, -1, 1)$, $M_2(0, 2, 4)$, $M_3(1, 3, 3)$, $M_4(4, 0, -3)$.

Rezolvare. Scriem ecuația planului prin punctele M_1, M_2, M_3

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{sau} \quad -3x + y - 2z + 6 = 0.$$

Verificăm dacă M_4 aparține acestui plan. Avem $-3 \cdot 4 + 0 - 2 \cdot (-3) + 6 = 0$. Deci cele patru puncte se află în același plan : $-3x + y - 2z + 6 = 0$. Putem utiliza direct condiția (8).

4. Să se scrie ecuația planului care trece prin punctele $M_1(2, 0, 0)$, $M_2(0, 0, 1)$ și $M_3(0, 1, 0)$.

Rezolvare. Folosim ecuația (3), astfel că obținem
sau $6x - 4y + 3z - 2 = 0$.

5. Să se scrie ecuația planului care trece prin punctele $M_1(1, 0, 0)$, $M_2(0, 1, 0)$ și $M_3(0, 0, 1)$.

Rezolvare. Ecuația planului este
acesta să treacă prin punctele M_1, M_2, M_3 .

6. Să se scrie ecuația planului care trece prin punctele $M_1(1, 0, 0)$, $M_2(0, 1, 0)$ și $M_3(0, 0, 1)$.

Rezolvare. Normă
 $6(x-1) - 7(y-0) - 3(z-0) = 0$.

7. Un plan este paralel cu axa Ox și trece prin punctele $M_1(1, 0, 0)$ și $M_2(0, 1, 0)$. Să se calculeze distanța de la punctul $M_3(0, 0, 1)$ la acest plan.

Rezolvare. Folosim ecuația (3), astfel că obținem
metrii directori ai planului.

deci $N = \frac{3}{22}$. Cosinusul unghiului dintre N și \mathbf{i} este $\frac{3}{22}$.

8. Să se reduse ecuația planului $30x + 17y - 6z - 107 = 0$.

9. Să se calculeze distanța de la punctul $M_0(3, 1, 0)$ la planul $30x + 17y - 6z - 107 = 0$.

a) $M_0(3, 1, 0)$
b) $M_0(4, 3, 0)$

Rezolvare. Folosim ecuația (8) pentru a calcula distanța de la punctul M_0 la planul P .

a) $d(M_0, P) = \frac{|30 \cdot 3 + 17 \cdot 1 - 6 \cdot 0 - 107|}{\sqrt{30^2 + 17^2 + 6^2}} = \frac{|90 + 17 - 107|}{\sqrt{1105}} = \frac{2}{\sqrt{1105}}$
b) $d(M_0, P) = \frac{|30 \cdot 4 + 17 \cdot 3 - 6 \cdot 0 - 107|}{\sqrt{1105}} = \frac{|120 + 51 - 107|}{\sqrt{1105}} = \frac{64}{\sqrt{1105}}$

Punctul M_0 aparține planului P .

4. Să se scrie ecuația unui plan, care taie axele de coordonate în punctele $M_1(2, 0, 0)$, $M_2(0, -3, 0)$ și $M_3(0, 0, 4)$.

Rezolvare. Folosim ecuația planului prin tăieturi (4), astfel că obținem $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} + \frac{z}{4} - 1 = 0$ sau $6x - 4y + 3z - 12 = 0$.

5. Să se scrie ecuația unui plan care trece prin punctul $M_0(7, -5, 1)$ și care taie pe axele de coordonate segmente pozitive și egale între ele.

Rezolvare. Ecuația planului prin tăieturi este $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a} - 1 = 0$. Punind condiția ca acesta să treacă prin M_0 , obținem $a = 3$, astfel că ecuația planului este $x + y + z - 3 = 0$.

6. Să se scrie ecuația unui plan care trece prin $A(1, 3, -2)$ și este perpendicular pe \vec{AB} , știind că $B(7, -4, 4)$.

Rezolvare. Normala planului este $N = \vec{AB}(6, -7, 6)$, astfel că, folosind ecuația (1), obținem $6(x-1) - 7(y-3) + 6(z+2) = 0$ sau $6x - 7y + 6z + 27 = 0$.

7. Un plan taie pe axele de coordonate segmentele $a = 11$, $b = 55$ și $c = 10$. Să se calculeze cosinusurile directoare ale vectorului normal la plan.

Rezolvare. Folosind ecuația planului prin tăieturi, obținem $\frac{x}{11} + \frac{y}{55} + \frac{z}{10} - 1 = 0$, astfel că parametrii directori ai normalei sînt

$$N\left(\frac{1}{11}, \frac{1}{55}, \frac{1}{10}\right), \text{ iar } N^2 = \frac{1}{11^2} + \frac{1}{11^2 \cdot 5^2} + \frac{1}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{15^2}{2^2 \cdot 5^2 \cdot 11^2};$$

deci $N = \frac{3}{22}$. Cosinusurile directoare sînt

$$\cos \alpha = \frac{1}{11} \cdot \frac{22}{3} = \frac{2}{3}, \quad \cos \beta = \frac{1}{55} \cdot \frac{22}{3} = \frac{2}{15}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{10} \cdot \frac{22}{3} = \frac{11}{15}.$$

8. Să se reducă la forma normală ecuația planului $10x + 2y - 11z + 60 = 0$.

Rezolvare. Folosind relația (6), obținem

$$\frac{10x + 2y - 11z + 60}{-\sqrt{10^2 + 2^2 + 11^2}} = 0 \text{ sau } -\frac{2}{3}x - \frac{2}{15}y + \frac{11}{15}z - 4 = 0.$$

9. Să se calculeze distanța de la punctul M_0 la planul P , știind că :

a) $M_0(3, 1, -1)$, $(P) 22x + 4y - 20z - 45 = 0$;

b) $M_0(4, 3, -2)$, $(P) 3x - y + 5z + 1 = 0$.

Rezolvare. Folosim formula (7).

$$\text{a) } d(M_0, P) = \frac{|66 + 4 + 20 - 45|}{\sqrt{22^2 + 4^2 + 20^2}} = \frac{45}{30} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{b) } d(M_0, P) = \frac{|12 - 3 - 10 + 1|}{\sqrt{9 + 1 + 25}} = 0.$$

Punctul M_0 aparține planului P .

10. Să se scrie ecuația unui plan, care :

a) trece prin punctul $M_0(-2, 7, 3)$ și este paralel cu planul

$$x - 4y + 5z - 1 = 0;$$

b) trece prin origine și este perpendicular pe planele

$$(P_1) 2x - y + 5z + 3 = 0 \text{ și } (P_2) x + 3y - z - 7 = 0$$

c) trece prin punctele $M_1(0, 0, 1)$ și $M_2(3, 0, 0)$ și formează un unghi de 60° cu planul xOy .

Rezolvare. a) Planul căutat are aceeași normală cu planul $x - 4y + 5z - 1 = 0$, adică vectorul $N(1, -4, 5)$. Prin urmare, ecuația planului este $1 \cdot (x + 2) - 4(y - 7) + 5(z - 3) = 0$ sau $x - 4y + 5z + 15 = 0$.

b) Fie $N(A, B, C)$ normala planului căutat P . Deoarece P este perpendicular pe P_1 și pe P_2 rezultă $N \cdot N_1 = 0$ și $N \cdot N_2 = 0$, unde $N_1(2, -1, 5)$, $N_2(1, 3, -1)$ sînt vectorii normali la cele două plane. Deci $2A - B + 5C = 0$, $A + 3B - C = 0$. Soluția acestui sistem este

$$\frac{A}{\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{B}{-\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{C}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}, \text{ astfel că } N(-14, 7, 7).$$

Prin urmare ecuația planului este $-14x + 7y + 7z = 0$.

c) Căutăm ecuația planului sub forma normală $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$. Punînd condiția ca planul să treacă prin M_1 și M_2 , obținem $\cos \gamma = p \cos \alpha = p/3$. Deoarece $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, deducem $\cos \beta = \pm \sqrt{1 - \frac{10}{9} p^2}$. Deoarece unghiul format cu planul xOy este de 60° , rezultă că unghiul dintre vectorii normali $N(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ și $N_1(0, 0, 1)$ este de 60° . Deci $\cos 60^\circ = \cos \gamma$, de unde $\cos \gamma = \frac{1}{2}$. Cum $\cos \gamma = p$, rezultă $p = \frac{1}{2}$ și deci ecuația planului este

$$\frac{1}{6} x \pm \frac{\sqrt{26}}{6} y + \frac{1}{2} z - \frac{1}{2} = 0.$$

11. Să se calculeze unghiul următoarelor plane :

$$(P_1) 4x - 5y + 3z - 1 = 0 \text{ și } (P_2) x - 4y - z + 9 = 0.$$

Rezolvare. Unghiul celor două plane este unghiul normalelor la cele două plane

$$N_1(4, -5, 3) \text{ și } N_2(1, -4, -1).$$

Deci

$$\cos \angle (N_1, N_2) = \frac{N_1 \cdot N_2}{|N_1| \cdot |N_2|} = \frac{21}{\sqrt{50} \sqrt{18}} = \frac{7}{10} \text{ sau } \angle (N_1, N_2) = \arccos \frac{7}{10}.$$

12. Să se scrie ecuațiile dreptei care trece prin punctul $M_0(1, -5, 3)$ și formează cu axele de coordonate unghiurile $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$ și $\gamma = 120^\circ$.

Rezolvare. Se cunoaște deci vectorul director al dreptei, $(\cos 60^\circ, \cos 45^\circ, \cos 120^\circ)$. Folosim ecuațiile dreptei sub forma (9), astfel că

$$\frac{x-1}{\frac{1}{2}} = \frac{y+5}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{z-3}{-\frac{1}{2}}$$

13. Să se scrie ecuația planului care trece prin punctul $M_3(1, \frac{4}{3}, 3)$.

Rezolvare. Scriem ecuația acestei drepte. Folosim ecuațiile dreptei sub forma (9), astfel că

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{-1}$$

14. Să se scrie ecuația planului care trece prin punctul $M_4(1, 2, 3)$.

a) este paralel cu planul $x - 4y + 5z - 1 = 0$.

b) este perpendicular pe planul $x - 4y + 5z - 1 = 0$.

c) este paralel cu planul $x - 4y + 5z - 1 = 0$ și perpendicular pe planul $x - 4y + 5z - 1 = 0$.

Rezolvare. a) D

b) Direcția dreptei

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y+5}{-6} = \frac{z-1}{-1}$$

c) Direcția dreptei

direcția dreptei căutate

15. Să se scrie ecuația planului care trece prin punctul $M_5(1, 1, 2)$ și este perpendicular pe planul P_1 .

Rezolvare. Fie $N(A, B, C)$ normala planului P . Deoarece P este perpendicular pe P_1 , rezultă $N \cdot N_1 = 0$, unde $N_1(1, 1, 2)$ este normala la P_1 . Deci $A + B + 2C = 0$.

Prin urmare, ecuația

16. Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctul $M_6(1, 2, 3)$ și este paralelă cu planul P_2 .

$$a) \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-1}$$

Rezolvare. a) Vectorul director al dreptei este $(4, -1, -1)$.

b) Vectorul director al dreptei

și deci $\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{18}}$

13. Să se studieze coliniaritatea punctelor $M_1(3, 0, 1)$, $M_2(0, 2, 4)$ și $M_3\left(1, \frac{4}{3}, 3\right)$.

Rezolvare. Scriem ecuațiile dreptei prin punctele M_1 și M_2 , și apoi verificăm dacă M_3 se află pe această dreaptă. Folosim deci ecuațiile sub forma (12), astfel că ecuațiile dreptei sînt

$$\frac{x-3}{-3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}. \text{ Se vede că } M_3 \text{ aparține acestei drepte, deoarece } \frac{1-3}{-3} = \frac{4}{6} = \frac{3-1}{3}.$$

14. Să se scrie ecuațiile dreptei care trece prin punctul $M_0(2, -5, 3)$ și care :

a) este paralelă cu axa Oz ;

b) este paralelă cu dreapta (d_1) $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z+3}{9}$;

c) este paralelă cu dreapta (d_2) $2x - y + 3z + 1 = 0, 5x + 4y - z - 7 = 0$.

Rezolvare. a) Direcția dreptei este $k(0, 0, 1)$, astfel că, după (9), avem $\frac{x-2}{0} = \frac{y+5}{0} = \frac{z-3}{1}$.

b) Direcția dreptei este aceeași cu a dreptei d_1 , adică $v_1(4, -6, 9)$, astfel că, după (9), deducem $\frac{x-2}{4} = \frac{y+5}{-6} = \frac{z-3}{9}$.

c) Direcția dreptei d_1 este vectorul $v_1 = N_1 \times N_2$, unde $N_1(2, -1, 3)$ și $N_2(5, 4, -1)$. Deci direcția dreptei căutate este $v_1 = (-11, 17, 13)$, astfel că ecuațiile dreptei sînt $\frac{x-2}{-11} = \frac{y+5}{17} = \frac{z-3}{13}$.

15. Să se scrie ecuațiile dreptei care trece prin punctul $M_0(2, 1, 1)$ și este paralelă cu planele (P_1) $x - y + z + 2 = 0$ și (P_2) $x + y + 2z - 1 = 0$.

Rezolvare. Fie $v(l, m, n)$ vectorul director al dreptei căutate. Deoarece dreapta este paralelă cu planul P_1 , rezultă $v \cdot N_1 = 0$, unde $N_1(1, -1, 1)$ este vectorul normal la P_1 . Similar, $v \cdot N_2 = 0$, unde $N_2(1, 1, 2)$. Obținem astfel $l - m + n = 0, l + m + 2n = 0$. Soluția acestui sistem este

$$\frac{l}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{m}{-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{n}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}, \text{ deci } v(-3, -1, 2).$$

Prin urmare, ecuațiile dreptei sînt $\frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$.

16. Să se determine cosinusurile directoare ale dreptelor :

a) $\frac{x-1}{4} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z+2}{12}$; b) $2x - 3y - 3z - 9 = 0, x - 2y + z + 3 = 0$.

Rezolvare. a) Vectorul director al dreptei este $v(4, -3, 12)$, astfel că versorul director are cosinusurile directoare

$$\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{16+9+144}} = \frac{4}{13}, \cos \beta = \frac{-3}{13}, \cos \gamma = \frac{12}{13}.$$

b) Vectorul director al dreptei este $v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -9i - 5j - 1k$,

și deci $\cos \alpha = \frac{-9}{\sqrt{107}}, \cos \beta = \frac{-5}{\sqrt{107}}, \cos \gamma = \frac{-1}{\sqrt{107}}$.

17. Să se calculeze unghiul dreptelor (d_1) $x + 2y + z - 1 = 0$, $x - 2y + z + 1 = 0$ și (d_2) $x - y + 2z + 1 = 0$, $x - y - z - 1 = 0$.

Rezolvare. Vectorii directori ai celor două drepte sînt

$$v_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4i - 4k, \quad v_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3i + 3j.$$

Unghiul celor două drepte este dat de

$$\cos \star(v_1, v_2) = \frac{v_1 \cdot v_2}{|v_1| \cdot |v_2|} = \frac{1}{2}, \quad \star(v_1, v_2) = \frac{\pi}{3}.$$

18. Să se scrie ecuațiile proiecției dreptei (d) $x - 4y + 2z - 5 = 0$, $3x + y - z + 2 = 0$ pe planul (P) $2x + 3y + z - 5 = 0$.

Rezolvare. Cum se vede în fig. 2, dreapta căutată D este intersecția a două plane: planul P și planul perpendicular pe P și conține dreapta d . Planul al doilea face parte din fasciculul de plane ce conține dreapta d . Ecuația fasciculului de plane ce are drept axă pe d este $x - 4y + 2z - 5 + \lambda(3x + y - z + 2) = 0$. Punind condiția ca acest ultim plan să fie perpendicular pe P , obținem $(1 + 3\lambda) \cdot 2 + (-4 + \lambda) \cdot 3 + (2 - \lambda) \cdot 1 = 0$, adică $\lambda = 1$. Deci dreapta D are ecuațiile generale $2x + 3y + z - 5 = 0$, $4x - 3y + z - 3 = 0$.

19. Să se verifice că dreptele (d_1) $4x + z - 1 = 0$, $x - 2y + 3 = 0$ și (d_2) $3x + y - z + 4 = 0$, $y + 2z - 8 = 0$ sînt concurente și să se scrie ecuația planului determinat de acestea.

Rezolvare. Pentru ca cele două drepte să fie concurente, trebuie ca sistemul format cu ecuațiile celor două drepte să fie compatibil determinat. Aplicînd metoda eliminării a lui Gauss, obținem că sistemul este compatibil determinat cu soluția $x = -3/5$, $y = 6/5$; $z = 17/5$. Deci punctul de intersecție este $M(-3/5, 6/5, 17/5)$. Direcțiile celor două drepte sînt caracterizate de vectorii directori $v_1 = 2i + j - 8k$ și $v_2 = 3i - 6j + 3k$. Folosind ecuația (17), obținem pentru planul determinat de cele două drepte

$$\begin{vmatrix} x + 3/5 & y - 6/5 & z - 17/5 \\ 2 & 1 & -8 \\ 3 & -6 & 3 \end{vmatrix} = 0 \text{ sau } 3x + 2y + z - 4 = 0.$$

20. Să se scrie ecuațiile unei drepte care trece prin punctul $M_0(4, 0, -1)$ și intersecțiază dreptele

$$(d_1) \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-5}{3} \text{ și } (d_2) \frac{x}{5} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}.$$

Rezolvare. Fie d dreapta căutată și $v(l, m, n)$ vectorul său director. Din condițiile de intersecție a dreptei d cu dreptele d_1 și d_2 obținem, folosind condiția (16),

$$\begin{vmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0 \text{ și } \begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -33l + 21m - 6n = 0 \\ 4l + 8m - 6n = 0. \end{cases}$$

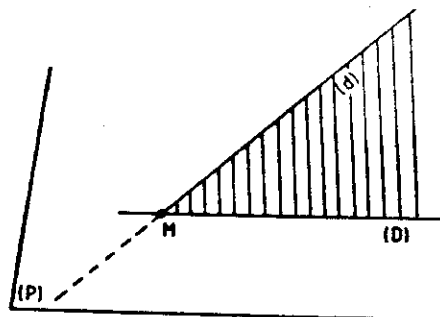


Fig. 2

Soluția

astfel încît

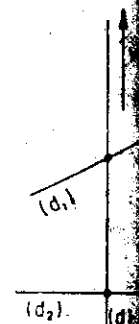
21. Din

$\frac{z}{1}$ și (d)

cu dreapta

Rezolvare

$v(8, 7, 1)$. D



22. Să

(d_1) $\left\{ \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right.$

Rezolvare
perpendicular
directorii ai

$v_1 =$

cele două co
este $v(-149,$
Dreapta d

$$x - 2y +$$

Soluția sistemului omogen este

$$\frac{l}{\begin{vmatrix} 21 & -6 \\ 8 & -6 \end{vmatrix}} = \frac{m}{\begin{vmatrix} -33 & -6 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}} = \frac{n}{\begin{vmatrix} -33 & 21 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}}$$

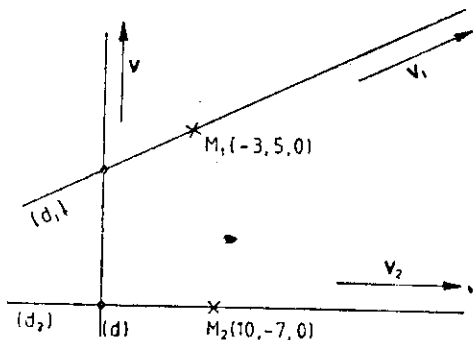
astfel încât $v(-78, -222, -348)$. Prin urmare, ecuațiile dreptei sînt

$$\frac{x-4}{13} = \frac{y}{37} = \frac{z+1}{58}$$

21. Dintre toate dreptele care intersectează două drepte date $(d_1) \frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z}{1}$ și $(d_2) \frac{x-10}{5} = \frac{y+7}{4} = \frac{z}{1}$, să se scrie ecuațiile aceleia care este paralelă cu dreapta

$$(d_3) \frac{x+2}{8} = \frac{y-1}{7} = \frac{z-3}{1}$$

Rezolvare. Deoarece dreapta căutată d este paralelă cu d_3 , rezultă că aceasta are vectorul director $v(8, 7, 1)$. Dreapta d poate fi considerată ca intersecția a două plane (fig. 3): unul P_1 determinat de dreptele d și d_1 , celălalt P_2 determinat de dreptele d și d_2 . Pentru determinarea celor două plane avem câte un punct și doi vectori necoliniari. Folosind ecuația (17), avem



$$(P_1) \begin{vmatrix} x+3 & y-5 & z \\ 2 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

și

$$(P_2) \begin{vmatrix} x-10 & y+7 & z \\ 5 & 4 & 1 \\ 8 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Fig. 3

Deci, dreapta d are ecuațiile $-2x + 3y - 5z - 21 = 0$, $-x + y + z + 17 = 0$.

22. Să se scrie ecuațiile perpendicularei comune la dreptele

$$(d_1) \begin{cases} x + y - 3z + 1 = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} \text{ și } (d_2) \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 15x + 10y - 6z - 30 = 0 \end{cases}$$

Rezolvare. Fie d dreapta căutată și $v(l, m, n)$ vectorul său director. Deoarece dreapta d este perpendiculară simultan pe d_1 și pe d_2 , rezultă că $v \cdot v_1 = 0$ și $v \cdot v_2 = 0$, unde v_1 și v_2 sînt vectorii directori ai celor două drepte. Dacă ținem seama că

$$v_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -i - 5j - 2k, \quad v_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 0 \\ 15 & 10 & -6 \end{vmatrix} = -18i + 12j - 25k,$$

cele două condiții se scriu $-l - 5m - 2n = 0$, $-18l + 12m - 25n = 0$. Soluția acestui sistem este $v(-149, -11, 102)$. De la acest punct mai departe se poate proceda ca în exercițiul precedent. Dreapta d poate fi considerată ca intersecția a două plane: planul P_1 determinat de dreptele d

și d_1 și planul P_2 determinat de dreptele d și d_1 . Planul P_1 face parte din fasciculul de plane avînd axa d_1 . Ecuația acestui fascicul este $x + y - 3z + 1 + \lambda(x - y + 2z) = 0$. Punînd condiția ca acest plan să fie paralel cu v (adică produsul scalar al lui v cu normala la plan să fie zero), obținem $-149 \cdot (1 + \lambda) - 11 \cdot (1 - \lambda) + 102 \cdot (-3 + 2\lambda) = 0$, deci $\lambda = 233/33$. Deci ecuația planului P_1 este $266x - 200y + 367z + 33 = 0$. Similar se obține pentru P_2 ecuația $949x + 5561y + 1986z + 9930 = 0$. Deci (d) $266x - 200y + 367z + 33 = 0$, $949x + 5561y + 1986z + 9930 = 0$.

23. Să se calculeze lungimea perpendicului comune a dreptelor (d_1) $x = 2t - 4$, $y = -t + 4$, $z = -2t - 1$ și (d_2) $x = 4t - 5$, $y = -3t + 5$, $z = -5t + 5$.

Rezolvare. Cele două drepte pot fi scrise sub forma canonică, eliminînd parametrul t :

$$(d_1) \frac{x+4}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+1}{-2} \quad \text{și} \quad (d_2) \frac{x+5}{4} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z-5}{-5}$$

de unde se poate vedea un punct prin care trece și vectorul director al fiecărei drepte. Astfel pentru d_1 avem $M_1(-4, 4, -1)$ și $v_1(2, -1, -2)$, iar pentru d_2 avem $M_2(-5, 5, 5)$ și $v_2(4, -3, -5)$. Lungimea perpendicului comune (fig. 4) este egală cu distanța de la punctul M_2 la planul care trece prin M_1 și este paralel cu vectorii v_1 și v_2 . Ecuația acestui plan este

$$\begin{vmatrix} x+4 & y-4 & z+1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{sau } -x + 2y - 2z - 14 = 0.$$

Distanța de la punctul M_2 la acest plan este $d(M_2, P) = \frac{|5 + 10 - 10 - 14|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = 3$. Prin urmare, lungimea perpendicului comune este 3.

Se poate observa că lungimea perpendicului comune este egală cu $|M_2N|$ și aceasta reprezintă înălțimea paralelipipedului construit pe vectorii $\overrightarrow{M_1M_2}$, v_1 și v_2 . Deci putem obține lungimea perpendicului comune și după formula

$$h = \pm \frac{(\overrightarrow{M_1M_2}, v_1, v_2)}{|v_1 \times v_2|} = \frac{9}{3} = 3.$$

24. Să se calculeze distanța de la punctul $M_1(3, -1, 2)$ la dreapta (d) $2x - y + z = 0$, $x + y - z + 1 = 0$.

Rezolvare. Mai întîi vom pune în evidență un punct al dreptei d și vom calcula direcția acesteia.

Luînd $z = 0$, din ecuațiile dreptei d obținem $x = -\frac{1}{3}$, $y = -\frac{2}{3}$. Fie $M_2(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 0)$.

Direcția dreptei d este

$$v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3j + 3k.$$

Cum se vede din
construit pe vectorii

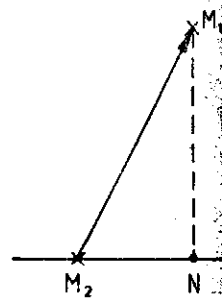


Fig. 5

25. Să se calculeze
 $6x + 2y - 9z + 1$

Rezolvare. Vom găsi
paralelă cu normala la

astfel coordonatele punctului

lui O' . În cazul de față

deci sistemul de ecuații

$O'(x', y', z')$, din relațiile

26. Să se determine
 $(P_2) x + 2y - z + 1 = 0$

a) să aibă în vedere

b) să treacă prin

c) să se intersecteze

Rezolvare. a) Pentru

ca sistemul format cu

necesar și suficient ca

Deci

b) Ținînd seama de

dreaptă este necesar și

simplu nedeterminat.

extinse și egal cu doi

$$m = \sqrt{\dots}$$

Cum se vede din fig. 5, distanța M_1N de la M_1 la dreapta d , este înălțimea paralelogramului construit pe vectorii $\overrightarrow{M_1M_2}$ și v . Această înălțime este

$$h = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2} \times v|}{v} = \frac{\sqrt{498}}{6}.$$

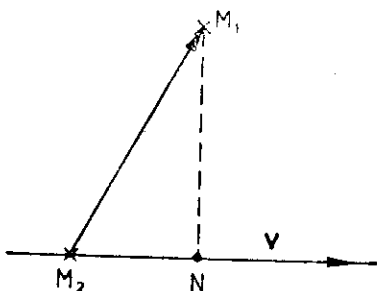


Fig. 5

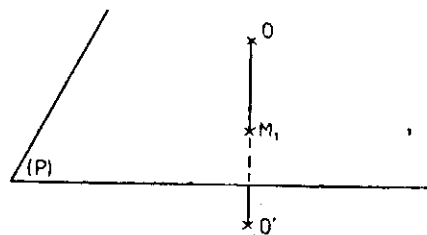


Fig. 6

25. Să se calculeze coordonatele punctului simetric al originii față de planul $6x + 2y - 9z + 121 = 0$.

Rezolvare. Vom scrie mai întâi ecuația dreptei OM_1 , cunoscând că aceasta trece prin O și este paralelă cu normala la planul P (fig. 6). Intersectăm apoi această dreaptă cu planul P , obținând astfel coordonatele punctului M_1 . Scriind apoi faptul că $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OO'}/2$, deducem coordonatele punctului O' . În cazul de față ecuația dreptei OM_1 este $\frac{x}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-9}$. Intersectând planul cu OM_1 , rezolvând deci sistemul de ecuații $6x + 2y - 9z + 121 = 0$, $\frac{x}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-9}$, obținem $M_1(-6, -2, 9)$. Dacă

$O'(x', y', z')$, din relația $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OO'}/2$, rezultă $O'(-12, -4, 18)$.

26. Să se determine $m, n \in \mathbb{R}$ astfel încât planele (P_1) $2x - y + 3z - 1 = 0$, (P_2) $x + 2y - z + n = 0$, (P_3) $x + my - nz + 10 = 0$:

- să aibă în comun un punct;
- să treacă printr-o aceeași dreaptă;
- să se intersecteze după trei drepte paralele distincte.

Rezolvare. a) Pentru ca cele trei plane să aibă în comun un singur punct este necesar și suficient ca sistemul format cu cele trei ecuații ale planelor să fie compatibil determinat. Prin urmare, este necesar și suficient ca determinantul sistemului să fie diferit de zero (sistemul fiind de tip pătrat). Deci

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & m & -n \end{vmatrix} \neq 0 \text{ sau } n - m \neq -1.$$

b) Ținând seama de ecuațiile reduse ale dreptei (11), pentru ca cele trei plane să treacă prin aceeași dreaptă este necesar și suficient ca sistemul de ecuații $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_3 = 0$ să fie compatibil simplu nedeterminat. Punind condiția ca rangul matricii acestui sistem să fie egal cu rangul matricii extinse și egal cu doi, obținem soluțiile

$$m = \frac{\sqrt{106}}{2}, n = \frac{-2 + \sqrt{106}}{2} \text{ și } m = -\frac{\sqrt{106}}{2}, n = \frac{-2 - \sqrt{106}}{2}.$$

c) În acest caz trebuie ca rangul sistemului $P_1 = 0, P_2 = 0, P_3 = 0$ să fie doi, iar rangul matricii extinse a sistemului să fie trei. Astfel fiecare două dintre plane se intersectează după o dreaptă care este paralelă cu al treilea plan. Din aceste condiții obținem $m = n + 1$ și $n \neq \frac{-2 \pm \sqrt{106}}{2}$.

27. Să se calculeze unghiul dintre dreapta (d) $x + y + 3z = 0$, $x - y - z = 0$ și planul (P) $x - y - z + 1 = 0$.

Rezolvare. Vectorul director al dreptei d este

$$v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2i + 4j - 2k.$$

Determinăm mai întâi unghiul dintre d și N , N fiind vectorul normal la planul P (fig. 7). Deoarece $N(1, -1, -1)$, obținem $\cos \angle(v, N) = \frac{v \cdot N}{|v| \cdot |N|} = 0$. Prin urmare, de aici tragem con-

cluzia că v este perpendicular pe N și deci că dreapta d este paralelă cu planul P . Rămâne de studiat dacă dreapta aparține sau nu planului.

Este de ajuns a vedea dacă un punct al dreptei d aparține planului P . Un punct al dreptei, se vede ușor, este originea $x = 0, y = 0, z = 0$. Acesta nu verifică ecuația planului și deci dreapta nu este conținută în plan.

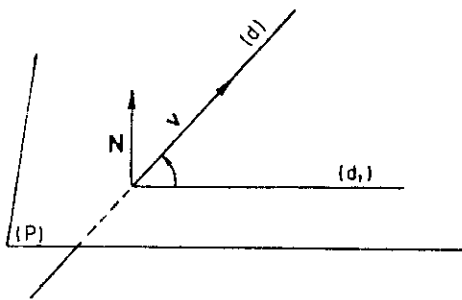


Fig. 7

Probleme propuse spre rezolvare

28. Să se scrie ecuația planului determinat de punctele M_1, M_2 și M_3 , știind că:

a) $M_1(0, 0, 0), M_2(3, -2, 1), M_3(1, 4, 0)$;

b) $M_1(1, -1, 1), M_2(1, 3, 3), M_3(4, 0, -3)$.

29. Să se cerceteze coplanaritatea următoarelor puncte:

$$M_1(3, 1, 0), M_2(0, 7, 2), M_3(-1, 0, -5), M_4(-1, 1, -2).$$

30. Să se scrie ecuația unui plan care taie axele de coordonate în punctele

$$M_1(-1, 0, 0), M_2(0, 2, 0) \text{ și } M_3(0, 0, 3).$$

31. Să se scrie ecuația unui plan care trece prin punctul $A(1, -1, 0)$ și este perpendicular pe vectorul \vec{AB} , știind că $B(2, 0, 3)$.

32. Să se reducă la forma normală ecuațiile următoarelor plane:

a) $2x - 9y + 6z - 22 = 0$; b) $6x - 6y - 7z + 33 = 0$.

33. Să se calculeze distanța de la punctul M_0 la planul P , știind că:

a) $M_0\left(2, 0, -\frac{1}{2}\right), (P) 4x - 4y + 2z + 17 = 0$;

b) $M_0(0, 0, 0), (P) 15x - 10y + 6z - 190 = 0$.

34. Să se calculeze

a) $3x - y + 2z = 0$

b) $6x + 2y - 3z = 0$

35. Să se studieze

a) $M_1(2, 6, 1)$

b) $M_1(1, 1, 3)$

c) $M_1(1, -1, 1)$

36. Să se determine

a) $\frac{x \sqrt{y-7}}{12} = \frac{y-7}{9}$

b) $5x - 6y + 3z = 0$

37. Să se calculeze

a) $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{6}$

b) $\begin{cases} 3x - 4y - z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$

38. Să se scrie ecuația

$M_0(2, 3, -5)$ și $2x + 3y + z + 3 = 0$.

39. Să se scrie ecuația

a) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ 3x - 5y + 2z = 0 \end{cases}$

40. Să se scrie ecuația

a) trece prin $M_0(1, 2, 3)$

b) trece prin $M_0(3, 1, 2)$

c) trece prin $M_0(2, 1, 1)$

d) trece prin $M_0(1, 1, 1)$

(P) $x + y - z = 0$

e) trece prin $M_0(1, 1, 1)$

f) $-y + z - 1 = 0$

41. Să se scrie ecuația

perpendiculară pe \vec{AB}

care trece prin $M_0(1, 1, 1)$

42. Să se scrie ecuația

planului $M_2(3, 0, 5), M_3(1, 1, 1)$

43. Să se determine

ecuația planului $2x + 3y + z - 6 = 0, 2x + 3y + z = 0$

44. Să se determine

ecuația planului $2x - y - z = 0$

angul matricii
dreaptă care
 $\sqrt{106}$

$x - y - z = 0$

(d,)

al drepte, se
deci dreapta

știind că:

punctele

0) și este

34. Să se calculeze unghiurile următoarelor perechi de plane:

- a) $3x - y + 2z + 15 = 0$ și $5x + 9y - 3z - 1 = 0$;
- b) $6x + 2y - 4z + 17 = 0$ și $9x + 3y - 6z + 4 = 0$.

35. Să se studieze coliniaritatea punctelor:

- a) $M_1(2, 6, 1)$, $M_2(1, 8, 0)$, $M_3(0, 10, -1)$;
- b) $M_1(1, 1, 3)$, $M_2(0, 2, 2)$, $M_3(-3, 5, -1)$;
- c) $M_1(1, -1, 2)$, $M_2(0, -1, 3)$, $M_3(2, 1, -1)$.

36. Să se determine cosinusurile directoare ale dreptelor

- a) $\frac{x}{12} = \frac{y-7}{9} = \frac{z+3}{20}$;
- b) $5x - 6y + 2z + 21 = 0$, $x - z + 3 = 0$.

37. Să se calculeze unghiul dreptelor

- a) $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{6} = \frac{z-5}{2}$ și $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{9} = \frac{z+1}{6}$;
- b) $\begin{cases} 3x - 4y - 2z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$ și $\begin{cases} 4x + y - 6z - 2 = 0 \\ y - 3z + 2 = 0 \end{cases}$.

38. Să se stabilească ecuațiile canonice ale dreptei ce trece prin punctul $M_0(2, 3, -5)$ și este paralelă cu dreapta $3x - y + 2z - 7 = 0$, $x + 3y - 2z + 3 = 0$.

39. Să se stabilească ecuațiile parametrice ale dreptelor

- a) $\begin{cases} 2x + 3y - z - 4 = 0 \\ 3x - 5y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y - z - 6 = 0 \\ 2x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$.

40. Să se scrie ecuația unui plan, care:

- a) trece prin punctele $M_1(2, 3, 4)$, $M_2(4, 6, 5)$ și este paralel cu vectorul $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$;
- b) trece prin $M(-2, 3, 4)$ și este paralel cu vectorii $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ și $\mathbf{v}_2 = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$;
- c) trece prin punctele $M_1(1, 1, 1)$ și $M_2(2, 2, 3)$ și este perpendicular pe planul (P) $x + y - z = 0$;
- d) trece prin punctul $M(1, -1, 1)$ și este perpendicular pe planele (P_1) $x - y + z - 1 = 0$ și (P_2) $2x + y + z + 1 = 0$.

41. Să se scrie ecuația unui plan, știind că punctul $M(3, -6, 2)$ este piciorul perpendicularei coborâte din origine pe acest plan.

42. Să se scrie ecuațiile fețelor tetraedrului cu vîrfurile în punctele: $M_1(0, 0, 2)$, $M_2(3, 0, 5)$, $M_3(1, 1, 0)$ și $M_4(4, 1, 2)$.

43. Să se determine coordonatele punctului de intersecție al planelor $x + y + z - 6 = 0$, $2x - y + z - 3 = 0$, $x + 2y - z - 2 = 0$.

44. Să se demonstreze că planele $x + y + 2z - 4 = 0$, $x + 2y - z - 2 = 0$, $2x - y - z = 0$ și $x + y + z - 3 = 0$ sînt concurente într-un punct.

45. Să se determine $\lambda \in \mathbf{R}$, astfel ca planele $x - y + z = 0$, $3x - y - z + 2 = 0$ și $4x - y - 2z + \lambda = 0$ să se intersecteze după o dreaptă.

46. Să se studieze poziția relativă a planelor

a) $5x + 8y - z - 7 = 0$, $x + 2y + 3z - 1 = 0$, $2x - 3y + 2z - 9 = 0$;

b) $x - 4y - 2z + 3 = 0$, $3x + y + z - 5 = 0$, $-3x + 12y + 6z - 7 = 0$;

c) $2x - y + 5z - 4 = 0$, $5x + 2y - 13z + 23 = 0$, $3x - z + 5 = 0$.

47. Să se studieze poziția relativă a planelor

a) $5x - z + 3 = 0$, $3y + 2z - 1 = 0$, $2x - y - 4z + 5 = 0$, $3x + 4y + 5z - 3 = 0$;

b) $5x + 2y - 6 = 0$, $x + y - 3z = 0$, $2x - 3y + z + 8 = 0$, $3x + 2z - 1 = 0$.

48. Să se afle ecuația planului care trece prin axa Oz și formează cu planul $2x + y - \sqrt{5}z - 7 = 0$ unghiul $\alpha = 60^\circ$.

49. Să se scrie ecuațiile dreptei care se află în planul xOz , trece prin origine și este perpendiculară pe dreapta

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-5}{1}.$$

50. Să se scrie ecuațiile dreptei care trece prin punctul $M_0(-1, 2, 1)$ și este paralelă cu dreapta $x + y - 2z - 1 = 0$, $x + 2y - z + 1 = 0$.

51. Să se scrie ecuațiile proiecției dreptei $(d) \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ pe planul $(P) x + y + z - 3 = 0$.

52. Să se verifice că dreptele următoare sînt concurente:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-5}{4} \text{ și } \frac{x-6}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}.$$

Să se scrie ecuația planului determinat de acestea.

53. Să se scrie ecuațiile perpendicularei coborîte din punctul M_0 pe dreapta (d) , știind că:

a) $M_0(2, 3, 1)$ și $(d) \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}$;

b) $M_0(-2, 3, 1)$ și $(d) \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+2}{4}$;

c) $M_0(0, 0, 0)$ și $(d) \frac{x-5}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-2}$.

54. Să se scrie ecuațiile perpendicularei comune la dreptele:

a) $(d_1) \frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1}$ și $(d_2) \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$;

b) $(d_1) \begin{cases} x + z - 2 = 0 \\ x + y - z - 3 = 0 \end{cases}$ și $(d_2) \begin{cases} 2x + 1 = 0 \\ y + 5z = 0. \end{cases}$

55. Să se calculeze

a) $(d_1) \frac{x+3}{4} = \frac{y}{-2}$

b) $(d_1) x = y = z$

c) $(d_1) \frac{x+7}{3} = \frac{y}{-2}$

d) $(d_1) \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$

56. Să se calculeze

$(d_1) \frac{x}{-2}$

57. Să se demonstreze

$= 2t + 2, z = -2t$

58. Să se verifice

și $\frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z}{4}$

să scrie ecuația planului

59. Să se scrie ecuațiile

$4x - y + 3z - 1 = 0$

a) trece prin originea

c) este paralel cu

d) este perpendiculară pe

60. Să se scrie ecuațiile

planelor $x + 5y + z = 0$

$x - 4y - 8z + 12 = 0$

61. Să se scrie ecuațiile

dreptei care este perpendiculară pe

62. Să se scrie ecuațiile

dreptei care este paralelă cu dreptele

a) $(d_1) \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1}$

b) $(d_1) \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

63. Să se scrie ecuațiile

dreptei $(d) 2x - y + z = 0$

64. Să se scrie ecuațiile

planului $x + 2y - z - 1 = 0$

55. Să se calculeze lungimea perpendicularăi comune a dreptelor d_1 și d_2 , știind că:

a) $(d_1) \frac{x+3}{4} = \frac{y-6}{-3} = \frac{z-3}{2}$ și $(d_2) \frac{x-4}{8} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+7}{3}$;

b) $(d_1) x = y = z$ și $(d_2) x - 1 = 0, y - 2 = 0$;

c) $(d_1) \frac{x+7}{3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+3}{-2}$ și $(d_2) \frac{x-21}{6} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-2}{-1}$;

d) $(d_1) \begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ 2x + y - z - 2 = 0 \end{cases}$ și $(d_2) \begin{cases} x + 2y - z - 2 = 0 \\ x + 2y + 2z + 4 = 0 \end{cases}$.

56. Să se calculeze distanța dintre dreptele

$$(d_1) \frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2} \text{ și } (d_2) \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2}.$$

57. Să se demonstreze că dreptele $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}$ și $x = 3t + 7, y = 2t + 2, z = -2t + 1$ determină un plan. Să se scrie ecuația acestuia.

58. Să se verifice că dreptele $2x + 2y - z - 10 = 0, x - y - z - 22 = 0$ și $\frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4}$ sînt paralele. Să se calculeze distanța dintre ele. Să se scrie ecuația planului determinat de acestea.

59. Să se scrie ecuația unui plan care trece prin dreapta de intersecție a planelor $4x - y + 3z - 1 = 0$ și $x + 5y - z + 2 = 0$ și care:

- a) trece prin origine; b) trece prin punctul $M(1, 1, 1)$;
- c) este paralel cu axa Oy ;
- d) este perpendicular pe planul $2x - y + 5z - 3 = 0$.

60. Să se scrie ecuația unui plan, care trece prin dreapta de intersecție a planelor $x + 5y + z = 0$ și $x - z + 4 = 0$ și care formează un unghi de 45° cu planul $x - 4y - 8z + 12 = 0$.

61. Să se scrie ecuația unui plan care trece prin punctul $M_0(2, 2, 1)$ și care este perpendicular pe dreapta $x + 2y - z + 1 = 0, 2x + y - z = 0$.

62. Să se scrie ecuația unui plan care trece prin punctul $M_0(1, 1, 2)$ și este paralel cu dreptele:

a) $(d_1) \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+1}{1}$ și $(d_2) \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}$;

b) $(d_1) \begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0 \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$ și $(d_2) \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$.

63. Să se scrie ecuația unui plan care trece prin punctul $M_0(2, 1, 1)$ și prin dreapta $(d) 2x - y + z - 1 = 0, x + y - z = 0$.

64. Să se scrie ecuația unui plan care conține dreapta $x - 1 = 0, x + 2y - z - 1 = 0$ și este perpendicular pe planul $x + y + z = 0$.

65. Să se studieze poziția dreptei d față de planul P , știind că :

a) $(d) \frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$ și $(P) 3x + 5y - z - 2 = 0$;

b) $(d) \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3}$ și $(P) 3x - 3y + 2z - 5 = 0$;

c) $(d) \frac{x-13}{8} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{3}$ și $(P) x + 2y - 4z + 1 = 0$.

66. Să se găsească proiecția punctului $M_0(4, -3, 1)$ pe planul $x + 2y - z - 3 = 0$.

67. Să se scrie ecuațiile dreptei ce trece prin punctele de intersecție ale planului $2x + y - 3z + 1 = 0$ cu dreptele

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z-1}{2} \text{ și } \frac{x-5}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+4}{-6}$$

68. Să se calculeze coordonatele simetricului punctului $M_0(4, 3, 10)$ față de dreapta $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}$.

69. Să se scrie ecuația planului determinat de perpendicularele coborâte din punctul $M_0(-3, 2, 5)$ pe planele $4x + y - 3z + 13 = 0$ și $x - 2y + z - 11 = 0$.

70. Să se scrie ecuația planului care trece prin punctul M_0' , simetricul punctului $M_0(1, 5, -1)$ față de planul $(P) x - 4y + 5z + 48 = 0$ și este paralel cu dreapta $(d_1) 2x - y - z + 1 = 0, 3x + 2y + 6z - 6 = 0$ și $(d_2) x + y = 0, x - y - z = 0$.

71. Să se scrie ecuația planului paralel cu planul $x + y + 2z = 0$ și care trece prin punctul de intersecție a planelor $2x + y - z - 2 = 0, x - 3y + z + 1 = 0$ și $x + y + z - 3 = 0$.

72. Să se determine $\lambda \in \mathbf{R}$ astfel încât dreptele

$$(d_1) \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{1} \text{ și } (d_2) \frac{x+1}{4} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{\lambda}$$

să fie concurente. Să se afle coordonatele punctului lor de intersecție.

73. Să se determine tăieturile pe axele de coordonate ale planului $3x - 4y + 6z - 24 = 0$.

Se numește șir de
prin $f(n) = a_n, n \in \mathbf{N}$
Un șir (a_n) este m
Un șir (a_n) este
dacă $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq$
Șirul (a_n) este co

Scriem în acest caz

Spunem că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$

spunem că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$

Dacă limita șirului

Proprietăți. a) D

b) Orice șir con

c) Orice șir con

d) Orice subșir

e) Dacă $a_n \rightarrow a$

f) Dacă $a_n \rightarrow a$

g) Dacă $|a_n -$

h) Dacă $a_n \rightarrow 0$

Criteriul genera

Limitele șirului

Orice șir monot

superior, el converge

rior, el este conver

Criteriul lui St

În ipoteza că limita

5. ȘIRURI DE NUMERE REALE

Se numește șir de numere reale o aplicație a mulțimii \mathbb{N} în \mathbb{R} . Notăm valorile acestei aplicații prin $f(n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Un șir (a_n) este mărginit dacă există un număr $M > 0$, astfel încît $|a_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Un șir (a_n) este crescător dacă $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \dots$; șirul (a_n) este descrescător dacă $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \dots$.

Șirul (a_n) este convergent dacă există $a \in \mathbb{R}$, astfel că

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid |a_n - a| < \varepsilon, \quad \forall n > n_\varepsilon. \quad (1)$$

Scriem în acest caz că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Spunem că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid a_n > \varepsilon, \quad \forall n > n_\varepsilon; \quad (2)$$

spunem că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid a_n < -\varepsilon, \quad \forall n > n_\varepsilon. \quad (3)$$

Dacă limita șirului (a_n) nu există sau este infinită, atunci șirul (a_n) este divergent.

Proprietăți. a) Dacă $a_n \rightarrow a$, atunci $|a_n| \rightarrow |a|$.

b) Orice șir convergent este mărginit.

c) Orice șir convergent are o singură limită.

d) Orice subșir al unui șir convergent este convergent către aceeași limită.

e) Dacă $a_n \rightarrow a$ și $b_n \rightarrow b$ și dacă $a_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, atunci $a \leq b$.

f) Dacă $a_n \rightarrow a$ și $c_n \rightarrow a$ și dacă $a_n \leq b_n \leq c_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, atunci $b_n \rightarrow a$.

g) Dacă $|a_n - a| \leq \alpha_n$ și $\alpha_n \rightarrow 0$, atunci $a_n \rightarrow a$.

h) Dacă $a_n \rightarrow 0$ și $|b_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$, atunci $a_n b_n \rightarrow 0$.

Criteriul general al lui Cauchy. Condiția necesară și suficientă ca un șir (a_n) să fie convergent este

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon, \quad \forall n > n_\varepsilon, \quad \forall p \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

Limitele șirurilor monotone. Orice șir monoton are limită.

Orice șir monoton și mărginit este convergent. Dacă șirul (a_n) este monoton crescător și mărginit superior, el converge către marginea superioară. Dacă (a_n) este monoton descrescător și mărginit inferior, el este convergent către marginea sa inferioară.

Criteriul lui Stolz. Fie șirul (b_n) monoton crescător, cu limita $+\infty$. Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}, \quad (5)$$

în ipoteza că limita din partea dreaptă există (finită sau nu).

Șirul $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ este monoton crescător și mărginit superior: limita sa este

$$\lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \quad (6)$$

Puncte limită ale unui șir. Prin punct limită al unui șir se înțelege un număr $a \in \mathbb{R}$, care are proprietatea că orice vecinătate a sa conține o infinitate de termeni ai șirului.

Fie (a_n) un șir oarecare și A mulțimea punctelor sale limită. Numim limită superioară $\overline{\lim} a_n$ a șirului (a_n) cel mai mare punct limită din A . Numim limită inferioară $\underline{\lim} a_n$ a șirului (a_n) cel mai mic punct limită din A .

Un șir (a_n) are limită dacă și numai dacă $\underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n$.

Probleme rezolvate

1. Folosind definiția limitei, să se verifice că

$$a) \lim_n \frac{2n-1}{3n+1} = \frac{2}{3}; \quad b) \lim_n \frac{2^n + (-2)^n}{3^n} = 0.$$

Rezolvare. a) Vom folosi definiția (1). Va trebui să arătăm că pentru orice număr pozitiv ε , putem determina un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât să avem, pentru orice $n > n_\varepsilon$,

$$\left| \frac{2n-1}{3n+1} - \frac{2}{3} \right| < \varepsilon, \quad \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{3n+1} < \varepsilon, \quad 3n+1 > \frac{5}{3\varepsilon} \text{ sau } n > \frac{5-3\varepsilon}{9\varepsilon}.$$

Notînd $n_\varepsilon = E\left(\frac{5-3\varepsilon}{9\varepsilon}\right)$, rezultă că pentru orice $n > n_\varepsilon$ avem $|a_n - a| < \varepsilon$ și deci relația (1)

este verificată. Aceasta stabilește convergența șirului către $\frac{2}{3}$. Dacă luăm $\varepsilon = \frac{1}{10}$, atunci $n_\varepsilon = 5$ și deci termenii a_6, a_7, \dots diferă de limita $\frac{2}{3}$ cu mai puțin de $\frac{1}{10}$. Dacă luăm $\varepsilon = \frac{1}{100}$, atunci $n_\varepsilon = 55$ și deci termenii a_{56}, a_{57}, \dots diferă de limita $\frac{2}{3}$ cu mai puțin de $\frac{1}{100}$.

b) Fiind dat $\varepsilon > 0$, va trebui să determinăm un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încît $\frac{2^n + (-2)^n}{3^n} < \varepsilon$,

$$\forall n > n_\varepsilon. \text{ Dar } \frac{2^n + (-2)^n}{3^n} < 2 \cdot \frac{2^n}{3^n} \text{ și dacă impunem ca } 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n < \varepsilon, \text{ rezultă } n > \frac{\ln \frac{\varepsilon}{2}}{\ln \frac{2}{3}}. \text{ Luînd } n_\varepsilon =$$

$$= E\left(\frac{\ln \frac{\varepsilon}{2}}{\ln \frac{2}{3}}\right), \text{ avem } \frac{2^n + (-2)^n}{3^n} < \varepsilon, \text{ pentru } n > n_\varepsilon. \text{ Prin urmare, șirul converge la zero. Am folosit}$$

aici notația $E(x)$ pentru partea întreagă a lui x .

2. Să se arate că șirul cu termenul general $a_n = \frac{2^n + (-2)^n}{2^n}$ nu este convergent.

Rezolvare. Să observăm că pentru n par avem $a_n = 2$ și pentru n impar avem $a_n = 0$, adică două subșiruri convergente la limite diferite. Dacă șirul (a_n) ar fi convergent la a , atunci cele două subșiruri (al termenilor de rang par și de rang impar) ar trebui să tindă tot către a . Datorită unicității limitei unui șir convergent, ar trebui ca a să fie egal cu zero și cu doi. Aceasta este imposibil.

3. Să se arate că șirul cu termenul general $a_n = \left(\sin n \frac{\pi}{2}\right) \cdot n^3$ este nemărginit și nu tinde către ∞ .

Rezolvare. Dacă șirul ar fi mărginit, ar însemna că ar exista un număr M , astfel că $|a_n| < M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dar, oricare ar fi $M > 0$, pentru orice număr natural de forma $n = 4k + 1 > M^{\frac{1}{3}}$ avem $a_{4k+1} = (4k + 1)^3 > M$.

Să arătăm acum că șirul (a_n) nu tinde către infinit. Dacă șirul ar tinde către ∞ , ar însemna că pentru $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel că, în baza relației (2), să avem $a_n > \varepsilon$, $\forall n > n_\varepsilon$. Fie $n = 2m$; atunci $a_{2m} = 0$, ceea ce dovedește că șirul dat nu tinde către infinit.

4. Fie șirul cu termenul general $a_n = \frac{\alpha_0 n^k + \alpha_1 n^{k-1} + \dots + \alpha_k}{\beta_0 n^p + \beta_1 n^{p-1} + \dots + \beta_p}$, $\alpha_0, \beta_0 \neq 0$, $k, p > 0$. Să se calculeze $\lim_n a_n$.

Rezolvare. Putem scrie

$$a_n = \frac{n^k \left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{n} + \dots + \frac{\alpha_k}{n^k} \right)}{n^p \left(\beta_0 + \frac{\beta_1}{n} + \dots + \frac{\beta_p}{n^p} \right)}$$

Dacă $p = k$, atunci $a_n = \frac{\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{n} + \dots + \frac{\alpha_k}{n^k}}{\beta_0 + \frac{\beta_1}{n} + \dots + \frac{\beta_p}{n^p}}$ și deci $\lim_n a_n = \frac{\alpha_0}{\beta_0}$. Dacă $p > k$, atunci $a_n =$

$$\frac{\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{n} + \dots + \frac{\alpha_k}{n^k}}{\beta_0 + \frac{\beta_1}{n} + \dots + \frac{\beta_p}{n^p}} \cdot \frac{1}{n^{p-k}} \text{ și } \lim_n a_n = 0.$$

Dacă $p < k$, atunci $a_n = n^{k-p} \cdot \frac{\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{n} + \dots + \frac{\alpha_k}{n^k}}{\beta_0 + \frac{\beta_1}{n} + \dots + \frac{\beta_p}{n^p}}$ și $\lim_n a_n = +\infty$, dacă $\alpha_0 \cdot \beta_0 > 0$, sau

$\lim_n a_n = -\infty$, dacă $\alpha_0 \cdot \beta_0 < 0$.

5. Să se calculeze limita șirului cu termenul general

$$a_n = \frac{1 + a + a^2 + \dots + a^n}{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n}}, \quad |a| < 1.$$

Rezolvare. Deoarece $1+a+a^2+\dots+a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$, putem scrie $a_n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \cdot \frac{1}{4} - 1$.

Deoarece $\lim_n a^{n+1} = 0$ pentru $|a| < 1$ și $\lim_n \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = 0$, rezultă că $\lim_n a_n = \frac{3}{4(1-a)}$.

6. Se consideră șirul (a_n) definit prin $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_n = \frac{a_{n-2} + a_{n-1}}{2}$, $\forall n > 2$.
Să se arate că

$$a_n = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}, \quad \forall n \geq 2,$$

și să se calculeze $\lim a_n$. Să se afle rangul de la care începînd termenii șirului aproximează limita cu trei zecimale exacte.

Rezolvare. Aplicăm metoda inducției. Relația este verificată pentru $n = 2$, deoarece $a_2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = 1$. Presupunem adevărată relația pentru n și să arătăm că

$$a_{n+1} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}.$$

Dar

$$a_{n+1} = \frac{a_{n-1} + a_n}{2} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-2}} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \right\} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}.$$

Conform principiului inducției, relația este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Deoarece $\lim_n \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} = 0$, rezultă că $\lim_n a_n = \frac{2}{3}$. Ținînd seama de relația (1), va trebui să determinăm un rang $n_k \in \mathbb{N}$, astfel că $\left| a_n - \frac{2}{3} \right| < 10^{-3}$, $\forall n > n_k$.

Dar

$$\left| a_n - \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{2}{3} \cdot \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \right| = \frac{1}{3 \cdot 2^{n-2}} < 10^{-3}, \text{ adică } 2^{n-2} > \frac{1000}{3}$$

$$\text{și deci } n > 2 + \left(\ln \frac{1000}{3} \right) / \ln 2. \text{ Deci } n_k = E \left(2 + \left(\ln \frac{1000}{3} \right) / \ln 2 \right).$$

7. Să se arate că :

a) $\lim_n \frac{n}{2^n} = 0$; b) $\lim_n n a^n = 0$, $|a| < 1$; c) $\lim_n \sqrt[n]{n} = 1$;

d) $\lim_n \sqrt[n]{a} = 1$, $a > 0$.

Rezolvare. a) Deoarece $2^n = (1+1)^n = 1 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n > C_n^2$, rezultă $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{C_n^2}$ și

deci $0 < \frac{n}{2^n} < \frac{n}{C_n^2}$.

b) Deoarece $|a| < 1$

$$+ \rho^n = 1 + C_n^1 \rho + C_n^2 \rho^2 + \dots + \rho^n$$

$$< \frac{2}{(n-1)\rho^2}. \text{ Dar } \lim_n \frac{2}{(n-1)\rho^2} = 0$$

implică $a_n \rightarrow 0$, rezultă

c) Să notăm $\alpha_n = \frac{1}{n}$

să arătăm că $\alpha_n \rightarrow 0$.

$$+ C_n^2 \alpha_n^2 > C_n^2 \alpha_n^2. \text{ Prin urmare } \alpha_n \rightarrow 0$$

d) Să considerăm

Să arătăm că $\alpha_n \rightarrow 0$

astfel că $0 < \alpha_n < \frac{1}{n}$

egalitatea este evidentă

prima parte a demonstrației

8. Folosind teorema lui Cauchy pentru șiruri :

a) $a_n = \frac{1! + 2! + \dots + n!}{n!}$

c) $a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}$

Rezolvare. a) Deoarece

$$\lim_n \frac{1}{n(n+2)\dots(2n)} = 0$$

b) Deoarece $0 < \alpha_n < \frac{1}{n}$

limită în această inegalitate

c) Dacă ținem seama de

deci $0 < \frac{n}{2^n} < \frac{n}{C_n^2}$. Cum $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{C_n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n(n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n-1} = 0$, rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$.

b) Deoarece $|a| < 1$, putem scrie $|a| = \frac{1}{1+\rho}$, $\rho > 0$, deci $n|a|^n = n/(1+\rho)^n$. Cum $(1+\rho)^n = 1 + C_n^1 \rho + C_n^2 \rho^2 + \dots + C_n^n \rho^n > C_n^2 \rho^2$, rezultă $\frac{1}{(1+\rho)^n} < \frac{2}{n(n-1)\rho^2}$, astfel că $n|a|^n < \frac{2}{(n-1)\rho^2}$. Dar $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{(n-1)\rho^2} = 0$ și deci, folosind una din proprietăți ($|a_n - a| \leq \alpha_n$ și $\alpha_n \rightarrow 0$ implică $a_n \rightarrow a$), rezultă că $na^n \rightarrow 0$.

c) Să notăm $\alpha_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Se observă că $\sqrt[n]{n} > 1$, $\forall n > 1$ și deci $\alpha_n > 0$, $\forall n > 1$. Va trebui să arătăm că $\alpha_n \rightarrow 0$. Avem $\sqrt[n]{n} = \alpha_n + 1$ și deci $n = (1 + \alpha_n)^n$ sau $n = 1 + C_n^1 \alpha_n + C_n^2 \alpha_n^2 + \dots + C_n^n \alpha_n^n > C_n^2 \alpha_n^2$. Prin urmare, $0 < \alpha_n^2 < \frac{n}{C_n^2}$ și, deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{C_n^2} = 0$, rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$.

d) Să considerăm mai întâi cazul $a > 1$. Atunci $\sqrt[n]{a} > 1$. Fie $\alpha_n = \sqrt[n]{a} - 1$, astfel că $\alpha_n > 0$. Să arătăm că $\alpha_n \rightarrow 0$. Avem $\sqrt[n]{a} = 1 + \alpha_n$, deci $a = (1 + \alpha_n)^n = 1 + C_n^1 \alpha_n + \dots + C_n^n \alpha_n^n > C_n^1 \alpha_n$, astfel că $0 < \alpha_n < \frac{a}{C_n^1}$. Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{C_n^1} = 0$, rezultă că $\alpha_n \rightarrow 0$. Dacă $a = 1$, atunci $\alpha_n = 1$ și

egalitatea este evidentă. Dacă $a < 1$, atunci scriem $a = \frac{1}{b}$ cu $b > 1$. Prin urmare, $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}}$ și după prima parte a demonstrației $\sqrt[n]{b} \rightarrow 1$, astfel că $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$.

8. Folosind trecerea la limită în inegalități, să se calculeze limita următoarelor șiruri:

a) $a_n = \frac{1! + 2! + \dots + n!}{(2n)!}$; b) $a_n = n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + n^2 \sin \frac{\pi}{2^n}$;

c) $a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)}$; d) $a_n = \frac{(n-1)a_{n-1} - n}{(n+1)^2}$, $a_1 = 0$.

Rezolvare. a) Deoarece $0 < a_n < \frac{n \cdot n!}{(2n)!}$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot n!}{(2n)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+1) \dots (2n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n \cdot n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+2} \dots (2n) = 0$, rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

b) Deoarece $0 < \sin \frac{\pi}{2^n} < \frac{\pi}{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, rezultă că $0 < a_n < n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + n^2 \cdot \frac{\pi}{2^n}$. Trecind la limită în această inegalitate și ținând seama că $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \frac{\pi}{2^n} = 0$, obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

c) Dacă ținem seama de inegalitatea $\frac{2k-1}{2k} < \frac{2k}{2k+1}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, rezultă

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{2n}{2n+1} \text{ și}$$

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} > \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots \cdot \frac{2n-2}{2n-1}$$

Prin urmare,

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \dots \frac{2n-2}{2n-1} < a_n < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \dots \frac{2n}{2n+1}$$

de unde prin înmulțirea cu termenul $a_n = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \dots \frac{2n-1}{2n-2} \cdot \frac{1}{2n}$, obținem

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2n} < a_n^2 < \frac{1}{2n+1} \quad (7)$$

Trecând la limită în inegalitatea (7), deducem că $\lim_n a_n = 0$.

d) Scriind câțiva termeni ai șirului, observăm că aceștia sînt negativi: $a_1 = 0$, $a_2 = -\frac{2}{3^2}$

$a_3 = -\frac{31}{3^2 \cdot 4^2}$. Presupunind prin inducție că $a_{n-1} < 0$, din relația de definiție rezultă că $a_n < 0$ și deci în baza principiului inducției $a_n < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Notînd prin $b_n = -a_n$, rezultă

$$b_n = \frac{n-1}{(n+1)^2} b_{n-1} + \frac{n}{(n+1)^2} \text{ și } b_n > 0, \forall n > 1.$$

Să observăm că $b_1 < 1$, $b_2 < 1$, $b_3 < 1$. Presupunînd prin inducție că $b_{n-1} < 1$, din relația de mai sus deducem

$$b_n < \frac{n-1}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+1)^2} = \frac{2n-1}{(n+1)^2} < 1.$$

Prin urmare, $0 < b_n < 1$ și $0 < b_n < \frac{(2n-1)}{(n+1)^2}$.

astfel că, prin trecere la limită în ultima relație, rezultă $\lim_n b_n = 0$ și $\lim_n a_n = 0$.

9. Să se calculeze $\lim_n a_n$, pentru:

a) $a_n = \frac{\alpha^n}{(1+\alpha)(1+\alpha^2)\dots(1+\alpha^n)}$, $\alpha > 0$; b) $a_n = \frac{2^2 + 4^2 + \dots + (2n)^2}{1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2}$.

Rezolvare. a) Dacă $\alpha < 1$, atunci prin neglijaarea puterilor lui α din parantezele de la numitor obținem $0 < a_n < \alpha^n$ și cum $\lim_n \alpha^n = 0$ pentru $\alpha < 1$, rezultă $\lim_n a_n = 0$. Dacă $\alpha = 1$, atunci $a_n = \frac{1^n}{2^n}$ și deci $\lim_n a_n = 0$. În sfîrșit, dacă $\alpha > 1$, atunci, neglijînd pe 1 în fiecare paranteză de la numitor, obținem

$$0 < a_n < \frac{\alpha^n}{\alpha \cdot \alpha^2 \dots \alpha^n} = \alpha^{\frac{n-n(n+1)}{2}}$$

Deoarece $\lim_n \alpha^{\frac{-n^2+n}{2}} = 0$, prin trecere la limită obținem $\lim_n a_n = 0$. Deci $\lim_n a_n = 0$, $\forall \alpha > 0$.

b) Putem

$$a_n = \frac{2^n}{1^n + \dots + 2^n}$$

astfel că $\lim_n a_n =$

10. Să se

a) $a_n =$

Rezolvare.

deducem că și

Deoarece

Să presupun

$$a_n = (1 + a_{n-1})^{-1}$$

$$l_{1,2} = \frac{(-1 \pm \sqrt{5})}{2}$$

posibilă.

Să arătăm

definiția; dat fi

să avem $|a_n -$

$$|a_n - l|$$

aici am folosit

Dacă notăm

atunci $b_n < K$

sau

Trecînd la

b) Avem

$\forall n \in \mathbb{N}$. Apoi,

$$a_n = 1 + \frac{2}{a_{n-1}}$$

Procedind ca la exercițiul a), presupunem că șirul (a_n) ar fi convergent către l . Trecind la limită în relația de definiție a șirului și ținând seama că $l \in (1, 3)$, obținem $l = 2$. Pentru a arăta că $l = 2$ este într-adevăr limita șirului folosim proprietatea g). Avem

$$|a_n - l| = \left| 1 + \frac{2}{a_{n-1}} - 2 \right| = \frac{|a_{n-1} - 2|}{a_{n-1}}$$

Deoarece $a_{n-1} < 3$, rezultă că $a_n = 1 + \frac{2}{a_{n-1}} > 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Prin urmare, $\frac{1}{a_n} < \frac{3}{5}$, astfel că

$$|a_n - 2| \leq \frac{3}{5} |a_{n-1} - 2| < \left(\frac{3}{5}\right)^2 |a_{n-2} - 2| < \dots < \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} |a_1 - 2|.$$

Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$, după proprietatea g) rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$.

11. Folosind teorema de convergență a șirurilor monotone și mărginite, să se cerceteze convergența următoarelor șiruri:

a) $a_n = \frac{n^n}{(n!)^2}$; b) $a_n = \sqrt{a + a_{n-1}}$, $a > 0$, $a_0 = 0$;

c) $a_n = \frac{1}{2} \left(a_{n-1} + \frac{a}{a_{n-1}} \right)$, $a_0 > 0$; d) $a_n = \frac{a}{2} - \frac{a_{n-1}^2}{2}$, $a_0 = 0$, $0 < a < 1$;

e) $a_{n+1} = a_n(2 - a_n)$, $0 < a_0 < 1$.

Rezolvare. a) Comparăm doi termeni consecutivi pentru a stabili monotonia șirului. Avem

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{[(n+1)!]^2} \cdot \frac{(n!)^2}{n^n} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)^n}{n^n} = \frac{1}{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{e}{n+1} < 1, \forall n > 2,$$

deoarece șirul cu termenul general $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ este crescător și tinde către e . Deci șirul (a_n) este descrescător și, cum $a_n > 0$, rezultă că este și mărginit inferior, prin urmare, este convergent. Dacă notăm $l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, atunci, trecind la limită în relația

$$a_{n+1} = a_n \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

rezultă $l = l \cdot 0 \cdot e$, astfel că $l = 0$. Deci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

b) Putem scrie $a_0 = 0$, $a_1 = \sqrt{a}$, $a_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}$, ..., $a_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \dots + \sqrt{a}}}$, ... Prin neglijarea ultimului \sqrt{a} din expresia lui a_n , obținem

$$a_n > \sqrt{a + \sqrt{a + \dots + \sqrt{a}}} = a_{n-1}$$

astfel că rezultă $a_{n-1} < a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, și deci șirul (a_n) este crescător.

Din relația $a_n = \sqrt{a + a_{n-1}}$ rezultă $a_n^2 = a + a_{n-1}$, de unde

$$a_n = \frac{a}{a_n} + \frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

Deoarece șirul (a_n)

și $\frac{a_1}{a_n} < 1 \left(\frac{\sqrt{a}}{a_n} < 1 \right)$

Din relația de mai sus și deci este convergent.

$= \sqrt{a + l}$, de unde $l =$

c) Deoarece $a_0 > 0$ avem $a_{n-1}^2 - 2a_n a_{n-1}$

Această relație arată că aceasta să aibă răd.

și deci șirul (a_n) este d) și deci este convergent.

d) Să observăm

stabilește ușor că $0 < a_n$

$= \frac{1}{2} a_2^2 > 0$ și $a_2 - a_1$

că $a_{2k-1} - a_{2k+1} > 0$ și

Într-adevăr, avem a_{2k}

Aceste relații arată că șiruri sînt mărginite,

de definiție scrisă pentru

Trecind la limită în ecuația

cele două ecuații obținem

și deci șirul (a_n) este

Fie $l = l_1 = l_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

și deci $l = -1 + \sqrt{1+l}$

b) Putem scrie

$$a_n = \frac{2^2 + 4^2 + \dots + (2n)^2}{1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2} = \frac{2^2 + 4^2 + \dots + (2n)^2}{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (2n)^2 - [2^2 + 4^2 + \dots + (2n)^2]} =$$

$$= \frac{2^2(1^2 + 2^2 + \dots + n^2)}{2n(2n+1)(4n+1) - 2^2(1^2 + 2^2 + \dots + n^2)} = \frac{4n(n+1)(2n+1)}{2n(2n+1)(2n-1)}$$

astfel că $\lim_n a_n = 1$.

10. Să se cerceteze natura șirurilor:

a) $a_n = \frac{1}{1 + a_{n-1}}$, $a_0 = 0$; b) $a_n = 1 + \frac{2}{a_{n-1}}$, $a_0 = 1$.

Rezolvare. a) Avem $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$. Folosind metoda inducției, presupunând că $a_{n-1} > 0$,

deducem că și $a_n > 0$.

Deoarece $a_{n-1} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, se obține $a_n = (1 + a_{n-1})^{-1} < 1$. Prin urmare, $0 < a_n < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Să presupunem acum că șirul (a_n) este convergent și fie $l = \lim_n a_n$. Trecînd la limită în relația

$$a_n = (1 + a_{n-1})^{-1}, \text{ obținem pentru determinarea limitei } l \text{ următoarea ecuație: } l = \frac{1}{1+l}.$$

Prin urmare, $l_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ și deoarece $a_n \in (0, 1)$, rezultă că numai valoarea $l = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ ar fi posibilă.

Să arătăm mai departe că $l = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ este într-adevăr limita șirului (a_n) . Folosim definiția; dat fiind $\epsilon > 0$, va trebui să determinăm un rang $n_\epsilon \in \mathbb{N}$; astfel ca pentru orice $n > n_\epsilon$ să avem $|a_n - l| < \epsilon$. Înlocuind pe a_n cu expresia sa, obținem

$$|a_n - l| = \left| \frac{1}{1 + a_{n-1}} - l \right| = \left| \frac{1 - l - la_{n-1}}{1 + a_{n-1}} \right| = \frac{l|l - a_{n-1}|}{1 + a_{n-1}} = \frac{|l - a_{n-1}|}{(1+l)(1+a_{n-1})};$$

aici am folosit faptul că l satisface ecuația $l^2 + l - 1 = 0$.

Dacă notăm $b_n = \frac{1}{(1+l)(1+a_{n-1})}$, se vede că $b_n < \frac{1}{1+l}$ și dacă punem $K = \frac{1}{1+l}$, atunci $b_n < K$ și $K < 1$. Obținem astfel $|a_n - l| < K|a_{n-1} - l|$ și $K < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Deci

$$|a_n - l| < K|a_{n-1} - l| < K^2|a_{n-2} - l| < \dots < K^{n-1}|a_1 - l|$$

sau

$$|a_n - l| < K^{n-1}|a_1 - l|.$$

Trecînd la limită în această inegalitate și ținînd seama că $\lim_n K^{n-1} = 0$, rezultă $\lim_n a_n = l$.

b) Avem $a_n = 1 + \frac{2}{a_{n-1}}$, $a_0 = 1$ și deci $a_1 = 3$, $a_2 = \frac{5}{3}$. Prin inducție deducem că $a_n > 0$,

$\forall n \in \mathbb{N}$. Apoi, deoarece $a_n = 1 + \frac{2}{a_{n-1}}$, se vede că $a_n > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Deoarece $a_{n-1} > 1$, rezultă

$$a_n = 1 + \frac{2}{a_{n-1}} < 1 + 2, \forall n \in \mathbb{N}. \text{ Prin urmare, șirul } (a_n) \text{ este mărginit: } 1 < a_n < 3, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Trecind la
 ntru a arata

Deoarece şirul (a_n) , $a_n > 0$, este crescător, rezultă $a_{n-1} < a_n$ şi $a_1 < a_n$ şi deci $\frac{a_{n-1}}{a_n} < 1$

$$\text{şi } \frac{a_1}{a_n} < 1 \left(\frac{\sqrt{a}}{a_n} < 1 \text{ implică } \frac{a}{a_n} < \sqrt{a} \right).$$

Din relaţia de mai sus deducem $a_n < \sqrt{a} + 1$, $\forall n$; aceasta arată că (a_n) este mărginit superior şi deci este convergent. Fie $l = \lim a_n$; trecind la limită în relaţia $a_n = \sqrt{a + a_{n-1}}$, obţinem $l =$

$$= \sqrt{a + l}, \text{ de unde } l = \frac{(1 + \sqrt{1 + 4a})}{2}.$$

c) Deoarece $a_0 > 0$, prin inducţie se poate arăta că $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Din relaţia de definiţie avem $a_{n-1}^2 - 2a_n a_{n-1} + a = 0$.

Această relaţie arată că $x = a_{n-1}$ este o rădăcină reală a ecuaţiei $x^2 - 2a_n x + a = 0$. Pentru ca aceasta să aibă rădăcini reale trebuie ca $\Delta = a_n^2 - a \geq 0$ şi deci $a_n \geq \sqrt{a}$. Apoi rezultă

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{2} \left(a_{n-1} + \frac{a}{a_{n-1}} \right) - a_{n-1} = \frac{-(a_{n-1}^2 - a)}{2a_{n-1}} < 0$$

şi deci şirul (a_n) este descrescător. Deoarece $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, rezultă că (a_n) este mărginit inferior şi deci este convergent. Trecind la limită în relaţia de recurenţă, obţinem $\lim_n a_n = \sqrt{a}$.

d) Să observăm că $0 < a_1 = \frac{a}{2} < 1$, $0 < a_2 = \frac{a}{2} - \frac{a^2}{8} < \frac{a}{2} < 1$. Prin metoda inducţiei se

stabileşte uşor că $0 < a_n < \frac{a}{2} < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Deci şirul (a_n) este mărginit. Apoi, avem $a_1 - a_3 =$

$$= \frac{1}{2} a_2^2 > 0 \text{ şi } a_2 - a_4 = \frac{(a_1 + a_3)(a_3 - a_1)}{2} < 0. \text{ Folosind metoda inducţiei, vom presupune}$$

că $a_{2k-1} - a_{2k+1} > 0$ şi $a_{2k} - a_{2k+2} < 0$ şi va trebui să arătăm că $a_{2k+1} - a_{2k+3} > 0$ şi $a_{2k+2} - a_{2k+4} < 0$.

Într-adevăr, avem $a_{2k+1} - a_{2k+3} = \frac{a}{2} - \frac{a^2}{2} - \frac{a}{2} + \frac{a_{2k+2}^2}{2} = \frac{(a_{2k+2} + a_{2k})(a_{2k+2} - a_{2k})}{2} > 0,$

$$a_{2k+2} - a_{2k+4} = \frac{(a_{2k+3} + a_{2k+1})(a_{2k+3} - a_{2k+1})}{2} < 0.$$

Aceste relaţii arată că şirul (a_{2k}) este crescător şi (a_{2k+1}) este descrescător. Cum aceste două şiruri sînt mărginite, rezultă că ele sînt convergente. Fie $l_1 = \lim_k a_{2k}$ şi $l_2 = \lim_k a_{2k+1}$. Din relaţia de definiţie scrisă pentru $n = 2k$ şi $n = 2k + 1$ obţinem

$$a_{2k} = \frac{a}{2} - \frac{a_{2k-1}^2}{2} \text{ şi } a_{2k+1} = \frac{a}{2} - \frac{a_{2k}^2}{2}.$$

Trecind la limită în aceste egalităţi, obţinem sistemul $l_1 = \frac{a}{2} - \frac{1}{2} l_2^2$, $l_2 = \frac{a}{2} - \frac{1}{2} l_1^2$. Scăzînd

cele două ecuaţii obţinem $(l_1 - l_2) \left[1 + \frac{1}{2} (l_1 + l_2) \right] = 0$. Cum $l_1 \geq 0$ şi $l_2 \geq 0$, rezultă că $l_1 = l_2$

şi deci şirul (a_n) este convergent, deoarece cele două subsiruri care-l compun au aceeaşi limită.

Fie $l = l_1 = l_2 = \lim_n a_n$. Trecind la limită în relaţia $a_n = \frac{a}{2} - \frac{a_{n-1}^2}{2}$, obţinem ecuaţia $l = \frac{a}{2} - \frac{1}{2} l^2$

şi deci $l = -1 + \sqrt{1 + a} > 0$.

c) Relația de definiție a șirului se scrie $a_n^2 - 2a_n + a_{n+1} = 0$. Aceasta arată că ecuația $x^2 - 2x + a_{n+1} = 0$ are rădăcini reale și deci $\Delta = 1 - a_{n+1} \geq 0$. Prin urmare, $a_{n+1} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$. De asemenea din relația $a_{n+1} = a_n(2 - a_n)$ rezultă $a_{n+1} \geq a_n(2 - 1) = a_n$.

Aceasta arată că șirul (a_n) este crescător și, deoarece $a_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$, rezultă că șirul (a_n) este convergent. Fie $l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$; prin trecere la limită în relația de definiție obținem ecuația $l = l(2 - l)$ cu soluțiile $l = 0$ și $l = 1$. Deoarece (a_n) este crescător și $a_n > 0$, rezultă că a_n nu tinde către 0 și deci $l = 1$.

12. Să se arate că șirul cu termenul general $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ este monotón descrescător și mărginit inferior.

Rezolvare. Fie $a > 0$. După formula binomului lui Newton avem $(1 + a)^n = 1 + C_n^1 a + C_n^2 a^2 + \dots + C_n^n a^n \geq 1 + an$ și deci

$$(1 + a)^n \geq 1 + an, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (8)$$

Luând $a = \frac{1}{n-1}$ în inegalitatea (8), obținem

$$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n > 2 + \frac{1}{n-1}, \forall n \in \mathbb{N},$$

și deci $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > 2 + \frac{1}{n} > 2, \forall n \in \mathbb{N}$. Aceasta arată că șirul (a_n) este mărginit inferior.

Dacă luăm acum $a = \frac{1}{n^2-1}$ în inegalitatea (8), obținem consecutiv:

$$\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1 + \frac{n}{n^2-1} > 1 + \frac{1}{n}; \quad \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n > 1 + \frac{1}{n};$$

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n > 1 + \frac{1}{n}; \quad \left(\frac{n}{n-1}\right)^n > \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}; \quad \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

de unde $a_{n-1} > a_n$. Deci șirul (a_n) este descrescător. Ținând seama că $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$, obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e$.

13. Folosind criteriul general al lui Cauchy, să se demonstreze convergența următoarelor șiruri:

a) $a_n = \frac{\cos x}{3} + \frac{\cos 2x}{3^2} + \dots + \frac{\cos nx}{3^n}$; b) $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$;

c) $a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$.

Rezolvare. Vom folosi condiția necesară și suficientă sub forma (4).

a) Fiind dat $\varepsilon > 0$, va trebui să determinăm un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, așa încât pentru orice $n > n_\varepsilon$ să avem $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$. Dar

$$|a_{n+p} - a_n| = \left| \frac{\cos(n+1)x}{3^{n+1}} + \dots + \frac{\cos(n+p)x}{3^{n+p}} \right| \leq \frac{1}{3^{n+1}} (|\cos(n+1)x| + \dots + |\cos(n+p)x|) \leq \frac{1}{3^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^{p-1}} \right) = \frac{1}{3^{n+1}} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^p - 1}{\frac{1}{3} - 1}$$

Deci

$$|a_{n+p} - a_n| < \frac{1}{3^{n+1}} \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3^p}\right) < \frac{1}{2 \cdot 3^n}, \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Dacă impunem acum ca $\frac{1}{2 \cdot 3^n} < \varepsilon$, adică $n > E\left(\frac{-\ln 2\varepsilon}{\ln 3}\right)$, atunci $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$, $\forall n > n_\varepsilon$,

n_ε fiind $n_\varepsilon = E\left(\frac{-\ln 2\varepsilon}{\ln 3}\right)$. Prin urmare, condiția (4) este verificată și deci șirul (a_n) este convergent.

b) Avem $|a_{n+p} - a_n| = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2}$. Ținând seama că $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, $\forall k > 1$, obținem

$$|a_{n+p} - a_n| < \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

$\forall n > \frac{1}{\varepsilon}$, astfel că alegând $n_\varepsilon = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$, condiția (4) este îndeplinită. Șirul (a_n) este deci convergent.

c) Putem scrie

$$|a_{n+p} - a_n| = \left| (-1)^{n+2} \frac{1}{n+1} + \dots + (-1)^{n+p+1} \frac{1}{n+p} \right| = \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \dots + (-1)^{p-1} \frac{1}{n+p} \right|.$$

Dacă p este par, atunci

$$|a_{n+p} - a_n| = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right) = \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) - \dots - \left(\frac{1}{n+p-2} - \frac{1}{n+p-1}\right) - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}.$$

Dacă p este impar, atunci

$$|a_{n+p} - a_n| = \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) - \dots - \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right) < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}.$$

Deci $|a_{n+p} - a_n| < \frac{1}{n}$, $\forall p \in \mathbb{N}$, și dacă alegem $n > E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ și $n_\varepsilon = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$, rezultă că $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$, $\forall n > n_\varepsilon$, $\forall p \in \mathbb{N}$. Condiția (4) este îndeplinită și deci șirul (a_n) este convergent.

14. Folosind criteriul general al lui Cauchy, să se demonstreze divergența șirurilor:

a) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$; b) $a_n = \sin n$.

Rezolvare. Trebuie să arătăm că relația (4) nu este îndeplinită. Va trebui să arătăm că există $\varepsilon > 0$ și $p \in \mathbb{N}$, astfel că $|a_{n+p} - a_n| > \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

a) Avem $|a_{n+p} - a_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p} > \frac{p}{n+p}$, de unde se vede că, dacă luăm $p = n$ și $\varepsilon = \frac{1}{2}$, deducem $|a_{2n} - a_n| > \frac{1}{2}$. Prin urmare, rezultă că șirul este divergent. Șirul (a_n) fiind crescător, rezultă că $\lim a_n = \infty$.

b) Presupunem că șirul (a_n) este convergent și fie $l = \lim \sin n$. Rezultă că $\lim[\sin(n+1) - \sin(n-1)] = 0$, adică $\lim 2 \sin 1 \cos n = 0$ și deci $\lim \cos n = 0$. Dar $\lim \sin 2n = l$, căci $(\sin 2n)$ este un subșir al lui (a_n) . Pe de altă parte $\lim \sin 2n = \lim 2 \sin n \cos n = 2l \lim \cos n = 0$. Prin urmare, $l = \lim \sin n = 0$. Deoarece $\sin^2 n + \cos^2 n = 1$ și deoarece am găsit că $\lim (\sin^2 n + \cos^2 n) = 0$ ajungem la o contradicție. Deci nu există limita șirului (a_n) .

15. Folosind criteriul lui Stolz, să se calculeze limita șirului (u_n) , știind că:

a) $u_n = \frac{a^n}{n}$, $a > 0$; b) $u_n = \frac{n^3}{a^n}$, $a > 1$;

c) $u_n = \frac{\frac{n}{1} \ln 2 + \frac{n-1}{2} \ln 3 + \dots + \frac{1}{n} \ln(n+1)}{n \ln 2 + (n-1) \ln 3 + \dots + 1 \cdot \ln(n+1)}$.

Rezolvare. a) Avem $u_n = \frac{a^n}{b_n}$, unde $a_n = a^n$ și $b_n = n$. Evident, b_n este crescător și are limita $+\infty$, astfel încât putem aplica criteriul lui Stolz. Deoarece $\lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim \frac{a^{n+1} - a^n}{n+1 - n} = (a-1) \lim a^n$, rezultă că $\lim u_n = 0$, dacă $a \leq 1$, și $\lim u_n = \infty$, dacă $a > 1$.

b) În acest caz $u_n = \frac{a_n}{b_n}$ cu $a_n = n^3$ și $b_n = a^n$. Deoarece $a > 1$, rezultă că (b_n) este crescător și tinde către $+\infty$. Aplicând criteriul lui Stolz, rezultă

$$\lim u_n = \lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3}{a^{n+1} - a^n} = \frac{1}{a-1} \lim \frac{3n^2 + 3n + 1}{a^n}$$

Pentru calculul ultimei limite vom aplica încă o dată criteriul lui Stolz, deci

$$\lim \frac{3n^2 + 3n + 1}{a^n} = \lim \frac{3(n^2 + 2n + 1) + 3(n+1) + 1 - 3n^2 - 3n - 1}{a^n(a-1)} = \frac{1}{a-1} \lim \frac{6n + 6}{a^n}$$

Aplicând încă o dată același criteriu, obținem

$$\lim \frac{6n + 6}{a^n} = \lim \frac{6n + 12 - 6n - 6}{a^n(a-1)} = \frac{6}{a-1} \lim \frac{1}{a^n} = 0$$

și deci, înlocuind mai sus, găsim $\lim u_n = 0$.

c) Scriem $u_n = \frac{a_n}{b_n}$

$$+ (n-1) \ln 3 + \dots + 1$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{1}$$

$$+ \frac{n-1}{2} \ln 3$$

$$b_{n+1} - b_n = (n$$

$$+ (n-1))$$

Din ultima relație se vede

$$\lim u_n = \lim \frac{a_n}{b_n}$$

(În ultima egalitate am

16. Să se arate

mediilor aritmetice

Reciproca acestei

Rezolvare. Aplicând

$$\lim v_n = \lim \frac{u_n}{n}$$

Pentru a arăta că

Evident, există $\lim v_n =$

17. Fie (a_n) un

$$= \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} \text{ în ipoteza}$$

Rezolvare. Fie $u_n =$

$$\lim \frac{1}{n}$$

de unde deducem egalită

18. Folosind rez

a) $u_n = \sqrt[n]{n}$; b)

Rezolvare. a) $\lim u_n =$

c) $\lim u_n = \lim \frac{a_n}{n}$

c) Scriem $u_n = \frac{a_n}{b_n}$, unde $a_n = \frac{n}{1} \ln 2 + \frac{n-1}{2} \ln 3 + \dots + \frac{1}{n} \ln(n+1)$ și $b_n = n \ln 2 + (n-1) \ln 3 + \dots + 1 \cdot \ln(n+1)$. Avem

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{1} \ln 2 + \frac{n}{2} \ln 3 + \dots + \frac{2}{n} \ln(n+1) + \frac{1}{n+1} \ln(n+2) - \left[\frac{n}{1} \ln 2 + \frac{n-1}{2} \ln 3 + \dots + \frac{1}{n} \ln(n+1) \right] = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 3 + \dots + \frac{1}{n+1} \ln(n+2),$$

$$b_{n+1} - b_n = (n+1) \ln 2 + n \cdot \ln 3 + \dots + 2 \cdot \ln(n+1) + 1 \cdot \ln(n+2) - [n \ln 2 + (n-1) \ln 3 + \dots + 1 \cdot \ln(n+1)] = \ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln(n+2).$$

Din ultima relație se vede că (b_n) este crescător la $+\infty$. Deci

$$\lim_n u_n = \lim_n \frac{\ln 2 + \frac{1}{2} \ln 3 + \dots + \frac{1}{n+1} \ln(n+2)}{\ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln(n+2)} = \lim_n \frac{\frac{1}{n+2} \ln(n+3)}{\ln(n+3)} = 0.$$

(În ultima egalitate am aplicat încă o dată criteriul lui Stolz.)

16. Să se arate că dacă șirul (u_n) este convergent și $\lim_n u_n = a$, atunci șirul mediilor aritmetice $v_n = (u_1 + u_2 + \dots + u_n)/n$ este convergent și $\lim_n v_n = a$.

Reciproca acestei afirmații nu este adevărată.

Rezolvare. Aplicind criteriul lui Stolz șirului (v_n) , obținem

$$\lim_n v_n = \lim_n \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n + u_{n+1} - (u_1 + u_2 + \dots + u_n)}{n+1-n} = \lim_n u_{n+1} = a.$$

Pentru a arăta că reciproca nu este adevărată, considerăm exemplul următor: $u_n = (-1)^n$, cu

$$v_n = \begin{cases} 0 & \text{pentru } n \text{ par,} \\ 1/n & \text{pentru } n \text{ impar.} \end{cases}$$

Evident, există $\lim_n v_n = 0$, dar (u_n) nu are limită (avem $u_{2k} = 1 \rightarrow 1$ și $u_{2k+1} = -1 \rightarrow -1$).

17. Fie (a_n) un șir de numere pozitive. Să se demonstreze că $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$ în ipoteza că ultima limită există.

Rezolvare. Fie $u_n = \sqrt[n]{a_n}$, astfel că $\ln u_n = \frac{\ln a_n}{n}$. Aplicind criteriul lui Stolz, obținem

$$\lim_n \ln u_n = \lim_n \frac{\ln a_n}{n} = \lim_n \frac{\ln a_{n+1} - \ln a_n}{n+1-n} = \lim_n \ln \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

de unde deducem egalitatea cerută.

18. Folosind rezultatul precedent, să se calculeze limitele șirurilor:

a) $u_n = \sqrt[n]{n}$; b) $u_n = \sqrt[n]{a}$, $a > 0$; c) $u_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$, $a_n > 0$ și $a_n \rightarrow a$.

Rezolvare. a) $\lim_n u_n = \lim_n \frac{n+1}{n} = 1$. b) $\lim_n u_n = \lim_n \frac{a}{a} = 1$.

c) $\lim_n u_n = \lim_n \frac{a_1 a_2 \dots a_{n+1}}{a_1 a_2 \dots a_n} = \lim_n a_{n+1} = a$.

19. Să se arate că șirul cu termenul general $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ este convergent și are limita e .

Rezolvare. Pentru stabilirea convergenței vom aplica criteriul general al lui Cauchy. În acest scop, să observăm că

$$\begin{aligned} a_{n+p} - a_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots + \frac{1}{(n+p)!} = \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left[1 + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{(n+2)\dots(n+p)} \right] < \frac{1}{n} \left[1 + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{(n+1)^{p-1}} \right] = \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1 - \frac{1}{(n+1)^p}}{1 - \frac{1}{n+1}} < \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\frac{n}{n+1}} = \frac{n+1}{n^2} < \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Dacă alegem $n_\varepsilon = E\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)$, atunci pentru orice $n > n_\varepsilon$, avem $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$, $\forall p \in \mathbb{N}$, deci (a_n) este un șir convergent.

Fie $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + C_n^1 \frac{1}{n} + \dots + C_n^n \frac{1}{n^n}$. Putem scrie

$$\begin{aligned} e_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \dots \\ &\quad \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Deoarece $1 - \frac{i}{n} < 1$, $\forall i = 1, 2, \dots, n-1$, rezultă că $e_n < a_n$, $\forall n$, și $\lim_n e_n \leq \lim_n a_n$, deci $e \leq \lim_n a_n$. Apoi, pentru $k \leq n$, avem

$$e_n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

astfel că, prin trecere la limită, obținem

$$\lim_n e_n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{k!}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Prin urmare, $e \geq a_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$, și deci $e \geq \lim_n a_n$. Rezultă că $\lim_n a_n = e$.

20. Să se determine marginea inferioară și marginea superioară pentru următoarele șiruri:

a) $a_n = 1 - \frac{1}{n}$; b) $a_n = \frac{1}{n} \cdot n^{(-1)^n} + \sin n \frac{\pi}{2}$; c) $a_n = 2 + (-2)^n$.

Rezolvare. a) Șirul este crescător și convergent către 1. Marginea inferioară a șirului este deci primul termen $a_1 = 0$. Într-adevăr, avem $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, și pentru orice $\varepsilon > 0$ există $a_1 = 0$ astfel că $a_1 < \varepsilon$. Apoi, $\sup a_n = 1$, deoarece $a_n \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, și pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ $1 - \frac{1}{n} > 1 - \varepsilon$, $\forall n > \frac{1}{\varepsilon}$, deci $n_\varepsilon = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$.

b) Se observă că $a_n = 1$, dacă $n = 2k$, $a_n = 1 + \frac{1}{n^2}$, dacă $n = 4k + 1$, și $a_n = -1 + \frac{1}{n^2}$, dacă $n = 4k - 1$. Se observă deci că $\inf a_n = -1$ și $\sup a_n = 2$. Să arătăm că $\inf a_n = -1$. Din definiția șirului avem $a_n \geq -1$, $\forall n \in \mathbb{N}$; apoi, dat fiind $\varepsilon > 0$ trebuie să determinăm un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât $a_{n_\varepsilon} < -1 + \varepsilon$. Această ultimă inegalitate are loc dacă

$$a_{4k-1} = -1 + \frac{1}{(4k-1)^2} < -1 + \varepsilon, \text{ adică } (4k-1)^2 > \frac{1}{\varepsilon}, \text{ deci } n_\varepsilon = E\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right).$$

Similar se arată că $\sup a_n = 2$. Într-adevăr, $a_n \leq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Fiind dat $\varepsilon > 0$, există $a_1 = 2$, astfel că $a_1 > 2 - \varepsilon$.

c) Se observă că $a_n = 2 + 2^n \rightarrow +\infty$ pentru n par și $a_n = 2 - 2^n \rightarrow -\infty$ pentru n impar. Prin urmare, $\inf a_n = -\infty$ și $\sup a_n = +\infty$.

21. Să se demonstreze că $\sup(a_n + b_n) \leq \sup a_n + \sup b_n$ și $\inf(a_n + b_n) \geq \inf a_n + \inf b_n$, oricare ar fi șirurile (a_n) și (b_n) .

Rezolvare. Deoarece $a_n \leq \sup a_n$ și $b_n \leq \sup b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, rezultă $a_n + b_n \leq \sup a_n + \sup b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Deci $\sup(a_n + b_n) \leq \sup a_n + \sup b_n$. Similar se demonstrează cealaltă inegalitate.

22. Să se găsească punctele limită ale șirului (a_n) , unde $a_n = a^{(-1)^{n+1}} + \frac{1}{n}$, $a > 0$. Să i se determine limitele superioară și inferioară.

Rezolvare. Putem scrie $a_{2k} = \frac{1}{a} + \frac{1}{2k} \rightarrow \frac{1}{a}$ și $a_{2k+1} = a + \frac{1}{2k+1} \rightarrow a$. Deci punctele limită sînt a și $\frac{1}{a}$: $A = \left\{a, \frac{1}{a}\right\}$. Într-adevăr, pentru $\frac{1}{a}$, avem $\left|a_{2k} - \frac{1}{a}\right| = \frac{1}{2k} < \varepsilon$, $\forall k > E\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)$; iar pentru a avem $|a_{2k+1} - a| = \frac{1}{2k+1} < \varepsilon$, $\forall k > E\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)\right]$.

Pentru $a < 1$, $\lim a_n = a$ și $\lim a_n = \frac{1}{a}$; pentru $a > 1$, $\lim a_n = \frac{1}{a}$ și $\lim a_n = a$; pentru $a = 1$, avem $\lim a_n = \lim a_n = 1$ și deci în acest caz șirul (a_n) este convergent.

Probleme propuse spre rezolvare

23. Folosind definiția limitei unui șir, să se verifice că :

a) $\lim_n \frac{n^2}{3n^2 + 1} = \frac{1}{3}$; b) $\lim_n \frac{n^2}{2n^3 + 1} = 0$; c) $\lim_n \frac{n^2}{2n^2 + 2} = \frac{1}{2}$.

24. Să se arate că șirul cu termenul general a_n nu este convergent :

a) $a_n = (1 + \cos n\pi) \frac{n}{n+1}$; b) $a_n = \frac{1 + (-1)^n n}{1+n}$.

25. Să se arate că șirul cu termenul general $a_n = n^3 \sin n \frac{\pi}{2}$ este nemărginit și nu tinde către infinit.

26. Să se calculeze $\lim a_n$, știind că :

a) $a_n = \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n^2}$; b) $a_n = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3}$;

c) $a_n = \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3}{n^4}$; d) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}$.

27. Utilizând trecerea la limită în inegalități, să se calculeze limita pentru următoarele șiruri:

$$a) a_n = \frac{n}{n^2 + 1} \cdot \sin(n!) + \frac{n^2}{(n^2 + 1)(3n + 1)}; \quad b) a_n = \frac{n^2}{n!}; \quad c) a_n = \frac{2^n}{n!};$$

$$a_n = \frac{a^n}{n!}, \quad a > 0; \quad d) a_n = \frac{4 - a_{n-1}}{3 - a_{n-1}}, \quad a_0 = 1.$$

28. Să se calculeze $\lim_n a_n$, pentru:

$$a) a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}; \quad b) a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n});$$

$$c) a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt[3]{n}; \quad d) a_n = \sqrt[3]{n}[\sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2}];$$

$$e) a_n = \frac{3^n + 5^n}{3^{n+1} + 5^{n+1}}; \quad f) a_n = \frac{\alpha^n + \beta^n}{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}, \quad \alpha > 0, \beta > 0;$$

$$g) a_n = \frac{\alpha^n}{1 + \alpha^{2n}}, \quad \alpha > 0; \quad h) a_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) \cdot \frac{3 \cdot 2^n + (-1)^n}{2^n};$$

$$i) a_n = \frac{2^n + 2 \cdot 3^n + 6^n}{3^n + 3 \cdot 4^n + 2 \cdot 6^n}.$$

29. Să se cerceteze natura șirului dat prin $a_n = \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{n}}$, pentru cazurile $a_0 = 0$ și $a_0 = 1$.

30. Utilizând teorema de convergență a șirurilor monotone și mărginite, să se cerceteze convergența următoarelor șiruri:

$$a) a_n = \frac{a^n}{n!}, \quad a > 0; \quad b) a_n = \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{7} \cdot \frac{9}{10} \dots \frac{5 + 2(n-1)}{4 + 3(n-1)};$$

$$c) a_n = 1 + \frac{2}{a_{n-1}}, \quad a_0 = 1; \quad d) a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n};$$

$$e) a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \quad b_n = \frac{a_{n-1} + 2b_{n-1}}{3}, \quad 0 < a_0 < b_0.$$

31. Utilizând criteriul general al lui Cauchy, să se demonstreze convergența șirurilor:

$$a) a_n = \frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \dots + \frac{\sin nx}{2^n}; \quad b) a_n = \frac{1}{1 \cdot 4} +$$

$$+ \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{[1 + 3(n-1)](1 + 3n)}; \quad c) a_n = \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+4)};$$

$$d) a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

32. Folosind criteriul general al lui Cauchy, să se demonstreze divergența șirurilor:

$$a) a_n = \frac{10}{1} + \frac{11}{3} + \dots + \frac{10+n}{2n+1}; \quad b) a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

33. Să se arate că șirul $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$ este convergent.

34. Folosind criteriul lui Stolz, să se calculeze limita următoarelor șiruri :

a) $a_n = \frac{n}{2^n}$; b) $a_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{n}$; c) $a_n = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$;

d) $a_n = \frac{1 + \sqrt{2} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n\sqrt{n}}$; e) $a_n = \frac{1 + 2^2\sqrt{2} + 3^2\sqrt[3]{3} + \dots + n^2\sqrt[n]{n}}{n(n+1)(2n+1)}$;

f) $a_n = \frac{1}{n} \left(\frac{a+b}{c+d} + \frac{a\sqrt{2}+b}{c\sqrt{2}+d} + \dots + \frac{a\sqrt[n]{n}+b}{c\sqrt[n]{n}+d} \right)$;

g) $a_n = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \dots + \frac{1}{\ln n} \right)$; h) $a_n = \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}}$, $p \in \mathbb{N}$;

i) $a_n = \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^p} - \frac{n}{p+1}$, $p \in \mathbb{N}$; j) $a_n = \frac{1^p + 3^p + \dots + (2n-1)^p}{n^{p+1}}$, $p \in \mathbb{N}$;

k) $a_n = \frac{(\ln 2)^2 + (\ln 3)^2 + \dots + (\ln n)^2}{n^a}$, $a > 0$.

35. Fie (a_n) un șir de numere pozitive, crescător și divergent. Să se arate că dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{a_n} = \lambda',$$

atunci $\lambda' = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$.

36. Fie (a_n) un șir de numere pozitive, crescător și divergent. Să se demonstreze că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}$$

37. Să se calculeze limita pentru următoarele șiruri :

a) $a_n = \sqrt[n]{n!}$; b) $a_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$; c) $a_n = \sqrt[n]{\ln n}$; d) $a_n = \sqrt[n]{\ln(n!)}$;

e) $a_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}$;

f) $a_n = \sqrt[n]{\frac{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}{n!}}$, $a > -1$;

g) $a_n = \sqrt[n]{\frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}}$; h) $a_n = \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n)!8^n}}$.

38. Să se arate că șirul cu termenul general

$$a_n = \cos a \cdot \cos \frac{a}{2} \dots \cos \frac{a}{2^n}, \quad 0 < a < \frac{\pi}{2},$$

este convergent și să se calculeze limita.

39. Să se calculeze $\lim_n a_n$, știind că

$$a_n = \frac{\sin \frac{1}{n^2} + \sin \frac{2}{n^2} + \dots + \sin \frac{n}{n^2}}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n}$$

40. Să se calculeze limita pentru următoarele șiruri:

a) $a_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$; b) $a_n = \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1\right)$;

c) $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{k!}$; d) $a_n = \frac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \frac{3^3-1}{3^3+1} \dots \frac{n^3-1}{n^3+1}$;

e) $a_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$; f) $a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$.

41. Fie a și b două numere reale, $a < b$. Se consideră șirurile (a_n) și (b_n) definite astfel:

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}, \dots, a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, \dots$$

$$b_1 = \sqrt{a_1 b}, b_2 = \sqrt{a_2 b_1}, \dots, b_n = \sqrt{a_n b_{n-1}}, \dots$$

Să se arate că cele două șiruri sînt convergente și au aceeași limită.

42. Să se determine marginea inferioară și marginea superioară pentru următoarele șiruri:

a) $a_n = \frac{n}{n+1}$; b) $a_n = \frac{n}{n^2+1}$; c) $a_n = \frac{n-1}{n+1} \cos n\pi$;

d) $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2} + (-1)^n \frac{n}{2n+1}$; e) $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2} \cdot \frac{n-1}{n}$.

43. Din șirul (a_n) se extrage subșirul $(a_{k_n}) \subset (a_n)$. Să se arate că $\sup a_{k_n} \leq \sup a_n$, $\inf a_{k_n} \geq \inf a_n$.

44. Să se găsească punctele limită ale șirurilor:

a) $a_n = \left(1 + \frac{\cos n\pi}{n}\right)^n$; b) $a_n = \frac{1}{n} \cdot n^{(-1)^n} + \sin n \frac{\pi}{2}$.

45. Să se determine limitele inferioară și superioară pentru următoarele șiruri:

a) $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2} + (-1)^n \frac{n}{2n+1}$; b) $a_n = \frac{n^{2(-1)^n}}{n}$;

c) $a_n = \frac{1}{n} n^{(-1)^n} + \sin^2 n \frac{\pi}{4}$; d) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left[\frac{1}{2} + (-1)^n\right] + \cos n \frac{\pi}{2}$.

1. Serii. Fie (a_n)

Dacă există $S = \lim_n$

prin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este

suma seriei. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

A determina natura

Criteriul general

V.

Dacă la o serie sînt

Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

necesară de convergență

unei serii nu este co

2. Serii cu termeni

astfel de serii, șirul su

dacă și numai dacă

cu termeni pozitivi

☞ Criteriul I al co

$\forall n \geq n_0$. a) Dacă se

seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este div

6. SERII NUMERICE

1. Serii. Fie (a_n) un șir de numere reale. Introducem șirul (S_n) al sumelor parțiale prin $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$. Dacă există $S = \lim_n S_n$, atunci putem defini expresia (numită serie)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

prin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă, dacă șirul (S_n) este convergent; limita S a șirului (S_n) se numește suma seriei. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă, dacă șirul (S_n) nu are limită sau dacă limita sa este infinită. A determina natura unei serii înseamnă a stabili dacă seria este convergentă sau divergentă.

Criteriul general al lui Cauchy. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă dacă și numai dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon, \forall n > n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Dacă la o serie se adaugă sau se scoate un număr finit de termeni, se obține o nouă serie de aceeași natură.

Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă, șirul sumelor sale parțiale este mărginit.

Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă, șirul (a_n) este convergent către zero. Aceasta este condiția necesară de convergență a unei serii. Ea mai poate fi enunțată sub forma: dacă șirul termenilor unei serii nu este convergent către zero, seria este divergentă.

2. Serii cu termeni pozitivi. O serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este cu termeni pozitivi dacă $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Pentru astfel de serii, șirul sumelor parțiale este strict crescător. O serie cu termeni pozitivi este convergentă dacă și numai dacă șirul sumelor parțiale este mărginit superior. Pentru stabilirea naturii unei serii cu termeni pozitivi se folosesc următoarele criterii.

* Criteriul I al comparației. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ două serii cu termeni pozitivi, astfel că $a_n \leq b_n, \forall n \geq n_0$. a) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă. b) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este divergentă.

✧ **Criteriul II al comparației.** Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ două serii cu termeni pozitivi, astfel că $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$, $\forall n \geq n_0$. a) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă. b) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este divergentă.

✧ **Criteriul III al comparației.** Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ două serii cu termeni pozitivi, astfel încît $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = K$. a) Dacă $0 < K < +\infty$, atunci cele două serii au aceeași natură. b) Dacă $K = 0$, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă. c) Dacă $K = +\infty$, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este divergentă, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

Criteriile de mai înainte ne dau posibilitatea de a stabili natura unei serii, comparînd-o cu o altă serie a cărei natură o cunoaștem. De obicei, pentru comparare, se folosesc seria geometrică și seria armonică generalizată. Seria geometrică $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ este convergentă pentru $|q| < 1$ și divergentă pentru $|q| \geq 1$. Seria armonică generalizată $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ este convergentă pentru $p > 1$ și divergentă pentru $p \leq 1$.

✧ **Criteriul rădăcinii (al lui Cauchy).** Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni pozitivi. a) Dacă $\sqrt[n]{a_n} \leq k$ și $0 < k < 1$, $\forall n > n_0$, atunci seria este convergentă. b) Dacă $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, $\forall n > n_0$, atunci seria este divergentă. c) Dacă $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \lambda$, atunci: 1) pentru $\lambda < 1$ seria este convergentă; 2) pentru $\lambda > 1$ seria este divergentă.

✧ **Criteriul raportului (al lui d'Alembert).** Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni pozitivi. a) Dacă $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq k$ și $0 < k < 1$, $\forall n > n_0$, atunci seria este convergentă. b) Dacă $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, $\forall n > n_0$, atunci seria este divergentă. c) Dacă $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$, atunci: 1) pentru $\lambda < 1$ seria este convergentă; 2) pentru $\lambda > 1$ seria este divergentă.

Criteriul lui Raabe și Duhamel. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni pozitivi. a) Dacă $n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \geq k$ și $k > 1$, $\forall n > n_0$, atunci seria este convergentă. b) Dacă $n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \leq 1$, $\forall n > n_0$, atunci seria este divergentă. c) Dacă $\lim_n n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lambda$, atunci: 1) pentru $\lambda > 1$ seria este convergentă; 2) pentru $\lambda < 1$ seria este divergentă.

3. Serii alternate. Se numește serie alternată o serie de forma $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

✧ **Criteriul lui Leibniz.** Fie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ o serie alternată. Dacă șirul (a_n) este descrescător și converge către zero, atunci seria este convergentă.

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

$S_{2n} \leq S \leq S_{2n+1}$.

4. Serii absol

gentă, dacă seria

Orice serie ab

Se numește se

divergentă.

Studiul conv

Criteriul lu

monoton și mărg

Criteriul lu

șir monoton tim

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este conv

5. Operații

unde $c_n = a_n b_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty}$

Teorema lu

respectiv, sume

Teorema lu

absolut conver

Teorema lu

este absolut co

1. Să se

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{a} +$

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ o serie alternată satisfăcând criteriul lui Leibniz și fie S suma sa. Atunci $S_{2n} \leq S \leq S_{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

4. Serii absolut convergente. Serii semiconvergente. O serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se numește absolut convergentă, dacă seria valorilor absolute $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ este convergentă.

Orice serie absolut convergentă este convergentă. Afirmatia reciprocă în general nu este valabilă. Se numește serie semiconvergentă orice serie convergentă pentru care seria valorilor absolute este divergentă.

Studiul convergenței absolute se face cu ajutorul criteriilor de la seriile cu termeni pozitivi.

Criteriul lui Abel. Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se poate scrie sub forma $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$, în care șirul (u_n) este monoton și mărginit, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă, atunci această serie este convergentă.

Criteriul lui Dirichlet. Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se poate scrie sub forma $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$, în care (u_n) este un șir monoton tinzând către zero, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ are șirul sumelor parțiale mărginit, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

5. Operații cu serii. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ două serii. Seriile $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ și $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, unde $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1$, se numesc, respectiv, suma, diferența și produsul seriilor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Dacă seriile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sînt convergente și au sumele A și B , respectiv, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ este convergentă și are suma $A \pm B$.

Teorema lui Abel. Dacă seriile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ sînt convergente și dacă A , B , C sînt, respectiv, sumele lor, atunci $A \cdot B = C$.

Teorema lui Mertens. Dacă seriile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sînt convergente și cel puțin una dintre ele este absolut convergentă, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ este convergentă și $C = A \cdot B$.

Teorema lui Cauchy. Dacă seriile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sînt absolut convergente, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ este absolut convergentă.

Probleme rezolvate

1. Să se arate că următoarele serii sînt convergente și să se stabilească suma lor :

a) $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{3^n} + \dots$;

b) $\frac{1}{a} + \frac{2}{a^2} + \dots + \frac{n}{a^n} + \dots, |a| > 1$;

c) $\frac{1}{5} + \frac{1}{45} + \dots + \frac{1}{16n^2 - 8n - 3} + \dots$; d) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} + \dots$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+a+1} - 2\sqrt{n+a} + \sqrt{n+a-1})$, $a > 0$.

Rezolvare. a) Avem $S_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3} \left[1 + \left(-\frac{1}{3}\right) + \dots + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)}$, astfel că $\lim_n S_n = \frac{1}{4}$. Deci seria este convergentă și are suma $S = \frac{1}{4}$.

b) Pentru calculul limitei șirului sumelor parțiale $S_n = \frac{1}{a} + \frac{2}{a^2} + \dots + \frac{n}{a^n}$ considerăm funcția $f(x) = \frac{x}{a} + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x}{a}\right)^n$, $x \in R$. Se observă că $S_n = f'(1)$. Dar

$$f(x) = \frac{x}{a} \left[1 + \frac{x}{a} + \dots + \left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} \right] = \frac{x}{a} \cdot \frac{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^n}{1 - \frac{x}{a}} = \frac{x^{n+1} - a^n x}{x - a} \cdot \frac{1}{a^n}$$

astfel că $S_n = f'(1) = \frac{n - (n+1)a + a^{n+1}}{(1-a)^2 a^n}$. Deoarece $|a| > 1$, rezultă că $\lim_n S_n = \frac{a}{(1-a)^2}$.

Prin urmare, seria este convergentă și are suma $S = \frac{a}{(1-a)^2}$.

c) Avem $S_n = \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(4n-3) \cdot (4n+1)}$. Ținând seama că $\frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k+1} \right)$, obținem $S_n = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1} \right) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{4n+1} \right)$. Deoarece $\lim_n S_n = \frac{1}{4}$, seria este convergentă și are suma $S = \frac{1}{4}$.

d) Putem scrie $S_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} = \left(\frac{2}{2} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{2 \cdot 2}{2^2} - \frac{1}{2^2} \right) + \dots + \left(\frac{2 \cdot n}{2^n} - \frac{1}{2^n} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \dots + \frac{n}{2^n} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) = 2\bar{S}_n - \tilde{S}_n$.

Pentru calculul termenului $\bar{S}_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \dots + \frac{n}{2^n}$ putem folosi exercițiul b), unde $a = 2$. Obținem

$$S_n = 2 \frac{\frac{n}{2^n} - \frac{n+1}{2^{n-1}} + 2}{(1-2)^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2^n} - 1}{\frac{1}{2} - 1} \rightarrow 3.$$

Prin urmare, seria este convergentă și are suma 3.

e) Avem

$$S_n = \sqrt{a+2} - 2\sqrt{a+1} + \sqrt{a} + \sqrt{a+3} - 2\sqrt{a+2} + \sqrt{a+1} + \sqrt{a+4} - 2\sqrt{a+3} + \dots + \sqrt{a+n-1} - 2\sqrt{a+n-2} + \sqrt{a+n-3} + \sqrt{a+n} - 2\sqrt{a+n-1} + \sqrt{a+n-2} + \sqrt{a+n+1} - 2\sqrt{a+n} + \sqrt{a+n-1} = \sqrt{a} - \sqrt{a+1} + \sqrt{a+n+1} - \sqrt{a+n} = \sqrt{a} - \sqrt{a+1} + \frac{1}{\sqrt{a+n+1} + \sqrt{a+n}}$$

Deci $S_n \rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{a+1}$, astfel că seria este convergentă și are suma $S = \sqrt{a} - \sqrt{a+1}$.

2. Să se arate că

a) $\frac{1}{\sqrt{2+1}} + \frac{1}{\sqrt{3+1}} + \dots$

Rezolvare. a) Calculăm

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{2+1}} + \frac{1}{\sqrt{3+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Deci seria este divergentă

deși seria este divergentă

b) Se observă că a_n

convergență, seria este divergentă

c) Se observă că a_n

spune nimic despre natura

$$S_n = \ln \frac{2}{1} + \dots$$

și deci seria este divergentă

3. Să se stabilească

$+ \dots, q \in R$.

Rezolvare. Se observă

convergență. Dacă $|q| < 1$,

convergență și are suma

4. Folosind criteriul

$\alpha \leq 1$.

Rezolvare. Pentru a

vom aplica criteriul general

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_n|$$

astfel că, luând $p = n$,

Deoarece $1 - \alpha \geq 0$,

5. Folosind criteriul

seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\alpha \geq 1$

Rezolvare. Deoarece

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_n|$$

2. Să se arate că următoarele serii sînt divergente:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} + \dots$; b) $0,07 + \sqrt{0,07} + \dots + \sqrt[n]{0,07} + \dots$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}$.

Rezolvare. a) Calculăm termenul general al șirului sumelor parțiale

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \sqrt{n+1} - 1 \rightarrow \infty.$$

Deci seria este divergentă. Se observă că termenul general al seriei $a_n = \frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$ tinde către 0, deși seria este divergentă.

b) Se observă că $a_n = \sqrt[n]{0,07} \rightarrow 1$. Prin urmare, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ și, după condiția necesară de convergență, seria este divergentă.

c) Se observă că $a_n = \ln \frac{n+1}{n} \rightarrow 0$ și deci, după condiția necesară de convergență, nu putem spune nimic despre natura seriei. Dar

$$S_n = \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \dots + \ln \frac{n+1}{n} = \ln \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot \frac{n+1}{n} = \ln(n+1) \rightarrow \infty$$

și deci seria este divergentă.

3. Să se stabilească natura seriei geometrice $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + \dots + q^n + \dots$, $q \in \mathbf{R}$.

Rezolvare. Se observă că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ pentru $|q| \geq 1$. Prin urmare, în acest caz, seria este divergentă. Dacă $|q| < 1$, atunci $S_n = 1 + q + \dots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1} \rightarrow \frac{1}{1 - q}$ și deci seria este convergentă și are suma $\frac{1}{1 - q}$.

4. Folosind criteriul general al lui Cauchy, să se studieze natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \leq 1$.

Rezolvare. Pentru $\alpha \leq 0$ se observă că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ și deci seria este divergentă. Pentru $0 < \alpha \leq 1$ vom aplica criteriul general al lui Cauchy. Avem

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| = \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha} + \dots + \frac{1}{(n+p)^\alpha} \geq \frac{p}{(n+p)^\alpha}, \quad \forall p \in \mathbf{N}.$$

astfel că, luînd $p = n$, obținem

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n}| \geq \frac{n}{2^\alpha n^\alpha} = \frac{1}{2^\alpha} n^{1-\alpha}.$$

Deoarece $1 - \alpha \geq 0$, rezultă că condiția (1) nu poate fi îndeplinită și deci seria este divergentă.

5. Folosind criteriul general al lui Cauchy, să se demonstreze convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \geq 2$.

Rezolvare. Deoarece $\alpha \geq 2$, rezultă

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| = \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha} + \dots + \frac{1}{(n+p)^\alpha} \leq \frac{1}{(n+1)^\alpha} +$$

$$\left\langle \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2} \right\rangle < \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} =$$

$$= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}, \forall p \in \mathbb{N}.$$

Deci, fiind dat $\varepsilon > 0$, putem determina $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, anume $n_\varepsilon = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$, astfel că $|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon, \forall n > n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}$. Condiția (1) este îndeplinită și deci seria este convergentă.

6. Criteriul de condensare al lui Cauchy. Fie $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots, a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Să se arate că seriile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ și $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ au aceeași natură. Aplicație. Să se cerceteze natura seriei armonice generalizate.

Rezolvare. Fie $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ și $T_k = a_1 + 2a_2 + \dots + 2^k a_{2^k}$, sumele parțiale corespunzătoare celor două serii. Deoarece $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, rezultă că șirurile (S_n) și (T_k) sînt crescătoare.

Pentru $n < 2^k$, avem $S_n \leq S_{2^{k+1}-1} = a_1 + (a_2 + a_3) + \dots + (a_{2^k} + \dots + a_{2^{k+1}-1}) \leq a_1 + 2a_2 + \dots + 2^k a_{2^k} = T_k$ și deci $S_n \leq T_k$.

Pentru $n \geq 2^k$, $S_n \geq S_{2^k} = a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \dots + (a_{2^{k-1}+1} + \dots + a_{2^k}) \geq \frac{a_1}{2} + a_2 + 2a_4 + \dots + 2^{k-1} a_{2^k} = \frac{1}{2} T_k$ și deci $S_n \geq \frac{1}{2} T_k$.

Aceasta arată că cele două șiruri de sume parțiale sînt în același timp mărginite sau nemărginite. Cum cele două serii au termenii pozitivi, aceasta arată că cele două serii considerate sînt în același timp convergente sau divergente.

Fie seria armonică generalizată $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$. Pentru $\alpha \leq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ și deci seria este divergentă. Pentru $\alpha > 0, a_n = n^{-\alpha} > 0$ este descrescător, astfel că, după criteriul de condensare al lui Cauchy, seria armonică generalizată are aceeași natură cu seria $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k (2^k)^{-\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} (2^{1-\alpha})^k$.

Dar această ultimă serie este o serie geometrică cu rația $2^{1-\alpha}$. Prin urmare, pentru $2^{1-\alpha} \geq 1 (\alpha \leq 1)$ seria armonică generalizată este divergentă, iar pentru $2^{1-\alpha} < 1 (\alpha > 1)$ seria armonică generalizată este convergentă. Deci seria armonică generalizată este divergentă pentru $\alpha \leq 1$ și convergentă pentru $\alpha > 1$.

7. Utilizînd criteriile de comparație, să se stabilească natura următoarelor serii cu termenii pozitivi:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{7n}}{n^2 + 3n + 5}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \right]^a, a \in \mathbb{R}$.

Rezolvare. a) Pentru n suficient de mare, $a_n = \frac{\sqrt{7n}}{n^2 + 3n + 5}$ se comportă ca $\frac{1}{n^{3/2}}$, astfel că vom compara seria dată cu seria armonică generalizată $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ care este convergentă. Avem

$$a_n = \frac{\sqrt{7n}}{n^2 + 3n + 5} < \sqrt{7} \cdot \frac{1}{n^{3/2}}, \text{ astfel că după criteriul I al comparației seria este convergentă}$$

b) În acest caz, $a_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \dots \frac{n}{n} < \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} = 2 \cdot \frac{1}{n^2}$ și deoarece seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă (este seria armonică generalizată cu $\alpha = 2 > 1$), după criteriul I al comparației, seria dată este convergentă.

c) Luînd $a_n = \frac{1}{n \sqrt[n]{n}}$

parației, deoarece seria ar

d) Mai întii să obser

$$\frac{1}{2}$$

Prin înmulțirea acestei in

Fie $a < 0$. Ridicînd inegal

inegalitate care arată că

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ și seria este d

Fie acum $a > 0$. În

Pentru $0 < a \leq 2$, seria

criteriul I al comparației,

convergentă, astfel că inegal

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

8. Utilizînd criteri

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a \right)^n$

Rezolvare. a) $\sqrt[n]{a_n} =$

seria este divergentă. Pen

caz $a_n = \left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2} \right)^n$

convergență nu este înd

b) $\sqrt[n]{a_n} = a \left(\frac{n+1}{n} \right)^n$

seria este divergentă. Pen

c) Luind $a_n = \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ și $b_n = \frac{1}{n}$, rezultă $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \lim_n \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$. După criteriul III al comparației, deoarece seria armonică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă, rezultă că seria dată este divergentă.

d) Mai întâi să observăm că $b_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)}$ satisface inegalitatea

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \dots \frac{2n-2}{2n-1} \leq b_n \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \dots \frac{2n}{2n+1}$$

Prin înmulțirea acestei inegalități cu $b_n = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \dots \frac{2n-1}{2n-2} \cdot \frac{1}{2n}$ obținem

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2n} < b_n^2 < \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2n}$$

Fie $a < 0$. Ridicind inegalitatea la puterea $a/2$ și avind în vedere că $a_n = b_n^a$, rezultă

$$\frac{1}{2^{a/2}} > a_n > \frac{2}{2^{a/2} n^{a/2}}$$

inegalitate care arată că $\lim_n a_n \neq 0$ și deci seria este divergentă în acest caz. Dacă $a = 0$, atunci $\lim_n a_n = 0$ și seria este divergentă.

Fie acum $a > 0$. În acest caz avem

$$\frac{1}{2^a} \cdot \frac{1}{n^{a/2}} < a_n < \frac{1}{2^{a/2}} \cdot \frac{1}{n^{a/2}}$$

Pentru $0 < a \leq 2$, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a/2}}$ este divergentă și din inegalitatea $\frac{1}{2^a} \cdot \frac{1}{n^{a/2}} < a_n$ rezultă, după criteriul I al comparației, că seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă. Pentru $a > 2$, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a/2}}$ este convergentă, astfel că inegalitatea $a_n < \frac{1}{2^{a/2}} \cdot \frac{1}{n^{a/2}}$ implică, prin criteriul I al comparației, că seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

8. Utilizind criteriul rădăcinii, să se stabilească natura seriilor

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a \cdot \frac{n^2 + n + 1}{n^2} \right)^n, a > 0$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2} a^n, a > 0$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} n a^n, a > 0$.

Rezolvare. a) $\sqrt[n]{a_n} = a \cdot \frac{n^2 + n + 1}{n^2} \rightarrow a$. Deci, pentru $a < 1$ seria este convergentă și pentru $a > 1$

seria este divergentă. Pentru $a = 1$ criteriul rădăcinii nu se poate aplica, dar se observă că în acest caz $a_n = \left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2} \right)^n = \left(1 + \frac{n+1}{n^2} \right)^n \rightarrow e$ și deci seria este divergentă (condiția necesară de convergență nu este îndeplinită).

b) $\sqrt[n]{a_n} = a \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \rightarrow ae$. Prin urmare, pentru $a < e^{-1}$ seria este convergentă și pentru $a > e^{-1}$

seria este divergentă. Pentru $a = e^{-1}$ se observă că $a_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} \cdot \frac{1}{e^n}$. Deoarece $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} \geq e^n$,

rezultă că $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq e^n$ și deci $a_n \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}$. Aceasta înseamnă că $\lim_n a_n \geq e^{-1}$, deci $\lim_n a_n \neq 0$ și seria este divergentă.

c) $\sqrt[n]{a_n} = a \sqrt[n]{n} \rightarrow a$. Deci, pentru $a < 1$ seria este convergentă, iar pentru $a > 1$ seria este divergentă. Pentru $a = 1$ rezultă $\lim_n a_n \neq 0$ și deci seria este divergentă.

9. Folosind criteriul raportului, să se studieze natura următoarelor serii :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^p}$, $a > 0$, $p \in \mathbb{R}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(an)^n}{n!}$, $a > 0$;

c) $a + \sum_{n=2}^{\infty} (2 - \sqrt[n]{e})(2 - \sqrt[n]{e}) \dots (2 - \sqrt[n]{e}) a^n$, $a > 0$.

Rezolvare. a) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = a \left(\frac{n}{n+1}\right)^p \rightarrow a$. După criteriul raportului, pentru $a < 1$ seria este convergentă, iar pentru $a > 1$ seria este divergentă. Pentru $a = 1$ se obține seria armonică generalizată $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, astfel că pentru $p > 1$ seria este convergentă, iar pentru $p \leq 1$ este divergentă.

b) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = a \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow a \cdot e$. Pentru $a < e^{-1}$ seria este convergentă și pentru $a > e^{-1}$ seria este divergentă. Pentru $a = e^{-1}$ avem $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, deoarece $e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Prin urmare, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{n+1}{n}$ și $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă, astfel că, după criteriul II

al comparației, seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

c) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = a (2 - \sqrt[n+1]{e}) \rightarrow a$. Pentru $a < 1$ seria este convergentă și pentru $a > 1$ seria este divergentă. Pentru $a = 1$, avem $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2 - e^{\frac{1}{n+1}}$. Deoarece $e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, rezultă $e^{\frac{1}{n+1}} < 1 + \frac{1}{n}$

și deci $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 - \frac{1}{n} = \frac{n}{n+1}$. După criteriul II al comparației, deoarece seria armonică $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}$

este divergentă, rezultă că seria este divergentă.

10. Să se stabilească, cu ajutorul criteriului Raabe-Duhamel, natura următoarelor serii :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} a \sqrt[n]{n}$, $a > 0$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} \right]^a \cdot \frac{1}{n^2}$, $a \in \mathbb{R}$; e) $\sum_{n=1}^{\infty} a^{ln n}$, $a > 0$.

Rezolvare. a) $n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \frac{n}{2n+1} \rightarrow \frac{1}{2} < 1$. Deci seria este divergentă.

b) $n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \frac{e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n}{\frac{1}{n}}$. Pentru a calcula limita acestei expresii, vom

determina întâi limita funcției $f(x) = \frac{e - (1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$, $x \in (0, \infty)$, în punctul $x = 0$. Prin aplicarea teoremei întâi a lui l'Hospital (condițiile acesteia fiind evident îndeplinite), avem

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{x} (1+x)^{\frac{1}{x}-1} + \frac{1}{x^2} (1+x)^{\frac{1}{x}} \ln(1+x) \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{x(1+x)} + \frac{\ln(1+x)}{x^2} \right] = e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x + (1+x) \ln(1+x)}{x^2(1+x)} = \\ &= e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 + \ln(1+x) + 1}{2x(1+x) + x^2} = e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2(1+x) + 4x} = \frac{e}{2}. \end{aligned}$$

Prin urmare, $\lim_n \frac{e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n}{\frac{1}{n}} = \lim_n f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{e}{2}$, astfel că $\lim_n n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \frac{1}{e} \cdot \frac{e}{2} = \frac{1}{2} < 1$. Deci seria este divergentă.

c)
$$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = n \left(a^{\frac{1}{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}} - 1 \right) = n \left(a^{\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}} - 1 \right) =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} - 1} \cdot \frac{n}{-(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})} \rightarrow (\ln a)(-\infty).$$

Deci, pentru $a < 1$ seria este divergentă și pentru $a > 1$ seria este convergentă. Pentru $a = 1$ rezultă $\lim_n a_n \neq 0$ și deci seria este divergentă.

d) Avem

$$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = n \left[\left(1 + \frac{1}{2n+1} \right)^a \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 - 1 \right] = \frac{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^a \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 - 1}{\frac{1}{n}}$$

Considerând funcția $f(x) = \frac{\left(1 + \frac{x}{2+x} \right)^a \cdot (1+x)^2 - 1}{x}$, $x \in (0, \infty)$, rezultă $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{a+4}{2}$,

astfel că $n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \rightarrow \frac{a+4}{2}$. Prin urmare, pentru $a < -2$ seria este divergentă și pentru $a > -2$ seria este convergentă. Pentru $a = -2$ avem inegalitatea

$$a_n = \left[\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)} \right]^2 \cdot \frac{1}{n^2} > \frac{2n+1}{n^2}$$



(conform cu ex. 7, d)), astfel că $a_n > \frac{2n+1}{n^2} > \frac{1}{n}$. După criteriul I al comparației, deoarece

seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă, rezultă că seria dată este divergentă pentru $a = -2$.

$$e) n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \frac{a^{-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - 1}{\frac{1}{n}} = \frac{a^{-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - 1}{-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \rightarrow -\ln a.$$

Pentru $a > e^{-1}$ ($-\ln a < 1$) seria este divergentă și pentru $a < e^{-1}$ seria este convergentă. Pentru $a = e^{-1}$ avem $a_n = e^{-\ln n} = \frac{1}{n}$. Deci pentru $a = e^{-1}$ seria coincide cu seria armonică și deci este divergentă.

11. Fie seria alternată $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, $a_n > 0$, și fie (a_n) șir descrescător convergent către zero. Să se arate că dacă înlocuim suma seriei cu suma parțială S_n , facem o eroare mai mică decât primul termen neglijat, a_{n+1} . Eroarea este prin lipsă dacă n este par și prin adaos dacă n este impar.

Rezolvare. Trebuie arătat că $|S - S_n| < a_{n+1}$, unde S este suma seriei, $S = \lim_n S_n$. Ținând seama de faptul că șirul sumelor parțiale de ordin par, (S_{2n}) , este monoton crescător către S și șirul sumelor parțiale de ordin impar, (S_{2n+1}) , este monoton descrescător către S , inegalitatea de mai sus este echivalentă cu $S - S_{2n} < a_{2n+1}$ și $S_{2n+1} - S < a_{2n+2}$. Pentru a demonstra aceste inegalități vom folosi inegalitatea $S_{2n} \leq S \leq S_{2n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Deoarece $S \leq S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$, rezultă $S - S_{2n} \leq a_{2n+1}$. Apoi din inegalitatea $S_{2n+2} \leq S$, deoarece $S_{2n+2} = S_{2n+1} - a_{2n+2}$, rezultă $S_{2n+1} - S \leq a_{2n+2}$. Aceasta justifică afirmația din enunț.

12. Să se calculeze suma seriei armonice alternată $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$. Câți termeni trebuie însumați pentru a obține suma seriei cu cinci zecimale exacte?

Rezolvare. Pentru această serie alternată șirul (a_n) cu $a_n = 1/n$ este un șir descrescător care tinde către zero. După criteriul lui Leibniz rezultă că seria armonică alternată este convergentă. Deoarece $S = \lim_n S_{2n} = \lim_n S_{2n+1}$, rezultă că pentru determinarea sumei S a seriei este de ajuns să calculăm limita șirului (S_{2n}) . Avem

$$\begin{aligned} S_{2n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \\ &+ \frac{1}{2n} - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} = \\ &= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}} \right). \end{aligned}$$

Se observă că scrierea lui S_{2n} sub ultima formă arată că S_{2n} reprezintă suma integrală a funcției $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $x \in [0, 1]$, corespunzătoare diviziunii $0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \dots < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n}$ a intervalului $[0, 1]$ și punctelor intermediare $\xi_0 = \frac{1}{n}$, $\xi_1 = \frac{2}{n}$, \dots , $\xi_{n-1} = \frac{n}{n}$. Prin urmare,

$$\lim_n S_{2n} = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln(1+x) \Big|_0^1 = \ln 2.$$

Ținând seama de ea

Impunând ca $\frac{1}{n+1} < 0$,

seria armonică alternată

13. Să se stabilească

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$

Rezolvare. a) Vom

către zero. Într-adevăr,

se vede că $a_{n+1} < a_n$ și

b) Se observă că

$\lim_n a_n \neq 0$. Deci condiția este divergentă.

14. Care este natura divergenței din criteriul

Rezolvare. Dacă pentru

tului, atunci $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$ și $(|a_n|)$ este monoton crescător.

seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

Dacă $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$, atunci seria este divergentă.

15. Să se studieze

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$

Rezolvare. a) Seria

serii vom folosi criteriul

Ținând seama de exercițiul precedent, deoarece $|S_n - S| < a_{n+1}$, rezultă că $|S_n - S| < \frac{1}{n+1}$.

Impunând ca $\frac{1}{n+1} < 0,00001$, obținem $n > 99999$. Deci, trebuie să însumăm 99 999 termeni din seria armonică alternată pentru a obține suma ei cu cinci zecimale exacte.

13. Să se stabilească natura seriilor alternate :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n-2}}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{10^{n-1}a + 10^{n-2}a + \dots + 10a + a}{10^n}$, $a > 0$.

Rezolvare. a) Vom arăta că șirul cu termenul general $a_n = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n-2}}$ este descrescător și tinde către zero. Într-adevăr,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)^{n+2}}{(n+1)^{n+3}} \cdot \frac{n^{n-2}}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1} \right)^{n+2} < 1,$$

$$a_n = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n-1}} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \rightarrow 0,$$

se vede că $a_{n+1} < a_n$ și $\lim_n a_n = 0$. După criteriul lui Leibniz rezultă că seria este convergentă.

b) Se observă că $a_n = a \cdot \frac{10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 10 + 1}{10^n} = a \cdot \frac{10^n - 1}{9 \cdot 10^n} \rightarrow \frac{a}{9}$, astfel că $\lim_n a_n \neq 0$. Deci condiția necesară de convergență a unei serii nu este îndeplinită și seria este divergentă.

14. Care este natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ satisface condiția de divergență din criteriul raportului sau din criteriul rădăcinii?

Rezolvare. Dacă pentru seria $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ este îndeplinită condiția de divergență din criteriul raportului, atunci $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1$, $\forall n \geq n_0$. Lăsând la o parte primii n_0 termeni ai șirului, rezultă că șirul $(|a_n|)$ este monoton crescător și deci $\lim_n |a_n| \neq 0$. Aceasta implică faptul că $\lim_n a_n \neq 0$ și deci

seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

Dacă $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$, atunci $|a_n| \geq 1$ și deci $\lim_n |a_n| \neq 0$, astfel că $\lim_n a_n \neq 0$. Aceasta arată că seria este divergentă.

15. Să se studieze convergența absolută și semiconvergența seriilor :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n \sin^2 x}{n+1}$, $x \in \mathbb{R}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$;
 c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{a+\frac{1}{n}}}$, $a \in \mathbb{R}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

Rezolvare. a) Seria valorilor absolute este $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^2 x}{n+1}$. Pentru studierea naturii acestei serii vom folosi criteriul raportului:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 2 \sin^2 x \cdot \frac{n+1}{n+2} \rightarrow 2 \sin^2 x.$$

Pentru $2 \sin^2 x < 1$, $\cos 2x > 0$, $k\pi - \frac{\pi}{4} < x < k\pi + \frac{\pi}{4}$ această serie este convergentă și pentru

$k\pi + \frac{\pi}{4} < x < k\pi + \frac{3\pi}{4}$ seria este divergentă. Pentru $x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ se obține seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$

care este seria armonică și deci este divergentă.

Seria dată pentru $k\pi - \frac{\pi}{4} < x < k\pi + \frac{\pi}{4}$ este absolut convergentă, pentru $k\pi + \frac{\pi}{4} < x < k\pi + \frac{3\pi}{4}$ este divergentă (în baza exercițiului precedent); pentru $x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ se obține

seria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n+1}$ care este convergentă după criteriul lui Leibniz, deci seria este semiconvergentă.

b) Seria valorilor absolute este divergentă deoarece $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{n}$. Dar seria dată este o serie alternată și, după criteriul lui Leibniz, aceasta este convergentă. Prin urmare, seria este semiconvergentă.

c) Să considerăm seria valorilor absolute $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a \sqrt[n]{n}}$. Comparăm această serie cu seria armo-

nică generalizată $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$. Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^a}{n^a \sqrt[n]{n}} = 1$, după criteriul III al comparației rezultă că

seria valorilor absolute este convergentă pentru $a > 1$ și divergentă pentru $a \leq 1$.

Să considerăm acum seria dată. Pentru $a > 1$ aceasta este absolut convergentă. Pentru $a \leq 0$ seria este divergentă, deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$. Pentru $0 < a \leq 1$ aplicăm criteriul lui Abel

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{a+\frac{1}{n}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}} \frac{(-1)^{n+1}}{n^a}. \text{ Seria } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^a} \text{ este convergentă în}$$

baza criteriului lui Leibniz, iar șirul $\left(\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}\right)$ este monoton crescător și mărginit (este convergent

la 1). După criteriul lui Abel rezultă că pentru $0 < a \leq 1$ seria este convergentă.

Prin urmare, pentru $a > 1$ seria este absolut convergentă, pentru $0 < a \leq 1$ seria este semiconvergentă, iar pentru $a \leq 0$ seria este divergentă.

d) Pentru studiul naturii seriei valorilor absolute folosim criteriul Raabe-Duhamel. Avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{n+1-|n-a|}{|n-a|} \right) = a+1,$$

astfel că pentru $a > 0$ seria este convergentă, pentru $a = 0$ seria este convergentă, iar pentru $a < 0$ seria este divergentă.

Putem afirma că pentru $a \geq 0$ seria inițială este absolut convergentă. Pentru $a < 0$ putem scrie

$$a_n = \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} = (-1)^n \frac{(-a)(1-a)\dots(n-a-1)}{n!} = (-1)^n b_n$$

și $b_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, astfel că avem o serie alternată. Deoarece $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n-a}{n+1}$, rezultă că pentru $a \leq -1$ șirul (b_n) este crescător și deci $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$. Aceasta arată că pentru $a \leq -1$ avem

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ și deci $b_{n+1} < b_n, \forall n \in \mathbb{N}$,

fiе șirul (u_n) astfel

$$u_n = nb_n - (n-1)b_{n-1}$$

$$u_n = n \cdot \frac{(-1)^n}{n}$$

Pe de altă parte, de plică faptul că șirul

am găsit că $u_n =$

mare, pentru $n \rightarrow \infty$, criteriul lui Leibniz,

Rezultă că seria este semiconvergentă

16. Să se st

Rezolvare. Avem

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}. \text{ Se observă}$$

astfel că $S_n = v_1 +$

$$= \frac{1}{2} [1 - \cos(n+1)]$$

17. Să se arate o serie divergentă

Rezolvare. a) Fie

ar fi convergentă,

convergentă. Dar

divergentă.

b) Fie seriile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergentă, deoarece

18. Să se efec

și să se deducă

Rezolvare. Seria

milor parțiale pentru

$\lim a_n \neq 0$ și deci seria este divergentă în acest caz. Pentru $-1 < a < 0$ rezultă $\frac{b_{n+1}}{b_n} < 1$ sau $b_{n+1} < b_n, \forall n \in \mathbb{N}$, ceea ce arată că (b_n) este descrescător. Să arătăm că $\lim b_n = 0$. Pentru aceasta fie șirul (u_n) astfel încît $b_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}$. Cum $b_{n-1} = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}}{n-1}$, rezultă că $u_n = nb_n - (n-1)b_{n-1}$. Înlocuind aici pe b_n și b_{n-1} , obținem

$$u_n = n \cdot \frac{(-a)(1-a)\dots(n-a-1)}{n!} - (n-1) \frac{(-a)(1-a)\dots(n-a-2)}{(n-1)!} = b_{n-1}(-a).$$

Pe de altă parte, deoarece (b_n) este descrescător și mărginit inferior, el este convergent. Aceasta implică faptul că șirul (u_n) este convergent către aceeași limită ca (b_n) . Fie $l = \lim u_n = \lim b_n$. Dar am găsit că $u_n = -a \cdot b_{n-1}$, ceea ce implică $l = -a \cdot l$, de unde $l = 0$. Deci $\lim b_n = 0$. Prin urmare, pentru $-1 < a < 0$ șirul (b_n) este descrescător și convergent către zero, astfel că după criteriul lui Leibniz seria este convergentă.

Rezultă că pentru $a \geq 0$ seria considerată este absolut convergentă; pentru $-1 < a < 0$ seria este semiconvergentă și pentru $a \leq -1$ seria este divergentă.

16. Să se stabilească natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \sin n^2}{\sqrt{n}}$.

Rezolvare. Avem o serie cu termeni oarecare. Putem scrie $a_n = u_n v_n$, unde $v_n = \sin n \sin n^2$ și $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Se observă că $u_n \rightarrow 0$ și u_n este descrescător. Apoi $v_n = [\cos(n-n^2) - \cos(n+n^2)]/2$, astfel că $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n = \frac{1}{2} [\cos 0 - \cos 2 + \cos 2 - \cos 6 + \dots + \cos(n-n^2) - \cos(n+n^2)] = \frac{1}{2} [1 - \cos(n+n^2)] \leq 1$. După criteriul lui Dirichlet, seria este convergentă.

17. Să se arate că : a) suma dintre o serie convergentă și una divergentă este o serie divergentă ; b) există serii divergente a căror sumă este o serie convergentă.

Rezolvare. a) Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie convergentă și $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ o serie divergentă. Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ ar fi convergentă, atunci diferența dintre această serie și seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergentă ar trebui să fie convergentă. Dar diferența este seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ și aceasta este divergentă. Deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ este divergentă.

b) Fie seriile $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$, care sînt, evident, divergente. Suma lor este o serie convergentă, deoarece are toți termenii egali cu zero.

18. Să se efectueze produsul seriilor absolut convergente $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ și $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!}$ și să se deducă de aici suma seriei $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!}$.

Rezolvare. Seria valorilor absolute pentru ambele serii coincide cu seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Șirul sumelor parțiale pentru această serie este $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \rightarrow e$ (exercițiul 19, cap. 5) și

deci ambele serii sînt absolut convergente. Atunci seria produs $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ este absolut convergentă, după teorema lui Cauchy și $C = A \cdot B$. Dar

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 = \frac{(-1)^n}{0! n!} + \frac{(-1)^{n-1}}{1!(n-1)!} + \frac{(-1)^{n-2}}{2!(n-2)!} + \dots + \frac{-1}{(n-1)! 1!} + \frac{1}{n! 0!} = \frac{1}{n!} \left[1 - \frac{n}{1!} + \frac{n(n-1)}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{n!}{n!} \right] = \frac{1}{n!} (1-1)^n = 0,$$

astfel că suma seriei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ este $C = 0$. Cum $A = e$, din relația $e \cdot B = 0$ rezultă că suma seriei $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!}$ este $B = 0$.

19. Se poate ca produsul a două serii divergente să fie o serie absolut convergentă? Să se efectueze produsul seriilor

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

Rezolvare. Răspunsul este afirmativ, cum se va vedea din exemplul indicat. Ambele serii sînt divergente, deoarece

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\frac{3}{2}\right)^n \rightarrow \infty \text{ și } b_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \rightarrow \infty. \text{ Dar } c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 = \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^{n-1} + \frac{1}{2^n}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^{n-2} + \frac{1}{2^{n-1}}\right) - \dots - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(2 + \frac{1}{2^2}\right) - \\ &- \left(\frac{3}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left[-(2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}) + 2^n - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{2^{n+1}} \right] - \left(\frac{3}{2}\right)^n = \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left\{ 2^n - 2 \cdot \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} + \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{\frac{1}{2} - 1} - \frac{3}{2} \right\} = \left(\frac{3}{4}\right)^n. \end{aligned}$$

astfel că seria $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ este convergentă (seria geometrică cu rația $\frac{3}{4}$).

Probleme propuse spre rezolvare

20. Să se arate că următoarele serii sînt convergente și să se stabilească suma acestora :

a) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+3)} + \dots ;$

b) $\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} + \dots ;$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \dots$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \dots$

21. Să se

a) $\frac{1}{\sqrt{3-1}}$

$+\frac{n+1}{n}$

22. Utiliz

seriei $\sum_{n=2}^{\infty} \dots$

23. Să se a

seria $\sum_{n=q}^{\infty} \dots$

orice $p \in \mathbb{N}$.

24. Utiliz

pozitivi :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \dots$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \dots$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \dots$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

25. Să se d

$a_n = \sqrt[3]{n^3 + n}$

26. Să se

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6n^2}{2n^2} \right)$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+n)(a+n+1)}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$; e) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$; f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}{\sqrt{4n^2 - 1}}$.

21. Să se arate că următoarele serii sînt divergente:

a) $\frac{1}{\sqrt{3}-1} + \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}} + \dots$; b) $2 + \frac{3}{2} + \dots +$

$+\frac{n+1}{n} + \dots$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{2^{n+1} + 3^{n+1}}$; e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{10^n}}$.

22. Utilizînd criteriul de condensare al lui Cauchy, să se studieze convergența seriei $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$, $p \in \mathbb{R}$.

23. Să se arate că dacă logaritmul este luat într-o bază mai mare ca doi, atunci seria $\sum_{n=q}^{\infty} \frac{1}{n(\lg n)(\lg^2 n) \dots (\lg^p n)}$, unde $\lg^{(p)} n = \lg \lg \dots \lg n$, este divergentă pentru orice $p \in \mathbb{N}$. Aici $q \in \mathbb{N}$ este ales astfel încît $\lg^{(p)} n > 0$.

24. Utilizînd criteriile de comparație, să se stabilească natura seriilor cu termeni pozitivi:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$; d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{n}$; f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+a+\dots+a^n)}$, $a \geq 0$;

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n + n}$, $a \geq 0$; h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt[n]{n!}}$, $a \geq 0$; i) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$;

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$; k) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{a}{3^n}$, $0 \leq a \leq 3\pi$; l) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{a}{n}$, $0 \leq a \leq \pi$.

25. Să se determine parametrii $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încît seria cu termenul general $a_n = \sqrt[3]{n^3 + n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + 1} + a + \frac{b}{n}$, să fie convergentă.

26. Să se stabilească natura următoarelor serii, folosind criteriul rădăcinii:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6n^2 + 7n + 5}{2n^2 + 5n + 9}\right)^n$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)^n}{\sqrt{(16n^2 + 5n + 1)^{n+1}}}$; c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}{n^3} - \frac{n}{4} \right)^n$; e) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n^3 + n^2 + 1} - \sqrt[3]{n^3 - n^2 + 1})^n$;

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot n^{n+6}}{(3n+7)^n}$; g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^n}$, $a \geq 0$; h) $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $a \geq 0$.

27. Utilizând criteriul raportului, să se studieze natura următoarelor serii:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 5 \dots (3n-1)}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} na^n$, $a \geq 0$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^3+1)a^n}{(n+1)!}$, $a \geq 0$; f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$, $a \geq 0$; g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt{n!}}$, $a \geq 0$.

28. Să se stabilească, cu ajutorul criteriului Raabe-Duhamel, natura următoarelor serii:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 7 \dots [2 + 5(n-1)]}{3 \cdot 8 \dots [3 + 5(n-1)]}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^2 \cdot 5^2 \dots (4n-3)^2}{3^2 \cdot 7^2 \dots (4n-1)^2}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$, $a \geq 0$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a(a+1) \dots (a+n-1)}$, $a > 0$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \left[\frac{a(a-1) \dots (a-n+1)}{(a+1)(a+2) \dots (a+n)} \right]^2$, $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$; f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(an)^n}{n!}$, $a \geq 0$;

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1) \dots (a+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^\alpha}$, $a > 0$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$;

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a(a+r) \dots (a+nr-r)}{b(b+r) \dots (b+nr-r)} \right]^\alpha$, $a > 0$, $b > 0$, $r > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{(x+a_1)(2x+a_2) \dots (nx+a_n)}$, $x > 0$, $a_n > 0$ și $a_n \rightarrow a$;

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots (2n)} \right]^a$, $a \in \mathbb{R}$.

29. Să se cerceteze natura următoarelor serii cu termeni pozitivi:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4+n}}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n^3}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3}}{n}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1 \diamond 2^n}$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{2n}}$; f) $\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{a}{n}\right)^n$, $a \geq 0$; g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{an+b}{cn+d}\right)^n$, $a, b, c, d > 0$;

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+1)^n}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} a^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots (2n)}$

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)}{b(b+1)}$

l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$

30. Să se studieze câte termeni...

a) $1 + \sum_{n=2}^{\infty} \dots$

31. Să se studieze...

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

e) $\frac{1}{\sqrt{2-1}}$

32. Să se studieze...

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{3^n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1+a^{2n}}$

33. Să se studieze...

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(a+1)(2a+1)\dots(na+1)}, a \geq 0$; i) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^n$;
j) $\sum_{n=1}^{\infty} a^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}, a > 0$; k) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1})(n+a) - n^n, a \geq 0$;
l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots (2n)} \cdot \frac{1}{2n+1}$; m) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{n \ln n}$; n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+p}}, p \in \mathbb{N}$;
o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{b(b+1)\dots(b+n-1)} x^n, x > 0, a > 0, b > 0$;
p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}$.

30. Să se arate că următoarele serii alternate sînt convergente și să se calculeze cîți termeni trebuie însumați pentru a obține suma lor cu două zecimale exacte:

a) $1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1}$.

31. Să se stabilească natura seriilor alternate:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt[3]{n}}{n + \sqrt{7}}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{\alpha}{n}, 0 < \alpha < \pi$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{3^n}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{27n^2 + 36n + 11}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}$;

e) $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \dots$

32. Să se studieze convergența absolută și semiconvergența seriilor cu termenii oarecare:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{3^n}, x \in \mathbb{R}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, x \in \mathbb{R}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+a)^\alpha}, a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-, \alpha \in \mathbb{R}$; e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1-a^n}, a \neq \pm 1$;

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1+a^{2n}}, a \in \mathbb{R}$; g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n(n+\sqrt{3})}$; unde (a_n) este un șir mărginit.

33. Să se stabilească natura următoarelor serii oarecare:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cos n^2}{n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, x \in \mathbb{R}$;

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \frac{\sin nx}{n}; \quad e) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(2 + e^{3n})}{\ln(3 + e^{2n})};$$

$$f) \sum_{n=1}^{\infty} \cos n^2; \quad g) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}; \quad h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \sin \frac{1}{n}}{\sqrt{n^3}};$$

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \cos \frac{1}{n}}{n}.$$

34. Se poate ca produsul a două serii semiconvergente să fie o serie divergentă? Dar ca produsul a două serii semiconvergente să fie o serie convergentă? Să se calculeze pătratul seriilor.

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}.$$

35. Să se demonstreze că seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ este absolut convergentă pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Dacă $S(x)$ este suma acestei serii, să se stabilească relația $S(x+y) = S(x) \cdot S(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

36. Să se demonstreze egalitatea

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a^n, \quad |a| < 1.$$

37. Să se demonstreze următoarele egalități:

$$a) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}; \quad b) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(\sqrt{2})^n}\right) = e(2 - \sqrt{2}).$$

38. Să se ridice la pătrat seriile următoare, apoi să se arate că seriile obținute sînt convergente și să se calculeze suma lor:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2^n}; \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}; \quad d) \sum_{n=1}^{\infty} na^n, \quad |a| < 1.$$

39. Să se demonstreze că următoarele serii sînt convergente și să se calculeze suma lor:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^{n+1} - 6^{n-1}}{12^n}; \quad b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n - \sqrt{n^2 - 1}}{\sqrt{n(n-1)}}; \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n}\right);$$

$$d) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + (-1)^n}{n!}; \quad e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(4n^2 - 1)}; \quad f) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{n(n+1)^2} + \frac{1}{n^2(n+1)^2}\right].$$

Fie $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ (infinite) este limita finită în punctul x_0 (depinzind de V) a lui f .
 $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Dacă pe V există o sferă S cu centru în x_0 și raza $r > 0$ astfel încât $S \cap A \neq \emptyset$, atunci $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Criteriul Cauchy
 Limita finită în punctul x_0 există dacă și numai dacă pentru orice $\epsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $x', x'' \in V \cap A$ cu $|x' - x''| < \delta$ avem $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$.

a) Funcții de o variabilă reală.
 Definițiile și teoremele.
 Dacă x_0 și l sînt

Dacă x_0 este finit

Dacă $x_0 = \infty$ și

Definiții similare po

Dacă $|f(x) - l|$

și $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = +\infty$.

Dacă $|f(x)| \leq$

Criteriul Cauchy
 în punctul x_0 este

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta >$

Numărul $l_d =$

7. LIMITE ȘI CONTINUITATE PENTRU FUNCȚII

7.1. Limite pentru funcții

Fie $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ și fie x_0 un punct de acumulare pentru mulțimea A . Numărul real l (finit sau infinit) este limita funcției în punctul x_0 , dacă pentru orice vecinătate V a lui l există o vecinătate U (depinzind de V) a lui x_0 , astfel încît, oricare ar fi $x \in A \cap U$, $x \neq x_0$, să avem $f(x) \in V$. Se notează $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Dacă pentru orice șir de puncte (x_n) , $x_n \in A$, $x_n \neq x_0$, $x_n \rightarrow x_0$, avem $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$, atunci $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Criteriul Cauchy-Bolzano. Condiția necesară și suficientă ca funcția f definită pe A să aibă limită finită în punctul x_0 este ca pentru orice $\varepsilon > 0$ să existe o vecinătate V a lui x_0 , astfel ca, îndată ce $x', x'' \in V \cap A$, $x' \neq x_0$, $x'' \neq x_0$, să avem $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

a) **Funcții de o variabilă reală.** Fie $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și fie x_0 un punct de acumulare pentru mulțimea A . Definițiile de mai sus ale limitei sînt echivalente cu următoarele:

Dacă x_0 și l sînt finite, atunci $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ dacă și numai dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon. \quad (1)$$

Dacă x_0 este finit și $l = +\infty$, atunci $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ dacă și numai dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow f(x) > \varepsilon. \quad (2)$$

Dacă $x_0 = \infty$ și l este finit, atunci $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$, dacă și numai dacă

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x > \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon. \quad (3)$$

Definiții similare pot fi formulate pentru celelalte cazuri.

Dacă $|f(x) - l| \leq g(x)$, $\forall x \in A$, și dacă $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, atunci $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$. Dacă $f(x) \geq h(x)$ și $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = +\infty$, atunci $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$. Dacă $f(x) \leq h(x)$ și $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = -\infty$, atunci $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

Dacă $|f(x)| \leq M$ și $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, atunci $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$.

Criteriul Cauchy-Bolzano se enunță: condiția necesară și suficientă ca funcția f să aibă limită finită în punctul x_0 este ca

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid \forall x_1, x_2 \in A \text{ cu } |x_1 - x_0| < \delta_\varepsilon, |x_2 - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon. \quad (4)$$

Numărul $l_d = f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ este limita la dreapta a funcției f în punctul x_0 (x_0 finit) dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid 0 < x - x_0 < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - l_d| < \varepsilon. \quad (5)$$

Numărul $l = f(x_0 - 0) = \lim_{x \nearrow x_0} f(x)$ este limita la stînga a funcției f în punctul x_0 dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid 0 < x_0 - x < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon. \quad (6)$$

Limita funcției f în x_0 există dacă și numai dacă există limitele laterale (la stînga și la dreapta) și sînt egale.

În aplicații sînt folosite des următoarele limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \begin{cases} \infty, & a > 1, \\ 0, & 0 < a < 1; \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

b) Funcții de mai multe variabile. Fie $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ și fie $x_0 = (x_0, y_0)$ un punct de acumulare pentru mulțimea A . În acest caz $l = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$ dacă și numai dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid |x - x_0| < \delta_\varepsilon \text{ și } |y - y_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x,y) - l| < \varepsilon. \quad (7)$$

Pentru funcția de două variabile $f(x,y)$ se pot considera limitele iterate: $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y)$ și

$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y)$, care, dacă există, nu sînt totdeauna egale. Dacă există limita globală $l =$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$ și dacă există limitele $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y)$ și $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y)$, atunci există limitele iterate și sînt

egale cu limita globală l . Dacă limitele iterate nu sînt egale, limita globală nu există. Se poate întîmpla ca limitele iterate să fie egale, fără ca limita globală să existe. Rezultatele de mai sus pot fi enunțate similar pentru funcții de p variabile.

7.1.1. Probleme rezolvate

1. Folosind definiția limitei unei funcții într-un punct, să se demonstreze că:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 3) = 1$; b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+1)^2}{x^2+1} = 1$; c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$.

Rezolvare. a) Folosim definiția sub forma echivalentă (1). Fiind dat $\varepsilon > 0$, va trebui să determinăm un $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încît $|x - 2| < \delta_\varepsilon$ să implice $|x^2 - 3x + 3 - 1| < \varepsilon$. Putem scrie $x^2 - 3x + 2 = A(x-2) + B(x-2)^2$, astfel că prin identificare deducem $A = 1$ și $B = 1$. Prin urmare,

$$|x^2 - 3x + 2| = |(x-2) + (x-2)^2| \leq |x-2| + |x-2|^2 \leq \delta_\varepsilon + \delta_\varepsilon^2.$$

Deoarece căutăm un $\delta_\varepsilon > 0$, putem să-l căutăm astfel ca $0 < \delta_\varepsilon \leq 1$, deci $\delta_\varepsilon^2 \leq \delta_\varepsilon$. Cu aceasta se obține $|x^2 - 3x + 2| < \delta_\varepsilon + \delta_\varepsilon^2 \leq 2\delta_\varepsilon$, astfel că dacă impunem ca $2\delta_\varepsilon < \varepsilon$, adică $0 < \delta_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2}$, relația (1) este satisfăcută.

b) Va trebui să arătăm că $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x < -\delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$. Deoarece $x < -\delta_\varepsilon$ rezultă $|x| > \delta_\varepsilon$ și

$$\left| \frac{(x+1)^2}{x^2+1} - 1 \right| = \frac{2|x|}{x^2+1} < \frac{2|x|}{x^2} = \frac{2}{|x|} < \frac{2}{\delta_\varepsilon},$$

astfel că dacă impunem ca $\frac{2}{\delta_\varepsilon} < \varepsilon$, adică $\delta_\varepsilon > \frac{2}{\varepsilon}$, definiția este verificată.

c) Folosim definiția $\delta_\varepsilon > 0$ astfel ca $\left| \frac{2}{(x-1)} - \frac{1}{\delta_\varepsilon} \right| < \varepsilon$ să fie satisfăcută.

2. Folosind

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin x$

Rezolvare. Este vorba de limita într-un punct evidentă și sînt cu

a) Considerăm

obținem $f(x_n) =$

b) Alegem n astfel încît să obținem $f(x_n) = 2$

c) Cu alegerea

$f(x_n) = e^{1-n} \rightarrow 0$

3. Folosind

a) $\lim_{x \rightarrow 0} x^n \sin \frac{1}{x}$

Rezolvare. a)

$\delta_\varepsilon > 0$ în așa fel

$$|f(x_1) - f(x_2)| =$$

deoarece $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$ verificată. Prin urmare

b) Alegînd x

fapt ce arată că

4. Să se

a) $f(x) =$

Rezolvare. a)

b) $l = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

c) Folosim definiția limitei sub forma (2). Pentru $\varepsilon > 0$ oarecare, trebuie să determinăm un $\delta_\varepsilon > 0$ astfel ca $|x - 1| < \delta_\varepsilon$ să implice $f(x) > \varepsilon$. Într-adevăr, relația $|x - 1| < \delta_\varepsilon$ implică $\frac{2}{(x-1)} > \frac{1}{\delta_\varepsilon^2}$ și dacă impunem ca $\frac{1}{\delta_\varepsilon^2} > \varepsilon$, determinăm $0 < \delta_\varepsilon < \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, astfel că definiția este satisfăcută.

2. Folosind definiția, să se arate că limitele următoare nu există :

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$; b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \cos x)e^x$; c) $\lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{x}{x-1}}$.

Rezolvare. Este convenabil să folosim definiția cu șiruri echivalentă. Deoarece limita unei funcții într-un punct, dacă există, este unică, pentru a rezolva exercițiul este suficient să punem în evidență șiruri cu $x_n \rightarrow x_0$ pentru care $f(x_n)$ are limite diferite.

a) Considerînd $x'_n = \frac{1}{n\pi} \rightarrow 0$, obținem $f(x'_n) = 0 \rightarrow 0$. Dacă alegem $x''_n = \frac{2}{(4n+1)\pi} \rightarrow 0$, obținem $f(x''_n) = (4n+1) \frac{\pi}{2} \rightarrow \infty$. Aceasta arată că limita considerată nu există.

b) Alegem mai întâi $x'_n = 2n\pi \rightarrow \infty$. Rezultă $f(x'_n) = 0 \rightarrow 0$. Apoi pentru $x''_n = (2n+1)\pi \rightarrow \infty$ obținem $f(x''_n) = 2e^{(2n+1)\pi} \rightarrow \infty$ și deci limita nu există.

c) Cu alegerea $x'_n = \frac{n+1}{n} \rightarrow 1$ deducem $f(x'_n) = e^{n+1} \rightarrow \infty$, iar cu $x''_n = \frac{n-1}{n} \rightarrow 1$ rezultă $f(x''_n) = e^{1-n} \rightarrow 0$, ceea ce arată că limita nu există.

3. Folosind criteriul Cauchy-Bolzano, să se cerceteze existența limitelor :

a) $\lim_{x \rightarrow 0} x^n \sin \frac{1}{x}$, $n \in \mathbb{N}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sign } x$.

Rezolvare. a) Trebuie să vedem dacă relația (4) este verificată. Fiind dat $\varepsilon > 0$, să determinăm $\delta_\varepsilon > 0$ în așa fel încît $|x_1| < \delta_\varepsilon$ și $|x_2| < \delta_\varepsilon$ să implice $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Avem

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| x_1^n \sin \frac{1}{x_1} - x_2^n \sin \frac{1}{x_2} \right| \leq |x_1|^n \left| \sin \frac{1}{x_1} \right| + |x_2|^n \left| \sin \frac{1}{x_2} \right| \leq |x_1|^n + |x_2|^n < 2\delta_\varepsilon^n,$$

deoarece $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$. Dacă impunem ca $2\delta_\varepsilon^n < \varepsilon$, obținem $0 < \delta_\varepsilon < \sqrt[n]{\varepsilon/2}$ și relația (4) este verificată. Prin urmare, limita există.

b) Alegînd $x_1 = \frac{1}{n} < \delta$ și $x_2 = -\frac{1}{n}$, $|x_2| < \delta$, rezultă $|f(x_1) - f(x_2)| = |\text{sign } x_1 - \text{sign } x_2| = 2$, fapt ce arată că relația (4) nu poate fi verificată. Prin urmare, limita nu există.

4. Să se calculeze limitele laterale în $x = 0$ pentru funcțiile

a) $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$; b) $f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$; c) $f(x) = \frac{x}{3} E\left(\frac{2}{x}\right)$.

Rezolvare. a) $l_s = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x|}{x} = -1$ și $l_d = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

b) $l_s = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right)^{-1} = 1$, $l_d = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right)^{-1} = 0$.

c) Avem $y - 1 < E(y) \leq y$, astfel că $\frac{2}{x} - 1 < E\left(\frac{2}{x}\right) \leq \frac{2}{x}$. Fie mai întâi $x < 0$. Înmulțind inegalitatea anterioară prin $\frac{x}{3} < 0$, rezultă $\frac{2}{3} - \frac{x}{3} > \frac{x}{3} E\left(\frac{2}{x}\right) \geq \frac{2}{3}$. Trecând la limită, rezultă

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3} E\left(\frac{2}{x}\right) = \frac{2}{3}. \text{ Deci } l_1 = \frac{2}{3}.$$

Fie acum $x > 0$. Procedând similar, obținem $\frac{2}{3} - \frac{x}{3} < \frac{x}{3} E\left(\frac{2}{x}\right) \leq \frac{2}{3}$, pentru $x > 0$, astfel că $l_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3} E\left(\frac{2}{x}\right) = \frac{2}{3}$.

5. Să se calculeze limitele:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$; b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$.

Rezolvare. a) Să arătăm mai întâi că pentru $x \geq 1$ avem $\ln x < x$. Să presupunem că $m < x \leq m + 1$, $m \in \mathbb{N}$. Atunci $e^m < e^x$. Însă $e > 2$ și deci $e^m > (1 + 1)^m = 1 + C_m^1 + C_m^2 + \dots + 1 > 1 + C_m^1 = 1 + m$. Prin urmare, $e^x > e^m > 1 + m \geq x$, adică $e^x > x$, $\forall x \geq 1$. Deci $x > \ln x$, $\forall x \geq 1$.

Presupunind $x \geq 1$, avem

$$0 \leq \frac{\ln x}{x^n} = \frac{\ln \left(x^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{2}{n}}}{x^n} = \frac{2 \ln x^{\frac{n}{2}}}{n x^n} < \frac{2 x^{\frac{n}{2}}}{n x^n} = \frac{2}{n} x^{-\frac{n}{2}},$$

astfel că deoarece $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-\frac{n}{2}} = 0$, rezultă că $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$.

b) Putem scrie

$$\frac{e^x}{x^n} = x^{-n} \left(e^{\frac{x}{2n}}\right)^{2n} > x^{-n} \left(\frac{x}{2n}\right)^{2n} = \frac{1}{(2n)^{2n}} x^n, \quad \forall x \geq 1.$$

Deoarece $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n = +\infty$, din inegalitatea de mai sus rezultă $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.

c) Deoarece $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ și $\left|\sin \frac{1}{x}\right| \leq 1$, rezultă $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

6. Să se calculeze limitele:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin x}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; c) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^x - a^a}{x - a}$, $a > 0$.

Rezolvare. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x + \cos^2 x) =$

$$= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}.$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{\cos x - \cos 2x}{\cos 2x}\right)^{\frac{\cos 2x}{\cos x - \cos 2x}} \right]^{\frac{\cos x - \cos 2x}{x^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 2x}} =$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2}} = e^{\frac{3}{2}}.$$

c) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^x - a^a}{x - a}$

$= a^a \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(y+a)^y - 1}{y}$

Am folosit faptul că

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

și

$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{(y+a)^y - 1}{y} = a^a \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{y \ln(y+a)} - 1}{y} = a^a \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{y \ln(y+a)} - 1}{y \ln(y+a)} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \ln(y+a) = a^a \cdot 1 \cdot \ln a = a^a \ln a$

7. Să se determi

a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

c) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

e) $f(x_1, x_2, \dots)$

Rezolvare. a) Este

reprezentă interiorul c

b) Condiția $4 - x^2$

rioare cercului cu centr

c) Mulțimea de de

d) Mulțimea de d

e) Mulțimea de di

$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 \leq 1$

cu centrul în origine,

cu centrul în origine

8. Folosind de

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} (x^2 + y^2)$

Rezolvare. a) Tre

$|x - 1| < \delta_x$ și $|y - 3| < \delta_y$

$= 5(x - 1) + (y - 3)$

$+ |x - 1|^2 + |x - 1|$

și deci $|f(x, y) - 4|$

b) Fiind dat $\epsilon > 0$

$y > \delta_x^{-1}$ să implice

$$\left| \frac{xy - 1}{y + 1} - 3 \right| < \epsilon$$

Deci dacă impunem

0. Înmulțind

mită, rezultă

$\epsilon > 0$, astfel

impunem că

$+ C_m^2 + \dots$

≥ 1 . Deci

$$c) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{x^a - x^a}{x - a} + \frac{x^a - a^a}{x - a} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a(x^{a-x} - 1)}{x - a} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^a}{x - a} =$$

$$= a^a \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(y + a)^y - 1}{y} + a^a = a^a \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(a^y - 1) \left(1 + \frac{y}{a} \right)^y + \left(1 + \frac{y}{a} \right)^y - 1}{y} + a^a = a^a (\ln a + 1).$$

Am folosit faptul că

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^a}{x - a} = a^a \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^a - 1}{a(y - 1)} = a^{a-1} \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^a - 1}{y - 1} = a^a$$

și

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{y}{a} \right)^y - 1}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{y \ln \left(1 + \frac{y}{a} \right)} - 1}{y \ln \left(1 + \frac{y}{a} \right)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y \ln \left(1 + \frac{y}{a} \right)}{y} = 0.$$

7. Să se determine mulțimile de definiție pentru următoarele funcții:

a) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$; b) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$;

c) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$; d) $f(x, y, z) = \arcsin x + \arcsin y + \arcsin z$;

e) $f(x_1, x_2, \dots, x_p) = \sqrt{1 - (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2)}$.

Rezolvare. a) Este necesar ca $1 - x^2 - y^2 \geq 0$ și deci $x^2 + y^2 \leq 1$. În plan, această inegalitate reprezintă interiorul cercului cu centrul în origine, de rază unitate, și punctele cercului.

b) Condiția $4 - x^2 - y^2 > 0$ implică $x^2 + y^2 < 4$. Aceasta reprezintă mulțimea punctelor interioare cercului cu centrul în origine și de rază 2.

c) Mulțimea de definiție este pătratul $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

d) Mulțimea de definiție este cubul $[-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$.

e) Mulțimea de definiție este formată din punctele $x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ satisfăcând condiția $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 \leq 1$. Pentru $p = 2$, această mulțime reprezintă interiorul și punctele cercului cu centrul în origine, de rază unitate. Pentru $p = 3$, aceasta reprezintă interiorul și punctele sferei cu centrul în origine și de rază unitate.

8. Folosind definiția, să se demonstreze că:

a) $\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 3)} (x^2 + xy) = 4$; b) $\lim_{(x, y) \rightarrow (-3, \infty)} \frac{xy - 1}{y + 1} = 3$; c) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|} = 0$.

Rezolvare. a) Trebuie să arătăm că pentru orice $\epsilon > 0$ putem determina $\delta_\epsilon > 0$, astfel că $|x - 1| < \delta_\epsilon$ și $|y - 3| < \delta_\epsilon$ să implice $|f(x, y) - 4| < \epsilon$. Se scrie $f(x, y) - 4 = x^2 + xy - 4 = 5(x - 1) + (y - 3) + (x - 1)^2 + (x - 1)(y - 3)$, astfel că $|f(x, y) - 4| < 5|x - 1| + |y - 3| + |x - 1|^2 + |x - 1||y - 3| < 5\delta_\epsilon + \delta_\epsilon + \delta_\epsilon^2 + \delta_\epsilon^2$. Dacă se caută $0 < \delta_\epsilon < 1$, atunci $\delta_\epsilon^2 < \delta_\epsilon$ și deci $|f(x, y) - 4| < 8\delta_\epsilon$. Dacă impunem ca $8\delta_\epsilon < \epsilon$, adică $0 < \delta_\epsilon < \frac{\epsilon}{8}$, definiția este verificată.

b) Fiind dat $\epsilon > 0$ oarecare, trebuie să determinăm un $\delta_\epsilon > 0$, astfel încît $|x - 3| < \delta_\epsilon$ și $y > \delta_\epsilon^{-1}$ să implice $\left| \frac{xy - 1}{y + 1} - 3 \right| < \epsilon$. Avem

$$\left| \frac{xy - 1}{y + 1} - 3 \right| = \left| x - 3 - \frac{x + 1}{y + 1} \right| \leq |x - 3| + \left| \frac{x + 1}{y + 1} \right| < \delta_\epsilon + \frac{4}{|y + 1|} < \delta_\epsilon + \frac{\delta_\epsilon}{y} + \frac{4}{y} <$$

$$< \delta_\epsilon + \delta_\epsilon^2 + 4\delta_\epsilon < 6\delta_\epsilon, \text{ cu } 0 < \delta_\epsilon < 1.$$

Deci dacă impunem $6\delta_\epsilon < \epsilon$, adică $0 < \delta_\epsilon < \frac{\epsilon}{6}$, definiția este verificată.

c) Se scrie $x^2 + y^2 = (|x| + |y|)^2 - 2|x||y|$, astfel că, presupunând $|x| < \delta_\varepsilon$, $|y| < \delta_\varepsilon$, se obține

$$\frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|} = |x| + |y| - \frac{2|x||y|}{|x| + |y|} \leq |x| + |y| < 2\delta_\varepsilon;$$

dacă se impune ca $2\delta_\varepsilon < \varepsilon$, rezultă că există δ_ε , $0 < \delta_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2}$, astfel că $|x| < \delta_\varepsilon$ și $|y| < \delta_\varepsilon$ să implice $|f(x, y)| < \varepsilon$, ceea ce arată că definiția este verificată.

9. Să se arate, folosind definiția, că următoarele funcții nu au limită în origine:

a) $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$; b) $f(x, y) = \frac{y^2 + 2x}{y^2 - 2x}$, $y^2 - 2x \neq 0$.

Rezolvare. a) Vom folosi definiția cu șiruri, punând în evidență șiruri de puncte, convergente către $(0, 0)$, situate pe drepte oarecare prin origine. Ecuația unei astfel de drepte este $y = mx$. Dacă funcția ar admite limita în origine, ar trebui ca

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ y = mx}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = mx}} \frac{2x \cdot (mx)}{x^2 + x^2 m^2} = \frac{2m}{1 + m^2}.$$

Acest fapt arată însă că funcția nu are limită, pentru că dacă ar avea limită, aceasta nu ar trebui să depindă de șirul folosit (în cazul de față nu ar trebui să depindă de m , panta dreptei folosite).

b) Procedind ca la exercițiul anterior, găsim că dacă limita ar exista, atunci

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ y = mx}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = mx}} \frac{m^2 x^2 + 2x}{m^2 x^2 - 2x} = -1.$$

De aici nu putem trage concluzia că limita există, deoarece dacă facem ca $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ pe parabole ce trec prin origine, $y^2 = px$, $p \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, rezultă că

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y^2 = px}} \frac{px + 2x}{px - 2x} = \frac{p + 2}{p - 2}.$$

Prin urmare, pentru șiruri diferite obținem limite diferite și deci funcția nu are limită în origine.

10. Să se cerceteze limitele iterate și limita globală în origine pentru următoarele funcții:

a) $f(x, y) = \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y}$, $x + y \neq 0$; b) $f(x, y) = x \sin \frac{1}{y}$, $y \neq 0$;

c) $f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$.

Rezolvare. a) Limitele iterate sînt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2}{x} = 1, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y + y^2}{y} = -1,$$

și, deoarece acestea sînt diferite, tragem concluzia că limita globală nu există. Într-adevăr, avem

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = mx}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - mx + x^2 + m^2 x^2}{x + mx} = \frac{1 - m}{1 + m},$$

ceea ce arată că limita globală nu există.

b) În acest caz $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0$, iar $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ nu există, deoarece $\lim_{y \rightarrow 0} \sin \frac{1}{y}$ nu există. Totuși limita globală există și este egală cu zero. Verificăm aceasta cu ajutorul definiției.

Deoarece $\left| \sin \frac{1}{y} \right| \leq 1$, rezultă că pentru $|x| < \delta_\varepsilon$, $|y| < \delta_\varepsilon$ avem

$$|f(x, y) - 0| = |x| \left| \sin \frac{1}{y} \right| \leq |x| < \delta_\varepsilon$$

Luând $\delta_\varepsilon < \varepsilon$, definiția este verificată.

c) Limitele iterate nu există, deoarece $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ și $\lim_{y \rightarrow 0} \sin \frac{1}{y}$ nu există. Limita globală există și este egală cu zero. Ca să vedem aceasta observăm că $\left| \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} \right| \leq 1$ și deci

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} (x + y) \cdot \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} = 0.$$

11. Să se calculeze limitele:

a) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$; b) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 2)} \frac{\sin xy}{x}$; c) $\lim_{(x, y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x+y}{x^2+y^2}$.

Rezolvare. a) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\sqrt{u+1}-1} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{u+1}+1)u}{u} = 2$

b) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 2)} \frac{\sin xy}{x} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 2)} \frac{\sin xy}{xy} \cdot \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 2)} y = 2$.

c) Pentru $x > 0$ și $y > 0$, avem $0 < \frac{x+y}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{y}{x^2+y^2} \leq \frac{x}{x^2} + \frac{y}{y^2}$ și, deoarece

$\lim_{(x, y) \rightarrow (\infty, \infty)} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = 0$, rezultă $\lim_{(x, y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x+y}{x^2+y^2} = 0$.

7.1.2. Probleme propuse spre rezolvare

12. Folosind definiția limitei unei funcții într-un punct, să se demonstreze că:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - x + 1) = 1$; b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$; c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3}{(x-1)^2} = \frac{1}{2}$.

13. Folosind definiția, să se arate că nu există limitele:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$; b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$; c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \sin x) \ln x$; d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$.

14. Folosind criteriul Cauchy-Bolzano, să se cerceteze existența limitelor:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$; b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x+1}$.

15. Să se calculeze limitele laterale în $x = 0$ pentru funcțiile:

a) $f(x) = \frac{\left| \sin \frac{1}{x} \right|}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$; b) $f(x) = x \cdot \frac{\left| \sin \frac{1}{x} \right|}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$; c) $f(x) = \frac{\cos \frac{1}{x^2}}{x}$.

16. Să se calculeze limitele

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$;

d) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{c \operatorname{tg}^2 x}$; e) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$; f) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{\sin x}{x - \sin x}}$.

17. Să se determine α, β, γ și $p \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt{9x^4 - 24x^3 + 6x^2 + 5} - (x^p + \beta x + \gamma)] = \frac{7}{3}.$$

18. Să se calculeze:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx}{x}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x + \sin^3 2x + \dots + \sin^3 nx}{x^3}$;

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+kx)}{x}$; d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{kx} - \cos x}{x^2}$; e) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2^{1/x} x - 2}{x - \frac{\pi}{4}}$;

f) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a}$, $a > 0$; g) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{1 - \frac{x^2}{\pi^2}}$; h) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{x - \frac{\pi}{4}}$; i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2}$;

j) $\lim_{x \rightarrow e} (\ln x)^{\frac{1}{x^2 - 3ex + 2e^2}}$; k) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^{ax} - a^{xa}}{x - a}$, $a > 0$; l) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^{x^2} - a^{a^2}}{x - a}$, $a > 0$.

19. Să se determine mulțimea de definiție pentru funcțiile:

a) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2 + y^2)}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$; b) $f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$;

c) $f(x, y) = x + \arccos y$; d) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{4 - y^2}$;

e) $f(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$; f) $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$.

20. Folosind definiția, să se demonstreze că:

a) $\lim_{(x, y) \rightarrow (2, 3)} (xy + 2) = 8$; b) $\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 2)} \frac{x}{y} = \frac{1}{2}$; c) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$;

d) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = 0$; e) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y^3}{x^4 + y^4} = 0$.

21. Să se arate că următoarele funcții nu au limită în origine:

a) $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$, $x-y \neq 0$; b) $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$.

22. Să se cerceteze limitele iterate și limita globală în origine pentru:

a) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$; b) $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$,

c) $f(x, y) = \frac{x \sin \frac{1}{x} + y}{x + y}$, $x + y \neq 0$.

23. Să se calculeze

a) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} (x^2 + y^2)$

d) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}$

Fie funcția $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ este continuă în x_0 dacă

izolat al lui A , funcțiile f se pot da definiții echivalente.

Funcția f este continuă

Dacă funcțiile f sunt

sunt continue în x_0 .

a) Funcții de o variabilă $x_0 \in I$. Funcția f este

dreapta în $x_0 \in I$ dacă

continuă la stânga și

Punctul x_0 se numește limită laterală finită, de speța a doua pentru

O funcție $f: I \rightarrow \mathbb{R}^m$ care ar fi λ cuprinsă

Orice funcție f nu este adevărată.

O funcție $f: I \rightarrow \mathbb{R}^m$

$\forall \epsilon > 0$

Orice funcție f nu este adevărată. O funcție f este

b) Funcții de o variabilă

Dacă funcția $f(x, y)$ cu variabila x . Dacă raport cu y .

Continuitatea nu este adevărată

Funcția f este

$\forall \epsilon > 0$

Orice funcție f este

nită și închisă (c)

23. Să se calculeze :

$$\begin{aligned} \text{a) } & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy}; & \text{b) } & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x+y}; & \text{c) } & \lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, k)} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^x; \\ \text{d) } & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x+y) \operatorname{tg}(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}; & \text{e) } & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}. \end{aligned}$$

7.2. Funcții continue

Fie funcția $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ și fie $x_0 \in A$. Dacă x_0 este un punct de acumulare al lui A , atunci f este continuă în x_0 dacă și numai dacă f are limită în x_0 și $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Dacă x_0 este un punct izolat al lui A , funcția f este continuă în x_0 . Ținând seama de definiția limitei unei funcții într-un punct, se pot da definiții echivalente pentru continuitatea funcției într-un punct.

Funcția f este continuă pe A , dacă este continuă în fiecare punct din A .

Dacă funcțiile f și g sînt continue în $x_0 \in A$, atunci și funcțiile $f \pm g$, $f \cdot g$ și $\frac{f}{g}$, dacă $g(x_0) \neq 0$, sînt continue în x_0 . De asemenea, compunerea a două funcții continue este tot o funcție continuă.

a) Funcții de o variabilă reală. Fie $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție definită pe intervalul I și fie $x_0 \in I$. Funcția f este continuă la stînga în $x_0 \in I$ dacă $\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = f(x_0)$; funcția f este continuă la dreapta în $x_0 \in I$ dacă $\lim_{x \searrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Funcția f este continuă în punctul x_0 dacă și numai dacă este continuă la stînga și la dreapta în punctul x_0 .

Punctul x_0 se numește punct de discontinuitate de speța întâi pentru funcția f , dacă în x_0 există limite laterale finite, dar funcția nu este continuă în x_0 . Punctul x_0 se numește punct de discontinuitate de speța a doua pentru f , dacă cel puțin una din limitele laterale nu există sau este infinită.

O funcție $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux, dacă, oricare ar fi $a, b \in I$, $a \neq b$, și oricare ar fi λ cuprins între $f(a)$ și $f(b)$, există un număr c_λ cuprins între a și b astfel încît $f(c_\lambda) = \lambda$.

Orice funcție continuă $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux, însă reciproca acestei afirmații nu este adevărată.

O funcție $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ este uniform continuă pe I , dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid \forall x_1, x_2 \in I, \mid x_1 - x_2 \mid < \delta_\varepsilon \Rightarrow \mid f(x_1) - f(x_2) \mid < \varepsilon. \quad (1)$$

Orice funcție uniform continuă pe I este continuă pe I , fără ca afirmația reciprocă să fie adevărată. O funcție continuă pe un interval mărginit și închis I este uniform continuă pe acel interval.

b) Funcții de mai multe variabile. Fie $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de două variabile, $f(x, y)$. Dacă funcția $f(x, y_0)$ este continuă în punctul x_0 , $(x_0, y_0) \in A$, atunci f este continuă parțial în raport cu variabila x . Dacă funcția $f(x_0, y)$ este continuă în punctul y_0 , atunci f este continuă parțial în raport cu y .

Continuitatea funcției f implică continuitatea parțială în raport cu fiecare variabilă. Reciproca nu este adevărată.

Funcția f este uniform continuă pe A , dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A, \mid x_2 - x_1 \mid < \delta_\varepsilon, \mid y_2 - y_1 \mid < \delta_\varepsilon \Rightarrow \mid f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2) \mid < \varepsilon. \quad (2)$$

Orice funcție uniform continuă pe A este continuă pe A . O funcție continuă pe o mulțime mărginită și închisă (compactă) A este uniform continuă pe A .

7.2.1. Probleme rezolvate

1. Să se studieze continuitatea funcțiilor :

$$\begin{aligned}
 \text{a) } f(x) &= \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \\ -x^2 + x, & x \leq 0; \end{cases} & \text{b) } f(x) &= \begin{cases} \operatorname{tg} x \cdot \sin \frac{1}{x}, & -\frac{\pi}{2} < x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ e^{-1/x} \cos \frac{1}{x}, & x > 0; \end{cases} \\
 \text{c) } f(x) &= \begin{cases} e^x + x - 1, & x \leq 1, \\ \frac{1}{x^{x-1}}, & x > 1; \end{cases} & \text{d) } f(x) &= \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Rezolvare. a) Se observă că funcția este continuă în orice punct $x \neq 0$. În punctul $x = 0$ avem $f(0+0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin \frac{1}{x} = 0$, deoarece $\sin \frac{1}{x}$ este mărginită; apoi $f(0-0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2 + x) = 0$ și $f(0) = 0$. Prin urmare, funcția este continuă și în punctul $x = 0$.

b) Deoarece funcția este continuă în orice punct $x \neq 0$, o vom studia numai în origine. Avem $f(0-0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{tg} x \sin \frac{1}{x} = 0$, $f(0+0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-1/x} \cos \frac{1}{x} = 0$ și $f(0) = 0$, ceea ce arată că funcția este continuă în punctul $x = 0$. Deci $f(x)$ este continuă în $(-\pi/2, \infty)$.

c) Deoarece funcția este continuă în rest, vom studia continuitatea în $x = 1$. Avem $f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (e^x + x - 1) = e$, $f(1) = e$ și $f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} [1 + (x-1)]^{\frac{1}{x-1}} = e$. Acestea arată că funcția f este continuă pe \mathbb{R} .

d) Studiem continuitatea în punctul $x = 0$. Avem $f(0-0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{|x|} = -1$, $f(0) = 1$ și $f(0+0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$. În acest caz funcția este continuă în $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Funcția este continuă la dreapta în $x = 0$. Punctul $x = 0$ este un punct de discontinuitate de speța întâi.

2. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel ca funcția

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1, & x < 0, \\ a \sin x + b \cos x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

să fie continuă pe $(-\infty, \frac{\pi}{2}]$.

Rezolvare. Punând condiția ca funcția să fie continuă în punctul $x = 0$, obținem $f(0-0) = f(0) = f(0+0)$, adică $1 = b$. Prin urmare, pentru $a \in \mathbb{R}$ și $b = 1$, funcția f este continuă pe intervalul $(-\infty, \frac{\pi}{2}]$.

3. Să se studieze continuitatea funcției $f(x) = xE(x)$, $x \in [0, \infty)$, unde $E(x)$ este partea întreagă a lui x .

Rezolvare. Conform definiției funcției $E(x)$, avem

$$E(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1), \\ 1, & x \in [1, 2), \\ \dots & \dots \\ n, & x \in [n, n+1), \\ \dots & \dots \end{cases} \quad \text{deci} \quad f(x) = xE(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1), \\ x, & x \in [1, 2), \\ \dots & \dots \\ nx, & x \in [n, n+1), \\ \dots & \dots \end{cases}$$

Cum se vede din expresia aceasta observăm că

$$f(x-0) = \lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = \dots$$

Prin urmare, funcția este discontinuă în punctele $x = n$, $n \in \mathbb{N}$ sunt puncte de discontinuitate.

4. Să se studieze continuitatea funcției $g(x) = 1 + x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Rezolvare. Deoarece $g(x) = 1 + x^2$ este o funcție polinomială, ea este continuă pe \mathbb{R} .

rest fiind continuă. Funcția g este continuă pe \mathbb{R} .

Deoarece $(g \circ f)(x) = 1 + (f(x))^2$ este o funcție compusă din funcții continue, ea este continuă pe \mathbb{R} .

Apoi $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 1 + (1 + x^2)^2$ este o funcție compusă din funcții continue, ea este continuă pe \mathbb{R} .

5. Să se arate că funcția $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$ este discontinuă în orice punct $x \in \mathbb{R}$.

discontinue în orice punct $x \in \mathbb{R}$.

Rezolvare. Este de demonstrat că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și orice $\delta > 0$ există un $\epsilon > 0$ astfel încât pentru orice $y \in \mathbb{R}$ cu $|y - x| < \delta$ și $|y - f(y)| \geq \epsilon$.

nu există. Într-adevăr, dacă $x \in \mathbb{Q}$, atunci $f(x) = x$ și $|f(x) - x| = 0 < \epsilon$. Dacă $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $f(x) = 0$ și $|f(x) - x| = |x| > \epsilon$.

$f(x)$ este discontinuă în orice punct $x \in \mathbb{R}$. Deoarece $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ este suma a două funcții continue, ea este continuă pe \mathbb{R} .

6. Folosind definiția continuității, să se arate că funcția $f(x) = x \cdot 2^x$ este continuă pe \mathbb{R} .

Rezolvare. Deoarece $f(x) = x \cdot 2^x$ este o funcție compusă din funcții continue, ea este continuă pe \mathbb{R} .

7. Să se arate că funcția $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$ este discontinuă în orice punct $x \in \mathbb{R}$.

dar nu este cotinuuă în punctele $x \in \mathbb{Q}$.

Rezolvare. Deoarece $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$ este discontinuă în $x = 0$. Funcția considerată este discontinuă în orice punct $x \in \mathbb{R}$.

8. Să se studieze continuitatea funcției $f(x) = \arctan x$, $x \in \mathbb{R}$.

a) $f(x) = \arctan x$ este continuă pe \mathbb{R} .

Rezolvare. a) Vom demonstra că pentru orice $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ și orice $\epsilon > 0$ există un $\delta > 0$ astfel încât dacă $|x_1 - x_2| < \delta$ atunci $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$.

poate determina $\delta = \delta(\epsilon)$ astfel încât $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$.

$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$ pentru $|x_1 - x_2| < \delta$.

astfel că dacă impunem $|x_1 - x_2| < \delta$ atunci $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$.

Cum se vede din expresia funcției, problema continuității se pune în punctele $x = n$, $n \in \mathbb{N}$. Pentru aceasta observăm că

$$f(n-0) = \lim_{x \nearrow n} f(x) = \lim_{x \nearrow n} (n-1)x = n(n-1), \quad f(n) = n^2, \quad f(n+0) = \lim_{x \searrow n} f(x) = \lim_{x \searrow n} nx = n^2.$$

Prin urmare, funcția este continuă pe $\{0, \infty\} \setminus \mathbb{N}$; este continuă la dreapta în $x = n$, $n \in \mathbb{N}$. Punctele $x = n$, $n \in \mathbb{N}$ sînt puncte de discontinuitate de speța întâi.

4. Să se studieze continuitatea funcțiilor f , g , $f \circ g$ și $g \circ f$ pentru $f(x) = \text{sign } x$ și $g(x) = 1 + x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Rezolvare. Deoarece $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$ se vede că funcția f este discontinuă în $x = 0$, la rest fiind continuă. Funcția g este continuă pe \mathbb{R} .

Deoarece $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 1 + (\text{sign } x)^2 = \begin{cases} 2, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$ rezultă că $g \circ f$ este continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Apoi $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \text{sign}(1 + x^2) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$, este continuă pe \mathbb{R} .

5. Să se arate că funcțiile $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & x \in \mathbb{I}, \end{cases}$ și $g(x) = \begin{cases} -1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & x \in \mathbb{I}, \end{cases}$ sînt discontinue în orice punct $x \in \mathbb{R}$. Să se arate că $f + g$ și $f \cdot g$ sînt continue pe \mathbb{R} .

Rezolvare. Este de ajuns să studiem numai funcția $f(x)$. Fie $x_0 \in \mathbb{R}$. Să observăm că $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ nu există. Într-adevăr, dacă $x_0 \in \mathbb{Q}$, atunci, alegînd $x \in \mathbb{I}$ cu $|x - x_0| < \delta$, obținem $|f(x) - f(x_0)| = 2$, ceea ce arată că $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ nu există. Se raționează analog în cazul cînd $x_0 \in \mathbb{I}$. Prin urmare, funcția $f(x)$ este discontinuă în orice punct $x \in \mathbb{R}$.

Deoarece $(f + g)(x) = 0$ și $(f \cdot g)(x) = -1, \forall x \in \mathbb{R}$, rezultă că funcțiile $f + g$ și $f \cdot g$ sînt continue pe \mathbb{R} .

6. Folosind proprietatea lui Darboux pentru funcții continue, să se arate că funcția $f(x) = x \cdot 2^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$, se anulează într-un punct $\xi \in (0, 1)$.

Rezolvare. Deoarece funcția $f(x) = x \cdot 2^x - 1$ este continuă pe \mathbb{R} , rezultă că f are proprietatea lui Darboux. Deoarece $f(0) = -1$ și $f(1) = 1$, rezultă că există $\xi \in (0, 1)$ astfel că $f(\xi) = 0$.

7. Să se arate că funcția $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 0, \\ x - 1, & x > 0, \end{cases}$ are proprietatea lui Darboux, dar nu este continuă în $x = 0$.

Rezolvare. Deoarece $f(0-0) = f(0) = 0$ și $f(0+0) = -1$, rezultă că funcția f nu este continuă în $x = 0$. Funcția considerată are proprietatea lui Darboux, deoarece în orice interval (α, β) cu $f(\alpha) \neq f(\beta)$ această funcție trece prin toate valorile cuprinse între $f(\alpha)$ și $f(\beta)$.

8. Să se studieze continuitatea uniformă a funcțiilor:

$$a) f(x) = \arctg \frac{1+x}{1-x}, \quad x \in (1, \infty); \quad b) f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}, \quad x \in (0, \infty).$$

Rezolvare. a) Vom folosi definiția sub forma condiției (1). Să arătăm că pentru orice $\epsilon > 0$, se poate determina $\delta_\epsilon > 0$ astfel încît pentru orice $x_1, x_2 \in (1, \infty)$ cu $|x_1 - x_2| < \delta_\epsilon$ să implice $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$. Ținînd seama de identitatea $\arctg \alpha - \arctg \beta = \arctg \frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta}$, deducem

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| \arctg \frac{x_1 - x_2}{1 + x_1 x_2} \right| < \frac{|x_1 - x_2|}{1 + x_1 x_2} < |x_1 - x_2| < \delta_\epsilon,$$

astfel că dacă impunem $0 < \delta_\epsilon < \epsilon$, definiția este verificată și deci $f(x)$ este uniform continuă.

b) Funcția este continuă pe $(0, \infty)$, dar nu este uniform continuă. Ca să vedem aceasta, vom alege $x_1 = \sqrt{n}$ și $x_2 = \sqrt{n+1}$ în $(0, \infty)$. Se observă că pentru n suficient de mare punctele x_1 și x_2 pot fi luate oricât de apropiate, deoarece $|x_2 - x_1| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \rightarrow 0$. Dar

$$|f(x_2) - f(x_1)| = \left| n \left(\cos \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right) + \cos \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right| =$$

$$= \left| 2n \sin \frac{1}{2(n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n})} \sin \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}{2\sqrt{n(n+1)}} + \cos \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right| \rightarrow 1,$$

fapt ce arată că $|f(x_2) - f(x_1)|$ nu poate fi făcut oricât de mic. Deci funcția $f(x)$ nu este uniform continuă pe $(0, \infty)$. Datorită continuității, funcția este uniform continuă pe orice interval compact cuprins în $(0, \infty)$.

9. Să se studieze continuitatea uniformă a funcțiilor

$$f(x) = \frac{x+2}{x+1} \sin^2 x^2, \quad x \in [0, \infty), \quad g(x) = \frac{x+2}{x+1} \cos^2 x^2, \quad x \in [0, \infty),$$

$$\text{și } S(x) = f(x) + g(x).$$

Rezolvare. Procedând ca în exercițiul 8, b) vom alege $x_1 = (2n\pi)^{1/2}$ și $x_2 = \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^{1/2}$ astfel că

$$|x_1 - x_2| = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{(2n\pi)^{1/2} + \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^{1/2}} \rightarrow 0.$$

Dar $|f(x_1) - f(x_2)| = 1 + \frac{1}{\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^{1/2} + 1} > 1$, astfel că relația (1) nu este verificată și deci

funcția f nu este uniform continuă pe $[0, \infty)$. Similar se procedează pentru a arăta că funcția g nu este uniform continuă pe $[0, \infty)$.

Funcția $S(x) = \frac{x+2}{x+1}$, $x \in [0, \infty)$, verifică condiția (1). Într-adevăr, dacă $x_1, x_2 \in [0, \infty)$ și $|x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon$, atunci $|S(x_1) - S(x_2)| = \frac{|x_2 - x_1|}{(1+x_1)(1+x_2)} < |x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon$. Dacă luăm $0 < \delta_\varepsilon < \varepsilon$, definiția (1) este verificată și deci $S(x)$ este uniform continuă.

10. Să se arate că funcția $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$ este continuă în origine.

Rezolvare. Deoarece $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} \cdot \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = 0$ și $f(0, 0) = 0$, rezultă că funcția $f(x, y)$ este continuă în origine. Pentru a arăta că $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = 0$ se folosește definiția. Avem pentru $|x| < \delta_\varepsilon$, $|y| < \delta_\varepsilon$,

$$\left| \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \right| = \frac{|x + y| |x^2 - xy + y^2|}{x^2 + y^2} \leq (|x| + |y|) \left(1 + \frac{|xy|}{x^2 + y^2} \right) < 2\delta_\varepsilon \cdot \frac{3}{2},$$

deoarece $2|x||y| < x^2 + y^2$. Dacă luăm $0 < \delta_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{3}$, definiția este verificată.

11. Să se arate

continuuă parțial în

Rezolvare. Funcția $f(x, y, z) = \frac{\sin x^2}{x^2} \cdot x = 0 = f(0, y, z)$

nu este continuă în origine.

12. Să se studieze

a) $f(x, y) = \frac{x}{y}$,

b) $f(x, y, z) = x^2 y z$.

Rezolvare. a) Utilizăm definiția pentru orice $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D_f$ avem

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| = \left| \frac{x_1}{y_1} - \frac{x_2}{y_2} \right|$$

astfel că pentru $0 < \delta_\varepsilon$

b) Deoarece funcția f este uniform continuă rezultă că f este uniform continuă.

Într-adevăr, presupunem că $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$

$$|f(x_1, y_1, z_1) - f(x_2, y_2, z_2)| = |x_1^2 y_1 z_1 - x_2^2 y_2 z_2| \leq |x_1^2 y_1 z_1 - x_1^2 y_1 z_2| + |x_1^2 y_1 z_2 - x_2^2 y_2 z_2|$$

$$\leq |x_1^2 y_1| |z_1 - z_2| + |x_1^2 y_1 z_2 - x_2^2 y_2 z_2| \leq 2\delta_\varepsilon$$

13. Să se studieze

a) $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^2}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

11. Să se arate că funcția $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3 + \sin(x^3 + y^5)}{x^2 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$ este continuă parțial în origine, dar nu este continuă în acest punct.

Rezoluare. Funcția $f(x, 0) = \begin{cases} \frac{\sin x^3}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ este continuă în $x = 0$ deoarece $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^3}{x^2} \cdot x = 0 = f(0, 0)$. Similar funcția $f(0, y)$ este continuă în $y = 0$. Dar funcția $f(x, y)$ nu este continuă în origine, deoarece $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ nu există:

$$\begin{aligned} \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y^2 = px}} \frac{px^2 + \sin(x^3 + p^{5/2}x^{5/2})}{x^2 + p^2x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + p^2} \left[p + \frac{\sin(x^3 + p^{5/2}x^{5/2})}{x^3 + p^{5/2}x^{5/2}} \cdot \frac{x^3 + p^{5/2}x^{5/2}}{x^2} \right] = \frac{p}{1 + p^2}. \end{aligned}$$

12. Să se studieze uniforma continuitate a funcțiilor:

a) $f(x, y) = \frac{x}{y}, \quad (x, y) \in (1, 2) \times (1, 2);$

b) $f(x, y, z) = x^2 + e^y + y \sin z, \quad (x, y, z) \in [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1].$

Rezoluare. a) Utilizăm relația (2). Fiind dat $\varepsilon > 0$ oarecare, trebuie să determinăm $\delta_\varepsilon > 0$, astfel încât pentru orice (x_1, y_1) și $(x_2, y_2) \in (1, 2) \times (1, 2)$ cu $|x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon$ și $|y_1 - y_2| < \delta_\varepsilon$ să implice $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$. Dar

$$\begin{aligned} |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| &= \left| \frac{(x_1 - x_2)y_2 + x_2(y_2 - y_1)}{y_1y_2} \right| \leq \frac{|x_1 - x_2|y_2 + |y_1 - y_2|x_2}{y_1y_2} < \\ &< \delta_\varepsilon \cdot \frac{x_2 + y_2}{y_1y_2} < 4\delta_\varepsilon, \end{aligned}$$

astfel că pentru $0 < \delta_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{4}$ relația (2) este verificată și deci funcția $f(x, y)$ este uniform continuă.

b) Deoarece funcția $f(x, y, z)$ este continuă pe mulțimea mărginită și închisă $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$, rezultă că f este uniform continuă pe această mulțime. Se poate verifica aceasta și cu ajutorul definiției. Într-adevăr, presupunind $|x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon$, $|y_1 - y_2| < \delta_\varepsilon$ și $|z_1 - z_2| < \delta_\varepsilon$ cu $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$, avem $|f(x_1, y_1, z_1) - f(x_2, y_2, z_2)| \leq |x_1 - x_2| (x_1 + x_2) + e^y |1 - e^{y_1 - y_2}| + |y_1 - y_2| |\sin z_1| + y_2 \left| 2 \sin \frac{z_1 - z_2}{2} \cos \frac{z_1 + z_2}{2} \right| \leq 2\delta_\varepsilon + e |1 - e^{y_1 - y_2}| + \delta_\varepsilon + 2 \left| \sin \frac{z_1 - z_2}{2} \right| \leq 2\delta_\varepsilon + e\delta_\varepsilon + \delta_\varepsilon + \delta_\varepsilon < 7\delta_\varepsilon < \varepsilon$ pentru $0 < \delta_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{7}$.

Probleme propuse spre rezolvare

13. Să se studieze continuitatea funcțiilor

a) $f(x) = \begin{cases} \left(1 + 2^{\frac{1}{x+2}}\right)^{-1}, & x \in \mathbf{R} \setminus \{-2\}, \\ 0, & x = -2; \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \\ 1, & x = 0; \end{cases}$

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\sin x - 1}}{x - \pi/2}, & x \neq \pi/2, \\ 1, & x = \pi/2, \end{cases} \quad x \in [0, \pi];$$

$$d) f(x) = \begin{cases} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

$$e) f(x) = \begin{cases} x(1 + e^{1/x})^{-1}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases} \quad f) f(x) = \begin{cases} x^{-1}(x^2 + \sin x^5)^{\frac{1}{2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

14. Se dă funcția $f(x) = 1 - x \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$. Cum trebuie ales $f(0)$ pentru ca funcția $f(x)$ să fie continuă în punctul $x = 0$?

15. Se consideră funcția $f(x) = \frac{x \ln x}{x^2 - 1}$, $x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$. Să se arate că se poate alege $f(0)$ și $f(1)$ convenabil astfel că funcția $f(x)$ este continuă pe $[0, \infty)$.

16. Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel ca funcția $f(x)$ să fie continuă pe mulțimea de definiție

$$a) f(x) = \begin{cases} x + 1^x, & x \in [0, 1], \\ 3ax + 3, & x \in (1, 2] \end{cases} \quad b) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{5x}, & x \in [-1, 0), \\ a, & x = 0, \\ \frac{x^2 + 2x}{\operatorname{tg} 5(x^2 + 2x)} + \frac{3}{x}, & x \in (0, 1]; \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} 2 \operatorname{tg} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & x \in [-1, 0), \\ a, & x = 0, \\ \frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2 e^x}, & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

17. Se definește funcția f prin $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{nx} - e^{-nx}}{e^{nx} + e^{-nx}}$. Este continuă în $x = 0$?

18. Să se studieze continuitatea funcției $f(x) = x^2 - E(x^2)$, $x \in [0, \infty)$, unde $E(x)$ este partea întreagă a lui x .

19. Să se studieze continuitatea funcțiilor f , g , $f \circ g$ și $g \circ f$ pentru $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1; \\ 0, & |x| > 1; \end{cases}$ și $g(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$

20. Să se studieze continuitatea funcțiilor

$$a) (X \circ X)(x), \quad x \in \mathbf{R}, \quad \text{unde } X(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbf{Q}, \\ 1, & x \in I; \end{cases}$$

$$b) g(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbf{Q}, \\ -x, & x \in I; \end{cases} \quad c) f(x) = \operatorname{sign} [g(x)], \quad x \in \mathbf{R}.$$

21. Folosind proprietatea lui Darboux pentru funcții continue, să se arate că funcția $f(x) = x^5 - 8x - 1$, $x \in \mathbf{R}$, se anulează într-un punct $\xi \in (1, 2)$.

22. Fiind dată continuitate uniformă

$$a) f(x) = \sqrt{2x}$$

$$c) f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

23. Să se studieze

$$a) f(x) = \ln x$$

$$c) f(x) = \sin x$$

$$e) f(x) = \frac{x}{1+x}$$

24. Să se studieze nite pe \mathbf{R} , știind

25. Să se studieze

26. Să se arate dar nu este conti

$$a) f(x, y) =$$

27. Să se studieze

$$a) f(x, y) =$$

$$c) f(x, y) =$$

$$d) f(x, y) =$$

$$e) f(x, y) =$$

22. Fiind dat $\varepsilon > 0$, să se determine un $\delta_\varepsilon > 0$ satisfăcând condiția de continuitate uniformă pentru următoarele funcții:

a) $f(x) = \sqrt{2x+3}$, $x \in [0, 2]$; b) $f(x) = \sin x + \cos x$, $x \in \mathbf{R}$;

c) $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$, $x \in [1, \infty)$.

23. Să se studieze continuitatea uniformă a funcțiilor:

a) $f(x) = \ln x$, $x \in [\varepsilon, e]$, $\varepsilon > 0$; b) $f(x) = \ln x$, $x \in (0, e]$;

c) $f(x) = \sin x^2$, $x \in \mathbf{R}$; d) $f(x) = \frac{x}{1+x} + x$, $x \in (0, \infty)$;

e) $f(x) = \frac{x}{1+x} + x$, $x \in (-1, \infty)$; f) $f(x) = e^x \cos \frac{1}{x}$, $x \in (0, 1)$.

24. Să se studieze continuitatea uniformă a funcțiilor $f_1, f_2, f_1 + f_2$ și $f_1 f_2$ definite pe \mathbf{R} , știind că

$$f_1(x) = x \sin^2 x^2, f_2(x) = x \cos^2 x^2, x \in \mathbf{R}.$$

25. Să se studieze continuitatea în origine a funcției

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|}{y^2} \cdot e^{-|x|y^{-2}}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

26. Să se arate că fiecare din funcțiile următoare este continuă parțial în origine, dar nu este continuă în raport cu ambele variabile în acest punct:

a) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0); \end{cases}$ b) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0); \end{cases}$

c) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy + x^2y \ln|x+y|}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

27. Să se studieze continuitatea funcțiilor:

a) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0); \end{cases}$ b) $f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2-y^2}, & x^2+y^2 \leq 1, \\ 0, & x^2+y^2 > 1; \end{cases}$

c) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0); \end{cases}$

d) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{\ln(x^2+y^2)}, & x^2+y^2 < 1 \text{ și } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0); \end{cases}$

e) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0); \end{cases}$

$$d) f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0); \end{cases}$$

$$g) f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{(1+xy)\sqrt{x} + \sqrt{y}}, & x > 0 \text{ și } y > 0, \\ 1, & x = 0 \text{ sau } y = 0; \end{cases}$$

$$h) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

28. Să se studieze uniforma continuitate a funcției

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}, \quad (x, y) \in (1, 2) \times (1, 2).$$

a) Derivata

Limite $f'(x_0) =$

$f'(x_0)$ este finită,

Dacă f este

Funcția f ca

Limitele f'_x

tiv, derivata la

în x_0 dacă și nu

Dacă funcția

$x \in I$, sint deri

Dacă funcția

compusă $f \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$

b) Teorema

continuu pe $[a, b]$

astfel încât $f'(c)$

Teorema lui

vabilă pe (a, b)

Teorema lui

pe $[a, b]$, sint

$c \in (a, b)$, astf

c) Formula

Polinomul lui T

T

Formula lui

$f(x) =$

reprezintă restu

8. TEORIA DIFERENȚIALĂ A FUNCȚIILOR

8.1. Funcții de o variabilă reală

a) **Derivata unei funcții.** Fie funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ definită pe intervalul I și fie x_0 un punct din I . Limita $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, dacă există, se numește derivata funcției f în punctul x_0 . Dacă $f'(x_0)$ este finită, se spune că f este derivabilă în punctul x_0 .

Dacă f este derivabilă în x_0 , atunci f este continuă în x_0 însă reciproca nu este adevărată. Funcția f este derivabilă pe I dacă este derivabilă în fiecare punct din I .

Limitele $f'_s(x_0) = \lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ și $f'_d(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, dacă există, se numesc, respectiv, derivata la stînga și derivata la dreapta a funcției f în punctul x_0 . Funcția f are derivată în x_0 dacă și numai dacă are derivate laterale egale în x_0 .

Dacă funcțiile $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ sînt derivabile pe I , atunci funcțiile $f \pm g, fg$ și $\frac{f}{g}$, dacă $g(x) \neq 0$, $x \in I$, sînt derivabile pe I și $(f \pm g)' = f' \pm g'$, $(fg)' = f'g + fg'$ și $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Dacă funcția $u: I \rightarrow J$ este derivabilă pe I și funcția $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă pe J , atunci funcția compusă $f \circ u: I \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă pe I și $(f \circ u)'(x) = f'(u(x))u'(x)$.

b) **Teoreme asupra funcțiilor derivabile. Teorema lui Rolle.** Dacă funcția $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă pe $[a, b]$, este derivabilă pe (a, b) și $f(a) = f(b)$, atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$ astfel încît $f'(c) = 0$.

Teorema lui Lagrange (teorema creșterilor finite). Dacă funcția f este continuă pe $[a, b]$ și derivabilă pe (a, b) , atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$, astfel încît $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Teorema lui Cauchy. Fie f și g două funcții definite pe $[a, b]$. Dacă funcțiile f și g sînt continue pe $[a, b]$, sînt derivabile pe (a, b) și $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$, atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$, astfel încît $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

c) **Formula lui Taylor.** Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă de $n + 1$ ori într-un punct $x_0 \in I$. Polinomul lui Taylor de gradul n , atașat funcției f în punctul x_0 , este

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0). \quad (1)$$

Formula lui Taylor de ordinul n pentru funcția f în punctul x_0 este

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \text{ unde } R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)), \theta \in (0, 1), \quad (2)$$

reprezintă restul (în forma lui Lagrange) de ordin n al formulei lui Taylor.

• Dacă în formula lui Taylor se ia $x_0 = 0$, se obține formula lui Mac Laurin

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x), \quad \theta \in (0, 1). \quad (3)$$

• Se vor folosi mai ales următoarele dezvoltări după formula lui Mac Laurin:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}, \quad \theta \in (0, 1); \quad (4)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \sin \left[\theta x + (2n+2) \frac{\pi}{2} \right], \quad \theta \in (0, 1); \quad (5)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \left[\theta x + (2n+1) \frac{\pi}{2} \right], \quad \theta \in (0, 1); \quad (6)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+2}}{n+2} (1+\theta x)^{-n-2}, \quad \theta \in (0, 1); \quad (7)$$

$$(1+x)^k = 1 + \bar{C}_k^1 x + \bar{C}_k^2 x^2 + \dots + \bar{C}_k^n x^n + \bar{C}_k^{n+1} x^{n+1} (1+\theta x)^{k-n-1}, \quad \theta \in (0, 1), \quad (8)$$

$$\text{unde } \bar{C}_k^n = \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!}.$$

d) Extreme locale. Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in I$. Punctul x_0 este un punct de maxim local pentru funcția f dacă există o vecinătate $V(x_0)$ a punctului x_0 , astfel încât $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in V(x_0) \cap I$. Dacă există o vecinătate $V(x_0)$, astfel încât $f(x) \geq f(x_0)$, atunci x_0 se numește punct de minim local. Un punct de maxim local sau de minim local se mai numește punct de extrem local.

Dacă funcția f admite derivate pînă la ordinul n , inclusiv, $f^{(n)}$ este continuă în x_0 și $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ și $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, atunci: dacă $n = 2k+1$ și x_0 este punct interior, punctul x_0 este un punct de inflexiune al funcției; dacă $n = 2k$, punctul x_0 este un punct de extrem local și anume, pentru $f^{(n)}(x_0) < 0$, x_0 este punct de maxim local, iar pentru $f^{(n)}(x_0) > 0$, x_0 este un punct de minim local.

e) Diferențiala unei funcții. Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in I$. Funcția f este diferențiabilă în punctul x_0 dacă variația sa, $\Delta f(x_0, h) = f(x_0 + h) - f(x_0)$, se poate scrie sub forma $\Delta f(x_0, h) = A(x_0)h + \sigma(x_0, h)h$, unde $A(x_0)$ este un număr, iar $\sigma(x_0, h)$ satisface condiția $\lim_{h \rightarrow 0} \sigma(x_0, h) = 0$. Expresia $A(x_0)h$ se numește diferențiala funcției f și se notează $df(x_0, h)$. Diferențiala unei funcții f este dată de relația $df = f' dx$. Pentru variații mici ale argumentului se poate aproxima variația funcției prin diferențiala sa.

8.1.1. Probleme rezolvate

1. Să se calculeze, folosind definiția, derivata $f'(x_0)$, pentru:

a) $f(x) = \sin 3x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$; b) $f(x) = \arcsin(x-1)$, $x_0 = 1$.

• Rezolvare. a) Derivata funcției este dată de

$$\begin{aligned} f' \left(\frac{\pi}{4} \right) &= \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin 3x - \sin \frac{3\pi}{4}}{x - \pi/4} = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{2 \sin \frac{3}{2} \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \cos \frac{3}{2} \left(x + \frac{\pi}{4} \right)}{x - \pi/4} = \\ &= -\sqrt{2} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{3}{2} y}{\frac{3}{2} y} \cdot \frac{3}{2} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}; \end{aligned}$$

b) $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arcsin(x-1)}{x-1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = 1.$

2. Să se calculeze

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-x} \\ e^{-x} \end{cases}$

b) $f(x) = \arcsin x$

c) $f(x) = \begin{cases} x \\ x^2 \end{cases}$

Rezolvare. a) $f'_x(x) =$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 - 1)e^{-x}}{x^2 - 1}$$

Similar se obține

b) $f'_x(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - \arcsin 0}{x - 0} =$

$$f'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$$

În calculul celor două

și faptul că $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\arcsin y}{y} = 1$

c) $f'_x(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} = 1$

$f'_d(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \arctg(x-1) = 0$

d) Urmind o calcul

și $f'_d(1) = -1$. Func

3. Să se cerceteze

a) $f(x) = \max\{x, x^2\}$

Rezolvare. a) A

valele $(0, \pi/2)$ și $(\pi/2, \pi)$

$$f'_x \left(\frac{\pi}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{x - \pi/2}$$

astfel că funcția nu

2. Să se calculeze derivatele laterale ale funcției $f(x)$ în punctul x_0 , pentru:

(3) a) $f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-x^2}, & |x| \leq 1, \\ e^{-1}, & |x| > 1. \end{cases} \quad x_0 = -1 \text{ și } x_0 = 1;$

(4) b) $f(x) = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}, \quad x_0 = 0;$

(5) c) $f(x) = \begin{cases} (x-1) \operatorname{arctg} [(x-1)^{-1}], & x \neq 1, \\ 0, & x = 1, \end{cases} \quad x_0 = 1, \quad \text{d) } f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}, \quad x_0 = 1.$

(6) Rezolvare. a) $f'_s(-1) = \lim_{x \nearrow -1} \frac{e^{-1} - e^{-1}}{x+1} = 0$ și $f'_d(-1) = \lim_{x \searrow -1} \frac{x^2 e^{-x^2} - e^{-1}}{x+1} =$

(7) $= \lim_{x \searrow -1} \frac{(x^2-1)e^{-x^2} + e^{-x^2} - e^{-1}}{x+1} = \lim_{x \searrow -1} (x-1)e^{-x^2} + \lim_{x \searrow -1} \frac{e^{-1}(e^{-x^2+1} - 1)}{-x^2+1} \cdot \frac{-x^2+1}{x+1} = 0.$

(8) Similar se obține $f'_s(1) = 0$ și $f'_d(1) = 0$. Acestea arată că f este derivabilă în $x = \pm 1$:

b) $f'_s(0) = \lim_{x \nearrow 0} \frac{\arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2} - \arcsin 1}{x} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{\arcsin \frac{2x}{1+x^2}}{\frac{2x}{1+x^2}} \cdot \frac{2x}{1+x^2} \cdot \frac{1}{x} = 2,$

$f'_d(0) = \lim_{x \searrow 0} \frac{\arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2} - \arcsin 1}{x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{\arcsin \frac{-2x}{1+x^2}}{\frac{-2x}{1+x^2}} \cdot \frac{-2x}{1+x^2} \cdot \frac{1}{x} = -2.$

În calculul celor două derivate am folosit identitatea $\arcsin a + \arcsin b = \arcsin (a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2})$ și faptul că $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\arcsin y}{y} = 1$. Funcția nu este derivabilă în punctul $x_0 = 0$.

c) $f'_s(1) = \lim_{x \nearrow 1} \frac{(x-1) \operatorname{arctg} (x-1)^{-1}}{x-1} = \lim_{x \nearrow 1} \operatorname{arctg} (x-1)^{-1} = -\frac{\pi}{2};$

$f'_d(1) = \lim_{x \searrow 1} \operatorname{arctg} (x-1)^{-1} = \frac{\pi}{2}$. Funcția nu este derivabilă în punctul $x_0 = 1$.

d) Urmind o cale analogă aceleia de la exercițiul b), obținem $f'_s(1) = \lim_{x \nearrow 1} \frac{1}{x-1} \arcsin \frac{x^2-1}{1+x^2} = 1$

și $f'_d(1) = -1$. Funcția nu este derivabilă în punctul $x_0 = 1$.

3. Să se cerceteze derivabilitatea funcțiilor:

a) $f(x) = \max(\cos^3 x, \cos x), \quad x \in [0, \pi];$ b) $f(x) = E(x) \sin^2 \pi x, \quad x \in \mathbb{R}.$

Rezolvare. a) Avem $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in [0, \pi/2], \\ \cos^3 x, & x \in (\pi/2, \pi]. \end{cases}$ Funcția este derivabilă pe fiecare din inter-

valele $(0, \pi/2)$ și $(\pi/2, \pi)$. Rămâne să studiem derivabilitatea în punctul $x = \frac{\pi}{2}$. Avem

$f'_s\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \nearrow \pi/2} \frac{\cos x - \cos \frac{\pi}{2}}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{y \nearrow 0} \frac{-\sin y}{y} = -1, \quad f'_d\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \searrow \pi/2} \frac{\cos^3 x - \cos^3 \frac{\pi}{2}}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{y \searrow 0} \frac{-\sin^3 y}{y} = 0,$

astfel că funcția nu este derivabilă în punctul $x = \frac{\pi}{2}$. Deci f este derivabilă pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

b) Deoarece

$$f(x) = \begin{cases} \dots\dots\dots \\ -n \sin^2 \pi x, & x \in [-n, -n+1), \\ \dots\dots\dots \\ -\sin^2 \pi x, & x \in [-1, 0), \\ 0, & x \in [0, 1), \\ \sin^2 \pi x, & x \in [1, 2), \\ \dots\dots\dots \\ n \sin^2 \pi x, & x \in [n, n+1), \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

rezultă că funcția este derivabilă pe fiecare interval deschis. Trebuie să studiem derivabilitatea în punctele $x = h, h \in \mathbb{Z}$. Avem

$$\begin{aligned} f'_d(-n) &= \lim_{x \nearrow -n} \frac{-(n+1) \sin^2 \pi x}{x+n} = -(n+1) \lim_{x \nearrow -n} \frac{\sin^2 \pi x - \sin^2 n\pi}{x+n} = \\ &= -(n+1) \lim_{x \nearrow -n} \frac{\sin \pi x + \sin n\pi}{x+n} (\sin \pi x - \sin n\pi) = 0 \end{aligned}$$

și similar obținem $f'_d(-n) = \lim_{x \searrow -n} \frac{-n \sin^2 \pi x}{x+n} = 0$. Prin urmare, funcția este derivabilă în punctul $x = -n, n \in \mathbb{N}$. Analog se arată că funcția este derivabilă în punctele $x = 0$ și $x = n, n \in \mathbb{N}$. Deci funcția f este derivabilă pe \mathbb{R} .

4. Să se arate că funcția $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}, & x \neq 1, \\ 0, & x = 1, \end{cases}$

este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, există $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x)$, dar funcția nu este derivabilă în punctul $x = 1$.

Rezolvare. Deoarece

$$f(1-0) = \lim_{x \nearrow 1} \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x} = \frac{\pi}{2}, \quad f(1+0) = \lim_{x \searrow 1} \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x} = -\frac{\pi}{2} \quad \text{și} \quad f(1) = 0,$$

rezultă că funcția f nu este continuă în punctul $x = 1$. Prin urmare, funcția f nu este nici derivabilă în punctul $x = 1$. Pe de altă parte, se vede că funcția f este derivabilă în orice punct $x \neq 1$ și derivata sa este

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}. \quad \text{Apoi} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}.$$

Din acest exemplu se observă că dacă limita derivatei într-un punct există, nu rezultă că funcția este derivabilă în acest punct.

5. Să se calculeze $f''(x)$ dacă $f(x) = g(h(x))$, g fiind o funcție definită pe \mathbb{R} , care admite derivată de ordinul al doilea, iar h este una din funcțiile

a) $h(x) = e^{2x}$; b) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Rezolvare. Folosind regula că $f''(x) = \frac{d}{dx} [g'(h(x))] \cdot h'(x)$ a funcțiilor compuse:

astfel că $f''(x) = g''(h(x)) \cdot h'(x)^2 + g'(h(x)) \cdot h''(x)$
a) Deoarece $h'(x) = 2e^{2x}$

b) În acest caz, $h'(x) = -\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
 $+ x^2)^{-3/2} g''(h(x)) + (2x^2 - 1) g'(h(x))$

6. Să se determine

să fie paralelă cu dreapta

Rezolvare. Deoarece

Prin urmare, $f'(x) = 1/2$

7. Să se studieze

a) $f(x) = |x - 1|$

Rezolvare. a) Deoarece

pe $[0, 2]$ și derivabilă pe \mathbb{R} , teorema nu se aplică.

b) În acest caz, $f'(x) =$

derivabilă pe $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ și $f'(\frac{\pi}{2}) = 1$. Prin urmare

$f'(x) =$

8. Să se discute derivabilitatea funcției $x^3 + 2x^2 - 7x$

Rezolvare. Ecuația

$$m + \frac{392}{27}, \quad m_1 = 4, \quad m_2 = 0$$

Rezolvare. Folosind regula de derivare a funcțiilor compuse, avem $f'(x) = g'(h(x)) h'(x)$, astfel că $f''(x) = \frac{d}{dx}[g'(h(x))] \cdot h'(x) + g''(h(x))h''(x)$. Pentru calcul folosim din nou regula de derivare a funcțiilor compuse:

$$\frac{d}{dx}[g'(h(x))] = g''(h(x))h'(x),$$

astfel că $f''(x) = g''(h(x))h'^2(x) + g'(h(x))h''(x)$.

a) Deoarece $h'(x) = 2e^{2x}$ și $h''(x) = 4e^{2x}$, înlocuind mai sus, obținem

$$f''(x) = 4e^{2x}[g''(h(x))e^{2x} + g'(h(x))].$$

b) În acest caz, $h'(x) = -x(1+x^2)^{-3/2}$, $h''(x) = (2x^3 - 1)(1+x^2)^{-5/2}$ și deci $f''(x) = x^2(1+x^2)^{-2}g''(h(x)) + (2x^3 - 1)(1+x^2)^{-5/2}g'(h(x))$.

6. Să se determine un punct pe curba $y = \frac{(x^2-1)}{(x+1)}$, $x \neq -1$, în care tangenta să fie paralelă cu dreapta de ecuație $y = \frac{x}{2}$.

Rezolvare. Deoarece tangenta este paralelă cu dreapta $y = x/2$, rezultă că panta tangentei este $\frac{1}{2}$.

Prin urmare, $f'(x) = 1/2$. Aceasta implică $x_1 = 1$, $y_1 = 0$ și $x_2 = -3$, $y_2 = 2$.

7. Să se studieze aplicabilitatea teoremei lui Rolle pentru funcțiile:

a) $f(x) = |x - 1|$, $x \in [0, 2]$; b) $f(x) = |\sin^3 x|$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Rezolvare. a) Deoarece $f(x) = \begin{cases} -x + 1, & x \in [0, 1], \\ x - 1, & x \in (1, 2], \end{cases}$ rezultă ușor că funcția f este continuă pe $[0, 2]$ și derivabilă pe $(0, 1) \cup (1, 2)$, dar nu este derivabilă în punctul $x = 1$. Prin urmare, teorema nu se aplică.

b) În acest caz, $f(x) = \begin{cases} -\sin^3 x, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right], \\ \sin^3 x, & x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$ Funcția este continuă pe $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ și derivabilă pe $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ deoarece $f'_s(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sin^3 x}{x} = 0$ și $f'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^3 x}{x} = 0$. Apoi $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Prin urmare teorema se aplică și, deoarece

$$f'(x) = \begin{cases} -3 \cos x \sin^2 x, & x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right], \\ 3 \cos x \sin^2 x, & x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \end{cases} \text{ rezultă că } f' = 0.$$

8. Să se discute, după valorile parametrului $m \in \mathbb{R}$, rădăcinile reale ale ecuației $x^3 + 2x^2 - 7x + m = 0$.

Rezolvare. Ecuația $f'(x) = 0$ are rădăcinile $x_1 = -\frac{7}{3}$ și $x_2 = 1$. Șirul lui Rolle este $-\infty$, $m + \frac{392}{27}$, $m - 4$, $+\infty$. Pentru $m \in \left(-\infty, -\frac{392}{27}\right)$ ecuația are o singură rădăcină reală, situată

în intervalul $(1, +\infty)$; pentru $m = -\frac{392}{27}$ ecuația are o rădăcină dublă $x_1 = x_2 = -\frac{7}{3}$ și una simplă în intervalul $(1, +\infty)$; pentru $m \in \left(-\frac{392}{27}, 4\right)$ ecuația are trei rădăcini reale situate în intervalele $\left(-\infty, -\frac{7}{3}\right)$, $\left(-\frac{7}{3}, 1\right)$ și $(1, +\infty)$; pentru $m = 4$ ecuația are o rădăcină în $\left(-\infty, -\frac{7}{3}\right)$ și una dublă egală cu 1; pentru $m \in (4, +\infty)$ ecuația admite o singură rădăcină reală în intervalul $\left(-\infty, -\frac{7}{3}\right)$.

9. Să se studieze aplicabilitatea teoremei lui Lagrange în cazul funcției

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [1, 2], \\ \frac{x^3}{4} + 1, & x \in (2, 3], \end{cases} \text{ pe intervalul } [1, 3].$$

Rezolvare. Funcția f este continuă pe intervalul $[1, 3]$, deoarece $f(2-0) = f(2) = f(2+0) = 2$. Apoi avem $f'_x(2) = 1$ și $f'_d(2) = 1$, astfel că funcția este derivabilă pe intervalul $(1, 3)$. Teorema este deci aplicabilă. După teorema lui Lagrange rezultă că există cel puțin un punct $c \in (1, 3)$ astfel ca

$$f(3) - f(1) = 2f'(c) \text{ deci } f'(c) = \frac{9}{8}. \text{ Cum } f'(x) = \begin{cases} 1, & x \in (1, 2), \\ \frac{x}{2}, & x \in (2, 3) \end{cases}, \text{ relația de mai înainte implică}$$

$$c = \frac{9}{4} \in (2, 3).$$

10. Pe curba care are ecuația $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$, să se determine un punct $P(a, b)$, în care tangenta să fie paralelă cu coarda ce unește punctele $A(1, 1)$ și $B\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

Rezolvare. Panta dreptei ce trece prin punctele A și B este $\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = -\frac{1}{2}$. Deoarece tangenta în punctul P la graficul funcției este paralelă cu această dreaptă, rezultă că are aceeași pantă și deci $f'(a) = -\frac{1}{2}$. Prin urmare, obținem ecuația $-\frac{1}{2} = -\frac{1}{a^2}$ și deci $a = \sqrt{2}$, astfel că $P\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Exercițiul arată și interpretare geometrică a teoremei lui Lagrange.

11. Utilizând teorema creșterilor finite, să se arate că: a) șirul (S_n) , cu $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, este divergent; b) șirul (a_n) , cu $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$, este convergent și limita sa C este cuprinsă între 0 și 1 (C se numește constanta lui Euler).

Rezolvare. Fie funcția $f(x) = \ln x$, $x \in [n, n+1]$, $n \in \mathbb{N}$. Prin aplicarea teoremei lui Lagrange acestei funcții rezultă că există cel puțin un punct $c \in (n, n+1)$ astfel încît $\ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{c}$.

Deoarece $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{n}$, rezultă $\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Scriind această ultimă inegalitate pentru $1, 2, \dots, n$, rezultă

$$\frac{1}{2} < \ln 2 - \ln 1 < 1, \frac{1}{3} < \ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}.$$

Adunând aceste inegalități, obținem inegalitatea

$$S_{n+1} - 1 < \ln(n+1) < S_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

a) Trecând la limită în inegalitatea $\ln(n+1) < S_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = +\infty$;

rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$. Aceasta arată că seria armonică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă.

b) Se observă că $a_n = S_n - \ln n$ și deci după inegalitatea (9) rezultă $a_n = S_n - \ln n > \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0$. Prin urmare, $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Apoi tot din inegalitatea (9) rezultă $a_{n+1} = S_{n+1} - \ln(n+1) < 1 + \ln(n+1) - \ln(n+1) = 1$, de unde $a_{n+1} < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Aceasta arată că $0 < a_n < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Se poate arăta că șirul (a_n) este descrescător. Într-adevăr, avem $a_{n+1} - a_n = S_{n+1} - \ln(n+1) - S_n + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0$, deoarece avem $e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ și deci $1 < (n+1) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Deoarece șirul (a_n) este monoton descrescător și mărginit, rezultă că există $C = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ și $C \in (0, 1)$.

12. Utilizând teorema creșterilor finite pentru funcția $f(x) = x^{1-\alpha}$, $x \in [n, n+1]$, să se stabilească natura seriei armonice generalizate $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$, $\alpha \neq 1$.

Rezolvare. Pentru $\alpha \leq 0$ seria este divergentă, deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$. Vom considera în continuare că $\alpha \in (0, 1) \cup (1, \infty)$. Aplicând teorema lui Lagrange funcției $f(x) = x^{1-\alpha}$ pe intervalul $[n, n+1]$, rezultă că există cel puțin un punct θ , $n < \theta < n+1$, astfel încât $(n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha} = (1-\alpha)\theta^{-\alpha}$.

Deoarece $n < \theta < n+1$ și $\alpha > 0$, rezultă $n^{-\alpha} > \theta^{-\alpha} > (n+1)^{-\alpha}$. Cum $\theta^{-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} [(n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}]$,

se obține inegalitatea $n^{-\alpha} > \frac{1}{1-\alpha} [(n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}] > (n+1)^{-\alpha}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Scriind această inegalitate pentru $1, 2, \dots, n-1$

$$1^{-\alpha} > \frac{1}{1-\alpha} [2^{1-\alpha} - 1^{1-\alpha}] > 2^{-\alpha}, \quad 2^{-\alpha} > \frac{1}{1-\alpha} [3^{1-\alpha} - 2^{1-\alpha}] > 3^{-\alpha}, \dots,$$

$$\dots, \quad n^{-\alpha} > \frac{1}{1-\alpha} [(n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}] > (n+1)^{-\alpha}$$

și sumând aceste inegalități membru cu membru, rezultă

$$S_n > \frac{1}{1-\alpha} [(n+1)^{1-\alpha} - 1] > S_{n+1} - 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (10)$$

unde

$$S_n = 1^{-\alpha} + 2^{-\alpha} + \dots + n^{-\alpha}.$$

Fie $0 < \alpha < 1$. În baza inegalității (10) rezultă $S_n > \frac{1}{1-\alpha} [(n+1)^{1-\alpha} - 1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, și prin

trecere la limită obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$. Prin urmare, seria este divergentă în acest caz.

Fie acum $\alpha > 1$. Din inegalitatea (10) rezultă că $S_{n+1} < 1 + \frac{1}{1-\alpha} [(n+1)^{1-\alpha} - 1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

și deci $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1} \leq 1 - \frac{1}{1-\alpha}$. Aceasta arată că șirul (S_n) are limită finită și deci seria este convergentă.

13. Să se demonstreze următoarele inegalități :

a) $\frac{x}{1+x^2} < \operatorname{arctg} x, x > 0$; b) $\ln(1+x) > \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x}, x > 0$.

Rezolvare. a) Considerăm funcția $f(x) = \frac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x, x \geq 0$. Calculând derivata sa, obținem $f'(x) = -2x^2(1+x^2)^{-2} \leq 0, \forall x > 0$, fapt ce arată că funcția $f(x)$ este descreștătoare pe $[0, \infty)$. Prin urmare, $f(x) < f(0), \forall x > 0$ și cum $f(0) = 0$, rezultă că $f(x) < 0, \forall x > 0$, ceea ce demonstrează inegalitatea.

b) Deoarece $x > 0$, rezultă că $1+x > 0$ și deci inegalitatea este echivalentă cu următoarea inegalitate: $(1+x)\ln(1+x) - \operatorname{arctg} x > 0, \forall x > 0$. Pentru a demonstra această din urmă inegalitate introducem funcția $f(x) = (1+x)\ln(1+x) - \operatorname{arctg} x, x \geq 0$. Deoarece $f'(x) = \ln(1+x) + 1 - \frac{1}{1+x^2} = \ln(1+x) + \frac{x^2}{1+x^2} > 0, \forall x > 0$, funcția $f(x)$ este crescătoare pe $[0, \infty)$ și deci $f(x) > f(0), \forall x > 0$. Cum $f(0) = 0$, rezultă $f(x) > 0, \forall x > 0$, ceea ce demonstrează inegalitatea.

14. Utilizând teorema lui Cauchy, să se demonstreze inegalitatea $\ln(1+x) > \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x}, x > 0$.

Rezolvare. Considerăm funcțiile $f(x) = (1+x)\ln(1+x)$ și $g(x) = \operatorname{arctg} x, x \in [0, y], y > 0$, care satisfac condițiile teoremei lui Cauchy pe intervalul $[0, y]$. Prin urmare, există cel puțin un punct $\epsilon \in (0, y)$, astfel încât

$$\frac{f(y) - f(0)}{g(y) - g(0)} = \frac{f'(\epsilon)}{g'(\epsilon)} \Leftrightarrow \frac{(1+y)\ln(1+y)}{\operatorname{arctg} y} = \frac{1 + \ln(1+\epsilon)}{1+\epsilon^2}$$

de unde $\operatorname{arctg} y = \frac{(1+y)\ln(1+y)}{(1+\epsilon^2)[1+\ln(1+\epsilon)]} < (1+y)\ln(1+y), \forall y > 0$, fapt ce demonstrează inegalitatea.

15. Să se arate că :

a) $f(x) = (a + bx)e^{-kx}$ verifică ecuația $y'' + 2ky' + k^2y = 0$;

b) $f(x) = a \cos(\ln x) + b \sin(\ln x)$ verifică ecuația $x^2y'' + xy' + y = 0$.

Rezolvare. a) Avem $f'(x) = (-kbx + b - ka)e^{-kx}$ și $f''(x) = (k^2bx - 2kb + k^2a)e^{-kx}$ astfel că $f''(x) + 2kf'(x) + k^2f(x) = 0$.

b) În acest caz $f'(x) = -\frac{a}{x} \sin(\ln x) + \frac{b}{x} \cos(\ln x)$ și $f''(x) = \frac{a-b}{x^2} \sin(\ln x) - \frac{a+b}{x^2} \cos(\ln x)$ și deci $x^2f''(x) + xf'(x) + f(x) = 0$.

16. Să se calculeze derivatele de ordinul n ale următoarelor funcții :

a) $f(x) = \frac{1}{2x^2 - 3x - 5}$; b) $f(x) = \frac{2x}{1+x}$; c) $f(x) = e^{ax} \cos(bx + c)$;

d) $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Rezolvare. a) Scriem $f(x)$ sub forma $f(x) = \frac{1}{(2x-5)(x+1)} = \frac{A}{2x-5} + \frac{B}{x+1}$. Obținem $A = \frac{2}{7}, B = -\frac{1}{7}$, astfel că $f(x) = \frac{1}{7} \left\{ \left(x - \frac{5}{2}\right)^{-1} - (x+1)^{-1} \right\}$. Considerând f sub această formă, rezultă $f'(x) = \frac{1}{7} \left\{ -1 \left(x - \frac{5}{2}\right)^{-2} - (-1)(x+1)^{-2} \right\}$, $f''(x) = \frac{1}{7} \left\{ (-1)(-2) \left(x - \frac{5}{2}\right)^{-3} - (-1) \cdot (-2)(x+1)^{-3} \right\}$.

Observăm că $f^{(k)}(x) =$

$$= (-1)^k \frac{k!}{7} \left\{ \left(x - \frac{5}{2}\right)^{-k-1} - (-1)^k (x+1)^{-k-1} \right\}$$

Se poate demonstra că această formulă este verificată. Presupunem că este adevărată pentru $k+1$:

$$f^{(k+1)}(x) = f^{(k)}(x) \cdot (-1)^{k+1} (k+1)$$

ceea ce demonstrează că

b) Deoarece $f(x) = a^x$ general $f^{(n)}(x) = 2(-1)^n$

c) În acest caz vom utiliza metoda inducției

(h_n)

Putem scrie $f(x) = h(x)$

ușor că $h^{(k)}(x) = a^x \ln^k a$

obținem

$$f^{(n)}(x) = e^{ax} \ln^n a$$

d) Dacă $f(x) = a^x$

$$f'(x) = a^x \ln a$$

Apoi prin derivarea lui

$$f''(x) = a^x \ln^2 a$$

astfel că $f''(x) = f'(x) \ln a$

Derivând această ultimă

$$= 2f' \cos f \cos 3 \left\{ f + \frac{1}{f} \right\}$$

Procedând similar se poate demonstra prin metoda inducției că $f^{(n)}(x) = (1+x^2)^{-1/2}$, obținem

17. Să se demonstreze că

$n = 0, 1, \dots$

a) verifică ecuația

b) au toate rădăcinile

Observăm că $f^{(k)}(x) = \frac{1}{7} \left\{ (-1)(-2) \dots (-k)(x - \frac{5}{2})^{-k-1} - (-1)(-2) \dots (-k)(x + 1)^{-k-1} \right\} =$
 $= (-1)^k \frac{k!}{7} \left\{ \left(x - \frac{5}{2}\right)^{-k-1} - (x + 1)^{-k-1} \right\}.$

Se poate demonstra această formulă prin inducție. Într-adevăr, se vede că pentru $k = 1$ formula este verificată. Presupunem această formulă adevărată pentru k și să arătăm că ea este adevărată și pentru $k + 1$:

$$f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)}(x))' = (-1)^k \frac{k!}{7} \left\{ (-k-1) \left(x - \frac{5}{2}\right)^{-k-2} - (-k-1)(x + 1)^{-k-2} \right\} =$$

$$= (-1)^{k+1} \frac{(k+1)!}{7} \left\{ \left(x - \frac{5}{2}\right)^{-k-2} - (x + 1)^{-k-2} \right\}.$$

ceea ce demonstrează formula.

b) Deoarece $f(x) = 2 - 2(1+x)^{-1}$, rezultă $f'(x) = 2(1+x)^{-2}$, $f''(x) = 2(-1)2(1+x)^{-3}$ și în general $f^{(n)}(x) = 2(-1)^{n+1} n!(1+x)^{-n-1}$. Ultima formulă se poate demonstra prin inducție ca mai sus.

c) În acest caz vom folosi regula lui Leibniz de derivare a produsului (care se poate demonstra utilizând metoda inducției)

$$(hg)^{(n)} = h^{(n)}g + C_n^1 h^{(n-1)}g' + C_n^2 h^{(n-2)}g'' + \dots + C_n^n h g^{(n)}. \quad (11)$$

Putem scrie $f(x) = h(x)g(x)$, unde $h(x) = e^{ax}$ și $g(x) = \cos(bx + c)$. Cu metoda inducției se poate arăta ușor că $h^{(k)}(x) = a^k e^{ax}$ și $g^{(k)}(x) = b^k \cos\left(bx + c + k \frac{\pi}{2}\right)$. Folosind aceste rezultate în formula (11), obținem

$$f^{(n)}(x) = e^{ax} \left\{ a^n \cos(bx + c) + C_n^1 a^{n-1} b \cos\left(bx + c + \frac{\pi}{2}\right) + \dots + b^n \cos\left(bx + c + n \frac{\pi}{2}\right) \right\}.$$

d) Dacă $f(x) = \operatorname{arctg} x$, rezultă $x = \operatorname{tg} f$. Prin derivare,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 f} = \cos^2 f \text{ sau } f'(x) = \cos f \sin\left(f + \frac{\pi}{2}\right).$$

Apoi prin derivarea ultimei relații obținem

$$f''(x) = \left[-\sin f \sin\left(f + \frac{\pi}{2}\right) + \cos f \cos\left(f + \frac{\pi}{2}\right) \right] f'(x) = f'(x) \cos\left(2f + \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{astfel că } f''(x) = f'(x) \sin\left(2f + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = f'(x) \sin 2\left(f + \frac{\pi}{2}\right) = \cos^2 f \sin 2\left(f + \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{Derivând această ultimă relație obținem } f^{(3)}(x) = -2f' \cos f \sin f \sin 2\left(f + \frac{\pi}{2}\right) + 2f' \cos^2 f \cos 2\left(f + \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= 2f' \cos f \cos 3\left(f + \frac{\pi}{2}\right) = 2 \cos^3 f \cos 3\left(f + \frac{\pi}{2}\right).$$

Procedând similar, obținem $f^{(n)}(x) = (n-1)! \cos^n f \sin n\left(f + \frac{\pi}{2}\right)$, formulă care se poate demonstra prin metoda inducției. Dacă înlocuim în această formulă pe $f(x) = \operatorname{arctg} x$ și $\cos f = (1+x^2)^{-1/2}$, obținem

$$f^{(n)}(x) = (n-1)! (1+x^2)^{-n/2} \sin n\left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}\right).$$

17. Să se demonstreze că polinoamele lui Legendre $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} [(x^2 - 1)^n]^{(n)}$,
 $n = 0, 1, \dots, j$

a) verifică ecuația $(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$;

b) au toate rădăcinile reale cuprinse în intervalul $(-1, 1)$.

Rezoluare. a) Fie $f(x) = (x^2 - 1)^n$, $x \in [-1, 1]$, astfel că $f^{(n)}(x) = 2^n n! P_n(x)$. Deoarece $f'(x) = 2n x(x^2 - 1)^{n-1}$, rezultă $(x^2 - 1)f'(x) = 2n x f(x)$. Derivăm această ultimă relație până la ordinul $n + 1$:

$$[(x^2 - 1)f'(x)]^{(n+1)} = 2n[x f(x)]^{(n+1)} \Leftrightarrow (x^2 - 1)f^{(n+1)}(x) + 2C_{n+1}^1 x f^{(n)}(x) = 2n[x f^{(n+1)}(x) + C_{n+1}^1 f^{(n)}(x)],$$

ceea ce este echivalent cu relația $(x^2 - 1)P_n''(x) + 2xP_n'(x) - n(n+1)P_n(x) = 0$.

b) Funcția $f(x) = (x^2 - 1)^n$ satisface condițiile teoremei lui Rolle pe intervalul $[-1, 1]$. Prin urmare, există cel puțin un punct $c_0 \in (-1, 1)$, astfel încît $f'(c_0) = 0$. Dar $f'(x) = 2n x(x^2 - 1)^{n-1}$ și deci $f'(-1) = f'(0) = f'(1) = 0$, astfel că funcția $f'(x)$ satisface condițiile teoremei lui Rolle pentru fiecare din intervalele $[-1, 0]$ și $[0, 1]$. Aplicînd această teoremă, rezultă că există $c_1 \in (-1, 0)$ și $c_2 \in (0, 1)$ astfel încît $f''(c_1) = 0$ și $f''(c_2) = 0$. Deoarece $f''(-1) = f''(c_1) = f''(c_2) = f''(1) = 0$, se poate aplica teorema lui Rolle pentru funcția $f''(x)$ pe fiecare din intervalele $[-1, c_1]$, $[c_1, 0]$, $[0, c_2]$, $[c_2, 1]$. Continuînd raționamentul, deducem că $f^{(n-1)}(x)$ se anulează în punctele $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1} \in (-1, 1)$. Deoarece $f^{(n-1)}(-1) = f^{(n-1)}(\xi_1) = \dots = f^{(n-1)}(\xi_{n-1}) = f^{(n-1)}(1) = 0$, se poate aplica teorema lui Rolle funcției $f^{(n-1)}(x)$ pe fiecare din intervalele $[-1, \xi_1]$, $[\xi_1, \xi_2]$, \dots , $[\xi_{n-1}, 1]$. Prin urmare, există cel puțin câte un punct $x_i \in (-1, \xi_1)$, $x_2 \in (\xi_1, \xi_2)$, \dots , $x_n \in (\xi_{n-1}, 1)$ astfel că $f^{(n)}(x_i) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Cum $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} f^{(n)}(x)$, rezultă că $x_i \in (-1, 1)$, $i = 1, 2, \dots, n$, sînt rădăcini ale polinomului $P_n(x)$. Deoarece grad $P_n(x) = n$, rezultă că aceste rădăcini sînt singurele.

18. Să se scrie formula lui Mac Laurin de ordinul $2n + 1$, pentru funcția $f(x) = \arctg x$, $x \in \mathbb{R}$.

Rezoluare. Deoarece $f^{(n)}(x) = (n-1)! (1+x^2)^{-n/2} \sin \left(\arctg x + \frac{\pi}{2} \right)$ [ex. 16, d)], rezultă că $f^{(n)}(0) = (n-1)! \sin n \frac{\pi}{2}$ și deci, după (3), avem

$$\arctg x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R_n(x),$$

$$\text{unde } R_n(x) = \frac{x^{2n+2}}{2n+2} (1+\theta^2 x^2)^{-n-1} \sin \left[(2n+2) \left(\arctg \theta x + \frac{\pi}{2} \right) \right], \quad 0 \in (0, 1).$$

19. Să se dezvolte funcția $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, după puterile binomului $x + 1$.

Rezoluare. Pentru a obține dezvoltarea funcției după puterile binomului vom folosi formula lui Taylor pentru $x_0 = -1$. Deoarece $f^{(k)}(x) = e^x$, $\forall k \in \mathbb{N}$, și $f^{(k)}(-1) = e^{-1}$, după formulele (1) și (2) obținem

$$e^x = e^{-1} \left[1 + \frac{x+1}{1!} + \frac{(x+1)^2}{2!} + \dots + \frac{(x+1)^n}{n!} \right] + \frac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)!} e^{[-1+\theta(x+1)]}, \quad \theta \in (0, 1).$$

20. Să se evalueze eroarea comisă în aproximarea

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}.$$

Rezoluare. Scriînd relația (4) pentru $n = 4$ și $x = 1$, obținem

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} e^\theta, \quad \theta \in (0, 1).$$

Prin urmare, eroarea comisă prin aproximarea făcută este $\epsilon = \frac{1}{5!} e^\theta$ și deoarece $\theta \in (0, 1)$ și $e < 3$,

obținem $\epsilon < \frac{1}{5!} e < \frac{3}{5!} = \frac{1}{40}$. Deci eroarea este mai mică decît 0,025.

21. Să se determine asociat funcției $f(x) = \frac{1}{16}$ în intervalul $[-1, 1]$.

Rezoluare. În com. încît $|f(x) - T_n(x)| =$

succesiv $f(x) = (1 + (-1)^{k-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots}{2^k})$ și prin urmare,

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

astfel că, deoarece $|R_n(x)| =$

Dacă impunem,

$n \geq 2$.

22. Se ia $n =$ Să se determine cu o precizie de

Rezoluare. Trebuie

$\forall x \in [-p, p]$. Dacă

Dacă impunem ca $x \in [-\sqrt[4]{0,24}, \sqrt[4]{0,24}]$

23. Să se calculeze eroarea comisă.

Rezoluare. Putem folosi formula lui Taylor

$$f(x) = 4 + \frac{x^2}{1!}$$

Făcînd $x = 260$, obținem

Prin urmare, $\sqrt[4]{260}$

rezultă $\epsilon < \frac{7}{2} (4)^{-n}$

24. Să se calculeze

21. Să se determine $n \in \mathbb{N}$, astfel ca polinomul Taylor $T_n(x)$ în punctul $x_0 = 0$, asociat funcției $f(x) = \sqrt{1+x}$, $x \in [-1, \infty)$, să difere de funcție cu mai puțin de $\frac{1}{16}$ în intervalul $[0, 1]$.

Rezolvare. În condițiile problemei va trebui să determinăm $n \in \mathbb{N}$, cât mai mic posibil, astfel încât $|f(x) - T_n(x)| = |R_n(x)| \leq \frac{1}{16}$, $\forall x \in [0, 1]$. În acest scop, calculăm $f^{(k)}(x)$. Obținem succesiv $f(x) = (1+x)^{1/2}$, $f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$, $f''(x) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) (1+x)^{-3/2}$, ..., $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-3)}{2^k} (1+x)^{-(2k-1)/2}$. Ultima formulă se demonstrează prin metoda inducției. Prin urmare,

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) (1+\theta x)^{-(2n+1)/2} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

astfel că, deoarece $x \in [0, 1]$, avem

$$|R_n(x)| = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{(2n+1)/2}} < \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^{n+1}(n+1)!}.$$

Dacă impunem ca $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^{n+1}(n+1)!} \leq \frac{1}{16}$, deoarece pentru $n=2$ avem $\frac{1 \cdot 3}{2^3 \cdot 3!} = \frac{1}{16}$, rezultă $n \geq 2$.

22. Se ia $n=3$ în formula lui Mac Laurin pentru funcția $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$. Să se determine un interval de forma $[-p, p]$ pe care $T_3(x)$ să aproximeze funcția cu o precizie de 0,01.

Rezolvare. Trebuie să determinăm $p \in \mathbb{R}_+$ astfel încât $|f(x) - T_3(x)| = |R_3(x)| \leq 0,01$, $\forall x \in [-p, p]$. Deoarece $R_3(x) = \frac{x^4}{4!} \sin(\theta x + 2\pi)$, și $|x| \leq p$, rezultă $|R_3(x)| = \frac{|x|^4}{4!} |\sin \theta x| \leq \frac{p^4}{4!}$. Dacă impunem ca $p^4 \leq 4! \cdot 0,01$, adică $0 < p \leq \sqrt[4]{0,24}$, avem $|R_3(x)| \leq 0,01$ pentru orice $x \in [-\sqrt[4]{0,24}, \sqrt[4]{0,24}]$.

23. Să se calculeze valoarea aproximativă pentru $\sqrt[4]{260}$ și să se evalueze eroarea comisă.

Rezolvare. Putem scrie $260 = 4^3 + 4$. Considerăm funcția $f(x) = x^{1/4}$ pe care o dezvoltăm după formula lui Taylor de ordinul doi, de exemplu, în punctul $x_0 = 4^3$:

$$f(x) = 4 + \frac{x-4^3}{1!} \frac{1}{4^3} - \frac{3}{4^9} \frac{(x-4^3)^2}{2!} + \frac{21}{4^9} \frac{(x-4^3)^3}{3!} [4^3 + \theta(x-4^3)]^{-11/4}, \quad \theta \in (0, 1).$$

Făcând $x = 260$, obținem

$$\sqrt[4]{260} = 4 + \frac{1}{4^3} - \frac{3}{2 \cdot 4^9} + \frac{7}{2} (4^3 + 40)^{-11/4}, \quad \theta \in (0, 1).$$

Prin urmare, $\sqrt[4]{260} \approx 4 + \frac{1}{4^3} - \frac{3}{2 \cdot 4^9}$ și eroarea comisă este $\epsilon = \frac{7}{2} (4^3 + 40)^{-11/4}$. Deoarece $\theta \in (0, 1)$,

$$\text{rezultă } \epsilon < \frac{7}{2} (4^3)^{-11/4} < \frac{1}{4^{10}}.$$

24. Să se calculeze $\sqrt[5]{250}$ cu cinci zecimale exacte.

Rezolvare. Considerăm funcția $f(x) = x^{1/5}$ și folosim formula lui Taylor în punctul $x_0 = 3^3 = 243$, $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$. Pentru a avea o eroare mai mică decât 10^{-5} trebuie să avem $|R_n(250)| < 10^{-5}$.

Deoarece $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 4 \cdot 9 \dots (5n-6)}{5^n} x^{-\frac{5n-1}{5}}$,

$$|R_n(250)| = \frac{7^{n+1}}{(n+1)!} \frac{1 \cdot 4 \cdot 9 \dots (5n-1)}{5^{n+1}} (3^3 \rightarrow 70)^{-\frac{5n+4}{5}} < \left(\frac{7}{5}\right)^{n+1} \frac{1 \cdot 4 \cdot 9 \dots (5n-1)}{3^{5n+4} (n+1)!}$$

adică

$$|R_n(250)| < \left(\frac{7}{15}\right)^{n+1} \frac{1 \cdot 4 \cdot 9 \dots (5n-1)}{3^{4n+3} (n+1)!} < \frac{1 \cdot 4 \cdot 9 \dots (5n-1)}{2^{n+1} \cdot 3^{4n+3} (n+1)!}$$

Dacă impunem ca $\frac{1 \cdot 4 \cdot 9 \dots (5n-1)}{2^{n+1} \cdot 3^{4n+3} (n+1)!} \leq 10^{-5}$, rezultă că pentru $n \geq 2$ avem eroarea cerută.

Prin urmare, $\sqrt[5]{250} \approx T_2(250) = 3 + \frac{7}{5 \cdot 3^4} - \frac{98}{5^2 \cdot 3^9}$ cu o eroare mai mică decât 10^{-5} .

25. Să se calculeze cu ajutorul formulei lui Taylor următoarele limite:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x) - \sin 2x + 2x^2}{x^3}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$.

Rezolvare. a) Folosind formula lui Mac Laurin, obținem $\sqrt{1+x^2} - 1 = \frac{x^2}{2!} + R_2(x)$, unde $\frac{R_2(x)}{x^2} \rightarrow 0$ când $x \rightarrow 0$. Prin urmare,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2!} + \frac{R_2(x)}{x^2} \right] = \frac{1}{2}$$

b) După formula lui Mac Laurin avem $\ln(1+2x) = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + R_3(x)$ și $\sin 2x =$

$$= 2x - \frac{4}{3}x^3 + R_3^*(x). \text{ Ținând seama că } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_3(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_3^*(x)}{x^3} = 0,$$

$$\text{rezultă } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x) - \sin 2x + 2x^2}{x^3} = 4.$$

c) Deoarece $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} \ln(1+y) \right]$ și în acord cu formula lui Mac Laurin, $\ln(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + R_2(y)$, obținem că limita este $\frac{1}{2}$.

26. Să se determine punctele de extrem pentru următoarele funcții:

a) $f(x) = 2x^3 - x^3 + 3, x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$; b) $f(x) = 2 \cos x + x^2, x \in \mathbb{R}$.

Rezolvare. a) Derivata $f'(x) = 12x^2 - 3x^2$ se anulează pentru $x = 0$ și $x = 4^{-1/3}$. Se observă că $f''(0) = 0$ și $f^{(3)}(0) = -6 \neq 0$ și deci $x = 0$ nu este punct de extrem. Deoarece $x = 4^{-1/3} \notin \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$, rezultă că funcția nu are nici un punct de extrem. Originea este punct de inflexiune.

b) Avem $f'(x) = -2 \sin x + 2x$ și deci $f'(x) = 0$ pentru $x = 0$. Apoi $f''(0) = 0, f^{(3)}(0) = 0$ și $f^{(4)}(0) = 2$, ceea ce implică faptul că $x = 0$ este un punct de minim pentru funcția dată.

27. Cum capacitate d

Rezolvare.

toarea sa, atun

$$= 2\pi x^2 + \frac{V}{x}$$

$$A''(x_0) = 12\pi$$

sint : raza cutia

28. Să s
= $f(x_0 + h)$
 $x_0 = 1$ și a)

Rezolvare.

$$\Delta f(1, h) = h +$$

$$= 0,131 \text{ și } df(1)$$

se observă că

țiala sa.

29. Prin

eroarea max

aproximativ

tivă $\frac{dA}{A}$ și

Rezolvare.

variația ariei A

Eroarea relativ

30. Cu c

volumul ei

Rezolvare.

$$\frac{dV}{V} = 3 \frac{dR}{R}$$

razei R este d

31. Porn

$$a) f(x) =$$

$$c) f(x) =$$

$$\frac{dV}{V} = 3 \frac{dR}{R}$$

razei R este d

32. Să s

$$a) f(x) =$$

$$c) f(x) =$$

27. Cum trebuie dimensionată o cutie cilindrică de conserve pentru ca la o capacitate dată să se întrebunțeze minimum de material pentru construcția ei?

Rezolvare. Fie $V = \text{const}$ volumul cutiei. Dacă notăm prin x raza cutiei cilindrice și prin y generatoarea sa, atunci $V = \pi x^2 y$, de unde $y = \frac{V}{\pi x^2}$. Aria totală a cilindrului este $A(x) = 2\pi x^2 + \pi x y = 2\pi x^2 + \frac{V}{x}$. Avem $A'(x) = (4\pi x^2 - V)/x^2$ și aceasta se anulează pentru $x_0 = \left(\frac{V}{4\pi}\right)^{1/3}$. Deoarece $A''(x_0) = 12\pi > 0$, rezultă că x_0 este un punct de minim pentru $A(x)$. Prin urmare, dimensiunile cutiei sînt: raza cutiei $x_0 = \left(\frac{V}{4\pi}\right)^{1/3}$ și înălțimea $y_0 = \frac{V}{\pi x_0^2}$.

28. Să se calculeze pentru funcția $f(x) = x^3 - 2x + 1$ variația $\Delta f(x_0, h) = f(x_0 + h) - f(x_0)$ și diferențiala $df(x_0, h)$ și să se compare aceste valori dacă $x_0 = 1$ și a) $h = 1$; b) $h = 0,1$; c) $h = 0,01$.

Rezolvare. Avem $\Delta f(x_0, h) = (3x_0^2 - 2)h + 3x_0 h^2 + h^3$ și $df(x_0, h) = (3x_0^2 - 2)h$, astfel că $\Delta f(1, h) = h + 3h^2 + h^3$ și $df(1, h) = h$. Apoi: a) $\Delta f(1; 1) = 5$ și $df(1; 1) = 1$; b) $\Delta f(1; 0,1) = 0,131$ și $df(1; 0,1) = 0,1$; c) $\Delta f(1; 0,01) = 0,010301$ și $df(1; 0,01) = 0,01$. Comparînd rezultatele, se observă că pentru variații mici ale argumentului se poate aproxima variația funcției prin diferențiala sa.

29. Prin măsurarea directă s-a găsit că diametrul unui cerc este $x = 5,2$ cm, eroarea maximă fiind mai mică decît 0,05 cm. Să se găsească eroarea maximă aproximativă comisă în evaluarea ariei A a acestui cerc. Să se afle eroarea relativă $\frac{dA}{A}$ și cea procentuală $\frac{dA}{A} \cdot 100$.

Rezolvare. Deoarece $|dx| \leq 0,05$ cm este mic în comparație cu x , rezultă că putem aproxima variația ariei ΔA prin diferențiala dA . Deoarece $A = \frac{\pi x^2}{4}$, rezultă $dA = \frac{\pi x}{2} dx$ și deci $|dA| \leq 0,41$ cm².

Eroarea relativă este $\frac{dA}{A} = \frac{2}{x} dx = 0,0194$, iar eroarea procentuală este 1,94%.

30. Cu ce eroare relativă se poate măsura raza R a unei sfere, dacă se cere ca volumul ei să fie determinat cu exactitate de 1%?

Rezolvare. Volumul sferei este $V = \frac{4\pi R^3}{3}$, astfel că $dV = 4\pi R^2 dR$. Eroarea relativă este $\frac{dV}{V} = 3 \frac{dR}{R}$. Prin urmare, $\frac{dR}{R} = \frac{1}{3} \frac{dV}{V} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{300}$. Deci eroarea relativă în măsurarea razei R este de $\frac{1}{300}$.

8.1.2. Probleme propuse spre rezolvare

31. Pornind de la definiție, să se calculeze derivata $f'(x_0)$ pentru:

a) $f(x) = \sqrt{5x+1}$, $x_0 = 3$; b) $f(x) = \ln(x^2 + 5x)$, $x_0 = 1$;

c) $f(x) = \sin(2x^2 + 1)$, $x_0 = 2$; d) $f(x) = \text{tg } x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

32. Să se calculeze derivatele laterale ale funcției $f(x)$ în punctul x_0 pentru:

a) $f(x) = e^{|x-1|}$, $x_0 = 1$; b) $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$;

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & x > 0, \\ -x, & x \leq 0, \end{cases} x_0 = 0$; d) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0, \\ \arctg x, & x \geq 0, \end{cases} x_0 = 0$.

33. Să se cerceteze derivabilitatea funcțiilor:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + 3x), & 0 < x < 1 \\ \frac{5}{4}(x-1) + 2 \ln 2, & x \geq 1 \end{cases}; \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}^4 x, & |x| \leq \frac{\pi}{4} \\ 8x \operatorname{sign} x + 1 - \frac{8\pi}{4}, & |x| > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = |\ln x - 1|, x > 0; \quad \text{d) } f(x) = \begin{cases} \sin^3 x \operatorname{sign} x, & |x| \leq \frac{\pi}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \left(3x \operatorname{sign} x + 1 - \frac{3\pi}{4} \right), & |x| > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\text{e) } f(x) = |\cos^3 x|, 0 < x < \pi; \quad \text{f) } f(x) = \max[|1-x|, 3|x|], x \in \mathbb{R};$$

$$\text{g) } f(x) = \min(x^2 + 3x, x), x \in \mathbb{R}; \quad \text{h) } f(x) = \begin{cases} 2^{\frac{1}{x-1}}, & x < 1, \\ 0, & x = 1, \\ \ln(x^2 - 2x + 2), & x > 1. \end{cases}$$

34. Să se determine coeficienții $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât funcția

$$f(x) = \begin{cases} \ln^3 x, & 0 < x \leq e, \\ ax + b, & x > e, \end{cases} \text{ să fie derivabilă pentru orice } x > 0.$$

35. Folosind regulile de derivare, să se calculeze derivatele următoarelor funcții:

$$\text{a) } f(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}; \quad \text{b) } f(x) = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x^2}}; \quad \text{c) } f(x) = e^{\sin \frac{1}{x}};$$

$$\text{d) } f(x) = 2^{\operatorname{tg} x}; \quad \text{e) } f(x) = \frac{x^2-1}{x} \ln \frac{x^2-1}{x^2+1}; \quad \text{f) } f(x) = \arccos \frac{1}{\sqrt{x}};$$

$$\text{g) } f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{1 + \sqrt{1-x^2}}; \quad \text{h) } f(x) = \operatorname{arctg} \frac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}}, a > 0;$$

$$\text{i) } f(x) = x^x; \quad \text{j) } f(x) = x^{x^x}; \quad \text{k) } f(x) = x^{\operatorname{tg} x}; \quad \text{l) } f(x) = 2^{x^x};$$

$$\text{m) } f(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x); \quad \text{n) } f(x) = (1+x^2)^{\sqrt{x}}; \quad \text{o) } f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} -$$

$$-\frac{1}{6} \operatorname{ctg}^3 \frac{x}{2}; \quad \text{p) } f(x) = x - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1+2 \operatorname{tg} x}{\sqrt{3}}.$$

36. Să se studieze aplicabilitatea teoremei lui Rolle pentru următoarele funcții:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \\ \sin x, & x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases} \text{ pe } \left[0, \frac{\pi}{2}\right]; \quad \text{b) } f(x) = |x-1|^3, \text{ pe } [0, 2].$$

37. Să se discute, după valorile parametrului m , rădăcinile reale ale ecuațiilor:

$$\text{a) } x^2 - x - \ln x + m = 0, x > 0; \quad \text{b) } 2mx^3 + x^2 - 4m = 0, x \in \mathbb{R}.$$

38. Să se determine $f(x) = \sqrt{x+1}, x > 0$ și $x = 3$.

39. Utilizând teorema lui l'Hospital:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin b - \sin a}{x - a}$$

40. Să se demonstreze că:

$$\text{a) } \operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{6}$$

$$\text{c) } \arcsin x > x - \frac{x^3}{6}$$

$$\text{e) } \sin x > x - \frac{x^3}{6}$$

41. Să se determine derivata funcțiilor:

$$\text{a) } f(x) = \ln x,$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3} \\ -x \end{cases}$$

42. Să se determine:

$$\text{a) } \arcsin \sqrt{1-x^2}$$

$$\text{b) } \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\text{c) } \arcsin x + \arccos x$$

43. Să se arate că:

$$g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \text{ tinde către } e \text{ în limita } x \rightarrow \infty$$

44. Aplicând teorema lui l'Hospital pentru funcția $f(x) = \frac{1}{x}$ în punctul $x = 1$, să se determine valoarea limită:

45. Să se calculeze derivata funcției $f(x) = x^x$ care admite derivata:

$$\text{a) } h(x) = x^x$$

38. Să se determine abscisa c a unui punct, în care tangenta la curba de ecuație $f(x) = \sqrt{x+1}$, $x > -1$, este paralelă cu coarda ce unește punctele de abscisă $x = 0$ și $x = 3$.

39. Utilizând teorema lui Lagrange, să se demonstreze următoarele inegalități:

a) $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$; b) $\frac{b-a}{\cos^2 a} < \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a < \frac{b-a}{\cos^2 b}$, $0 \leq a < b < \frac{\pi}{2}$.

40. Să se demonstreze următoarele inegalități:

a) $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$; b) $e^x > 1 + x$, $x \neq 0$;

c) $\arcsin x > x + \frac{x^3}{6}$, $x \in (0, 1)$; d) $x \cos x > \sin x$, $x \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$;

e) $\sin x > x - \frac{x^3}{3}$, $x > 0$.

41. Să se determine valoarea c care intervine în teorema lui Cauchy în cazul funcțiilor:

a) $f(x) = \ln x$, $g(x) = \frac{e}{x}$, $x \in [1, e]$;

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - x^2 + 1, & x \in (1, 3), \\ -x + \frac{4}{3}, & x \in [0, 1], \end{cases} \quad g(x) = x, \quad x \in [0, 3].$

42. Să se demonstreze următoarele egalități:

a) $\arcsin \sqrt{1-x^2} + \arccos x = \pi$, $x \in (-1, 0)$;

b) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x} = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & x \in (-1, \infty), \\ -\frac{3\pi}{4}, & x \in (-\infty, -1); \end{cases}$

c) $\arcsin x + 3 \arccos x + \arcsin 2x \sqrt{1-x^2} = \frac{3\pi}{2}$, $x \in (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

43. Să se arate că funcția $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$, $x > 0$, este crescătoare, iar funcția $g(x) = (1 + \frac{1}{x})^{x+1}$, $x > 0$, este descrescătoare și ambele au aceeași limită când x tinde către infinit.

44. Aplicând formula creșterilor finite sub forma $f(x+h) - f(x) = f'(x+\theta h)h$, pentru funcția $f(x) = a + bx + ce^{ax}$, să se calculeze θ și să se arate că este independent de valoarea lui x .

45. Să se calculeze $f''(x)$ dacă $f(x) = g(h(x))$, g fiind o funcție definită pe \mathbf{R} , care admite derivată de ordinul al doilea, iar h este una din funcțiile:

a) $h(x) = x \sin x$; b) $h(x) = e^{x^2}$; c) $h(x) = \frac{1}{x}$.

46. Să se arate că :

a) $f(x) = (x + \sqrt{x^2 - 1})^n$ verifică ecuația $(x^2 - 1)y'' + xy' - n^2y = 0$;

b) $f(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{\cos 2x}}$ verifică ecuația $y'' + y = 3y^5$;

c) $f(x) = e^{-x} \cos x$ verifică ecuația $y^{(4)} + 4y = 0$;

d) $f(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$, C_1 și C_2 fiind constante arbitrare, verifică ecuația $y'' + 3y' + 2y = 0$.

e) Se poate determina a și b astfel ca funcția $f(x) = (ax + b)e^{2x}$ să verifice ecuația $y^{(4)} - 2y^{(3)} + 2y' - y = 9x e^{2x}$?

47. Să se demonstreze că polinoamele lui Cebîșev $P_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x)$, $n \in \mathbf{N}$, verifică ecuația $(1 - x^2)P_n''(x) - xP_n'(x) + n^2P_n(x) = 0$.

48. Să se calculeze derivatele de ordinul n pentru următoarele funcții :

a) $f(x) = e^{ax} e^{bx}$; b) $f(x) = \ln(ax + b)$; c) $f(x) = (x^2 - 3x + 2)^{-1}$;

d) $f(x) = \cos^2 x$; e) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$; f) $f(x) = \frac{1}{1 - x^2}$; g) $f(x) = x^5 e^{-2x}$;

h) $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$.

49. Să se scrie formula lui Mac Laurin de ordinul n pentru funcția $f(x) = \sqrt{a + x}$, $x > -a$, $a > 0$.

50. Să se dezvolte polinomul $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ după puterile întregi binomului $x - 2$.

51. O coardă grea, suspendată, sub acțiunea greutatei sale ia forma lăntișorului $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$. Să se arate că, pentru $|x|$ mic, forma acestei coarde este dată aproximativ prin ecuația parabolii $y = a + \frac{x^2}{2a}$.

52. Să se evalueze eroarea comisă în următoarele aproximări :

a) $\sin x \approx \frac{3}{2}x - \frac{x^3}{6}$, $|x| < \frac{1}{2}$; b) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$, $x \in [0, 1]$.

53. Să se determine $n \in \mathbf{N}$, astfel ca polinomul Taylor $T_n(x)$, în $x_0 = 0$, asociat funcției $f(x) = e^x$, $x \in \mathbf{R}$, să o aproximeze în intervalul $[-1, 1]$ cu trei zecimale exacte.

54. Se presupune că în formula lui Mac Laurin pentru funcția $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbf{R}$, $n = 5$. Să se determine un interval de forma $[-p, p]$, pe care $T_5(x)$ să aproximeze funcția cu o precizie de 0,00005.

55. Să se calculeze cu aproximație și să se evalueze apoi eroarea comisă, pentru

a) $\sqrt[3]{30}$; b) $\sqrt[3]{e}$; c) \sqrt{e} ; d) $\ln(1, 2)$; e) $\sqrt{250}$; f) $\arcsin 0,45$.

56. Să se arate că în dezvoltarea lui Mac Laurin a funcției $f(x) = e^x$, $x \in \mathbf{R}$, restul $R_n(x)$ este inferior lui $\frac{x^{n+1}e^x}{(n+1)!}$, pentru $x > 0$. Să se deducă apoi valoarea lui e^2 cu trei zecimale exacte.

57. Să se arate că :

$= \ln(1 + x)$ este

Să se calculeze

58. Să se calculeze

a) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x}{x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x}$

59. Să se determine

a) $f(x) = \begin{cases} 10 & \text{pentru } x < 3 \\ 3 & \text{pentru } x = 3 \\ \ln x & \text{pentru } x > 3 \end{cases}$

c) $f(x) = \cos x$

60. Să se determine

61. Să se calculeze

62. Într-o expresie

avînd baza un

63. Să se determine

de grosime dată

minimum de m

64. Cu cît crește

65. Un reze

8,2 m. Ce volum

15 cm ?

66. Să se determine

diametrul exte

67. Într-un

Cu cît variază

a) raza R

b) unghiul

Derivate parțiale
fie (x_0, y_0) un punct
în raport cu variabilele

57. Să se arate că restul $R_n(x)$ în formula lui Mac Laurin pentru funcția $f(x) = \ln(1+x)$ este, în modul, inferior lui $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1+x)^{n+1}}$; pentru $-1 < x < 0$.

Să se calculeze $\ln(0,9)$ cu cinci zecimale exacte.

58. Să se calculeze, cu ajutorul formulei lui Taylor, următoarele limite:

a) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$;

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-2x/3}}{x^4}$; e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x} + e^{2x} - 2}{x^2}$; f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^3} - 1}{x^3}$.

59. Să se determine punctele de extrem pentru următoarele funcții:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{10}{3} \frac{x}{x^2+1}, & x \leq 3, \\ \ln(x+e-3), & x > 3; \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} |\sin x|, & x \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]; \\ \frac{4}{\pi^2} (x-2\pi)^2, & x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]; \end{cases}$

c) $f(x) = \cos x e^{\sin x}$, $x \in \mathbf{R}$.

60. Să se înscrie într-o sferă de rază R un con, avînd aria laterală maximă.

61. Să se circumscrie unei sfere un con, avînd volumul minim.

62. Într-o emisferă de rază R să se înscrie un paralelipiped de volum maxim, avînd baza un pătrat.

63. Să se construiască un vas cilindric deschis deasupra, cu pereții și fundul de grosime dată l și de capacitate dată $V = \pi a^3$, astfel încît să se întrebuițeze minimum de material.

64. Cu cît crește aria unui cerc cu raza $R = 98,5$ m, dacă raza sa crește cu 0,1 m?

65. Un rezervor cilindric cu raza de 2,7 m conține lichid pînă la înălțimea de 8,2 m. Ce volum de lichid trebuie scos pentru ca nivelul lichidului să coboare cu 15 cm?

66. Să se afle volumul unei sfere, al cărei perete are grosimea de $\frac{1}{8}$ cm, avînd diametrul exterior de 10 cm.

67. Într-un sector circular avem $R = 100$ cm și unghiul la centru $\alpha = 60^\circ$. Cu cît variază aria acestui sector, dacă:

a) raza R se mărește cu 1 cm?

b) unghiul α se micșorează cu $30'$?

8.2. Funcții de mai multe variabile reale

Derivate parțiale. Diferențiale. Fie $f: A \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție reală de două variabile reale și fie (x_0, y_0) un punct interior mulțimii A . Funcția $f(x, y)$ are în punctul (x_0, y_0) derivată parțială în raport cu variabila x (respectiv y) dacă există:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}, \left(\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} \right)$$

și aceasta este finită; limita însăși se numește derivata parțială în raport cu x (respectiv y) a funcției $f(x, y)$ în punctul (x_0, y_0) și se notează $f'_x(x_0, y_0)$ sau $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ [respectiv $f'_y(x_0, y_0)$ sau $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$].

Funcția $f(x, y)$ este diferențiabilă în punctul $(x_0, y_0) \in A$, dacă variația sa $\Delta f(x_0, y_0; h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ poate fi scrisă sub forma $\Delta f(x_0, y_0; h, k) = [A_1(x_0, y_0) + \sigma_1(x_0, y_0; h, k)]h + [A_2(x_0, y_0) + \sigma_2(x_0, y_0; h, k)]k$, unde $A_\alpha(x_0, y_0)$, $\alpha = 1, 2$, sînt două numere reale, iar $\sigma_\alpha(x_0, y_0; h, k)$ satisface condiția $\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \sigma_\alpha(x_0, y_0; h, k) = 0$, $\alpha = 1, 2$.

Diferențiala funcției f are expresia $df = f'_x dx + f'_y dy$.

Derivate parțiale și diferențiale de ordin superior. Dacă există derivatele parțiale ale funcțiilor f'_x și f'_y , ele se numesc derivate parțiale de ordinul al doilea și se notează astfel:

$$f''_{xx} = (f'_x)'_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f''_{xy} = (f'_x)'_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},$$

$$f''_{yx} = (f'_y)'_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad f''_{yy} = (f'_y)'_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Criteriul lui Schwarz. Dacă funcția f are derivate parțiale mixte de ordinul al doilea f''_{xy} și f''_{yx} într-o vecinătate a punctului $(x_0, y_0) \in A$ și dacă f''_{xy} și f''_{yx} sînt continue în (x_0, y_0) , atunci $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$.

Diferențiala de ordinul n a funcției f este

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^{(n)} f = \frac{\partial^n f}{\partial x^n} (dx)^n + C_n^1 \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y} (dx)^{n-1} dy + \dots$$

$$\dots + C_n^{n-1} \frac{\partial^n f}{\partial x \partial y^{n-1}} dx (dy)^{n-1} + C_n^n \frac{\partial^n f}{\partial y^n} (dy)^n. \quad (1)$$

Funcții compuse. Derivate parțiale și diferențiale. Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ și $B \subset \mathbb{R}^m$. Dacă $u_1(x_1, x_2, \dots, x_p), \dots, u_m(x_1, x_2, \dots, x_p)$ sînt m funcții reale de p variabile, definite pe mulțimea A , diferențiabile în punctul $x_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_p^0)$ astfel încît $(u_1^0, u_2^0, \dots, u_m^0) \in B$, $u_i^0 = u_i(x_1^0, x_2^0, \dots, x_p^0)$, $i = 1, 2, \dots, m$, și dacă funcția $\varphi: B \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(u_1, u_2, \dots, u_m)$ este o funcție reală de m variabile, diferențiabilă în punctul $(u_1^0, u_2^0, \dots, u_m^0)$, atunci funcția compusă $f(x_1, x_2, \dots, x_p) = \varphi(u_1(x_1, x_2, \dots, x_p), u_2(x_1, x_2, \dots, x_p), \dots, u_m(x_1, x_2, \dots, x_p))$ este diferențiabilă în $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_p^0) \in A$ și derivatele sale parțiale în raport cu variabilele x_j , $j = 1, 2, \dots, p$, se calculează după legea

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_m} \cdot \frac{\partial u_m}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \dots, p. \quad (2)$$

Formula lui Taylor. Presupunem că funcția $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ are derivate parțiale continue pînă la ordinul $n+1$ inclusiv, în domeniul $A \subset \mathbb{R}^p$. Dacă $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_p^0)$ și $(x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2, \dots, x_p^0 + h_p)$ sînt două puncte din A , ce pot fi unite printr-un segment de dreaptă complet inclus în A , atunci are loc formula lui Taylor

$$f(x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2, \dots, x_p^0 + h_p) = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_p^0) + \frac{1}{1!} df(x_1^0, x_2^0, \dots, x_p^0) + \dots +$$

$$+ \frac{1}{n!} d^n f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_p^0) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x_1^0 + \theta h_1, x_2^0 + \theta h_2, \dots, x_p^0 + \theta h_p), \quad \theta \in (0, 1), \quad (3)$$

unde toate diferențialele sînt calculate pentru creșterile h_1, h_2, \dots, h_p ale variabilelor independente.

Funcții omogene. Funcția $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ se numește omogenă de gradul n , dacă pentru orice $t \in \mathbb{R}$ are loc relația

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_p) = t^n f(x_1, x_2, \dots, x_p). \quad (4)$$

Teorema lui Euler
necesară și suficientă

Derivata după α
și 1 (cos α , cos β , cos γ)
și are vectorul direct

atunci aceasta se m

Dacă există def

Extreme locale
 $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_p^0)$
vecinătate V a lui x_0
este punct de maxim

Dacă funcția f
punctului staționar
pătratică în creșterea
negativ definită (ca
pozitive și valori ne

Dacă se notează

$k = 1, 2, \dots, p$, at
 $D_k > 0, \dots, D_k > 0$
 $D_k > 0, D_k < 0, D_k < 0$

În cazul unei f
doi continue în x_0
 $t_0 = f'_y(x_0, y_0)$, t_0
 $= f'_y(x_0, y_0) = 0$
c) dacă $f'_x(x_0, y_0) = 0$
pentru f .

Fie funcția f
grad $f = (f'_x, f'_y, f'_z)$

Să considerăm
funcțiile scalare v
divergența vectorului

Se numește rotor

rot v

Teorema lui Euler. Dacă funcția f admite derivate parțiale continue în A , atunci o condiție necesară și suficientă pentru ca f să fie omogenă de gradul n este ca

$$x_1 \cdot f'_{x_1} + x_2 \cdot f'_{x_2} + \dots + x_p \cdot f'_{x_p} = n f. \quad (5)$$

Derivata după o direcție. Fie funcția $f: A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct interior mulțimii A și $l(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ o direcție dată. Fie $M(x, y, z)$ un punct oarecare al dreptei (d) care trece prin M_0 și are vectorul director l . Dacă există și este finită limita

$$\frac{df}{dl}(M_0) = \lim_{M \rightarrow M_0} \frac{f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0)}{|M_0 M|},$$

atunci aceasta se numește derivata funcției f după direcția l .

Dacă există derivatele f'_x, f'_y și f'_z și acestea sînt continue, atunci

$$\frac{df}{dl}(M_0) = f'_x(M_0) \cos \alpha + f'_y(M_0) \cos \beta + f'_z(M_0) \cos \gamma. \quad (6)$$

Extreme locale pentru funcții de mai multe variabile reale. Fie funcția $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_p^0)$ un punct din A . Funcția f are minim local în punctul x_0 dacă există o întreagă vecinătate V a lui x_0 astfel încît $f(x) \geq f(x_0)$ pentru orice $x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in V$. Punctul x_0 este punct de maxim local pentru funcția f dacă $f(x) \leq f(x_0)$ pentru orice $x \in V$.

Dacă funcția f are derivate parțiale continue pînă la ordinul doi inclusiv, într-o vecinătate a punctului staționar $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_p^0)$, atunci: a) dacă $d^2 f(x_0)$ este pozitiv definită (ca formă pătratică în creșterile argumentelor), punctul x_0 este un punct de minim pentru f ; b) dacă $d^2 f(x_0)$ este negativ definită (ca formă pătratică), x_0 este un punct de maxim pentru f ; c) dacă $d^2 f(x_0)$ ia și valori pozitive și valori negative, x_0 nu este punct de extrem.

Dacă se notează $a_{ij} = f''_{x_i x_j}(x_0)$, $i, j = 1, 2, \dots, p$ și $D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}$,

$k = 1, 2, \dots, p$, atunci condiția ca x_0 să fie punct de minim este echivalentă cu condițiile $D_1 > 0, D_2 > 0, \dots, D_p > 0$; condiția ca x_0 să fie punct de maxim este echivalentă cu condițiile $D_1 < 0, D_2 < 0, D_3 < 0, D_4 > 0, \dots$.

În cazul unei funcții $f = f(x, y)$ de două variabile, presupuse a avea derivatele parțiale de ordinul doi continue în $A \subset \mathbb{R}^2$, a) dacă $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$ și $r_0 = f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, $r_0 t_0 - s_0^2 > 0$, $t_0 = f''_{yy}(x_0, y_0)$, $s_0 = f''_{xy}(x_0, y_0)$, punctul (x_0, y_0) realizează un minim pentru f ; b) dacă $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$ și $r_0 < 0$, $r_0 t_0 - s_0^2 > 0$, punctul (x_0, y_0) realizează un maxim pentru f ; c) dacă $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$ și $r_0 t_0 - s_0^2 < 0$, punctul (x_0, y_0) nu este punct de extrem pentru f .

Fie funcția $f: A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ presupusă diferențiabilă în A . Asociem funcției scalare f vectorul grad $f = (f'_x, f'_y, f'_z)$ numit gradientul funcției f în punctul (x, y, z) .

Să considerăm acum funcția vectorială $v(x, y, z) = (v_1(x, y, z), v_2(x, y, z), v_3(x, y, z))$, unde funcțiile scalare $v_i(x, y, z)$, $i = 1, 2, 3$, sînt presupuse diferențiabile pe mulțimea A . Se numește divergența vectorului v scalarul

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}.$$

Se numește rotorul vectorului v vectorul

$$\operatorname{rot} v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

8.2.1. Probleme rezolvate

1. Pornind de la definiție, să se calculeze:

a) $f'_x\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ și $f'_y\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, dacă $f(x, y) = \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y}$;

b) $f'_x\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ și $f'_y(1, 0)$, dacă $f(x, y) = e^{\sin xy}$;

c) $f''_{xy}(1, 1)$, dacă $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$;

d) $f''_{xy}(1, 1)$ și $f''_{yx}(1, 1)$, dacă $f(x, y) = xy \ln x$, $x \neq 0$.

Rezolvare. a) În baza definiției avem

$$f'_x\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f(x, 0) - f\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \sin \frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\begin{aligned} f'_y\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) &= \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\sin^2 y + \frac{1}{2}} - 1}{y - \frac{\pi}{4}} = \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\left(\sin y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sin y + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(y - \frac{\pi}{4}\right)\left(\sqrt{\sin^2 y + \frac{1}{2}} + 1\right)} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin y - \sin \frac{\pi}{4}}{y - \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

b) Procedind ca mai sus, obținem

$$\begin{aligned} f'_x\left(1, \frac{\pi}{2}\right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{\sin \frac{\pi}{2} x} - e}{x - 1} = e \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{\sin \frac{\pi}{2} x - 1} - 1}{\sin \frac{\pi}{2} x - 1} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2} x - 1}{x - 1} = \\ &= e \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \frac{\pi}{2} x - \sin \frac{\pi}{2}}{x - 1} = 2e \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \frac{\pi}{4} (x - 1) \cos \frac{\pi}{4} (x + 1)}{x - 1} = 0; \end{aligned}$$

$$f'_y(1, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^0 - e^0}{y} = 0.$$

c) Avem $f''_{xy}(1, 1) = (f'_x)'_y(1, 1) = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{f'_x(1, y) - f'_x(1, 1)}{y - 1}$. Dar

$$f'_x(1, y) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{1 + y^2}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{(x - 1)(\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{1 + y^2})} = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}$$

și similar $f'_x(1, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Prin urmare,

$$f''_{xy}(1, 1) = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{\sqrt{1 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}}{y - 1} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

d) Deoarece $f'_x(1, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Similar, $f''_{yx}(1, 1) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$

2. Să se arate

în origine, dar

Rezolvare. Const

Apoi

$f''(0, 0)$

Acest exemplu ne p

ordinul unu în rap

3. Pornind d

diferențiabilă în

Rezolvare. Calc

$\Delta f(1, 1)$

și, evident, $\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)}$

rențiabilă în punc

4. Să se ar

tună și admite

punct.

Rezolvare. De

este continuă în o

Presupunem

unde $\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)}$

Deoarece $\frac{h}{h^2 + k^2}$

d) Deoarece $f'_x(1, y) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xy \ln x}{x-1} = y \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = y$ și $f'_x(1, 1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x}{x-1} = 1$, rezultă că

$$f''_{xy}(1, 1) = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{f'_x(1, y) - f'_x(1, 1)}{y-1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y-1}{y-1} = 1.$$

Similar, $f''_{yx}(1, 1) = 1$, deoarece

$$f'_y(x, 1) = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{xy \ln x - x \ln x}{y-1} = x \ln x \text{ și } f'_y(1, 1) = 0.$$

2. Să se arate că funcția $f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \neq 0 \text{ și } y \neq 0, \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \text{ sau } y = 0, \end{cases}$ nu este continuă în origine, dar admite derivate parțiale în origine.

Rezolvare. Constatăm ușor că funcția nu este continuă în origine deoarece $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=mx}} f(x, y) = 1 \neq f(0, 0)$.

Apoi

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0 \text{ și } f'_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0.$$

Acest exemplu ne permite să tragem concluzia că nu orice funcție care admite derivate parțiale de ordinul unu în raport cu toate variabilele într-un punct este continuă în acel punct.

3. Pornind de la definiție, să se arate că funcția $f(x, y) = x^3 + xy + y^2$ este diferențiabilă în punctul $M_0(1, 1)$.

Rezolvare. Calculind variația funcției f , obținem

$$\Delta f(1, 1; h, k) = f(1+h, 1+k) - f(1, 1) = 4h + 3k + (3h + k^2)h + (h+k)k$$

și, evident, $\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} (3h + k^2) = \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} (h+k) = 0$. Aceasta arată că funcția f este diferențiabilă în punctul $(1, 1)$ și diferențiala sa este $df(1, 1) = 4dx + 3dy$.

4. Să se arate că funcția $f(x, y) = \begin{cases} xy(x^2 + y^2)^{-1/2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$ este continuă și admite derivate parțiale în origine, dar nu este diferențiabilă în acest punct.

Rezolvare. Deoarece $0 \leq \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{|xy|}{\sqrt{y^2}} = |x|$, rezultă $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$ și deci funcția f este continuă în origine. Apoi,

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0 \text{ și } f'_y(0, 0) = 0.$$

Presupunem prin reducere la absurd că f ar fi diferențiabilă în origine. Atunci ar trebui ca

$$\Delta f(0, 0; h, k) = [f'_x(0, 0) + \sigma_1(h, k)]h + [f'_y(0, 0) + \sigma_2(h, k)]k,$$

unde $\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \sigma_\alpha(h, k) = 0$. Cum $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$, egalitatea de mai sus se poate scrie

$$\frac{hk}{h^2 + k^2} = \sigma_1(h, k) \frac{h}{(h^2 + k^2)^{1/2}} + \sigma_2(h, k) \frac{k}{(h^2 + k^2)^{1/2}}.$$

Deoarece $\left| \frac{h}{(h^2 + k^2)^{1/2}} \right| \leq 1$, $\left| \frac{k}{(h^2 + k^2)^{1/2}} \right| \leq 1$ și $\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \sigma_\alpha(h, k) = 0$, $\alpha = 1, 2$, ar trebui, din

egalitatea precedentă prin trecere la limită, să avem $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{hk}{h^2 + k^2} = 0$, ceea ce nu se poate, deoarece $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k=mh}} \frac{hk}{h^2 + k^2} = \frac{m}{1+m^2} \neq 0$ pentru $m \neq 0$.

5. Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul unu pentru următoarele funcții :

a) $f(x, y) = e^{x-y^2}$; b) $f(x, y) = (x^2 + y^2) \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$, $y \neq 0$;

c) $f(x, y, z) = e^{x^2+y^2} \sin^2 z$; a) $f(x, y, z) = \ln x^y y^z z^x$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

Rezolvare. a) Păstrând y fixat, obținem $f'_x = e^{x-y^2}$; păstrând x fixat, obținem $f'_y = -2ye^{x-y^2}$.

b) Procedând similar, obținem

$$f'_x = 2x \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{y} + y \text{ și } f'_y = 2y \operatorname{arctg} \frac{x}{y} - x.$$

c) $f'_x = 2x \sin^2 z e^{x^2+y^2}$; $f'_y = 2y \sin^2 z e^{x^2+y^2}$; $f'_z = 2 \sin z \cos z e^{x^2+y^2}$.

d) Putem scrie $f(x, y, z) = y \ln x + z \ln y + x \ln z$, astfel că

$$f'_x = \frac{y}{x} + \ln z, f'_y = \ln x + \frac{z}{y} \text{ și } f'_z = \ln y + \frac{x}{z}.$$

6. Să se calculeze variația totală și diferențiala totală în punctul (1, 2) a funcției $f(x, y) = x^2y$. Să se compare acestea pentru : a) $h = 1$, $k = 2$; b) $h = 0,1$, $k = 0,2$; c) $h = 0,01$, $k = 0,01$.

Rezolvare. Variația totală a funcției este $\Delta f(1, 2; h, k) = 4h + k + 2h^2 + 2hk + h^2k$, iar diferențiala sa este $df(1, 2; h, k) = 4h + k$. Apoi : a) $\Delta f = 14$ și $df = 6$; b) $\Delta f = 0,662$ și $df = 0,6$

c) $\Delta f = 0,050401$ și $df = 0,05$. Se observă că pentru variații mici ale argumentelor se poate aproxima variația funcției prin diferențiala sa totală.

7. Să se calculeze valoarea aproximativă pentru $1,02^{3,01}$.

Rezolvare. Considerăm funcția $f(x, y) = x^y$ și alegem $x = 1$, $y = 3$ și $h = 0,02$, $k = 0,01$. Deoarece variațiile argumentelor sînt mici, putem aproxima variația funcției f prin diferențiala sa :

$$\Delta f(1, 3; 0,02; 0,01) \approx df(1, 3; 0,02; 0,01) = yx^{y-1}h + x^y \ln x \cdot k = 3 \cdot 1 \cdot 0,02 + 1 \cdot \ln 1 \cdot 0,01 = 0,06.$$

Prin urmare, $f(1 + 0,02; 3 + 0,01) = 1,02^{3,01} \approx 1 + 0,06 = 1,06$.

8. Să se arate că derivatele parțiale de ordinul doi mixte ale funcției $f(x, y) = \begin{cases} y^2 \ln \left(1 + \frac{x^2}{y^2} \right), & y \neq 0, \\ 0, & y = 0, \end{cases}$ nu sînt continue în origine și totuși $f''_{xy}(0, 0) = f''_{yx}(0, 0)$.

Rezolvare. Deoarece $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha} < \alpha$ pentru $\alpha > 1$, rezultă că $0 < 2y^2 \ln \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} < 2y^2 \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}}$ și deoarece $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,0)} 2y\sqrt{x^2 + y^2} = 0$, rezultă că $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,0)} f(x, y) = f(x_0, 0)$ și deci funcția este continuă în tot planul. Funcția admite derivatele parțiale

$$f'_x(x, y) = \begin{cases} \frac{2y^2x}{x^2 + y^2}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0, \end{cases} \text{ și } f'_y(x, y) = \begin{cases} 2y \ln \left(1 + \frac{x^2}{y^2} \right) - \frac{2x^2y}{x^2 + y^2}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0, \end{cases}$$

și acestea, se observă, că sînt continue în tot planul.

Derivatele parțiale mixte sînt

$$f''_{xy}(x, y) = \begin{cases} \frac{4x^3y}{(x^2 + y^2)^2}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0, \end{cases} \text{ și } f''_{yx}(x, y) = \begin{cases} \frac{4x^3y}{(x^2 + y^2)^2}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0, \end{cases}$$

$f''_{yx}(x, y) = f''_{xy}(x, y)$. Se observă că aceste derivate parțiale mixte nu sînt continue în origine, deoarece $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = mx}} \frac{4x^3y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{4m}{(1 + m^2)^2} \neq 0$ pentru $m \neq 0$.

9. Să se calculeze diferențialele de ordinul întâi și al doilea pentru funcțiile:

a) $f(x, y) = e^x \cos y$; b) $f(x, y, z) = xyz$.

Rezoluare. a) Deoarece funcția admite derivate parțiale de orice ordin, continue în tot planul, ea admite diferențiale de orice ordin. Dar $f'_x = e^x \cos y$ și $f'_y = -e^x \sin y$, astfel că $df = e^x(\cos y dx - \sin y dy)$. Apoi $f''_{xx} = e^x \cos y$, $f''_{yy} = -e^x \sin y$ și $f''_{xy} = -e^x \cos y$, astfel că $d^2f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^2 f = f''_{xx}(dx)^2 + 2f''_{xy} dx dy + f''_{yy}(dy)^2 = e^x[\cos y(dx)^2 - 2 \sin y dx dy - \cos y(dy)^2]$.

b) Avem $f'_x = yz$, $f'_y = xz$ și $f'_z = xy$, astfel că $df = yz dx + xz dy + xy dz$. Deoarece $f''_{xx} = f''_{yy} = f''_{zz} = 0$ și $f''_{xy} = z$, $f''_{yz} = x$, $f''_{zx} = y$, rezultă $d^2f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz\right)^2 f = 2z dx dy + 2x dy dz + 2y dx dz$.

10. Să se calculeze derivatele parțiale și diferențiala de ordinul n pentru funcția $f(x, y) = e^{ax+by}$.

Rezoluare. Putem scrie $f(x, y) = e^{ax} e^{by}$, astfel că $\frac{\partial^k f}{\partial x^k} = a^k e^{ax} e^{by}$ și $\frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}} = a^k b^{n-k} e^{ax} e^{by} = a^k b^{n-k} f$, $k \in \mathbb{N}$. Înlocuind în formula (1), avem

$$d^n f = [a^n (dx)^n + C_n^1 a^{n-1} b (dx)^{n-1} dy + \dots + C_n^n b^n (dy)^n] f = e^{ax+by} (a dx + b dy)^n.$$

11. Să se arate că funcția $f(x, y)$ verifică ecuația lui Laplace $\Delta f = 0$, unde $\Delta f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, știind că: a) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$; b) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

Rezoluare. a) Avem $f'_x = \frac{2x}{x^2 + y^2}$, $f''_{xx} = \frac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$ și din motive de simetrie $f''_{yy} = \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$. Se vede astfel că $\Delta f = 0$.

b) $f'_x = -\frac{y}{x^2 + y^2}$, $f'_y = \frac{x}{x^2 + y^2}$, astfel că $f''_{xx} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$ și $f''_{yy} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$.

Prin urmare, $\Delta f = 0$.

12. Să se calculeze $\frac{df}{dx}$, știind că $f = f(u, v)$ și $u = u(x)$, $v = v(x)$, pentru funcțiile:

a) $f(u, v) = u^v$; b) $f(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2}$; c) $f(u, v) = \operatorname{arctg} \frac{u}{v}$.

Rezoluare. Folosim regula de derivare a funcțiilor compuse (2), care pentru cazul de față se scrie sub forma

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{dv}{dx}. \quad (7)$$

a) Deoarece $f'_u = vu^{v-1}$ și $f'_v = u^v \ln u$, rezultă că $\frac{df}{dx} = vu^{v-1}u' + u^v \ln u \cdot v'$. Se redescoperă astfel formula de derivare a expresiei $(u(x))^{v(x)}$ de la funcții de o variabilă reală.

b) În acest caz $f'_u = u(u^2 + v^2)^{-1/2}$ și $f'_v = v(u^2 + v^2)^{-1/2}$, astfel că după (7) obținem $\frac{df}{dx} = (u^2 + v^2)^{-1/2}(uu' + vv')$.

c) $\frac{df}{dx} = (u^2 + v^2)^{-1}(vu' - uv')$.

13. Să se calculeze f'_x și f'_y pentru funcțiile:

a) $f(u, v) = \ln(u^2 + v)$, unde $u = e^{x+v^2}$ și $v = x^2 + y$;

b) $f(u, v) = \operatorname{arctg} \frac{u}{v}$, unde $u = x \sin y$ și $v = x \cos y$.

Rezolvare. În acest caz regula (2) de derivare a funcțiilor compuse se scrie

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (8)$$

a) Deoarece $f'_u = \frac{2u}{u^2 + v}$, $f'_v = \frac{1}{u^2 + v}$ și $u'_x = e^{x+v^2}$, $v'_x = 2x$, după (8) rezultă

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2u}{u^2 + v} e^{x+v^2} + \frac{1}{u^2 + v} 2x = \frac{2}{u^2 + v} (u^2 + x).$$

Apoi $u'_y = 2ye^{x+v^2} = 2yu$ și $v'_y = 1$, astfel că, după (8),

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2u}{u^2 + v} \cdot 2yu + \frac{1}{u^2 + v} = \frac{1}{u^2 + v} (4u^2y + 1).$$

b) Avem $f'_u = \frac{v}{u^2 + v^2}$, $f'_v = -\frac{u}{u^2 + v^2}$, $u'_x = \sin y$, $v'_x = \cos y$, $u'_y = x \cos y$ și $v'_y = -x \sin y$, astfel că

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{v}{u^2 + v^2} \sin y - \frac{u}{u^2 + v^2} \cos y = \frac{1}{x} (\cos y \sin y - \sin y \cos y) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 1.$$

14. Să se arate că funcțiile următoare verifică ecuațiile indicate:

a) $f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ verifică ecuația $xf'_x + yf'_y = 0$;

b) $f(x, y, z) = \varphi(xy, x^2 + y^2 - z^2)$ verifică ecuația $xzf'_x - yzf'_y + (x^2 - y^2)f'_z = 0$.

Rezolvare. a) Pentru calculul derivatelor parțiale f'_x și f'_y introducem funcția $u(x, y) = \frac{y}{x}$ și folosim legea de derivare a funcțiilor compuse. Astfel $f(x, y) = \varphi(u(x, y))$ și

$$f'_x = \frac{d\varphi}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi' \left(-\frac{y}{x^2}\right), \quad f'_y = \frac{d\varphi}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x} \varphi'.$$

Prin urmare, $xf'_x + yf'_y = -\frac{y}{x} \varphi' + \frac{y}{x} \varphi' = 0$.

b) Dacă introducem funcțiile $u(x, y, z) = xy$ și $v(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, atunci $f(x, y, z) = \varphi(u(x, y, z), v(x, y, z))$ și deci $f'_x = \varphi'_u u'_x + \varphi'_v v'_x = y\varphi'_u + 2x\varphi'_v$, $f'_y = \varphi'_u u'_y + \varphi'_v v'_y = x\varphi'_u + 2y\varphi'_v$, $f'_z = \varphi'_u u'_z + \varphi'_v v'_z = -2z\varphi'_v$.

Astfel

$$xzf'_x - yzf'_y + (x^2 - y^2)f'_z = xz(y\varphi'_u + 2x\varphi'_v) - yz(x\varphi'_u + 2y\varphi'_v) - 2z(x^2 - y^2)\varphi'_v = 0.$$

15. Fie $f = f(u, v)$, unde $u = xy$ și $v = \frac{x}{y}$. Să se calculeze f''_{xx} , f''_{xy} și f''_{yy} .

descoperă astfel

Rezolvare. Deoarece $u'_x = y$, $v'_x = \frac{1}{y}$ și $u'_y = x$, $v'_y = -\frac{x}{y^2}$, după regula de derivare a funcțiilor compuse sub forma (8), avem

$$f'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x = y f'_u + \frac{1}{y} f'_v, \quad f'_y = f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y = x f'_u - \frac{x}{y^2} f'_v,$$

$$f''_{xx} = (f'_x)'_x = \left(y f'_u + \frac{1}{y} f'_v \right)'_x = y (f'_u)'_x + \frac{1}{y} (f'_v)'_x.$$

Pentru calculul derivatelor $(f'_u)'_x$ și $(f'_v)'_x$ vom folosi din nou legea de derivare a funcțiilor compuse sub forma (8), înlocuind în această formulă funcția f , pe rând, prin f'_u și f'_v :

$$(f'_u)'_x = (f'_u)'_u u'_x + (f'_u)'_v v'_x, \quad (f'_v)'_x = (f'_v)'_u u'_x + (f'_v)'_v v'_x,$$

deci

$$(f'_u)'_x = y f''_{uu} + \frac{1}{y} f''_{uv}, \quad (f'_v)'_x = y f''_{uv} + \frac{1}{y} f''_{vv}.$$

(8)

Înlocuind aceste expresii în f''_{xx} , se deduce

$$f''_{xx} = y \left(y f''_{uu} + \frac{1}{y} f''_{uv} \right) + \frac{1}{y} \left(y f''_{uv} + \frac{1}{y} f''_{vv} \right) = y^2 f''_{uu} + 2 f''_{uv} + \frac{1}{y^2} f''_{vv}.$$

sau $f''_{xx} = \frac{u}{v} f''_{uu} + 2 f''_{uv} + \frac{v}{u} f''_{vv}.$

Procedând similar, obținem

$$f''_{xy} = (f'_x)'_y = \left(y f'_u + \frac{1}{y} f'_v \right)'_y = y (f'_u)'_y + \frac{1}{y} (f'_v)'_y + f'_u - \frac{1}{y^2} f'_v.$$

Pentru calculul derivatelor $(f'_u)'_y$ și $(f'_v)'_y$ folosim formula (8), în care înlocuim pe rând pe f prin f'_u și f'_v , astfel că

$$(f'_u)'_y = (f'_u)'_u u'_y + (f'_u)'_v v'_y = x f''_{uu} - \frac{x}{y^2} f''_{uv},$$

$$(f'_v)'_y = (f'_v)'_u u'_y + (f'_v)'_v v'_y = x f''_{uv} - \frac{x}{y^2} f''_{vv}.$$

Folosind aceste rezultate, obținem

$$f''_{xy} = y \left(x f''_{uu} - \frac{x}{y^2} f''_{uv} \right) + \frac{1}{y} \left(x f''_{uv} - \frac{x}{y^2} f''_{vv} \right) + f'_u - \frac{1}{y^2} f'_v = u f''_{uu} - \frac{v^2}{u} f''_{vv} + f'_u - \frac{v}{u} f'_v.$$

Similar obținem

$$\begin{aligned} f''_{yy} &= (f'_y)'_y = \left(x f'_u - \frac{x}{y^2} f'_v \right)'_y = x (f'_u)'_y - \frac{x}{y^2} (f'_v)'_y + \frac{2x}{y^3} f'_v = \\ &= x \left(x f''_{uu} - \frac{x}{y^2} f''_{uv} \right) - \frac{x}{y^2} \left(x f''_{uv} - \frac{x}{y^2} f''_{vv} \right) + \frac{2x}{y^3} f'_v = x^2 f''_{uu} - \frac{2x^2}{y^2} f''_{uv} + \\ &+ \frac{x^2}{y^4} f''_{vv} + \frac{2x}{y^3} f'_v = u v f''_{uu} - 2 v^2 f''_{uv} + \frac{v^3}{u} f''_{vv} + \frac{2 v^2}{u} f'_v. \end{aligned}$$

16. Să se arate că funcția $f(x, y) = \varphi(x - ay) + \psi(x + ay)$, unde funcțiile φ și ψ admit derivate de ordinul doi, satisface ecuația coardei vibrante $f''_{yy} = a^2 f''_{xx}$.

Rezolvare. Introducem funcțiile $u(x, y) = x - ay$ și $v(x, y) = x + ay$, astfel că $f(x, y) = \varphi(u(x, y)) + \psi(v(x, y))$. Deoarece $u'_x = 1$, $v'_x = 1$, $u'_y = -a$ și $v'_y = a$, rezultă după (8)

$$f'_x = \varphi'_u u'_x + \psi'_v v'_x = \varphi'_u + \psi'_v, \quad f'_y = \varphi'_u u'_y + \psi'_v v'_y = -a \varphi'_u + a \psi'_v.$$

Prin urmare,

$$f''_{xx} = (f'_x)'_x = (\varphi'_x)'_x + (\psi'_x)'_x = (\varphi'_x)'_x + (\psi'_x)'_x = \varphi''_{xx} + \psi''_{xx}$$

$$f''_{yy} = (f'_y)'_y = \alpha [-(\varphi'_y)'_y + (\psi'_y)'_y] = \alpha^2 (\varphi''_{yy} + \psi''_{yy}),$$

astfel că $f''_{yy} = \alpha^2 f''_{xx}$.

17. Să se scrie formula lui Taylor pentru funcția $f(x, y) = e^{x+y}$ în punctul $(1, -1)$.

Rezolvare. Avem $\frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}} = e^{x+y}$, $k = 1, 2, \dots, n$, astfel că $\frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}}(1, -1) = 1$. Prin urmare, $d^n f(1, -1) = (h+k)^n$ și $d^{n+1} f(1+\theta h, -1+\theta h) = (h+k)^{n+1} e^{\theta(h+k)}$. Ținând seama de formula (3), obținem pentru $\theta \in (0, 1)$

$$f(1+h, -1+\theta h) = 1 + \frac{1}{1!} (h+k) + \frac{1}{2!} (h+k)^2 + \dots + \frac{1}{n!} (h+k)^n +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!} (h+k)^{n+1} e^{\theta(h+k)}.$$

18. Folosind formula lui Taylor de ordinul doi, să se calculeze valoarea aproximativă pentru $\sqrt{1,03} \cdot \sqrt[3]{0,98}$.

Rezolvare. Se consideră funcția $f(x, y) = x^{1/2} y^{1/3}$, pe care o dezvoltăm după formula lui Taylor în punctul $(1, 1)$, pentru $h = 0,03$ și $k = -0,02$:

$$\sqrt{1,03} \cdot \sqrt[3]{0,98} = f(1+h, 1+k) = f(1, 1) + \frac{1}{1!} [f'_x(1, 1)h + f'_y(1, 1)k] +$$

$$+ \frac{1}{2!} [f''_{xx}(1, 1)h^2 + 2f''_{xy}(1, 1)hk + f''_{yy}(1, 1)k^2] + R_2 = 1 + \frac{1}{1!} \left(\frac{1}{2} \cdot 0,03 - \frac{1}{3} \cdot 0,02 \right) +$$

$$+ \frac{1}{2!} \left(-\frac{1}{4} \cdot 0,0009 - \frac{2}{6} \cdot 0,0006 - \frac{2}{9} \cdot 0,0004 \right) + R_2,$$

astfel că $\sqrt{1,03} \cdot \sqrt[3]{0,98} \approx 1,0081$.

19. Considerind $|x|$, $|y|$ și $|z|$ suficient de mici, să se aproximeze funcția $f(x, y, z) = (1+x)^{1/2}(1+y)^{-1/2}(1+z)^{-1/2}$.

Rezolvare. Folosim formula lui Taylor de ordin unu în punctul $(0, 0, 0)$. Deoarece $f'_x(0, 0, 0) = \frac{1}{2}$, $f'_y(0, 0, 0) = -\frac{1}{2}$ și $f'_z(0, 0, 0) = -\frac{1}{2}$, rezultă $f(x, y, z) \approx 1 + (x - y - z)/2$.

20. Folosind definiția și teorema lui Euler, să se arate că funcția $f(x, y, z) = (x+y)e^{\frac{x}{y}} + (y+z)e^{\frac{y}{z}} + (z+x)e^{\frac{z}{x}}$ este omogenă.

Rezolvare. Folosim mai întâi definiția sub forma (4). Deoarece $f(tx, ty, tz) = tf(x, y, z)$, rezultă că funcția f este omogenă de gradul 1.

Aplicând teorema Euler, avem

$$f'_x = \left[1 + \frac{1}{y} (x+y) \right] e^{x/y} + \left[1 - \frac{z}{x^2} (z+x) \right] e^{z/x},$$

$$f'_y = \left[1 - \frac{x}{y^2} (x+y) \right] e^{x/y} + \left[1 + \frac{1}{z} (y+z) \right] e^{y/z},$$

$$f'_z = \left[1 - \frac{y}{z^2} (y+z) \right] e^{y/z} + \left[1 + \frac{1}{x} (z+x) \right] e^{z/x},$$

astfel că $xf'_x + yf'_y + zf'_z = f$ și deci funcția f este omogenă de gradul 1.

21. Să se arate că gradul n al funcției $f(x, y, z)$ este omogenă de gradul $n-1$.

Rezolvare. În baza teoremei lui Euler, obținem $xf'_x + yf'_y + zf'_z = (n-1)f$, deci funcția este omogenă de gradul $n-1$.

22. Să se arate că funcția $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ este omogenă de gradul 2.

Rezolvare. Deoarece $f(tx, ty, tz) = t^2 f(x, y, z)$, rezultă că funcția este omogenă de gradul 2.

23. Să se calculeze valoarea aproximativă a funcției $f(x, y, z) = x^2 f'_x + y^2 f'_y + z^2 f'_z$ în punctul $M(2, 2, 2)$ unde unghiurile sunt de 30° .

Rezolvare. Comparam $f(x, y, z)$ cu $f(2, 2, 2)$.

Deoarece $f'_x(2, 2, 2) = 4$, $f'_y(2, 2, 2) = 4$ și $f'_z(2, 2, 2) = 4$, obținem $\frac{df}{dt} = 6$.

24. Să se calculeze valoarea aproximativă a funcției $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ în punctul $M(2, 1, 3)$, după ce se știe că unghiurile sunt de 30° .

Rezolvare. Comparam $f(x, y, z)$ cu $f(2, 1, 3)$.

Deoarece $f'_x(2, 1, 3) = 4$, $f'_y(2, 1, 3) = 2$ și $f'_z(2, 1, 3) = 6$, obținem $\frac{df}{dt} = 6$.

25. Să se calculeze valoarea aproximativă a funcției $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ în punctul $M(2, 1, 3)$, după ce se știe că unghiurile sunt de 30° .

Rezolvare. Comparam $f(x, y, z)$ cu $f(2, 1, 3)$.

Deoarece $f'_x(2, 1, 3) = 4$, $f'_y(2, 1, 3) = 2$ și $f'_z(2, 1, 3) = 6$, obținem $\frac{df}{dt} = 6$.

26. Fie funcția $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Să se calculeze valoarea aproximativă a funcției $f(x, y, z)$ în punctul $M(2, 1, 3)$, după ce se știe că unghiurile sunt de 30° .

Rezolvare. Comparam $f(x, y, z)$ cu $f(2, 1, 3)$.

Deoarece $f'_x(2, 1, 3) = 4$, $f'_y(2, 1, 3) = 2$ și $f'_z(2, 1, 3) = 6$, obținem $\frac{df}{dt} = 6$.

27. Să se calculeze valoarea aproximativă a funcției $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ în punctul $M(2, 1, 3)$, după ce se știe că unghiurile sunt de 30° .

Rezolvare. Comparam $f(x, y, z)$ cu $f(2, 1, 3)$.

Deoarece $f'_x(2, 1, 3) = 4$, $f'_y(2, 1, 3) = 2$ și $f'_z(2, 1, 3) = 6$, obținem $\frac{df}{dt} = 6$.

28. Să se calculeze valoarea aproximativă a funcției $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ în punctul $M(2, 1, 3)$, după ce se știe că unghiurile sunt de 30° .

Rezolvare. Comparam $f(x, y, z)$ cu $f(2, 1, 3)$.

Deoarece $f'_x(2, 1, 3) = 4$, $f'_y(2, 1, 3) = 2$ și $f'_z(2, 1, 3) = 6$, obținem $\frac{df}{dt} = 6$.

21. Să se arate că, dacă $f(x, y, z)$ admite derivate parțiale și este omogenă de gradul n , atunci derivatele parțiale de ordinul unu sînt funcții omogene de gradul $n-1$.

Rezolvare. În baza definiției $f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z)$. Derivînd această identitate în raport cu x , obținem $t f'_x(tx, ty, tz) = t^n f'_x(x, y, z)$ sau $f'_x(tx, ty, tz) = t^{n-1} f'_x(x, y, z)$, fapt ce arată că f'_x este omogenă de gradul $n-1$. Similar se arată că și f'_y și f'_z sînt omogene de gradul $n-1$.

22. Să se arate că, dacă $f(x, y, z)$ admite derivate parțiale de ordinul doi și este omogenă de gradul n , atunci

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f = n(n-1)f.$$

Rezolvare. Deoarece f este omogenă de gradul n , după teorema lui Euler, avem $xf'_x + yf'_y + zf'_z = nf$. Derivînd această relație în raport cu x , apoi cu y și z , obținem

$$xf''_{xx} + yf''_{yx} + zf''_{zx} = (n-1)f'_x, \quad xf''_{xy} + yf''_{yy} + zf''_{zy} = (n-1)f'_y, \quad xf''_{xz} + yf''_{yz} + zf''_{zz} = (n-1)f'_z.$$

Înmulțind aceste relații prin x, y și respectiv z și țînînd seama de relația anterioară, obținem

$$x^2 f''_{xx} + y^2 f''_{yy} + z^2 f''_{zz} + 2xy f''_{xy} + 2xz f''_{xz} + 2yz f''_{yz} = (n-1)(xf'_x + yf'_y + zf'_z) = (n-1)nf.$$

23. Să se calculeze derivata funcției $f(x, y) = x^2 - y^2 + xy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, în punctul $M(2, 2)$, după direcția l , care face cu direcția pozitivă a axei Ox un unghi de 30° .

Rezolvare. Cosinusurile directoare ale direcției l sînt $\cos \alpha = \cos 30^\circ = \frac{1}{2}$ și $\cos \beta = \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Deoarece $f'_x(2, 2) = 6$ și $f'_y(2, 2) = -2$, după formula (6) (adaptată pentru funcții de două variabile), obținem $\frac{df}{dl} = 6 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3 - \sqrt{3}$.

24. Să se calculeze derivata funcției $f(x, y, z) = xy + yz + zx$, în punctul $M(2, 1, 3)$, după direcția \overrightarrow{MN} , unde $N(5, 5, 15)$.

Rezolvare. Cosinusurile directoare ale direcției \overrightarrow{MN} sînt $\cos \alpha = \frac{3}{13}$, $\cos \beta = \frac{4}{13}$ și $\cos \gamma = \frac{12}{13}$. Apoi $f'_x(2, 1, 3) = 4$, $f'_y(2, 1, 3) = 5$, $f'_z(2, 1, 3) = 3$, astfel că, după formula (6), obținem $\frac{df}{dl} = \frac{68}{13}$.

25. Să se calculeze derivata funcției $f(x, y, z) = \frac{1}{r}$, $r \neq 0$, $r = xi + yj + zk$, într-un punct $M(x, y, z)$, după direcția gradientului său.

Rezolvare. Putem scrie $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$, astfel că $\text{grad } f = (f'_x, f'_y, f'_z) = -\frac{1}{r^3} r$.

Deoarece $|\text{grad } f| = \frac{1}{r^2}$, rezultă $\cos \alpha = -\frac{x}{r}$, $\cos \beta = -\frac{y}{r}$, $\cos \gamma = -\frac{z}{r}$. Prin urmare, $\frac{df}{dl} = -\frac{x}{r} \cdot \left(-\frac{x}{r^2}\right) - \frac{y}{r} \cdot \left(-\frac{y}{r^2}\right) - \frac{z}{r} \cdot \left(-\frac{z}{r^2}\right) = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r^2}$.

26. Fie funcția $g(x, y, z) = f(r)$, $r = xi + yj + zk$. Să se calculeze $\text{grad } g$, $\text{div } [f(r)r]$ și $\text{rot } [f(r)r]$.

Rezolvare. Avem $g'_x = \frac{df}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} f'(r)$, $g'_y = \frac{y}{r} f'(r)$, $g'_z = \frac{z}{r} f'(r)$, astfel că $\text{grad } g = \frac{1}{r} f'(r) \cdot r$. Dacă notăm $v \equiv (v_1, v_2, v_3) \equiv f(r)r$, rezultă $v_1 = xf(r)$, $v_2 = yf(r)$ și $v_3 = zf(r)$, astfel că

$$\operatorname{div} [f(r)r] = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = f(r) + f'(r) \cdot \frac{x^2}{r} + f(r) + f'(r) \cdot \frac{y^2}{r} + f(r) + f'(r) \cdot \frac{z^2}{r} = 3f(r) + rf'(r).$$

În sfârșit,

$$\operatorname{rot}[f(r)r] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xf & yf & zf \end{vmatrix} = \left(\frac{zy}{r} f' - \frac{yz}{r} f' \right) i - \left(\frac{zx}{r} f' - \frac{xz}{r} f' \right) j + \left(\frac{yx}{r} f' - \frac{xy}{r} f' \right) k = 0.$$

27. Să se găsească punctele de extrem local pentru funcțiile:

a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; b) $f(x, y) = 3xy^2 - x^3 - 15x - 36y + 9$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;

c) $f(x, y) = y^4 - 8y^3 + 18y^2 - 8y + x^3 - 3x^2 - 3x$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;

d) $f(x, y) = \sin x \sin y \sin(x + y)$, $0 < x < 2\pi$, $0 < y < 2\pi$.

Rezolvare. a) Determinăm mai întâi punctele staționare ca soluții ale sistemului $f'_x = 3x^2 - 3y = 0$, $f'_y = 3y^2 - 3x = 0$. Obținem $M_1(0, 0)$ și $M_2(1, 1)$. Apoi $f''_{xx} = 6x$, $f''_{yy} = -3$ și $f''_{xy} = -6y$. Discutăm pentru fiecare punct în parte:

$$M_1(0, 0) \Rightarrow r_0 t_0 - s_0^2 = -9 < 0, \text{ nu este punct de extrem};$$

$$M_2(1, 1) \Rightarrow r_0 t_0 - s_0^2 = 27 > 0, r_0 = 6 > 0, \text{ este punct de minim};$$

b) Punctele staționare satisfac sistemul $f'_x = 3y^2 - 3x^2 - 15 = 0$, $f'_y = 6xy - 36 = 0$. Prin urmare, obținem punctele staționare $M_1(2, 3)$ și $M_2(-2, -3)$. Deoarece $f''_{xx} = -6x$, $f''_{yy} = 6y$ și $f''_{xy} = 6x$, rezultă discuția:

$$M_1(2, 3) \Rightarrow r_0 t_0 - s_0^2 = -468 < 0, \text{ nu este punct de extrem};$$

$$M_2(-2, -3) \Rightarrow r_0 t_0 - s_0^2 = -468 < 0, \text{ nu este punct de extrem}.$$

Prin urmare, funcția nu admite extreme.

c) Punctele staționare sînt date de soluțiile sistemului $f'_x = 3x^2 - 6x - 3 = 0$, $f'_y = 4y^3 - 24y^2 + 36y - 8 = 0$.

Prin rezolvarea acestui sistem obținem următoarele puncte:

$$M_1(1 + \sqrt{2}, 2), M_2(1 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{3}), M_3(1 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{3}), M_4(1 - \sqrt{2}, 2),$$

$$M_5(1 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{3}), M_6(1 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{3}).$$

Deoarece $f''_{xx} = 6x - 6$, $f''_{yy} = 0$ și $f''_{xy} = 12y^2 - 48y + 36 = 12(y^2 - 4y + 3)$, avem:

$$M_1(1 + \sqrt{2}, 2) \Rightarrow r_0 t_0 - s_0^2 = -72\sqrt{2} < 0, \text{ nu este punct de extrem};$$

$$M_2(1 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{3}) \Rightarrow r_0 t_0 - s_0^2 = 144\sqrt{2} > 0, r_0 = 6\sqrt{2} > 0, \text{ este punct de minim};$$

$$M_3(1 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{3}) \Rightarrow r_0 t_0 - s_0^2 = 144\sqrt{2} > 0, r_0 = 6\sqrt{2} > 0, \text{ este punct de minim};$$

$$M_4(1 - \sqrt{2}, 2) \Rightarrow r_0 t_0 - s_0^2 = 72\sqrt{2} > 0, r_0 = -6\sqrt{2} < 0, \text{ este punct de maxim};$$

$$M_5(1 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{3}) \Rightarrow r_0 t_0 - s_0^2 = -144\sqrt{2} < 0, \text{ nu este punct de extrem};$$

$$M_6(1 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{3}) \Rightarrow r_0 t_0 - s_0^2 = -144\sqrt{2} < 0, \text{ nu este punct de extrem}.$$

d) În acest caz, punctele staționare satisfac sistemul

$$f'_x = \cos x \sin y \sin(x + y) + \sin x \sin y \cos(x + y) = \sin y \sin(2x + y) = 0$$

$$f'_y = \sin x \cos y \sin(x + y) + \sin x \sin y \cos(x + y) = \sin x \sin(x + 2y) = 0.$$

Rezolvând acest sistem, obținem punctele $M_1(\pi, \pi)$, $M_2\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$. Deoarece $f''_{xy} = 2 \sin y \cos(2x + y)$, $f''_{xy} = \sin 2(x + y)$ și $f''_{yy} = 2 \sin x \cos(x + 2y)$, rezultă

$$M_1(\pi, \pi) \Rightarrow r_0' = s_0^2 = 0, r_0 = 0, \text{ nu se poate spune nimic!}$$

$$M_2\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow r_0' = s_0^2 = \frac{9}{4} > 0, r_0 = -\sqrt{3} < 0, \text{ este punct de maxim.}$$

În cazul punctului M_1 , deoarece diferențialele de ordin unu și doi sînt nule, trebuie să considerăm în formula lui Taylor termenii de ordin superior. Calculînd diferențiala de ordin trei, obținem $d^3f(M_1) = 6hk(h+k) \neq 0$. Se observă că aceasta ia și valori pozitive și valori negative; prin urmare, punctul M_1 nu este punct de extrem.

28. Să se determine punctele de extrem ale funcțiilor:

a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;

b) $f(x, y, z) = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z)$, $(x, y, z) \in (0, \pi) \times (0, \pi) \times (0, \pi)$.

Rezolvare. a) Punctele staționare sînt soluții ale sistemului $f'_x = 2x + 2 = 0$, $f'_y = 2y + 4 = 0$, $f'_z = 2z - 6 = 0$. Obținem un singur punct staționar $M(-1, -2, 3)$. Diferențiala de ordin doi $d^2f(M) = 2(h^2 + k^2 + l^2)$ este pozitiv definită și deci punctul M este un punct de minim.

b) Sistemul care determină punctele staționare este

$$f'_x = \cos x - \cos(x + y + z) = 0, f'_y = \cos y - \cos(x + y + z) = 0, f'_z = \cos z - \cos(x + y + z) = 0.$$

Se observă că avem $\cos x = \cos y = \cos z = \cos(x + y + z)$. Aceasta implică $x = y = z$ în intervalul de definiție. Înlocuind această relație în una din ecuații, obținem $\cos x = \cos 3x$ sau $-2 \sin x \sin 2x = -0$, de unde $x = \frac{\pi}{2}$; deci avem un singur punct staționar $M\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Diferențiala de ordinul

$$\text{doi în } M, d^2f(M) = -2(h^2 + k^2 + l^2 + hk + hl + kl) = -2\left\{\left(h + \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}l\right)^2 + \frac{3}{4}\left(k + \frac{1}{3}l\right)^2 + \frac{2}{3}l^2\right\}$$

este negativ definită și deci punctul M este un punct de maxim.

29. *Metoda celor mai mici pătrate.* Se numește astfel o metodă foarte răspîdită de prelucrare a unor măsurări. Vom expune această metodă pe următorul model. Presupunem că prin anumite experiențe se determină pentru mărimile a, b, c și d o mulțime de date $\{(a_i, b_i, c_i, d_i), i = 1, 2, \dots, n\}$, $n > 3$, n fiind fixat. Se cere să găsim trei mărimi x, y, z astfel încît

$$a_i x + b_i y + c_i z = d_i, i = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

În general sistemul de ecuații (9) este incompatibil și deci problema astfel pusă nu are soluție. Se modifică problema în felul următor. Cu notația $\delta_i = a_i x + b_i y + c_i z - d_i$ cerem să se determine (x, y, z) astfel încît funcția eroare

$$f(x, y, z) = \sum_{i=1}^n \delta_i^2 = \sum_{i=1}^n (a_i x + b_i y + c_i z - d_i)^2 \quad (10)$$

să fie minimă. De aici și denumirea metodei. Vom arăta ulterior că ultima problemă admite soluție. Această soluție va satisface sistemul de ecuații (9) numai aproximativ.

Vom presupune că datele experimentale sînt astfel încît rangul sistemului de ecuații (9) este egal cu trei.

Sistemul de ecuații ce determină punctele staționare ale funcției $f(x, y, z)$ este

$$f'_x \equiv 2 \sum_{i=1}^n a_i(a_i x + b_i y + c_i z - d_i) = 0,$$

$$f'_y \equiv 2 \sum_{i=1}^n b_i(a_i x + b_i y + c_i z - d_i) = 0,$$

$$f'_z \equiv 2 \sum_{i=1}^n c_i(a_i x + b_i y + c_i z - d_i) = 0.$$

Folosind notațiile lui Gauss $\sum_{i=1}^n a_i^2 = [a, a]$, $\sum_{i=1}^n a_i b_i = [a, b]$ etc., sistemul se scrie

$$[a, a]x + [a, b]y + [a, c]z - [a, d] = 0, \quad [a, b]x + [b, b]y + [b, c]z - [b, d] = 0, \quad (11)$$

$$[a, c]x + [b, c]y + [c, c]z - [c, d] = 0.$$

Deoarece $f''_{xx} = 2[a, a]$, $f''_{yy} = 2[b, b]$, $f''_{zz} = 2[c, c]$, $f''_{xy} = 2[a, b]$, $f''_{yz} = 2[b, c]$ și $f''_{xz} = 2[a, c]$, rezultă $d^2f = 2\{[a, a]h^2 + [b, b]k^2 + [c, c]l^2 + 2[a, b]hk + 2[b, c]kl + 2[a, c]hl\} = 2 \sum_{i=1}^n (a_i h + b_i k + c_i l)^2$. Această ultimă expresie arată că $d^2f > 0$ pentru $(h, k, l) \neq (0, 0, 0)$ și $d^2f = 0$ numai dacă $(h, k, l) = (0, 0, 0)$. Prin urmare, d^2f este o formă pătratică pozitiv definită. Cum discriminantul formei pătratice d^2f coincide cu determinantul sistemului (11) și d^2f este pozitiv definită, rezultă că sistemul (11) este un sistem Cramer. Deci sistemul (11) admite o soluție unică (x_0, y_0, z_0) . Deoarece $d^2f(x_0, y_0, z_0)$ este pozitiv definită, rezultă că (x_0, y_0, z_0) este un punct de minim pentru funcția $f(x, y, z)$ dată de (10).

8.2.2. Probleme propuse spre rezolvare

30. Pornind de la definiție, să se calculeze:

- a) $f'_x(1, 1)$ și $f'_y(1, 1)$, dacă $f(x, y) = \ln(1 + x + y^2)$;
 b) $f'_x(-2, 2)$, $f'_y(-2, 2)$ și $f''_{xy}(-2, 2)$, dacă $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 y}$;
 c) $f''_{xy}\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$, dacă $f(x, y) = x \sin(x + y)$.

31. Să se arate că funcția $f(x, y) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)}$, $(x, y) \neq (0, 0)$ și $f(0, 0) = 0$, admite derivatele parțiale f'_x și f'_y în origine, dar este discontinuă în acel punct.

32. Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul întâi și al doilea pentru următoarele funcții:

a) $f(x, y) = x^2 \sin^2 y$; b) $f(x, y) = x^{y^2}$; c) $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

d) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$; e) $f(x, y) = \operatorname{arctg}(xy)$;

f) $f(x, y) = \ln(x + y^2)$; g) $f(x, y, z) = y^{x^2}$; h) $f(x, y, z) = \operatorname{arctg} \frac{y}{xz}$;

i) $f(x, y, z) = e^{xy} \sin z$.

33. Pornind de la definiție, să se arate că funcția $f(x, y) = 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$ este diferențiabilă pe \mathbb{R}^2 .

34. Să se calculeze $df(1, 1)$ și $d^2f(1, 1)$ pentru următoarele funcții:

a) $f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2 + 3x - 5y + 7$; b) $f(x, y) = e^{xy}$; c) $f(x, y) = \ln xy$.

35. Se definește $\varphi(x, y)$ în orice punct derivabil în origine.

36. Să se calculeze

37. Să se calculeze

a) $f(x, y, z) =$

38. Înlocuind cu aproximație:

a) $\sqrt{1,02^3 + 1}$

39. Cu cât va crește volumul unei cilindrică, de diametru d , dacă se rează x cu 5 mm?

40. Măsurând $x \pm 0,1$ m, $y = 4,0$ m, calculat volumul

41. O cutie dreptunghiulară are $y = 8$ cm și $z =$ cm. Calculați motiv volumul

42. Fie funcția $f(x, y, z)$ parțiale de ordin

43. Să se calculeze $f'_x(x, y) = (x^2 + y^2) e^{x^2 + y^2}$ și $f'_y(x, y) = 2xy e^{x^2 + y^2}$, $x \neq -1, y \neq 0$

44. Dacă $\Delta f(x, y) =$

a) $f(x, y) = x^2 - y \cos y$, $(x, y) \neq (0, 0)$

45. Să se verifice dacă face ecuația lui

46. Să se calculeze

a) $\varphi(u, v) =$

b) $\varphi(u, v) =$

c) $\varphi(u, v) =$

47. Să se calculeze $df(x, y)$ și $y = \varphi(x)$.

35. Se definește o aplicație $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ prin $f(0, 0) = 0$, $f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$. Să se arate că f este diferențiabilă pe \mathbf{R}^2 . Să se arate că f admite în orice punct derivate parțiale de ordinul doi. Să se arate că f''_{xy} și f''_{yx} nu sînt continue în origine.

36. Să se calculeze $df(3, 4, 5)$, dacă $f(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

37. Să se calculeze d^2f , dacă :

a) $f(x, y, z) = xyz$; b) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

38. Înlocuind variația unei funcții prin diferențiala acesteia, să se calculeze cu aproximație :

a) $\sqrt{1,02^3 + 1,97^3}$; b) $1,002 \cdot 2,003^2 \cdot 3,004^3$; c) $\sin 29^\circ \cdot \operatorname{tg} 46^\circ$.

39. Cu cît variază volumul și aria totală a unei cutii de conserve, de formă cilindrică, de dimensiuni : raza $x = 12$ cm și înălțimea $y = 6$ cm, dacă se micșorează x cu 5 mm, iar y se mărește cu 2 mm ?

40. Măsurînd raza bazei x și înălțimea y a unui cilindru, s-a obținut : $x = 2,5$ m $\pm 0,1$ m, $y = 4,0$ m $\pm 0,2$ m. Cu ce eroare absolută și cu ce eroare relativă poate fi calculat volumul acestui cilindru ?

41. O cutie paralelipipedică închisă are dimensiunile exterioare $x = 10$ cm, $y = 8$ cm și $z = 6$ cm și grosimea peretelui este de 2 mm. Să se determine aproximativ volumul materialului necesar construirii acestei cutii.

42. Fie funcția $f(x, y, z) = e^{ax+by+cz}$, $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul n și diferențiala de ordinul n .

43. Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul n pentru funcțiile : a) $f(x, y) = (x^2 + y^2) e^{x+y}$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$; b) $f(x, y) = x e^{2x+3y}$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$; c) $f(x, y) = \frac{1}{y(1+x)}$, $x \neq -1$, $y \neq 0$; d) $f(x, y) = \ln(x+y)$, $x+y > 0$.

44. Dacă $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ este operatorul lui Laplace, să se calculeze Δf , pentru

a) $f(x, y) = \ln \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}$, $(x, y) \neq (a, b)$; b) $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} e^x (x \sin y - y \cos y)$, $(x, y) \neq (0, 0)$; c) $f(x, y) = e^x [(x^2 - y^2) \cos y - 2xy \sin y]$.

45. Să se verifice că funcția $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ satisface ecuația lui Laplace $\Delta f \equiv f''_{xx} + f''_{yy} + f''_{zz} = 0$.

46. Să se calculeze $\frac{df}{dx}$, dacă $f(x) = \varphi(u(x), v(x))$, pentru :

a) $\varphi(u, v) = u + uv$, $u(x) = \cos x$, $v(x) = \sin x$;

b) $\varphi(u, v) = e^{u-2v}$, $u(x) = x^2$, $v(x) = x^2 - 2$;

c) $\varphi(u, v) = u^v$, $u(x) = \sin x$, $v(x) = \cos x$.

47. Să se calculeze $\frac{\partial f}{\partial x}$ și $\frac{df}{dx}$, dacă a) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ și $y = x^2$; b) $f(x, y) = x^y$ și $y = \varphi(x)$.

48. Să se calculeze $\frac{df}{dx}$, dacă $f(x) = \varphi(u(x), v(x), w(x))$, pentru
- $\varphi(u, v, w) = uvw$, $u(x) = x^2 + 1$, $v(x) = \ln x$, $w(x) = \operatorname{tg} x$;
 - $\varphi(u, v, w) = \frac{w}{\sqrt{u^2 + v^2}}$, $u(x) = R \cos x$, $v(x) = R \sin x$, $w(x) = h$.
49. Să se calculeze f'_x și f'_y pentru $f(x, y) = \varphi(u(x, y), v(x, y))$, unde
- $f = \varphi(u, v)$, $u(x, y) = x + y$, $v(x, y) = x^2 + y^2$;
 - $f = \varphi(u, v)$, $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = e^{xy}$.
50. Să se calculeze df și d^2f , dacă: a) $f(x, y) = \varphi\left(\frac{x}{y}, xy\right)$; b) $f(x, y) = \varphi(x + y, x - y)$; c) $f(x, y, z) = \varphi(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2)$.
- ✧ 51. Să se arate că:
- $f(x, y) = y\varphi(x^2 - y^2)$ verifică ecuația $\frac{1}{x}f'_x + \frac{1}{y}f'_y = \frac{1}{y^2}f$;
 - $f(x, y) = xy + x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ verifică ecuația $xf'_x + yf'_y = xy + f$;
 - $f(x, y) = e^y \varphi\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$ verifică ecuația $(x^2 - y^2)f'_x + xyf'_y = xyf$;
 - $f(x, y) = \varphi(xy) + \sqrt{xy}\psi\left(\frac{y}{x}\right)$ verifică ecuația $x^2f''_{xx} - y^2f''_{yy} = 0$;
 - $f(x, y) = xy\varphi(x^2 - y^2)$ verifică ecuația $xy^3f'_x + x^3yf'_y = (x^2 + y^2)f$.
52. Ce devine ecuația $x^2f''_{xx} - y^2f''_{yy} = 0$, dacă $f(x, y) = \varphi\left(xy, \frac{y}{x}\right)$?
53. Să se calculeze expresia $E = f''_{xx} + f''_{xy} + f''_{yy}$, dacă $f(u, v) = \ln(u^2 + v^2)$, unde $u(x, y) = xy$ și $v(x, y) = x^2 - y^2$.
54. Să se calculeze $\frac{df}{dx}$, dacă $f = \varphi(x, u, v)$, unde $u = \psi_1(x)$, $v = \psi_2(x, u)$.
55. Să se calculeze f''_{xx} , f''_{xy} și f''_{yy} , dacă $f = \varphi(u, v)$, unde $u(x, y) = x^2 + y^2$ și $v(x, y) = xy$.
56. Să se scrie formula lui Taylor, pentru:
- $f(x, y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$, în punctul $(-2, 1)$;
 - $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - yz - 4x - 3y - z + 4$, în punctul $(1, 1, 1)$.
57. Să se dezvolte $f(x + h, y + k, z + l)$ după puterile întregi ale lui h, k și l , dacă $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$.
58. Folosind formula lui Taylor de ordinul doi, să se calculeze valoarea aproximativă pentru a) $(0,95)^{2,01}$; b) $1,02 \cdot 2,01^2 \cdot 3,03^3$.
59. Să se scrie formula lui Taylor de ordinul trei pentru funcția $f(x, y) = e^x \sin y$, în origine.
60. Considerînd că $|x|$, $|y|$ și $|z|$ sînt suficient de mici astfel încît puterile de ordin superior lui unu să poată fi neglijate, să se aproximeze funcția $f(x, y, z) = (1 + x)^{1/2}(1 + y + z)^{-1/2}$.

61. Folosind sînt omogene:

a) $f(x, y, z) = (x, y, z)$

b) $f(x, y, z) =$

c) $f(x, y) =$

62. Se dă funcțiile f și g de două variabilele x și y și $f = mu\varphi'_u + nu\varphi'_v$

63. Dacă funcțiile f și g oarecare, să se arate că $f = \varphi(x\psi_x + y\psi_y)$

64. Dacă funcțiile f și g să se arate că funcțiile

65. Să se calculeze $M(2, 1)$, după

✧ 66. Să se calculeze $M(1, 1, 0)$, $N(4, -2, 3)$.

67. Să se calculeze $M(x, y, z)$, după

68. Să se calculeze $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$

69. Să se calculeze $M(1, 1, 1)$, după

70. Să se calculeze $M(1, 1, 1)$, după

71. Să se calculeze

$M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ și

72. Dacă funcțiile a) grad (i)

grad r^2 și grad

73. Dacă funcțiile f și g tățile:

a) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$

c) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} f)$

61. Folosind definiția și teorema lui Euler, să se arate că următoarele funcții sînt omogene:

$$a) f(x, y, z) = (x^2 + y^2) \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + (y^2 + z^2) \operatorname{arctg} \frac{y}{z} + (z^2 + x^2) \operatorname{arctg} \frac{z}{x},$$

$$(x, y, z) \neq (0, 0, 0);$$

$$b) f(x, y, z) = \frac{(ax + by + cz)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, (x, y, z) \neq (0, 0, 0);$$

$$c) f(x, y) = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + y^n \psi\left(\frac{y}{x}\right), x \neq 0, n \in \mathbb{Z}.$$

62. Se dă funcția compusă $f(x, y) = \varphi(u, v, w)$, unde u, v, w sînt funcții de variabilele x și y , omogene de gradul m, n și p , respectiv. Să se arate că $xf'_x + yf'_y = mu\varphi'_u + nv\varphi'_v + pw\varphi'_w$.

63. Dacă funcția $\varphi(x, y)$ este omogenă de gradul n , iar $\psi(x, y)$ este o funcție oarecare, să se arate că funcția $f(x, y) = \varphi(x, y)\psi(x, y)$ verifică relația $xf'_x + yf'_y = \varphi(x\psi'_x + y\psi'_y + n\psi)$.

64. Dacă $\varphi(x, y)$ și $\psi(x, y)$ sînt funcții omogene de gradele m și n respectiv, să se arate că funcția $f(x, y) = \varphi(x, y)e^{\psi(x, y)}$ verifică relația $xf'_x + yf'_y = \varphi e^\psi(m + n\psi)$.

65. Să se calculeze derivata funcției $f(x, y) = 5x^2 - 3x - y - 1$ în punctul $M(2, 1)$, după direcția \overrightarrow{MN} , unde $N(5, 5)$.

66. Să se calculeze derivata funcției $f(x, y, z) = 2x^3 - 3y^2 + 6xyz$ în punctul $M(1, 1, 0)$, după direcțiile axelor de coordonate, apoi după direcția \overrightarrow{MN} , $N(4, -2, 3)$.

67. Să se calculeze derivata funcției $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ în punctul $M(x, y, z)$, după direcția vectorului de poziție \mathbf{r} al acestui punct.

68. Să se găsească condiția ca derivata funcției $f(x, y, z) = \frac{1}{r}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, după direcția $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, să fie egală cu zero.

69. Să se calculeze derivata funcției $f(x, y, z) = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, în punctul $M(1, 1, 1)$, după direcția \overrightarrow{MN} , știind că $N(2, 3, -2)$.

70. Să se calculeze derivata funcției $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, în punctul $M(1, 1, 1)$, după direcția $\mathbf{l}(1, 1, 1)$.

71. Să se calculeze unghiul gradientilor funcției $f(x, y) = \ln \frac{y}{x}$ în punctele $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ și $N(1, 1)$.

72. Dacă $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, să se calculeze:

a) $\operatorname{grad}(\mathbf{i} \cdot \mathbf{r})$; b) $\operatorname{div} \mathbf{r}$ și $\operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$; c) $\operatorname{rot} \mathbf{r}$, $\operatorname{rot}(\mathbf{i} \times \mathbf{r})$ și $\operatorname{rot} \left(f(\mathbf{r}) \frac{\mathbf{r}}{r}\right)$; d) $\operatorname{grad} r$, $\operatorname{grad} r^2$ și $\operatorname{grad} \frac{1}{r}$.

73. Dacă f, g și v sînt funcții de variabilele x, y, z , să se demonstreze identitățile:

$$a) \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \Delta f; \quad b) \Delta(fg) = g\Delta f + f\Delta g + 2 \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g;$$

$$c) \operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{v}) = 0; \quad d) \operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \mathbf{0}, \Delta \text{ fiind operatorul lui Laplace.}$$

74. Să se determine punctele de extrem local pentru funcțiile :

a) $f(x, y) = -2x^2 + 2xy - 5y^2 + 6x + 6y, (x, y) \in \mathbb{R}^2$;

b) $f(x, y) = (x + 1)(y + 1)(x + y), (x, y) \in \mathbb{R}^2$;

c) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2, (x, y) \in \mathbb{R}^2$;

d) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y, (x, y) \in \mathbb{R}^2$;

e) $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 - ex - fy, (x, y) \in \mathbb{R}^2$;

f) $f(x, y) = x^3y^2(a - x - y), x > 0, y > 0, a > 0$;

g) $f(x, y) = xy^2e^{x-y}, x < 0$;

h) $f(x, y) = xy \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^{1/2}, a > 0, b > 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$;

i) $f(x, y) = e^{2x+3y} (x^2 + y^2), x \geq 0, y \geq 0$;

j) $f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}, x > 0, y > 0$;

k) $f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2), (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$;

l) $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y), x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

75. Să se determine punctele de extrem pentru funcțiile :

a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;

b) $f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}, x > 0, y > 0, z > 0$;

c) $f(x, y, z) = x^2 + (x-1)^2 + (x+1)^2 + y^2 + (y-2)^2 + (y+2)^2 + z^2 + (z-3)^2 + (z+3)^2, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;

d) $f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{16}, x > 0, y > 0, z > 0$;

e) $f(x, y, z) = ax^2 - bxy + xz + yz, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

76. Fiind dată capacitatea $V = \frac{a^3}{2}$ pentru un bazin paralelipipedic, să se determine dimensiunile sale astfel încât să se întrebuițeze minim de material (suprafață minimă) pentru construcția sa.

77. Să se înscrie într-un con circular drept un paralelipiped dreptunghic de volum maxim.

78. Să se determine un punct $M(x, y, z)$ pentru care suma pătratelor distanțelor sale la n puncte fixe $M_i(a_i, b_i, c_i), i = 1, 2, \dots, n$, este minimă.

79. Să se determine extremele funcției a) $f(x, y, z) = xy^2z^3(7 - x - 2y - 3z), xyz \neq 0$; b) $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$; c) $f(x, y, z) = (x + z^2)e^{z(y^2+z^2+1)}, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

8.3. Funcții definite implicit. Schimbări de variabilă

Funcții definite implicit. Teorema 1. Fie funcția $F: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, unde D este dreptunghiul $x_0 - a < x < x_0 + a, y_0 - b < y < y_0 + b$, astfel că $F(x_0, y_0) = 0$. Presupunem că funcția $F(x, y)$ admite derivate parțiale continue în D și că $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. În aceste condiții există un interval

$(x_0 - h, x_0 + h)$
continuă în
intervalul $(x_0 - h, x_0 + h)$

Teorema
 $i = 1, 2, \dots, n$
 x_1, \dots, x_n
condiții extinse
 $f: \pi \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
b) $F(x_1, x_2)$
parțial de

Teorema
 $k = 1, 2, \dots, n$
 $y_j^0 - b < y_j < y_j^0 + b$
 $k = 1, 2, \dots, n$
parțial de

în punctul
 $\langle x_i, y_i \rangle$
avind propriu
și sint con

$F_i(x_i, y_i)$
c) func
culează prin
de m ecua
Depend
definite și
într-o subm

satisfăcută
valorile lor
Relația (4)
a lui D nu
Pentru
lui Jacobi

$(x_0 - h, x_0 + h)$ și o funcție unică $f: (x_0 - h, x_0 + h) \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietățile: a) $f(x_0) = y_0$ și f este continuă în $(x_0 - h, x_0 + h)$; b) $F(x, f(x)) = 0, \forall x \in (x_0 - h, x_0 + h)$; c) f este derivabilă în intervalul $(x_0 - h, x_0 + h)$ și

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}, \forall x \in (x_0 - h, x_0 + h). \quad (1)$$

Teorema 2. Fie funcția $F: D \subset \mathbb{R}^{p+1} \rightarrow \mathbb{R}$, unde D este paralelipipedul $x_i^0 - a < x_i < x_i^0 + a, i = 1, 2, \dots, p, y_0 - b < y < y_0 + b$ și fie $F(x_1^0, x_2^0, \dots, x_p^0; y_0) = 0$. Presupunem că funcția $F(x_1, x_2, \dots, x_p; y)$ admite derivate parțiale continue în D și că $F'_y(x_1^0, x_2^0, \dots, x_p^0; y_0) \neq 0$. În aceste condiții există un paralelipiped $\pi: x_i^0 - h < x_i < x_i^0 + h, i = 1, 2, \dots, p$, și o funcție unică $f: \pi \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, având proprietățile: a) $f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_p^0) = y_0$ și f este continuă în paralelipipedul π ; b) $F(x_1, x_2, \dots, x_p; f(x_1, x_2, \dots, x_p)) = 0, \forall (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \pi$; c) funcția f admite derivate parțiale de ordinul întâi continue în π și

$$f'_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_p) = -\frac{F'_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_p; y)}{F'_y(x_1, x_2, \dots, x_p; y)}, i = 1, 2, \dots, p. \quad (2)$$

Teorema 3. Presupunem că este dat sistemul de funcții $F_k = F_k(x_1, x_2, \dots, x_p; y_1, y_2, \dots, y_m), k = 1, 2, \dots, m$, definite în paralelipipedul $D \subset \mathbb{R}^{p+m}, x_i^0 - a < x_i < x_i^0 + a, i = 1, 2, \dots, p, y_j^0 - b < y_j < y_j^0 + b, j = 1, 2, \dots, m$, astfel că $F_k(x_1^0, x_2^0, \dots, x_p^0; y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0) = 0, k = 1, 2, \dots, m$. Presupunem de asemenea că funcțiile $F_k, k = 1, 2, \dots, m$, au toate derivatele parțiale de ordinul întâi continue în D și că determinantul funcțional (jacobianul)

$$J'_a = \frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)'_a}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)} = \begin{vmatrix} (F_1)'_{y_1} & (F_1)'_{y_2} & \dots & (F_1)'_{y_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (F_m)'_{y_1} & (F_m)'_{y_2} & \dots & (F_m)'_{y_m} \end{vmatrix} \neq 0$$

în punctul $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_p^0; y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0)$. În aceste condiții există un paralelipiped $\pi: x_i^0 - h < x_i < x_i^0 + h, i = 1, 2, \dots, p$, și un sistem de m funcții $f_k: \pi \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}, k = 1, 2, \dots, m$, unic, având proprietățile: a) funcțiile implicite f_k satisfac condițiile $f_k(x_1^0, x_2^0, \dots, x_p^0) = y_k^0, k = 1, 2, \dots, m$, și sînt continue în paralelipipedul π ; b) funcțiile implicite satisfac condițiile

$$F_k(x_1, x_2, \dots, x_p; f_1(x_1, x_2, \dots, x_p), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_p)) = 0, k = 1, 2, \dots, m, \text{ în } \pi; \quad (3)$$

c) funcțiile implicite admit derivate parțiale de ordinul întâi continue în π și acestea se calculează prin derivarea în raport cu $x_i, i = 1, 2, \dots, p$, a identităților (3). Se obține astfel un sistem de m ecuații liniare în necunoscutele $(f'_j)_{x_i}, j = 1, 2, \dots, m$, al cărui determinant este J .

Dependență funcțională. Să considerăm sistemul de funcții $y_k = f_k(x_1, x_2, \dots, x_p), k = 1, 2, \dots, m$, definite și continue împreună cu derivatele lor în mulțimea deschisă $D \subset \mathbb{R}^p$. Dacă în D sau într-o submulțime a sa are loc o relație de forma

$$y_j = \varphi(y_1, y_2, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_m), \quad (4)$$

satisfăcută identic relativ la (x_1, x_2, \dots, x_p) atunci cînd funcțiile $y_i, i = 1, 2, \dots, m$, se înlocuiesc prin valorile lor, spunem că funcțiile y_i sînt funcțional dependente în mulțimea în care relația (4) are loc. Relația (4) poate fi mai generală, de forma $\Phi(y_1, y_2, \dots, y_m) = 0$. În cazul cînd în nici o submulțime a lui D nu avem o astfel de relație, cele m funcții se numesc funcțional independente.

Pentru studiul dependenței funcționale a sistemului de funcții considerat se introduce matricea lui Jacobi

$$\begin{pmatrix} (y_1)'_{x_1} & (y_1)'_{x_2} & \dots & (y_1)'_{x_p} \\ (y_2)'_{x_1} & (y_2)'_{x_2} & \dots & (y_2)'_{x_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (y_m)'_{x_1} & (y_m)'_{x_2} & \dots & (y_m)'_{x_p} \end{pmatrix}$$

Da-că rangul matricii lui Jacobi este $r \geq 1$ în punctul $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_p^0)$, atunci există o vecinătate V a punctului M_0 astfel încît r funcții din cele m sînt independente funcțional în V , celelalte fiind dependente de acestea.

Extreme cu legături. Dacă se cere să se determine extremele funcției $y = f(x_1, x_2, \dots, x_p)$, în care variabilele x_1, x_2, \dots, x_p sînt supuse unor legături de forma

$$\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0, \dots, \varphi_q(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0,$$

$q < p$, se construiește funcția lui Lagrange

$$L(x_1, x_2, \dots, x_p) = f(x_1, x_2, \dots, x_p) + \lambda_1 \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_p) + \dots + \lambda_q \varphi_q(x_1, x_2, \dots, x_p),$$

unde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$ sînt multiplicatorii lui Lagrange. Se formează apoi sistemul de $p + q$ ecuații

$$dL(x_1, x_2, \dots, x_p; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q) = 0, \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0, \dots, \varphi_q(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0$$

cu $p + q$ necunoscute $x_1, x_2, \dots, x_p, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$.

O condiție suficientă de extrem este ca $d^2L(x_1, x_2, \dots, x_p)$ să păstreze semn constant. Dacă d^2L este pozitiv definită, atunci funcția f are un punct de minim, iar dacă d^2L este negativ definită, funcția f are un punct de maxim condiționat.

8.3.1. Probleme rezolvate

1. Să se calculeze $f'(1)$ și $f''(1)$ pentru funcția implicită $y = f(x)$, definită prin ecuația $(x^2 + y^2)^3 - 3(x^2 + y^2) - 2 = 0$, satisfăcînd condiția $f(1) = 1$.

Rezolvare. Condițiile teoremei 1 sînt îndeplinite. Aplicînd această teoremă, după formula (1) obținem

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = -\frac{6x(x^2 + y^2)^2 - 6x}{6y(x^2 + y^2)^2 - 6y} = -\frac{x}{y},$$

astfel că $f'(1) = -1$. Pentru determinarea lui $f''(1)$ derivăm relația de mai înainte încă o dată în raport cu x , considerînd că $y = f(x)$. Obținem

$$f''(x) = (f'(x))'_x = -\left(\frac{x}{y}\right)' = -\frac{y - xy'}{y^2}.$$

Înlocuind aici pe y' obținut anterior, găsim

$$f''(x) = -\frac{1}{y^2} \left(y + x \cdot \frac{x}{y} \right) = -\frac{1}{y^3} (x^2 + y^2),$$

astfel că $f''(1) = -2$.

★ 2. Se consideră funcția $y = f(x)$, definită implicit prin relația $x^2 + y^2 + 2axy = 0$; $a > 1$. Să se arate că $f''(x) = 0$ și să se justifice rezultatul.

Rezolvare. Pentru calculul lui $f'(x)$ se poate aplica formula (1). Aici vom aplica însă altă metodă. Deoarece $y = f(x)$ trebuie să verifice relația $x^2 + y^2 + 2axy = 0$, rezultă că $x^2 + f^2(x) + 2axf(x) = 0$. Derivînd această ultimă identitate, obținem $2x + 2f(x)f'(x) + 2af(x) + 2axf'(x) = 0$, de unde deducem

$$f'(x) = -\frac{x + af(x)}{ax + f(x)}.$$

Derivând această ultimă relație încă o dată și înlocuind $f'(x)$, obținem

$$f''(x) = - \frac{[1 + af'(x)][ax + f(x)] - [a + f'(x)][x + af(x)]}{[ax + f(x)]^2} =$$

$$= (a^2 - 1) \cdot \frac{f(x) - xf'(x)}{[ax + f(x)]^2} = \frac{a^2 - 1}{[ax + f(x)]^2} [x^2 + f^2(x) + 2axf(x)].$$

Ținând seama de identitatea $x^2 + f^2(x) + 2axf(x) = 0$, rezultă $f''(x) = 0$. Să justificăm acum acest rezultat. Rezolvând relația de definiție în privința lui y , obținem soluția $y = x(-a \pm \sqrt{a^2 - 1})$, ceea ce arată că $y'' = 0$.

3. Să se determine punctele de extrem ale funcției implicite $y = f(x)$, definită prin :

a) $x^2 - 2xy + 5y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$; b) $x^3 + y^3 - 3x^2y - 3 = 0$.

Rezolvare. a) Deoarece $f'(x) = - \frac{F'_x}{F'_y} = - \frac{2x - 2y - 2}{-2x + 10y + 4}$, rezultă că punctele staționare ale funcției $f(x)$ sînt soluții ale sistemului $2x - 2y - 2 = 0$, $x^2 - 2xy + 5y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$. Rezolvînd acest sistem, obținem $x = 1$, $y = 0$ și $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$. Deoarece

$$f''(x) = (f'(x))' = - \frac{[1 - f'(x)][-x + 5f(x) + 2] - [x - f(x) - 1][-1 + 5f'(x)]}{[-x + 5f(x) + 2]^2},$$

rezultă că $f''(1) = -1 < 0$ și deci punctul $x = 1$ este un punct de maxim. Deoarece $f''\left(\frac{1}{2}\right) = 1 > 0$

rezultă că $x = \frac{1}{2}$ este un punct de minim.

b) În acest caz, $f'(x) = - \frac{3x^2 - 6xy}{3y^2 - 3x^2}$, astfel că punctele staționare satisfac ecuațiile $3x^2 - 6xy = 0$

și $x^3 + y^3 - 3x^2y - 3 = 0$. Soluțiile acestui sistem sînt $x = 0$, $y(0) = \sqrt[3]{-3}$ și $x = -2$, $y(-2) = -1$. Calculînd $f''(x)$, obținem

$$f''(x) = \frac{2y^3 + 2x^2y - 2xy^2 + 2x(xy - x^2 - y^2)y'}{(x^2 - y^2)^2}.$$

Deoarece $f''(0) = 2\sqrt[3]{3} > 0$, rezultă că punctul $x = 0$ este un punct de minim. Apoi $f''(-2) = -\frac{2}{3} < 0$, astfel că $x = -2$ este un punct de maxim.

4. Să se calculeze $f'_x(1, 0)$ și $f'_y(1, 0)$ pentru funcția $z = f(x, y)$, definită implicit prin $x \cos y + y \cos z + z \cos x - 1 = 0$, satisfăcînd condiția $f(1, 0) = 0$.

Rezolvare. Sînt îndeplinite condițiile teoremei 2. În acest caz relațiile (2) se scriu

$$f'_x(x, y) = - \frac{F'_x(x, y; z)}{F'_z(x, y; z)}, \quad f'_y(x, y) = - \frac{F'_y(x, y; z)}{F'_z(x, y; z)}. \quad (5)$$

Folosind aceste relații, obținem

$$f'_x(x, y) = - \frac{\cos y - z \sin x}{-y \sin z + \cos x}, \quad f'_y(x, y) = - \frac{-x \sin y + \cos z}{-y \sin z + \cos x},$$

astfel că $f'_x(1, 0) = -\frac{1}{\cos 1}$, $f'_y(1, 0) = -\frac{1}{\cos 1}$.

5. Să se arate că dacă funcția $z = f(x, y)$ este definită implicit prin $(y + z) \sin z - y(x + z) = 0$, atunci este satisfăcută ecuația $z \sin z \cdot z'_x - y^2 \cdot z'_y = 0$.

Rezolvare. Folosind relațiile (5), obținem

$$z'_x = \frac{y}{(y+z)\cos z + \sin z - y}, \quad z'_y = \frac{x+z - \sin z}{(y+z)\cos z + \sin z - y}$$

astfel că

$$z \sin z \cdot z'_x - y^2 \cdot z'_y = \frac{y[z \sin z - y(x+z - \sin z)]}{(y+z)\cos z + \sin z - y} = \frac{y[(y+z)\sin z - y(x+z)]}{(y+z)\cos z + \sin z - y} = 0$$

în baza relației de definiție a funcției $z = f(x, y)$.

6. Să se calculeze dz și d^2z în punctul $M_0(2, 0, 1)$ pentru funcția $z = f(x, y)$, definită implicit prin $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z + 8 = 0$.

Rezolvare. Ținând seama că $dz = z'_x dx + z'_y dy$ și $d^2z = z''_{xx}(dx)^2 + 2z''_{xy} dx dy + z''_{yy}(dy)^2$, rezultă că este suficient să calculăm derivatele parțiale de ordinul unu și doi ale funcției. În baza relației (5), obținem

$$z'_x = \frac{8z - 4x}{2z - 8x - 1}, \quad z'_y = \frac{-4y}{2z - 8x - 1}$$

Derivând aceste relații în raport cu x și y și ținând seama că $z = f(x, y)$, deducem

$$z''_{xx} = \frac{56z + 4 - (56x + 8)z'_x}{(2z - 8x - 1)^2} = \frac{112(z^2 + 2x^2 - 8xz - z) - 4}{(2z - 8x - 1)^3}$$

$$z''_{xy} = \frac{8y(z'_x - 4)}{(2z - 8x - 1)^2} = \frac{32y(7x + 1)}{(2z - 8x - 1)^3}, \quad z''_{yy} = \frac{(-8z + 32x + 4)(2z - 8x - 1) - 32y^2}{(2z - 8x - 1)^3}$$

Deoarece $z'_x(M_0) = z'_y(M_0) = 0$, rezultă $dz(M_0) = 0$. Apoi, $z''_{xx}(M_0) = \frac{4}{15}$, $z''_{xy}(M_0) = 0$, $z''_{yy}(M_0) = -\frac{4}{15}$, astfel că $d^2z(M_0) = \frac{4}{15} [(dx)^2 + (dy)^2]$.

Problema poate fi rezolvată mai simplu astfel. Considerând că $z = f(x, y)$, prin diferențierea relației de definiție obținem

$$4xdx + 4ydy + 2zdz - 8xdx - 8zdx - dz = 0, \quad (6)$$

$$dz = \frac{(8z - 4x)dx - 4ydy}{2z - 8x - 1}$$

În punctul M_0 avem $dz(M_0) = 0$. Diferențiind relația (6) încă o dată, observând că dx și dy sînt constante și dz este o funcție, obținem

$$4(dx)^2 + 4(dy)^2 + 2(dz)^2 + 2zd^2z - 8dxdz - 8zd^2z - 8dzdx - d^2z = 0.$$

Din această relație deducem

$$d^2z = \frac{1}{2z - 8x - 1} [16dxdz - 4(dx)^2 - 4(dy)^2 - 2(dz)^2],$$

astfel că în punctul M_0 avem $d^2z(M_0) = \frac{4}{15} [(dx)^2 + (dy)^2]$.

7. Funcțiile $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$ sînt definite implicit prin relațiile $u + v = x + y$, $xu + yv = 1$. Să se calculeze u'_x , u'_y , v'_x și v'_y .

Rezolvare. Derivând cele două relații în raport cu x , obținem sistemul $u'_x + v'_x = 1$, $xu'_x + yv'_x = -u$, cu necunoscutele u'_x și v'_x . Rezolvînd acest sistem, obținem $u'_x = \frac{u+y}{y-x}$, $v'_x = \frac{u+x}{x-y}$.

Derivând acum cele două relații de definiție în raport cu y , obținem sistemul $u'_y + v'_y = 1$, $xu'_y + yv'_y = -v$, care determină

$$u'_y = \frac{v+y}{y-x}, \quad v'_y = \frac{v+x}{x-y}.$$

Pentru determinarea acestor derivate parțiale putem folosi și următoarea metodă. Prin diferențierea relațiilor de definiție obținem sistemul $du + dv = dx + dy$, $xdu + ydv = -udx - vdy$, care, rezolvat în raport cu du și dv , dă

$$du = \frac{u+y}{y-x} dx + \frac{v+y}{y-x} dy \quad \text{și} \quad dv = \frac{u+x}{x-y} dx + \frac{v+x}{x-y} dy.$$

Deoarece $du = u'_x dx + u'_y dy$ și $dv = v'_x dx + v'_y dy$, prin identificarea cu relațiile de mai sus, obținem expresiile pentru u'_x , u'_y , v'_x și v'_y .

8. Funcțiile $y = f(x)$ și $z = g(x)$ sînt definite implicit prin relațiile $xyz = a$, $x + y + z = b$. Să se calculeze dy , dz , d^2y și d^2z .

Rezolvare. Prin diferențierea relațiilor de definiție, știind că x este variabilă independentă, iar y și z sînt funcții de x , obținem $yzdx + xzdy + xydz = 0$, $dx + dy + dz = 0$. Rezolvînd aceste ecuații în privința necunoscutelor dy și dz , obținem

$$dy = \frac{y(x-z)}{x(z-y)} dx, \quad dz = \frac{z(x-y)}{x(y-z)} dx.$$

Diferențiînd aceste ultime relații și ținînd seama că $d(dx) = 0$, obținem

$$\begin{aligned} d^2y &= \frac{dx}{x^2(z-y)^2} \{x(z-y)[(x-z)dy + y(dx-dz)] - y(x-z)[(z-y)dx + x(dz-dy)]\} = \\ &= \frac{dx}{x^2(z-y)^2} \{yz(z-y)dx + xz(x-z)dy + xy(y-x)dz\} = \frac{yz}{x^2(z-y)^3} \{(z-y)^2 + (x-z)^2 + \\ &\quad + (x-y)^2\}(dx)^2 \quad \text{și} \quad d^2z = -d^2y. \end{aligned}$$

9. Fie funcția compusă $z = f(x, y)$ definită de $z = u^3 + v^3$, funcțiile $u(x, y)$ și $v(x, y)$ fiind definite implicit prin relațiile $u + v^2 = x$ și $u^2 + v^2 = y$. Să se calculeze z'_x și z'_y .

Rezolvare. Folosind regulile de derivare a funcțiilor compuse, avem

$$z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x, \quad z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y.$$

Dar $z'_u = 3u^2$ și $z'_v = 3v^2$. Pentru calculul derivatelor parțiale u'_x , u'_y și v'_x , v'_y diferențiem relațiile de definiție. Obținem sistemul $du + 2vdv = dx$, $2udu + 2vdv = dy$, care rezolvat conduce la soluția $du = \frac{1}{1-2u}(dx - dy)$ și $dv = -\frac{u}{v(1-2u)} dx + \frac{1}{2v(1-2u)} dy$. Astfel avem

$$u'_x = \frac{1}{1-2u}, \quad u'_y = -\frac{1}{1-2u}, \quad v'_x = -\frac{u}{v(1-2u)}, \quad v'_y = \frac{1}{2v(1-2u)},$$

incît

$$z'_x = \frac{3u(u-v)}{1-2u}, \quad z'_y = \frac{3}{1-2u} \left(-u^2 + \frac{v}{2} \right).$$

10. Să se calculeze dz , dacă $z = uv$, $x = e^{u+v}$ și $y = e^{u-v}$.

Rezolvare. Avem $dz = d(uv) = vdu + u dv$. Diferențiînd relațiile care definesc funcțiile $u(x, y)$ și $v(x, y)$, obținem $dx = (du + dv)e^{u+v}$, $dy = (du - dv)e^{u-v}$ sau $du + dv = \frac{1}{x} dx$, $du - dv = \frac{1}{y} dy$.

$$= \frac{1}{y} dy. \text{ Deci } du = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} dx + \frac{1}{y} dy \right), dv = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} dx - \frac{1}{y} dy \right) \text{ astfel c\^a } dz = \frac{v}{2} \left(\frac{1}{x} dx + \frac{1}{y} dy \right) + \frac{u}{2} \left(\frac{1}{x} dx - \frac{1}{y} dy \right) = \frac{1}{2x} (v+u) dx + \frac{1}{2y} (v-u) dy.$$

11. Fie funcția $z = f(x, y)$ definită implicit prin $z e^z = x e^x + y e^y$. Să se calculeze u'_x și u'_y dacă $u = \frac{(x+z)}{(y+z)}$.

Rezolvare. Diferențiind relația de definiție a funcției implicite $z = f(x, y)$ obținem $(z+1)e^z dz = (x+1)e^x dx + (y+1)e^y dy$, de unde $dz = \frac{x+1}{z+1} e^{x-z} dx + \frac{y+1}{z+1} e^{y-z} dy$. Apoi, folosind această relație, avem

$$du = d \left(\frac{x+z}{y+z} \right) = \frac{(y+z)(dx+dz) - (x+z)(dy+dz)}{(y+z)^2} = \frac{(y+z)dx - (x+z)dy}{(y+z)^2} + \frac{y-x}{(y+z)^2} dz = \frac{1}{(y+z)^2} \left\{ \left[(y+z) + (y-x) \frac{x+1}{z+1} e^{x-z} \right] dx + \left[-(x+z) + (y-x) \frac{y+1}{z+1} e^{y-z} \right] dy \right\}.$$

Deoarece $du = u'_x dx + u'_y dy$, prin identificare obținem

$$u'_x = \frac{1}{(y+z)^2} \left[(y+z) + (y-x) \frac{x+1}{z+1} e^{x-z} \right], \quad u'_y = \frac{1}{(y+z)^2} \left[-(x+z) + (y-x) \frac{y+1}{z+1} e^{y-z} \right].$$

12. Fie funcțiile $f(x, y, z) = x + y + z$, $g(x, y, z) = x - y + z$ și $h(x, y, z) = 4(xy + yz)$ definite pe \mathbf{R}^3 . Să se cerceteze dependența funcțională a acestor funcții.

Rezolvare. Matricea funcțională a lui Jacobi

$$\begin{pmatrix} f'_x & f'_y & f'_z \\ g'_x & g'_y & g'_z \\ h'_x & h'_y & h'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4y & 4(x+z) & 4y \end{pmatrix}$$

are rangul egal cu doi. Prin urmare, cele trei funcții sînt dependente funcțional în \mathbf{R}^3 . Două dintre funcții sînt independente funcțional, f și g , a treia, h , fiind dependentă funcțional de acestea. Se verifică ușor că $h(x, y, z) = f^2(x, y, z) - g^2(x, y, z)$.

13. Fie funcțiile $f(x, y, z) = (x + y + z)^2$, $g(x, y, z) = 2x + y - 2z$ și $h(x, y, z) = 3x^2 + 2xy - 12xz - 18zy$, definite pe \mathbf{R}^3 . Să se arate că: a) funcțiile f, g, h nu sînt independente în origine; b) există o vecinătate a punctului $M_0(-1, 0, 1)$ pe care f depinde de g și h .

Rezolvare. Matricea lui Jacobi este

$$\begin{pmatrix} 2(x+y+z) & 2(x+y+z) & 2(x+y+z) \\ 2 & 1 & -2 \\ 6x+2y-12z & 2x-18z & -12x-18y \end{pmatrix}.$$

a) În origine rangul acestei matrice este unu. Deoarece funcțiile f, g și h admit derivate parțiale continue, rezultă că există o vecinătate a originii, în care funcțiile f și h sînt dependente de g . Deci funcțiile f, g, h sînt dependente în origine.

b) În punctul M_0 rangul matricii lui Jacobi este doi. Ultimele două linii ale matricii sînt liniar independente în acest punct. Aceasta arată că există o vecinătate a punctului M_0 , în care funcția f depinde de g și h .

14. Să se arate că funcțiile $y_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_p$, $y_2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2$, $y_3 = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_1x_p + x_2x_3 + \dots + x_{p-1}x_p$, definite pe \mathbf{R}^p , sînt dependente funcțional pe \mathbf{R}^p .

Rezolvare. Pentru ca funcțiile y_1, y_2 și y_3 să fie dependente funcțional, trebuie ca matricea lui Jacobi să aibă rangul mai mic decît trei. Matricea lui Jacobi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2x_1 & 2x_2 & \dots & 2x_p \\ x_2 + x_3 + \dots + x_p & x_1 + x_3 + \dots + x_p & \dots & x_1 + x_2 + \dots + x_{p-1} \end{pmatrix}$$

are linii liniar dependente (linia întii este proporțională cu suma dintre $\frac{1}{2}$ din linia a doua și linia a treia). Deci rangul nu poate fi trei, astfel că cele trei funcții sînt dependente funcțional. Legătura dintre funcții este $y_2 = y_1^2 - 2y_3$.

15. Să se determine extremele funcției $f(x, y) = x^2 + y^2 - y - x$, variabilele fiind legate prin condiția $x + y = 1$.

Rezolvare. Funcția lui Lagrange este $L(x, y) = x^2 + y^2 - y - x + \lambda(x + y - 1)$ și $dL = (2x - 1 + \lambda)dx + (2y - 1 + \lambda)dy$. Anulăm diferențiala și ținem seama de legătură: $2x - 1 + \lambda = 0$, $2y - 1 + \lambda = 0$, $x + y - 1 = 0$. Rezolvînd acest sistem, obținem $\lambda = 0$ și $x = y = \frac{1}{2}$. Deoarece

$d^2L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2(dx)^2 + 2(dy)^2$ este pozitiv definită, rezultă că punctul $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ realizează minimumul funcției $L(x, y)$. Deci punctul $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ este punct de minim condiționat pentru funcția $f(x, y)$.

16. Să se determine valoarea maximă, $\sup_D f(x, y)$, și valoarea minimă, $\inf_D f(x, y)$, pentru funcția $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3x - 2y + 1$, unde $D: x^2 + y^2 \leq 1$.

Rezolvare. Funcția $f(x, y)$ fiind continuă pe mulțimea închisă și mărginită $x^2 + y^2 \leq 1$, rezultă că ea își atinge marginile. Vom determina extremele funcției situate în interiorul cercului $x^2 + y^2 = 1$ și apoi extremele funcției situate pe frontiera cercului și vom compara valorile extreme ale funcției.

Să determinăm extremele funcției situate în interiorul cercului. Deoarece $f'_x = 2x - 3 = 0$, $f'_y = 2y - 2 = 0$ implică $x_0 = \frac{3}{2}$, $y_0 = 1$, se vede că extremele funcției nu pot fi în interiorul cer-

cului $\left(x_0^2 + y_0^2 = \frac{13}{4} > 1\right)$. Prin urmare, cu siguranță punctele de extrem ale funcției se vor găsi pe frontiera $x^2 + y^2 = 1$. Avem deci de calculat extremele funcției $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3x - 2y + 1$ cu condiția $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Funcția lui Lagrange este $L(x, y) = x^2 + y^2 - 3x - 2y + 1 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ și deci avem de rezolvat sistemul $dL = (2x - 3 + 2\lambda x)dx + (2y - 2 + 2\lambda y)dy = 0$, $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Soluțiile sistemului $2x(1 + \lambda) - 3 = 0$, $2y(1 + \lambda) - 2 = 0$, $x^2 + y^2 = 1$ sînt $\lambda_1 = -1 - \sqrt{\frac{13}{4}}$, $x_1 = -\frac{3}{\sqrt{13}}$, $y_1 = -\frac{2}{\sqrt{13}}$ și $\lambda_2 = -1 + \sqrt{\frac{13}{4}}$, $x_2 = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $y_2 = \frac{2}{\sqrt{13}}$.

Deoarece $d^2L = 2(1 + \lambda)[(dx)^2 + (dy)^2]$, se vede că aceasta este o formă pătratică definită. Pentru $\lambda_1 = -1 - \sqrt{\frac{13}{4}}$, d^2L este negativ definită și deci punctul $\left(-\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$ este un punct

de maxim pentru funcția dată. Pentru $\lambda_2 = -1 + \sqrt{\frac{13}{4}}$, d^2L este pozitiv definită și deci punctul

$\left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$ este un punct de minim pentru f .

17. Să se determine extremele funcției $f(x, y, z)$ cu legăturile indicate :
 a) $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$, variabilele fiind legate prin condiția $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $x > 0, y > 0, z > 0$; b) $f(x, y, z) = xyz$, variabilele fiind legate prin condițiile $x + y + z - 5 = 0$ și $xy + yz + zx - 8 = 0$.

Rezolvare. a) Funcția lui Lagrange este $L(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 3)$ și deci $dL = (3x^2 + 2\lambda x)dx + (3y^2 + 2\lambda y)dy + (3z^2 + 2\lambda z)dz = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0$ implică $x(3x + 2\lambda) = 0$, $y(3y + 2\lambda) = 0$, $z(3z + 2\lambda) = 0$ și $x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0$, $x > 0, y > 0, z > 0$. Rezolvând acest sistem, găsim $\lambda = -\frac{3}{2}$ și $M(1, 1, 1)$. Deoarece $d^2L = (6x + 2\lambda)(dx)^2 + (6y + 2\lambda)(dy)^2 + (6z + 2\lambda)(dz)^2$ și $d^2L(M) = 3[(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2]$ este pozitiv definită, rezultă că M este un punct de minim pentru funcția f .

b) Construim funcția lui Lagrange $L(x, y, z) = xyz + \lambda_1(x + y + z - 5) + \lambda_2(xy + yz + zx - 8)$. Apoi $dL = yz dx + xz dy + xy dz + \lambda_1(dx + dy + dz) + \lambda_2[(y + z)dx + (x + z)dy + (x + y)dz] = [yz + \lambda_1 + \lambda_2(y + z)]dx + [xz + \lambda_1 + \lambda_2(x + z)]dy + [xy + \lambda_1 + \lambda_2(x + y)]dz$.

Condițiile necesare de extrem sunt

$$yz + \lambda_1 + \lambda_2(y + z) = 0, \quad xz + \lambda_1 + \lambda_2(x + z) = 0, \quad xy + \lambda_1 + \lambda_2(x + y) = 0, \quad x + y + z - 5 = 0, \\ xy + yz + zx - 8 = 0.$$

Rezolvând acest sistem, găsim soluțiile

$$\lambda_1 = \frac{16}{9}, \quad \lambda_2 = -\frac{4}{3}, \quad \text{deci } M_1\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right), M_2\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right), M_3\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right);$$

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = -2, \quad \text{deci } M_4(2, 2, 1), M_5(2, 1, 2), M_6(1, 2, 2).$$

Calculăm d^2L ca și cum variabilele ar fi independente :

$$d^2L = 2(z + \lambda_2)dx dy + 2(x + \lambda_2)dy dz + 2(y + \lambda_2)dx dz.$$

În această expresie variațiile dx, dy și dz nu sînt independente. Diferențiind legăturile, obținem că acestea sînt legate prin $dx + dy + dz = 0$, $(y + z)dx + (z + x)dy + (x + y)dz = 0$.

Pentru $\lambda_1 = \frac{16}{9}$, $\lambda_2 = -\frac{4}{3}$ și punctul M_1 , avem

$$d^2L(M_1) = 2dx dy \text{ și } dx + dy + dz = 0, \quad \frac{11}{3}dx + \frac{11}{3}dy + \frac{8}{3}dz = 0.$$

Din ultimele două ecuații obținem $dy = -dx$ și $dz = 0$, astfel că $d^2L(M_1) = -2(dx)^2 < 0$ și deci punctul M_1 este un punct de maxim. Similar se arată că punctele M_2 și M_3 sînt puncte de maxim pentru funcția f .

Pentru $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -2$ și punctul $M_4(2, 2, 1)$, avem

$$d^2L(M_4) = -2dx dy \text{ și } dx + dy + dz = 0, \quad 3dx + 3dy + 4dz = 0.$$

Din ultimele două ecuații găsim $dy = -dx$, $dz = 0$, astfel că $d^2L(M_4) = 2(dx)^2 > 0$. Prin urmare, punctul M_4 este un punct de minim pentru funcția f . Similar, punctele M_5 și M_6 sînt puncte de minim.

18. Ce devin ecuațiile următoare, dacă se fac schimbările de variabilă indicate ?

- a) $x^3 y^{(3)} + xy' - y = 0$, $x = e^t$; b) $(1 - x^2)y'' - xy' + \omega^2 y = 0$, $x = \cos t$;
 c) $z'' - a^2 z'' = 0$, $u = y - ax$, $v = y + ax$.

Rezolvare. a) Funcția $y = f(x)$ devine o funcție compusă de t , $y = f(x(t))$. Prin urmare, $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$. Diferențiind substituția, găsim $dx = e^t dt$, astfel că $y' = \frac{dy}{dt} \cdot e^{-t}$. Apoi similar obținem

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dt} e^{-t} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} e^{-t} \right) \frac{dt}{dx} = e^{-2t} \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right),$$

$$y^{(3)} = \frac{d}{dx} y'' = \frac{d}{dt} \left\{ e^{-2t} \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) \right\} \frac{dt}{dx} = e^{-3t} \left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3 \frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} \right).$$

Înlocuind acestea în ecuație, aceasta devine

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 3 \frac{d^2y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} - y = 0.$$

b) În acest caz $dx = -\sin t dt$ și deci

$$y' = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{\sin t} \frac{dy}{dt}, \quad y'' = \frac{d}{dx} \left(-\frac{1}{\sin t} \frac{dy}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{\sin t} \frac{dy}{dt} \right) \frac{dt}{dx} =$$

$$= -\frac{1}{\sin t} \left(-\frac{1}{\sin t} \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\cos t}{\sin^2 t} \frac{dy}{dt} \right) = \frac{1}{\sin^2 t} \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{\cos t}{\sin^3 t} \frac{dy}{dt},$$

astfel că ecuația capătă forma $\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$.

c) Trebuie să înlocuim variabilele x și y cu noile variabile u și v , precum și derivatele funcției z în raport cu x și y cu derivatele funcției compuse $z = f(u, v)$ în raport cu u și v , considerate ca independente. Folosind regula de derivare a funcțiilor compuse, obținem

$$z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = -az'_u + az'_v, \quad z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = z'_u + z'_v$$

$$z''_{xx} = -a(z''_{uu})_x + a(z''_{vv})_x \quad \text{și} \quad z''_{yy} = (z''_{uu})_y + (z''_{vv})_y.$$

Aplicând din nou regula de derivare a funcțiilor compuse, avem

$$(z''_{uu})_x = (z''_{uu})'_u u'_x + (z''_{uu})'_v v'_x = -az''_{uu} + az''_{vv}, \quad (z''_{vv})_x = -az''_{uv} + az''_{vu}, \quad (z''_{uu})_y = (z''_{uu})'_u u'_y + (z''_{uu})'_v v'_y = z''_{uu} + z''_{uv}$$

$$(z''_{vv})_y = z''_{uv} + z''_{vv}.$$

Prin urmare,

$$z''_{xx} = -a(-az''_{uu} + az''_{vv}) + a(-az''_{uv} + az''_{vu}) = a^2(z''_{uu} - 2z''_{uv} + z''_{vv}), \quad z''_{yy} = z''_{uu} + 2z''_{uv} + z''_{vv},$$

care înlocuite în ecuație conduc la următoarea formă a acesteia: $z''_{uv} = 0$.

19. Să se transforme ecuația $x^2 z'_x + y^2 z'_y = z^2$, luând ca noi variabile independente $u = x$, $v = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$ și ca nouă funcție $w = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}$.

Rezolvare. Din relația de definiție a noii funcții avem

$w'_x = -\frac{1}{z^2} z'_x + \frac{1}{x^2}$ și $w'_y = -\frac{1}{z^2} z'_y$, astfel că $z'_x = -z^2 \left(w'_x - \frac{1}{x^2} \right)$ și $z'_y = -z^2 w'_y$. Înlocuind în ecuație, aceasta capătă forma $x^2 w'_x + y^2 w'_y = 0$, în care introducem noile variabile u și v . După regula de derivare a funcțiilor compuse avem

$$w'_x = w'_u u'_x + w'_v v'_x = w'_u + \frac{1}{x^2} w'_v, \quad w'_y = w'_u u'_y + w'_v v'_y = -\frac{1}{y^2} w'_v,$$

astfel că ecuația devine $w'_u = 0$.

20. Să se transforme ecuația $y'' - xy'^3 + e^y y' = 0$, considerînd y ca variabilă independentă și x ca funcție de y .

Rezolvare. Avem

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{x'} \text{ și } y'' = \frac{d}{dx} y' = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x'} \right) = \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{x'} \right) \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x'} \left(-\frac{x''}{x'^2} \right) = -\frac{x''}{x'^3}.$$

astfel că ecuația capătă forma $x'' + x - x^2 e^y = 0$.

8.3.2. Probleme propuse spre rezolvare

21. Pentru funcția $y = f(x)$, să se calculeze:

- a) $f'(1)$ și $f''(1)$, dacă $f(1) = 1$ și $x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2 = 0$;
 b) $f'(0)$ și $f''(0)$, dacă $f(0) = 1$ și $x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1 = 0$;
 c) $f'(1)$ și $f''(1)$, dacă $f(1) = 1$ și $x^3 + y^3 - x + y - 2 = 0$.

22. Să se calculeze y' și y'' pentru funcțiile $y = f(x)$, definite implicit prin următoarele ecuații:

- a) $y = x + \ln y$; b) $y = 1 + y^x$; c) $x^2 + y^2 - 2axy + 1 = 0$; d) $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \arctg \frac{y}{x}$; e) $e^y - e^x + xy = 0$; f) $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$.

23. Să se determine extremele funcției implicate $y = f(x)$, definite prin:

- a) $y^2 + 2yx^2 - 4x - 3 = 0$; b) $y^3 + x^2 - xy - 3x - y + 4 = 0$;
 c) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

24. Să se calculeze z'_x și z'_y pentru:

- a) $x = y = 2$ și $z = 0$, dacă $z = f(x, y)$ este definită prin $(x + y)e^z - xy - z = 0$;
 b) $x = y = 0$ și $z = 0$, dacă $z = f(x, y)$ satisface ecuația $z^2 - xe^y - ye^z - ze^x = 0$.

25. Să se calculeze z'_x și z'_y pentru funcția $z = f(x, y)$, definită implicit prin:

- a) $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0$; b) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$;
 c) $x \ln y + y \ln z + z \ln x - 3 = 0$; d) $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0$.

26. Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul întâi și doi ale funcției implicate $z = f(x, y)$, definite prin:

- a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$; b) $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

27. Să se calculeze dz și d^2z pentru funcția implicită $z = f(x, y)$, definită prin:

- a) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; b) $\frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y} = 0$; c) $\ln z = x + y + z - 1$.

28. Să se determine extremele funcției $z = f(x, y)$, definită implicit prin:

- a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$; b) $x^3 - y^2 - 3x + 4y + z^2 + z - 8 = 0$;
 c) $x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0$.

29. Să se

a) dacă

b) dacă

c) dacă

= bx

d) dacă

30. Pentru

- z^2 = 1, x^2

z = 1.

31. Să se

y = f(x) și

a) x^2 + y

- z^2 =

32. Func

uv = y. Să

funcții în p

33. Func

țialele de on

a) u +

c) x +

34. Să se

dacă z = uv

35. Să se

= a cos θ co

36. Să se

z' = f(x, y).

37. Să se

= xy(x + y)

este relația

38. Să se

-(x^2 - 1)

dependență

39. Să se

a) y_1 =

b) y_1 =

definite pe

c) y_1 =

d) y_1 =

ca variabilă

29. Să se arate că

- a) dacă $y(x+z) - (y+z)f(z) = 0$, atunci $z(x+z)z'_x - y(y+z)z'_y = 0$;
- b) dacă $x^2 + y^2 - 2xz - 2yf(z) = 0$, atunci $(y^2 - x^2 + 2xz)z'_x + 2y(z-x)z'_y = 0$;
- c) dacă $x^2 + y^2 + z^2 = \varphi(ax + by + cz)$, atunci $(cy - bz)z'_x + (az - cx)z'_y = bx - ay$;
- d) dacă $F(x - az, y - bz) = 0$, atunci $az'_x + bz'_y = 1$.

30. Pentru funcțiile implicite $y = f(x)$ și $z = g(x)$, definite de sistemul $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$, să se calculeze y' , z' și y'' , z'' pentru $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$.

31. Să se calculeze diferențialele de ordinul întâi și al doilea pentru funcțiile $y = f(x)$ și $z = g(x)$, definite de sistemul:

- a) $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$, $x^2 + y - z = 0$;
- b) $x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$, $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

32. Funcțiile $u(x, y)$ și $v(x, y)$ sînt definite implicit prin sistemul $u = x + y$, $uv = y$. Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul întâi și al doilea ale acestor funcții în punctul $x = 0$, $y = 1$.

33. Funcțiile $u(x, y)$ și $v(x, y)$ sînt definite implicit. Să se calculeze diferențialele de ordinul întâi și al doilea, dacă:

- a) $u + v = x$, $u - yv = 0$;
- b) $x + y + u + v = a$, $x^3 + y^3 + u^3 + v^3 = b$;
- c) $x + y + u + v - 1 = 0$, $x^2 + y^2 + u^2 + v^2 - 1 = 0$.

34. Să se calculeze: a) z'_x și z'_y dacă $z = cv$, $x = u \cos v$, $y = u \sin v$; b) z'_x și z'_y dacă $z = uv$, $x = u + v$, $y = u - v$; c) dz și d^2z , dacă $z = \frac{u}{v}$, $x = e^{u+v}$, $y = e^{u-v}$.

35. Să se calculeze z'_x și z'_y , considerînd z ca funcție de x și y , știind că $x = a \cos \theta \cos \varphi$, $y = b \sin \theta \cos \varphi$ și $z = c \sin \varphi$, a, b, c fiind constante.

36. Să se calculeze diferențialele de ordinul întâi și al doilea pentru funcția $z = f(x, y)$, definită implicit prin $F(x+z, y+z) = 0$.

37. Să se arate că funcțiile $y_1 = x + y + z$, $y_2 = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz$, $y_3 = xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x)$ sînt dependente funcțional pe \mathbb{R}^3 . Care este relația de dependență?

38. Să se arate că funcțiile $y_1 = xy - z$, $y_2 = xz + y$, $y_3 = (x^2 + 1)(y^2 + z^2) - (x^2 - 1)yz - x(y^2 - z^2)$ sînt dependente funcțional pe \mathbb{R}^3 . Care este relația de dependență funcțională?

39. Să se cerceteze dependența funcțională a funcțiilor:

- a) $y_1 = \frac{ax}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $y_2 = \frac{by}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, definite pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$;
- b) $y_1 = x + y + z$, $y_2 = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$, $y_3 = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$, definite pe \mathbb{R}^3 ;
- c) $y_1 = \frac{1}{(x-y)(x-z)}$, $y_2 = \frac{1}{(y-z)(y-x)}$, $y_3 = \frac{1}{(z-x)(z-y)}$, $x \neq y \neq z$;
- d) $y_1 = \frac{x^2}{(x-y)(x-z)}$, $y_2 = \frac{y^2}{(y-z)(y-x)}$, $y_3 = \frac{z^2}{(z-x)(z-y)}$, $x \neq y \neq z$.

40. Să se determine extremele funcției $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, variabilele fiind legate prin $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$.

41. Să se determine extremele funcției $f(x, y)$ cu legăturile indicate:

a) $f(x, y) = x^2 + y^2, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$; b) $f(x, y) = (x-1)^2 + y^2, x^2 - y^2 = 1$;

c) $f(x, y) = xy, x + y = 1$; d) $f(x, y) = x + 2y, x^2 + y^2 = 5$.

42. Să se determine extremele legate pentru funcțiile:

a) $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$ pentru $x^2 + y^2 + z^2 = 9$;

b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ pentru $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; $a > b > c > 0$;

c) $f(x, y, z) = x + 2y - 2z$ pentru $x^2 + y^2 + z^2 = 16$;

d) $f(x, y, z) = x + y + z$ pentru $x - y + z = 2, x^2 + y^2 + z^2 = 4$;

e) $f(x, y, z) = xyz$ pentru $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0$.

43. Să se determine valoarea maximă și minimă, sup f și inf f , pentru

a) $f(x, y) = 5x^2 + 3xy + y^2$ în $D: x^2 + y^2 \leq 1$;

b) $f(x, y) = x^2 + y^2$ în $D: (x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 \leq 9$;

c) $f(x, y) = x^2 - y^2$ în $D: x^2 + y^2 \leq 1$;

d) $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ în $D: 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

44. Să se transforme ecuațiile următoare, folosind schimbările de variabilă indicate:

a) $x^2 y'' + 2xy' + \frac{a^2}{x^2} y = 0, x = \frac{1}{t}$;

b) $y'' \sin^2 x + y'(\cos x + 2) \sin x + ay = 0, t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, x \in (0, \pi)$.

45. Să se transforme ecuațiile următoare, schimbând rolurile variabilelor independente și dependente între ele:

a) $xy'' + (y')^3 - y' = 0$; b) $y'' + 2y(y')^2 = 0$; c) $y'y^{(3)} - 3(y'')^2 = 0$.

46. Să se transforme următoarele ecuații, folosind noile variabile u și v :

a) $yz'_x - xz'_y = 0$, dacă $u = x, v = x^2 + y^2$;

b) $xz'_x + yz'_y - z = 0$, dacă $u = x, v = \frac{y}{x}$;

c) $x^2 z''_{xx} - y^2 z''_{yy} = 0$, dacă $u = xy, v = \frac{y}{x}$;

d) $z''_{xx} - 4z''_{xy} + 3z''_{yy} = 0$, dacă $u = 3x + y, v = x + y$;

e) $xyz''_{xy} + y^2 z''_{yy} + xz'_x + 2yz'_y = 0$, dacă $u = x, v = \frac{y}{x}$;

f) $x^2 z''_{xx} + 2xyz''_{xy} + y^2 z''_{yy} + xz'_x + yz'_y - h^2 z = 0$, dacă $u = \frac{y}{x}, v = y$.

47. Consideră să se transforme

a) $yz'_x - xz'_y$

b) $z'_y + \frac{1}{2} yz'_x$

c) $z''_{xx} + 2z'_x$

d) $(xy + z)z'_x$

e) $x(z'_x + z'_y)$

f) $z''_{xx} - 2z'_x$

48. Să se transforme ecuațiile în coordonate polare

49. Să se transforme ecuațiile în coordonate polare

50. Să se transforme ecuațiile în coordonate polare

51. Să se transforme ecuațiile în coordonate polare

$= r \sin \theta \cos \theta$

52. Să se transforme ecuațiile în coordonate polare

$xyz - c^4 = 0$

47. Considerind pe u și v ca noi variabile independente și pe w ca o nouă funcție, să se transforme următoarele ecuații :

a) $yz'_z - xz'_y = (y - x)z$, dacă $u = x^2 + y^2$, $v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ și $w = \ln z - (x + y)$;

b) $z'_y + \frac{1}{2}yz''_y = \frac{1}{x}$, dacă $u = \frac{x}{y}$, $v = x$ și $w = xz - y$;

c) $z''_{x^2} + 2z''_{xy} + z''_{y^2} = 0$, dacă $u = x + y$, $v = x - y$ și $w = xy - z$;

d) $(xy + z)z'_x + (1 - y^2)z'_y = x + yz$, dacă $u = yz - x$, $v = xz - y$ și $w = xy - z$;

e) $z(xz'_x + yz'_y) + x^2 + y^2 = 0$, dacă $u = \frac{y}{x}$, $v = x^2 + y^2$ și $w = z^2$;

f) $z''_{x^2} - 2z''_{xy} + z''_{y^2} = 0$, dacă $u = x + y$, $v = \frac{y}{x}$ și $w = \frac{z}{x}$.

48. Să se transforme ecuația lui Laplace $\Delta f \equiv f''_{x^2} + f''_{y^2} = 0$, trecind la coordonatele polare $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$.

49. Să se transforme ecuația lui Laplace $\Delta f \equiv f''_{x^2} + f''_{y^2} + f''_{z^2} = 0$, trecind la coordonatele sferice $x = r \cos \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \cos \varphi$, $z = r \sin \varphi$.

50. Să se calculeze jacobianul $J = \frac{D(x, y)}{D(r, \theta)}$, dacă $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$.

51. Să se calculeze jacobianul $J = \frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)}$, dacă $x = r \cos \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \cos \varphi$, $z = r \sin \varphi$.

52. Să se determine extremele funcției $f(x, y, z, t) = x + y + z + t$ cu condiția $xyzt - c^4 = 0$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $t > 0$, $c > 0$.

9. GEOMETRIA ANALITICĂ ȘI DIFERENȚIALA A CURBELOR ȘI SUPRAFETELOR

9.1. Geometria diferențială a curbelor în spațiu

Se numește arc de curbă regulat o mulțime de puncte din spațiu, ale căror coordonate x, y, z verifică unul din următoarele sisteme de ecuații:

$$F(x, y, z) = 0, G(x, y, z) = 0, (x, y, z) \in D \subset \mathbb{R}^3 \text{ (reprezentarea implicită);} \quad (1)$$

$$z = f(x, y), z = g(x, y), (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2 \text{ (reprezentarea explicită);} \quad (2)$$

$$x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t), t \in (a, b) \text{ (reprezentarea parametrică),} \quad (3)$$

unde funcțiile $F, G, f, g, f_1, f_2, f_3$ satisfac următoarele condiții de regularitate: a) sînt funcții reale și continue; b) funcțiile f_1, f_2, f_3 stabilesc o corespondență biunivocă și bicontinuu între punctele curbei și intervalul (a, b) ; c) admit derivate de ordinul întâi, nu toate nule; d) cel puțin unul din determinanții funcționali $\frac{D(F, G)}{D(y, z)}$, $\frac{D(F, G)}{D(z, x)}$ și $\frac{D(F, G)}{D(x, y)}$ este diferit de zero.

Vectorial o curbă este dată prin

$$r = r(t), \text{ unde } r(t) = f_1(t)i + f_2(t)j + f_3(t)k. \quad (4)$$

Ecuațiile tangentei într-un punct regulat $M_0(x_0, y_0, z_0)$ al curbei sînt

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}, \quad (5)$$

unde t_0 este astfel că $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$ și $z_0 = z(t_0)$; ecuația planului normal la curbă în punctul M_0 este

$$\dot{x}(t_0)(x - x_0) + \dot{y}(t_0)(y - y_0) + \dot{z}(t_0)(z - z_0) = 0. \quad (6)$$

Dacă curba este dată sub forma implicită (1), atunci ecuațiile tangentei în M_0 sînt

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}, \text{ unde } A = \frac{D(F, G)}{D(y, z)}, B = \frac{D(F, G)}{D(z, x)}, C = \frac{D(F, G)}{D(x, y)} \quad (7)$$

sînt calculate în M_0 ; ecuația planului normal este

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (8)$$

Versorii triedrului lui Frenet sînt: $\tau = \frac{\dot{r}}{|\dot{r}|}$, versorul tangentei; $\beta = \frac{r \times \ddot{r}}{|r \times \ddot{r}|}$, versorul binormalei și $\nu = \beta \times \tau$, versorul normalei principale. Axele triedrului lui Frenet în punctul regulat M_0 al unei curbe sînt: tangenta în M_0 la curbă, binormala la curbă în M_0 (dreapta ce trece prin M_0 și are direcția β) și normala principală la curbă în M_0 (dreapta ce trece prin M_0 și are direcția ν).

Planele triedrului
 τ și ν ; planul
 (planul ce trece

Curbura fa

unghiul de cont
 între cele două

Inversa curbura

Torsiunea

este unghiul a
 puncte. Torsiun

Raza de torsiu

Formulele

Expresia eleme

1. Să se
 punct dat,

a) $x = e^t$

b) $y = t^2$

c) $x^2 - y^2 = 1$

d) $r = 2t$

Rezolvare.

rezultă după r

normal este l

b) Reprez

$y = t^2, z = \frac{1}{t^2}$

tangentei sînt

c) Vom re

siderînd că fu

$\rightarrow x^2 + 6 = 0$.

Planele triedrului lui Frenet sînt : planul osculator (planul ce trece prin M_0 și este paralel cu direcțiile τ și ν); planul normal (planul ce trece prin M_0 și este paralel cu direcțiile β și ν); planul rectificanț (planul ce trece prin M_0 și este paralel cu direcțiile τ și β).

Curbura într-un punct regulat la o curbă este dată prin expresia $K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \right|$, unde $\Delta \varphi$ este unghiul de contingență între direcțiile tangentelor în două puncte apropiate, iar Δs este arcul de curbă între cele două puncte. Dacă curba are reprezentarea (4), atunci

$$K = \frac{|\dot{r} \times \ddot{r}|}{\dot{r}^3}. \quad (9)$$

Inversa curburii se numește rază de curbură $R = \frac{1}{K}$.

Torsiunea într-un punct regulat la o curbă este dată prin expresia $\frac{1}{T} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \psi}{\Delta s}$, unde $\Delta \psi$ este unghiul a două binormale în două puncte apropiate, iar Δs este arcul de curbă între cele două puncte. Torsiunea curbei într-un punct al său este dată de

$$\frac{1}{T} = \frac{(\dot{r}, \ddot{r}, \ddot{\ddot{r}})}{|\dot{r} \times \ddot{r}|^2}. \quad (10)$$

Raza de torsiune este T .

Formulele lui Frenet sînt :

$$\frac{d\tau}{ds} = K\nu, \quad \frac{d\nu}{ds} = -K\tau + \frac{1}{T}\beta, \quad \frac{d\beta}{ds} = -\frac{1}{T}\nu. \quad (11)$$

Expresia elementului de arc este $ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$.

9.1.1. Probleme rezolvate

1. Să se scrie ecuațiile tangentei și ecuația planului normal la o curbă într-un punct dat, pentru :

a) $x = e^t \cos 3t, y = e^t \sin 3t, z = e^{-2t}$ în $t = 0$;

b) $y = x^2, z = \frac{1}{x^3}$, în punctul $M_0(1, 1, 1)$;

c) $x^3 - y^2 + z + 6 = 0, x - y^2 + z^3 + 6 = 0$, în punctul $M_0(-1, -2, -1)$;

d) $r = 2\cos t \cdot i + 2\sin t \cdot j + 4t \cdot k$, în punctul $M_0(t_0 = \frac{\pi}{4})$.

Rezolvare. a) Deoarece $x(0) = 1, y(0) = 0$ și $z(0) = 1$, iar $\dot{x}(0) = 1, \dot{y}(0) = 3$ și $\dot{z}(0) = -2$, rezultă după relațiile (5) și (6) că ecuațiile tangentei sînt $x - 1 = \frac{y}{3} = \frac{z - 1}{-2}$, iar ecuația planului normal este $1 \cdot (x - 1) + 3 \cdot (y - 0) - 2 \cdot (z - 1) = 0$ sau $x + 3y - 2z + 1 = 0$.

b) Reprezentarea curbei poate fi scrisă sub forma parametrică, luînd ca parametru pe $x = t, x = t, y = t^2, z = \frac{1}{t^3}$ și în M_0 avem $t_0 = 1$. Deoarece $\dot{x}(1) = 1, \dot{y}(1) = 2, \dot{z}(1) = -3$, rezultă că ecuațiile tangentei sînt $\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 1}{-3}$, iar ecuația planului normal este $x + 2y - 3z = 0$.

c) Vom reface raționamentul teoretic care a fost utilizat în deducerea relațiilor (7) și (8). Considerînd că funcțiile implicite $x(t), y(t)$ și $z(t)$ sînt definite prin $x^3 - y^2 + z + 6 = 0$ și $x - y^2 + z^3 + 6 = 0$, prin derivare în raport cu t obținem $3x^2\dot{x} - 2y\dot{y} + \dot{z} = 0, \dot{x} - 2y\dot{y} + 3z^2\dot{z} = 0$

În punctul M_0 acest sistem devine $3x + 4y + z = 0$, $x + 4y + 3z = 0$. Soluția acestui sistem este $\frac{x}{8} = \frac{y}{-8} = \frac{z}{8}$. Prin urmare, ecuațiile tangentei sînt $\frac{x+1}{8} = \frac{y+2}{-8} = \frac{z+1}{8}$, iar ecuația planului normal este $x - y + z = 0$.

d) $\dot{r} = -2 \sin t i + 2 \cos t j + 4k$, iar $\dot{r} \left(\frac{\pi}{4} \right) = -\sqrt{2}i + \sqrt{2}j + 4k$. Deoarece $r(t_0) = \sqrt{2}i + \sqrt{2}j + \pi k$, rezultă că ecuațiile tangentei sînt $\frac{x - \sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = \frac{y - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{z - \pi}{4}$, iar ecuația planului normal este $-\sqrt{2}x + \sqrt{2}y + 4z - 4\pi = 0$.

2. Se consideră curba $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = \sqrt{2}t$ și punctul $M_0(t_0 = 0)$. a) Să se calculeze versorii bazei triedrului lui Frenet. b) Să se scrie ecuațiile axelor și planelor triedrului lui Frenet.

Rezolvare. a) Avem $r(0) = i + j$. Deoarece $\dot{r} = e^t i - e^{-t} j + \sqrt{2}k$ și $\ddot{r} = e^t i + e^{-t} j$, rezultă $\dot{r}(0) = i - j + \sqrt{2}k$ și $\ddot{r}(0) = i + j$. Prin urmare,

$$\tau(0) = \frac{\dot{r}(0)}{|\dot{r}(0)|} = \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}j + \frac{\sqrt{2}}{2}k \text{ și } \beta(0) = \frac{\dot{r}(0) \times \ddot{r}(0)}{|\dot{r}(0) \times \ddot{r}(0)|} \Big|_{t=0} = -\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j + \frac{\sqrt{2}}{2}k,$$

astfel că $\nu(0) = \beta(0) \times \tau(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}(i + j)$.

b) Ținînd seama de rezultatele de mai sus, putem afirma că ecuațiile tangentei sînt $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}}$; ecuațiile binormalei sînt $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{\sqrt{2}}$ și ecuațiile normalei principale sînt $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{0}$.

Ecuația planului osculator este aceea a planului determinat de punctul M_0 și al cărui vector normal este β :

$$-\frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1) + \frac{\sqrt{2}}{2}z = 0 \text{ sau } -x + y + \sqrt{2}z = 0.$$

Ecuația planului normal este aceea a planului ce trece prin M_0 , de vector normal τ :

$$\frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1) + \frac{\sqrt{2}}{2}z = 0 \text{ sau } x - y + \sqrt{2}z = 0.$$

Ecuația planului rectificat este aceea a planului ce trece prin M_0 și de vector normal ν :

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1) + \frac{\sqrt{2}}{2}(y-1) = 0 \text{ sau } x + y - 2 = 0.$$

3. Să se calculeze versorii bazei triedrului lui Frenet în punctul $M_0(-2, 4, -12)$ la curba $x^2 - y^2 - z = 0$, $x^2 - y = 0$.

Rezolvare. Vom considera pentru curbă ca reprezentare $x = t$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, funcțiile $y(t)$ și $z(t)$ fiind definite implicit prin $x^2 - y^2 - z = 0$, $x^2 - y = 0$. Derivînd aceste relații de două ori în raport cu t , obținem $2x - 2y\dot{y} - \dot{z} = 0$, $2x - \dot{y} = 0$ și $2 - 2y\ddot{y} - 2\dot{y}^2 - \ddot{z} = 0$, $2 - \ddot{y} = 0$. În punctul M_0 acest sistem devine $-4 - 8\dot{y} - \dot{z} = 0$, $-4 - \dot{y} = 0$, $2 - 8\ddot{y} - 2\dot{y}^2 - \ddot{z} = 0$,

$2 - \ddot{y} = 0$. Rezolvând acest sistem, obținem $\dot{x}(M_0) = 1$, $\dot{y}(M_0) = -4$, $z(M_0) = 28$ și $\ddot{x}(M_0) = 0$, $\ddot{y}(M_0) = 2$, $\ddot{z}(M_0) = -46$. Prin urmare, avem $\dot{r}(M_0) = i - 4j + 28k$ și $\ddot{r}(M_0) = 2j - 46k$, astfel că $\dot{r} \times \ddot{r}|_{M_0} = 2(64i + 23j + k)$. Deci $\overline{r}(M_0) = (i - 4j + 28k)/\sqrt{801}$, $\beta(M_0) = (64i + 23j + k)/\sqrt{4626}$, iar $v(M_0) = \beta(M_0) \times \overline{r}(M_0)$.

4. Să se găsească vectorii de poziție ai punctelor de pe curba $r = \frac{1}{t}i + tj + (2t^2 - 1)k$ în care tangenta la curbă este perpendiculară pe dreapta $-3x - y + z + 2 = 0$, $x - z - 8 = 0$.

Rezolvare. Direcția dreptei este $u = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = i - 3j + k$. Direcția tangentei într-un

punct curent este $\dot{r} = -\frac{1}{t^2}i + j + 4tk$. Cele două direcții fiind perpendiculare, rezultă $u \cdot \dot{r} = 0$ sau $-\frac{1}{t^2} - 3 + 4t = 0$ sau $4t^3 - 3t^2 - 1 = 0$, de unde $t = 1$. Prin urmare, există un singur punct, al cărui vector de poziție este $r(1) = i + j + k$.

5. Să se calculeze curbura și torsiunea curbei $x = t$, $y = t^2$, $z = \frac{2t^3}{3}$.

Rezolvare. Avem $\dot{r}(t) = i + 2tj + 2t^2k$, $\ddot{r}(t) = 2j + 4tk$ și $\ddot{\ddot{r}}(t) = 4k$, astfel că $|\dot{r} \times \ddot{r}| = 2(2t^2 + 1)$. Prin urmare,

$$K = \frac{2(2t^2 + 1)}{(2t^2 + 1)^{3/2}} = 2(2t^2 + 1)^{-1/2} \text{ și } T = \frac{[2(2t^2 + 1)]^2}{8} = \frac{1}{2}(2t^2 + 1)^2.$$

6. Să se afle elementul de arc ds al curbei dată de:

a) $x = a \operatorname{ch} t \cos t$, $y = a \operatorname{ch} t \sin t$, $z = at$; b) $2x^2 + 3y^2 + z^2 - 4z = 0$, $x^2 + 2y^2 - z = 0$.

Rezolvare. a) Avem $\dot{x}(t) = a(\operatorname{sh} t \cos t - \operatorname{ch} t \sin t)$, $\dot{y}(t) = a(\operatorname{sh} t \sin t + \operatorname{ch} t \cos t)$, $\dot{z}(t) = a$, astfel că $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = a^2(\operatorname{sh}^2 t + \operatorname{ch}^2 t + 1) = 2a^2 \operatorname{ch}^2 t$. Deci $ds = a\sqrt{2}(\operatorname{ch} t)dt$.

b) În acest caz luăm pentru curbă reprezentarea $x = t$, $y = y(t)$ și $z = z(t)$, funcțiile implicite $y(t)$, $z(t)$ fiind definite prin $2x^2 + 3y^2 + z^2 - 4z = 0$, $x^2 + 2y^2 - z = 0$. Derivând aceste relații în raport cu $x = t$, obținem $4x + 6y\dot{y} + 2z\dot{z} - 4\dot{z} = 0$, $2x + 4y\dot{y} - \dot{z} = 0$, de unde găsim $\dot{x} = 1$, $\dot{y} = -\frac{x}{y} \cdot \frac{2z - 2}{4z - 5}$, $\dot{z} = -\frac{2x}{4z - 5}$. Cu aceste rezultate se obține

$$ds = \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2} \cdot \frac{(2z - 2)^2}{(4z - 5)^2} + \frac{4x^2}{(4z - 5)^2}} dx.$$

7. Să se afle raza de curbură a curbei $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $z = 4 \sin \frac{t}{2}$.

Rezolvare. Avem $\dot{r}(t) = (1 - \cos t)i + \sin t j + 2 \cos \frac{t}{2} k$, $r(t) = \sin \frac{t}{2} i + \cos \frac{t}{2} j - \sin \frac{t}{2} k$,

$\dot{r} \times \ddot{r} = -2 \cos^2 \frac{t}{2} i + 2 \sin \frac{t}{2} \left(1 + \cos^2 \frac{t}{2}\right) j - 2 \sin^2 \frac{t}{2} k$ și $|\dot{r} \times \ddot{r}| = 2 \sqrt{1 + \sin^2 \frac{t}{2}}$.

Prin urmare,

$$R = \frac{1}{K} = \frac{4}{\sqrt{1 + \sin^2 \frac{t}{2}}}.$$

8. Să se arate că pentru elicea cilindrică $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, $a > 0$, curbura și torsiunea sînt constante.

Rezolvare. Deoarece $\dot{r} = -a \sin t i + a \cos t j + bk$, $\ddot{r} = -a \cos t i - a \sin t j$ și $\ddot{\ddot{r}} = a \sin t i - a \cos t j$, rezultă $\dot{r} = \sqrt{a^2 + b^2}$, $|\dot{r} \times \ddot{r}| = a\sqrt{a^2 + b^2}$ și $(\dot{r}, \ddot{r}, \ddot{\ddot{r}}) = a^2b$, astfel că avem
$$K = \frac{a\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{(a^2 + b^2)^3}} = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad T = \frac{(a\sqrt{a^2 + b^2})^2}{a^2b} = \frac{a^2 + b^2}{b}.$$

9. Să se arate că curba $x = a \sin^2 t$, $y = a \sin 2t$, $z = a \cos^2 t$ este o curbă plană. Să se găsească ecuația planului ce conține această curbă.

Rezolvare. Condiția necesară și suficientă ca o curbă să fie situată într-un plan este ca $\frac{1}{T} = 0$. Într-adevăr, din (11), rezultă $\frac{d\beta}{ds} = 0$, de unde $\beta = c$ (constant) și cum $\tau \cdot \beta = 0$, rezultă $\tau \cdot c = 0$, adică $\dot{r} \cdot c = 0$, $r \cdot c = \text{const.}$, relație ce reprezintă un plan.

Deoarece $\dot{r} = a \sin 2t i + 2a \cos 2t j - a \sin 2t k$, $\ddot{r} = 2a \cos 2t i - 4a \sin 2t j - 2a \cos 2t k$ și $\ddot{\ddot{r}} = -4a \sin 2t i - 8a \cos 2t j + 4a \sin 2t k$, rezultă $(\dot{r}, \ddot{r}, \ddot{\ddot{r}}) = 0$ și deci $\frac{1}{T} = 0$. Prin urmare, curba este conținută într-un plan, planul osculator, deoarece β este un vector constant. Deoarece $\beta = -(i + k)/\sqrt{2}$, rezultă că ecuația planului osculator este $x + z = a$.

9.1.2. Probleme propuse spre rezolvare

10. Să se scrie ecuațiile tangentei și ecuația planului normal în punctul M_0 la curba Γ , pentru:

- $(\Gamma) x = a \cos^2 t$, $y = a \sin t \cos t$, $z = a \sin t$, $M_0(t_0 = \frac{\pi}{4})$;
- $(\Gamma) z = x^2 + y^2$, $x = y$, $M_0(1, 1, 2)$;
- $(\Gamma) x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $x + z = 5$, $M_0(2, 2\sqrt{3}, 3)$;
- $(\Gamma) x^2 + z^2 - 4 = 0$, $x^2 + y^2 - 4 = 0$, $M_0(\sqrt{3}, 1, 1)$;
- $(\Gamma) x^2 + y^2 + z^2 = 6$, $x^2 - y^2 + z^2 = 4$, $M_0(1, 1, 2)$.

11. Să se determine versorii triedrului lui Frenet în punctul M_0 al curbei Γ , dacă:

- $(\Gamma) x = 1 - \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, $M_0(t_0 = \frac{\pi}{2})$;
- $(\Gamma) y = x^2$, $z = 2x$, $M_0(2, 4, 4)$;
- $(\Gamma) y^2 = x$, $x^2 = z$, $M_0(1, 1, 1)$;
- $(\Gamma) x^2 + y^2 + z^2 - 14 = 0$, $x + y + z - 6 = 0$, $M_0(2, 1, 3)$.

12. Să se scrie ecuațiile axelor și ale pînelor triedrului lui Frenet în punctul M_0 la curba Γ , pentru:

- $(\Gamma) x = \frac{t^2}{2}$, $y = \frac{2t^3}{3}$, $z = \frac{t^4}{2}$, $M_0(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2})$;
- $(\Gamma) x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x^2 - y^2 = 3$, $M_0(2, 1, 2)$;
- $(\Gamma) x^2 = 4y$, $x^3 = 24z$, $M_0(6, 9, 9)$;
- $(\Gamma) x = t$, $y = -t$, $z = \frac{t^2}{2}$, $M_0(t_0 = 2)$.

$$z = bt, a > 0.$$

$$= a \sin t \mathbf{i} - a \cos t \mathbf{j}.$$

o curbă plană.

$$\text{este ca } \frac{1}{R} = 0.$$

$$\text{rezultă } \tau \cdot c = 0,$$

$$a \cos 2tk \text{ și } \ddot{r} =$$

armare, curba

$$\text{Deoarece } \beta =$$

punctul M_0

13. Să se afle elementul de arc ds al curbei Γ , pentru :

a) $(\Gamma) x = t^4/4, y = t^3/3, z = t^2/2$; b) $(\Gamma) \mathbf{r} = \cos^2 t \cdot \mathbf{i} + \mathbf{j} + \sin^3 t \cdot \mathbf{k}$;

c) $(\Gamma) \mathbf{r} = t \cdot \mathbf{i} + \frac{1}{2} t^2 \cdot \mathbf{j} + \frac{1}{6} t^3 \cdot \mathbf{k}$.

14. Fie curba $(\Gamma) x = \sin t - t \cos t, y = t \sin t + \cos t, z = t + 1$. Să se afle ecuațiile tangentei și binormalei la curba Γ în punctul $M_0(t_0 = 0)$.

15. Fie curba $(\Gamma) 2px - y^2 = 0, x^2 + z^2 - a^2 = 0$. Să se găsească ecuația planului normal și a planului osculator la această curbă în punctul de abscisă $x = p/2$.

16. Să se scrie ecuația planului osculator și rectificat la curba $x - y^2 = 0, x = z^2$ în punctul $M_0(1, 1, 1)$.

17. Se dă curba $x = t \cos t, y = \sin t, z = -t^2$. Se cere :

a) să se determine versorii tangentei și normalei principale în punctul $t = 0$;

b) să se scrie ecuațiile tangentei în același punct și să se afle intersecția ei cu planul $x = 1$.

18. Să se arate că tangenta, normala principală și binormala în orice punct al curbei $\mathbf{r} = e^t(\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + \mathbf{k})$ formează fiecare câte un unghi constant cu axa Oz .

19. Să se determine punctele de pe curba $\mathbf{r} = \frac{1}{t} \mathbf{i} + \ln t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$, unde normala principală este paralelă cu planul $5x + 2y - 5z - 4 = 0$.

20. Să se calculeze curbura într-un punct al curbei Γ :

a) $x = e^t, y = e^{-t}, z = t\sqrt{2}$; b) $x = e^t \sin t, y = e^t \cos t, z = e^t$.

21. Se dă curba $\mathbf{r} = t \mathbf{i} + (1 - t^2) \mathbf{j} + \frac{2}{3} t^3 \mathbf{k}$. a) Să se calculeze versorii triedrului lui Frenet în punctul $t = 1$; b) să se scrie ecuațiile normalei principale și ecuația planului osculator în $t = 1$; c) să se calculeze torsiunea în punctul $t = 1$.

22. Să se calculeze raza de curbura a elicei conice $x = t \cos t, y = t \sin t, z = at$ în origine.

23. Să se arate că curbele de-a lungul cărora curbura este nulă sînt drepte.

24. Să se arate că curba $x = 2t^3 + t^2, y = t^2 - 2t, z = t^3 + t - 1$ este conținută într-un plan. Să se scrie ecuația acestui plan.

25. Să se calculeze raza de curbura și raza de torsiune pentru elicea circulară $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$.

26. Să se calculeze curbura și torsiunea pentru curba $\mathbf{r} = t \mathbf{i} + \frac{1}{2} t^2 \mathbf{j} + \frac{1}{6} t^3 \mathbf{k}$.

27. Să se determine raza de curbura și torsiunea curbei $y = x^2, 3z = 2x^3$.

28. Să se găsească punctele curbei $\mathbf{r} = (2t - 1) \mathbf{i} + t^3 \mathbf{j} + (1 - t^2) \mathbf{k}$, în care planul osculator la curbă este perpendicular pe planul $7x - 12y + 5z = 0$.

29. Să se determine punctele curbei $\mathbf{r} = \frac{1}{t} \mathbf{i} + t \mathbf{j} + (2t^2 - 1) \mathbf{k}$ în care binormala este perpendiculară pe dreapta $x + y = 0, z = 4x$.

9.2. Studiul conicelor pe ecuația generală

Se numește conică o mulțime de puncte din plan, ale căror coordonate în raport cu un reper cartezian ortonormal verifică ecuația

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \quad (1)$$

cu $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$. Invariantii conicei (1) sînt:

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}; \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad I = a_{11} + a_{22}, \quad (2)$$

iar ecuația caracteristică

$$S^2 - IS + \delta = 0, \quad (3)$$

are rădăcinile reale S_1 și S_2 .

Dacă $\Delta \neq 0$, conica se numește nedegenerată, iar dacă $\Delta = 0$ conica se numește degenerată. Dacă $\delta \neq 0$, conica este cu centru, coordonatele centrului fiind date de sistemul

$$\frac{1}{2}f'_x(x, y) = a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0, \quad \frac{1}{2}f'_y(x, y) = a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0; \quad (4)$$

dacă $\delta = 0$, conica este fără centru.

Dacă $\Delta \neq 0$, atunci: a) pentru conice cu centru, $\delta \neq 0$, ecuația canonică este

$$S_1X^2 + S_2Y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0, \quad (5)$$

și aceasta reprezintă pentru $\delta > 0$ elipse reale dacă $I\Delta < 0$ și elipse imaginare dacă $I\Delta > 0$; pentru $\delta < 0$, avem hiperbole; b) pentru conice fără centru, $\delta = 0$, conica reprezintă parabole a căror ecuație canonică este

$$Y^2 = \pm \left(-\frac{\Delta}{I^3}\right)^{1/2} X. \quad (6)$$

Dacă $\Delta = 0$, atunci: a) pentru conice cu centru, $\delta > 0$ arată că avem drepte secante imaginare, iar $\delta < 0$ arată că avem drepte secante reale; b) pentru conice fără centru, $\delta = 0$, conica se reduce la două drepte paralele sau confundate.

Dacă $\delta \neq 0$, atunci din ecuația

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} \quad (7)$$

se determină unghiul pe care îl face una dintre axele de simetrie ale conicei cu semiaxa Ox a reperului inițial.

Dacă $\delta = 0$, grupul termenilor de gradul al doilea din ecuația (1) formează pătratul unui binom liniar în x și y , iar ecuația

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{a_{12}}{a_{22}} \quad (8)$$

determină direcția axei conicei. Pentru a trasa graficul parabolei, se scrie ecuația conicei sub forma $(a_{11}x + a_{12}y + \alpha)^2 - 2p\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}(-a_{12}x + a_{11}y + \beta) = 0$, determinîndu-se astfel axa parabolei $a_{11}x + a_{12}y + \alpha = 0$ și tangenta în virful parabolei $-a_{12}x + a_{11}y + \beta = 0$.

În cazul c
procedează ast
liniari; b) pen
+ $a_{12}y$) + $a_{11}x$

1. Utiliz
să se repre

a) $x^2 -$

c) $9x^2 -$

Rezolvare.

rului în punct

$\bar{x}^2 - 3\bar{x}\bar{y} + 3\bar{y}^2$

Pentru ca O'

cînd înlocuim

+ $10y_0 + 6 =$

Rotim acum

$\bar{y} = X \sin \varphi +$

X^2

Alegem unghi

astfel ca ecua

prin $(X, -Y)$

Cu această ale

semiaxe $\sqrt{6}$

și $-\bar{x} \sin \varphi +$

de unde $3x +$

Ox și Oy , ob

b) În ac

$O' \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

de rotație găs

hiperbolă (fig.

În cazul conicei degenerată într-o pereche de drepte, pentru determinarea ecuațiilor acestora se procedează astfel: a) pentru cazul dreptelor secante se descompune ecuația (1) în produs de factori liniari; b) pentru cazul dreptelor paralele se scrie ecuația (1) sub forma $(a_{11}x + a_{12}y)^2 + 2a_{13}(a_{11}x + a_{12}y) + a_{11}a_{33} = 0$, din care se deduce $a_{11}x + a_{12}y = -a_{13} \pm \sqrt{a_{13}^2 - a_{11}a_{33}}$.

9.2.1. Probleme rezolvate

1. Utilizând raționamentul teoretic general, să se scrie sub formă canonică și să se reprezinte grafic conicele următoare:

a) $x^2 - 3xy + 5y^2 - 4x + 6y + 1 = 0$; b) $x^2 - 4xy + y^2 + 3x - 3y + 2 = 0$;

c) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x - 10y + 5 = 0$.

Rezolvare. a) Deoarece $\delta = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 5 \end{vmatrix} = \frac{11}{4} \neq 0$, vom efectua mai întâi o translație a reperului în punctul $O'(x_0, y_0)$, definită prin $x = x_0 + \bar{x}$, $y = y_0 + \bar{y}$. Ecuația conicei devine

relui în punctul $O'(x_0, y_0)$, definită prin $x = x_0 + \bar{x}$, $y = y_0 + \bar{y}$. Ecuația conicei devine

$$\bar{x}^2 - 3\bar{x}\bar{y} + 5\bar{y}^2 + (2x_0 - 3y_0 - 4)\bar{x} + (-3x_0 + 10y_0 + 6)\bar{y} + x_0^2 - 3x_0y_0 + 5y_0^2 - 4x_0 + 6y_0 + 1 = 0.$$

Pentru ca O' să fie centru de simetrie al conicei trebuie ca ecuația de mai înainte să fie neschimbată când înlocuim punctul (\bar{x}, \bar{y}) prin $(-\bar{x}, -\bar{y})$. Aceasta are loc dacă $2x_0 - 3y_0 - 4 = 0$ și $-3x_0 + 10y_0 + 6 = 0$, adică $O'(2, 0)$. Față de noul reper ecuația conicei este $\bar{x}^2 - 3\bar{x}\bar{y} + 5\bar{y}^2 - 3 = 0$. Rotim acum axele în jurul noii origini O' cu un unghi φ . Cu formulele $\bar{x} = X \cos \varphi - Y \sin \varphi$, $\bar{y} = X \sin \varphi + Y \cos \varphi$ ecuația devine

$$X^2(\cos^2 \varphi - 3 \sin \varphi \cos \varphi + 5 \sin^2 \varphi) + XY(-\sin 2\varphi - 3 \cos 2\varphi + 5 \sin 2\varphi) + Y^2(\sin^2 \varphi + 3 \sin \varphi \cos \varphi + 5 \cos^2 \varphi) - 3 = 0.$$

Alegem unghiul φ astfel ca axele $O'X$ și $O'Y$ să fie axe de simetrie. Prin urmare, alegem unghiul φ astfel ca ecuația de mai înainte să fie neschimbată atunci când înlocuim (X, Y) prin $(-X, Y)$ sau prin $(X, -Y)$. Aceasta se întâmplă când $4 \sin 2\varphi - 3 \cos 2\varphi = 0$ sau $\tan 2\varphi = \frac{3}{4}$.

$$\frac{2 \tan \varphi}{1 - \tan^2 \varphi} = \frac{3}{4}, \text{ de unde } \tan \varphi = \frac{1}{3}, \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}, \cos \varphi = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Cu această alegere a lui φ , ecuația conicei devine $\frac{X^2}{6} + \frac{11}{6} Y^2 - 1 = 0$. Conica este o elipsă de

semiaxe $\sqrt{6}$ și $\sqrt{\frac{6}{11}}$. Axele de simetrie au ecuațiile $X = 0$ și $Y = 0$, deci $\bar{x} \cos \varphi + \bar{y} \sin \varphi = 0$ și $-\bar{x} \sin \varphi + \bar{y} \cos \varphi = 0$ sau $(x - x_0) \cos \varphi + (y - y_0) \sin \varphi = 0$ și $-(x - x_0) \sin \varphi + (y - y_0) \cos \varphi = 0$, de unde $3x + y - 6 = 0$ și $-x + 3y + 2 = 0$. Ținând seama și de intersecțiile conicei cu axele Ox și Oy , obținem reprezentarea din figura 8.

b) În acest caz $\delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$. Procedând ca la exercițiul anterior, obținem $O'(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ și ecuația conicei față de reperul $\bar{x}O'\bar{y}$ este $\bar{x}^2 - 4\bar{x}\bar{y} + \bar{y}^2 + \frac{1}{2} = 0$. Pentru unghiul de rotație găsim valoarea $\varphi = \frac{\pi}{4}$ și ecuația canonică are forma $2X^2 - 6Y^2 - 1 = 0$. Conica este o hiperbolă (fig. 9).

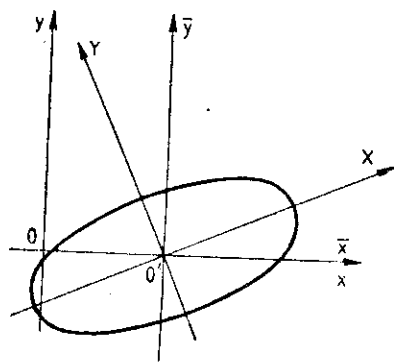


Fig. 8

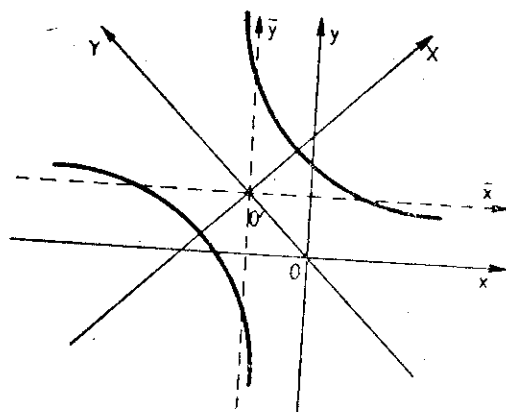


Fig. 9

c) Deoarece $\delta = \begin{vmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{vmatrix} = 0$, vom face mai întâi o rotație de unghi φ : $x = \bar{x} \cos \varphi - \bar{y} \sin \varphi$, $y = \bar{x} \sin \varphi + \bar{y} \cos \varphi$. Față de noul reper ecuația conicei este $\bar{x}^2(9 \cos^2 \varphi - 24 \sin \varphi \cos \varphi + 16 \sin^2 \varphi) + \bar{x}\bar{y}(7 \sin 2\varphi - 24 \cos 2\varphi) + \bar{y}^2(9 \sin^2 \varphi + 24 \sin \varphi \cos \varphi + 16 \cos^2 \varphi) + \bar{x}(-20 \cos \varphi - 10 \sin \varphi) + \bar{y}(20 \sin \varphi - 10 \cos \varphi) + 5 = 0$. Alegem unghiul φ astfel ca grupul termenilor de gradul doi să se reducă numai la \bar{y}^2 , deci $9 \cos^2 \varphi - 24 \sin \varphi \cos \varphi + 16 \sin^2 \varphi = 0$ și $7 \sin 2\varphi - 24 \cos 2\varphi = 0$. Obținem $\operatorname{tg} \varphi = \frac{3}{4}$ și deci $\sin \varphi = \frac{3}{5}$, $\cos \varphi = \frac{4}{5}$. Cu această alegere ecuația capătă formă $25\bar{y}^2 - 22\bar{x} + 4\bar{y} + 5 = 0$. Acum efectuăm translația $\bar{x} = \bar{x}_0 + X$, $\bar{y} = \bar{y}_0 + Y$, după care ecuația conicei devine $25Y^2 - 22X + Y(50\bar{y}_0 + 4) + 25\bar{y}_0^2 - 22\bar{x}_0 + 4\bar{y}_0 + 5 = 0$. Determinăm \bar{x}_0, \bar{y}_0 , astfel că $50\bar{y}_0 + 4 = 0$, $25\bar{y}_0^2 - 22\bar{x}_0 + 4\bar{y}_0 + 5 = 0$, astfel că $\bar{x}_0 = \frac{11}{50}$, $\bar{y}_0 = -\frac{2}{25}$. Față de reperul XVY , $V(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$, ecuația conicei este $Y^2 = \frac{22}{25}X$. Prin urmare, conica este o parabolă cu vârful V . Utilizând intersecția parabolei cu axele Ox și Oy , obținem reprezentarea din figura 10.

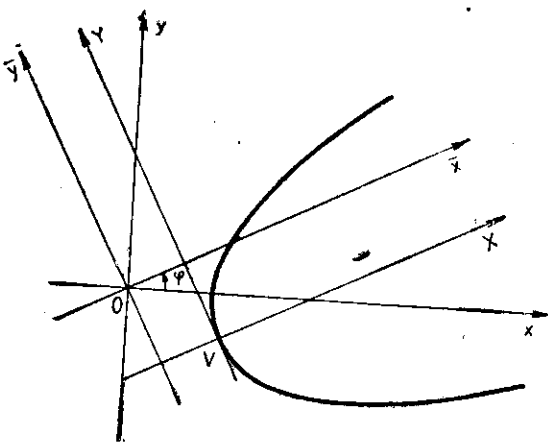


Fig. 10

2. Să se scrie sub forma canonică și să se reprezinte grafic conicele :

- $6x^2 - 4xy + 9y^2 - 4x - 32y - 6 = 0$;
- $7x^2 - 8xy + y^2 - 6x + 6y + 1 = 0$;
- $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 40x + 30y = 0$;
- $4x^2 + 2xy + y^2 - 2x + y + 3 = 0$;
- $2x^2 + 3xy + y^2 - x - 1 = 0$;
- $x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x - 4y - 3 = 0$.

Rezolvare. a) Avem $\delta = 50$, $\Delta = -2000$, $I = 15$, ecuația caracteristică $S^2 - 15S + 50 = 0$ are rădăcinile $S_1 = 5$, $S_2 = 10$. Deoarece $\delta > 0$, $\Delta \neq 0$, $I \Delta < 0$, conica este o elipsă reală, a cărei ecuație redusă este $5X^2 + 10Y^2 - 40 = 0$ sau $\frac{X^2}{8} + \frac{Y^2}{4} - 1 = 0$. Coordo-

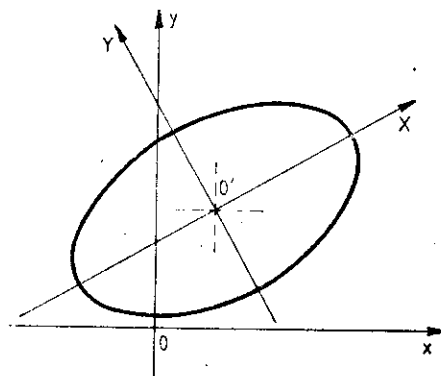


Fig. 11

matele centrului satisfac sistemul $3x - y - 1 = 0$, $-2x + 9y - 16 = 0$, astfel că $O'(1, 2)$. Unghiul de rotație este dat de ecuația $\text{tg } 2\varphi = \frac{4}{3}$, de unde $\text{tg } \varphi = \frac{1}{2}$. Reprezentarea grafică este dată în figura 11.

b) În acest caz, $\delta = -9$, $\Delta = -9$, $I = 8$, iar ecuația caracteristică $S^2 - 8S - 9 = 0$ are rădăcinile $S_1 = 9$, $S_2 = -1$. Deoarece $\delta < 0$, $\Delta \neq 0$, conica este o hiperbolă (fig. 12) a cărei ecuație canonică este $9X^2 - Y^2 - 1 = 0$. Coordoatele centrului sînt date de sistemul $7x - 4y - 3 = 0$, $-4x + y + 3 = 0$, adică $O'(1, 1)$. Direcția axelor este determinată de ecuația $\text{tg } 2\varphi = -\frac{4}{3}$, de unde $\text{tg } \varphi = 2$.

c) Avem $\delta = 0$, $\Delta \neq 0$; conica este o parabolă. Putem scrie ecuația sub forma $(3x + 4y)^2 - 40x + 30y = 0$. Scriind această ecuație sub forma $(3x + 4y + \alpha)^2 - 2p\sqrt{3^2 + 4^2}(-4x + 3y + \beta) = 0$, obținem $6\alpha + 40p = -40$, $8\alpha - 30p = 30$, $\alpha^2 - 10p\beta = 0$. Aceasta arată că $\alpha = 0$, $\beta = 0$ și $p = -1$. Prin urmare, axa parabolei este dreapta $3x + 4y = 0$, iar tangenta în virful parabolei este $-4x + 3y = 0$. Se observă că virful parabolei este $V(0, 0)$. Ecuația canonică este $Y^2 = X$. Intersecțiile parabolei (fig. 13) cu axele de coordonate sînt punctele $(0, 0)$ și $(\frac{40}{9}, 0)$ și $(0, -\frac{15}{8})$.

d) Avem $\delta = 3$, $\Delta = 6$, $I = 5$ și $I\Delta = 30 > 0$. Conica este o elipsă imaginară.

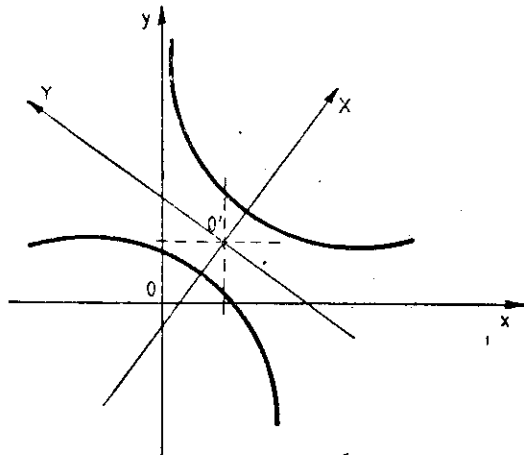


Fig. 12

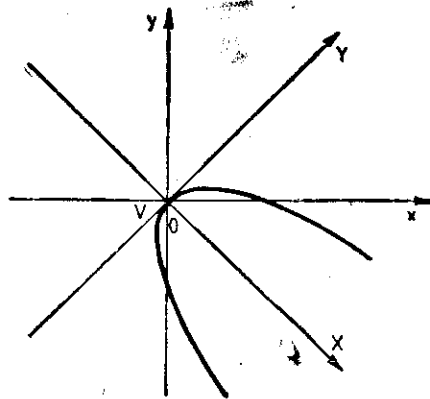


Fig. 13

e) Avem $\delta = -1/4 < 0$, $\Delta = 0$ și deci ecuația dată caracterizează o pereche de drepte secante reale. Pentru a găsi ecuațiile celor două drepte, considerăm trinomul $y^2 + 3xy + 2x^2 - x - 1 = 0$, care rezolvat dă $y = -x + 1$ și $y = -2x - 1$. Prin urmare, ecuațiile celor două drepte concurente sînt $x + y - 1 = 0$ și $2x + y + 1 = 0$. Reprezentarea acestor două drepte este simplă.

f) Deoarece $\delta = 0$ și $\Delta = 0$, conica este degenerată în două drepte paralele sau confundate. Ecuația conicei se poate scrie $(x - 2y)^2 + 2(x - 2y) - 3 = 0$. Rezolvînd această ecuație în $x - 2y$, obținem ecuațiile a două drepte paralele $x - 2y - 1 = 0$ și $x - 2y + 3 = 0$.

3. Să se determine parametrii m și n astfel ca ecuația $2x^2 + mxy + 2y^2 - 7x + ny + 3 = 0$ să reprezinte două drepte paralele.

Rezolvare. Conica trebuie să fie degenerată în două drepte paralele. Aceasta este echivalent cu faptul că $\delta = 0$ și $\Delta = 0$. Punînd aceste condiții, obținem soluțiile $m = 4$, $n = -7$ și $m = -4$, $n = 7$.

9.2.2. Probleme propuse spre rezolvare

4. Să se scrie ecuația canonică și să se construiască conica, dată prin ecuația:
 - a) $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$;
 - b) $8y^2 + 6xy - 12x - 26y + 11 = 0$;
 - c) $3x^2 - 7xy + 2y^2 - 4x + 3y + 1 = 0$;
 - d) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x + 2y - 1 = 0$;
 - e) $3x^2 + 4xy + 8y - 16 = 0$;
 - f) $4x^2 - 4xy + y^2 - 8x - 8y + 4 = 0$;
 - g) $x^2 + 3y^2 + 4xy - 2y + 1 = 0$;
 - h) $x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 5y + 3 = 0$.
5. Să se discute, după valorile parametrului real λ , natura conicei:
 - a) $x^2 - 2xy + \lambda y^2 - 4x - 5y + 3 = 0$;
 - b) $x^2 + 2xy + y^2 + \lambda x + 2y - 3 = 0$.
6. Ce constantă trebuie adăugată membrului stîng al ecuației $2x^2 + 5xy - 3y^2 + 3x + 16y = 0$, pentru ca noua ecuație să reprezinte o pereche de drepte?
7. Pentru ce valori ale parametrilor reali m și n ecuația $x^2 + 4xy + my^2 - 3x + 2ny = 0$ reprezintă o pereche de drepte paralele?
8. Să se determine parametrii m , n , q din ecuația $x^2 - 2mxy + 2ny^2 + nx - 2my + q = 0$, astfel ca aceasta să reprezinte o dreaptă dublă.
9. Să se discute natura conicei $\lambda x^2 - 2xy + \lambda y^2 - 2x + 2y + 3 = 0$ după parametrul real λ .
10. Să se cerceteze natura conicei $\lambda x^2 + 4xy + (\lambda - 3)y^2 + 10x + 3 = 0$, λ fiind un parametru real.
11. Să se scrie ecuația conicei care trece prin punctele $A(2, 0)$, $B(3, 0)$, $C(0, 1)$, $D(0, 4)$ și $E(5, 4)$.

9.3. Geometria diferențială a suprafețelor

Se numește porțiune regulată de suprafață o mulțime de puncte din spațiu ale căror coordonate față de un reper cartezian ortonormat satisfac una din următoarele ecuații:

$$F_1(x, y, z) = 0, \text{ (reprezentarea implicită),} \quad (1)$$

$$z = f(x, y), \text{ } (x, y) \in \Delta \subset \mathbb{R}^2, \text{ (reprezentarea explicită),} \quad (2)$$

$$x = f_1(u, v), \text{ } y = f_2(u, v), \text{ } z = f_3(u, v), \text{ } (u, v) \in \Delta \subset \mathbb{R}^2, \text{ (reprezentarea parametrică),} \quad (3)$$

unde funcțiile F_1, f, f_1, f_2, f_3 satisfac următoarele condiții de regularitate: a) sînt funcții reale continue; b) funcțiile f_1, f_2, f_3 stabilesc o corespondență biunivocă și bicontinuu între punctele porțiunii

de suprafață și perechile ordonate $(u, v) \in \Delta$; c) funcțiile F_1, f, f_1, f_2, f_3 admit derivate de ordinul întâi continue, nu toate nule; d) cel puțin unul din determinanții funcționali

$$\frac{D(f_1, f_2)}{D(u, v)}, \frac{D(f_2, f_3)}{D(u, v)}, \frac{D(f_3, f_1)}{D(u, v)}$$

este diferit de zero.

Un punct M_0 al unei suprafețe, în care condițiile de regularitate a)–d) sînt satisfăcute, se numește punct regulat pentru suprafața dată. Dacă cel puțin una din condițiile de regularitate nu este satisfăcută în M_0 , atunci M_0 se numește punct singular pentru suprafața dată.

Vectorial o suprafață este dată prin

$$r = r(u, v), \text{ unde } r(u, v) = f_1(u, v)i + f_2(u, v)j + f_3(u, v)k. \quad (4)$$

Se numește curbă coordonată de tipul (u) o curbă Γ_u trasată pe suprafața Σ , $\Gamma_u \subset \Sigma$, a cărei ecuație vectorială este

$$r = r(u, v_0), (u, v_0) \in \Delta \subset \mathbb{R}^2, \quad (5)$$

unde u este variabil și v_0 este constant, suprafața Σ fiind dată prin ecuația vectorială (4). Se numește curbă coordonată de tipul (v) o curbă Γ_v trasată pe suprafața Σ , $\Gamma_v \subset \Sigma$, a cărei ecuație este

$$r = r(u_0, v), (u_0, v) \in \Delta \subset \mathbb{R}^2. \quad (6)$$

Curbele coordonate sau parametrice ale unei suprafețe formează o rețea de curbe, vectorii tangenți la curbele fiecăreia din familii fiind $r'_u = x'_u i + y'_u j + z'_u k$ și $r'_v = x'_v i + y'_v j + z'_v k$, respectiv. Prin orice punct regulat al suprafeței Σ trece câte o singură curbă din fiecare familie.

Un vector normal la suprafața Σ , într-un punct regulat al său este

$$N = r'_u \times r'_v. \quad (7)$$

Într-un punct singular $r'_u \times r'_v = 0$.

O curbă pe suprafața Σ se definește printr-o relație între coordonatele curbilini u și v sub una din formele:

$$h(u, v) = 0, \text{ sau } u = \varphi(v), \text{ sau } v = \psi(u) \text{ sau } u = u(t), v = v(t). \quad (8)$$

Ecuațiile normalei la suprafața Σ , dată sub forma (4), într-un punct regulat $M_0(x_0, y_0, z_0)$ [sau $M_0(u = u_0, v = v_0)$] sînt

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}, \quad (9)$$

unde $N(A, B, C)$, $A = \frac{D(y, z)}{D(u, v)}$, $B = \frac{D(z, x)}{D(u, v)}$, $C = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$ sînt calculați pentru $u = u_0$, $v = v_0$.

Ecuația planului tangent la suprafață în punctul M_0 este

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \text{ sau } \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'_u(M_0) & y'_u(M_0) & z'_u(M_0) \\ x'_v(M_0) & y'_v(M_0) & z'_v(M_0) \end{vmatrix} = 0. \quad (10)$$

Dacă suprafața Σ este dată prin reprezentarea implicită (1), atunci ecuațiile normalei la Σ în punctul regulat $M_0(x_0, y_0, z_0)$ sînt

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}, \quad (11)$$

iar ecuația planului tangent la suprafață în $M_0 \in \Sigma$ este

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0. \quad (12)$$

Dacă suprafața Σ este dată prin ecuația (3) sau (4), atunci expresia primei forme fundamentale ds^2 este

$$ds^2 = E(du)^2 + 2F du dv + G(dv)^2, \quad (13)$$

unde

$$E = (r'_u)^2 = (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2, \quad F = r'_u \cdot r'_v = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v, \\ G = (r'_v)^2 = (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2.$$

Dacă printr-un punct regulat M_0 al suprafeței trec două curbe Γ_1 și Γ_2 situate pe suprafață, unghiul θ format de tangentele în M_0 la aceste două curbe este dat de

$$\cos \theta = \frac{E du \delta u + F(du \delta v + dv \delta u) + G dv \delta v}{(E(du)^2 + 2F du dv + G(dv)^2)^{1/2} (E(\delta u)^2 + 2F \delta u \delta v + G(\delta v)^2)^{1/2}}. \quad (14)$$

Unghiul curbelor coordonate pe Σ este dat de

$$\cos \theta = \frac{F}{\sqrt{EG}}. \quad (15)$$

Condiția de ortogonalitate a curbelor Γ_1 și Γ_2 pe Σ este

$$E du \delta u + F(du \delta v + dv \delta u) + G dv \delta v = 0, \quad (16)$$

iar în cazul curbelor coordonate este $F = 0$.

Elementul de arie pe suprafața Σ are expresia

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2} du dv. \quad (17)$$

Dacă n este versorul vectorului normal la suprafața Σ , $n = \frac{N}{|N|} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} N$, expresia

$$n \cdot d^2r = L(du)^2 + 2M du dv + N(dv)^2 \quad (18)$$

se numește forma a doua fundamentală. Aici, am folosit notația

$$L = n \cdot r''_{uu}, \quad M = n \cdot r''_{uv}, \quad N = n \cdot r''_{vv}.$$

9.3.1. Probleme rezolvate

1. Se consideră suprafața $(\Sigma) : x = u + v, y = u - v, z = uv$. a) Să se afle coordonatele carteziene ale punctelor $M_1(u = 2, v = 1)$ și $M_2(u = 1, v = 2)$. b) Să se verifice dacă punctele $M_3(4, 2, 3)$ și $M_4(1, 4, -2)$ aparțin suprafeței. c) Să se afle reprezentarea implicită a suprafeței.

Rezolvare. a) Înlocuind coordonatele curbilini $u = 2$ și $v = 1$ în ecuațiile suprafeței, obținem coordonatele carteziene ale punctului $M_1 : x = 3, y = 1, z = 2$. Similar se obține pentru $M_2 : x = 3, y = -1, z = 2$.

b) Punctul M_3 aparține suprafeței dacă sistemul $u + v = 4, u - v = 2, uv = 3$ este compatibil. Într-adevăr, sistemul anterior este compatibil determinat cu soluția $u = 3, v = 1$. Prin urmare, $M_3 \in \Sigma$. Procedând similar pentru punctul M_4 , se constată că $M_4 \notin \Sigma$.

c) Eliminând u și v între ecuațiile parametrice ale suprafeței, obținem ecuația implicită a acesteia $x^2 - y^2 - 4z = 0$.

2. Fie suprafața $(\Sigma) x = u^2 + v, y = u^2 - v, z = uv$. Să se arate că : a) curbele coordonate Γ_v pe suprafață, sînt drepte ; b) curbele coordonate Γ_u sînt curbe plane ; c) curba $(\Gamma) u = v$, pe suprafața Σ , este o curbă plană.

Rezolvare. a)

$$\text{sau } \frac{x - u_0^2}{1} = \dots$$

b) Ecuațiile
Eliminând param

$$x - y - 2v_0 = 0,$$

în planul $x - y =$

c) Curba Γ

obținem $x + y =$

$$x + y - 2z = 0.$$

3. Se consi

sorul normalei

planului tang

Rezolvare. a)

$$= 4u(1 + v)e^{-1} \dots$$

$$= (2i - 2j - k) \dots$$

b) Folosim ec

a suprafață în p

$$-8(y - 2) - 4z =$$

4. Să se sc

în punctul M

a) $(\Sigma) x =$

b) $(\Sigma) x =$

c) $(\Sigma) x^2 =$

d) $(\Sigma) z =$

Rezolvare. a)

în punctul $M_0(3,$

sînt $\frac{x - 3}{3} = \frac{y - 1}{-1} =$

b) În acest

sistemul $u + v =$

punctul M_0 avem

plan tangent și n

c) Folosim ec

$$+ 4z + 2j + (2v$$

$$= 10i + 4j - 2k.$$

sînt, respectiv,

d) Ecuația s

și $M_0(u = 1, v =$

normalei și ecua

Dacă ecuația sup

la punctul preced

forme fundamentale ds^2

(13)

$z = v_0$

situate pe suprafață,

(14)

$(x^2)/z$

(15)

N, expresia

(18)

a) Să se afle $v = 2$. b) Să se afle $x = 3$. c) Să se afle $z = 2$.

pe suprafața, obținem pentru $M_2: x = 3$.

este compatibil. Prin urmare,

implicită a acestora

sunt curbe

Rezolvare. a) Ecuațiile parametrice ale unei curbe Γ_v sînt $x = v + u_0^2, y = -v + u_0^2, z = u_0 v$ sau $\frac{x - u_0^2}{1} = \frac{y - u_0^2}{-1} = \frac{z}{u_0}$, care reprezintă ecuațiile canonice ale unei drepte.

b) Ecuațiile parametrice ale unei curbe oarecare de tip Γ_u sînt $x = u^2 + v_0, y = u^2 - v_0, z = v_0 u$. Eliminînd parametrul u între aceste ecuații, obținem reprezentarea implicită a curbei Γ_u considerate $x - y - 2v_0 = 0, x = \frac{z^2}{v_0^2} + v_0$. Această din urmă reprezentare arată că curba Γ_u este conținută în planul $x - y - 2v_0 = 0$.

c) Curba Γ are ecuațiile parametrice $x = u^2 + u, y = u^2 - u, z = u^2$. Eliminînd parametrul u , obținem $x + y - 2z = 0, (x - y)^2 = 4z$, fapt ce arată că curba Γ este conținută în planul $x + y - 2z = 0$.

3. Se consideră suprafața $(\Sigma) x = u e^v, y = u e^{-v}, z = 4uv$. Se cere: a) vectorul normalei la Σ în punctul $M_0(u = 2, v = 0)$; b) ecuațiile normalei și ecuația planului tangent la suprafață în punctul M_0 .

Rezolvare. a) Deoarece $r'_u = e^v i + e^{-v} j + 4v k$ și $r'_v = u e^v i - u e^{-v} j + 4u k$, rezultă $N = r'_u \times r'_v = 4u(1 + v)e^{-v} i - 4u(1 - v)e^v j - 2u k$. În punctul M_0 avem $N = 8i - 8j - 4k$, astfel că $n = (2i - 2j - k)/3$.

(16)

b) Folosim ecuațiile (9) și (10). Deoarece $x(2, 0) = 2, y(2, 0) = 2, z(2, 0) = 0$, ecuațiile normalei a suprafață în punctul M_0 sînt $\frac{x - 2}{8} = \frac{y - 2}{-8} = \frac{z}{-4}$. Ecuația planului tangent este $8(x - 2) - 8(y - 2) - 4z = 0$ sau $2x - 2y - z = 0$.

(17)

4. Să se scrie ecuațiile normalei și ecuația planului tangent la suprafața Σ , în punctul M_0 , pentru:

a) $(\Sigma) x = u + v, y = u - v, z = uv, M_0(u = 2, v = 1)$;

b) $(\Sigma) x = u + v, y = u^2 + v^2, z = u^3 + v^3, M_0(2, 2, 2)$;

c) $(\Sigma) x^2 + 2xy + y^2 + 4xz + z^2 + 2x + 4y - 6z + 8 = 0, M_0(0, 0, 2)$;

d) $(\Sigma) z = 5x^2 + 4y - 3, M_0(1, 0, 2)$.

Rezolvare. a) Vectorul normal la suprafață este $N = r'_u \times r'_v = (u + v)i - (u - v)j - 2k$, iar în punctul $M_0(3, 1, 2)$ avem $N = 3i - j - 2k$. Prin urmare, ecuațiile normalei în punctul M_0 sînt $\frac{x - 3}{3} = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z - 2}{-2}$, iar ecuația planului tangent este $3x - y - 2z - 4 = 0$.

b) În acest caz $N = r'_u \times r'_v = 6uv(v - u)i + 3(u^2 - v^2)j + 2(v - u)k$. Pentru punctul M_0 sistemul $u + v = 2, u^2 + v^2 = 2, u^3 + v^3 = 2$ dă coordonatele curbilini $u = v = 1$. Deoarece în punctul M_0 avem $N = r'_u \times r'_v = 0$, rezultă că M_0 este un punct singular pentru suprafața Σ și nu există plan tangent și normală la Σ în acest punct.

c) Folosim ecuațiile sub forma (11) și (12). Avem $N = \text{grad } F = F'_x i + F'_y j + F'_z k = (2x + 2y + 4z + 2)i + (2x + 2y + 4)j + (4x + 2z - 6)k$, astfel că în punctul M_0 obținem $N = \text{grad } F = 10i + 4j - 2k$. Prin urmare, ecuațiile normalei și ecuația planului tangent la suprafață în punctul M_0 sînt, respectiv, $\frac{x}{10} = \frac{y}{4} = \frac{z - 2}{-2}$ și $10x + 4y - 2z + 4 = 0$.

d) Ecuația suprafeței este dată sub forma explicită. Punînd $x = u, y = v$, rezultă $z = 5u^2 + 4v - 3$ și $M_0(u = 1, v = 0)$. Vectorul normal în M_0 este $N = r'_u \times r'_v = -10i - 4j + k$. Prin urmare, ecuațiile normalei și ecuația planului tangent în M_0 sînt $\frac{x - 1}{-10} = \frac{y}{-4} = \frac{z - 2}{1}$ și $-10x - 4y + z + 8 = 0$.

Dacă ecuația suprafeței se scrie sub forma implicită $z - 5x^2 - 4y + 3 = 0$, atunci se procedează ca la punctul precedent.

5. Să se scrie ecuația planului tangent și ecuațiile normalei într-un punct curent al suprafeței Σ :

a) $x = u \cos v, y = u \sin v, z = av$;

b) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 - a^2(x^2 - y^2 + z^2) = 0$; c) $z = \frac{1}{(xy)}$.

Rezolvare. a) Deoarece $r'_u = \cos v i + \sin v j, r'_v = -u \sin v i + u \cos v j + ak$, rezultă $N = -a \sin v i - a \cos v j + uk$, astfel că ecuația planului tangent este $a \sin v (x - u \cos v) - a \cos v (y - u \sin v) + u(z - av) = 0$ sau $ax \sin v - ay \cos v + uz - auv = 0$. Ecuațiile normalei sînt $\frac{x - u \cos v}{a \sin v} = \frac{y - u \sin v}{-a \cos v} = \frac{z - av}{u}$.

b) Deoarece $N = \text{grad } F = 4 \left[x_0(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - \frac{1}{2} a^2) i + y_0(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + \frac{1}{2} a^2) j + z_0(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - \frac{1}{2} a^2) k \right]$ în punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$, rezultă că ecuația planului tangent în $M_0 \in \Sigma$ este $x_0(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - \frac{1}{2} a^2)(x - x_0) + y_0(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + \frac{1}{2} a^2)(y - y_0) + z_0(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - \frac{1}{2} a^2)(z - z_0) = 0$ sau $x_0(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - \frac{1}{2} a^2)x + y_0(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + \frac{1}{2} a^2)y + z_0(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - \frac{1}{2} a^2)z - a^2(x_0^2 - y_0^2 + z_0^2)/2 = 0$. Ecuațiile tangentei sînt

$$\frac{x - x_0}{x_0(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - a^2/2)} = \frac{y - y_0}{y_0(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + a^2/2)} = \frac{z - z_0}{z_0(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - a^2/2)}$$

c) Avem suprafața $xyz - 1 = 0$. Deoarece $N = \text{grad } F = y_0 z_0 i + x_0 z_0 j + x_0 y_0 k$ în $M_0(x_0, y_0, z_0)$, rezultă că ecuația planului tangent este $y_0 z_0 (x - x_0) + x_0 z_0 (y - y_0) + x_0 y_0 (z - z_0) = 0$ sau $y_0 z_0 x + x_0 z_0 y + x_0 y_0 z - 3 = 0$. Ecuațiile tangentei sînt $\frac{x - x_0}{y_0 z_0} = \frac{y - y_0}{x_0 z_0} = \frac{z - z_0}{x_0 y_0}$ sau $x_0(x - x_0) = y_0(y - y_0) = z_0(z - z_0)$.

6. Se consideră suprafața $(\Sigma) r(u, v) = (3u + 3uv^2 - u^3)i + (3v + 3u^2v - v^3)j + 3(u^2 - v^2)k$. Să se determine: a) raportul $ds^2/[(du)^2 + (dv)^2]$; b) ecuația planului tangent la suprafață în punctul $M_0(u = v = 0)$.

Rezolvare. Avem $r'_u = 3[(1 + v^2 - u^2)i + 2uvj + 2uk]$ și $r'_v = 3[2uv i + (1 + u^2 - v^2)j - 2v k]$. a) Prin urmare, după formula (13), obținem $E = G = 9(1 + u^2 + v^2)^2$ și $F = 0$, astfel că $ds^2 = 9(1 + u^2 + v^2)^2[(du)^2 + (dv)^2]$. b) În punctul $M_0(0, 0, 0)$ avem $N = r'_u \times r'_v = k$ și deci ecuația planului tangent în punctul $M_0 \in \Sigma$ este $z = 0$.

7. Să se scrie prima formă fundamentală pentru suprafața Σ :

a) $x = u, y = v, z = uv$; b) $x + y = z^3$.

Rezolvare. a) $r'_u = i + vk, r'_v = j + uk$. Deci $E = 1 + v^2, G = 1 + u^2$ și $F = uv$. Prin urmare, $ds^2 = (1 + v^2)(du)^2 + 2uv du dv + (1 + u^2)(dv)^2$.

b) Putem scrie ecuația suprafeței sub forma $z = f(x, y)$, unde funcția $z = f(x, y)$ este definită implicit prin ecuația $x + y - z^3 = 0$. Prin urmare, $p = z'_x = -\frac{1}{(-3z^2)}, q = z'_y = -\frac{1}{(-3z^2)}$, astfel că $E = 1 + p^2 = 1 + \frac{1}{(9z^4)}, F = \frac{1}{(9z^4)}, G = 1 + \frac{1}{(9z^4)}$. Deci

$$ds^2 = \left(1 + \frac{1}{9z^4}\right)[(dx)^2 + (dy)^2] + \frac{2}{9z^4} dx dy$$

8. Se co
dintre curb
coordonate

Rezolvare.
 $G = 1 + u^2$.

Pentru aplica

$(\Gamma_u) v = v_0$, re
Folosind aceste

Dar din interse
 $F = -v_0(1 +$

Pentru aplica

Similar ga

Pentru aplica

9. Să se
 $(\Gamma_1) u \neq 0$;
 $\sin v, z = v$.

Rezolvare.
unde $A = \Gamma_1$
 $= 1 + u^2$. Deci
este $\frac{\pi}{2}$, deoar

În punctu
astfel că după

deci $\beta = \arcco$

În punctu
După formula

astfel că $\hat{c} =$

10. Să se găsească traiectoriile Γ pe suprafața $(\Sigma)x = u^2 + v^2, y = u^2 - v^2, z = uv$, ortogonale curbelor: a) $(\Gamma_u)v = v_0$; b) $(\Gamma_v)u = u_0$.

Rezolvare. Trebuie să determinăm ecuația $g(u, v) = 0$, a unei curbe Γ , care să fie ortogonală la curbele date pe suprafață. Avem $r'_u = 2ui + 2uj + vk, r'_v = 2vi - 2vj + uk$, astfel că $E = 8u^2 + v^2, F = uv, G = u^2 + 8v^2$. Condiția de ortogonalitate (16) se scrie

$$(8u^2 + v^2)du \delta u + uv(du \delta v + dv \delta u) + (u^2 + 8v^2)dv \delta v = 0.$$

a) Pentru curbele $(\Gamma_u)v = v_0$, avem $\delta v = 0$ și condiția de ortogonalitate se scrie $\delta u[(8u^2 + v^2)du + uv dv] = 0$. Cum δu este arbitrar, rezultă

$$(8u^2 + v^2)du + uv dv = 0 \text{ sau } d[u^2(4u^2 + v^2)] = 0.$$

Prin urmare, $u^2(4u^2 + v^2) = \text{const}$ reprezintă ecuația traiectoriilor ortogonale la Γ_u .

b) Procedind similar, obținem ecuația $v^2(u^2 + 4v^2) = \text{const}$.

11. Se dă suprafața elicoidală $(\Sigma) x = u \cos v, y = u \sin v, z = u + v$. Se cere: a) ecuația planului tangent și ecuațiile normalei în punctul $M_0(u = 1, v = \pi)$; b) prima formă fundamentală a suprafeței; c) unghiul curbelor coordonate; d) să se determine curbele de pe suprafață, ortogonale curbelor parametrice; e) elementul de arie al suprafeței; f) a doua formă fundamentală.

Rezolvare. Avem $r'_u = \cos v i + \sin v j + k, r'_v = -u \sin v i + u \cos v j + k$ și $N = (\sin v - u \cos v) i - (\cos v + u \sin v) j + uk$.

a) În punctul $M_0(-1, 0, 1 + \pi)$ avem $N = i + j + k$, astfel că ecuația planului tangent este $x + y + z - \pi = 0$, iar ecuațiile normalei sînt $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1-\pi}{1}$.

b) Deoarece $E = 2, F = 1, G = 1 + u^2$, rezultă $ds^2 = 2(du)^2 + 2du dv + (1 + u^2)(dv)^2$.

c) Unghiul curbelor coordonate este dat de $\cos \theta = \frac{F}{\sqrt{EG}} = \frac{1}{(2+2u^2)^{1/2}}$.

d) Pentru $(\Gamma_u)v = v_0$ și deci $\delta v = 0$, astfel că condiția de ortogonalitate este $2du + dv = 0$ sau $d(2u + v) = 0$, de unde $2u + v = \text{const}$. Pentru curbele $(\Gamma_v)u = u_0$, astfel că $\delta u = 0$. Condiția de ortogonalitate se scrie $du + (1 + u^2)dv = 0, \frac{1}{1+u^2} du + dv = 0, d(\arctg u + v) = 0$, de unde $\arctg u + v = \text{const}$.

e) Folosind formula (17), obținem $d\sigma = (1 + 2u^2)^{1/2} du dv$.

f) Avem $r''_{uu} = 0, r''_{uv} = -\sin v i + \cos v j, r''_{vv} = -u \cos v i - u \sin v j$ și $|N| = (1 + 2u^2)^{1/2}$. Prin urmare, obținem $L = 0, M = -(1 + 2u^2)^{-1/2}, N = u^2(1 + 2u^2)^{-1/2}$, astfel că a doua formă fundamentală este $n^{-1}r = (1 + 2u^2)^{-1/2} [v(-2du + u^2 dv)]$.

9.3.2. Probleme propuse spre rezolvare

12. Să se verifice că ecuațiile $r = \frac{1}{u^2+v^2} (ui + vj + k)$ și $r = u \cos v i + u \sin v j + u^2 k$ reprezintă aceeași suprafață.

13. Să se determine reprezentarea implicită pentru suprafața: a) $r = u^2 i + uv j + (au + v^2) k$; b) $x = u + \sin v, y = u + \cos v, z = u + a$.

14. Fie suprafața $x = u^2 + v + 1, y = u^2 - v + 1, z = uv + 2$. Să se arate că curbele coordonate Γ_v sînt drepte, iar curbele coordonate Γ_u sînt curbe plane.

15. Să se arate că curbele coordonate ale suprafeței

$$x = \frac{a}{2} (u + v), y = \frac{b}{2} (u - v), z = \frac{1}{2} uv \text{ sînt drepte.}$$

16. Să se arate că extremitatea vectorului $\mathbf{r} = (u - v)^2\mathbf{i} + (u^2 - 3v^2)\mathbf{j} + \frac{1}{2}v(u - 2v)\mathbf{k}$ descrie un plan. Să se scrie ecuația acestui plan. Să se scrie ecuația planului tangent la suprafață într-un punct curent al său.

17. Să se scrie ecuațiile normalei și ecuația planului tangent la suprafața Σ , în punctul M_0 , pentru

- a) $(\Sigma) x = u + v, y = u^2 + v^2, z = u^3 + v^3, M_0(u = 1, v = 2)$;
 b) $(\Sigma) \mathbf{r} = (1 + uv)\mathbf{i} + (u + u^2v)\mathbf{j} + (u^2 + u^3v)\mathbf{k}, M_0(3, 3, 3)$;
 c) $(\Sigma) \mathbf{r} = (u^2 + v + 1)\mathbf{i} + (u^2 - v + 1)\mathbf{j} + (uv + 2)\mathbf{k}, M_0(u = 1, v = -1)$;
 d) $(\Sigma) z = x^2 + y^2, M_0(1, -2, 5)$; e) $(\Sigma) z = x^3 + y^3, M_0(1, 2, 9)$;
 f) $(\Sigma) \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{8} = 0, M_0(4, 3, 4)$;
 g) $(\Sigma) x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz, M_0(R \cos \alpha, R \sin \alpha, R)$;
 h) $(\Sigma) x = u \cos v, y = u \sin v, z = u^2, M_0(1, 0, 1)$.

18. Să se scrie ecuația planului tangent și ecuațiile normalei la suprafața Σ într-un punct curent al său:

- a) $\mathbf{r} = (u + v)\mathbf{i} + uv\mathbf{j} + (u^3 + v^3)\mathbf{k}$; b) $xy + yz + zx = 0$.

19. Să se demonstreze că suma pătratelor segmentelor tăiate pe axele de coordonate de planul tangent la suprafața $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$ este constantă.

20. În care punct al elipsoidului $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ normala formează unghiuri egale cu axele de coordonate?

21. Să se demonstreze că punctul în care normala la suprafața $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{y}{x}$ intersectează planul xOy se află la egală distanță de origine și de punctul unde normala întâlnește suprafața.

22. Să se calculeze lungimea elementului de arc ds pe suprafața: a) $x = u^2 + v, y = u + v^2, z = u + v$; b) $z = xy^2$; c) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$.

23. Să se arate că suprafețele $xyz = a^3$ și $2z^2 = x^2 + y^2 + f(x^2 - z^2)$ sînt ortogonale (planele tangente sînt ortogonale).

24. Fie suprafața $\mathbf{r} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + \sin(u + v)\mathbf{k}$. Să se determine unghiul dintre curbele $(\Gamma_1) u + v = 0$ și $(\Gamma_2) u - v = 0$ pe suprafață.

25. Să se calculeze unghiul curbelor $(\Gamma_1) v = u + 1$ și $(\Gamma_2) v = 3 - u$ pe suprafața $\mathbf{r} = u \cos v\mathbf{i} + u \sin v\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$.

26. Fiind dat elementul de arc pe o suprafață să se calculeze unghiul curbelor Γ_1 și Γ_2 , pentru:

- a) $ds^2 = (du)^2 + (dv)^2, (\Gamma_1) v = 2u, (\Gamma_2) v = -2u$;
 b) $ds^2 = (du)^2 + (u^2 + a^2)(dv)^2, (\Gamma_1) u + v = 0, (\Gamma_2) u - v = 0$.

27. Să se afle unghiurile triunghiului curbiliniu, determinat de curbele $(\Gamma_1) u - 1 = 0, (\Gamma_2) v + 1 = 0; (\Gamma_3) u - v = 0$ pe suprafața $x = u, y = u + v, z = u + v^2$.

28. Să se calculeze unghiurile patrulaterului curbiliniu, determinat de curbele $(\Gamma_1) u = 0, (\Gamma_2) u = a, (\Gamma_3) v = 0, (\Gamma_4) v = \pi$ pe suprafața $x = u \cos v, y = u \sin v, z = av$.

29. Se dă torul: $x = (a + b \cos u) \cos v, y = (a + b \cos u) \sin v, z = b \sin u$. Să se arate că curbele coordonate sînt ortogonale. Să se calculeze elementul de arie al torului.

30. Se dă suprafața $x = u \cos v, y = u \sin v, z = u$. a) Să se determine unghiul curbelor coordonate. b) Să se determine curbele de pe suprafață, ortogonale curbelor $u - v = \text{const}$.

31. Fiind dată sfera $x = a \cos u \cos v, y = a \cos u \sin v, z = a \sin u$, să se arate că curbele coordonate sînt ortogonale. Să se calculeze prima și a doua formă fundamentală.

32. Să se scrie a doua formă fundamentală a suprafeței:

a) $x = u \cos v, y = u \sin v, z = u^2 + v^2$; b) $x = u^2, y = v^2, z = u + v$.

33. Fie suprafața $x = u \cos v, y = u \sin v, z = u + v$. a) Să se determine unghiul curbelor $(\Gamma_1) u - e^v = 0$ și $(\Gamma_2) u^2 - u + 1 - e^{-v} = 0$. b) Să se calculeze unghiul curbelor coordonate. Să se determine curba $u = u_0$, care taie toate curbele $v = v_0$ sub un unghi de 60° .

34. Fie suprafața $x = u \cos v, y = u \sin v, z = av$. a) Să se afle unghiurile triunghiului curbiliniu determinat de curbele $(\Gamma_1) v = 1, (\Gamma_2) u = av^2/2$ și $(\Gamma_3) u = -av^2/2$ pe suprafață. b) Să se determine traiectoriile ortogonale ale familiei de curbe $u = Ce^v, C = \text{const}$, trasate pe suprafață. c) Să se scrie a doua formă fundamentală a suprafeței.

35. Fiind dată suprafața $r = u \cos v i + u \sin v j + avk$, să se determine $a \in R$, astfel ca unghiul curbelor $u + v = 0$ și $u - v = 0$ să fie: a) 90° ; b) 30° ; c) 60° .

9.4. Suprafețe riglate și de rotație

O suprafață generată prin deplasarea unei drepte în spațiu se numește suprafață riglată.

O suprafață cilindrică este generată de o dreaptă, generatoarea, care se deplasează în spațiu rămînînd paralelă cu o direcție fixă, sprijinindu-se pe o curbă fixă, numită curbă directoare.

Suprafața conică este o suprafață generată de o dreaptă care trece printr-un punct fix, numit vîrf, sprijinindu-se pe o curbă fixă, numită curbă directoare.

Se numește suprafață conoidă cu plan director suprafața generată de o dreaptă care se deplasează în spațiu, rămînînd paralelă cu un plan dat P , numit plan director, se sprijină pe o dreaptă dată d și pe o curbă fixă C .

Se numește suprafață de rotație suprafața generată de o curbă C care se rotește, fără alunecare, în jurul unei axe fixe d . În această rotație, un punct al curbei C descrie un cerc cu centrul pe axa de rotație d și planul cercului perpendicular pe axă. Prin urmare, suprafața de rotație poate fi generată de un cerc variabil Γ , cu centrul pe axa de rotație d , planul cercului perpendicular pe axă și sprijinindu-se pe curba dată C . Cercul generator se numește paralel.

9.4.1. Probleme rezolvate

1. Să se scrie ecuația suprafeței cilindrice ale cărei generatoare sînt paralele cu dreapta d și care are curba directoare C , pentru:

a) (d) $x + y + z = 0, x + 2y + 3z = 0$ și (C) $x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0, y = 0$;

b) (d) $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ și (C) $2x^2 + y^2 - 2z = 0, x + z - 4 = 0$;

c) (d) care are direcția $u(2, 3, 4)$ și (C) $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 - 25 = 0, x + y - z + 2 = 0$.

Rezolvare. a) Generatoarele, fiind paralele cu d , au aceeași direcție cu d și deci au ecuațiile (G) $x + y + z = \lambda, x + 2y + 3z = \mu, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Punem condiția ca generatoarea G să se sprijine pe curba C. Prin urmare, sistemul format cu ecuațiile celor două curbe C și G trebuie să fie compatibil determinat. Deci, avem sistemul $x + y + z = \lambda, x + 2y + 3z = \mu, x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0, y = 0$. Scoțând x, y, z din primele două ecuații și a patra, obținem $x = (3\lambda - \mu)/2, y = 0, z = (\mu - \lambda)/2$. Înlocuind acestea în cea de-a treia ecuație a sistemului, obținem relația de compatibilitate $5\lambda^2 - 4\lambda\mu + \mu^2 - 4 = 0$. Ecuația suprafeței se obține eliminând pe λ, μ între ecuațiile generatoarei și relația de compatibilitate: $x + y + z = \lambda, x + 2y + z = \mu, 5\lambda^2 - 4\lambda\mu + \mu^2 - 4 = 0$. Înlocuind pe $\lambda = x + y + z$ și $\mu = x + 2y + z$ în ecuația a treia, obținem $2x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy + 4xz + 2yz - 4 = 0$.

b) Putem scrie ecuațiile dreptei d sub forma $2x - 3y = 0, x - 3z = 0$ și vom proceda mai departe ca la punctul anterior. Ecuațiile generatoarei sînt (G) $2x - 3y = \lambda, x - 3z = \mu$. Sistemul de ecuații $2x - 3y = \lambda, x - 3z = \mu, 2x^2 + y^2 - 2z = 0, x + z - 4 = 0$ trebuie să fie compatibil determinat. Eliminînd x, y, z din acest sistem, obținem relația de compatibilitate $9(12 + \mu)^2 + 2(12 + \mu - 2\lambda)^2 - 36(4 - \mu) = 0$.

Eliminînd acum parametrii λ și μ între ecuațiile generatoarei și relația de compatibilitate, obținem ecuația suprafeței sub forma $9(12 + x - 3z)^2 + 2(12 - 3x + 6y - 3z)^2 - 36(4 - x + 3z) = 0$.

c) Generatoarele au direcția $u(2, 3, 4)$ astfel că ecuațiile lor sînt

$$\frac{x - \alpha}{2} = \frac{y - \beta}{3} = \frac{z - \gamma}{4} \text{ sau } 3x - 2y = 3\alpha - 2\beta \equiv \lambda, 2x - z = 2\alpha - \gamma \equiv \mu.$$

Mai departe se procedează ca la punctele anterioare. Sistemul de ecuații $3x - 2y = \lambda, 2x - z = \mu, (x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 - 25 = 0, x + y - z + 2 = 0$ trebuie să fie compatibil determinat. Eliminînd x, y, z din acest sistem, obținem relația de compatibilitate $(\lambda - 2\mu - 5)^2 + (\lambda - 3\mu - 3)^2 + (2\lambda - 5\mu - 10)^2 - 25 = 0$. Eliminînd acum parametrii λ și μ între ecuațiile generatoarei și relația de compatibilitate, obținem ecuația suprafeței $(-x - 2y + 2z - 5)^2 + (-3x - 2y + 3z - 3)^2 + (-4x - 4y + 5z - 10)^2 - 25 = 0$.

2. Să se scrie ecuația cilindrului circumscris sferei $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, știind că generatoarele sale formează unghiuri egale cu axele de coordonate.

Rezolvare. Deoarece generatoarele formează unghiuri egale cu axele de coordonate, rezultă că direcția lor este $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \cos \alpha \cdot (1, 1, 1)$. Ecuațiile generatoarei pot fi scrise sub forma $\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{1} = \frac{z - z_0}{1}$ sau $x - y = x_0 - y_0 \equiv \lambda, x - z = x_0 - z_0 \equiv \mu$. Intersectăm generatoarele cu sfera și punem condiția ca intersecția să fie un singur punct. Deci sistemul de ecuații $x - y = \lambda, x - z = \mu, x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ trebuie să aibă o singură soluție. Înlocuind y și z din primele ecuații în a treia, obținem $3x^2 - 2(\lambda + \mu)x + \lambda^2 + \mu^2 - 1 = 0$. Pentru ca această ecuație să aibă o singură rădăcină trebuie ca $2(\lambda^2 + \mu^2 - \lambda\mu) - 3 = 0$. Eliminînd λ și μ între această relație de compatibilitate și ecuațiile generatoarei, obținem ecuația cilindrului $(x - y)^2 + (x - z)^2 - (x - y)(x - z) - 3/2 = 0$.

3. Să se scrie ecuația suprafeței conice cu vîrfurile în punctul $V(0, 0, 0)$ și curba directoare (C) $x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0, x^2 - y^2 - 1 = 0$.

Rezolvare. Ecuațiile generatoarei sînt $\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{\mu} = z$. Punînd condiția ca acestea să se sprijine pe curbă C, va trebui ca sistemul de ecuații $x = \lambda z, y = \mu z, x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0, x^2 - y^2 - 1 = 0$ să fie compatibil determinat. Eliminînd x, y, z din acest sistem, obținem condiția de compatibilitate $-3\lambda^2 + 5\mu^2 + 1 = 0$. Eliminînd parametrii λ și μ între această relație de compatibilitate și ecuațiile generatoarei, obținem ecuația suprafeței $-3x^2 + 5y^2 + z^2 = 0$.

4. Să se găsească locul geometric al tangentelor duse din punctul $V(0, 0, 0)$ la sfera $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 + z^2 - 16 = 0$.

Rezolvare. Ecuația unei drepte oarecare prin V este $\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{\mu} = z$. Punem condiția ca această dreaptă să intersecteze sfera numai într-un punct. Deci ecuația $(\lambda^2 + \mu^2 + 1)z^2 + 2(\mu - 5\lambda)z + 10 = 0$ trebuie să aibă o singură soluție. Obținem astfel relația de compatibilitate $15\lambda^2 - 9\mu^2 - 10\lambda\mu - 10 = 0$. Eliminând parametri λ și μ între această relație de compatibilitate și ecuațiile tangentei, obținem ecuația conului $15x^2 - 9y^2 - 10z^2 - 10xy = 0$.

5. Să se scrie ecuația suprafeței conoide generate de o dreaptă care se sprijină pe axa Oz , rămâne paralelă cu planul xOy și se sprijină pe dreapta (d) $x - z = 0$, $x + 2y - 3 = 0$.

Rezolvare. Generatoarea G poate fi imaginată ca intersecția a două plane: unul paralel cu xOy , $z = \lambda$, și unul făcând parte din fasciculul de plane ce conțin axa Oz , $x + \mu y = 0$. Deci (G) $z = \lambda$, $x + \mu y = 0$. Punind condiția ca G să se sprijine pe d , obținem sistemul $z = \lambda$, $x + \mu y = 0$, $x - z = 0$, $x + 2y - 3 = 0$. Eliminând x , y , z din acest sistem, obținem condiția de compatibilitate $2\lambda + \mu(3 - \lambda) = 0$. Eliminând λ și μ între această ecuație și ecuațiile generatoarei, obținem ecuația suprafeței $2z - \frac{x}{y}(3 - z) = 0$.

6. Să se scrie ecuația suprafeței generate de o dreaptă care se sprijină pe dreapta (d) $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$, rămâne paralelă cu planul (P) $x - 2y - z = 0$ și se sprijină pe curba (C) $y - 2z + 1 = 0$, $x - 2z - 1 = 0$.

Rezolvare. Deoarece ecuațiile lui d se pot scrie $x - 2y = 0$, $z - 2y = 0$, ecuația unui plan din fasciculul de plane ce conține dreapta d este $x - 2y + \lambda(z - 2y) = 0$. Prin urmare, ecuațiile generatoarei sînt (G) $x - 2y + \lambda(z - 2y) = 0$, $x - 2y - z = \mu$. Punind condiția ca G să se sprijine pe curba C , rezultă că sistemul de ecuații $x - 2y + \lambda(z - 2y) = 0$, $x - 2y - z = \mu$, $y - 2z + 1 = 0$, $x - 2z - 1 = 0$ trebuie să fie compatibil determinat. Obținem astfel relația de compatibilitate $3 + 2\mu + 3\lambda(\mu - 1) = 0$. Eliminând λ și μ între această relație de compatibilitate și ecuațiile generatoarei, obținem ecuația suprafeței $(2x - 4y - 2z + 3)(z - 2y) + 3(2y - x)(x - 2y - z - 1) = 0$.

7. Să se determine ecuația suprafeței ce se obține prin rotirea curbei (C) $z = 0$, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ în jurul axei Ox .

Rezolvare. Cercul paralel Γ are centrul pe axa Ox , raza variabilă și planul său este perpendicular pe Ox . Cercul Γ poate fi imaginat ca intersecția unei sfere de rază variabilă, cu centrul într-un punct de pe axa Ox și un plan perpendicular pe Ox . Luînd originea ca punct al lui Ox , rezultă (Γ) $x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2$, $x = \mu$. Din condiția ca Γ să se sprijine pe curba C obținem sistemul $x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2$, $x = \mu$, $z = 0$, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, care trebuie să fie compatibil determinat.

Eliminând λ și μ din acest sistem, obținem relația de compatibilitate $\frac{\mu^2}{a^2} - \frac{\lambda^2 - \mu^2}{b^2} - 1 = 0$. Înlocuind $\lambda^2 = x^2 + y^2 + z^2$ și $\mu = x$ în această ecuație, obținem ecuația suprafeței $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{b^2} - 1 = 0$.

8. Să se determine ecuația suprafeței ce se obține prin rotirea dreptei (C) $x + z = 2$, $y = 0$ în jurul dreptei (d) $x - 2z = 0$, $y - 2z = 0$.

Rezolvare. Un punct al dreptei d poate fi luat $M_0(2, 2, 0)$, iar direcția sa este $u(0, 0, 1)$. Prin urmare, cercul paralel este (Γ) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = \lambda^2$, $z = \mu$. Eliminând x , y , z din sistemul $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = \lambda^2$, $z = \mu$, $x + z = 2$, $y = 0$, obținem $\lambda^2 - 2\mu^2 - 4 = 0$. Înlocuind în această ultimă relație $\lambda^2 = (x - 2)^2 + (y - 2)^2 + z^2$ și $\mu = z$ din ecuațiile cercului paralel, obținem ecuația suprafeței $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 - z^2 - 4 = 0$.

9. Na
prafața c
curbă d
al curbei
mine cil
- z = 0

Rezolu
(G) x = λ
= 0, obț
λ = x și μ
Ecuațiile

10. I
cilindru
sistemul

Rezolu
sistemul
F(λ, μ, z
ecuațiile
din ecua
cum a
planul

11.
cu dre

a)
b)
c)
d)
e)
f)

12.
y² +
direct

13.
x + y

14.
+ (x

15.
+ z²

16.
cu d

9. Numim cilindru proiectant (de proiecție) al unei curbe C pe un plan P suprafața cilindrică avînd generatoarele paralele cu direcția normalei la plan și drept curbă directoare curba C . Curba obținută prin intersecția cilindrului de proiecție al curbei C cu planul P se numește proiecție a curbei C pe planul P . Să se determine cilindrul proiectant și curba proiecție pentru curba $(C) y^2 + z^2 = x, x + 2y - z = 0$, pe planul xOy .

Rezolvare. Generatoarele cilindrului proiectant sînt paralele cu axa Oz , deci au ecuațiile $(G) x = \lambda, y = \mu$. Prin eliminarea lui x, y și z din sistemul $x = \lambda, y = \mu, y^2 + z^2 = x, x + 2y - z = 0$, obținem relația de compatibilitate $\mu^2 + (\lambda + 2\mu)^2 - \lambda = 0$. Înlocuind în această relație $\lambda = x$ și $\mu = y$ din ecuațiile generatoarei, obținem ecuația cilindrului proiectant $y^2 + (x + 2y)^2 - x = 0$. Ecuațiile curbei proiecție sînt $y^2 + (x + 2y)^2 - x = 0, z = 0$.

10. Fie curba $(C) F(x, y, z) = 0, G(x, y, z) = 0$. Să se arate că găsirea ecuației cilindrului proiectant al curbei pe planul xOy revine la a elimina variabila z din sistemul format cu ecuațiile curbei.

Rezolvare. Generatoarele cilindrului proiectant sînt $(G)x = \lambda, y = \mu$. Eliminarea lui x, y, z din sistemul $x = \lambda, y = \mu, F(x, y, z) = 0, G(x, y, z) = 0$ se reduce la a elimina z din ecuațiile $F(\lambda, \mu, z) = 0, G(\lambda, \mu, z) = 0$. Deci relația de compatibilitate este obținută prin eliminarea lui z între ecuațiile $F(\lambda, \mu, z) = 0, G(\lambda, \mu, z) = 0$. Fie această relație $H(\lambda, \mu) = 0$. Înlocuind aici $\lambda = x, \mu = y$ din ecuațiile lui G obținem $H(x, y) = 0$ pentru ecuația cilindrului proiectant. Ținînd seama de modul cum a fost obținută relația $H(\lambda, \mu) = 0$, rezultă că ecuația cilindrului proiectant al curbei C pe planul xOy se obține prin eliminarea lui z între ecuațiile curbei.

9.4.2. Probleme propuse spre rezolvare

11. Să se scrie ecuația suprafeței cilindrice ale cărei generatoare sînt paralele cu dreapta d și care are curbă directoare C , pentru :

- $(d) x + y = 0, x - y + z = 0$ și $(C) x^2 + y^2 = r^2, z = 0$;
- (d) are direcția $\mathbf{u}(6, 3, 1)$ și $(C) x^3 + y^3 - 1 = 0, z = 0$;
- (d) are direcția $\mathbf{u}(1, 2, -1)$ și $(C) x + y + z = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 4$;
- $(d) x = y = z$ și $(C) x^2 + y^2 - 4 = 0, z = 0$;
- $(d) \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ și $(C) \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} - 1 = 0, z = 0$;
- $(d) Oz$ și $(C) x^2 + y^2 - 3x + 2y - 1 = 0, z = 0$.

12. Să se determine ecuația suprafeței cilindrice a cărei curbă directoare este $(C) y^2 + z^2 = x, x = 2z$ și ale cărei generatoare sînt perpendiculare pe planul curbei directoare.

13. Să se găsească ecuația cilindrului care are ca directoare curba $(C) x^2 - y^2 = z, x + y + z = 0$, generatoarele fiind perpendiculare pe planul directoarei.

14. Să se scrie ecuația cilindrului circumscris sferei $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 1$, cu generatoarele paralele cu direcția $\mathbf{u}(1, 1, 1)$.

15. Să se scrie ecuația cilindrului circumscris sferelor $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 25$ și $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

16. Sfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$ este luminată de un fascicul de raze paralele cu dreapta $x = y = z$. Să se găsească forma umbrei aruncate de sferă pe planul xOy .

8. Se consideră suprafața $(\Sigma)r = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + u(1+v)\mathbf{k}$. Să se calculeze unghiul dintre curbele coordonate și unghiul pe care îl face curba $(\Gamma) u + v = 0$ cu curbele coordonate pe suprafață. Aplicație: $(\Gamma_u)v = -1$, $(\Gamma_v)u = +1$.

Rezolvare. Avem $r'_u = \mathbf{i} + (1+v)\mathbf{k}$, $r'_v = \mathbf{j} + u\mathbf{k}$, astfel că $E = 1 + (1+v)^2$, $F = u(1+v)$, $G = 1 + u^2$. Prin urmare, unghiul curbelor coordonate este dat de

$$\cos \theta = \frac{F}{\sqrt{EG}} = \frac{u_0(1+v_0)}{\sqrt{(1+u_0^2)[1+(1+v_0)^2]}}$$

Pentru aplicație avem $\theta = \frac{\pi}{2}$. Să determinăm unghiul θ_1 între curbele Γ_u și Γ pe Σ . Deoarece

$(\Gamma_v)v = v_0$, rezultă $dv = 0$ și du este arbitrar. Din ecuația curbei Γ prin diferențiere găsim $\delta u = -\delta v$. Folosind aceste rezultate în formula (14), obținem

$$\cos \theta_1 = \frac{-E du \delta v + F du \delta v}{E^{3/2} du (E - 2F + G)^{1/2} \delta v} = \frac{F - E}{[E(E - 2F + G)]^{1/2}}$$

Dar din intersecția ecuațiilor celor două curbe găsim $v = v_0$, $u = -v = -v_0$, astfel că $E = 1 + (1+v_0)^2$, $F = -v_0(1+v_0)$ și $G = 1 + v_0^2$. Deci

$$\cos \theta_1 = \frac{-(2 + 3v_0 + 2v_0^2)}{[(2 + 2v_0 + v_0^2)(3 + 4v_0 + 4v_0^2)]^{1/2}}$$

Pentru aplicație rezultă $\cos \theta_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, deci $\theta_1 = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Similar găsim pentru unghiul θ_2 al curbelor Γ_v și Γ relația

$$\cos \theta_2 = \frac{-u_0 + 2u_0^2 + 1}{[(1 + u_0^2)(3 - 4u_0 + 4u_0^2)]^{1/2}}$$

Pentru aplicație găsim valoarea $\theta_2 = \arccos \sqrt{\frac{2}{3}}$.

9. Să se determine unghiurile triunghiului curbiliniu determinat de curbele $(\Gamma_1) u = 0$; $(\Gamma_2) v = 0$, $(\Gamma_3) u + v = 1$, pe suprafața $(\Sigma) x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = v$.

Rezolvare. Virfurile triunghiului sînt punctele $A(u = 0, v = 0)$, $B(u = 1, v = 0)$, $C(u = 0, v = 1)$, unde $A = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$, $B = \Gamma_2 \cap \Gamma_3$ și $C = \Gamma_1 \cap \Gamma_3$. Pentru suprafața Σ avem $E = 1$, $F = 0$, $G = 1 + u^2$. Deoarece $F = 0$, rezultă că curbele coordonate sînt ortogonale. Prin urmare, unghiul din A este $\frac{\pi}{2}$, deoarece Γ_1 și Γ_2 sînt curbe coordonate.

În punctul $B(u = 1, v = 0)$ avem $E = 1$, $F = 0$, $G = 2$ și pe Γ_2 , $dv = 0$, iar pe Γ_3 , $\delta u = -\delta v$ astfel că după formula (14) obținem

$$\cos \hat{B} = \frac{-E du \delta v + F du \delta v}{E^{3/2} du (E - 2F + G)^{1/2} \delta v} = \frac{F - E}{[E(E - 2F + G)]^{1/2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}};$$

deci $\hat{B} = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

În punctul $C(u = 0, v = 1)$ avem $E = 1$, $F = 0$, $G = 1$ și pe Γ_1 , $du = 0$, pe Γ_3 , $\delta u = -\delta v$. După formula (14) obținem

$$\cos \hat{C} = \frac{-F dv \delta v + G dv \delta v}{[G(E - 2F + G)]^{1/2} dv \delta v} = \frac{G - F}{[G(E - 2F + G)]^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

astfel că $\hat{C} = \frac{\pi}{4}$.

17. Să se scrie ecuația suprafeței conice cu vârful în punctul V și curba directoare C :

- a) $V(0, 0, 0)$ și $(C) z = a, y^2 = ax$;
 b) $V(1, 1, 1)$ și $(C) z = 0, x^2 + y^2 - 4 = 0$;
 c) $V(2, 2, 2)$ și $(C) y^2 - 4x + 1 = 0, z = 0$;
 d) $V(-2, 0, 0)$ și $(C) 3x^2 + 6y^2 - z = 0, x + y + z - 1 = 0$;
 e) $V(0, -a, 0)$ și $(C) x^2 + y^2 + z^2 = 4, y + z = 2$;
 f) $V(0, 0, 0)$ și $(C) x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$.

18. Se cere ecuația conului cu vârful $V(0, a, 0)$ circumscris sferei $x^2 + y^2 + (z - b)^2 = r^2$.

19. Să se scrie ecuația conului cu vârful în $V(3, 0, -1)$ și ale cărui generatoare sînt tangente elipsoidului $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} - 1 = 0$.

20. Să se scrie ecuația conului cu vârful în punctul $V(5, 0, 0)$ și ale cărui generatoare sînt tangente la sfera $x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$.

21. Să se scrie ecuația suprafeței conoide, generate de o dreaptă ce se sprijină pe dreapta d , este paralelă cu planul P și se sprijină pe curba C , dacă:

- a) $(d) x = 2, y = 0, (P) xOy, (C) \frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{9} - 1 = 0, y = 2$;
 b) $(d) 2x + z - 4 = 0, 3y - 2z - 2 = 0, (P) x + 3y - z + 11 = 0, (C) x - 2z = 0, 2y - 3z + 4 = 0$;
 c) $(d) Oz, (P) xOy, (C) x = t, y = t^2, z = t^3$;
 d) $(d) \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}, (P) x + y + z = 0, (C) x - 1 = 0, z = 0$;
 e) $(d) x - 1 = 0, z = 0, (P) x + y + z = 0, (C) Oz$.

22. Să se scrie ecuația suprafeței de rotație, obținute prin rotația curbei C în jurul dreptei d , pentru:

- a) $(C) y = 0, (x - a)^2 + z^2 = b^2, (d) Oz$;
 b) $(C) x - 1 = 0, 2y - z = 0, (d) Oz$;
 c) $(C) z = 0, y^2 - 2px = 0, (d) Ox$;
 d) $(C) z = 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, (d) Ox$ sau Oy ;
 e) $(C) Ox, (d) x = y = z$;
 f) $(C) z = 0, (x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0, (d) Oy$;
 g) $(C) z = 0, x^3 - x^2 - y^2 = 0, (d) Ox$.

23. Să se găsească ecuațiile proiecției curbei de intersecție dintre suprafața $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + z^2 - 1 = 0$ cu planul $x + 4z - 4 = 0$, pe planul xOy .

24. Să se demonstreze că proiecția curbei lui Viviani $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0, x^2 + y^2 - ax = 0$ pe planul xOz este o parabolă.

25. Să se găsească ecuațiile proiecțiilor curbei $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 - 1 = 0, 4x - 3y - 12z - 6 = 0$ pe planele de coordonate.

26. Să se scrie ecuația suprafeței și are ca axă

27. Să se scrie ecuația și reprezintă o

Se numește

Se numește

Hiperboloidul

Se numește

Se numește

Se numește

Paraboloidul

1. Fiind date ecuațiile al punctelor fixe este con

26. Să se scrie ecuația unui cilindru de rotație ce trece prin punctul $M_0(-1, 1, 1)$ și are ca axă de rotație dreapta (d) $x = t + 1, y = 3t + 1, z = t - 1$.

27. Să se arate că suprafața $r = (u + v)\mathbf{i} + (u^2 + v - 1)\mathbf{j} + (-u^2 + v + 1)\mathbf{k}$ reprezintă o suprafață cilindrică.

9.5. Cuadrice pe ecuațiile lor canonice

Se numește elipsoid suprafața a cărei ecuație este

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0. \quad (1)$$

Se numește hiperboloid cu o pînză suprafața a cărei ecuație este

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0. \quad (2)$$

Hiperboloidul cu o pînză posedă două familii de generatoare rectilinii :

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \lambda \left(1 + \frac{y}{b}\right), \quad \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{y}{b}\right), \quad \lambda \in \mathbf{R}, \quad (3)$$

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \mu \left(1 - \frac{y}{b}\right), \quad \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{\mu} \left(1 + \frac{y}{b}\right), \quad \mu \in \mathbf{R}. \quad (4)$$

Se numește hiperboloid cu două pînze suprafața a cărei ecuație este

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0. \quad (5)$$

Se numește paraboloid eliptic suprafața a cărei ecuație este

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z. \quad (6)$$

Se numește paraboloid hiperbolic suprafața a cărei ecuație este

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z. \quad (7)$$

Paraboloidul hiperbolic are două familii de generatoare rectilinii :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2\lambda z, \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{1}{\lambda}, \quad \lambda \in \mathbf{R}, \quad (8)$$

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 2\mu z, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{\mu}, \quad \mu \in \mathbf{R}. \quad (9)$$

9.5.1. Probleme rezolvate

1. Fiind date punctele fixe $F'(0, 0, -c)$ și $F(0, 0, c)$, se cere locul geometric al punctelor $M(x, y, z)$ din spațiu, a căror sumă a distanțelor la cele două puncte fixe este constantă și egală cu $2a$, $a > c$.

Rezolvare. Deoarece $\vec{MF'} + \vec{MF} = 2a$, rezultă $\vec{MF'} = 2a - \vec{MF}$ și prin ridicare la pătrat obținem $|\vec{MF'}|^2 = 4a^2 + |\vec{MF}|^2 - 4a|\vec{MF}|$, $x^2 + y^2 + (z+c)^2 = 4a^2 + x^2 + y^2 + (z-c)^2 - 4a|\vec{MF}|$, $|\vec{MF}| = a - \frac{c}{a}z$. Ridicând din nou la pătrat, obținem $x^2 + y^2 + (z-c)^2 = a^2 + \frac{c^2}{a^2}z^2 - 2cz$ sau $\frac{x^2 + y^2}{a^2 - c^2} + \frac{z^2}{a^2} - 1 = 0$. Locul geometric este un elipsoid de rotație în jurul axei Oz .

2. Fie punctul $F(0, 0, c)$ și planul $(P) z - \frac{a^2}{c} = 0$. Se cere locul geometric al punctelor din spațiu, astfel ca raportul distanțelor lor la punctul F și planul P să fie constant și egal cu $\frac{c}{a}$, $c > a$.

Rezolvare. Trebuie să determinăm punctele $M(x, y, z)$ din spațiu, pentru care $|\vec{MF}| = \frac{c}{a}d(M, P)$, $d(M, P)$ fiind distanța de la punctul M la planul P . Deci $|\vec{MF}|^2 = \frac{c^2}{a^2}d^2(M, P)$, astfel că

$$x^2 + y^2 + (z-c)^2 = \frac{c^2}{a^2} \left(z - \frac{a^2}{c} \right)^2 \text{ sau } \frac{x^2 + y^2}{c^2 - a^2} - \frac{z^2}{a^2} + 1 = 0.$$

Prin urmare, locul geometric este un hiperboloid cu două pînze, de rotație în jurul axei Oz .

3. Să se găsească proiecția pe planul xOy a curbei de intersecție a elipsoidului $x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} - 1 = 0$ cu planul $x + y + z - 1 = 0$ și să i se determine centrul de simetrie.

Rezolvare. Prin eliminarea lui z între ecuațiile curbei de intersecție $(C) x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} - 1 = 0$, $x + y + z - 1 = 0$ obținem ecuația cilindrului proiectant $45x^2 + 18xy + 13y^2 - 18x - 18y - 27 = 0$. Deci ecuațiile proiecției sînt $z = 0$, $45x^2 + 18xy + 13y^2 - 18x - 18y - 27 = 0$. Deoarece $\delta = \begin{vmatrix} 45 & 9 \\ 9 & 13 \end{vmatrix} > 0$ și $\Delta \neq 0$, rezultă că proiecția este o elipsă. Coordonatele centrului satisfac sistemul $45x + 9y - 9 = 0$, $9x + 13y - 9 = 0$ și deci $x = \frac{1}{14}$, $y = \frac{9}{14}$.

4. Se dă hiperboloidul cu o pînză $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} - 1 = 0$ și planul $(P) 4x - 5y - 10z - 20 = 0$. a) Să se scrie generatoarele rectilinii care trec prin punctul $M_0(-5, 4, 2)$. b) Să se arate că planul P intersectează hiperboloidul dat după două generatoare rectilinii ale căror ecuații se cer a fi determinate.

Rezolvare. Cele două familii de generatoare sînt, după (3) și (4), date de

$$(G_\lambda) \quad \frac{x}{5} + \frac{z}{2} = \lambda \left(1 + \frac{y}{4} \right), \quad \frac{x}{5} - \frac{z}{2} = \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{y}{4} \right), \quad \lambda \in \mathbf{R},$$

$$(G_\mu) \quad \frac{x}{5} + \frac{z}{2} = \mu \left(1 - \frac{y}{4} \right), \quad \frac{x}{5} - \frac{z}{2} = \frac{1}{\mu} \left(1 + \frac{y}{4} \right), \quad \mu \in \mathbf{R}.$$

a) Pentru determinarea generatoarelor rectilinii cerute vom pune condiția ca $x = -5$, $y = 4$, $z = 2$ să verifice ecuațiile de mai sus. Obținem $\lambda = 0$ și $\mu = 0$, astfel că generatoarele cerute sînt $2x + 5z = 0$, $y = 4$ și $2x + 5z = 0$, $y = -4$.

b) Pentru ca planul P să intersecteze hiperboloidul cu o pînză după două generatoare rectilinii trebuie să existe $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ astfel încît G_λ și G_μ să fie conținute în P . Pentru ca P să conțină G_λ

este necesar și suficient ca sistemul $4x - 5y - 10z - 20 = 0$, $4x - 5\lambda y + 10z - 20\lambda = 0$, $4\lambda x + 5y - 10\lambda z - 20 = 0$ să fie compatibil simplu nedeterminat. Aceasta implică $\lambda = 1$ și deci una din generatoare este $4x - 5y + 10z - 20 = 0$, $4x + 5y - 10z - 20 = 0$. Pentru ca P să conțină G_μ este necesar și suficient ca sistemul $4x - 5y - 10z - 20 = 0$, $4x + 5\mu y + 10z - 20\mu = 0$, $4\mu x - 5y - 10\mu z - 20 = 0$ să fie compatibil simplu nedeterminat. Aceasta arată că $\mu = 1$ și deci cealaltă generatoare este $4x + 5y + 10z - 20 = 0$, $4x - 5y - 10z - 20 = 0$.

5. Să se determine locul geometric generat de dreptele $2x - 3\alpha y + 6z - 6\alpha = 0$, $2\alpha x + 3y - 6\alpha z - 6 = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Rezolvare. Eliminând pe α din cele două ecuații, găsim $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 - 1 = 0$, ce reprezintă un hiperboloid cu o pînă.

6. Să se scrie ecuațiile generatoarelor rectilinii ce trec prin punctul $M_0(1, 3, -1)$ aparținînd paraboloidului hiperbolic $4x^2 - z^2 = y$.

Rezolvare. Folosind formule similare cu (8) și (9), rezultă că cele două familii de generatoare ale paraboloidului dat sînt

$$(G_\lambda) \quad 2x + z = \lambda y, \quad 2x - z = \frac{1}{\lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

$$(G_\mu) \quad 2x - z = \mu y, \quad 2x + z = \frac{1}{\mu}, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Punînd condiția ca aceste generatoare să treacă prin punctul M_0 , găsim $\lambda = \frac{1}{3}$ și $\mu = 1$. Prin urmare, cele două generatoare rectilinii sînt $6x + 3z - y = 0$, $2x - z - 3 = 0$ și $2x - z - y = 0$, $2x + z - 1 = 0$.

9.5.2. Probleme propuse spre rezolvare

7. Fiînd date punctele fixe $F(0, 0, c)$ și $F'(0, 0, -c)$, se cere locul geometric al punctelor din spațiu, a căror diferență a distanțelor la cele două puncte fixe este constantă și egală cu $2a$, $c > a$.

8. Fie punctul $F(0, 0, c)$ și planul $(P) z - \frac{a^2}{c} = 0$. Se cere locul geometric al punctelor din spațiu, astfel ca raportul distanțelor lor la punctul F și planul P să fie constant și egal cu $\frac{c}{a}$, $c < a$.

9. Fie punctul $F(0, 0, \frac{p}{2})$ și planul $(P) z + \frac{p}{2} = 0$. Se cere locul geometric al punctelor din spațiu, ale căror distanțe la punctul F și planul P sînt egale.

10. Să se găsească punctele de intersecție ale elipsoidului $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} - 1 = 0$ cu dreapta $x = 4 + 2t$, $y = -6 - 3t$, $z = -2 - 2t$.

11. Să se determine curbele de intersecție ale elipsoidului $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} - 1 = 0$ cu planele de coordonate.

12. Să se scrie ecuația planului tangent la elipsoidul $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{9} - 1 = 0$ în punctele lui de intersecție cu dreapta $x = y = z$.

13. Să se găsească proiecțiile pe planele de coordonate ale curbei de intersecție a elipsoidului $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{3} - 1 = 0$ cu planul $2x - 3y + 4z - 11 = 0$. Să se determine centrul fiecăreia din proiecții.
14. Să se găsească punctele de intersecție ale dreptei $x - 3 = y - 1 = \frac{z - 6}{3}$ cu hiperboloidul :
- a) $\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{9} - 1 = 0$; b) $\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{9} + 1 = 0$.
15. Să se determine proiecția pe planul xOz a curbei de intersecție a hiperboloidului : a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} + z^2 - 1 = 0$; b) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} + z^2 + 1 = 0$, cu planul $2x + y - z + 1 = 0$.
16. Să se scrie ecuațiile dreptelor care trec prin punctul $M_0(6, 2, 8)$ și se află pe hiperboloidul $16x^2 + 36y^2 - 9z^2 - 144 = 0$.
17. Să se determine locul geometric generat de dreptele $2x + 3xy + 6z - 6\alpha = 0$, $2\alpha x - 3y - 6\alpha z - 6 = 0$, $\alpha \in R$.
18. Să se scrie ecuațiile generatoarelor rectilinii ale hiperboloidului cu o pînză $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} - 1 = 0$, paralele cu planul $6x + 4y + 3z - 17 = 0$.
19. Să se găsească punctele de intersecție ale dreptei $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}$ cu : a) paraboloidul eliptic $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 2z$; b) paraboloidul hiperbolic $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 2z$.
20. Să se scrie ecuația planelor tangente în punctele de intersecție ale dreptei $x = y = z$ cu : a) paraboloidul eliptic $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 9z$; b) paraboloidul hiperbolic $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 9z$.
21. Să se scrie ecuațiile generatoarelor rectilinii ale paraboloidului $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = z$, care sînt paralele cu planul $3x + 2y - 4z = 0$.
22. Să se determine ecuațiile generatoarelor rectilinii ale paraboloidului hiperbolic $4x^2 - 9y^2 = 36z$, ce trec prin punctul $M_0(3, 0, 1)$.
23. Să se calculeze unghiul format de generatoarele rectilinii ale hiperboloidului cu o pînză $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} - 1 = 0$, care sînt paralele cu planul $x + 2y + z - 4 = 0$.

Fie f o funcție F definită pe I .
 Reciproc, orice
 Se numește
 tează $\int f(x)dx$.

Prezentăm
 1. Integraz

- 1) $\int x^n dx$
- 2) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$
- 3) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$
- 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$
- 5) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$
- 6) $\int a^x dx$
- 7) $\int \sin x dx$
- 8) $\int \frac{dx}{\cos x}$
- 9) $\int \frac{dx}{\sin x}$
- 10) $\int \frac{dx}{\cos x}$
- 11) $\int \operatorname{sh} x dx$

10. INTEGRAREA FUNCȚIILOR

10.1. Primitive

Fie f o funcție reală definită pe un interval I . Se numește primitivă a funcției f pe I orice funcție F definită și derivabilă pe I astfel ca $F'(x) = f(x)$ pentru orice $x \in I$. Dacă F este o primitivă a funcției f pe I , atunci $F + C$ este o primitivă a funcției f pe intervalul I , oricare ar fi constanta C . Reciproc, orice primitivă a lui f este de forma $F + C$.

Se numește integrală nedefinită a funcției f mulțimea tuturor primitivelor funcției f și se notează $\int f(x)dx$. Avem

$$\int af(x)dx = a \int f(x)dx \text{ și } \int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Prezentăm câteva metode de calcul al primitivelor.

1. Integrarea directă. *Principalele tipuri de integrale:*

- 1) $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, n \neq -1; \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$
- 2) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arccotg} \frac{x}{a} + C, a \neq 0;$
- 3) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, a \neq 0;$
- 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C, a \neq 0;$
- 5) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C = -\operatorname{arccos} \frac{x}{a} + C, a > 0;$
- 6) $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C, a > 0; \int e^x dx = e^x + C;$
- 7) $\int \sin x dx = -\cos x + C; \int \cos x dx = \sin x + C;$
- 8) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C; \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$
- 9) $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C = \ln |\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x| + C;$
- 10) $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C = \ln |\operatorname{tg} x + \sec x| + C;$
- 11) $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C; \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C;$

$$12) \int \sqrt{x^2 + a} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + a}| + C, a \neq 0;$$

$$13) \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}, a > 0.$$

2. Calculul primitivelor cu ajutorul schimbării de variabilă. Fie funcțiile $u: I \rightarrow J$ și $f: J \rightarrow R$. Presupunem că u are derivată continuă pe I și că f este continuă pe J . Dacă $\int f(t)dt = F(t) + C$, atunci $\int f(u(x))u'(x)dx = F(u(x)) + C$.

3. Metoda integrării prin părți. Fie f și g două funcții definite pe intervalul I . Dacă f și g au derivate continue pe I , atunci se poate aplica formula de integrare prin părți

$$\int fg'dx = fg - \int gf'dx.$$

4. Primitivele funcțiilor raționale în x . Fie $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, cu $\text{grad } P(x) < \text{grad } Q(x)$. Dacă $Q(x) = (x - x_1)^{\alpha_1} \dots (x - x_k)^{\alpha_k}$, unde $x_j, j = 1, 2, \dots, k$, sînt rădăcinile reale distincte ale polinomului $Q(x)$ și $\alpha_j \in N, j = 1, 2, \dots, k$, este ordinul de multiplicitate al rădăcinii x_j , atunci descompunerea în fracții simple a lui $R(x)$ este

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{A_{\alpha_1}}{(x - x_1)^{\alpha_1}} + \dots + \frac{L_1}{x - x_k} + \dots + \frac{L_\alpha}{(x - x_k)^\alpha}. \quad (1)$$

Dacă polinomul $Q(x)$ are rădăcini complexe de forma $a \pm ib$ de ordin de multiplicitate m , atunci în descompunerea (1) apar fracții simple de forma

$$\frac{A_1x + B_1}{x^2 + px + q} + \dots + \frac{A_mx + B_m}{(x^2 + px + q)^m}, \text{ unde } x^2 + px + q = (x - a - ib)(x - a + ib). \quad (2)$$

Dacă $\text{grad } P(x) \geq \text{grad } Q(x)$, atunci se face împărțirea, astfel că $R(x) = C(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$, cu $\text{grad } P_1(x) < \text{grad } Q(x)$ și $C(x)$ un polinom în x . Reducem astfel problema la cazul tratat mai sus

5. Integrarea anumitor funcții iraționale. a) *Integrale de tipul*

$$\int R \left[x, \left(\frac{ax + b}{cx + d} \right)^{p_1/q_1}, \dots, \left(\frac{ax + b}{cx + d} \right)^{p_r/q_r} \right] dx, \quad (3)$$

unde R este o funcție rațională și $p_1, q_1, \dots, p_r, q_r$ sînt numere întregi. Dacă $n = \text{c.m.m.m.c.}(q_1, \dots, q_r)$, cu schimbarea de variabilă

$$\frac{ax + b}{cx + d} = t^n \quad (4)$$

integrala (3) se reduce la o integrală a unei funcții raționale.

b) *Integrale de tipul*

$$\int \frac{P_m(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx, P_m(x) \text{ fiind polinom de grad } m. \quad (5)$$

Se scrie

$$\int \frac{P_m(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = Q_{m-1}(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}, \quad (6)$$

unde $Q_{m-1}(x)$ este un polinom de grad $m - 1$ cu coeficienți nedeterminați, iar λ este un parametru real. Se determină polinomul $Q_{m-1}(x)$ și numărul λ prin derivarea identității (6).

c) *Integrale de tipul*

$$\int \frac{dx}{(x - \alpha)^n \sqrt{ax^2 + bx + c}}. \quad (7)$$

Cu ajutorul substituției

$$\frac{1}{x-a} = t \quad (8)$$

această se reduce la tipul precedent.

d) *Integrale binome*

$$\int x^m(ax^n + b)^p dx, m, n, p \in \mathbb{Q}. \quad (9)$$

Calculul primitivelor funcțiilor binomiale se reduce la calculul primitivelor funcțiilor raționale numai în următoarele cazuri stabilite de Cebişev:

1) $p \in \mathbb{Z}$. Se face substituția $x = z^r$, unde r este multiplu comun al numitorului lui m și n .

2) $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$. Se face substituția $ax^n + b = z^s$, unde s este numitorul lui p .

3) $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$. Se face substituția $a + bx^{-n} = z^s$.

6. **Primitivele funcțiilor raționale în $\sin x$ și $\cos x$:** $\int R(\sin x, \cos x) dx$, unde $R(u, v)$ este o funcție rațională. Substituția $\text{tg } \frac{x}{2} = t$ conduce la calculul primitivei unei funcții raționale în t .

Se ține seama că

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2}{1+t^2} dt. \quad (10)$$

Calculul primitivei date poate fi simplificat în următoarele cazuri:

a) $R(\sin x, \cos x) = -R(-\sin x, \cos x) \Rightarrow \cos x = t$;

b) $R(\sin x, \cos x) = -R(\sin x, -\cos x) \Rightarrow \sin x = t$;

c) $R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos x) \Rightarrow \text{tg } x = t$.

7. **Integrale algebrice** $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$, unde $R(u, v)$ este o funcție rațională. Calculul integralelor algebrice se reduce la calculul primitivelor funcției raționale astfel:

a) dacă ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ are rădăcinile reale x_1 și x_2 , se face substituția

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_1) \text{ \{sau } t(x - x_2)\}; \quad (11)$$

b) dacă $a > 0$, atunci se face substituția

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = x\sqrt{a} + t; \quad (12)$$

c) dacă $c > 0$, atunci se face substituția

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{c} + tx. \quad (13)$$

10.1.1. Probleme rezolvate

1. Folosind substituții trigonometrice, să se calculeze:

a) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$; b) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx$; c) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Rezolvare. a) Substituția $x = \sin t$ conduce la

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int \frac{\sin^2 t \cos t}{\cos t} dt = \int \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} t - \frac{1}{4} \sin 2t + C = \\ &= \frac{1}{2} \arcsin x - \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

$$b) x = \operatorname{tg} t \Rightarrow \int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx = \int \frac{1}{\sin t \cos^2 t} dt = \int \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin t \cos^2 t} dt = \int \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt + \int \frac{dt}{\sin t} =$$

$$= \frac{1}{\cos t} + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| + C = \sqrt{x^2+1} - \ln \left| \frac{1 + \sqrt{x^2+1}}{x} \right| + C.$$

$$c) x = \frac{1}{\cos t} \Rightarrow dx = \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt \text{ și } \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}} = \int dt = t + C = \arccos \frac{1}{x} + C.$$

2. Folosind substituții hiperbolice, să se calculeze:

a) $\int \sqrt{x^2 - 2x + 2} dx$; b) $\int \sqrt{x^2 + 2x} dx$; c) $\int (3 - 2x - x^2)^{-3/2} dx$.

Rezolvare. a) Scriem $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$ și facem substituția $x-1 = \operatorname{sh} t$, astfel că $dx = \operatorname{ch} t dt$ deci

$$\int \sqrt{x^2 - 2x + 2} dx = \int \sqrt{\operatorname{sh}^2 t + 1} \operatorname{ch} t dt = \int \operatorname{ch}^2 t dt = \frac{1}{2} \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t + \frac{1}{2} t + C =$$

$$= \frac{x-1}{2} \sqrt{x^2 - 2x + 2} + \frac{1}{2} \ln |x-1 + \sqrt{x^2 - 2x + 2}| + C.$$

În calculele anterioare am folosit relațiile $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$;

$$\operatorname{ch}^2 t = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} 2t + 1); \quad x-1 = \operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

b) $x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$. Substituția convenabilă este $x+1 = \operatorname{ch} t$ cu $dx = \operatorname{sh} t dt$. Deci

$$\int \sqrt{x^2 + 2x} dx = \int \sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1} \operatorname{sh} t dt = \int \operatorname{sh}^2 t dt = \int \frac{1}{2} (\operatorname{ch} 2t - 1) dt = \frac{1}{2} \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t - \frac{1}{2} t + C =$$

$$= \frac{x+1}{2} \sqrt{x^2 + 2x} - \frac{1}{2} \ln |x+1 + \sqrt{x^2 + 2x}| + C.$$

c) $3 - 2x - x^2 = 4 - (x+1)^2$. Efectuăm substituția $x+1 = 2 \operatorname{th} t$; $dx = \frac{2}{\operatorname{ch}^2 t} dt$ și

$$4 - (x+1)^2 = 4(1 - \operatorname{th}^2 t) = 4 \frac{\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t} = \frac{4}{\operatorname{ch}^2 t}.$$

Deci

$$\int (3 - 2x - x^2)^{-3/2} dx = \int \left(\frac{2^2}{\operatorname{ch}^2 t} \right)^{-3/2} \frac{2}{\operatorname{ch}^2 t} dt = \frac{1}{4} \int \operatorname{ch} t dt = \frac{1}{4} \operatorname{sh} t + C =$$

$$= \frac{1}{4} (x+1) (3 - 2x - x^2)^{-1/2} + C, \text{ deoarece } \operatorname{sh}^2 t = \operatorname{ch}^2 t - 1 = \frac{(1+x)^2}{3 - 2x - x^2}.$$

3. Utilizând metoda integrării prin părți, să se calculeze:

a) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} e^{\operatorname{arcsin} x} dx$; b) $\int e^x \cos x dx$; c) $\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Rezolvare. a) Fie $f(x) = e^{\operatorname{arcsin} x}$, $g'(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ astfel că $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} e^{\operatorname{arcsin} x}$ și $g(x) = -\sqrt{1-x^2}$. Integrând prin părți, obținem

$$I = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} e^{\operatorname{arcsin} x} dx = -\sqrt{1-x^2} e^{\operatorname{arcsin} x} + \int e^{\operatorname{arcsin} x} dx.$$

Ultima integrală se calculează folosind din nou formula de integrare prin părți. Luăm $f(x) = e^{\operatorname{arcsin} x}$ și $g'(x) = 1$, astfel că $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} e^{\operatorname{arcsin} x}$ și $g(x) = x$. Deci

$$\int e^{\operatorname{arcsin} x} dx = x e^{\operatorname{arcsin} x} - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} e^{\operatorname{arcsin} x} dx = x e^{\operatorname{arcsin} x} - I.$$

Înlocuind mai sus, deducem

$$I = \frac{1}{2} \left(-\sqrt{1-x^2} + x \right) e^{\arcsin x} + C.$$

b) Procedăm ca la punctul precedent. Fie $f(x) = e^x$, $g'(x) = \cos x$, astfel că $f'(x) = e^x$ și $g(x) = \sin x$. Obținem

$$I = \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx.$$

Alegem acum $f(x) = e^x$, $g'(x) = \sin x$, $f'(x) = e^x$, $g(x) = -\cos x$, astfel că

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = -e^x \cos x + I.$$

Înlocuind mai sus, obținem

$$I = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + C.$$

c) Fie $I_n = \int (x^2 + a^2)^{-n} dx$. Integrăm prin părți, luând

$f(x) = (x^2 + a^2)^{-n}$, $g'(x) = 1$ și deci $f'(x) = -2nx(x^2 + a^2)^{-n-1}$, $g(x) = x$. Obținem

$$I_n = x(x^2 + a^2)^{-n} + 2n \int x^2(x^2 + a^2)^{-n-1} dx = x(x^2 + a^2)^{-n} + 2n \int [(x^2 + a^2) - a^2](x^2 + a^2)^{-n-1} dx,$$

$$I_n = x(x^2 + a^2)^{-n} + 2n \int (x^2 + a^2)^{-n} dx - 2na^2 \int (x^2 + a^2)^{-n-1} dx,$$

$$I_n = x(x^2 + a^2)^{-n} + 2nI_n - 2na^2I_{n+1},$$

de unde se obține următoarea formulă de recurență :

$$I_{n+1} = \frac{x}{2na^2} (x^2 + a^2)^{-n} + \frac{2n-1}{2na^2} I_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Deoarece $I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + C$, din relația de recurență putem obține succesiv I_2, I_3, \dots

4. Să se calculeze :

a) $\int \frac{x+3}{x^3-x} dx$; b) $\int \frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x} dx$; c) $\int \frac{x+1}{2x^2+3x+2} dx$;

d) $\int \frac{x+1}{(x^2+4x+5)^2} dx$; e) $\int \frac{dx}{(x^3-1)^2}$; f) $\int \frac{x^2}{2x^3-4x+1} dx$.

Rezolvare. a) Descompunerea în fracții simple este

$$\frac{x+3}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}.$$

Înmulțind această relație cu x și apoi făcând $x=0$, obținem $A = -3$. Înmulțim cu $x-1$ și apoi facem $x=1$; rezultă $B = 2$. Similar, obținem $C = 1$. Deci

$$\int \frac{x+3}{x^3-x} dx = \int \left(-\frac{3}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right) dx = -3 \ln|x| + 2 \ln|x-1| + \ln|x+1| + C.$$

b) Rădăcinile numitorului sînt $x_1 = 0$, $x_2 = x_3 = -1$. Descompunerea în fracții simple are forma

$$\frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}.$$

Aducând la același numitor și egalând coeficienții termenilor de același grad, obținem $A = 2$, $B = -1$ și $C = -6$. Deci

$$\int \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 + 2x^2 + x} dx = \int \left[\frac{2}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{6}{(x+1)^2} \right] dx = 2 \ln|x| - \ln|x+1| + \frac{6}{x+1} + C.$$

c) Numitorul are rădăcini complexe și deci $2x^2 + 3x + 2 = 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x + 1\right) = 2\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}\right]$. Deci

$$\int \frac{x+1}{2x^2+3x+2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{4x+3}{2x^2+3x+2} dx + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{2x^2+3x+2} = \frac{1}{4} \ln(2x^2+3x+2) + \frac{1}{8} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}} = \frac{1}{4} \ln(2x^2+3x+2) + \frac{1}{8} \frac{4}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{4x+3}{\sqrt{7}} + C.$$

d) Numitorul are rădăcini complexe și deci se poate scrie ca sumă de pătrate: $x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1$. Mai întâi facem să apară la numărător derivata parantezei de la numitor:

$$\int \frac{x+1}{(x^2+4x+5)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+4}{(x^2+4x+5)^2} dx - \int \frac{dx}{(x^2+4x+5)^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+4x+5} - \int \frac{dx}{[(x+2)^2+1]^2}.$$

În ultima integrală notăm $x+2 = z$ și obținem

$$I_2 = \int \frac{dx}{[(x+2)^2+1]^2} = \int \frac{dz}{(z^2+1)^2}.$$

Ținând seama de exercițiul 3, c) (în care se ia $n = 1$), obținem

$$I_2 = \frac{z}{2} (z^2+1)^{-1} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} z + C = \frac{x+2}{2(x^2+4x+5)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x+2) + C,$$

astfel că

$$\int \frac{x+1}{(x^2+4x+5)^2} dx = -\frac{x+3}{2(x^2+4x+5)} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x+2) + C.$$

e) $(x^3 - 1)^2 = (x-1)^2(x^2+x+1)^2$. Descompunerea în fracții simple este

$$\frac{1}{(x^3-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+x+1)^2}.$$

Prin identificare se obține $A = -\frac{2}{9}$, $B = \frac{1}{9}$, $C = \frac{2}{9}$, $D = \frac{1}{3}$, $E = \frac{1}{3}$, $F = \frac{1}{3}$. Apoi

$$\frac{1}{9} \int \frac{2x+3}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{9} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx + \frac{2}{9} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{9} \ln(x^2+x+1) + \frac{4}{9\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}};$$

$$B = -1$$

$$+ C.$$

$$\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 +$$

$$\frac{1}{3} \int \frac{x+1}{(x^2+x+1)^2} dx = \frac{1}{6} \int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} dx + \frac{1}{6} \int \frac{dx}{\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]^2} =$$

$$= -\frac{1}{6} \frac{1}{x^2+x+1} + \frac{1}{6} \left[\frac{2x+1}{3} \cdot \frac{1}{x^2+x+1} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right].$$

În final obținem

$$\int \frac{dx}{(x^3-1)^2} = -\frac{x}{3(x^3-1)} + \frac{1}{9} \ln \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

f) Efectuăm mai întâi împărțirea $\frac{x^3}{2x^2-4x+1} = \frac{x}{2} + 1 + \frac{1}{2} \frac{7x-2}{2x^2-4x+1}$ astfel că

$$\int \frac{x^3}{2x^2-4x+1} dx = \frac{x^2}{4} + x + \frac{1}{4} \int \frac{7x-2}{x^2-2x+\frac{1}{2}} dx = \frac{x^2}{4} + x + \frac{7}{8} \int \frac{2x-2}{x^2-2x+\frac{1}{2}} dx +$$

$$+ \frac{5}{4} \int \frac{dx}{(x-1)^2 - \frac{1}{2}} = \frac{x^2}{4} + x + \frac{7}{8} \ln \left| x^2 - 2x + \frac{1}{2} \right| + \frac{5\sqrt{2}}{8} \ln \left| \frac{x\sqrt{2}-1-\sqrt{2}}{x\sqrt{2}+1-\sqrt{2}} \right| + C.$$

5. Să se calculeze:

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}}$; b) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1-\sqrt[4]{2x-1}}}$; c) $\int x^2 \sqrt{x^2+4} dx$;

d) $\int \frac{dx}{x^5 \sqrt{x^3-1}}$; e) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$; f) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

Rezolvare. a) Pentru eliminarea radicalilor se face substituția $x = t^6$, astfel că

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}} = \int \frac{6t^5}{t^3+t^2} dt = 6 \int \frac{t^3}{t+1} dt = 6 \int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt =$$

$$= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6 \ln|t+1| + C = 2x^{1/2} - 3x^{1/3} + 6x^{1/6} - 6 \ln|x^{1/6}+1| + C.$$

b) Procedăm similar, punind $2x-1 = t^4$, astfel încât

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1-\sqrt[4]{2x-1}}} = \int \frac{2t^3}{t^2-t} dt = 2 \int \left(t+1 + \frac{1}{t-1} \right) dt = t^2 + 2t + \ln|t-1|^2 +$$

$$+ C = (2x-1)^{1/2} + 2(2x-1)^{1/4} + \ln[(2x-1)^{1/4}-1]^2 + C.$$

c) $\int x^2 \sqrt{x^2+4} dx = \int \frac{x^2(x^2+4)}{\sqrt{x^2+4}} dx = (a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4) \sqrt{x^2+4} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$.

Derivând, obținem

$$\frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}} = (3a_1x^2 + 2a_2x + a_3) \sqrt{x^2+4} + (a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4) \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+4}};$$

aducând la același numitor și identificând coeficienții puterilor lui x , găsim $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_2 = 0$, $a_3 = \frac{1}{2}$,

$a_4 = 0$ și $\lambda = -2$. Prin urmare,

$$\int x^2 \sqrt{x^2+4} dx = \frac{1}{4} (x^3 + 2x) \sqrt{x^2+4} - 2 \ln(x + \sqrt{x^2+4}) + C.$$

d) Efectuăm mai întâi substituția $x = \frac{1}{t}$ și obținem

$$\int \frac{dx}{x^5 \sqrt{x^2 - 1}} = - \int \frac{t^4 dt}{\sqrt{1 - t^2}}$$

Pentru ultima integrală procedăm ca la punctul anterior. Avem

$$- \int \frac{t^4 dt}{\sqrt{1 - t^2}} = (a_1 t^3 + a_2 t^2 + a_3 t + a_4) \sqrt{1 - t^2} + \lambda \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$$

și prin derivare în raport cu t obținem

$$- \frac{t^4}{\sqrt{1 - t^2}} = (3a_1 t^2 + 2a_2 t + a_3) \sqrt{1 - t^2} - (a_1 t^3 + a_2 t^2 + a_3 t + a_4) \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1 - t^2}}$$

Prin identificare obținem $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_2 = 0$, $a_3 = \frac{3}{8}$, $a_4 = 0$, $\lambda = -\frac{3}{8}$, astfel că

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^5 \sqrt{x^2 - 1}} &= \frac{1}{8} (2t^2 + 3t) \sqrt{1 - t^2} - \frac{3}{8} \arcsin t + C = \\ &= \frac{1}{8x^4} (2 + 3x^2) \sqrt{x^2 - 1} - \frac{3}{8} \arcsin \frac{1}{x} + C. \end{aligned}$$

e) Este o integrală binomă cu $m = -\frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{4}$, $p = \frac{1}{3}$. Deoarece $\frac{m+1}{n} = 2 \in \mathbb{Z}$, se face substituția $1 + x^{1/4} = t^3$, astfel că $x = (t^3 - 1)^4$, $dx = 12t^2(t^3 - 1)^3 dt$. Deci

$$\begin{aligned} \int x^{-1/2} (1 + x^{1/4})^{1/3} dx &= 12 \int (t^6 - t^3) dt = \frac{12}{7} t^7 - 3t^4 + C = \\ &= \frac{12}{7} (1 + x^{1/4})^{7/3} - 3(1 + x^{1/4})^{4/3} + C. \end{aligned}$$

f) În acest caz, $m = 0$, $n = 4$ și $p = -\frac{1}{4}$. Deoarece $\frac{m+1}{n} + p = 0 \in \mathbb{Z}$, se efectuează substituția $1 + x^{-4} = t^4$. Deci $x = (t^4 - 1)^{-1/4}$ și $dx = -t^3(t^4 - 1)^{-5/4} dt$, astfel încât

$$\begin{aligned} \int (1 + x^4)^{-1/4} dx &= - \int \frac{t^2}{t^4 - 1} dt = \int \left[-\frac{1}{4} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) - \frac{1}{2} \frac{1}{t^2 + 1} \right] dt = \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{4} \ln \frac{(1 + x^{-4})^{1/4} + 1}{(1 + x^{-4})^{1/4} - 1} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} (1 + x^{-4})^{1/4} + C. \end{aligned}$$

6. Să se calculeze:

- a) $\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$; b) $\int \frac{\sin x}{1 + \sin^2 x} dx$; c) $\int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}$;
d) $\int \sin 3x \cos 5x dx$; e) $\int \sin 10x \sin 8x dx$; f) $\int \cos 2x \cos 4x \cos 5x dx$.

Rezolvare. a) Notăm $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ sau $x = 2 \operatorname{arctg} t$. Deci, după relațiile (10) obținem

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} = \int \frac{dt}{1 + t} = \ln |t + 1| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \right| + C.$$

b) Deoarece $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, efectuăm substituția $\cos x = t$, astfel că

$$\int \frac{\sin x}{1 + \sin^2 x} dx = \int \frac{dt}{t^2 - 2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t - \sqrt{2}}{t + \sqrt{2}} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\cos x - \sqrt{2}}{\cos x + \sqrt{2}} \right| + C.$$

c) Punem

d) Deoarece

e) $\sin 10x$

f) $\cos 2x$

astfel că

7. Să se

a) $\int \frac{dx}{x^2 - 1}$

Rezolvare.

b) Subst

$x =$

$\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$

c) Folos

$\int \frac{dx}{x^2 + 1}$

c) Punem $\operatorname{tg} x = t$, astfel că

$$\int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2} = \int \frac{dt}{(t+1)^2} = -\frac{1}{t+1} + C = -\frac{1}{\operatorname{tg} x + 1} + C.$$

d) Deoarece $\sin 3x \cos 5x = \frac{1}{2}(\sin 8x - \sin 2x)$, rezultă

$$\int \sin 3x \cos 5x dx = -\frac{1}{16} \cos 8x + \frac{1}{4} \cos 2x + C.$$

e) $\sin 10x \sin 8x = (\cos 2x - \cos 18x)/2$ și

$$\int \sin 10x \sin 8x dx = \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{36} \sin 18x + C.$$

f) $\cos 2x \cos 4x \cos 5x = \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 2x) \cos 5x = (\cos 11x + \cos x + \cos 7x + \cos 3x)/4$,

astfel că

$$\int \cos 2x \cos 4x \cos 5x dx = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{11} \sin 11x + \sin x + \frac{1}{7} \sin 7x + \frac{1}{3} \sin 3x \right) + C.$$

7. Să se calculeze:

a) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}$; b) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$; c) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

Rezolvare. a) $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$. Efectuăm substituția

$$\sqrt{x^2 - 3x + 2} = t(x-1). \text{ Obținem } x = \frac{t^2-2}{t^2-1}, dx = \frac{2t}{(t^2-1)^2} dt \text{ și}$$

$$\sqrt{x^2 - 3x + 2} = \frac{-t}{t^2-1}, t = \left(\frac{x-2}{x-1} \right)^{1/2}, \text{ astfel că}$$

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}} = 2 \int dt = 2t + C = 2 \left(\frac{x-2}{x-1} \right)^{1/2} + C.$$

b) Substituția $\sqrt{x^2+2x+2} = x+t$ implică

$$x = \frac{t^2-2}{2-2t}, dx = \frac{-2t^2+4t-4}{(2-2t)^2} dt \text{ și } 1 + \sqrt{x^2+2x+2} = \frac{t^2}{2(t-1)}. \text{ Deci}$$

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}} = \int \frac{t^2-2t+2}{t^2(1-t)} dt = \int \left(\frac{2}{t^2} - \frac{1}{t-1} \right) dt = -\frac{2}{t} - \ln|t-1| + C =$$

$$= -\frac{1}{x+1} (x + \sqrt{x^2+2x+2}) + \ln(x+1 + \sqrt{x^2+2x+2}) + C.$$

c) Folosim substituția $\sqrt{x^2+x+1} = 1+tx$ și deci

$$x = \frac{1-2t}{t^2-1}, \sqrt{x^2+x+1} = \frac{-t^2+t-1}{t^2-1}, dx = \frac{2(t^2-t+1)}{(t^2-1)^2} dt. \text{ Obținem}$$

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}} = -2 \int \frac{dt}{t^2-2t} = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t-2} \right) dt = \ln|t| - \ln|t-2| + C =$$

$$= \ln \left| \sqrt{x^2+x+1} - 1 \right| - \ln \left| \sqrt{x^2+x+1} - 1 - 2x \right| + C.$$

10.1.2. Probleme propuse spre rezolvare

8. Folosind substituțiile indicate, să se calculeze :

a) $\int \frac{dx}{e^x + 1}$, $x = -\ln t$; b) $\int x(5x^2 - 3)^7 dx$, $5x^2 - 3 = t$;

c) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$, $x = e^t$; d) $\int \sqrt{\frac{1 - \sqrt{x}}{x}} dx$, $x = t^2$;

e) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x+1}}$, $x+1 = t^2$; f) $\int \frac{\ln 2x}{\ln 4x} \cdot \frac{dx}{x}$, $x = e^t$.

9. Folosind substituții trigonometrice convenabile, să se calculeze :

a) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} dx$; b) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{2-x^2}}$; c) $\int \sqrt{1-x^2} dx$; d) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$;

e) $\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} dx$; f) $\int (1+x^2)^{3/2} dx$.

10. Utilizând substituții hiperbolice convenabile, să se calculeze :

a) $\int \sqrt{a^2+x^2} dx$, $a \neq 0$; b) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}} dx$, $a \neq 0$; c) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$;

d) $\int (1-2x-x^2)^{-3/2} dx$.

11. Folosind metoda substituției, să se calculeze :

a) $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{1-4^x}}$; b) $\int \frac{e^x dx}{e^x+1}$; c) $\int \frac{x + (\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}} dx$; d) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} dx$;

e) $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx$; f) $\int \frac{\cos 2x}{4+\cos^2 2x} dx$; g) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}}$.

12. Să se calculeze prin metoda integrării prin părți :

a) $\int \ln x dx$; b) $\int x e^{ax} dx$; c) $\int x a^x dx$; d) $\int \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} e^{\arctg x} dx$;

e) $\int \frac{1}{x^2} \ln^3 x dx$; f) $\int e^{ax} \cos bx dx$, $a \neq 0$, $b \neq 0$; g) $\int x^2 e^x \sin x dx$;

h) $\int x e^x \sin^2 x dx$; i) $\int x^2 e^{2x} dx$.

13. Să se determine o relație de recurență pentru calculul integralelor :

a) $I_n = \int x^n e^x dx$, $n \in \mathbb{N}$; b) $I_n = \int \ln^n x dx$, $n \in \mathbb{N}$; c) $I_n =$

$= \int (a^2 - x^2)^{-n} dx$, $a \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$; d) $I_n = \int \sin^n x dx$, $n \in \mathbb{N}$; e) $I_n =$

$= \int \sin^{-n} x dx$, $n \in \mathbb{N}$; f) $I_n = \int \operatorname{tg}^n x dx$, $n \in \mathbb{N}$; g) $I_n = \int e^{ax} \cos^n x dx$,

$a \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

14. Să se calculeze :

a) $\int \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x} dx$; b) $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6} dx$; c) $\int \frac{x^3+x+1}{x^3+x} dx$;

d) $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$; e) $\int \frac{dx}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+5)}$; f) $\int \frac{x^2+6x-1}{(x-3)^2(x-1)} dx$;

g) $\int \frac{x^2}{x^4-1} dx$; h) $\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2} dx$; i) $\int \frac{x^2 dx}{(x+2)^2(x+4)^2}$;

j) $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+x+1)^2}$; k) $\int \frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8} dx$; l) $\int \frac{dx}{x^4+x^3+1}$.

15. Să se ca

a) $\int \frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x+1}}$

d) $\int \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x+1}}$

16. Să se ca

a) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$

17. Să se ca

a) $\int x^3(1+2x)$

d) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\sqrt{1+x}}$

g) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x}}$

18. Să se ca

a) $\int \frac{dx}{3+5x}$

d) $\int \frac{\sin x(2+\cos x)}{\cos 2x}$

g) $\int \frac{\cos x}{\cos 2x}$

k) $\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$

p) $\int \sin x \cos x$

19. Să se ca

a) $\int \frac{dx}{x\sqrt{-x}}$

d) $\int \frac{dx}{2\sqrt{1-x}}$

20. Să se ca

a) $\int (x^2+1)$

d) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}}}$

g) $\int \frac{dx}{(x+1)}$

Fie f o fun
a intervalului
 $= \max_{1 \leq i \leq n} \delta_i$

15. Să se calculeze :

a) $\int \frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx$; b) $\int \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x+1}} dx$; c) $\int x \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{1/2} dx$;
 d) $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x+1}} dx$; e) $\int \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{1/3} dx$; f) $\int \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{1/3} \cdot \frac{dx}{x}$.

16. Să se calculeze :

a) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$; b) $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx$; c) $\int \frac{x^6}{\sqrt{1+x^2}} dx$; d) $\int \frac{dx}{(x+1)^3 \sqrt{x^2+2x}}$.

17. Să se calculeze :

a) $\int x^3(1+2x^2)^{-3/2} dx$; b) $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^3}}$; c) $\int x^{-2}(2+x^3)^{-5/3} dx$;
 d) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{1+\sqrt{x^3}}}$; e) $\int x^{-2}(1+x^2)^{-3/2} dx$; f) $\int x^3(1+x^2)^{-1/2} dx$;
 g) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$; h) $\int x^5 \sqrt[3]{(1+x^3)^2} dx$; i) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$.

18. Să se calculeze :

a) $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$; b) $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$; c) $\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3}$;
 d) $\int \frac{dx}{\sin x(2+\cos x-\sin x)}$; e) $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x} dx$; f) $\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^3} dx$;
 g) $\int \frac{\cos x}{\cos 2x} dx$; h) $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}$; i) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx$; j) $\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}$;
 k) $\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x}$; l) $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$; m) $\int \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} dx$; n) $\int \sin \frac{x}{3} \cos \frac{2x}{3} dx$;
 p) $\int \sin x \sin 2x \sin 3x dx$; q) $\int \sin x \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x}{3} dx$.

19. Să se calculeze, folosind substituțiile lui Euler, integralele :

a) $\int \frac{dx}{x\sqrt{-x^2+5x-6}}$; b) $\int \frac{x dx}{(x-1)\sqrt{1+x-x^2}}$; c) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}} dx$;
 d) $\int \frac{dx}{2\sqrt{1-x^2+1-x^2}}$; e) $\int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}$.

20. Să se calculeze :

a) $\int (x^2+1)^2 e^{2x} dx$; b) $\int x \sin x \cos 2x dx$; c) $\int e^{2x} \sin^2 x dx$;
 d) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}}$; e) $\int (x^{2/3}+x^{1/3})^{-2} dx$; f) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$;
 g) $\int \frac{dx}{(x+2)^2(x+3)^2}$.

10.2. Integrala definită

Fie f o funcție definită și mărginită pe $[a, b]$. Fie $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ o diviziune a intervalului $[a, b]$ și $\delta_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Norma diviziunii Δ este numărul $\nu(\Delta) = \max_{1 \leq i \leq n} \delta_i$.

Suma Riemann atașată funcției f , corespunzătoare diviziunii Δ , este definită prin

$$\sigma_{\Delta}(f) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \delta_i, \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]. \quad (1)$$

Funcția f este integrabilă pe $[a, b]$, $f \in \mathcal{T}([a, b])$, dacă există un număr $I \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că pentru orice șir de diviziuni (Δ_n) cu $v(\Delta_n) \rightarrow 0$ avem $\sigma_{\Delta_n}(f) \rightarrow I$, oricare ar fi punctele intermediare $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Numărul I se numește integrala lui f pe $[a, b]$ și se notează $I = \int_a^b f(x) dx$.

Funcția f este integrabilă pe $[a, b]$, $f \in \mathcal{T}([a, b])$, dacă și numai dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_{\varepsilon} > 0 |v(\Delta) < \delta_{\varepsilon} \Rightarrow |\sigma_{\Delta}(f) - I| < \varepsilon, \quad \forall \xi_i. \quad (2)$$

Fie $m_i = \inf f(x)$, $M_i = \sup f(x)$, pentru $x \in [x_{i-1}, x_i]$. Sumele Darboux superioară $S_{\Delta}(f)$ și inferioară $s_{\Delta}(f)$ se definesc prin

$$S_{\Delta}(f) = \sum_{i=1}^n M_i \delta_i, \quad s_{\Delta}(f) = \sum_{i=1}^n m_i \delta_i. \quad (3)$$

1. Criteriul lui Darboux. Funcția f este integrabilă pe $[a, b]$ dacă și numai dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_{\varepsilon} > 0 |v(\Delta) < \delta_{\varepsilon} \Rightarrow S_{\Delta}(f) - s_{\Delta}(f) < \varepsilon. \quad (4)$$

2. Clase de funcții integrabile. a) Orice funcție continuă pe $[a, b]$ este integrabilă pe $[a, b]$.

b) Orice funcție mărginită care are un număr finit de puncte de discontinuitate pe $[a, b]$ este integrabilă pe $[a, b]$.

c) Orice funcție monotonă pe $[a, b]$ este integrabilă pe $[a, b]$.

3. Proprietăți ale integralei definite și ale funcțiilor integrabile. a) Orice funcție integrabilă pe $[a, b]$ este mărginită pe $[a, b]$. Reciproca nu este, în general, adevărată.

b) Dacă $f, g \in \mathcal{T}([a, b])$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci $\alpha f + \beta g \in \mathcal{T}([a, b])$ și

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx.$$

c) $\int_a^b f dx = - \int_b^a f dx, \int_a^a f dx = 0.$

d) Dacă $f, g \in \mathcal{T}([a, b])$, atunci $fg \in \mathcal{T}([a, b])$.

e) Dacă $f, g \in \mathcal{T}([a, b])$ și $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$, atunci $\int_a^b f dx \leq \int_a^b g dx$. În particular, dacă $g(x) > 0$, atunci $\int_a^b g dx > 0$.

f) Dacă $f \in \mathcal{T}([a, b])$, atunci $|f| \in \mathcal{T}([a, b])$ și $|\int_a^b f dx| \leq \int_a^b |f| dx$. Reciproca nu este adevărată în general.

g) Dacă $f \in \mathcal{T}([a, b])$ și $m \leq f(x) \leq M$, atunci

$$m(b-a) \leq \int_a^b f dx \leq M(b-a); \quad (5)$$

există μ , cu $m \leq \mu \leq M$ astfel că

$$\int_a^b f dx = \mu(b-a) \text{ (prima formulă de medie)}. \quad (6)$$

h) Dacă f este continuă pe $[a, b]$, atunci există un punct $c \in [a, b]$, astfel încît

$$\int_a^b f dx = (b-a)f(c) \text{ (a doua formulă de medie)}. \quad (7)$$

i) Dacă $f \in \mathcal{F}([a, b])$ și $a < c < b$, atunci

$$\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx. \quad (8)$$

j) Dacă $f \in \mathcal{F}([a, b])$, și $F(x)$ este o primitivă a lui f pe $[a, b]$, atunci are loc formula Leibniz-Newton

$$\int_a^b f dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b. \quad (9)$$

k) Dacă $f \in \mathcal{F}([a, b])$, atunci funcția $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ este continuă pe $[a, b]$:

l) Dacă f este continuă pe $[a, b]$, atunci funcția $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ este derivabilă pe $[a, b]$ și $F'(x) = f(x)$.

4. Metoda integrării prin părți. Dacă f și g sînt funcții cu derivată continuă pe $[a, b]$, atunci

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx. \quad (10)$$

5. Metoda schimbării variabilei. a) Prima formulă de schimbare a variabilei. Fie $u: [a, b] \rightarrow J$ și $f: J \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă u are derivată continuă pe $[a, b]$ și f este continuă pe J , atunci

$$\int_a^b f(u(x))u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t) dt. \quad (11)$$

b) A doua formulă de schimbare a variabilei. Fie $u: [a, b] \rightarrow J$ și $f: J \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă: 1) u este strict monotonă pe $[a, b]$, 2) funcția inversă $v = u^{-1}$ are derivată continuă pe J , 3) f este continuă pe J , atunci

$$\int_a^b f(u(x)) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)v'(t) dt. \quad (12)$$

6. Aplicații ale integralei definite. Fie f o funcție continuă pe $[a, b]$. Aria \mathcal{A} a suprafeței mărginite de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = a$ și $x = b$, este dată de

$$\mathcal{A} = \int_a^b |f(x)| dx. \quad (13)$$

Volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox este dat de

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (14)$$

Dacă funcția f are derivată continuă, lungimea \mathcal{L} a arcului de curbă C , care are ecuația $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, este dată de

$$\mathcal{L} = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx. \quad (15)$$

Dacă $f(x) > 0$ este continuă pe $[a, b]$, coordonatele centrului de greutate al figurii mărginite de graficul funcției f , dreptele $x = a$, $x = b$ și axa Ox sînt

$$x_G = \frac{1}{M_1} \int_a^b xf(x) dx, \quad y_G = \frac{1}{2M_1} \int_a^b f^2(x) dx, \quad \text{unde } M_1 = \int_a^b f(x) dx. \quad (16)$$

7. Metode de calcul aproximativ al integralei definite. a) Metoda dreptunghiurilor. Fie $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, derivabilă pe $[a, b]$ cu derivată mărginită pe $[a, b]$ și Δ o diviziune a intervalului $[a, b]$ realizată prin punctele echidistante $x_i = a + ih$, $h = \frac{b-a}{n}$, $i = 0, 1, \dots, n$. Atunci

$$\int_a^b f(x) dx = h[f(a) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})] + R_n(f), \quad (17)$$

$$|R_n(f)| \leq hM'(b-a), \quad M' = \sup_{[a, b]} |f'(x)|.$$

b) *Metoda trapezelor.* Dacă $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ are derivata f'' mărginită pe $[a, b]$, atunci

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} \{f(a) + f(b) + 2[f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})]\} + R_n(f), \quad (18)$$

$$|R_n(f)| \leq \frac{h^2}{12} M''(b-a), \quad M'' = \sup_{[a, b]} |f''(x)|.$$

c) *Formula lui Simpson.* Dacă $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ are derivata $f^{(4)}$ mărginită pe $[a, b]$ și Δ este realizată prin punctele $x_i = a + ih$, $h = \frac{(b-a)}{(2n)}$, $i = 0, 1, \dots, 2n$, atunci

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} (b-a)^2 \{f(a) + f(b) + 4[f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{2n-1})] + 2[f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{2n-2})]\} + R_n(f), \quad (19)$$

$$|R_n(f)| \leq \frac{h^4}{2880} (b-a) M^{(4)}, \quad M^{(4)} = \sup_{[a, b]} |f^{(4)}(x)|.$$

10.2.1. Probleme rezolvate

1. Cu ajutorul sumelor integrale, să se calculeze integralele definite :

a) $\int_1^5 x^3 dx$; b) $\int_0^{10} 2^x dx$; c) $\int_0^\pi \sin x dx$.

Rezolvare. a) Deoarece $f(x) = x^3$ este continuă pe $[1, 5]$, rezultă că este integrabilă pe $[1, 5]$. Pentru calculul integralei este de ajuns să calculăm limita șirului $\sigma_\Delta(f)$ pentru o alegere convenabilă a diviziunii și a punctelor intermediare. Considerăm diviziunea $\Delta: x_i = 1 + ih$, $h = \frac{5-1}{n} = \frac{4}{n}$, $i = 0, 1, \dots, n$ și $\xi_i = x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Atunci

$$\begin{aligned} \sigma_\Delta(f) &= \sum_{i=1}^n x_i^3 h = \frac{4}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{4}{n} \cdot i\right)^3 = \frac{4}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{12}{n} i + \frac{48}{n^2} i^2 + \frac{64}{n^3} i^3\right) = \\ &= \frac{4}{n} \left[n + \frac{12}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{48}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{64}{n^3} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} \right] = \\ &= 4 \left[1 + 6 \cdot \frac{n+1}{n} + 8 \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} + 16 \cdot \frac{(n+1)^2}{n^2} \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 156. \end{aligned}$$

Deci $\int_1^5 x^3 dx = 156$.

b) Funcția este continuă pe $[0, 10]$ și este deci integrabilă pe acest interval. Considerăm $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, n$ și $h = \frac{10}{n}$.

Alegem $\xi_i = x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, și deci

$$\sigma_\Delta(f) = \sum_{i=1}^n 2^{\xi_i} h = \frac{10}{n} \sum_{i=1}^n 2^{ih} = \frac{10}{n} \sum_{i=1}^n (2^h)^i = \frac{10}{n} 2^h [1 + 2^h + (2^h)^2 + \dots + (2^h)^{n-1}] =$$

$$= \frac{10}{n} 2^h \frac{2^{hn} - 1}{2^h - 1} = \frac{10}{n} \frac{2^{10} - 1}{2^{10/n} - 1} \cdot (2^{10} - 1) = (2^{10} - 1) 2^{10/n} \cdot \frac{10}{2^{10/n} - 1} \cdot \frac{2^{10} - 1}{\ln 2}.$$

Deci $\int_0^{10} 2^x dx = \frac{2^{10} - 1}{\ln 2}$.

(18)

c) Funcția este integrabilă pe $[0, \pi]$. Considerăm diviziunea prin punctele echidistante $x_i = i \cdot \frac{\pi}{n}$, $i = 0, 1, \dots, n$, și alegem $\xi_i = x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$:

$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta}(f) &= \sum_{i=1}^n \left(\sin \frac{i\pi}{n} \right) \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n} \left[\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right] = \\ &= \frac{\pi}{n} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2n}} \rightarrow 2 \text{ și deci } \int_0^{\pi} \sin x dx = 2. \end{aligned}$$

(19)

2. Să se cerceteze integrabilitatea funcției

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \text{ este rațional,} \\ -1, & \text{dacă } x \text{ este irațional,} \end{cases} \text{ definită pe } [a, b].$$

Rezolvare. Pentru diviziunea $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, avem $\sigma_{\Delta}(f) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$.

Dacă alegem $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ număr rațional, atunci $\sigma_{\Delta}(f) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = b - a$ și deci $\sigma_{\Delta}(f) \rightarrow b - a$. Dacă alegem ξ_i număr irațional, atunci $f(\xi_i) = -1$ și deci $\sigma_{\Delta}(f) = a - b \rightarrow a - b$. Limita sumelor integrale depinzând de alegerea punctelor ξ_i , rezultă că funcția nu este integrabilă pe $[a, b]$.

3. Se poate ca suma a două funcții care nu sînt integrabile pe $[a, b]$ să fie integrabilă pe $[a, b]$? Dar produsul?

Rezolvare. Răspunsul este afirmativ. Considerăm funcțiile

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathcal{Q}, \\ -1, & x \in I, \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} -1, & x \in \mathcal{Q}, \\ 1, & x \in I, \end{cases} \quad \text{definite pe } [a, b]$$

și care nu sînt integrabile. Totuși funcția sumă $s(x) = f_1(x) + f_2(x) = 0$, ca și produsul $p(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) = -1$, este integrabilă pe $[a, b]$.

4. Folosind noțiunea de integrală definită, să se calculeze limitele șirurilor:

a) $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2}$; b) $a_n = \frac{1}{n^{p+1}} (1^p + 2^p + \dots + n^p)$, $p > 0$.

Rezolvare. a) Putem scrie $a_n = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n-1}{n} \right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i-1}{n} = \sigma_{\Delta}(f)$, unde

$f(x) = x$, $x \in [0, 1]$, $\Delta: x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, 1, \dots, n$ și $\xi_i = x_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Deci

$$\lim_n a_n = \lim_{v(\Delta) \rightarrow 0} \sigma_{\Delta}(f) = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

b) Avem $a_n = \frac{1}{n} \left[\left(\frac{1}{n} \right)^p + \left(\frac{2}{n} \right)^p + \dots + \left(\frac{n}{n} \right)^p \right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} \right)^p = \sigma_{\Delta}(f)$,

unde $f(x) = x^p$, $x \in [0, 1]$ și $\Delta: x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, 1, \dots, n$, iar $\xi_i = x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Prin urmare,

$$\lim_n a_n = \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}.$$

5. Să se calculeze o primitivă pentru funcția :

a) $f(x) = \max [1, x^2]$, definită pe $[0, 2]$;

b) $f(x) = \sqrt{1 + \cos x}$, definită pe $[0, 2\pi]$.

Rezolvare. a) Funcția $f(x)$ este continuă pe $[0, 2]$, deci o primitivă este funcția $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

Dacă $x \in [0, 1]$, atunci $F(x) = \int_0^x 1 \cdot dt = x$. Dacă $x \in (1, 2]$, atunci

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^1 1 \cdot dt + \int_1^x t^2 dt = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}.$$

b) Funcția $f(x)$ este continuă pe $[0, 2\pi]$ și deci primitiva este $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. Deoarece $f(x) = \sqrt{2} \left| \cos \frac{x}{2} \right|$, rezultă că dacă $x \in [0, \pi]$, atunci

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{2} \cos \frac{t}{2} dt = 2\sqrt{2} \sin \frac{x}{2}.$$

Dacă $x \in (\pi, 2\pi]$, atunci

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^\pi \sqrt{2} \cos \frac{t}{2} dt - \int_\pi^x \sqrt{2} \cos \frac{t}{2} dt = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \sin \frac{x}{2}.$$

6. Să se calculeze :

a) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) \sin x dx$, unde $f(x) = \max [\sin x, \sin^3 x]$, $x \in \mathbf{R}$;

b) $\int_{-1}^1 f(x) dx$, unde $f(x) = \max \left[\left(\frac{1}{3}\right)^x, 3^x \right]$, $x \in \mathbf{R}$.

Rezolvare. Folosim aditivitatea integralei ca funcție de interval. a) Deoarece $f(x) = \sin^3 x$, $x \leq 0$ și $f(x) = \sin x$, $x > 0$, obținem

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) \sin x dx &= \int_{-\pi/2}^0 \sin^4 x dx + \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx = \int_{-\pi/2}^0 \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx + \\ &+ \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \int_{-\pi/2}^0 \left[\frac{1}{4} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{1}{8} (1 + \cos 4x) \right] dx + \\ &+ \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \left(\frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{\sin 4x}{32} \right) \Big|_{-\pi/2}^0 + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{16}. \end{aligned}$$

b) În acest caz $f(x) = 3^{-x}$, $x \leq 0$ și $f(x) = 3^x$, $x > 0$, astfel că

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 3^{-x} dx + \int_0^1 3^x dx = -\frac{3^{-x}}{\ln 3} \Big|_{-1}^0 + \frac{3^x}{\ln 3} \Big|_0^1 = \frac{4}{\ln 3}.$$

7. Fără a calcula integralele, să se demonstreze următoarele inegalități :

a) $\frac{16}{3} \leq \int_4^6 \frac{x^2}{x+2} dx \leq 9$; b) $1 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e$.

Rezolvare. a) Funcția $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$ este strict crescătoare pe $[4, 6]$, astfel că $m = f(4) = \frac{8}{3}$ și $M = f(6) = \frac{9}{2}$. După relația (5) rezultă inegalitatea cerută.

b) În acest caz, $f(x) = e^{x^2}$ este strict crescătoare pe $[0, 1]$ și $1 \leq e^{x^2} \leq e$, $\forall x \in [0, 1]$. Aplicând inegalitatea (5), obținem inegalitatea cerută.

8. Fără a calcula integralele să se cerceteze care dintre ele are valoarea mai mare :

a) $I_1 = \int_2^{10} x \operatorname{arctg} x \, dx$, $I_2 = \int_2^{10} \ln(1+x^2) \, dx$;

b) $I_1 = \int_1^2 e^x \, dx$, $I_2 = \int_1^2 e^{x^2} \, dx$.

Rezolvare. a) Vom arăta că $x \operatorname{arctg} x > \ln(1+x^2)$, $x \in [2, 10]$. Considerăm funcția $h(x) = x \operatorname{arctg} x - \ln(1+x^2)$, $x \in \mathbb{R}$. Deoarece $h'(x) = \operatorname{arctg} x - \frac{x}{1+x^2}$, rezultă $h''(x) = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} \geq 0$ și deci $h'(x)$ este crescătoare pe \mathbb{R} . Deoarece $h'(0) = 0$, rezultă că pentru $x > 0$ avem $h'(x) > h'(0) = 0$ și deci $h(x)$ este crescătoare pentru $x \geq 0$. Cum $h(0) = 0$, rezultă că pentru $x > 0$ avem $h(x) > h(0) = 0$. Aceasta arată că $x \operatorname{arctg} x > \ln(1+x^2)$, $x \in [2, 10]$ și deci $I_1 > I_2$.

b) Deoarece $e^x \leq e^{x^2}$ pentru $x \in [1, 2]$, rezultă că $I_1 > I_2$.

9. Să se evalueze integralele :

a) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$; b) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} \, dx$.

Rezolvare. a) Fie $f(x) = (2+x-x^2)^{-1/2}$, $x \in [0, 1]$. Deoarece $f'(x) = -\frac{1}{2}(1-2x)(2+x-x^2)^{-3/2} = 0$ pentru $x = \frac{1}{2}$, care este punct de minim pentru $f(x)$, rezultă că $m = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$.

Apoi $M = f(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. După relația (5) avem

$$\frac{2}{3} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}} < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

b) Funcția $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ este descrescătoare pe $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, deoarece $f'(x) < 0$ pe acest interval.

Deci $m = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$ și $M = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$. După relația (5) obținem evaluarea

$$\frac{1}{2} < \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} \, dx < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

10. Să se calculeze integrala $J_m = \int_0^{\pi/2} \sin^m x \, dx$, $m \in \mathbb{N}$.

Rezolvare. Folosim integrarea prin părți: $f(x) = \sin^{m-1} x$, $g'(x) = \sin x$, $f'(x) = (m-1) \sin^{m-2} x \cos x$, $g(x) = -\cos x$. Deci

$$\begin{aligned} J_m &= -\sin^{m-1} x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + (m-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} x \cos^2 x \, dx = \\ &= (m-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} x (1 - \sin^2 x) \, dx = (m-1) J_{m-2} - (m-1) J_m, \end{aligned}$$

pentru $m > 1$. Prin urmare, $J_m = \frac{m-1}{m} J_{m-2}$, $\forall m \geq 2$. Deoarece $J_0 = \frac{\pi}{2}$ și $J_1 = 1$, din relația de mai înainte obținem

- pentru $m = 2n$: $J_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 3 \cdot 1}{2n(2n-2)\dots 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}$;

- pentru $m = 2n+1$: $J_{2n+1} = \frac{2n(2n-2)\dots 4 \cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\dots 3 \cdot 1}$.

11. Să se stabilească egalitatea

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{t}{\sin t} dt.$$

Rezolvare. Folosim substituția $x = \operatorname{tg} \frac{t}{2}$ în prima integrală.

12. Să se calculeze $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} u(x) dx$, dacă $u(x) = \sin x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ și $u(x) = x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right)$, cu ajutorul substituției $u(x) = t$.

Rezolvare. Funcția $u(x)$ este strict monotonă pe $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ și inversa sa este $u^{-1}(x) = \operatorname{arcsin} x$, $x \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ și $u^{-1}(x) = x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right)$. Funcția inversă are derivată continuă. După formula (12), avem

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} u(x) dx = \int_{-\pi/4}^0 t dt + \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt = -\frac{\pi^2}{32} + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

13. Să se calculeze integralele:

a) $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x + \cos^3 x}$; b) $\int_2^3 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$.

Rezolvare. a) Efectuăm substituția $\sin x = t$, deoarece funcția este impară în $\cos x$. Obținem

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x + \cos^3 x} = \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dt}{(1-t^2)(2-t^2)} = \int_0^{\sqrt{2}/2} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t-1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{t-\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{t+\sqrt{2}} \right) dt = \frac{1}{2} \left[\ln(2+\sqrt{2}) - \ln(2-\sqrt{2}) - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln 3 \right].$$

b) Efectuăm substituția $\sqrt{x^2-1} = t(x-1)$, $t = \frac{x+1}{x-1}^{1/2}$ sau $x = \frac{t^2+1}{t^2-1}$. Deci

$$\int_2^3 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = -\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

14. Să se demonstreze identitățile:

a) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$; b) $\int_0^b f(x) dx = \int_0^b f(b-x) dx$;

c) $\int_0^{2a} f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(2a-x)] dx$.

Rezolvare. a) În integrala din membrul drept efectuăm substituția $u(x) = a+b-x$, $du = -dx$:

$$\int_a^b f(a+b-x) dx = -\int_b^a f(u) du = \int_a^b f(x) dx.$$

b) Se ia $a=0$ în relația de la punctul a).

c) Cu substituția $u = 2a-x$, obținem

$$\int_0^a f(2a-x) dx = -\int_{2a}^a f(u) du = \int_a^{2a} f(x) dx,$$

astfel că

$$\int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(2a-x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_a^{2a} f(x) dx = \int_0^{2a} f(x) dx.$$

15. Să se calculeze și dreptele

Rezolvare.

astfel că $I_1 =$

16. Să se calculeze

Rezolvare.

Această integrală

se calculează

17. Să se calculeze

de curba dată

Rezolvare.

obținem

Cu aceeași substituție

În sfârșit

$\int_0^{\sqrt{2}}$

Coordonatele

15. Să se calculeze aria mărginită de graficul funcției $f(x) = e^{-x} \sin x$, axa Ox și dreptele $x = 0$ și $x = 2\pi$.

Rezolvare. Avem

$$A = \int_0^{2\pi} |f(x)| dx = \int_0^{2\pi} e^{-x} |\sin x| dx = \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x} \sin x dx = I_1 + I_2.$$

$$\text{Dar } I_1 = \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x dx = -e^{-x} \cos x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{-x} \cos x dx = e^{-\pi} + 1 -$$

$$- \int_0^{\pi} e^{-x} \cos x dx = e^{-\pi} + 1 - e^{-x} \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x dx = e^{-\pi} + 1 - I_1,$$

astfel că $I_1 = (e^{-\pi} + 1)/2$. Similar se obține $I_2 = (e^{-\pi} + e^{-2\pi})/2$, deci $A = e^{-\pi} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2\pi}$.

16. Să se calculeze lungimea curbei care are ecuația $f(x) = 2 \ln x$, $x \in [2, 2\sqrt{3}]$.

Rezolvare. $f'(x) = \frac{2}{x}$ și $1 + f'^2(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2}$. Prin urmare $L = \int_2^{2\sqrt{3}} \frac{1}{x} \sqrt{x^2 + 4} dx$.

Această integrală se calculează utilizând substituția $x = 2 \operatorname{tg} t$:

$$L = 2 \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dt}{\sin t \cos^2 t} = 2 \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin t \cos^2 t} dt = 2 \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dt}{\sin t} + 2 \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt =$$

$$= 2 \left(\ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| + \frac{1}{\cos t} \right) \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = 2 \left(\ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} - \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} + 2 - \sqrt{2} \right).$$

17. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al suprafeței mărginite de curba de ecuație $f(y) = \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}$, axa Ox și dreptele $x = 0$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Rezolvare. Conform formulei (16), vom calcula mai întâi numitorul M_1 . Cu substituția $x = \sin t$, obținem

$$M_1 = \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\pi/4} \sin^4 t dt = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/4} (1 - \cos 2t)^2 dt =$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\pi/4} \left(1 - 2 \cos 2t + \frac{1 + \cos 4t}{2} \right) dt = \frac{3\pi}{32} - \frac{1}{4}.$$

Cu aceeași substituție calculăm

$$\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\pi/4} \sin^5 t dt = \int_0^{\pi/4} (1 - \cos^2 t)^2 \sin t dt =$$

$$= \left(-\cos t - \frac{1}{5} \cos^3 t + \frac{2}{3} \cos^5 t \right) \Big|_0^{\pi/4} = \frac{8}{15} - \frac{43}{60\sqrt{2}}.$$

În sfârșit

$$\int_0^{\sqrt{2}/2} f^2(x) dx = \int_0^{\sqrt{2}/2} \left(-x^4 - x^4 - x^2 - 1 - \frac{1}{x^2 - 1} \right) dx = -\frac{1037}{840\sqrt{2}} + \ln(\sqrt{2} + 1).$$

Coordonatele centrului de greutate sînt

$$x_G = \frac{8(32\sqrt{2} - 43)}{15\sqrt{2}(3\pi - 8)}, \quad y_G = \left[-\frac{1037}{840\sqrt{2}} + \ln(\sqrt{2} + 1) \right] \cdot \frac{16}{3\pi - 8}.$$

18. Să se determine volumul corpului obținut prin rotirea curbei de ecuație $y = \sin x$, $x \in [0, \pi]$ în jurul axei Ox .

Rezolvare. După formula (14) avem

$$V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi^2}{2}.$$

19. Să se calculeze valoarea aproximativă a numărului π , pornind de la identitatea $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}$.

Rezolvare. Luăm $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in [0, 1]$ și

$$f'(x) = -2x(1+x^2)^{-2}, f''(x) = (6x^2 - 2)(1+x^2)^{-3}, f'''(x) = 24(x-x^3)(1+x^2)^{-4},$$

$$f^{(4)}(x) = 24(5x^4 - 10x^2 + 1)(1+x^2)^{-5}, f^{(5)}(x) = 240(-3x^5 + 10x^3 - 3x)(1+x^2)^{-6}.$$

a) *Metoda trapezelor.* Deoarece $f'''(1) = 0$ schimbându-și semnul de la plus la minus, rezultă că $f''(x)$ are valoare maximă în $x = 1$ și deci $M'' = \sup_{[0,1]} |f''(x)| = f''(1) = \frac{1}{2}$.

Prin urmare, luând în formula trapezelor, de exemplu, $n = 10$, eroarea maximă va fi

$$\frac{h^2}{12} M''(b-a) = \frac{M''}{12n^2} = \frac{1}{2400} = 0,0004166.$$

Efectuând calculele, obținem:

$$x_0 = 0; f(x_0) = 1;$$

$$x_1 = 0,1; f(x_1) = 0,990099;$$

$$x_2 = 0,2; f(x_2) = 0,961538;$$

$$x_3 = 0,3; f(x_3) = 0,917431;$$

$$x_4 = 0,4; f(x_4) = 0,862068;$$

$$x_5 = 0,5; f(x_5) = 0,800000;$$

$$x_6 = 0,6; f(x_6) = 0,735294;$$

$$x_7 = 0,7; f(x_7) = 0,671140;$$

$$x_8 = 0,8; f(x_8) = 0,609756;$$

$$x_9 = 0,9; f(x_9) = 0,552486;$$

$$x_{10} = 1; f(x_{10}) = 0,5.$$

Aplicăm formula trapezelor și deducem

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx 0,05(1,5 + 14,199624) = 0,7849812.$$

Prin urmare, $\pi \approx 3,1399248$.

b) *Formula lui Simpson.* Deoarece $f^{(4)}(x) \leq 0$ pe $[0, 1]$, rezultă că valoarea maximă a lui $f^{(4)}(x)$ este $M^{(4)} = f^{(4)}(0) = 24$. Luând $2n = 10$ în formula lui Simpson, găsim eroarea

$$|R_n(f)| \leq \frac{24}{2880 \cdot 5^4} = 0,0000008.$$

Aplicând formula (19), deducem

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{0,1}{3} \{1,5 + 4 \cdot 3,931156 + 2 \cdot 3,168656\} = 0,7853978$$

astfel că $\pi \approx 3,141592$.

c) *Metoda dreptunghiurilor.* Deoarece $|f'(x)| = \frac{2x}{(1+x^2)^2} \leq 1$, rezultă că $M' \leq 1$ și luând $n = 10$, în formula dreptunghiurilor, avem $|R_n(f)| \leq 0,1$. Aplicând formula dreptunghiurilor, obținem

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx 0,1 \cdot 8,099812 = 0,8099812, \text{ deci } \pi \approx 3,2399248.$$

10.2.2. Probleme propuse spre rezolvare

20. Cu ajutorul sumelor integrale să se calculeze următoarele integrale definite:

a) $\int_{-2}^1 x^2 dx$; b) $\int_1^{10} (1+x) dx$; c) $\int_{-1}^3 x^{x+1} dx$; d) $\int_4^{16} \sqrt{x} dx$;

e) $\int_a^b \frac{dx}{x}$, $0 < a < b$; f) $\int_0^a x^3 dx$, $a > 0$.

21. Folosind integrala definită, să se calculeze $\lim a_n$ pentru:

a) $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$; b) $a_n = \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2}$;

c) $a_n = \frac{2}{2n+1} + \frac{2}{2n+3} + \dots + \frac{2}{4n-1}$; d) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$;

e) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}$; f) $a_n = \frac{1}{n^5} (1^4 + 2^4 + \dots + n^4)$.

22. Să se cerceteze integrabilitatea funcției

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}, \\ -x, & x \in I, \end{cases} \text{ definită pe } [0, 1].$$

23. Să se calculeze o primitivă pentru:

a) $f(x) = \min[3^x, 3^{-x}]$, definită pe $[-1, 1]$;

b) $f(x) = |x-1|^3$, definită pe $[-1, 2]$.

24. Fără a calcula integralele, să se demonstreze următoarele inegalități:

a) $\sqrt{10} \leq \int_{-4}^{-3} \sqrt{x^2+1} dx \leq \sqrt{17}$; b) $0 \leq \int_{-1/2}^0 x \ln(1-x^2) dx \leq \frac{1}{4} \ln \frac{4}{3}$;

c) $\int_1^2 \ln(1+x) dx > \int_1^2 \frac{x}{1+x} dx$; d) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx < \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} x dx$;

e) $\int_0^1 x^2 \sin^2 x dx < \int_0^1 x \sin^2 x dx$; f) $\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx > \int_0^1 x dx$.

25. Să se evalueze integralele:

a) $\int_0^1 \sqrt{4+x^4} dx$; b) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x}$; c) $\int_0^{\pi/4} x \sqrt{\operatorname{tg} x} dx$;

d) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \frac{1}{2} \sin^2 x} dx$.

26. Să se calculeze $\int_0^{\pi/2} \cos^m x dx$, $m \in \mathbb{N}$.

27. Să se calculeze integralele:

a) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; b) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1} dx$; c) $\int_0^\pi \frac{dx}{3+2\cos x}$;

d) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+a^2 \sin^2 x}$, $a > 0$;

e) $\int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{1}{x^2} \sqrt{1-x^2} dx$; f) $\int_1^2 \frac{1}{x} \sqrt{x^2-1} dx$; g) $\int_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$;

h) $\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$; i) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$; j) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5-3\cos x}$; k) $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$;
 l) $\int_0^\pi e^x \sin x dx$; m) $\int_0^1 x^3 e^{2x} dx$; n) $\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$; o) $\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx$;
 p) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$; q) $\int_{-1}^0 \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} dx$.

28. Să se rezolve ecuația $\int_{\sqrt{2}}^x \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} = \frac{\pi}{12}$.

29. Să se calculeze:

a) $I_n = \int_0^\pi x \sin^n x dx$, $n \in \mathbb{N}$; b) $I_n = \int_0^{\pi/2} x (\cos^n x + \sin^n x) dx$, $n \in \mathbb{N}$.

30. Fără a calcula integralele, să se arate că

$$\int_1^7 \sqrt{-x^2+8x-7} dx = \int_{-1}^5 \sqrt{-x^2+4x+5} dx.$$

31. Fie șirul $S_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$. Să se arate că $\lim_n S_n = c$.

32. Să se calculeze:

a) $\int_0^2 e^x f(x) dx$, unde $f(x) = \max[1, x^2]$, $x \in \mathbb{R}$;

b) $\int_0^{\pi/2} |\sin x - \cos x| dx$; c) $\int_{-2}^2 |x^2 - 1| dx$; d) $\int_1^{2e} |\ln x - 1| dx$;

e) $\int_{-2}^2 \min[|x-1|, |x+1|] dx$; f) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \max[\operatorname{tg}^3 x, \operatorname{tg} x] dx$;

g) $\int_1^3 \frac{dx}{|x-a|+1}$, $a \in \mathbb{R}$.

33. Să se calculeze $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x - \sin x \cos x}{1 + \sin 2x} dx$, utilizând metoda integrării prin părți.

34. Să se calculeze $\int_{-\pi/4}^1 u(x) dx$ pentru $u(x) = e^x - 1$, $x \in [0, 1]$, și $u(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in [-\frac{\pi}{4}, 0]$, cu ajutorul substituției $u(x) = t$. Să se verifice apoi rezultatul prin calcul direct.

35. Să se calculeze aria mărginită de:

a) $f(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{1/2}$, Ox , $x=1$ și $x=2$;

b) $f(x) = \frac{\cos x}{1 + \cos x}$, Ox , $x=0$ și $x = \frac{3\pi}{4}$;

c) $f(x) = \left|\frac{x-1}{x+1}\right|$, Ox , $x=0$ și $x=2$;

d) $f(x) = \frac{1}{(x+x^2)}$, Ox , $x=1$ și $x=2$.

36. y
 a) y
 c) y
 37. S
 a) y
 c) x
 38. S
 curba y
 39. S
 a) y
 b) y
 40. S
 mativă
 exactă.
 41. F
 mativă
 42. F
 pentru u
 a) \int
 43. C
 următoe
 a) \int
 44. S

1. Int
 $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)$
 gentă sau
 divergentă.
 Analog

36. Să se calculeze aria domeniului limitat de curbele :

a) $y = 2 - x^2$ și $y^3 = x^2$; b) $y = 2x - x^2$ și $y = -x$;

c) $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$ și $y = 2x$; d) $y = \ln x$ și $y = \ln^2 x$.

37. Să se calculeze lungimile curbelor :

a) $y = x^{3/2}$, $0 \leq x \leq 4$; b) $y = \arcsin e^{-x}$, $0 \leq x \leq 1$;

c) $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$, $1 \leq y \leq e$; d) $y = \ln x$, $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$.

38. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al figurii mărginite de curba $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$ și axa Ox .

39. Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea curbei :

a) $y = x \ln x$, $1 \leq x \leq e$, în jurul axei Ox ;

b) $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$, în jurul axei Oy .

40. Aplicând metoda dreptunghiurilor ($n = 12$), să se calculeze valoarea aproximativă a integralei $\int_0^{2\pi} x \sin x dx$ și să se compare rezultatul obținut cu valoarea exactă.

41. Pornind de la integrala $4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \pi$, să se calculeze valoarea aproximativă a numărului π și apoi să se evalueze erorile.

42. Folosind metoda trapezelor, să se calculeze valoarea aproximativă și erorile pentru următoarele integrale :

a) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, $n = 12$; b) $\int_1^9 \sqrt{x} dx$, $n = 4$.

43. Cu ajutorul formulei lui Simpson să se calculeze valoarea aproximativă a următoarelor integrale :

a) $\int_1^9 \sqrt{x} dx$, $n = 4$; b) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx$.

44. Să se calculeze $\int_0^1 e^{x^2} dx$ cu o aproximație de 10^{-3} .

10.3. Integrale improprii

1. **Integrale pe intervale infinite.** Fie f definită pe $[a, \infty)$ și integrabilă pe $[a, b]$, $\forall b > a$. Limita $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$, finită sau infinită, se notează $\int_a^\infty f(x) dx$. Dacă limita este finită, integrala este convergentă sau $f(x)$ este integrabilă pe $[a, \infty)$. Dacă limita este infinită sau nu există, integrala este divergentă.

Analog se introduc integralele :

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx \text{ și } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b f(x) dx.$$

Dacă $f(x)$ admite primitiva $F(x)$ pe $[a, \infty)$, atunci

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = F(\infty) - F(a) = F(x) \Big|_a^{\infty}, \text{ unde } F(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x).$$

1. Dacă $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $x \in [a, \infty)$, atunci: a) dacă $\int_a^{\infty} g(x) dx$ este convergentă, și $\int_a^{\infty} f(x) dx$ este convergentă; b) dacă $\int_a^{\infty} f(x) dx$ este divergentă, și $\int_a^{\infty} g(x) dx$ este divergentă.

2) Dacă există

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K, \quad 0 \leq K < \infty, \quad (1)$$

atunci a) pentru $K < +\infty$ și $\int_a^{\infty} g(x) dx$ convergentă rezultă că $\int_a^{\infty} f(x) dx$ este convergentă; b) pentru $K > 0$ și $\int_a^{\infty} g(x) dx$ divergentă rezultă că $\int_a^{\infty} f(x) dx$ este divergentă.

3. Dacă există

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\lambda f(x) = K, \quad 0 < K < \infty, \quad (2)$$

atunci pentru $\lambda > 1$, $\int_a^{\infty} f(x) dx$ este convergentă și pentru $\lambda \leq 1$, $\int_a^{\infty} f(x) dx$ este divergentă.

Dacă $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$ este convergentă, atunci $\int_a^{\infty} f(x) dx$ este absolut convergentă și f este absolut integrabilă pe $[a, \infty)$. Orice funcție absolut integrabilă pe $[a, \infty)$ este integrabilă pe $[a, \infty)$.

4. Criteriul lui Dirichlet. Dacă a) $f \in \mathcal{F}([a, b])$, $\forall b > a$, și $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq K$, b) $g(x)$ tindo monoton către zero când $x \rightarrow \infty$, atunci $\int_a^{\infty} f(x)g(x) dx$ este convergentă.

5. Criteriul lui Abel. Dacă a) $f(x)$ este integrabilă pe $[a, \infty)$, b) $g(x)$ este monotouă și mărginită pe $[a, \infty)$, atunci integrala $\int_a^{\infty} f(x)g(x) dx$ este convergentă.

II. Integralele improprii din funcții nemărginite. Fie b un punct singular pentru funcția f , definită și integrabilă pe orice interval $[a, b - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$. Prin definiție, se pune

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx.$$

Dacă $f(x)$ admite primitiva $F(x)$ pe $[a, b - \varepsilon]$ și dacă există limita $F(b) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(b - \varepsilon)$, atunci

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b.$$

Dacă există $\lim_{x \rightarrow b} (b-x)^\lambda f(x) = K$, atunci pentru $\lambda < 1$ și $K < \infty$ integrala $\int_a^b f(x) dx$ este convergentă; pentru $\lambda \geq 1$ și $K > 0$ $\int_a^b f(x) dx$ este divergentă.

10.3.1. Probleme rezolvate

1. Folosind definiția, să se cerceteze convergența integralelor:

a) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$; b) $\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin x dx$, $a > 0$; c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^4} dx$.

Rezolvare. a) Avem $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \arctg b = \frac{\pi}{2}$, deci este convergentă.

b) Utilizând integrarea prin părți, deducem

$$I = \int_a^b e^{-ax} \sin x \, dx = -e^{-ax} \cos x \Big|_0^b - a \int_0^b e^{-ax} \cos x \, dx = -e^{-ab} \cos b + 1 - a \left[e^{-ax} \sin x \Big|_0^b + a \int_0^b e^{-ax} \sin x \, dx \right] = e^{-ab}(-\cos b - a \sin b) + 1 - a^2 I,$$

de unde $I = \frac{1}{1+a^2} [e^{-ab}(-\cos b - a \sin b) + 1]$. Deoarece $\lim_{b \rightarrow \infty} I = \frac{1}{1+a^2}$, rezultă că integrată este convergentă și $\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin x \, dx = \frac{1}{1+a^2}$.

$$c) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^4} \, dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{x}{1+x^4} \, dx + \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{x}{1+x^4} \, dx = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \arctg b^2 - \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow -\infty} \arctg a^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = 0$$
 și deci este convergentă.

2. Să se studieze convergența integralei probabilităților $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$.

Rezolvare. Deoarece pentru $x > 1$, avem $0 < e^{-x^2} < e^{-x}$ și $\int_1^{\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_1^{\infty} = e^{-1}$ este convergentă, rezultă că integrala $\int_1^{\infty} e^{-x^2} dx$ este convergentă. Cum $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{\infty} e^{-x^2} dx$ rezultă că $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ este convergentă.

3. Pornind de la definiție, să se studieze convergența integralelor :

a) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; b) $\int_{-1}^{-1/3} \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$; c) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

Rezolvare. a) $f(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ este nemărginită în punctul $x = -1$. Avem

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1+\varepsilon}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \arcsin x \Big|_{-1+\varepsilon}^0 = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \arcsin(-1+\varepsilon) = \frac{\pi}{2}.$$

Prin urmare, integrala este convergentă la $\frac{\pi}{2}$.

b) Funcția $f(x) = \frac{1}{x(3x^2-2x-1)^{1/2}}$ este nemărginită în punctul $x = -\frac{1}{3}$. Avem

$$\int_{-1}^{-1/3} \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{-1/3-\varepsilon} \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -\arcsin \frac{x+1}{2x} \Big|_{-1}^{-1/3-\varepsilon} = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \arcsin \frac{3\varepsilon-2}{6\varepsilon+2} = \frac{\pi}{2}$$
 și integrala este convergentă.

c) Funcția $f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}$ este nemărginită în $x = 0$. Deoarece

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{1/2} \frac{dx}{x \ln^2 x} = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\ln x} \int_{\varepsilon}^{1/2} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln \varepsilon} \right) = \frac{1}{\ln 2},$$

integrala este convergentă.

4. Să se studieze convergența integralei eliptice $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

Rezolvare. Funcția $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} \geq 0$ este nemărginită în punctul $x = 1$. Deoarece

$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^\lambda f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^{\lambda-1/2} (1+x)^{-1/2} (1+x^2)^{-1/2} = \frac{1}{2}$, pentru $\lambda = \frac{1}{2} < 1$, rezultă că integrala eliptică este convergentă.

5. Să se studieze convergența integralelor :

a) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}$; b) $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$; c) $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$; d) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{ctg} x dx$; e) $\int_0^1 \frac{dx}{x^3 - 5x^2}$;

f) $\int_0^{100} \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x} + \sqrt[5]{x}}$; g) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$.

Rezolvare. a) Deoarece $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\lambda f(x) = 1$, pentru $\lambda = 4 > 1$, integrala este convergentă.

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\lambda f(x) = 1$, pentru $\lambda = 2 > 1$, integrala este convergentă.

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\lambda f(x) = \frac{\pi}{2}$, pentru $\lambda = 1$, integrala este divergentă.

d) $\lim_{x \rightarrow 0} x^\lambda f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\lambda}{\sin x} \cos x = 1$, pentru $\lambda = 1$; divergentă.

e) $\lim_{x \rightarrow 0} x^\lambda (x^3 - 5x^2)^{-1} = -\frac{1}{5}$, $\lambda = 2 > 1$; divergentă.

f) $\lim_{x \rightarrow 0} x^\lambda f(x) = 1$, $\lambda = \frac{1}{5} < 1$; convergentă.

g) $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^\lambda f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^{\lambda - \frac{1}{3}} [(1+x)(1+x^2)]^{-1/3} = 2^{-2/3}$, $\lambda = \frac{1}{3} < 1$,

integrala este convergentă.

6. Să se calculeze $\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)\sqrt{|x^2-1|}}$, arătându-se mai întâi că are sens.

Rezolvare. Se observă că integrandul este nemărginit într-o vecinătate a punctului $x = 1$. Scriem

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)\sqrt{|x^2-1|}} = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} + \int_1^\infty \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = I_1 + I_2.$$

Integrala I_1 este convergentă, deoarece

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^\lambda \frac{1}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \text{ pentru } \lambda = \frac{1}{2} < 1.$$

Integrala I_2 este improprie de ambele tipuri. Dar

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^\lambda \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \text{ pentru } \lambda = \frac{1}{2} < 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\lambda}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = 1, \text{ pentru } \lambda = 2 > 1,$$

astfel că I_2 este convergentă. Dacă facem schimbarea de

Pentru calculul

Prin urmare, inte

7. Să se stud

Rezolvare. Efectu

Integrând prin părți

$$\int_1^\infty \cos x dx$$

Integrala $I_1 = \int_1^\infty$

Deci integrala este

8. Să se det

și dreptele $x =$

Rezolvare. Deoc

$$d = \int_0^2$$

$$d =$$

9. Să se d

Rezolvare. A

și $g(x) = \frac{1}{x^a}$ de
convergentă.

astfel că I_2 este convergentă. Rezultă deci că integrala inițială este convergentă. În integrala I_2 facem schimbarea de variabilă $x = \frac{1}{y}$ și obținem

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}} = - \int_{\infty}^1 \frac{dy}{(1+y)\sqrt{y^2-1}} = I_2.$$

Pentru calculul integralei I_2 facem schimbarea de variabilă $x+1 = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{1}{t^2} dt$:

$$I_2 = - \int_{1/2}^0 \frac{dt}{\sqrt{1-2t}} = - \sqrt{1-2t} \Big|_0^{1/2} = 1.$$

Prin urmare, integrala are valoarea 2.

7. Să se studieze convergența integralei $\int_1^{\infty} \cos x^2 dx$.

Rezolvare. Efectuând schimbarea de variabilă $x = \sqrt{t}$, obținem

$$\int_1^{\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt.$$

Integrând prin părți, obținem

$$\int_1^{\infty} \cos x^2 dx = \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} \Big|_1^{\infty} + \frac{1}{4} \int_1^{\infty} \frac{\sin t}{t^{3/2}} dt = -\frac{1}{2} \sin 1 + \frac{1}{4} \int_1^{\infty} \frac{\sin t}{t^{3/2}} dt.$$

Integrala $I_1 = \int_1^{\infty} \frac{\sin t}{t^{3/2}} dt$ este absolut convergentă, deoarece

$$\left| \frac{\sin t}{t^{3/2}} \right| < \frac{1}{t^{3/2}}.$$

Deci integrala este convergentă.

8. Să se determine aria mărginită de graficul funcției $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{1/2}$, axa Ox și dreptele $x=1$ și $x=2$.

Rezolvare. Deoarece $f(x) > 0$, $x \in (1, 2]$, rezultă

$$A = \int_1^2 \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{1/2} dx. \text{ Facem substituția } t = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{1/2}, \text{ de unde obținem}$$

$$x = \frac{t^2+1}{t^2-1} \text{ și } dx = -\frac{4t}{(t^2-1)^2} dt. \text{ Deci}$$

$$A = 4 \int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{t^2}{(t^2-1)^2} dt = \int_{\sqrt{3}}^{\infty} \left\{ \frac{1}{t-1} + \frac{1}{(t-1)^2} - \frac{1}{t+1} + \frac{1}{(t+1)^2} \right\} dt =$$

$$= \left\{ \ln \frac{t-1}{t+1} - \frac{2t}{t^2-1} \right\} \Big|_{\sqrt{3}}^{\infty} = \ln \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} + \sqrt{3}.$$

9. Să se determine convergența integralei $\int_a^{\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$, $a > 0$, $\alpha > 0$.

Rezolvare. Aplicăm criteriul lui Dirichlet. Considerăm $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Deoarece

$$\left| \int_a^b \sin x dx \right| = |\cos a - \cos b| \leq 2,$$

și $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ descrește monoton la zero când $x \rightarrow \infty$, după criteriul lui Dirichlet, integrala este convergentă.

În particular, pentru $\alpha = 1$, rezultă că integrala $\int_a^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ este convergentă. Se poate arăta că aceasta nu este însă absolut convergentă, adică integrala $\int_a^\infty \frac{|\sin x|}{x} dx$ este divergentă. Într-adevăr, dacă această integrală ar fi convergentă, deoarece $\sin^2 x \leq |\sin x|$, ar rezulta că este convergentă și integrala $\int_a^\infty \frac{\sin^2 x}{x} dx$. Cu alte cuvinte, ar fi convergentă integrala

$$\frac{1}{2} \int_a^\infty \frac{1 - \cos 2x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_a^\infty \frac{1}{x} dx - \int_a^\infty \frac{\cos 2x}{2x} dx.$$

Dar cum se poate arăta că $\int_a^\infty \frac{\cos 2x}{2x} dx$ este convergentă (criteriul lui Dirichlet), ar rezulta că $\int_a^\infty \frac{dx}{x}$ ar fi convergentă. Ceea ce nu este adevărat.

10.3.2. Probleme propuse spre rezolvare

10. Plecînd de la definiție, să se cerceteze convergența integralelor :

- a) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$; b) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x \ln x}$; c) $\int_a^\infty \frac{dx}{x \ln x}$, $a > 1$; d) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}$;
 e) $\int_0^\infty \frac{\arctg x}{1+x^2} dx$; f) $\int_0^\infty e^{-kx} dx$, $k > 0$; g) $\int_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$.

11. Pe baza criteriilor pentru funcții pozitive, să se studieze convergența integralelor :

- a) $\int_1^\infty \frac{dx}{2x + \sqrt[3]{x^2 + 1}}$; b) $\int_{-1}^\infty \frac{dx}{x^2 - \sqrt[3]{x^4 + 1}}$; c) $\int_0^\infty \frac{x dx}{\sqrt{x^5 + 1}}$; d) $\int_1^2 \frac{dx}{\ln x}$;
 e) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$; f) $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$; g) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$; h) $\int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{1+x^2} dx$;
 i) $\int_1^\infty \frac{x^2}{1+x^4} dx$; j) $\int_{-\infty}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}(x^2+1)} dx$.

12. Să se arate că integrala lui Euler de speța a doua $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$ este convergentă pentru $p > 0$.

13. Să se arate că integrala lui Euler de speța întâi $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$ este convergentă pentru $p > 0$, $q > 0$.

14. Să se arate că funcția $f(x) = \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}$, $x \in (-1, 1)$, este integrabilă pe $[0, 1]$ și să se calculeze $I = \int_0^1 f(x) dx$.

15. Să

a) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$

e) $\int_a^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$

16. Să următorel

a) $\int_0^\infty e^{-x}$

c) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2}$

e) $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

17. Să

a) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2}$

c) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2}$

18. Să

19. Să

a) $\int_0^\pi \frac{dx}{x}$

20. Ap să se dem

a) $B(p, q)$

c) $B(p, q)$

d) $B(p, q)$

e) $\Gamma(p, q)$

unde $B(p, q)$

21. Să integrale :

a) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{x}$

15. Să se arate că următoarele integrale există și să se calculeze :

a) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$; c) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$; d) $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} dx$;

e) $\int_a^b \frac{x dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$, $a < b$; f) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$; g) $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$, $a > 0$.

16. Să se studieze natura și, în caz de convergență, să se calculeze și valoarea următoarelor integrale :

a) $\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx dx$, $a > 0$; b) $\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx dx$, $a > 0$;

c) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, $a \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$; d) $\int_{-a}^a \frac{x^n}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$, $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$;

e) $\int_0^{\infty} \frac{x \ln x}{(1-x^2)^2} dx$.

17. Să se stabilească convergența integralelor :

a) $\int_0^{\infty} \frac{x}{k^2+x^2} \sin ax dx$, $a > 0$, $k > 0$; b) $\int_0^{\infty} e^{\sin x} \frac{\sin 2x}{x^2} dx$, $\alpha > 0$;

c) $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} \sin(x+x^2) dx$, $\alpha > 0$; d) $\int_0^{\infty} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x(a+x)}} dx$, $a > 0$.

18. Să se studieze convergența integralei Fresnel $\int_0^{\infty} \sin x^2 dx$.

19. Să se calculeze :

a) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{5-4 \cos x}$; b) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{4-3 \cos x}$; c) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos x+2}$; d) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\cos^2 x}$.

20. Aplicând metoda schimbării de variabilă și metoda integrării prin părți să se demonstreze că :

a) $B(p, q) = B(q, p)$; b) $B(p, q) = \int_0^{\infty} \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}} dy$;

c) $B(p, 1-p) = \int_0^{\infty} \frac{y^{p-1}}{1+y} dy$, $0 < p < 1$;

d) $B(p, q) = \frac{q-1}{p+q-1} B(p, q-1) = \frac{p-1}{p+q-1} B(p-1, q)$, $p > 1$, $q > 1$;

e) $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$, $p > 1$,

unde $B(p, q)$ și $\Gamma(p)$ sînt integralele lui Euler, definite în exercițiile 12 și 13.

21. Să se reducă la integrale Euler și de aici să se deducă natura următoarelor integrale :

a) $\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx$, $m, n \in \mathbb{R}$; b) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[2n]{1-x^2}}$, $m > 0$, $n \in \mathbb{N}$;

c) $\int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}}{(1+x)^n} dx$, $m, n \in \mathbb{R}$; d) $\int_0^{\infty} x^p e^{-ax} dx$, $a > 0$, $p \in \mathbb{R}$;
 e) $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[n]{x}}{(1+x)^2} dx$; f) $\int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx$, $m, n \in \mathbb{R}$; g) $\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx$, $n \in \mathbb{N}$.

10.4. Integrale care depind de un parametru

Să considerăm funcția $f(x, y)$ definită pe dreptunghiul $[a, b] \times [c, d]$. Să presupunem că pentru fiecare $y \in [c, d]$ funcția $f(x, y)$ este integrabilă pe $[a, b]$ în sens propriu sau impropriu. Dacă $\alpha(y)$ și $\beta(y)$ sînt două funcții reale definite pe $[c, d]$ și cu valori în intervalul $[a, b]$, atunci are sens funcția $F: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx. \quad (1)$$

Funcția $f(x, y)$ tinde uniform, în punctul $y_0 \in [c, d]$, către funcția $\varphi(x): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dacă

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0 \mid \mid y - y_0 \mid < \delta_\epsilon \Rightarrow \mid f(x, y) - \varphi(x) \mid < \epsilon, \forall x \in [a, b]. \quad (2)$$

1. Dacă există limitele

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \alpha(y) = \alpha_0, \lim_{y \rightarrow y_0} \beta(y) = \beta_0, \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \varphi(x), \quad (3)$$

ultima limită fiind uniformă în raport cu x , atunci funcția $\varphi(x)$ este integrabilă pe $[a, b]$ și

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx = \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \varphi(x) dx. \quad (4)$$

2. Dacă funcția f este continuă pe $[a, b] \times [c, d]$, iar funcțiile α și β sînt continue pe $[c, d]$, atunci funcția $F(y)$ este continuă pe intervalul $[c, d]$.

3. Dacă funcția f , continuă pe $[a, b] \times [c, d]$, admite derivată parțială în raport cu y , continuă pe $[a, b] \times [c, d]$, iar funcțiile α și β sînt derivabile pe $[c, d]$, atunci $F(y)$ este derivabilă pe $[c, d]$ și are loc relația

$$F'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx + f(\beta(y), y)\beta'(y) - f(\alpha(y), y)\alpha'(y). \quad (5)$$

numită formula lui Leibniz.

4. Dacă funcția f este continuă pe $[a, b] \times [c, d]$, atunci are loc relația

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy. \quad (6)$$

10.4.1. Probleme rezolvate

1. Fie funcția $f(x, y) = e^{x^2/y^2} \cdot \frac{x}{y^2}$ definită pe $[0, 1] \times (0, \infty)$. Să se arate că

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_0^1 f(x, y) dx \neq \int_0^1 \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) dx.$$

Rezolvare. Deoarece

$$F(y) = \int_0^1 \frac{x}{y^2} e^{-x^2/y^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{y^2}} + \frac{1}{2} \text{ rezultă că } \lim_{y \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{x}{y^2} e^{-x^2/y^2} dx = \frac{1}{2}.$$

Apoi $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} e^{-x^2/y^2} \cdot \frac{x}{y^2} = 0$, astfel că $\int_0^1 \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) dx = \int_0^1 0 dx = 0$ și egalitatea nu este adevărată. Să observăm că nu sînt îndeplinite condițiile de valabilitate a relației (4). Funcția $f(x, y)$ nu tinde, în punctul $y = 0$, uniform către funcția $\varphi(x) \equiv 0$. Într-adevăr, dacă am presupune acest lucru, ar însemna că pentru orice $\varepsilon > 0$ să existe $\eta_\varepsilon > 0$ astfel încît $|f(x, y)| < \varepsilon$, înădăță ce $y < \eta_\varepsilon$, iar x este arbitrar în $[0, 1]$. Luînd în particular $x = y < \eta_\varepsilon$, avem

$$f(x, y) = e^{-1} \cdot \frac{1}{y} \rightarrow +\infty \text{ atunci cînd } y \rightarrow 0.$$

2. Fie funcția $F(y) = \int_0^1 \ln \sqrt{x^2 + y^2} dx$, $y > 0$, și $F(0) = -1$. Să se arate că $F'(0) \neq \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial y} \ln \sqrt{x^2 + y^2} \right)_{y=0} dx$.

Rezolvare. Fie $y > 0$. Integrînd prin părți, obținem

$$F(y) = \int_0^1 \ln \sqrt{x^2 + y^2} dx = x \ln \sqrt{x^2 + y^2} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{x^2 + y^2} dx = \ln \sqrt{1 + y^2} - 1 + y \operatorname{arctg} \frac{1}{y}.$$

Deci

$$F'(0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{F(y) - F(0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{1}{y} \ln \sqrt{1 + y^2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{y} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

Pe de altă parte, avem $\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y=0} = 0$ și deci

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial y} \ln \sqrt{x^2 + y^2} \right)_{y=0} dx = 0.$$

Să observăm că nu sînt satisfăcute condițiile de valabilitate ale relației (5). Într-adevăr, funcția $\frac{\partial}{\partial y} \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{y}{x^2 + y^2}$ nu este continuă uniform pe $[0, 1] \times [0, 1]$. [De aceea relația (5) nu se aplică.

3. Fiind dată funcția $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x} \ln(1 + xy), & x \in (0, \infty), y \in (0, \infty), \\ 1 & y, & x = 0, y \in (0, \infty), \end{cases}$ să se

calculeze derivata funcției $F(y) = \int_0^y f(x, y) dx$, $y \in [0, \infty)$.

Rezolvare. Deoarece $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, y_0)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, y_0)} \frac{\ln(1 + xy)}{xy} = y_0 = f(0, y_0)$, rezultă că $f(x, y)$ este continuă pe $[0, \infty) \times [0, \infty)$. Apoi $f'_x = \frac{1}{(1 + xy)^2}$, $x \neq 0$ și $f'_x = 1$, $x = 0$, deci $f'_x(x, y)$ este continuă pe $[0, \infty) \times [0, \infty)$. De asemenea, funcțiile $\alpha(y) = 0$, $\beta(y) = y$ au derivate continue pe $[0, \infty) \times [0, \infty)$, deci funcția F este derivabilă și după relația (5) avem

$$F'(y) = \int_0^y f'_x(x, y) dx + f(y, y) = \int_0^y \frac{1}{1 + xy} dx + \frac{1}{y} \ln(1 + y^2) = \frac{2}{y} \ln(1 + y^2).$$

4. Știind că pentru $ab \neq 0$ avem

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{\pi}{2|ab|}, \text{ să se calculeze } \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^2}$$

folosind posibilitatea derivării primei integrale ca funcție de parametri.

Rezolvare. Fie $a, b_0 > 0$. Într-o vecinătate $[a_0 - \varepsilon, a_0 + \varepsilon]$ a punctului a_0 , unde $ab_0 > 0$, funcția $f(a, b) = (a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^{-1}$ are derivata $f'_a = -2a \cos^2 x (a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^{-2}$ continuă pe $[a_0 - \varepsilon, a_0 + \varepsilon]$ uniform față de x . Se poate aplica deci relația (5), astfel că

$$\int_0^{\pi/2} \frac{a \cos^2 x}{[a^2 \cos^2 x + b_0^2 \sin^2 x]^2} dx = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{a^3 b_0}, \quad a \in [a_0 - \varepsilon, a_0 + \varepsilon].$$

Similar se obține,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{[a_0^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x]^2} dx = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{a_0 b^3}, \quad b \in [b_0 - \varepsilon_1, b_0 + \varepsilon_1].$$

Făcând $a = a_0$ și $b = b_0$ și adunând relațiile de mai sus, avem

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{(a_0^2 \cos^2 x + b_0^2 \sin^2 x)^2} dx = \frac{\pi}{4a_0 b_0} \left(\frac{1}{a_0^2} + \frac{1}{b_0^2} \right).$$

În cazul general, obținem valoarea $\frac{\pi}{4|ab|} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)$.

5. Folosind posibilitatea de derivare în raport cu parametrul, să se calculeze integrala

$$F(y) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\operatorname{tg} x} \operatorname{arctg}(y \operatorname{tg} x) dx, \quad y \geq 0.$$

Rezolvare. Fie $f(x, y) = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \operatorname{arctg}(y \operatorname{tg} x)$ pentru $x \neq 0$, $f(0, y) = y$ și $f\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = 0$. Funcția $x, y)$ este derivabilă în raport cu y pentru orice $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ și $f'_y = \frac{1}{(1 + y^2 \operatorname{tg}^2 x)}$ pentru $x \neq 0$, $f'_y(0, y) = 1$, $f'_y\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = 0$. Derivata este continuă în raport cu ambele variabile pentru $y \neq 0$ și $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Aplicând relația (5), obținem (cu substituția $\operatorname{tg} x = t$):

$$F'(y) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + y^2 \operatorname{tg}^2 x} dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + y^2 t^2} \cdot \frac{1}{1 + t^2} dt = \frac{y^2}{y^2 - 1} \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + y^2 t^2} dt + \frac{1}{1 - y^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + t^2} dt = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{y + 1}.$$

Prin integrare, obținem $F(y) = \frac{\pi}{2} \ln(y + 1) + C$. Făcând pe $y \rightarrow 0$, obținem $F(0) = C$ și, cum din relația de definiție $F(0) = 0$, rezultă $C = 0$. Prin urmare, $F(y) = \frac{\pi}{2} \ln(y + 1)$.

6. Folosind posibilitatea permutării integralelor depinzând de un parametru, să se calculeze $\int_0^1 \varphi(x) dx$, unde

$$\varphi(x) = \frac{1}{\ln x} (x^b - x^a), \quad x \neq 0, \quad a, b > 0 \text{ și } \varphi(0) = 0.$$

Rezolvare. Să observăm că $\varphi(x) = \int_a^b x^y dy, x \in [0, 1]$.

Considerând integrala cu parametru $F(y) = \int_0^1 x^y dx$, observăm că funcția $f(x, y) = x^y$ este continuă pe $[0, 1] \times [a, b]$. Se poate aplica deci relația (6), astfel că

$$\int_a^b F(y) dy = \int_0^1 \left(\int_a^b x^y dy \right) dx = \int_0^1 \varphi(x) dx.$$

Dar

$$F(y) = \int_0^1 x^y dx = \frac{1}{y+1} x^{y+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{y+1} \text{ și deci } \int_0^1 \varphi(x) dx = \int_a^b \frac{1}{y+1} dy = \ln \frac{b+1}{a+1}.$$

10.4.2. Probleme propuse spre rezolvare

7. Știind că $\int_0^b \frac{dx}{1+xy} = \frac{1}{y} \ln(1+by)$, $b > 0, y > 0$, să se calculeze $\int_0^b \frac{x}{(1+xy)^2} dx$.

8. Știind că $\int_0^b \frac{dx}{x^2+y^2} = \frac{1}{y} \operatorname{arctg} \frac{b}{y}$, să se arate că

$$\int_0^b \frac{dx}{(x^2+y^2)^2} = \frac{b}{2y^3} \left[\frac{5y^2+3b^2}{(y^2+b^2)^2} + \frac{3}{by} \operatorname{arctg} \frac{b}{y} \right].$$

9. Să se calculeze derivata întâi, folosind formula lui Leibniz, pentru funcțiile:

a) $F(y) = \int_{a+y}^{b+y} f(x, y) dx$, unde $f(x, y) = \frac{\sin xy}{x}$, $x \neq 0$ și $f(0, y) = y$;

b) $F(y) = \int_{ay}^{by} f(x+y, x-y) dx$, unde f este o funcție diferentiabilă pe \mathbf{R}^2 .

10. Prin derivarea în raport cu parametrul y să se calculeze integralele:

a) $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos x} \ln \frac{1+y \cos x}{1-y \cos x} dx$, $y \in (-1, 1)$;

b) $\int_0^1 \frac{\ln(1-y^2x^2)}{x^2 \sqrt{1-x^2}}$, $|y| < 1$; c) $\int_0^1 \frac{\ln(1-y^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}} dx$, $|y| < 1$;

d) $\int_0^\infty f(x, y) dx$, unde $f(x, y) = \frac{\operatorname{arctg} xy}{x(1+x^2)}$, $x \neq 0$ și $f(0, y) = y$;

e) $\int_0^1 f(x, y) dx$, unde $f(x, y) = \frac{\operatorname{arctg} xy}{x \sqrt{1-x^2}}$, $x \neq 0$ și $f(0, y) = y$.

11. Folosind posibilitatea inversării ordinii de integrare în integralele depinzând de un parametru, să se calculeze:

a) $\int_0^1 \varphi(x) dx$, unde $\varphi(x) = \frac{x^b - x^a}{\ln x} \sin(\ln x)$, $x \neq 0$ și $x \neq 1$ și $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, $a, b > 0$;

b) $\int_0^1 \varphi(x) dx$, unde $\varphi(x) = \frac{x^b - x^a}{\ln x} \cos\left(\ln \frac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$ și $x \neq 1$ și $\varphi(0) = 0$ și $\varphi(1) = b - a$, $a, b > 0$;

c) $\int_0^{\infty} \frac{1}{x} e^{-ax} (\cos bx - \cos cx) dx, a > 0, b, c \in \mathbb{R};$

d) $\int_0^{\infty} \frac{1}{x} e^{-ax} (\sin bx - \sin cx) dx, a > 0, b, c \in \mathbb{R}.$

12. Dacă funcția f este continuă pe $[0, a]$, să se demonstreze că funcția $F(x, y, z) = \int_0^a f(t) [(x-t)^2 + y^2 + z^2]^{-1/2} dt$ verifică ecuația lui Laplace $F''_{xx} + F''_{yy} + F''_{zz} = 0$, pentru orice $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ cu $(x-t)^2 + y^2 + z^2 \neq 0$, oricare ar fi $t \in [0, a]$.

13. Dacă funcția g este derivabilă pe \mathbb{R} , iar f este de două ori derivabilă pe \mathbb{R} , să se arate că funcția

$$F(x, y) = \frac{1}{2} [f(x-ay) + f(x+ay)] + \frac{1}{2a} \int_{x-ay}^{x+ay} g(z) dz$$

verifică ecuația coardei vibrante $F''_{yy} = a^2 F''_{xx}$.

14. Să se calculeze următoarele integrale, folosind derivarea sub integrală:

a) $\int_0^{\pi/2} \ln(\cos^2 x + y^2 \sin^2 x) dx, y > 0;$ b) $\int_0^{\pi/2} \ln \frac{1+y \sin x}{1-y \sin x} \frac{dx}{\sin x}, |y| < 1;$

c) $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos x} \ln(1+y \cos x) dx, |y| < 1;$ d) $\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(y \sin x)}{\sin x} dx.$

10.5. Integrale curbilini

I. Integrale curbilini de prima speță. Fie $f(x, y)$ o funcție continuă pe un domeniu $D \subset \mathbb{R}^2$, domeniu ce conține arcul de curbă regulată

$$(C) \quad y = \varphi(x), \quad x \in [a, b]. \tag{1}$$

Alegând un sistem de puncte, $M_i(x_i, y_i), i = 0, 1, \dots, n$, care împarte curba C în arcele elementare $\overline{M_{i-1}M_i}$, de lungime Δs_i , formăm sumele integrale

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i, \quad (\xi_i, \eta_i) \in \overline{M_{i-1}M_i}. \tag{2}$$

Limita acestor sume pentru $n \rightarrow \infty$ și $\max \Delta s_i \rightarrow 0$ este, prin definiție, integrala curbilinie de prima speță

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i = \int_C f(x, y) ds, \quad \forall (\xi_i, \eta_i) \in \overline{M_{i-1}M_i}, \tag{3}$$

și se calculează după formula

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x, \varphi(x)) \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx. \tag{4}$$

Dacă curba C este dată sub forma parametrică

$$x = x_1(t), \quad y = y_1(t), \quad t \in [\alpha, \beta], \tag{5}$$

atunci

$$\int_C f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \tag{6}$$

Dacă C este o curbă regulată, în spațiu, dată de

$$x = x_1(t), y = y_1(t), z = z_1(t), t \in [\alpha, \beta], \quad (7)$$

iar $f = f(x, y, z)$, atunci

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt. \quad (8)$$

Dacă $f(x, y, z) > 0$ reprezintă densitatea de masă în punctul $(x, y, z) \in C$, atunci masa M și coordonatele centrului de greutate G al firului, sînt date de

$$\begin{aligned} M &= \int_C f(x, y, z) ds, & x_G &= \frac{1}{M} \int_C x f(x, y, z) ds, \\ y_G &= \frac{1}{M} \int_C y f(x, y, z) ds, & z_G &= \frac{1}{M} \int_C z f(x, y, z) ds. \end{aligned} \quad (9)$$

Lungimea unui arc de curbă C este $L = \int_C ds$. Integrala curbilinie de speța întâi este independentă de sensul de parcurs pe drumul de integrare.

II. Integrale curbilinii de speța a doua. Dacă funcțiile $P(x, y)$ și $Q(x, y)$ sînt continue în D și curba regulată C este dată prin reprezentarea (1), sensul de parcurs fiind astfel încît x variază de la a la b , atunci integrala curbilinie de speța a doua se exprimă prin

$$\int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b [P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x)) \varphi'(x)] dx. \quad (10)$$

Mai general, dacă (C) este dată sub forma (5), t variînd de la α la β , atunci

$$\int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t)) y'(t)] dt. \quad (11)$$

În cazul spațial, curba C fiind dată sub forma (7), formula (11) capătă forma

$$\begin{aligned} \int_C P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz &= \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + \\ &+ Q(x(t), y(t), z(t)) y'(t) + R(x(t), y(t), z(t)) z'(t)] dt. \end{aligned} \quad (12)$$

Teorema 1. Fie P, Q, R funcții continue pe un domeniu spațial D . Condiția necesară și suficientă pentru ca integrala curbilinie (12) să fie independentă de drum în D este ca să existe o funcție $V(x, y, z)$ diferențiabilă în D , a cărei diferențială totală este

$$dV = P dx + Q dy + R dz. \quad (13)$$

Funcția $V(x, y, z)$ este dată de formula

$$V(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(t, y_0, z_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, t, z_0) dt + \int_{z_0}^z R(x, y, t) dt. \quad (14)$$

Teorema 2. Fie P, Q și R funcții continue și cu derivate parțiale continue în domeniul spațial D . Condiția necesară și suficientă pentru ca integrala curbilinie (12) să fie independentă de drum în D este

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}. \quad (15)$$

În cazul plan, funcția $V(x, y)$ din teorema 1 este dată de

$$V(x, y) = \int_{x_0}^x P(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, t) dt, \quad (16)$$

iar condiția (15) se reduce la

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (17)$$

10.5.1. Probleme rezolvate

1. Să se calculeze următoarele integrale curbilini de speța întâi:

a) $I = \int_C xy \, ds$, unde $(C) \ y = x^2, \ x \in [-1; 1]$;

b) $I = \int_C y^5 \, ds$, unde $(C) \ x = y^4/4, \ y \in [0, 2]$;

c) $I = \int_C \sqrt{y(2-y)} \, ds$, unde $(C) \ x = t - \sin t, \ y = 1 - \cos t, \ t \in [0, \frac{\pi}{2}]$;

d) $I = \int_C x^2 y^2 \, ds$, unde $(C) \ x = a \cos^3 t, \ y = a \sin^3 t, \ t \in [0, 2\pi]$.

Rezolvare. a) Deoarece $ds = \sqrt{1+4x^2} \, dx$, rezultă $I = \int_{-1}^1 x^2(1+4x^2)^{1/2} \, dx = 0$, funcția de integrat fiind impară.

b) În acest caz $ds = \sqrt{y^4+1} \, dy$, astfel că

$$I = \int_0^2 y^5(1+y^4)^{1/2} \, dy = \frac{1}{6} \int_0^2 (1+y^4)^{1/2} \, dy = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} (1+y^4)^{3/2} \Big|_0^2 = \frac{1}{9} (65^{3/2} - 1).$$

c) $x'(t) = 1 - \cos t, \ y'(t) = \sin t$ și $ds = \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t} \, dt = 2 \left| \sin \frac{t}{2} \right| \, dt$;

$$I = 2 \int_0^{\pi/2} \left| \sin \frac{t}{2} \right| \left| \sin \frac{t}{2} \right| \, dt = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2} \, dt = \frac{8}{3} \sin^3 \frac{t}{2} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{4}{3\sqrt{2}}.$$

d) Avem $x' = -3a \cos^2 t \sin t, \ y' = 3a \sin^2 t \cos t$, astfel că $ds = 3a |\sin t \cos t| \, dt$. Deci

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} a^4 \sin^4 t \cos^4 t \cdot 3a |\sin t \cos t| \, dt = \frac{3}{128} a^5 \int_0^{2\pi} |\sin 2t|^7 \, dt = \\ &= \frac{3}{128} a^5 \left[\int_0^{\pi/2} (\sin 2t)^7 \, dt - \int_{\pi/2}^{\pi} (\sin 2t)^7 \, dt + \int_{\pi}^{3\pi/2} (\sin 2t)^7 \, dt - \int_{3\pi/2}^{2\pi} (\sin 2t)^7 \, dt \right] = \\ &= \frac{3a^5}{64} \int_{-1}^1 (1-u^2)^3 \, du = \frac{3a^5}{70}. \end{aligned}$$

2. Să se calculeze:

a) $I = \int_C z(x^2 + y^2) \, ds$, $(C) \ x = t \cos t, \ y = t \sin t, \ z = t, \ t \in [0, 1]$;

b) $I = \int_C (x^2 + y^2 + z^2)^{-1} \, ds$, $(C) \ x = a \cos t, \ y = a \sin t, \ z = bt, \ t \in [0, 2\pi]$.

Rezolvare. a) A

$$I = \int_0^1 t^3(2 +$$

Am folosit substitu

b) Deoarece d

$$I = (a^2 + t^2)^{3/2}$$

3. Să se calculeze reprezentările

a) $(C) \ x^2 +$

b) $(C) \ y =$

c) $(C) \ x =$

$t \in [-\pi,$

Rezolvare. Folosim $y = a \sin t, \ t \in [0,$

$$M = \int_0^{\pi} b^2 a^2$$

b) În acest caz

$$M = \int_0^a a \, ch$$

$$x_G = \frac{1}{M}$$

$$- \frac{a}{2} \int_0^a sh$$

$$y_G = \frac{1}{M}$$

c) Deoarece

am folosit substitu

$$x_G =$$

Rezolvare. a) Avem $x' = \cos t - t \sin t$, $y' = \sin t + t \cos t$, $z' = 1$ și $ds = \sqrt{2 + t^2} dt$, astfel că

$$(16) \quad I = \int_0^1 t^3(2 + t^2)^{1/2} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 u(2 + u)^{1/2} du = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} v^2(v^2 - 2) dv = -\frac{\sqrt{3}}{5} + \frac{8\sqrt{2}}{15}.$$

Am folosit substituțiile $u = t^2$, $v = (2 + u)^{1/2}$.

(17) b) Deoarece $ds = (a^2 + b^2 t^2)^{1/2} dt$, rezultă

$$I = (a^2 + b^2)^{1/2} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 + b^2 t^2} = \frac{1}{ab} (a^2 + b^2)^{1/2} \operatorname{arctg} \frac{bt}{a} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{ab} (a^2 + b^2)^{1/2} \operatorname{arctg} \frac{b}{a} 2\pi.$$

3. Să se calculeze masa M și centrul de greutate G ale firelor materiale care au reprezentările și densitățile de masă următoare:

a) (C) $x^2 + y^2 = a^2$, $y \geq 0$; $f(x, y) = b^2$;

b) (C) $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, $x \in [0, a]$, $f(x, y) = y$;

c) (C) $x = (\pi^2 - t^2)^{1/2} \cos t$, $y = (\pi^2 - t^2)^{1/2} \sin t$, $z = (4\pi^2 - 1)^{1/2}(\pi^2 - t^2)^{1/2}$
 $t \in [-\pi, \pi]$, $f(x, y, z) = 1$.

Rezolvare. Folosim relațiile (9). a) O reprezentare parametrică a curbei este (C) $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $t \in [0, \pi]$. Deoarece $ds = a dt$, rezultă

$$M = \int_0^\pi b^2 a dt = \pi a b^2; \quad x_G = \frac{1}{\pi a b^2} \int_0^\pi b^2 a^2 \cos t dt = 0; \quad y_G = \frac{1}{\pi a b^2} \int_0^\pi b^2 a^2 \sin t dt = \frac{2a}{\pi}.$$

b) În acest caz, $ds = \left(1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}\right)^{1/2} dx = \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx$. Deci

$$M = \int_0^a a \operatorname{ch} \frac{x}{a} \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx = a \int_0^a \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a} dx = \frac{a}{2} \int_0^a \left(1 + \operatorname{ch} \frac{2x}{a}\right) dx = \frac{a}{2} \left(x + \frac{a}{2} \operatorname{sh} \frac{2x}{a}\right) \Big|_0^a = \frac{a}{2} \left(a + \frac{a}{2} \operatorname{sh} 2\right) = \frac{a^2}{4} (2 + \operatorname{sh} 2);$$

$$x_G = \frac{1}{M} \int_0^a a x \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a} dx = \frac{a}{2M} \int_0^a \left(x + x \operatorname{ch} \frac{2x}{a}\right) dx = \frac{a}{2M} \left\{ \frac{x^2}{2} \Big|_0^a + \frac{a}{2} x \operatorname{sh} \frac{2x}{a} \Big|_0^a - \frac{a}{2} \int_0^a \operatorname{sh} \frac{2x}{a} dx \right\} = \frac{a}{2M} \left(\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{sh} 2 - \frac{a^2}{4} \operatorname{ch} 2 + \frac{a^2}{4} \right) = \frac{a^3}{8M} (3 + 2 \operatorname{sh} 2 - \operatorname{ch} 2);$$

$$y_G = \frac{1}{M} \int_0^a a^2 \operatorname{ch}^3 \frac{x}{a} dx = \frac{a^3}{M} \int_0^a \left(1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}\right) d\left(\operatorname{sh} \frac{x}{a}\right) = \frac{a^3}{M} \left(\operatorname{sh} \frac{x}{a} + \frac{1}{3} \operatorname{sh}^3 \frac{x}{a}\right) \Big|_0^a = \frac{a^3}{M} \left(\operatorname{sh} 1 + \frac{1}{3} \operatorname{sh}^3 1\right).$$

c) Deoarece $ds = (\pi^2 + t^2)(\pi^2 - t^2)^{-1/2} dt$, rezultă

$$M = \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 + t^2)(\pi^2 - t^2)^{-1/2} dt = \pi^2 \int_0^\pi (1 + \cos^2 u) du = \frac{3\pi^3}{2};$$

am folosit substituția $t = \pi \cos u$. Apoi

$$x_G = \frac{2}{3\pi^3} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 + t^2) \cos t dt = -\frac{8}{3\pi^2}; \quad y_G = \frac{2}{3\pi^3} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 + t^2) \sin t dt = 0;$$

$$z_G = \frac{2}{3\pi^3} (4\pi^2 - 1)^{1/2} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 + t^2) dt = \frac{16}{9} (4\pi^2 - 1)^{1/2}.$$

4. Să se calculeze lungimea perimetrului C al triunghiului $A_1A_2A_3$, unde $A_1(-1, -1)$, $A_2(1, -1)$, $A_3(1, 1)$.

Rezolvare. Fie $C_1 \equiv A_1A_2$, $C_2 \equiv A_2A_3$, $C_3 \equiv A_3A_1$. Avem $\mathcal{L} = \int_C ds = \int_{C_1} ds + \int_{C_2} ds + \int_{C_3} ds = I_1 + I_2 + I_3$.

Pentru latura A_1A_2 avem $x = t$, $y = -1$, $t \in [-1, 1]$ astfel că

$$I_1 = \int_{-1}^1 \sqrt{1} dt = 2; \text{ pentru } A_2A_3 \text{ avem } x = 1, y = t, t \in [-1, 1] \text{ și } I_2 = \\ = \int_{-1}^1 \sqrt{1} dt = 2; \text{ pentru } A_3A_1 \text{ avem } x = -t, y = -t, t \in [-1, 1] \text{ și } I_3 = \\ = \int_{-1}^1 \sqrt{2} dt = 2\sqrt{2}. \text{ Deci } \mathcal{L} = 4 + 2\sqrt{2}.$$

5. Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de speța a doua:

a) $I = \int_C xy dx - y^2 dy$, (C) $x = t^2$, $y = t^3$, $t \in [0, 1]$;

b) $I = \int_C \sqrt{1-x^2} dx + x dy$, (C) $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$, $x \geq 0$, parcurs în sens direct;

c) $I = \int_C x dx + xy dy + xyz dz$, (C) $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = \sqrt{2}t$, $t \in [0, 1]$;

d) $I = \int_C \frac{dx}{2a+y} - \frac{dy}{a+x}$, C fiind porțiunea din cercul $x^2 + y^2 + 2ay = 0$ pentru care $x + y \geq 0$ și extremitatea în punctul $A(a, -a)$.

Rezolvare. a) După relația (11), avem

$$I = \int_0^1 (2t^5 - 3t^6) dt = -\frac{1}{21}.$$

b) \odot reprezentare parametrică a curbei este $x = \cos t$, $y = 2\sin t$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$. Deci

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-\sqrt{1-\cos^2 t} \sin t + 2\cos^2 t) dt = -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin t| \sin t dt + 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt = \\ = 0 + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = \pi.$$

c) Avem

$$I = \int_0^1 (e^{2t} - e^{-t} + 2t) dt = \left(\frac{1}{2} e^{2t} + e^{-t} + t^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{e^2}{2} + e^{-1} - \frac{1}{2}.$$

d) Putem scrie $x^2 + y^2 + 2ay = x^2 + (y+a)^2 - a^2$, astfel că dacă punem $x = a \cos t$, $y + a = a \sin t$, atunci $t \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$. Deci

$$I = \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{a \sin t}{a + a \sin t} - \frac{a \cos t}{a + a \cos t} \right) dt = -\int_0^1 \left[\frac{4u}{(u+1)^2(u^2+1)} + \frac{1-u^2}{1+u^2} \right] du = \\ = \int_0^1 \left[\frac{2}{(u+1)^2} - \frac{2}{u^2+1} + 1 - \frac{2}{u^2+1} \right] du = 2 - \pi, u = \operatorname{tg} \frac{t}{2}.$$

6. Să se calculeze $I = \int_C (x+y) dx - (x-y) dy$, unde C este perimetrul triunghiului cu vîrfurile $O(0, 0)$, $A(1, 1)$, $B(0, 2)$, parcurs în sens direct.

Rezolvare. Des

(OA) $y = x$, $x \in [0, 1]$

Astfel

$$I = \int_{OA} x dx - (x-x) dy = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

7. Constată toarele integrale de

a) $I = \int_{AB} x dx - y dy$

b) $I = \int_{AB} x dy - y dx$

$B(3, 3)$ și nu

c) $I = \int_{AB} x dy - y dx$

Rezolvare. a)

ficată. După (16)

Deoarece $I =$

b) $P(x, y) =$

Relația (16) se p

$$V(x, y) = \int dx$$

Deci $I = V(3, 3) -$

c) Deoarece

$$R'_x = P'_z = y, \text{ și}$$

astfel că $I =$

8. Să se

$$-ky(x^2 + y^2)$$

$$y = \frac{\sin t}{\cos t + 1}$$

Rezolvare.

$$y'(t) = (\cos t -$$

$$\mathcal{L}_F =$$

Rezolvare. Descompunem curba C în trei curbe simple:

(OA) $y = x$, $x \in [0, 1]$; (AB) $x = 2 - y$, $y \in [1, 2]$; (BO) $x = 0$, $y = 2 - t$, $t \in [0, 2]$.

Astfel

$$I = \int_{OA} + \int_{AB} + \int_{BO} = \int_0^1 2x \, dx + \int_1^2 (-2 - 2 + 2y) \, dy + \int_0^2 (-2 + t) \, dt = -2.$$

7. Constatind în prealabil că sînt independente de drum, să se calculeze următoarele integrale curbilinii, în care s-au specificat numai capetele curbei de integrare:

a) $I = \int_{AB} y \, dx + x \, dy$, $A(2, 1)$, $B(1, 3)$;

b) $I = \int_{AB} \frac{y \, dx + x \, dy}{1 + xy}$, luată pe o curbă ce leagă punctele $A\left(\frac{1}{3}, 2\right)$ și $B(3, 3)$ și nu intersectează hiperbola $xy = -1$;

c) $I = \int_{AB} yz \, dx + xz \, dy + xy \, dz$, $A(1, 1, 0)$, $B(2, 3, 1)$.

Rezolvare. a) Deoarece $P(x, y) = y$, $Q(x, y) = x$ și $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$, rezultă că (17) este verificată. După (16) rezultă

$$V(x, y) = \int_2^x 1 \, dt + \int_1^y x \, dt = t \Big|_2^x + xt \Big|_1^y = xy - 2.$$

Deoarece $I = V(B)$, rezultă $I = V(1, 3) = 1 \cdot 3 - 2 = 1$.

b) $P(x, y) = \frac{y}{1 + xy}$, $Q(x, y) = \frac{x}{1 + xy}$ și $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -(1 + xy)^{-2}$.

Relația (16) se poate aplica, deoarece drumul considerat nu intersectează $xy = -1$ și deci

$$V(x, y) = \int_{1/3}^x \frac{2}{1 + 2t} \, dt + \int_2^y \frac{x}{1 + xt} \, dt = \ln |1 + 2t| \Big|_{1/3}^x + \ln |1 + xt| \Big|_2^y = \ln \frac{3}{5} |1 + xy|.$$

Deci $I = V(3, 3) = \ln 6$.

c) Deoarece $P(x, y, z) = yz$, $Q(x, y, z) = xz$, $R(x, y, z) = xy$ și $P'_y = Q'_x = z$, $Q'_z = R'_y = x$, $R'_x = P'_z = y$, integrala este independentă de drum. Deci

$$V(x, y, z) = \int_1^x 0 \, dt + \int_1^y 0 \, dt + \int_0^z xy \, dt = xy t \Big|_0^z = xyz,$$

astfel că $I = V(2, 3, 1) = 6$.

8. Să se calculeze lucrul mecanic al forței $\mathbf{F}(-kx(x^2 + y^2)^{-1/2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}, -ky(x^2 + y^2)^{-1/2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}, 0)$, $k > 0$, de-a lungul curbei (C) $x = \frac{\cos t}{\cos t + \sin t}$,

$$y = \frac{\sin t}{\cos t + \sin t}, \quad z = \frac{\sqrt{\sin 2t}}{\cos t + \sin t}, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right].$$

Rezolvare. Deoarece $x^2 + y^2 = (\cos t + \sin t)^{-2}$ și $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, iar $x'(t) = -(\cos t + \sin t)^{-2}$, $y'(t) = (\cos t + \sin t)^{-2}$, rezultă

$$\mathcal{L}_F = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = k \int_0^{\pi/4} \frac{\cos t - \sin t}{(\cos t + \sin t)^2} \, dt = k \int_0^{\pi/4} \frac{d(\cos t + \sin t)}{(\cos t + \sin t)^2} = \frac{k}{\sqrt{2}} (\sqrt{2} - 1).$$

9. Să se calculeze integrala curbilinie de speța întii

$$I = \int_C (x^2 + y^2)^2 ds,$$

unde C este arcul spiralei logaritmice $r = a e^{m\theta}$ ($m > 0$) cuprins între punctele $A(r = a, \theta = 0)$ și $Q(r = 0, \theta = -\infty)$.

Rezolvare. Ținând seama că $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, rezultă $x'(t) = r'(t) \cos \theta - \theta'(t)r \sin \theta$ și $y'(t) = r'(t) \sin \theta + \theta'(t)r \cos \theta$, astfel că

$$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \sqrt{(r'(t))^2 + r^2(\theta'(t))^2} dt.$$

În cazul problemei $t = \theta$ și $r = a e^{m\theta}$, astfel că

$$ds = \sqrt{a^2 m^2 e^{2m\theta} + a^2 e^{2m\theta}} d\theta = a e^{m\theta} \sqrt{m^2 + 1} d\theta.$$

Apoi $x^2 + y^2 = r^2 = a^2 e^{2m\theta}$ și deci

$$I = \int_{-\infty}^0 a^2 e^{2m\theta} a e^{m\theta} \sqrt{m^2 + 1} d\theta = \frac{a^5}{5m} \sqrt{m^2 + 1} e^{5m\theta} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{a^5}{5m} \sqrt{m^2 + 1}.$$

10.5.2. Probleme propuse spre rezolvare

10. Să se calculeze următoarele integrale curbilinie de speța întii:

- $\int_C xy ds$, (C) $|x| + |y| = a$, $a > 0$;
- $\int_C x^{-5} ds$, (C) $y = \ln x$, $x \in [1, 2]$;
- $\int_C y^{-1} ds$, (C) $x = \frac{1}{3} y^3$, $y \in [1, 2]$;
- $\int_C xy ds$, (C) $x = \cos^2 t$, $y = \cos t$, $t \in [0, 2\pi]$;
- $\int_C y ds$, (C) $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$;
- $\int_C y ds$, (C) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$;
- $\int_C xy ds$, (C) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$;
- $\int_C (x - y) ds$, (C) $r^2 = a^2 \cos^2 \theta$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

11. Să se calculeze următoarele integrale de speța întii:

- $\int_C (x + y + z) ds$, (C) $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$;
- $\int_C (x^2 + y^2) \ln z ds$, (C) $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$, $t \in [0, \frac{1}{2}]$;
- $\int_C x^2 y^2 z^2 ds$, (C) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y = 0$;
- $\int_C \sqrt{2y^2 + z^2} ds$, (C) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x = y$.

12. Să se calculeze lungimea arcului elicei conice (C) $x = ae^t \cos t$, $y = ae^t \sin t$, $z = ae^t$, cuprins între punctele $O(0, 0, 0)$ și $A(a, 0, a)$.

13. Să se determine masa firului eliptic $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, știind că densitatea de masă a punctului $M(x, y)$ este $|y|$.

14. Să se calculeze masa firului cu densitatea f indicată :

a) (C) $y = \frac{x^2}{2}$, $x \in [0, 1]$; $f(x, y) = 1 + x$;

b) (C) $x = \frac{3}{8}t^8$, $y = \frac{1}{2}t^8$, $z = \frac{\sqrt{11}}{3}t^8$, $t \in [0, 1]$; $f(x, y, z) = (2y)^{1/4}$;

c) (C) $x = \operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t$, $z = t$, $t \in [0, \ln 2]$; $f(x, y, z) = x$;

d) (C) $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, $t \in [0, 2\pi]$; $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$

15. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate G al firului material C cu densitatea f , dacă :

a) (C) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, \pi]$, $f(x, y) = 1$;

b) (C) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$, $f(x, y) = y^{1/2}$;

c) (C) $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f(x, y) = 1$;

d) (C) $x = 4t^5$, $y = \sqrt{15}t^4$, $z = 2t^3$, $t \in [-1, 1]$, $f(x, y, z) = \frac{z}{2}$.

16. Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de speța a doua :

a) $\int_C (1 + y) dx + x dy$, (C) $x = (y + 1)^{1/2}$, $y \in [0, 1]$;

b) $\int_C x dy$, (C) $y = \ln(1 + x)$, $x \in [1, 2]$;

c) $\int_C xy dx + dy$, (C) $x = 9 \cos t$, $y = 9 \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$;

d) $\int_C x dy + y dx$, (C) $x = 2a \cos^2 t$, $y = a \sin 2t$, $t \in [0, \pi]$;

e) $\int_C (x^2 + 2xy) dy$, (C) $x = 2 \cos t$, $y = 3 \sin t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$;

f) $\int_C (2a - y) dx + x dy$, (C) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$;

17. Să se calculeze $\int_C \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$, luată pe cercul $x^2 + y^2 = a^2$ în sensul invers acelor de ceasornic.

18. Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de speța a doua :

a) $\int_C (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz$, (C) $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, $t \in [0, 2\pi]$;

b) $\int_C y dx + z dy + x dz$, (C) $x = a \cos b \cos t$, $y = a \cos b \sin t$, $z = a \sin b$, $t \in [0, 2\pi]$;

e) $\int_C x dx + y dy + z dz$, (C) $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $z = ct$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

d) $\int_C y dx - x dy + (x^2 + y^2 + z^2) dz$, (C) $x = -t \cos t + \sin t$, $y = t \sin t + \cos t$, $z = t + 1$, $t \in [0, \pi]$.

19. Verificând mai întâi că sînt independente de drum, să se calculeze următoarele integrale curbilinii, în care s-au specificat numai capetele curbei de integrare :

a) $\int_{AB} x(1+x) dx - y(1+y) dy$, $A(-1, 1)$, $B(2, -1)$;

b) $\int_{AB} y^2 e^x dx + 2y e^x dy$, $A(0, 2)$, $B(2, 0)$;

c) $\int_{AB} \frac{1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy$, $A(1, 2)$, $B(2, 1)$, luată pe un drum ce nu taie axa Ox ;

d) $\int_{AB} \frac{y^2}{(x-y)^2} dx - \frac{x^2}{(x-y)^2} dy$, $A(1, 2)$, $B(-3, -2)$, luată pe o curbă ce nu intersectează prima bisectoare;

e) $\int_{AB} \frac{y}{z} dx + \frac{x}{z} dy - \frac{xy}{z^2} dz$, $A(-1, 3, 1)$, $B(2, 6, 3)$, luată pe o curbă ce nu intersectează planul $z = 0$;

f) $\int_{AB} \frac{x dx + y dy + z dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$, $A(1, -2, 2)$, $B(0, 3, 4)$, luată pe o curbă ce nu trece prin origine;

g) $\int_{AM} \frac{y z dx + x z dy + x y dz}{xyz}$, $A(1, 1, 1)$, $M\left(x, y, \frac{1}{xy}\right)$, luată pe o curbă situată în primul octant.

20. Să se determine lucrul mecanic al unei forțe elastice îndreptate către origine și proporțională cu distanța punctului de aplicație la origine, știind că punctul de aplicație a forței descrie, în sens direct, sfertul de elipsă $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, $x > 0$, $y > 0$.

21. Să se determine funcția potențial $V(x, y, z)$ $\{dV = P dx + Q dy + R dz\}$ al forței $F(P, Q, R)$ și apoi lucrul mecanic al forței F pe drumul indicat :

a) $F(0, 0, -mg)$ și punctul descrie \widehat{AB} , cu $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$;

b) $F = -k \frac{r}{r^3}$, $r = |r|$, punctul pleacă din $A(a, b, c)$ la infinit;

c) $F = -k^2 r$, punctul pleacă de pe sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ și ajunge pe sfera $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, $b < a$.

1. Integrală
mărginită DC
acelea ce conțin
numerotate într
notată $v(\Delta)$, es
Suma Riem

Integrala

limita fiind at

Pentru ca
de integrare:

a) Domeni

unde α și β sî

b) Domeni

unde γ și δ sî

Dacă în
de x, y pri

realizînd o co
domeniului

În care

avem $J \in$

10.6. Integrala dublă. Formula lui Green

1. Integrala dublă Modul de calcul. Fie $f(x, y)$ o funcție mărginită și definită pe domeniul mărginit $D \subset \mathbb{R}^2$. Se consideră o partiție a planului în intervale bidimensionale, din care reținem pe acelea ce conțin puncte din D . Notăm prin ω_k , $k = 1, 2, \dots, n$, intervalele bidimensionale reținute, numerotate într-o ordine oarecare. Fie diviziunea Δ mulțimea acestor intervale. Norma diviziunii Δ , notată $v(\Delta)$, este cea mai mare dintre dimensiunile intervalelor ω_k , $k = 1, 2, \dots, n$.

Suma Riemann atașată funcției $f(x, y)$, corespunzătoare diviziunii Δ a domeniului D , este

$$\sigma_{\Delta}(f) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \text{ aria } \omega_k, (\xi_k, \eta_k) \in \omega_k. \quad (1)$$

Integrala dublă a funcției $f(x, y)$ extinsă la domeniul D este

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{v(\Delta) \rightarrow 0} \sigma_{\Delta}(f), \quad (2)$$

limita fiind aceeași pentru orice alegere a punctelor intermediare (ξ_k, η_k) .

Pentru calculul integralei duble se disting următoarele două tipuri fundamentale de domenii de integrare:

a) Domeniul D_y este simplu în raport cu axa Oy dacă este definit de inegalitățile

$$a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x), \quad (3)$$

unde α și β sînt funcții continue pe $[a, b]$. Dacă $f(x, y)$ este continuă pe D_y , atunci

$$\iint_{D_y} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy. \quad (4)$$

b) Domeniul D_x este simplu în raport cu axa Ox dacă este definit de inegalitățile

$$c \leq y \leq d, \gamma(y) \leq x \leq \delta(y), \quad (5)$$

unde γ și δ sînt funcții continue pe $[c, d]$. Dacă $f(x, y)$ este continuă pe D_x , atunci

$$\iint_{D_x} f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y) dx. \quad (6)$$

Dacă în integrala dublă este nevoie să se treacă de la coordonatele x, y la coordonatele u, v legate de x, y prin funcțiile continue și diferentiabile

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad (7)$$

realizînd o corespondență biunivocă și bicontinuu între punctele domeniului D din planul xOy și punctele domeniului D' din planul uOv și jacobianul $J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \neq 0$ în D , atunci

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |J| du dv. \quad (8)$$

În cazul transformării de la coordonatele polare r și θ la coordonatele carteziene

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi] \text{ sau } \theta \in [-\pi, \pi], \quad (9)$$

avem $J \in r$ și

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta. \quad (10)$$

2. Formula lui Green. Dacă domeniul D este mărginit de curba închisă regulată (C) și funcțiile $P(x, y)$ și $Q(x, y)$ sînt continue în $D \cup C$ și cu derivate parțiale continue în D , atunci are loc formula lui Green

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \quad (11)$$

unde sensul de parcurs pe curba (C) este sensul direct.

3. Aplicații. Pe lângă calculul ariilor domeniilor plane și al volumelor, dăm următoarele aplicații ale integralei duble.

a) Masa unei plăci plane D , de densitate $\rho(x, y) > 0$, este

$$M = \iint_D \rho(x, y) dx dy. \quad (12)$$

b) Coordonatele centrului de greutate G al unei plăci plane D , cu densitatea de masă $\rho(x, y) > 0$, sînt

$$x_G = \frac{1}{M} \iint_D x \rho(x, y) dx dy, \quad y_G = \frac{1}{M} \iint_D y \rho(x, y) dx dy. \quad (13)$$

c) Momentele de inerție ale plăcii în raport cu axele de coordonate Ox și Oy sînt respectiv

$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x, y) dx dy, \quad I_y = \iint_D x^2 \rho(x, y) dx dy. \quad (14)$$

Momentul de inerție al plăcii în raport cu originea este $I_0 = I_x + I_y$.

10.6.1. Probleme rezolvate

1. Să se calculeze $I = \iint_D \ln(x+y) dx dy$, unde D este $x \in [0, 1], y \in [1, 2]$.

Rezolvare. Funcția $f(x, y) = \ln(x+y)$ este continuă în D și deci este integrabilă pe D . Domeniul D este simplu în raport cu ambele axe. Avem

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \int_1^2 \ln(x+y) dy = \int_0^1 [(x+y) \ln(x+y) - y] \Big|_1^2 dx = \int_0^1 [(x+2) \ln(x+2) - \\ &\quad - (x+1) \ln(x+1) - 1] dx = \frac{9}{2} \ln 3 - 4 \ln 2 - \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

2. Să se transforme integrala dublă $I = \iint_D f(x, y) dx dy$ în integrale iterate pentru următoarele domenii D :

a) $x^2 + y^2 \leq -2x$; b) $x^2 + y^2 \leq 4, x^2 + \frac{1}{4}y^2 \geq 1, x \geq 0$;

c) $x^2 + y^2 \leq 2, x \leq y^2, y \geq -y^2, y \leq 0$.

Rezolvare. a) Domeniul D este mărginit de cercul $x^2 + y^2 + 2x = 0$ sau $(x+1)^2 + y^2 = 1$ și este simplu în raport cu ambele axe (fig. 14). Dacă folosim formula (4), avem $x = a = -2, x = b = 0, y = \alpha(x) = -\sqrt{-2x - x^2}, y = \beta(x) = \sqrt{-2x - x^2}$ și deci

$$I = \int_{-2}^0 dx \int_{-\sqrt{-2x-x^2}}^{\sqrt{-2x-x^2}} f(x, y) dy.$$

și funcțiile
deoc formula

(11)

de aplicații

(12)

$(x, y) > 0$,

(13)

(14)

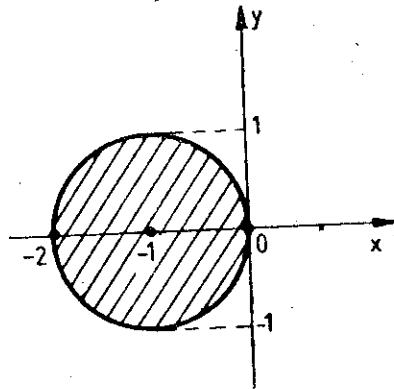


Fig. 14

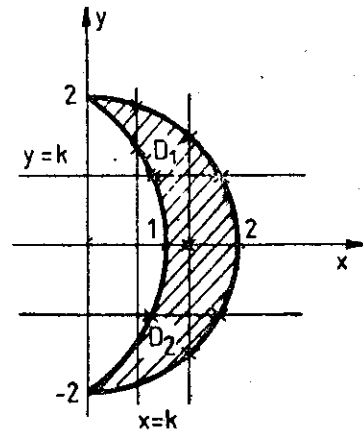


Fig. 15

Dacă folosim formula (6), atunci $c = -1$, $d = 1$, $\gamma(y) = -1 - \sqrt{1-y^2}$, $\beta(y) = -1 + \sqrt{1-y^2}$

și

$$I = \int_{-1}^1 dy \int_{-1-\sqrt{1-y^2}}^{-1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$$

b) Domeniul D este mărginit de cercul cu centrul în origine, de rază 2 și elipsa cu centrul în origine de semiaxe 1 și 2, situat în semiplanul $x \geq 0$. Deoarece o dreaptă $x = k$, $k \in (0, 1)$, intersecționează domeniul după o mulțime ce nu este interval, rezultă că D nu este simplu în raport cu Oy (fig. 15). Pentru a putea aplica formula (4) descompunem domeniul D în domeniile D_1 și D_2 prin dreapta $y = 0$. Avem atunci

$$I = \iint_{D_1} f dx dy + \iint_{D_2} f dx dy = I_1 + I_2.$$

Pentru calculul lui I_1 ținem seama că $a = 0$, $b = 2$, $\alpha(x) = 2\sqrt{1-x^2}$, pentru $x \in [0, 1]$, și $\alpha(x) = 0$, pentru $x \in [1, 2]$, iar $\beta(x) = \sqrt{4-x^2}$, pentru $x \in [0, 2]$. Deci

$$I_1 = \int_0^1 dx \int_{2\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy.$$

Similar, deoarece $a = 0$, $b = 2$, $\alpha(x) = -\sqrt{4-x^2}$, $x \in [0, 2]$ și $\beta(x) = -2\sqrt{1-x^2}$, pentru $x \in [0, 1]$ și $\beta(x) = 0$, pentru $x \in [1, 2]$, obținem

$$I_2 = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-2\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^0 f(x, y) dy.$$

Prin urmare, avem

$$I = \int_0^1 dx \int_{2\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-2\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^0 f(x, y) dy.$$

Dacă dorim să folosim formula (6), observăm că domeniul D este simplu în raport cu axa Ox , deoarece o dreaptă $y = k$, $k \in (-2, 2)$, intersectează pe D după un interval. În acest caz, $c = -2$, $d = 2$, $\gamma(y) = \sqrt{4 - y^2}/2$, $\beta(y) = \sqrt{4 - y^2}$, $y \in [-2, 2]$ și deci

$$I = \int_{-2}^2 dy \int_{\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx.$$

c) Domeniul D este cuprins între cercul $x^2 + y^2 = 2$ și parabolele $x = y^2$ și $x = -y^2$ și este cuprins în semiplanul $y \leq 0$. Cum se vede din figura 16, el este simplu în raport cu ambele axe. După

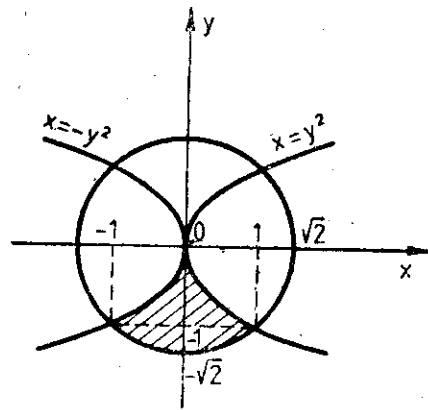


Fig. 16

formula (4), unde $a = -1$, $b = 1$ și $\alpha(x) = -\sqrt{2 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$, $\beta(x) = -\sqrt{-x}$, $x \in [-1, 0]$ și $\beta(x) = -\sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$, obținem

$$I = \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{-\sqrt{-x}} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{-\sqrt{x}} f(x, y) dy.$$

După formula (6), unde $c = -\sqrt{2}$, $d = 0$, $\gamma(y) = -\sqrt{2 - y^2}$ și $\delta(y) = \sqrt{2 - y^2}$, pentru $y \in [-\sqrt{2}, -1]$ și $\gamma(y) = -y^2$, $\delta(y) = y^2$, pentru $y \in [-1, 0]$, obținem

$$I = \int_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx + \int_{-1}^0 dy \int_{-y^2}^{y^2} f(x, y) dx.$$

3. Să se transforme în integrală dublă integrala iterată $\int_0^1 dy \int_{-y^2}^y f(x, y) dx$.

Rezolvare. Domeniul D pe care se calculează integrala dublă este dat de inegalitățile $0 \leq y \leq 1$ și $-y^2 \leq x \leq y$, deci este cuprins între dreptele $y = 1$, $y = x$ și parabola $x = -y^2$ (fig. 17).

4. Să se schimbe ordinea de integrare în integrala iterată

$$I = \int_{-1}^3 dx \int_{(x^2+2x-3)/4}^x f(x, y) dy.$$

Rezolvare. Transformăm integrala iterată într-o integrală dublă. Domeniul D este dat de inegalitățile (fig. 18).

$$-1 \leq x \leq 3 \text{ și } \frac{1}{4}(x^2 + 2x - 3) \leq y \leq x$$

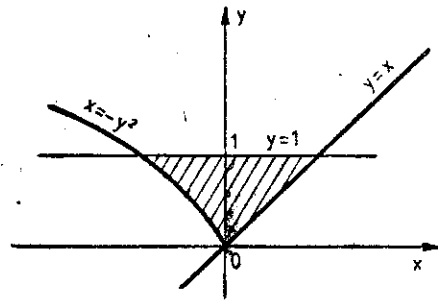


Fig. 17

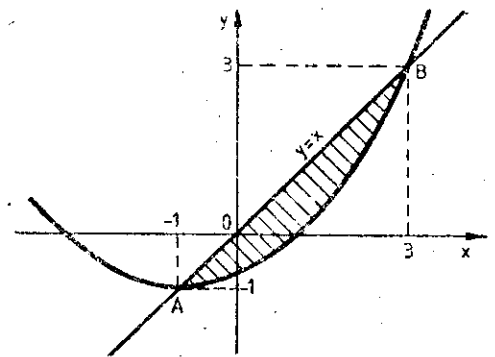


Fig. 18

raport cu axa Ox ,
 caz, $c = -2, d = 2$,

$-y^2$ și este cuprins
 ambele axe. După
 $\alpha(x) = -\sqrt{2-x^2}$,
 $0]$ și $\beta(x) = -\sqrt{x}$,

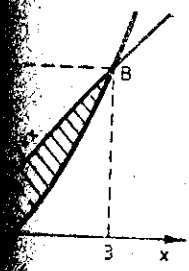
$\int_{-\sqrt{x}}^{-\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy$.
 $\sqrt{2}, d = 0, \gamma(y) =$
 tru $y \in [-\sqrt{2}, -1]$
 $[-1, 0]$, obținem

$\int_{-y^2}^{y^2} f(x, y) dx$.

integrală dublă
 $f(x, y) dx dy$.

limitățile $0 \leq y \leq 1$
 (fig. 17).

ate dat de inegalități



și deci este cuprins între dreapta $y = x$ și parabola $y = (x^2 + 2x - 3)/4$. Transformăm integrala dublă pe D în integrale iterate, ordinea fiind inversă celeia din enunț. După formula (6), în care $c = -1, d = 3, \gamma(y) = y$ și $\delta(y) = -1 + 2\sqrt{1+y}, y \in [-1, 3]$, obținem

$$I = \int_{-1}^3 dy \int_y^{-1+2\sqrt{1+y}} f(x, y) dx.$$

5. Să se calculeze următoarele integrale duble:

a) $I = \iint_D xy dx dy$, D fiind limitat de parabola $y = x^2$ și de dreapta $y = 2x + 3$;

b) $I = \iint_D \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$, D fiind limitat de $x = 0, y = 1, y = \sqrt[3]{2}$ și $y = x$;

c) $I = \iint_D \arcsin \sqrt{x+y} dx dy$, D fiind limitat de $x + y = 0, x + y = 1, y = -1$ și $y = 1$;

d) $I = \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\arcsin \sqrt{y}} \frac{x}{\sin x} dx$.

Rezolvare. a) Cum se vede din figura 19, domeniul D este simplu în raport cu ambele axe. Este mai convenabil să integrăm în ordinea y, x , din cauza formei domeniului, funcția $f(x, y) = xy$ fiind simetrică în x și y . Folosind deci formula (4), în care $a = -1, b = 3, \alpha(x) = x^2, \beta(x) = 2x + 3, x \in [-1, 3]$, obținem

$$I = \int_{-1}^3 dx \int_{x^2}^{2x+3} xy dy = \int_{-1}^3 x \frac{1}{2} y^2 \Big|_{x^2}^{2x+3} dx = \int_{-1}^3 \frac{x}{2} [(2x+3)^2 - x^4] dx = 53 + \frac{1}{3}.$$

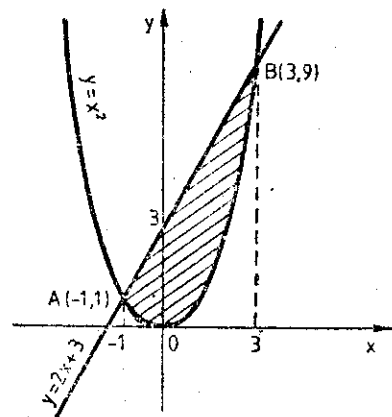


Fig. 19

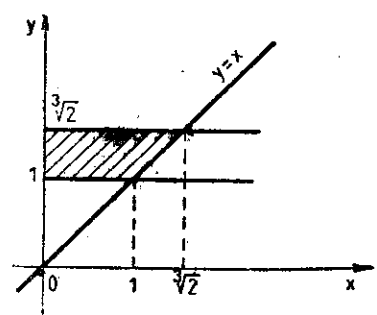


Fig. 20

b) Domeniul D este simplu în raport cu ambele axe (fig. 20). Este convenabil să integrăm în ordinea x, y , deoarece în acest caz avem numai o integrală și expresia ce rezultă prin integrare în raport cu x pare mai simplă. După formula (6), unde $c = 1, d = \sqrt[3]{2}, \gamma(y) = 0, \delta(y) = y, y \in [1, \sqrt[3]{2}]$, obținem

$$I = \int_1^{\sqrt[3]{2}} dy \int_0^y \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} dx = \int_1^{\sqrt[3]{2}} \left[\frac{1}{2} x \sqrt{x^2+y^2} - \frac{1}{2} y^2 \ln(x + \sqrt{x^2+y^2}) \right] \Big|_0^y dy = \int_1^{\sqrt[3]{2}} \frac{1}{2} y^2 [\sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2})] dy = \frac{1}{6} [\sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2})].$$

c) Domeniul D este simplu în raport cu ambele axe (fig. 21). Este convenabil de integrat în ordinea x, y , datorită limitelor de integrare. După formula (6), cu $c = -1$, $d = 1$, $\gamma(y) = -y$, $\delta(y) = 1 - y$, $y \in [-1, 1]$, rezultă

$$I = \int_{-1}^1 dy \int_{-y}^{1-y} \arcsin \sqrt{x+y} dx = \int_{-1}^1 I_1(y) dy.$$

unde $I_1(y) = \int_{-y}^{1-y} \arcsin \sqrt{x+y} dx = \int_0^1 \arcsin \sqrt{u} du = \frac{\pi}{4}$. Deci $I = \int_{-1}^1 \frac{\pi}{4} dy = \frac{\pi}{2}$.

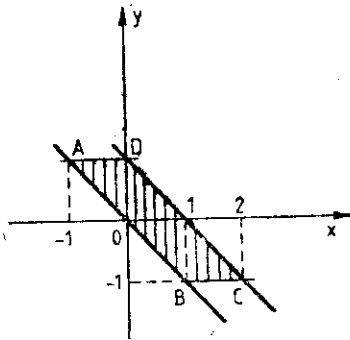


Fig. 21

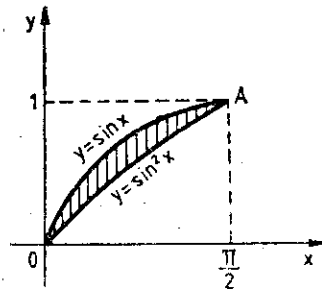


Fig. 22

d) Deoarece funcția $\frac{x}{\sin x}$ nu admite o primitivă exprimabilă cu ajutorul unei combinații finite de funcții elementare, vom schimba ordinea de integrare. Domeniul D (fig. 22) este cuprins între graficele funcțiilor $y = \sin^2 x$ și $y = \sin x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. După formula (4), cu $a = 0$, $b = \frac{\pi}{2}$, $\alpha(x) = \sin^2 x$, $\beta(x) = \sin x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, avem

$$I = \int_0^{\pi/2} dx \int_{\sin^2 x}^{\sin x} \frac{x}{\sin x} dy = \int_0^{\pi/2} \frac{x}{\sin x} y \Big|_{\sin^2 x}^{\sin x} dx = \int_0^{\pi/2} x(1 - \sin x) dx = \frac{\pi^2}{8} - 1.$$

6. Să se efectueze schimbarea de variabile de la coordonatele carteziene la coordonatele polare în integrala dublă $I = \iint_D f(x, y) dx dy$ și apoi integrala obținută să se transforme în integrale iterate, pentru următoarele domenii D :

a) $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$, $y \geq x$; b) $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$, $x \leq a$.

Rezoluție. a) Domeniul D este mărginit de dreapta $y = x$ și de cercurile $x^2 + y^2 = a^2$ și $x^2 + y^2 = b^2$. Trecând la coordonate polare, obținem $a \leq r \leq b$, $\sin \theta \geq \cos \theta$ și deci domeniul transformat este dreptunghiul $[a, b] \times [\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ din planul $r\theta$ (fig. 23).

După formula (10), obținem

$$I = \iint_{D'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} d\theta \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$$

b) În acest
și $x^2 + y^2 = b^2$
 $a \leq r \leq b$ și r
 $\theta \in [0, 2\pi]$. Imag
de pe acest co
 $r = a/\cos \theta$. d



Prin urm

integrat în
 $\gamma(y) = -y$

$$y = \frac{\pi}{2}$$

abiașii finite
 între gra-
 $\frac{\pi}{2}$. $\alpha(x) =$

1.
 teziene la
 grala obți-
 ni D:

$x^2 + y^2 = b^2$
 format este

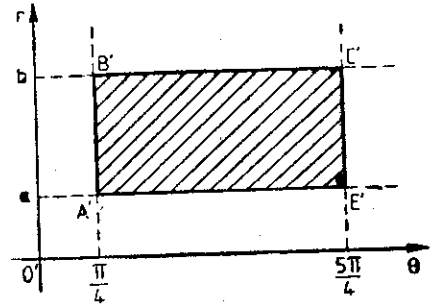
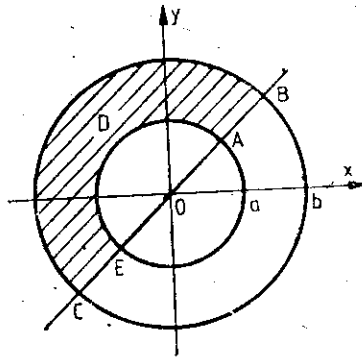


Fig. 23

b) În acest caz, domeniul D (fig. 24) este mărginit de dreapta $x = a$ și de cercurile $x^2 + y^2 = a^2$ și $x^2 + y^2 = b^2$. Înlocuind $x = r \cos \theta$ și $y = r \sin \theta$, în relațiile ce definesc domeniul D obținem $a \leq r \leq b$ și $r \cos \theta \leq a$. Imaginea cercului $x^2 + y^2 = a^2$ este segmentul de dreaptă $A_1A_2: r = a$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Imaginea cercului $x^2 + y^2 = b^2$ este segmentul $r = b$, $\theta \in [0, 2\pi]$, iar imaginea arcului BC de pe acest cerc este $B_1C_1: r = b$, $\arccos \frac{a}{b} \leq \theta \leq 2\pi - \arccos \frac{a}{b}$. Imaginea dreptei $x = a$ este $r = a/\cos \theta$, definită pentru $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$, deoarece $r > 0$. Arcele au ecuațiile:

$$(\widehat{A_1B_1}) \theta = \arccos \frac{a}{r}, r \in [a, b]; (\widehat{A_2C_1}) \theta = 2\pi - \arccos \frac{a}{r}, r \in [a, b].$$

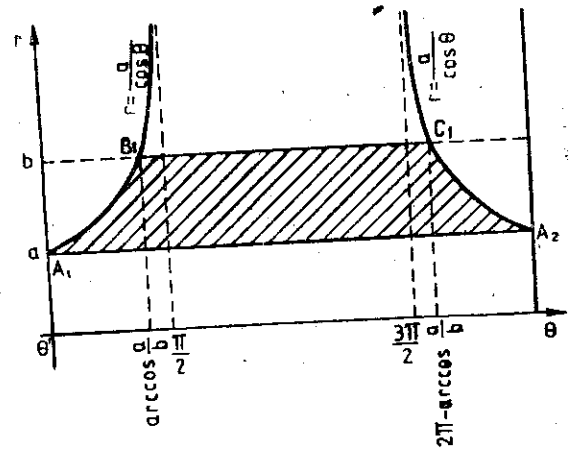
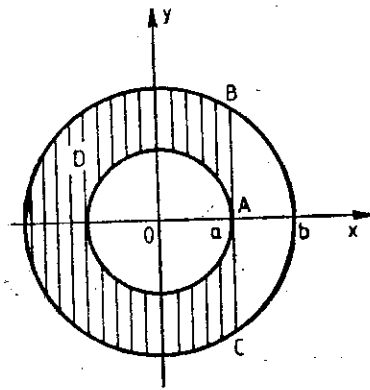


Fig. 24

Prin urmare, după formula (10) rezultă

$$I = \iint_{D'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta = \int_a^b dr \int_{\arccos \frac{a}{r}}^{2\pi - \arccos \frac{a}{r}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

7. Să se calculeze în coordonate polare următoarele integrale duble:

a) $I = \iint_D \arcsin \frac{1}{2\pi} (x^2 + y^2)^{1/2} dx dy$, unde $(D) \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq (2\pi)^2$;

b) $I = \iint_D \frac{y^2}{x^2} dx dy$, unde $(D) 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2x$.

Rezolvare. a) Domeniul D este coroana circulară cuprinsă între cercurile $x^2 + y^2 = \pi^2$ și $x^2 + y^2 = (2\pi)^2$. Domeniul D' corespunzător este dreptunghiul $\pi \leq r \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Prin urmare, după formula (10), obținem

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\pi}^{2\pi} \left(\arcsin \frac{r}{2\pi} \right) r dr = 2\pi \int_{\pi}^{2\pi} \left(\arcsin \frac{r}{2\pi} \right) r dr = 8\pi^3 \int_{1/2}^1 u \arcsin u du =$$

$$= 4\pi^3 u^2 \arcsin u \Big|_{1/2}^1 - 4\pi^3 \int_{1/2}^1 \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}} du = \pi^3 \left(\frac{7}{6} \pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

b) Domeniul D este porțiunea din exteriorul cercului $x^2 + y^2 = 1$, care se află în interiorul cercului $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Imaginea domeniului D este domeniul D' limitat de imaginile celor două cercuri (fig. 25). Deci, domeniul D' este definit prin $1 \leq r$ și $r \leq 2 \cos \theta$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right]$. După formula (10), rezultă

$$I = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} d\theta \int_1^{2\cos\theta} r \operatorname{tg}^2 \theta dr = \frac{1}{2} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} (4 \cos^2 \theta - 1) \operatorname{tg}^2 \theta d\theta = \pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

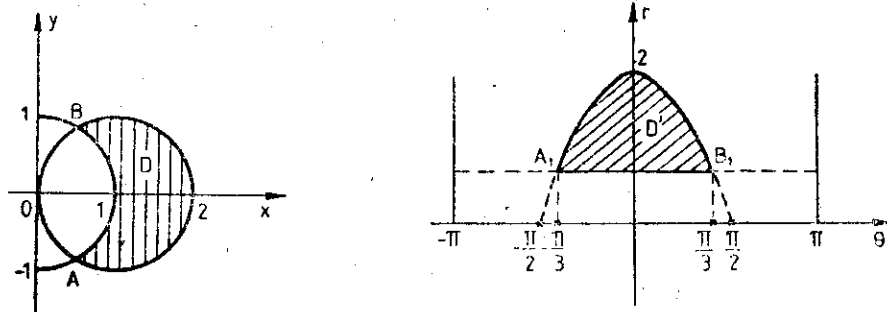


Fig. 25

8. Folosind o schimbare de variabilă adecvată, să se calculeze integrala dublă $I = \iint_D x dx dy$, unde $(D) 1 \leq xy \leq 2, 1 \leq \frac{y}{x} \leq 2, x > 0$.

Rezolvare. Domeniul D este mărginit de hiperbolele echilatre $xy = 1$ și $xy = 2$ și de dreptele $y = x$ și $y = 2x$. Forma domeniului D (fig. 26) indică transformarea $T: u = xy, v = \frac{y}{x}$, care duce pe D în pătratul $D': u \in [1, 2], v \in [1, 2]$. Transformarea T^{-1} este $x = u^{1/2}v^{-1/2}, y = u^{1/2}v^{1/2}$, iar jacobianul transformării este $\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \frac{1}{2} v^{-1} \neq 0$. După formula de schimbare (8), rezultă

$$I = \iint_{D'} u^{1/2} v^{-1/2} \frac{1}{2} v^{-1} du dv = \frac{1}{2} \int_1^2 u^{1/2} du \int_1^2 v^{-3/2} dv = \frac{1}{3} (5\sqrt{2} - 6).$$

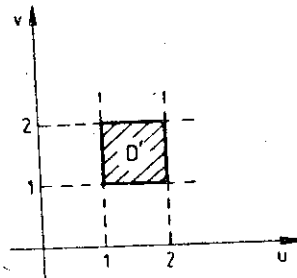
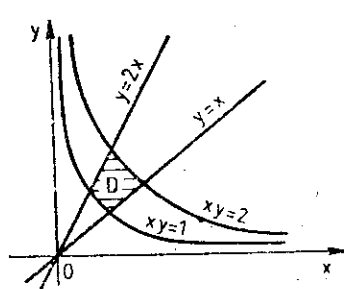


Fig. 26

9. Folosind o schimbare de variabilă adecvată, să se transforme integrala dublă

$$I = \iint_D (x^2 + y^2)^{-2} \cdot f\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) f\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right) dx dy, \text{ unde}$$

$$(D) \frac{x}{2} \leq x^2 + y^2 \leq x, \frac{y}{2} \leq x^2 + y^2 \leq y.$$

într-o integrală simplă, știind că $f(t)$ este o funcție continuă, definită pe axa reală.

Rezolvare. Domeniul D este limitat de cercurile

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{16}, \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \text{ și } x^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}, x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Deoarece expresiile $\frac{x}{x^2 + y^2}$ și $\frac{y}{x^2 + y^2}$ apar atât în ecuațiile cercurilor cit și în expresia funcției de integrat, este indicat să facem transformarea

$$(T) u = \frac{x}{x^2 + y^2}, v = \frac{y}{x^2 + y^2} \text{ sau } (T^{-1}) x = \frac{u}{u^2 + v^2}, y = \frac{v}{u^2 + v^2},$$

care duce domeniul D în pătratul (D') $u \in [1, 2], v \in [1, 2]$ din planul $uO'v$. Jacobianul trans-

formării este $\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = -(u^2 + v^2)^{-3}$. După formula (8), obținem

$$I = \iint_{D'} f(u)f(v)du dv = \int_1^2 du \int_1^2 f(u)f(v) dv = \left(\int_1^2 f(u)du\right) \left(\int_1^2 f(v)dv\right) = \left(\int_1^2 f(u)du\right)^2.$$

10. Să se verifice formula lui Green pentru funcțiile $P(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, dacă $(x, y) \neq (0, 0)$ și $P(0, 0) = 0$ și $Q(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, dacă $(x, y) \neq (0, 0)$ și $Q(0, 0) = 0$, pentru domeniul (D) $x^2 + y^2 \leq 1$.

Rezolvare. Funcțiile P și Q nu sînt continue în origine, deoarece

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = mx}} P(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x^2 + m^2 x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2}} \neq 0 \text{ și } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = mx}} Q(x, y) = \frac{m}{\sqrt{1 + m^2}} \neq 0$$

pentru $m \neq 0$.

Prin urmare, nu se poate aplica teorema de la punctul 2, funcțiile P și Q nefiind continue în D . Totuși, formula lui Green (11) este verificată. Ca să vedem aceasta, observăm că

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \text{ pentru } (x, y) \neq (0, 0) \text{ și } \frac{\partial P}{\partial y}(0, 0) = \frac{\partial Q}{\partial x}(0, 0) = 0$$

ultima egalitate fiind stabilită cu ajutorul definiției derivatei parțiale. Deci $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ în D și membrul drept din formula lui Green (11) este egal cu zero.

Pentru a arăta că și primul membru al formulei (11) are tot valoarea zero, folosim pentru cercul (C) $x^2 + y^2 = 1$ reprezentarea $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. Obținem

$$\oint_C P dx + Q dy = \int_0^{2\pi} (-\cos t \sin t + \cos t \sin t) dt = 0.$$

Deci, formula lui Green se verifică.

11. Să se calculeze cu ajutorul formulei lui Green următoarele integrale curbilinii:

a) $\oint_C y^2 dx + x^2 dy$, (C) $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$ și $x = t$, $y = 0$, $t \in [-1, 1]$;

b) $\oint_C e^{x^2+y^2}(-y dx + x dy)$, (C) $x^2 + y^2 = 1$.

Rezolvare. a) Curba C mărginește domeniul (D) : $x^2 + y^2 \leq 1$, $y \geq 0$, și este o curbă regulată închisă. Funcțiile $P(x, y) = y^2$, $Q(x, y) = x^2$ sînt continue și cu derivate parțiale continue în D și $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2(x - y)$. Se poate deci aplica formula lui Green (11):

$$\begin{aligned} \oint_C y^2 dx + x^2 dy &= 2 \iint_D (x - y) dx dy = 2 \int_0^\pi d\theta \int_0^1 r^2 (\cos \theta - \sin \theta) dr = \\ &= 2 \int_0^\pi (\cos \theta - \sin \theta) d\theta \int_0^1 r^2 dr = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Pentru calculul integralei duble am folosit coordonatele polare.

b) Procedînd similar, rezultă că se poate aplica formula lui Green. Pentru calculul integralei curbilinii se observă că:

$$\oint_C e^{x^2+y^2}(-y dx + x dy) = e \oint_C (-y dx + x dy),$$

deoarece $x^2 + y^2 = 1$ pe curba (C) . Se aplică acum formula lui Green pentru integrala curbilinie din membrul drept și se obține valoarea $2\pi e$.

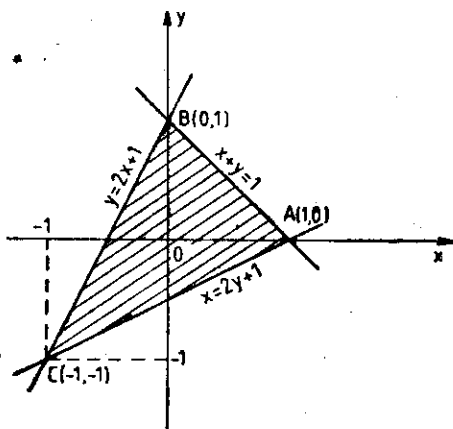


Fig. 27

12. Să se calculeze ariile domeniilor următoare:

a) D este limitat de dreptele $x + y = 1$, $y = 2x + 1$, $x = 2y + 1$;

b) (D) $ay \leq x^2 \leq by$, $cx \leq y^2 \leq dx$.

Rezolvare. a) Domeniul D este triunghiul ABC din figura 27. Deci

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_D &= \iint_D dx dy = \int_{-1}^0 dy \int_{\frac{1}{2}(y-1)}^{2y+1} dx + \\ &+ \int_0^1 dy \int_{\frac{1}{2}(y-1)}^{1-y} dx = \int_{-1}^0 \left(\frac{3}{2}y + \frac{3}{2} \right) dy + \\ &+ \int_0^1 \left(-\frac{3}{2}y + \frac{3}{2} \right) dy = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

b) Domeniul D este limitat de dreptele $x = y$ și $x = 2y$ și de curba $y = \sqrt{x}$. Domeniul D este în primul cadran și este limitat de axa Ox . Pentru a calcula aria domeniului D folosim formula lui Green (11) aplicată la curba C care mărginește domeniul D . Pentru a arăta că și primul membru al formulei (11) are tot valoarea zero, folosim pentru cercul (C) $x^2 + y^2 = 1$ reprezentarea $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. Obținem

13. Să se calculeze aria domeniului D limitat de dreptele $x = 1$, $y = 1$ și de axa Ox .

de speța a doua. *Rezolvare.* Pentru a calcula aria domeniului D folosim formula lui Green (11) aplicată la curba C care mărginește domeniul D .

Luînd pentru C curba C care mărginește domeniul D și aplicînd formula lui Green (11) obținem

14. Să se calculeze aria domeniului D limitat de dreptele $x = 1$, $y = 1$ și de axa Ox .

gene [densitatea este constantă și egală cu 1]. Domeniul D este în primul cadran și este limitat de axa Ox .

Rezolvare. Pentru a calcula aria domeniului D folosim formula lui Green (11) aplicată la curba C care mărginește domeniul D .

Domeniul D este în primul cadran și este limitat de axa Ox .

transformat D' în domeniul D' prin transformarea $x = u$, $y = v$.

Aplicînd formula lui Green (11) la curba C care mărginește domeniul D obținem

$M = \frac{1}{2} \oint_C (-y dx + x dy)$

b) Domeniul D este limitat de parabolele $x^2 = ay$, $x^2 = by$ și $y^2 = cx$, $y^2 = dx$. Forma domeniului indică folosirea transformării (T) $u = \frac{x^2}{y}$, $v = \frac{y^2}{x}$, care transformă pe D în dreptunghiul $u \in [a, b]$, $v \in [c, d]$ din planul $uO'v$. Avem (T^{-1}) $x = u^{2/3}v^{1/3}$, $y = u^{1/3}v^{2/3}$ și $\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \frac{1}{3}$. Prin urmare, obținem

$$\mathcal{A}_D = \iint_D dx dy = \iint_{D'} \frac{1}{3} du dv = \int_a^b du \int_c^d \frac{1}{3} dv = \frac{1}{3} (b-a)(d-c).$$

13. Să se calculeze aria elipsei $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, folosind integrala curbilinie de speța a doua.

Rezolvare. În baza formulei lui Green, dacă C reprezintă frontiera lui D , avem

$$\oint_C x dy = \oint_C -y dx = \iint_D dx dy \text{ și deci } \mathcal{A}_D = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx.$$

Luând pentru elipsă reprezentarea parametrică (C) $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$, obținem:

$$\mathcal{A}_D = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (ab \cos^2 t + ab \sin^2 t) dt = \pi ab.$$

14. Să se calculeze masa și coordonatele centrului de greutate G al plăcii omogene [densitatea este constantă, $f(x, y) = k$, definită prin (D) $x^2 + y^2 \leq a^2$, $x^2 + y^2 \geq ax$, $y \geq 0$, $a > 0$.

Rezolvare. Folosim formulele (12) și (13). Deoarece expresiile ce definesc domeniul D conțin combinația $x^2 + y^2$, este convenabil să folosim coordonatele polare pentru calculul integralelor duble. Domeniul D este limitat de cercurile $x^2 + y^2 = a^2$, $(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$ și dreapta $y = 0$. Domeniul transformat D' (fig. 28) este definit prin $a \cos \theta \leq r \leq a$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ și $0 < r \leq a$, $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$.

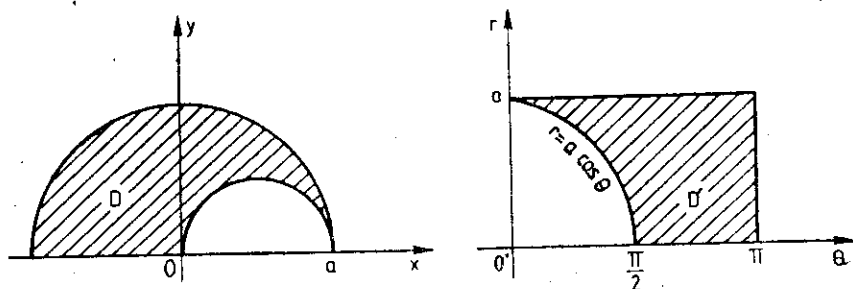


Fig. 28

Aplicând formula de schimbare de variabile, obținem

$$\begin{aligned} M &= \iint_D k dx dy = k \iint_{D'} r dr d\theta = k \int_0^{\pi/2} d\theta \int_{a \cos \theta}^a r dr + k \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta \int_0^a r dr = \\ &= \frac{1}{2} k \int_0^{\pi/2} a^2 (1 - \cos^2 \theta) d\theta + \frac{k}{2} \int_{\pi/2}^{\pi} a^2 d\theta = \frac{3}{8} ka^2 \pi. \end{aligned}$$

Apoi

$$\iint_D kx \, dx \, dy = k \iint_{D'} r^2 \cos \theta \, dr \, d\theta = k \int_0^{\pi/2} \frac{a^3}{3} (1 - \cos^3 \theta) \cos \theta \, d\theta + \frac{ka^3}{3} \int_{\pi/2}^{\pi} \cos \theta \, d\theta = -\frac{ka^3\pi}{16}$$

astfel că $x_0 = -\frac{a}{6}$. Similar se obține $y_0 = \frac{14a}{(9\pi)}$.

15. Să se calculeze momentele de inerție în raport cu axele de coordonate și în raport cu originea pentru placa (D) $x + y \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, știind că densitatea de masă este $f(x, y) = xy$.

Rezolvare. Domeniul D este triunghiul OAB , cu $A(1, 0)$, $B(0, 1)$. Cu formulele (14), avem

$$I_x = \iint_D y^2 f(x, y) \, dx \, dy = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} xy^2 \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-y)^2 y^3 \, dy = \frac{1}{120}$$

$$I_y = \iint_D x^2 f(x, y) \, dx \, dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x^2 y \, dy = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x)^3 x^3 \, dx = \frac{1}{120}$$

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{1}{60}$$

16. Să se calculeze volumul corpului delimitat de suprafața $z = x^2 + y^2$, cilindrul $x^2 + y^2 = 1$ și planul xOy .

Rezolvare. Avem $V = \iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy$, unde (D) $x^2 + y^2 \leq 1$. Folosind coordonatele polare obținem

$$V = \iint_{D'} r^3 \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 \, dr = 2\pi \cdot \frac{r^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

10.6.2. Probleme propuse spre rezolvare

17. Să se calculeze :

a) $\iint_D \frac{\cos y}{1 + \sin x \sin y} \, dx \, dy$, (D) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$;

b) $\iint_D (1-x)(1-xy) \, dx \, dy$, (D) $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$;

c) $\iint_D \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x(1+xy)}} \, dx \, dy$, (D) $1 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 1$;

d) $\iint_D xy(1+x^2+y^2)^{-3/2} \, dx \, dy$, (D) $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$

18. Să se transforme integrala dublă $I = \iint_D f(x, y) \, dx \, dy$ în integrale iterate, pentru următoarele domenii :

a) D este triunghiul ABC , cu $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$ și $C(0, 1)$;

b) D este mărginit de parabola $x = y^2$ și de dreapta $x = 4$;

c) (D) $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 \leq 0$; d) (D) $x^2 + y^2 \leq 4$, $x^2 + y^2 \geq 2x$;

e) D este limitat de dreptele $y = x$, $y = 2x$, $x = 1$ și $x = 2$.

$$\cos \theta \, d\theta = -\frac{ka^3\pi}{16}$$

de coordonate și
știind că densi-

mulele (14), avem

$$\frac{1}{120}$$

$$\frac{1}{120}$$

$= x^2 + y^4$, cilin-

coordonatele polare

integrale iterate,

$+ y^2 \geq 2x$;

2.

19. Să se schimbe ordinea de integrare în următoarele integrale iterate:

a) $\int_0^1 dy \int_{x^2}^{y^2} f(x, y) dx$; b) $\int_{\pi/2}^{5\pi/2} dx \int_{-1}^{\sin x} f(x, y) dy + \int_{\pi/2}^{5\pi/2} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy$;

c) $\int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{x^2-1} f(x, y) dy$; d) $\int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx$.

20. Să se calculeze următoarele integrale duble:

a) $\iint_D (1-y) dx dy$, (D) $x^2 + y^2 \leq 2y$, $y \leq x^2$, $x \geq 0$;

b) $\iint_D (xy)^{1/2} dx dy$, (D) $y \geq x^3$, $y \leq x^2$, $x \geq 0$;

c) $\iint_D y dx dy$, (D) limitat de $y = 1$, și $y = x^2$;

d) $\iint_D (\cos x + y) dx dy$, (D) limitat de $x = 0$, $y = \pi$ și $y = x$;

e) $\iint_D (1+y)^{-2} dx dy$, (D) $y \leq x$, $xy \geq 1$, $1 \leq x \leq 2$;

f) $\int_0^1 dy \int_{y^2}^{y^{1/3}} ye^{x^2} dx$; g) $\int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\arcsin y^{1/3}} \frac{x}{\sin x} dx$;

h) $\int_0^1 dy \int_{y^2}^{y^{1/3}} y \frac{\sin x}{x} dx$; i) $\int_{-1}^0 dy \int_{-y^2}^{-y^{1/3}} ye^{x^2} dx$;

j) $\iint_D e^{x/y} dx dy$, (D) limitat de $x = y^2$, $x = 0$ și $y = 1$;

k) $\iint_D (x^2 + y) dx dy$, (D) limitat de $y = x^2$ și $y^2 = x$;

l) $\iint_D xy(1-y^2)^{-1/2} dx dy$, (D) $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$;

m) $\iint_D (x^2 - y^2)^{1/2} dx dy$, (D) $\equiv \triangle OAB$, $A(1, -1)$, $B(1, 1)$;

n) $\iint_D (xy - y^2)^{1/2} dx dy$, (D) $\equiv \triangle OAB$, $A(10, 1)$, $B(1, 1)$.

21. Să se efectueze schimbarea de variabile de la coordonatele carteziene la coordonatele polare în integrala dublă $\iint_D f(x, y) dx dy$ și apoi integrala obținută să se transforme în integrale iterate, pentru următoarele D :

a) $x^2 + y^2 \leq a^2$; b) $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$;

c) $x^2 + y^2 \leq a^2$, $y \geq 0$, $x \geq -\sqrt{3}y$; d) $y \leq 1$, $-y \leq x \leq y$.

22. Folosind coordonatele polare, să se transforme următoarele integrale duble în integrale simple:

a) $\iint f(\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy$, (D) $x^2 + y^2 \leq 2ay$, $a > 0$;

b) $\iint_D f(x^2 + y^2) dx dy, (D) x^2 + y^2 \leq a^2;$

c) $\iint_D f\left(\frac{y}{x}\right) dx dy, (D) a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2, -x \leq y \leq x.$

23. Utilizând coordonatele polare, să se calculeze:

a) $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, (D) x^2 + y^2 \leq 4;$

b) $\iint_D e^{x^2 + y^2} dx dy, (D) x^2 + y^2 \leq a^2;$

c) $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy, (D) x^2 + y^2 \leq 2ax, a > 0;$

d) $\iint_D (a^2 - x^2 - y^2) dx dy, (D) x^2 + y^2 \leq a^2, y \leq 0;$

e) $\iint_D y dx dy, (D) x^2 + y^2 \leq ax, y \geq -x;$

f) $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, (D) ax \leq x^2 + y^2 \leq 2ax, y \geq 0.$

24. Cu ajutorul unor schimbări de variabile adecvate, să se calculeze integralele duble:

a) $\iint_D (x + y) dx dy, (D) 1 \leq x + y \leq 13, x \leq y \leq 5x;$

b) $\iint_D \left(1 + \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2} dx dy, (D) -\frac{4b}{5a}x \leq y \leq \frac{3b}{5a}x, \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \leq 1;$

c) $\iint_D (x + y) dx dy, (D) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1;$

d) $\iint_D f\left(\frac{y}{x}\right) dx dy, (D) 1 \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 9, -\frac{b}{a}\sqrt{3} \leq \frac{y}{x} \leq \frac{b}{a}.$

25. Să se verifice formula lui Green pentru funcțiile P și Q , definite pe domeniul $(D) x^2 + y^2 \leq 1$, dacă:

a) $P(x, y) = \begin{cases} -y(x^2 + y^2)^{-1}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0); \end{cases}$

$Q(x, y) = \begin{cases} x(x^2 + y^2)^{-1}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0); \end{cases}$

b) $P(x, y) = \begin{cases} x(x^2 + y^2)^{-1}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0); \end{cases}$

$Q(x, y) = \begin{cases} y(x^2 + y^2)^{-1}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

26. Pa

a) $\oint_C e^x$

b) \oint_C

c) $\oint_C 2x$

$A(1, 1), B($

d) \oint_C

27. Să se

curbilinii:

a) \oint_C

b) \oint_C

completat

c) \oint_C

28. Să

a) (D)

b) (D)

c) (D)

d) (D)

e) (D)

$x >$

29. Să

a) $x +$

30. Să

$f(x, y)$ dat

a) (D)

b) D

31. Să

densitate

a) (D)

b) (D)

17. Să

26. Folosind formula lui Green, să se calculeze următoarele integrale curbilini

a) $\oint_C e^{y^2-x^2}(\cos^2 2xy dx + \sin 2xy dy)$, $(C) x^2 + y^2 = a^2$;

b) $\oint_C -x^2y dx + xy^2 dy$, $(C) x^2 + y^2 = a^2$;

c) $\oint_C 2(x^2 + y^2) dx + (x + y)^2 dy$, C fiind perimetrul triunghiului ABC , cu $A(1, 1)$, $B(2, 2)$, $C(1, 3)$;

d) $\oint_C (x^2 + y^2)^{1/2} dx + y[xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})] dy$, $(C) (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

27. Să se calculeze direct și cu ajutorul formulei lui Green, următoarele integrale curbilini:

a) $\oint_C (x - y) dx + dy$, C fiind frontiera lui $(D) x^2 + y^2 \leq 2x$, $y \geq 0$;

b) $\oint_C (x^2 - 3xy^2) dx + (3x^2y - y^3) dy$, C fiind stertul de cerc $x^2 + y^2 = 1$, completat cu razele OA pe Ox și OB pe Oy ;

c) $\oint_C (xy - y) dx + (xy + x) dy$, $(C) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

28. Să se calculeze ariile domeniilor următoare:

a) (D) limitat de $y = x^2$ și $y = x$;

b) (D) limitat de $y^2 = 2px$, $x^2 + y^2 = 8p^2$, $p > 0$;

c) (D) limitat de $x = y$, $x = 2y$, $x + y = a$, $x + 3y = a$, $a > 0$;

d) (D) limitat de $y^2 = 10x + 25$, $y^2 = -6x + 9$;

e) (D) limitat de $y = ax$, $y = bx$, $(0 < a < b)$, $y^2 = px$, $y^2 = qx$, $0 < p < q$, $x > 0$, $y > 0$.

29. Să se calculeze volumele corpurilor mărginite de suprafețele:

a) $x + y + z = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; b) $x + y + z = 4a$, $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$.

30. Să se calculeze masa pentru fiecare din plăcile plane, de densitate de masă $f(x, y)$ dată:

a) $(D) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$; $f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2}$;

b) D este limitat de $x + y = 3$, $xy = 2$; $f(x, y) = xy$.

31. Să se calculeze coordonatele centrelor de greutate ale plăcilor plane, de densitate $f(x, y)$.

a) $(D) x^2 + y^2 \leq a^2$, $y \geq 0$; $f(x, y) = 1$;

b) $(D) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$; $f(x, y) = 1$;

c) (D) este limitat de $y = \cos x$, $y = 0$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$; $f(x, y) = 1$;

d) D este limitat de $y^2 = 4x + 4$, $y^2 = -2x + 4$; $f(x, y) = k$;

e) D este limitat de $x + y = 3$, $xy = 2$, $f(x, y) = xy$.

32. Să se calculeze momentele de inerție în raport cu axele de coordonate pentru plăcile plane omogene, mărginite de curbele:

a) $x + y = 2$, $x = 2$, $y = 2$; b) $y = x^2$, $x = y^2$.

10.7. Integrale de suprafață. Formula lui Stokes

I. Integrale de suprafață de prima speță. Fie Σ o suprafață regulată dată prin

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2. \quad (1)$$

Fie $\Delta = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ o diviziune a suprafeței Σ , realizată prin rețeaua curbelor coordonate, s_i , $i = 1, 2, \dots, n$, fiind porțiunile elementare de suprafață. Fie d_i diametrul celei mai mici sfere care conține elementul de suprafață s_i . Norma diviziunii Δ este numărul $\nu(\Delta) = \max_{1 \leq i \leq n} d_i$. Fie punctul $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in s_i$, ales arbitrar.

Fie $F(x, y, z)$ o funcție continuă pe Σ . Se numește integrala de suprafață de prima speță numărul real

$$\iint_{\Sigma} F(x, y, z) d\sigma = \lim_{\nu(\Delta) \rightarrow 0} \sigma_{\Delta}(F), \quad \sigma_{\Delta}(F) = \sum_{i=1}^n F(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) s_i, \quad (2)$$

Limita fiind aceeași pentru orice alegere a punctelor intermediare. Valoarea integralei de suprafață de prima speță este independentă de alegerea feței suprafeței de integrare.

Integrala de suprafață de prima speță se calculează după formula

$$\iint_{\Sigma} F(x, y, z) d\sigma = \iint_D F(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv, \quad (3)$$

unde $E = (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2$, $F = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v$, $G = (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2$ reprezintă coeficienții primei forme fundamentale a suprafeței.

Dacă suprafața regulată Σ este dată sub forma explicită

$$z = f(x, y), (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2, \quad (4)$$

atunci formula (3) capătă forma

$$\iint_{\Sigma} F(x, y, z) d\sigma = \iint_D F(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy, \quad p = z'_x, q = z'_y. \quad (5)$$

II. Integrala de suprafață de speța a doua. Fie funcțiile $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ continue în punctele suprafeței Σ . Fie Σ_+ fața suprafeței regulate Σ , definită de versorul normalei $n(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$. Integrala de suprafață de speța a doua se reduce la o integrală de suprafață de speța întâi

$$\iint_{\Sigma_+} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma. \quad (6)$$

Formula
închis regulat
parțiale contin

unde $F(P, Q,$
curba C este
mișcă pe C să
Aplicații.

2. Masa M
buită densitate

3. Moment

1. Să se

a) $I =$

b) $I =$

decupată de

c) $I =$

pată de cî

Rezolvare

$z = b \sin \varphi,$

După formula

$I = \int_0^{2\pi}$

Formula lui Stokes. Fie Σ o suprafață regulată cu două fețe, care se sprijină pe conturul închis regulat C . Dacă funcțiile $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ sînt funcții continue și cu derivate parțiale continue într-un domeniu $V \subset R^3$, care conține suprafața Σ , atunci are loc formula lui Stokes

$$\oint_C P dx + Q dy + R dz = \iint_{\Sigma} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] d\sigma \text{ sau } \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\Sigma} \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma, \quad (7)$$

unde $\mathbf{F}(P, Q, R)$, \mathbf{n} este versorul normalei la fața considerată a suprafeței, iar sensul de parcurs pe curba C este cel asociat feței corespunzătoare (curba C este parcursă astfel încît un observator ce se mișcă pe C să lase tot timpul la stînga fața considerată a suprafeței Σ).

Aplicații. 1. Aria porțiunii de suprafață Σ este

$$A_{\Sigma} = \iint_{\Sigma} d\sigma = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv. \quad (8)$$

2. Masa M și coordonatele centrului de greutate G al porțiunii Σ de suprafață, pe care este distribuită densitatea de masă $\rho(x, y, z)$, sînt date de

$$M = \iint_{\Sigma} \rho(x, y, z) d\sigma, \quad x_G = \frac{1}{M} \iint_{\Sigma} x \rho(x, y, z) d\sigma, \\ y_G = \frac{1}{M} \iint_{\Sigma} y \rho(x, y, z) d\sigma, \quad z_G = \frac{1}{M} \iint_{\Sigma} z \rho(x, y, z) d\sigma. \quad (9)$$

3. Momentul de inerție al porțiunii Σ de suprafață, în raport cu originea, se calculează cu formula

$$I_0 = \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) d\sigma. \quad (10)$$

10.7.1. Probleme rezolvate

1. Să se calculeze următoarele integrale de suprafață de prima speță :

a) $I = \iint_{\Sigma} (x + y + z) d\sigma$, unde Σ este suprafața $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$;

b) $I = \iint_{\Sigma} (x + y + z)^{-1} d\sigma$, unde Σ este porțiunea din planul $x + y + z = a$, decupată de planele de coordonate;

c) $I = \iint_{\Sigma} z d\sigma$, unde Σ este porțiunea din paraboloidul $z = (x^2 + y^2)/2$, decupată de cilindrul $x^2 + y^2 = 8$.

Rezolvare. a) Pentru suprafața Σ considerăm reprezentarea Σ $x = a \cos \theta \cos \varphi$, $y = a \sin \theta \cos \varphi$, $z = a \sin \theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in [0, \pi/2]$. Prin calcul găsim $d\sigma = \sqrt{EG - F^2} d\theta d\varphi = a^2 |\cos \varphi| d\theta d\varphi$. După formula (3) obținem

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} (a \cos \theta \cos \varphi + a \sin \theta \cos \varphi + a \sin \theta) a^2 \cos \varphi d\varphi = 0 + 0 + \pi a^3 = \pi a^3.$$

b) Suprafața Σ este triunghiul ABC , cu $A(a, 0, 0)$, $B(0, a, 0)$ și $C(0, 0, a)$ și se proiectează în planul $z = 0$ după triunghiul OAB . Deci ecuația suprafeței Σ poate fi scrisă sub forma explicită $z = a - x - y$, $(x, y) \in \Delta OAB$ din planul xOy . Aplicăm formula (5), cu $p = -1$, $q = -1$, $d\sigma = \sqrt{3} dx dy$:

$$I = \iint_{\Delta OAB} \frac{1}{a} \sqrt{3} dx dy = \frac{\sqrt{3}}{a} \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

c) Suprafața Σ se proiectează în planul xOy după domeniul plan (D) $x^2 + y^2 \leq 8$. Deci Σ $z = (x^2 + y^2)/2$, $(x, y) \in D$. Aplicăm formula (5); avem $p = x$, $q = y$, $d\sigma = (1 + x^2 + y^2)^{1/2} dx dy$ și

$$I = \iint_D \frac{1}{2} (x^2 + y^2)(1 + x^2 + y^2)^{1/2} dx dy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r^3 (1 + r^2)^{1/2} dr = \\ = \pi \left[\frac{1}{5} (1 + r^2)^{5/2} - \frac{1}{3} (1 + r^2)^{3/2} \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{596}{15} \pi.$$

2. Să se calculeze următoarele integrale de suprafață de speța a doua:

a) $I = \iint_{\Sigma} x dy dz + y dx dz + z dx dy$, unde Σ este fața exterioară a sferei $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$;

b) $I = \iint_{\Sigma} (y - z) dy dz + (z - x) dx dz + (x - y) dx dy$, unde Σ este fața exterioară închisă a conului $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq h$;

c) $I = \iint_{\Sigma} \left(\frac{1}{x} dy dz + \frac{1}{y} dx dz + \frac{1}{z} dx dy \right)$, unde Σ este fața interioară a elipsoidului $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Rezolvare. a) Versorul normalei n atașat feței exterioare a sferei este $n \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a} \right)$, astfel că, după formula (6), obținem

$$I = \iint_{\Sigma} \left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{a} + \frac{z^2}{a} \right) d\sigma = \iint_{\Sigma} \frac{a^2}{a} d\sigma = a \iint_{\Sigma} 1 d\sigma = 4\pi a^2,$$

deoarece aria sferei este $\iint_{\Sigma} d\sigma = 4\pi a^2$.

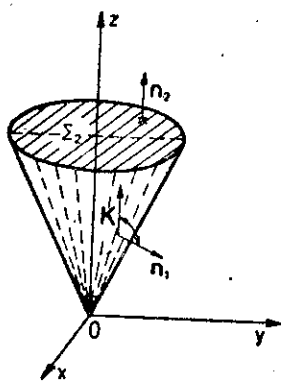


Fig. 29

b) Suprafața Σ se compune din suprafețele Σ_1 - fața laterală a conului și Σ_2 - secțiunea conului cu planul $z = h$ (fig. 29). Deci

$$I = \iint_{\Sigma_1} + \iint_{\Sigma_2} = I_1 + I_2.$$

Deoarece fața exterioară a lui Σ_2 are versorul normal $n_2(0, 0, 1)$, după formula (6) obținem

$$I_2 = \iint_{\Sigma_2} (x - y) d\sigma = \iint_D (x - y) dx dy,$$

unde (D) $x^2 + y^2 \leq h^2$, $z = 0$, este proiecția lui Σ_2 în planul xOy . Trecând la coordonate polare, rezultă

$$I_2 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h r^2 (\cos \theta - \sin \theta) dr = 0.$$

Fie $\Phi(x, y, z) = z - \sqrt{x^2 + y^2} = 0$ ecuația suprafeței Σ_1 . Un vector normal la suprafața Σ_1 este vectorul

$$\text{grad } \Phi \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right) \text{ și } |\text{grad } \Phi| = \sqrt{2}.$$

Deoarece versorul n_1 formează unghi obtuz cu Ox , rezultă $\cos \gamma < 0$ și deci

$$n_1 = -\frac{\text{grad } \Phi}{|\text{grad } \Phi|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -1 \right).$$

După formula (6) rezultă

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_{\Sigma_1} \left[\frac{x(y-z) + y(z-x)}{\sqrt{x^2 + y^2}} - (x-y) \right] d\sigma = \sqrt{2} \iint_{\Sigma_1} (y-x) d\sigma = \\ &= 2 \iint_D (y-x) dx dy = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h r^2 (\sin \theta - \cos \theta) dr = 0. \end{aligned}$$

Deci $I = 0$.

c) Versorul normalei interioare corespunzătoare feței interioare elipsoidului este $n_1 = -\frac{\text{grad } \Phi}{|\text{grad } \Phi|}$

$$= \frac{1}{A} \left(-\frac{2x}{a^3}, -\frac{2y}{b^3}, -\frac{2z}{c^3} \right), \text{ unde}$$

$$A = |\text{grad } \Phi| = 2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^{1/2}.$$

Deci, după formula (6), avem

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma} \left(-\frac{2}{a^3 A} - \frac{2}{b^3 A} - \frac{2}{c^3 A} \right) d\sigma = - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \iint_{\Sigma} \frac{2}{A} d\sigma = \\ &= - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \iint_{\Sigma} \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^{-1/2} d\sigma. \end{aligned}$$

Luăm pentru elipsoid reprezentarea $x = a \cos \theta \cos \varphi$, $y = b \sin \theta \cos \varphi$, $z = c \sin \varphi$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$. Obținem $EG - F^2 = b^2 c^2 \cos^2 \theta \cos^4 \varphi + a^2 c^2 \sin^2 \theta \cos^4 \varphi + a^2 b^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi - a^2 b^2 c^2 \cos^2 \varphi \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)$, și deci $d\sigma = abc |\cos \varphi| \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^{1/2} d\theta d\varphi$. Prin urmare,

$$I = - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} abc \cos \varphi d\varphi = - \frac{4\pi}{abc} (b^2 c^2 + a^2 c^2 + a^2 b^2).$$

3. Să se calculeze $I = \oint_C y dx + z dy + x dz$, unde C este cercul $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$, parcurs în sens invers sensului de mișcare a acelor de ceasornic, dacă privim din direcția pozitivă a axei Ox .

Rezolvare. Se verifică ușor faptul că sînt îndeplinite condițiile de aplicabilitate ale formulei lui Stokes. Luînd drept suprafață Σ porțiunea din planul $x + y + z = 0$, decupată de cercul C , după formula lui Stokes avem

$$I = - \iint_{\Sigma} (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) d\sigma = - \sqrt{3} \iint_{\Sigma} d\sigma,$$

deoarece $\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$ sînt cosinusurile directe ale normalei la fața Σ . Dacă D este interiorul proiecției cercului C pe planul xOy , atunci (prin eliminarea lui z între cele două ecuații ale lui C)

$$(D) : x^2 + xy + y^2 \leq \frac{a^2}{2}, z = 0,$$

și

$$I = -\sqrt{3} \iint_{\Sigma} d\sigma = -3 \iint_D dx dy = -\pi a^2 \sqrt{3}, \text{ deoarece } d\sigma = \sqrt{3} dx dy.$$

4. Să se transforme cu ajutorul formulei lui Stokes, integralele curbilini în integrale de suprafață:

a) $I = \oint_C (x^2 - yz) dx + (y^2 - zx) dy + (z^2 - xy) dz$, C fiind o curbă închisă,

b) $I = \oint_C y dx + z dy + x dz$, $(C) \quad x = a \cos^2 t, y = \frac{a}{\sqrt{2}} \sin 2t, z = a \sin^2 t$.

Rezolvare. a) Aplicînd formula lui Stokes, obținem $I = 0$.

b) Dacă se elimină parametrul t , se obțin ecuațiile curbei sub forma $(C) \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + z = a$. Luînd ca suprafață Σ porțiunea din planul $x + z = a$, decupată de cercul C , și deoarece versorul normalei la Σ este $n \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$, după formula (7), obținem

$$I = - \iint_{\Sigma} \sqrt{2} d\sigma = -2 \iint_D dx dy = -\frac{\pi}{\sqrt{2}} a^2,$$

unde D este proiecția interiorului cercului C pe planul xOy :

$$(D) \quad 2x^2 + y^2 - 2ax \leq 0, z = 0.$$

5. Să se calculeze aria porțiunii din paraboloidul $x^2 + y^2 = 2z$, mărginită de planul $z = 2$.

Rezolvare. Proiecția porțiunii de suprafață pe planul xOy este $(D) : x^2 + y^2 \leq 4$. Deci, $p = x$, $q = y$ și

$$A = \iint_{\Sigma} d\sigma = \iint_D (1 + x^2 + y^2)^{1/2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r(1 + r^2)^{1/2} dr = \frac{2\pi}{3} (5\sqrt{5} - 1).$$

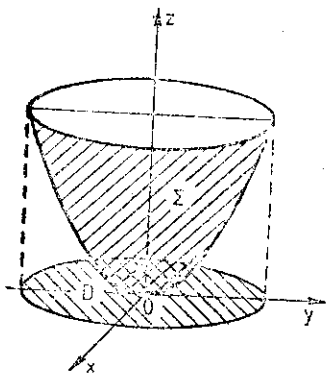


Fig. 30

6. Să se calculeze aria porțiunii din sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, decupată de cilindrul $x^2 + y^2 - ay = 0$, situată în semispațiul $z \geq 0$.

Rezolvare. Proiecția suprafeței în planul xOy se face pe domeniul $(D) \quad x^2 + y^2 - ay \leq 0, z = 0$. Deoarece $(\Sigma) \quad z = (a^2 - x^2 - y^2)^{1/2}$, $(x, y) \in D$, rezultă $p = -x(a^2 - x^2 - y^2)^{-1/2}$, $q = -y(a^2 - x^2 - y^2)^{-1/2}$ și $d\sigma = a(a^2 - x^2 - y^2)^{-1/2} dx dy$. Prin urmare, avem

$$\begin{aligned} A &= \iint_D a(a^2 - x^2 - y^2)^{-1/2} dx dy = a \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a \sin \theta} r(a^2 - r^2)^{-1/2} dr = \\ &= a^2 \int_0^{\pi} (1 - |\cos \theta|) d\theta = (\pi - 2)a^2. \end{aligned}$$

7. Să se calculeze integrala curbilini a formei omogene de grad 1 pe suprafața

Rezolvare. Pentru un con, deosebit de interesant este suprafața

$$(D) \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

și similar $y = 0$.

8. Să se calculeze integrala curbilini a formei omogene de grad 1 pe suprafața

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

Rezolvare.

Pentru suprafața

$$\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right],$$

$I_{\text{con}} =$

9. Să se calculeze integrala curbilini a formei omogene de grad 1 pe suprafața

$$a) \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$$

$$b) \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} dx dy dz$$

$$c) \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} dx dy dz$$

între planurile

$$d) \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} dx dy dz$$

decupată de

$$e) \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} dx dy dz$$

de planul

$$f) \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} dx dy dz$$

$$g) \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} dx dy dz$$

$$h) \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} dx dy dz$$

10. Să se calculeze integrala curbilini a formei omogene de grad 1 pe suprafața

$$a) \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$$

7. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al porțiunii de suprafață omogenă (Σ) $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$, decupată de suprafața $x^2 + y^2 = ax$.

Rezolvare. Trebuie să calculăm coordonatele centrului de greutate al unei porțiuni din suprafața unui con, decupată de un cilindru, densitatea fiind constantă (o luăm egală cu unitatea).

Suprafața se proiectează în planul xOy după domeniul

(D) $x^2 + y^2 \leq ax, z = 0$. Avem $p = x(x^2 + y^2)^{-1/2}, q = y(x^2 + y^2)^{-1/2}$ și

$$M = \iint_{\Sigma} d\sigma = \sqrt{2} \iint_D dx dy = \sqrt{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{a \cos \theta} r dr = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi a^2,$$

$$x_G = \frac{1}{M} \iint_{\Sigma} x d\sigma = \frac{\sqrt{2}}{M} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{a \cos \theta} r^2 \cos \theta dr = \frac{a}{2},$$

și similar $y_G = 0, z_G = \frac{16}{9} a$.

8. Să se calculeze momentul de inerție, în raport cu axa Oz , al porțiunii sferice $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$, de densitate de masă $\rho(x, y, z) = a$.

Rezolvare. Momentul de inerție în raport cu axa Oz este

$$I_{Oz} = \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) d\sigma = \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) z d\sigma.$$

Pentru suprafața Σ considerată avem reprezentarea $x = a \cos \theta \cos \varphi, y = a \sin \theta \cos \varphi, z = a \sin \varphi$,

$\theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Deoarece $d\sigma = a^2 \cos \varphi d\theta d\varphi$, rezultă

$$I_{Oz} = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} a^2 \cos^2 \varphi \cdot a \sin \varphi \cdot a^2 \cos \varphi d\varphi = \frac{a^5}{2} \pi \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi = \frac{a^5 \pi}{8}.$$

10.7.2. Probleme propuse spre rezolvare

9. Să se calculeze următoarele integrale de suprafață de prima speță:

a) $\iint_{\Sigma} (x + y + z) d\sigma, \Sigma$ fiind suprafața cubului $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$;

b) $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) d\sigma, (\Sigma) x^2 + y^2 + z^2 = a^2$;

c) $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2)^{1/2} d\sigma, \Sigma$ fiind suprafața laterală a conului $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{z^2}{b^2}$, cuprinsă între planele $z = 0$ și $z = b$;

d) $\iint_{\Sigma} (xy + yz + zx) d\sigma, \Sigma$ fiind porțiunea suprafeței conice $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$, decupată de suprafața $x^2 + y^2 = 2ax$;

e) $\iint_{\Sigma} (xy + y) d\sigma, \Sigma$ fiind porțiunea suprafeței conice $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$, decupată de planul $z = 1$;

f) $\iint_{\Sigma} z^2 d\sigma, (\Sigma) x = u \cos v, y = u \sin v, z = hu, u \in [0, a], v \in [0, 2\pi]$;

g) $\iint_{\Sigma} \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^{1/2} d\sigma, (\Sigma) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$;

h) $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} d\sigma, (\Sigma) z = (x^2 + y^2)^{1/2}, 0 < z < a$.

10. Să se calculeze următoarele integrale de suprafață de speța a doua:

a) $\iint_{\Sigma} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy, \Sigma$ fiind fața interioară a sferei $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$;

b) $\iint_{\Sigma} yz \, dy \, dz + xz \, dz \, dx + xy \, dx \, dy$, Σ fiind fața exterioară a tetraedrului limitat de planele $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = a$;

c) $\iint_{\Sigma} z \, dx \, dy$, Σ fiind fața exterioară a elipsoidului $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$;

d) $\iint_{\Sigma} x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy$, Σ fiind fața exterioară închisă a cilindrului $x^2 + y^2 = a^2$, $-h \leq z \leq h$.

11. Utilizând formula lui Stokes, să se calculeze următoarele integrale curbilinii (sensul de parcurs fiind astfel încât domeniul interior să fie lăsat în stînga):

a) $\oint_C (y+z) \, dx + (z+x) \, dy + (x+y) \, dz$, $(C) \, x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x+y+z = 0$;

b) $\oint_C (y-z) \, dx + (z-x) \, dy + (x-y) \, dz$, $(C) \, x^2 + y^2 = 1$, $x+z = 1$;

c) $\oint_C x \, dx + (x+y) \, dy + (x+y+z) \, dz$, $(C) \, x = a \sin t$, $y = a \cos t$, $z = a(\sin t + \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$;

d) $\oint_C y^2 \, dx + z^2 \, dy + x^2 \, dz$, C fiind perimetrul $ABDA$ al triunghiului ABD , cu $A(a, 0, 0)$, $B(0, a, 0)$, $D(0, 0, a)$;

e) $\oint_C x^2 y^3 \, dx + dy + z \, dz$, $(C) \, x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$;

f) $\oint_C (y^2 - z^2) \, dx + (z^2 - x^2) \, dy + (x^2 - y^2) \, dz$, C fiind conturul obținut prin intersecția cubului $[0, a] \times [0, a] \times [0, a]$ cu planul $x + y + z = \frac{3}{2}a$.

12. Să se afle aria porțiunii de suprafață secționată de:

a) cilindrul $x^2 + y^2 = a^2$ ($x, y > 0$) din paraboloidul hiperbolic $z = xy$;

b) cilindrul $x^2 + y^2 - 2x = 0$ din conul $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

c) cilindrul $x^2 + y^2 = a^2$ din conul $x = (y^2 + z^2)^{1/2}$.

13. Să se calculeze aria porțiunii de suprafață Σ $x = \sin u \cos v$, $y = \sin u \sin v$, $z = u$, $u \in [0, \pi]$, $v \in [0, 2\pi]$.

14. Să se calculeze aria porțiunii conului $4(x^2 + y^2) - z^2 = 0$, cuprinsă între planele $z = 0$ și $z = 2$.

15. Să se afle masa suprafeței materiale (Σ): $z = (x^2 + y^2)/2$, $0 \leq z \leq 1$, dacă densitatea de masă este $\rho(x, y, z) = z$.

16. Să se determine coordonatele centrului de greutate al porțiunii de suprafață $z = x^2 + y^2$, decupate de cilindrul $x^2 + y^2 - x = 0$.

17. Să se afle masa suprafeței unei sfere materiale, dacă densitatea de masă în fiecare punct al sferei este egală cu:

a) distanța de la punct la diametrul vertical;

b) pătratul distanței de la punctul a).

18. Să se determine pentru suprafața conică omogenă $z = \frac{h}{a} (x^2 + y^2)^{1/2}$, $x^2 + y^2 \leq a^2$:

a) poziția centrului de greutate G ;

b) momentele de inerție în raport cu planele de coordonate

$$I_{xoy} = \iint_{\Sigma} z^2 \rho(x, y, z) \, d\sigma, \quad I_{yoz} = \iint_{\Sigma} x^2 \rho(x, y, z) \, d\sigma, \quad I_{zox} = \iint_{\Sigma} y^2 \rho(x, y, z) \, d\sigma.$$

19. Să se calculeze de suprafață $z = 1 + xy$.

10.

1. Integrala este o partiție a spațiului în diviziunea Δ unui Δ , notată cu σ Riemann atașată

Integrala este

limita fiind aceeași De obicei este notată cu σ_1 Domeniul este proiectează

b) Domeniul este același al cărui intersecție este $(x, y) \in D$ și Dacă $f(x, y, z)$

2. Schimbarea

pentru care funcțiile a_1 sînt funcții b_1 stabile σ_{xyz} și punctele c_1 determinate în condiții

În cazul

iar pentru co

19. Să se determine momentul de inerție în raport cu planul xOy al porțiunii de suprafață $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $0 \leq z \leq 1$, densitatea de masă fiind $\rho(x, y, z) = 1 + xy$.

10.8. Integrala triplă. Formula Gauss-Ostrogradski

1. Integrala triplă. Fie $f(x, y, z)$ o funcție mărginită pe domeniul mărginit $V \subset R^3$. Se consideră o partiție a spațiului în intervale tridimensionale, din care reținem pe acelea ce conțin puncte din V . Fie diviziunea $\Delta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, v_i , $i = 1, 2, \dots, n$, fiind un astfel de interval. Norma diviziunii Δ , notată $\nu(\Delta)$, este cea mai mare dintre dimensiunile intervalelor v_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Suma Riemann atașată funcției $f(x, y, z)$, corespunzătoare diviziunii Δ a lui V , este

$$\sigma_{\Delta}(f) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \text{ vol } v_i, \quad (\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in v_i. \quad (1)$$

Integrala triplă a funcției $f(x, y, z)$ extinsă la domeniul V este

$$\iiint_V f(x, y, z) dv = \lim_{\nu(\Delta) \rightarrow 0} \sigma_{\Delta}(f), \quad (2)$$

limita fiind aceeași pentru orice alegere a punctelor intermediare (ξ_i, η_i, ζ_i) .

De obicei calculul integralei triple se reduce la următoarele două cazuri:

a₁) Domeniul V este cuprins între planele $z = c$ și $z = d$ și secțiunea cu planul $z = z_0$, $c \leq z_0 \leq d$, se proiectează în planul xOy după domeniul D . Atunci, dacă $f(x, y, z)$ este continuă în V , avem

$$\iiint_V f(x, y, z) dv = \int_c^d dz \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy. \quad (3)$$

b₁) Domeniul V este limitat de o suprafață cilindrică cu generatoarele paralele cu axa Oz (a cărei intersecție cu planul xOy închide domeniul $D \subset R^2$), de suprafața inferioară $z = \varphi_1(x, y)$, $(x, y) \in D$ și de suprafața superioară $z = \varphi_2(x, y)$, $(x, y) \in D$.

Dacă $f(x, y, z)$ este continuă în V , atunci

$$\iiint_V f(x, y, z) dv = \iint_D dx dy \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (4)$$

2. Schimbarea de variabilă în integrala triplă. Fie transformarea

$$(T) \quad x = \varphi(u, v, w), \quad y = \psi(u, v, w), \quad z = \chi(u, v, w), \quad (5)$$

pentru care funcțiile φ , ψ și χ satisfac condițiile:

- a₂) sînt funcții continue împreună cu derivatele lor parțiale;
- b₂) stabilesc o corespondență biunivocă și bicontinuu între punctele domeniului V din spațiul $Oxyz$ și punctele domeniului V' din spațiul $O'uvw$;
- c₂) determinantul funcțional $J = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}$ păstrează semn constant în V .

În condițiile asupra transformării T , integrala triplă se transformă după formula

$$\iiint_V f(x, y, z) dv = \iiint_{V'} f[\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)] |J| dv'. \quad (6)$$

În cazul coordonatelor cilindrice r, θ, z , cu $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = z$, formula (6) este

$$\iiint_V f(x, y, z) dv = \iiint_{V'} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz, \quad (7)$$

iar pentru coordonatele sferice r, θ, φ , cu $x = r \cos \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \cos \varphi$, $z = r \sin \varphi$, avem

$$\begin{aligned} & \iiint_V f(x, y, z) dv = \\ & = \iiint_{V'} f(r \cos \theta \cos \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \varphi) r^2 \cos \varphi dr d\theta d\varphi. \end{aligned} \quad (8)$$

3. Formula Gauss-Ostrogradski. Fie V un domeniu închis, mărginit de suprafața închisă Σ ce admite plan tangent în fiecare punct al său. Dacă funcțiile $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ sînt continue și cu derivate parțiale continue în V , atunci are loc formula Gauss-Ostrogradski

$$\iint_{\Sigma_e} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv \quad (9)$$

sau

$$\iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv, \quad (10)$$

unde Σ_e este fața exterioară a suprafeței Σ , iar $n(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ este versorul normalei la Σ_e .

4. Aplicații. a) Volumul corpului V este $\text{vol } V = \iiint_V dv$.

b) Masa unui corp V și coordonatele centrului de greutate G al corpului V , pentru densitatea de masă $\rho(x, y, z)$, sînt

$$\begin{aligned} M &= \iiint_V \rho(x, y, z) dv, \quad x_G = \frac{1}{M} \iiint_V x\rho(x, y, z) dv, \\ y_G &= \iiint_V y\rho(x, y, z) dv, \quad z_G = \frac{1}{M} \iiint_V z\rho(x, y, z) dv. \end{aligned} \quad (11)$$

c) Momentele de inerție în raport cu planele și axele de coordonate, au expresiile

$$\begin{aligned} I_{xOy} &= \iiint_V z^2 \rho(x, y, z) dv, \quad I_{yOz} = \iiint_V x^2 \rho(x, y, z) dv, \\ I_{zOx} &= \iiint_V y^2 \rho(x, y, z) dv, \quad I_{Ox} = \iiint_V (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dv, \\ I_{Oy} &= \iiint_V (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dv, \quad I_{Oz} = \iiint_V (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dv. \end{aligned} \quad (12)$$

10.8.1. Probleme rezolvate

1. Să se calculeze $I = \iiint_V xyz \, dv$, (V): $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq c$.

Rezolvare. Domeniul V fiind paralelipedul $[0, a] \times [0, b] \times [0, c]$, vom utiliza pentru calculul lui I una din formulele (3) sau (4). Dacă $D \equiv [0, b] \times [0, c]$, atunci

$$I = \int_0^a dx \iint_D xyz \, dydz = \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c xyz \, dz = \int_0^a x dx \int_0^b y dy \int_0^c z dz = \frac{1}{8} a^2 b^2 c^3.$$

2. Să se transforme integrala triplă $I = \iiint_V f(x, y, z) \, dv$ în integrale iterate, pentru următoarele domenii:

- V este tetraedrul limitat de $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ și $x + y + z = 1$;
- V este cilindrul limitat de $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$, $z = h$.

Rezolvare. a) Aplicăm formula (3) cu $c = 0$, $d = 1$ și $(D_x)x + y \leq 1 - z$, $x \geq 0$, $y \geq 0$:

$$I = \int_0^1 dz \iint_{D_z} f \, dx dy = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dx \int_0^{1-z-x} f \, dy.$$

b) Aplicăm formula (4), cu $(D)x^2 + y^2 \leq a^2$, $\varphi_1(x, y) = 0$, $\varphi_2(x, y) = h$:

$$I = \iint_D dx dy \int_0^h f dz = \int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_0^h f dz.$$

3. Să se calculeze următoarele integrale triple:

a) $I = \iiint_V z \, dv$, $(V): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \leq 0$, $z \geq 0$;

b) $I = \iiint_V z \, dv$, V fiind limitat de $z^2 = \frac{h^2}{a^2}(x^2 + y^2)$, $z = 0$ și $z = h$;

c) $I = \iiint_V (x + y + z)^2 \, dv$, V fiind partea comună sferei $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2$ și paraboloidului $x^2 + y^2 = 2az$.

Rezolvare. a) V este un semielipsoid. Este convenabil să folosim formula (3). Volumul V este cuprins între planele $z = 0$ și $z = c$, iar secțiunea D_z cu planul $z = \text{const}$ este elipsa

$$(D_z) \frac{x^2}{a^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)} \leq 1, \text{ cu semiaxele } a \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)^{1/2} \text{ și } b \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)^{1/2}.$$

Aria elipsei D_z este $\pi ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)$ și deci

$$I = \int_0^c dz \iint_{D_z} z \, dx dy = \int_0^c z \, dz \iint_{D_z} dx dy = \int_0^c z \pi ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz = \frac{1}{4} \pi abc^2.$$

b) Volumul V este limitat de planele $z = 0$ și $z = h$, iar secțiunea cu planul $z = \text{const}$ este $(D_z) x^2 + y^2 \leq \frac{a^2}{h^2} z^2$. După (3) avem

$$I = \int_0^h dz \iint_{D_z} z \, dx dy = \int_0^h z \, \text{aria } D_z dz = \int_0^h z \pi \frac{a^2}{h^2} z^2 dz = \frac{\pi}{4} a^2 h^3.$$

Să folosim acum și formula (4). Volumul V se proiectează (fig. 31) în planul xOy pe domeniul $(D) x^2 + y^2 \leq a^2$, proiecția secțiunii $(D_z) x^2 + y^2 \leq a^2$, $z = h$. Apoi,

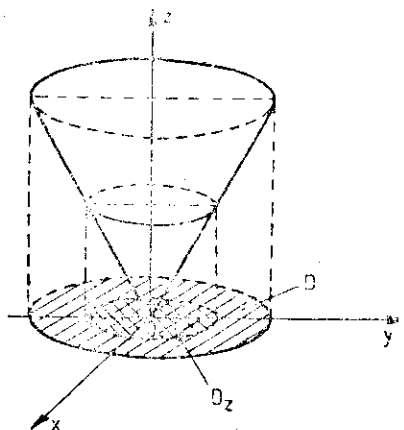


Fig. 31

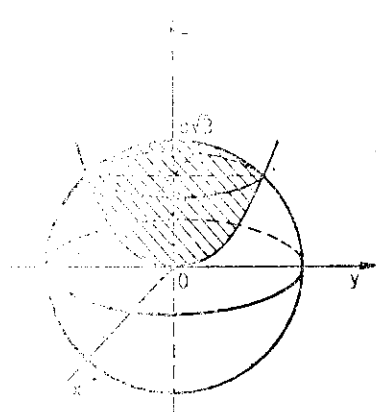


Fig. 32

$$\varphi_1(x, y) = \frac{h}{a} (x^2 + y^2)^{1/2}, \varphi_2(x, y) = h \text{ și deci (4) implică}$$

$$I = \iint_D dx dy \int_{\frac{h}{a} (x^2 + y^2)^{1/2}}^h z dz = \frac{1}{2} \iint_D \left[h^2 - \frac{h^2}{a^2} (x^2 + y^2) \right] dx dy = \\ = \frac{h^2}{2a^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a (a^2 - r^2) r dr = \frac{\pi}{4} a^2 h^2.$$

c) Cele două suprafețe se intersectează după cercul (C) $x^2 + y^2 = 2a^2$, $z = a$. Volumul este cuprins între planele $z = 0$ și $z = a\sqrt{3}$. Secțiunea cu planul $z = \text{const}$ este

$$(D_z) \quad x^2 + y^2 \leq 2az, \quad z \in [0, a] \text{ și } x^2 + y^2 \leq 3a^2 - z^2, \quad z \in [a, a\sqrt{3}].$$

Deci

$$I = \int_0^a dz \iint_{x^2 + y^2 \leq 2az} (x + y + z) dx dy + \int_a^{a\sqrt{3}} dz \iint_{x^2 + y^2 \leq 3a^2 - z^2} (x + y + z) dx dy.$$

Folosind coordonatele polare pentru calculul integralelor duble, obținem

$$I = \int_0^a \left[2\pi \int_0^{\sqrt{2az}} (r^2 + z^2) r dr \right] dz + \int_a^{a\sqrt{3}} \left[2\pi \int_0^{\sqrt{3a^2 - z^2}} (r^2 + z^2) r dr \right] dz = \\ = 2\pi \int_0^a (az^2 + az^3) dz + \frac{1}{2} \pi \int_a^{a\sqrt{3}} (9a^4 - z^4) dz = \frac{1}{5} \pi a^5 \left(18\sqrt{3} - \frac{97}{6} \right).$$

4. Să se precizeze domeniile pe care sînt considerate integralele:

$$a) I = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{x+y} f dz;$$

$$b) I = \int_{-a}^a dx \int_{-b(1-\frac{x^2}{a^2})^{1/2}}^{b(1-\frac{x^2}{a^2})^{1/2}} dy \int_{-c(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2})^{1/2}}^{c(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2})^{1/2}} f dz.$$

Rezolvare. a) Se scrie $I = \iiint_D dx dy \int_0^{x+y} f dz$, unde D este triunghiul OAB , cu $A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, 0)$. Deci volumul V este mărginit de planele $x = 1$, $y = 0$, $y = x$, $z = 0$ și $z = x + y$.

b) Procedînd similar, obținem elipsoidul $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$.

5. Folosind o schimbare convenabilă de variabile, să se calculeze următoarele integrale:

$$a) I = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dV, \quad (V) \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2;$$

$$b) I = \iiint_V \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dV, \quad (V) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1;$$

$$c) I = \iiint_V [x^2 + y^2 + (z-2)^2]^{-1/2} dV, \quad (V) \quad x^2 + y^2 \leq 1, \quad -1 \leq z \leq 1.$$

Rezolvare. a) Deoarece domeniul de integrare și funcția de integrat conțin combinația $x^2 + y^2 + z^2$, este convenabil să folosim coordonatele sferice. Înlocuind $x = r \cos \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \cos \varphi$ și $z = r \sin \varphi$ în inecuația ce definește V , obținem

$$(V) \quad 0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

După formula (8)

b) Este convenabil să se folosească coordonatele polare $x = cr \sin \varphi$. Domeniul

iar jacobianul transformării este

c) Este convenabil să se folosească coordonatele cilindrice V în planul xy . Obținem

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \int_0^a r dr = \pi a^2.$$

6. Să se calculeze volumul V de suprafață $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

$$a) I = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dV = \iiint_V a^2 dV = a^2 \cdot \frac{4}{3} \pi a^3 = \frac{4}{3} \pi a^5.$$

$$b) I = \iiint_V \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dV = \iiint_V \frac{1}{a} dV = \frac{1}{a} \cdot \frac{4}{3} \pi a^3 = \frac{4}{3} \pi a^2.$$

Rezolvare. Obținem

Trecînd la coordonatele sferice, avem $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

b) Domeniul de integrare este sfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$.

Pentru a calcula volumul V al sferei $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^a r^2 dr = 2\pi \cdot \pi \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{2}{3} \pi^2 a^3.$$

După formula (8), obținem

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^a r^4 \cos \varphi dr = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{a^5}{5} = \frac{4}{5} \pi a^5.$$

b) Este convenabil să folosim coordonatele sferice generalizate $x = ar \cos \theta \cos \varphi$, $y = br \sin \theta \cos \varphi$, $z = cr \sin \varphi$. Domeniul V este transformat în

$$(V') \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},$$

Iar jacobianul transformării este $J = abc r^2 \cos \varphi$. După formula (6), obținem

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 abc r^4 \cos \varphi dr = \frac{4}{5} \pi abc.$$

c) Este convenabil să folosim coordonatele cilindrice $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = z$, care duc cilindrul V în paralelipipedul (V') $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $-1 \leq z \leq 1$. Deci, după formula (7), obținem

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^1 dz \int_0^1 [r^2 + (z-2)^2]^{-1/2} r dr = 2\pi \int_{-1}^1 [r^2 + (z-2)^2]^{1/2} \Big|_0^1 dz = \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 \{[(z-2)^2 + 1]^{1/2} - (2-z)\} dz = \pi \left(\ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{10}-3} + 3\sqrt{10} - \sqrt{2} - 8 \right). \end{aligned}$$

6. Să se calculeze cu ajutorul formulei Gauss-Ostrogradski următoarele integrale de suprafață:

a) $I = \iint_{\Sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dx dy$, Σ fiind fața exterioară a sferei $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$;

b) $I = \iint_{\Sigma} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dx dy$, Σ fiind fața exterioară a suprafeței închise $x^2 + y^2 = z^2$, $z = h$.

Rezolvare. a) Condițiile pentru aplicarea formulei (9) fiind îndeplinite, cu (V) $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, obținem

$$I = \iiint_V (2x + 2y + 2z) dv.$$

Trecind la coordonate sferice, domeniul V este dus în paralelipipedul (V') $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, obținem $I = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^a r^3 \cos \varphi (\cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \cos \varphi + \sin \varphi) dr = 0$.

b) Domeniul limitat de Σ este (V) $x^2 + y^2 \leq z^2$, $0 \leq z \leq h$. După formula Gauss-Ostrogradski, avem

$$I = \iiint_V (3x^2 + 3y^2 + 3z^2) dv.$$

Pentru calculul acestei integrale folosim coordonatele cilindrice. Domeniul transformat este (V') $0 \leq r \leq z$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $z \in [0, h]$. Deci

$$I = 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz \int_0^z (r^2 + z^2) r dr = 6\pi \int_0^h \left(\frac{r^4}{4} + \frac{r^2 z^2}{2} \right) \Big|_0^z dz = \frac{9\pi}{2} \int_0^h z^4 dz = \frac{9\pi}{10} h^5.$$

7. Să se calculeze volumul paralelipipedului strâmb mărginit de următoarele șase plane: $a_1x + b_1y + c_1z = \pm h_1$, $a_2x + b_2y + c_2z = \pm h_2$, $a_3x + b_3y + c_3z = \pm h_3$, unde determinantul

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ este diferit de zero.}$$

Rezolvare. Volumul paralelipipedului dat este vol $V = \iiint_V dv$, unde $(V): -h_1 \leq a_1x + b_1y + c_1z \leq h_1$, $-h_2 \leq a_2x + b_2y + c_2z \leq h_2$ și $-h_3 \leq a_3x + b_3y + c_3z \leq h_3$. Pentru calculul integralei triple efectuăm schimbarea de variabile $u = a_1x + b_1y + c_1z$, $v = a_2x + b_2y + c_2z$, $w = a_3x + b_3y + c_3z$, care transformă paralelipipedul strâmb V în paralelipipedul drept (V') $-h_1 \leq u \leq h_1$, $-h_2 \leq v \leq h_2$, $-h_3 \leq w \leq h_3$. Jacobianul transformării este $J = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \frac{1}{D}$.

Aplicind formula (6), obținem

$$\text{vol } V = \int_{-h_1}^{h_1} du \int_{-h_2}^{h_2} dv \int_{-h_3}^{h_3} \frac{1}{|D|} dw = \frac{1}{|D|} \cdot 8h_1h_2h_3.$$

8. Să se afle masa și să se determine poziția centrului de greutate al sferei $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az$, dacă densitatea în punctele sferei este invers proporțională cu distanța de la aceste puncte pînă la origine.

Rezolvare. Densitatea în punctul $M_0(x, y, z)$ este $\rho(x, y, z) = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. Deci, după formula (11), avem

$$M = k \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} dv, \text{ cu } (V): x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az.$$

Domeniul V este cuprins între planele $z = 0$ și $z = 2a$, iar secțiunea cu planul $z = \text{const}$ este (D_z) $x^2 + y^2 \leq 2az - z^2$. Prin urmare, după formula (3), obținem

$$\begin{aligned} M &= k \int_0^{2a} dz \iint_{D_z} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} dx dy = k \int_0^{2a} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2az-z^2}} r(r^2 + z^2)^{-1/2} dr = \\ &= k \int_0^{2a} \left[2\pi(r^2 + z^2)^{1/2} \right]_0^{\sqrt{2az-z^2}} dz = 2k\pi \int_0^{2a} (\sqrt{2az - z^2}) dz = \frac{4}{3} k\pi a^2. \end{aligned}$$

Procedînd similar, se obține

$$x_G = \frac{k}{M} \int_0^{2a} dz \iint_{D_z} x(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} dx dy = \frac{2k\pi}{M} \int_0^{2a} (\sqrt{2az - z^2}) dz = \frac{4}{5} a, \quad x_G = y_G = 0.$$

9. Să se calculeze momentul de inerție, în raport cu originea, pentru porțiunea de sferă (V) $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, densitatea de masă fiind $\rho(x, y, z) = z$.

Rezolvare. Momentul de inerție în raport cu originea este

$$I_0 = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)\rho(x, y, z) dv = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)z dv.$$

Trecînd la coordonate sferice, domeniul V este transformat în (V') $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Deci

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^a r^5 \sin \varphi \cos \varphi dr = \frac{\pi a^4}{24}.$$

10. Să se c

a) $\int_0^1 dx \int_0^1 dy$

11. Să se t
pentru următo

a) V este c

b) V este l

12. Să se

a) $\iiint_V (x$

b) $\iiint_V (x^2$

c) $\iiint_V z^2 d$

d) $\iiint_V (x^2$

e) $\iiint_V z^2 d$

f) $\iiint_V (x^2$

g) $\iiint_V x^2 d$

13. Să se

a) $\int_a^a dx$

14. Folos

a) $\iiint_V (x$

b) $\int_0^1 dx \int$

15. Folos

a) $\iiint_V (x$

b) $\iiint_V (x$

10.8.2. Probleme propuse spre rezolvare

10. Să se calculeze următoarele integrale:

a) $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (x+y+z+1)^{-1/2} dz$; b) $\int_0^2 dx \int_0^{2\sqrt{x}} dy \int_0^{(x-\frac{1}{2}y^2)^{1/2}} x dz$.

11. Să se transforme integrala triplă $I = \iiint_V f(x, y, z) dv$ în integrale iterate pentru următoarele domenii:

a) V este conul $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ limitat de $z = 0$ și $z = c$;

b) V este limitat de suprafețele $z = 1 - x^2 - y^2$, $z = 0$.

12. Să se calculeze următoarele integrale triple:

a) $\iiint_V (x+y)z dv$, (V) $x+y+z \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$;

b) $\iiint_V (x^2 + y^2)^{1/2} dv$, (V) $x^2 + y^2 \leq a^2$, $z \geq 0$, $x+y+z \leq 2a$;

c) $\iiint_V z^2 dv$, (V) $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az$;

d) $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dv$, (V) $y^2 + z^2 \leq x^2$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, $x \geq 0$;

e) $\iiint_V z^2 dv$, (V) $x^2 + y^2 \leq 2z$, $0 \leq z \leq 2$;

f) $\iiint_V (x^2 + y^2) dv$, (V) $x^2 + y^2 \leq 2z$, $0 \leq z \leq 2$;

g) $\iiint_V x^2 dv$, (V) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$.

13. Să se precizeze domeniile pe care sînt considerate integralele triple:

a) $\int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^a f(x, y, z) dz$; b) $\int_0^a dz \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y, z) dy$.

14. Folosind coordonatele sferice, să se calculeze integralele următoare:

a) $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} dv$, (V) $x^2 + y^2 + z^2 \leq z$;

b) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2 dz$; c) $\int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} (x^2 + y^2) dz$.

15. Folosind coordonatele cilindrice, să se calculeze integralele:

a) $\iiint_V (x^2 + y^2) dv$, (V): $x^2 + y^2 - 2x \leq 0$, $y \geq 0$, $0 \leq z \leq 1$;

b) $\iiint_V (x^2 + y^2)^{1/2} dv$, (V): $x^2 + y^2 \leq 2z$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 8$.

16. Printr-o schimbare de variabile convenabilă să se calculeze

$$\iiint_V \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right)^{1/2} dv, \quad (V) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

17. Cu ajutorul formulei Gauss-Ostrogradski să se calculeze următoarele integrale de suprafață :

a) $\iint_{\Sigma} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$, Σ fiind fața exterioară a cubului $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, $0 \leq z \leq a$;

b) $\iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy$, Σ fiind fața exterioară a tetraedrului limitat de planele $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = a$;

c) $\iint_{\Sigma} (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) d\sigma$, Σ fiind fața exterioară a suprafeței conice închise $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0$, $0 \leq z \leq b$;

d) $\iint_V x^3 dy dz + x^2 y dz dx + x^2 z dx dy$, Σ fiind fața exterioară a suprafeței închise a cilindrului $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \leq z \leq b$;

e) $\iint_{\Sigma} xyz(x dy dz + y dz dx + z dx dy)$, Σ fiind fața exterioară a suprafeței închise $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

18. Să se transforme, cu ajutorul formulei Gauss-Ostrogradski, integralele de suprafață, Σ limitînd domeniul V :

a) $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) d\sigma$;

b) $\iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy$; c) $\iint_{\Sigma} yz dy dz + zx dz dx + xy dx dy$;

d) $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) d\sigma$.

19. Cu ajutorul formulei Gauss-Ostrogradski, să se demonstreze identitățile :

a) $\iiint_V \Delta f dv = \iint_{\Sigma} \frac{df}{dn} d\sigma$, unde $\Delta f = f''_{x^2} + f''_{y^2} + f''_{z^2}$, iar $\frac{df}{dn} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma$ este derivata după direcția normalei la Σ ;

b) $\iiint_V (g \Delta f - f \Delta g) dv = \iint_{\Sigma} \left(g \frac{df}{dn} - f \frac{dg}{dn} \right) d\sigma$.

20. Să se calculeze :

a) volumul corpului mărginit de paraboloidul $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 4 - z$ și de planul $z = 0$;

b) volumul corpului mărginit de paraboloidul $y^2 + z^2 = 4ax$ și de suprafața cilindrului $x^2 + y^2 = 2ax$;

c) volum
d) volum

21. Să se

a) $(V) \frac{x^2}{a^2}$

b) $(V) x^2$

22. Să se
sitata de m

a) $(V) \frac{x^2}{a^2}$

b) $(V) x^2$

c) $(V) \frac{x^2}{a^2}$

23. Să se
omogen, lim

24. Să se

ale corpului

- c) volumul limitat de suprafața $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2)$;
 d) volumul limitat de suprafața $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3z$.

21. Să se calculeze masa corpului V cu densitatea $\rho(x, y, z)$, dacă :

a) $(V) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, \rho(x, y, z) = k|z|$;

b) $(V) x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az, \rho(x, y, z) = k(x^2 + y^2 + z^2)^{-1}$.

22. Să se determine coordonatele centrului de greutate al corpului V , cu densitatea de masă $\rho(x, y, z)$:

a) $(V) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq \frac{z^2}{c^2}, 0 \leq z \leq c; \rho(x, y, z) = 1$;

b) $(V) x^2 + y^2 \leq 2az, x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2; \rho(x, y, z) = 1$;

c) $(V) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \rho(x, y, z) = 1$.

23. Să se calculeze momentul de inerție în raport cu axa Oz a corpului material omogen, limitat de suprafețele $x^2 + y^2 + z^2 = 2, x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0$.

24. Să se calculeze momentele de inerție în raport cu planele de coordonate ale corpului material omogen, limitat de suprafețele $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ și $z = c$.

11. ȘIRURI ȘI SERII DE FUNCȚII

11.1. Șiruri de funcții

Fie șirul $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ de funcții definite pe un același interval I cu valori reale. Șirul (f_n) de funcții este simplu convergent în intervalul I către funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, dacă

$$\forall \epsilon > 0 \text{ și } \forall x \in I, \exists n_\epsilon(x) \in \mathbb{N} \mid |f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \forall n > n_\epsilon(x). \quad (1)$$

Șirul (f_n) de funcții $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$ converge uniform în intervalul I către funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, dacă

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \mid |f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \forall n > n_\epsilon \text{ și } \forall x \in I. \quad (2)$$

Criteriul lui Cauchy. Șirul (f_n) de funcții $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$ converge uniform în I către funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ dacă și numai dacă

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \mid |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon, \forall n, m > n_\epsilon \text{ și } \forall x \in I. \quad (3)$$

Teorema 1. Fie (f_n) un șir uniform convergent pe I către funcția f . Dacă toate funcțiile f_n sînt continue în punctul $a \in I$, atunci și funcția limită f este continuă în punctul a .

Teorema 2. Fie I un interval mărginit și (f_n) un șir de funcții derivabile, definite pe I . Dacă (f_n) converge uniform către f și (f'_n) converge uniform pe I către g , atunci funcția f este derivabilă pe I și $f'(x) = g(x)$, $x \in I$.

Teorema 3. Dacă (f_n) este un șir de funcții continue, uniform convergent pe $[a, b]$ către funcția f , atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx. \quad (4)$$

Teorema 4. Dacă există un șir (a_n) , $a_n > 0$ și $\lim_n a_n = 0$, astfel încît $|f_n(x) - f(x)| < a_n$, $\forall x \in I$, atunci șirul (f_n) converge uniform pe I către funcția f .

11.1.1. Probleme rezolvate

* 1. Să se arate că șirul de funcții (f_n) , $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n(1 - x^n)$, este convergent, însă nu uniform convergent pe $[0, 1]$.

Rezolvare. Fie $0 \leq x < 1$. Deoarece $\lim_n x^n = 0$, rezultă $\lim_n f_n(x) = 0$. Apoi $f_n(1) = 0$ și deci $\lim_n f_n(1) = 0$. Deci $\lim_n f_n(x) = 0, \forall x \in [0, 1]$. Șirul nu este uniform convergent. Pentru aceasta

arătăm că relația (2) nu are loc. Într-adevăr, luând $\epsilon < \frac{1}{4}$ și $x_n = 2^{-1/n} \in [0, 1]$, avem $f_n(x_n) = \frac{1}{4}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, și deci inegalitatea din relația (2) nu este satisfăcută pentru $x = x_n$.

* 2. Să se arate că șirul de funcții (f_n) , $f_n : (1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$,

$$f_n(x) = \sqrt{(n^2 + 1) \sin^2 \frac{\pi}{n} + nx} - \sqrt{nx}.$$

$\rightarrow f_n(x) - f(x)$

este uniform convergent.

Rezoluare. Avem, pentru $x > 1$,

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{(n^2 + 1) \sin^2 \frac{\pi}{n}}{\sqrt{(n^2 + 1) \sin^2 \frac{\pi}{n} + nx} + \sqrt{nx}} < \frac{(n^2 + 1) \frac{\pi^2}{n^2}}{2\sqrt{n}} < \frac{2\pi^2}{2\sqrt{n}} = \frac{\pi^2}{\sqrt{n}},$$

deoarece $\sin^2 \frac{\pi}{n} < \frac{\pi^2}{n^2}$ și $(n^2 + 1) \sin^2 \frac{\pi}{n} > 0$. Deoarece $\lim_n \frac{\pi^2}{\sqrt{n}} = 0$, rezultă, după teorema 4, că $f_n(x)$ tinde la zero, uniform pe $(1, \infty)$.

3. Să se arate că șirul de funcții (f_n) , $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\cos kx}{k(k+1)}$, este

uniform convergent și limita sa este o funcție continuă pe \mathbf{R} .

Rezoluare. Vom aplica criteriul lui Cauchy. Avem, pentru $x \in \mathbf{R}$,

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| = \left| \frac{\cos(n+1)x}{(n+1)(n+2)} + \frac{\cos(n+2)x}{(n+2)(n+3)} + \dots + \frac{\cos(n+p)x}{(n+p)(n+p+1)} \right| <$$

$$< \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} < \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} +$$

$$+ \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1} < \epsilon, \text{ dacă } n > n_\epsilon = \frac{1}{\epsilon} - 1 = E\left(\frac{1-\epsilon}{\epsilon}\right).$$

După criteriul lui Cauchy, șirul (f_n) este uniform convergent. Funcțiile f_n fiind continue, iar șirul fiind uniform convergent, limita șirului este o funcție continuă.

4. Să se arate că șirul de funcții (f_n) , $f_n : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f_n(x) = \sum_{k=1}^n 2^k \sin \frac{1}{3^k x}$,

nu este uniform convergent.

Rezoluare. Se aplică criteriul lui Cauchy:

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| = \left| 2^{n+1} \sin \frac{1}{3^{n+1}x} + \dots + 2^{n+p} \sin \frac{1}{3^{n+p}x} \right|.$$

Alegem $x = x_n = \frac{2}{3^{2n+1}} \in (0, \infty)$, astfel că

$$\sin \frac{1}{3^{n+1}x_n} = \sin 3^n \frac{\pi}{2} = (-1)^n, \dots, \sin \frac{1}{3^{n+p}x_n} = \sin 3^{p-n-1} \frac{\pi}{2} = (-1)^{p-n-1}.$$

Luând $p = n$, deducem că $|f_{2n}(x) - f_n(x)| = |2^{n+1}(-1)^n + \dots + 2^{2n}(-1)^1| = 2^{n+1}|1 - 2 + 4 - \dots + (-1)^{n-1}2^{n-1}| > \frac{1}{2}$.

Aceasta arată că relația (3) nu este verificată, deci șirul nu este uniform convergent.

- * 5. Să se arate că șirul de funcții (f_n) , $f_n: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{arctg} x^n$, converge uniform pe \mathbf{R} , dar $[\lim_n f_n(x)]'_{x=1} \neq \lim_n f_n'(1)$.

Rezolvare. Deoarece $|f_n(x)| = \left| \frac{1}{n} \operatorname{arctg} x^n \right| < \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi}{2} \rightarrow 0$, rezultă că șirul de funcții converge uniform pe \mathbf{R} către funcția $f(x) \equiv 0$. Deci $f'(x) = 0$ sau $[\lim_n f_n(x)]' = 0$. Pe de altă parte, $f_n'(1) = \frac{1}{2}$ și, prin urmare, $\lim_n f_n'(1) = \frac{1}{2}$. Rezultatele diferă, deoarece șirul derivatelor nu converge uniform pe \mathbf{R} către $\frac{1}{2}$.

- * 6. Să se arate că șirul de funcții (f_n) , $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, $f_n = nx e^{-nx}$, converge, dar

$$\lim_n \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 \lim_n f_n(x) dx.$$

Rezolvare. Evident, $\lim_n f_n(x) = 0$ și deci $f(x) \equiv 0$, $x \in [0, 1]$.

Apoi

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 nx e^{-nx} dx = -\frac{1}{2} e^{-nx} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-n}$$

și deci $\lim_n \int_0^1 f_n(x) dx = \lim_n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-n} \right) = \frac{1}{2}$, iar $\int_0^1 \lim_n f_n(x) dx = 0$.

Rezultatul se explică prin faptul că șirul nu este uniform convergent. Într-adevăr, dacă se alege $x_n = \frac{1}{n} \in [0, 1]$, rezultă $f_n(x_n) = e^{-1/n} \rightarrow 1$ și deci relația (2) nu este verificată.

11.1.2. Probleme propuse spre rezolvare

- * 7. Să se arate că șirul de funcții (f_n) , $f_n: [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{n} e^{-nx}$, converge uniform către funcția $f(x) = 0$, $x \in [0, \infty)$.

- * 8. Să se arate că șirul de funcții (f_n) este uniform convergent pe intervalul indicat, pentru:

a) $f_n(x) = \frac{x^2}{(n^2 + x^4)}$, $x \in [1, \infty)$; b) $f_n(x) = \frac{x}{(x+n)}$, $x \in [3, 4]$;

c) $f_n(x) = \frac{x^n}{(1 + x^{2n})^n}$, $x \in [1, \infty)$; d) $f_n(x) = \frac{\cos nx}{n^2 + 1}$, $x \in [0, \pi]$.

9. Să se arate că șirul de funcții (f_n) converge simplu, dar nu este uniform convergent:

a) $f_n(x) = \frac{x}{(x+n)}$, $x \in (0, \infty)$; b) $f_n(x) = \frac{x^2}{(1 + x^{2n})}$, $x \in [0, 1]$.

10. Să se arate că șirul de funcții (f_n) , $f_n: [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{b} e^{kx}$, nu converge uniform pe $[0, \infty)$.

11. Să se arate că șirul de funcții converge pe \mathbf{R} .

12. Să se arate că șirul de funcții converge neuniform pe \mathbf{R} .

13. Fiind dată funcția $f(x) = e^{-ax}$, $a > 0$, să se arate că șirul de funcții converge uniform pe \mathbf{R} .

Mulțimea A este mulțimea de convergență și se numește suma seriei $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Este simplu convergent pe A .

Șirul $(S_n(x))$ este uniform convergent pe A dacă și numai dacă...

2. Criteriul de convergență este convergența uniformă pe A către $f(x)$.
b) Fie șirul de funcții (f_n) și seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ este...

11. Să se arate că șirul de funcții (f_n) , cu $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} \sin kx$, $x \in \mathbb{R}$, este convergent pe \mathbb{R} , iar limita sa este o funcție continuă, cu derivata continuă pe \mathbb{R} .

12. Să se arate că șirul de funcții (f_n) , cu $f_n(x) = \frac{nx}{(1+n^2x^2)}$, $x \in [0, 1]$, converge neuniform pe $[0, 1]$, dar $\lim_n \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_n f_n(x) dx$.

13. Fiind dat șirul (f_n) , cu $f_n(x) = \cos x + \frac{1}{2} \cos^2 x + \dots + \frac{1}{n} \cos^n x$, $x \in \left[a, \frac{\pi}{2} \right]$, $a > 0$, să se calculeze $\lim_n f_n(x)$.

11.2. Serii de funcții

Mulțimea A a valorilor lui x pentru care seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ este convergentă se numește mulțimea de convergență a seriei, iar funcția $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ astfel că $f(x) = \lim_n S_n(x)$, $S_n(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x)$, se numește suma seriei.

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este simplu convergentă pe A către funcția f dacă șirul sumelor parțiale $(S_n(x))$ este simplu convergent pe A către f . Seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă pe A către f , dacă șirul $(S_n(x))$ este uniform convergent pe A către f . Seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este absolut convergentă pe A , dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ este simplu convergentă pe A .

Pentru a studia convergența uniformă a seriilor de funcții se utilizează următoarele criterii:

1. Criteriul general de convergență uniformă. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă pe A , dacă și numai dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon, \forall n > n_\varepsilon, \quad (1)$$

$$\forall p \in \mathbb{N} \text{ și } \forall x \in A.$$

2. Criteriul lui Weierstrass. Dacă $|f_n(x)| \leq a_n, \forall x \in A, \forall n \in \mathbb{N}$ și dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0$, este convergentă, atunci seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este absolut și uniform convergentă pe A .

Proprietăți. a) Dacă toate funcțiile f_n sînt continue pe A , iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă pe A către f , atunci funcția f este continuă pe A .

b) Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ uniform convergentă pe A către f . Dacă funcțiile f_n sînt derivabile pe A și seria $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ este uniform convergentă pe A către g , atunci funcția f este derivabilă pe A și $f' = g$.

c) Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ uniform convergentă pe $[a, b]$ către f . Dacă funcțiile f_n sînt integrabile pe $[a, b]$, atunci funcția f este integrabilă pe $[a, b]$ și

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx. \quad (2)$$

11.2.1. Probleme rezolvate

1. Să se determine mulțimea de convergență pentru următoarele serii de funcții:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^n, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$; b) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n, x \in \mathbb{R}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (2-x)(2-x^{1/2})(2-x^{1/3}) \dots (2-x^{1/n}), x > 0$.

Rezolvare. a) Aplicînd criteriul rădăcinii pentru seria valorilor absolute, obținem

$$\lim_n \sqrt[n]{|f_n(x)|} = \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left|\frac{1-x}{1-2x}\right| = \left|\frac{1-x}{1-2x}\right|.$$

Deci seria este absolut convergentă pentru $\left|\frac{1-x}{1-2x}\right| < 1$, $x < 0$, și $x > \frac{2}{3}$. Dacă $\left|\frac{1-x}{1-2x}\right| \geq 1$, sau $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$, deoarece $|a_n| = |f_n(x)| \geq 1$ implică $\lim_n a_n \neq 0$; rezultă că seria este divergentă. Deci, mulțimea de convergență este $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$.

b) După criteriul raportului avem

$$\lim_n \frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = \lim_n \frac{|1-x^2|}{1+x^2} \cdot \frac{\ln n}{\ln(n+1)} = \frac{|1-x^2|}{1+x^2}.$$

Deoarece, pentru $x \neq 0$, $\frac{|1-x^2|}{1+x^2} < 1$, rezultă că seria dată este absolut convergentă. Pentru $x = 0$ se obține seria alternată convergentă $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$. Deci mulțimea de convergență este \mathbb{R} .

c) Deoarece $\lim_n \sqrt[n]{x} = 1$ și $x > 0$, deducem că, începînd de la un anumit rang n_0 , termenii seriei date vor avea același semn, căci $2 - \sqrt[n]{x} > 0$ pentru $n \geq n_0$. Lăsînd la o parte primii n_0 termeni, obținem o serie cu termeni pozitivi. Aplicînd acestei serii criteriul Raabe-Duhamel, obținem

$$\lim_n n \left[\frac{f_n(x)}{f_{n+1}(x)} - 1 \right] = \lim_n n \cdot \frac{x^{1/n+1} - 1}{2 - x^{1/n+1}} = \ln x,$$

astfel că pentru $\ln x \geq 1$, adică $x \geq e$, seria dată este convergentă, iar pentru $x < e$ ea este divergentă. Pentru $x = e$, avem

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = 2 - e^{1/n+1} > 2 - \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n-1}, \text{ deoarece } e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

și după criteriul al doilea al comparației seria este divergentă.

Să observăm că convergență este (2) U

2. Să se determi

Să se determine s

Rezolvare. Folosind

$$S_n = x + \left(\frac{x}{1+x}\right)^n$$

Se vede că $\lim_n S_n(x) = x$ și că seria este uniform

3. Să se stab

Rezolvare. Termenii

De aici se vede că fu

$f_n(x)$ atinge cea mai

Seria numerată

funcții este absolut

4. Este posibil să se scrie în formă pe această

Rezolvare. Răspuns

Toți termenii seriei

$$S_n(x) = \frac{x}{1+x^n}$$

astfel că $\lim_n S_n(x) = \frac{x}{1+x}$

nulă, care este o funcție

la zero. Într-adevăr, seria este convergentă uniformă nu

Să observăm că pentru $x = 2$ seria este convergentă, deoarece $f_n(2) = 0$. Deci mulțimea de convergență este $\{2\} \cup (e, \infty)$.

2. Să se determine mulțimea de convergență și uniform convergență a seriei

$$x + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x}{1+nx} - \frac{x}{1+(n-1)x} \right], \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Să se determine suma seriei.

Rezolvare. Folosind definiția, avem

$$S_n = x + \left(\frac{x}{1+x} - x \right) + \left(\frac{x}{1+2x} - \frac{x}{1+x} \right) + \dots + \left[\frac{x}{1+nx} - \frac{x}{1+(n-1)x} \right] = \frac{x}{1+nx}.$$

Se vede că $\lim_n S_n(x) = f(x) = 0, x \in [0, 1]$. Deoarece $|S_n(x)| < \frac{1}{n}$, oricare ar fi $x \in [0, 1]$, rezultă că seria este uniform convergentă pe $[0, 1]$, către funcția identic nulă.

3. Să se stabilească convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{2x}{x^2+n^4}, x \in \mathbb{R}$.

Rezolvare. Termenul general $f_n(x)$ al seriei are derivata

$$f'_n(x) = \frac{2(n^4 - x^2)}{4x^2 + (x^2 + n^4)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

De aici se vede că funcția $f_n(x)$ are valoarea maximă pentru $x = n^2$. Cum $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_n(x) = 0$, rezultă că $f_n(x)$ atinge cea mai mare valoare pentru $x = n^2$ și deci

$$\left| \arctg \frac{2x}{x^2+n^4} \right| \leq \arctg \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ fiind convergentă, după criteriul lui Weierstrass rezultă că seria de funcții este absolut și uniform convergentă.

4. Este posibil ca o serie de funcții continue pe o mulțime A să convergă neuniform pe această mulțime către o funcție continuă?

Rezolvare. Răspunsul este afirmativ. Fie seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2} \right], \quad x \in [0, 1].$$

Toți termenii seriei sînt funcții continue pe $[0, 1]$. Suma parțială de rang n a ei este

$$S_n(x) = \frac{x}{1+x^2} + \left(\frac{2x}{1+4x^2} - \frac{x}{1+x^2} \right) + \dots + \left[\frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2} \right] = \frac{nx}{1+n^2x^2},$$

astfel că $\lim_n S_n(x) = 0, \forall x \in [0, 1]$ și deci seria dată converge simplu pe $[0, 1]$ către funcția identic nulă, care este o funcție continuă pe $[0, 1]$. Să observăm că seria nu converge uniform pe $[0, 1]$ la zero. Într-adevăr, luînd $x_n = \frac{1}{n} \in [0, 1]$ rezultă $S_n(x_n) = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$ și deci relația de convergență uniformă nu este verificată.

5. Să se arate că seria $\sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{2n} - x^{n-1} + x^{2n-2})$ converge neuniform pe $[0, 1]$ și totuși :

$$\int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{2n} - x^{n-1} + x^{2n-2}) \right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 (x^n - x^{2n} - x^{n-1} + x^{2n-2}) dx.$$

Rezolvare. Șirul sumelor parțiale a acestei serii este $S_n(x) = x^n - x^{2n}$. Deoarece $S_n(0) = S_n(1) = 0$ și pentru $x \in (0, 1)$ avem $0 < S_n(x) < x^n$, rezultă $\lim_n S_n(x) = 0, \forall x \in [0, 1]$. Deci seria este simplu convergentă pe $[0, 1]$ către funcția identic nulă. Convergența nu este uniformă, cum se poate vedea alegând $x_n = 2^{-1/n} \in [0, 1]$ și $S_n(x_n) = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{4}$.

Deoarece suma seriei date este $f(x) = 0, x \in [0, 1]$, rezultă $\int_0^1 f(x) dx = 0$. Apoi

$$\int_0^1 (x^n - x^{2n} - x^{n-1} + x^{2n-2}) dx = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n-1},$$

astfel că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n-1} \right)$ este convergentă și are suma egală cu zero.

Așadar, egalitatea din enunț este demonstrată.

11.2.2. Probleme propuse spre rezolvare

6. Să se determine mulțimea de convergență pentru următoarele serii de funcții :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sin^n x, \alpha \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \ln(1+a^n), a \geq 0, x \in \mathbf{R}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+x}}, x \in \mathbf{R}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+5}{7n^2+3n+2} \cdot \left(\frac{x}{2x+1} \right)^n, x \neq -\frac{1}{2}$;

e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^5 x^{2n}}, x \neq 0$; f) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n}, x \in \mathbf{R}$;

g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{e^{nx}}, x \in \mathbf{R}$; h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}, x \neq 0$; i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! x^n}, x \neq 0$.

7. Există serii de funcții definite pe toată dreapta, pentru care mulțimea de convergență este vidă? Să se determine mulțimea de convergență pentru seria $\sum_{n=1}^{\infty} (n+x^2)^{-\alpha}, x \in \mathbf{R}, \alpha \in \mathbf{R}$.

8. Utilizând criteriul lui Weierstrass, să se studieze convergența seriilor de funcții :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{1+n^2x^4}$, $x \in \mathbf{R}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right] \frac{\cos nx}{n+1}$, $x \in \mathbf{R}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+2^n}$, $x \in \mathbf{R}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin \frac{1}{3^n x^2}$, $x \neq 0$, $|a| < 3$.

9. Să se demonstreze că seriile următoare sînt convergente pe mulțimile indicate, iar sumele lor sînt funcții continue pe aceste mulțimi :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n^4+x^2}}$, $x \in \mathbf{R}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}$, $x \in \mathbf{R}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2}$, $0 \leq x < \infty$, unde seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este absolut convergentă.

10. Este posibilă derivarea termen cu termen a seriilor :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} [e^{-nx^2} - e^{-(n-1)x^2}]$, $x \in [0, 1]$;

b) $\frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{2n} \ln(1+n^2x^2) - \frac{1}{2(n-1)} \ln(1+(n-1)^2x^2) \right]$, $x \in [0, 1]$?

11. Este posibilă integrarea termen cu termen a seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2x[n^2 e^{-n^2x^2} - (n-1)^2 e^{-(n-1)^2x^2}], \quad x \in [0, 1]?$$

12. Să se arate că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x^{2n+1}} - \frac{1}{x^{2n-1}} \right)$ poate fi integrată termen cu termen pe $(a, 1)$.

11.3. Serii de puteri. Serii Taylor

O serie de forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $a_n \in \mathbf{R}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, se numește serie de puteri.

1. Pentru orice serie de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ există un număr $\rho \geq 0$, astfel că : a) seria este absolut convergentă pe $(-\rho, \rho)$; b) seria este divergentă pentru $|x| > \rho$. Numărul ρ se numește rază de convergență a seriei, iar $(-\rho, \rho)$ se numește interval de convergență.

Teorema I a lui Abel. Pentru orice r , $0 < r < \rho$ seria este uniform convergentă pe $[-r, r]$.

2. Suma unei serii de puteri este o funcție continuă în orice punct interior intervalului de convergență.

3. Teorema a II-a a lui Abel. Dacă seria de puteri este convergentă în punctul ρ (sau în punctul $-\rho$), atunci suma f a seriei este o funcție continuă în punctul ρ (sau în punctul $-\rho$).

4. Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este o serie de puteri și ρ raza sa de convergență, atunci: a) seria derivatelor de ordin n are aceeași rază de convergență ρ ; b) suma f a seriei este indefinit derivabilă pe intervalul de convergență și derivata sa de ordin n , $f^{(n)}$ este egală cu suma seriei derivatelor de ordinul n .

5. Raza de convergență a unei serii de puteri este dată de:

$$\lambda = \lim_n \sqrt[n]{|a_n|} \Rightarrow \rho = 0, \text{ dacă } \lambda = +\infty; \rho = \frac{1}{\lambda}, \text{ dacă } 0 < \lambda < \infty; \quad (1)$$

$$\rho = +\infty, \text{ dacă } \lambda = 0;$$

$$\lambda = \lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \Rightarrow \rho = 0, \text{ dacă } \lambda = +\infty; \rho = \frac{1}{\lambda}, \text{ dacă } 0 < \lambda < \infty; \quad (2)$$

$$\rho = +\infty, \text{ dacă } \lambda = 0.$$

6. Fie $f: A \rightarrow R$ o funcție indefinit derivabilă pe A și fie x_0 un punct interior lui A . Seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) (x - x_0)^n \quad (3)$$

se numește seria Taylor a funcției f în punctul x_0 . Fie B intervalul de convergență al seriei (3). Funcția f este dezvoltabilă în serie Taylor pe B dacă f este suma seriei (3) pe B .

Funcția f este dezvoltabilă în serie Taylor pe intervalul B dacă și numai dacă ea este indefinit derivabilă pe B și restul $R_n(x)$, din formula lui Taylor, tinde către zero când $n \rightarrow \infty$, oricare ar fi $x \in B$.

Dacă $x_0 = 0$, atunci seria (3) se numește seria Mac Laurin a funcției f .

11.3.1. Probleme rezolvate

1. Să se determine mulțimea de convergență și suma următoarelor serii de puteri:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}; \quad \text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}; \quad \text{c) } 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} x^n, \quad a \in R.$$

Rezolvare. a) $\lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_n \frac{n}{n+1} = 1$ și deci $\rho = 1$. Atunci intervalul de convergență este $(-1, 1)$. Pentru $x = 1$ obținem seria armonică alternată care este convergentă. Pentru $x = -1$ se obține seria armonică (înmulțită cu -1) care este divergentă. Deci mulțimea de convergență este intervalul $(-1, 1)$. Fie $f(x)$ suma seriei. Derivând seria, obținem $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{n-1} =$

$$= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + \dots = \frac{1}{1+x}, \text{ pentru } |x| < 1. \text{ Deci } f'(x) = \frac{1}{1+x}, x \in (-1, 1)$$

și prin integrare obținem $f(x) = \ln(1+x) + C$. Făcând în ultima relație $x = 0$, deducem că $C = f(0) = 0$. Prin urmare, $f(x) = \ln(1+x)$, $x \in (-1, 1)$. Deoarece seria dată este convergentă în $x = 1$, rezultă că $f(x)$ este continuă în punctul $x = 1$ și deci $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \ln(1+x) = \ln 2$. De

aici rezultă că seria armonică alternată are suma $\ln 2$.

$$\text{b) } \lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1, \rho = 1; \quad (-1, 1) \text{ este intervalul de convergență.}$$

Pentru $x = 1$, obținem seria alternată convergentă (criteriul lui Leibniz) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$.

Pentru $x = -1$, obținem seria alternată $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1}$, care este convergentă. Deci, mulțimea de convergență este $[-1, 1]$.

Fie f suma seriei. Pentru determinarea lui f procedăm ca la punctul precedent. Obținem $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots = \frac{1}{1+x^2}$, pentru $|x| < 1$. Deci $f(x) = \arctg x + C$, și punând $x = 0$, rezultă $C = 0$ și $f(x) = \arctg x$, $x \in (-1, 1)$. Deoarece seria este convergentă în punctele $x = -1$ și $x = 1$, rezultă $f(-1) = \arctg(-1) = -\frac{\pi}{4}$ și $f(1) = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$. Deci $f(x) = \arctg x$, $x \in [-1, 1]$. Este interesant de remarcat că am determinat și suma seriei nu-

$$\text{merică } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}, \text{ anume } \frac{\pi}{4}.$$

c) Procedind ca mai sus, găsim intervalul de convergență $(-1, 1)$. Pentru $x = 1$ se obține seria $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} a(a-1)\dots(a-n+1)$, care este absolut convergentă pentru $a \geq 0$ și semiconvergentă

pentru $-1 < a < 0$. Pentru $x = -1$ se obține seria $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (-a)(1-a)\dots(n-a-1)$, care

este absolut convergentă pentru $a \geq 0$.

Prin urmare, dacă $a > 0$ și $a \notin \mathbb{N}$, mulțimea de convergență este $[-1, 1]$; dacă $-1 < a < 0$, mulțimea de convergență este $(-1, 1]$; dacă $a \leq -1$, obținem $(-1, 1)$; dacă $a = 0$ sau $a \in \mathbb{N}$, mulțimea de convergență este \mathbb{R} . Fie $f(x)$ suma seriei pe $(-1, 1)$. Prin derivare, obținem

$$f'(x) = a + \frac{a(a-1)}{1!} x + \dots + \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1} + \dots, |x| < 1.$$

Înmulțind această relație cu x și adunând rezultatul la $f(x)$, obținem

$$\begin{aligned} xf'(x) + f(x) &= a + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a(a-1)\dots(a-n)}{n!} + \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{(n-1)!} \right] x^n = \\ &= a \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} x^n \right] = af(x), \text{ pentru } |x| < 1. \end{aligned}$$

Deci $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{a}{1+x}$ sau $\ln|f(x)| = a \ln(1+x) + C$, $|x| < 1$.

Luând $x = 0$ și ținând seama că $f(0) = 1$, rezultă $C = 0$ și deci $f(x) = (1+x)^a$, $x \in (-1, 1)$. Dacă seria dată converge și în punctele -1 și 1 , atunci $f(-1) = 0$ și $f(1) = 2$.

2. Să se demonstreze că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ este convergentă pentru orice $x \in [-1, 1]$,

iar suma f a ei verifică ecuația

$$(1-x)f'(1-x) - xf'(x) = \ln \frac{1-x}{x}, \quad x \in (0, 1).$$

Rezolvare. Se constată ușor că intervalul de convergență al seriei este $(-1, 1)$ și mulțimea de convergență este $[-1, 1]$. Derivând termen cu termen seria, obținem

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^{n-1}, \text{ de unde } xf'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n.$$

Înlocuind pe x cu $-x$ în relația $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$, $|x| < 1$, (exercițiul anterior), obținem

$$\ln(1-x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -xf'(x), \quad |x| < 1.$$

Schimbând în această ultimă relație pe x cu $1-x$, obținem

$$\ln x = -(1-x)f'(1-x), \quad 0 < x < 2.$$

Din ultimele două relații prin scădere rezultă relația din enunț.

3. Să se determine o serie de puteri, convergentă pentru $x \in \mathbb{R}$ și astfel încât suma f a ei să verifice ecuația

$$xf''(x) + f'(x) + x/f(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Rezolvare. Se caută $f(x)$ de forma $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Derivând formal de două ori termen cu termen, obținem

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2},$$

care înlocuite în ecuație conduc la identitatea

$$a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (n^2 a_n + a_{n-2}) x^{n-1} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

De aici rezultă că $a_1 = 0$, $n^2 a_n + a_{n-2} = 0$ pentru $n = 2, 3, 4, \dots$. Aceasta înseamnă că

$$a_{2k-1} = 0 \text{ și } a_{2k} = (-1)^k \frac{a_0}{4^k (k!)^2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Să luăm $a_0 = 1$ și să arătăm că seria $1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{4^k (k!)^2}$ este convergentă pe \mathbb{R} . Aceasta este evident, deoarece

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{4^k (k!)^2}{4^{k+1} [(k+1)!]^2} = 0.$$

4. Fie $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție indefinit derivabilă pe intervalul A și x_0 un punct interior lui A . Dacă există un număr $M > 0$, astfel încât $|f^{(n)}(x)| \leq M^n$, $\forall x \in A$, $n = 0, 1, 2, \dots$, atunci funcția f este dezvoltabilă în serie Taylor în A .

Rezolvare. Deoarece

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0)), \quad \theta \in (0, 1),$$

1, 1) și mulțimea de

rezultă

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} M^{n+1} = \frac{(M|x - x_0|)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad x \in A.$$

Deoarece seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} (M|x - x_0|)^{n+1}$ este convergentă, rezultă că $\frac{1}{(n+1)!} (M|x - x_0|)^{n+1} \rightarrow 0$ și deci $\lim_n R_n(x) = 0, \forall x \in A.$

5. Să se arate că funcțiile: a) $f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}$; b) $g(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}$; c) $h(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$, sînt dezvoltabile în serie de puteri pe \mathbb{R} și să se determine seriile Mac Laurin corespunzătoare.

Rezolvare. Funcțiile sînt indefinit derivabile pe \mathbb{R} și $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), g^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ și $h^{(n)}(x) = e^x$, pentru $n = 0, 1, 2, \dots$. Deoarece $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ și $|g^{(n)}(x)| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}, n = 0, 1, 2, \dots$, funcțiile f și g sînt dezvoltabile în serie de puteri pe \mathbb{R} . Pentru funcția h avem $e^x \leq e^a$, pe orice interval compact $[-a, a]$ și deci h este dezvoltabilă în serie de puteri în orice astfel de interval. De aici reiese că h este dezvoltabilă pe \mathbb{R} .

Deoarece $f^{(2k)}(0) = 0$ și $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$, $g^{(2k)}(0) = (-1)^k$ și $g^{(2k+1)}(0) = 0$ și $h^{(n)}(0) = 1$, obținem dezvoltările

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

6. Să se arate că funcțiile următoare sînt dezvoltabile în serie de puteri și să se găsească dezvoltarea, precizîndu-se intervalul în care este valabilă:

- a) $f(x) = (1+x)^a, x > -1, a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2, \dots\}$;
b) $f(x) = \arcsin x, x \in [-1, 1]$.

Rezolvare. a) Deoarece $f^{(n)}(x) = a(a-1)\dots(a-n+1)(1+x)^{a-n}$ și $f^{(n)}(0) = a(a-1)\dots(a-n+1)$, seria Mac Laurin corespunzătoare este

$$1 + \frac{a}{1!}x + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

Restul de ordinul n al funcției f , sub forma lui Cauchy, este

$$R_n(x) = \frac{a(a-1)\dots(a-n)}{n!} (1+\theta x)^{a-n-1} (1-\theta)^n x^{n+1} = -a_n x^n (1+\theta x)^{a-1} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n, \quad \theta \in (0, 1), \quad a_n = \frac{(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)}{n!}.$$

Deoarece seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ este convergentă pentru $|x| < 1$, [ex. 1, c)], rezultă $\lim_n a_n x^n = 0$, pentru $|x| < 1$. Ținînd seama că

$$|a_n x^n (1+\theta x)^{a-1}| < |a_n x^n| < |a_n| (1+|x|)^{a-1},$$

$$0 < \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n < 1,$$

rezultă că $\lim_n R_n(x) = 0$, pentru $|x| < 1$. Prin urmare, pentru $|x| < 1$, este valabilă dezvoltarea

$$(1+x)^a = 1 + \frac{a}{1!}x + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

Funcția $f(x) = (1+x)^a$ se numește funcție binomială.

b) Deoarece $f'(x) = (1-x^2)^{-1/2}$, pentru $|x| < 1$, rezultă că f' este o funcție binomială. Înlocuind în dezvoltarea funcției binomiale pe x cu $-t^2$ și $a = -1/2$, obținem

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}t^4 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)}t^{2n} + \dots, |t| < 1.$$

Prin integrarea termen cu termen a acesteia pe $[0, x]$, cu $|x| < 1$, deducem că

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

Cum această serie este convergentă și în punctele $x = -1$ și $x = 1$, deoarece

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} \cdot \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{\sqrt{(2n+1)^2}} < \frac{1}{n^{3/2}}, \forall n \in \mathbb{N},$$

rezultă că dezvoltarea obținută este valabilă pe $[-1, 1]$.

Pentru $x = 1$, obținem reprezentarea lui $\pi/2$ sub formă de serie.

11.3.2. Probleme propuse spre rezolvare

7. Să se determine mulțimea de convergență și suma pentru următoarele serii de puteri:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{3n+1}$; b) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$; c) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} (2n-1)x^{2n-2}$;

d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)^2 x^n$; e) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)(n+3)x^n$; f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}$.

8. Să se determine mulțimea de convergență pentru următoarele serii de puteri:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} [1 - (-2)^n]x^n$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n + 3^n}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2+n} x^n$; f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!} x^n, a > 0$; g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) x^{n-1}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2} x^n$; i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} (x-1)^n$; j) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x+3)^n$;

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n-1)2^n}$; l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} (x+3)^n$; m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n9^n} (x-1)^{2n}$.

9. Să se arate că seria $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{3n}}{(2 \cdot 3)(5 \cdot 6) \dots [(3n-1)3n]}$ este convergentă pe \mathbf{R} , iar suma sa, f , verifică ecuația $f''(x) + xf(x) = 0, \forall x \in \mathbf{R}$.

10. Să se arate că funcțiile următoare sînt dezvoltabile în serie de puteri; să se determine dezvoltarea și intervalul pe care aceasta este valabilă:

a) $f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, |x| < 1$; b) $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 5x + 6}, x \in \mathbf{R} \setminus \{-2, -3\}$;

c) $f(x) = \cos^3 x, x \in \mathbf{R}$; d) $f(x) = \sin^3 x, x \in \mathbf{R}$; e) $f(x) = \frac{3x-5}{x^2-4x+3}$.

11. Să se determine seria de puteri, convergentă pentru $x \in \mathbf{R}$ și astfel încît suma f a ei să verifice ecuația $f''(x) - f(x) = 0, \forall x \in \mathbf{R}$.

12. Să se găsească seria de puteri convergentă pe \mathbf{R} , a cărei sumă f verifică ecuația $f''(x) - xf'(x) - f(x) = 0, x \in \mathbf{R}$.

11.4. Serii Fourier

1. Funcția $f(x)$ satisface condițiile lui Dirichlet în intervalul (a, b) , dacă în acest interval funcția f : a) este uniform mărginită, $|f(x)| \leq M, a < x < b$; b) are un număr finit de discontinuități de speța întâi; c) are un număr finit de extreme stricte.

Teorema lui Dirichlet. Dacă funcția $f(x)$ periodică, cu perioada 2π , satisface condițiile lui Dirichlet în intervalul $(-\pi, \pi)$, atunci în fiecare punct de continuitate $x \in (-\pi, \pi)$ funcția $f(x)$ poate fi dezvoltată în serie trigonometrică Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (1)$$

unde coeficienții Fourier a_n și b_n se calculează după formulele

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Dacă $x \in (-\pi, \pi)$ este un punct de discontinuitate pentru funcția $f(x)$, atunci suma $S(x)$ a seriei Fourier (1), atașată funcției $f(x)$, este dată de

$$S(x) = [f(x-0) + f(x+0)]/2. \quad (3)$$

La extremități avem $S(-\pi) = S(\pi) = [f(-\pi+0) + f(\pi-0)]/2$.

2. a) Dacă funcția $f(x)$ este pară, $f(-x) = f(x)$, atunci $b_n = 0, n = 1, 2, \dots$, și seria Fourier este

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad \text{unde } a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 0, 1, \dots \quad (4)$$

b) Dacă funcția $f(x)$ este impară, $f(-x) = -f(x)$, atunci $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, și seria Fourier este

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \text{ unde } b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx, n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

3. Seria Fourier pentru o funcție periodică cu perioada $2l$. Dacă funcția $f(x)$ satisface condițiile lui Dirichlet în intervalul $(-l, l)$, atunci în punctele de continuitate $x \in (-l, l)$ are loc dezvoltarea

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right). \quad (6)$$

unde

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx, n = 0, 1, \dots; \quad (7)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx, n = 1, 2, \dots$$

11.4.1. Probleme rezolvate

1. Să se dezvolte în serie Fourier funcția $f(x) = e^{ax}$, $a \neq 0$, în intervalul $(-\pi, \pi)$.

Rezolvare. Funcția $f(x) = e^{ax}$ satisface evident condițiile lui Dirichlet, astfel că avem dezvoltarea (1). Conform cu formulele (2), obținem

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} dx = \frac{1}{a\pi} (e^{a\pi} - e^{-a\pi}) = \frac{2}{a\pi} \operatorname{sh} a\pi;$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} \cos nx dx = \frac{1}{\pi(a^2 + n^2)} (a \cos nx + n \sin nx) e^{ax} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \\ &= (-1)^n \frac{1}{\pi} \frac{2a}{a^2 + n^2} \operatorname{sh} a\pi; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} \sin nx dx = \frac{1}{\pi(a^2 + n^2)} (a \sin nx - n \cos nx) e^{ax} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \\ &= (-1)^{n-1} \frac{1}{\pi} \frac{2n}{a^2 + n^2} \operatorname{sh} a\pi, n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Prin urmare, pentru $x \in (-\pi, \pi)$ vom avea

$$e^{ax} = \frac{2}{\pi} \operatorname{sh} a\pi \left\{ \frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 + n^2} (a \cos nx - n \sin nx) \right\}.$$

În punctele $x = -\pi$ și $x = \pi$ suma seriei din membrul drept este $S(-\pi) = S(\pi) = (e^{-a\pi} + e^{a\pi})/2$ și egalitatea de mai sus nu mai este valabilă.

2. Să se de

se deducă apoi

Rezolvare. În

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

Deci, seria Fourier

Pentru $x =$
de mai sus.

Dacă luăm

3. Să se g

Rezolvare. De
coeficienților Fourier

$$a_0 =$$

Condițiile în

Deoarece $S(-\pi)$

4. Să se

a) $f_1(x) =$

b) $f_2(x) =$

2. Să se dezvolte în serie Fourier funcția $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$ în intervalul $(0, 2\pi)$. Să

se deducă apoi suma seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

Rezolvare. În acest caz, coeficienții dezvoltării în seria Fourier (1) sînt:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi-x}{2} dx = \frac{1}{2\pi} \left(\pi x - \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_0^{2\pi} = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi-x}{2} \cos nx dx = \frac{1}{2\pi} (\pi-x) \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} \sin nx dx = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi-x}{2} \sin nx dx = -\frac{1}{2\pi} (\pi-x) \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} \cos nx dx = \frac{1}{n},$$

$$n = 1, 2, \dots$$

Deci, seria Fourier corespunzătoare este

$$\frac{\pi-x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad 0 < x < 2\pi.$$

Pentru $x=0$ (sau $x=2\pi$) suma seriei este $S(0) = S(2\pi) = 0$ și nu mai are loc egalitatea de mai sus.

Dacă luăm $x = \frac{\pi}{2}$ în egalitatea de mai înainte, găsim

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}.$$

3. Să se găsească seria Fourier a funcției $f(x) = |x|$ în intervalul $[-\pi, \pi]$.

Rezolvare. Deoarece $f(x)$ este o funcție pară, vom folosi formulele (4) pentru determinarea coeficienților Fourier. Avem

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{x^2}{\pi} \Big|_0^{\pi} = \pi; \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{x}{n} \sin nx \Big|_0^{\pi} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nx dx \right) = \frac{2}{\pi n^2} [(-1)^n - 1],$$

$$n = 1, 2, \dots$$

Condițiile lui Dirichlet fiind satisfăcute, după formula (4) avem

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}, \quad -\pi < x < \pi.$$

Deoarece $S(-\pi) = S(\pi) = \pi$, egalitatea are loc pe intervalul închis $[-\pi, \pi]$.

4. Să se dezvolte funcțiile:

a) $f_1(x) = \sin ax$, după cosinusuri, în intervalul $[0, \pi]$, $a \neq 0$;

b) $f_2(x) = \cos ax$, după sinusuri, în intervalul $[0, \pi]$.

Rezolvare. a) Prelungind funcția $f(x)$ prin paritate în intervalul $(-\pi, 0)$, după (4), rezultă $b_n = 0$ și

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin ax dx = \frac{1 - \cos a\pi}{\pi} \cdot \frac{2}{a}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin ax \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\sin(a+n)x + \sin(a-n)x] dx = \\ &= -\frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{a+n} \cos(a+n)x + \frac{1}{a-n} \cos(a-n)x \right\} \Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{a+n} \cos a\pi \cos n\pi + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{a-n} \cos a\pi \cos n\pi - \frac{1}{a+n} - \frac{1}{a-n} \right\} = \frac{2a}{\pi} \frac{1}{a^2 - n^2} [1 - (-1)^n \cos a\pi], \quad a \neq n. \end{aligned}$$

Să presupunem că $a \notin N$. Atunci

$$a_0 = \frac{2(1 - \cos a\pi)}{a\pi}, \quad a_{2k} = \frac{2a}{\pi} \cdot \frac{1}{a^2 - 4k^2} (1 - \cos a\pi), \quad a_{2k+1} = \frac{2a}{\pi} \cdot \frac{1}{a^2 - (2k+1)^2} (1 + \cos a\pi).$$

astfel că

$$\sin ax = \frac{1 - \cos a\pi}{\pi} \left(\frac{1}{a} + 2a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{a^2 - 4k^2} \right) + \frac{2a}{\pi} (1 + \cos a\pi) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{a^2 - (2k+1)^2}, \quad x \in [0, \pi].$$

Dacă $a = 2m$, atunci $a_{2k} = 0$, $a_{2k+1} = \frac{8m}{\pi} \frac{1}{4m^2 - (2k+1)^2}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, și

$$\sin 2mx = \frac{8m}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{4m^2 - (2k+1)^2}, \quad x \in [0, \pi].$$

Dacă $a = 2m + 1$, atunci

$$a_0 = \frac{4}{a\pi}, \quad a_{2k} = \frac{4(2m+1)}{\pi} \cdot \frac{1}{(2m+1)^2 - 4k^2}, \quad a_{2k+1} = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

și deci

$$\sin(2m+1)x = \frac{4}{\pi} \left\{ \frac{1}{a} + (2m+1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{(2m+1)^2 - 4k^2} \right\}, \quad x \in [0, \pi].$$

b) În acest caz, se prelungește funcția $f_2(x)$ prin imparitate în intervalul $(-\pi, 0)$ și se folosește relația (5). Avem

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos ax \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\sin(a+n)x + \sin(n-a)x] dx.$$

Pentru $|a| = n$ rezultă $b_n = 0$. Pentru $|a| \neq n$ avem $b_n = \frac{2n}{\pi} \frac{1}{n^2 - a^2} [1 - (-1)^n \cos a\pi]$.

Dacă $|a| \notin N$, atunci

$$b_{2k-1} = \frac{2(2k-1)}{\pi[(2k-1)^2 - a^2]} (1 + \cos a\pi) \quad \text{și} \quad b_{2k} = \frac{4k}{\pi(4k^2 - a^2)} (1 - \cos a\pi), \quad k \in N,$$

astfel că

$$\cos ax = \frac{2}{\pi} (1 + \cos a\pi) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)}{(2k-1)^2 - a^2} \sin(2k-1)x + \frac{2}{\pi} (1 - \cos a\pi) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{4k^2 - a^2} \sin 2kx,$$

$$x \in [0, \pi].$$

Dacă $a = 2$

$\sin(2k-1)x$

Dacă $a = 2m$

$\sin 2kx, x \in [0, \pi]$

5. Să se de

Rezolvare. În

$$a_n = \frac{1}{5} \int_0^{\pi} \dots$$

Deci

6. Să se d
determine sur
mități, pentru

a) $f(x) = \dots$
 $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$; e)
 $= \operatorname{sh} ax, a \in \dots$

7. Să se de

8. Să se de

valul $(0, 2\pi)$.

9. Să se gă

Să se calcule

10. Să se c

a) funcția

b) funcția

11. Să se c

a) $f(x) = \dots$

b) $f(x) = \dots$

după (4), rezultă

$$\text{Dacă } a = 2m, \text{ atunci } b_{2k-1} = \frac{4(2k-1)}{\pi[(2k-1)^2 - 4m^2]}, b_{2k} = 0 \text{ și } \cos 2mx = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{(2k-1)^2 - 4m^2}$$

$\cdot \sin(2k-1)x, x \in [0, \pi].$

$$\text{Dacă } a = 2m-1, \text{ atunci } b_{2k-1} = 0, b_{2k} = \frac{8k}{\pi[4k^2 - (2m-1)^2]} \text{ și } \cos(2m-1)x = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4k^2 - (2m-1)^2}$$

$\cdot \sin 2kx, x \in [0, \pi].$

5. Să se dezvolte în serie Fourier funcția $f(x) = 10 - x$ în intervalul $(5, 15)$.
Rezolvare. În acest caz folosim formula (6) în care $l = 5$. Avem

$$a_0 = \frac{1}{5} \int_5^{15} (10 - x) dx = 0;$$

$$a_n = \frac{1}{5} \int_5^{15} (10 - x) \cos \frac{n\pi x}{5} dx = \frac{1}{n\pi} (10 - x) \sin \frac{n\pi x}{5} \Big|_5^{15} + \frac{1}{n\pi} \int_5^{15} \sin \frac{n\pi x}{5} dx = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{5} \int_5^{15} (10 - x) \sin \frac{n\pi x}{5} dx = -\frac{1}{n\pi} (10 - x) \cos \frac{n\pi x}{5} \Big|_5^{15} - \frac{1}{n\pi} \int_5^{15} \cos \frac{n\pi x}{5} dx = (-1)^n \frac{10}{n\pi}.$$

Deci

$$10 - x = \frac{10}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{5}, x \in (5, 15).$$

11.4.2. Probleme propuse spre rezolvare

6. Să se dezvolte în serie Fourier funcția $f(x)$ în intervalul $(-\pi, \pi)$ și să se determine suma seriei corespunzătoare în punctele de discontinuitate și în extremități, pentru:

a) $f(x) = x$; b) $f(x) = x^2$; c) $f(x) = \cos ax, a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$; d) $f(x) = \sin ax, a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$; e) $f(x) = a, x \in (-\pi, 0]$ și $f(x) = b, x \in (0, \pi), a, b \in \mathbb{R}$; f) $f(x) = \operatorname{sh} ax, a \in \mathbb{R}$; g) $f(x) = \operatorname{ch} ax, a \neq 0$.

7. Să se dezvolte în serie Fourier funcția $f(x) = x$, în intervalul $(0, 2\pi)$.

8. Să se determine dezvoltarea în serie Fourier a funcției $f(x) = x^2$, în intervalul $(0, 2\pi)$. Să se calculeze apoi suma seriei numerice $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$.

9. Să se găsească seria Fourier de sinusuri a funcției $f(x) = 1$, în intervalul $(0, \pi)$

Să se calculeze suma seriei numerice $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}$.

10. Să se dezvolte în serie Fourier:

a) funcția $f(x) = |x|$, în intervalul $(-1, 1)$;

b) funcția $f(x) = e^x$, în intervalul $(-l, l)$.

11. Să se dezvolte în serie de cosinusuri, pe intervalul $(0, \pi)$, funcțiile:

a) $f(x) = 1, x \in (0, h]$ și $f(x) = 0, x \in (h, \pi)$;

b) $f(x) = \cos x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ și $f(x) = -\cos x, x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

12. ECUAȚII DIFERENȚIALE ȘI CU DERIVATE PARȚIALE

12.1. Ecuatii diferențiale de ordinul întâi

O ecuație de forma

$$F(x, y, y') = 0, (x, y, y') \in D \subset \mathbb{R}^3, \quad (1)$$

unde $y = y(x)$ este o funcție necunoscută, se numește ecuație diferențială de ordinul întâi. Funcția $y = \varphi(x)$, definită și derivabilă pe intervalul I , care satisface $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0, x \in I$, se numește soluție a ecuației diferențiale (1). Graficul funcției $y = \varphi(x)$ se numește curbă integrală.

Soluția generală a ecuației (1) poate fi scrisă sub una din formele:

$$y = g(x, C) \text{ (explicită)}; \Phi(x, y, C) = 0 \text{ (implicită)}; \quad (2)$$

$$x = h_1(t, C), y = h_2(t, C) \text{ (parametrică)}, C \text{ fiind constantă reală.}$$

Aintegra ecuația diferențială (1) cu condiția inițială

$$y(x_0) = y_0 \quad (3)$$

înseamnă a rezolva problema lui Cauchy pentru ecuația diferențială de ordinul întâi.

I. Ecuatii diferențiale de ordinul întâi rezolvate în raport cu y'

O ecuație diferențială de ordinul întâi rezolvată în raport cu y' are forma

$$y' = f(x, y), \quad (4)$$

unde $f(x, y)$ este o funcție dată pe un domeniu $D \subset \mathbb{R}^2$.

Vom pune în evidență tipurile de ecuații de forma (4) integrabile prin metode elementare.

1. Ecuatii diferențiale de ordinul întâi, cu variabile separabile. Sint ecuații de forma

$$y' = f(x)g(y), \text{ (sau } X_1(x)Y_1(y)dx + X_2(x)Y_2(y)dy = 0), \text{ cu } g(y) \neq 0. \quad (5)$$

Se separă variabilele: $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$ și soluția generală este

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C. \quad (6)$$

2. Ecuatii diferențiale de ordinul întâi omogene

$$y' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \text{ sau } P(x, y)dx - Q(x, y)dy = 0, \quad (7)$$

unde funcțiile P și Q sint funcții omogene de același grad. Cu schimbarea de funcție.

$$y = xu(x), \quad (8)$$

ecuația (7) se reduce la o ecuație diferențială cu variabile separabile.

3. Ecuații care se reduc la ecuații omogene. Fie ecuația

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \quad a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

a) Dacă $c_1^2 + c_2^2 = 0$, ecuația (9) este o ecuație omogenă.

b) Dacă $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ și $\delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, atunci, cu x_0, y_0 soluție a sistemului $a_1x + b_1y + c_1 = 0, a_2x + b_2y + c_2 = 0$, prin schimbarea de variabilă și de funcție

$$x = x_0 + u, \quad y = y_0 + v, \quad (10)$$

ecuația (9) se reduce la o ecuație omogenă.

c) Dacă $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ și $\delta = 0$, schimbarea de funcție

$$a_1x + b_1y = z(x), \quad (11)$$

reducе ecuația (9) la o ecuație cu variabile separabile.

4. Ecuații care provin din diferențiale totale. Factor integrant. Fie ecuația

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \quad (12)$$

a) Dacă este verificată condiția

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad (13)$$

spunem că ecuația (12) provine dintr-o diferențială totală. Soluția sa generală este

$$V(x, y) = C, \quad \text{unde } V(x, y) = \int_{x_0}^x P(t, y_0)dt + \int_{y_0}^y Q(x, t)dt. \quad (14)$$

b) Dacă condiția (13) nu este satisfăcută, dar există un factor integrant $m(x, y)$ astfel că expresia $mP dx + mQ dy$ este diferențiala totală a unei funcții, atunci integrarea ecuației (12) se reduce la problema rezolvată la punctul a). Se determină ușor factorul integrant în următoarele două cazuri:

$$\text{dacă } -\frac{1}{Q} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = h(x), \text{ atunci } m = m(x) \text{ și } \frac{dm}{m} = h(x) dx, \quad (15)$$

$$\text{dacă } \frac{1}{P} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = g(y), \text{ atunci } m = m(y) \text{ și } \frac{dm}{m} = g(y) dy. \quad (16)$$

5. Ecuații diferențiale liniare de ordinul întâi. O ecuație diferențială de forma

$$y' + P(x)y = Q(x), \quad (17)$$

de gradul unu în y și y' se numește ecuație liniară. Soluția generală a acesteia este dată de

$$y = e^{-\int P(x)dx} [C + \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx]. \quad (18)$$

6) Ecuația lui Bernoulli. O ecuație de ordinul întâi, de forma

$$y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, \quad (19)$$

se numește ecuația lui Bernoulli. Această ecuație se reduce la o ecuație liniară cu ajutorul substituției

$$z = y^{1-\alpha}. \quad (20)$$

7. Ecuația lui Riccati. O ecuație diferențială de forma

$$y' + P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) = 0 \quad (21)$$

se numește ecuația lui Riccati. Dacă $y_1(x)$ este o soluție particulară a ecuației (21), atunci schimbarea de funcție

$$y = y_1 + \frac{1}{z}, \quad z = z(x) \quad (22)$$

transformă ecuația (21) într-o ecuație liniară.

Teorema de existență și unicitate. Fie ecuația (4) cu condiția inițială (3). Dacă sint satisfăcute ipotezele:

α) funcția $f(x, y)$ este continuă în dreptunghiul $(J) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b$;

β) funcția $f(x, y)$ satisface o condiție Lipschitz $|f(x, y) - f(x, \bar{y})| \leq K|y - \bar{y}|$, oricare ar fi $(x, y), (x, \bar{y})$ din dreptunghiul J , atunci problema lui Cauchy (4) și (3) admite o singură soluție $y = \varphi(x)$, definită pentru $|x - x_0| \leq h$, unde $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, $M = \sup_J |f(x, y)|$.

Metoda aproximațiilor succesive arată că soluția $y = \varphi(x)$ din teorema precedentă este limita șirului de funcții (y_n) , dat de

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}) dx, \quad x \in [x_0 - h, x_0 + h], \quad n = 1, 2, \dots \quad (23)$$

II. Ecuații diferențiale de ordinul întâi, nerezolvabile în raport cu y' , integrabile prin metode elementare

8. Ecuații de ordinul întâi, rezolvabile în raport cu y sint de forma

$$y = g(x, y'). \quad (24)$$

Se face schimbarea de funcție

$$y' = p(x) \text{ și deci } y = g(x, p). \quad (25)$$

9. Ecuații de ordinul întâi, rezolvabile în raport cu x , sint de forma $x = h(y, y')$. Acestea se reduc la cazul precedent, dacă se inversează rolul variabilelor. Dacă se ia x ca variabilă dependentă, iar y ca variabilă independentă și deoarece $x' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'}$, atunci $x = h\left(y, \frac{1}{x'}\right) = l(y, x')$ are forma (24).

10. Ecuația lui Lagrange. Se numește ecuația lui Lagrange ecuația diferențială

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'), \quad \varphi(y') \neq y'. \quad (26)$$

11. Ecuația lui Clairaut are forma

$$y = xy' + \psi(y'). \quad (27)$$

Soluția generală a acestei ecuații este

$$y = xC + \psi(C), \quad (28)$$

iar soluția singulară este dată de

$$x = -\psi'(p), \quad y = -p\psi'(p) + \psi(p). \quad (29)$$

12.1.1. Probleme rezolvate

1. Să se determine suprafața de echilibru a unui lichid greu, turnat într-un vas cilindric, care se rotește cu viteza unghiulară constantă ω în jurul axei cilindrului, considerate ca axă Oz .

Rezolvare. Fie C curba secțiune a suprafeței căutate cu planul xOz . Asupra unei particule de lichid de masă m , aflate pe C , vor acționa forțele: mg (greutatea sa), $m\omega^2 x$ (forța centrifugă de inerție) și



2. Să se active.

Rezolvare. moment dat t , dacă $m(t)$ este momentul $t +$

λ fiind constantă matematică

3. Să se

a) $x\sqrt{1-x}$

b) $x dy$

Rezolvare.

$$= \frac{y dy}{\sqrt{1+y}}$$

b) Ecuația

$$= \frac{dy}{y + \sqrt{1+y}}$$

Prin urm

$$\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x$$

4. Să se verificând

a) $(1 +$

Rezolvare.

acțiunea celorlalte particule asupra particulei considerate (fig. 33). În cazul echilibrului, R este dirijat după normala la curbă și $v = u$, astfel că $\operatorname{tg} v = \operatorname{tg} u$, adică

$$z' = \frac{m\omega^2 x}{mg} \text{ sau } dz = \frac{\omega^2 x}{g} dx.$$

Aceasta este ecuația diferențială a curbei secțiune C . Integrând această ecuație, obținem $z = \frac{\omega^2 x^2}{2g} + C$. Suprafața de echilibru a lichidului se obține prin rotirea curbei C în jurul axei Oz . Se obține ecuația

$$z = \frac{\omega^2}{2g} (x^2 + y^2) + C.$$

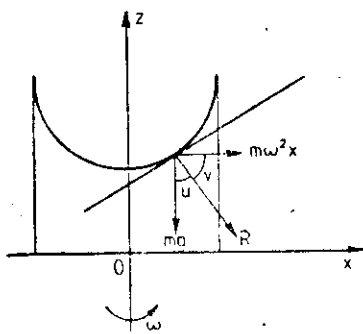


Fig. 33

2. Să se afle expresia matematică a legii de dezintegrare a substanțelor radioactive.

Rezolvare. Legea de dezintegrare radioactivă afirmă că viteza de transformare radioactivă, la un moment dat t , este proporțională cu cantitatea de substanță existentă la acel moment. Prin urmare, dacă $m(t)$ este masa elementului radioactiv existentă la momentul t și $m(t) - dm(t)$ este masa la momentul $t + dt$, atunci

$$\frac{m - dm - m}{t + dt - t} = \lambda m \text{ sau } \frac{dm}{m} = -\lambda dt,$$

λ fiind constanta de dezintegrare radioactivă. Prin integrare, legea de dezintegrare capătă expresia matematică

$$\ln m = -\lambda t + C \text{ sau } m = m_0 e^{-\lambda t}, \text{ cu } m_0 = e^C.$$

3. Să se integreze ecuațiile diferențiale:

$$a) x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0;$$

$$b) xdy - ydx = \sqrt{1+x^2}dy + \sqrt{1+y^2}dx.$$

Rezolvare. a) Este o ecuație cu variabile separabile. Separându-le, obținem $\frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} =$

$$-\frac{y dy}{\sqrt{1+y^2}} \text{ și prin integrare rezultă } \sqrt{1+x^2} = -\sqrt{1+y^2} + C.$$

$$b) \text{ Ecuația se scrie sub forma } (y + \sqrt{1+y^2})dx + (-x + \sqrt{1+x^2})dy = 0 \text{ sau } \frac{dx}{\sqrt{1+x^2} - x} =$$

$$-\frac{dy}{y + \sqrt{1+y^2}} \text{ sau } (\sqrt{1+x^2} + x)dx = (y - \sqrt{1+y^2})dy.$$

Prin urmare, obținem soluția

$$\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2}y\sqrt{1+y^2} - \frac{1}{2}\ln(y + \sqrt{1+y^2}) + C.$$

4. Să se determine soluțiile particulare ale ecuațiilor diferențiale următoare, verificând condițiile inițiale precizate:

$$a) (1 + e^x)yy' = e^x, y(0) = 1; \quad b) (1 + y^2) + xyy' = 0, y(1) = 0.$$

Rezolvare. a) Punând $y' = dy/dx$ și separând variabilele, obținem

$$y dy = \frac{e^x}{1 + e^x} dx \text{ sau } \frac{y^2}{2} = \ln(1 + e^x) + C.$$

Făcând $x = 0$ și $y = 1$ în soluția generală, obținem $\frac{1}{2} = \ln 1 + C$ de unde $C = \frac{1}{2}$. Deci soluția particulară este $\frac{y^2 - 1}{2} = \ln(1 + e^x)$.

b) Procedând similar, obținem $\frac{y dy}{1 + y^2} = -\frac{1}{x} dx$ sau $\frac{1}{2} \ln(1 + y^2) = -\ln|x| + \ln C$, deci $x\sqrt{1 + y^2} = C$. Folosind condiția inițială, avem $1 = C$ și soluția particulară este $x\sqrt{1 + y^2} = 1$.

5. Să se integreze ecuațiile diferențiale omogene :

a) $y' = \frac{y^2 + x^2}{xy}$, $y(1) = 0$; b) $y dx + (2\sqrt{xy} - x) dy = 0$.

Rezolvare. a) Folosind substituția $y = xu$, $y' = u + xu'$, obținem succesiv :

$$xu' + u = u + \frac{1}{u}, \quad xu' = \frac{1}{u}, \quad u du = \frac{1}{x} dx, \quad \frac{u^2}{2} = \ln|x| + C, \quad \frac{y^2}{2x^2} = \ln|x| + C.$$

Punând condiția inițială, obținem $C = 0$ și soluția particulară cerută este $y^2 = 2x^2 \ln|x|$.

b) Procedăm analog și dacă $y = xu$, obținem $u + (2\sqrt{u} - 1)(u'x + u) = 0$, $x(2\sqrt{u} - 1)u' + 2u^{3/2} = 0$, $\frac{1}{2u^{3/2}}(2u^{1/2} - 1) du = -\frac{1}{x} dx$, $\ln|u| + u^{-1/2} = -\ln|x| + C$, $\ln|y| + \left(\frac{x}{y}\right)^{1/2} = C$.

6. Să se integreze ecuațiile diferențiale reducibile la ecuații omogene :

a) $2x + y = (4x - y)y'$; b) $(3x - 7y - 3)y' + 7x - 3y - 7 = 0$;
c) $(3x + 3y - 1) dx + (x + y + 1) dy = 0$.

Rezolvare. Ecuațiile sînt de formă (9).

a) Este o ecuație omogenă. Cu substituția $y = xu$, obținem

$$\frac{4 - u}{(u - 1)(u - 2)} du = \frac{1}{x} dx \text{ sau } \int \left(\frac{-3}{u - 1} + \frac{2}{u - 2} \right) du = \ln|x| + \ln C,$$

$$\ln \frac{(u - 2)^2}{(u - 1)^3} = \ln C |x|, \quad (y - 2x)^2 = C(y - x)^3.$$

b) $\delta = \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = 40 \neq 0$. Sistemul $3x - 7y - 3 = 0$, $7x - 3y - 7 = 0$ are soluția $x_0 = 1$, $y_0 = 0$. Substituția $x = 1 + u$, $y = v$ implică $\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$ și ecuația devine $(3u - 7v)v' + 7u - 3v = 0$. Se face schimbarea de funcție $v = uz(u)$, ceea ce conduce la soluția generală $(z - 1)^2(z + 1)^3 u^7 = C$ sau $(v - u)^2(v + u)^3 = C$ sau $(y - x + 1)^2(y + x - 1)^3 = C$.

c) În acest caz $\delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$. Efectuăm schimbarea de funcție $x + y = u(x)$, astfel că $dx + dy = du$. Ecuația capătă forma $(3u - 1)dx + (u + 1)(du - dx) = 0$ sau $\left(1 + \frac{2}{u - 1}\right) du = -2 dx$. Deci

$$u + 2 \ln|u - 1| = -2x + C \text{ sau } 3x + y + \ln(x + y - 1)^2 = C.$$

7. Să se integreze ecuațiile cu diferențială totală :

a) $\left(x^m + 2xy^2 + \frac{1}{x}\right) dx + \left(y^n + 2x^2y + \frac{1}{y}\right) dy = 0$, $m \neq -1$, $n \neq -1$;
b) $2xy dx - 2y^3 dx + x^2 dy - 6xy^2 dy = 0$, $y(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Rezolvare. a) Avem $= 4xy - 4xy = 0$. C

$$V(x, y) = \int_x^x \left(\frac{x}{y} + \frac{1}{y} \right) dy + \left(-\frac{1}{y} \right) dx$$

Prin urmare, se

b) În acest caz $-(2x - 6y^2) = 0$.

$$V(x, y) = \int \left(\frac{x}{y} + \frac{1}{y} \right) dy + \left(-\frac{1}{y} \right) dx$$

Soluția generală căutată este $x^2y -$

8. Determinăm

a) $(x \sin y +$
b) $(1 + 3x^2$
c) $xy^2 dx +$

Rezolvare. a).

$$-\frac{1}{Q} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx$$

numai de x . Avem $m = e^x$ și obținem

Deci

Soluția generală e

b) $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -\text{ctg } y$. Se căutăm soluția este, după

Rezolvare. a) Avem $P = x^m + 2xy^2 + \frac{1}{x}$ și $Q = y^n + 2x^2y + \frac{1}{y}$, astfel că $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 4xy - 4xy = 0$. Condiția (13) este verificată și deci

$$V(x, y) = \int_{x_0}^x \left(t^m + 2y_0^2 t + \frac{1}{t} \right) dt + \int_{y_0}^y \left((t^n + 2x^2 t + \frac{1}{t}) \right) dt = \left(\frac{t^{m+1}}{m+1} + y_0^2 t + \ln |t| \right) \Big|_{x_0}^x + \left(\frac{t^n}{n+1} + x^2 t + \ln |t| \right) \Big|_{y_0}^y = \frac{x^{m+1}}{m+1} + \ln |xy| + \frac{y^{n+1}}{n+1} + x^2 y^2 - \left(\frac{x_0^{m+1}}{m+1} + \ln |x_0 y_0| + \frac{y_0^{n+1}}{n+1} + x_0^2 y_0^2 \right).$$

Prin urmare, soluția generală este $\frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{y^{n+1}}{n+1} + x^2 y^2 + \ln |xy| = C$.

b) În acest caz avem $P = 2xy - 2y^3$ și $Q = x^2 - 6xy^2$, astfel că $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 6y^2 - (2x - 6y^2) = 0$. Prin urmare, avem

$$V(x, y) = \int_{x_0}^x (2y_0 t - 2y_0^3) dt + \int_{y_0}^y (x^2 - 6xt^2) dt = (y_0 t^2 - 2y_0^3 t) \Big|_{x_0}^x + (x^2 t - 2xt^3) \Big|_{y_0}^y = x^2 y - 2xy^3 - (x_0^2 y_0 - 2x_0 y_0^3).$$

Soluția generală este $x^2 y - 2xy^3 = C$. Din condiția inițială rezultă $C = 0$ și deci soluția particulară căutată este $x^2 y - 2xy^3 = 0$.

8. Determinând mai întâi un factor integrant, să se integreze :

- a) $(x \sin y + y \cos y) dx + (x \cos y - y \sin y) dy = 0$;
 b) $(1 + 3x^2 \sin y) dx - x \operatorname{ctg} y dy = 0$;
 c) $xy^2 dx + (x^2 y - x) dy = 0$; d) $(x + y) dx + (y - x) dy = 0$.

Rezolvare. a). $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \cos y - (x \cos y + \cos y - y \sin y) = -(x \cos y - y \sin y)$, astfel că $-\frac{1}{Q} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 1$ și sîntem în cazul relației (15). Se caută factorul integrant funcție numai de x . Avem $\frac{dm}{m} = dx$, astfel că $\ln |m| = x$ și deci $m = e^x$. Înmulțim ecuația inițială cu $m = e^x$ și obținem ecuația cu diferențială totală

$$e^x(x \sin y + y \cos y) dx + e^x(x \cos y - y \sin y) dy = 0.$$

Deci

$$V(x, y) = \int_{x_0}^x e^t(t \sin y_0 + y_0 \cos y_0) dt + \int_{y_0}^y e^x(x \cos t - t \sin t) dt = e^x(x \sin y - \sin y + y \cos y) - e^x(x_0 \sin y_0 - \sin y_0 + y_0 \cos y_0).$$

Soluția generală este $e^x(x \sin y - \sin y + y \cos y) = C$.

b) $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -\operatorname{ctg} y - 3x^2 \cos y = -\operatorname{ctg} y(1 + 3x^2 \sin y)$, astfel că $\frac{1}{P} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = -\operatorname{ctg} y$. Se caută deci factorul integrant funcție numai de y . Ecuația pentru determinarea acestuia este, după relația (16),

$$\frac{dm}{m} = -\operatorname{ctg} y dy, \text{ cu } \ln |m| = -\ln |\sin y|, \text{ de unde } m = \frac{1}{\sin y}.$$

Înmulțind ecuația cu $m = \frac{1}{\sin y}$, obținem ecuația cu diferențială totală

$$\left(\frac{1}{\sin y} + 3x^2\right) dx - x \frac{\cos y}{\sin^2 y} dy = 0.$$

Deci

$$V(x, y) = \int_{x_0}^x \left(\frac{1}{\sin y_0} + 3t^2\right) dt - \int_{y_0}^y x \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt = \frac{x}{\sin y} + x^3 - \left(\frac{x_0}{\sin y_0} + x_0^3\right)$$

și soluția generală este $\frac{x}{\sin y} + x^3 = C$.

c) Se caută un factor integrant de forma $m(x, y) = \mu(xy)$. Înmulțind ecuația cu $\mu(xy)$, obținem $xy^2\mu(xy) dx + \mu(xy)(x^2y - x) dy = 0$. Pentru ca aceasta să fie o ecuație cu diferențială totală trebuie ca

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [\mu(xy)(x^2y - x)] &= \frac{\partial}{\partial y} [xy^2\mu(xy)], \text{ deci } (2xy - 1)\mu + y\mu'(x^2y - x) = \\ &= 2xy\mu + x^2y^2\mu', \quad -xy\mu' - \mu = 0, \quad \frac{\mu'}{\mu} = \frac{-1}{xy}, \quad \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{du}{u}, \quad u = xy. \end{aligned}$$

Așadar, $\ln|\mu| = \ln|u|^{-1}$, $\mu = u^{-1}$ sau $\mu = (xy)^{-1}$. Deci ecuația cu diferențială totală are forma $y dx + \left(x - \frac{1}{y}\right) dy = 0$ și

$$V(x, y) = \int_{x_0}^x y_0 dt + \int_{y_0}^y \left(x - \frac{1}{t}\right) dt = xy - \ln|y| - (x_0y_0 - \ln|y_0|).$$

Soluția generală este $xy - \ln|y| = C$.

d) Se caută un factor integrant de forma $m(x, y) = \mu(x^2 + y^2)$. Sa notăm $u(x, y) = x^2 + y^2$. Înmulțind ecuația dată cu $m(x, y) = \mu(u(x, y))$, obținem $\mu(u(x, y))[(x + y) dx + (y - x) dy] = 0$. Pentru ca această ecuație să fie cu diferențială totală trebuie ca

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [\mu(y - x)] &= \frac{\partial}{\partial y} [\mu(x + y)], \text{ deci } -\mu + (y - x)\mu' 2x = \mu + (x + y)\mu' 2y, \\ \frac{\mu'}{\mu} &= -\frac{1}{x^2 + y^2}, \quad \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{du}{u}, \quad \ln|\mu| = -\ln u, \quad \mu = \frac{1}{u}. \end{aligned}$$

Ecuația cu diferențială totală este $\frac{x + y}{x^2 + y^2} dx + \frac{y - x}{x^2 + y^2} dy = 0$. Prin urmare,

$$V(x, y) = \int_{x_0}^x \frac{t + y_0}{t^2 + y_0^2} dt + \int_{y_0}^y \frac{t - x}{x^2 + t^2} dt = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + \arctg \frac{x}{y} - \left(\ln \sqrt{x_0^2 + y_0^2} + \arctg \frac{x_0}{y_0}\right)$$

și soluția generală este $\ln \sqrt{x^2 + y^2} + \arctg \frac{x}{y} = C$. Evident, ecuația fiind omogenă putea fi tratată prin metoda corespunzătoare.

9. Să se integreze ecuațiile diferențiale liniare:

a) $xy' - y + x = 0$; b) $y' + \frac{2}{x^2 - 1} y = 2x + 2$, $y(0) = -3$;

c) $y' + 2xy = x^3$, $y(0) = \frac{e - 1}{2}$.

Rezolvare. a) Ecuația se scrie sub forma normală $y' - \frac{1}{x}y = -1$. După formula (18), obținem

$$y = e^{\int \frac{1}{x} dx} \left(C - \int e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx \right) = e^{\ln|x|} (C - \int e^{-\ln|x|} dx) = x(C - \ln|x|).$$

b) După formula (18), obținem

$$y = e^{-\int \frac{2}{x^2-1} dx} \left[C + \int (2x+2)e^{\int \frac{2}{x^2-1} dx} dx \right] = \frac{x+1}{x-1} \left[C + \int 2(x+1) \cdot \frac{x-1}{x+1} dx \right]$$

$$y = \frac{x+1}{x-1} [C + (x-1)^2].$$

Din condiția inițială, deducem $C = 2$, astfel că $y = (x^2 - 2x + 3)(x+1)(x-1)^{-1}$.

c) $y = e^{-x^2} (C + \int x^2 e^{x^2} dx) = Ce^{-x^2} + \frac{1}{2}(x^2 - 1)$. Din condiția inițială rezultă $C = e/2$. Soluția particulară căutată este $y = (e^{1-x^2} + x^2 - 1)/2$.

10. Să se integreze ecuațiile diferențiale Bernoulli:

a) $y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2 y^2}$; b) $y' - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y}$; c) $xy' + y = -x^2 y^2$, $y(1) = 1$.

Rezolvare. a) În acest caz $\alpha = -2$ și substituția (20) este $z = y^3$. Deci $y = z^{1/3}$ și $y' = \frac{1}{3}z^{-2/3}z'$.

Înlocuind în ecuație, obținem ecuația liniară $z' + \frac{3}{x}z = \frac{3}{x^2}$. După formula (18), rezultă

$$z = e^{-\int \frac{3}{x} dx} \left(C + \int \frac{3}{x^2} e^{\int \frac{3}{x} dx} dx \right) = \frac{1}{x^3} \left(C + \frac{3}{2}x^2 \right),$$

astfel că $y = \frac{1}{x} \left(C + \frac{3}{2}x^2 \right)^{1/3}$.

b) $\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow z = y^{1/2}$ și $y = z^2 \Rightarrow y' = 2zz'$. Ecuația transformată $z' - \frac{2}{x}z = \frac{x}{2}$ are soluția generală $z = Cx^2 + \frac{x^2}{2} \ln|x|$. Deci soluția generală a ecuației este $y = \left(Cx^2 + \frac{x^2}{2} \ln|x| \right)^2$.

c) $y' + \frac{1}{x}y = -xy^2$, $\alpha = 2 \Rightarrow z = y^{-1} \Rightarrow y = z^{-1}$ și $y' = -z^{-2}z'$. Ecuația transformată este $z' - \frac{1}{x}z = z$ și are soluția generală $z(x) = Cx + x^2$. Deci soluția generală a ecuației este $y = (Cx + x^2)^{-1}$. Din condiția inițială deducem $C = 0$, astfel că soluția particulară căutată este $y = x^{-2}$.

11. Să se integreze ecuațiile diferențiale ale lui Riccati:

a) $y' + y^2 = 1 + x^2$, $y_1(x) = x$; b) $y' + y^2 \sin x = \frac{2 \sin x}{\cos^2 x}$, $y_1(x) = \frac{1}{\cos x}$, $y(0) = -2$.

Rezolvare. a) Substituția $y = x + z^{-1}$ implică $y' = 1 - z^{-2}z'$, astfel că ecuația transformată este $z' - 2xz = 1$. Soluția acestei ecuații liniare este $z(x) = e^{x^2} (C + \int e^{-x^2} dx)$. Deci soluția generală a ecuației este $y = x + e^{-x^2} (C + \int e^{-x^2} dx)^{-1}$.

b) Substituția $y = \frac{1}{\cos x} + z^{-1}$ conduce la ecuația liniară $z' - 2 \operatorname{tg} x \cdot z = \sin x$. Soluția generală a acestei ecuații diferențiale liniare este $z(x) = \frac{C}{\cos^2 x} - \frac{\cos x}{3}$. Deci soluția generală a ecuației

este $y = \frac{1}{\cos x} + \frac{3 \cos^2 x}{3C - \cos^3 x}$. Din condiția inițială rezultă că $C = 0$ și deci soluția particulară căutată este $y = -\frac{2}{\cos x}$.

12. Să se afle cea de-a treia aproximație pentru soluția ecuației diferențiale $y' = x^2 + y^2$, în dreptunghiul $|x| \leq \frac{1}{2}$, $|y| \leq \frac{3}{2}$, cu condiția inițială, $y(0) = 0$.

Rezolvare. Deoarece $f(x, y) = x^2 + y^2$ este un polinom în x și y , condițiile teoremei de existență și unicitate sînt îndeplinite. Deci există o singură curbă integrală a ecuației diferențiale ce trece prin origine. Deoarece $|f(x, y) - f(x, \bar{y})| = |y^2 - \bar{y}^2| = |y + \bar{y}| |y - \bar{y}| \leq 3 |y - \bar{y}|$, pentru $|y| \leq \frac{3}{2}$ și $|\bar{y}| \leq \frac{3}{2}$, rezultă că în relația β) avem $K = 3$. Deoarece $|f(x, y)| \leq \frac{5}{2}$ rezultă că $M = \frac{5}{2}$ și deci $h = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right) = \frac{1}{2}$. Prin urmare, existența și unicitatea soluției ecuației este asigurată pe intervalul $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. După metoda aproximațiilor succesive, avem pentru $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$y_0(x) = 0; \quad y_1(x) = \int_0^x f(x, y_0(x)) dx = \int_0^x x^2 dx = \frac{x^3}{3};$$

$$y_2(x) = \int_0^x \left(x^2 + \frac{x^6}{9}\right) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}; \quad y_3(x) = \int_0^x \left[x^2 + \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}\right)^2\right] dx \Rightarrow$$

$$y_3(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535}.$$

Ținînd seama că eroarea de aproximație este $|y(x) - y_n(x)| \leq MK^n \frac{1}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}$, $|x - x_0| \leq h$, rezultă că pentru exercițiul considerat eroarea este

$$|y(x) - y_3(x)| \leq \frac{5}{2} \cdot 3^3 \cdot \frac{x^4}{4!} = \frac{135}{48} x^4, \quad |x| \leq \frac{1}{2}.$$

Deci eroarea maximă pe care o facem înlocuind pe $y(x)$ cu $y_3(x)$ este $|y(x) - y_3(x)| \leq \frac{135}{48} \cdot \frac{1}{2^4} \approx 0,18$.

13. Să se integreze ecuația $(1 + y^2) dx = (\sqrt{1 + y^2} \sin y - xy) dy$.

Rezolvare. Se observă că ecuația este liniară în x și dx . Schimbînd rolul lui x cu y , scriem ecuația în funcția x ca variabilă dependentă

$$x' + \frac{y}{1 + y^2} x = \frac{\sin y}{\sqrt{1 + y^2}}, \quad x = e^{-\int \frac{y}{1 + y^2} dy} \left(C + \int \frac{\sin y}{\sqrt{1 + y^2}} e^{\int \frac{y}{1 + y^2} dy} dy \right).$$

Deci $x = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}} (C - \cos y)$ reprezintă soluția generală a ecuației.

14. Să se integreze ecuațiile:

a) $y = y'^2 + 2y'^3$; b) $y = \frac{1}{2} xy' + \frac{1}{x^2} y'^2$; c) $x = \frac{\sqrt{y}}{y'} - \frac{2y}{y'}$.

Rezolvare. a) Notînd $y = p(x)$, din ecuație rezultă că $y = p^2 + 2p^3$. Derivînd această ecuație și ținînd seama de notația făcută, obținem $p = (2p + 6p^2) \frac{dp}{dx}$ sau $dx = (2 + 6p) dp$. Prin urmare, obținem $x = 2p + 3p^2 + C$ și $y = p^2 + 2p^3$. Soluția este obținută sub formă parametrică.

b) Ecuația este de forma (24). Făcînd substituția $y' = p(x)$, obținem $y = \frac{1}{2} xp + \frac{1}{x^2} p^2$. Prin derivare rezultă

$$p = \frac{1}{2} p - \frac{2}{x^3} \cdot p^2 + \left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x^2} \cdot p\right) \frac{dp}{dx} \text{ sau } (x^3 + 4p)(x dp - p dx) = 0.$$

Dacă $x dp - p dx = 0$, atunci $\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}$, $p = Cx$ și soluția generală este $y = \frac{1}{2} Cx^2 + C^2$.

Pentru $x^3 + 4p = 0$ obținem soluția singulară $x = (-4p)^{1/3}$, $y = (2^{-4/3} - 2^{-1/3})p^{4/3}$.

c) Ecuația este de forma dată la punctul 9. Notăm deci $y' = p(y)$, astfel că $x = y^{1/2}p^{-1} - 2yp^{-1}$. Derivând această ecuație în raport cu y și ținând seama că $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p}$, obținem ecuația diferențială cu variabile separabile

$$\frac{6\sqrt{y} - 1}{2\sqrt{y}(2y - \sqrt{y})} dy = \frac{dp}{p}, \text{ cu } u(2u - 1)^2 = Cp, \text{ cu } u = \sqrt{y}.$$

Deci $\sqrt{y}(2\sqrt{y} - 1)^2 = Cp$. Înlocuind p cu relația ce exprimă ecuația, obținem

$$x = (y^{1/2} - 2y)Cy^{-1/2}(2\sqrt{y} - 1)^{-2} \text{ sau } (x - C)^2 = 4x^2y.$$

15. Să se integreze ecuațiile diferențiale:

a) $y = xy'^2 + y'^2$; b) $y = x\left(\frac{y'}{2} + \frac{2}{y'}\right)$; c) $y = xy' + y'^2$;

d) $y = xy' + \sqrt{1 + y'^2}$.

Rezolvare. Ecuațiile a) și b) sînt de tip Lagrange, iar ecuațiile c) și d) de tip Clairaut.

a) Notînd $y = p(x)$, rezultă $y = xp^2 + p^2$. Derivînd în raport cu x , obținem

$$p = p^2 + (2xp + 2p) \frac{dp}{dx}, (p - p^2) \frac{dx}{dp} = 2px + 2p, \frac{dx}{dp} + \frac{2}{p-1}x = \frac{2}{1-p},$$

$$x = \frac{C}{(p-1)^2} - 1 \text{ și } y = \frac{Cp^2}{(p-1)^2}.$$

b) $y' = p(x)$, $y = x\left(\frac{p}{2} + \frac{2}{p}\right)$, $p = \frac{p}{2} + \frac{2}{p} + x \frac{dp}{dx} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{p^2}\right)$, $\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}$, $p = xC$ și deci $y = \frac{1}{2} Cx^2 + \frac{2}{C}$.

c) $y' = p(x) \Rightarrow y = xp + p^2 \Rightarrow p = p + \frac{dp}{dx}(x + 2p) \Leftrightarrow \frac{dp}{dx}(x + 2p) = 0$. Soluția generală este $y = Cx + C^2$, iar soluția singulară este $x = -2p$, $y = -p^2$ sau $y = -\frac{x^2}{4}$.

d) $y' = p(x) \Rightarrow y = xp + \sqrt{1 + p^2} \Rightarrow p = p + \left(x + \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\right) \frac{dp}{dx}$ sau $\frac{dp}{dx} \left(x + \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\right) = 0$.

Deci soluția generală este $y = xC + \sqrt{1 + C^2}$, iar soluția singulară este $x = -\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}$,

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}} \text{ sau } x^2 + y^2 = 1.$$

16. Fie $y_1(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x$. Să se formeze ecuația diferențială liniară de ordinul întâi verificată de y_1 și să se deducă dezvoltarea în serie de puteri a funcției y_1 , apoi a funcției $z(x) = (\arcsin x)^2$.

Rezolvare. Trebuie să determinăm o relație între funcție și derivata sa. Deoarece $y_1 \sqrt{1-x^2} = \arcsin x$, prin derivare obținem

$$y_1' \sqrt{1-x^2} + y_1 \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ sau } (1-x^2)y_1' - xy_1 = 1.$$

Deci $y_1(x)$ este soluție particulară pentru ecuația $(1-x^2)y' - xy = 1$, cu condiția inițială $y(0) = 0$.

Căutăm soluția acestei ecuații de forma $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. Înlocuind în ecuație, se obține

$$a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)a_{n+1} - na_{n-1}]x^n = 1.$$

Prin urmare, rezultă $a_1 = 1$, $(n+1)a_{n+1} = na_{n-1}$, $n \geq 1$. Deoarece $a_0 = 0$, rezultă că $a_{2k} = 0$,

$$a_{2k+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2k}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k+1)} = \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}, \text{ și deci}$$

$$y_1(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

Mulțimea de convergență a acestei serii de puteri este $(-1, 1)$. Integrând-o pe intervalul $(0, x)$, cu $x \in (-1, 1)$, obținem

$$z(x) = (\arcsin x)^2 = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+2)!} x^{2k+2}, \quad x \in (-1, 1).$$

12.1.2. Probleme propuse spre rezolvare

17. Să se determine legea de variație a presiunii atmosferice cu înălțimea.

18. Să se formeze ecuațiile diferențiale ale familiilor de curbe:

a) $y = Cx^3 + x^4 \sin x$; b) $y = C \sin 2x + \sin^3 x$; c) $y = \frac{2C + 3x^2}{2Cx + x^3}$.

19. Să se determine curba care trece prin punctul $M\left(1, \frac{1}{3}\right)$, știind că panta tangentei la curbă în punctul curent este de două ori mai mare decât panta razei vectoare a punctului de tangență.

20. Să se integreze următoarele ecuații diferențiale cu variabile separabile:

a) $\frac{dy}{1+y^2} + \frac{dx}{1+x^2} = 0$; b) $2yy' = \frac{e^x}{e^x + 1}$, $y(1) = 1$;

c) $(1+x^2)dy = \sqrt{1-y^2}dx$; d) $y' = \sqrt{xy}$, $y(0) = 1$;

e) $\operatorname{tg} x \sin^2 y dx + \cos^2 x \operatorname{ctg} y dy = 0$; f) $xy' - y = y^3$;

g) $3e^x \operatorname{tg} y dx + (1 - e^x) \sec^2 y dy = 0$; h) $y' \sin x = y \ln y$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$;

i) $(xy^2 + x)dx + (x^2y - y)dy = 0$, $y(0) = 1$; j) $y' \sin 2x + \sin 2y = 0$;

k) $xy' \cos y + \sin y = 0$; l) $(y^2 + xy^2)dx + (x^2 - yx^2)dy = 0$.

21. Să se integreze următoarele ecuații diferențiale omogene:

a) $y' = \frac{x+y}{x-y}$; b) $y' = \frac{y}{x} + e^{y/x}$; c) $y' = \frac{y}{x} - 1$; d) $(x-y)y dx - x^2 dy = 0$;

e) $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$; f) $2xyy' = x^2 + 3y^2$; g) $2x^2y' = 4xy - y^2$, $y(1) = 1$;

h) $(3x^2 - y^2)dy = 2xy dx$, $y(0) = 1$; i) $2xy dx + (x^2 + y^2)dy = 0$; $y(1) = 3$;

j) $2x^3 dy = (y^3 + x^2y) dx$; k) $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$;

l) $(1 + 2e^{x/y})dx + 2e^{x/y}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0$, $y(0) = 1$.

22. Să se integreze ecuațiile diferențiale următoare, reducându-le mai întâi la ecuații omogene :

a) $y' = \frac{x-y}{y}$; b) $y' = -\frac{10x+8y}{7x+5y}$; c) $y' = \frac{3x-4y+7}{4x-5y+11}$;
 d) $y' = \frac{2(y+2)^2}{(x+y-1)^2}$; e) $y' = \frac{-x+2y-5}{2x-y+4}$; f) $y' = \frac{x+2y+1}{2x+4y+3}$;
 g) $y' = \frac{2x-y+1}{x-2y-1}$; h) $(2y+x+1)y' - (2y+x-1) = 0$.

23. Să se integreze ecuațiile cu diferențială totală :

a) $(x+y) dx + x dy = 0, y(0) = 0$;
 b) $(y e^{xy} - 4xy) dx + (x e^{xy} - 2x^2) dy = 0$;
 c) $(2x-y+1) dx + (2y-x-1) dy = 0, y(1) = 1$;
 d) $(y^2 - 3x^2) dx + 2xy dy = 0, y(0) = 1$;
 e) $(2y^2 - 4y + x) dx + (4xy - 4x) dy = 0$;
 f) $(x^2 + y^2 + 2x) dx + 2xy dy = 0$;
 g) $(x^3 - 3xy^2 + 2) dx - (3x^2y - y^2) dy = 0$;
 h) $\frac{2x}{y^3} dx + \frac{1}{y^4} (y^2 - 3x^2) dy = 0$;
 i) $(x + e^{x/y}) dx + e^{x/y} \left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0, y(0) = 2$.

24. Determinând mai întâi un factor integrant, să se integreze ecuațiile diferențiale :

a) $2xy dx + dy = 0$; b) $(1 - x^2y) dx + x^2(y-x) dy = 0$;
 c) $(x^2 - 3y^2) dx + 2xy dy = 0$; d) $-(\cos x \sin y + \operatorname{tg}^2 x) dx + \sin x \cos y dy = 0$;
 e) $(x^2y + y^2 + 2xy) dx + (x^2 + x)(x + 2y) dy = 0$; f) $(x^2 - 5x + 6) dy + (3xy - 8y + x^2) dx = 0$; g) $(x^2 + y^2 + 2x) dx + 2y dy = 0$;
 h) $y(1 + xy) dx - x dy = 0$; i) $2xy dx + (3y^2 - x^2 + 3) dy = 0$;
 j) $\frac{y}{x} dx + (y^3 - \ln x) dy = 0$; k) $(x + y^2) dx - 2xy dy = 0$.

25. Căutând un factor integrant de forma $m(x, y) = u(u(x, y))$, să se integreze ecuațiile diferențiale următoare :

a) $(y + x^3y^2) dx + (x + x^2y^3) dy = 0, u(x, y) = xy$;
 b) $(x^2y^3 + y) dx + (x^3y^2 - x) dy = 0, u(x, y) = xy$;
 c) $(y^2 - x^2 + 2xy) dx + (y^2 - x^2 - 2xy) dy = 0, u(x, y) = x^2 + y^2$;
 d) $(2x^3 + 3x^2y + y^2 - y^3) dx + (2y^3 + 3xy^2 + x^2 - x^3) dy = 0, u(x, y) = x + y$.

26. Să se integreze următoarele ecuații diferențiale de ordinul întâi liniare :

a) $y' - \frac{y}{x} = x$; b) $y' + \frac{2}{x}y = x^3$; c) $y^2 dx - (2xy + 3) dy = 0$;
 d) $y' + \frac{1}{x^2-1}y = 1 + x, y(0) = 0$; e) $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}, y(0) = 0$;

- f) $y' - y = -x^2$, $y(0) = 2$; g) $(1 - x^2)y' + 2xy = 4x$, $y'(0) = 3$;
 h) $y' - y = -\ln x$, $x > 0$; $y(1) = 1$; i) $y' + y = 2e^x$; j) $y' + 3y = e^{2x}$;
 k) $y' \cos x + y \sin x = 1$; l) $y' - \frac{x}{x^2 - 1}y = x$.

27. Să se integreze următoarele ecuații diferențiale Bernoulli:

- a) $y' - \frac{1}{x}y = -2xy^2$, $y(1) = 1$; b) $2x^2y' - 4xy = y^2$, $y(1) = 1$;
 c) $2xy' - y = -\frac{x}{y}$; d) $y dx + \left(x - \frac{1}{2}x^2y\right)dy = 0$;
 e) $3x dy = y(1 + x \sin x - 3y^3 \sin x) dx$; f) $(x^2y^3 + xy)y' = 1$;
 g) $y' - \frac{1}{2x}y = \frac{x^2}{2y}$; h) $y' + 2y = 2x\sqrt{y}$; i) $xyy' - y^2 + ax^3 \cos x = 0$.

28. Să se integreze ecuațiile diferențiale Riccati:

- a) $y' = y^2 - x^2 + 1$, $y_1(x) = x$; b) $y' - \frac{1}{3}y^2 - \frac{2}{3x^2} = 0$; $y_1(x) = -\frac{1}{x}$;
 c) $y' - y^2 + y \operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos^2 x} = 0$, $y_1(x) = \operatorname{tg} x$;
 d) $y' = \frac{x}{2}y^2 - \frac{2}{x}y - \frac{1}{2x^2}$; $y_1(x) = \frac{1}{x^2}$; e) $y' + y^2 - \frac{2}{x}y + \frac{2}{x^2} = 0$, $y_1(x) = \frac{2}{x}$;
 f) $(1 + x^2)y' - 4xy^2 - 2x(4x^2 + 3)y - 4x^2(1 + x^2) = 0$, $y_1(x) = -1 - x^2$.

29. Căutând soluții particulare de forma indicată, să se integreze următoarele ecuații diferențiale:

- a) $y' + y^2 + \frac{4}{x}y + \frac{2}{x^2} = 0$, $y_1(x) = \frac{a}{x}$;
 b) $(1 + x^3)y' - y^2 - x^2y - 2x = 0$, $y_1(x) = ax^n$, $n \in \mathbb{N}$;
 c) $y' - xy^2 + 2x^2y - x^3 - 1 = 0$, $y_1(x) = ax + b$;
 d) $y' + \frac{1}{x^2}y^2 - \frac{3}{x}y - x^4 = 0$, $y_1(x) = ax^3$.

30. Să se afle cea de-a treia aproximație pentru soluția ecuației diferențiale $y' = xy$, $y(0) = 1$, pentru $|x| \leq \frac{1}{2}$, $|y - 1| \leq 1$.

31. Să se integreze ecuațiile Clairaut:

- a) $y = xy' + y'^3$; b) $y = xy' + \frac{1}{y^2}$; c) $y = xy' - a(1 + y'^2)$;
 d) $y = xy' + \frac{ay'}{\sqrt{1 + y'^2}}$; e) $y = xy' + \cos y'$; f) $y = xy' + ay'(1 - y')$.

32. Să se integreze ecuațiile Lagrange:

- a) $y = (1 + y')x + y'^2$; b) $y = -xy' - \frac{1}{2}y'^2$; c) $y = -x + \left(\frac{y' + 1}{y' - 1}\right)^2$;
 d) $y = -\frac{x}{y' - 2}$; e) $y = 2xy' - y'^2$; f) $y = \frac{1}{2}xy' + \frac{a}{2y'}$.

33. Să se

a) $y = -$

d) $x = \sin$

34. Aplica

a) $y' = x$

c) $y' = 2y$

35. Să se

a) $\left(x - y$

c) $x dx -$

e) $y' -$

g) $y'(x +$

j) $y'(x \cos$

l) $(3x^2 +$

m) $\operatorname{tg} x -$

p) $y = x$

36. Să se

a) $y = y$

37. Func
 calculeze, fo
 tării funcție

1. Se nu

cu F dat și C
 Problema
 ției ei, $y = g$

2. Ecuații
 succesive. La

20 - Proble

33. Să se integreze ecuațiile diferențiale

- a) $y = -\frac{1}{3}(xy' + x^2 + y'^2)$; b) $x = \frac{1}{y'}y + y'^n$; c) $y = xy'^2 + 2xy'$;
 d) $x = \sin y' + \ln y'$; e) $y = (x^2 + y'^2)/4$; f) $x = \ln(y^2 + y'^2) - \ln 2y'$.

34. Aplicând metoda seriilor de puteri, să se integreze ecuațiile diferențiale:

- a) $y' = x + y$, $y(0) = 1$; b) $y' = y + x^2$, $y(0) = -2$;
 c) $y' = 2y + x - 1$, $y(1) = -\frac{1}{4}$; d) $y' + y = e^{-x}$, $y(0) = 1$.

35. Să se integreze ecuațiile diferențiale:

- a) $(x - y \cos \frac{y}{x}) dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0$; b) $y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}$;
 c) $x dx - (\frac{x^2}{y} - y^3) dy = 0$; d) $x^2(y + 1) dx + (x^3 - 1)(y - 1) dy = 0$;
 e) $y' - (\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2})y = 1$; f) $2(y + 2)^2 dx - (x + y - 1)^2 dy = 0$;
 g) $y'(x + \sin y) = 1$; h) $y' = \frac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x)$; i) $yy' + y^2 = \cos x$;
 j) $y'(x \cos y + a \sin 2y) = 1$; k) $xy(xy^2 + 1) dy - dx = 0$;
 l) $(3x^2 + 2xy - y^2) dx + (x^2 - 2xy - 3y^2) dy = 0$;
 m) $\operatorname{tg} x \cdot y' - y = a$; n) $x dy - y dx = y^2 dx$; o) $y = y' + y'^3$;
 p) $y = xy' + \frac{a}{y^2}$; q) $y = y'^2 \sin y'$.

36. Să se integreze prin metoda seriilor de puteri:

- a) $y = y' + (x - 1)^2$; b) $x^2y' + (x - 1)y + 1 = 0$; c) $(1 - x)y' = y$, $y(0) = 1$.

37. Funcția $y = \operatorname{tg} x$ este soluție a ecuației diferențiale $y' = 1 + y^2$. Să se calculeze, folosind metoda seriei Taylor, primii cinci coeficienți nenuli ai dezvoltării funcției $\operatorname{tg} x$, după puterile lui x , în vecinătatea originii.

12.2. Ecuații diferențiale de ordin superior rezolvabile prin cuadraturi

1. Se numește ecuație diferențială de ordinul n o ecuație de forma

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1)$$

cu F dat și definit într-un domeniu din \mathbb{R}^{n+2} .

Problema lui Cauchy pentru ecuația diferențială (1) de ordinul n , înseamnă determinarea soluției ei, $y = g(x)$, care verifică condițiile inițiale

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, x_0 \in [a, b]. \quad (2)$$

2. Ecuații diferențiale de forma $y^{(n)} = f(x)$, $n > 1$. Se determină soluția prin n integrări succesive. La o astfel de ecuație se reduce și ecuația de tipul

$$F(x, y^{(n)}) = 0. \quad (3)$$

Dacă se cunoaște o reprezentare parametrică a curbei $F(u, v) = 0$, de forma $u = \varphi(t)$, $v = \psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, unde φ , ψ și φ' sînt continue, atunci soluția generală a ecuației (3) se obține sub forma parametrică

$$x = \varphi(t); \quad dy^{(n-1)} = y^{(n)} dx = \psi(t)\varphi'(t) dt \Rightarrow y^{(n-1)}(t) = h_1(t, C_1), \dots, y(t) = h_n(t, C_1, \dots, C_n).$$

3. Ecuații diferențiale de forma

$$F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0.$$

Dacă se cunoaște reprezentarea parametrică a curbei $F(u, v) = 0$, atunci soluția generală se determină sub forma parametrică

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt + C; \quad y^{(n-1)} = \varphi(t); \quad dy^{(n-2)} = \varphi(t) dx = \frac{\varphi(t)\varphi'(t)}{\psi(t)} dt \Rightarrow y^{(n-2)}(t) = \int \frac{\varphi\varphi'}{\psi} dt + C_2, \dots, y = \int y' dx + C_n.$$

4. Ecuații diferențiale de forma

$$F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0.$$

Dacă se cunoaște o reprezentare parametrică pentru curba $F(u, v) = 0$, atunci $y^{(n-2)} = \varphi(t)$ și $y^{(n)} = \psi(t)$ și din

$$\frac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)}} = \frac{dy^{(n-2)}}{y^{(n-1)}} \text{ rezultă } [y^{(n-1)}]^2 = 2 \int \psi(t)\varphi'(t) dt + C_1.$$

Problema se reduce la cazul 3.

5. Ecuații diferențiale de forma

$$F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Prin schimbarea de funcție

$$y^{(k)}(x) = z(x),$$

se obține ecuația $F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0$, de ordinul $n - k$.

6. Ecuațiile diferențiale de forma

$$F(y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

se integrează notînd $y' = p$ și luînd p drept variabilă independentă.

7. Ecuațiile diferențiale de forma

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0;$$

se integrează notînd $y' = p$ și luînd p drept funcție și y ca variabilă independentă.

8. Ecuații diferențiale omogene în $y, y', \dots, y^{(n)}$

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

admit micșorarea ordinului cu o unitate dacă punem

$$z(x) = \frac{y'}{y} \text{ sau } y = e^{\int z(x) dx}.$$

1. Să se

a) $y'' =$

c) $x + y$

Rezoluare.

b) Proced

rezultă

$y'' =$

Din condițiile

c) Notînd

$dy' = t dx =$

$+ C_1 \int (e^t - 1)$

2. Să se

a) $y''' =$

Rezoluare

și $dy' = dt,$

$= -\ln t + C_1$

Deoarece

astfel că

b) Notînd

$= -t^2 dy' =$

$1 = 1 + C_1,$

Din condițiile

12.2.1. Probleme rezolvate

1. Să se integreze ecuațiile diferențiale:

a) $y'' = x + \sin x$; b) $y''' = -6 \cdot \frac{3x+10}{(x+2)^5}$, $y(0) = \frac{27}{4}$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = \frac{9}{8}$;

c) $x + y'' - e^{y''} = 0$.

Rezolvare. a) Integrăm de două ori succesiv și obținem

$$y' = \frac{x^2}{2} - \cos x + C_1, \quad y = \frac{x^3}{6} - \sin x + C_1 x + C_2.$$

b) Procedînd similar, dar ținînd seama că

$$y''' = -\frac{18}{(x+2)^4} - \frac{24}{(x+2)^5} = -18(x+2)^{-4} - 24(x+2)^{-5},$$

rezultă

$$y'' = 6(x+2)^{-3} + 6(x+2)^{-4} + C_1, \quad y' = -3(x+2)^{-2} - 2(x+2)^{-3} + C_1 x + C_2,$$

$$y = 3(x+2)^{-1} + (x+2)^{-2} + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

Din condițiile inițiale obținem $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, $C_3 = 5$, astfel că

$$y(x) = 3(x+2)^{-1} + (x+2)^{-2} + x + 5.$$

c) Notînd $y'' = t$, avem reprezentarea parametrică $x = e^t - t$, $y'' = t$. Deoarece $y'' = t$, rezultă $dy' = t dx = t(e^t - 1) dt$ și deci $y' = -\frac{1}{2} t^2 + (t-1)e^t + C_1$. Apoi $dy = \left[-\frac{1}{2} t^2 + (t-1)e^t + C_1 \right] (e^t - 1) dt$ și deci $x = e^t - t$,

$$y = e^{2t} \left(\frac{1}{2} t - \frac{3}{4} \right) + e^t \left(-\frac{1}{2} t^2 + 1 + C_1 \right) + \frac{1}{6} t^3 - C_1 t + C_2.$$

2. Să se integreze

a) $y''' = -y'''$; b) $y'' = -y^{-3}$, $y(2) = 1$, $y'(2) = 1$; c) $y'''' + y''' = 1$.

Rezolvare. a) Punînd $y'' = t$, obținem reprezentarea $y'' = t$, $y''' = -t^2$. Deoarece $dy'' = y''' dx$ și $dy'' = dt$, rezultă $dx = -t^{-2} dt$ și $x = t^{-1} + C_1$. Apoi $dy' = y'' dx = -t^{-1} dt$ implică $y' = -\ln t + C_2$.

Deoarece $dy = y' dx$, rezultă $dy = -(-\ln t + C_2)t^{-2} dt$ și deci $y = \int (t^{-2} \ln t - C_2 t^{-2}) dt + C_3$, astfel că

$$x(t) = t^{-1} + C_1, \quad y(t) = -\frac{1}{t} \ln t - \frac{1}{t} + \frac{C_2}{t} + C_3.$$

b) Notînd $y = t$, rezultă că $y'' = -t^{-3}$, astfel că $dy' = -t^{-3} dx$ și $dy = y' dx$. Deci $dx = -t^3 dy' = \frac{dt}{y'}$, de unde $y' dy' = -t^{-3} dt$. Apoi $(y')^2 = t^{-2} + C_1$. Din condițiile inițiale rezultă $1 = 1 + C_1$, $C_1 = 0$ și deci $y' = t^{-1}$. Prin urmare, $dy = t^{-1} dx$ sau $dx = t dt$, de unde $x = \frac{t^2}{2} + C_2$.

Din condițiile inițiale rezultă $2 = \frac{1}{2} + C_2$ și $C_2 = \frac{3}{2}$. Deci soluția este

$$x = \frac{t^2}{2} + \frac{3}{2}, \quad y = t \text{ sau } x = \frac{1}{2} y^2 + \frac{3}{2}.$$

c) Curba de ecuație $u^2 + v^2 = 1$ are reprezentarea $u = \cos t$, $v = \sin t$. Deci $y''' = \cos t$, $y'' = \sin t$ și $dy'' = y''' dx$, deci $\cos t dt = \cos t dx$ și $x = t + C_1$. Apoi $dy' = y'' dx$, $dy' = \sin t dt$, $y' = -\cos t + C_2$. Deoarece $dy = y' dx$, rezultă $dy = (-\cos t + C_2) dt$ și

$$x = t + C_1, y = -\sin t + C_2 t + C_3.$$

3. Să se integreze ecuațiile diferențiale:

a) $y'' - 2y' \operatorname{ctg} x = \sin^3 x$; b) $y''(1 + y') - 3y'y''^2 = 0$.

Rezolvare. a) Punind $y' = z(x)$, obținem o ecuație diferențială liniară $z' - 2z \operatorname{ctg} x = \sin^3 x$ cu soluția $y'(x) = z = C_1 \sin^2 x - \sin^2 x \cos x$. Deci $y(x) = \frac{C_1}{4} (2x - \sin 2x) - \frac{1}{3} \sin^3 x + C_2$.

b) Notăm $y'(x) = f(x)$ și obținem $f''(1 + f^2) - 3f(f')^2 = 0$. Dacă acum notăm $f' = z(p)$, rezultă $f'' = z' p' = z' z$ și deci $\frac{dz}{z} = \frac{3p}{1 + p^2} dp$, de unde $\ln |z| = \frac{3}{2} \ln(1 + p^2) + \ln C_1$, deci $z = (1 + p^2)^{3/2} C_1$, $\frac{dp}{dx} = (1 + p^2)^{3/2} C_1$, $(1 + p^2)^{-3/2} dp = C_1 dx$, iar $\sin(\operatorname{arctg} p) = C_1 x + C_2$. Deci $y' = p = \operatorname{tg}(\arcsin(C_1 x + C_2))$. Folosind relația $dy = y' dx$, obținem $dy = p dx = \frac{p}{C_1} (1 + p^2)^{-3/2} dp$, de unde $y = -\frac{1}{C_1} (1 + p^2)^{-1/2} + C_3$ și $x = \frac{1}{C_1} \sin(\operatorname{arctg} p) - \frac{C_2}{C_1}$.

4. Să se integreze ecuațiile:

a) $y'' + y' = 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = \sqrt{2}$; b) $y'' = 2yy'$.

Rezolvare. a) Notăm $y' = p$ și $y'' = 1 - p^2$. Din relația $dy' = y'' dx$ rezultă $dx = \frac{dp}{1 - p^2}$ și deci $x = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{p+1}{p-1} \right| + C_1$. Apoi, din relația $dy = y' dx$, rezultă $dy = \frac{p dp}{1 - p^2}$, astfel că

$$y = -\frac{1}{2} \ln |1 - p^2| + C_2 \text{ și } x = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{p+1}{p-1} \right| + C_1.$$

Din condițiile inițiale se obține $p = \sqrt{2}$, care implică $y(p = \sqrt{2}) = 0$, $x(p = \sqrt{2}) = 0$, astfel că $C_1 = -\ln(1 + \sqrt{2})$, $C_2 = 0$. Deci soluția căutată este

$$y = -\frac{1}{2} \ln |1 - p^2|, x = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{p+1}{p-1} \right| + \ln(1 + \sqrt{2}).$$

b) Notăm $y' = p(y)$ astfel că $y'' = p' p$. Ecuația devine

$$p \frac{dp}{dy} = 2yp, \text{ de unde } dp = 2y dy, \text{ deci } p = y^2 + C, \text{ sau } p = 0.$$

De aici obținem $\frac{dy}{dx} = y^2 + C_1$, $\frac{1}{\sqrt{C_1}} \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{C_1}} = x + C_2$, pentru $C_1 > 0$ și $\frac{1}{2\sqrt{-C_1}} \ln \left| \frac{y - \sqrt{-C_1}}{y + \sqrt{-C_1}} \right| = x + C_2$, pentru $C_1 < 0$. Dacă $C_1 = 0$ obținem $y(x) = \frac{-1}{x + C_2}$. Dacă $p = 0$, atunci $y = C_3$.

12.2.2. Probleme propuse spre rezolvare

5. Să se integreze ecuațiile diferențiale:

a) $y'' = \frac{1}{x}$; b) $y'' = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2}$; c) $y''' = \ln x$, $x \geq 1$, $y(1) = y'(1) = y''(1) = 0$;

d) $y''' = \frac{\sin 2x}{\sin^4 x}$; e) $y'' = -(1 + \operatorname{tg}^2 x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

6. Să se integreze

a) $y'' = -\sqrt{1 - y'}$

d) $y'' = 1 - (y')$

7. Să se integreze

a) $(1 + x^2)y'' =$

c) $y'' - xy''' =$

e) $1 + (y')^2 = 2$

g) $xy'' = y'$, $y(0)$

8. Să se integreze

a) $1 + (y')^2 = 2$

d) $2y' = y''(y -$

9. Să se integreze

a) $xyy'' + x(y'$

+ $y'\sqrt{y^2 +$

10. Să se integreze

a) $y'' - (y')^2 =$

$y(0) = y'(0)$

d) $2y' + y'' =$

f) $y' = xy''$

12.3.

I. Ecuații diferențiale

unde $a_i(x)$, $x \in [a, b]$,
ordinul n , omogenă.

1. Dacă $y_1, y_2,$

$C_i, i = 1, 2, \dots$

Deci $y''' = \cos t$ și
 $y'' dx, dy' = \sin t dt,$

$-2x \cot x = \sin^2 x$ cu
 $\sin^2 x + C_2.$

am notăm $p' = z(p),$
 $(1+p') + \ln C_1,$ deci

$z(p) = C_1 z + C_2.$ Deci

$= \frac{p}{C_1} (1+p^2)^{-1/2} dp,$

ultă $dx = \frac{dp}{1-p^2}$ și

$\frac{dp}{p^2},$ astfel că

$(p \geq \sqrt{2}) = 0,$ astfel

0.

$\frac{1}{-C_1} \ln \left| \frac{y - \sqrt{-C_1}}{y + \sqrt{-C_1}} \right| =$

atunci $y = C_3.$

$(1) = y''(1) = 0;$

6. Să se integreze ecuațiile diferențiale:

a) $y'' = -\sqrt{1 - (y')^2};$ b) $y''' = \sqrt{1 + y^{(2)2}};$ c) $y'' = \frac{1}{4} y^{-1/2};$

d) $y'' = 1 - (y')^2;$ e) $y'' y^3 = 1, y\left(\frac{1}{2}\right) = y'\left(\frac{1}{2}\right) = 1;$ f) $y'(1 + (y')^2) = a y''.$

7. Să se integreze ecuațiile diferențiale:

a) $(1 + x^2)y'' = 2xy';$ b) $xy'' - \frac{1}{4}(y''')^2 - y' = 0, y(0) = 0, y'(0) = -1;$

c) $y'' - xy''' + (y''')^3 = 0;$ d) $xy^{(4)} - 3y''' - 4x^2 = 0;$

e) $1 + (y')^2 = 2yy'', y(1) = y'(1) = 1;$ f) $yy'' + y' = y', y(0) = y'(0) = 1;$

g) $xy'' = y', y(0) = y'(0) = 0;$ h) $xy'' = \sqrt{1 + (y')^2}, y(1) = 0, y(e^2) = 1.$

8. Să se integreze ecuațiile diferențiale:

a) $1 + (y')^2 = 2yy'';$ b) $y'' - \frac{1}{y}(y')^2 - yy' = 0;$ c) $y'' - yy'' = y^2 y';$

d) $2y' = y''(y-1), y(2) = 2, y'(2) = -1;$ e) $yy'' + y' = 1, y(0) = y'(0) = 1.$

9. Să se integreze ecuațiile omogene în $y, y', y'':$

a) $xyy'' + x(y')^2 - yy' = 0;$ b) $x^2yy'' = (y - xy')^2;$ c) $yy'' = (y')^2 + y'\sqrt{y^2 + (y')^2}.$

10. Să se integreze:

a) $y'' - (y')^2 + y'(y-1) = 0, y(0) = y'(0) = 2;$ b) $y^2 + (y')^2 - 2yy'' = 0,$

$y(0) = y'(0) = 1;$ c) $y'' = (y')^2 - y, y(1) = -\frac{1}{4}, y'(1) = \frac{1}{2};$

d) $2y' + y''[(y')^2 - 6x] = 0, y(2) = 0, y'(2) = 2;$ e) $(y^{(3)})^2 = 4y^{(2)};$

f) $y' = xy'' + y'' - (y'')^2;$ g) $y' = x(y'')^2 + (y'')^2.$

12.3. Ecuații diferențiale liniare de ordin superior

I. Ecuații diferențiale liniare de ordinul n cu coeficienți variabili. Fie.

$$Ly \equiv a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y, a_0(x) \neq 0, \quad (1)$$

unde $a_i(x), x \in [a, b], i = 0, 1, \dots, n,$ sînt funcții continue date. Ecuația diferențială liniară de ordinul $n,$ omogenă, are forma

$$Ly = 0. \quad (2)$$

1. Dacă y_1, y_2, \dots, y_n este un sistem fundamental de soluții pentru (2), atunci

$$y^o = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n, \quad (3)$$

$C_i, i = 1, 2, \dots, n,$ fiind constante arbitrare, reprezintă soluția generală a ecuației omogene (2).

Ecuția omogenă, care admite sistemul fundamental de soluții y_1, y_2, \dots, y_n , este

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n, y) = 0, \quad (1)$$

unde

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

reprezintă wronskianul sistemului de funcții y_1, y_2, \dots, y_n .

Dacă se cunoaște o soluție particulară a ecuației omogene (2), fie aceasta $y_1(x)$, atunci prin schimbarea de funcție

$$y(x) = y_1(x) \cdot z(x) \quad (5)$$

se obține o ecuație în necunoscuta z , cu ordinul micșorat cu o unitate.

2. Soluția generală a ecuației diferențiale neomogene

$$Ly = f(x), \text{ cu } f(x) \text{ continuă,} \quad (6)$$

este

$$y = y^o + \bar{y}, \quad (7)$$

unde y^o este soluția generală a ecuației omogene (2), iar \bar{y} este o soluție particulară a ecuației neomogene (6).

Metoda variației constantelor (metoda lui Lagrange): dacă se cunoaște un sistem fundamental de soluții y_1, y_2, \dots, y_n al ecuației omogene (2), atunci o soluție particulară a ecuației neomogene se determină după formula

$$\bar{y}(x) = K_1(x)y_1 + K_2(x)y_2 + \dots + K_n(x)y_n, \quad (8)$$

unde funcțiile $K_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, se deduc din sistemul

$$\begin{aligned} K_1'y_1 + K_2'y_2 + \dots + K_n'y_n &= 0 \\ K_1'y_1' + K_2'y_2' + \dots + K_n'y_n' &= 0 \\ \dots & \dots \\ K_1'y_1^{(n-1)} + K_2'y_2^{(n-1)} + \dots + K_n'y_n^{(n-1)} &= \frac{f(x)}{a_0(x)}, \end{aligned} \quad (9)$$

prin n ovradraturi.

II. Ecuații diferențiale liniare de ordinul n cu coeficienți constanți. 3. Pentru determinarea unui sistem fundamental de soluții al ecuației diferențiale liniare omogene de ordinul n cu coeficienții a_i , $i = 0, 1, \dots, n$, constanți

$$Ly = a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_ny = 0 \quad (10)$$

se caută soluții de forma $y = e^{rx}$, ajungându-se astfel la ecuația caracteristică

$$F(r) = a_0r^n + a_1r^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (11)$$

a) Dacă $F(r)$ are rădăcinile reale și distincte r_1, r_2, \dots, r_n , atunci un sistem fundamental de soluții pentru ecuația (10) este

$$y_1 = e^{r_1x}, y_2 = e^{r_2x}, \dots, y_n = e^{r_nx}, \quad (12)$$

astfel că soluția generală a ecuației omogene (10) este

$$y^o = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} + \dots + C_ne^{r_nx}. \quad (13)$$

b) Dacă $r = \alpha \pm i\beta$, atunci este rădăcină independentă

c) Dacă este rădăcină independentă

d) Dacă $r_1 = r_2 = \dots$ corespunde multiplicitate

4. Solu

este

unde y^o este gene (17).

În m... nedetermina... a) F... se caută y

unde $Q_m(x)$ atunci se

b) F... particular

Iar dacă

c) F... este răd

Iar dacă

este

(4)

b) Dacă printre rădăcinile ecuației caracteristice există și rădăcini complexe simple, de exemplu $r = \alpha \pm i\beta$, atunci fiecărei perechi de rădăcini complexe conjugate li corespund două soluții liniar independente :

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x. \quad (14)$$

c) Dacă printre rădăcinile ecuației caracteristice există și rădăcini reale multiple (de exemplu r_1 este rădăcină multiplă de ordin $p + 1$), atunci fiecărei astfel de rădăcini li corespund soluții liniar independente (în număr egal cu ordinul de multiplicitate al rădăcinii) de forma

$$y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = x e^{r_1 x}, \dots, y_{p+1} = x^p e^{r_1 x}. \quad (15)$$

d) Dacă printre rădăcinile ecuației caracteristice există și rădăcini complexe multiple (de exemplu $r_1 = r_2 = \dots = r_{p+1} = \alpha + i\beta$, $\bar{r}_1 = \bar{r}_2 = \dots = \bar{r}_{p+1} = \alpha - i\beta$), atunci fiecărei astfel de rădăcini li corespunde un număr de soluții liniar independente egal cu dublul numărului ce indică ordinul de multiplicitate :

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, y_2 = x e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, y_{p+1} = x^p e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad (16)$$

$$y_1^* = e^{\alpha x} \sin \beta x, y_2^* = x e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, y_{p+1}^* = x^p e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

4. Soluția generală a ecuației diferențiale liniare neomogene de ordinul n cu coeficienții constanți

$$Lu = f(x), \text{ cu } f \text{ funcție continuă,} \quad (17)$$

este

$$y = y^o + \bar{y}. \quad (18)$$

unde y^o este soluția generală a ecuației omogene (10), iar \bar{y} este o soluție particulară a ecuației neomogene (17).

În multe situații se alege soluția particulară \bar{y} după forma lui $f(x)$. Se folosește metoda coeficienților nedeterminați.

a₁) Fie $f(x) = P_m(x)$, polinom de grad m în x . Dacă $r = 0$ nu este rădăcină a ecuației caracteristice, se caută \bar{y} de forma

$$\bar{y} = Q_m(x), \quad (19)$$

unde $Q_m(x)$ este un polinom oarecare, de grad m . Dacă $r = 0$ este rădăcină multiplă de ordin k , atunci se caută soluția particulară de forma

$$\bar{y} = x^k Q_m(x). \quad (20)$$

b₁) Fie $f(x) = e^{\alpha x} P_m(x)$. Dacă $r = \alpha$ nu este rădăcină a ecuației caracteristice, se caută soluția particulară de forma

$$\bar{y} = e^{\alpha x} Q_m(x), \quad (21)$$

iar dacă $r = \alpha$ este rădăcină multiplă de ordin k , se ia

$$\bar{y} = x^k e^{\alpha x} Q_m(x). \quad (22)$$

c₁) Fie $f(x) = e^{\alpha x} [P_{m_1}(x) \cos \beta x + P_{m_2}(x) \sin \beta x]$ și fie $m = \max(m_1, m_2)$. Dacă $r = \alpha \pm i\beta$ nu este rădăcină a ecuației caracteristice, atunci se caută soluția particulară de forma

$$\bar{y} = e^{\alpha x} [Q_m(x) \cos \beta x + Q_m^*(x) \sin \beta x], \quad (23)$$

iar dacă $r = \alpha \pm i\beta$ este rădăcină multiplă de ordin k , se ia

$$\bar{y} = x^k e^{\alpha x} [Q_m(x) \cos \beta x + Q_m^*(x) \sin \beta x]. \quad (24)$$

d₁) Dacă $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots$, unde $f_i(x)$ au una din formele menționate, atunci se caută soluția particulară $\bar{y}(x) = \bar{y}_1(x) + \bar{y}_2(x) + \dots$, cu $\bar{y}_i(x)$ corespunzător formei lui $f_i(x)$.

III. Ecuațiile lui Euler sînt ecuații de forma

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x),$$

unde a_0, a_1, \dots, a_n sînt constante reale, iar $f(x)$ este o funcție continuă. Astfel de ecuații se reduc la ecuații cu coeficienți constanți, prin schimbarea de variabilă

$$|x| = e^t.$$

Se obține

$$xy' = y, \quad x^2 y'' = \ddot{y} - \dot{y}, \quad x^3 y''' = \ddot{\ddot{y}} - 3\dot{\ddot{y}} + 2\ddot{y}.$$

12.3.1. Probleme rezolvate

1. Să se cerceteze dependența liniară a următoarelor sisteme de funcții:

a) $y_1 = \sin x, y_2 = \cos x, y_3 = 1, x \in R$; b) $y_1 = \sin^2 x, y_2 = \cos^2 x, y_3 = 1, x \in R$.

Rezolvare. a) Relația $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 = 0$ implică $\lambda_1 \sin x + \lambda_2 \cos x + \lambda_3 = 0$. Derivind această ultimă relație de două ori în raport cu x , rezultă $\lambda_1 \cos x - \lambda_2 \sin x = 0$ și $-\lambda_1 \sin x - \lambda_2 \cos x = 0$. Din aceste trei ecuații obținem $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ și deci sistemul este liniar independent. Obținem același rezultat calculînd wronskianul atașat sistemului de funcții $W(y_1, y_2, y_3) = -1 \neq 0$ și deci sistemul este liniar independent.

b) $W(y_1, y_2, y_3) = 0$ și sistemul este liniar dependent. Relația de dependență liniară este $y_1 + y_2 - y_3 = 0$.

2. Să se formeze ecuația diferențială liniară omogenă și să se scrie soluția sa generală dacă se cunoaște sistemul fundamental de soluții:

a) $y_1 = x, y_2 = x^2$; b) $y_1 = e^x, y_2 = e^x \sin x, y_3 = e^x \cos x$.

Rezolvare. Se verifică ușor că cele două sisteme de funcții sînt liniar independente. Pentru a obține ecuația corespunzătoare trebuie ca orice altă soluție y să depindă liniar de funcțiile sistemului, adică trebuie îndeplinită condiția (4).

a) $W(y_1, y_2, y) = 0, \begin{vmatrix} x & x^2 & y \\ 1 & 2x & y' \\ 0 & 2 & y'' \end{vmatrix} = 0, \quad x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0.$

Soluția generală a ecuației este $y = C_1 x + C_2 x^2$.

b) $W(y_1, y_2, y_3, y) = 0, \quad y'''' - 3y''' + 4y'' - 2y = 0$. Soluția generală este $y = C_1 e^x + C_2 e^x \sin x + C_3 e^x \cos x$.

3. Folosind soluția particulară indicată, să se integreze următoarele ecuații diferențiale:

a) $y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0, y_1 = \frac{\sin x}{x}$; b) $xy'' - (x+1)y' - 2(x-1)y = 0,$

$y_1 = e^{x^2}$; c) $y'' + (\operatorname{tg} x - 2 \operatorname{ctg} x)y' + 2y \operatorname{ctg}^2 x = 0, y_1 = \sin x, y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0,$

$y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1.$

Rezolvare.

$$+ z \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

Înlocuirea în ec

$$\frac{z''}{2z'} = -\frac{\cos x}{\sin x}$$

Deci soluția ge

b) Avem y

$$xy'' - xy' - y =$$

o soluție particu

c) Punem

Deci $y = C_1 \sin x$

$C_2 = -2$. Dec

4. Folos

diferențiale

a) $y'' +$

b) $(x^3 -$

$= ax$

Rezolvare

$u'' + (1 - 2)$

Procedînd ca

Deci

y

b) Căuț

obținem ec

coeficienții sî

Înlocuind în

formează un

$u = C_1 u_1 +$

Din con

atunci se caută $y(z)$,
 (25) $Rezolvare.$ a) Folosim schimbarea de funcție (5), astfel că $y = z \cdot \frac{\sin x}{x}$. Deci $y' = z' \frac{\sin x}{x} + z \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$ și $y'' = z'' \frac{\sin x}{x} + 2z' \left(\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} \right) + z \left(-\frac{\sin x}{x} - \frac{2 \cos x}{x^2} + \frac{2 \sin x}{x^3} \right)$ și prin înlocuirea în ecuație obținem succesiv:

(26) $\frac{z''}{2z'} = -\frac{\cos x}{\sin x}, \frac{dz'}{2z'} = -\frac{\cos x}{\sin x} dx, z' = \frac{C_1}{\sin^2 x}, z = -C_1 \operatorname{ctg} x + C_2.$

Deci soluția generală este $y = -C_1 \frac{\cos x}{x} + C_2 \frac{\sin x}{x}.$

b) Avem $y_1 = e^{rx}, y_1' = r e^{rx}, y_1'' = r^2 e^{rx}$, care înlocuite în ecuație conduc la identitatea $rx^2 - xr - r - 2x + 2 = 0$. Aceasta implică faptul că $r^2 - r - 2 = 0, -r + 2 = 0$ și $r = 2$. Deci o soluție particulară este $y_1 = e^{2x}$. Făcând schimbarea de funcție $y = ze^{2x}$, obținem ecuația

(27) $z''x + (3x - 1)z' = 0$, de unde $\frac{dz'}{z'} = \left(\frac{1}{x} - 3 \right) dx, z' = C_1 x e^{-3x},$

$z = -\frac{1}{9} C_1 (3x + 1) e^{-3x} + C_2$ și deci $y = -\frac{1}{9} C_1 (3x + 1) e^{-x} + C_2 e^{2x}.$

c) Punem $y = z \sin x$, astfel că

$\frac{z''}{z'} = -\frac{\sin x}{\cos x}, \frac{dz'}{z'} = -\frac{\sin x}{\cos x} dx, z' = C_1 \cos x, z = C_1 \sin x + C_2.$

Deci $y = C_1 \sin^2 x + C_2 \sin x$ și $y' = C_1 \sin 2x + C_2 \cos x$. Din condițiile inițiale rezultă $C_1 = \frac{4}{\sqrt{3}},$

$C_2 = -2$. Deci soluția particulară căutată este $y = \frac{4}{\sqrt{3}} \sin^2 x - 2 \sin x.$

4. Folosind soluțiile particulare indicate, să se integreze următoarele ecuații, diferențiale liniare neomogene:

a) $y'' + (1 - x)y' + y = 1, y_1 = 1, y_2 = x;$

b) $(x^3 - x^2 + 7x + 9)y'' - 4(x^2 - x + 4)y' + (6x - 6)y = 2x^2 - 2x - 16, y_1 = ax + b, y(0) = y'(0) = 0.$

$Rezolvare.$ a) Făcând substituția $y = 1 + u(x)$, obținem ecuația omogenă în funcția necunoscută u $u'' + (1 - x)u' + u = 0$. Pentru această ecuație cunoaștem soluția particulară $u_1 = y_2 - y_1 = x - 1$. Procedând ca la exercițiul precedent, punem $u = zu_1 = z(x - 1)$ și obținem succesiv:

$\frac{z''}{z'} = x - 1 - \frac{2}{x - 1}, \frac{dz'}{z'} = \left(x - 1 - \frac{2}{x - 1} \right) dx, z' = C_1 (x - 1)^{-2} e^{\frac{(x-1)^2}{2}}.$

Deci $z = C_1 \int (x - 1)^{-2} e^{\frac{(x-1)^2}{2}} dx + C_2$ și

$y = 1 + u = 1 + z(x - 1) = 1 + C_2(x - 1) + C_1(x - 1) \int (x - 1)^{-2} e^{\frac{(x-1)^2}{2}} dx.$

b) Căutând soluții de forma indicată, găsim $y_1 = x$. Cu schimbarea de funcție $y = y_1 + u = x + u$, obținem ecuația omogenă $(x^3 - x^2 + 7x + 9)u'' - 4(x^2 - x + 4)u' + 6(x - 1)u = 0$. Deoarece coeficienții sint polinoame în x , căutăm soluții ale acestei ecuații de forma $u = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$. Înlocuind în ecuație și identificând, obținem în final soluțiile $u_1 = x^2 + 3, u_2 = x^3 + 3x - 8$, care formează un sistem fundamental de soluții. Prin urmare, soluția generală a ecuației omogene este $u = C_1 u_1 + C_2 u_2 = C_1(x^2 + 3) + C_2(x^3 + 3x - 8)$. Soluția generală a ecuației inițiale este deci

$y = y_1 + u = x + C_1(x^2 + 3) + C_2(x^3 + 3x - 8).$

Din condițiile inițiale rezultă $C_1 = -\frac{8}{9}, C_2 = -\frac{1}{3}$ și soluția căutată este $y = -x^2(3x + 8)/9.$

5. Utilizând metoda variației constantelor, să se integreze următoarele ecuații diferențiale liniare neomogene:

a) $x^2 y'' - xy' = 3x^3$; b) $y''' + y' = \sec x$.

Rezolvare. a) Ecuația omogenă atașată este $x^2 y'' - xy' = 0$. Deci $\frac{dy'}{y'} = \frac{dx}{x}$ cu $y' = C_1 x$ și $y^0 = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2$.

Căutăm soluția particulară \bar{y} a ecuației neomogene de aceeași formă cu y^0 . Punind $\bar{y} = K_1(x) \frac{x^2}{2} + K_2(x) \cdot 1$, obținem cu metoda variației constantelor

$$K_1' \frac{x^2}{2} + K_2' = 0, K_1' x = 3x$$

Deci $K_1' = 3, K_2' = -\frac{3}{2}x^2$, astfel că avem $K_1 = 3x, K_2 = -\frac{1}{2}x^3$ și $\bar{y} = \dots$. Deci soluția generală este $\bar{y} = y^0 + \bar{y} = \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 + x^3$.

b) Ecuația omogenă asociată este $y''' + y' = 0$. Punem $y' = t$ și deci $y''' = -t$, astfel că $dy'' = -y'' dx$ și $dy' = y'' dx$ implică

$$\frac{dy''}{y''} = \frac{dy'}{y'}; y'' dy'' = y''' dy', y'' dy'' = -t dt, y'' = \pm \sqrt{C_1 - t^2}$$

Deci $dy' = y'' dx$ arată că $dx = \frac{dt}{\pm \sqrt{C_1 - t^2}}$. Deoarece $dy = y' dx$, rezultă

$$dy = \pm \frac{t}{\sqrt{C_1 - t^2}} dt \Leftrightarrow y = \mp \sqrt{C_1 - t^2} + C_2 \text{ și } x = \pm \arcsin \frac{t}{\sqrt{C_1}} + C_3$$

Eliminând parametrul t și renotind constantele corespunzător, obținem soluția generală a ecuației omogene sub forma $y^0 = \bar{C}_1 + \bar{C}_2 \cos x + \bar{C}_3 \sin x$. Căutăm soluția particulară \bar{y} a ecuației neomogene sub forma $\bar{y} = K_1(x) + K_2(x) \cos x + K_3(x) \sin x$. Metoda variației constantelor conduce la sistemul $K_1' + K_2' \cos x + K_3' \sin x = 0, -K_2' \sin x + K_3' \cos x = 0, -K_2' \cos x - K_3' \sin x = \sec x$, astfel că obținem $K_1' = \sec x, K_2' = -1, K_3' = \frac{-\sin x}{\cos x}$. Deci $K_1 = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|, K_2 = -x, K_3 = \ln |\cos x|$

și $\bar{y} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| - x \cos x + \sin x \cdot \ln |\cos x|$. Soluția generală a ecuației neomogene este

$$y = \bar{C}_1 + \bar{C}_2 \cos x + \bar{C}_3 \sin x + \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| - x \cos x + \sin x \cdot \ln |\cos x|$$

6. Să se integreze ecuațiile diferențiale liniare cu coeficienți constanți:

- a) $y'' - y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 0$; b) $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$;
 c) $y'' + 2y' + y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$; d) $y^{(7)} + 3y^{(6)} + 3y^{(5)} + y^{(4)} = 0$;
 e) $y''' - y'' + y' - y = 0$; f) $64y^{(8)} + 48y^{(6)} + 12y^{(4)} + y'' = 0$;
 g) $y^{(4)} + 2y^{(3)} + 3y'' + 2y' + y = 0$.

Rezolvare. a) Ecuația caracteristică $r^2 - 1 = 0$ are rădăcinile reale și distincte $r_1 = -1, r_2 = 1$, astfel că $y^0 = C_1 e^{-x} + C_2 e^x$. Din condițiile inițiale obținem $C_1 = C_2 = 1$ și deci soluția particulară căutată este $y^0 = e^{-x} + e^x$.

b) Ecuația caracteristică $r^4 - 5r^2 + 4 = 0$ are rădăcinile reale distincte $r_1 = -2, r_2 = -1, r_3 = 1, r_4 = 2$. După (13) rezultă

$$y^0 = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^x + C_4 e^{2x}$$

următoarele ecuații

$$y' = \frac{dx}{x} \text{ cu } y' = C_1 x$$

$$\text{Ind } \bar{y} = K_1(x) \frac{x^2}{2} +$$

Deci soluția gene-

astfel că $dy'' =$

$$+ C_3$$

generală a ecuației

ecuației neomogene

conduce la sistemul

$= \sec x$, astfel că

$-x$, $K_3 = \ln |\cos x|$

ecuației neomogene este

$|\cos x|$.

constanți:

$$y^{(5)} + y^{(4)} = 0;$$

$$= 0;$$

$$r_1 = -1, r_2 = 1,$$

soluția particulară

$$= -2, r_2 = -1,$$

c) Avem $r^2 + 2r + 1 = 0$, $r_1 = r_2 = -1$. După (15) rezultă că sistemul fundamental de soluții este $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = xe^{-x}$, astfel că $y^0 = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$. Din condițiile inițiale deducem $C_1 = 0$ și $C_2 = 1$ și $y^0 = x e^{-x}$.

d) $r^7 + 3r^6 + 3r^5 + r^4 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 0$, $r_5 = r_6 = r_7 = -1$. Deci

$$y^0 = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + C_5 e^{-x} + C_6 x e^{-x} + C_7 x^2 e^{-x}.$$

e) $r^3 - r^2 + r - 1 = 0 \Leftrightarrow r_1 = 1$, $r_2 = -i$, $r_3 = i$. Deci, după (14), avem

$$y^0 = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$$

f) $64r^6 + 48r^5 + 12r^4 + r^2 = 0 \Leftrightarrow r^2(4r^2 + 1)^3 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 0$, $r_3 = r_4 = r_5 = \frac{1}{2}i$, $r_6 = r_7 =$

$$= -\frac{1}{2}i \text{ și } y^0 = C_1 + C_2 x + C_3 \cos \frac{x}{2} + C_4 \sin \frac{x}{2} + C_5 x \cos \frac{x}{2} + C_6 x \sin \frac{x}{2} + C_7 x^2 \cos \frac{x}{2} +$$

$$+ C_8 x^2 \sin \frac{x}{2}.$$

g) $r^4 + 2r^3 + 3r^2 + 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r^2 + r + 1)^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $r_3 = r_4 =$

$$= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ și } y^0 = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 e^{-\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 x e^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x +$$

$$+ C_4 x e^{-\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

7. Să se integreze ecuațiile diferențiale următoare prin metoda variației constantelor:

$$a) y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^x}; \quad b) y'' + y = \operatorname{tg} x.$$

Rezolvare. a) Ecuația caracteristică a ecuației omogene atașate este $r^2 + 3r + 2 = 0$, cu rădăcinile $r_1 = -2$, $r_2 = -1$. Deci $y^0 = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}$. Căutăm soluția particulară a ecuației neomogene de forma $\bar{y} = K_1(x)e^{-2x} + K_2(x)e^{-x}$. După (9) obținem

$$K_1' e^{-2x} + K_2' e^{-x} = 0, \quad -2K_1' e^{-2x} - K_2' e^{-x} = (1+e^x)^{-1}$$

și deci $K_1 = -e^x + \ln(1+e^x)$, $K_2 = \ln(1+e^x)$, astfel că $\bar{y} = e^{-2x}[-e^x + \ln(1+e^x)] + e^{-x} \ln(1+e^x)$. Soluția generală a ecuației neomogene este $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} - e^{-x} + (e^{-2x} + e^{-x}) \ln(1+e^x)$.

b) $y'' + y = 0 \Rightarrow r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r_1 = -i$, $r_2 = i$ și $y^0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Căutăm soluția particulară de forma $\bar{y} = K_1(x) \cos x + K_2(x) \sin x$. Obținem $K_1' \cos x + K_2' \sin x = 0$, $-K_1' \sin x +$

$$+ K_2' \cos x = \operatorname{tg} x, \text{ de unde } K_1 = \sin x - \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|, \quad K_2 = -\cos x. \text{ Deci } \bar{y} = \cos x \sin x -$$

$$- \cos x \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| - \sin x \cos x. \text{ Soluția generală a ecuației neomogene este } y = C_1 \cos x +$$

$$+ C_2 \sin x - \cos x \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|.$$

8. Să se integreze ecuațiile diferențiale:

$$a) y'' - 5y' + 6y = 6x^2 - 10x + 2; \quad b) y''' - y'' = x, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0,$$

$$y''(1) = -1; \quad c) y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(x^2 + x); \quad d) y^{(4)} - y^{(3)} - y' + y = e^x;$$

$$e) y'' - y = xe^x + x + x^3 e^{-x}; \quad f) y'' - 7y' + 6y = \sin x;$$

$$g) y^{(4)} + 2y'' + y = \sin x; \quad h) y''' - 3y' - 2y = 10(\sin x + x \cos x) - 8x^3;$$

$$i) y'' - 4y = e^{2x}(11 \cos x - 7 \sin x); \quad j) y'' + 2y' + 2y = xe^{-x} + e^{-x} \cos x;$$

$$k) y'' - 2y' + 2y = 2e^x \cos x - 4x e^x \sin x.$$

Rezolvare. a) Avem $y'' - 5y' + 6y = 0$, cu $r^2 - 5r + 6 = 0$ și $r_1 = 2, r_2 = 3$, astfel că $y^o = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$. Deoarece $r = 0$ nu este rădăcină a ecuației caracteristice, căutăm soluția particulară de forma $\bar{y} = Ax^2 + Bx + C$. Derivăm și înlocuim în ecuație $2A - 10Ax - 5B + 6Ax^2 + 6Bx + 6C \equiv 6x^2 - 10x + 2$. De aici rezultă $A = 1, B = C = 0$ și deci $\bar{y} = x^2$. Soluția generală este $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + x^2$.

b) Ecuația caracteristică $r^3 - r^2 = 0$ are soluțiile $r_1 = r_2 = 0$ și $r_3 = 1$, astfel că $y^o = C_1 + C_2 x + C_3 e^x$. Deoarece $r = 0$ este rădăcină dublă pentru ecuația caracteristică, conform cu (20), căutăm o soluție particulară de forma $\bar{y} = x^2(Ax + B)$. Derivând și înlocuind în ecuație, obținem $A = -\frac{1}{6}$ și $B = -\frac{1}{2}$. Deci, soluția generală a ecuației neomogene este $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^x - (x^3 + 3x^2)/6$.

Din condițiile inițiale deducem $C_1 = \frac{1}{6}, C_2 = \frac{1}{2}, C_3 = \frac{1}{e}$. Soluția cerută este deci

$$y = \frac{1}{6} + \frac{x}{2} + e^{x-1} - \frac{1}{6}(x^3 + 3x^2).$$

c) Soluția generală a ecuației omogene este $y^o = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$. Deoarece $r = 3$ nu este soluție a ecuației caracteristice, conform cu (21), căutăm soluția particulară de forma $\bar{y} = e^{3x}(Ax^2 + Bx + C)$. Înlocuind în ecuație, deducem $A = \frac{1}{2}, B = -1, C = 1$. Deci soluția generală a ecuației neomogene este $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + (x^2 - 2x + 2)e^{3x}/2$.

d) Ecuația caracteristică $r^4 - r^3 - r + 1 = 0$ are rădăcinile $r_1 = r_2 = 1, r_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ și deci

$$y^o = C_1 e^x + C_2 x e^x + e^{-x/2} \left(C_3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_4 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right).$$

Deoarece $r = 1$ este rădăcină dublă pentru ecuația caracteristică, după (22), se caută soluția particulară de forma $\bar{y} = x^2 A e^x$. Rezultă $A = 1/6$ și $\bar{y} = x^2 e^x / 6$, iar soluția generală a ecuației neomogene este $y = y^o + \bar{y}$.

e) Ecuația caracteristică $r^2 - 1 = 0$ are rădăcinile $r_1 = -1, r_2 = 1$, astfel că $y^o = C_1 e^{-x} + C_2 e^x$. Sintem în cazul d₁) cu $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$, unde $f_1(x) = x e^x, f_2(x) = x, f_3(x) = x^3 e^{-x}$. Se caută soluția de forma $\bar{y}(x) = \bar{y}_1(x) + \bar{y}_2(x) + \bar{y}_3(x)$, cu $\bar{y}_1(x) = x(a_1 x + b_1) e^x, \bar{y}_2(x) = a_2 x + b_2, \bar{y}_3(x) = x(a_3 x^3 + b_3 x^2 + c_3 x + d_3) e^{-x}$. Înlocuind pe $\bar{y}(x)$ în ecuația diferențială, obținem în final soluția

$$\bar{y}(x) = \frac{1}{4} x(x-1)e^x - x - \frac{1}{8} x(x^3 + 2x^2 + 3x + 3)e^{-x} \text{ și } y = y^o + \bar{y}.$$

f) Ecuația caracteristică $r^2 - 7r + 6 = 0$ are rădăcinile $r_1 = 1, r_2 = 6$ și deci $y^o = C_1 e^x + C_2 e^{6x}$. Sintem în cazul c₁) cu $\alpha = 0, \beta = 1$ și $P_{m_1}(x) \equiv 0, P_{m_2}^*(x) \equiv 1$, astfel că $m = 0$. Deoarece $r = -\alpha \pm i\beta = \pm i$ nu este rădăcină a ecuației caracteristice, după (23) se ia $\bar{y} = A \sin x + B \cos x$. Înlocuind în ecuația neomogenă, obținem $\bar{y} = (5 \sin x + 7 \cos x)/74$ și deci soluția generală a ecuației neomogene este $y = C_1 e^x + C_2 e^{6x} + (5 \sin x + 7 \cos x)/74$.

g) Ecuația caracteristică $r^4 + 2r^2 + 1 = 0$ are rădăcinile $r_1 = r_2 = -i, r_3 = r_4 = i$, și deci $y^o = (C_1 + C_2 x) \cos x + (C_3 + C_4 x) \sin x$. Sintem în cazul c₁) cu $\alpha = 0, \beta = 1, P_{m_1}(x) \equiv 0, P_{m_2}^*(x) \equiv 1$ și $m = 0$. Deoarece $r = \pm i$ este rădăcină dublă pentru ecuația caracteristică, după (24), se ia $\bar{y} = x^2(A \sin x + B \cos x)$. Se obține $A = -1/8, B = 0$, astfel că soluția generală a ecuației neomogene este $y = (C_1 + C_2 x) \cos x + (C_3 + C_4 x) \sin x - \frac{1}{8} x^2 \sin x$.

h) Ecuația caracteristică $r^3 - 3r - 2 = 0$ are rădăcinile $r_1 = r_2 = -1, r_3 = 2$, astfel că $y^o = (C_1 + C_2 x) e^{-x} + C_3 e^{2x}$. Deoarece $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, cu $f_1(x) = 10(\sin x + x \cos x), f_2(x) =$

$= -8x^3$, se caută, soluția particulară de forma $\bar{y}(x) = \bar{y}_1(x) + \bar{y}_2(x)$, cu $\bar{y}_1(x) = (ax + b) \sin x + (cx + d) \cos x$ și $\bar{y}_2(x) = ex^3 + fx^2 + gx + h$. Înlocuind în ecuație, se obține, după identificare,

$$\bar{y}(x) = \left(\frac{1}{5} - x\right) \cos x + \left(\frac{7}{5} - 2x\right) \sin x + 4x^3 - 18x^2 + 54x - 69.$$

Soluția generală este

$$y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + C_3e^{2x} + \left(\frac{1}{5} - x\right) \cos x + \left(\frac{7}{5} - 2x\right) \sin x + 4x^3 - 18x^2 + 54x - 69.$$

i) Ecuația caracteristică $r^2 - 4 = 0$ are rădăcinile $r_1 = -2, r_2 = 2$, astfel că $y^o = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x}$. Deoarece $r = 2 \pm i$ nu este rădăcină a ecuației caracteristice, după (23), se ia $\bar{y} = e^{2x}(A \cos x + B \sin x)$. Înlocuind în ecuație, se obține $A = 1$ și $B = 3$, astfel că soluția generală a ecuației este

$$y = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x} + e^{2x}(\cos x + 3 \sin x).$$

j) Ecuația caracteristică este $r^2 + 2r + 2 = 0$ și are rădăcinile $r_{1,2} = -1 \pm i$. Soluția generală a ecuației omogene este $y^o = C_1e^{-x} \cos x + C_2e^{-x} \sin x$. Deoarece $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, cu $f_1(x) = xe^{-x}$ și $f_2(x) = e^{-x} \cos x$, se ia $\bar{y}(x) = \bar{y}_1(x) + \bar{y}_2(x)$, cu $\bar{y}(x) = (Ax + B)e^{-x} + Ce^{-x}(C \cos x + D \sin x)$. Se obține $A = 1, B = 0, C = 0, D = 1/2$. Prin urmare, soluția generală a ecuației neomogene este

$$y = e^{-x} \left(C_1 \cos x + C_2 \sin x + x + \frac{1}{2} x \sin x \right).$$

k) Ecuația caracteristică $r^2 - 2r + 2 = 0$, cu rădăcinile $r_{1,2} = 1 \pm i$, implică $y^o = C_1e^x \cos x + C_2e^x \sin x$. Deoarece $r = 1 \pm i$ este rădăcină simplă pentru ecuația caracteristică, după (24), se ia $\bar{y} = xe^{x(A \cos x + B \sin x)} + (Cx + D)e^{x \cos x}$. Se obține $A = 1, B = C = D = 0$. Prin urmare, soluția generală a ecuației neomogene este $y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^2 \cos x)$.

9. Să se integreze următoarele ecuații de tip Euler:

a) $3x^2y'' + xy' + 7y = 0$; b) $x^2y'' - 2xy' + 2y = x$;

c) $(3x + 2)^2y'' + 7(3x + 2)y' = -63x + 18$;

d) $x^3y''' + 3x^2y'' + xy' - y = x, y(1) = y'(1) = y''(1) = 0$;

e) $x^2y'' + 4xy' + 2y = \cos x$.

Rezolvare. a) Substituția $|x| = e^t$ și relațiile (27) conduc la ecuația $3\ddot{y} - 2\dot{y} + 7y = 0$, care are ecuația caracteristică $3r^2 - 2r + 7 = 0$ cu rădăcinile $r_{1,2} = \frac{1}{3} \pm i \frac{\sqrt{20}}{3}$. Prin urmare, soluția generală este

$$y = C_1e^{\frac{1}{3}t} \cos \frac{\sqrt{20}}{3}t + C_2e^{\frac{1}{3}t} \sin \frac{\sqrt{20}}{3}t = C_1x^{1/3} \cos \left(\frac{\sqrt{20}}{3} \ln |x| \right) + C_2x^{1/3} \sin \left(\frac{\sqrt{20}}{3} \ln |x| \right).$$

b) Folosim substituția (26) și relațiile (27), astfel că obținem $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = e^t$. Ecuația omogenă atașată acestei ecuații are soluția generală $y^o = C_1e^t + C_2e^{2t}$, iar soluția particulară a ecuației neomogene este $\bar{y} = -te^t$. Deci, soluția generală a ecuației neomogene este $y = C_1e^t + C_2e^{2t} - te^t = C_1x + C_2x^2 - x \ln |x|$.

c) Facem schimbarea de variabilă $|3x + 2| = e^t$. Deoarece $dx = \frac{1}{3}e^t dt = \frac{1}{3}|3x + 2| dt$, rezultă

$$|3x + 2| y' = 3\dot{y}, (3x + 2)^2 y'' = 3^2(\ddot{y} - \dot{y}).$$

Prin urmare, ecuația capătă forma $9\ddot{y} + 12\dot{y} = -21e^t + 60$. Soluția ecuației omogene este $y^o =$

$$= C_1 + C_2e^{-\frac{4}{3}t}. \text{ Soluția particulară a ecuației neomogene este } \bar{y} = -e^t + 5t. \text{ Deci}$$

$$y = C_1 + C_2e^{-\frac{4}{3}t} - e^t + 5t = C_1 + C_2(3x + 2)^{-4/3} - (3x + 2) + 5 \ln |3x + 2|.$$

d) Substituția (26) conduce la ecuația $\ddot{y} - y = e^t$. Soluția generală a ecuației omogene $y^o = C_1 e^t + e^{-t/2} \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right)$. Soluția particulară se determină sub forma $y = te^t/3$. Prin urmare, soluția generală este

$$y(x) = C_1 x + C_2 x^{-1/2} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln |x| \right) + C_3 x^{-1/2} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln |x| \right) + \frac{1}{3} x \ln |x|.$$

Din condițiile inițiale deducem $C_1 = -\frac{1}{3}$, $C_2 = \frac{1}{3}$ și $C_3 = \frac{\sqrt{3}}{9}$, astfel că soluția cerută este

$$y(x) = \frac{1}{3} x (\ln |x| - 1) + \frac{\sqrt{3}}{9} x^{-1/2} \left[\sqrt{3} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln |x| \right) + \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln |x| \right) \right].$$

e) Cu schimbarea de variabilă (26), ecuația omogenă atașată ecuației considerate are forma $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 0$ și are soluția generală $y^o = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t} = C_1 x^{-2} + C_2 x^{-1}$. Pentru determinare unei soluții particulare a ecuației neomogene inițiale se aplică metoda variației constantelor. Se caută soluția particulară de forma $\bar{y} = K_1(x)x^{-2} + K_2(x)x^{-1}$. Se obține sistemul $K_1' x^{-2} + K_2' x^{-1} = 0$, $-2K_1' x^{-3} - K_2' x^{-2} = \frac{\cos x}{x^3}$, deci $K_1 = -x \sin x - \cos x$, $K_2 = \sin x$ și $\bar{y} = -x^{-2} \cos x$. Deci soluția generală a ecuației inițiale este $y = C_1 x^{-2} + C_2 x^{-1} - x^{-2} \cos x$.

12.3.2. Probleme propuse spre rezolvare

10. Să se cerceteze dependența liniară a următoarelor sisteme de funcții :

- a) $y_1 = x$, $y_2 = x^2$, $y_3 = x^3$; b) $y_1 = e$, $y_2 = e^{2x}$, $y_3 = e^{3x}$;
c) $y_1 = x$, $y_2 = x + 1$, $y_3 = x + 2$; d) $y_1 = x^2$, $y_2 = -2x^2$.

11. Să se formeze ecuația diferențială liniară omogenă și să se scrie soluția sa generală, dacă se cunoaște sistemul fundamental de soluții :

- a) $y_1 = \sin x$, $y_2 = \cos x$; b) $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$; c) $y_1 = x$, $y_2 = x^2$, $y_3 = x^3$;
d) $y_1 = 1$, $y_2 = e^{-2x} \cos x$, $y_3 = e^{-2x} \sin x$.

12. Să se integreze ecuațiile diferențiale următoare, cunoscând câte o soluție particulară :

- a) $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$, $y_1 = x$;
b) $x(x - 1)y'' + (x - 2)y' - y = 0$, $y_1 = x^{-1}(x - 1)^2$;
c) $(2x - 1)y'' - (4x^2 + 1)y' + (4x^2 - 2x + 2)y = 0$, $y_1 = e^x$;
d) $(2x - x^2)y'' + (x^2 - 2)y' + 2(1 - x)y = 0$, $y_1 = x^2$.

13. Să se integreze ecuațiile diferențiale neomogene, cunoscând soluțiile particulare indicate :

- a) $(2x^2 + 3x)y'' - (6 + 6x)y' + 6y = 6$, $y_1 = 1$, $y_2 = x + 2$;
b) $(x - 1)y'' - xy' + y = 3$, $y_1 = 2x + 3$, $y_2 = 3x + 3$.

14. Folosind metoda variației constantelor, să se integreze ecuațiile diferențiale liniare :

- a) $(x - 1)y''' - y' = (x - 1)^2$; b) $xy''' + y'' = 1 + x$; c) $x^2y'' + xy' = 1$.

15. Să se integreze ecuațiile diferențiale cu coeficienți constanți:

- a) $y'' - 5y' + 6y = 0$; b) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$; c) $y'' - 9y = 0$;
 d) $y'' - y' = 0$; e) $y'' - 5y' + 4y = 0$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 8$;
 f) $y'' + 3y' + 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

16. Să se integreze ecuațiile diferențiale:

- a) $y'' - 4y' + 4y = 0$; b) $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$;
 c) $y''' - 3ay'' + 3a^2y' - a^3y = 0$; d) $y^{(5)} - 4y''' = 0$;
 e) $y''' - y'' - y' + y = 0$; f) $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

17. Să se integreze ecuațiile diferențiale:

- a) $y'' + y = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$; b) $y^{(4)} + 5y'' + 4y = 0$;
 c) $y'' + y' + y = 0$; d) $y''' - 5y'' + 17y' - 13y = 0$; e) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$;
 f) $y^{(5)} - 11y^{(4)} + 50y''' - 94y'' + 13y' + 169y = 0$; g) $y^{(4)} + 4y = 0$;
 h) $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$; i) $y^{(n)} + C_n^1 y^{(n-1)} + C_n^2 y^{(n-2)} + \dots + C_n^n y = 0$.

18. Aplicând metoda variației constantelor, să se integreze ecuațiile diferențiale:

- a) $y'' - y = \frac{1}{\cos x}$; b) $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$; c) $y'' + y = \operatorname{ctg} x$; d) $y'' - y = \operatorname{th} x$;
 e) $y'' - 2y' + y = \frac{1}{x} e^x$; f) $y'' + 2y' + y = x^{-1} e^{-x}$; g) $y''' + y' = \operatorname{tg} x \operatorname{sec} x$;
 h) $y'' - 6y' + 9y = \frac{1}{x^3} (9x^2 + 6x + 2) e^{3x}$; i) $y'' - 3y' + 2y = e^{3x} (1 + e^{2x})^{-1}$.

19. Să se integreze ecuațiile diferențiale:

- a) $3y'' - 2y' - y = x^2$; b) $y''' - y = x^3 - 1$; c) $y^{(4)} - 2y''' + y'' = x^3$;
 d) $y^{(4)} - y = x^3 + x$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$; e) $y^{(7)} - y^{(3)} = 12x$;
 f) $y'' + y = xe^{-x}$; g) $y'' - 4y = x^2 e^{2x}$; h) $y'' - 5y' + 6y = (x^2 + 1)e^x + xe^{2x}$;
 i) $y'' + 2y' = x^2 e^{-2x} + 2x - 1$; j) $y'' - 3y' + 2y = x^2 e^x$;
 k) $y^{(5)} + y^{(3)} = x^2 e^x$; l) $y'' + 2y' - 3y = 2xe^{-3x} + (x + 1)e^x$;
 m) $y^{(4)} - 2y^{(3)} + y'' = e^x$; n) $y''' + y'' = x^2 + 1 + 3xe^x$;
 o) $y''' + y'' + y' + y = xe^x$.

20. Să se integreze ecuațiile diferențiale:

- a) $y'' + y = \cos x$; b) $y'' + y' - 2y = 8 \sin 2x$; c) $y'' - 4y = e^{2x} \sin 2x$;
 d) $y'' + y' - 2y = (-3x^2 - 23x + 12) \cos 3x + (11x^2 - 5x - 5) \sin 3x$;
 e) $y'' - 4y = e^x [(4 - 4x) \cos x - (6x + 2) \sin x]$; f) $y'' - y = e^x x \sin x$;
 g) $y'' - 2y' + 2y = e^x (2 \cos x - 4x \sin x)$; h) $y^{(4)} + y^{(3)} = \cos 4x$.

21. Să se integreze ecuațiile diferențiale:

- a) $y'' - 4y' + 4y = \sin x \cos 2x$; b) $y''' - 4y' = \cos^3 x$;
 c) $y^{(4)} - 3y'' - 4y = x^2 + 1 + e^{3x} + 4 \cos x$; d) $y'' + y = 2x \cos x \cos 2x$;
 e) $y'' - 2y' + y = \sin x + \operatorname{sh} x$; f) $y'' - 2y' + 5y = e^x (x \cos 2x - x^2 \sin 2x)$.

22. Să se integreze ecuațiile diferențiale :

- a) $x^2y'' + xy' - y = 0$; b) $12x^3y''' - 25x^2y'' + 28xy' - 6y = 0$;
 c) $x^2y''' - 4xy'' + 6y' = x$; d) $(x+1)^2y'' - 3(x+1)y' + 4y = (x+1)^3$;
 e) $(x+1)^3y'' + 3(x+1)^2y' + (x+1)y = 6 \ln(x+1)$;
 f) $x^2y''' + 5xy'' + 4y' = \ln x$; g) $x^2y'' - xy' + y = 2x$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$.

23. Aplicând metoda seriilor de puteri, să se determine soluția pentru fiecare din ecuațiile diferențiale :

- a) $xy'' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$; b) $y'' + xy = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;
 c) $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$; d) $y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0$,
 $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

12.4. Sisteme de ecuații diferențiale. Sisteme simetrice

O soluție a sistemului normal de ecuații diferențiale de ordinul întâi

$$y_i' = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

cu f_i funcții continue pe $I \times D$, $D \subset \mathbb{R}^n$, este reprezentată de n funcții ordonate $Y = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$, derivabile pe I , care transformă ecuațiile (1) în identități, pentru orice $x \in I$.

Problema lui Cauchy pentru sistemul (1) înseamnă determinarea acelei soluții a sistemului, care verifică condițiile inițiale

$$y_i(x_0) = y_i^0, \quad x_0 \in I, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Dacă funcțiile $f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ sînt continue în paralelipipedul închis $J: |x - x_0| \leq a$, $|y_i - y_i^0| \leq b_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, și satisfac condiția Lipschitz

$$|f_i(x, y_1, \dots, y_n) - f_i(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)| \leq L \sum_{j=1}^n |y_j - \bar{y}_j|, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

pentru (x, y_1, \dots, y_n) și $(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) \in J$, atunci există o soluție unică a problemei (1) și (2), definită pentru $|x - x_0| \leq h = \min \left\{ a, \frac{b_1}{A}, \dots, \frac{b_n}{A} \right\}$, $A = \max \sup_i |f_i(x, y_1, \dots, y_n)|$. Aproximanta de ordinul p a soluției este

$$y_i^{(p)}(x) = y_i^0 + \int_{x_0}^x f_i(t, y_1^{(p-1)}(t), \dots, y_n^{(p-1)}(t)) dt, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad p = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Spunem că am integrat sistemul de ecuații diferențiale (1) scris sub forma simetrică

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n}, \quad X_i = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (5)$$

dacă am determinat $n - 1$ integrale prime independente ale sale.

Integrarea sistemelor de ecuații diferențiale se face cu metoda aproximațiilor succesive, metoda eliminării, metoda combinațiilor integrabile etc.

Vom obține o combinație integrabilă dacă vom găsi n funcții $\mu_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, astfel că $\sum_{i=1}^n \mu_i X_i = 0$, iar $\sum_{j=1}^n \mu_j dx_j$ este diferențiala totală a funcției $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Atunci o integrală primă este $G(x_1, x_2, \dots, x_n) = C$.

1. Aplicând metoda diferențiale :

a) $y_1' = y_2$, $y_2' = -y_1$, $y_1(0) = -1$.

Rezolvare. a) Derivând de ordinul doi $y_1'' - y_1 = 0$ rezultă $y_2 = -C_1 e^{-x} + C_2 e^x$.

b) Derivând ultima + $2y_3$. Deci $y_3'' - 2y_3' + y_3 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$. Să obținem $y_2' + y_2 = 3e^x$ ație a sistemului de $C_3 = 1$. Soluția căutată

2. Aplicând metoda sisteme de ecuații

a) $\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2}$

c) $y_1' = -y_2$

d) $y_1' + y_1 = 0$

Rezolvare. a) Integrăm

care prin integrare

din ultimele două ecuații rezultă $y_2 = C_2$. Deci soluția

b) Sistemul de ecuații

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2 - x_1}$$

De aici rezultă că $x_1 + x_2 = C$

c) Adunăm ecuațiile și arată că o integrală primă este e^{2x} sistemului.

12.4.1. Probleme rezolvate

1. Aplicând metoda eliminării, să se integreze următoarele sisteme de ecuații diferențiale :

a) $y_1' = y_2, y_2' = y_1$; b) $y_1' = y_2 + y_3, y_2' = y_3 + y_1, y_3' = y_1 + y_2$,
 $y_1(0) = -1, y_2(0) = 1, y_3(0) = 0$.

Rezolvare. a) Derivând prima ecuație și ținând seama de-a doua ecuație, obținem ecuația liniară de ordinul doi $y_1'' - y_1 = 0$. Soluția generală a acesteia este $y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 e^x$. Deoarece $y_2 = y_1'$, rezultă $y_2 = -C_1 e^{-x} + C_2 e^x$.

b) Derivând ultima ecuație și ținând seama de primele două, obținem $y_3'' = y_1' + y_2' = y_1 + y_2 + 2y_3$. Deci $y_3'' - 2y_3 = y_1 + y_2 = y_3'$ și $y_3'' - y_3' - 2y_3 = 0$. Soluția generală a acestei ecuații este $y_3 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$. Scădem apoi ultimele două ecuații și ținem seama de rezultatul precedent; obținem $y_2 + y_2 = 3C_2 e^{2x}$. Soluția generală a acestei ecuații este $y_2 = C_3 e^{-x} + C_2 e^{2x}$. Din ultima ecuație a sistemului deducem $y_1 = -C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - C_3 e^{-x}$, iar condițiile inițiale $C_1 = 0, C_2 = 0$ și $C_3 = 1$. Soluția căutată este deci $y_1 = -e^{-x}, y_2 = e^{-x}, y_3 = 0$.

2. Aplicând metoda combinațiilor integrabile, să se integreze următoarele sisteme de ecuații diferențiale :

a) $\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \frac{dx_3}{x_1 + x_2}$; b) $\frac{dx_1}{x_3 - x_2} = \frac{dx_2}{x_1 - x_3} = \frac{dx_3}{x_2 - x_1}$;

c) $y_1' = -y_1 + y_2 + y_3, y_2' = y_1 - y_2 + y_3, y_3' = y_1 + y_2 - y_3$;

d) $y_1' + y_1 = 2xy_2, y_2' + y_2 = -2xy_1$; e) $y_1' = y_1^3 + 3y_1 y_2^2, y_2' = 2y_2^3, y_3' = 2y_2^2 y_3$.

Rezolvare. a) Luând primele două rapoarte, obținem ecuația cu variabile separate $\frac{dx_2}{x_2} = \frac{dx_1}{x_1}$,

care prin integrare dă $\frac{x_2}{x_1} = C_1$. Scriind apoi sistemul astfel :

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \frac{dx_3}{x_1 + x_2} = \frac{dx_1 + dx_2}{x_1 + x_2},$$

din ultimele două rapoarte obținem $dx_3 = d(x_1 + x_2)$ și deci o a doua integrală primă este $x_3 - x_1 - x_2 = C_2$. Deci soluția generală a sistemului este

$$\frac{x_2}{x_1} = C_1, x_3 - x_1 - x_2 = C_2.$$

b) Sistemul dat poate fi scris sub forma

$$\frac{dx_1}{x_3 - x_2} = \frac{dx_2}{x_1 - x_3} = \frac{dx_3}{x_2 - x_1} = \frac{dx_1 + dx_2 + dx_3}{0} = \frac{x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3}{0}.$$

De aici rezultă că $d(x_1 + x_2 + x_3) = 0$ și $x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3 = 0$, și deci două integrale prime sînt $x_1 + x_2 + x_3 = C_1$ și $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = C_2$. Acestea dau soluția generală.

c) Adunăm ecuațiile membru cu membru și obținem $(y_1 + y_2 + y_3)' = y_1 + y_2 + y_3$, ceea ce arată că o integrală primă este $e^{-x}(y_1 + y_2 + y_3) = C_1$. Dacă scădem prima ecuație din celelalte două, obținem $(y_2 - y_1)' = -2(y_2 - y_1)$ și $(y_3 - y_1)' = -2(y_3 - y_1)$, de unde rezultă alte două integrale prime $e^{2x}(y_2 - y_1) = C_2, e^{2x}(y_3 - y_1) = C_3$. Cele trei integrale prime dau soluția generală a sistemului.

d) Înmulțim prima ecuație cu y_1 , a doua cu y_2 și adunăm rezultatele:

$$y_1 y_1' + y_2 y_2' = -(y_1^2 + y_2^2) \text{ sau } \frac{1}{2} d(y_1^2 + y_2^2) = -(y_1^2 + y_2^2) dx \text{ sau } (y_1^2 + y_2^2) e^{2x} = C_1.$$

Să înmulțim prima ecuație cu y_2 , a doua cu $-y_1$ și adunăm rezultatele:

$$y_1' y_2 - y_1 y_2' = 2x(y_1^2 + y_2^2) \text{ sau } \frac{y_2 dy_1 - y_1 dy_2}{y_1^2 + y_2^2} = 2x dx$$

și deci $\arctg \frac{y_1}{y_2} - x^2 = C_2$.

e) Scriem sistemul sub forma simetrică

$$\frac{dy_1}{y_1^2 + 3y_1 y_2^2} = \frac{dy_2}{2y_1^2} = \frac{dy_3}{2y_1 y_3}$$

Din primele două rapoarte obținem o ecuație omogenă

$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{y_1}{y_2} \right)^2 + \frac{3}{2} \frac{y_1}{y_2}$$

astfel că schimbarea de funcție $u = \frac{y_1}{y_2}$ conduce la integrala primă $y_2^2 y_2^{-1} (y_1^2 + y_2^2)^{-1} = C_1$. Apoi, din ultimele două rapoarte obținem

$$\frac{dy_2}{y_2} = \frac{dy_3}{y_3} \text{ sau } \frac{y_2}{y_3} = C_2.$$

Cele două integrale prime dau soluția generală a sistemului.

3. Să se determine primele două aproximații pentru soluția sistemului $\frac{dy_1}{dx} = x + y_1 y_2$, $\frac{dy_2}{dx} = x^2 - y_1^2$ cu condițiile inițiale $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 0$.

Rezolvare. Deoarece $f_1(x, y_1, y_2) = x + y_1 y_2$ și $f_2(x, y_1, y_2) = x^2 - y_1^2$, după formula (4) obținem succesiv:

$$y_1^{(0)} = 1, y_2^{(0)} = 0;$$

$$y_1^{(1)}(x) = 1 + \int_0^x (t + 1 \cdot 0) dt = 1 + \frac{x^2}{2}, y_2^{(1)}(x) = 0 + \int_0^x (t^2 - 1) dt = \frac{x^3}{3} - x;$$

$$y_1^{(2)}(x) = 1 + \int_0^x \left[t + \left(1 + \frac{t^2}{2} \right) \left(-t + \frac{t^3}{3} \right) \right] dt = 1 - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{36};$$

$$y_2^{(2)}(x) = 0 + \int_0^x \left[t^2 - \left(1 + \frac{t^2}{2} \right)^2 \right] dt = -x - \frac{x^5}{20}.$$

4. Aplicând metoda aproximațiilor succesive, să se integreze sistemul $\frac{dy_1}{dx} = 2x y_2$, $\frac{dy_2}{dx} = 2x y_1$, definit pe domeniul $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y_1 \leq 1$, $-1 \leq y_2 \leq 1$, cu condițiile inițiale $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 2$.

Rezolvare. Deoarece $f_1(x, y_1, y_2) = 2x y_2$ și $f_2(x, y_1, y_2) = 2x y_1$ satisfac condițiile (3) și $|f_1(x, y_1, y_2)| = |2x y_2| \leq 2$, $|f_2(x, y_1, y_2)| = |2x y_1| \leq 2$, rezultă că există o soluție unică a sistemului definită pentru $|x| \leq \frac{1}{2}$. Aproximațiile soluției sînt:

$$y_1^{(0)} = 1, y_2^{(0)} = 2;$$

$$y_1^{(1)} = 1 + \int_0^x 2t \cdot 2 dt = 1 + 2x^2, y_2^{(1)} = 2 + \int_0^x 2t dt = 2 + x^2;$$

$$y_1^{(2)} = 1 + \int_0^x 2t(2 + t^2) dt = 1 + 2x^2 + \frac{2}{3}x^3$$

$$y_2^{(2)} = 2 + \int_0^x 2t(1 + 2t^2) dt = 2 + x^2 + \frac{2}{3}x^3$$

$$y_1^{(3)} = 1 + 2x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \int_0^x 2t(2 + t^2 + \frac{2}{3}t^3) dt = 1 + 2x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5$$

$$y_2^{(3)} = 2 + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \int_0^x 2t(1 + 2t^2 + \frac{2}{3}t^3) dt = 2 + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{2}{105}x^7$$

Se obține soluția

$$y_1 = 1 + 2x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots$$

$$y_2 = 2 + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots$$

5. Să se integreze

a) $\frac{dx_1}{x_1(x_2 - x_1)}$

c) $\frac{dx_1}{x_1^2 - x_2^2}$

e) $\frac{dx_1}{1 + \sqrt{x_2}}$

g) $\frac{dx_1}{x_2}$

i) $\frac{dx_1}{x_1(x_2^2 - x_1)}$

k) $\frac{dx_1}{x_1 + 1}$

m) $\frac{dx_1}{1 + \sqrt{3x_2}}$

6. Să se integreze

a) $\frac{dy_1}{dx} = y_1 y_2$

c) $\frac{dy_1}{dx} = y_1^2 + y_2^2$

7. Să se integreze

$$\frac{dy_2}{dx} = y_1 - y_2$$

$$y_2^{(0)} = b + ax$$

8. Să se integreze

$$\frac{dx}{7x - 6y} = \frac{dy}{y}$$

$$y_1^{(2)} = 1 + \int_0^x 2t(2+t^2) dt = 1 + 2x^2 + \frac{1}{2!} x^4, \quad y_2^{(2)} = 2 + \int_0^x 2t(1+2t^2) dt = 2 + x^2 + \frac{2}{2!} x^4;$$

$$y_1^{(3)} = 1 + \int_0^x 2t \left(2 + t^2 + \frac{2}{2!} t^4 \right) dt = 1 + 2x^2 + \frac{1}{2!} x^4 + \frac{2}{3!} x^6;$$

$$y_2^{(3)} = 2 + \int_0^x 2t \left(1 + 2t^2 + \frac{1}{2!} t^4 \right) dt = 2 + x^2 + \frac{2}{2!} x^4 + \frac{1}{3!} x^6;$$

$$y_1^{(4)} = 1 + 2x^2 + \frac{1}{2!} x^4 + \frac{2}{3!} x^6 + \frac{1}{4!} x^8; \quad y_2^{(4)} = 2 + x^2 + \frac{2}{2!} x^4 + \frac{1}{3!} x^6 + \frac{2}{4!} x^8; \dots$$

Se obține soluția

$$y_1 = 1 + \frac{1}{2!} x^4 + \frac{1}{4!} x^8 + \frac{1}{6!} x^{12} + \dots + 2 \left(\frac{1}{1!} x^2 + \frac{1}{3!} x^6 + \frac{1}{5!} x^{10} + \dots \right),$$

$$y_2 = 2 \left(1 + \frac{1}{2!} x^4 + \frac{1}{4!} x^8 + \dots \right) + \frac{1}{1!} x^2 + \frac{1}{3!} x^6 + \frac{1}{5!} x^{10} + \dots, \quad |x| \leq \frac{1}{2}.$$

12.4.2. Probleme propuse spre rezolvare

5. Să se integreze următoarele sisteme simetrice :

- a) $\frac{dx_1}{x_1(x_2 - x_3)} = \frac{dx_2}{x_2(x_3 - x_1)} = \frac{dx_3}{x_3(x_1 - x_2)}$; b) $\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \dots = \frac{dx_n}{x_n}$;
- c) $\frac{dx_1}{x_1^2 - x_2^2 - x_3^2} = \frac{dx_2}{2x_1x_2} = \frac{dx_3}{2x_1x_3}$; d) $\frac{dx_1}{x_1^2x_2} = \frac{dx_2}{-x_2^2} = \frac{dx_3}{-x_1(1+x_1^2)}$;
- e) $\frac{dx_1}{1 + \sqrt{x_3 - x_1 - x_2}} = \frac{dx_2}{1} = \frac{dx_3}{2}$; f) $\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \frac{dx_3}{x_3 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$;
- g) $\frac{dx_1}{x_2} = \frac{dx_2}{x_3} = \frac{dx_3}{x_1}$; h) $\frac{dx_1}{x_1^2x_2} = \frac{dx_2}{x_1^2x_2} = \frac{dx_3}{x_3(x_1^2 + x_2^2)}$;
- i) $\frac{dx_1}{x_1(x_1^2 - x_2^2)} = \frac{dx_2}{-x_2(x_1^2 + x_2^2)} = \frac{dx_3}{x_1^2(x_1^2 + x_2^2)}$; j) $\frac{dx_1}{1 + x_1^2} = \frac{dx_2}{x_1(2 - x_2)} = \frac{dx_3}{1 + x_1^2}$;
- k) $\frac{dx_1}{x_1 + 1} = \frac{dx_2}{x_1 + 2x_2} = \frac{dx_3}{x_1^2 - 2x_1x_3}$; l) $\frac{dx_1}{x_1(1 - 2x_1^2)} = \frac{dx_2}{-x_2(1 + 2x_1^2)} = \frac{dx_3}{2x_3(x_1^2 + x_2^2)}$;
- m) $\frac{dx_1}{1 + \sqrt{3x_3 - x_1 - x_2}} = \frac{dx_2}{2} = \frac{dx_3}{1}$; n) $\frac{dx_1}{x_2} = \frac{dx_2}{x_2x_3} = \frac{dx_3}{-x_2^2 - 1}$.

6. Să se integreze sistemele :

- a) $\frac{dy_1}{dx} = 1 - \frac{1}{y_2}, \quad \frac{dy_2}{dx} = \frac{1}{y_1 - x}$; b) $(y_2 - y_1)^2 dy_1 = y_2 dx, \quad (y_2 - y_1)^2 dy_2 = y_1 dx$;
- c) $\frac{dy_1}{dx} = -y_1^2 + y_2, \quad \frac{dy_2}{dx} = -2y_1$.

7. Să se afle primele două aproximații pentru soluția sistemului $\frac{dy_1}{dx} = y_1 + y_2$,

$\frac{dy_2}{dx} = y_1 - y_2$, luând drept aproximații de ordinul zero funcțiile $y_1^{(0)} = a + bx$, $y_2^{(0)} = b + ax$ și condițiile inițiale $y_1(0) = a, y_2(0) = b$.

8. Să se integreze prin metoda eliminării (se vor elimina x și y) sistemul $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$

$$= \frac{dx}{7x - 6y} = \frac{dt}{t}.$$

12.5. Sisteme de ecuații diferențiale liniare

1. Sisteme de ecuații diferențiale liniare cu coeficienți variabili. Un astfel de sistem are forma

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x)y_j + f_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n, \text{ sau } Y' = A(x)Y + F(x), \quad (1)$$

unde $a_{ij}(x)$ și $f_i(x)$ sînt funcții continue cunoscute, iar $Y \equiv (y_1, y_2, \dots, y_n)^t$, $F(x) \equiv (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))^t$ și $A(x) \equiv (a_{ij}(x))$. Dacă $f_i(x) \equiv 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, sau $F(x) \equiv 0$, sistemul (1) devine

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x)y_j, \quad i = 1, 2, \dots, n, \text{ sau } Y' = A(x)Y, \quad (2)$$

și se numește sistemul omogen asociat sistemului (1).

Soluția generală a sistemului omogen (2) este

$$y_i^0 = C_1 y_{i1} + C_2 y_{i2} + \dots + C_n y_{in}, \quad i = 1, \dots, n, \text{ sau } Y^0 = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + \dots + C_n Y_n, \quad (3)$$

unde C_i , $i = 1, 2, \dots, n$, sînt constante arbitrare, iar $Y_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{in})^t$, $i = 1, 2, \dots, n$ reprezintă un sistem fundamental de soluții al sistemului [adică un sistem de n vectori soluție pentru (2), liniar independent]. Pentru ca n vectori soluție $Y_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{in})^t$, $i = 1, 2, \dots, n$, să reprezinte n soluții liniar independente este necesar și suficient ca determinantul lui Wronski $W(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = \det(y_{ij})$ să fie diferit de zero cel puțin într-un punct din I , intervalul de continuitate al funcțiilor $a_{ij}(x)$.

Soluția generală a sistemului neomogen (1) este

$$Y = Y^0 + \bar{Y}, \quad (4)$$

unde Y^0 este soluția generală a sistemului omogen asociat, dată de (3), iar \bar{Y} este o soluție particulară a sistemului neomogen (1).

Dacă se cunoaște sistemul fundamental de soluții Y_1, Y_2, \dots, Y_n , atunci soluția particulară \bar{Y} se poate determina cu ajutorul metodei variației constantelor. Se caută soluția particulară de forma

$$\bar{Y} = K_1(x)Y_1 + K_2(x)Y_2 + \dots + K_n(x)Y_n, \quad (5)$$

unde funcțiile $K_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, se determină din sistemul

$$\sum_{j=1}^n K_j'(x)y_{ij} = f_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

Dacă se cunoaște un sistem fundamental de soluții, Y_1, Y_2, \dots, Y_n , atunci sistemul de ecuații diferențiale (liniare și omogene) care admite acest sistem fundamental de soluții este

$$\begin{vmatrix} y_k' & y_{k1}' & y_{k2}' & \dots & y_{kn}' \\ y_1 & y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n & y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

2. Sisteme de ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți. Sînt sisteme de forma (1) pentru care $a_{ij}(x) = \text{const}$. Pentru astfel de sisteme se poate determina un sistem fundamental de soluții, căutînd soluții ale sistemului omogen de ecuații (2), de forma

$$y_i = A_i e^{rx}. \quad (8)$$

Înlocuind în sistemul (2), se obține

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij} - r\delta_{ij})A_j = 0. \quad (9)$$

Din condiția ca sistemul de ecuații algebrice (9) să admită soluții nebanale rezultă ecuația caracteristică

$$\det(a_{ij} - r\delta_{ij}) = 0. \quad (10)$$

a) Dacă ecuația caracteristică are cele n rădăcini reale și distincte, lor le corespund vectorii proprii A^i , $i = 1, 2, \dots, n$, respectiv n soluții de forma (9), ce constituie un sistem fundamental de soluții. Soluția generală (3) se scrie imediat.

b) Dacă ecuația caracteristică are, de pildă, rădăcina r_1 multiplă de ordinul k , atunci partea din soluția generală corespunzătoare ei are, în general, forma

$$P_1(x)e^{r_1 x}, P_2(x)e^{r_1 x}, \dots, P_n(x)e^{r_1 x}, \text{ cu grad } P_i(x) < k, i = 1, 2, \dots, n. \quad (11)$$

c) Cazul rădăcinilor complexe se tratează similar.

12.5.1. Probleme rezolvate

1. O substanță A se descompune în alte două substanțe B și C . Viteza de formare a fiecăreia din acestea este proporțională cu cantitatea de substanță nedescompusă. Să se determine variația cantităților ce se formează, y_1 și y_2 , în funcție de timpul x . La momentul inițial $x = 0$ cantitatea de substanță este a . Cantitățile de substanță B și C formate după trecerea unei ore sînt $a/8$ și $3a/8$.

Rezolvare. La momentul x cantitatea de substanță A este $a - y_1 - y_2$.

Vitezele de formare ale substanțelor B și C vor fi

$$\frac{dy_1}{dx} = k_1(a - y_1 - y_2) \text{ și } \frac{dy_2}{dx} = k_2(a - y_1 - y_2).$$

Din cele două ecuații obținem $\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{k_2}{k_1}$ și deci $y_2 = \frac{k_2}{k_1} y_1 + C_1$. Deoarece $y_2(0) = y_1(0) = 0$,

rezultă că $C_1 = 0$ și deci $y_2 = \frac{k_2}{k_1} y_1$. Înlocuind pe y_2 în prima ecuație, obținem $\frac{dy_1}{dx} + (k_1 + k_2)y_1 = k_1 a$. Integrînd această ecuație diferențială liniară, obținem $y_1(x) = \frac{k_1 a}{k_1 + k_2} + C_2 e^{-(k_1 + k_2)x}$.

Din condiția inițială $y_1(0) = 0$ rezultă $C_2 = -k_1 a (k_1 + k_2)^{-1}$ și deci

$$y_1(x) = \frac{k_1 a}{k_1 + k_2} [1 - e^{-(k_1 + k_2)x}], \quad y_2(x) = \frac{k_2 a}{k_1 + k_2} [1 - e^{-(k_1 + k_2)x}].$$

Împunînd și condițiile $y_1(1) = \frac{a}{8}$, $y_2(1) = \frac{3a}{8}$, deducem $k_1 = \frac{1}{4} \ln 2$ și $k_2 = \frac{3}{4} \ln 2$. Așadar, soluția problemei este

$$y_1(x) = \frac{a}{4} (1 - 2^{-x}), \quad y_2(x) = \frac{3a}{4} (1 - 2^{-x}).$$

2. Să se construiască sistemul de ecuații diferențiale ce admite ca sistem fundamental de soluții $Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} e^{-4x}$, $Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-7x}$.

Rezolvare. Deoarece $W(Y_1, Y_2) = -\frac{3}{2}e^{-11x} \neq 0$, rezultă că sistemul de soluții este liniar independent pe R . După ecuațiile (7) sistemul de ecuații diferențiale este

$$\begin{vmatrix} y_1' - 4e^{-4x} & -7e^{-7x} \\ y_1 & e^{-7x} \\ y_2 & \frac{1}{2}e^{-4x} & -e^{-7x} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} y_2' - 2e^{-4x} & 7e^{-7x} \\ y_2 & e^{-7x} \\ y_2 & \frac{1}{2}e^{-4x} & -e^{-7x} \end{vmatrix} = 0$$

sau

$$y_1' = -5y_1 + 2y_2, \quad y_2' = y_1 - 6y_2.$$

3. Se consideră sistemul de ecuații diferențiale $y_1' = -9y_1 - 12y_2 - 5y_3$, $y_2' = 5y_1 + 6y_2 + 3y_3$, $y_3' = y_1 + 4y_2 + y_3$. Să se arate că soluțiile

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{2x}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 2x + 1 \\ -2x \\ 2x + 1 \end{pmatrix} e^{-2x}, \quad Y_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2x}$$

formează un sistem fundamental pe R . Să se scrie soluția generală a sistemului.

Rezolvare. Se verifică ușor că Y_1, Y_2 și Y_3 sînt soluții ale sistemului de ecuații. Deoarece $W(Y_1, Y_2, Y_3) = -4e^{-2x} \neq 0, \forall x \in R$, cele trei soluții formează sistemul fundamental de soluții. Sistemul de ecuații fiind omogen, rezultă că soluția sa generală este dată de formula (3), deci

$$y_1 = 2C_1 e^{2x} + (2x + 1)C_2 e^{-2x} - C_3 e^{-2x}, \quad y_2 = -C_1 e^{2x} - 2xC_2 e^{-2x} + C_3 e^{-2x}, \\ y_3 = -2C_1 e^{2x} + (2x + 1)C_2 e^{-2x} - C_3 e^{-2x}.$$

4. Să se integreze sistemul de ecuații diferențiale $y_1' = -y_2 + 1, x^2 y_2' = -2y_1 + x^2 \ln x$.

Rezolvare. Aplicăm metoda eliminării. Derivăm prima ecuație și obținem $y_2' = -y_1'$. Înlocuind în cea de-a doua ecuație, obținem ecuația de tip Euler $x^2 y_1'' - 2y_1 = -x^2 \ln x$. Rezolvînd această ecuație, obținem $y_1 = C_1 x^{-1} + \left(C_2 - \frac{1}{6} \ln^2 x + \frac{1}{9} \ln x \right) x^2$. Din prima ecuație rezultă $y_2 = 1 - y_1' = -1 + C_1 x^{-2} - 2C_2 x + \frac{x}{3} \ln^2 x + \frac{x}{9} \ln x - \frac{x}{9}$.

5. Să se determine soluția generală a sistemului:

- $y_1' = 3y_1 - y_2 + y_3, y_2' = -y_1 + 5y_2 - y_3, y_3' = y_1 - y_2 + 3y_3$;
- $y_1' = y_2 + y_3, y_2' = y_3 + y_1, y_3' = y_1 + y_2$;
- $y_1' = -y_1 + y_2, y_2' = -y_2 + 4y_3, y_3' = y_1 - 4y_3$;
- $y_1' = -2y_1 + 2y_2 + 2y_3, y_2' = -10y_1 + 6y_3 + 8y_3, y_3' = 3y_1 - y_2 - 2y_3$.

Rezolvare. a) Ecuația caracteristică a sistemului este

$$\begin{vmatrix} 3-r & -1 & 1 \\ -1 & 5-r & -1 \\ 1 & -1 & 3-r \end{vmatrix} = 0 \text{ cu } r_1 = 2, r_2 = 3, r_3 = 5.$$

Pentru $r_1 = 2$ sistemul algebric (9) are forma $A_1 - A_2 + A_3 = 0, -A_1 + 3A_3 - A_2 = 0, A_1 - A_2 + A_3 = 0$ și are soluția $A_1 = 1, A_2 = 0, A_3 = -1$. Deci o soluție a sistemului considerat

este $Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2x}$.

Pentru $r_2 = 3$ sistemul algebric (9) devine $-A_1 + A_3 = 0$, $-A_1 + 2A_2 - A_3 = 0$, $A_1 - A_2 = 0$ și are soluția $A_1 = A_2 = A_3 = 1$; deci $Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x}$.

Pentru $r_3 = 6$ sistemul algebric (9) este $-3A_1 - A_2 + A_3 = 0$, $-A_1 - A_2 - A_3 = 0$, $A_1 - A_2 - 3A_3 = 0$ și are soluția $A_1 = 1$, $A_2 = -2$, $A_3 = 1$. Deci $Y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{6x}$. Deoarece cele

trei rădăcini sînt distincte, rezultă că cele trei soluții formează sistem fundamental și soluția generală a sistemului este $Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + C_3 Y_3$ sau $y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + C_3 e^{6x}$, $y_2 = C_2 e^{3x} - 2C_3 e^{6x}$, $y_3 = -C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + C_3 e^{6x}$.

b) În acest caz ecuația caracteristică este

$$\begin{vmatrix} -r & 1 & 1 \\ 1 & -r & 1 \\ 1 & 1 & -r \end{vmatrix} = 0, \text{ de unde } r_1 = 2, r_2 = r_3 = -1.$$

Pentru $r_1 = 2$ sistemul algebric (3) este $2A_1 - A_2 - A_3 = 0$, $-A_1 + 2A_2 - A_3 = 0$, $-A_1 - A_2 + 2A_3 = 0$ și are soluția $A_1 = A_2 = A_3 = 1$. Pentru rădăcina dublă $r_2 = r_3 = -1$ sistemul (3) se reduce la o singură ecuație distinctă $A_1 + A_2 + A_3 = 0$ și sistemul de soluții al sistemului de ecuații algebrice (3) este format din soluțiile $A_1 = 1$, $A_2 = -1$, $A_3 = 0$ și $A_1 = 1$, $A_2 = 0$, $A_3 = -1$. Avem deci soluțiile liniar independente

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x}, Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-x}, Y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x}.$$

Soluția generală este $y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-x}$, $y_2 = C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x}$, $y_3 = C_1 e^{2x} - C_3 e^{-x}$.

c) Ecuația caracteristică este

$$\begin{vmatrix} -1-r & 1 & 0 \\ 0 & -1-r & 4 \\ 1 & 0 & -4-r \end{vmatrix} = 0, \text{ cu } r_1 = 0, r_2 = r_3 = -3.$$

Pentru $r_1 = 0$ obținem sistemul $-A_1 + A_2 = 0$, $-A_2 + 4A_3 = 0$, $A_1 - 4A_3 = 0$ și deci

$A_1 = 4$, $A_2 = 4$, $A_3 = 1$, astfel că $Y_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Pentru rădăcina dublă $r_2 = r_3 = -3$ sistemul

algebric (3) are forma $2A_1 + A_2 = 0$, $2A_2 + 4A_3 = 0$, $A_1 - A_3 = 0$ și are numai o soluție independentă. În acest caz, căutăm pentru sistemul dat soluții de forma (11), adică

$$y_1 = (A_1 + B_1 x) e^{-3x}, y_2 = (A_2 + B_2 x) e^{-3x}, y_3 = (A_3 + B_3 x) e^{-3x}.$$

Dacă le înlocuim în sistemul dat, obținem valorile $B_1 = 1$, $B_2 = -2$, $B_3 = 1$, $A_1 = 1$, $B_1 = -1$, $A_3 = 0$. În acest fel soluțiile sînt

$$Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3x}, Y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} x e^{-3x}.$$

Soluția generală a sistemului de ecuații este $y_1 = 4C_1 + C_2 e^{-3x} + C_3 x e^{-3x}$, $y_2 = 4C_1 - C_2 e^{-3x} - 2C_3 x e^{-3x}$, $y_3 = C_1 + C_3 x e^{-3x}$.

d) Ecuația caracteristică este

$$\begin{vmatrix} -2-r & 2 & 2 \\ -10 & 6-r & 8 \\ 3 & -1 & -2-r \end{vmatrix} = 0, \text{ cu } r_1 = 0, r_2 = 1+i, r_3 = 1-i.$$

Pentru $r_1 = 0$ obținem soluția $Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Pentru $r_{2,3} = 1 \pm i$, obținem

$$Y_{2,3} = e^{(1 \pm i)x} \begin{pmatrix} -1 \pm i \\ \mp 2i \\ i \end{pmatrix} = e^x (\cos x \pm i \sin x) \begin{pmatrix} -1 \pm i \\ -2i \\ i \end{pmatrix} = e^x \begin{pmatrix} -\cos x - \sin x \\ -2 \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} \pm ie^x \begin{pmatrix} \cos x - \sin x \\ -2 \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

Soluția generală a sistemului de ecuații este $y_1 = C_1 + C_2 e^x (-\cos x - \sin x) + C_3 e^x (\cos x - \sin x)$, $y_2 = -C_1 - 2C_2 e^x \cos x - 2C_3 e^x \sin x$, $y_3 = 2C_1 - C_2 e^x \sin x + C_3 e^x \cos x$.

6. Să se integreze prin metoda variației constantelor sistemul de ecuații diferențiale $y_1' = y_2$, $y_2' = y_1 + e^x + e^{-x}$.

Rezolvare. Procedind ca la exercițiul anterior, obținem soluția generală a sistemului omogen asociat $y_1' = y_2$, $y_2' = y_1$ sub forma $y_1^0 = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$, $y_2^0 = C_1 e^x - C_2 e^{-x}$. Căutăm soluția particulară a sistemului neomogen de forma $\bar{y}_1 = K_1(x)e^x + K_2(x)e^{-x}$, $\bar{y}_2 = K_1(x)e^x - K_2(x)e^{-x}$, în care funcțiile $K_1(x)$ și $K_2(x)$ verifică ecuațiile $K_1' e^x + K_2' e^{-x} = 0$, $K_1' e^x - K_2' e^{-x} = e^x + e^{-x}$. Obținem

$$K_1' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2x}, \quad K_2' = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{2x}, \quad \text{astfel că avem } K_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} e^{-2x},$$

$$K_2(x) = -\frac{x}{2} - \frac{1}{4} e^{2x} \text{ și } \bar{y}_1 = \frac{1}{2} e^x \left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} e^{-x} \left(x + \frac{1}{2}\right), \quad \bar{y}_2 = \frac{1}{2} e^x \left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} e^{-x} \left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Deci soluția generală este

$$y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2} e^x \left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} e^{-x} \left(x + \frac{1}{2}\right),$$

$$y_2 = C_1 e^x - C_2 e^{-x} + \frac{1}{2} e^x \left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} e^{-x} \left(x - \frac{1}{2}\right).$$

7. Să se integreze sistemul de ecuații diferențiale

$$y_1' = 7y_1 + 34y_2 - 42y_3 + 2e^{4x}, \quad y_2' = -y_1 - 10y_2 + 6y_3 + 5e^{7x},$$

$$y_3' = 4y_1 + 10y_2 - 18y_3 + 8e^{10x}.$$

Rezolvare. Sistemul omogen asociat are soluția generală

$$y_1^0 = 5C_1 e^{-3x} - 2C_2 e^{-4x} + 4C_3 e^{-12x}, \quad y_2^0 = C_1 e^{-3x} + 2C_2 e^{-6x} - C_3 e^{-12x},$$

$$y_3^0 = 2C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-6x} + C_3 e^{-12x}.$$

Căutăm o soluție particulară a sistemului neomogen inițial de forma $\bar{y}_1 = Ae^{4x} + Be^{7x} + Ce^{10x}$, $\bar{y}_2 = De^{4x} + Ee^{7x} + Fe^{10x}$, $\bar{y}_3 = Ge^{4x} + He^{7x} + Ie^{10x}$. Înlocuind în sistemul de ecuații, prin identificare obținem

$$A = \frac{31}{70}, \quad B = \frac{215}{247}, \quad C = -\frac{159}{143}, \quad D = \frac{1}{280}, \quad E = \frac{84}{247},$$

$$F = \frac{15}{143}, \quad G = \frac{23}{280}, \quad H = \frac{68}{247}, \quad I = \frac{47}{286}.$$

Prin urmare, soluția

$$y_1 =$$

$$y_2 =$$

$$y_3 =$$

8. Să se construiască sisteme fundamentale

a) $Y_1 = \begin{pmatrix} \cos 2x \\ \sin 2x \end{pmatrix}$

c) $Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} e^{3x}$

9. Aplicând metoda variației constantelor, găsiți soluția particulară a sistemului de ecuații diferențiale $x^2 y_1' = -y_1 - 2y_2$, $y_2' = y_1 - y_2$ cu condiția inițială $x=1, y_1=1, y_2=1$.

10. Să se integreze sistemul de ecuații diferențiale

a) $y_1' = y_1 + y_2$

c) $y_1' = 2y_1 - y_2$

e) $y_1' = 2y_1 + y_2$

f) $y_1' = 3y_1 - y_2$

g) $y_1' = -2y_1 + y_2$

h) $y_1' = y_1 - y_2$

i) $y_1' = y_1 - y_2$

11. Aplicând metoda variației constantelor, găsiți soluția particulară a sistemului de ecuații diferențiale

a) $y_1' = -3y_1 + y_2$

c) $y_1' = 6y_1 - y_2$

d) $y_1' = y_2 + y_3$

e) $y_1' = 4y_1 - y_2$

f) $y_1' = -y_1 + y_2$

g) $y_1' = -y_2 + y_3$

Prin urmare, soluția generală este

$$y_1 = 5C_1 e^{-3x} - 2C_2 e^{-6x} + 4C_3 e^{-12x} + \frac{31}{70} e^{4x} + \frac{215}{247} e^{7x} - \frac{159}{143} e^{10x},$$

$$y_2 = C_1 e^{-3x} + 2C_2 e^{-6x} - C_3 e^{-12x} + \frac{1}{280} e^{4x} + \frac{84}{247} e^{7x} + \frac{15}{143} e^{10x},$$

$$y_3 = 2C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-6x} + C_3 e^{-12x} + \frac{23}{280} e^{4x} + \frac{68}{247} e^{7x} + \frac{47}{286} e^{10x}.$$

12.5.2. Probleme propuse spre rezolvare

8. Să se construiască sistemele de ecuații diferențiale ce admit următoarele sisteme fundamentale de soluții:

a) $Y_1 = \begin{pmatrix} \cos 2x \\ \sin 2x \end{pmatrix}$, $Y_2 = \begin{pmatrix} -\sin 2x \\ \cos 2x \end{pmatrix}$; b) $Y_1 = \begin{pmatrix} x+1 \\ -x+1 \end{pmatrix}$, $Y_2 = \begin{pmatrix} x^2+2x \\ -x^2+2x \end{pmatrix}$;

c) $Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} e^{3x}$, $Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x}$.

9. Aplicînd metoda eliminării, să se integreze sistemul de ecuații diferențiale $x^2 y_1' = -y_1 - 2y_2$, $x^2 y_2' = 3y_1 + 4y_2$, după ce mai întîi se face schimbarea de variabilă $x = -\frac{1}{t}$.

10. Să se integreze următoarele sisteme de ecuații diferențiale omogene:

a) $y_1' = y_1 + 4y_2$, $y_2' = y_1 + y_2$; b) $y_1' = -3y_1 - y_2$, $y_2' = y_1 - y_2$;

c) $y_1' = 2y_1 - y_2$, $y_2' = y_1 + 2y_2$; d) $y_1' = -2y_1 + y_2$, $y_2' = -4y_1 + 3y_2$;

e) $y_1' = 2y_1 + y_2$, $y_2' = y_1 + 2y_2$; $y_1(0) = 1$; $y_2(0) = 3$;

f) $y_1' = 3y_1 - 8y_2 + 4y_3$, $y_2' = -y_1 + 5y_2 - 2y_3$, $y_3' = -3y_1 + 14y_2 - 6y_3$;

g) $y_1' = -2y_1 + y_2 - 2y_3$, $y_2' = y_1 - 2y_2 + 2y_3$, $y_3' = 3y_1 - 8y_2 + 5y_3$;

h) $y_1' = y_1 - y_2 + y_3$, $y_2' = y_1 + y_2 - y_3$, $y_3' = -y_2 + 2y_3$;

i) $y_1' = y_1 - y_3$, $y_2' = y_1$, $y_3' = y_1 - y_2$.

11. Aplicînd metoda eliminării, să se integreze următoarele sisteme de ecuații diferențiale:

a) $y_1' = -3y_1 - y_2$, $y_2' = y_1 - y_2$; b) $y_1' = 4y_1 - 3y_2$, $y_2' = 3y_1 + 4y_2$;

c) $y_1' = 6y_1 - 12y_2 - y_3$, $y_2' = y_1 - 3y_2 - y_3$, $y_3' = -4y_1 + 12y_2 + 3y_3$;

d) $y_1 = y_2 + y_3$, $y_2' = y_3 + y_1$, $y_3' = y_1 + y_2$, $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 1$, $y_3(0) = 0$;

e) $y_1' = 4y_1 + y_2 - 36x$, $y_2' = -2y_1 + y_2 - 2e^x$;

f) $y_1' = -y_1 - 2y_2 + \cos x + \sin x + e^x$, $y_2' = 2y_1 - y_2 - \cos x + \sin x$;

g) $y_1' = y_1 + e^x$, $y_2' = y_1 + e^{-x}$.

12. Aplicând metoda variației constantelor, să se integreze următoarele sisteme de ecuații diferențiale:

a) $y_1' = 11y_1 + 16y_2 + 1 + x$, $y_2' = -2y_1 - y_2 - x + 1$;

b) $y_1' = y_2 + x$, $y_2' = y_1 + e^x$, $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 0$.

13. Căutînd o soluție particulară prin metoda coeficienților nedeterminați, să se integreze sistemele de ecuații diferențiale:

a) $y_1' = y_1 - y_2 + 3x^2$, $y_2' = -4y_1 - 2y_2 + 8x + 2$;

b) $y_1' = -5x + 2y_2 + e^x$, $y_2' = y_1 - 6y_2 + e^{2x}$;

c) $y_1' = -2y_1 - y_2 + \sin x$, $y_2' = 4y_1 + 2y_2 + \cos x$.

14. Cu ajutorul seriilor de puteri să se integreze sistemele de ecuații diferențiale

a) $y_1' = xy_1 + (1 - x^2)y_2$, $y_2' = y_1 - xy_2$, $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 0$;

b) $y_1' = \frac{x}{1+x^2}y_1 + \frac{1}{1+x^2}y_2$, $y_2' = -\frac{1}{1+x^2}y_1 + \frac{x}{1+x^2}y_2$.

12.6. Ecuații cu derivate parțiale de ordinul întâi liniare și cvasiliniare

Se numește ecuație cu derivate parțiale de ordinul întâi liniară și omogenă o ecuație de forma

$$X_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + X_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \quad (1)$$

unde u este funcția necunoscută, iar funcțiile reale X_i , $i = 1, 2, \dots, n$, sînt continue și cu derivate parțiale continue pe un domeniu $D \subset R^n$ și nu sînt toate identic nule.

Sistemul caracteristic atașat ecuației (1) este

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n}. \quad (2)$$

Soluția generală a ecuației cu derivate parțiale (1) are forma

$$u = \Phi(F_1, F_2, \dots, F_{n-1}), \quad (3)$$

unde Φ este o funcție reală cu derivate parțiale continue pe un domeniu din R^{n-1} , iar F_1, F_2, \dots, F_{n-1} sînt $n-1$ integrale prime, independente funcțional, ale sistemului caracteristic (2).

Problema lui Cauchy pentru ecuația cu derivate parțiale (1) înseamnă determinarea acelei soluții a ecuației (1) care verifică condiția

$$u|_{x_i=x_i^0} = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \quad (4)$$

funcția φ fiind continuă și cu derivate parțiale continue.

O ecuație cu derivate parțiale de ordinul întâi cvasiliniară este o ecuație de forma

$$X_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + X_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_n} = X_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, u). \quad (5)$$

Soluția generală a acestei ecuații este dată implicit prin

$$\Phi[F_1(x_1, \dots, x_n, u), F_2(x_1, \dots, x_n, u), \dots, F_n(x_1, \dots, x_n, u)] = 0, \quad (6)$$

unde F_1, F_2, \dots, F_n sînt n integrale prime independente funcțional ale sistemului simetric

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{du}{X_{n+1}}. \quad (7)$$

12.6.1. Probleme rezolvate

1. Să se integreze următoarele ecuații cu derivate parțiale:

a) $x_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0$; b) $x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} - 2x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} - x_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$;

c) $x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$; d) $\sqrt{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \sqrt{x_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} + \sqrt{x_3} \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$.

$$u|_{x_3=1} = \dot{x}_1 - x_2.$$

Rezolvare. a) Sistemul caracteristic $\frac{dx_1}{x_2} = \frac{dx_2}{-x_1}$ are integrala primă $x_1^2 + x_2^2 = C_1$ și deci soluția generală este $u = \Phi(x_1^2 + x_2^2)$.

b) Sistemul caracteristic $\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{-2x_2} = \frac{dx_3}{-x_3}$ are integralele prime $x_1 \sqrt{x_2} = C_1, x_1 x_3 = C_2$ funcțional independente. Deci soluția generală este $u = \Phi(x_1 \sqrt{x_2}, x_1 x_3)$.

c) Sistemul caracteristic $\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \dots = \frac{dx_n}{x_n}$ are integralele prime $\frac{x_1}{x_n} = C_1, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n} = C_{n-1}$ funcțional independente. Deci soluția generală a ecuației este $u = \Phi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right)$.

d) Sistemul caracteristic $\frac{dx_1}{x_1^{1/2}} = \frac{dx_2}{x_2^{1/2}} = \frac{dx_3}{x_3^{1/2}}$ are integralele prime distincte $\sqrt{x_1} - \sqrt{x_3} = C_1, \sqrt{x_2} - \sqrt{x_3} = C_2$. Prin urmare, soluția generală a ecuației este $u = \Phi(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_3}, \sqrt{x_2} - \sqrt{x_3})$. Pentru $x_3 = 1$ obținem $\sqrt{x_1} - 1 = C_1, \sqrt{x_2} - 1 = C_2$, de unde $x_1 = (1 + C_1)^2, x_2 = (1 + C_2)^2$. Înlocuind acestea în expresia $u|_{x_3=1} = x_1 - x_2$, obținem $u = (1 + C_1)^2 - (1 + C_2)^2$. Înlocuind aici pe C_1 și C_2 cu expresiile lor inițiale, deducem soluția căutată $u = (1 + \sqrt{x_1} - \sqrt{x_3})^2 - (1 + \sqrt{x_2} - \sqrt{x_3})^2$.

2. Să se integreze următoarele ecuații cu derivate parțiale cvasiliniare:

a) $x_1 u \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 u \frac{\partial u}{\partial x_2} = x_1$; b) $x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = ku$.

Rezolvare. a) Sistemul caracteristic (7) are în acest caz forma $\frac{dx_1}{x_1 u} = \frac{dx_2}{x_2 u} = \frac{du}{x_1}$ și are integralele prime distincte $\frac{x_2}{x_1} = C_1$ și $u^2 = 2x_1 + C_2$. Soluția generală a ecuației este $\Phi\left(\frac{x_2}{x_1}, u^2 - 2x_1\right) = 0$.

b) În acest caz sistemul caracteristic (7) este $\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \dots = \frac{dx_n}{x_n} = \frac{du}{ku}$ și are integralele prime distincte $\frac{x_1}{x_n} = C_1, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n} = C_{n-1}, \frac{u}{x_n^k} = C_n$. Soluția generală a ecuației este $\Phi\left(\frac{x_1}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n}, \frac{u}{x_n^k}\right) = 0$.

3. Să se determine soluția ecuației $x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = u$, care trece prin curba definită de ecuațiile $x_1^2 + x_2^2 = 1$, $u = 2$.

Rezolvare. Sistemul caracteristic $\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \frac{du}{u}$ are integralele prime distincte $\frac{x_1}{x_2} = C_1$, $\frac{x_1}{u} = C_2$, și deci soluția generală a ecuației este $\Phi\left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_1}{u}\right) = 0$. Eliminând x_1 , x_2 și u din ecuațiile $x_1^2 + x_2^2 = 1$, $u = 2$, $\frac{x_1}{x_2} = C_1$, $\frac{x_1}{u} = C_2$, obținem $C_1^2 C_2^2 + C_2^2 = \frac{1}{4} C_1^2$. Înlocuim aici C_1 și C_2 cu expresiile lor și obținem soluția căutată $u^2 = 4(x_1^2 + x_2^2)$.

12.6.2. Probleme propuse spre rezolvare

4. Să se integreze următoarele ecuații cu derivate parțiale liniare:

a) $(1 + x_1^2) \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_1 x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0$; b) $x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + (x_1 + x_2) \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$;

c) $x_1(x_2 - x_3) \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2(x_3 - x_1) \frac{\partial u}{\partial x_2} + x_3(x_1 - x_2) \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$.

5. Să se integreze următoarele ecuații cu derivate parțiale cvasiliniare:

a) $x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$; b) $x_1 u \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 u \frac{\partial u}{\partial x_2} = -x_1 x_2$;

c) $u \frac{\partial u}{\partial x_1} - u \frac{\partial u}{\partial x_2} = x_2 - x_1$; d) $(1 + \sqrt{u - x_1 - x_2}) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} = 2$;

e) $u \frac{\partial u}{\partial x_1} + (u^2 - x_1^2) \frac{\partial u}{\partial x_2} = -x_1$; f) $x_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 u \frac{\partial u}{\partial x_2} = -1 - u^2$.

6. Să se rezolve problema lui Cauchy pentru următoarele ecuații cu derivate parțiale:

a) $x_1 x_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} - x_2^2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = x_1^2$, $u|_{x_1=x_1^2} = e^{x_1^2}$;

b) $2x_1 u \frac{\partial u}{\partial x_1} + 2x_2 u \frac{\partial u}{\partial x_2} = u^2 - x_1^2 - x_2^2$, $u|_{x_1=1} = x_1$;

c) $x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = u$, $u|_{x_1=x_2} = x_1^3$; d) $x_1 u \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 u \frac{\partial u}{\partial x_2} = -x_1 x_2$,

$u|_{x_1=2} = x_1$; e) $\frac{\partial u}{\partial x_1} \operatorname{tg} x_1 + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = u$, $u|_{x_1=x_2} = x_1^2$.

1. Mul

1.1. Mu

5. $c_0 \subset$

$E = \{a, b, c\}$

(1, c, y), (2,

(1, b, a), (1,

(2, a, b), (2,

1.2. Re

4. (4, 4)

(b, c) \in p,

2. Ele

2.1. D

12. a)

$-a_{12}a_{21}$; b)

$+a_{13}a_{31}a_{21}$

(1, 4, 2, 3)

(2, 1, 4, 3)

(4, 1, 2, 3)

$+a_{11}a_{22}a_{33}$

$-a_{12}a_{23}a_{31}$

$-a_{13}a_{21}a_{32}$

$+a_{14}a_{21}a_{32}$

$\Rightarrow i = 2,$

$= +1 \Rightarrow$

unul din

$\alpha_{23} = -16,$

$\alpha_{22} = 16,$

$\alpha_{33} = -34,$

$\alpha_{34} = 90,$

19. 2a -

23. Se sc

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

1. Mulțimi. Relații. Structuri

1.1. Mulțimi

5. $c_0 \subset c$, $c = f$, $c \subset b$, $b \subset s$, $m \subset s$. 12. $X = \{a, b, c, g, h, h\}$. 13. $A = \{c, d\}$, $B = \{d, e\}$.
 $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. 16. a) $A \times B \times C = \{(1, a, x), (1, b, x), (1, c, x), (1, a, y), (1, b, y), (1, c, y), (2, a, x), (2, b, x), (2, c, x), (2, a, y), (2, b, y), (2, c, y)\}$; b) $A \times B \times B = \{(1, a, a), (1, b, a), (1, c, a), (1, a, b), (1, b, b), (1, c, b), (1, a, c), (1, b, c), (1, c, c), (2, a, a), (2, b, a), (2, c, a), (2, a, b), (2, b, b), (2, c, b), (2, a, c), (2, b, c), (2, c, c)\}$.

1.2. Relații

4. $(4, 4) \notin \rho$. 5. Clasele de echivalență sînt clasele de resturi module m . 8. $(a, b) \in \rho$ și $(b, c) \in \rho$, dar $(a, c) \notin \rho$, deci nu este tranzitivă.

2. Elemente de algebră liniară

2.1. Determinanți

12. a) 6; b) 5; c) 8; d) 21; e) 11; f) 16; g) 7. 13. a) $\mathcal{P}_2 = \{(1, 2), (2, 1)\}$, $D_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$; b) $\mathcal{P}_3 = \{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (2, 1, 3), (1, 3, 2), (3, 2, 1)\}$, $D_3 = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$; c) $\mathcal{P}_4 = \{(1, 2, 3, 4), (1, 3, 4, 2), (1, 4, 2, 3), (1, 3, 2, 4), (1, 2, 4, 3), (1, 4, 3, 2), (2, 1, 3, 4), (2, 3, 4, 1), (2, 4, 1, 3), (2, 3, 1, 4), (2, 1, 4, 3), (2, 4, 3, 1), (3, 1, 2, 4), (3, 2, 4, 1), (3, 4, 1, 2), (3, 2, 1, 4), (3, 1, 4, 2), (3, 4, 2, 1), (4, 1, 2, 3), (4, 2, 3, 1), (4, 3, 1, 2), (4, 2, 1, 3), (4, 1, 3, 2), (4, 3, 2, 1)\}$, $D_4 = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} + a_{21}a_{21}a_{33}a_{44} + a_{23}a_{22}a_{34}a_{41} + a_{13}a_{22}a_{31}a_{42} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{43} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} + a_{14}a_{23}a_{31}a_{43} + a_{14}a_{21}a_{34}a_{42} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$. 14. a) -61; b) 392; c) -260. 15. $P = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & 1 \end{vmatrix} \in \mathcal{P} \Rightarrow \Rightarrow i = 2, j = 3$ și $i = 3, j = 2$. Deci $+a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}$. 16. $P = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i & 1 & j & h \end{vmatrix} \in \mathcal{P}$, și $\varepsilon(P) = +1 \Rightarrow a_{12}a_{21}a_{32}a_{44} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}$. 17. $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}a_{55} = 0$, deoarece cel puțin unul din cei cinci factori este zero. 18. a) $\alpha_{11} = -28, \alpha_{12} = 4, \alpha_{13} = 44, \alpha_{21} = 112, \alpha_{22} = -32, \alpha_{23} = -16, \alpha_{31} = 0, \alpha_{32} = 48, \alpha_{33} = -32$; b) $\alpha_{11} = -42, \alpha_{12} = -56, \alpha_{13} = 14, \alpha_{14} = 84, \alpha_{21} = 82, \alpha_{22} = 16, \alpha_{23} = 178, \alpha_{24} = -136, \alpha_{31} = -22, \alpha_{32} = 120, \alpha_{33} = -86, \alpha_{34} = -40, \alpha_{41} = 50, \alpha_{42} = 48, \alpha_{43} = -54, \alpha_{44} = -16$; c) $\alpha_{11} = 30, \alpha_{12} = -60, \alpha_{13} = 90, \alpha_{14} = 120, \alpha_{21} = 60, \alpha_{22} = 30, \alpha_{23} = -120, \alpha_{24} = 90, \alpha_{31} = 90, \alpha_{32} = -120, \alpha_{33} = -30, \alpha_{34} = -60, \alpha_{41} = 120, \alpha_{42} = 90, \alpha_{43} = 60, \alpha_{44} = -30$. 19. $2a - 8b + c + 5d$. 21. a) 4; b) -120; c) 52; d) -330; e) $uvxyz$. 22. a) 392; b) 0; c) -433. 23. Se scoate -1 factor de pe fiecare linie și se utilizează proprietatea legată de transpunere.

24. $\omega^2 = -\omega - 1$, $\omega^3 = 1 \Rightarrow D = -3\omega$. 25. a) Se scoate -1 factor de pe linia a doua și coloana a doua. b) Se scot factorii a, b, c de pe cele trei coloane. c) Se adună toate liniile la prima. d) Se scot factorii a, b, c de pe coloanele 2, 3 și 4 și apoi se înmulțește linia a 2-a, a 3-a și a 4-a cu bc, ca și ab respectiv. e) Se descompune determinantul din membrul doi în sumă de determinanți. f) Se înmulțește prima coloană cu abc și apoi se scot factori de pe linii a, b, c . 26. Se aplică aceeași metodă de rezolvare ca în ex. 6, pentru determinantul Vandermonde. Se obține relația de recurență $V'_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1) \{V'_{n-1}(a_2, a_3, \dots, a_n) + a_1 V'_{n-1}(a_2, a_3, \dots, a_n)\}$, de unde $V'_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \cdot V'_n(a_1, a_2, \dots, a_n)$. 27. a) De exemplu, se folosesc primele două linii: 9. b) 665. c) După primele trei linii: 128. d) După ultimele două linii: 1000.

$$29. a) \begin{vmatrix} b^2 + c^2 & ab & ac \\ ab & c^2 + a^2 & bc \\ ac & bc & b^2 + a^2 \end{vmatrix}; \quad b) \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix};$$

$$c) D \cdot D^t = \begin{vmatrix} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 + c^2 + d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 + c^2 + d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \end{vmatrix}$$

31. a), b), c), d): liniar independente; e) liniar dependente; f) pentru $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$ sint liniar independente, iar pentru $\lambda = -3$ sau $\lambda = 1$ sint liniare dependente.

32. a) Dezvoltind după prima coloană, obținem $D_n = 2^{n-1} + D_{n-1}$. Deducem $D_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2 + 1 = 2^n - 1$. b) Similar obținem $P_n = a_n x^{n-1} + P_{n-1}$, de unde $P_n = a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$.

2.2. Matrice

7. $X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$. 8. Fie $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ cu $b_{ij} = b_{ji}$ și $C = (c_{ij})$ cu $c_{ij} = -c_{ji}$. Atunci $A = B + C \Rightarrow a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$ și deci $a_{ji} = b_{ji} + c_{ji} = b_{ij} - c_{ij}$. Din ultimele două relații obținem $b_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$, $c_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji})$. 9. d) $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ și $X^2 = E \Rightarrow$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \text{ cu } a^2 + bc = 1 \text{ sau } X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ sau } X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad 11. C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = -C. \quad 12. a) \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad b) \begin{pmatrix} \cos px & -\sin px \\ \sin px & \cos px \end{pmatrix}; \quad c) 2^{p-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad d) 3^{p-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e) \begin{pmatrix} C_{p-1}^{p-1} & C_p^{p-1} & C_{p+1}^{p-1} & \dots & C_{n+p-2}^{p-1} \\ 0 & C_{p-1}^{p-1} & C_p^{p-1} & \dots & C_{n+p-3}^{p-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_{p-1}^{p-1} \end{pmatrix}. \quad 13. a) \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}; \quad b) -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -3 & 11 & -1 \\ 2 & -10 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$c) -\frac{1}{16} \begin{pmatrix} -14 & -2 & 20 \\ -12 & 4 & 8 \\ 10 & -2 & -12 \end{pmatrix}; \quad d) \frac{1}{(b-a)(c-a)(c-b)} \begin{pmatrix} bc(c-b) & ac(a-c) & ab(b-a) \\ b^2 - c^2 & c^2 - a^2 & a^2 - b^2 \\ c-b & a-c & b-a \end{pmatrix};$$

$$e) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}. \quad 14. a) X = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & -5 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 9 \\ -2 & 1 & -1 \\ -10 & 7 & -10 \end{pmatrix}. \quad b) X = \begin{pmatrix} 24 & 13 \\ -34 & -18 \end{pmatrix};$$

15. Rangul este: a) 2;

rang $A = 3$, iar pe

\Rightarrow rang $A = 2$; c) λ

$$18. a) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -13 & 4 & 2 \\ -31 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

20. Se scrie $\det A$ ca

de forma $b_{jk} = x_{jk}$

$$-\frac{1}{\det A} p_j p_k. \quad 21. a)$$

Apoi se scade prima

2.3. Sisteme de

5. a) Incompatibil

+ $5\gamma/6$, $x_3 = a$, $x_4 =$

6. a) $x_1 = 3$, $x_2 = 6$

$$c) X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}. \quad 8. x$$

minat cu soluția $x_1 =$

minat. Dacă $\lambda = -$

$\lambda = 1$ și $a = b = c =$

tibil. 10. a) $m = -$

11. a) 1) $\alpha = (13\beta$

nedeterminat; b) a

$x_3 = a$, $a \in \mathbb{R}$; c) a

$x_4 = b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$x_1 = 2a$, $x_2 = -a$.

2.4. Spații v

12. a) Liniar

independent; f) 11

+ $A_3 = 0$. 14. a) 11

pendenți: 17(α, β)

deua și coloana a
 prima. d) Se scot
 4-a cu bc, ca și ab
 și. f) Se înmulțește
 și metodă de rezol-
 cață $V'_n(a_1, a_2, \dots,$
 $\dots, a_n)$, de unde
 se folosesc pri-
 două linii: 1 000.

$$\begin{vmatrix} 0 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \\ b^2 + c^2 + d^2 & & & \end{vmatrix}$$

$\mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$ sint
 pem $D_n = 2^{n-1} +$
 de $P_n = a_n x^{n-1} +$

și $C = (c_{ij})$ cu
 c_{ij} . Din ultimele
 δ_{ij} și $X^2 = E \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 11 & -1 \\ 10 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} ab(b-a) \\ a^2 - b^2 \\ b-a \end{pmatrix};$$

$$X = \begin{pmatrix} 24 & 13 \\ -34 & -18 \end{pmatrix};$$

15. Rangul este: a) 2; b) 2; c) 2; d) 2; e) 4; f) 3; g) 4; h) 4. 16. a) Pentru $\lambda = \frac{20}{3}$ sau $\lambda = -\frac{1}{2}$
 rang $A = 3$, iar pentru $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, \frac{20}{3}\right\}$, rang $A = 4$; b) $\lambda \neq 3 \Rightarrow$ rang $A = 4$; $\lambda = 3 \Rightarrow$
 \Rightarrow rang $A = 2$; c) $\lambda \neq 2 \Rightarrow$ rang $A = 3$; $\lambda = 2 \Rightarrow$ rang $A = 2$. 17. $\begin{pmatrix} 13 & -3 & 16 \\ -9 & -1 & -10 \\ 18 & -8 & 6 \end{pmatrix}$.

18. a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -13 & 4 & 2 & 1 \\ -31 & 9 & 5 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 0 \\ -98 & 22 & 3 & 1 \\ -75 & 17 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 4 & -6 & 4 & -1 \\ -6 & 14 & -11 & 3 \\ 4 & -11 & 10 & -3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. 19. $P(A) = 0$.

20. Se scrie $\det A$ ca o sumă de determinanți. Pentru determinarea lui $A^{-1} = (b_{ij})$ se caută b_{jk}
 de forma $b_{jk} = x\delta_{jk} + y\rho_j\rho_k$. Deoarece $A \cdot A^{-1} = E \Rightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk} = \delta_{ik}$, deducem $b_{jk} = \delta_{jk} -$
 $-\frac{1}{\det A} \rho_j\rho_k$. 21. a) În $\det C$ se adună mai întâi toate liniile la prima și se scoate factor $x + ny$.
 Apoi se scade prima coloană din toate celelalte. b) Se arată că $\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk} = \delta_{ik}$.

2.3. Sisteme de ecuații algebrice liniare

5. a) Incompatibil; b) $x_1 = -2, x_2 = 2, x_3 = -3, x_4 = 3$; c) $x_1 = (2 + \gamma)/3, x_2 = (1 + 3\alpha - 3\beta +$
 $+ 5\gamma)/6, x_3 = \alpha, x_4 = \beta, x_5 = \gamma$; d) $x_1 = 19/2, x_2 = 26, x_3 = -3, x_4 = 0, x_5 = 5$; e) Incompatibil.
 6. a) $x_1 = 3, x_2 = 6, x_3 = -1$; b) $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 1$. 7. a) $X = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$; b) $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

c) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. 8. $x_4 = 1, x_5 = 3$. 9. a) rang $A = 2$, rang $\bar{A} = 3$, incompatibil. b) Compatibil deter-
 minat cu soluția $x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 1$. c) Pentru $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$ sistemul este compatibil deter-
 minat. Dacă $\lambda = -3$ și $b + c + d + a = 0$, sistemul este compatibil simplu nedeterminat. Dacă
 $\lambda = 1$ și $a = b = c = d$, sistemul este compatibil triplu nedeterminat. În rest sistemul este incompatibil.
 10. a) $m = -1$ și $m = 1$; b) $m = 3$; c) $m = 2, n = 1$ și $m = \frac{4}{3}, n = \frac{7}{3}$; d) $8n + 69m = 70$.
 11. a) 1) $\alpha = (13\beta - 34)/14$ și $\beta \neq 1$; 2) $\alpha = -\frac{3}{2}$ și $\beta = 1$; sistemul este compatibil simplu
 nedeterminat; b) $\alpha = -7, \beta = -1, m = 14, n = \frac{2}{5}$ și soluția $x_1 = (8 - 15a)/5, x_2 = (14 - 10a)/5,$
 $x_3 = a, a \in \mathbb{R}$; c) $\alpha = 2, \beta = -12, m = -2$ și soluția $x_1 = 2b - 2a, x_2 = (1 - b)/3, x_3 = a,$
 $x_4 = b, a, b \in \mathbb{R}$. 12. $m = -5$ și $x_1 = -\frac{17}{12}a, x_2 = a, x_3 = \frac{13}{12}a, x_4 = \frac{39}{24}a, a \in \mathbb{R}; m = 2$ și
 $x_1 = 2a, x_2 = -a, x_3 = 3a, x_4 = a, a \in \mathbb{R}$.

2.4. Spații vectoriale

12. a) Linear independent; b) linear dependent: $8v_1 - 7v_2 + 5v_3 = 0$; c) - d), - c) linear
 independent; f) linear dependent: $-A_1 + 2A_2 - 3A_3 = 0$. 13. $\lambda = 11, \mu = 3$ și $-2A_1 + 3A_2 +$
 $+ A_3 = 0$. 14. a) b) linear independent; c) linear dependent: $v_1 - 3v_2 + v_3 = 0$; d) linear de-
 pendent: $17(v_1 + v_3) = v_2$. 15. a) Da: $v = 4v_1 + 2v_2 + v_3$; b) Nu; c) Da: $v = -v_1 + v_2 + 2v_3$.

16. a) $x = v_1 + 10v_2 - 6v_3$, $y = 6v_1 - 5v_2 + v_3$; b) $v = (2v_1 + v_2 - 4v_3 + 3v_4)/6$. 17. a) Liniar dependenți: $-11v_1 + 3v_2 + 4v_3 + 4v_4 = 0$; v_1, v_2, v_3 ; b) liniar dependenți: $v_2 = 7v_1 - 2v_3$; v_1, v_3 ; c) liniar independenți; deci formează bază; d) liniar independenți; formează bază. 18. Dimensiunea este trei; bază v_1, v_2, v_3 ; $v_4 = -2v_2 + 4v_3 - v_1$, $v_5 = (12v_3 - 10v_1)/5$. 19. a) Da. b) Da. c) Nu; d) Da. 20. a) $v = 5v_1 - 8v_2 + 5v_3$; b) $v = -v_2/2$; c) $v = -3v_1 + 5v_3$; d) $v = 2v_1 + 2v_2 + v_3$. 21. a) $u_1 = v_2$, $u_2 = v_1$, $u_3 = 4v_1 - 4v_2 + 4v_3$, $u_4 = -v_1 + v_2 + v_3 - v_4$, $u_5 = 2v_1 - v_2 - v_3 + v_4$, $u_6 = v_3 - v_4$; b) $u_1 = -v_2$, $u_2 = -(3v_1 + v_2)/5$, $u_3 = v_1 + 2v_2$, $u_4 = -2v_1 - v_2$, $u_5 = -3v_1 - 2v_2$.

22. De exemplu: a) $v_2 = (-1, 2)$; b) $v_3 = (0, 0, 1)$; c) $v_3 = 1$; d) $v_3 = 1$. 23. a) $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & -5 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} -1 & -3 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

24. $y_1 = (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)/2$, $y_2 = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)/2$, $y_3 = (x_1 - x_2 - x_3 + x_4)/2$, $y_4 = (-x_1 + x_2 + x_3 + x_4)/2$. 25. a) 9; b) 8. 26. $\frac{1}{\sqrt{15}}(3, 1, 2, 1)$; $\frac{1}{\sqrt{10}}(2, 1, -1, 2)$; $\frac{1}{\sqrt{39}}(-2, 3, -5, -1)$. 27. $v_1, v_2, v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0, 0)$, $v_4 = \frac{1}{\sqrt{18}}(-2, -2, 3, 1)$. 28. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 5 & -34 & -6 & 13 & 9 \end{pmatrix}$. 29. Fie $A = (a_{ij})$

matricea sistemului. Vectorii linie din A aparțin lui R^n . A rezolva sistemul liniar și omogen înseamnă a determina toți vectorii din R^n care sînt ortogonali vectorilor linie din matricea A . Sistemul fundamental de soluții reprezintă o bază a subspațiului generat de mulțimea soluțiilor sistemului. 30. $(0, 1, 1, 0)/\sqrt{2}$, $(-4, 5, -5, 2)/\sqrt{70}$. 31. a) $(1, 0, 1)/\sqrt{2}$; b) $(-4, -1, 1)/\sqrt{18}$; c) $(-3, 6, -2)/7$. 32. a) 1; b) 0; c) 9; d) -14.

2.5. Operatori liniari

8. a) Nu. b) Da. c) Da. d) Nu. e) Da. 9. Nu sînt izomorfisme. 10. a) $(gof)(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3, -x_2, x_1 + x_3)$; $(fog)(y_1, y_2) = (2y_2, y_1 + y_2)$; b) $(fog)(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, 3x_2 + 2x_3, 4x_1 - x_2, x_2)$; c) $(gof)(a_0 + a_1t) = -a_1 - 6a_0t^2$. 12. a) $f^{-1}(u, v) = (-u - 2v, -u - v)$; b) $f^{-1}(u + vt + wt^2) = (-v - w, v, u + v + w)$; c) $f^{-1}(u, v) = v - u + (3u - 2v)t$; d) Nu este inversabil; e) $f^{-1}(u, v, w) = (-3u + 2v - 2w, 6u - 3v + 4w, -2u + v - w)$. 13. Nu. 14. $f(u_1) = (7, 4, -3)$ și $f(u_2) = (-5, -3, 2)$ sînt liniar independenți. 15. u_1, u_2, u_3 sînt liniar dependenți: $-u_1 + u_2 - 3u_3 = 0$; $f(u_1) = (-5, 5)$, $f(u_2) = (1, 14)$, $f(u_3) = (2, 3)$ sînt liniar dependenți: $-f(u_1) + f(u_2) - 3f(u_3) = 0$. 17. a) Da. b) Nu. c) Da. d) Da. e) Nu. 18. a) $B' = \{u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (-1, 1, -1), u_3 = (-1, 1, 2)\}$; $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = -2$; matricea schimbării bazei este matricea cu vectorii linie u_1, u_2, u_3 ; b) $B' = \{u_1 = (-13, 1, 5), u_2 = (-2 + 2\sqrt{3}, -1 - \sqrt{3}, 2), u_3 = (-2 - 2\sqrt{3}, -1 + \sqrt{3}, 2)\}$; $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1 - \sqrt{3}$, $\lambda_3 = 1 + \sqrt{3}$; c) $B' = \{u_1 = (1, -2), u_2 = (1, 1)\}$; $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$; d) $B' = \{u_1 = (-2, 1, 0), u_2 = (0, 0, 1), u_3 = (-1, 1, 1)\}$; $\lambda_1 = -\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -2$.

2.6. Forme liniare. Forme pătratice

4. -2. 5. a) Liniar dependent: $f_1 + f_2 - f_3 - f_4 = 0$; b) liniar dependent: $-f_1 - 3f_2 + f_3 = 0$, $-2f_1 + f_2 + f_4 = 0$; c) liniar dependent $-2f_1 + f_2 + f_3 = 0$. 6. a) $y_1 = x_1 + x_2$, $y_2 = x_2 + 2x_3$, $y_3 = x_3 \Rightarrow f(y) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$; $p = 3$, $\sigma = 3$; pozitiv definită; b) $y_1 = x_1 - 2x_2 + x_3$, $y_2 = 0,5(x_2 + x_3)$, $y_3 = 0,5(x_2 - x_3) \Rightarrow f(y) = y_1^2 + 4y_2^2 - 4y_3^2$; $p = 2$, $\sigma = 1$; nedegenerată, nedefinită; c) $y_1 = x_1 + 0,5x_2$, $y_2 = x_2$, $y_3 = 0,5(x_2 - x_4)$, $y_4 = 0,5(x_3 + x_4) \Rightarrow f(y) = y_1^2 - 0,25y_2^2 - y_3^2 + y_4^2$; $p = 2$, $\sigma = 0$; nedegenerată, nedefinită; d) $y_1 = x_1 + (x_2 + x_3 + x_4 + x_5)/2$, $y_2 = x_2 + (x_3 + x_4 + x_5)/3$, $y_3 = x_3 + (x_4 + x_5)/4$, $y_4 = x_4 + x_5/5$, $y_5 = x_5 \Rightarrow f(y) = y_1^2 + \frac{3}{4}y_2^2 + \frac{4}{6}y_3^2 + \frac{5}{8}y_4^2 + \frac{6}{10}y_5^2$; $p = 5$, $\sigma = 5$; pozitiv definită; e) $y_1 = x_1 + (x_2 + x_3 + \dots + x_n)/2$, $y_2 = x_2 + (x_3 +$

+ $x_4 + \dots + x_n)/5$.
 $p = n$, $\sigma = n$; pozitiv definită;
 $x_3 = (\sqrt{2}y_2 - 2y_3)/3$, $x_4 = (y_2 + y_3 - 2y_3)/3$, $x_5 = (y_2 + y_3)/\sqrt{2}$, $x_6 = (y_2 + y_3)/\sqrt{2}$, $x_7 = (y_2 + y_3)/\sqrt{6}$, $x_8 = (y_2 + y_3)/\sqrt{6}$, $x_9 = (y_2 + y_3)/\sqrt{5}$, $x_{10} = (y_2 + y_3)/\sqrt{5}$, $x_{11} = (-\sqrt{3}y_1 + y_2)/2$, $f(y) = y_1^2 + 3y_2^2 +$

3. Algebră

34. $u = 51$
 CA, AB . În ΔAM
 $+ \frac{2}{3} \vec{BB'} + \vec{GM}$

proiecțiile lui O

$= \vec{IO}_1 + \vec{O}_1B =$
 $= 2\vec{IO}_2$. 38. a)

b) coliniare; c)

$v_1 + v_2 + v_3 =$

43. Suma pătratelor

44. $v_1 \cdot v_2 = 0$.

$= \arccos \frac{4}{\sqrt{21}}$

$\vec{BB'} = a - \frac{1}{b^2}$

$\arccos - \frac{9}{\sqrt{87}}$

$\cdot |\vec{BB'}|$. 53.

$= \frac{1}{3}$; $\mathcal{A}(v_1, v_2)$

$= 7(3i - 2j)$.

59. $(v_1 \times v_2) \cdot v_3$

planari: $v_3 =$

nari: $v_1 + v_2$

$-4v_1 - 9v_2 +$

16. 17. a) Liniar de-
 $= 7v_2 - 2v_1; v_1, v_2$
 18. Dimensiunea
 Da. b) Da. c) Nu;
 $= 2v_1 + 2v_2 + v_3$. 21.
 $-v_3 - v_4 + v_5, v_6 =$
 $v_7, v_8 = -3v_1 - 2v_2$.
 23. a) $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$;
 24. $y_1 = (x_1 + x_2 -$
 $x_3 + x_4 + x_5 + x_6)/2$.
 -1). 27. $v_1, v_2, v_3 =$
 29. Fie $A = (a_{ij})$
 și omogen înseamnă
 A. Sistemul funda-
 soluțiilor sistemului.
 1) $1/\sqrt{18}$; c) $(-3,$
 $(\text{rof}) (x_1, x_2, x_3) =$
 $x_2, x_3) = (2x_1, 3x_2 +$
 $= (-u-2v, -u-v) |$
 $-2v)$; d) Nu este
 13. Nu. 14. $f(u_1) =$
 sunt liniar dependenți;
 liniar dependenți:
 $\{u_1 = (1, 1, 0), u_2 =$
 schimbării bazei este ma-
 $+ 2\sqrt{3}, -1 - \sqrt{3}, 2)$;
 B' = $\{u_1 = (1, -2),$
 $= (-1, 1, 1)\}$; $\lambda_1 =$
 $-f_1 - 3f_2 + f_3 = 0$.
 $x_1 + x_2, y_2 = x_2 + 2x_3$.
 $x_1 - 2x_2 + x_3, y_2 =$
 degenerată, nedefinită;
 $x_1^2 - 0,25x_2^2 - y_3^2 + y_4^2$;
 2. $y_2 = x_2 + (x_3 + x_4 +$
 $y_2^2 + \frac{4}{6}y_3^2 + \frac{5}{8}y_4^2 +$
 $x_4)/2, y_2 = x_2 + (x_3 +$

$+ x_4 + \dots + x_n)/3, \dots, y_{n-1} = x_{n-1} + \frac{1}{n}x_n, y_n = x_n \Rightarrow f(y) = y_1^2 + \frac{3}{4}y_2^2 + \frac{4}{6}y_3^2 + \dots + \frac{n+1}{2n}y_n^2$
 $p = n, c = n$; pozitiv definită. 7. a) $x_1 = (\sqrt{3}y_1 - \sqrt{2}y_2 - y_3)/\sqrt{6}, x_2 = (\sqrt{3}y_1 + \sqrt{2}y_2 + y_3)/\sqrt{6}$,
 $x_3 = (\sqrt{2}y_2 - 2y_3)/\sqrt{6} \Rightarrow f(y) = -2y_1^2 + 3y_2^2 + 6y_3^2$; b) $x_1 = (-2y_1 - 2y_2 + y_3)/3, x_2 = (-2y_1 +$
 $+ y_2 - 2y_3)/3, x_3 = (y_1 - 2y_2 - 2y_3)/3 \Rightarrow f(y) = 3y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2$; c) $x_1 = (-2y_1 - 2y_2 + y_3)/3,$
 $x_2 = (-2y_1 + y_2 - 2y_3)/3, x_3 = (y_1 - 2y_2 - 2y_3)/3 \Rightarrow f(y) = -9y_1^2 + 9y_2^2 + 18y_3^2$; d) $x_1 = (-y_1 +$
 $+ y_2)/\sqrt{2}, x_2 = (y_1 + y_3)/\sqrt{2}, x_3 = y_2 \Rightarrow f(y) = -2y_1^2 - y_2^2 + 2y_3^2$; e) $x_1 = (\sqrt{3}y_1 - y_2 - \sqrt{2}y_3)/\sqrt{6},$
 $x_2 = (2y_2 - \sqrt{2}y_3)/\sqrt{6}, x_3 = (\sqrt{3}y_1 + y_2 + \sqrt{2}y_3)/\sqrt{6}; f(y) = -4y_1^2 + 6y_2^2$; f) $x_1 = (-\sqrt{3}y_1 - \sqrt{2}y_2 +$
 $+ y_3)/\sqrt{6}, x_2 = (\sqrt{2}y_2 + 2y_3)/\sqrt{6}, x_3 = (\sqrt{3}y_1 - \sqrt{2}y_2 + y_3)/\sqrt{6}, f(y) = 4y_1^2 + 5y_2^2 + 8y_3^2$;
 g) $x_1 = y_2, x_2 = (y_1 + 2y_3)/\sqrt{5}, x_3 = (-2y_1 + y_3)/\sqrt{5}; f(y) = -y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2$; h) $x_1 = (-2y_1 +$
 $+ y_3)/\sqrt{5}, x_2 = (y_1 + 2y_3)/\sqrt{5}, x_3 = y_2, f(y) = -2y_1^2 + y_2^2 + 8y_3^2$; i) $x_1 = y_2, x_2 = (y_1 + \sqrt{3}y_3)/2,$
 $x_3 = (-\sqrt{3}y_1 + y_3)/2; f(y) = -2y_1^2 + 2y_3^2$; j) $x_1 = (y_1 - y_3)/\sqrt{2}, x_2 = y_2, x_3 = (y_1 + y_3)/\sqrt{2}$
 $f(y) = y_1^2 + 3y_2^2 + 3y_3^2$.

3. Algebră vectorială

34. $u = 5i - 6j + 62k, v = 11j + 78k$. 35. $v_1 = v_2$. 36. Fie A', B', C' mijloacele laturilor BC
 CA, AB . În $\Delta MAG, \vec{MA} + \frac{2}{3}\vec{AA'} + \vec{GM} = 0$. Similar, $\vec{MC} + \frac{2}{3}\vec{CC'} + \vec{GM} = 0$ și $\vec{MB} +$
 $+\frac{2}{3}\vec{BB'} + \vec{GM} = 0$. Adunăm acestea și ținem seama că $\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} = 0$. 37. Fie O_1 și O_2
 proiecțiile lui O pe AB și CD , respectiv. Avem $\vec{IA} = \vec{O_1A} + \vec{IO_1} = \frac{1}{2}\vec{BA} + \vec{IO} + \vec{O_1I}$ și $\vec{IB} =$
 $= \vec{IO_1} + \vec{O_1B} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{IO} + \vec{O_2I}$ și deci $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{2IO} + \vec{2O_2I}$. Similar obținem $\vec{IC} + \vec{ID} =$
 $= \vec{2IO_2}$. 38. a) $\lambda = -1, \mu = 0 \Rightarrow v_1 = -v_2$; b) $\lambda = 3, \mu = 1 \rightarrow v_1 = v_2$. 39. a) Coliniare;
 b) coliniare; c) necoplanari; c) coplanari;
 b) coliniare; c) necoliniare. 40. a) Coplanari: $2v_1 + v_2 - v_3 = 0$; b) necoplanari; c) coplanari:
 $v_1 + v_2 + v_3 = 0$. 41. $\lambda = 1 \Rightarrow v_1 = v_2 = v_3; \lambda = -2 \Rightarrow v_1 = -v_2 - v_3$. 42. $v = v_1 - \frac{2}{3}v_2 - \frac{4}{3}v_3$.
 43. Suma pătratelor diagonalelor unui paralelogram este egală cu suma pătratelor laturilor sale.
 44. $v_1 \cdot v_2 = 0$. 45. $-(a^2 + b^2 + c^2)/2$. 46. a) 4 și $\sqrt{52}$; b) $\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{52}}\right)$. 47. $\frac{70}{\sqrt{89}}$; b) $\alpha =$
 $= \arccos \frac{4}{\sqrt{21}}, \beta = \arccos \frac{2}{\sqrt{21}}, \gamma = \arccos \frac{1}{\sqrt{21}}$. 48. $\sqrt{37}$. 49. 60° . 50. $\vec{AA'} = c - \frac{1}{a^2}(a \cdot c)a,$
 $\vec{BB'} = a - \frac{1}{b^2}(a \cdot b)b, \vec{CC'} = b - \frac{1}{c^2}(b \cdot c)c$. 51. a) 4; b) $\frac{35}{\sqrt{41}}$; c) $\frac{1}{\sqrt{210}}(8i + 5j + 11k)$. 52. a)
 $\arccos -\frac{9}{\sqrt{87}}$; b) $\sqrt{194} + \sqrt{29} + \sqrt{75}$. c) Din exercițiul 50, $\vec{BB'} = i - k$, deci $|\vec{BB'}| = \sqrt{2}$. d) $0,5|AC| \cdot$
 $\cdot |\vec{BB'}|$. 53. a) $5\sqrt{3}$; b) $3\sqrt{10}$; c) $5\sqrt{6}$; d) $42\sqrt{3}$. 54. $v_2 = 9i - 3j - 3k, \text{pr}_{v_1} v_1 = \frac{5}{\sqrt{11}}$. 55. $\mathcal{A}(v_1, v_2) =$
 $= \frac{1}{3}; \mathcal{A}(v_2, v_3) = 2; \mathcal{A}(v_3, v_1) = \sqrt{2}/6$. 56. $v_1 \times v_2 = -11(3i - 2j); v_1 \times v_3 = -13(3i - 2j); v_2 \times v_3 =$
 $= 7(3i - 2j)$. 57. $\frac{3}{2}\sqrt{10}$. 58. $|v_1 + v_2|^2 = 328 - 36\sqrt{3}; |v_1 - v_2|^2 = 244 - 120\sqrt{3}; |v_1 \times v_2| = 39$.
 59. $(v_1 \times v_2) \cdot v_3 = 4(a \times b) \cdot c$. 60. a) 12; b) 25; c) 4. 61. a) $\sqrt{2}$; b) 0. 62. a) $(v_1, v_2, v_3) = 0$, co-
 planari: $v_3 = -v_1 + 2v_2$; b) coplanari: $(-2\gamma + 5\beta)v_1 + (3\gamma - 5\alpha)v_2 + (2\alpha - 3\beta)v_3 = 0$; c) copla-
 nari: $v_1 + v_2 + v_3 = 0$; d) coplanari: $-5v_1 + 4v_2 - v_3 = 0$; e) necoplanari; f) coplanari:
 $-4v_1 - 9v_2 + v_3 = 0$. 63. $\lambda = \frac{25}{2}, -11v_1 - 2v_2 + 8v_3 = 0$. 64. a) 0; b) (v_1, v_2, v_3) ; c) $2(v_1,$

v_2, v_3); d) $(v_1, v_2, v_3)/4$; e) $4(v_1, v_2, v_3)$. 65. a) 72; b) 0. 69. a) 7; b) $v'_1 = (5i + 6j - 3k)/7$, $v'_2 = (-i + 4j + 2k)/7$, $v'_3 = (3i - 5j + k)/7$; c) 1/7; d) $v_1 \times (v_2 \times v_3) = -9i + j - 17k$, $(v_1 \times v_2) \times v_3 = -9i - 6j - 3k$. 70. $v = 5i - 6j + 7k$. 71. a) $\frac{5}{2}\sqrt{2}$; b) $\frac{1}{2}\sqrt{61}$. 72. a) $h_a = \frac{35}{\sqrt{61}}$; $h_b = \frac{35}{\sqrt{26}}$, $h_c = 5$; b) $h_a = \frac{2}{3}\sqrt{21}$, $h_b = \frac{6}{13}\sqrt{91}$, $h_c = \frac{3}{5}\sqrt{70}$; c) $h_a = \frac{2}{35}\sqrt{1190}$, $h_b = \sqrt{17}$, $h_c = \frac{2}{19}\sqrt{646}$. 73. a) $\frac{1}{2}$; b) 9. 74. $\frac{3\sqrt{10}}{2}, \sqrt{3}, \frac{\sqrt{6}}{2}$, 3. 75. $\lambda_1 = 3 \Rightarrow M_1(1, 15/4, 1)$; $\lambda_2 = -2 \Rightarrow M_2(6, 5, 1)$. 76. $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, $\cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \gamma = 0$. 77. (14, 13, -5). 78. $\cos \alpha = \frac{11}{\sqrt{669}}$, $\cos \beta = -\frac{22}{\sqrt{669}}$, $\cos \gamma = \frac{8}{\sqrt{669}}$. 79. a) $m = 1$ și $m = \frac{1}{7}$; b) $m = -2$. 80. $x = -1 + x'$, $y = -4 + y'$, $z = -10 + z' \Rightarrow x'^2 - y'^2 + 2y'x' - x'z' + 18 = 0$. 81. $x'^2 + 5y'^2 - 1 = 0$. 82. $x'y' - 2 = 0$. 83. $x = 1 + x'$, $y = 1 + y' \Rightarrow x'^2 + 2x'y' + y'^2 - 8 = 0$; $x' = x'' \cos \alpha - y'' \sin \alpha$, $y' = x'' \sin \alpha + y'' \cos \alpha$, $\alpha = 45^\circ$, $x''^2 - 4 = 0$; $\alpha = 135^\circ$, $y''^2 - 4 = 0$. 84. Deoarece $x_1 = x'_1 \cos \alpha - y'_1 \sin \alpha$, $y_1 = x'_1 \sin \alpha + y'_1 \cos \alpha$ și $x_2 = x'_2 \cos \alpha - y'_2 \sin \alpha$, $y_2 = x'_2 \sin \alpha + y'_2 \cos \alpha$, rezultă $x_1 y_2 - x_2 y_1 = x'_1 y'_2 - y'_1 x'_2$. 85. $x = \frac{1}{\sqrt{6}}(x' - \sqrt{2}y' + \sqrt{3}z')$, $y = \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{6}}(x' - \sqrt{2}y' - \sqrt{3}z')$, $z = \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{6}}(2x' + \sqrt{2}y') \Rightarrow \sqrt{3}x'^2 - y = 0$.

4. Planul și dreapta în spațiu

28. a) $-4x + y + 14z = 0$; b) $3x - y + 2z - 6 = 0$. 29. Nu sînt coplanare. 30. $-x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} - 1 = 0$. 31. $x + y + 3z = 0$. 32. a) $\frac{2}{11}x - \frac{9}{11}y + \frac{6}{11}z - 2 = 0$; b) $-\frac{6}{11}x + \frac{6}{11}y + \frac{7}{11}z - 3 = 0$. 33. a) 4; b) 10. 34. a) 90° ; b) 0° . 35. a) Coliniare; se află pe dreapta $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-6}{2} = \frac{z-1}{-1}$. b) Coliniare; se află pe dreapta $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{-1}$. c) Necoliniare. 36. a) $\cos \alpha = \frac{12}{25}$, $\cos \beta = \frac{9}{25}$, $\cos \gamma = \frac{4}{5}$; b) Vectorul director al dreptei este $u(6, 7, 6)$, astfel că $\cos \alpha = \frac{6}{11}$, $\cos \beta = \frac{7}{11}$, $\cos \gamma = \frac{6}{11}$. 37. a) $\arccos \frac{72}{77}$; b) $u_1(10, 2, 11)$ și $u_2(3, 12, 4)$ implică $\angle(u_1, u_2) = \arccos \frac{98}{195}$. 38. $\frac{x-2}{-4} = \frac{y-3}{8} = \frac{z+5}{10}$. 39. Rezolvăm cele două sisteme de ecuații în raport cu y și z , de exemplu, a) $x = t$, $y = -7t + 7$, $z = -19t + 17$; b) $x = t$, $y = -3t + 5$, $z = -5t + 4$. 40. a) $7x - 5y + z - 3 = 0$; b) $-10x - y + 8z - 49 = 0$; c) $x - y = 0$; d) $-2x + y + 3z = 0$. 41. Planul trece prin M și are normala $\vec{OM}: 3x - 6y + 2z - 49 = 0$. 42. $(M_1M_2M_3) - x + 3y + z - 2 = 0$; $(M_1M_2M_4) - x + 4y + z - 2 = 0$; $(M_1M_3M_4) 2x - 8y - 3z + 6 = 0$; $(M_2M_3M_4) 2x - 11y - 3z + 9 = 0$. 43. $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. 44. Sistemul de ecuații este compatibil determinat, cu soluția $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$. 45. Sistemul format cu cele trei ecuații este compatibil, simplu nedeterminat. Obținem $\lambda = 3$ și ecuațiile dreptei de intersecție $x = -1 + t$, $y = -1 + 2t$, $z = t$. 46. a) Sînt concurente în punctul (3, -1, 0). b) Primul și al treilea plan sînt paralele. Primele două plane, ca și ultimele două plane, se intersectează după o dreaptă. c) Planele se intersectează după aceeași dreaptă de ecuații $2x - y + 5z - 4 = 0$, $3y - 17z + 22 = 0$. 47. a) Concurente în punctul $(-\frac{4}{11}, -\frac{5}{11}, \frac{13}{11})$; b) Trei dintre plane se intersectează într-un punct ce nu aparține celui de-al patrulea. 48. Deoarece planul trece prin origine, căutăm ecuația sub forma $Ax + By + Cz = 0$. Fie $N(A, B, C)$, astfel că

$N \cdot k = 0$ și $\angle(N, N_1) = 90^\circ$
 $\Rightarrow u \cdot j = 0$ și $u \cdot u_1 = 0$

50. $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{2}$

trece prin dreapta d și

Ecuatiile dreptei $x + y + z = 0$

$M(-3, 5, -3)$. Ecuația

$-8x + 11y + 9z - 26 = 0$

$-x + 6y + 7z = 0$. 51

și $u \cdot u_2 = 0$ rezultă $u(2, 1, -1)$

și este paralel cu dreapta d

și u . Obținem $3x - 2y + z = 0$

$3x + 4y - 5z - 10 = 0$, și $u_2(8, -3, 3)$. Lungimea

care trece prin M_1 și M_2 este

Distanța de la punctul M_1 la dreapta

reprezintă înălțimea h a triunghiului

pe vectorii M_1M_2, u_1 și u_2

adică $h = \frac{M_1M_2 \sin \alpha}{\sin \beta}$

adică $h = \frac{M_1M_2 \sin \alpha}{\sin \beta}$

adică $h = \frac{M_1M_2 \sin \alpha}{\sin \beta}$

adică $h = \frac{M_1M_2 \sin \alpha}{\sin \beta}$

adică $h = \frac{M_1M_2 \sin \alpha}{\sin \beta}$

adică $h = \frac{M_1M_2 \sin \alpha}{\sin \beta}$

adică $h = \frac{M_1M_2 \sin \alpha}{\sin \beta}$

adică $h = \frac{M_1M_2 \sin \alpha}{\sin \beta}$

adică $h = \frac{M_1M_2 \sin \alpha}{\sin \beta}$

adică $h = \frac{M_1M_2 \sin \alpha}{\sin \beta}$

adică $h = \frac{M_1M_2 \sin \alpha}{\sin \beta}$

adică $h = \frac{M_1M_2 \sin \alpha}{\sin \beta}$

adică $h = \frac{M_1M_2 \sin \alpha}{\sin \beta}$

adică $h = \frac{M_1M_2 \sin \alpha}{\sin \beta}$

adică $h = \frac{M_1M_2 \sin \alpha}{\sin \beta}$

adică $h = \frac{M_1M_2 \sin \alpha}{\sin \beta}$

adică $h = \frac{M_1M_2 \sin \alpha}{\sin \beta}$

adică $h = \frac{M_1M_2 \sin \alpha}{\sin \beta}$

adică $h = \frac{M_1M_2 \sin \alpha}{\sin \beta}$

adică $h = \frac{M_1M_2 \sin \alpha}{\sin \beta}$

adică $h = \frac{M_1M_2 \sin \alpha}{\sin \beta}$

adică $h = \frac{M_1M_2 \sin \alpha}{\sin \beta}$

adică $h = \frac{M_1M_2 \sin \alpha}{\sin \beta}$

adică $h = \frac{M_1M_2 \sin \alpha}{\sin \beta}$

adică $h = \frac{M_1M_2 \sin \alpha}{\sin \beta}$

adică $h = \frac{M_1M_2 \sin \alpha}{\sin \beta}$

adică $h = \frac{M_1M_2 \sin \alpha}{\sin \beta}$

$v_1 = (5i + 6j - 3k)/7$,
 $v_2 = -9i + j - 17k$,
 $\sqrt{61}$. 72. a) $h_a = \frac{35}{\sqrt{61}}$;
 $\frac{2}{35} \sqrt{1190}$, $h_b = \sqrt{17}$.
 15/4, 1); $\lambda_2 = -2 \Rightarrow$
 78. $\cos \alpha = \frac{11}{\sqrt{669}}$,
 $x = -1 + x'$, $y =$
 $z - 1 = 0$. 82. $x'y' -$
 $x'' \cos \alpha - y'' \sin \alpha$,
 deoarece $x_1 = x'_1 \cos \alpha -$
 $+ y'_2 \cos \alpha$, rezultă
 $(x' - \sqrt{2}y' - \sqrt{3}z')$.
 $-x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} -$
 $\frac{6}{11}y + \frac{7}{11}z - 3 = 0$.
 $\frac{y-6}{2} = \frac{z-1}{-1}$.
 $\frac{12}{25}$, $\cos \beta = \frac{9}{25}$.
 $\frac{6}{11}$, $\cos \beta = \frac{7}{11}$.
 $\alpha_2 = \arccos \frac{98}{195}$.
 și z , de exemplu,
 a) $7x - 5y +$
 41. Planul trece
 $y + z - 2 = 0$;
 $-11y - 3z +$
 năut, cu soluția
 nedeterminat.
 a) Sînt con-
 ă plane, ca și
 aceeași dreaptă
 $\frac{5}{11}$, $\frac{13}{11}$);
 48. Deoarece
 C), astfel că

$N \cdot k = 0$ și $\angle(N, N_1) = 60^\circ$, $N_1(2, 1, -\sqrt{5})$ implică $3x - y = 0$ sau $x + 3y = 0$. 49. $u(l, m, n) \Rightarrow$
 $\Rightarrow u \cdot j = 0$ și $u \cdot u_1 = 0$, $u_1(3, -2, 1)$. Deci $u(1, 0, -3)$ și ecuațiile dreptei sînt $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-3}$;
 50. $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{1}$. 51. Dreapta căutată este conținută în planul P și în planul P_1 ce
 trece prin dreapta d și este perpendicular pe planul P . Ecuația planului P_1 este $-x + 2y - z = 0$.
 Ecuațiile dreptei $x + y + z - 3 = 0$, $-x + 2y - z = 0$. 52. Dreptele sînt concurente în punctul
 $M(-3, 5, -3)$. Ecuația planului este $9x + 10y - 7z - 44 = 0$. 53. a) $2x - y + 3z - 4 = 0$,
 $-8x + 11y + 9z - 26 = 0$; b) $2x - 3y + 4z + 9 = 0$, $25x + 18y + z - 5 = 0$; c) $4x + 3y - 2z = 0$,
 $-x + 6y + 7z = 0$. 54. a) Fie $u_1(1, 2, -1)$, $u_2(-7, 2, 3)$ și $u(l, m, n)$. Din condițiile $u \cdot u_1 = 0$
 și $u \cdot u_2 = 0$ rezultă $u(2, 1, 4)$. Dreapta căutată este conținută în planul P_1 ce trece prin $M_1(7, 3, 9)$
 și este paralel cu direcțiile u_1 și u_2 și în planul P_2 ce trece prin $M_2(3, 1, 1)$ și este paralel cu direcțiile u_2
 și u . Obținem $3x - 2y - z - 6 = 0$, $5x + 34y - 11z - 38 = 0$. b) Direcția dreptei căutate este $u(7, 1, 5)$;
 $3x + 4y - 5z - 10 = 0$, $-26x + 7y + 35z - 13 = 0$. 55. a) $M_1(-3, 6, 3)$ și $u_1(4, -3, 2)$ și $M_2(4, -1, -7)$
 și $u_2(8, -3, 3)$. Lungimea perpendiculară comună este egală cu distanța de la punctul M_2 la planul
 care trece prin M_1 și este paralel cu direcțiile u_1 și u_2 . Ecuația planului este $-3x + 4y + 12z - 69 = 0$.
 Distanța de la punctul M_2 la acest plan este 13. Se poate observa că lungimea perpendiculară comună
 reprezintă înălțimea corespunzătoare bazei construite pe vectorii u_1 și u_2 , în paralelipipedul construit
 pe vectorii $\overrightarrow{M_1M_2}$, u_1 și u_2 . b) $M_1(0, 0, 0)$, $u_1(1, 1, 1)$ și $M_2(1, 2, 0)$, $u_2(0, 0, 1)$; lungimea perpen-
 diculară comună este $\frac{1}{\sqrt{2}}$. c) $M_1(-7, -4, -3)$, $u_1(3, 4, -2)$ și $M_2(21, -5, 2)$, $u_2(6, -4, -1)$;
 $d = 13$; d) $M_1(1, 1, 1)$, $u_1(0, -1, -1)$ și $M_2(0, 0, -2)$, $u_2(6, -3, 0)$; $d = 1$. 56. $M_1(7, 1, 3)$,
 $u_1(3, 4, 2)$ și $M_2(2, -1, 0)$, $u_2 = u_1$. Dreptele sînt paralele. Distanța între drepte este înălțimea
 paralelogramului construit pe vectorii $\overrightarrow{M_1M_2}$ și u_1 , corespunzătoare bazei u_1 . Obținem $d = 3$. 57.
 $-2x + 16y + 13z - 31 = 0$. 58. $M_1\left(\frac{27}{2}, -\frac{17}{2}, 0\right)$, $u_1(3, -1, 4)$ și $M_2(-7, 5, 9)$, $u_2(3, -1, 4)$;
 $d = 25$; $63x + 109y - 20z + 76 = 0$. 59. Planul căutat face parte din fasciculul de plane cu planele
 bază $4x - y + 3z - 1 = 0$ și $x + 5y - z + 2 = 0$. Ecuația fasciculului de plane este $4x - y + 3z - 1 +$
 $+ \lambda(x + 5y - z + 2) = 0$. a) $\lambda = \frac{1}{2}$, $9x + 3y + 5z = 0$; b) $\lambda = -5/7$, $23x - 32y + 26z - 17 = 0$;
 c) $\lambda = \frac{1}{5}$, $21x + 14z - 3 = 0$; d) $\lambda = 3$, $7x + 14y + 5 = 0$. 60. $x + 20y + 7z - 12 = 0$. 61.
 $N(-1, -1, -3)$, $x + y + 3z - 7 = 0$. 62. a) $-x - y + 3z - 4 = 0$; b) $-x + y - z + 2 = 0$;
 63. Fasciculul de plane ce trece prin (d) are ecuația $2x - y + z - 1 + \lambda(x + y - z) = 0$. Deoarece
 planul trece prin M_0 , obținem $\lambda = -\frac{3}{2}$ și deci $x - 5y + 5z - 2 = 0$. 64. $x - 1 + \lambda(x + 2y - z - 1)$
 $= 0$ este perpendicular pe $x + y + z = 0$, implică $\lambda = -0,5$ și deci $-x + 2y - z + 1 = 0$. 65. a) Inter-
 sectează planul în punctul $M(0, 0, -2)$. b) Dreapta este paralelă cu planul. c) Dreapta este conți-
 nută în plan. 66. Proiecția punctului are coordonatele $x = 5$, $y = -1$, $z = 0$. 67. Punctele de intersecție
 sînt $M_1(4, 0, 3)$, $M_2\left(\frac{19}{9}, \frac{79}{9}, \frac{14}{3}\right)$, astfel că ecuațiile dreptei sînt $\frac{x-4}{-17} = \frac{y}{79} = \frac{z-3}{15}$.
 68. $M'(2, 9, 6)$. 69. $5x + 7y + 9z - 44 = 0$. 70. $M'_0(3, 15, -3)$; $23x - 15y - 19z + 99 = 0$. 71.
 $M_0(1, 1, 1)$, $N(1, 1, 2)$; $x + y + 2z - 4 = 0$. 72. $\lambda = 2$, $M(-5, 2, -2)$. 73. $A(8, 0, 0)$, $B(0, -6, 0)$,
 $C(0, 0, 4)$.

5. Șiruri de numere reale

23. a) $\left| a_n - \frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3(3n^2 + 1)} < \varepsilon$ dacă $n > \left(\frac{1-3\varepsilon}{9\varepsilon} \right)^{1/2}$, deci $n_\varepsilon = E \left[\left(\frac{1-3\varepsilon}{9\varepsilon} \right)^{1/2} \right]$; b) $|a_n| = \frac{n^2}{2n^3 + 1} < \frac{n^2}{2n^3} = \frac{1}{2n} < \varepsilon$ dacă $n > \frac{1}{2\varepsilon}$, deci $n_\varepsilon = E \left(\frac{1}{2\varepsilon} \right)$; c) $\left| a_n - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2(n^2 + 1)} < \frac{1}{2n^2} < \varepsilon$ dacă $n > \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}$, deci $n_\varepsilon = E \left(\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \right)$. 24. a) Pentru $n = 2k$, $a_{2k} = 2 \frac{2k}{2k+1} \rightarrow 2$; pentru $n = 2k+1$, $a_{2k+1} = 0 \rightarrow 0$. Deoarece cele două subșiruri au limite diferite, rezultă că (a_n) nu este convergent. b) Similar: $a_{2k} = 1 \rightarrow 1$ și $a_{2k+1} = -\frac{2k}{2k+2} \rightarrow -1$. 25. $a_{2k} = 0 \rightarrow 0$, $a_{4k+1} = (4k+1)^3 \rightarrow \infty$, ceea ce arată că (a_n) nu are limită. Pentru orice $M \in \mathbb{R}$, există $k \in \mathbb{N}$ așa ca $a_{4k+1} = (4k+1)^3 > M$, ceea ce arată că șirul (a_n) este nemărginit. 26. a) $a_n = \frac{n+1}{2n} \rightarrow \frac{1}{2}$; b) $a_n = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \rightarrow \frac{1}{3}$; c) $a_n = \frac{(n+1)^2}{4n^2} \rightarrow \frac{1}{4}$; d) $a_n = 2 \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right] \rightarrow 2$. 27. a) $|a_n| \leq \frac{n}{n^2+1} + \frac{n^3}{(n^2+1)(3n+1)} \rightarrow 0$ și deci $a_n \rightarrow 0$; b) $0 < a_n = \frac{n^2}{n!} < \frac{n^2}{n(n-1)(n-2)} \rightarrow 0 \Rightarrow a_n \rightarrow 0$; c) $0 < a_n = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{3} \dots \frac{2}{n} < 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{n-2} \rightarrow 0 \Rightarrow a_n \rightarrow 0$; Fie $n_1 = E(a) + 1$. Atunci $0 < a_n = \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \dots \frac{a}{n_1-1} \cdot \frac{a}{n_1} \cdot \frac{a}{n_1+1} \dots \frac{a}{n} < \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \dots \frac{a}{n_1-1} \cdot \left(\frac{a}{n_1} \right)^{n-n_1+1} \rightarrow 0$ și deci $a_n \rightarrow 0$; d) Prin inducție se arată că $a_n = \frac{2n-1}{n}$. Deci $a_n \rightarrow 2$. 28. a) $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq a_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$. Trecând la limită, obținem $\lim a_n = 1$; b) $a_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \rightarrow \frac{1}{2}$; c) $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{n(n+1)} + \sqrt[3]{n^2}} \rightarrow 0$; d) $a_n = \frac{\sqrt[3]{n}(\sqrt[3]{n+1} + \sqrt[3]{n-1})}{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{n^2-1} + \sqrt[3]{(n-1)^2}} \rightarrow \frac{2}{3}$; e) $a_n = \frac{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{n(n+1)} + \sqrt[3]{n^2}}{\left[\left(\frac{3}{5} \right)^n + 1 \right] \cdot \left[3 \cdot \left(\frac{3}{5} \right)^n + 5 \right]^{-1}} \rightarrow \frac{1}{5}$. f) Dacă $\alpha < \beta$, atunci $\lim a_n = \frac{1}{\beta}$; dacă $\alpha > \beta$, atunci $\lim a_n = \frac{1}{\alpha}$; dacă $\alpha = \beta$, atunci $\lim a_n = \frac{1}{\alpha}$; g) $a_n = \frac{1}{\alpha^{-n} + \alpha^n}$; dacă $0 < \alpha < 1$, atunci $\lim a_n = 0$; dacă $\alpha = 1$, $a_n = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$; dacă $\alpha > 1$, atunci $\lim a_n = 0$; h) $a_n = \left(2 - \frac{1}{2^n} \right) \cdot \left[3 + \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right] \rightarrow 6$; i) $a_n = \frac{3^{-n} + 2^{1-n} + 1}{2^{-n} + 3 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^n + 2} \rightarrow \frac{1}{2}$. 29. a) Pentru $a_0 = 0$, se arată prin inducție că $a_{2k} = \frac{2k}{2k+1}$ și $a_{2k+1} = 1$. Prin urmare, $\lim a_n = 1$ și șirul este convergent. b) Pentru $a_0 = 1$ se arată prin inducție că $a_{2k} = 1$ și $a_{2k+1} = \frac{2k+1}{2k+2}$, astfel că $\lim a_n = 1$ și deci șirul (a_n) este convergent. 30. a) $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$; $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a}{n+1} < 1, \forall n \geq a$. Astfel (a_n) este monoton descrescător și mărginit inferior și deci este convergent. Fie $l = \lim a_n$. Deoarece $a_{n+1} = \frac{a}{n+1} a_n$, rezultă prin trecere la limită $l = 0 \cdot l$, adică $l = 0$. b) $a_n > 0$; $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5+2n}{4+3n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Șirul fiind monoton descrescător și mărginit inferior, este convergent. Fie $l = \lim a_n$. Deoarece $a_{n+1} = \frac{5+2n}{4+3n} a_n$, prin trecere la limită, rezultă $l = \frac{2}{3} l$. Deci $l = 0$ și $a_n \rightarrow 0$. c) Deoarece $a_0 > 0$, rezultă $a_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}$

și $a_n = 1 + \dots$
 fapt ce arată că
 $-a_{2k} > 0$ și
 rezultă că a_{2k+1}
 Să arătăm că
 $I_2 = 1 + \frac{2}{1}$ și
 $\Rightarrow 1 + 2/1$ imp
 Pentru a deto
 $= \frac{1}{(2n+1)(2n)}$
 $\lim a_n = l$. De
 n
 funcția $f(x) =$
 tegrabilă pe
 $a_1 < b_1$. Se
 $\dots \triangleright a_n >$
 definiție, ded
 $+ \dots + \frac{1}{2}$
 (a_n) este con
 $-\frac{1}{1+3n}$
 $n > n_\varepsilon = E$
 $-\frac{1}{7} + \frac{1}{5}$
 $-\frac{1}{n+2}$
 $= E \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)$
 $-\frac{1}{n+p}$
 32. a) a_{n+1}
 $-a_n >$
 $+\frac{1}{\sqrt{n+p}}$
 $+\frac{1}{n}$

și $a_n = 1 + \frac{2}{a_{n-1}} < 1 + 2$. Deci $1 < a_n < 3, \forall n \in \mathbb{N}$. Apoi $a_{n+2} - a_n = \frac{4}{a_{n-2}a_{n-1}a_n a_{n+1}} (a_n - a_{n-2})$,

fapt ce arată că $a_{n+2} - a_n$ are același semn cu $a_n - a_{n-2}$. Deoarece $a_2 - a_0 > 0$, rezultă că $a_{2k+2} - a_{2k} > 0$ și deci (a_{2k}) este crescător. Cum $1 < a_{2k} < 3$, există $l_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k}$. Deoarece $a_3 - a_1 < 0$, rezultă că $a_{2k+1} - a_{2k-1} < 0$ și deci (a_{2k+1}) este descrescător. Cum $1 < a_{2k+1} < 3$, există $l_2 = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1}$.

Să arătăm că $l_1 = l_2$. Trecând la limită în relațiile $a_{2k+1} = 1 + \frac{2}{a_{2k}}$ și $a_{2k+2} = 1 + \frac{2}{a_{2k+1}}$, obținem $l_2 = 1 + \frac{2}{l_1}$ și $l_1 = 1 + \frac{2}{l_2}$, de unde $(l_2 - l_1)(l_1 l_2 - 2) = 0$. Deoarece $l_1 l_2 \neq 2$ (în acest caz $l_2 = 1 + \frac{2}{l_1}$ și $l_1 = 1 + \frac{2}{l_2}$ implică $1 = 0$, imposibil), rezultă că $l_1 = l_2$. Prin urmare, există $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l = l_1 = l_2$.

Pentru a determina l trecem la limită în relația de definiție: $l = 1 + 2/l \Rightarrow l = 2$; d) $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0 \Rightarrow (a_n)$ crescător; $\frac{n}{n+n} < a_n < \frac{n}{n+1} < 1 \Rightarrow (a_n)$ mărginit. Deci există $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$. Deoarece $a_n = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}} \right)$ reprezintă suma Riemann pentru

funcția $f(x) = \frac{1}{1+x}, x \in [0, 1]$, corespunzătoare diviziunii prin puncte echidistante și f este in-

tegrabilă pe $[0, 1]$, rezultă că $l = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$; e) $a_1' = \frac{a_0 + b_0}{2} > a_0, b_1 = \frac{a_0 + 2b_0}{3} < b_0$ și $a_1 < b_1$. Se arată prin inducție că $a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Deci $b_0 > b_1 > \dots > b_n > \dots > a_n > \dots > a_0$. Prin urmare, există $l_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ și $l_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Trecând la limită în relațiile de

definiție, deducem $l_1 = l_2$. 31. a) $|a_{n+p} - a_n| \leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots + \frac{1}{2^{n+p}} = \frac{1}{2^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{p-1}} \right) = \frac{1}{2^n} \left(1 - \frac{1}{2^p} \right) < \frac{1}{2^n} < \epsilon$ dacă $n > n_\epsilon = E \left(-\frac{\ln \epsilon}{\ln 2} \right), \forall p \in \mathbb{N}$. Aceasta arată că (a_n) este convergent. b) $a_n = \frac{1}{3} \left[1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{1+3(n-1)} - \frac{1}{1+3n} \right] = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{1+3n} \right)$. Atunci $|a_{n+p} - a_n| = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1+3n} - \frac{1}{1+3n+3p} \right) < \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+3n} < \frac{1}{3} < \epsilon$, pentru orice

$n > n_\epsilon = E \left(\frac{1}{\epsilon} \right)$ și orice $p \in \mathbb{N}$. Deci șirul este convergent. c) $a_n = \frac{1}{3} \left(2 - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+4} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} \right) \Rightarrow |a_{n+p} - a_n| < \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} \right) < \frac{1}{n} < \epsilon, \forall n > n_\epsilon = E \left(\frac{1}{\epsilon} \right), \forall p \in \mathbb{N}$ și deci (a_n) este convergent; d) $a_n = 1 - \frac{1}{n+1} \Rightarrow |a_{n+p} - a_n| = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \epsilon, \forall n > n_\epsilon = E \left(\frac{1}{\epsilon} \right), \forall p \in \mathbb{N}$ și deci (a_n) este convergent.

32. a) $a_{n+p} - a_n = \frac{11+n}{2n+3} + \frac{12+n}{2n+5} + \dots + \frac{10+n+p}{2n+2p+1} > \frac{p(10+n+p)}{2n+2p+1}$, de unde $|a_{n+p} - a_n| > \frac{3n(10+4n)}{5n+1} > 1$ și deci (a_n) este divergent; b) $a_{n+p} - a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+p}} > \frac{p}{\sqrt{n+p}} \Rightarrow |a_{2n} - a_n| > \frac{n}{\sqrt{2n}} \rightarrow \infty$ și deci (a_n) este divergent. 33. Deoarece $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1}$, rezultă $n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) < 1 < (n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \Leftrightarrow n < \frac{1}{\ln(n+1) - \ln n}$

$\ln(n+1) - \ln n > \frac{1}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Din ultima inegalitate scrisă pentru $1, 2, \dots, n$ obținem $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} > \ln(n+1) > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$. Deci $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n > \ln(n+1) - \ln n > 0$ și $a_n > 0$. Aceasta arată că (a_n) este mărginit inferior. Apoi $a_n - a_{n+1} = \ln(n+1) - \ln n - \frac{1}{n+1} > 0 \Rightarrow (a_n)$ este descrescător. Prin urmare, șirul (a_n) este convergent. Se notează $C = \lim_n a_n$. Limita C a șirului se numește constanta lui Euler, $C = 0,5772$.

34. a) 0; b) 0; c) 2; d) 0; e) $\frac{1}{6}$; f) $\frac{a}{c}$; g) 0; h) $\frac{1}{(p+1)}$; i) $\frac{1}{2}$; j) $\frac{2^p}{(p+1)}$; k) $\lim_n a_n = \lim_n \frac{[\ln(n+1)]^2}{(n+1)^a - n^a} = \lim_n \frac{n^{a-1}}{(n+1)^a - n^a} \cdot \lim_n \{[\ln(n+1)]^2 n^{1-a}\} = \frac{1}{a} \lim_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{1-a} \lim_n \left\{ \frac{2}{n} \left[\ln(n+1) \frac{a-1}{2} \right] (n+1)^{\frac{a-1}{2}} \right\}$; pentru $0 < a \leq 1$, $\lim_n a_n = \infty$; $a > 1$, $\lim_n a_n = 0$. 35. $\lim_n \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \lim_n \frac{a_{n+1} - a_n}{n} = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$. 36. Se aplică criteriul lui Stolz. 37. Se aplică rezultatul de la exercițiul rezolvat. 17. a) ∞ ; b) e^{-1} ; c) 1; d) 1; e) $4e^{-1}$; f) 1; g) 1; h) $1/32$. 38. $a_n > 0$ și $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \cos \frac{a}{2^{n+1}} < 1 \Rightarrow (a_n)$

convergent. Apoi $\cos \frac{a}{2^n} = \frac{\sin \frac{a}{2^{n-1}}}{2 \sin \frac{a}{2^n}} \Rightarrow \cos \frac{a}{2^{n-1}} \cdot \cos \frac{a}{2^n} = \frac{\sin \frac{a}{2^{n-2}}}{2^2 \sin \frac{a}{2^n}}, \dots, a_n = \frac{\sin 2a}{2^{n+1} \sin \frac{a}{2^n}}$

$\frac{\sin 2a}{2a} \cdot \frac{2^n}{\sin \frac{a}{2^n}} \rightarrow \frac{\sin 2a}{2a}$. 39. Fie $b_n = \sin \frac{1}{n^2} + \sin \frac{2}{n^2} + \dots + \sin \frac{n}{n^2}$. Atunci $2b_n \sin \frac{1}{2n^2} =$

$\cos \frac{1}{2n^2} - \cos \frac{3}{2n^2} + \cos \frac{3}{2n^2} - \cos \frac{5}{2n^2} + \dots + \cos \frac{2n-1}{2n^2} - \cos \frac{2n+1}{2n^2} = \cos \frac{1}{2n^2} - \cos \frac{2n+1}{2n^2} = 2 \sin \frac{n+1}{2n^2} \sin \frac{1}{2n}$. Rezultă $\lim_n b_n = \frac{1}{2}$ și în baza exercițiului 33. obținem $\lim_n a_n = \frac{1}{2C}$

C fiind constanta lui Euler. 40. a) $a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{n+1}{2n} \rightarrow \frac{1}{2}$; b) $a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\sqrt{n^2+k} - n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{\sqrt{n^2+k} + n} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n} + \frac{2}{\sqrt{n^2+2} + n} + \dots + \frac{n}{\sqrt{n^2+n} + n} \right) \Rightarrow \frac{n+1}{2(\sqrt{n^2+n} + n)} < a_n < \frac{n+1}{2(\sqrt{n^2+1} + n)} \Rightarrow \lim_n a_n =$

$\frac{1}{4}$; c) $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = 1 - \frac{1}{n!} \rightarrow 1$; d) $a_n = \frac{(2-1)(2^2+2+1)}{(2+1)(2^2-2+1)} \dots \frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)(n^2-n+1)} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-2) \cdot (n-1)}{3 \cdot 4 \cdot 5 \dots n \cdot (n+1)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{n^2+n+1}{n(n+1)} \rightarrow \frac{2}{3}$; e) $a_n = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n-1}{n+1} \dots \frac{1}{n+1} = \frac{n!}{(n+1)^n}$; $0 < a_n < 1$; $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} < 1 \Rightarrow (a_n)$ descrescător și deci (a_n) este convergent.

Fie $l = \lim_n a_n$. Trecînd la limită în relația $a_{n+1} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} a_n$, obținem $l = l \cdot e^{-1} \Leftrightarrow l = 0$;

$\lim_n a_n = 0$; f) $a_{2k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2k} = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \dots - \left(\frac{1}{2k-2} - \frac{1}{2k-1}\right) - \frac{1}{2k} < 1$; $a_{2k} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) > 0$. Apoi $a_{2k+2} = a_{2k} +$

$+\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}$
 $\lim a_{2k} = l$. Deoarece
 k
 $\lim a_{2k} = l$. Avem $a_{2k} =$
 k
 Dacă ținem seama
 prin inducție că $a <$
 se arată prin inducție
 Fie $l_1 = \lim_n a_n$, $l_2 =$
 42. a) $1/2$; 1; b) 0
 Avem situațiile: nu
 meni ai șirului (a_n)
 oară. 44. a) e, e^{-1}
 $= \infty$; c) $\lim_n a_n =$

6. Serii nu

20. a) $S_n = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{n+3} \right) \rightarrow \frac{11}{18}$
 $\rightarrow \frac{1}{a+1}$; d) $S_n =$
 $= \ln \frac{n+1}{n} - \ln$
 $= \frac{1}{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n}}$
 $+\frac{1}{\sqrt{2}} + \dots +$
 are aceeași natură
 și divergentă per
 al lui Cauchy, ser
 supuneri apoi că
 $\sum_{n=q}^{\infty} \frac{1}{n(\lg n) \dots}$
 $= \lg^{(k-1)}(n \lg 2)$
 este divergentă

$\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} > a_{2k}$, astfel că șirul (a_{2k}) este crescător și mărginit superior. Deci există

$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = l$. Deoarece $a_{2k+1} = a_{2k} + \frac{1}{2k+1}$, rezultă $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = l$. Este deci de ajuns să calculăm

$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k}$. Avem $a_{2k} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2k} - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2k} \right) = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k}$.

Dacă ținem seama de exercițiul 30, d), rezultă că $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = \ln 2$, iar $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ln 2$. 41. Se arată

prin inducție că $a < a_n < b$, $a < b_n < b$, astfel că cele două șiruri sînt mărginite. De asemenea, se arată prin inducție că (a_n) este crescător, (b_n) este descrescător. Deci, șirurile sînt convergente. Fie $l_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, $l_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Prin trecerea la limită în relația $a_n = (a_{n-1} + b_{n-1})/2$ obținem $l_1 = l_2$.

42. a) $1/2$; 1; b) 0; $1/2$; c) -1 ; 1; d) $-1/2$; $3/2$; e) 0; 1. 43. Fie $\mu_a = \sup a_n$ și $\mu'_a = \sup a_k$.

Avem situațiile: nu există nici un termen al șirului (a_n) cu $a_n > \mu'_a$ și atunci $\mu'_a = \mu_a$; există termeni ai șirului (a_n) mai mari ca μ'_a și atunci $\mu_a > \mu'_a$. Similar se procedează pentru marginea inferioară.

44. a) e, e^{-1} ; b) -1 , 0, 1. 45. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -1/2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3/2$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$; c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1/2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$; d) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -e/2$; $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{2}e + 1$.

6. Serii numerice

20. a) $S_n = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \rightarrow \frac{11}{18}$; b) $S_n = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} \right) \rightarrow \frac{1}{12}$; c) $S_n = \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+n+1} \rightarrow \frac{1}{a+1}$; d) $S_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) \rightarrow \frac{1}{2}$; e) $a_n = [\ln(n+1) - \ln n] - [\ln n - \ln(n-1)] \Rightarrow S_n = \ln \frac{n+1}{n} - \ln 2 \rightarrow -\ln 2$; f) $a_n = \frac{1}{\sqrt{2n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \Rightarrow S_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \rightarrow 1$.

21. a) $a_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} - \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \rightarrow \infty$; b) $a_n = \frac{n+1}{n} \rightarrow 1$; c) $a_n \rightarrow 1$; d) $a_n \rightarrow 1/3$; e) $S_n = \frac{1}{\sqrt{10}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \geq \frac{1}{\sqrt{10}} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \Rightarrow S_n \rightarrow \infty$ și deci seria este divergentă.

22. Seria are aceeași natură cu seria $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln 2^n)^p} = \frac{1}{(\ln 2)^p} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ și deci este convergentă pentru $p > 1$ și divergentă pentru $p \leq 1$.

23. Se aplică metoda inducției. Pentru $p = 1$, după criteriul de condensare al lui Cauchy, seria $\sum_{n=q}^{\infty} \frac{1}{n \lg n}$ are aceeași natură cu seria $\sum_{n=q}^{\infty} (\lg 2)^{-1} \frac{1}{n}$ și deci este divergentă. Presupunem apoi că seria $\sum_{n=q}^{\infty} \frac{1}{n(\lg n) \dots (\lg^{(p)} n)}$ este divergentă. După criteriul de condensare seria

$\sum_{n=q}^{\infty} \frac{1}{n(\lg n) \dots (\lg^{(p+1)} n)}$ are aceeași natură cu seria $\sum_{n=q}^{\infty} \frac{1}{\lg^{2p} \dots \lg^{(p+1)} 2^n}$. Deoarece $\lg^{(k)} 2^n = \lg^{(k-1)}(n \lg 2) = \lg^{(k-2)}(\lg n + \lg \lg 2) < \lg^{(k-1)} n$, după criteriul I al comparației ultima serie este divergentă și deci proprietatea inductivă este adevărată pentru $p + 1$.

24. a) $a_n \leq \frac{1}{n^p}$, convergentă și deci proprietatea inductivă este adevărată pentru $p + 1$.

gentă; b) $a_n \geq \frac{1}{2n}$, divergentă; c) $a_n \leq \frac{1}{n^{3/2}}$, convergentă; d) $\ln n \leq n \Rightarrow a_n \geq \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ și cum $\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow 1$, rezultă că este divergentă; e) $a_n \geq \frac{1}{n}$, divergentă; f) pentru $a = 1$, $a_n \leq \frac{1}{n^2}$, convergentă; pentru $a > 1$, $a_n < \frac{1}{a^n}$, convergentă; pentru $a \in (0, 1)$, $a_n = \frac{1-a}{n(1-a^{n+1})} \geq \frac{1-a}{n}$, divergentă; g) $a > 1 \Rightarrow a_n \leq \frac{1}{a^n}$, convergentă; $a = 1 \Rightarrow a_n = \frac{1}{n+1}$, divergentă; $a \in [0, 1)$, divergentă, după criteriul III al comparației; h) $a < 1 \Rightarrow a_n \leq a^n$, convergentă; $a = 1$, $\lim a_n \neq 0$, divergentă; $a > 1: \sqrt[n]{n!} \leq \sqrt[n]{n^n} = n \Rightarrow a_n \geq \frac{a^n}{n} \rightarrow \infty$, divergentă; i) $a_n \rightarrow 1$, divergentă; j) $a_n \geq \frac{1}{n}$, divergentă; k) $a_n \leq a \left(\frac{2}{3}\right)^n$, convergentă; l) $b_n = \frac{1}{n}$ și după criteriul III al comparației seria este divergentă. 25. $a_n \rightarrow 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$. Se folosește apoi criteriul III al comparației și se obține $b = \frac{5}{18}$. 26. a) Divergentă; b)–g) convergentă; h) $a < 1$, convergentă; $a > 1$, divergentă; $a = 1$, $\lim a_n \neq 0$ divergentă. 27. a)–c) convergentă; d) $a < 1$, convergentă; $a > 1$, divergentă; $a = 1$, $\lim a_n \neq 0$, divergentă; e)–g) convergentă. 28. a) Divergentă; b) divergentă; c) $a < e$, convergentă; $a \geq e$, divergentă; d) $a > 2$, convergentă; $a < 2$, divergentă; $a = 2$, seria armonică, divergentă; e) $a \geq 0$, convergentă; $a < 0$, divergentă; f) $a > e^{-1}$, divergentă; $a < e^{-1}$, convergentă; $a = e^{-1} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{e} > \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{1}{n+1}$ și după criteriul II al comparației seria este divergentă; g) $\alpha < a$, divergentă; $\alpha > a$, convergentă; h) $r < \alpha(b-a)$, convergentă; $r > \alpha(b-a)$, divergentă; i) $a < x$, divergentă; $a > x$, convergentă; $a = x$ – nu se poate afirma nimic, natura seriei depinzând de modul în care a_n tinde la a ; j) $a \leq 2$, divergentă; $a > 2$ convergentă. 29. a) $a_n \leq \frac{1}{n^2}$, convergentă; b) $\ln n < n \Rightarrow a_n < \frac{2}{n^2}$, convergentă; c) $a_n \leq \frac{1}{n^{b/2}}$, convergentă; d) $a_n \leq \frac{1}{2^n}$, convergentă; e) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 0$, convergentă; f) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \frac{a}{e} \Rightarrow a < e$, convergentă; $a > e$, divergentă; $a = e: \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} > 1$, $\lim a_n \neq 0$, divergentă; g) $a < e$, convergentă; $a > e$, divergentă; $a = e$, $\lim a_n \neq 0$, divergentă. h) Criteriul raportului: $a < e$, divergentă; $a > e$, convergentă. Pentru $a = e$, criteriul lui Raabe arată că seria este divergentă; i) $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow 0$, convergentă. j) Criteriul lui Raabe: $a < e^{-1}$, divergentă; $a > e^{-1}$, convergentă. Pentru $a = e^{-1} \Rightarrow n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = n \left(e^{\frac{1}{n+1}} - 1 \right)$. Deoarece $e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, rezultă $e^{\frac{1}{n+1}} - 1 < \frac{1}{n}$ și deci $n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) < 1$ și seria este divergentă; k) $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow \frac{a+1}{2} \Rightarrow a < 1$, convergentă; $a > 1$, divergentă; $a = 1$, $\lim a_n \neq 0$, divergentă. l) Criteriul lui Raabe; convergentă; m) $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow 0$, convergentă. n) Criteriul lui Raabe: $p < \frac{3}{2}$, divergentă; $p > \frac{3}{2}$, convergentă; o) $x < 1$, convergentă; $x > 1$, divergentă; $x = 1$: pentru $b > 1 + a$, conver-

gentă, pentru $b <$ gentă. p) Fie b_n

ției seria este

32. a) $|a_n| \leq \frac{1}{3^n}$ $\leq \frac{1}{n^2}$, absolut

este semiconverge

 > 1 , $\lim a_n \neq 0$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, abDirichlet: $u_n =$ $\leq \frac{1}{2}$, $v_n = \frac{1}{n}$ $= \sin nx \Rightarrow S_n =$

Seria este conver

e) $\lim a_n \neq 0$, dSeria $\sum_{n=2}^{\infty} v_n$ este

monoton descres

i) Seria $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$

în baza criteriului

este semiconver

 $1 + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

divergentă. b)

 $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ seria $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ ca $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ și

gentă, pentru $b < 1 + a$, divergentă. Pentru $x = 1$, $b = a + 1$ se obține seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{a+n}$ diver-

gentă. p) Fie $b_n = \frac{1}{n}$. Cu ajutorul criteriului lui Stolz, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ și după criteriul III al compara-

ției seria este divergentă. 30. a) $E(e^{100} - 1)$; b) 49. 31. Se aplică criteriul lui Leibniz.

32. a) $|a_n| \leq \frac{1}{3^n}$, absolut convergentă; b) $\lim a_n$ nu există și deci seria este divergentă; c) $|a_n| \leq \frac{1}{n^2}$, absolut convergentă. d) Pentru $\alpha > 1$ seria este absolut convergentă. Pentru $\alpha \in (0, 1]$ seria este semiconvergentă (criteriul lui Leibniz). Pentru $\alpha \leq 0$, $\lim a_n \neq 0$, seria este divergentă; e) $|a| > 1$, $\lim a_n \neq 0$, divergentă; $|a| < 1$, absolut convergentă; f) $a = \pm 1$, $\lim a_n \neq 0$, divergentă!

g) $\frac{|a_n|}{n(n+\sqrt{3})} \leq \frac{K}{n^2}$, absolut convergentă. 33. a) Criteriul lui

Dirichlet: $u_n = \sin n \cos n^2 = \frac{1}{2} [\sin(n+n^2) + \sin(n-n^2)] \Rightarrow S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{1}{2} \sin(n+n^2) \leq \frac{1}{2}$, $v_n = \frac{1}{n}$, convergentă; b) $\lim a_n \neq 0$, divergentă; c) Criteriul lui Dirichlet: $v_n = \frac{1}{n}$ și $u_n = \sin nx \Rightarrow S_n = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx \Rightarrow 2 \sin \frac{x}{2} S_n = 2 \sin \frac{n+1}{2} x \cdot \sin \frac{n}{2} x \Rightarrow |S_n| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}$.

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

seria este convergentă. d) Ca la exercițiul anterior, cu $v_n = \frac{1}{n}$; seria este convergentă;

e) $\lim a_n \neq 0$, divergentă; f) $\lim a_n \neq 0$, divergentă. g) Criteriul lui Abel: $u_n = \sqrt{n}$, $v_n = \frac{(-1)^n}{\ln n}$.

Seria $\sum_{n=2}^{\infty} v_n$ este convergentă după criteriul lui Leibniz; $u_n \rightarrow 1$ și deci este mărginit; u_n este monoton descrescător. Deci seria este convergentă. h) $|a_n| \leq \frac{1}{n^{3/2}}$, serie absolut convergentă.

i) Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$ este convergentă, după criteriul lui Dirichlet. Luând $u_n = \cos \frac{1}{n}$ și $v_n = \frac{1}{n} \cos n$,

în baza criteriului lui Abel, seria este convergentă. 34. Da, cum se vede din exemplele a) și b). a) Seria este semiconvergentă. Apoi $c_n = a_1 a_n + a_2 a_{n-1} + \dots + a_n a_1 = (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1}} \right)$. Deoarece $\frac{1}{\sqrt{k} \sqrt{n-k+1}} > \frac{1}{n}$, rezultă că $\lim c_n \neq 0$, deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ este

divergentă. b) În acest caz $c_n = (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1} \right) = (-1)^{n+1} \frac{2}{n+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right)$. Deoarece $|c_n| \rightarrow 0$ (criteriul lui Stolz) și $(|c_n|)$ este descrescător, rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ este convergentă (criteriul lui Leibniz). 35. $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \rightarrow 0$, absolut convergentă. Fie $S(x) =$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ și $S(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$. Atunci $S(x) \cdot S(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$, unde $c_n = \frac{1}{n!} \left(y^n + \frac{n}{1!} y^{n-1} x + \dots + \right)$

$+ \frac{n!}{11} x^n = \frac{1}{n!} (x+y)^n$. Deci $S(x) \cdot S(y) = S(x+y)$. 36. Fie $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$; rezultă $c_n = a^n(n+1)$. Deoarece seria $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ este absolut convergentă, seria $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ este convergentă și egalitatea are loc. 37. a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ este absolut convergentă și are suma e . Dar $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Rightarrow c_n = \frac{2^n}{n!}$. Egalitatea are loc și $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2$; b) Cele două serii sînt absolut convergente și deci seria produs are suma egală cu produsul sumelor celor două serii. 38. a) 1; b) $\frac{1}{9}$; c) $4(1 - \ln 2)^2$; d) $\frac{a^2}{(1-a)^4}$. 39. a) $\frac{31}{30}$; b) $\sqrt{2} - 1$; c) $C = 0,5777$; d) $\frac{2c^2 + 1}{e}$; e) $\ln 2 - \frac{1}{2}$; f) 1.

7. Limite și continuitate pentru funcții

7.1. Limite pentru funcții

12. a) $|x-1| < \delta_x \Rightarrow |f(x) - 1| = |2(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3| \leq 2\delta_x + 3\delta_x^2 + \delta_x^3 < 6\delta_x < \varepsilon$, dacă alegem $\delta_x < 1$ și $0 < \delta_x < \frac{\varepsilon}{6}$; b) $x > \frac{1}{\delta_x} \Rightarrow |f(x)| = \frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{x} < \delta_x < \varepsilon$, dacă alegem $0 < \delta_x < \varepsilon$; c) $|x-1| < \delta_x \Rightarrow f(x) < \frac{-2}{(x-1)^2} < -\frac{2}{\delta_x^2} < -\varepsilon$, dacă $0 < \delta_x < \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$.
 13. a) $x_n = \frac{1}{2n\pi} \rightarrow 0 \Rightarrow f(x_n) = 0 \rightarrow 0$; $x_n = \frac{2}{(4n+1)\pi} \rightarrow 0 \Rightarrow f(x_n) = 1 \rightarrow 1$; b) $x_n = n\pi \rightarrow \infty \Rightarrow f(x_n) = 0 \rightarrow 0$; $x_n = (4n+1)\frac{\pi}{2} \rightarrow \infty \Rightarrow f(x_n) = 1 \rightarrow 1$; c) $x_n = n\pi \rightarrow \infty \Rightarrow f(x_n) \rightarrow \infty$; $x_n = (4n+3)\frac{\pi}{2} \rightarrow \infty \Rightarrow f(x_n) \rightarrow 0$; d) $x_n = \frac{1}{2n\pi} \rightarrow 0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow \infty$; $x_n = \frac{2}{(2n+1)\pi} \rightarrow 0 \Rightarrow f(x_n) = 0 \rightarrow 0$. 14. a) $x_1 = \frac{1}{2n\pi}$, $x_2 = \frac{2}{(2n+1)\pi} \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| = 1$; b) $|x_1 - 1| < \delta_x$, $|x_2 - 1| < \delta_x \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| = \frac{|x_1 - x_2|}{|x_1 + 1| |x_2 + 1|} \leq \frac{|x_1 - 1| + |x_2 - 1|}{|x_1 + 1| |x_2 + 1|} \leq 2\delta_x < \varepsilon$, dacă $0 < \delta_x < \frac{\varepsilon}{2}$.
 15. a) l , nu există, $l_a = 0$; b) $l_s = l_a = 0$; c) l_s, l_a nu există. 16. a) $\frac{1}{n}$; b) 6; c) $-\frac{1}{12}$; d) e ; e) $\frac{1}{e^2}$; f) e^{-1} . 17. $\alpha = 3$, $\beta = -4$, $\gamma = -4$, $\rho = 2$. 18. a) $\frac{n(n+1)}{2}$; b) $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$; c) k ; d) $\frac{3}{2}$; e) $-\frac{1}{2}$; f) $-4 \ln 2$; g) $\frac{\pi}{2}$; h) $-\sqrt{2}$; i) e^2 ; j) e^{-e^2} ; k) $a^a a^a (\ln a)^2$; l) $a^a \cdot a^a \cdot (\ln a) (\ln a + 1)$.
 19. a) \mathbb{R}^2 ; b) $x^2 + y^2 \leq 1$; c) $x \in \mathbb{R}$, $y \in [-1, 1]$; d) $x \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$, $y \in [-2, 2]$; e) $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$; f) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. 20. a) $|x-2| < \delta_x$, $|y-3| < \delta_y \Rightarrow |f(x, y) - 8| = |(x-2)(y-3) + 2(y-3) + 3(x-2)| < \delta_x^2 + 5\delta_x < 6\delta_x < \varepsilon$, dacă $0 < \delta_x < \min\left(1, \frac{\varepsilon}{6}\right)$; b) $|x-1| < \delta_x$, $|y-2| < \delta_y \Rightarrow \left|f(x, y) - \frac{1}{2}\right| < \frac{3}{2}\delta_x < \varepsilon$ dacă $0 < \delta_x < \frac{2\varepsilon}{3}$; c) $|x| < \delta_x$,

rezultă $c_n =$
 convergență și egali-
 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} =$
 absolut convergente
 a) 1; b) $\frac{1}{9}$;
 e) $\ln 2 - \frac{1}{2}$; f) 1.
 $2\delta_\varepsilon + 3\delta_\varepsilon^2 + \delta_\varepsilon^3 >$
 $\frac{1}{x} < \frac{1}{\delta_\varepsilon} < \varepsilon$,
 $0 < \delta_\varepsilon < \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$.
 $x_n = n\pi \rightarrow \infty \Rightarrow$
 $f(x_n) \rightarrow \infty$; $x_n =$
 $\rightarrow 0 \Rightarrow f(x_n) =$
 $< \delta_\varepsilon$, $|x_2 - 1| <$
 dacă $0 < \delta_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2}$.
 b) c) $-\frac{1}{12}$; d) e);
 $\frac{1}{2}$;
 c) $\frac{3}{2}$;
 $(\ln a)(\ln a + 1)$.
 b), $y \in [-2, 2]$;
 $< \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x, y) -$
 $\delta_\varepsilon < \min\left(1, \frac{\varepsilon}{6}\right)$;
 c) $|x| < \delta_\varepsilon$.

$|y| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x, y)| \leq \frac{1}{2}|x| < \frac{\delta_\varepsilon}{2} < \varepsilon$, dacă $0 < \delta_\varepsilon < 2\varepsilon$; d) $|x| < \delta_\varepsilon$, $|y| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x, y)| \leq$
 $\leq (|x| + |y|) \left(1 + \frac{|xy|}{x^2 + y^2}\right) < 3\delta_\varepsilon < \varepsilon$, dacă $0 < \delta_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{3}$; e) $|x| < \delta_\varepsilon$, $|y| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x, y)| \leq$
 $\leq \frac{1}{2}|y| < \frac{1}{2}\delta_\varepsilon < \varepsilon$, dacă $0 < \delta_\varepsilon < 2\varepsilon$. 21. a) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = mx}} f(x, y) = \frac{1+m}{1-m}$, $m \neq 1$; b) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = mx}} f(x, y) = \frac{1-m^2}{1+m^2}$.
 22. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0$; $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ nu există; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 1$,
 $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = -1$; $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ nu există; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ nu există, $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) =$
 $= 1$; $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ nu există; 23. a) 0. b) Nu există. c) e^k . d) 0. e) Nu există.

7.2. Funcții continue

13. a) Continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. b) Continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. c) Continuă pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.
 d) Continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. e) Continuă pe \mathbb{R} . f) Continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. 14. $f(0) = 1$. 15. $f(0) = 0$ și
 $f(1) = \frac{1}{2}$. 16. a) $-\frac{1}{3}$; b) $\frac{4}{5}$; c) 0. 17. $f(x) = 1$, $x > 0$; $f(0) = 0$; $f(x) = -1$, $x < 0$. Nu este
 continuă în $x = 0$. 18. Continuă pe $[0, \infty) \setminus \{\sqrt{n}, n = 1, 2, \dots\}$. 19. $f(x) = g(x)$ continuă pe
 $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; $f \circ g$ continuă pe \mathbb{R} . 20. a) $X(x)$ este discontinuă în orice punct; $(X \circ X)(x) = 0$ este
 continuă pe \mathbb{R} . b) Continuă numai în punctul $x = 0$. c) Discontinuuă în orice punct. 21. $f(x)$ continuă
 pe $[1, 2] \Rightarrow f(x)$ are proprietatea lui Darboux. Cum $f(1) \cdot f(2) < 0$, rezultă că există $\xi \in (1, 2) | f(\xi) = 0$.
 22. a) $x_1, x_2 \in [0, 2]$, $|x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| = \frac{2|x_1 - x_2|}{\sqrt{2x_1 + 3} + \sqrt{2x_2 + 3}} < \frac{\delta_\varepsilon}{\sqrt{3}} = \varepsilon$, deci
 $\delta_\varepsilon = \varepsilon\sqrt{3}$; b) $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $|x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| = 2 \left| \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \right| \cdot \left| \cos \frac{x_1 + x_2}{2} - \sin \frac{x_1 + x_2}{2} \right| \leq$
 $\leq 2\delta_\varepsilon = \varepsilon$, deci $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$; c) $x_1, x_2 \in [1, \infty)$, $|x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| = \frac{|x_1 - x_2| \cdot |x_1 x_2 - 2|}{(x_1^2 + 2)(x_2^2 + 2)} \leq$
 $\leq \delta_\varepsilon \cdot \frac{x_1 x_2}{x_1^2 x_2^2} \leq \delta_\varepsilon = \varepsilon$, deci $\delta_\varepsilon = \varepsilon$. 23. a) f continuă pe $[e, e] \Rightarrow f$ este uniform continuă pe $[e, e]$,
 b) Alegem $x_1 = \frac{1}{n}$, $x_2 = \frac{1}{2n+1} \in (0, e] \Rightarrow |x_1 - x_2| = \frac{n+1}{n(2n+1)} \rightarrow 0$, iar $|f(x_1) - f(x_2)| =$
 $= \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right) \geq \ln 2 \Rightarrow f$ nu este uniform continuă pe $(0, e]$. c) Alegem $x_1 = \left[(4n+1)\frac{\pi}{2}\right]^{1/3}$,
 $x_2 = \left[(4n+3)\frac{\pi}{2}\right]^{1/3} \Rightarrow |x_1 - x_2| \rightarrow 0$, iar $|f(x_1) - f(x_2)| = 2 \Rightarrow f$ nu este uniform continuă.
 d) Uniform continuă. e) Alegem $x_1 = -1 + \frac{1}{n}$, $x_2 = -1 + \frac{2}{n} \in (-1, \infty) \Rightarrow |x_1 - x_2| =$
 $= \frac{1}{n} \rightarrow 0$, iar $|f(x_1) - f(x_2)| \rightarrow \infty \Rightarrow f$ nu este uniform continuă; f) Alegem $x_1 = \frac{1}{n\pi}$, $x_2 =$
 $= \frac{2}{(2n+1)\pi} \in (0, 1) \Rightarrow |x_1 - x_2| \rightarrow 0$, iar $|f(x_1) - f(x_2)| \geq 1$. 24. Alegând $x_1 = \left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\right]^{1/3}$;
 $x_2 = (n\pi)^{1/3}$, conchidem că f_1 și f_2 nu sînt uniform continue. Funcția $(f_1 + f_2)(x) = x$ este uniform
 continuă pe \mathbb{R} . Funcția $f_1 f_2$ nu este uniform continuă pe \mathbb{R} , cum se poate vedea alegînd $x_1 =$
 $= \left[(2n+1)\frac{\pi}{4}\right]^{1/3}$ și $x_2 = \left(\frac{n\pi}{2}\right)^{1/3}$. 25. Nu este continuă. 27. a) Continuă în $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. b) Continuă
 în \mathbb{R}^2 . c) Continuă în \mathbb{R}^2 . d) Continuă pe mulțimea de definiție. e) Continuă în \mathbb{R}^2 . f) Continuă în
 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. g) Continuă în \mathbb{R}^2 . h) Continuă în \mathbb{R}^2 . 28. Uniform continuă pe $(1, 2) \times (1, 2)$.

8. Teoria diferențială a funcțiilor

8.1. Funcții de o variabilă reală

31. a) $\frac{5}{8}$; b) $\frac{7}{6}$; c) $8 \cos 9$; d) 2. 32. a) $f'_a(1) = -1, f'_d(1) = 1$; b) $f'_s(0) = -1, f'_d(0) = 1$; c) $f'_s(0) = -1, f'_d(0) = 0$; d) $f'_s(0) = f'_d(0) = 1$. 33. a) Derivabilă pe $(0, \infty)$. b) Derivabilă pe \mathbb{R} . c) Derivabilă pe $(0, e) \cup (e, \infty)$. d) Derivabilă pe \mathbb{R} . e) Derivabilă pe $(0, \pi)$. f) Derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right\}$. g) Derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$. h) Derivabilă pe \mathbb{R} . 34. $a = 3e^{-1}, b = -2$.
35. a) $2x(x^2 - 1)^{-1/2}(1 + x^2)^{3/2}$; b) $\frac{2}{9}x^{-1/3}(1 + x^{2/3})^{-2/3}$; c) $-\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} e^{\sin \frac{1}{x}}$; d) $6(\ln 2)[x \operatorname{tg}^2 x^2(1 + \operatorname{tg}^2 x^2)2^{\operatorname{tg}^2 x^2}]$; e) $\frac{x^2 + 1}{x^2} \ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} + \frac{4}{x^2 + 1}$; f) $\frac{1}{2}x^{-1/2}(x - 1)^{-1/2}$; g) $\frac{1}{2}(1 - x^2)^{-1/2}$; h) $(ax - x^2)^{-1/2}$; i) $x^x(1 + \ln x)$; j) $x^{2x}x^x \left(\ln^2 x + \ln x + \frac{1}{x} \right)$; k) $x^{\operatorname{tg} x} \left(\frac{1}{\cos^2 x} \ln x + \frac{1}{x} \operatorname{tg} x \right)$; l) $2^{2x}x^x(1 + \ln x) \ln 2$; m) $2 \operatorname{tg} x$; n) $\frac{1}{2}x^{-1/2}(1 + x^2)^{-1} \sqrt{x} [(1 + x^2) \ln(1 + x^2) + 4x^2]$; o) $\frac{1}{4} \left(\operatorname{ctg}^4 \frac{x}{2} - 1 \right)$; p) $\operatorname{tg} x(1 + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x)^{-1}$. 36. a) Nu este aplicabilă: f nu este derivabilă în punctul $x = \frac{\pi}{4}$; b) Este aplicabilă: $c = 1$. 37. a) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Șirul lui Rolle: $+\infty, m, +\infty$. Pentru $m \in (-\infty, 0)$ ecuația are două rădăcini reale: $x_1 \in (0, 1)$ și $x_2 \in (1, \infty)$. Pentru $m = 0$ ecuația are rădăcina dublă $x = 1$. Pentru $m \in (0, \infty)$, ecuația nu are nici o rădăcină reală. b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ și $x = -\frac{1}{(3m)}$. Pentru $m < 0$ ecuația are o singură rădăcină reală $x \in \left(-\frac{1}{(3m)}, +\infty \right)$. Pentru $m = 0$ ecuația are rădăcina dublă $x = 0$. Pentru $m \in \left(0, 36^{-1/3} \right)$ ecuația are trei rădăcini reale $x_1 \in \left(-\infty, -\frac{1}{(3m)} \right)$; $x_2 \in \left(-\frac{1}{(3m)}, 0 \right)$, $x_3 \in (0, \infty)$. Pentru $m = 36^{-1/3}$ ecuația are rădăcina dublă $x_1 = x_2 = -\frac{1}{(3m)}$ și $x_3 \in (0, \infty)$. Pentru $m \in (36^{-1/3}, \infty)$, ecuația are numai o rădăcină reală în intervalul $(0, \infty)$.
38. $c = \frac{5}{4}$. 39. a) Se aplică teorema lui Lagrange pentru $f(x) = \sin x, x \in [a, b]$ și se ține seama că $|f'(c)| = |\cos c| \leq 1$. b) $f(x) = \operatorname{tg} x, x \in [a, b]$. Se ține seama că $\cos^2 a > \cos^2 c > \cos^2 b$. 40. a) $f(x) = -\operatorname{tg} x - x - \frac{x^3}{3}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow f^{(3)}(x) > 0, x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow f''(x)$ crescătoare pe $\left(0, \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow f''(x) > f''(0) = 0 \Rightarrow f'(x)$ crescătoare pe $\left(0, \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow f(x) > f(0) = 0$; b) $f(x) = e^x - 1 - x, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow f'(x) > 0, x \in (0, \infty)$ și $f'(x) < 0, x \in (-\infty, 0) \Rightarrow f(x) > f(0 + 0) = 0, x \in (0, \infty)$ și $f(x) > f(0 - 0) = 0, x \in (-\infty, 0)$. c) Se ia $f(x) = \arcsin x - x - \frac{x^3}{6}, x \in (0, 1)$ și se procedează ca mai înainte. d) $f(x) = x \cos x - \sin x, x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi \right] \Rightarrow f(x) \geq f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1 > 0$. e) $f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{3}, x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0 + 0) = 0$.
41. a) $1 + (e - 1)^{-1}$; b) $1 + \frac{1}{3}\sqrt{8}$. 42. a) $f(x) = \arcsin \sqrt{1 - x^2} + \arccos x - \pi, x \in (-1, 0) \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = \text{const.}, x \in (-1, 0) \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = \text{const.} \Rightarrow \text{const.} = 0$; b) Se ia $f(x) = \arctg x + \arctg \frac{1 - x}{1 + x} - \frac{\pi}{4}, x \in (-1, \infty)$ și $f(x) = \arctg x + \arctg \frac{1 - x}{1 + x} + \frac{3\pi}{4}$.

$x \in (-\infty, -1)$
 c) $f(x) = \arcsin x$
 $g'(x) < 0$ și $g(x) > 0$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = e$
 b) $f''(x) = 4x^2 e^{2x}$
 metoda inducției
 c) $f(x) = (x - 2)^2$
 $\Rightarrow f^{(n)}(x) = 2^{n-1} \cdot 2$
 $- \ln x$; f) $f(x) = \ln x$
 g) $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} x^{-n}$
 h) $f(x) = \frac{3}{4}$
 $+$ $\sum_{k=2}^n (-1)^k$
 50. $f(x) = 11 - x$
 $n = 2: f(x) = 11 - x$
 $= |R_2(x)| = 0$
 $a = 3^2 \Rightarrow f(30)$
 $= \frac{1}{3}, a = 1$
 c) Ca în ex
 $= \ln(1 + x)$
 $= \frac{(0,2)^4}{4} (1 + x)$
 Taylor: $f(2,5)$
 Se folosește
 $< (180^4 + 72)$
 $< \frac{9 \cdot 2^{n+1}}{2^n + 1}$
 $+ \frac{9!}{9!} + \frac{10!}{10!}$
 Luăm $x =$
 58. a) $\cos x$

$x \in (-\infty, -1) \Rightarrow f'(x) = 0$, $x \neq -1 \Rightarrow f(x) = C_1$, $x \in (-1, \infty)$ și $f(x) = C_2$, $x \in (-\infty, -1)$;
 c) $f(x) = \arcsin x + 3 \arccos x + \arcsin 2x\sqrt{1-x^2} - \frac{3\pi}{2}$; se procedează ca mai sus. 43. $f'(x) > 0$,

$g'(x) < 0$ și $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)f(x) \Rightarrow f(x)$ creștătoare, $g(x)$ descrescătoare pentru $x > 0$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) =$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = e$. 44. $0 = \frac{1}{\alpha h} \ln \frac{e^{\alpha h} - 1}{\alpha h}$. 45. a) $f''(x) = (\sin x + x \cos x)^2 g'' + (2 \cos x - x \sin x) g'$

b) $f''(x) = 4x^2 e^{2x^2} g'' + (2 + 4x^2) e^{2x^2} g'$; c) $f''(x) = \frac{1}{x^4} g'' + \frac{2}{x^3} g'$. 46. e) $a=3$, $b=-10$. 48. Se aplică
 metoda inducției. a) $f(x) = e^{(a+b)x} \Rightarrow f^{(n)}(x) = (a+b)^n e^{(a+b)x}$; b) $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} (n-1)! a^n (ax+b)^{-n}$;

c) $f(x) = (x-2)^{-1} - (x-1)^{-1} \Rightarrow f^{(n)}(x) = (-1)^n n! [(x-2)^{-n-1} - (x-1)^{-n-1}]$; d) $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \Rightarrow$
 $\Rightarrow f^{(n)}(x) = 2^{n-1} \cos \left(2x + n \frac{\pi}{2}\right)$; e) $[f(x)]^{(n)} = \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{(n)} \Rightarrow f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} x^{-n-1} n! \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} -$

$-\ln x\right)$; f) $f(x) = \frac{1}{2} [(1+x)^{-1} + (1-x)^{-1}] \Rightarrow f^{(n)}(x) = \frac{1}{2} n! (-1)^n [(1+x)^{-n-1} + (1-x)^{-n-1}]$;

g) $f^{(n)}(x) = (x^2 e^{-2x})^{(n)} = (-2)^{n-5} e^{-2x} [-32x^6 + 90C_n^1 x^4 - 160C_n^2 x^3 + 240C_n^3 x^2 - 240C_n^4 x + C_n^5]$;

b) $f(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x \Rightarrow f^{(n)}(x) = 4^{n-1} \cos \left(4x + n \frac{\pi}{2}\right)$. 49. $f(x) = a^{1/2} \left[1 + \frac{x}{2a} +$

$+ \sum_{k=2}^n (-1)^{k-1} \frac{1 \cdot 3 \dots (2k-3)}{k!} \left(\frac{x}{2a}\right)^k + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{(n+1)!} \left(\frac{x}{2a}\right)^{n+1} \left(1 + \theta \frac{x}{a}\right)^{-n-1/2}$].

50. $f(x) = 11 + 7(x-2) + 4(x-2)^2 + (x-2)^3$. 51. Se folosește formula lui Mac Laurin pentru
 $n=2$: $f(x) = a + \frac{1}{a} \frac{x^2}{2!} + R_2(x) \Rightarrow f(x) \approx y = a + \frac{x^2}{2a}$. 52. a) $\epsilon \leq \frac{|x^5|}{5!} < \frac{1}{2^5 \cdot 5!}$; b) $\epsilon =$

$= |R_2(x)| = \frac{x^3}{16} \cdot \frac{1}{(1+\theta x)^{5/2}} < \frac{1}{16}$. 53. $n=6$. 54. $[-0, 57, 0, 57]$. 55. a) $f(x) = x^{1/3}$, $x=30$,
 $a=3^3 \Rightarrow f(30) = \sqrt[3]{30} \approx 3 + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^5} \Rightarrow \epsilon = |R_2(30)| = \frac{5}{3} (3^3 + 3\theta)^{-3/2} < \frac{5}{3^3}$; b) $f(x) = e^x$, $x =$

$= \frac{1}{3}$, $a=0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) = e^{1/3} \approx 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{18} + \frac{1}{162} \Rightarrow \epsilon = \left|R_3\left(\frac{1}{3}\right)\right| = \frac{1}{4134} e^{0/3} < \frac{1}{413^3}$;

c) Ca în exercițiului anterior: $\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{384} \Rightarrow \epsilon < \frac{1}{512^5}$; d) $f(x) =$
 $= \ln(1+x)$, $x=0,2$. Se folosește formula lui Mac Laurin: $f(0,2) \approx 0,182 \Rightarrow \epsilon = |R_3(0,2)| =$

$= \frac{(0,2)^4}{4} (1+0,2\theta)^{-4} < \frac{(0,2)^4}{4} = 0,0004$; e) $f(x) = x^{1/2}$, $x=250$, $a=16^2$. Se folosește formula lui
 Taylor: $f(250) = \sqrt{250} \approx 16 - \frac{3}{16} - \frac{9}{2 \cdot 16^3} \Rightarrow \epsilon = |R_2(250)| < \frac{27}{2 \cdot 15^5}$. f) $f(x) = \arcsin x$, $x=0,45$.

Se folosește formula lui Mac Laurin: $f(0,45) = \arcsin 0,45 \approx \frac{9}{20} + \frac{243}{16000}$, $\epsilon = |R_4(0,45)| <$

$< (180^4 + 72 \cdot 9^5 \cdot 20^3 + 24 \cdot 9^7) 17^{-9}$. 56. $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} < \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x$; $|R_n(2)| < \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} e^2 <$

$< \frac{9 \cdot 2^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{1}{1000}$ dacă $n \geq 11$. Deci $e^2 \approx 1 + \frac{2^2}{1!} + \frac{2^3}{2!} + \frac{2^4}{3!} + \frac{2^5}{4!} + \frac{2^6}{5!} + \frac{2^7}{6!} + \frac{2^8}{7!} + \frac{2^9}{8!} +$

$+ \frac{2^9}{9!} + \frac{2^{10}}{10!}$. 57. $|R_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(1+\theta x)^{n+1}} < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}} < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1+x)^{n+1}}$.

Luăm $x = -0,1 \Rightarrow |R_n(-0,1)| < \frac{1}{(n+1)9^{n+1}} < 10^{-5}$ dacă $n \geq 4$. Deci $\ln(0,9) \approx -0,1043$.

58. a) $\cos a$; b) $\frac{1}{3}$; c) $\frac{1}{2}$; d) $-\frac{1}{12}$; e) 4 ; f) $\frac{1}{3}$. 59. a) În punctele $x = -1$ și $x = 3$

funcția are minime, iar în $x = 1$ are maxim. b) În punctul $x = \pi$ funcția are minim, iar în punctele $x = \frac{\pi}{2}$ și $x = \frac{3\pi}{2}$ are maxime. 60. Raza conului $r = \frac{2\sqrt{2}}{3} R$, înălțimea conului este $\frac{4}{3} R$. 61. Raza conului este $r\sqrt{2}$; volumul conului este dublul volumului sferei. 62. $x = y = \frac{2}{\sqrt{3}} R$, $z = \frac{1}{\sqrt{3}} R$, R raza sferei. Volumul paralelipipedului este $\frac{4}{3\sqrt{3}} R^3$. 63. Fie x raza cilindriului interior și y înălțimea acestuia. Atunci $\pi a^3 = \pi x^2 y \Rightarrow x_{min} = a$, $y_{min} = a$. 64. 19,7 πm^3 . 65. 1,0935 πm^3 . 66. 39,2 cm^3 . 67. a) +104,6 cm^3 ; b) 43,6 cm^3 .

8.2. Funcții de mai multe variabile

30. a) $f'_x(1, 1) = \frac{1}{3}$, $f'_y(1, 1) = \frac{2}{3}$; b) $f'_x(-2, 2) = -\frac{2}{3}$, $f'_y(-2, 2) = \frac{1}{3}$, $f''_{xy}(-2, 2) = -\frac{1}{9}$; c) $f''_{xy}\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$. 31. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=mx}} f(x, y) = \frac{2m}{1+m^2} \Rightarrow f$ nu este continuă în origine.
 $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$. 32. a) $f'_x = 2x \sin^2 y$, $f'_y = x^2 \sin 2y$, $f''_{xx} = 2 \sin^2 y$, $f''_{yy} = 2x \sin 2y$, $f''_{xy} = 2x^2 \cos 2y$; b) $f'_x = y^2 x^{y^2-1}$, $f'_y = 2yx^{y^2} \ln x$, $f''_{xx} = y^2(y^2 - 1)x^{y^2-2}$, $f''_{yy} = 2yx^{y^2-1}(1 + y^2 \ln x)$, $f''_{xy} = 2x^{y^2} \ln x(1 + 2y^2 \ln x)$; c) $f'_x = y^3(x^2 + y^2)^{-3/2}$, $f'_y = x^3(x^2 + y^2)^{-3/2}$, $f''_{xx} = -3xy^3(x^2 + y^2)^{-5/2}$, $f''_{yy} = -3yx^3(x^2 + y^2)^{-5/2}$; d) $f'_x = (1 + x^2)^{-1}$, $f'_y = (1 + y^2)^{-1}$, $f''_{xx} = -2x(1 + x^2)^{-2}$, $f''_{yy} = 0$, $f''_{xy} = -2y(1 + y^2)^{-2}$; e) $f'_x = y(1 + x^2 y^2)^{-1}$, $f'_y = \frac{x}{y} f'_x$, $f''_{xx} = -2xy^2(1 + x^2 y^2)^{-2}$, $f''_{yy} = (1 - x^2 y^2)(1 + x^2 y^2)^{-2}$, $f''_{xy} = -2yx^2(1 + x^2 y^2)^{-2}$; f) $f'_x = (x + y^2)^{-1}$, $f'_y = 2y(x + y^2)^{-1}$, $f''_{xx} = -(x + y^2)^{-2}$, $f''_{yy} = -2y(x + y^2)^{-2}$, $f''_{xy} = 2(x - y^2)(x + y^2)^{-2}$; g) $f'_x = xz^{x-1}y^{z^2} \ln y$, $f'_y = x^2 y^{z^2-1}$, $f'_z = x^2 y^{z^2} \ln x \ln y$, $f''_{xx} = x^{z^2-2} y^{z^2} (z - 1 + xz \ln y) \ln y$, $f''_{yy} = x^2(x^2 - 1)y^{z^2-2}$, $f''_{zz} = x^2 y^{z^2} (1 + x^2 \ln y) \ln^2 x \ln y$, $f''_{xy} = xz^{x-1} y^{z^2-1} (1 + x^2 \ln y)$, $f''_{xz} = x^{z^2-1} (1 + z \ln x + z x^2 \ln x \ln y) y^{z^2} \ln y$, $f''_{yz} = x^2 (1 + x^2 \ln y) y^{z^2-1} \ln x$; h) $f'_x = -yz(y^2 + x^2 z^2)^{-1}$, $f'_y = xz(y^2 + x^2 z^2)^{-1}$, $f'_z = -yx(y^2 + x^2 z^2)^{-1}$, $f''_{xx} = 2xyz^3(y^2 + x^2 z^2)^{-2}$, $f''_{yy} = -2xyz(y^2 + x^2 z^2)^{-2}$, $f''_{zz} = 2x^2 yz(y^2 + x^2 z^2)^{-2}$, $f''_{xy} = 2(y^2 - x^2 z^2)(y^2 + x^2 z^2)^{-2}$, $f''_{xz} = -y(y^2 - x^2 z^2)(y^2 + x^2 z^2)^{-2}$, $f''_{yz} = x(y^2 - x^2 z^2)(y^2 + x^2 z^2)^{-2}$; i) $f'_x = y e^{xy} \sin z$, $f'_y = x e^{xy} \sin z$, $f'_z = e^{xy} \cos z$, $f''_{xx} = y^2 e^{xy} \sin z$, $f''_{yy} = x^2 e^{xy} \sin z$, $f''_{zz} = -e^{xy} \sin z$, $f''_{xy} = e^{xy}(1 + xy) \sin z$, $f''_{xz} = y e^{xy} \cos z$, $f''_{yz} = x e^{xy} \cos z$. 33. Fie $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$; $\Delta f(x_0, y_0; h, k) = \{(81x_0^2 - 108x_0 y_0 + 36y_0^2)h + (-54x_0^2 + 72x_0 y_0 - 24y_0^2)k\} + (81x_0 - 54y_0)h^2 + (-108x_0 + 72y_0)hk + (36x_0 - 24y_0)h^2 + 27h^3 - 54h^2 k + 36hk^2 - 8k^3 \Rightarrow df(x_0, y_0; h, k) = (81x_0^2 - 108x_0 y_0 + 36y_0^2)h + (-54x_0^2 + 72x_0 y_0 - 24y_0^2)k$. 34. a) $df(1, 1) = 4dx - 2dy$, $d^2f = 2dx^2 - 2dx dy + 4dy^2$; b) $df(1, 1) = e(dx + dy)$, $d^2f(1, 1) = e(dx^2 + 4dx dy + dy^2)$; c) $df(1, 1) = dx + dy$, $d^2f(1, 1) = -(dx^2 + dy^2)$. 35. $f'_x(x, y) = (x^4 y - y^6 + 4x^2 y^3)(x^2 + y^2)^{-2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$, $f'_x(0, 0) = 0$ și $f'_x(x, y) = (x^6 - xy^4 - 4x^3 y^2)(x^2 + y^2)^{-2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$, $f'_y(0, 0) = 0$ și $f'_y(x, y) = (x^5 - xy^4 - 4x^3 y^2)(x^2 + y^2)^{-2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$, $f'_y(0, 0) = 0$ și $f'_y(x, y) = (x^5 - xy^4 - 4x^3 y^2)(x^2 + y^2)^{-2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$ și $f'_y(0, 0) = -1$ și $f'_y(x, y) = -1$. Se observă că $f''_{xy}(x, y)$ și $f''_{yx}(x, y)$ nu sînt continue în origine, fapt ce explică rezultatul $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$. 36. $df(3, 4, 5) = -0,04(3dx + 4dy - 5dz)$. 37. a) $d^2f = 2(x dx dy + y dx dz + x dy dz)$; b) $d^2f = (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} [(y^2 + z^2)dx^2 + (z^2 + x^2)dy^2 + (x^2 + y^2)dz^2 - 2xy dx dy - 2xz dx dz - 2yz dy dz]$. 38. a) $f(x, y) = (x^3 + y^3)^{1/2}$, $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $h = 0,02$ și $h = -0,03$ și $f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0, y_0) = \Delta f(x_0, y_0; h, h) \approx df(x_0, y_0; h, h) \Rightarrow f(1, 02; 1,97) \approx 2,95$; b) $f(x, y, z) = xy^2 z^3$, $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $z_0 = 3$, $h = 0,002$, $k = 0,003$, $l = 0,004$ și $f(x_0 + h, y_0 + h, z_0 + l) \approx f(x_0, y_0, z_0) + df(x_0, y_0, z_0; h, k, l) \Rightarrow f(1,002; 2,003; 3,004) \approx 108,972$; c) $f(x, y) = \sin x \lg y$, $x_0 = 30^\circ$, $y_0 = 45^\circ$, $h = -k = -1^\circ = -\pi/180 \Rightarrow f(29^\circ, 46^\circ) = 0,5024$. 39. $V = \pi x^2 y \cdot \Delta V \approx dV = -135,6 \text{ cm}^3$, deci V scade cu $135,6 \text{ cm}^3$. 40. $V = \pi x^2 y$, $x_0 = 2,5 \text{ m}$, $y_0 = 4 \text{ m}$, $|h| = 0,1 \text{ m}$, $|k| = 0,2 \text{ m} \Rightarrow |\Delta V| \approx |dV| \leq 10,2 \text{ m}^3$; $e_r = |dV|/V = 0,13$. 41. $V = xyz$, $x_0 = 10 \text{ cm}$, $y_0 = 8 \text{ cm}$, $z_0 = 6 \text{ cm}$ și $h = k = l = -0,2 \text{ cm} \Rightarrow |\Delta V| \approx |dV| = 37,6 \text{ cm}^3$. 42. Se

aplică metoda inducției

43. a) Se folosește formula
 Obținem $\frac{\partial^k f}{\partial x^k} = (x^2 + y^2)^{k/2} - k + m^2 - m)e^{x^2+y^2}$

+ $2^{k-1}k)e^{2x+2y}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial y^2} = (-1)^k k! m!$

44. a) 0; b) 0; c) 0.

$(\cos^2 x - \sin^2 x) \ln \sin x$

+ $\varphi' x^\varphi \ln x$. 48. a) $2x^\varphi$

+ $2x\varphi'$, $f'_y = \varphi'_y + 2y^\varphi$

$df = \left(\frac{1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy\right)$

- $\frac{x^2}{y^2} dy^2$ $\varphi''_{xy} + (y^2 \varphi''_{yy})$

= $x + y$, $v = x - y$

+ $(dx - dy)^2 \varphi''_{xx}$; c)

+ $2(x dx + y dy + z dz)$

+ $4(x dx + y dy + z dz)$

= $-2y^2 \varphi' + \varphi$; b)

$f'_y = e^{xy} \varphi + \left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right)$

- $\frac{1}{4} x^{-2/2} y^{1/2} \psi + x$

e) $u = x^2 - y^2 \Rightarrow \varphi$

$\varphi = \varphi(u, v)$. Atunci

ecuația devine $-2xy$

+ $4xy(x^4 + y^4 - 4x^2 y^2)$

+ $\frac{\partial \psi_2}{\partial u} \frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{df}{dx} =$

$f'_{xy} = xy(4f'_{xy} + f''_{xy})$

- $(x + 2)^2 + 2(x + 1)(y - 1) - (y - 1)^2 + y - z)k + (-x - h = -0,05$, $h = 0,02$, $k = 0,01$

- $\frac{1}{6} y^3 + \frac{1}{24} (x^4 \sin$

aplică metoda inducției: $\frac{\partial^n f}{\partial x^r \partial y^s \partial z^t} = a^r b^s c^t f$, $r + s + t = n$ și $d^n f = (adx + bdy + cdz)^n f$.

43. a) Se folosește formula lui Leibniz de derivare a produsului $(gh)^{(k)} = g^{(k)}h + C_k^1 g^{(k-1)}h' + \dots + gh^{(k)}$.
 Obținem $\frac{\partial^k f}{\partial x^k} = (x^2 + y^2 + 2kx + k^2 - k)e^{(x+y)}$ și apoi $\frac{\partial^k f}{\partial x^k \partial y^m} = (x^2 + y^2 + 2kx + 2my + k^2 -$

$-k + m^2 - m)e^{x+y}$, $k + m = n$; b) Se procedează ca la punctul anterior $\frac{\partial^k f}{\partial x^k} = (2^k x +$
 $+ 2^{k-1}k)e^{2x+2y}$; $\frac{\partial^k f}{\partial x^k \partial y^m} = 2^{k-1}m(2x + k)e^{2x+2y}$, $k + m = n$; c) Prin metoda inducției se obține

$\frac{\partial^k f}{\partial x^k \partial y^m} = (-1)^k k! m! (1+x)^{-k-1} y^{-m-1}$, $k + m = n$; d) $\frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^m} = (-1)^{n-1} (n-1)! (x+y)^{-n}$.

44. a) 0; b) 0; c) 0. 46. a) $\frac{df}{dx} = -\sin x + \cos 2x$; b) $\frac{df}{dx} = -2x e^{-x^2+4}$; c) $\frac{df}{dx} = (\sin x)^{\cos x-1}$.

$(\cos^2 x - \sin^2 x \ln \sin x)$. 47. a) $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}$, $\frac{df}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$; b) $\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}$, $\frac{df}{dx} = \varphi x^{\varphi-1} +$

$+ \varphi' x^\varphi \ln x$. 48. a) $2x \ln x \operatorname{tg} x + \left(x + \frac{1}{x}\right) \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos^2 x} (x^2 + 1) \ln x$; b) 0. 49. a) $f'_x = \varphi'_u +$
 $+ 2x\varphi'_v$, $f'_y = \varphi'_u + 2y\varphi'_v$; b) $f'_x = 2x\varphi'_u + yv\varphi'_v$, $f'_y = -2y\varphi'_u + xv\varphi'_v$. 50. a) Fie $u = \frac{x}{y}$, $v = xy$.

$df = \left(\frac{1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy\right) \varphi'_u + (y dx + x dy) \varphi'_v$. $d^2 f = \left(\frac{1}{y^2} dx^2 - \frac{2x}{y^3} dx dy + \frac{x^2}{y^4} dy^2\right) \varphi''_{uu} + 2 \left(dx^2 -$

$- \frac{x^2}{y^2} dy^2\right) \varphi''_{uv} + (y^2 dx^2 + 2xy dx dy + x^2 dy^2) \varphi''_{vv} + \frac{2}{y^3} (-y dx + x dy) dy \varphi'_{uv} + 2 dx dy \varphi'_{vv}$; b) $u =$
 $= x + y$, $v = x - y \Rightarrow df = (dx + dy) \varphi'_u + (dx - dy) \varphi'_v$; $d^2 f = (dx + dy)^2 \varphi''_{uu} + 2(dx^2 - dy^2) \varphi''_{uv} +$

$+ (dx - dy)^2 \varphi''_{vv}$; c) $u = x + y + z$, $v = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow df = \varphi'_u du + \varphi'_v dv = (dx + dy + dz) \varphi'_u +$
 $+ 2(x dx + y dy + z dz) \varphi'_v$; $d^2 f = (dx + dy + dz)^2 \varphi''_{uu} + 4(dx + dy + dz)(x dx + y dy + z dz) \varphi''_{uv} +$

$+ 4(x dx + y dy + z dz)^2 \varphi''_{vv} + 2(dx^2 + dy^2 + dz^2) \varphi''_{vv}$. 51. a) $u = x^2 - y^2 \Rightarrow f'_x = 2xy\varphi'$, $f'_y =$
 $= -2y^2\varphi' + \varphi$; b) $u = \frac{y}{x} \Rightarrow f'_x = x + \varphi - \frac{y}{x} \varphi'$, $f'_y = x + \varphi'$; c) $u = y e^{\frac{x^2}{2y^2}} \Rightarrow f'_x = \frac{x}{y} e^{\frac{x^2}{2y^2}}$

$f'_y = e^{\frac{x^2}{2y^2}} \varphi + \left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right) e^{\frac{x^2}{2y^2}} \varphi'$; d) $u = x \cdot y$, $v = \frac{y}{x} \Rightarrow \varphi = \varphi(u)$, $\psi = \psi(v) \Rightarrow f''_{xx} = y^2 \varphi'' -$
 $- \frac{1}{4} x^{-2/2} y^{1/2} \psi' + x^{-5/2} y^{3/2} \psi''$; $f''_{yy} = x^2 \varphi'' - \frac{1}{4} x^{1/2} y^{-3/2} \psi' + x^{-1/2} y^{-1/2} \psi'' + x^{-3/2} y^{1/2} \psi''$;

e) $u = x^2 - y^2 \Rightarrow \varphi = \varphi(u) \Rightarrow f'_x = y\varphi' + 2x^2 y \varphi'$, $f'_y = x\varphi - 2xy^2 \varphi'$. 52. Fie $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$ și

$\varphi = \varphi(u, v)$. Atunci $f''_{xx} = y^2 \varphi''_{uu} - 2 \frac{y^2}{x^2} \varphi''_{uv} + \frac{y^2}{x^4} \varphi''_{vv} + 2 \frac{y}{x^3} \varphi'_v$; $f''_{yy} = x^2 \varphi''_{uu} + 2 \varphi''_{uv} + \frac{1}{x^2} \varphi''_{vv}$ și

ecuația devine $-2u \varphi''_{uv} + \varphi'_v = 0 \Leftrightarrow -2u \varphi'_u + \varphi = \psi(u)$. 53. $E = [-6(x^2 - 2x^4 y^2 - 2x^2 y^4 + y^6) +$
 $+ 4xy(x^4 + y^4 - 4x^2 y^2)] (x^4 + y^4 - x^2 y^2)^{-2}$. 54. $\frac{df}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}$ și $\frac{dv}{dx} = \frac{\partial \psi}{\partial x} +$

$+ \frac{\partial \psi}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u}\right) \frac{d\psi}{dx}$. 55. $f''_{xx} = 4x^2 f''_{uu} + 4xy f''_{uv} + y^2 f''_{vv} + 2f'_u$;

$f''_{xy} = xy(4f''_{uu} + f''_{vv}) + 2(x^2 + y^2) f''_{uv} + f'_v$; $f''_{yy} = 4y^2 f''_{uu} + 4xy f''_{uv} + x^2 f''_{vv} + 2f'_v$. 56. a) $f(x, y) = 1 -$
 $- (x+2)^2 + 2(x+2)(y-1) + 3(y-1)^2$; b) $f(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 + 2(x-$

$-1)(y-1) - (y-1)(z-1)$. 57. $f(x+h, y+k, z+l) = f(x, y, z) + 2[(x-y-z)h + (-x+$
 $+ y-z)k + (-x-y+z)l] + h^2 + k^2 + l^2 - 2hk - 2hl - 2kl$. 58. a) $f(x, y) = x^y$, $x_0 = 1$, $y_0 = 2$,
 $h = -0,05$, $k = 0,01 \Rightarrow f(0,95; 2,01) \approx 0,902$; b) $f(x, y, z) = xy^2 z^3$, $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $z_0 = 3$,

$h = 0,02$, $k = 0,01$, $l = 0,03 \Rightarrow f(1,02; 2,01; 3,03) \approx 114,6159$. 59. $f(x, y) = y + xy + \frac{1}{2} x^2 y -$
 $- \frac{1}{6} y^3 + \frac{1}{24} (x^4 \sin \theta y + 4x^3 y \cos \theta y - 6x^2 y^2 \sin \theta y - 4xy^3 \cos \theta y + y^4 \sin \theta y) e^{\theta x}$, $\theta \in (0, 1)$. 60. Folo-

61. $V = xyz$, $x_0 =$

$= 37,6 \text{ cm}^3$. 42. Se

sim formula lui Taylor de ordin 1, în origine $f(x, y, z) \approx 1 + (x - y - z)/2$. 61. a) $f(tx, ty, tz) = t^2 f(x, y, z)$; $x'f'_x + y'f'_y + z'f'_z = 2f$; omogenă de grad 2; b) omogenă de grad zero; c) omogenă de grad n . 65. $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \beta = \frac{4}{5}$; $f'_x(M) = 17$, $f'_y(M) = -1 \Rightarrow \frac{df}{dt} = \frac{47}{5}$. 66. $\cos \alpha = -\cos \beta = \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $f'_x(M) = 6$, $f'_y(M) = -6$, $f'_z(M) = 6 \Rightarrow \frac{df}{dt} = 6\sqrt{3}$. 67. $\cos \alpha = \frac{x}{r}$, $\cos \beta = \frac{y}{r}$, $\cos \gamma = \frac{z}{r}$, $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \Rightarrow \frac{df}{dt} = \frac{2}{r} f$. 68. $\frac{df}{dt} = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{z^2}(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) = 0 \Leftrightarrow r \cdot 1 = 0$. 69. $-\frac{9\sqrt{14}}{14}$. 70. $2\sqrt{3}$. 71. grad $f\left(-\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) \Rightarrow v_1(-2, 4)$, $v_2(-1, 1) \Rightarrow \angle(v_1, v_2) = \arccos \frac{3}{\sqrt{10}}$. 72. a) $(1, 0, 0)$; b) $\operatorname{div} r = 3$; $\operatorname{div} \left(\frac{r}{r}\right) = \frac{2}{r}$; c) $\operatorname{rot} r = 0$; $\operatorname{rot}(i \times r) = 2i$; $\operatorname{rot}\left(f(r) \cdot \frac{r}{r}\right) = 0$; d) grad $r = \frac{r}{r}$; grad $r^2 = 2r$; grad $\frac{1}{r} = -\frac{r}{r^3}$. 74. a) $M(2, 1)$ - punct de maxim; b) $M\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ - punct de minim; c) $M_1(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $M_2(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ - punct de minim; $M_3(0, 0)$ - punct de maxim, $[d^2f(M_3) = -4(h-k)^2 < 0]$; d) $M_1(-2, -1)$ - punct de maxim; $M_2(2, 1)$ - punct de minim; e) $ac - b^2 > 0 \Rightarrow f$ are un punct de extrem $M_0(x_0, y_0)$ cu $2ax_0 + 2by_0 - e = 0$, $2bx_0 + 2cy_0 - f = 0$; $a > 0 \Rightarrow M_0$ - punct de minim; $a < 0 \Rightarrow M_0$ - punct de maxim; $ac - b^2 = 0$ și $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{e}{f} \Rightarrow f$ are punct de extrem: $M(\alpha, \beta)$, $2a\alpha + 2b\beta - e = 0$; $a > 0 \Rightarrow M$ - punct de minim; $a < 0 \Rightarrow M$ - punct de maxim. În celelalte cazuri, funcția nu are extreme locale. f) $M\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{3}\right)$ - punct de maxim; g) $M_1(-1, 2)$ - punct de minim; $M_2(x, 0)$, $\alpha < 0$ - punct de maxim; h) $M_1\left(\frac{a}{3}\sqrt{3}, -\frac{b}{3}\sqrt{3}\right)$, $M_2\left(-\frac{a}{3}\sqrt{3}, \frac{b}{3}\sqrt{3}\right)$ - punct de minim; $M_3\left(\frac{a}{3}\sqrt{3}, \frac{b}{3}\sqrt{3}\right)$, $M_4\left(-\frac{a}{3}\sqrt{3}, -\frac{b}{3}\sqrt{3}\right)$ - punct de maxim; i) $M(0, 0)$ - punct de minim; j) $M(5, 2)$ - punct de minim; k) $M_1(2e)^{-1/2}$, $(2e)^{-1/2}$, $M_2(-(2e)^{-1/2}, -(2e)^{-1/2})$ - punct de minim; $M_3((2e)^{-1/2}, -(2e)^{-1/2})$, $M_4(-(2e)^{-1/2}, (2e)^{-1/2})$ - punct de maxim; l) $M\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ - punct de maxim. 75. a) $M\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$ - punct de minim; b) $M\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$ - punct de minim; c) $M(0, 0, 0)$ - punct de minim; d) $(2, 4, 8)$ - punct de minim; e) Nu admite puncte de extrem. 76. Fie x, y, z dimensiunile baziului, z - înălțimea acestuia. Atunci $xyz = \frac{a^3}{c}$ și suprafața este $S = 2xz + 2yz + xy = \frac{a^2}{y} + \frac{a^2}{x} + xy$. Funcția $S(x, y)$ are un minim pentru $x = y = a$. Deci dimensiunile sînt $x = y = a$, $z = \frac{a}{2}$. 77. Fie r raza și h înălțimea conului. Dreptunghiurile de bază ale paralelipipedului sînt înscrise în cercurile de bază ale unui cilindru circular drept înscris în conul dat. Fie x, y dimensiunile bazei. Volumul paralelipipedului $V = \frac{h}{2r} xy(2r - \sqrt{x^2 + y^2})$ este maxim pentru $x = y = \frac{2\sqrt{2}}{3}r$. Înălțimea paralelipipedului este $h/3$. 78. $D(x, y, z) = \sum_{i=1}^n [(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 + (z - c_i)^2]$ este minimă pentru $x = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)/n$, $y = (b_1 + b_2 + \dots + b_n)/n$, $z = (c_1 + c_2 + \dots + c_n)/n$. 79. a) $M(1, 1, 1)$ - punct de maxim; b) $M(24, -144, -1)$ - punct de minim; c) $M(-1, 0, 0)$ - punct de minim.

21. a) $f'(1) = -1$.
 22. a) $y' = y(y-1)^{-1}$, $y'' = -2y^{2x-1}(1-xy^{x-1}) \ln y$
 $= (x+y)(x-y)^{-1}$; $y' = (x+y-1)e^{x+y} + 2ye^{x+y}$
 23. a) $x = \frac{1}{2}$ - punct de extrem; $x = \frac{a}{4}\sqrt{6}$, $y = \frac{a}{4}\sqrt{6}$
 $= -\frac{a}{4}\sqrt{2}$; puncte de extrem: $(-1, 25)$. a) $z'_x = -2x$, $z'_y = (xz - y^2)(z^2 - xy)$
 $+ z \ln x^{-1}$; d) $z'_x = (y^2 - x^2) \frac{y}{z}$; $z''_{xx} = \frac{c^4}{a^2 b^2}$
 $z'_y = -\frac{z}{x}$; $z''_{yy} = (y^2 - x^2) \frac{z}{x^2}$
 $d^2z = -2z^2[(z^2 + x^2)dy + z^2]^{-1} \left[\left(\frac{2}{y} dy - \frac{1}{x} dx \right) \right]$
 28. a) $M_1(1, -2, -2)$ - punct de maxim; $M_2(-1, 2, 2)$ - punct de minim;
 $= -y[y - f - (y + z)^{-1}]$ ține seama de relația $x + y + z = 1$. c) Fie $u = x + y + z$
 $z'_y = (b\phi' - 2y)(2x - u(x, y)) = x - az$, $v = F'_u(1 - az'_x) - bF'_v$
 30. $y'(1) = -\frac{4}{5}$; $x'(1) = \frac{4}{5}$
 $dx = x(2y - 1)(y + z)^{-1} dz = (y + z)^{-2}[(2y - 1)dy - (y + z)dz]$
 $= -y^{-3}(x^2 + y^2)dy$
 $u''_{xx}(0, 1) = u''_{yy}(0, 1) + (y)^{-1}(y dx + v dy)$
 $= (u^2 - v^2)^{-1}[(v^2 - u^2)dx - d^2v = -2(u^2 - v^2)^{-1}dv]$

8.3. Funcții definite implicit. Schimbări de variabilă

21. a) $f'(1) = -1, f''(1) = -8$; b) $f'(0) = 0, f''(0) = -\frac{2}{3}$; c) $f'(1) = -\frac{1}{2}, f''(1) = -\frac{15}{8}$.
22. a) $y' = y(y-1)^{-1}, y'' = -y(y-1)^{-2}$; b) $y' = (1 - xy^{2-1})^{-1} y^2 \ln y; y'' = [y^2(1 - xy^{2-1})^{-1} \ln^2 y + 2y^{2x-1}(1 - xy^{2-1})^{-1} \ln y](1 - xy^{2-1})^{-2}$; c) $y' = (ay - x)(y - ax)^{-1}; y'' = (1 - a^2)(y - ax)^{-2}$; d) $y' = (x + y)(x - y)^{-1}; y'' = 2(x^2 + y^2)(x - y)^{-2}$; e) $y' = (e^x - y)(e^y + x)^{-1}; y'' = [e^{x+y} + 2(x + y - 1)e^{x+y} + 2y e^y - 2x e^x + 2xy - e^{2x+y} + x^2 e^x - y^2 e^y](e^y + x)^{-2}$; f) $y' = -\frac{y}{x}; y'' = \frac{2y}{x^2}$.
23. a) $x = \frac{1}{2}$ - punct de maxim; b) $x = \frac{5}{8}$ - punct de maxim; c) $x = -\frac{a}{4}\sqrt{6}, y = \frac{a}{4}\sqrt{2}$ și $x = \frac{a}{4}\sqrt{6}, y = \frac{a}{4}\sqrt{2}$, puncte de maxim; $x = -\frac{a}{4}\sqrt{6}, y = -\frac{a}{4}\sqrt{2}$ și $x = \frac{a}{4}\sqrt{6}, y = -\frac{a}{4}\sqrt{2}$, puncte de minim.
24. a) $z'_x(2, 2, 0) = z'_y(2, 2, 0) = \frac{1}{3}$; b) $z'_x(0, 0, 0) = z'_y(0, 0, 0) = -\frac{a}{4}\sqrt{2}$; puncte de minim.
25. a) $z'_x = -2x(6z - y)^{-1}; z'_y = (4y + z - 1)(6z - y)^{-1}$; b) $z'_x = (yz - x^2)(z^2 - xy)^{-1}; z'_y = (xz - y^2)(z^2 - xy)^{-1}$; c) $z'_x = -\frac{z}{x}(x \ln y + z)(y + z \ln x)^{-1}; z'_y = -\frac{z}{y}(x + y \ln z)(y + z \ln x)^{-1}$; d) $z'_x = (yz - x^2)(z^2 - xy)^{-1}; z'_y = \frac{1}{3}(2 + 3xz - 6y^2)(z^2 - xy)^{-1}$.
26. a) $z'_x = -\frac{c^2}{a^2} \frac{x}{z}; z'_y = -\frac{c^2}{b^2} \frac{y}{z}; z''_{xx} = \frac{c^4}{a^2 b^2}(y^2 - b^2)z^{-3}; z''_{yy} = -\frac{c^4}{a^2 b^2} x y z^{-3}; z''_{zz} = \frac{c^4}{a^2 b^2}(x^2 - a^2)z^{-3}$; b) $z'_x = -\frac{x}{z}; z'_y = -\frac{y}{z}; z''_{xx} = (y^2 - 1)z^{-2}; z''_{yy} = -x y z^{-2}; z''_{zz} = (x^2 - 1)z^{-3}$.
27. a) $dz = -z^{-1}(x dx + y dy)$; $d^2z = z(x + z)^{-1}[(z^2 + x^2)dx^2 + 2xy dx dy + (z^2 + y^2)dy^2]$; b) $dz = z y^{-1}(x + z)^{-1}(y dx + z dy)$; $d^2z = z(x + z)^{-1}[(\frac{2}{y} dy - \frac{1}{z} dz) dz - \frac{z}{y^2} dy^2]$; c) $dz = z(1 - z)^{-1}(dx + dy)$; $d^2z = z(1 - z)^{-2}(dx + dy)^2$.
28. a) $M_1(1, -2, -2)$ - punct de minim; $M_2(1, -2, 8)$ - punct de maxim; $M_3(-1, 2, -2)$ - punct de maxim; $M_4(-1, 2, 1)$ - punct de minim; c) $M_1(-3 - \sqrt{6}, -3 - \sqrt{6}, -4 - 2\sqrt{6})$ - punct de maxim; $M_2(-3 + \sqrt{6}, -3 + \sqrt{6}, -4 + 2\sqrt{6})$ - punct de minim; $M_3(-3 + \sqrt{6}, -3 + \sqrt{6}, -4 + 2\sqrt{6})$ - punct de maxim.
29. a) $z'_x = -y[y - f - (y + z)f']^{-1}; z'_y = -(x + z - f)[y - f - (y + z)f']^{-1}$. Se înlocuiesc în ecuație și se ține seama de relația de definiție a funcției implicite; b) $z'_x = (x - z)(x + yf')^{-1}; z'_y = (y - f)(x + yf')^{-1}$. c) Fie $u = ax + by + cz$, astfel că $\varphi = \varphi(u)$. Rezultă că $z'_x = (a\varphi' - 2x)(2z - c\varphi')^{-1}$ și $z'_y = (b\varphi' - 2y)(2z - c\varphi')^{-1}$. d) Funcția $z(x, y)$ este definită implicit de relația $F(u, v) = 0$, unde $u(x, y) = x - az, v(x, y) = y - bz$. Prin derivarea relației $F(u, v) = 0$ în raport cu x obținem $F'_u(1 - az'_x) - bF'_v z'_x = 0 \Leftrightarrow z'_x = F'_u(aF'_u + bF'_v)^{-1}$. Similar se obține $z'_y = F'_v(aF'_u + bF'_v)^{-1}$.
30. $y'(1) = -\frac{4}{5}; z'(1) = \frac{1}{5}; y''(1) = -\frac{36}{25}; z''(1) = 4/25$. 31. a) $dy = -x(2z + 1)(y + z)^{-1} dx$; $dz = x(2y - 1)(y + z)^{-1} dx$; $d^2y = -(y + z)^{-2} [(2z + 1)(y + z)^2 + x^2(2z + 1)^2 + x^2(2y - 1)^2] dx^2$; $d^2z = (y + z)^{-2} [(2y - 1)(y + z)^2 - x^2(2z + 1)^2 - x^2(2y - 1)^2] dx^2$; b) $dy = -\frac{x}{y} dx; dz = 0; d^2y = -y^{-2} x^2 dx^2; d^2z = 0$.
32. $u'_x(0, 1) = u'_y(0, 1) = 1; v'_x(0, 1) = -1, v'_y(0, 1) = 0$; $u''_{xx}(0, 1) = u''_{yy}(0, 1) = u''_{xy}(0, 1) = 0$ și $v''_{xx}(0, 1) = 2, v''_{yy}(0, 1) = 1, v''_{xy}(0, 1) = 0$.
33. a) $du = (1 + y)^{-1}(y dx + v dy), dv = (1 + y)^{-1}(dx - v dy), d^2u = -d^2v = 2(1 + y)^{-2}(dx - v dy)dy$; b) $du = (u^2 - v^2)^{-1}[(u^2 - x^2)dx + (v^2 - y^2)dy], dv = -(u^2 - v^2)^{-1}[(u^2 - x^2)dx + (u^2 - y^2)dy]$; $d^2u = -d^2v = -2(u^2 - v^2)^{-2} [x dx^2 + y dy^2 + u du^2 + v dv^2]$; c) $du = (u - v)^{-1}[(v - x)dx + (v - y)dy], dv = -(u - v)^{-1}[(u - x)dx + (u - y)dy]; d^2u = -d^2v = -(u - v)^{-2} (dx^2 + dy^2 + du^2 + dv^2)$.
34. a) $z'_x = cv'_x = -\frac{c}{u} \sin v = -\frac{cy}{x^2 + y^2}; z'_y = cv'_y = \frac{c}{v} \cos v = \frac{cx}{x^2 + y^2}$; b) $z'_x = v u'_x + u v'_x = -\frac{x}{2}, z'_y = v u'_y + u v'_y = -\frac{y}{2}$; c) $dz = 2 \left(-\frac{1}{x} \ln y dx + \frac{1}{y} \ln x dy \right) (\ln x - \ln y)^{-2}; d^2z = (\ln x - \ln y)^{-3} [x dx^2 + y dy^2 + 2xy dx dy]$.

$-\ln y) \rightarrow \left[\frac{2}{x^2} \ln y (\ln x - \ln y + 2) dx^2 - \frac{4}{xy} (\ln xy) dx dy - \frac{2}{y^2} \ln x (\ln x - \ln y - 2) dy^2 \right]$. 35. $z'_x = -\frac{c^2}{a^2} \frac{x}{z}$, $z'_y = -\frac{c^2}{b^2} \frac{y}{z}$. 36. Fie $u = x + z$, $v = y + z$, astfel că $F(u, v) = 0$. Avem $du = dx + dz$, $dv = dy + dz$ și $F'_u du + F'_v dv = 0$. Deci $dz = -(F'_u + F'_v)^{-1} (F'_u dx + F'_v dy)$. Similar, obținem $d^2u = d^2z$, $d^2v = d^2z$ și $(F''_{uu} du + F''_{uv} dv) du + F''_{uu} d^2u + (F''_{uv} du + F''_{vv} dv) dv + F''_{vv} d^2v = 0$ astfel că $d^2z = -(F'_u + F'_v)^{-2} [F''_{uu} (F'_v)^2 - 2F''_{uv} F'_u F'_v + F''_{vv} (F'_u)^2] (dx - dy)^2$. 37. $y_1^3 = y_2 + 3y_3$. 38. $y_3 = y_1^2 - y_1 y_2 + y_2^2$. 39. a) $\left(\frac{y_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{b}\right)^2 = 1$; b) $y_3 = y_1 y_2$; c) $y_1 + y_2 + y_3 = 0$; d) $y_1 + y_2 + y_3 = 1$. 40. $\lambda_1 = -\frac{a\sqrt{2}}{2}$, $M_1(a\sqrt{2}, a\sqrt{2})$ - punct de maxim; $\lambda_2 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $M_2(-a\sqrt{2}, -a\sqrt{2})$ - punct de minim. 41. a) $\lambda = -2a^2 b^2 (a^2 + b^2)^{-1} \Rightarrow x = ab^2(a^2 + b^2)^{-1}$, $y = a^2 b(a^2 + b^2)^{-1}$ - punct de minim; b) $\lambda = 0 \Rightarrow x = 1, y = 0$ - punct de minim; c) $\lambda = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = y = \frac{1}{2}$ - punct de maxim; d) $\lambda_1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 1, y = 2$ - punct de maxim; $\lambda_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -1, y = -2$ - punct de minim. 42. a) $\lambda_1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 1, y = -2, z = 2$ - punct de maxim; $\lambda_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -1, y = 2, z = -2$ - punct de minim; b) $\lambda_1 = -a^2 \Rightarrow x = \pm a, y = z = 0$ - puncte de maxim; $\lambda_2 = -c^2 \Rightarrow x = y = 0, z = \pm c$ - puncte de minim; c) $\lambda_1 = -\frac{3}{8} \Rightarrow x = \frac{4}{3}, y = \frac{8}{3}, z = -\frac{8}{3}$ - punct de maxim; $\lambda_2 = \frac{3}{8} \Rightarrow x = -\frac{4}{3}, y = -\frac{8}{3}, z = \frac{8}{3}$ - punct de minim; d) $\lambda_1 = \frac{1}{3}$, $\mu_1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{4}{3}, y = \frac{2}{3}, z = \frac{4}{3}$ - punct de maxim; $\lambda_2 = -1, \mu_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = z = 0, y = -2$ - punct de minim; e) $\lambda_1 = -\frac{\sqrt{6}}{12}, \mu_1 = \frac{1}{6} \Rightarrow x = y = -\frac{\sqrt{6}}{6}, z = \frac{\sqrt{6}}{3}$ și $x = z = -\frac{\sqrt{6}}{6}, y = \frac{\sqrt{6}}{3}$ și $y = z = -\frac{\sqrt{6}}{6}, x = \frac{\sqrt{6}}{3}$ - puncte de maxim; $\lambda_2 = \frac{\sqrt{6}}{12}, \mu_2 = \frac{1}{6} \Rightarrow x = y = \frac{\sqrt{6}}{6}, z = -\frac{\sqrt{6}}{3}$ și $x = z = \frac{\sqrt{6}}{6}, y = -\frac{\sqrt{6}}{3}$ și $y = z = \frac{\sqrt{6}}{6}, x = -\frac{\sqrt{6}}{3}$ - puncte de minim. 43. a) Funcția fiind continuă pe domeniul închis $x^2 + y^2 \leq 1$, își atinge marginile. În interiorul cercului funcția are minim în origine, valoarea sa fiind zero. Pe cerc funcția are minime în punctele $x = \pm \frac{1}{\sqrt{10}}, y = \mp \frac{3}{\sqrt{10}}$ și maxime în $x = \pm \frac{3}{\sqrt{10}}, y = \pm \frac{1}{\sqrt{10}}$ și valoarea maximului este $\frac{11}{2}$. Deci, $\inf f = 0$ și $\sup f = 11/2$. b) Procedând ca la punctul anterior se obține $\inf f = 0, \sup f = 25$; c) $\inf f = -1, \sup f = 1$; d) $\inf f = 0, \sup f = \frac{3}{2} \sqrt{3}$. 44. a) $\frac{d^2y}{dt^2} + a^2y = 0$; b) $t^2 \frac{d^2y}{dt^2} + 3t \frac{dy}{dt} + ay = 0$. 45. a) $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x'}$, cu $x' = \frac{dx}{dy}$ și $y'' = \frac{d}{dx} y' = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x'} \right) = \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{x'} \right) \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(x')^2} x'' \cdot \frac{1}{x'} = -(x')^{-3} x'' \Rightarrow xx'' + (x')^2 - 1 = 0$. b) Se procedează ca la punctul anterior: $x'' - 2yx' = 0$; c) $y^{(3)} = -(x')^{-4} x^{(3)} + 3(x')^{-5} (x^{(2)})^2 \Rightarrow x^{(3)} = 0$. 46. a) $z'_u = 0$; b) $uz'_u - z = 0$; c) $2uz'_u - z'_v = 0$; d) $z''_{uv} = 0$; e) $vz''_{uv} + z'_u = 0$; f) $uvz''_{uv} - 2uz'_u + vz'_v - kz = 0$. 47. a) $w'_v = 0$; b) $w''_{uv} = 0$; c) $2w''_{uv} = 1$. d) Din $z = xy - w$ rezultă $z'_x = y - w'_x, z'_y = x - w'_y$ și ecuația devine $(2xy - w) \cdot (y - w'_x) + (1 - y^2)(x - w'_y) = x + xy^2 - yw$. Deoarece $u = yz - x, v = xz - y$, rezultă că $u'_x = yz'_x - 1 = y^2 - yw'_x - 1, u'_y = yz'_y + z = 2xy - yw'_y - w, v'_x = xz'_x + z = 2xy - xw'_x - w, v'_y = xz'_y - 1 = x^2 - xw'_y - 1$. Înlocuind acestea în relațiile $w'_x = w''_{uv} u_x + w''_{uv} v_x$ și $w'_y = w''_{uv} u_y + w''_{uv} v_y$, obținem $w'_x = [(y^2 - 1)w''_{uv} + (2xy - w)w''_{uv}](1 + yw''_{uv} + xw''_{uv})^{-1}, w'_y = [(2xy - w)w''_{uv} + (x^2 - 1)w''_{uv}](1 + yw''_{uv} + xw''_{uv})^{-1}$. Acestea înlocuite în ecuație conduc la forma $w''_{uv} = 0$; e) $w''_{uv} = -1$. f) $w''_{uv} = 0$. 48. Din relațiile $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ obținem $r'_x = \cos \theta, \theta'_x = -\frac{1}{r} \sin \theta$ și $r'_y = \sin \theta, \theta'_y =$

$-\frac{1}{r} \cos \theta$
 $-\frac{1}{r} \sin \theta$
 $\cdot \cos^2 \theta \cdot f''_{\theta\theta}$
 țierea relației
 $= \frac{1}{r \cos \theta}$
 varianța funcției
 $= f'_r \cos \theta$
 $\cdot \sin \theta \sin \theta$
 $= 0$. 50. $f''_{\theta\theta}$
 $= -c^{-1} \Rightarrow$
 9. Ge
 9.1. Ge
 10. a)
 $+ 4z - 10$
 $= \frac{y-1}{-\sqrt{3}}$
 11. a) $r =$
 $v = \frac{1}{\sqrt{10}}$
 $- 26j +$
 $\frac{2x-1}{2}$
 $\frac{2x-1}{4} =$
 $2x - 2y =$
 $= \frac{y-1}{2}$
 $- 2x = 0$
 (B) $\frac{x}{9}$
 (PO) $9x$
 (B) $x =$
 (PR) $-$

35. $z'_x = -$
 $du = dx + dz$
 obținem $d^2u =$
 astfel că $d^2z =$
 38. $y_3 = y_1^2 -$
 d) $y_1 + y_2 + y_3 =$
 $-a\sqrt{2}, -a\sqrt{2}) -$
 $(a^2 + b^2)^{-1} -$ punct
 $= \frac{1}{2} -$ punct de
 $y = -2 -$ punct
 $\frac{1}{2} \Rightarrow x = -1,$
 puncte de maxim;
 $y = \frac{8}{3}, z = -$
 de minim; d) $\lambda_1 =$
 $= \frac{1}{2} \Rightarrow x = z = 0,$
 și $x = z = -\frac{\sqrt{6}}{6},$
 $x = y = \frac{\sqrt{6}}{6}, z =$
 minimi. 43. a) Func-
 anteriorul cercului
 în punctele $x =$
 este $\frac{11}{2}$. Deci,
 $f = 0, \sup f = 25;$
 $\frac{dy}{dx} + 3t \frac{dy}{dt} + ay =$
 $-\frac{1}{(x')^2} x'' \cdot \frac{1}{x'} =$
 $x'' - 2yx' = 0;$
 c) $2u_x'' - z_v'' = 0;$
 0; b) $w_{u^2}'' = 0;$
 avine $(2xy - w) \cdot$
 rezultă că $u_x' =$
 $= 2xy - xw_x - w,$
 $w_y = w_u u_y' + w_v v_y',$
 $+ (x^2 - 1)w_{x^2}''(1 +$
 $= -1. f) $w_{v^2}'' = 0.$
 $r_y' = \sin \theta, \theta_y' =$$

$= \frac{1}{r} \cos \theta$. Deci $f_x = f_r' \cos \theta - \frac{1}{r} f_\theta'$ și $f_y = f_r' \sin \theta + \frac{1}{r} f_\theta' \cos \theta$. Apoi $f_{xx}'' = f_{rr}'' \cos^2 \theta -$
 $-\frac{1}{r^2} \sin 2\theta \cdot f_{r\theta}'' + \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta \cdot f_{\theta\theta}'' + \frac{1}{r^2} \sin 2\theta \cdot f_\theta'$ și $f_{yy}'' = f_{rr}'' \sin^2 \theta + \frac{1}{r^2} \sin 2\theta \cdot f_{r\theta}'' + \frac{1}{r^2}$
 $\cdot \cos^2 \theta \cdot f_{\theta\theta}'' - \frac{1}{r^2} \sin 2\theta \cdot f_\theta' + \frac{1}{r^2} \cos^2 \theta \cdot f_r'$, astfel că $\Delta f \equiv f_{rr}'' + \frac{1}{r^2} f_{\theta\theta}'' + \frac{1}{r} f_r' = 0$. 49. Prin diferen-
 țiereă relațiilor între coordonate se obține $dr = \cos \theta \cos \varphi dx + \sin \theta \cos \varphi dy + \sin \varphi dz$, $d\theta =$
 $= \frac{1}{r \cos \varphi} (-\sin \theta dx + \cos \theta dy)$ și $d\varphi = \frac{1}{r} (-\cos \theta \sin \varphi dx - \sin \theta \sin \varphi dy + \cos \varphi dz)$. Din in-
 varianța formei primei diferențiale $df = f_x' dx + f_y' dy + f_z' dz = f_r' dr + f_\theta' d\theta + f_\varphi' d\varphi$ se deduce $f_x' =$
 $= f_r' \cos \theta \cos \varphi - \frac{1}{r \cos \varphi} f_\theta' \sin \theta - \frac{1}{r} f_\varphi' \cos \theta \sin \varphi$, $f_y' = f_r' \sin \theta \cos \varphi + \frac{1}{r \cos \varphi} f_\theta' \cos \theta - \frac{1}{r} f_\varphi'$
 $\cdot \sin \theta \sin \varphi$, $f_z' = f_r' \sin \varphi + \frac{1}{r} f_\varphi' \cos \varphi$. În final, $\Delta f \equiv f_{rr}'' + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} f_{\theta\theta}'' + \frac{1}{r^2} f_{\varphi\varphi}'' + \frac{2}{r} f_r' - \frac{1}{r^2} \operatorname{tg} \varphi f_\varphi' =$
 $= 0$. 50. $J = r$. 51. $J = r^2 \cos \varphi$. 52. $\lambda = c^{-3} \Rightarrow x = y = z = -c -$ punct de maxim; $\lambda =$
 $= -c^{-3} \Rightarrow x = y = z = c -$ punct de minim.

9. Geometria analitică și diferențială a curbelor și suprafețelor

9.1. Geometria diferențială a curbelor în spațiu

10. a) $\frac{2x-a}{-2} = \frac{2y-a}{0} = \frac{2z-a\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$; $-2x + \sqrt{2}z = 0$; b) $x-1 = y-1 = \frac{z-2}{4}$; $x+y+$
 $+ 4z - 10 = 0$; c) $\frac{x-2}{2\sqrt{3}} = y - 2\sqrt{3} = \frac{z-3}{-2\sqrt{3}}$; $2\sqrt{3}x + y - 2\sqrt{3}z = 0$; d) $x - \sqrt{3} =$
 $= \frac{y-1}{-\sqrt{3}} = \frac{z-1}{-\sqrt{3}}$; $x - \sqrt{3}y - \sqrt{3}z + \sqrt{3} = 0$; e) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-2}{-1}$; $2x - z = 0$.
 11. a) $\tau = \frac{1}{\sqrt{2}}(i+k)$, $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}(i-k)$, $v = -j$; b) $\tau = \frac{1}{\sqrt{21}}(i+4j+2k)$, $\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2i+k)$,
 $v = \frac{1}{\sqrt{105}}(-4i+5j-8k)$; c) $\tau = \frac{1}{\sqrt{21}}(2i+j+4k)$, $\beta = \frac{1}{\sqrt{101}}(6i-8j-k)$, $v = \frac{1}{\sqrt{2121}}(-31i-$
 $- 26j+22k)$; d) $\tau = \frac{1}{\sqrt{6}}(i-2j+k)$, $\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}(i+j+k)$, $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(i-k)$. 12. a) Tangenta (T)
 $\frac{2x-1}{2} = \frac{3y-2}{6} = \frac{2z-1}{4}$; binormala (B) $\frac{2x-1}{4} = \frac{3y-2}{-6} = \frac{2z-1}{2}$; normala principală (N)
 $\frac{2x-1}{4} = \frac{3y-2}{3} = \frac{2z-1}{-4}$; planul normal (PN) $x+2y+2z - \frac{17}{6} = 0$; planul osculator (PO)
 $2x-2y+z - \frac{1}{6} = 0$; planul rectificator (PR) $2x+y-2z - \frac{2}{3} = 0$; b) (T) $x-2 =$
 $= \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-2}$; (B) $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-1} = z-2$; (N) $x-2=0, y-z+1=0$; (PN) $x+2y-$
 $- 2z = 0$; (PO) $4x-y+z-9=0$; (PR) $y+z-3=0$; c) (T) $\frac{x-6}{2} = \frac{y-9}{6} = \frac{z-9}{6}$;
 (B) $\frac{x-6}{9} = \frac{y-9}{-6} = \frac{z-9}{2}$; (N) $\frac{x-6}{6} = \frac{y-9}{7} = \frac{z-9}{-6}$; (PN) $2x+6y+9z-147=0$
 (PO) $9x-6y+2z-18=0$; (PR) $6x+7y-6z-45=0$; d) (T) $x-2 = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-2}{2}$;
 (B) $x-y-4=0, z=2$; (N) $-x+2=y+2=z-2$; (PN) $x-y+2z-8=0$; (PO) $x+y=0$;
 (PR) $-x+y+z+2=0$. 13. a) $ds = |t|(t^4+t^2+1)^{1/2} dt$; b) $ds = \frac{1}{2} |\sin 2t| (4+9 \sin^2 t)^{1/2} dt$

c) $ds = \frac{1}{2}(t^2+2)dt$. 14. (T) $x=0, y=1$; (B) $y=1, z=1$. 15. (PN) $x \pm y \mp p(4a^2 - p^2)^{-1/2}z - p = 0$; (PO) $(2a^2 + 1)x \mp 2a^2y \pm \frac{1}{p}(4a^2 - p^2)^{1/2}z + a^2p - \frac{2a^2}{p} = 0$. 16. (PO) $y - z = 0$; (PR) $-x + y + z - 1 = 0$. 17. a) $\tau = \frac{1}{\sqrt{2}}(i + j), v = -k$; b) (N) $x - y = 0, z = 0$; $M(1, 1, 0)$. 18. $\kappa(\tau, k) = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\kappa(\beta, k) = \arccos \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, $\kappa(v, k) = \pi/2$. 19. $t_1 = 1/2, t_2 = 1, t_3 = 2$ sau $M_1(2, -\ln 2, 1/2), M_2(1, 0, 1), M_3(1/2, \ln 2, 2)$. 20. a) $\sqrt{2}e^{2t}(e^{2t} + 1)^{-2}$; b) $\sqrt{2}e^{-t}/3$. 21. a) $\tau = (i - 2j + 2k)/3, \beta = -(2i + 2j + k)/3, v = (-2i + j + 2k)/3$; b) (N) $\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{3z-2}{6}$; (PO) $6x + 6y + 3z - 8 = 0$; c) $T = -9/2$. 22. $R = \frac{1}{2}(1 + a^2)$. 23. Dacă curba Γ este dreapta $r = r_0 + tu$, atunci $\dot{r} = u$ și $\ddot{r} = 0$, astfel că avem $K = 0$. Invers, dacă avem $K = 0$, din prima formulă a lui Frenet rezultă $\frac{d\tau}{ds} = 0$. Deci $d\tau = 0$ și $\tau = u = \text{const}$. Cum $\tau = \frac{dr}{ds} = u$, obținem $r = us + r_0$, ceea ce arată că Γ este o dreaptă. 24. $\frac{1}{T} = 0$ arată că avem o curbă plană, conținută în planul osculator. Deci ecuația planului este $x - y - 2z - 2 = 0$. 25. $R = (a^2 + b^2)/a, T = (a^2 + b^2)/b$. 26. $K = \frac{1}{T} = 4(t^2 + 2)^{-2}$. 27. $\frac{1}{R} = \frac{1}{T} = 2(2x^2 + 1)^{-2}$. 28. $t_1 = -2 \Rightarrow M_1(-5, -8, -3)$; $t_2 = \frac{4}{7} \Rightarrow M_2\left(\frac{1}{7}, \frac{64}{343}, \frac{33}{49}\right)$. 29. $t_1 = -1 \Rightarrow M_1(-1, -1, 1)$; $t_2 = 2 \Rightarrow M_2\left(\frac{1}{2}, 2, 7\right)$.

9.2. Studiul conicelor pe ecuația generală

4. a) Ecuația canonică $\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{4} - 1 = 0$; centrul $C(2, 3)$; $\varphi = \arctg 2$; conica intersectează axa Oy în punctele $M_1(0, 2)$ și $M_2(0, 5)$. b) Ecuația canonică $X^2 - \frac{Y^2}{9} - 1 = 0$; centrul $C(-1, 2)$; $\varphi = \arctg 3$; conica intersectează axa Ox în punctul $M_1\left(\frac{11}{12}, 0\right)$ și axa Oy în punctele $M_2\left(0, \frac{11}{4}\right)$ și $M_3\left(0, \frac{1}{2}\right)$. c) Conică degenerată în dreptele reale $x - 2y - 1 = 0$ și $3x - y - 1 = 0$. d) Ecuația canonică $Y^2 = \frac{\pm 3}{5\sqrt{5}}X$; axa parabolei $5x - 10y - 1 = 0$; $\varphi = \arctg \frac{1}{2}$. Conica intersectează axa Ox în punctele $M_1(-1 - \sqrt{2}, 0)$ și $M_2(-1 + \sqrt{2}, 0)$ și axa Oy în punctele $M_3\left(0, \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}\right)$ și $M_4\left(0, \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}\right)$. e) Ecuația canonică $X^2 - \frac{Y^2}{4} - 1 = 0$; centrul $C(-2, 3)$; $\varphi = \arctg \frac{1}{2}$. Conica intersectează axa Ox în punctele $M_1(-4/\sqrt{3}, 0)$ și $M_2(4/\sqrt{3}, 0)$ și axa Oy în punctul $M_3(0, 2)$. f) Ecuația canonică $Y^2 = \pm \frac{12}{5\sqrt{5}}X$; $\varphi = \arctg 2$; axa parabolei $4x - 2y - \frac{8}{5} = 0$; tangenta în vârful parabolei $2x + 4y + \frac{7}{5} = 0$. Parabola intersectează axele Ox și Oy în punctele $M_1(2, 0)$ și $M_2(0, 2)$. g) Ecuația canonică $\frac{X^2}{2(\sqrt{5}+2)} - \frac{Y^2}{2(\sqrt{5}-2)} - 1 = 0$. Centrul $C(2, -1)$; $\varphi = \arctg \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. h) Ecuația canonică $Y^2 = \pm \frac{9}{4\sqrt{2}}X$; $\varphi = 45^\circ$; axa parabolei $x - y +$

$+\frac{1}{4} = 0$; ta
hiperbolă; $\lambda =$
parabolă; $\lambda =$
 $\lambda = -5$ și
și $x + 2y =$
 $m = 2, n =$
 $\lambda \in (-1, -$
paralele; $\lambda \in$
 $\lambda = 4$, parabol
drepte imagina
 $-15y + 12 =$

9.3. Geo

12: $x^2 +$
(Γ_0) $\frac{x^2 - u^2}{1}$
 $+ 1 \Rightarrow \frac{1}{T} = 0$
implicite ale

în planul $x =$
 $= \frac{2z}{u_0}$. 16.
liniar cu ve
eliminarea p
Ecuația plan

(PT) $12x -$
 $= \frac{y-3}{-3} =$

$+ z + 5 = 0$
 $= \frac{y-3}{4} =$

(PT) $x \cos$
 $- u^2 (x -$

$= \frac{z - u^2}{u}$
 $(x_0, y_0, z_0) \in$

$\frac{x}{x_0^2 + a^2} +$
 $\frac{y}{y_0^2 + a^2} +$
 $\frac{z}{z_0^2 + a^2} =$

$+\frac{1}{4} = 0$; tangenta în virful parabolei $x + y - \frac{47}{72} = 0$. 5. a) $\lambda \in \left(-\infty, -\frac{77}{4}\right) \cup \left(-\frac{77}{4}, 1\right)$,

hiperbolă; $\lambda = -\frac{77}{4}$, două drepte reale; $\lambda = 1$, parabolă; $\lambda \in (1, \infty)$, elipsă reală; b) $\lambda \neq 2$,

parabolă; $\lambda = 2$, dreptele paralele $x + y + 3 = 0$ și $x + y - 1 = 0$. 6. Se adaugă constanta $\lambda = -5$ și se obțin dreptele $2x - y + 5 = 0$, și $x + 3y - 1 = 0$. 7. $m = 4$, $n = -3 \Rightarrow x + 2y = 0$ și $x + 2y - 3 = 0$. 8. $m = n = q = 0 \Rightarrow x = 0$; $m = -2$, $n = 2$, $q = 1 \Rightarrow x + 2y + 1 = 0$;

$m = 2$, $n = 2$, $q = 1 \Rightarrow x - 2y + 1 = 0$. 9. $\lambda \in (-\infty, -1)$, elipsă reală; $\lambda = -1$, parabolă;

$\lambda \in \left(-1, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, 1\right)$, hiperbolă; $\lambda = -\frac{1}{3}$, drepte reale concurente; $\lambda = 1$, drepte

paralele; $\lambda \in (1, \infty)$, elipse imaginare. 10. $\lambda \in (-\infty, -1) \cup (4, 9)$; elipsă reală; $\lambda = -1$ sau

$\lambda = 4$, parabolă; $\lambda \in \left(-1, \frac{7}{3}\right) \cup \left(\frac{7}{3}, 4\right)$, hiperbolă; $\lambda = \frac{7}{3}$, drepte reale concurente; $\lambda = 9$,

drepte imaginare cu intersecție reală; $\lambda \in (9, +\infty)$, \Rightarrow elipse imaginare. 11. $2x^2 + 3y^2 - 10x - 15y + 12 = 0$.

9.3. Geometria diferențială a suprafețelor

12. $x^2 + y^2 - z = 0$. 13. a) $(xz - y^2)^2 - a^2x^3 = 0$; b) $(x - z + a)^2 + (y - z + a)^2 = 1$. 14.

$(\Gamma_u) \frac{x - u^2 - 1}{1} = \frac{y - u^2 - 1}{-1} = \frac{z - 2}{u_0}$; $(\Gamma_v) x = u^2 + v_0 + 1$, $y = u^2 - v_0 + 1$, $z = v_0u +$

$+ 1 \Rightarrow \frac{1}{T} = 0$, torsiunea este nulă. Altfel: se elimină u între ecuațiile lui Γ_u și se obțin ecuațiile

implicite ale curbei $x - y - 2v_0 = 0$, $x - \frac{1}{v_0^2}(z - 2)^2 - v_0 - 1 = 0$. Aceasta arată că Γ_u se află

în planul $x - y - 2v_0 = 0$. 15. $(\Gamma_u) \frac{2x - av_0}{a} = \frac{2y + bv_0}{b} = \frac{2z}{v_0}$; $(\Gamma_v) \frac{2x - av_0}{a} = \frac{2y - bv_0}{-b} =$

$-\frac{2z}{v_0}$. 16. Vectorul normal la suprafață: $N = r'_u \times r'_v = (u^2 - 4uv + 3v^2)(i - j + 4k)$ este co-

liniar cu vectorul constant $i - j + 4k$. Deci suprafața este un plan de normală $i - j + 4k$. Prin

eliminarea parametrilor u și v din ecuațiile suprafeței obținem ecuația acestui plan $x - y + 4z = 0$.
Ecuația planului tangent este aceeași cu ecuația suprafeței. 17. a) $(N) \frac{x - 3}{12} = \frac{y - 5}{-9} = \frac{z - 9}{2}$;

$(PT) 12x - 9y + 2z - 9 = 0$; b) $(N) x - 3 = \frac{y - 3}{-2} = z - 3$; $(PT) x - 2y + z = 0$; c) $(N) x - 1 =$

$\frac{y - 3}{-3} = \frac{z - 1}{-4}$; $(PT) x - 3y - 4z + 12 = 0$; d) $(N) \frac{x - 1}{-2} = \frac{y + 2}{4} = z - 5$; $(PT) -2x + 4y +$

$+ z + 5 = 0$; e) $(N) \frac{x - 1}{-3} = \frac{y - 2}{-12} = z - 9$; $(PT) -3x - 12y + z + 18 = 0$; f) $(N) \frac{x - 4}{3} =$

$\frac{y - 3}{4} = \frac{z - 4}{-6}$; $(PT) 3x + 4y - 6z = 0$; g) $(N) \frac{x - R \cos \alpha}{\cos \alpha} = \frac{y - R \sin \alpha}{\sin \alpha} = \frac{z - R}{0}$;

$(PT) x \cos \alpha + y \sin \alpha - R = 0$; h) $(N) \frac{x - 1}{-2} = \frac{y}{0} = z - 1$; $(PT) -2x + z + 1 = 0$. 18. a) $(PT) 3(v^3 -$

$-u^3)(x - u - v) + 3(u^3 - v^3)(y - uv) + (u - v)(z - u^3 - v^3) = 0$; $(N) \frac{x - u - v}{3(v^3 - u^3)} = \frac{y - uv}{3(u^3 - v^3)} =$

$\frac{z - u^3 - v^3}{u - v}$; b) $(PT) (y_0 + z_0)x + (z_0 + x_0)y + (x_0 + y_0)z = 0$; $(N) \frac{x - x_0}{y_0 + z_0} = \frac{y - y_0}{z_0 + x_0} = \frac{z - z_0}{x_0 + y_0}$,

$(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$. 19. Fie $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$: $x_0^{2/3} + y_0^{2/3} + z_0^{2/3} = a_0^{2/3}$. Ecuația planului tangent este

$\frac{x}{x_0^{1/3} a_0^{2/3}} + \frac{y}{y_0^{1/3} a_0^{2/3}} + \frac{z}{z_0^{1/3} a_0^{2/3}} - 1 = 0$. Deci $[x_0^{1/3} a_0^{2/3}]^2 + [y_0^{1/3} a_0^{2/3}]^2 + [z_0^{1/3} a_0^{2/3}]^2 = a^2$. 20. $x = \pm a^2(a^2 +$

$\pm b^2 + c^2)^{-1/2}$, $y = \pm b^2(a^2 + b^2 + c^2)^{-1/2}$, $z = \pm c^2(a^2 + b^2 + c^2)^{-1/2}$. 21. Fie $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$:

$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - x_0 f \left(\frac{y_0}{x_0} \right) = 0$. Ecuațiile normalei în punctul M_0 sînt $\frac{x-x_0}{2x_0-f+y_0x_0^{-1}f'} = \frac{y-y_0}{2y_0-f'}$
 $= \frac{z-z_0}{2z_0}$. Punctul de intersecție dintre normală și planul $z=0$ este $M_1 \left(\frac{1}{2}f + \frac{1}{2}y_0x_0^{-1}f', \right.$
 $\left. \frac{1}{2}f', 0 \right)$. Se verifică ușor că $|\vec{OM}_1| = |\vec{M_0M_1}|$. 22. a) $ds = [(2+4u^2)du^2 + 2(2u+2v+1)dudv +$
 $+ (2+4v^2)dv^2]^{1/2}$; b) $ds = [(1+y^4)dx^2 + 4xy^3dxdy + (1+4x^2y^2)dy^2]^{1/2}$; c) $ds = \left[\left(1 + \frac{c^4}{a^4} \frac{x^2}{z^2} \right) dx^2 + \right.$
 $+ 2 \frac{c^4}{a^2b^2} \frac{xy}{z^2} dxdy + \left(1 + \frac{c^4}{b^4} \frac{y^2}{z^2} \right) dy^2 \right]^{1/2}$. 23. Grad $F_1 = yz \mathbf{i} + xz \mathbf{j} + xy \mathbf{k}$, grad $F_2 = (2x +$
 $+ 2xf')\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - (4z + 2zf')\mathbf{k}$ și grad $F_1 \cdot \text{grad } F_2 = 0$. 24. 90° . 25. $\arccos \left(-\frac{2}{3} \right)$. 26. a)
 $\arccos \left(-\frac{3}{5} \right)$; b) $\arccos \frac{a^2-1}{a^2+1}$. 27. $\ast (\Gamma_1, \Gamma_2) = \arccos \left(-\frac{1}{\sqrt{15}} \right)$; $\ast (\Gamma_1, \Gamma_3) = \arccos \frac{8}{\sqrt{70}}$
 $\ast (\Gamma_2, \Gamma_3) = \arccos \frac{\sqrt{2}}{3}$. 28. Deoarece sînt curbe corodonate pe suprafață și $F=0$, rezultă că
 toate unghiurile patrulaterului sînt de 90° . 29. $F=0$; $d\sigma = b|a+b \cos u|dudv$. 30. a) 90° . b) Con-
 condiția de ortogonalitate este $2\delta u + u^2\delta v = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{u^2}\delta u + \delta v = 0 \Leftrightarrow \delta \left(-\frac{2}{u} + v \right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{u} +$
 $+ v = \text{const}$. 31. $ds^2 = a^2du^2 + a^2 \cos^2 u dv^2$; $n \cdot d^2r = a du^2 + a \cos^2 u dv^2$. 32. a) $n \cdot d^2r = (u^2 +$
 $+ 4v^2 + 4u^4)^{-1/2} \cdot [2u du^2 - 4v dudv + 2(u+u^3)dv^2]$; b) $n \cdot d^2r = -2(u^2 + v^2 + 4u^2v^2)^{-1/2} \cdot (v du^2 +$
 $+ u dv^2)$. 33. a) 90° ; b) $\cos \theta = [2(1+u^2)]^{-1/2}$; $u = \pm 1$. 34. a) $\ast (\Gamma_1, \Gamma_2) = \arccos \frac{2}{3}$;
 $\ast (\Gamma_1, \Gamma_3) = \arccos \left(-\frac{2}{3} \right)$; $\ast (\Gamma_2, \Gamma_3) = 0$; b) Condiția de ortogonalitate este $u\delta u + (u^2 +$
 $+ a^2)\delta v = 0 \Leftrightarrow \delta(\ln(u^2 + a^2) + 2v) = 0 \Leftrightarrow \ln(u^2 + a^2) + 2v = \text{const}$; c) $n \cdot d^2r = -2a(a^2 + u^2)^{-1/2}dudv$.
 35. a) $a = \pm 1$; b) $a = \pm (\sqrt{3} + 2)$; c) $a = \pm \sqrt{3}$.

9.4. Suprafețe riglate și de rotație

11. a) $(x+y)^2 + (x-y+z)^2 = 2r^2$; b) $(x-6z)^2 + (y-3z)^2 = 1$; c) $2(y-2x)^2 + 8(y-2x)(x+z) +$
 $+ 14(x+z)^2 - 16 = 0$; d) $(x-z)^2 + (y-z)^2 - 4 = 0$; e) $16(z-3x)^2 - 9(3y-2z)^2 - 1296 =$
 $= 0$; f) $x^2 + y^2 - 3x + 2y - 1 = 0$. 12. Ecuațiile generatoarei $\frac{x-x_0}{1} = \frac{y-y_0}{0} = \frac{z-z_0}{-2} \Leftrightarrow y =$
 $= y_0 \equiv \lambda$, $z + 2x = z_0 + 2x_0 \equiv \mu$. Se obține $(2x+z)^2 + 25y^2 - 20x - 10z = 0$. 13. Generatoarele
 au direcția $(1, 1, 1)$. Obținem $(x-y+1)(x+y-2z) = 0$. 14. $-2x^2 - 2y^2 - 2z^2 + 2xy + 2yz +$
 $+ 2xz - 6x + 6z - 3 = 0$. 15. Generatoarele sînt paralele cu linia centrelor sferelor, $C_1C_2(2, 1, 0)$
 și deci au ecuațiile $x-2y = \lambda$, $z = \mu$. Punînd condiția ca acestea să intersecteze sferile într-un
 singur punct, obținem condiția $\lambda^2 + 5\mu^2 - 125 = 0$. Ecuația cilindrului este $(x-2y)^2 + 5z^2 -$
 $- 125 = 0$. 16. Ecuația cilindrului proiectant este $-2x^2 - 2y^2 - 2z^2 + 2xy + 2yz + 2xz - 2x -$
 $- 2y + 4z + 1 = 0$. Forma umbrei este interiorul curbei de intersecție a cilindrului proiectant cu
 planul $z=0$, anume: $z=0$, $-2x^2 - 2y^2 + 2xy - 2x - 2y + 1 = 0$. 17. a) $y^2 - xz = 0$; b) $x^2 +$
 $+ y^2 - 2z^2 - 2xz - 2yz + 8z - 4 = 0$; c) $4y^2 - 3z^2 + 8xz - 8yz - 16x + 12z + 4 = 0$; d) $x^2 +$
 $+ 22y^2 + 3z^2 - 4xy - 5xz + 7yz + 4x - 8y - 10z + 4 = 0$; e) $(2+a)x^2 - 4z(y+a) + 2az^2 = 0$;
 f) $x(x^2 + y^2)^{-1/2} = \cos \left[\frac{a}{b} z(x^2 + y^2)^{-1/2} \right]$. 18. $(r^2 - b^2)(y-a)^2 + (y^2 - a^2 - b^2)x^2 + (r^2 - a^2)x^2 -$
 $- 2abz(y-a) = 0$. 19. $4x^2 - 15y^2 - 6z^2 - 12xz - 36x + 24z + 66 = 0$. 20. $9(x-5)^2 = 16(y^2 + z^2)$.
 21. a) $9(2-x)^2 - 18y(2-x) - z^2y^2 = 0$; b) $10x^2 - 90y^2 - 25z^2 + 105yz + 15xz - 116x - 48y -$
 $- 26z + 264 = 0$; c) $x^3z - y^3 = 0$; d) $-2(x+y+z)(x-z) + 2x + 2y - 3z = 0$; e) $x(x +$
 $+ y + z) - x - y = 0$. 22. a) $(x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - b^2)^2 = 4a^2(b^2 - z^2)$; b) $4(x^2 + y^2) - z^2 - 4 =$
 $= 0$; c) $y^2 + z^2 - 2px = 0$; d) $(Ox) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} - 1 = 0$; $(Oy) \frac{x^2 + z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$; e) $xy \rightarrow$

$+ yz + zx = 0$,
 vedea exercitiile
 curbei sînt $2y^2 +$
 sînt $y=0$, $z^2 =$
 planul $yOz: 45y^2 +$
 $+ 36z = 0$; $y =$
 cu dreapta (d)
 $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{3}$
 27. Eliminînd
 $+ 2) = 0 \Leftrightarrow F(x)$
 arată că suprafața

9.5. Cua

7. Locul

metric este elip

de rotație π^2

$-1 = 0$; $y =$

$M_1 \left(-\frac{6}{5}, -\frac{1}{5} \right)$

și $(P_2) 9x + 12z -$

$-44x + 73 = 0$

$+ 66y - 88z + 28z^2 - 44z$

b) $x=4$, $y=1$, $z=1$

$+ 16xz + 8z^2 - 3z = 0$, $y=1$

$+ 12 = 0$, $6x = 12$

și $M_2(2, 3, 1)$

b) $M_1(0, 0, 0)$

$+ 2y - 4 = 0$

$2x - 3y - 6 = 0$

10. Int

10.1. F

8. a)

e) $\frac{2}{3}(x + 1)$

$-\frac{1}{x}\sqrt{x^2 + 1}$

$+ \arcsin x$

+ yz + zx = 0; f) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 - a^2(x^2 + z^2 - y^2) = 0$; g) $x^2 + y^2 + z^2 - x^3 = 0$. 23. A se vedea exercițiile rezolvate 9 și 10. Cilindrul proiectant este $2y^2 + x^2 - 4x = 0$. Ecuațiile proiectiei curbei sînt $2y^2 + x^2 - 4x = 0, z = 0$. 24. Se procedează ca la exercițiul anterior. Ecuațiile proiectiei sînt $y = 0, z^2 + ax - a^2 = 0$. 25. În planul xOy : $9y^2 + 8xy + 16x - 12y - 60 = 0, z = 0$; în planul yOz : $45y^2 + 72yz + 36y + 144z - 108 = 0, x = 0$; în planul zOx : $3x^2 + 27z^2 - 24xz - 12x + 36z = 0; y = 0$. 26. Cilindrul este obținut prin rotirea dreptei ce trece prin M_0 și este paralelă cu dreapta (d) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{1} = t$, în jurul dreptei d. Deci curba directoare este $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{1}$. Se obține $5x^2 + y^2 + 5z^2 - 3xy - xz - 3yz - 8x - 2y + 14z - 32 = 0$. 27. Eliminînd u și v, obținem ecuația suprafeței sub forma implicită $(2x - y - z)^2 - 2(y - z + 2) = 0 \Leftrightarrow F(P_1, P_2) = 0$, unde $P_1 \equiv 2x - y - z, P_2 \equiv y - z + 2$ și $F(u, v) = u^2 - 2v$. Aceasta arată că suprafața este o suprafață cilindrică.

9.5. Cuadrice pe ecuațiile lor canonice

7. Locul geometric este hiperboloidul cu două pinze $\frac{x^2 + y^2}{c^2 - a^2} - \frac{z^2}{a^2} + 1 = 0$. 8. Locul geometric este elipsoidul de rotație $\frac{x^2 + y^2}{a^2 - c^2} + \frac{z^2}{a^2} - 1 = 0$. 9. Locul geometric este paraboloidul eliptic de rotație $x^2 + y^2 = 2pz$. 10. $M_1(2, -3, 0)$ și $M_2(0, 0, 2)$. 11. Elipsele: $z = 0, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0; y = 0, \frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{16} - 1 = 0; x = 0, \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} - 1 = 0$. 12. Punctele de intersecție sînt $M_1\left(-\frac{6}{5}, -\frac{6}{5}, -\frac{6}{5}\right)$ și $M_2\left(\frac{6}{5}, \frac{6}{5}, \frac{6}{5}\right)$. Planele tangente sînt $(P_1) 9x + 12y + 4z + 30 = 0$ și $(P_2) 9x + 12y + 4z - 30 = 0$. 13. Proiecția în planul xOy : $z = 0, 8x^2 + 21y^2 - 12xy + 66y - 44x + 73 = 0$ are centrul $(2, -1, 0)$; proiecția în planul yOz : $x = 0, 21y^2 - 24yz + 32z^2 + 66y - 88z + 73 = 0$ are centrul $(0, -1, 1)$; proiecția în planul xOz : $y = 0, 7x^2 + 16xz + 28z^2 - 44x - 88z + 85 = 0$ are centrul $(2, 0, 1)$. 14. a) $x = 4 \pm 2\sqrt{2}, y = 2 \pm 2\sqrt{2}, z = 9 \pm 6\sqrt{2}$; b) $x = 4, y = 2, z = 9$. 15. a) $-13x^2 + 16xz + 8z^2 + 8z - 16x - 16 = 0, y = 0$; b) $-13x^2 + 16xz + 8z^2 + 8z - 16x + 8 = 0$. 16. $4x + 3y - 3z - 6 = 0, 4x - 12y + 3z - 24 = 0$ și $4x - 3z = 0, y = 2$. 17. Hiperboloidul cu o pinză $4x^2 + 9y^2 - 36z^2 - 36 = 0$. 18. a) $M_1(0, 0, 0) + 12 = 0, 6x + 4y + 3z + 12 = 0$ și $6x - 4y - 3z - 12 = 0, 6x + 4y + 3z - 12 = 0$. 19. a) $M_1(0, 0, 0)$ și $M_2(2, 3, 1)$; b) $M(0, 0, 0)$. 20. a) $M_1(0, 0, 0) \Rightarrow z = 0; M_2(12, 12, 12) \Rightarrow 4x + 2y - 3z - 36 = 0$; b) $M_1(0, 0, 0) \Rightarrow z = 0; M_2(36, 36, 36) \Rightarrow 4x - 2y - z - 36 = 0$. 21. $x - 2y - 4z = 0, x + 2y - 4 = 0$ și $x - 2y - 8 = 0, x + 2y - 2z = 0$. 22. $2x - 3y - 6z = 0, 2x + 3y - 6 = 0$ și $2x - 3y - 6 = 0, 2x + 3y - 6z = 0$. 23. $\arccos \frac{107}{5\sqrt{769}}$.

10. Integrarea funcțiilor

10.1. Primitive

8. a) $-\ln(1 + e^{-x}) + C$; b) $\frac{1}{80}(5x^2 - 3)^8 + C$; c) $\frac{2}{3}(\ln x)^{3/2} + C$; d) $-\frac{4}{3}(1 - \sqrt{x})^{3/2} + C$; e) $\frac{2}{3}(x + 1)^{3/2} - 2(x + 1)^{1/2} + C$; f) $\ln|x| - \ln 2 \ln|\ln 4x| + C$. 9. a) $x = \operatorname{tg} t; \ln|x + \sqrt{x^2 + 1}| - \frac{1}{x}\sqrt{x^2 + 1} + C$; b) $x = \sqrt{2} \sin t; -\frac{1}{3}(x^2 + 4)\sqrt{2 - x^2} + C$; c) $x = \sin t; \frac{1}{2}(x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x) + C$; d) $x = \sin^2 t; 2 \arcsin \sqrt{x} + C$; e) $x = \sin t; \arcsin x - \sqrt{1 - x^2} + C$; f) $x = \operatorname{tg} t$

$x(1+x^2)^{-1/2} + C$. 10. a) $x = a \operatorname{sh} t$; $\frac{1}{2} x \sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{a^2+x^2}) + C$; b) $x = a \operatorname{ch} t$; $\frac{1}{2} x \sqrt{x^2-a^2} + \frac{a^2}{2} \ln|x| + \sqrt{x^2-a^2}| + C$; c) $x = \operatorname{sh} t$; $\ln|x| - \ln(1 + \sqrt{x^2+1}) + C$; d) $x+1 = \sqrt{2} \operatorname{th} t$; $\frac{1}{2}(x+1)(1-2x-x^2)^{-1/2} + C$. 11. a) $\frac{1}{\ln 2} \arcsin 2^x + C$; b) $\ln(1+e^x) + C$; c) $-\frac{1}{9} [\sqrt{1-9x^2} + (\arccos 3x)^3] + C$; d) $\frac{2}{3} (e^x-2)\sqrt{e^x+1} + C$; e) $\frac{2}{3} x^{3/2} - x + 4x^{1/2} - 4 \ln(1+\sqrt{x}) + C$; f) $\frac{1}{4\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\sqrt{5} + \sin 2x}{\sqrt{5} - \sin 2x} \right| + C$; g) $2 \operatorname{tg} \sqrt{x} + C$. 12. a) $x(\ln x - 1) + C$; b) $\frac{1}{a^2} (ax-1)e^{ax} + C$; c) $\frac{1}{\ln^2 a} (x \ln a - 1)a^x + C$; d) $\frac{1}{2} \frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}} e^{\operatorname{arctg} x} + C$; e) $-\frac{1}{x} (\ln^2 x + 3 \ln^2 x + 6 \ln x + 6) + C$; f) $\frac{1}{a^2+b^2} (b \sin bx + a \cos bx)e^{ax} + C$; g) $\frac{1}{2} [(x^2-1) \sin x - (x-1)^2 \cos x]e^x + C$; h) $\left[\frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{10} x(\cos 2x + 2 \sin 2x) - \frac{1}{50} (4 \sin 2x - 3 \cos 2x) \right] e^x + C$; i) $\frac{1}{4} (2x^2 - 2x + 1)e^{2x} + C$. 13. a) $I_n = x^n e^x - n I_{n-1}$; $I_0 = e^x$; b) $I_{n+1} = x \ln^{n+1} x - (n+1) I_n$; $I_0 = x$; c) $I_{n+1} = \frac{1}{a^2} \left[\frac{1}{2n} x(a^2-x^2)^{-n} + \frac{2n-1}{2n} I_n \right]$; $I_1 = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right|$; d) $I_{n+1} = -\frac{1}{n+1} \sin^n x \cos x + \frac{n}{n+1} I_{n-1}$; $I_1 = -\cos x$; e) $I_{n+1} = -\frac{1}{n} [\cos x \sin^{n-x} x - (n-1) I_{n-1}]$; $I_1 = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|$; f) $I_{n+1} = \frac{1}{n} \operatorname{tg}^n x - I_{n-1}$; $I_1 = -\ln |\cos x| + C$; g) $I_n = \frac{1}{n^2+a^2} [(a \cos x + n \sin x)e^{ax} \cos^{n-1} x + n(n-1) I_{n-2}]$. 14. a) $-\frac{3}{2} \ln|x| + \frac{5}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln|x+2| + C$; b) $x+3 \ln|x-3| - 3 \ln|x-2| + C$; c) $x + \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$; d) $\frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{1}{2} \ln|x+3| - \ln|x+2| + C$; e) $\frac{1}{52} \ln|x-3| - \frac{1}{20} \ln|x-1| + \frac{1}{65} \ln(x^2+4x+5) + \frac{7}{130} \operatorname{arctg}(x+2) + C$; f) $\frac{3}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x-3| - \frac{13}{x-3} + C$; g) $\frac{1}{4} \ln|x-1| - \frac{1}{4} \ln|x+1| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C$; h) $\frac{2x-1}{2(x^2+2x+2)} + \operatorname{arctg}(x+1) + C$; i) $2 \ln|x+4| - 2 \ln|x+2| - \frac{5x+12}{x^2+6x+8} + C$; j) $\ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) + \frac{1}{3} \frac{x+2}{x^2+x+1} + \frac{5}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$; k) $\frac{1}{2} x^2 - \frac{11}{(x-2)^2} - \frac{8}{x-2} + C$; l) $\frac{1}{4} \ln(x^2+x+1) - \frac{1}{4} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{3}} + C$. 15. a) $\frac{9}{4} x^{2/3} - \frac{3}{2} x^{1/2} + \frac{9}{8} x^{1/3} - \frac{9}{8} x^{1/6} + \frac{9}{16} \ln \left| \frac{1}{2} + x^{1/6} \right| + C$; b) $6 \left(\frac{1}{7} t^7 - \frac{1}{5} t^5 - \frac{1}{4} t^4 + \frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{2} t^2 - t + \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2} \ln|1+t^2| \right) + C$, cu $t = (1+x)^{1/6}$; c) $\frac{1}{2} (x-2)(x^2-1)^{1/3} + \frac{1}{2} \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C$; d) $\frac{6}{7} x^{7/6} - \frac{6}{5} x^{5/6} - \frac{3}{2} x^{2/3} + 3x^{1/3} + 2x^{1/2} - 6x^{1/6} - 3 \ln|1+x^{1/3}| + 6 \operatorname{arctg} x^{1/6} + C$; e) $\frac{1}{3} \ln(t^2+t+1) - \frac{2}{3} \ln|t-1| + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + \frac{2t}{t^2-1} + C$, cu $t = \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{1/3}$; f) $\ln|t^2-1| - \frac{1}{2} \ln(t^4+t^2+1) + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2t^2+1}{\sqrt{3}} + C$, cu $t = \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{1/3}$. 16. a) $\frac{1}{4} (2x+3) \sqrt{x^2-x+1} - \frac{1}{8} \ln(2x-1+2\sqrt{x^2-x+1}) + C$; b) $-\frac{1}{15} (3x^3+4x^2+8) \sqrt{1-x^2} + C$; c) $\left(\frac{5}{16} x - \frac{5}{24} x^2 + \frac{1}{6} x^3 \right) \sqrt{1+x^2} - \frac{5}{16} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$; d) $\frac{1}{2(x+1)^2} \sqrt{x^2+2x} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{x+1} + C$.

17. a) $\frac{1}{2} (1+x^2)(1+x^2)^{1/2}$; cu $t = (1+x^2)^{1/2}$; c) $+ 2x^2(1+x^2)^{-1/2} + 3(1+x^2)^{1/2} + C$. 18. a) $\frac{1}{4} \left(\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \right| + \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2 \cos x \right) + C$; f) $3 \left(t - \frac{1}{t} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2t^2} + \ln(1+t^2)^{1/2} + C \right)$; m) $\frac{3}{5} \sin \frac{5x}{6} - \frac{1}{8} \cos 2x + C$. 19. a) $-\sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{arctg} x$; c) $\frac{1}{2} (3-x) \sqrt{1-x^2}$; e) $\sqrt{1+x^2} = t+x$; $+\frac{1}{18} \sin 3x + \frac{1}{2} x$; $+ 2 \sqrt{e^{2x}+e^x+1}$. g) $2 \ln \left| \frac{x+3}{x+2} \right| + C$.

10.2. Integrale

20. a) 3; b) $\frac{11}{2}$; $I = \frac{112}{3}$; e) $\Delta: x$; f) $\frac{a^4}{4}$. 21. a) $f(x) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$; d) $\lim_n a_n = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$. 23. a) Dacă $x \in [-1, 1]$; b) Pentru $x \in [-1, 1]$.

17. a) $\frac{1}{2} (1+x^2)(1+2x^2)^{-1/2} + C$; b) $\frac{1}{5} \ln|t-1| - \frac{1}{10} \ln(t^2+t+1) + \frac{\sqrt{3}}{5} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C$
 cu $t = (1+x^2)^{1/2}$; c) $-\frac{1}{8x} (4+3x^3)(2+x^3)^{-2/3} + C$; d) $-2(1+x^{-3/4})^{2/3} + C$; e) $-\frac{1}{x} (1+2x^2)(1+x^2)^{-1/2} + C$; f) $\frac{1}{3} (x^2-2) + (1+x^2)^{1/2} + C$; g) $\frac{3}{5} (1+x^{2/3})^{5/2} - 2(1+x^{2/3})^{3/2} + 3(1+x^{2/3})^{1/2} + C$; h) $\frac{1}{8} (1+x^3)^{8/3} \rightarrow \frac{1}{5} (1+x^3)^{5/3} + C$; i) $\frac{3}{7} (4x^{1/2} + x^{1/4} - 3)(1+x^{1/4})^{1/3} + C$.

18. a) $\frac{1}{4} \left(\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2 \right| - \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2 \right| \right) + C$; b) $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \right| + C$; c) $\operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \right) + C$; d) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$; $\frac{1}{3} \ln |t^3 - 2t^2 + 3t| + \frac{4}{3\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t-1}{\sqrt{2}} + C$; e) $-\frac{1}{5} x - \frac{3}{5} \ln |\sin x + 2 \cos x| + C$; f) $-\frac{1}{2(1-\cos x)^2} + C$; g) $\sin x = t$; $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1+\sqrt{2}t}{1-\sqrt{2}t} \right| + C$; h) $\operatorname{tg} x = t$; $3 \left(t - \frac{1}{t} \right) + \frac{1}{3} \left(t^3 - \frac{1}{t^3} \right) + C$; i) $\sin x = t$; $\frac{1}{2} \frac{t}{1-t^2} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1-t}{1+t} \right| + C$; j) $\cos x = t$; $\frac{1}{2t^2} + \ln(1+t^2)^{1/2} + C$; k) $\frac{1}{\cos x} + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$; l) $-\frac{1}{4} \frac{\cos x}{\sin^4 x} - \frac{3}{8} \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{3}{8} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$; m) $\frac{3}{5} \sin \frac{5x}{6} + 3 \sin \frac{x}{6} + C$; n) $\frac{3}{2} \cos \frac{x}{3} - \frac{1}{2} \cos x + C$; p) $\frac{1}{24} \cos 6x - \frac{1}{16} \cos 4x - \frac{1}{8} \cos 2x + C$; q) $\frac{3}{2} \cos \frac{x}{6} - \frac{3}{10} \cos \frac{5x}{6} - \frac{3}{14} \cos \frac{7x}{6} + \frac{3}{22} \cos \frac{11x}{6} + C$.

19. a) $-\sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2(3-x)}{3(x-2)}} + C$; b) $\sqrt{1+x-x^2} = 1+tx \Rightarrow \ln \left| \frac{t}{t+2} \right| - 2 \operatorname{arctg} t + C$; c) $\frac{1}{2} (3-x) \sqrt{1-2x-x^2} + 2 \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{3}} + C$; d) $\sqrt{1-x^2} = t(1-x) \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C$; e) $\sqrt{1+x^2} = t+x \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$. 20. a) $\frac{1}{4} (2x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 10x + 7)e^{2x} + C$; b) $-\frac{1}{6} x \cos 3x + \frac{1}{18} \sin 3x + \frac{1}{2} x \cos x - \frac{1}{2} \sin x + C$; c) $\frac{1}{8} (2 - \sin 2x - \cos 2x)e^{2x} + C$; d) $x - \ln(2 + e^x) + 2\sqrt{e^{2x} + e^x + 1} + C$; e) $-3(x^{1/3} + 1)^{-1} + C$; f) $\ln|x| - \ln|2+x+2\sqrt{x^2+x+1}| + C$; g) $2 \ln \left| \frac{x+3}{x+2} \right| - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3}$.

10.2. Integrala definită

20. a) 3; b) $\frac{117}{2}$; c) $\frac{80}{\ln 3}$; d) $\Delta: x_i = 4 \cdot q^i, i=0, 1, \dots, n$, cu $q = 2^{1/n}$; $\xi_i = x_i, i=1, 2, \dots, n$
 $I = \frac{112}{3}$; e) $\Delta: x_i = a \cdot q^i, i=0, 1, \dots, n$, cu $q = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/n}$; $\xi_i = x_i, i=1, 2, \dots, n \Rightarrow \ln \frac{b}{a}$;
 f) $\frac{a^4}{4}$. 21. a) $f(x) = \frac{1}{1+x}, x \in [0, 1] \Rightarrow \lim_n a_n = \ln 2$; b) $\lim_n a_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$; c) $\lim_n a_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$ cu alegerea $\Delta: x_i = \frac{i}{n}, i=0, 1, \dots, n$ și $\xi_i = \frac{2i-1}{n}, i=1, 2, \dots, n$;
 d) $\lim_n a_n = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$; e) $\lim_n a_n = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = 2(\sqrt{2}-1)$; f) $\frac{1}{5}$. 22. Nu este integrabilă.
 23. a) Dacă $x \in [-1, 0]$, $F(x) = \frac{1}{\ln 3} (3^x - 3^{-1})$; dacă $x \in (0, 1]$, $F(x) = \frac{1}{\ln 3} \left(\frac{5}{3} - 3^{-x} \right)$;
 b) Pentru $x \in [-1, 1]$, $F(x) = 4 - \frac{1}{4} (1-x)^4$, iar pentru $x \in (1, 2]$, $F(x) = 4 + \frac{1}{4} (x-1)^4$.

25. a) $2 < I < \sqrt{5}$; b) $\frac{2\pi}{13} < I < \frac{2\pi}{7}$; c) $0 < I < \frac{\pi^3}{32}$, $0 \leq \operatorname{tg} x \leq 1$; d) $0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Rightarrow \frac{\pi}{2} < I < \frac{\pi}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^{1/3}$. 26. $J_{2n} = \frac{(2n-1) \dots 3 \cdot 1}{2n \dots 4 \cdot 2} \frac{\pi}{2}$, $J_{2n+1} = \frac{2n \dots 4 \cdot 2}{(2n+1) \dots 3 \cdot 1}$. 27. a) $4 - 2 \ln 3$; b) $2 - \frac{\pi}{2}$; c) $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$; d) $\frac{\pi}{2} (1+a^2)^{-1/2}$; e) $1 - \frac{\pi}{4}$; f) $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$; g) $\frac{1}{5} \ln 112$; h) $\ln \frac{1}{9} (7 + 2\sqrt{7})$; i) $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$; j) $\frac{\pi}{2}$; k) $\frac{\pi}{2} - 1$; l) $(e^\pi + 1)/2$; m) $(e^2 + 3)/8$; n) $\operatorname{arctg} \frac{1}{2}$; o) $\frac{3\pi}{16}$; p) $2\pi\sqrt{2}$; q) $\frac{\pi}{2} - \ln 2$. 28. $x = 2$. 29. a) Substituția $u = \pi - x$ conduce la $I_n = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \sin^n x dx = \frac{\pi}{2} J_n$, unde pentru $J_n = \int_0^\pi \sin^n x dx$ obținem $J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2}$; b) Se face substituția $u = \frac{\pi}{2} - x$ și se obține $I_n = \frac{\pi}{4} \int_0^{\pi/2} (\sin^n x + \cos^n x) dx$. Ultima integrală se calculează ca în exercițiul 10. 31. $x = \sin t \Rightarrow S_n = \frac{2 \cdot 4 \dots 2n}{1 \cdot 3 \dots (2n+1)}$. Se ține seama de inegalitatea [a se vedea cap. 5, relația (7)]: $\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1 \cdot 3 \dots 2n-1}{2 \cdot 4 \dots 2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ de unde, $\frac{2\sqrt{n}}{2n+1} > S_n > \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ și deci $\lim S_n = 0$. 32. a) $2e^2 - 1$; b) $2(\sqrt{2} - 1)$; c) 4; d) $2(e \ln 2 - 1)$; e) 2; f) $\ln 2 - \frac{1}{2}$; g) $\ln \frac{4-a}{2-a}$, dacă $a \leq 1$; $\ln a(4-a)$, dacă $a \in (1, 3)$; $\ln \frac{a}{a-2}$, dacă $a \geq 3$. 33. $1 - \frac{\pi}{4}$. 34. $-\frac{1}{2} \ln 2 + e - 2$. 35. a) $\ln(2 - \sqrt{3}) + \sqrt{3}$; b) $-2 + \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{4}$; c) $\ln \frac{16}{9}$; d) $\frac{1}{2} \ln \frac{8}{5}$. 36. a) $\frac{32}{15}$; b) $\frac{9}{2}$; c) 4; d) $3 - e$. 37. a) $\frac{8}{27} (10^{3/2} - 1)$; b) $\ln(e + \sqrt{e^2 - 1})$; c) $\frac{1}{2e} (e - 1)^2$; d) $1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$. 38. $x_0 = \frac{\pi}{2}$, $y_0 = \frac{\pi}{8}$. 39. a) $\frac{\pi}{27} (5e^3 - 2)$; b) $2\pi^3$.

10.3. Integrale improprii

10. a) Convergentă: 2; b) divergentă; c) divergentă; d) convergentă: $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$; e) convergentă: $\frac{\pi^2}{8}$; f) convergentă: $\frac{1}{k}$; g) convergentă: $2(1 + \sqrt{2})$. 11. a) divergentă; b) convergentă; c) convergentă; d) divergentă; e) convergentă; f) convergentă; g) convergentă; h) divergentă; i) convergentă; j) convergentă. 14. $\frac{1}{2}$. 15. a) $\frac{\pi}{2}$; b) π ; c) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$; d) $\frac{1}{4}(\pi + 2)$; e) $\frac{1}{2}\pi(a + b)$; f) 2; g) $\ln \frac{\sqrt{a^2+1} + 1}{a}$. 16. a) $\frac{b}{a^2 + b^2}$; b) $\frac{a}{a^2 + b^2}$; c) $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2)} \cdot a^{-2n+1} \frac{\pi}{2}$; d) $I_{2k-1} = 0$, $I_{2k} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2k} \cdot a^{2k} \pi$; e) divergentă. 18. $x = \sqrt{t}$ și apoi se integrează prin părți. Convergentă. 19. a) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$; $\frac{\pi}{3}$. b) Se descompune pe $[0, \pi]$ și $[\pi, 2\pi]$ și apoi se pune $\operatorname{tg} x = t$; $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. c) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. d) Se descompune pe $[0, \frac{\pi}{2}]$ și $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ și se pune $\operatorname{tg} x = t$; $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. 20. a) Se face substituția $t = 1 - x$. b) Se face substituția $x = \frac{y}{1+y}$. c) Se ia la punctul precedent $q = 1 - p$. d) Se integrează prin părți. e) Se integrează prin părți. 21. a) $\sin x = t^{1/2} \Rightarrow I = \frac{1}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ și I este convergentă pentru $m > -1$, $n > -1$; b) $x = t^{1/m} \Rightarrow I = \frac{1}{m} B\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n} + 1\right) \Rightarrow$

$\sin^2 x \leq 1 \Rightarrow \frac{\pi}{2} <$
 17. a) $4 - 2 \ln 3$;
 $\ln \frac{1}{9} (7 + 2\sqrt{7})$;
 g) $\frac{3\pi}{16}$; p) $2\pi\sqrt{2}$;
 $dx = \frac{\pi}{2} J_n$, unde
 $\frac{\pi}{2} - x$ și se obține
 31. $x = \sin t \Rightarrow$
 3, relația (7)]:
 deci $\lim S_n =$
 g) $\ln \frac{4-a}{2-a}$, dacă
 $\frac{1}{2} \ln 2 + e - 2$.
 a) $\frac{32}{15}$; b) $\frac{9}{2}$;
 $1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$,
 e) convergentă;
 convergentă; c) con-
 divergentă; i) con-
 e) $\frac{1}{2} \pi(a+b)$;
 $\frac{\pi}{2}$; d) $I_{2k-1} = 0$,
 prin părți. Conver-
 se pune $\operatorname{tg} x = t$;
 20. a) Se face
 precedent $q = 1 - p$.
 $I = \frac{1}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{1}{2}\right)$,
 $B\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n} + 1\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow I$ convergentă pentru $m > 0, n > 1$; c) $\frac{x}{1+x} = t \Rightarrow I = B(n-m, m)$ convergentă pentru
 $n > m > 0$; d) $ax = t \Rightarrow I = \frac{1}{a^{p+1}} \Gamma(p+1)$ convergentă pentru $p > -1$; e) $x = \frac{t}{1-t} \Rightarrow I =$
 $= B\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right)$ convergentă; f) $x = t^{1/n} \Rightarrow I = \frac{1}{n} B\left(\frac{m}{n}, \frac{n-m}{n}\right)$, convergentă pentru $0 < m < n$;
 g) $x^2 = t \Rightarrow I = \frac{1}{2} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)$, convergentă.

10.4. Integrale care depind de un parametru

7. $\frac{1}{y^2} \ln(1+xy) - \frac{x}{y(1+by)}$. 9. a) $F'(y) = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{b+y}\right) \sin y(b+y) - \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{a+y}\right) \sin y(a+y)$;
 b) $F'(y) = 2 \int_{ay}^{by} f'_u(x+y, x-y) dx + (b-1)f(by+y, by-y) - (a-1)f(ay+y, ay-y)$, cu $f =$
 $= f(u, v)$. 10. a) $\pi \arcsin y$; b) $\pi(\sqrt{1-y^2} - 1)$; c) $\pi \ln \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1-y^2})$; d) $\frac{\pi}{2} \ln(1+y)$
 dacă $y \geq 0$ și $-\frac{\pi}{2} \ln(1-y)$, dacă $y < 0$; e) $\frac{\pi}{2} \ln(y + \sqrt{1+y^2})$. 11. a) $\operatorname{arctg} \frac{a-b}{1+(a+1)(b+1)}$;
 b) $\frac{1}{2} \ln \frac{(b+1)^2 + 1}{(a+1)^2 + 1}$; c) $-\frac{1}{2} \ln \frac{a^2 + b^2}{a^2 + c^2}$; d) $\operatorname{arctg} \frac{(b-c)a}{a^2 + bc}$. 14. a) $\pi \ln \frac{y+1}{2}$; b) $\pi \arcsin y$;
 c) $\frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} (\arccos y)^2$; d) $\frac{\pi}{2} \ln(y + \sqrt{1+y^2})$.

10.5. Integrale curbilinii

10. a) 0; b) $\frac{2\sqrt{2}}{15} + \frac{5\sqrt{5}}{96}$; c) $\frac{1}{2} (\sqrt{17} - \sqrt{2} + \ln \frac{1}{4} (\sqrt{17} - 1) \cdot (\sqrt{2} + 1))$; d) 0;
 e) $\frac{3\sqrt{2}a^2}{40}$; f) $\frac{32}{3} a^2$; g) $\frac{ab}{3(a+b)} (a^2 + ab + b^2)$; h) $a^2(\sqrt{2} - 1)$. 11. a) $\left(2a + \frac{b}{8} \pi^2\right) (a^2 + b^2)^{1/2}$;
 b) $\frac{\sqrt{3}}{9} (2e^3 + 1)$. c) Se ia reprezentarea cercului $x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos t, y = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t, z = \sin t,$
 $t \in [0, 2\pi]$. Se obține $\frac{\pi}{32}$. d) (C) $x = a \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t, y = a \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t, z = a \sin t, t \in [0, 2\pi]$; $2\pi a^2$.
 12. $a \sqrt{3}$. 13. $2b^2 + 2a^2b(a^2 - b^2)^{1/2} \arcsin \frac{1}{a} (a^2 - b^2)^{1/2}$. 14. a) $\frac{1}{6} (7\sqrt{2} - 2) + \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2})$;
 b) $\frac{3}{5} + \frac{11}{100} \ln 11$; c) $\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{15}{16} + \ln 2\right)$; d) $(a^2 + b^2)^{1/2} \left[\pi(a^2 + 4\pi^2 b^2)^{1/2} + \frac{a^2}{2b} \ln \frac{1}{a} (2\pi b + \sqrt{a^2 + 4\pi^2 b^2})\right]$. 15. a) $x_a = \frac{4a}{3} = y_a$; b) $x_a = \pi a, y_a = \frac{3a}{2}$; c) $x_a = y_a = \frac{2a}{5}$; d) $x_a = x_c = 0,$
 $y_c = \frac{68}{7\sqrt{15}}$. 16. a) $2\sqrt{2} - 1$; b) $1 + \ln \frac{2}{3}$; c) 0; d) 0; e) 20; f) $-2\pi a^2$. 17. $x = a \cos t,$
 $y = a \sin t, t \in [0, 2\pi]$; -2π . 18. a) $-2\pi a(a_+ + b)$; b) $-\pi a^2 \cos^2 b$; c) $\frac{1}{8} (4b^2 + \pi^2 c^2 - 4a^2)$;
 d) $\pi^2 + \pi^2 + 2\pi$. 19. a) $\frac{31}{6}$; b) -4 ; c) $\frac{3}{2}$; d) 4; e) 7; f) $\frac{2}{15}$; g) 0. 20. $F = -kx$; $\frac{k}{2} (b^2 - a^2)$.
 21. a) $V = -mgz, \mathcal{L}_F = mg(z_1 - z_2)$; b) $V = \frac{h}{r}, \mathcal{L}_F = -k(a^2 + b^2 + c^2)^{-1/2}$; c) $V = -\frac{k^2}{2} (x^2 +$
 $+ y^2 + z^2), \mathcal{L}_F = \frac{k^2}{2} (a^2 - b^2)$.

10.6. Integrala dublă. Formula lui Green

17. a) $\frac{\pi^2}{8}$; b) $\frac{5}{12}$; c) $2 - \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{9}$; d) $2\sqrt{2} - \sqrt{3} - 1$. 18. a) $\int_0^1 dy \int_{y-1}^{1-y} f dx$;
 b) $\int_{-2}^2 dy \int_{y^2}^4 f dx$; c) $\int_{-2}^0 dx \int_{-1-\sqrt{-2x-x^2}}^{-1+\sqrt{-2x-x^2}} f dy$; d) $\int_{-2}^0 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f dy + \int_0^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f dy +$
 $+\int_0^2 dx \int_{+\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f dy$; e) $\int_1^2 dx \int_x^{2x} f dy$. 19. a) $-\int_0^1 dx \int_{x^{1/2}}^{x^{1/3}} f dy$; b) $\int_{-1}^1 dy \int_{\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y} f dx$;
 c) $\int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{-\sqrt{1+y^2}} f(x, y) dx$; d) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f dy$. 20. a) $\frac{1}{15}$; b) $\frac{2}{135}$;
 c) $\frac{4}{5}$; d) -2 ; e) $1 - 2 \ln \frac{3}{2}$; f) $\frac{1}{4} (e - 2)$; g) $\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{8}$; h) $\frac{1}{2} (1 + 3 \sin 1 - 6 \cos 1)$;
 i) $\frac{1}{4} (e - 2)$; j) $\frac{1}{2}$; k) $\frac{33}{140}$; l) $\frac{1}{6}$; m) $\frac{\pi}{6}$; n) 6. 21. a) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r f dr$; b) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b r f dr$;
 c) $\int_0^{5\pi/6} d\theta \int_0^a r f dr$; d) $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\theta \int_0^{\sin^{-1}\theta} r f dr$. 22. a) $\int_0^{2a} r \left(\pi - 2 \arcsin \frac{r}{2a} \right) f(r) dr$; b) $2\pi \int_0^a r f(r^2) dr$;
 e) $\frac{b^2 - a^2}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(\operatorname{tg} \theta) d\theta$. 23. a) $\frac{16}{3} \pi$; b) $\pi(e^{a^2} - 1)$; c) $\frac{3}{2} \pi a^4$; d) $\frac{1}{3} \pi a^3$; e) $\frac{a^3}{48}$; f) $\frac{14}{9} a^3$.
 24. a) 244; b) $\frac{1}{3} ab(2\sqrt{2} - 1) \ln 6$; c) 0; d) $4ab \int_{-\pi/3}^{\pi/4} f\left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} \theta\right) d\theta$. 25. a) Nu se verifică.
 b) Se verifică. 26. a) 0; b) $\pi a^4/2$; c) $-4/3$; d) $5\pi/4$. 27. a) $\frac{\pi}{2}$; b) $\frac{3}{2}$; c) $2\pi ab$. 28. a) $\frac{1}{6}$;
 b) $\left(2\pi + \frac{4}{3}\right) p^2$; c) $\frac{7}{120} a^2$; d) $\frac{16}{3} \sqrt{15}$; e) $\frac{1}{6} (q^2 - p^2) (a^3 - b^3)$. 29. a) $\frac{1}{6} a^3$; b) $4\pi a^3$.
 30. a) $\frac{2}{3} a^2 b$; b) $\frac{1}{8} (13 - 16 \ln 2)$. 31. a) $x_G = 0, y_G = \frac{4a}{3\pi}$; b) $x_G = \frac{4a}{3\pi}, y_G = \frac{4b}{3\pi}$; c) $x_G = 0,$
 $y_G = \frac{\pi}{8}$; d) $x_G = \frac{2}{5}, y_G = 0$; e) $x_G = \frac{14}{5(13 - 16 \ln 2)} = y_G$. 32. a) $I_x = 4 = I_y$; b) $I_G =$
 $= \frac{3}{35} = I_y$.

10.7. Integrale de suprafață. Formula lui Stokes

9. a) 9; b) $\frac{8}{3} \pi a^4$; c) $\frac{2}{3} \pi a^2 (a^2 + b^2)^{1/2}$; d) $\frac{64\sqrt{2}}{15} a^4$; e) $\frac{2}{3} \pi \sqrt{2}$; f) $\frac{1}{2} \pi h^2 a^4 (1+h^2)^{1/2}$;
 g) $\frac{4}{3} \pi abc(a^2 + b^2 + c^2)$; h) $2\pi a \sqrt{2}$. 10. a) $-\pi a^4$; b) 0; c) $\frac{4}{3} \pi abc$; d) $3\pi a^2 h$. 11. a) 0;
 b) 4π ; c) $-\pi a^2$; d) $-a^3$; e) $-\frac{\pi a^6}{8}$; f) $-\frac{9a^3}{2}$. 12. a) $\frac{\pi}{6} [(1+a^2)^{3/2} - 1]$; b) $\pi \sqrt{2}$; c) $\frac{\sqrt{2}}{2} \pi a^2$.
 13. $2\pi [\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]$. 14. $\pi \sqrt{5}$. 15. $\frac{2}{15} \pi (1 + 6\sqrt{3})$. 16. $x_G = y_G = 0, z_G = \frac{16}{19}$. 17.
 a) $\pi^2 a^3$; b) $\frac{8}{3} \pi a^4$. 18. a) $x_G = y_G = 0, z_G = \frac{2}{3} h$; b) $I_{xOy} = \frac{1}{2} \pi h^2 a (h^2 + a^2)^{1/2}, I_{yOz} = I_{zOx} =$
 $= \frac{1}{4} \pi a^3 (h^2 + a^2)^{1/2}$. 19. $\frac{\sqrt{2}}{2} \pi$.

10.8. Integrala triplă. Formula Gauss-Ostrogradski

10. a) $\frac{8}{15} (31 + 12\sqrt{2} - 27\sqrt{3})$; b) $\frac{4}{3} \pi \sqrt{2}$. 11. a) $I = \int_{-a}^a dx \int_{-b}^b \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{1/2} dy$

- $\int_c \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2} f(x, y, z) dz$; b) $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x, y, z) dz$. 12. a) $\frac{1}{60}$; b) $\frac{4}{3} \pi a^4$;
 c) $\frac{59}{480} \pi a^5$; d) $\frac{1}{5} \pi a^5 (2 - \sqrt{2})$; e) 8π ; f) $\frac{16}{3} \pi$; g) $\frac{4}{15} \pi a^3 bc$. 13. a) $x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq a$;
 b) V limitat de $z = 0, z = a, y^2 = ax, y = 0$, și $x = a$. 14. a) $\frac{\pi}{10}$; b) $\frac{\pi}{15} (2\sqrt{2} - 1)$; c) $\frac{4}{15} \pi a^5$.
 15. a) $\frac{3}{4} \pi$; b) Se descompune V în V_1 - interior paraboloidului și $z \in [0, 2]$, și V_2 - interior
 sferei, $z \in [2, 2\sqrt{2}]$. Se obține $\frac{4}{5} \pi (5\pi - 8)$. 16. $\frac{1}{4} \pi^2 abc$. 17. a) $3a^4$; b) $\frac{1}{2} a^3$; c) $\frac{1}{2} \pi a^2 b^3$;
 d) $\frac{5}{4} \pi a^4 b$; e) $\frac{1}{8} a^8$. 18. a) $\iiint_V (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} dv$; b) $3 \iiint_V dv = 3 \text{ vol. } V$; c) 0;
 d) $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} dv$. 20. a) $8\pi ab$; b) $\frac{16}{3} a^3 + 2\pi a^2$; c) $\frac{1}{4\sqrt{2}} \pi^2 a^3$ (se folosesc coordonatele
 sferice). d) Se procedează ca la punctul precedent: $\pi a^3/3$. 21. a) $k\pi abc^2/2$; b) $2\pi ka$. 22. a) $x_0 = y_0 = 0$,
 $z_0 = 3c/4$; b) $x_0 = y_0 = 0, z_0 = \frac{5}{83} (6\sqrt{3} + 5)a$; c) $x_0 = \frac{3}{8} a, y_0 = \frac{3}{8} b, z_0 = \frac{3}{8} c$. 23. $\frac{4}{15} \pi (4\sqrt{2} - 5)$.
 24. $I_{x_0y} = \frac{\pi}{5} abc^3, I_{y_0z} = \frac{\pi}{5} a^3 bc, I_{x_0z} = \frac{\pi}{5} ab^3 c$.

11. Șiruri și serii de funcții

11.1. Șiruri de funcții

8. a) $f(x) = 0$; b) $f(x) = 0$; c) $0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{2^n}: f(x) = 0$; d) $f(x) = 0$. 9. a) $f(x) = 0$; Se alege
 $x_n = n \Rightarrow f(x_n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$; b) $f(x) = 0, x \in [0, 1]$ și $f(1) = \frac{1}{2}$. Se alege $x_n = 1 - \frac{1}{n} \in [0, 1]$ și
 $f_n(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \left[1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n}\right]^{-1} - \frac{e}{e+1}$. 10. Se aplică criteriul lui Cauchy: $|f_{2n}(x) -$
 $- f_n(x)| > \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$. 11. Se folosește criteriul lui Cauchy. 13. Se
 arată că (f_n) este uniform convergent și (f'_n) este uniform convergent. Dar $f'_n(x) = -\sin x (1 + \cos x +$
 $+ \dots + \cos^{n-1} x) = -\sin x \frac{\cos^n x - 1}{\cos x - 1}$. După teorema 3 putem scrie $\lim_n \int_{\pi/2}^x f'_n(t) dt = \int_{\pi/2}^x \lim_n f'_n(t) dt \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \lim_n f_n(x) = \int_{\pi/2}^x \frac{-\sin x}{1 - \cos x} dx = -\ln(1 - \cos x)$.

11.2. Serii de funcții

6. a) $\alpha > 1$, mulțimea de convergență: $R; 0 < \alpha \leq 1$, mulțimea de convergență: $R \setminus \left\{x \in R \mid x = \right.$
 $\left. = 2n\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$; $\alpha \leq 0$, mulțimea de convergență: $\left\{x \in R \mid x \neq k\pi \pm \frac{\pi}{2}\right\}$; b) $0 \leq a < 1$, mulțimea
 convergență: $R, a = 1$, mulțimea de convergență: $(1, \infty)$; $a > 1$, mulțimea de convergență:
 $(2, \infty)$; c) $(1, \infty)$; d) $(-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$; e) $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

f) R ; g) $(0, \infty)$; h) mulțimea vidă; i) $R \setminus \{0\}$. 7. Da. Se aplică criteriul III al comparației. Dacă $\alpha > 1$, mulțimea de convergență este R ; dacă $\alpha \leq 1$, mulțimea de convergență este vidă.

8. a) Folosind inegalitatea $2ab \leq a^2 + b^2$, rezultă $|f_n| \leq \frac{1}{2n^3/2}$, serie absolut și uniform convergentă. b) Deoarece $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \Rightarrow 0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n}$ și $|f_n| < \frac{3}{n(n+1)} < \frac{3}{n^2}$; serie absolut și uniform convergentă. c) Serie absolut și uniform convergentă; d) $|f_n| \leq \left|\frac{a}{3}\right|^n$; serie absolut și uniform convergentă. 9. Serii sînt uniform

convergente. a) $|f_n| < \frac{1}{n^2}$; b) $|f_n| < \frac{1}{(2n-1)^2}$; c) $|f_n| < |a_n|$. 10. a) $S_n(x) = e^{-nx^2} - 1$; $\lim_n S_n(x) = -1$, $x \in (0, 1]$ și $\lim_n S_n(0) = 0$. Deoarece funcția sumă $f(x) = -1$, $x \in (0, 1]$ și $f(0) = 0$

este discontinuă în $x = 0$, ea nu este derivabilă în acest punct. Aceasta se datorește faptului că seria derivatelor nu este uniform convergentă pe $[0, 1]$. b) Seria este simplu convergentă pe $[0, 1]$ către $f(x) = 0$, $x \in [0, 1]$. Seria derivatelor este simplu convergentă pe $[0, 1]$ la funcția $g(x) = 0$, $x \in [0, 1]$. Cum funcția f este derivabilă pe $[0, 1]$ și $f' = g = 0$, rezultă că seria dată este derivabilă termen cu termen. 11. Nu. Seria este simplu convergentă pe $[0, 1]$ către $f(x) = 0$, $x \in [0, 1]$ și $\int_0^1 f(x) dx = 0$. Seria integrată este convergentă și are suma 1! Aceasta se datorește faptului că seria inițială nu este uniform convergentă.

11.3. Serii de puteri. Serii Taylor

7. a) $(-1, 1]$; $f(x) = \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$; b) $(-1, 1)$; $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$; c) $(-1, 1)$; $f(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$; d) $(-1, 1)$; $f(x) = \frac{1-x}{(1+x)^3}$; e) $(-1, 1)$; $f(x) = \frac{6}{(1-x)^4}$; f) $(-1, 1)$; $f(x) = \frac{1}{2} \arctg x - \frac{1}{4} \ln \frac{1-x}{1+x}$. 8. a) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; b) $(-3, 3)$; c) $[-2, 2)$; d) R ; e) $(-e^{-1}, e^{-1})$

f) R ; g) $(-1, 1)$; h) R . i) Pentru ex. i) $-m$ se atașează seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y^n$, $y = x - a \Rightarrow y \in (-\rho, \rho)$ și deci $x \in (a - \rho, a + \rho)$. Obținem $(0, 2]$. j) -3 ; k) $[0, 4)$; l) $(-e-3, e-3)$; m) $(-2, 4)$.

10. a) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$, $|x| < 1$; b) Se descompune $f(x)$ în fracții simple și se utilizează

dezvoltarea funcției binomiale: $f(x) = 3 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right) x^n$, $|x| < 2$; c) $\cos^3 x = \frac{3}{4} \cos x +$

$\frac{1}{4} \cos 3x$: $f(x) = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3+9^n}{(2n)!} x^{2n}$, $x \in R$; d) $f(x) = \frac{3}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{9^n - 1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$,

$x \in R$; e) $f(x) = - \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{2}{3^{n+1}}\right) x^n$, $|x| < 1$. 11. $f(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + a_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$.

$a_0, a_1 \in R$. 12. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $a_{2k} = \frac{a_0}{2^k \cdot k!}$ și $a_{2k+1} = \frac{2^k \cdot k!}{(2k+1)!} a_1$, $a_0, a_1 \in R$.

11.4. Serii

6. a) $f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$= \pi^2$; c) $f(x) =$

$= \frac{2}{\pi} \sin a\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$= \frac{a+b}{2}$; $S(\pm \pi)$

$= \frac{2}{\pi} \operatorname{sh} a\pi \left[\frac{1}{2a} \right]$

$= \frac{4}{3} \pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

9. $f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$= \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$- \pi n \sin \frac{n\pi x}{l} \Big]$

12. Ecuații

12.1. Ecuații

17. Presiunea

presiunea $\rho g h$

După legea gazelor

$= C \cdot e^{-\frac{Mg}{RT} h}$

$= -x^4 \sin x / x^3$ și

$= -2 \operatorname{ctg} 2x$

$y = \frac{1}{3} x^2$. 20. a)

c) $\arccos y + \arcsin y$

g) $\operatorname{tg} y = C(1 - \cos y)$

11.4. Serii Fourier

6. a) $f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{x}$, $S(\pm\pi) = 0$; b) $f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}$; $S(\pm\pi) = \pi^2$; c) $f(x) = \frac{2}{\pi} \sin a\pi \left[\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a \cos nx}{a^2 - n^2} \right]$, $S(\pm\pi) = \cos a\pi$; d) $f(x) = \frac{2}{\pi} \sin a\pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n \sin nx}{a^2 - n^2}$, $S(\pm\pi) = 0$; e) $\frac{a+b}{2} - \frac{2}{\pi} (a-b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$; $S(0) = \frac{a+b}{2}$; $S(\pm\pi) = \frac{a+b}{2}$; f) $S(\pm\pi) = 0$; $f(x) = \frac{2}{\pi} \operatorname{sh} a\pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n \sin nx}{a^2 + n^2}$; g) $f(x) = \frac{2}{\pi} \operatorname{sh} a\pi \left[\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a \cos nx}{a^2 + n^2} \right]$; $S(\pm\pi) = \operatorname{ch} a\pi$. 7. $x = \pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$. 8. $x^2 = \frac{4}{3} \pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos nx - 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx$; luind $x = \pi$, rezultă $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{12} \pi^2$.

9. $f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)x$. Se ia $x = \frac{\pi}{2}$ și $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$. 10. a) $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)\pi x$; b) $f(x) = \operatorname{sh} l \left[\frac{1}{l} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{l^2 + n^2 \pi^2} \left(l \cos \frac{n\pi x}{l} - \pi n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \right]$. 11. a) $\frac{2h}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nh}{nh} \cos nx \right)$; b) $\frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos 2nx \right)$.

12. Ecuații diferențiale și cu derivate parțiale

12.1. Ecuații diferențiale de ordinul întâi

17. Presiunea p pe planul $z = h$ este egală cu presiunea $p + dp$ din planul $z = h + dh$ plus presiunea $\rho g dh$ datorită greutateii stratului de aer. Deci $p = p + dp + \rho g dh$ sau $dp = -\rho g dh$. După legea gazelor perfecte $pV = RT$ rezultă $p = \frac{pM}{RT}$ și deci $\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} dh$, de unde $p(h) =$

$= C \cdot e^{-\frac{Mg}{RT} h}$. 18. Se rezolvă ecuația dată în privința lui C și apoi se derivează. a) $C = (y - x^4 \sin x)/x^3$ și prin derivare obținem ecuația $xy' - 3y = x^4 \sin x + x^3 \cos x$; b) $y' - 2 \operatorname{ctg} 2x y = -2 \operatorname{ctg} 2x \sin^3 x + 3 \sin^2 x \cos x$; c) $x^2 y' + x^2 y^2 - 3xy + 3 = 0$. 19. $y' = \frac{2y}{x} \Rightarrow y = Cx^2$ și $y = \frac{1}{3} x^3$. 20. a) $\operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} x = C$ sau $y + x = C(1 - xy)$; b) $y^2 - 1 = \ln(e^x + 1) - \ln(e + 1)$; c) $\arccos y + \operatorname{arctg} x = C$; d) $y^{1/2} = \frac{1}{3} x^{3/2} + 1$; e) $\operatorname{ctg}^2 y = \operatorname{tg}^2 x + C$; f) $x = Cy(1 + y^2)^{-1/2}$; g) $\operatorname{tg} y = C(1 - e^x)^3$; h) $\ln y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$; i) $(1 + y^2)(1 - x^2) = 2$; j) $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = C$; k) $x \sin y = C$;

4) $\ln \frac{x}{y} - \frac{x+y}{xy} = C$. 21. a) $\ln \sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + C$; b) $\ln |x| = -e^{-y/x} + C$; c) $y = -x \ln |Cx|$;
 d) $x = C e^{2/y}$; e) $C^2 x^2 - 2Cy + 1 = 0$; f) $x^2 + y^2 = Cx^3$; g) $y = \frac{2x^2}{x+1}$; h) $y^3 = y^3 - x^2$; i) $x^2 y + y^3 = 30$; j) $y^2(1-Cx) = x^2$; k) $x^2 = 2Cy + C^2$; l) $x + 2y e^{x/y} = 2$. 22. a) $y = C e^{-x/y}$; b) $(y+x)^2(y+2x)^2 = C$; c) $\ln(x-y+4)^4 - (4x-5y+11)(x-y+4)^{-1} = C$; d) $\ln(y+2) = C - 2 \operatorname{arctg} \frac{y+2}{x-3}$; e) $(x+y-1)^3 = C(x-y+3)$; f) $\ln |4x+8y+5| + 8y - 4x = C$;
 g) $x^2 - xy + y^2 + x + y = C$; h) $\ln(6y+3x-1)^2 = 3(x-y) + C$. 23. a) $x^2 + 2xy = 0$; b) $e^{2y} - 2x^2 y = C$; c) $x^2 - xy + y^2 + x - y - 1 = 0$; d) $xy^2 - 3x^3 + 2xy^2 = 0$; e) $4y^2 x - 8xy + x^2 = C$; f) $\frac{x^3}{3} + xy^2 + x^2 = C$; g) $\frac{x^4}{4} - \frac{3}{2} x^2 y^2 + 2x + \frac{y^3}{3} = C$; h) $x^2 - y^2 = Cy^3$; i) $\frac{x^2}{2} + y e^{x/y} = 2$.
 24. a) $m = e^{x^2}$; $y e^{x^2} = C$; b) $m = x^{-2}$; $xy^3 - 2x^2 y + Cx = 2$; c) $m = x^{-4}$; $x^3 - y^2 = Cx^2$;
 d) $m = \frac{1}{\sin^2 x}$; $\frac{\sin y}{\sin x} = \operatorname{tg} x + C$; e) $m = \frac{1}{(x+1)^2}$; $xy(x+y) = C(x+1)$; f) $m = x-2$; $12y(x^2 - 5x + 6)(x-2) + x^3(3x-8) = C$; g) $m = e^x$; $e^x(x^2 + y^2) = C$; h) $m = \frac{1}{y^2}$; $\frac{x}{y} + \frac{1}{2} x^2 = C$;
 i) $m = \frac{1}{y^2}$; $\frac{x^2}{y} + 3y - \frac{3}{y} = C$; j) $m = y^{-2}$; $\frac{1}{y} \ln |x| + \frac{1}{2} y^2 = C$; k) $m = x^{-2}$; $\ln |x| - \frac{y^2}{x} = C$.
 25. a) $m = \frac{1}{x^2 y^2}$; $x^2 + y^2 - \frac{2}{xy} = C$; b) $m = \frac{1}{xy}$; $x^2 y^3 + 2 \ln \left| \frac{x}{y} \right| = C$; c) $m = (x^2 + y^2)^{-2}$; $x^2 + y^2 = C(y-x)$; d) $m = (x+y)^{-2}$; $x^3 + xy + y^3 = C(x+y)$. 26. a) $y = Cx + x^2$; b) $y = \frac{1}{6} x^4 + C \cdot \frac{1}{x^2}$. c) Ecuație liniară în x ca funcție; $x = Cy^2 - y^{-1}$; d) $y = \frac{1}{2} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{1/2} (x \sqrt{1-x^2} + \arcsin x)$; e) $y = \frac{x}{\cos x}$; f) $y = x^2 + 2x + 2$; g) $y = 3 - x^2$; h) $y = 1 + \ln x$, $x > 0$; i) $y = e^x + Ce^{-x}$; j) $y = Ce^{-2x} + \frac{1}{5} e^{2x}$; k) $y = C \cos x + \sin x$; l) $y = C \sqrt{x^2 - 1}$. 27. a) $y(2x^3 + 1) - 3x = 0$; b) $3y - xy - 2x^2 = 0$; c) $y^2 + x \ln |Cx| = 0$. d) Se ia x ca variabilă dependentă și se obține o ecuație Bernoulli în x ; $x^2(y + Cy^2) = 1$; e) $x = y^3(3 + C e^{\cos x})$; f) Se ia x ca funcție de y ; $\frac{1}{x} = 2 - y^2 + C e^{-y^{1/2}}$; g) $y^2 = Cx + \frac{1}{3} x^3$; h) $y = (C e^{-x} + x - 1)^2$; i) $y^2 = Cx^2 - 2ax^2 \cos x$. 28. a) $y = x + e^{x^2}(C - \int e^{x^2} dx)^{-1}$; b) $y = -\frac{1}{x} + (Cx^{2/3} - x)^{-1}$; c) $y = \operatorname{tg} x + \left[\cos x \left(C - \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \right) \right]^{-1}$; d) $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \left(C - \frac{x}{2} \right)^{-1}$; e) $y = \frac{2}{x} + \frac{1}{Cx^2 - x}$; f) $y = -1 - x^2 + [2 + C(1+x^2)]^{-1}$. 29. a) $y_1 = -\frac{1}{x}$; $xy(x-C) + x - 2C = 0$; b) $y_1(x) = x^2$; $Cy - xy = Cx^2 + 1$; c) $y = x - 2(x^2 + C)^{-1}$; d) $y_1 = x^3$; $y = x^3 - 2x^3(1 + 2C e^{x^2})^{-1}$. 30. $K = \frac{1}{2}$, $M = 1$, $h = \frac{1}{2} \Rightarrow y_3(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{48}$, $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$, cu eroarea $\epsilon_3(x) \leq 1 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^3 \cdot \frac{x^4}{4!} \leq \frac{1}{3072}$. 31. a) $y = Cx + C^3$; $x = -3p^2$, $y = -2p^3$; b) $y = Cx + C^{-2}$; $x = 2p^{-3}$, $y = -p^{-2}$; c) $y = Cx - a(1+C^2)$; $x = 2ap$, $y = a(p^2 - 1)$; d) $y = Cx + aC(1+C^2)^{-1/2}$; $x = -a(1+p^2)^{-3/2}$, $y = ap^3(1+p^2)^{-3/2}$; e) $y = Cx + \cos C$; $x = \sin p$, $y = p \sin p + \cos p$; f) $y = Cx + aC(1-C)$; $x = -a + 2ap$, $y = ap^2$. 32. a) $x = C e^{-p} - 2p + 2$, $y = C(1+p)e^{-p} - p^2 + 2$; b) $x = \frac{1}{3}(Cp^{-1/2} - p)$, $y = \frac{1}{3} Cp^{1/2} + \frac{1}{6} p^2$; c) $x = C + 2(p-1)^{-2}$, $y = (p+1)^2(p-1)^{-2} - 2(p-1)^{-2} - C$; d) $x = C(p-2)(p-1)^{-1} e^{\frac{1}{p-1}}$, $y = -C(p-1)^{-1} e^{\frac{1}{p-1}}$; e) $x = \frac{2}{3} p + Cp^{-2}$.

$y = \frac{1}{3} p^3 + 2C$
 $+ (C - 2x)^3$;
 $- C)^2 = 4Cx$;
 $\ln |p-x| = C$
 $= 1 + x + 2 \left(\frac{x^2}{2!} \right)$
 $= -\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} x^2$
 $+ C$; b) $y = x$
 $= x^3(1 + C e^{1/x})$
 $= x e^{Cx}$; i) $y^2 =$
 $+ C e^{-\frac{1}{2} y}$
 $+ \frac{3}{2} p^3 + \ln |p|$
 $= \cos p + C$, y

sub formă de

convergență este

12.2. Ecuații

5. a) $y = x$

$-\frac{11}{36} x^3 + \frac{1}{2} x^2$
 $= \sin(x + C)$

d) $y = \ln |e^{3x} + C|$
 $+ \frac{1}{3} C_1 x^2 + C_2$
 $+ C_3$; d) $y =$

$= Cx^3$; h) $y =$

8. a) $y = C_1(1 +$

e) $x = C_1 - \frac{1}{C}$

$y = \frac{1}{3} p^3 + 2Cp^{-1}$; f) $x = \frac{a}{3} p^{-3} + Cp$, $y = \frac{p}{2} x + \frac{a}{2} p^{-1}$. 33. a) $y = -\frac{1}{3} [x^3 + x(C - 2x) + (C - 2x)^3]$; $x = -2p$, $y = -p^2$; b) $x = C^{-1}y + C^n$; $x = (n+1)p^n$, $y = n p^{n+1}$; c) $(y - C)^2 = 4Cx$; $y + x = 0$; d) $x = \sin p + \ln p$, $y = p \sin p + \cos p + p + C$; e) $4y = x^2 + p^2$, $\ln |p - x| = C + \frac{x}{p - x}$; f) $x = \ln(y^2 + p^2) - \ln 2p$, $\ln \sqrt{p^2 + y^2} + \arctg \frac{p}{y} = C$. 34. a) $y(x) = -1 + x + 2 \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \right)$, $x \in \mathbb{R}$; b) $y(x) = -2 - 2x - x^2$, $x \in \mathbb{R}$; c) $y(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$, $x \in \mathbb{R}$; d) $y(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, $x \in \mathbb{R}$. 35. a) $\sin \frac{y}{x} = -\ln |x| + C$; b) $y = x \arcsin(Cx)$; c) $x^2 + y^4 = Cy^2$; d) $3y + \ln |x^2 - 1| - 6 \ln |y + 1| = C$; e) $y = -x^2(1 + Ce^{1/x})$; f) $\ln |y + 2| + 2 \arctg \frac{y + 2}{x - 3} = C$; g) $x = Ce^y - \frac{1}{2}(\sin y + \cos y)$; h) $y = x e^{Cx}$; i) $y^3 = Ce^{-2x} + \frac{2}{5} \sin x + \frac{4}{5} \cos x$; j) $x = Ce^{\sin y} - 2a(1 + \sin y)$; k) $y^3 + \frac{1}{x} - 2 + Ce^{-\frac{1}{2}y} = 0$; l) $x^2 + x^2y - xy^2 - y^3 = C$; m) $y = C \sin x - a$; n) $x + \frac{x}{y} = C$; o) $x = C + \frac{3}{2}p^2 + \ln |p|$, $y = p(p^2 + 1)$; p) $y = Cx + C^{-2}a$; $x = 2ap^{-3}$, $y = \left(\frac{2a}{x}\right)^{1/3}$; q) $x = p \sin p - \cos p + C$, $y = p^2 \sin p$. 36. a) $y = x^2 + 1 + (a_0 - 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$. b) Nu admite soluție sub formă de serie de puteri. Încercând o soluție de forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, rezultă $a_n = n!$ și raza de convergență este zero; c) $y = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \in (-1, 1)$. 37. $\operatorname{tg} x \approx x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9$.

12.2. Ecuații diferențiale de ordin superior rezolvabile prin cvadraturi

5. a) $y = x \ln |x| - x + C_1x + C_2$; b) $y = -\ln(1 + x^2) + x \arctg x + C_1x + C_2$; c) $y = \frac{1}{6}x^3 \ln x - \frac{11}{36}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{18}$; d) $y = \ln |\sin x| + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3$; e) $y = \ln |\cos x|$. 6. a) $y = \sin(x + C_1) + C_2$; b) $y = \operatorname{sh}(x + C_1) + C_2x + C_3$; c) $y = (x^2 - C_1)^2$, $x = \pm \frac{4}{3}x^2 \mp 4C_1x \pm C_2$; d) $y = \ln |e^{2x} + C_1| - x + C_2$; e) $2y^2 - 4x^2 = 1$; f) $x - C_1 = a \ln \left| \sin \frac{y - C_2}{a} \right|$. 7. a) $y = C_1x + \frac{1}{3}C_2x^3 + C_3$; b) $y = -x - x^2$; c) $y = \frac{1}{6}C_1x^3 - \frac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4$; $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{20}x^{3/2} + C_2x + C_3$; d) $y = \frac{1}{120}C_1x^5 - \frac{1}{15}x^5 + \frac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4$; e) $y = \frac{1}{2}(1 + x^2)$; f) $y = x + 1$; g) $y = -Cx^2$; h) $y = \frac{1}{2(e^2 - 1)}(x^2 - 1) - \frac{e^2 - 1}{4} \ln |x|$ sau $y = \frac{1}{2(e^2 + 1)}(1 - x^2) + \frac{e^2 + 1}{4} \ln |x|$. 8. a) $y = C_1(1 + p^2)$, $x = 2C_2p + C_3$; b) $y = C_1 + \frac{1}{y} + x = C_2$; $\frac{y}{y + C_2} = C_3e^{Cx}$ pentru $C_3 \neq 0$; c) $x = C_1 - \frac{1}{C_2} \ln \left| \frac{y}{y + C_2} \right|$; d) $y = \frac{x}{x - 1}$; e) $y = x + 1$. 9. a) $y^2 = C_2(x^2 + C_1)$; b) $y = C_2x e^{-C/x}$;

c) $x = C_1 + \ln \left| \frac{y - C_2}{y + C_2} \right|$. 10. a) $y = 2e^x$; b) $y = e^x$; c) $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}$; d) $y = \frac{2\sqrt{2}}{3}x^{3/2} - \frac{8}{3}$; e) $y = \frac{1}{12}(C_1 + x)^4 + C_2x + C_3$; f) $y = \frac{1}{2}C_1x^2 + (C_1 - C_1^2)x + C_2$; $y = \frac{1}{12}(x+1)^3 + C$; g) $y = \frac{1}{2}(x + C_1^2 + 1)^2 + \frac{4}{3}C_1(x+1)^{3/2} + C_2$; $y = C$.

12.3. Ecuații diferențiale liniare de ordin superior

10. a) Linear independent; b) linear independent; c) linear dependent: $y_1 - 2y_2 + y_3 = 0$; d) linear dependent: $y_3 = -2y_1$. 11. a) $y'' + y = 0$, $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$; b) $y'' - 2y' + y = 0$, $y = (C_1 + C_2x)e^x$; c) $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$, $y = C_1x + C_2x^2 + C_3x^3$; d) $y''' + 4y'' + 5y' = 0$, $y = C_1 + e^{-2x}(C_2 \cos x + C_3 \sin x)$. 12. a) $y = C_1x - C_2 + \frac{1}{2}C_3x \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$; b) $y = C_1 \frac{1}{x}(x-1)^2 + \frac{1}{x}C_2$; c) $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$; d) $y = C_1x^2 + C_2e^x$. 13. a) $y = C_1(x+1) + C_2x^2 + 1$; b) $y = 2x + 3 + C_1x + C_2x \int \frac{1}{x^2}(x-1)e^x dx$. 14. a) $y = C_1(x-1)^2 + C_2 + \frac{1}{6}(2x+1)(x-1)^2$; b) $y = C_1x(\ln|x|-1) + C_2x + C_3 + \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{2}x^3$; c) $y = C_1 + C_2 \ln|x| + \frac{1}{2}(\ln|x|)^2$. 15. a) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$; b) $y = C_1e^{-x} + C_2e^x + C_3e^{2x}$; c) $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{2x}$; d) $y = C_1 + C_2e^x$; e) $y = 4e^x + e^{4x}$; f) $y = e^{-x}$. 16. a) $y = (C_1 + C_2x)e^{2x}$; b) $y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^{2x}$; c) $y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^{2x}$; d) $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^{2x} + C_5e^{-2x}$; e) $y = C_1e^{-x} + (C_2 + C_3x)e^x$; f) $y = 0$. 17. a) $a = \sin y$; b) $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + C_3 \sin 2x + C_4 \cos 2x$; c) $y = e^{-\frac{1}{2}x} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right)$; d) $y = C_1e^x + e^{2x}(C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x)$; e) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 x \cos x + C_4 x \sin x$; f) $y = C_1e^{-x} + e^{2x}[(C_2 + C_3x) \cos 2x + (C_4 + C_5x) \sin 2x]$; g) $y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{-x}(C_3 \cos x + C_4 \sin x)$; h) $y = (C_1 + C_2x) \cos 2x + (C_3 + C_4x) \sin 2x$; i) $y = e^{-x}(C_1 + C_2x + \dots + C_n x^{n-1})$. 18. a) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \sin x + \cos x \ln |\cos x|$; b) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - x \cos x + \sin x \ln |\sin x|$; c) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \sin x \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|$; d) $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + (e^x + e^{-x}) \operatorname{arctg} e^x$; e) $y = (C_1 + C_2x)e^x + xe^x \ln|x|$; f) $y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + xe^{-x} \ln|x|$; g) $y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x + \sec x + \cos x \ln |\cos x| - \operatorname{tg} x \sin x + x \sin x$; h) $y = (C_1 + C_2x)e^{3x} + e^{2x} \left[-6 - 9x + (9x - 6) \ln|x| + \frac{1}{x} \right]$; i) $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + e^{2x} \operatorname{arctg} e^x - \frac{1}{2}e^x \ln(1+e^{2x})$. 19. a) $y = C_1e^x + C_2e^{-\frac{1}{3}x} - x^2 + 4x - 14$; b) $y = C_1e^x + e^{-\frac{1}{2}x} \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right) - x^2 - 5$; c) $y = C_1 + C_2x + (C_3 + C_4x)e^x + 12x^3 + 3x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{20}x^5$; d) $y = \frac{7}{2} \operatorname{ch} x - \frac{5}{2} \sin x - x^3 - x$; e) $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^x + C_5e^{-x} + C_6 \cos x + C_7 \sin x - \frac{1}{2}x^4$; f) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}(x+1)e^{-x}$; g) $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x} + x \left(\frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{16}x + \frac{1}{32} \right) e^{2x}$; h) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + \frac{1}{4}(2x^2 + 6x + 9)e^x - \frac{1}{2}x(x+2)e^{2x}$; i) $y = C_1 + C_2e^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{12}(2x^3 + 3x^2 + 3x)e^{-2x}$; j) $y = C_1e^x + C_2e^{2x} - \frac{1}{3}(x^3 + 3x^2 + 2x)e^x$; k) $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4 \cos x + C_5 \sin x + \frac{1}{2}(x^2 - 8x + 19)e^x$; l) $y = C_1e^{-2x} + C_2e^x - \frac{1}{8}(2x^2 + x)e^{-2x} + \frac{1}{16}(2x^2 + 3x)e^x$; m) $y = C_1 + C_2x + (C_3 + C_4x)e^x + \frac{1}{2}x^2e^x$; n) $y = C_1e^{-x} + C_2 + C_3x + \frac{3}{2}x^2 -$

$-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4$
 $= C_1 \cos x + C_2$
 $+ C_3e^{2x} - \frac{1}{20}(2x^2 + 3x)e^{-2x}$
 $= C_1e^{-2x} + C_2e^{2x}$
 $+ 14) \cos x + 3$
 $+ C_3x^2 + C_4e^{-x}$
 $-\frac{1}{50}(4 \cos x + 1)$
 $+ C_2e^{-2x} + C_3 \cos x$
 $+ \frac{1}{4}x \cos x + \frac{4}{8}e^{-x}$; f)
 $-\frac{1}{8}e^{-x}$; g)
 $b) y = C_1x^3 + C_2$
 $+ 1) + (x+1)^2$
 $+ \frac{1}{4}x(\ln x - 2)$
 $-\frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{6!}x^6$
 $-\frac{1}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} + \dots$

12.4. Sisteme
 5. a) $x_1 + x_2^2 x_2^{-1} = C_3$
 $= C_2$; f) $\frac{x_2}{x_1} = \frac{(x_2 + \sqrt{x_2^2 + 1})^{-1}}{-x_2}$
 $dx_1 = x_2 dt$, $dx_2 = x_1^2 x_2^{-1} = C_3$
 k) $(x_1 + x_2 + x_3) = C_1$, $x_1 x_2 x_3 = C_2$

6. Sistemul se
 Din prima ecuație
 $= \frac{dy_2}{y_1} = \frac{y_2}{y_1}$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + e^x \left(\frac{3}{2}x - \frac{15}{4} \right); \text{ o) } y = C_1 e^{-x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x + \frac{1}{8}(2x - 3)e^x. \text{ 20. a) } y = \\
& = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}x \sin x; \text{ b) } y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - \frac{2}{5}(\cos 2x + 3 \sin 2x); \text{ c) } y = C_1 e^{-2x} + \\
& + C_2 e^{2x} - \frac{1}{20}(2 \cos 2x + \sin 2x)e^{2x}; \text{ d) } y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + (x-1) \cos 3x - x^2 \sin 3x; \text{ e) } y = \\
& = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{25}[(35x+4) \cos x + (20x+3) \sin x]e^x; \text{ f) } y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + \frac{1}{9}[(-6x+ \\
& + 14) \cos x + (3x-10) \sin x]e^x; \text{ g) } y = (C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^2 \cos x)e^x; \text{ h) } y = C_1 + C_2 x + \\
& + C_3 x^2 + C_4 e^{-x} + \frac{1}{1088}(4 \cos 4x - \sin 4x). \text{ 21. a) } y = (C_1 + C_2 x)e^{2x} + \frac{1}{338}(12 \cos 3x - 5 \sin 3x) - \\
& - \frac{1}{50}(4 \cos x + 3 \sin x); \text{ b) } y = C_1 + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{2x} - \frac{3}{20} \sin x - \frac{1}{156} \sin 3x; \text{ c) } y = C_1 e^{2x} + \\
& + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x + \frac{1}{50}e^{2x} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8} - \frac{2}{5}x \sin x; \text{ d) } y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \\
& + \frac{1}{4}x \cos x + \frac{1}{4}x^2 \sin x - \frac{1}{8}x \cos 3x + \frac{3}{32} \sin 3x; \text{ e) } y = (C_1 + C_2 x)e^x + \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{4}x^2 e^x - \\
& - \frac{1}{8}e^{-x}; \text{ f) } \bar{y} = xe^{ax}(ax^2 + bx + c) \cos 2x + (dx^2 + ex + f) \sin 2x. \text{ 22. a) } y = C_1 x^{-1} + C_2 x; \\
& \text{ b) } y = C_1 x^2 + C_2 x^3 + C_3 x^{1/2}; \text{ c) } y = C_1 x^2 + C_2 x^3 + \frac{1}{2}x; \text{ d) } y = C_1(x+1)^2 + C_2(x+1) \ln|x+ \\
& + 1| + (x+1)^3; \text{ e) } y = (x+1)^{-1}[C_1 + C_2 \ln(x+1) + \ln^2(x+1)]; \text{ f) } y = C_1 + C_2 x^{-1} + C_3 x^{-1} \ln x + \\
& + \frac{1}{4}x(\ln x - 2); \text{ g) } y = x(\ln x + \ln^2 x). \text{ 23. a) } y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n!)^2 (n+1)}, \quad x \in \mathbb{R}; \text{ b) } y = 1 - \\
& - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1 \cdot 4}{6!}x^6 - \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{9!}x^9 + \dots, \quad x \in \mathbb{R}; \text{ c) } y = \frac{\sin x}{x}, \quad x \in \mathbb{R}; \text{ d) } y = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{(2 \cdot 4)^2} - \\
& - \frac{x^6}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} + \dots, \quad |x| < \infty.
\end{aligned}$$

12.4. Sisteme de ecuații diferențiale. Sisteme simetrice

$$\begin{aligned}
& \text{5. a) } x_1 + x_2 + x_3 = C_1, \quad x_1 x_2 x_3 = C_2; \text{ b) } \frac{x_2}{x_1} = C_1, \dots, \frac{x_n}{x_1} = C_{n-1}; \text{ c) } \frac{x_2}{x_1} = C_1, \quad (x_1^2 + x_2^2 + \\
& + x_3^2)x_2^{-1} = C_2; \text{ d) } x_1 x_2 = C_1, \quad x_1 x_2 x_3 = -\frac{1}{4}x_1^4 - \frac{1}{2}x_1^2 + C_2; \text{ e) } x_3 - 2x_2 = C_1, \quad x_3 + 2\sqrt{x_3 - x_1 - x_2} = \\
& = C_2; \text{ f) } \frac{x_2}{x_1} = C_1, \quad x_3 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = C_2; \text{ se scrie sistemul sub forma } \frac{x_1 dx_1}{x_1^2} = \frac{x_2 dx_2}{x_2^2} = \\
& = \frac{(x_3 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}) dx_3}{-x_1^2 - x_2^2} \text{ și se folosesc proprietățile proporțiilor. g) Se scrie sistemul sub forma } \\
& dx_1 = x_2 dt, \quad dx_2 = x_3 dt, \quad dx_3 = x_1 dt \text{ care se integrează prin metoda eliminării; h) } \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_1} = C_1, \\
& x_1 x_2 x_3^{-1} = C_2; \text{ i) } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = C_1, \quad x_1^{-1} x_2 x_3 = C_2; \text{ j) } \arctg x_1 + \arctg x_2 = C_1, \quad (2-x_3)(1+x_1^2)^{1/2} = C_2; \\
& \text{k) } \left(x_1 + x_2 + \frac{1}{2} \right) (x_1 + 1)^{-2} = C_1, \quad x_3 e^{2x_1} (x_1 + 1)^{-2} - \int x_1^2 (x_1 + 1)^{-2} e^{2x_1} dx_1 = C_2; \text{ l) } \ln \frac{x_1}{x_2} + x_1^2 - x_2^2 = \\
& = C_1, \quad x_1 x_2 x_3 = C_2; \text{ m) } x_2 - 2x_3 = C_1, \quad 2\sqrt{3x_3 - x_1 - x_2} + x_3 = C_2; \text{ n) } x_1 + x_2 x_3 = C_1, \quad x_2(1+x_3^2)^{1/2} = C_2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{6. Sistemul se scrie sub forma simetrică } \frac{y_2 dy_1}{y_2 - 1} = \frac{(y_1 - x) dy_2}{1} = \frac{-y_2 dx}{-y_2}, \text{ de unde } y_2(y_1 - x) = C_1. \\
& \text{Din prima ecuație rezultă } (y_1 - x)^{-1} d(y_1 - x) = -\frac{dx}{C_1} \text{ sau } (y_1 - x) e^{xy_2^{-1}(y_1 - x)^{-1}} = C_2; \text{ b) } \frac{dy_1}{y_2} = \\
& = \frac{dy_2}{y_1} - \frac{dx}{(y_2 - y_1)^2} = \frac{dy_1 - dy_2}{y_2 - y_1} \Rightarrow y_1^2 - y_2^2 = C_1, \quad 2x + (y_2 - y_1)^2 = C_2; \text{ c) } -2y_1 \frac{dy_1}{dy_2} = -y_1^2 +
\end{aligned}$$

+ $y_2 \Rightarrow y_1^2 = C_1 e^{x^2} + y_2 + 1$. 7. $y_1^{(2)} = a(1 + x + x^2) + b\left(x + \frac{1}{3}x^3\right)$, $y_2^{(2)} = a\left(x + \frac{1}{3}x^3\right) + b(1 - x + x^2)$. 8. Sistemul se scrie $tx' = z$, $ty' = x$, $tz' = -6y + 7z$. Derivăm ultima ecuație și ținem seama de toate trei, astfel că obținem $t^2 z'' = -13x + 6y + 7z$. Derivăm această ultimă relație și din nou ținem seama de ecuațiile inițiale: $t^3 z''' = 80x - 54y - 27z$. Eliminăm x , y și z din a treia ecuație inițială și cele două ecuații obținute. Rezultă ecuația de tip Euler $t^2 z^{(3)} + 3t^2 z'' - 6tz' + 6z = 0$, cu soluția $z = C_1 t + C_2 t^2 + C_3 t^{-3}$. Apoi $x = C_1 t + \frac{1}{2} C_2 t^2 - \frac{1}{3} C_3 t^{-3}$ și $y = C_1 t + \frac{1}{4} C_2 t^2 + \frac{1}{9} C_3 t^{-3}$.

12.5. Sisteme de ecuații diferențiale liniare

8. a) $y_1' = 2y_2$, $y_2' = -2y_1$; b) $y_1' = \left(\frac{1}{2} + x^{-1} - x^{-2}\right)y_1 + \left(\frac{1}{2} + x^{-1} + x^{-2}\right)y_2$, $y_2' = \left(-\frac{1}{2} + x^{-1} - x^{-2}\right)y_1 + \left(-\frac{1}{2} + x^{-1} + x^{-2}\right)y_2$; c) $y_1' = 3y_1 + y_2$, $y_2' = 3y_2$. 9. $y_1 = C_1 e^{-x-1} + C_2 e^{-2x-1}$, $y_2 = -C_1 e^{-x-1} - \frac{3}{2} C_2 e^{-2x-1}$. 10. a) $y_1 = 2C_1 e^{-x} + 2C_2 e^{3x}$, $y_2 = -C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$; b) $y_1 = (C_1 + xC_2)e^{-2x}$, $y_2 = -(C_1 + C_2 + xC_2)e^{-2x}$; c) $y_1 = (C_1 \cos x + C_2 \sin x)e^{2x}$, $y_2 = (C_1 \sin x - C_2 \cos x)e^{2x}$; d) $y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$, $y_2 = 4C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$; e) $y_1 = 2e^{2x} - e^x$, $y_2 = 2e^{2x} + e^x$; f) $y_1 = -2C_1 e^{-x} + 4C_2 e^{2x}$, $y_2 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - 2C_3 e^{3x}$; g) $y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + 4C_3 e^{3x}$, $y_2 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - 2C_3 e^{3x}$; h) $y_1 = C_1 e^{2x} + [C_2 - C_3(1+x)]e^x$, $y_2 = [C_2 + C_3(1-x)]e^x$; i) $y_1 = C_1 e^{2x} + (C_2 - C_3 x)e^x$; j) $y_1 = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x$, $y_2 = C_1 e^{-x} - C_2 \sin x + C_3 \cos x$, $y_3 = C_2(\cos x + \sin x) + C_3(\sin x - \cos x)$. 11. a) $y_1 = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}$, $y_2 = (C_1 + C_2 \cos x + C_3 x)e^{-2x}$; b) $y_1 = (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)e^{4x}$, $y_2 = (-C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x)e^{4x}$; c) $y_1 = -2C_1 e^x + 7C_2 e^{2x} + 3C_3 e^{3x}$, $y_2 = C_1 e^x + 3C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$, $y_3 = -2C_1 e^x - 8C_2 e^{2x} - 3C_3 e^{3x}$; d) $y_1 = -y_2 = e^{-x}$, $y_3 = 0$; e) $y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} - 1 + 6x - e^x$, $y_2 = -2C_1 e^{2x} - C_2 e^{3x} + 10 + 12x + 3e^x$; f) $y_1 = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \cos x$, $y_2 = e^{-x}(C_1 \sin 2x - C_2 \cos 2x) + \frac{1}{2} e^{-x} + \sin x$; g) $y_1 = -C_1 \cos x + C_2 \sin x + \operatorname{sh} x$, $y_2 = C_1 \sin x - C_2 \cos x + \operatorname{sh} x$. 12. a) $y_1 = -2C_1 e^{3x} - 4C_2 e^{7x} - \frac{1}{147}(76 - 105x)$, $y_2 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{7x} + \frac{1}{147}(63x - 68)$; b) $y_1 = \frac{1}{4}(3e^x + 5e^{-x}) + \frac{1}{2}xe^x - 1$, $y_2 = \frac{5}{4}(e^x - e^{-x}) + \frac{1}{2}xe^x - x$. 13. a) $y_1 = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x} - x^2$, $y_2 = 4C_1 e^{-3x} - C_2 e^{2x} + 2x^2 + 2x$; b) $y_1 = 2C_1 e^{-4x} - C_2 e^{-7x} + \frac{7}{40}e^x + \frac{1}{27}e^{2x}$, $y_2 = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{-7x} + \frac{1}{40}e^x + \frac{7}{54}e^{2x}$; c) $y_1 = C_1 + C_2 x + 2 \sin x$, $y_2 = -2C_1 - C_2(1 + 2x) - 3 \sin x - 2 \cos x$. 14. a) Se caută $y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ cu $a_0 = 1$, $b_0 = 0$. Se obține $y_1 = 1 + x^2$, $y_2 = x$. b) Se procedează similar; $y_1 = C_1 + C_2 x$, $y_2 = C_2 - C_1 x$.

12.6. Ecuații cu derivate parțiale de ordinul întâi liniare și cvasiliniare

4. a) $u = \Phi\left(x_2^{-1} \sqrt{1 + x_1^2}\right)$; b) $u = \Phi\left(\frac{x_2}{x_1}, x_1 + x_2 - x_3\right)$; c) $u = \Phi(x_1 + x_2 + x_3, x_1 x_2 x_3)$. 5. a) $\Phi\left(\frac{x_1}{x_2}, x_1 - x_1 u \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) = 0$; b) $\Phi\left(\frac{x_1}{x_2}, x_1^2 + x_1^2 x_2^{-2} u^2\right) = 0$; c) $\Phi(x_1 + x_2, x_1^2 + x_2^2 + u^2) = 0$; d) $\Phi(u - 2x_2, x_2 + 2\sqrt{u - x_1 - x_2}) = 0$; e) $\Phi(u^2 + x_1^2, x_2 - x_1 u) = 0$; f) $\Phi(x_1 + x_2 u, x_2^2 - x_1^2 - 2x_1 x_2 u) = 0$. 6. a) $u = \frac{x_1^2}{3x_2} + e^{\sqrt{x_1 x_2}} - \frac{1}{3}$; b) $u^2 = 2x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 - x_1^2 x_2$; c) $u = x^2 y$; d) $x_2^2(x_2^2 + u^2) = 4(x_1^2 + x_2^2)$; e) $u \sin^2 x_1 = x_2^2 \sin^2(u x_2^{-1})^{1/2}$.

1. Aramă, L., București, Editura...
2. Bass, J., Editura...
3. Bercovici, I., și diferențială...
4. Berman, G., Editura...
5. Binmore, K., University Press...
6. Bloom, D., Editura...
7. Bucur, G., integral, Vol. I...
8. Centina, A., CEDAM, 1984...
9. Ciobanu, I., multiplicare al...
10. Costinescu, I., București, Editura...
11. Craiu, M., Didactică și...
12. Craiu, M., 1980...
13. Demidov, I., Mir, 1972...
14. Donciu, I., București, Editura...
15. Fadeev, L., Mir, 1970...
16. Găină, S., Vol. II, București...
17. Ikramov, I., Editura...
18. Mansfield, J., 1976...
19. Minorski, I., Editura...
20. Murgulescu, I., metrică diferențială...
21. Olariu, I., Tehnică, 19...
22. Pliskov, I., Editura...

BIBLIOGRAFIE

1. Aramă, L., Morozan, T. *Culegere de probleme de calcul diferențial și integral*. Vol. I, București, Editura Tehnică, 1967.
2. Bass, J. *Exercices de Mathématiques*. Paris, Masson et Cie, 1965.
3. Bercovici, M., Rimer, S., Triandaf, A. *Culegere de probleme de geometrie analitică și diferențială*. București, Editura Didactică și Pedagogică, 1973.
4. Berman, G. N. *A Problem book in mathematical analysis*. Moscow, Mir Publishers, 1977.
5. Binmore, K. G. *Mathematical analysis. A straightforward approach*. Cambridge, Cambridge University Press, 1982.
6. Bloom, D. M. *Linear algebra and geometry*. Cambridge, Cambridge University Press, 1979.
7. Bucur, Gh., Câmpu, E., Găină, S. *Culegere de probleme de calcul diferențial și integral*. Vol. III, București, Editura Tehnică, 1967.
8. Centina, A., Gilberto, D., Rodinó, N. *Esercizi e complementi di geometria*. Padova, CEDAM, 1984.
9. Ciobanu, L., Papaghiuc, N., Crăciunaș, P. *Matematici II*. Iași, Centrul de multiplicare al Institutului Politehnic, 1981.
10. Costinescu, O., Amihăiesei, C., Birsan, T. *Topologie generală - probleme*. București, Editura Didactică și Pedagogică, 1974.
11. Craiu, M., Roșculeț, M. *Culegere de probleme de analiză matematică*. București, Editura Didactică și Pedagogică, 1976.
12. Craiu, M., Tănase, V. *Analiză matematică*. București, Editura Didactică și Pedagogică, 1980.
13. Demidovitch, B. *Recueil d'exercices et problèmes d'analyse mathématique*. Moscou, Editions Mir, 1972.
14. Donciu, N., Flondor, D. *Algebră și analiză matematică. Culegere de probleme*. Vol. I și II, București, Editura Didactică și Pedagogică, 1978.
15. Fadeev, D., Sominski, I. *Recueil d'exercices d'algèbre supérieure*. Moscou, Editions Mir, 1970.
16. Găină, S., Câmpu, E., Bucur, Gh. *Culegere de probleme de calcul diferențial și integral*. Vol. II, București, Editura Tehnică, 1966.
17. Ikramov, M. *Recueil de problèmes d'algèbre linéaire*. Moscou, Editions Mir, 1977.
18. Mansfield, L. *Linear algebra with geometric applications*. New York, Marcel Dekker Inc., 1976.
19. Minorski, V. P. *Problems in higher mathematics*. Moscow, Mir Publishers, 1980.
20. Murgulescu, E., Donciu, N., Popescu, V. *Geometrie analitică în spațiu și geometrie diferențială. Culegere de probleme*. București, Editura Didactică și Pedagogică, 1970.
21. Olariu, V., Stănășilă, T. *Ecuatii diferențiale și cu derivate parțiale*. București, Editura Tehnică, 1982.
22. Piskounov, N. *Calcul différentiel et intégral*. Moscou, Editions Mir, 1970.

23. Pöp, I. *Culegere de probleme de algebră liniară*. Iași, Litografia Universității Iași, 1982.
24. Rogai, E. *Exerciții și probleme de ecuații diferențiale și integrale*. București, Editura Tehnică, 1965.
25. Roșculeț, M., ș.a. *Culegere de probleme de analiză matematică*. București, Editura Didactică și Pedagogică, 1968.
26. Stepanov, N. F., Erlikina, M. E., Filippov, G. G. *Metode ale algebrei liniare în chimia fizică*. București, Editura Științifică și Enciclopedică, 1980.
27. Talpalaru, P., Săbădăș, A., Ștefancu, D. *Curs de matematici superioare*. Iași, Centrul de multiplicare al Institutului Politehnic, 1981.
28. Udriște, C., Radu, C., Dicu, C., Mălăncioiu, O. *Probleme de algebră, geometrie și ecuații diferențiale*. București, Editura Didactică și Pedagogică, 1981.

sității Iași, 1982.
Editura Tehnică,
Editura Didactică
le algebrei liniare
Iași, Centrul
algebră, geometrie

Plan editură : 9 632
Bun de tipar : 23.V.1989
Coli de tipar : 23,50

Tiparul executat sub comanda nr. 222
la Întreprinderea Poligrafică „Oltenia”,
Bulevardul 1 Mai nr. 102, Craiova



Lei 34

ISBN 973-36-0466-9

DI.URA DIDACTICA ȘI PEDAGOGICA, BUC