Probleme de
ALGEBRĂ LINIARĂ, GEOMETRIE ANALITICĂ ŞI GEOMETRIE DIFERENŢIALĂ

M. M. Stănescu, F. Munteanu, V. Slesar

Cuprins

Prefaţă

Această culegere de probleme pentru "Algebră Liniară, Geometrie Analitică şi Geometrie Diferenţială" este destinată tuturor celor ce doresc să aprofundeze cunoştinţele teoretice de "Algebră Liniară, Geometrie Analitică şi Geometrie Diferenţială" prin aplicaţii practice concrete prezentate împreună cu soluţiile lor. În plus, pentru o mai bună consolidare a noţiunilor, sunt prezentate în cadrul fiecărui capitol şi câte un set de probleme propuse spre rezolvare.

Structura este elaborată pe trei părţi: Algebră Liniară, Geometrie Analitică şi Geometrie Diferenţială. Prima parte se compune din capitolele: 1. Spaţii vectoriale; 2. Aplicaţii liniare; 3. Tensori; 4. Forme biliniare. Forme pătratice; 5. Spaţii vectoriale euclidiene. Partea a doua este alcătuită din capitolele: 6. Vectori liberi; 7. Dreapta şi planul; 8. Conice şi cuadrice. A treia parte este formată din capitolele: 9. Curbe; 10. Suprafeţe.

Fiecare început de capitol este marcat prin câteva informaţii teoretice considerate de autori ca strict necesare în vederea înţelegerii soluţiilor problemelor, precum şi ca un ghid în rezolvarea ulterioară a problemelor propuse.

Din dorinţa de a familiariza cititorii cu diverse tipuri de notaţii matematice utilizate şi de alţi autori, s-au folosit diferite prezentări pentru unul şi acelaşi obiect matematic (de exemplu, pentru spaţiile vectoriale s-au utilizat notaţiile V, $\mathcal{W}$, etc.).

Majoritatea soluţiilor sunt prezentate în detaliu (unde este posibil soluţia apare însoţită şi de desene) din dorinţa de a face accesibile etapele gândirii logice în obţinerea rezultatelor solicitate de probleme. Sunt utilizate de asemenea foarte multe noţiuni elementare din cadrul Algebrei, Geometriei Analitice şi Analizei Matematice studiate în liceu, presupuse a fi cunoscute.

Autorii aduc mulţumiri prof. dr. Ion Vladimirescu şi conf. dr. Vasile Seleacu pentru sprijinul şi ajutorul acordat în conceperea acestei cărţi, ca şi pentru efortul depus în recenzia materialului.

Autorii mulţumesc de asemenea prof. dr. Petre Stavre, prof. dr. Gheorghe Murărescu, prof. dr. George Vraciu pentru unele indicaţii pe care le-au dat pe marginea elaborării acestei cărţi.

De asemenea aducem mulţumiri d-lor prof. dr. doc. Petru Cojocaru şi prof. dr. Constantin Niculescu pentru faptul că au acceptat să poarte unele discuţii relativ la elaborarea cărţii.

Autorii

Autorii au avut următoarele contribuţii:

1. Marius Marinel Stănescu

- elementele teoretice de la începutul fiecărui capitol;

- problemele rezolvate: 13 - 34, cap. 1; 1 - 10, 27 - 30, cap. 2; 1 - 3, cap. 3; 1, 2 cap. 4; 1, 2 cap. 5; 1, 3, 8, 9, cap. 6; 1 - 4, 6 - 11 cap. 7; 1 - 6, cap. 8; 1 - 14, cap. 9;

- problemele propuse spre rezolvare de la capitolele 8, 9, 10.

2. Florian Munteanu

- problemele rezolvate: 1 - 11, 35, 36, cap. 1; 11, 14, 15 - 19, 21 - 23, 25, 26, 31, 32, cap. 2; 4 - 9, cap. 4; 4 - 14, cap. 5; 2, 5 - 7, cap. 6; 5, 12 - 14 cap. 7; 7 - 11, 14, 16, cap. 8; 1 - 7, cap. 10;

- problemele propuse spre rezolvare de la capitolele 1, 2, 4, 5, 6, 7.

3. Vladimir Slesar

- problemele rezolvate: 12, 37, cap. 1; 12, 13, 20, 24, cap. 2; 3, 10 - 12, cap. 4; 3, 15 - 17, cap. 5; 10, 11 cap. 6; 12, 13, 15, 17, cap. 8;

Partea I

Algebră liniară

Capitolul 1

Spaţii vectoriale

Definiţia 1.1. O mulţime V se numeşte spaţiu vectorial (sau spaţiu liniar) peste un corp comutativ K dacă:

a) există o lege de compoziţie internă (numită "adunare") prin care oricărei perechi de elemente $\bar{x}, \bar{y}$ din V îi corespunde un element $\bar{z} \in V$, numit suma elementelor $\bar{x}$, $\bar{y}$ şi notat $\bar{x} + \bar{y}$, lege care are următoarele proprietăţi:

1. $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$, pentru orice $\bar{x}, \bar{y} \in V$;
2. $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$, pentru orice $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in V$;
3. există un element $\bar{0}$ (vectorul nul) în V astfel încât $\bar{x} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{x}$, pentru orice $\bar{x} \in V$;
4. pentru orice $\bar{x} \in V$ există un element $\bar{y} \in V$ astfel încât $\bar{x} + \bar{y} = \bar{0}$.

b) există o lege de compoziţie externă (numită "înmulţire cu scalari") care permite ca pentru orice element $\bar{x} \in V$ şi pentru orice scalar $\lambda \in K$ să se poată construi un element $\bar{u} \in V$ (numit produsul elementului $\bar{x}$ cu scalarul λ şi notat $\bar{u} = \lambda\bar{x}$) şi care are următoarele proprietăţi:

5. $1\bar{x} = \bar{x}$, pentru orice $\bar{x} \in V$;
6. $\alpha(\beta\bar{x}) = (\alpha\beta)\bar{x}$, pentru orice $\bar{x} \in V$, $\alpha, \beta \in K$;
7. $(\alpha + \beta)\bar{x} = \alpha\bar{x} + \beta\bar{x}$, pentru orice $\bar{x} \in V$ şi oricare ar fi $\alpha, \beta \in K$;
8. $\alpha(\bar{x} + \bar{y}) = \alpha\bar{x} + \alpha\bar{y}$, pentru orice $\bar{x}, \bar{y} \in V$ şi oricare ar fi

$\alpha \in K$.

Axioma 1. de comutativitate a "adunării" nu trebuie neapărat inclusă în definiţia spaţiului vectorial deoarece se poate deduce din celelalte axiome.

Fie $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k\}$ un sistem de vectori într-un spaţiu vectorial V peste un corp K şi scalarii $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ din K. Vectorul

$$\bar{y} = \alpha_1\bar{x}_1 + \alpha_2\bar{x}_2 + \cdots + \alpha_k\bar{x}_k$$

se numeşte combinaţie liniară a vectorilor $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k$; scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ se numesc coeficienţii acestei combinaţii liniare.

Sistemul $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k\}$ se numeşte liniar dependent dacă există scalarii $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ nu toţi nuli astfel încât

$$\alpha_1\bar{x}_1 + \alpha_2\bar{x}_2 + \cdots + \alpha_k\bar{x}_k = \bar{0} \tag{1.1}$$

Dacă egalitatea (1.1) este posibilă doar în cazul când $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$, atunci sistemul $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k\}$ se numeşte liniar independent.

Un sistem de vectori $S \subset V$ se numeşte liniar dependent dacă există un subsistem finit al lui S care este liniar dependent. Dacă orice subsistem finit al lui S este liniar independent atunci S se numeşte liniar independent.

Un sistem $S \subset V$ se numeşte sistem de generatori pentru V dacă orice vector din V se scrie ca o combinaţie liniară de vectorii unui subsistem finit al lui S.

Proprietatea 1.1. Sistemul $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k\}$ este liniar dependent dacă şi numai dacă unul dintre vectorii lui este combinaţie liniară a celorlalţi.

Definiţia 1.2 Un sistem de vectori dintr-un spaţiu vectorial V formează o bază a spaţiului V dacă este sistem liniar independent şi sistem de generatori pentru V.

Un sistem de vectori $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\}$ constituie o bază a lui V dacă şi numai dacă pentru orice $\bar{x} \in V$ există o reprezentare unică, de forma

$$\bar{x} = \xi_1\bar{e}_1 + \xi_2\bar{e}_2 + \cdots + \xi_n\bar{e}_n \quad \left(\xi_j \in K,\, j = 1, 2, \ldots, n\right) \tag{1.2}$$

Scalarii din dezvoltarea (1.2), ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n, se numesc coordonatele vectorului $\bar{x}$ în raport cu baza $\mathcal{B}$.

Teorema 1.1. Orice spaţiu vectorial V nenul ($V \neq \{\bar{0}\}$) are cel puţin o bază.

Teorema 1.2. Oricare două baze ale unui spaţiu vectorial V au acelaşi număr de vectori.

Dacă spaţiul vectorial V are o bază formată cu n vectori, atunci se spune că V are dimensiunea n. Spaţiul V se numeşte n-dimensional şi scriem $\dim V = n$ sau $\dim_K V = n$.

Dacă V are o bază formată cu o infinitate de vectori atunci se spune că V este infinit dimensional şi scriem $\dim V = \infty$ sau $\dim_K V = \infty$.

Definiţia 1.3. Orice submulţime $W \subset V$ care verifică condiţiile

a) dacă $\bar{x} \in W$, $\bar{y} \in W$ atunci $\bar{x} + \bar{y} \in W$,

b) dacă $\bar{x} \in W$ şi $\lambda \in K$, atunci $\lambda\bar{x} \in W$

se numeşte subspaţiu vectorial (sau simplu subspaţiu) al spaţiului vectorial V.

Condiţiile a) şi b) sunt echivalente cu condiţia:

c) dacă $\bar{x}$, $\bar{y} \in W$ şiα, $\beta \in K$ atunci $\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \in W$.

Proprietatea 1.2. Orice subspaţiu vectorial al unui spaţiu vectorial peste K este un spaţiu vectorial peste K şi $0 \leq \dim W \leq \dim V$.

Proprietatea 1.3. Dacă este fixată o bază $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots, \bar{f}_l\}$ a subspaţiului W al spaţiului vectorial V, atunci există vectorii $\bar{f}_{l+1}$, ..., $\bar{f}_n$ în V astfel încât sistemul $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots, \bar{f}_n\}$ să constituie o bază a lui V.

Definiţie 1.4. Se spune că spaţiul vectorial V este suma directă a subspaţiilor $W_1, W_2 \ldots, W_m$ dacă:

a) pentru orice $\bar{x} \in V$ există o descompunere de forma
$\bar{x} = \bar{x}_1 + \cdots + \bar{x}_m$, unde $\bar{x}_1 \in W_1, \ldots, \bar{x}_m \in W_m$
(ceea ce reprezintă şi definiţia sumei de subspaţii vectoriale);

b) această descompunere este unică: dacă $\bar{x} = \bar{x}_1 + \cdots + \bar{x}_m = \bar{y}_1 + \cdots + \bar{y}_m$ şi dacă $\bar{x}_j$, $\bar{y}_j \in W_j$, $j = 1, 2, ..., m$, atunci $\bar{x}_1 = \bar{y}_1$, $\bar{x}_2 = \bar{y}_2$, $\ldots$, $\bar{x}_m = \bar{y}_m$.

Proprietatea 1.4. Condiţia b) din definiţia 1.4. implică faptul că oricare ar fi două din subspaţiile $W_1, \ldots, W_m$ ele au în comun doar vectorul nul $\bar{0}$.

Proprietatea 1.5. Dacă V este un spaţiu vectorial finit dimensional, atunci dimensiunea sumei a două subspaţii W_1, W_2 ale lui V este egală cu suma dimensiunilor lor din care se scade dimensiunea intersecţiei, adică are loc formula lui Grassmann:

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

Definiţia 1.5. Acoperirea (sau înfăşurătoarea, sau anvelopa) liniară a sistemului de vectori $S \subset V$, notată $L(S)$, este mulţimea tuturor combinaţiilor liniare finite de vectori ai lui S,

$$\alpha^1 \bar{x}_1 + \alpha^2 \overline{x}_2 + \cdots + \alpha^k \overline{x}_k \tag{1.3}$$

$\bar{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_k \in S$, $\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^k \in K$, $k \in \mathbf{N}^*$.

Acoperirea liniară a unui sistem de vectori $S \subset V$ este un subspaţiu vectorial al lui V, egal cu intersecţia tuturor subspaţiilor care conţin sistemul S.

Proprietatea 1.6. Dacă toţi vectorii unui sistem $S \subset V$ aparţin acoperirii liniare a sistemului $S' \subset V$, atunci acoperirea liniară $L(S)$ este conţinută în acoperirea liniară $L(S')$.

Proprietatea 1.7. Orice vector al sistemului S care depinde liniar de ceilalţi vectori ai acestui sistem poate fi eliminat fără modificarea acoperirii liniare $L(S)$.

Definiţia 1.6. Fie V un spaţiu vectorial peste K de dimensiune n şi $\mathcal{B}$ o bază a sa. Aplicaţia bijectivă $\beta : V \to K^n$ care asociază fiecărui vector $\bar{x} \in V$, elementul $(x^1, x^2, \ldots, x^n) \in K^n$, format din coordonatele sale în baza $\mathcal{B}$, se numeşte *sistem de coordonate* pe K^n definit de $\mathcal{B}$.

În acest caz, K^n se mai numeşte şi modelul aritmetic al spaţiului vectorial V. K^n se zice că este spaţiul vectorial aritmetic n-dimensional.

Lema substituţiei. Fie $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ o bază a lui V spaţiu vectorial peste K şi a $\bar{a} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha^i \bar{e}_i$. Dacă se consideră sistemul $\mathcal{B}'$ $= \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_{i-1}, \bar{a}, \bar{e}_{i+1}, \ldots, \bar{e}_n\}$, atunci avem:

a) $\mathcal{B}'$ este bază a lui V dacă şi numai dacă $\alpha^i \neq 0$;

b) $\mathcal{B}'$ fiind bază în V, între coordonatele (y^k) în raport cu $\mathcal{B}'$ şi coordonatele $\left(x^k\right)$ în raport cu $\mathcal{B}$ $(k = 1, 2, ..., n)$, ale unui vector oarecare $\bar{x} \in V$ există relaţiile:

$$y^i = \frac{x^i}{\alpha^i} \text{ şi } y^k = x_k - \frac{\alpha^k x^i}{\alpha^i}\,,\ k \neq i\,.$$

Teorema înlocuirii. Fie $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ o bază a spaţiului V şi sistemul de vectori liniar independenţi $S = \{\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_l\}$, $\bar{y}_i \in V$ $(i = 1, \ldots, l)$. Atunci:

a) $l \leq n$;

b)înlocuind l vectori din baza $\mathcal{B}$ prin vectorii sistemului S se obţine o nouă bază în V.

Fie $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\}$ şi $\mathcal{B}' = \left\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots, \bar{f}_n\right\}$ două baze într-un spaţiu vectorial n-dimensoinal V. Orice vector $\bar{x} \in V$ poate fi reprezentat sub forma

$$\bar{x} = \xi^1 \bar{e}_1 + \xi^2 \bar{e}_2 + \cdots + \xi^n \bar{e}_n = \eta^1 \bar{f}_1 + \eta^2 \bar{f}_2 + \cdots + \eta^n \bar{f}_n, \qquad (1.4)$$

unde scalarii $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n$ sunt coordonatele vectorului $\bar{x}$ relativ la baza $\mathcal{B}$, iar scalarii $\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^n$ sunt coordonatele lui $\bar{x}$ relativ la baza $\mathcal{B}'$. Prezentăm coordonatele vectorului $\bar{x}$ relativ la baza $\mathcal{B}'$ cunoscând coordonatele lui $\bar{x}$ relativ la baza $\mathcal{B}$. Presupunem că este dată matricea $P = \left(p_i^{(j)}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}'$, adică

$$\bar{f}_i = \sum_{j=1}^{n} p_{(i)}^{j} \bar{e}_j\,,\ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Atunci vectorii bazei $\mathcal{B}$ se exprimă cu ajutorul vectorilor bazei $\mathcal{B}'$ prin formulele

$$\bar{e}_j = \sum_{k=1}^{n} q_j^{(k)} \bar{f}_k\,,\ (j = 1, 2, ..., n) \qquad (1.5)$$

unde $Q = \left(q_k^{(j)}\right)_{1\le k,j\le n}$ este matricea inversă a matricii P.

Teorema 1.3. Coordonatele unui vector $\bar{x}$ relativ la baza $\mathcal{B}'$ se exprimă liniar cu ajutorul coordonatelor lui $\bar{x}$ relativ la baza $\mathcal{B}$; coeficienţii acestor expresii liniare formează o matrice, care este matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}'$ la baza $\mathcal{B}$ (adică inversa matricei P).

$$\begin{cases} \eta_1 = q_1^{(1)}\xi_1 + q_2^{(1)}\xi_2 + \cdots + q_n^{(1)}\xi_n \,, \\ \eta_2 = q_1^{(2)}\xi_1 + q_2^{(2)}\xi_2 + \cdots + q_n^{(2)}\xi_n \,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \eta_n = q_1^{(n)}\xi_1 + q_2^{(n)}\xi_2 + \cdots + q_n^{(n)}\xi_n \,. \end{cases}$$

1.1 Probleme rezolvate

1. Fie K un corp comutativ. Arătaţi că pe K se poate introduce o structură de spaţiu vectorial peste K.
   Soluţie:
   Legea internă aditivă "+" a corpului comutativ K poate fi considerată ca o "adunare" pe K, iar înmulţirea cu scalari din K este chiar legea internă multiplicativă "·" de pe K. Cum $(K, +)$ este grup abelian şi proprietăţile:
   8) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y \,, \quad \forall\alpha \in K, \forall x, y \in K$
   7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \,, \quad \forall\alpha, \beta \in K, \forall x \in K$
   6) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \,, \quad \forall\alpha, \beta \in K, \forall x \in K$
   5) $1_K x = x \,, \quad \forall x \in K$
   sunt evident verificate datorită structurii de corp comutativ a lui K, rezultă că $(K, +, \cdot)$ este spaţiu vectorial peste K.

2. Fie I o mulţime nevidă şi K un corp comutativ. Arătaţi că pe mulţimea tuturor funcţiilor definite pe I şi cu valori în K, notată K^I, se poate introduce o structură de spaţiu vectorial peste K.
   Soluţie:
   Definim legea de compoziţie internă

"$+$" : $K^I \times K^I \to K^I$, $(f,g) \mapsto f+g$, astfel:

$$(f+g)(x) = f(x) +_K g(x)\,, \quad \forall x \in I\,.$$

Se verifică că "+" este asociativă, comutativă şi că funcţia $\mathbf{0} : I \to K$, $\mathbf{0}(x) = 0_K$, $\forall x \in I$ este element neutru pentru legea "+". În plus, pentru orice funcţie $f : I \to K$, funcţia $-f : I \to K$, definită prin $(-f)(x) = -f(x)$, $\forall x \in I$ (aici $-f(x)$ este opusul lui $f(x)$ în K), este opusul ei în raport cu legea internă "+" de pe K^I.
Legea de compoziţie externă pe K^I, cu scalari din K,
"$\cdot_s$" : $K \times K^I \to K^I$, $(\alpha, f) \mapsto \alpha f$, este definită prin:

$$(\alpha f)(x) = \alpha \cdot_K f(x)\,, \quad \forall x \in I\,.$$

Cele patru proprietăţi 5) - 8) se verifică în fiecare $x \in I$ şi astfel rezultă că $(K^I, +, \cdot_s)$ este un spaţiu vectorial peste K.

3. Verificaţi că $\mathbf{C}$ este spaţiu vectorial peste $\mathbf{R}$ şi indicaţi dimensiunea şi o bază pentru acest spaţiu vectorial.
Soluţie:
Legea internă pe $\mathbf{C}$ este chiar adunarea din corpul numerelor complexe, iar înmulţirea cu scalari din $\mathbf{R}$ este înmulţirea dintre un număr real şi un număr complex. În acest mod, $\mathbf{C}$ devine spaţiu vectorial real, vectorul nul fiind numărul complex 0.
Dacă α, $\beta \in \mathbf{R}$ astfel încât $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot i = 0$, atunci $\alpha = \beta = 0$.
Deci $\{1, i\}$ este sistem liniar independent.
Pentru orice $z \in \mathbf{C}$, alegând $\alpha = Rez$ şi $\beta = Imz$, avem $z = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot i$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Astfel, $\{1, i\}$ este sistem de generatori, şi prin urmare bază a spaţiului vectorial real $\mathbf{C}$. În consecinţă, $\dim_{\mathbf{R}} \mathbf{C} = 2$.

4. Fie K un corp comutativ şi $n \in \mathbf{N}^*$. Arătaţi că pe mulţimea $K^n = K \times K \times \cdots \times K$ (de n ori) se poate introduce o structură de spaţiu vectorial peste K de dimensiune n.
Soluţie:
Ţinând cont că $K^n = \big\{(x^1, \ldots, x^n) | x^1, \ldots, x^n \in K\big\}$,

definim legea internă "$+''$: $K^n \times K^n \to K^n$
şi legea externă "$\cdot''_s$: $K \times K^n \to K^n$ prin
$(x^1, \ldots, x^n) + (y^1, \ldots, y^n) = (x^1 + y^1, \ldots, x^n + y^n)$,
respectiv $\alpha(x^1, \ldots, x^n) = (\alpha x^1, \ldots, \alpha x^n)$
pentru orice $\alpha \in K$ şi $(x^1, \ldots, x^n)$, $(y^1, \ldots, y^n) \in K^n$.
Din $(x^1, \ldots, x^n) + \big((y^1, \ldots, y^n) + (z^1, \ldots, z^n)\big) =$
$(x^1, \ldots, x^n) + (y^1 + z^1, \ldots, y^n + z^n) =$
$(x^1 + y^1 + z^1, \ldots, x^n + y^n + z^n)$ şi
$\big((x^1, \ldots, x^n) + (y^1, \ldots, y^n)\big) + (z^1, \ldots, z^n) =$
$(x^1 + y^1, \ldots, x^n + y^n) + (z^1, \ldots, z^n) =$
$(x^1+y^1+z^1, \ldots, x^n+y^n+z^n)$ rezultă asociativitatea "adunării" de pe K^n.
Comutativitatea se deduce din comutativitatea "adunării" din K:
$(x^1, \ldots, x^n)+(y^1, \ldots, y^n) = (x^1+y^1, \ldots, x^n+y^n) = (y^1, \ldots, y^n)+ (x^1, \ldots, x^n)$.
Elementul neutru relativ la "+" este n-uplul $(0, \ldots, 0)$, unde 0 este zeroul corpului K.
Pentru orice n-uplu $(x^1, \ldots, x^n)$, opusul său este n-uplul $(-x^1, \ldots, -x^n)$, unde $-x^i$ este opusul lui x^i relativ la "adunarea" din K.
Prin urmare $(K^n, +)$ este grup abelian.
Acum, vom verifica proprietăţile 5)-8):
8) $\alpha\big((x^1, \ldots, x^n) + (y^1, \ldots, y^n)\big) =$
$\alpha(x^1 + y^1, \ldots, x^n + y^n) =$
$\big(\alpha(x^1 + y^1), \ldots, \alpha(x^n + y^n)\big) =$
$(\alpha x^1 + \alpha y^1, \ldots, \alpha x^n + \alpha y^n) =$
$(\alpha x^1, \ldots, \alpha x^n) + (\alpha y^1, \ldots, \alpha y^n) =$
$\alpha(x^1, \ldots, x^n) + \alpha(y^1, \ldots, y^n)$,
7) $(\alpha + \beta)(x^1, \ldots, x^n) = \big((\alpha + \beta)x^1, \ldots, (\alpha + \beta)x^n\big) =$
$= (\alpha x^1 + \beta x^1, \ldots, \alpha x^n + \beta x^n) = (\alpha x^1, \ldots, \alpha x^n)+$
$(\beta x^1, \ldots, \beta x^n) = \alpha(x^1, \ldots, x^n) + \beta(x^1, \ldots, x^n)$,
6) $\alpha\big(\beta(x^1, \ldots, x^n)\big) = \alpha(\beta x^1, \ldots, \beta x^n) =$
$\big(\alpha(\beta x^1), \ldots, \alpha(\beta x^n)\big) = (\alpha\beta x^1, \ldots, \alpha\beta x^n) = \alpha\beta(x^1, \ldots, x^n)$,
5) $1(x^1, \ldots, x^n) = (1x^1, \ldots, 1x^n) = (x^1, \ldots, x^n)$, (1 fiind uni-

tatea lui K),
pentru orice n-upluri $(x^1, \ldots, x^n)$ şi $(y^1, \ldots, y^n)$ şi orice $\alpha, \beta \in K$.
Deci $(K^n, +, \cdot_s)$ este spaţiu vectorial peste K, numit *spaţiu vectorial aritmetic*, în care notăm $\bar{0} = (0, \ldots, 0)$, vectorul nul, $-\bar{x} = (-x^1, \ldots, -x^n)$ opusul vectorului $\bar{x} = (x^1, \ldots, x^n)$.
Sistemul de vectori
$\mathcal{B} = \{\bar{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \bar{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ ..., \bar{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)\}$
este o bază pentru K^n, numită *bază canonică*.
Într-adevăr,

$$\text{din } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{e}_i = \bar{0} \Rightarrow (\alpha^1, \ldots, \alpha^n) = (0, \ldots, 0)$$

şi astfel $\alpha^1 = \cdots = \alpha^n = 0$. Prin urmare $\mathcal{B}$ este sistem liniar independent.
Fie $\bar{x} = (x^1, \ldots, x^n) \in K^n$. Alegând $\alpha^i = x^i$, $i = \overline{1, n}$, avem

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha^i \bar{e}_i = \sum_{i=1}^{n} x^i \bar{e}_i = \bar{x}$$

şi prin urmare $\mathcal{B}$ este sistem de generatori.
Deci $\mathcal{B}$ este bază şi $\dim_K K^n = n$.

5. Conform problemei 4, $\mathbf{R}^n$ este spaţiu vectorial real n dimensional şi $\mathbf{C}^n$ este spaţiu vectorial complex n dimensional, dar $\mathbf{C}^n$ poate fi organizat şi ca spaţiu vectorial real de dimensiune $2n$.
   Soluţie:
   "Adunarea" pe $\mathbf{C}^n$ este definită ca în problema 4, iar înmulţirea cu scalari reali " $\cdot_s$ " : $\mathbf{R} \times \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$,
   $\alpha(z_1, \ldots, z_n) = (\alpha z_1, \ldots, \alpha z_n)$, verifică 5)-8) în mod evident.

   Deci $(\mathbf{C}^n, +, \cdot_s)$ este un spaţiu vectorial real.
   Baza naturală este formată cu $2n$ vectori:
   $\mathcal{B} = \big\{\bar{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \bar{f}_1 = (i, 0, \ldots, 0), \bar{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0),$

$\bar{f}_2 = (0, i, \ldots, 0), \ldots, \bar{e}_n = (0, , \ldots, 1), , \bar{f}_n = (0, 0, \ldots, i)\}$.
Într-adevăr,

$$\text{din } \sum_{k=1}^{n} \alpha^k \bar{e}_k + \sum_{k=1}^{n} \beta^k \bar{f}_k = \bar{0} \Rightarrow (\alpha^1 + i\beta^1, \ldots, \alpha^n + i\beta^n) = \bar{0}$$

şi prin urmare $\alpha^k + i\beta^k = 0$, $\forall k = \overline{1,n}$, adică toţi scalarii reali ai combinaţiei liniare nule sunt egali cu zero. Mai rămâne să arătăm că $\mathcal{B}$ este sistem de generatori.
Fie $\bar{z} = (z^1, \ldots, z^n) \in \mathbf{C}^n$. Luând $\alpha^k = Rez^k$ şi $\beta^k = Imz^k$ scalari reali ($k = \overline{1,n}$), avem

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha^k \bar{e}_k + \sum_{k=1}^{n} \beta^k \bar{f}_k = (Rez_1 + iImz_1, \ldots, Rez_n + iImz_n) = \bar{z}\,.$$

Deci $\mathcal{B}$ este bază şi $\dim_{\mathbf{R}} \mathbf{C}^n = 2n$.

6. Verificaţi că $(\mathcal{M}_{m,n}(K), +, \cdot_s)$ este un spaţiu vectorial peste corpul comutativ K şi arătaţi că dimensiunea sa este mn.
Soluţie:
Structura de spaţiu vectorial peste K a lui $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ este justificată de proprietăţile adunării şi înmulţirii cu scalari din K a matricilor.
Altfel, dacă privim $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ ca mulţimea tuturor funcţiilor definite pe $\{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$ cu valori în K, atunci conform problemei 2, se obţine aceeaşi structură de spaţiu vectorial peste K.
O bază naturală este formată cu matrici de tipul

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

adică E_{ij} este o matrice de tipul (m, n) care are toate elementele egale cu zeroul corpului K, cu excepţia elementului

de la intersecţia liniei i cu coloana j, care este unitatea lui K.
Mulţimea $\mathcal{B} = \left\{E_{ij} | i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}\right\}$ are mn elemente şi este bază pentru $\mathcal{M}_{m,n}(K)$. Într-adevăr, din orice combinaţie liniară nulă,

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\alpha^{ij}E_{ij} = O_{m,n} ,$$

avem $(\alpha^{ij})_{i,j} = 0_{m,n}$, adică $\alpha^{ij} = 0_K, \forall i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ şi prin urmare $\mathcal{B}$ este sistem liniar independent.
Pentru orice matrice $A = (a_{ij})_{i,j}$ din $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ putem alege scalarii din K, $\alpha^{ij} = a_{ij}$ astfel ca

$$A = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}E_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\alpha^{ij}E_{ij} .$$

Rezultă că $\mathcal{B}$ este şi sistem de generatori.

Deci $\dim_K \mathcal{M}_{m,n}(K) = mn$.

7. Conform problemei 6 avem că $\dim_{\mathbf{R}} \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R}) = mn$, $\dim_{\mathbf{C}} \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C}) = mn$, dar $\dim_{\mathbf{R}} \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C}) = 2mn$.
Soluţie:
Pe $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$ se introduce o structură de spaţiu vectorial peste $\mathbf{R}$ folosind adunarea matricilor şi înmulţirea matricilor cu scalari reali. O bază naturală lui $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$, considerat ca spaţiu vectorial real, este formată cu matrici de tipul:

$$E_{kl} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, F_{kl} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & i & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

unde E_{kl} este o matrice de tipul (m,n) care are toate elementele egale cu zero, cu excepţia elementului de la intersecţia liniei k cu coloana l, care este 1, iar F_{kl} este o matrice de tipul

(m, n) care are toate elementele egale cu zero, cu excepţia elementului de la intersecţia liniei k cu coloana l, care este i.
Ca în problema anterioară, se verifică că
$\mathcal{B} = \left\{E_{kl}, F_{kl} | k = \overline{1,m}, l = \overline{1,n}\right\}$ este bază pentru $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$ şi atunci $\dim_{\mathbf{R}} \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C}) = 2mn$.

8. Fie K un corp comutativ. Arătaţi că pe mulţimea polinoamelor în nedeterminata X cu coeficienţi din K, $K[X]$, se poate introduce o structură de spaţiu vectorial peste K, de dimensiune infinită.
   Soluţie:
   Adunarea polinoamelor din $K[X]$ detemină o structură de grup abelian pe $K[X]$ (polinomul nul θ fiind element neutru), iar înmulţirea cu scalari din K verifică proprietăţile 5)-8). Deci $(K[X], +, \cdot_s)$ este spaţiu vectorial peste K.
   Sistemul infinit de polinoame $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, \ldots, X^n, \ldots\}$ este liniar independent pentru că orice subsistem finit,
   $S = \{X^{j_1}, X^{j_2}, \ldots, X^{j_k}\} \subset \mathcal{B}$ ($j_1, j_2, \ldots, j_k \in \mathbf{N}$) este liniar independent. Într-adevăr, din $\alpha_{j_1} X^{j_1} + \alpha_{j_2} X^{j_2} + \cdots + \alpha_{j_k} X^{j_k} = \theta$ rezultă că
   $\alpha_{j_1} = \alpha_{j_2} = \cdots = \alpha_{j_k} = 0 \in K$.
   (două polinoame coincid dacă şi numai dacă au aceeaşi coeficienţi)
   Deoarece în $K[X]$ există un sistem infinit de vectori liniar independenţi, avem că $\dim_K K[X] = \infty$.

9. Conform problemei 8, $\mathbf{R}[X]$ este spaţiu vectorial real infinit dimensional şi $\mathbf{C}[X]$ este spaţiu vectorial complex infinit dimensional. În plus, $\mathbf{C}[X]$ poate fi organizat şi ca spaţiu vectorial real de dimensiune infinită.
   Soluţie:
   Restricţionând înmulţirea cu scalari la numere reale obţinem că $\mathbf{C}[X]$ este spaţiu vectorial real. O bază naturală a spaţiului vectorial real $\mathbf{C}[X]$, este sistemul infinit:
   $\mathcal{B} = \{1, i, X, iX, X^2, iX^2, \ldots, X^n, iX^n, \ldots\}$.

10. Fie K un corp comutativ. Arătaţi că pe mulţimea polinoamelor

în nedeterminata X, cu coeficienţi din K, de grad cel mult n, $K_n[X]$, se poate introduce o structură de spaţiu vectorial peste K, de dimensiune $n+1$.
Soluţie:
Evident, adunarea polinoamelor de grad cel mult n,
"$+$" : $K_n[X] \times K_n[X] \to K_n[X]$ şi înmulţirea cu scalari din K,
"$\cdot_s$" : $K \times K_n[X] \to K_n[X]$ sunt bine definite şi verifică proprietăţile din definiţia spaţiului vectorial.
O bază naturală a lui $K_n[X]$ este $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$.
Într-adevăr, din $\sum\limits_{j=0}^{n} \alpha_j X^j = \theta$ rezultă $\alpha_j = 0$, $\forall j = \overline{0,n}$
şi $\forall f \in K_n[X]$, $f = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_m X^m$
($m \leq n$) $\exists \alpha_0 = a_0, \alpha_1 = a_1, \ldots, \alpha_m = a_m, \alpha_{m+1} = 0$,
$\ldots, \alpha_n = 0 \in K$ astfel ca $f = \alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \cdots + \alpha_n X^n$.
Deci $\dim_K K_n[X] = n+1$.

11. Conform problemei 10, $\dim_{\mathbf{R}} \mathbf{R}_n[X] = n+1$ şi
$\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}_n[X] = n+1$, dar $\dim_{\mathbf{R}} \mathbf{C}_n[X] = 2(n+1)$.
Soluţie:
Baza naturală a spaţiului vectorial real $\mathbf{C}_n[X]$ este
$\mathcal{B} = \{1, i, X, iX, X^2, iX^2, \ldots, X^n, iX^n\}$.

12. Dacă V este un spaţiu vectorial de dimensiune n peste corpul $\mathbf{K}$ şi $S \subset V$ un sistem format din n vectori, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) S este liniar independent în V;

b) S este sistem de generatori;

c) S este bază în V.

Soluţie:

$a) \Rightarrow b)$ Fie sistemul de vectori $\{\overline{v}_1, ..., \overline{v}_n\}$ liniar independent. Presupunem că nu este sistem de generatori. Atunci $(\exists)$ $\overline{v}_{n+1} \in V$ astfel încât $\{\overline{v}_1, ..., \overline{v}_n, \overline{v}_{n+1}\}$ sunt liniar independenţi, ceea ce este o contradicţie, deoarece dimensiunea spaţiului este n.

$b) \Rightarrow a)$ Fie $\{\overline{v}_1, ..., \overline{v}_n\}$ un sistem de generatori. Presupunem că nu este liniar independent. Din acest sistem de generatori putem extrage un subsistem maximal de vectori liniari independenţi $\{\overline{w}_1, ..., \overline{w}_k\}, k < n$. Deoarece $\{\overline{w}_1, ..., \overline{w}_k\}$ este maximal, $(\forall)\ i = \overline{1..n}, \overline{v}_i \in L(\overline{w}_1, ..., \overline{w}_k)$. Dar cum $\{\overline{v}_1, ..., \overline{v}_n\}$ este sistem de generatori, deci $L\ (\overline{v}_1, ..., \overline{v}_n) = V$, va rezulta că $L(\overline{w}_1, ..., \overline{w}_k) = V$, deci $\{\overline{w}_1, ..., \overline{w}_k\}$ este sistem de generatori. Cum $\{\overline{w}_1, ..., \overline{w}_k\}$ este şi liniar independent, este o bază. Dar dimensiunea spaţiului vectorial V este n şi $k < n$. De aici rezultă contradicţia.

Dacă $a) \Rightarrow b)$ şi $b) \Rightarrow a)$, ţinând cont de proprietăţile bazei, avem că $a) \Rightarrow c)$, $b) \Rightarrow c)$. De asemenea, $c) \Rightarrow a)$, $c) \Rightarrow b)$ este evident.

13. Care din următoarele sisteme de vectori din spaţiul vectorial aritmetic $\mathbf{R}^3$ sunt liniar independente:

a) $\{\overline{a}_1 = (1, 2, 3), \overline{a}_2 = (2, 3, 1), \overline{a}_3 = (3, 1, 2)\}$

b) $\{\overline{b}_1 = (1, 3, -1), \overline{b}_2 = (0, -2, 1), \overline{b}_3 = (-3, -1, -1)\}$

Soluţie:

a) Formăm cu ajutorul componentelor vectorilor dispuse pe coloane următoarea matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Există o combinaţie liniară nulă (dar cu coeficienţi nu toţi nuli) a vectorilor $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ dacă şi numai dacă există o combinaţie liniară de acelaşi gen a coloanelor matricei A. În cazul de mai sus aceasta este echivalentă cu anularea determinantului matricei A. Avem $\det A = -24$, deci sistemul $\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3\}$ este liniar independent.

b) Raţionând analog, obţinem matricea

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Avem $\det B = 0$, deci sistemul de vectori $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3\}$ este liniar dependent.

14. Fie $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\} \subset \mathbf{R}^3$, $\overline{v}_1 = (1, \alpha, 0)$, $\overline{v}_2 = (\alpha, 1, 1)$, $\overline{v}_3 = (1, 0, \alpha)$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

    a) Să se afle $\alpha \in \mathbf{R}$ astfel încât $S = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$ să formeze o bază în $\mathbf{R}^3$.

    b) Pentru $\alpha = \sqrt{2}$ să se extragă din S o bază S' a subspaţiului vectorial $L(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3)$.

    Soluţie:

    a) Formăm matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$. Calculând determinantul matricii A, obţinem $\det A = \alpha(\sqrt{2} - \alpha) \cdot (\sqrt{2} + \alpha)$. Sistemul format din vectorii $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$este liniar independent pentru $\alpha \in \mathbf{R} \backslash \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$. Cum dimensiunea lui $\mathbf{R}^3$ este 3, S este o bază pentru $\alpha \in \mathbf{R} \backslash \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$

    b) Pentru $\alpha = \sqrt{2}$, minorul determinat de primele două linii şi două coloane, $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{vmatrix}$ este nenul şi ţinând seama că $\det A = 0$, Δ este minor principal.
    Vectorii $\overline{v}_1, \overline{v}_2$, cu componentele cărora se formează minorul formează baza S' cerută.

15. Să se arate că sistemele de vectori $S = \{(1, 1, 0), (1, -1, -1)\}$ şi respectiv $S_2 = \{(9, -1, -5), (7, -1, -4)\}$ din $\mathbf{R}^3$, generează acelaşi subspaţiu vectorial.

    Soluţie:

Să notăm $\overline{u}_1 = (1,1,0)$, $\overline{u}_2 = (1,-1,-1)$, $\overline{v}_1 = (9,-1,-5)$, $\overline{v}_2 = (7,-1,-4)$. Arătăm mai întâi că $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2 \in L(\overline{u}_1,\overline{u}_2)$. Dacă căutăm $\alpha,\beta \in \mathbf{R}$ astfel ca $\overline{v}_1 = \alpha\overline{u}_1 + \beta\overline{u}_2$ obţinem:

$$\begin{cases} \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 1 = 9 \\ \alpha \cdot 1 + \beta \cdot (-1) = -1 \\ \alpha \cdot 0 + \beta \cdot (-1) = -5 \end{cases}$$

De aici rezultă $\alpha = 4$, $\beta = 5$, deci $\overline{v}_1 = 4\overline{u}_1 + 5\overline{u}_2$. Analog $\overline{v}_2 = 3\overline{u}_1 + 4\overline{u}_2$. Atunci $\overline{v}_1,\overline{v}_2 \in L(\overline{u}_1,\overline{u}_2)$ şi deci vom avea relaţia:

$$L(\overline{v}_1,\overline{v}_2) \subseteq L(\overline{u}_1,\overline{u}_2)$$

Similar găsim $\overline{u}_1 = 4\overline{v}_1 - 5\overline{v}_2$, $\overline{u}_2 = -3\overline{v}_1 + 4\overline{v}_2$, deci:

$$L(\overline{u}_1,\overline{u}_2) \subseteq L(\overline{v}_1,\overline{v}_2)$$

Folosind şi relaţia găsită mai sus obţinem:

$$L(\overline{v}_1,\overline{v}_2) = L(\overline{u}_1,\overline{u}_2).$$

16. Să se descompună vectorul $\overline{s}$, după vectorii $\overline{u}$,$\overline{v}$,$\overline{w}$, care sunt trei vectori liniar independenţi în spaţiul vectorial real V, dacă :

$\overline{s} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$ şi

$$\begin{cases} \overline{u} = \overline{a} + \overline{b} - 2\overline{c} \\ \overline{v} = \overline{a} - \overline{b} \\ \overline{w} = 2\overline{b} + 3\overline{c} \end{cases}.$$

Soluţie:

$\overline{s} = \alpha\overline{u} + \beta\overline{v} + \gamma\overline{w}$, cu α, β, $\gamma \in \mathbf{R} \Leftrightarrow$

$\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = \alpha\overline{a} + \alpha\overline{b} - 2\alpha\overline{c} + \beta\overline{a} - \beta\overline{b} + 2\gamma\overline{b} + 3\gamma\overline{c}$

$$\begin{cases} \overline{a} = (\alpha+\beta)\overline{a} \\ \overline{b} = (\alpha - \beta + 2\gamma)\overline{b} \\ \overline{c} = (-2\alpha + 3\gamma)\overline{c} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha - \beta + 2\gamma = 1 \\ -2\alpha + 3\gamma = 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

rang$A$ =rang$\overline{A}$

det$A = -3 - 4 - 3 = -10$;

$\alpha = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{-10}$;$\alpha = \frac{2}{5}$;

$\beta = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-10}$;$\beta = \frac{3}{5}$

$\gamma = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-10}$; $\gamma = \frac{3}{5}$

deci $\overline{s} = \frac{2}{5}\overline{u} + \frac{3}{5}\overline{v} + \frac{3}{5}\overline{w}$.

17. În spaţiul vectorilor liberi V^3 se dau vectorii $\overline{x}_1 = 2\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$, $\overline{x}_2 = 3\overline{i} + 5\overline{j} + 2\overline{k}$, $\overline{x}_3 = 4\overline{i} + 3\overline{j} + \overline{k}$, unde $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ este o bază a lui V^3.

Se cere :

a) să se arate că $\{\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3\}$ formează o bază în V^3;

b) să se descompună vectorul $\overline{x} = 20\overline{i} + 20\overline{j} + 8\overline{k}$ în baza $\{\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3\}$.

Soluţie:

a)Trebuie arătat că $\{\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3\}$ sunt liniar independenţi şi constituie un sistem de generatori.

Cum V^3 are dimensiunea 3, este suficient să demonstrăm liniar independenţa vectorilor $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3$.

Fie $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$. Din egalitatea

$$\alpha\overline{x}_1 + \beta\overline{x}_2 + \gamma\overline{x}_3 = \overline{0}$$

rezultă : $2\alpha\overline{i} + \alpha\overline{j} + \alpha\overline{k} + 3\beta\overline{i} + 5\beta\overline{j} + 2\beta\overline{k} + 4\gamma\overline{i} + 3\gamma\overline{j} + \gamma\overline{k} = \overline{0}$.

Aşadar $(2\alpha+3\beta+4\gamma)\bar{i}+(\alpha+5\beta+3\gamma)\bar{j}+(\alpha+2\beta+\gamma)\bar{k}=\bar{0}$.

Dar $\{\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$ constituie baza în $V^3 \Rightarrow$

$(*)\begin{cases} 2\alpha+3\beta+4\gamma=0 \\ \alpha+5\beta+3\gamma=0 \\ \alpha+2\beta+\gamma=0 \end{cases} \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$ este soluţia sistemului, deci $\{\overline{x}_1,\overline{x}_2,\overline{x}_3\}$ sunt vectori liniar independenţi.

Atunci tripletul $\{\overline{x}_1,\overline{x}_2,\overline{x}_3\}$ constituie o bază pentru spaţiul vectorial V^3.

b) Descompunerea se realizează în mod analog cu cea de la problema precedentă, obţinându-se:

$$\overline{x}=\overline{x}_1+2\overline{x}_2+3\overline{x}_3.$$

18. Se dă spaţiul vectorial al polinoamelor cu coeficienţi reali de grad mai mic sau egal cu 5.
Să se determine dimensiunea acestui spaţiu şi să se găsească descompunerea polinomului
$P(X)=1+2X-X^2+3X^3+5X^4+X^5$ în baza canonică $P_1(X)=1, P_2(X)=X, P_3(X)=X^2, P_4(X)=X^3$, $P_5(X)=X^4$, $P_6(X)=X^5$.

Soluţie:

Dimensiunea spaţiului vectorial este egală cu numărul vectorilor bazei acelui spaţiu vectorial.

Arătăm că polinoamele $P_1(X),P_2(X),...,P_6(X)$ $(P_i(X)=X^{i-1}$, $i=\overline{1,6})$ constituie o bază pentru spaţiul vectorial al polinoamelor cu coeficienti reali (complecşi) de grad mai mic sau egal cu 5.

a) liniar independenţa - fie combinaţia liniară:

$$\sum_{i=1}^{6}\alpha_i P_i(X)=0, \alpha_i\in\mathbf{R},\ i=\overline{1,6}$$

Folosind egalitatea a două polinoame rezultă:

$\alpha_i = 0$; $(i = \overline{1,6})$, $(\alpha_1 1 + \alpha_2 X + \alpha_3 X^2 + \alpha_4 X^3 + \alpha_5 X^4 +$

$\alpha_6 X^5 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2 + 0X^3 + 0X^4 + 0X^5$, de unde

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = 0)$.

b) sistem de generatori - prin însăşi modul de definire al polinoamelor cu coeficienţi reali sau complecşi, acestea sunt prezente ca o combinaţie liniară de polinoame $P_i(X), i = \overline{1,6}$.

$(P(X) = \sum\limits_{i=0}^{6} a_i X^i = \sum\limits_{i=0}^{6} a_i P_i\,(X))$.

Aşadar $\{1, X, X^2, X^3, X^4, X^5\}$ constituie o bază pentru spaţiul vectorial al polinoamelor cu coeficienţi reali de grad mai mic sau egal cu 5. Dimensiunea spaţiului vectorial este 6.

Reprezentarea particulară a lui $P(X) = 1 + 2X - X^2 + 3X^3 + 5X^4 + X^5$ este:

$P(X) = P_1(X) + 2P_2(X) - P_3(X) + 3P_4(X) + 5P_5(X) + P_6(X)$.

19. Fie $\mathcal{M}_{3,4}(\mathbf{R})$ mulţimea matricilor cu trei linii şi patru coloane, cu elementele numere reale. Folosind faptul că $(\mathcal{M}_{3,4}(R), +, \cdot)$ este un spaţiu vectorial real, să se găsească descompunerea lui

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

în baza canonică $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,..., $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Soluţie:

Descompunerea este :

$A = 0 \cdot E_1 + (-1) \cdot E_2 + 2 \cdot E_3 + 1 \cdot E_4 + 1 \cdot E_5 + 5 \cdot E_6 + 0 \cdot E_7 +$

$+(-2) \cdot E_8 + (-2) \cdot E_9 + 3 \cdot E_{10} + 4 \cdot E_{11} + 7 \cdot E_{12}$

20. Să se determine $\lambda \in \mathbf{R}$ astfel ca vectorii :
$\overline{a} = \overline{e}_1 - \overline{e}_2 + 4\overline{e}_3$; $\overline{b} = 2\overline{e}_1 - 3\overline{e}_2 + \overline{e}_3$; $\overline{c} = \overline{e}_1 + 2\overline{e}_2 + \lambda\overline{e}_3$
să fie liniar dependenţi în spaţiul vectorial aritmetic $\mathbf{R}^3$, unde $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ este bază canonică a lui $\mathbf{R}^3$.

Soluţie:

Vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ sunt cunoscuţi (ei sunt reprezentaţi sub forma unei combinaţii liniare a vectorilor $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$). Pentru ca vectorii $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ să fie liniar dependenţi trebuie ca vectorul $\overline{c}$ să se reprezinte ca o combinaţie liniară a vectorilor $\overline{a}$ şi $\overline{b}$, adică :

$\overline{c} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, ceea ce este echivalent cu :

$\overline{e}_1 + 2\overline{e}_2 + \lambda\overline{e}_3 = \alpha\overline{e}_1 - \alpha\overline{e}_2 + 4\alpha\overline{e}_3 + 2\beta\overline{e}_1 - 3\beta\overline{e}_2 + \beta\overline{e}_3$, ceea ce este echivalent cu :

$\begin{cases} \overline{e}_1 = (\alpha + 2\beta)\overline{e}_1 \\ 2\overline{e}_2 = (-\alpha - 3\beta)\overline{e}_2 \\ \lambda\overline{e}_3 = (4\alpha + \beta)\overline{e}_3 \end{cases}$. Din primele ecuaţii rezultă că $\alpha = 7$ şi $\beta = -3$, iar din a treia ecuaţie $\lambda = 4\alpha + \beta$, adică $\lambda = 25$.

21. Să se stabilească dependenţa liniară a vectorilor : $\overline{v}_1 = 3\overline{e}_1 - 2\overline{e}_2 + \overline{e}_3$; $\overline{v}_2 = 9\overline{e}_1 + \overline{e}_2 + 9\overline{e}_3$; $\overline{v}_3 = -\overline{e}_1 + \overline{e}_2 - \overline{e}_3$; $\overline{v}_4 = 2\overline{e}_2 + \overline{e}_3$ în $\mathbf{R}^3$.

Soluţie:

Arătăm că din combinaţia liniară $\sum_{i=1}^{4} \alpha_i\overline{v}_i = \overline{0}$, $\alpha_i \in \mathbf{R}$, nu rezultă că $\alpha_i (i = \overline{1,4})$ sunt egali cu 0. Astfel:

$\sum_{i=1}^{4} \alpha_i\overline{v}_i = 0 \Leftrightarrow (3\alpha_1 + 9\alpha_2 - \alpha_3)\overline{e}_1 + (-2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4)\overline{e}_2 + (\alpha_1 + 9\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4)\overline{e}_3 = \overline{0}$,
dar $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ constituie baza canonică în $\mathbf{R}^3$, astfel :

$$\begin{cases} 3\alpha_1 + 9\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + 9\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \end{cases} ,$$

acest sistem este compatibil simplu nedeterminat, deoarece:

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & -1 \end{vmatrix} = -20 \neq 0$$

Aşadar există alternativa soluţiilor nenule şi deci vectorii $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$, $\overline{v}_3$, $\overline{v}_4$ sunt liniar dependenţi.

22. Fiind daţi vectorii $\overline{a} = 3\overline{e}_1 - 4\overline{e}_2, \overline{b} = 2\overline{e}_1 - \overline{e}_2, \overline{c} = 5\overline{e}_1 - 6\overline{e}_2$ în spaţiul vectorial aritmetic $\mathbf{R}^2$, unde $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ este bază canonică a lui $\mathbf{R}^2$, să se descompună $\overline{c}$ după direcţia vectorilor $\overline{a}$ şi $\overline{b}$.

Soluţie:

Fie $\overline{c} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, ceea ce este echivalent cu :

$5\overline{e}_1 - 6\overline{e}_2 = 3\alpha\overline{e}_1 - 4\alpha\overline{e}_2 + 2\beta\overline{e}_1 - \beta\overline{e}_2 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 5 = 3\alpha + 2\beta \\ -6 = -4\alpha - \beta \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 5 = 3\alpha + 2\beta \\ -12 = -8\alpha - 2\beta \end{cases} \text{, adică}$$

$-7 = -5\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{7}{5}, \beta = \frac{2}{5}$.

Deci $\overline{c} = \frac{7}{5}\overline{a} + \frac{2}{5}\overline{b}$.

23. În spaţiul vectorial aritmetic $\mathbf{R}^3$ se dau vectorii

$\overline{v}_1 = (3, 1, 0)$; $\overline{v}_2 = (6, 3, 2)$; $\overline{v}_3 = (1, 3, 5)$

Se cere :

a) să se arate că $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3$ formează o bază în spaţiul $\mathbf{R}^3$;

b) să se găsească coordonatele vectorilor bazei canonice $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ în noua bază $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$.

Soluţie:

a) Liniar independenţa - fie combinaţia liniară
$\alpha_1\overline{v}_1 + \alpha_2\overline{v}_2 + \alpha_3\overline{v}_3 = \overline{0}$, adică :

$(3\alpha_1, \alpha_1, 0) + (6\alpha_2, 3\alpha_2, 2\alpha_2) + (\alpha_3, 3\alpha_3, 5\alpha_3) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 3\alpha_1 + 6\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \quad 2\alpha_2 + 5\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$,deci sistemul are drept soluţie numai soluţia trivială $(\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0)$.

Faptul că $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3$ constituie un sistem de generatori rezultă direct din punctul 1 şi din faptul că $\dim \mathbf{R}^3 = 3$, adică $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$ este o bază a acestui spaţiu vectorial.

b) $\begin{pmatrix} \overline{e}_1 & \overline{e}_2 & \overline{e}_3 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \overline{v}_1 \\ \overline{v}_2 \\ \overline{v}_3 \end{pmatrix}$, unde $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} \overline{e}_1 = a_{11}\overline{v}_1 + a_{12}\overline{v}_2 + a_{13}\overline{v_3} \\ \overline{e}_2 = a_{21}\overline{v}_1 + a_{22}\overline{v}_2 + a_{23}\overline{v}_3 \\ \overline{e}_3 = a_{31}\overline{v}_1 + a_{32}\overline{v}_2 + a_{33}\overline{v}_3 \end{cases}$$

Prima ecuaţie vectorială este echivalentă cu
$(1,0,0) = a_{11}(3,1,0) + a_{12}(6,3,2) + a_{13}(1,3,5)$,

adică: $\begin{cases} 3a_{11} + 6a_{12} + a_{13} = 1 \\ a_{11} + 3a_{12} + 3a_{13} = 0 \\ 2a_{12} + 5a_{13} = 0 \end{cases}$.

$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, soluţiile sunt
$a_{11} = -9, a_{12} = 5, a_{13} = -2$.

Analog, în cazul celorlalte două ecuaţii vectoriale se obţine:

$a_{21} = 28, a_{22} = -15, a_{23} = 6, a_{31} = -15$,
$a_{32} = 8, a_{33} = -3$.

Aşadar:

$$\begin{cases} \overline{e}_1 = -9\overline{v}_1 + 5\overline{v}_2 - 2\overline{v}_3 \\ \overline{e}_2 = 28\overline{v}_1 - 15\overline{v}_2 + 6\overline{v}_3 \\ \overline{e}_3 = -15\overline{v}_1 + 8\overline{v}_2 - 3\overline{v}_3 \end{cases}.$$

24. a) Să se arate că mulţimea funcţiilor $f : (-a, a) \to \mathbf{R}$ care satisfac condiţia $f(x) = f(-x)$, $(\forall)x \in (-a, a)$ este un subspaţiu vectorial al spaţiului tuturor funcţiilor reale definite pe $(-a, a)$.

b) Analog pentru mulţimea funcţiilor $f : (-a, a) \to \mathbf{R}$ care satisfac condiţia $f(x) = -f(-x)$.

Soluţie:

a) Fie $f_1, f_2 : (-a, a) \to \mathbf{R}$ astfel încât :

$f_1(x) = f_1(-x)$ şi $f_2(x) = f_2(-x)$, $(\forall)a \in (-a, a)$.

Funcţia $(f_1 + f_2) : (-a, a) \to \mathbf{R}$ se bucură de proprietatea că $(f_1 + f_2)(x) = (f_1 + f_2)(-x)$, deoarece :

$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = f_1(-x) + f_2(-x) =$
$(f_1 + f_2)(-x), (\forall)x \in (-a, a)$

Fie $\alpha \in \mathbf{R}$, funcţia $\alpha f : (-a, a) \to \mathbf{R}$ are proprietatea :

$(\alpha f)(x) = (\alpha f)(-x)$ $(\forall)x \in (-a, a)$ pentru că $(\alpha f)(x) = \alpha f(x) = \alpha f(-x) = (\alpha f)(-x), (\forall)x \in (-a, a)$

b) se demonstrează în mod analog.

25. Să se arate că subspaţiile vectoriale ale funcţiilor pare şi respectiv impare sunt suplimentare în spaţiul tuturor funcţiilor reale definite pe $(-a, a)$.

Soluţie:

Fie W_1 subspaţiul vectorial al funcţiilor reale impare şi W_2 subspaţiul vectorial al funcţiilor reale pare.

Arătăm că $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ (Observaţie: este vorba de funcţia zero). Fie că $W_1 \cap W_2 = \{f\}$, atunci $f \in W_1$ şi $f \in W_2$, deci $f : (-a, a) \to \mathbf{R}$ şi $\begin{cases} f(x) = f(-x); \ (f \in W_1) \\ f(x) = -f(-x); \ (f \in W_2) \end{cases}$
$\Rightarrow f(-x) = -f(-x) \Rightarrow 2f(-x) = 0 \Rightarrow f = 0,$
aşadar $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

În plus $(\forall)f : (-a, a) \to \mathbf{R}$, f se poate reprezenta:

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) + f(-x)\right] + \frac{1}{2}\left[f(x) - f(-x)\right]$$

ceea ce implică :

$$W_1 \oplus W_2 = W$$

unde W este spaţiul vectorial al tuturor funcţiilor reale definite pe $(-a, a)$.

Concluzie: $W_1 \oplus W_2 = W$, deci W_1 şi W_2 sunt subspaţii vectoriale suplimentare.

26. Fie W_1 şi W_2 două subspaţii vectoriale ale spaţiului V. Să se demonstreze că nu întotdeauna $W_1 \cup W_2$ este un spaţiu vectorial al lui V.

    Soluţie:

    Dacă $W_1 \not\subset W_2$ şi $W_2 \not\subset W_2$, atunci există $\overline{v}_1 \in W_1$, $\overline{v}_2 \in W_2$ astfel ca $\overline{v}_1 \notin W_2$ şi $\overline{v}_2 \notin W_1$. Prin urmare $\overline{v}_1 + \overline{v}_2 \notin W_1$ şi $\overline{v}_1 + \overline{v}_2 \notin W_2$, adică $\overline{v}_1 + \overline{v}_2 \notin W_1 \cup W_2$.

    $W_1 \cup W_2$ este subspaţiu vectorial dacă şi numai dacă $W_1 \subset W_2$ sau $W_2 \subset W_2$.

    Observaţie: Avem

$$W_1 + W_2 = L(W_1 \cup W_2),$$

$$W_1 + W_2 = \{\overline{v}_1 + \overline{v}_2 = \overline{v} \mid \overline{v}_1 \in W_1, \overline{v}_2 \in W_2\}$$

27. Să se arate că submulţimea $B = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 - x_2 + 5x_3 = 4\}$ a lui $\mathbf{R}^3$, nu constituie un subspaţiu vectorial al lui $\mathbf{R}^3$.

    Soluţie:

    Vectorul $\overline{0} = (0, 0, 0) \in \mathbf{R}^3$ nu aparţine submulţimii B, deoarece $0 - 0 + 5 \cdot 0 \neq 4$. Aşadar $\overline{0} \notin B$ şi deci B nu poate avea o structură de subspaţiu vectorial al lui $\mathbf{R}^3$.

28. Să se arate că mulţimile $U = \{u_1 = (1, 5, 3), u_2 = (2, 0, 6)\}$, $W = \{w_1 = (-1, 7, -3), w_2 = (4, 5, 12)\}$ generează acelaşi subspaţiu vectorial al lui $\mathbf{R}^3$.

    Soluţie:

    $L(U) = \{k_1 u_1 + k_2 u_2 \mid k_1, k_2 \in \mathbf{R}\} =$
    $\{(k_1 + 2k_2, 5k_1, 3k_1 + 6k_2) \mid k_1, k_2 \in \mathbf{R}\}$.

Analog:

$L(W) = \{h_1 w_1 + h_2 w_2 \mid h_1, h_2 \in \mathbf{R}\} =$
$\{(-h_1 + 4h_2, 7h_1 + 5h_2, -3h_1 + 12h_2) \mid h_1, h_2 \in \mathbf{R}\}.$

Se arată că $L(U) = L(W)$ ca în exerciţiul 15.

29. Fie $C^0(\mathbf{R})$ spaţiul vectorial real al funcţiilor reale şi continue. Să se arate că următoarea submulţime a lui $C^0(\mathbf{R})$ este liniar independentă. Să se stabilească dimensiunea subspaţiului generat de mulţimea $\{e^{ax}, x \cdot e^{ax}, x^2 \cdot e^{ax}\}$.

Soluţie:

Deoarece $e^{ax} \neq 0$, combinaţia liniară

$\alpha_1 \cdot e^{ax} + \alpha_2 \cdot x \cdot e^{ax} + \alpha_3 \cdot x^2 \cdot e^{ax} = 0 \Leftrightarrow$

$(\alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot x^2)e^{ax} = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot x^2 = 0,$
pentru orice $x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0\,,$
deci $\dim L(\{e^{ax}, x \cdot e^{ax}, x^2 \cdot e^{ax}\}) = 3.$

30. Fie subspaţiile lui $\mathbf{R}^2$, W şi U generate de vectorii $\overline{w}_1 = (1, 5)$, $\overline{w}_2 = (-2, -10)$ şi $\overline{w}_3 = (3, 15)$, respectiv $\overline{u}_1 = (-1, -4)$, $\overline{u}_2 = (-1, 2)$, $\overline{u}_3 = (2, 0)$. Să se construiască subspaţiile $U + W$ şi $W \cap U$.

Soluţie:

Subspaţiul sumă $U + W$ este acoperirea liniară a vectorilor $\overline{w}_1$, $\overline{w}_2$, $\overline{w}_3$, $\overline{u}_1$, $\overline{u}_2$, $\overline{u}_3$, adică $\overline{v} \in W + U$ este de forma:

$$\overline{v} = k_1\overline{w}_1 + k_2\overline{w}_2 + k_3\overline{w}_3 + k_4\overline{u}_1 + k_5\overline{u}_2 + k_6\overline{u}_3.$$

Subspaţiul $W \cap U$ conţine acei vectori pentru care

(*) $\alpha_1\overline{w}_1 + \alpha_2\overline{w}_2 + \alpha_3\overline{w}_3 = \beta_1\overline{u}_1 + \beta_2\overline{u}_2 + \beta_3\overline{u}_3$

Înlocuind în ecuaţia precedentă valorile vectorilor $\overline{w}_1$, $\overline{w}_2$, $\overline{w}_3$, $\overline{u}_1$, $\overline{u}_2$, $\overline{u}_3$ se obţine:

$$\begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = -\beta_1 - \beta_2 + 2\beta_3 \\ 5\alpha_1 - 10\alpha_2 + 15\alpha_3 = -4\beta_1 + 2\beta_2 \end{cases}.$$

Întrucât rangul sistemului este 1, conform teoremei Rouché, compatibilitatea sistemului este asigurată de anularea determinantului caracteristic care este egal cu $\beta_1 + 7\beta_2 - 10\beta_3$ (şi care este egal cu 0).

Obţinem $\beta_1 = -7\lambda + 10\mu$, $\beta_2 = \lambda$, $\beta_3 = \mu$, unde $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$.

Înlocuind valorile lui β_1, β_2, β_3 în ecuaţia (*) se obţine că:

$(-7\lambda + 10\mu)\overline{u}_1 + \lambda\overline{u}_2 + \mu\overline{u}_3 = (6\lambda - 8\mu, 30\lambda - 40\mu) \in W \cap U$; $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$.

Observaţie: Deoarece $\dim U = 2$ şi $\dim W = 1$ rezultă $U = \mathbf{R}^2$, $W + U = \mathbf{R}^2$, $W \cap U = W$.

31. Fie $A = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 - x_2 + 5x_3 = 0\}$ o submulţime a lui $\mathbf{R}^3$. Să se precizeze dacă A este un subspaţiu vectorial şi să i se determine dimensiunea.

    Soluţie:

    Submulţimea A se poate scrie

    $A = \{(x_2 - 5x_3, x_2, x_3) \mid x_2, x_3 \in \mathbf{R}\}$.

    Fie $\overline{x}$, $\overline{y} \in A$, adică $\overline{x} = (x_2 - 5x_3, x_2, x_3)$, $\overline{y} = (y_2 - 5y_3, y_2, y_3)$. Avem:

    $\overline{x} + \overline{y} = (x_2 - 5x_3, x_2, x_3) + (y_2 - 5y_3, y_2, y_3) =$

    $((x_2 + y_2) - 5(x_3 + y_3), x_2 + y_2, x_3 + y_3)) \in A$.

    Dacă $\lambda \in \mathbf{R}$, atunci $\lambda\overline{x} = \lambda(x_2 - 5x_3, x_2, x_3) = (\lambda(x_2 - 5x_3), \lambda x_2, \lambda x_3) \in A$. Deci A este un subspaţiu vectorial al lui $\mathbf{R}^3$. Se observă că $\overline{x} \in A$ dacă şi numai dacă există α, $\beta \in \mathbf{R}$ astfel ca $\overline{x} = (\alpha - 5\beta, \alpha, \beta)$. Atunci $A = L(\overline{a}_1, \overline{a}_2)$, unde $\overline{a}_1 = (1, 1, 0)$ şi $\overline{a}_2 = (-5, 0, 1)$. Prin urmare $\dim A = 2$.

32. Să se demonstreze că mulţimea n-uplurilor de forma $(0, \xi_2, \xi_3, .., \xi_n)$ este un subspaţiu vectorial al lui K_n.

    Soluţie:

    Fie două n-upluri $(0, \xi_2^{(1)}, \xi_3^{(1)}, .., \xi_n^{(1)})$ şi $(0, \xi_2^{(2)}, \xi_3^{(2)}, .., \xi_n^{(2)})$ şi fie $\alpha \in K$. Are loc:

$(0, \xi_2^{(1)}, \xi_3^{(1)}, .., \xi_n^{(1)}) + (0, \xi_2^{(2)}, \xi_3^{(2)}, .., \xi_n^{(2)}) = \Big(0, \xi_2^{(1)} + \xi_2^{(2)},$
$\xi_3^{(1)} + \xi_3^{(2)}, .., \xi_n^{(1)} + \xi_n^{(2)}\Big) \in K_n$ şi $\alpha \cdot (0, \xi_2^{(1)}, \xi_3^{(1)}, .., \xi_n^{(1)}) =$
$(0, \alpha \cdot \xi_2^{(1)}, \alpha \cdot \xi_3^{(1)}, .., \alpha \cdot \xi_n^{(1)}) \in K_n$.

Aşadar mulţimea n-uplurilor de forma $(0, \xi_2, \xi_3, .., \xi_n)$ este un subspaţiu vectorial al lui K_n.

33. Fie V_5 spaţiul vectorial real al polinoamelor în $\cos x$ care au cel mult gradul 4. Să se scrie transformarea de coordonate care permite trecerea de la baza $B = \{1, \cos x, \cos^2 x, \cos^3 x, \cos^4 x\}$ la baza $B' = \{1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \cos 4x\}$ şi să se găsească inversa acestei transformări.

Soluţie:

Matricea de trecere de la baza B la baza B' se obţine din:

$1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot \cos x + 0 \cdot \cos^2 x + 0 \cdot \cos^3 x + 0 \cdot \cos^4 x,$

$\cos x = 0 \cdot 1 + 1 \cdot \cos x + 0 \cdot \cos^2 x + 0 \cdot \cos^3 x + 0 \cdot \cos^4 x,$

$\cos 2x = -1 \cdot 1 + 0 \cdot \cos x + 2 \cdot \cos^2 x + 0 \cdot \cos^3 x + 0 \cdot \cos^4 x,$

$\cos 3x = 0 \cdot 1 - 3 \cdot \cos x + 0 \cdot \cos^2 x + 4 \cdot \cos^3 x + 0 \cdot \cos^4 x,$

$\cos 4x = 1 \cdot 1 + 0 \cdot \cos x - 8 \cdot \cos^2 x + 0 \cdot \cos^3 x + 8 \cdot \cos^4 x.$

Deci matricea de trecere este:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Fie a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 coordonatele unui vector din V_5 în raport cu baza B şi b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 coordonatele aceluiaşi vector în raport cu baza B'. Atunci:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \text{ adică, explicit:}$$

$$\begin{cases} a_0 = b_0 - b_2 + b_4 \\ a_1 = b_1 - 3b_3 \\ a_2 = 2b_2 - 8b_4 \\ a_3 = 4b_3 \\ a_4 = 8b_4 \end{cases}$$

De aici:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

Atunci $d = \det(A) = 64$.

$$A^{-1} = \frac{1}{d} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} & A_{51} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} & A_{52} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} & A_{53} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} & A_{54} \\ A_{15} & A_{25} & A_{35} & A_{45} & A_{55} \end{pmatrix}$$

Unde $A_{11} = 64$, $A_{21} = 0$, $A_{31} = 32$, $A_{41} = 64$, $A_{51} = -8$, $A_{12} = 0$, $A_{22} = 64$, $A_{32} = 0$, $A_{42} = 48$, $A_{52} = 0$, $A_{13} = 0$, $A_{23} = 0$, $A_{33} = 32$, $A_{43} = 64$, $A_{53} = 0$, $A_{14} = 0$, $A_{24} = 0$, $A_{34} = 0$, $A_{44} = 16$, $A_{54} = 0$, $A_{15} = 0$, $A_{25} = 0$, $A_{35} = 0$, $A_{45} = 0$, $A_{55} = 8$, şi deci:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Inversa acestei transformări este:

$$\begin{cases} b_0 = a_0 + \frac{1}{2}a_2 + a_3 - \frac{1}{8}a_4 \\ b_1 = a_1 + \frac{3}{4}a_3 \\ b_2 = \frac{1}{2}a_2 + a_3 \\ b_3 = \frac{1}{4}a_3 \\ b_4 = \frac{1}{8}a_4 \end{cases}.$$

34. Să se stabilească formulele de transformare ale coordonatelor când se trece de la baza $e' = \{\overline{e}'_1,\ \overline{e}'_2,\ \overline{e}'_3,\ \overline{e}'_4\}$ la baza $e'' = \{\overline{e}''_1,\ \overline{e}''_2,\ \overline{e}''_3,\ \overline{e}''_4\}$ unde $\overline{e}'_1 = (1, 2, -1, 0)$, $\overline{e}'_2 = (1, -1, 1, 1)$, $\overline{e}'_3 = (-1, 2, 1, 1)$, $\overline{e}'_4 = (-1, -1, 0, 1)$ şi $\overline{e}''_1 = (2, 1, 0, 1)$, $\overline{e}''_2 = (0, 1, 2, 2)$, $\overline{e}''_3 = (-2, 1, 1, 2)$, $\overline{e}''_4 = (1, 3, 1, 2)$.

Soluţie:

Să notăm cu $e = \{\overline{e}_1,\ \overline{e}_2,\ \overline{e}_3,\ \overline{e}_4\}$ baza canonică în $\mathbf{R}^4$, adică $\overline{e}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\overline{e}_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\overline{e}_3 = (0, 0, 1, 0)$, $\overline{e}_4 = (0, 0, 0, 1)$. Notând cu A matricea de schimbare a bazei $e \to e'$, obţinem:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Avem aşadar $(\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, \overline{e}'_3, \overline{e}'_4) = (\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3, \overline{e}_4) \cdot A$. Dar, considerând $\overline{x} \in \mathbf{R}$ arbitrar, cu coordonatele (x^1, x^2, x^3, x^4) în baza e, (x'^1, x'^2, x'^3, x'^4) în e' şi $(x''^1, x''^2, x''^3, x''^4)$ în baza e'', utilizând o scriere matriceală, vom avea:

$$\overline{x} = (\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3, \overline{e}_4) \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = (\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, \overline{e}'_3, \overline{e}'_4) \cdot \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \\ x'^4 \end{pmatrix}.$$

Utilizând relaţia de mai sus, obţinem:

$$(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3, \overline{e}_4) \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = (\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3, \overline{e}_4) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \\ x'^4 \end{pmatrix}.$$

De aici obţinem cunoscuta relaţie existentă între coordonatele unui vector la o schimbare de bază:

$$(*)\ \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \\ x'^4 \end{pmatrix}.$$

Notând cu B matricea de schimbare a bazei $e \to e''$, obţinem:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Raţionând analog, obţinem:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} x''^1 \\ x''^2 \\ x''^3 \\ x''^4 \end{pmatrix}.$$

Mai departe, amplificând la stânga cu B^{-1}, obţinem:

$$\begin{pmatrix} x''^1 \\ x''^2 \\ x''^3 \\ x''^4 \end{pmatrix} = B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix}.$$

Ţinând cont de (*), obţinem formulele de transformare a coordonatelor atunci când se trece de la e' la e'' scrise matriceal:

$$\begin{pmatrix} x''^1 \\ x''^2 \\ x''^3 \\ x''^4 \end{pmatrix} = B^{-1} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \\ x'^4 \end{pmatrix}.$$

Avem aşadar:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Efectuând calculele, obţinem:

$$\begin{pmatrix} x''^1 \\ x''^2 \\ x''^3 \\ x''^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \\ x'^4 \end{pmatrix}.$$

35. În spaţiul aritmetic $\mathbf{R}^4$ se dă mulţimea

$$V_1 = \left\{ \bar{x} = (x^1, x^2, x^3, x^4) \in \mathbf{R}^4 \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} x^1 + x^2 - x^3 + x^4 = 0, \\ -x^1 + x^2 - x^3 + x^4 = 0. \end{array} \right. \right\}$$

a) Arătaţi că V_1 este un subspaţiu vectorial al lui $\mathbf{R}^4$;
b) Determinaţi o bază pentru V_1 şi $\dim V_1$;
c) Arătaţi că sistemul $\mathcal{B}' = \{\bar{a}_1 = (1,0,1,0), \bar{a}_2 = (1,1,0,0),$
$\{\bar{a}_3 = (0,1,1,0), \bar{a}_4 = (0,0,1,1)\}$ este o bază pentru $\mathbf{R}^4$ şi găsiţi coordonatele vectorului $\bar{x} = (1,1,-1,1)$ relativ la noua bază $\mathcal{B}'$;
d) Găsiţi un supliment algebric V_2 pentru subspaţiul V_1 .

Soluţie:

a) Fie $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ şi $\bar{x} = (x^1, x^2, x^3, x^4)$,
$\bar{y} = (y^1, y^2, y^3, y^4) \in V_1$, arbitrar fixate. Atunci:
$(\alpha x^1 + \beta y^1) + (\alpha x^2 + \beta y^2) - (\alpha x^3 + \beta y^3) + (\alpha x^4 + \beta y^4) = \alpha(x^1 + x^2 - x^3 + x^4) + \beta(y^1 + y^2 - y^3 + y^4) = \alpha 0 + \beta 0 = 0$ şi analog $\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} = (\alpha x^1 + \beta y^1, \alpha x^2 + \beta y^2, \alpha x^3 + \beta y^3, \alpha x^4 + \beta y^4)$ verifică şi a doua ecuaţie din sistemul omogen. Prin urmare $\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \in V_1$ şi astfel V_1 este subspaţiu vectorial al lui $\mathbf{R}^4$.
b) Matricea sistemului este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ şi are rangul 2}$$

şi atunci $\dim V_1 = 4 - rang A = 2$. O bază a lui V_1 este formată cu două soluţii particulare ale sistemului omogen, care să fie liniar independente.
Notând $x^3 = \alpha$ şi $x^4 = \beta$ obţinem,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^1 + x^2 & = & \alpha - \beta \\ -x^1 + x^2 & = & \alpha - \beta \end{array} \right.$$

şi de aici soluţia generală $\bar{x} = (0, \alpha - \beta, \alpha, \beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ sau $\bar{x} = \alpha(0,1,1,0) + \beta(0,-1,0,1)$.
Dacă notăm $\bar{b}_1 = (0,1,1,0)$ şi $\bar{b}_2 = (0,-1,0,1)$ rezultă $V_1 = L(\bar{b}_1, \bar{b}_2)$. Deoarece $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2\}$ este sistem liniar independent (vezi $rang \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$) rezultă că $\mathcal{B}_1 = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2\}$ este bază pentru V_1.
c) Rangul matricei A_1 pe ale cărei coloane avem coordonatele vectorilor din $\mathcal{B}'$, în raport cu baza canonică $\mathcal{B} = \{\bar{e}_i | i = \overline{1,4}\}$ a lui $\mathbf{R}^4$,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

este 4. Prin urmare $\mathcal{B}'$ este sistem liniar independent în spaţiul 4-dimensional $\mathbf{R}^4$şi astfel este bază pentru $\mathbf{R}^4$.
Coloana cu coordonatele lui $\bar{x} = (1, 1-1, 1)$ relativ la baza $\mathcal{B}'$se găseşte din relaţia $\tilde{x}_{\mathcal{B}'} = A_1^{-1}\tilde{x}_{\mathcal{B}}$, A_1 fiind matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}'$. Inversa matricei A_1 este

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şi astfel $\tilde{x}_{\mathcal{B}'} = A_1^{-1}(1,1,-1,1)^t = (-1,2,-1,1)^t$ sau $\bar{x} = -\bar{a}_1 + 2\bar{a}_2 - \bar{a}_3 + \bar{a}_4$.
d) Completăm baza lui V_1, $\mathcal{B}_1 = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2\}$, până la o bază a lui $\mathbf{R}^4$ cu vectorii $\bar{b}_3 = (1,1,1,0), \bar{b}_4 = (0,0,0,1)$. Într-adevăr, rangul matricei

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

este 4 şi astfel $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3, \bar{b}_4\}$ este bază.
Considerăm subspaţiul vectorial generat de $\bar{b}_3$ şi $\bar{b}_4$, $V_2 = L(\bar{b}_3, \bar{b}_4)$. Atunci $\dim V_1 + \dim V_2 = 2 + 2 = 4 = \dim \mathbf{R}^4$.
Cum $\mathbf{R}^4 = L(\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3, \bar{b}_4)$ rezultă că pentru orice vector $\bar{x}$ din $\mathbf{R}^4$, există scalarii reali α^i, $(i = \overline{1,4})$, astfel încât $\bar{x} = \alpha^1\bar{b}_1 + \alpha^2\bar{b}_2 + \alpha^3\bar{b}_3 + \alpha^4\bar{b}_4$ şi prin urmare orice vector $\bar{x}$ se poate scrie $\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$ cu $\bar{x}_1 = \alpha^1\bar{b}_1 + \alpha^2\bar{b}_2 \in V_1$ şi $\bar{x}_2 = \alpha^3\bar{b}_3 + \alpha^4\bar{b}_4 \in V_2$. Deci $\mathbf{R}^4 = V_1 + V_2$. Din aceasta relaţie şi din faptul că $\dim V_1 + \dim V_2 = \dim \mathbf{R}^4$ rezultă că $V_1 \oplus V_2 = \mathbf{R}^4$.
Prin urmare V_2 este un supliment algebric al lui V_1.

36. În spaţiul aritmetic $\mathbf{R}^4$ se dau subspaţiile vectoriale

$$V_1 = \left\{ \bar{x} = (x^1, x^2, x^3, x^4) \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} 2x^1 + x^2 + 3x^3 - x^4 = 0 \\ 3x^1 + 2x^2 \quad\;\; - 2x^4 = 0 \\ 3x^1 + x^2 + 9x^3 - x^4 = 0 \end{array} \right. \right\}$$

$$V_2 = \left\{ \bar{x} = (x^1, x^2, x^3, x^4) \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} 6x^1 - 9x^2 - x^3 \quad = 0 \\ \quad\;\; x^2 \quad + \; x^4 = 0 \end{array} \right. \right\}$$

a) Arătaţi că $V_1 \oplus V_2 = \mathbf{R}^4$;
b) Determinaţi proiecţia vectorului $\bar{x} = (1, -1, 1, 0)$ pe subspaţiul V_1 de-a lungul subspaţiului V_2.

Soluţie:

a) Matricea primului sistem liniar omogen,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 9 & -1 \end{pmatrix}$$

are rangul 2 şi soluţia sa este de forma $\bar{x} = (3\alpha, -9\alpha + \beta, \alpha, \beta)$, $(\alpha, \beta \in \mathbf{R})$ sau $\bar{x} = \alpha\bar{a}_1 + \beta\bar{a}_2$, unde $\bar{a}_1 = (3, -9, 1, 0)$ şi $\bar{a}_2 = (0, 1, 0, 1)$ sunt două soluţii liniar independente. Deci $V_1 = L(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ şi $\dim V_1 = 2$ cu $\mathcal{B}_1 = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2\}$ bază.
Matricea celui de-al doilea sistem liniar omogen,

$$A_2 = \begin{pmatrix} 6 & -9 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

are rangul 2 şi soluţia sa este de forma $\bar{x} = (\frac{1}{6}\alpha - \frac{3}{2}, -\beta, \alpha, \beta)$, $(\alpha, \beta \in \mathbf{R})$ sau $\bar{x} = \frac{1}{6}\alpha\bar{a}_3 + \frac{1}{2}\beta\bar{a}_4$, unde $\bar{a}_3 = (1, 0, 6, 0)$ şi $\bar{a}_4 = (-3, -2, 0, 2)$ sunt două soluţii liniar independente. Deci $V_2 = L(\bar{a}_3, \bar{a}_4)$ şi $\dim V_2 = 2$ cu $\mathcal{B}_2 = \{\bar{a}_3, \bar{a}_4\}$ bază.
Deoarece rangul matricei

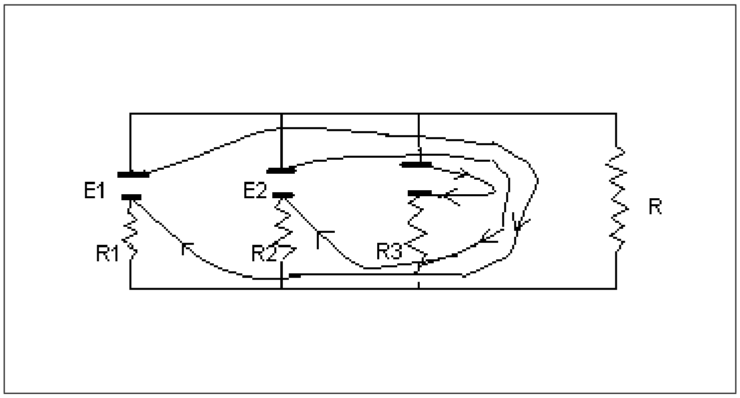
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -3 \\ -9 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

este 4 rezultă că $\mathcal{B}' = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4\}$ este o bază a lui $\mathbf{R}^4$. Astfel, $\mathbf{R}^4 = V_1 + V_2$. Se mai poate arăta că $V_1 \cap V_2 = \{\bar{0}\}$. Într-adevăr, dacă $\bar{x} = \alpha^1\bar{a}_1 + \alpha^2\bar{a}_2 = \alpha^3\bar{a}_3 + \alpha^4\bar{a}_4 \in V_1 \cap V_2$, atunci avem $\alpha^1\bar{a}_1 + \alpha^2\bar{a}_2 - \alpha^3\bar{a}_3 - \alpha^4\bar{a}_4 = \bar{0}$ şi de aici obţinem $\alpha^1 = \alpha^2 = \alpha^3 = \alpha^4 = 0$ sau $\bar{x} = \bar{0}$.
Deci $V_1 \oplus V_2 = \mathbf{R}^4$.
b) Conform punctului a), avem scrierea unică: $\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$ cu $\bar{x}_1 \in V_1$ şi $\bar{x}_2 \in V_2$.
Proiecţia lui $\bar{x} = (1, -1, 1, 0)$ pe V_1 de-a lungul lui V_2 este $\bar{x}_1 = \alpha^1\bar{a}_1 + \alpha^2\bar{a}_2$. Pentru a găsi pe $\bar{x}_1$, luăm $\bar{x}_2 = \alpha^3\bar{a}_3 + \alpha^4\bar{a}_4$ şi determinăm scalarii α^i, $i = \overline{1,4}$ din relaţia
$(1, -1, 1, 0) = \alpha^1(3, -9, 1, 0) + \alpha^2(0, 1, 0, 1) +$
$+\alpha^3(1, 0, 6, 0) + \alpha^4(-3, -2, 0, 2)$
sau $(1, -1, 1, 0) = \big(3\alpha^1 + \alpha^3 - 3\alpha^4, -9\alpha^1 + \alpha^2 - 2\alpha^4,$
$\alpha^1 + 6\alpha^3, \alpha^2 + 2\alpha^4\big)$
Rezolvăm sistemul liniar

$$\begin{cases} 3\alpha^1 + \alpha^3 - 3\alpha^4 &= 1 \\ -9\alpha^1 + \alpha^2 - 2\alpha^4 &= -1 \\ \alpha^1 + 6\alpha^3 &= 1 \\ \alpha^2 + 2\alpha^4 &= 0 \end{cases}$$

şi obţinem $\alpha^1 = \frac{19}{115}$, $\alpha^2 = \frac{28}{115}$, $\alpha^3 = \frac{16}{115}$, $\alpha^4 = -\frac{14}{115}$, de unde $\bar{x}_1 = \frac{19}{115}\bar{a}_1 + \frac{28}{115}\bar{a}_2 = \frac{1}{115}(57, -143, 19, 28)$.

37. Fie circuitul din schemă:



Datele problemei sunt: tensiunile E_i şi rezistenţele R_i şi R $(i = 1, 2, 3)$. Se cere curentul prin rezistenţa R.

Soluţie:

Vom considera circuitele independente b_i şi după legea a II-a a lui Kirchoff rezultă relaţiile:

$$R_1 I_1 + R\left(\sum_{k=1}^{3} I_k\right) = E_1$$

$$R_2 I_2 + R\left(\sum_{k=1}^{3} I_k\right) = E_2$$

$$R_3 I_3 + R\left(\sum_{k=1}^{3} I_k\right) = E_3$$

Dacă notăm $x = \sum\limits_{k=1}^{3} I_k$, găsim modelul matematic al problemei:

$$\begin{cases} Rx + R_1 I_1 & = E_1 \\ Rx + R_2 I_2 & = E_2 \\ Rx + R_3 I_3 & = E_3 \end{cases}.$$

Acesta este un sistem cramerian

$$\begin{cases} (R+R_1)I_1 & + & RI_2 & + & RI_3 & = & E_1 \\ RI_1 & + & (R+R_2)I_2 & + & RI_3 & = & E_2 \\ RI_1 & + & RI_2 & + & (R+R_3)I_3 & = & E_3 \end{cases}$$

cu determinantul
$\Delta = R(R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1) + R_1R_2R_3 > 0\,.$
De aici se obţine

$$x = \sum_{k=1}^{3} I_k = \frac{E_1R_2R_3 + E_2R_3R_1 + E_3R_1R_2}{R(R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1) + R_1R_2R_3}\,.$$

1.2 Probleme propuse spre rezolvare

1. Fie mulţimea $V = \{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{5} | a,b,c,d \in \mathbf{Q}\}$. Arătaţi că pe V se poate introduce o structură de spaţiu vectorial peste corpul numerelor raţionale $\mathbf{Q}$, în raport cu adunarea numerelor reale şi în raport cu înmulţirea cu numere raţionale a numerelor reale. Cât este $\dim_{\mathbf{Q}} V$? Dar $\dim_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}$?

2. Fie $V = (0, \infty)$. Dacă definim legea de compoziţie internă "$\otimes$" pe V, $x \oplus y \stackrel{def}{=} xy$ şi legea de compoziţie externă "$\odot$" pe V, cu scalari din $\mathbf{R}$ (sau $\mathbf{Q}$), $\alpha \odot x \stackrel{def}{=} x^\alpha$, atunci arătaţi că $(V, \oplus, \odot)$ este un spaţiu vectorial peste $\mathbf{R}$ (sau $\mathbf{Q}$). Cât este $\dim_{\mathbf{Q}} V$? Dar $\dim_{\mathbf{R}} V$?

3. In spaţiul vectorial real aritmetic $\mathbf{R}^3$ se dau vectorii $\overline{a} = (-4, 9, 7)$, $\overline{b} = (1, \alpha, 5)$, $\overline{c} = (2, -1, \beta)$.

   a) Pentru ce perechi de numere reale (α, β) sistemul $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$ formează o bază a lui $\mathbf{R}^3$?

   b) Pentru ce perechi de numere reale (α, β) subspaţiul generat de $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ are dimensiunea 2?

4. Fie V un spaţiu vectorial peste corpul comutativ K şi $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ trei vectori liniari independenţi. Studiaţi liniar independenţa vectorilor $\overline{u} + \overline{v}$, $\overline{v} + \overline{w}$, $\overline{w} + \overline{u}$ în cazul în care corpul K este a) $\mathbf{R}$; b) $\mathbf{C}$; c) $\{0, 1\}$.

5. Fie $\mathcal{M}_{s;n}(\mathbf{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) | A = A^t\}$ mulţimea matricilor simetrice de ordinul n şi $\mathcal{M}_{as;n}(\mathbf{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) | A = -A^t\}$ mulţimea matricilor antisimetrice de ordinul n.

   a) Arătaţi că $\mathcal{M}_{s;n}(\mathbf{R})$, $\mathcal{M}_{as;n}(\mathbf{R})$ sunt subspaţii vectoriale ale lui $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

   b) Arătaţi că $\dim \mathcal{M}_{s;n}(\mathbf{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$, $\mathcal{M}_{as;n}(\mathbf{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$.

   c) Este adevărat că $\mathcal{M}_{s;n}(\mathbf{R}) \oplus \mathcal{M}_{as;n}(\mathbf{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$?

   d) Determinaţi proiecţia matricei $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ pe $\mathcal{M}_{s;2}(\mathbf{R})$ de-a lungul lui $\mathcal{M}_{as;2}(\mathbf{R})$.

6. Fie V un spaţiu vectorial real de dimensiune $n \geq 3$ şi $\mathcal{B} = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_n\}$ o bază pentru V. Se consideră vectorii

   $$\overline{v}_1 = \overline{u}_1, \overline{v}_2 = \overline{u}_2, \overline{v}_k = \overline{u}_k + \lambda_k \overline{u}_1 + \mu_k \overline{u}_2, \ \mathbf{pentru} k = 3, ..., n,$$

   unde coeficienţii reali λ_k, μ_k $(k = 3, ..., n)$ sunt fixaţi arbitrar, în prealabil.

   Arătaţi că sistemul de vectori $\mathcal{B}' = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, ..., \overline{v}_n\}$ formează o bază pentru V.

   Scrieţi matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}'$.

7. Fie a, b, a', b' numere reale astfel încât rangul matricii $\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$ este 2. Dacă se consideră subspaţiile vectoriale ale lui $\mathbf{R}^2$, $V_1 = \{(x^1, x^2) | ax^1 + bx^2 = 0\}$ şi $V_2 = \{(x^1, x^2) | a'x^1 + b'x^2 = 0\}$ să se arate că $V_1 \oplus V_2 = \mathbf{R}^2$. Ce se poate spune despre submulţimile lui $\mathbf{R}^2$, $W_1 = \{(x^1, x^2) | ax^1 + bx^2 = 1\}$, $W_2 = \{(x^1, x^2) | a'x^1 + b'x^2 = 1\}$?

8. Fie sistemul omogen de ecuaţii liniare

   $$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x^1 & + & x^2 & - & x^3 & & & = & 0 \\ x^1 & - & x^2 & + & x^3 & + & 2x^4 & = & 0 \\ x^1 & & & & & + & x^4 & = & 0 \end{array} \right. . \qquad (*)$$

Dacă V este mulţimea soluţiilor (x^1, x^2, x^3, x^4) pentru sistemul (*), atunci:

a) Arătaţi că V este un subspaţiu vectorial al lui $\mathbf{R}^4$.

b) Determinaţi o bază a lui V şi $\dim V$.

c) Găsiţi un supliment algebric W pentru V.

d) Determinaţi proiecţia vectorului $\overline{x} = (1, 2, 2, 3)$ pe V de-a lungul lui W, găsit la c).

9. Ce condiţii trebuie să satisfacă numerele reale a, b, c pentru ca vectorii $\overline{x} = (1, a, a^2)$, $\overline{y} = (1, b, b^2)$, $\overline{z} = (1, c, c^2)$ să formeze o bază pentru $\mathbf{R}^3$?

   Dacă $a = -1$, $b = 0$, $c = 1$ să se scrie vectorul $\overline{u} = (1, 7, 2)$ ca o combinaţie liniară de vectorii $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$.

10. Fie $M = \left\{ A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & 0 \\ 0 & x+y \end{pmatrix} | x, y, z \in \mathbf{R} \right\}$. Să se arate că M este un subspaţiu vectorial al lui $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbf{R})$. Găsiţi o bază pentru M şi $\dim M$, precum şi coordonatele matricei
   $U = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ relativ la baza găsită.

11. Fie $n \in \mathbf{N}^*$ şi $\mathbf{R}_n[X]$ spaţiul vectorial real $(n+1)$-dimensional al polinoamelor de grad cel mult n cu coeficienţi reali, în nedeterminata X.

   a) Arătaţi că $\mathcal{B} = \{1, (1 + X), (2 + X)^2, ..., (n + X)^n\}$ este o bază pentru $\mathbf{R}_n[X]$.

   b) Pentru $n = 3$, determinaţi matricea de trecere de la baza canonică $\mathcal{B}_c = \{1, X, X^2, ..., X^n\}$ la baza $\mathcal{B}$.

   c) Pentru $n = 3$, determinaţi coordonatele polinomului $Q = X^3 + 1$ relativ la baza $\mathcal{B}$.

Capitolul 2

Aplicaţii liniare

Definiţia 2.1. Fie V, W două spaţii vectoriale peste corpul comutativ K. Spunem că funcţia $f : V \to W$ este un morfism de spaţii vectoriale (sau operator liniar sau aplicaţie liniară) dacă sunt îndeplinite următoarele condiţii:

a) $f(\bar{x} + \bar{y}) = f(\bar{x}) + f(\bar{y})$, pentru orice $\bar{x}$, $\bar{y}$ din V;

b) $f(\alpha\bar{x}) = \alpha f(\bar{x})$, pentru orice $\bar{x} \in V$, $\alpha \in K$.

Condiţiile a), b) sunt echivalente cu condiţia:

c) $f(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) = \alpha f(\bar{x}) + \beta f(\bar{y})$, pentru orice $\bar{x}$, $\bar{y} \in V$, α, $\beta \in K$.

Dacă morfismul f aplică spaţiul V pe întreg spaţiul W (adică este aplicaţie surjectivă), atunci f este epimorfism. Dacă morfismul f este aplicaţie injectivă ($\bar{x} \neq \bar{y}$ implică $f(\bar{x}) \neq f(\bar{y})$), atunci el se numeşte monomorfism. Dacă morfismul f stabileşte o corespondenţă biunivocă între spaţiile V şi W, adică este simultan monomorfism şi epimorfism, atunci f se numeşte izomorfism, iar spaţiile V şi W se numesc izomorfe (sau mai exact K-izomorfe). Un morfism $f : V \to V$ se numeşte endomorfism al spaţiului vectorial V, iar un izomorfism $f : V \to V$ se numeşte automorfism al spaţiului vectorial V.

Dacă $f : V \to W$ este un morfism de spaţii vectoriale, atunci:

$f(\alpha^1\bar{x}_1 + \cdots + \alpha^k\bar{x}_k) = \alpha^1 f(\bar{x}_1) + \cdots + \alpha_k f(\bar{x}_k)$, pentru orice $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_k \in V$ şi pentru orice $\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^k \in K$, $k \in \mathbf{N}^*$.

Fie n dimensiunea spaţiului V şi m dimensiunea spaţiului W. Fixăm o bază $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\}$ a lui V şi o bază $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots, \bar{f}_m\}$ a lui W. Atunci operatorului liniar f i se asociază o $m \times n$-matrice $A = \left(a_i^j\right)$, $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$, unde

$$f(\bar{e}_i) = \sum_{j=1}^{m} a_i^j \bar{f}_j \,;\; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Această matrice, pe ale cărei coloane avem coordonatele, relativ la baza fixată în W, ale imaginilor prin f ale vectorilor bazei din V, se numeşte matricea aplicaţiei liniare f relativ la cele două baze fixate.

Imaginea operatorului liniar f este subspaţiul lui W, $Im\ f = \{f(\bar{x}) | \bar{x} \in V\}$. Nucleul lui f este subspaţiul lui V, $Ker\ f = \{\bar{x} \in V | f(\bar{x}) = \overline{0}\}$. Dacă $\dim V < \infty$, atunci

$$\dim Im\ f + \dim Ker\ f = \dim V.$$

Definiţie 2.2. Fie V un spaţiu vectorial peste K. Endomorfismul $f : V \to V$ se numeşte:

1) proiecţie dacă $f \circ f = f$;

2) involuţie sau structură produs dacă $f \circ f = 1_V$, unde 1_V este morfismul identitate;

3) structură complexă dacă $f \circ f = -1_V$;

4) endomorfism nilpotent de indice p dacă $f^p = \theta_V$, unde $p = 2, 3, \ldots$, $f^p = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (de p ori), iar θ_V este morfismul nul. Un endomorfism nilpotent de indice 2 şi de rang maxim posibil se mai numeşte structură tangentă.

Operatorul invers.

Un endomorfism f al spaţiului V se numeşte invers la stânga al unui endomorfism g al lui V dacă $fg = 1_V$. În acest caz, operatorul g se numeşte invers la dreapta pentru operatorul f.

Definiţia 2.3. Un subspaţiu V' al lui V îl vom numi invariant relativ la operatorul f (sau f-invariant) dacă din faptul că $\bar{x} \in V'$, rezultă $f\bar{x} \in V'$.

Un vector $\bar{x} \neq \overline{0}$ se numeşte vector propriu al endomorfismului $f : V \to V$ dacă există $\lambda \in K$,

$$f(\bar{x}) = \lambda\bar{x}\,.$$

Scalarul λ care figurează în această egalitate se numeşte valoare proprie pentru f, corespunzătoare vectorului propriu $\bar{x}$.

Subspaţiul $V_\lambda = \{\bar{x} \in V | f(\bar{x}) = \lambda\overline{x}\}$, care este invariant relativ la f, se numeşte subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii λ.

Propoziţia 2.1. Orice vectori proprii $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m$ ai unui endomorfism f care corespund la valori proprii distincte două câte două $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ sunt liniar independenţi.

Definiţia 2.4. Un endomorfism f al spaţiului vectorial n-dimensional V se numeşte diagonalizabil dacă există o bază a lui V relativ la care matricea lui f este diagonală, adică de forma:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Practic, pentru diagonalizarea unui endomorfism $f : V \to V$ procedăm în felul următor:

1) Fixăm o bază $\mathcal{B} = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n\}$ în V şi determinăm matricea $A = \left(a^i_j\right)$ a lui f relativ la această bază;

2) Aflăm valorile proprii care sunt rădăcinile din K ale ecuaţiei caracteristice $P_f\,(\lambda) = 0$, unde $P_f(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$.

3) Pentru fiecare dintre valorile proprii distincte $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ $(p \leq n)$ cu ordinele de multiplicitate $m_1, m_2, ..., m_p$, se rezolvă sistemul omogen $(A - \lambda_j 1_V)\,\widetilde{x}_{\mathcal{B}} = \widetilde{0}$, $j = 1, 2, ..., p$. Un sistem fundamental de soluţii pentru un asemenea sistem omogen reprezintă o bază pentru subspaţiul propriu asociat valorii proprii λ_j ($j = 1, 2, ..., p$).

4) Dacă $m_1 + m_2 + \cdots + m_p = n$ şi pentru fiecare $j = 1, 2, ..., p$, $m_j = \dim V_{\lambda_j}$, atunci f este diagonalizabil.

5) Matricea lui f, în raport cu baza formată prin reunirea bazelor subspaţiilor proprii V_{λ_1}, ..., V_{λ_p}, are pe diagonala principală elementele $\lambda_1, ..., \lambda_1; ...; \lambda_p, ..., \lambda_p$,adică valorile proprii.

Definiţia 2.5. Spunem că endomorfismul $f : V \to V$ este adus la forma Jordan dacă există o bază în V faţă de care matricea

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & J_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & J_s \end{pmatrix}$$

să reprezinte pe f, unde $J_1, J_2, ..., J_s$ sunt celule Jordan ataşate vectorilor proprii λ_i, $i = 1, 2, ..., s$ ale endomorfismului f.

Teorema Jordan. Fie V un spaţiu vectorial n -dimensional peste câmpul K (**R** sau **C**). Dacă endomorfismul $f : V \to V$ are valori proprii (în K) şi dacă suma multiplicităţilor acestor valori proprii este n, atunci există o bază în V faţă de care matricea lui f are forma Jordan.

Pentru a găsi baza Jordan este necesar să se urmărească problemele următoare:

1) Fixarea unei baze în V şi explicitarea matricei A ataşată endomorfismului $f : V \to V$.

2) Determinarea valorilor proprii distincte λ_j, $j = 1, 2, ..., n$, respectiv multiple de ordinul m_j, $j = 1, 2, ..., p$ prin rezolvarea ecuaţiei caracteristice; pentru continuare este suficient ca $\sum\limits_{j=1}^{p} m_j = n$.

3) Găsirea vectorilor proprii liniar independenţi corespunzători fiecărei valori proprii.

4) Calcularea numărului de celule Jordan

$$\dim V_{\lambda_j} = \dim V - rang\,(A - \lambda_j 1_V) = n - r_j.$$

5) Rezolvarea sistemului

$$(A - \lambda_j 1_V)^{m_j}\, \widetilde{x}_{\mathcal{B}} = \widetilde{0},$$

pentru fiecare $j = 1, 2, ..., p$. Pentru j fixat, soluţiile nenule generează subspaţiul V_{λ_j}.

În cazul matricilor de ordin relativ mic, putem ocoli unele din etapele precedente ţinând seama de observaţia că la o celulă Jordan corespunde un singur vector propriu. Pentru găsirea vectorilor din bază corespunzători celulei de ordinul p, ataşată valorii proprii λ_j, se determină soluţia generală pentru $f(\bar{e}_j) = \lambda_j \bar{e}_j$, apoi se impun condiţii de compatibilitate şi se determină soluţii pentru

$$f(\bar{e}_2) = \bar{e}_1 + \lambda_j \bar{e}_2, \ldots, \ f(\bar{e}_p) = \bar{e}_{p-1} + \lambda_j \bar{e}_p \,.$$

Dacă notăm prin C matricea care are pe coloane coordonatele vectorilor din baza Jordan, atunci

$$J = C^{-1}AC.$$

2.1 Probleme rezolvate

1. Se consideră funcţiile $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definite prin:

   a) $T(\overline{x}) = (x_1, x_2, x_3)$ cu $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$;

   b) $T(\overline{x}) = (x_3, x_1, x_2 + h)$ cu $h \in \mathbf{R}, h \neq 0$;

   c) $T(\overline{x}) = (x_1 + 2x_2 - 3x_3, 3x_1 - x_2 + 3x_3, 2x_1 + 3x_2 + 2x_3)$.

   Să se precizeze dacă sunt sau nu transformări liniare.

   Soluţie:

   Funcţia $\mathcal{A} : V \to W$ ($V, W-$ spaţii vectoriale peste câmpul K) este o transformare liniară (operator liniar) dacă şi numai dacă :

   $\mathcal{A}(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) = \alpha\mathcal{A}(\bar{x}) + \beta\mathcal{A}(\bar{y}), (\forall)\alpha, \beta \in K$ şi $(\forall)\overline{x}, \overline{y} \in V$.

   a) Fie $\overline{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3$ şi $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Are loc:

   $\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} = \alpha(x_1, x_2, x_3) + \beta(y_1, y_2, y_3) =$

   $(\alpha x_1 + \beta y_2, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3)$

   $T(\alpha\overline{x} + \beta\overline{y}) = T(\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3) =$

   $(\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, (\alpha x_3 + \beta y_3)^2) \neq (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3^2) +$

   $(\beta y_1, \beta y_2, \beta y_3^2) = \alpha T(\overline{x}) + \beta T(\overline{y}) \Rightarrow T$ nu este operator liniar.

   b) Considerăm $\overline{x}$ şi $\overline{y} \in \mathbf{R}^3$ ca în cazul a).

$T(\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3) =$

$(\alpha x_3 + \beta y_3, \alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2 + h) \neq$

$\neq (\alpha x_3, \alpha x_1, \alpha(x_2+h)) + (\beta y_3, \beta y_1, \beta(y_3+h)) = \alpha T(\bar{x}) + \beta T(\bar{y})$ deci T nu este operator liniar.

c) $T(\alpha\overline{x} + \beta\overline{y}) = T(\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3) =$

$((\alpha x_1 + \beta y_1) + 2(\alpha x_2 + \beta y_2) - 3(\alpha x_3 + \beta y_3), 3(\alpha x_1 + \beta y_1) -$

$(\alpha x_2 + \beta y_2) + 3(\alpha x_3 + \beta y_3), 2(\alpha x_1 + \beta y_1) + 3(\alpha x_2 + \beta y_2)$

$+2(\alpha x_3 + \beta y_3)) = (\alpha x_1 + 2\alpha x_2 - 3\alpha x_3, 3\alpha x_1 - \alpha x_2 + 3\alpha x_3,$

$2\alpha x_1 + 3\alpha x_2 + 2\alpha x_3) + (\beta y_1 + 2\beta y_2 - 3\beta y_3, 3\beta y_1 - \beta y_2 +$

$3\beta y_3, 2\beta y_1 + 3\beta y_2 + 2\beta y_3) = \alpha T(\overline{x}) + \beta T(\overline{y}) \Rightarrow T$ este o transformare liniară.

2. Să se determine rangul şi defectul transformării liniare $\mathcal{A} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, definită prin $\mathcal{A}(\overline{x}) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1, x_2, x_3)$, unde $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$, explicitând câte o bază în $Ker\,\mathcal{A}$ şi în $Im\,\mathcal{A}$.

Observaţie:

1. $\begin{cases} Ker\,\mathcal{A} = \left\{\bar{x} \in \mathbf{R}^3 \mid \mathcal{A}(\bar{x}) = \bar{0}\right\} \\ Im\,\mathcal{A} = \left\{\bar{y} \in \mathbf{R}^3 \mid \mathcal{A}(\bar{x}) = \bar{y}, \bar{x} \in \mathbf{R}^3\right\} \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dim\ (Ker\,\mathcal{A}) = \text{defectul operatorului } \mathcal{A} \\ \dim Im\,\mathcal{A} = \text{rangul operatorului } \mathcal{A} \end{cases}$

Soluţie:

Din egalitatea $\mathcal{A}(\overline{x}) = \bar{0}$ se obţine : $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, un sistem care se reduce la ecuaţia $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, ceea ce arată că sistemul este dublu nedeterminat şi are soluţia $(-x_2 - x_3, x_2, x_3)$, x_2, $x_3 \in \mathbf{R}$.

Aşadar, orice vector $\overline{x} \in Ker\ \mathcal{A}$ are forma:
$\overline{x} = (-x_2 - x_3, x_2, x_3) = x_2(-1, 1, 0) + x_3(-1, 0, 1)$, unde vectorii $\overline{e}_1 = (-1, 1, 0)$ şi $\overline{e}_2 = (-1, 0, 1)$ sunt liniar independenţi, deci $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ este o bază a lui $Ker\mathcal{A}$ şi în concluzie $\dim(Ker\mathcal{A}) = 2 =$ defectul lui $\mathcal{A}$.

Având în vedere definiţia subspaţiului $Im\ \mathcal{A}$ şi definiţia lui $\mathcal{A}$, concluzionăm că orice vector din $Im\ \mathcal{A}$ are toate coordonatele egale, deci oricare doi vectori din acest subspaţiu sunt liniar dependenţi, mai mult, orice vector din $Im\ \mathcal{A}$ se poate exprima în funcţie de vectorul $\overline{f} = (1, 1, 1)$, de unde rezultă că o bază în $Im\ \mathcal{A}$ este formată din acest vector $\overline{f}$ şi atunci dim$(Im\ \mathcal{A}) = 1$ =rangul lui $\mathcal{A}$.

3. Să se cerceteze care din funcţiile de mai jos sunt operatori liniari şi în acest caz să se determine defectul şi rangul lor.

   a) $\mathcal{A}(\overline{x}) = (x_1 + x_2, 0, x_2 + x_3, 0, x_1 + x_3)$,
   $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$; $(\mathcal{A} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^5)$

   b) $\mathcal{A}(\bar{x}) = (x_2, x_1, x_2 + x_3)$, $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$;

   c) $\mathcal{A}(\bar{x}) = (x_1 + x_3, 0, x_1 + x_2)$, $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$.

   Soluţie:

   a) Trebuie demonstrat că $\mathcal{A}$ este un operator liniar.

   Fie $\overline{y} = (y_1, y_2, y_3)$ şi $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

   $\alpha\overline{x} + \beta\overline{y} = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3)$

   $\mathcal{A}(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) = (\alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha x_2 + \beta y_2, 0, \alpha x_2 + \beta y_2 + \alpha x_3 + \beta y_3, 0, x_1 + \beta y_1 + \alpha x_3 + \beta y_3) = (\alpha(x_1 + x_2), 0, \alpha(x_2 + x_3), 0, \alpha(x_1 + x_3)) + (\beta(y_1 + y_2), 0, \beta(y_2 + y_3), 0, \beta(y_1 + y_3)) = \alpha\mathcal{A}(\bar{x}) + \beta\mathcal{A}(\bar{y})$, adică ceea ce trebuia demonstrat.

   $\mathcal{A}(\bar{x}) = \overline{0} \Leftrightarrow (x_1 + x_2, 0, x_2 + x_3, 0, x_1 + x_3) = (0, 0, 0, 0)$, ceea ce este echivalent cu $x_1 + x_2 = 0$, $x_2 + x_3 = 0$, $x_1 + x_3 = 0$, sistem care are doar soluţia trivială. Rezultă $\ker \mathcal{A} = \{\bar{0}\}$ şi deci $\dim \ker \mathcal{A} = 0 =$ defect $\mathcal{A}$.
   Se observă că
   $\mathcal{A}(\bar{x}) = x_1(1, 0, 0, 0, 1) + x_2(1, 0, 1, 0, 0) + x_3(0, 0, 1, 0, 1)$.
   Notăm $\bar{f}_1 = (1, 0, 0, 0, 1)$, $\bar{f}_2 = (1, 0, 1, 0, 0)$, $\bar{f}_3 = (0, 0, 1, 0, 1)$.
   Vectorii $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3\}$ sunt liniari independenţi în $\mathbf{R}^5$ şi deci $Im\,\mathcal{A}$ are dimensiunea 3 (rangul lui $\mathcal{A}$).

   În mod analog se rezolvă exemplele de la b) şi c).

4. În $\mathbf{R}^3$ se dă $\overline{x} = (2, 0, -1)$ şi sistemul de vectori $B' = \left\{\bar{e}_1', \bar{e}_2', \bar{e}_3'\right\}$, unde $\bar{e}_1' = (2, -1, 0), \bar{e}_2' = (0, 1, 3), \bar{e}_3' = (0, 0, -2)$.

   a) Să se arate că B'este o bază negativ orientată faţă de baza naturală B.

   b) Dacă în baza B'se dă vectorul $\overline{y} = (2, 0, -1)$ (care este diferit de $\bar{x}$ din baza B), să se determine coordonatele vectorului $\overline{z} = -\overline{x} + 2\overline{y}$ în B şi B'.

   c) Fie operatorul $\mathcal{A} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$, dat în bazele naturale ale celor două spaţii prin:

$$\mathcal{A}(x) = (x_1 + 2x_2, -x_2 + x_3, 2x_1 - x_2, 3x_1 + x_3).$$

   c_1) Să se determine matricea operatorului $\mathcal{A}$ în perechea de baze B'şi G', unde $G' = \left\{\overline{g}_1', \overline{g}_2', \overline{g}_3', \overline{g}_4'\right\}$, cu $\overline{g}_1' = (1, -1, 0, 1)$, $\overline{g}_2' = (2, 0, 1, 0)$, $\overline{g}_3' = (-3, 1, 0, 0)$, $\overline{g}_4' = (2, 0, 0, 0)$.

   c_2) Să se verifice invarianţa rangului operatorului $\mathcal{A}$.

   c_3) Să se determine $\mathcal{A}(\bar{z})$ în bazele (B, G) şi (B', G') făcându-se proba.

   c_4) Să se determine $(s \cdot \mathcal{A})(\bar{y})$, unde $s : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$, este dat prin matricea

$$A_s = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

   în bazele naturale (B, G).

   c_5) Să se cerceteze dacă operatorul $(s \cdot \mathcal{A})(\bar{y}) : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ este automorfism.

   Soluţie:

   a) Matricea de trecere de la B la B' este A.

   Atunci ${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $\det({}^tA) = -4$ deci rangul sistemului B'este 3 şi după teorema bazei rezultă că B' este o nouă bază în $\mathbf{R}^3$. B' este negativ orientată faţă de B, deoarece determinantul matricii de trecere este negativ $(= -4)$.

b) Folosind matricea de trecere de la B la B' obţinem $\bar{y}_B = {}^t A \cdot \bar{y}_{B'}$ şi respectiv $\bar{x}_{B'} = ({}^t A)^{-1} \bar{x}_B$.

Se obţine $\overline{y}_B = (4, -2, 2)$ şi respectiv $\overline{x}_{B'} = (1, 1, 2)$

Astfel $\overline{z}_B = -\overline{x}_B + 2\overline{y}_B$ şi $\overline{z}_{B'} = -\overline{x}_{B'} + 2\overline{y}_{B'}$.

Deci $\overline{z}_B = -(2, 0, -1) + 2(4, -2, 2)$; $\overline{z}_B = (6, -4, 5)$, iar $\overline{z}_{B'} = -(1, 1, 2) + 2(2, 0, -1)$; $\overline{z}_{B'} = (3, -1, -4)$.

c_1) Are loc următoarea diagramă (comutativă):

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3(B) & \xrightarrow{{}^t A} & B' \\ C \downarrow & & \downarrow A' \\ \mathbf{R}^4(B) & \overrightarrow{D} & G' \end{array}$$

unde $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, iar C se obţine astfel

$\mathcal{A}(\bar{e}_1) = (1, 0, 2, 3)$, $\mathcal{A}(\bar{e}_2) = (2, -1, -1, 0)$, $\mathcal{A}(\bar{e}_3) = (0, 1, 0, 1)$,

$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Aşadar $A' \circ {}^t A = D \circ C \Leftrightarrow A' = D \circ C \circ ({}^t A)^{-1}$,

unde $\left({}^t A\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 3/4 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

Se obţine $A' = \begin{pmatrix} -6 & -3 & 2 \\ -5 & 1 & 0 \\ -7 & -5 & 4 \\ -5/2 & -8 & 5 \end{pmatrix}$

c_2) Se observă că $rang A = rang A' = 3$.

c_3) $\mathcal{A}(\overline{z}) = c \cdot \overline{z}_B$; $\mathcal{A}(\overline{z}) = (-2, 9, 16, 23) \in \mathbf{R}^4$.

$\mathcal{A}(\overline{z}) = A' \cdot \overline{z}_{B'}$; $\mathcal{A}(\overline{z}) = (-23, -16, -32, -39/2) \in \mathbf{R}^4$.

Proba se face aplicând formula:

${}^t(\mathcal{A}(\overline{z})_G) = D \cdot^t (\mathcal{A}(\overline{z})_{G'})$

c_4) Din faptul că diagrama

$$\begin{array}{lll} \mathbf{R}^3 & & \\ C \downarrow & \searrow A_s \cdot A & \\ \mathbf{R}^4 & \longrightarrow \mathbf{R}^3 & \end{array}$$

este comutativă, rezultă că matricea operatorului $(s \cdot \mathcal{A})$ este $(A_s \cdot A)$ care este o matrice pătratică.

c_5) $rang(A_s \cdot A) = 3 \Rightarrow$operatorul $(s \cdot \mathcal{A})$ este automorfism (dimensiunea nucleului acestui operator este nulă).

5. Fie endomorfismul $\mathcal{A} : C([a, b]) \to C([a, b])$,
definit prin

$$(\mathcal{A}f)(x) = g(x) = \int_a^b f(t)\cos(x - t)dt,$$

unde $x \in [a, b]$. Să se determine $Ker\,\mathcal{A}$.

Soluţie:

Pornim de la relaţia $(\mathcal{A}(f))(x) = 0$, adică:

$$g(x) = \int_a^b f(t)\cos(x - t)dt = 0, (\forall)x \in [a, b]\,.$$

Folosind formula : $\cos(x - t) = \cos x \cdot \cos t + \sin x \cdot \sin t$, se obţine

$g(x) = (\int_a^b f(t).\cos t dt)\cos x + (\int_a^b f(t)\sin t dt)\sin x = 0\,, (\forall)x \in [a, b]$ ceea ce este echivalent cu

$$\int\limits_a^b f(t)\cos t dt = 0 \text{ şi } \int\limits_a^b f(t)\sin t dt = 0,\ (*)$$

deci $Ker\ \mathcal{A} = \{f \in R(a,b) | f$ îndeplinesc $(*)\}$.

6. 1) Să se demonstreze că aplicaţia liniară $\mathcal{A} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, definită prin $\mathcal{A}(\bar{x}) = (x_1+x_2-2x_3, x_2, x_1-x_3)$, $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$, este bijectivă.

   2) Arătaţi că aplicaţia liniară $f : V \to V$ (V spaţiu vectorial peste K) cu proprietatea că $\mathcal{A}^2 - \mathcal{A} + J = 0$ este inversabilă (J fiind morfismul identic).

   Soluţie:

   1) Cum $\mathcal{A} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, este suficient să arătăm că $\mathcal{A}$ este injectiv, adică $Ker\ \mathcal{A} = \{\bar{0}\}$.

   Din $\mathcal{A}(\bar{x}) = (x_1 + x_2 - 2x_3, x_2, x_1 - x_3) = \bar{0} = (0,0,0) =$

   $= (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ adică:

   $$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0 \Leftrightarrow \overline{x} = \bar{0}\text{, adică}$$

   $Ker\,\mathcal{A} = \{\bar{0}\}$ şi deci $\mathcal{A}$ este injectiv. Deci, în concluzie $\mathcal{A}$ este bijectiv.

   Pentru a determina transformarea inversă pornim de la egalitatea:

   $\mathcal{A}(\overline{x}) = \overline{y} \Leftrightarrow (x_1 + x_2 - 2x_3, x_2, x_1 - x_3) = (y_1, y_2, y_3) \Leftrightarrow$

   $$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ x_1 - x_3 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_2 - y_1 + 2y_3 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_2 - y_1 + y_3 \end{cases},$$

   ceea ce este echivalent cu faptul că:

   $$\mathcal{A}^{-1}(\bar{y}) = (y_2 - y_1 + 2y_3, y_2, y_2 - y_1 + y_3).$$

   2) Arătăm că $\mathcal{A}$ este injectiv.

   Fie $\overline{x}_1, \overline{x}_2 \in V$ şi presupunem că $\mathcal{A}(\overline{x}_1) = \mathcal{A}(\overline{x}_2) \Rightarrow \mathcal{A}^2(\overline{x}_1) = \mathcal{A}^2(\overline{x}_2)$

Deci $\mathcal{A}^2(\overline{x}_1) - \mathcal{A}(\overline{x}_1) + \overline{x}_1 = \mathcal{A}^2(\overline{x}_2) - \mathcal{A}(\overline{x}_2) + \overline{x}_2 = 0 \Rightarrow \overline{x}_1 = \overline{x}_2$ (aşadar $\mathcal{A}$ este injectiv).

Arătăm că este surjectiv.

Notăm cu $\overline{x} = \overline{y} - \mathcal{A}(\overline{y}) \Rightarrow \mathcal{A}(\overline{x}) = \mathcal{A}(\overline{y}) - \mathcal{A}^2(\overline{y})$

Din condiţia $\mathcal{A}^2 - \mathcal{A} + J = 0$, avem $J = \mathcal{A} - \mathcal{A}^2$, astfel încât $\overline{y} = \mathcal{A}(\overline{y}) - \mathcal{A}^2(\overline{y})$.

Cele două egalităţi implică $\overline{y} = \mathcal{A}(\overline{x})$, adică $\mathcal{A}(V) = V$, ceea ce înseamnă că $\mathcal{A}$ este surjectiv.

În concluzie, deci, $\mathcal{A}$ este o bijecţie.

7. Fie $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ două endomorfisme definite prin $\mathcal{A}_1(\bar{x}) = (x_4, x_2, x_3, x_1)$, respectiv $\mathcal{A}_2(\bar{x}) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4, 0, 0, 0)$, $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4$. Să se determine matricea sumei $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ în raport cu baza determinată de vectorii : $\overline{f}_1 = (1, -1, 2, 3)$, $\overline{f}_2 = (2, 1, 1, 0)$, $\overline{f}_3 = (3, -2, 0, 0)$, $\overline{f}_4 = (4, 0, 0, 0)$.

Soluţie:

$(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2)(\overline{x}) = (x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4, x_2, x_3, x_1)$.

În baza canonică $\overline{e}_1 = (1, 0, 0, 0), \overline{e}_2 = (0, 1, 0, 0), \overline{e}_3 = (0, 0, 1, 0)$, $\overline{e}_4 = (0, 0, 0, 1)$ a lui $\mathbf{R}^4$, avem:

$(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2)(\bar{e}_1) = (1, 0, 0, 1)$,

$(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2)(\bar{e}_2) = (1, 1, 0, 0)$,

$(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2)(\bar{e}_3) = (1, 0, 1, 0)$,

$(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2)(\bar{e}_4) = (2, 0, 0, 0)$.

Matricea lui $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ în această bază este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matricea de trecere de la baza canonică la baza $\overline{f}_i$, $(i = 1, 2, 3, 4)$ este:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Are loc următoarea diagramă

$$\begin{array}{ccc} B & \xleftarrow{C} & B' \\ A\downarrow & & \downarrow \widetilde{A} \\ B & \underset{C}{\longleftarrow} & B' \end{array}$$

unde $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4\}$, $B' = \left\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3, \bar{f}_4\right\}$.

Diagrama trebuie să fie comutativă, deci

$$C\widetilde{A} = AC,$$

adică

$$\widetilde{A} = C^{-1}AC\,.$$

Deci :

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 1 & 4/3 \\ 4/3 & -1/3 & -2 & -8/3 \\ 1 & -1 & -1/2 & -2 \\ 1/2 & 7/4 & 11/8 & 7/2 \end{pmatrix},$$ $\widetilde{A}$ este matricea endomorfismului $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ în baza $\bar{f}_i$, $(i = 1, 2, 3, 4)$.

La acelaşi rezultat se ajunge dacă scriem matricele A_1 şi A_2 ale lui $\mathcal{A}_1$ şi $\mathcal{A}_2$ în baza B'.

8. Fie $\mathcal{A} : K^n \to K^n$ un endomorfism (K fiind un corp comutativ) cu proprietatea :

$$\mathcal{A}^2 = \mathcal{A} + J$$

Să se arate că $\mathcal{A}$ este automorfism.

Soluţie:

Relaţia $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A} + J$ este echivalentă cu $\mathcal{A}(\mathcal{A} - J) = J$ şi $(\mathcal{A} - J)\mathcal{A} = J$. Aşadar endomorfismul $\mathcal{A}$ admite invers, $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A} - J$ şi deci $\mathcal{A}$ este un automorfism.

9. Fie $\mathcal{A} : V \to V$ un endomorfism al spaţiului vectorial V. Să se arate că endomorfismul

$$\mathcal{A}_1 = 2\mathcal{A} - J$$

este o involuţie dacă şi numai dacă $\mathcal{A}$ este proiecţie.

Soluţie:

Dacă $\mathcal{A}$ este proiecţie, atunci

$$\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}\,.$$

Rezultă $\mathcal{A}_1^2 = 4\mathcal{A}^2 - 4\mathcal{A} + J$, adică $\mathcal{A}_1^2 = J$, ceea ce înseamnă că $\mathcal{A}_1$ este o involuţie.

Reciproc, relaţia $\mathcal{A}_1^2 = J$ implică:

$$\mathcal{A}^2 = 1/4\mathcal{A}_1^2 + 1/2\mathcal{A}_1 + 1/4J = 1/2(\mathcal{A}_1 + J) = \mathcal{A}$$

şi deci $\mathcal{A}$ este o proiecţie.

Am folosit faptul că $\mathcal{A} = 1/2(\mathcal{A}_1 + J)$.

10. 1) Să se arate că endomorfismul

$$D : \mathbf{R}_n[X] \to \mathbf{R}_n[X]$$

definit prin $D(p) = p'$, unde p' este derivata polinomului p, este un endomorfism nilpotent de indice $n+1$, unde
$\mathbf{R}_n = \{p/grad\ p \leq n\}$.

2) Să se arate că endomorfismul

$$\mathcal{A} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$$

definit prin matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

este un endomorfism de indice 2.

Soluţie:

1) Dacă p este un polinom cu coeficienţi reali în variabila X, de grad cel mult n, atunci derivata de ordin $(n+1)$ a acestui polinom este identic nulă.
Aşadar

$$D^{n+1} = \theta$$

unde θ este transformarea zero.

2) Folosind corespondenţa biunivocă dintre mulţimea endomorfismelor pe $\mathbf{R}^3$ şi mulţimea matricilor pătratice de ordinul 3, arătăm că există un număr $n (n \in N)$ astfel încât matricea corespunzătoare endomorfismului ridicată la puterea n să fie egală cu matricea nulă.
Se observă că

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & --2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aşadar $n = 2$ şi deci endomorfismul este nilpotent de indice 2.

11. Fie V un spaţiu vectorial real şi $f \in End(V)$. Fie V_1, V_2 două subspaţii vectoriale invariante faţă de f astfel încât $V_1 \oplus V_2 = V$. Dacă p_1 este proiecţia lui V pe V_1 de-a lungul lui V_2 şi p_2 este proiecţia lui V pe V_2 de-a lungul lui V_1 să se arate că:
a) $p_1 \circ f = f \circ p_1$, $p_2 \circ f = f \circ p_2$;
b) $p_1 \circ p_1 = p_1$, $p_2 \circ p_2 = p_2$;
c) $p_1 \circ p_2 = \mathbf{0}$, $p_2 \circ p_1 = \mathbf{0}$.

Soluţie:

a) Fie $\bar{x} \in V$, arbitar fixat. Atunci există şi sunt unici vectorii $\bar{x}_1 \in V_1$ şi $\bar{x}_2 \in V_2$ astfel încât $\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$. Prin urmare $(p_1 \circ f)(\bar{x}) = p_1(f(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)) = p_1(f(\bar{x}_1)) + p_1(f(\bar{x}_2)) = f(\bar{x}_1) + \bar{0} = f(p_1(\bar{x}))$, pentru că proiectorul $p_1 : V \to V_1$, $p(\bar{x}) = \bar{x}_1$, este liniar şi $f(\bar{x}_1) \in V_1, f(\bar{x}_2) \in V_2$. Deci $p_1 \circ f = f \circ p_1$.

Analog se verifică că $p_2 \circ f = f \circ p_2$.
b) Evident $p_1(p_1(\bar{x})) = p_1(\bar{x}_1) = \bar{x}_1 = p_1(\bar{x})$, $\forall \bar{x} \in V$. Analog pentru p_2.
c) $(p_1 \circ p_2)(\bar{x}) = p_1(p_2(\bar{x})) = p_1(\bar{x}_2) = \bar{0}$ şi la fel $p_2 \circ p_1 = \mathbf{0}$.

12. Fie V spaţiu vectorial peste $\mathbf{K}$ şi $f \in End(V)$. Să se arate că $L_f = \{g \in End(V) \mid f \circ g = 0\}$ este un subspaţiu vectorial în $End(V)$.

Soluţie:

Fie $g_1, g_2 \in L_f$. Să arătăm că $g_1 + g_2 \in L_f$. Fie $\overline{x} \in V$. Avem $f \circ (g_1 + g_2)(\overline{x}) = f(g_1(\overline{x}) + g_2(\overline{x})) = f \circ g_1(\overline{x}) +$ $f \circ g_2(\overline{x})$. Cum $g_1, g_2 \in L_f \Rightarrow f \circ g_1(\overline{x}) = 0$, $f \circ g_2(\overline{x}) = 0 \Rightarrow$ $f \circ (g_1 + g_2)(\overline{x}) = 0$. Dar $\overline{x}$ e arbitrar, deci $f \circ (g_1 + g_2) = 0 \Rightarrow$ $g_1 + g_2 \in L_f$.

Fie $\alpha \in \mathbf{R}$ şi $g \in L_f$. Arătăm că $\alpha g \in L_f$. Fie $\overline{x} \in V$. Avem $f \circ (\alpha g)(\overline{x}) = f(\alpha g(\overline{x})) = \alpha f g(\overline{x}) = \alpha 0 = 0$. Cum $\overline{x}$ e arbitrar, avem $f \circ (\alpha g) = 0 \Rightarrow \alpha g \in L_f$.
Cele două rezultate de mai sus sunt suficiente pentru a trage concluzia că L_f este subspaţiu vectorial al lui $End(V)$.

13. Un operator liniar are în raport cu baza canonică a lui $\mathbf{R}^3$ matricea: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 7 & 11 \end{pmatrix}$.

Să se determine câte o bază şi dimenisiunile subspaţiilor vectoriale $Im\, f$, $Ker\, f$.

Soluţie:

Dacă matricea operatorului în baza canonică este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 7 & 11 \end{pmatrix},$$

atunci avem : $f(\overline{e}_1) = (1, 1, 4)$, $f(\overline{e}_2) = (3, 1, 7), f(\overline{e}_3) =$ $(4, 3, 11)$. Evident $Im\, f = L(f(\overline{e}_1),\ f(\overline{e}_2),\ f(\overline{e}_3))$. Pentru a extrage o bază a lui $Im\, f$, observăm că minorul $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ format de primele două linii şi primele două coloane are valoarea -5, deci e nenul . Deoarece $\det A = 0$, rezultă că Δ e un minor caracteristic al matricei A . Vectorii $f(\overline{e}_1), f(\overline{e}_2)$ ale căror componente formează minorul principal, vor alcătui o bază a lui $Im\, f$.

Pentru a investiga $Ker\, f$, să observăm că $\overline{x} = (x^1, x^2, x^3)$ aparţine lui $Ker\, f$ dacă şi numai dacă x^1, x^2, x^3 verifică sistemul :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 7 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^1 + 3x^2 + 4x^3 = 0 \\ 2x^1 + x^2 + 3x^3 = 0 \\ 4x^1 + 7x^2 + 11x^3 = 0 \end{cases} .$$

Deoarece $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$, ecuaţiile (I) şi (II) din sistem pot fi alese ca ecuaţii principale iar x^1, x^2 ca necunoscute principale.

Avem :

$$\begin{cases} x^1 + 3x^2 = -4x^3 \\ 2x^1 + x^2 = -3x^3 \end{cases} .$$

De aici putem determina primele două necunoscute în funcţie de x^3.

$$x^1 = \frac{\begin{vmatrix} -4x^3 & 3 \\ -3x^3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{5x^3}{-5} = -x^3$$

$$x^2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -4x^3 \\ 2 & -3x^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{5x^3}{-5} = -x^3$$

Notând $x^3 = \alpha$, avem $x^1 = -\alpha$, $x^2 = -\alpha$, deci forma generală a unui vector $\overline{x}$ din $Ker\, f$ este $(-\alpha, -\alpha, \alpha)$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

Pentru a afla o bază în $Ker\, f$, deci un sistem fundamental de soluţii, alegem $\alpha = 1$ şi obţinem $\overline{a} = (-1, -1, 1)$.
În concluzie $\{\overline{a}\}$ este baza căutată. Din cele de mai sus se observă că dim $Im\, f = 2$, dim$Ker\, f = 1$.

14. Fie $f \in End(\mathbf{R}^4)$ cu proprietăţile:
$f(\overline{e}_1 + \overline{e}_2) = (1, 1, -1, -1)$; $f(\overline{e}_1 - \overline{e}_2) = (-1, -1, 1, 1)$;
$f(\overline{e}_3 + \overline{e}_4) = (-1, 1, -1, 1)$; $f(\overline{e}_3 - \overline{e}_4) = (1, -1, 1, -1)$,
unde $\{\overline{e}_1,\ \overline{e}_2,\ \overline{e}_3,\ \overline{e}_4\}$ sunt componentele bazei canonice a lui $\mathbf{R}^4$. Să se scrie matricea lui f în baza canonică şi să se găsească câte o bază şi dimensiunile subspaţiilor $Ker\, f$ şi $Im\, f$.

Soluţie:

Adunând relaţiile $f(\overline{e}_1 + \overline{e}_2) = (1, 1, -1, -1)$;$f(\overline{e}_1 - \overline{e}_2) = (-1, -1, 1, 1)$, obţinem $2f(\overline{e}_2) = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow f(\overline{e}_2) = (0, 0, 0, 0)$; scăzând din prima relaţie pe cea de a doua, obţinem $2f(\overline{e}_2) = (2, 2, -2, -2) = f(\overline{e}_2) = (1, 1, -1, -1)$. Procedând analog , avem $f(\overline{e}_3) = (0, 0, 0, 0)$, $f(\overline{e}_4) = (-1, 1, -1, 1)$.

Formăm matricea asociată operatorului liniar f în baza canonică:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fie $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ minorul determinat de primele două linii şi de coloanele 2 şi 4, $\Delta = 2 \neq 0$. Se observă că este minor principal. Atunci $\{f(\overline{e}_2), f(\overline{e}_4)\}$ formează o bază pentru $Im\, f$.
Pentru a determina $Ker\, f$, observăm că $\overline{x} = (x^1, x^2, x^3, x^4)$ $\in Ker\, f \ \Leftrightarrow (x^1, x^2, x^3, x^4)$ satisface sistemul :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x^4 = 0 \\ x^2 + x^4 = 0 \\ -x^2 - x^4 = 0 \\ -x^2 + x^4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 = x^4 = 0\,.$$

Atunci, notând $x^1 = \alpha, x^3 = \beta$, forma generală a unui vector $\overline{x} \in Kerf$ va fi $(\alpha\ ,0,\beta,0)$. Alegând $\alpha = 1, \beta = 0$ şi apoi $\alpha = 0, \beta = 1$, obţinem vectorii $\overline{a}_1 = (1,0,0,0)$, $\overline{a}_2 = (0,0,1,0)$ ce formează împreună un sistem fundamental de soluţii, deci o bază în $Ker\, f$.

15. Fie $f \in End(\mathbf{R}^2)$ astfel încât în baza canonică are matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$. Să se arate că f nu posedă valori proprii.

    Soluţie:

    Polinomul caracteristic
    $P_\lambda = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 \\ -5 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 12 + 25 = \lambda^2 - 8\lambda + 37.$
    Dar $\Delta = 64 - 4 \cdot 37 = -84 < 0 \Rightarrow P_\lambda$ nu are rădăcini reale, deci nu are valori proprii reale.

16. Fie $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ morfism de spaţii vectoriale. Să presupunem că matricea asociată acestui morfism în baza canonică a lui $\mathbf{R}^3$ are forma :
    $$A = \begin{pmatrix} -3 & 10 & 0 \\ -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

    a) Să se găsească valorile proprii ale lui f şi subspaţiile proprii corespunzătoare.

    b) Să se arate că morfismul f este diagonalizabil. Să se determine o bază faţă de care matricea lui f are formă diagonală şi apoi să se scrie această bază.

c) Să se găsească o formulă de calcul pentru A^n, $n \in N^*$.

Soluţie:

a) Calculând polinomul caracteristic după regula obişnuită vom obţine: $P_\lambda = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 10 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$
$= [(-2-\lambda)(6-\lambda) - ((-2)\cdot 10)]\,(3-\lambda) =$

$= (\lambda^2 - 3\lambda + 2)(3-\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$.

Deci rădăcinile lui P_λ sunt $\lambda_1 = 1$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_1 = 3$.

Caz I. $\lambda = 1$; considerând $\overline{x} = (x^1, x^2, x^3) \in V_3$ şi punând condiţia ca $f(\overline{x}) = 1 \cdot \overline{x}$, obţinem:

$$\begin{pmatrix} -4 & 10 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4x^1 + 10x^2 + 0x^3 = 0 \\ -2x^1 + 5x^2 + 0x^3 = 0 \\ 0x^1 + 0x^2 + 2x^3 = 0 \end{cases}.$$

Alegem x^1, x^3 necunoscute principale, x^2 necunoscută secundară. Atunci din ecuaţiile (I) şi (III) ale sistemului anterior pe care le vom considera principale, avem $x^1 = \frac{5}{2}x^2$, $x^3 = 0$. Notând $x^2 = \alpha$, obţinem subspaţiul invariant asociat valorii proprii $\lambda = 1$, $V_1 = \{(\frac{5}{2}\alpha, \alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbf{R}\}$. Alegând $\alpha = 2$, obţinem $x^2 = 2$, $x^1 = 5$. Obţinem astfel vectorul $\overline{v}_1 = (5, 2, 0)$.

Caz II. Pentru $\lambda = 2$, raţionând analog ca mai sus vom aveam $\overline{x} = (x^1, x^2, x^3) \in V_2$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -5 & 10 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -5x^1 + 10x^2 + 0x^3 = 0 \\ -2x^1 + 4x^2 + 0x^3 = 0 \\ 0x^1 + 0x^2 + 1x^3 = 0 \end{cases}.$$

Alegem x^1, x^3 necunoscute principale, x^2 necunoscută secundară. Atunci din ecuaţiile principale (I) şi (III), avem $x^1 = 2x^2$, $x^3 = 0$. Notând $x^2 = \alpha$, obţinem subspaţiul invariant asociat valorii proprii $\lambda = 2$, $V_2 = \{(2\alpha, \alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbf{R}\}$. Alegând $\alpha = 1$, obţinem $x^1 = 2$, $x^2 = 1$. Obţinem vectorul $\overline{v}_2 = (2, 1, 0)$.

Caz III. Pentru $\lambda = 3$, ca mai sus, vom avea $\overline{x} = (x^1, x^2, x^3) \in V_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -6 & 10 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} -6x^1 + 10x^2 + 0x^3 = 0 \\ -2x^1 + 3x^2 + 0x^3 = 0 \\ 0x^1 + 0x^2 + 0x^3 = 0 \end{cases}$.

Alegem x^1, x^2 necunoscute principale, x^3 necunoscută secundară. Atunci din ecuaţiile principale (I) şi (II), avem $x^1 = 0$, $x^2 = 0$. Notând $x^3 = \alpha$, obţinem subspaţiul invariant asociat valorii proprii $\lambda = 3$, $V_3 = \{(0, 0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbf{R}\}$. Alegând $\alpha = 1$, obţinem vectorul $\overline{v}_3 = (0, 0, 1)$.

b) În baza B' formată de vectorii proprii $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$, deoarece $f(\overline{v}_1) = 1\overline{v}_1$, $f(\overline{v}_2) = 2\overline{v}_2$, $f(\overline{v}_3) = 3\overline{v}_3$, matricea A' asociată morfismului f are forma :

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Observaţie: Se ajunge la acelaşi rezultat dacă notăm cu

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matricea de trecere de la baza $B = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ la baza $B' = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$ şi aplicăm formula :

$$A' = B^{-1}AB$$

c) Vom rezolva problema prin inducţie după n. Pentru $n = 1$, avem

$$A = BA^{'}B^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Să presupunem că:

$$A^{n-1} = B(A^{'})^{n-1}B^{-1} = B \begin{pmatrix} 1^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix} B^{-1}.$$

Atunci
$A^n = A^{n-1} \cdot A = B(A^{'})^{n-1}B^{-1} \cdot BA^{'}B^{-1} = B(A^{'})^n B^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De aici obţinem $A^n = B\cdot\ B(A^{'})^n B^{-1}$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$.

17. Fie V un spaţiu vectorial peste corpul $\mathbf{K}$, şi $f \in End(V)$ astfel încât $f^2 = f$. Să se arate că valorile proprii ale morfismului f sunt 0 şi 1.

    Soluţie:

    Avem deci $f^2 = f$. Fie λ valoare proprie şi $\overline{x} \in V$ aşa încât $f(\overline{x}) = \lambda\overline{x}$. Atunci $f^2(\overline{x}) = f.f(\overline{x}) = f(\lambda\overline{x}) = \lambda^2\overline{x}$. Dar:

    $f^2(\overline{x}) = f(\overline{x}) = \lambda\overline{x} \Rightarrow \lambda^2\overline{x} = \lambda\overline{x} \Rightarrow (\lambda^2 - \lambda)\overline{x} = \bar{0}$.

    Cum $\overline{x}$ este vector propriu, $\overline{x} \neq \bar{0}$, deci $\lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ sau 1.

18. Fie V un spaţiu vectorial real şi $f \in End(V)$, $f{=}\mathbf{1}_V$, $f{=}{-}\mathbf{1}_V$ astfel încât $f \circ f = \mathbf{1}_V$.
    a) Determinaţi valorile proprii pentru endomorfismul f;
    b) Arătaţi că $Ker\,(f - \mathbf{1}_V) \oplus Ker\,(f + \mathbf{1}_V) = V$.

    Soluţie:

a) Fie λ o valoare proprie a lui f. Atunci, există un vector nenul $\bar{x} \in V$ astfel încât $f(\bar{x}) = \lambda\bar{x}$. Cum $(f \circ f)(\bar{x}) = \bar{x}$ şi $(f \circ f)(\bar{x}) = f(\lambda\bar{x}) = \lambda f(\bar{x}) = \lambda^2\bar{x}$ rezultă că $\lambda^2 = 1$ $(\bar{x}\neq\bar{0})$, adică $\lambda \in \{-1, 1\}$.
Din faptul că $f{=}\mathbf{1}_V$ rezultă că există $\bar{x} \in V \setminus \{\bar{0}\}$ astfel ca $f(\bar{x}) - \bar{x}{=}\bar{0}$. Deoarece $f(f(\bar{x}) - \bar{x}) = f(f(\bar{x})) - f(\bar{x}) = \bar{x} - f(\bar{x}) = -1 \cdot (f(\bar{x}) - \bar{x})$, obţinem că -1 este valoare proprie a lui f, $f(\bar{x}) - \bar{x}$ fiind un vector propriu asociat.
Analog, din $f{=} -\mathbf{1}_V$ rezultă că există $\bar{y} \in V \setminus \{\bar{0}\}$ astfel ca $f(\bar{x}){+}\bar{x}{=}\bar{0}$ şi atunci $f(f(\bar{y}){+}\bar{y}) = f(f(\bar{y})){+}f(\bar{y}) = \bar{y}{+}f(\bar{y}) = 1 \cdot (f(\bar{x}) + \bar{x})$.
Deci numerele reale 1 şi -1 sunt singurele valori proprii pentru f.
b) Fie $\bar{x} \in V$, arbitrar fixat. Să verificăm că $\frac{1}{2}[\bar{x} + f(\bar{x})] \in Ker\,(f - \mathbf{1}_V)$ şi $\frac{1}{2}[\bar{x} - f(\bar{x})] \in Ker\,(f + \mathbf{1}_V)$.
Într-adevăr, $f\left(\frac{1}{2}[\bar{x} + f(\bar{x})]\right) = \frac{1}{2} f\,[\bar{x} + f(\bar{x})] =$
$= \frac{1}{2}\,[f(\bar{x}) + f(f(\bar{x}))] = \frac{1}{2}\,[\bar{x} + f(\bar{x})]$ şi atunci
$(f - \mathbf{1}_V)\left(\frac{1}{2}(\bar{x} + f(\bar{x}))\right) = \bar{0}$.
Analog, $f\left(\frac{1}{2}[\bar{x} - f(\bar{x})]\right) = \frac{1}{2}\,[f(\bar{x}) - f(f(\bar{x}))] = -\frac{1}{2}\,[\bar{x} - f(\bar{x})]$ şi atunci $(f + \mathbf{1}_V)\left(\frac{1}{2}(\bar{x} - f(\bar{x}))\right) = \bar{0}$.
Atunci, cum $\frac{1}{2}[\bar{x}{+}f(\bar{x})]{+}\frac{1}{2}[\bar{x}{-}f(\bar{x})] = \bar{x}$, rezultă că $Ker\,(f - \mathbf{1}_V) + Ker\,(f + \mathbf{1}_V) = V$
Suma celor două subspaţii este sumă directă pentru că dacă luăm un vector $\bar{v}$ din intersecţia lor rezultă că
$f(\bar{v}) = \bar{v}$ şi $f(\bar{v}) = -\bar{v}$ şi astfel $\bar{v} = \bar{0}$.

19. Fie V un spaţiu vectorial peste corpul $\mathbf{K}$, şi $f \in End(V)$. Dacă f este inversabil, $\overline{x}$ vector propriu al lui f corespunzător valorii proprii λ, atunci $\overline{x}$ este vector propriu al lui f^{-1} corespunzător valorii proprii $\frac{1}{\lambda}$.

Soluţie:

Avem deci $f(\overline{x}) = \lambda\overline{x} \Rightarrow f^{-1} \circ f(\overline{x}) = f^{-1}(\lambda\overline{x}) \Rightarrow$
$\overline{x} = f^{-1}(\lambda\overline{x}) = \frac{1}{\lambda}\overline{x} = f^{-1}(\overline{x})$. De aici rezultă concluzia.

20. Fie $f \in End(\mathbf{R}^3)$ cu matricea asociată bazei canonice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Să se găsească valorile şi vectorii proprii.

Soluţie:

Pentru a afla valorile proprii să calculăm polinomul caracteristic $P_\lambda = \det(A - \lambda I)$ cu I matricea unitate în $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$. Avem:

$$P_\lambda = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)((3-\lambda)^2 + 16).$$

Deoarece a doua paranteză este intotdeauna pozitivă, singura rădăcină reală va fi $\lambda = 2$. Dacă $f(\overline{x}) = \lambda \overline{x}$, atunci matriceal această relaţie se scrie:

$A \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$, cu $\overline{x} = (x^1, x^2, x^3)$. Pentru $\lambda = 1$, obţinem:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (\mathrm{S}) \begin{cases} 0 = 0 \\ x^2 = 0 \\ x^3 = 0 \end{cases}.$$

Fixăm x^2, x^3 necunoscute principale, x^1 necunoscută secundară. Atunci forma generală a unui vector propriu asociat valori proprii $\lambda = 2$ este $\overline{x} = (\alpha, 0, 0)$. Pentru $\alpha = 1$ obţinem $\overline{a} = (1, 0, 0)$, iar $\{\overline{a} = (1, 0, 0)\}$ este de fapt un sistem fundamental de soluţii al lui (S). Deci subspaţiul vectorial propriu asociat valorii proprii $\lambda = 2$ este $V_2 = \{\alpha \overline{a} \mid \alpha \in \mathbf{R}\}$.

21. Fie $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ un operator liniar care în raport cu baza canonică $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ a lui $\mathbf{R}^3$ are matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Scrieţi expresia analitică şi ecuaţiile pentru f, în raport cu baza canonică $\mathcal{B}$;
b) Determinaţi $Ker\, f$ şi $Im\, f$;
c) Găsiţi valorile proprii şi vectorii proprii pentru f;
d) Este operatorul f diagonalizabil? Dacă este diagonalizabil, găsiţi baza lui $\mathbf{R}^3$ în raport cu care matricea f are forma diagonală, precum şi forma diagonală a matricei lui f.

Soluţie:

a) $\bar{y} = f(\bar{x}) \Leftrightarrow \tilde{y}_{\mathcal{B}} = \widetilde{f(\bar{x})}_{\mathcal{B}} \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

Prin urmare, expresia analitică a lui f, în raport cu baza canonică $\mathcal{B}$, este

$$f(\bar{x}) = (x^1 + x^2, -x^1 + 2x^2, x^1 + x^3)\,,\ \forall \bar{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbf{R}^3$$

şi ecuaţiile lui f, în raport cu baza canonică $\mathcal{B}$, sunt

$$\begin{cases} y^1 &= x^1 + x^2 \\ y^2 &= -x^1 + 2x^2 \\ y^3 &= x^1 + x^3 \end{cases}.$$

b) Nucleul operatorului liniar f este

$$Ker\, f = \left\{ \bar{x} \in \mathbf{R}^3 | f(\bar{x}) = \bar{0} \right\} =$$

$$\left\{ \bar{x} = (x^1, x^2, x^3) \middle| \begin{cases} x^1 + x^2 &= 0 \\ -x^1 + 2x^2 &= 0 \\ x^1 + x^3 &= 0 \end{cases} \right\}.$$

Cum $\dim Ker\, f = 3 - rang A = 3 - 3 = 0$ rezultă că $Ker\, f = \{\bar{0}\}$ şi atunci $\dim Im\, f = \dim \mathbf{R}^3 - \dim Ker\, f = 3 - 0 = 3$, adică $Im\, f = \mathbf{R}^3$

c) Valorile proprii sunt rădăcinile reale ale ecuaţiei caracteristice

$$\det(A - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0\,.$$

Ecuaţia are o singură rădăcină reală $\lambda_1 = 2$ şi două rădăcini complexe $\lambda_{2,3} = 1 \pm i$.
Pentru a găsi vectorii proprii asociaţi valorii proprii reale $\lambda_1 = 2$ rezolvăm sistemul liniar omogen

$$(A - 2I_3)\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x^1 + x^2 & = 0 \\ -x^1 + 2x^2 & = \quad 0 \\ x^1 + x^3 & = \quad 0 \end{cases},$$

adică $x^1 = x^2 = x^3 = \alpha \in \mathbf{R}$. Vectorii proprii asociaţi valorii proprii 2 sunt de forma $\bar{u}_1 = (\alpha, \alpha, \alpha)$, $\alpha \in \mathbf{R}^*$. Subspaţiul propriu asociat lui $\lambda_1 = 2$ este

$$V_{\lambda_1} = \left\{\bar{x} \in \mathbf{R}^3 | f(\bar{x}) = \lambda_1 \bar{x}\right\} = \{\alpha(1,1,1) | \alpha \in \mathbf{R}^3\}$$

care are drept bază vectorul propriu $\bar{v}_1 = (1,1,1)$.
d) Operatorul liniar f nu este diagonalizabil pentru că polinomul caracteristic nu are toate rădăcinile reale.
Observaţie: Dacă $f \in End\,(\mathbf{C}^3)$ atunci f este diagonalizabil, iar forma diagonală a matricii lui f este

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}.$$

22. În $\mathbf{R}^4$ se consideră baza $\mathcal{B} = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4\}$, unde $\bar{a}_1 = (1,1,0,0)$, $\bar{a}_2 = (1,1,1,0)$, $\bar{a}_3 = (0,1,1,1)$, $\bar{a}_4 = (0,0,1,1)$ şi operatorul liniar $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$, care relativ la baza $\mathcal{B}$ are matricea
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Determinaţi $Ker\, f$ şi $Im\, f$;
b) Găsiţi valorile proprii şi vectorii proprii pentru f ;
c) Este operatorul f diagonalizabil? Dacă este diagonalizabil, găsiţi baza lui $\mathbf{R}^4$ în raport cu care matricea f are forma diagonală, precum şi forma diagonală a matricei lui f .

Soluţie:

a) Din $f(\tilde{\bar{x}})_{\mathcal{B}} = A\tilde{x}_{\mathcal{B}}$ rezultă expresia analitică a lui f relativ la baza $\mathcal{B}$
$f(\bar{x}) = (-x^2 + x^3)\bar{a}_1 + (-x^1 + x^2)\bar{a}_2 + (x^1 - x^4)\bar{a}_3 +$
$+(-x^3 + x^4)\bar{a}_4\,,\ \forall \bar{x} = \sum\limits_{i=1}^{4} x^i \bar{a}_i \in \mathbf{R}^4\,.$

$$Ker\, f = \left\{\bar{x} \in \mathbf{R}^4 | f(\bar{x}) = \bar{0}\right\} =$$

$$= \left\{ \bar{x} = \sum_{i=1}^{4} x^i \bar{a}_i \left| \begin{cases} -x^2 + x^3 & = 0 \\ -x^1 + x^2 & = 0 \\ x^1 - x^4 & = 0 \\ -x^3 + x^4 & = 0 \end{cases} \right. \right\}.$$

Cum $rang\, A = 3$ rezultă $\dim Ker\, f = 4 - rang\, A = 1$ şi $\dim Im\, f = rang\, A = 3$.
Prin rezolvarea sistemului liniar omogen de mai sus obţinem $x^1 = x^2 = x^3 = x^4 = \alpha \in \mathbf{R}$. Atunci
$Ker\, f = \{\alpha(\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3 + \bar{a}_4) | \alpha \in \mathbf{R}\} = \{\alpha(2, 3, 3, 2) | \alpha \in \mathbf{R}\}$
şi prin urmare $\{\bar{b}_1 = (2, 3, 3, 2)\}$ este bază pentru $Ker\, f$.
$Im\, f = \{f(\bar{x}) | \bar{x} \in \mathbf{R}^4\} = \big\{(-x^2 + x^3)\bar{a}_1 + (-x^1 + x^2)\bar{a}_2 +$
$+(x^1 - x^4)\bar{a}_3 + (-x^3 + x^4)\bar{a}_4 \left| \bar{x} = \sum\limits_{i=1}^{4} x^i \bar{a}_i \in \mathbf{R}^4 \right\} =$
$\big\{x^1(-\bar{a}_2 + \bar{a}_3) + x^2(-\bar{a}_1 + \bar{a}_2) + x^3(\bar{a}_1 - \bar{a}_4) +$
$+x^4(-\bar{a}_3 + \bar{a}_4) | x^1, x^2, x^3, x^4 \in \mathbf{R}\big\} =$
$= \left\{ \sum\limits_{i=1}^{4} x^i \bar{c}_i | x^1, x^2, x^3, x^4 \in \mathbf{R} \right\},$
unde $\bar{c}_1 = -\bar{a}_2 + \bar{a}_3 = (-1, 0, 0, 1)$, $\bar{c}_2 = -\bar{a}_1 + \bar{a}_2 = (0, 0, 1, 0)$, $\bar{c}_3 = \bar{a}_1 - \bar{a}_4 = (1, 1, -1, -1)$, $\bar{c}_4 = -\bar{a}_3 + \bar{a}_4 = (0, -1, 0, 0)$.

Deoarece $rang \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 3$ rezultă că doar $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3$ sunt liniar independenţi. Prin urmare
$Im\, f = L(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3)$ şi $\{\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3\}$ este bază pentru $Im\, f$.
b) Ecuaţia caracteristică

$$\det(A - \lambda I_4) = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 2)(\lambda^2 - 2) = 0$$

are rădăcinile $\lambda_1 = -\sqrt{2}, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = \sqrt{2}, \lambda_4 = 2$ care sunt valorile proprii ale lui f.
Pentru $\lambda_1 = -\sqrt{2}$, rezolvăm sistemul omogen
$(A - \lambda_1 I_4)\tilde{x}_{\mathcal{B}} = (0, 0, 0, 0)^t$ sau

$$\begin{cases} \sqrt{2}x^1 - x^2 + x^3 &= 0 \\ -x^1 + (1+\sqrt{2})x^2 &= 0 \\ x^1 + \sqrt{2}x^3 - x^4 &= 0 \\ -x^3 + (1+\sqrt{2})x^4 &= 0 \end{cases},$$

de unde rezultă $\tilde{u_1}_{\mathcal{B}} = \alpha(1+\sqrt{2}, 1, -1-\sqrt{2}, -1)^t$, $\alpha \neq 0$.
Pentru $\alpha = 1$ rezultă $\tilde{v_1}_{\mathcal{B}} = (1+\sqrt{2}, 1, -1-\sqrt{2}, -1)^t$ un vector propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_1 = -\sqrt{2}$, care reprezintă şi o bază pentru subspaţiul propriu
$V_{\lambda_1} = \{\alpha\bar{v}_1 | \alpha \in \mathbf{R}\}$.
Pentru $\lambda_2 = 0$ rezultă $\bar{v}_2 = \bar{b}_1 = (2, 3, 3, 2)$ un vector propriu pentru $\lambda_2 = 0$ şi $V_{\lambda_2} = Ker\,(f - \lambda_2 I_4) =$
$= \{\alpha\bar{b}_1 | \alpha \in \mathbf{R}\}$.
Pentru $\lambda_3 = \sqrt{2}$, Rezolvăm sistemul omogen
$(A - \lambda_3 I_4)\tilde{x}_{\mathcal{B}} = (0, 0, 0, 0)^t$ sau

$$\begin{cases} -\sqrt{2}x^1 - x^2 + x^3 &= 0 \\ -x^1 + (1-\sqrt{2})x^2 &= 0 \\ x^1 - \sqrt{2}x^3 - x^4 &= 0 \\ -x^3 + (1-\sqrt{2})x^4 &= 0 \end{cases},$$

de unde rezultă $\tilde{u_3}_{\mathcal{B}} = \alpha(1-\sqrt{2}, 1, -1+\sqrt{2}, -1)^t$, $\alpha \neq 0$.
Pentru $\alpha = 1$ rezultă $\tilde{v_3}_{\mathcal{B}} = (1-\sqrt{2}, 1, -1+\sqrt{2}, -1)^t$ un vector

propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_3 = \sqrt{2}$, care reprezintă şi o bază pentru subspaţiul propriu
$V_{\lambda_3} = \{\alpha \bar{v}_3 | \alpha \in \mathbf{R}\}$.
Pentru $\lambda_4 = 2$, avem sistemul

$$\begin{cases} -2x^1 - x^2 + x^3 &= 0 \\ -x^1 - x^2 &= 0 \\ x^1 - 2x^3 - x^4 &= 0 \\ -x^3 - x^4 &= 0 \end{cases},$$

care are soluţia $\tilde{u}_{4\mathcal{B}} = \alpha(-1, 1, -1, 1)^t$, $\alpha \neq 0$ şi prin urmare $V_{\lambda_4} = \{\alpha \bar{v}_4 | \alpha \in \mathbf{R}\}$, unde $\bar{v}_4 = -\bar{a}_1 + \bar{a}_2 - \bar{a}_3 + \bar{a}_4$.
d) Cum operatorul f are patru valori proprii (reale) distincte, rezultă că este diagonalizabil şi forma diagonală a matricii lui este

$$D = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

iar baza corespunzătoare este $\mathcal{B}^* = \{\bar{v}_i | i = \overline{1,4}\}$.

23. Fie V un spaţiu vectorial peste corpul comutativ K şi f, g două automorfisme ale lui V. Arătaţi că automorfismele $f \circ g$ şi $g \circ f$ au aceleaşi valori proprii.

Soluţie:

Fie $\lambda \in K$ o valoare proprie pentru $f \circ g$. Atunci există vectorul nenul $\bar{x} \in V$ astfel încât $(f \circ g)(\bar{x}) = \lambda \bar{x}$ şi de aici avem că $g\left((f \circ g)(\bar{x})\right) = g(\lambda \bar{x})$, adică $(g \circ f)\left(g(\bar{x})\right) = \lambda g(\bar{x})$. Deoarece g este bijecţie, din $\bar{x} \neq \bar{0}$ rezultă că $g(\bar{x}) \neq \bar{0}$ şi astfel există $\bar{y} = g(\bar{x}) \in V \setminus \{\bar{0}\}$ astfel încât $(g \circ f)(\bar{y}) = \lambda \bar{y}$. Deci λ este o valoare proprie pentru $g \circ f$.
Invers, se arată în mod similar că orice valoare proprie a lui $g \circ f$ este valoare proprie şi pentru $f \circ g$.
Observaţie: Zeroul corpului de scalari K nu poate fi valoare proprie pentru un operator liniar injectiv.

24. Un morfism $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^4$ are în raport cu bazele canonice din $\mathbf{R}^3$ şi $\mathbf{R}^4$ matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Să se determine câte o bază şi dimensiunile lui $Ker\, f$ şi $Im\, f$.

Soluţie:

Cum $Im\ f = L(f(\overline{e}_1), f(\overline{e}_2), f(\overline{e}_3))$, trebuie să extragem o bază din acest sistem de generatori. Considerăm minorul determinat de primele două linii şi de primele două coloane. Avem $d = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$; deoarece prin bordarea acestui minor obţinem minorii $d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$ şi $d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$, atunci rangul matricei de mai sus (şi implicit al sistemului de vectori cu ale căror componente s-a constituit matricea) este 2, deci $\{f(\overline{e}_1), f(\overline{e}_2)\}$ reprezintă o bază pentru $Im\ f$, unde $f(\overline{e}_1) = (1, 2, 3, -1)$ şi $f(\overline{e}_2) = (2, 0, 2, 2)$.

Pentru a determina o bază în $Ker\ f$ să observăm că $\overline{x} = (x^1, x^2, x^3) \in Ker\ f \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^1 + 2x^2 + 3x^3 = 0 \\ 2x^1 + x^3 = 0 \\ 3x^1 + 2x^2 + 4x^3 = 0 \\ -x^1 + 2x^2 + 2x^3 = 0 \end{cases}.$$

Fie x^1, x^2 necunoscute principale şi x^3 necunoscută secundară. Din primele două ecuaţii pe care le vom considera principale obţinem:

$$\begin{cases} x^1 = -\frac{x^3}{2} \\ x^2 = -\frac{5}{2}x^3 \end{cases}.$$

Pentru a afla un sistem fundamental de soluţii este suficient să dăm lui x^3 valoarea 1, de aici rezultând vectorul $\overline{a} = (-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}, 1)$. Deci $Ker\, f = \{\lambda\overline{a} \mid \lambda \in \mathbf{R}\}$. Să mai observăm că $\dim Im\ f = 2$, $\dim Ker\ f = 1$. Deci $\dim(Im\ f) + \dim(Ker\ f) = 3 = \dim \mathbf{R}^3$.

25. Fie V un spaţiu vectorial real şi $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4\}$ o bază a sa. Dacă endomorfismul $f : V \to V$ are, în raport cu baza $\mathcal{B}$, ecuaţiile:

$$\begin{cases} y^1 &= x^1 + x^3 \\ y^2 &= x^2 + x^4 \\ y^3 &= x^1 + x^3 \\ y^4 &= x^2 + x^4 \end{cases} .$$

Se cere: a) găsiţi matricea lui f relativ la baza $\mathcal{B}$;
b) găsiţi matricea lui f relativ la baza
$\mathcal{B}' = \{\bar{a}_1 = \bar{e}_1 - \bar{e}_2, \bar{a}_2 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3, \bar{a}_3 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 - \bar{e}_3 + \bar{e}_4, \bar{a}_4 = \bar{e}_3 + \bar{e}_4\}$;
c) găsiţi ecuaţiile operatorului liniar f în raport cu baza $\mathcal{B}$;
d) determinaţi $Ker\, f$ şi $Im\, f$;
e) găsiţi valorile şi vectorii proprii pentru f;
f) verificaţi dacă există o bază a lui V în raport cu care matricea lui f să aibă forma diagonală;
g) calculaţi A^n, $n \in \mathbf{N}^*$.

Soluţie:

a) Deoarece $f(\bar{e}_1) = \bar{e}_1 + \bar{e}_3$, $f(\bar{e}_2) = \bar{e}_2 + \bar{e}_4$, $f(\bar{e}_3) = \bar{e}_1 + \bar{e}_3$, $f(\bar{e}_4) = \bar{e}_2 + \bar{e}_4$ matricea lui f relativ la baza $\mathcal{B}$ este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}'$ este

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

şi atunci matricea lui f relativ la baza $\mathcal{B}'$ este dată de formula $B = C^{-1}AC$. Pentru a găsi inversa matricei C folosim lema substituţiei.

	$\overline{a}_1$	$\overline{a}_2$	$\overline{a}_3$	$\overline{a}_4$	$\overline{b}_1$	$\overline{b}_2$	$\overline{b}_3$	$\overline{b}_4$
$\overline{e}_1$	$\boxed{1}$	1	1	0	1	0	0	0
$\overline{e}_2$	-1	1	1	0	0	1	0	0
$\overline{e}_3$	0	1	-1	0	0	0	1	0
$\overline{e}_4$	0	0	1	1	0	0	0	1
$\overline{a}_1$	1	1	1	0	1	0	0	0
$\overline{e}_2$	0	$\boxed{2}$	2	0	1	1	0	0
$\overline{e}_3$	0	1	-1	0	0	0	1	0
$\overline{e}_4$	0	0	1	1	0	0	0	1
$\overline{a}_1$	1	0	0	0	1/2	-1/2	0	0
$\overline{a}_2$	0	1	1	0	1/2	1/2	0	0
$\overline{e}_3$	0	0	$\boxed{-2}$	0	-1/2	-1/2	1	0
$\overline{e}_4$	0	0	1	1	0	0	0	1
$\overline{a}_1$	1	0	0	0	1/2	-1/2	0	0
$\overline{a}_2$	0	1	0	0	1/4	1/4	1/2	0
$\overline{a}_3$	0	0	1	0	1/4	1/4	-1/2	0
$\overline{e}_4$	0	0	0	$\boxed{1}$	-1/4	-1/4	1/2	1
$\overline{a}_1$	1	0	0	0	1/2	-1/2	0	0
$\overline{a}_2$	0	1	0	0	1/4	1/4	1/2	0
$\overline{a}_3$	0	0	1	0	1/4	1/4	-1/2	0
$\overline{a}_4$	0	0	0	1	-1/4	-1/4	1/2	1

Prin urmare $C^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ şi atunci se obţine $B = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1 & 0 \\ 1/2 & 7/4 & 1/2 & 1 \\ -1/2 & -1/4 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 5/4 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Ecuaţiile lui f relativ la baza $\mathcal{B}'$ sunt

$$\begin{cases} z^1 &= t^1 + \frac{1}{2}t^2 - t^3 \\ z^2 &= \frac{1}{2}t^1 + \frac{7}{4}t^2 + \frac{1}{2}t^3 + t^4 \\ z^3 &= -\frac{1}{2}t^1 - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t^3 \\ z^4 &= -\frac{1}{2}t^1 + \frac{5}{4}t^2 + \frac{3}{2}t^3 + t^4 \end{cases},$$

unde $\tilde{x}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} t^1 \\ t^2 \\ t^3 \\ t^4 \end{pmatrix}$ şi $f(\tilde{\bar{x}})_{\mathcal{B}'} = B\tilde{x}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \\ z^4 \end{pmatrix}$.

d) $Ker\, f$ este mulţimea soluţiilor sistemului liniar omogen $A\tilde{x}_{\mathcal{B}} = \tilde{0}$ sau

$$\begin{cases} x^1 + x^3 &= 0 \\ x^2 + x^4 &= 0 \\ x^1 + x^3 &= 0 \\ x^2 + x^4 &= 0 \end{cases},$$

sistem care are soluţia generală $x^1 = -\alpha, x^2 = -\beta, x^3 = \alpha, x^4 = \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Atunci
$\dim Ker\, f = \dim V - rang\, A = 2$, defectul lui f şi
$Kerf = \{-\alpha\bar{e}_1 - \beta\bar{e}_2 + \alpha\bar{e}_3 + \beta\bar{e}_4 | \alpha, \beta \in \mathbf{R}\} =$
$= \{\alpha(\bar{e}_3 - \bar{e}_1) + \beta(\bar{e}_4 - \bar{e}_2) | \alpha, \beta \in \mathbf{R}\} = L(\bar{b}_1, \bar{b}_2)$ unde $\bar{b}_1 = \bar{e}_3 - \bar{e}_1$ şi $\bar{b}_2 = \bar{e}_4 - \bar{e}_2$.
Evident, $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2\}$ este bază a lui $Ker\, f$.
$Im\, f$ are dimensiunea egală cu rangul matricii A,
adică $\dim Imf = 2$ şi $Imf = \{f(\bar{x}) | \bar{x} \in V\} =$
$= \{(x^1 + x^3)(\bar{e}_1 + \bar{e}_3) + (x^2 + x^4)(\bar{e}_2 + \bar{e}_4) | x^i \in \mathbf{R}, i = \overline{1,4}\} =$
$= L(\bar{b}_3, \bar{b}_4)$, unde $\bar{b}_3 = \bar{e}_1 + \bar{e}_3$, $\bar{b}_4 = \bar{e}_2 + \bar{e}_4$.
Deci $\{\bar{b}_3, \bar{b}_4\}$ este bază pentru $Im\, f$.
Observaţie: Dacă $\{\bar{b}_i | i = \overline{1,4}\}$ sistem liniar independent, atunci $Ker\, f \oplus Im\, f = V$.

e)

$$\det(A - \lambda I_4) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow [(1-\lambda)^2 - 1]^2 = 0$ şi astfel există două valori proprii reale duble $\lambda_{1,2} = 0$ şi $\lambda_{3,4} = 2$.

Pentru $\lambda_{1,2} = 0$, avem $(A - 0 \cdot I_4) \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A\tilde{x}_{\mathcal{B}} =$ $\tilde{0}$ şi prin urmare subspaţiul propriu asociat valorii proprii duble $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ este $V_0 = Ker\, f = L(\bar{b}_1, \bar{b}_2)$. Deci $\bar{b}_1, \bar{b}_2$ sunt doi vectori proprii corespunzători valorii proprii 0, care formează bază pentru V_0.

Pentru $\lambda_{3,4} = 2$, avem $(A - 2 \cdot I_4)\tilde{x}_{\mathcal{B}} = \tilde{0} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} -x^1 + x^3 7 & = & 0 \\ -x^2 + x^4 & = & 0 \\ x^1 - x^3 & = & 0 \\ x^2 - x^4 & = & 0 \end{cases}$$

şi astfel un vector propriu corespunzător valorii proprii 2 este de forma $\bar{v} = \alpha(\bar{e}_1 + \bar{e}_3) + \beta(\bar{e}_2 = \bar{e}_4)$.

Deci subspaţiul propriu asociat lui $\lambda_{3,4} = 2$ este $V_2 = L(\bar{b}_3, \bar{b}_4) = Im\, f$.

f) Deoarece cele patru valori proprii $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 2, \lambda_4 = 2$ sunt reale şi multiplicităţile algebrice şi geometrice sunt egale ($m_{alg}(\lambda_i) = m_g(\lambda_i) = 2$, $i = \overline{1,4}$), rezultă că operatorul f este diagonalizabil. Adică, există o bază $\mathcal{B}^*$ a lui V, formată cu vectorii proprii $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3, \bar{b}_4$, relativ la care matricea lui f are forma diagonală

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

g) Dacă $L = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ este matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}^*$ atunci se ştie că $D = L^{-1}AL$ şi astfel $A = LDL^{-1}$.
Prin urmare
$A^n = (LDL^{-1})^n = (LDL^{-1})(LDL^{-1})\cdots(LDL^{-1}) = LD^nL^{-1}$.
Evident, $D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$, $\forall n \geq 1$.
Folosim lema substituţiei pentru a calcula inversa matricii L:

	$\overline{a}_1$	$\overline{a}_2$	$\overline{a}_3$	$\overline{a}_4$	$\overline{b}_1$	$\overline{b}_2$	$\overline{b}_3$	$\overline{b}_4$
$\overline{e}_1$	$\boxed{-1}$	0	1	0	1	0	0	0
$\overline{e}_2$	0	-1	0	1	0	1	0	0
$\overline{e}_3$	1	0	1	0	0	0	1	0
$\overline{e}_4$	0	1	0	1	0	0	0	1
$\overline{a}_1$	1	0	-1	0	-1	0	0	0
$\overline{e}_2$	0	$\boxed{-1}$	0	1	0	1	0	0
$\overline{e}_3$	0	0	2	0	1	0	1	0
$\overline{e}_4$	0	1	0	1	0	0	0	1
$\overline{a}_1$	1	0	-1	0	-1	0	0	0
$\overline{a}_2$	0	1	0	-1	0	-1	0	0
$\overline{e}_3$	0	0	$\boxed{2}$	0	1	0	1	0
$\overline{e}_4$	0	0	0	2	0	1	0	1
$\overline{a}_1$	1	0	0	0	-1/2	0	1/2	0
$\overline{a}_2$	0	1	0	-1	0	-1	0	0
$\overline{a}_3$	0	0	1	0	1/2	0	1/2	0
$\overline{e}_4$	0	0	0	$\boxed{2}$	0	1	0	1
$\overline{a}_1$	1	0	0	0	-1/2	0	1/2	0
$\overline{a}_2$	0	1	0	0	0	-1/2	0	1/2
$\overline{a}_3$	0	0	1	0	1/2	0	1/2	0
$\overline{a}_4$	0	0	0	1	0	1/2	0	1/2

Prin urmare $L^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ şi atunci se obţine

$$A^n = LD^nL^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

26. Fie V un spaţiu vectorial real cu baza $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ şi $f \in End(V)$ astfel încât $-1, 0, 1$ să fie valori proprii ale lui f şi $\bar{v}_1 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3$, $\bar{v}_2 = -\bar{e}_1 + \bar{e}_3$, $\bar{v}_3 = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3$ să fie vectori proprii ai lui f corespunzători valorilor proprii -1, 0, respectiv 1.
Găsiţi matricea lui f în raport cu baza $\mathcal{B}$.

Soluţie:

Deoarece la valori proprii distincte corespund vectori proprii liniari independenţi, rezultă că $\mathcal{B}' = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ este bază pentru V. Matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}'$ este $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi dacă notăm cu A matricea lui f relativ la baza $\mathcal{B}$ şi cu D matricea lui f relativ la baza $\mathcal{B}^{'}$, atunci avem $D = C^{-1}AC$. Dar $f(\bar{v}_1) = -\bar{v}_1$, $f(\bar{v}_2) = 0\bar{v}_2 = \bar{0}$ şi $f(\bar{v}_3) = \bar{v}_3$, adică $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Calculăm inversa matricii C.

	$\overline{a}_1$	$\overline{a}_2$	$\overline{a}_3$	$\overline{b}_1$	$\overline{b}_2$	$\overline{b}_3$
$\overline{e}_1$	$\boxed{1}$	-1	1	1	0	0
$\overline{e}_2$	1	0	2	0	1	0
$\overline{e}_3$	1	1	1	0	0	1
$\overline{a}_1$	1	-1	1	1	0	0
$\overline{e}_2$	0	$\boxed{1}$	1	-1	1	0
$\overline{e}_3$	0	2	0	-1	0	1
$\overline{a}_1$	1	0	2	0	1	0
$\overline{a}_2$	0	1	1	-1	1	0
$\overline{e}_3$	0	0	$\boxed{-2}$	1	-2	1
$\overline{a}_1$	1	0	0	1	-1	1
$\overline{a}_2$	0	1	0	-1/2	0	1/2
$\overline{a}_3$	0	0	1	-1/2	1	-1/2

Atunci $A = CDC^{-1} = \begin{pmatrix} -3/2 & 2 & -3/2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -3/3 & 2 & -3/2 \end{pmatrix}$.

27. Fie $V = \{f : [-1,1] \to \mathbf{R} / f \in C^\infty\}$ spaţiul funcţiilor de clasă C^∞ pe $[-1,1]$. Endomorfismul $\mathcal{S} : V \to V$,
$\mathcal{S}(f(x)) = \left[(x^2-1)f'(x)\right]'$, $(\forall) x \in [-1,1]$, se numeşte operatorul Sturm-Liouville. Să se arate că $\lambda_n = n(n+1)$, $n \in N$, sunt valorile proprii, iar vectorii $x \to P_n(x) = \frac{1}{n2^n}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]$, $n \in N$ sunt vectori proprii.

Soluţie:

Notăm $f_n(x) = (x^2-1)^n$. Avem egalitatea $(x^2-1) \cdot f_n'(x) = 2nx \cdot f_n(x)$. Derivând de $(n+1)$ ori ambii membrii şi utilizând formula Leibniz-Newton găsim

$(x^2-1) \cdot f_n^{(n+2)}(x) + 2x(n+1) \cdot f_n^{(n+1)}(x) + n(n+1) \cdot f_n^{(n)}(x) =$

$2nx \cdot f_n^{(n+1)}(x) + 2n(n+1) \cdot f_n^{(n)}(x)$ sau

$[(x^2-1) \cdot P_n'(x)] = n(n+1) \cdot P_n(x)$.

Deci $\mathcal{S}(P_n(x)) = n(n+1)P_n(x)$, ceea ce arată că λ_n sunt valorile proprii ale operatorului Sturm-Liouville, iar $P_n(x)$ sunt vectorii proprii corespunzători .

28. Să se determine valorile proprii şi vectorii proprii pentru matricile:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

b) $B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$;

Soluţie:

a) Polinomul caracteristic este $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda - 1)^4$.Valorile proprii sunt $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$.
Vectorii proprii se determină din sistemul $AX = 1X$, unde $X =^t (x_1, x_2, x_3, x_4)$.
Se obţine $\begin{cases} 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$, cu soluţia nenulă $x_2 = 2x_1 + x_3$, $x_4 = 2x_3$. Notând $x_1 = a$ şi $x_3 = b$, soluţia se scrie: $x_2 = 2a + b$, $x_4 = 2b$. Rezultă $X =^t (a, 2a + b, b, 2b) = a^t(1, 2, 0, 0) + b^t(0, 1, 1, 2)$.

Deci valorii proprii $\lambda = 1$ îi corespund doi vectori proprii $\bar{v}_1 = (1, 2, 0, 0)$ şi $\bar{v}_2 = (0, 1, 1, 2)$.

b)Polinomul caracteristic este $P(\lambda) = (\lambda - 1)^2 \cdot (\lambda + 2)$.

Valorile proprii sunt $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -2$.

Vectorii proprii sunt $\bar{v}_1 = (1, -2, 0)$, $\bar{v}_2 = (0, 0, 1)$ şi
$\bar{v}_3 = (1, -1, -1)$.

29. 1) Fie endomorfismul $\mathcal{A} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, definit prin
matricea $A = \begin{pmatrix} -3 & -7 & -5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.
Să se precizeze dacă $\mathcal{A}$ este diagonalizabil.
2) Fie endomorfismul $\mathcal{A} : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$,
$\mathcal{A}(\overline{x}) = (x_1 + x_4, x_2, x_3 - 2x_4, x_1 - 2x_3 + 5x_4)$,

$\overline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Să se arate că $\mathcal{A}$ este diagonalizabil şi să se determine matricea diagonală ataşată lui $\mathcal{A}$.

Soluţie:

1) Polinomul caracteristic este $P(\lambda) = (\lambda - 1)^3$, iar valorile proprii sunt $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. (ordinul de multiplicitate este $m_1 = 3$, triplă).

$$\text{rang}(A - 1I) = \text{rang}\begin{vmatrix} -4 & -7 & -5 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2,\ n - m_1 = 3 - 3 = 0\,.$$

Deci rang$(A - 1I) \neq n - m_1$. Aşadar endomorfismul $\mathcal{A}$ nu este diagonalizabil.

2) În raport cu baza canonică a lui $\mathbf{R}^4$, matricea lui este:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda(1 - \lambda)^2(\lambda - 6)$. Valorile proprii sunt $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = 6$. Ordinele de multiplicitate sunt $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $m_3 = 1$.
Deoarece rang$(A - \lambda_1 I) = 3 = n - m_1 = 4 - 1 = 3$.
Prin rezolvarea sistemului omogen $(A - 0I)X_1 = 0$, obţinem vectorul propriu $\overline{v}_1 = (-1, 0, 2, 1)$.
Analog rang$(A - \lambda_2 I) = 2 = n - m_1 = 4 - 2$ astfel încât $\dim S(\lambda_2) = 2$, unde $S(\lambda_2) = \{k\overline{x} \mid \mathcal{A}\overline{x} = \lambda_2 x,\ \lambda_2$ valoare proprie, $k \in K\}$. Vectorii proprii corespunzători sunt $\overline{v}_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\overline{v}_3 = (2, 0, 1, 0)$. Rang$(A - \lambda_4 I) = 3 = n - m_3$ aşa încât vectorul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_4 = 6$ este $\overline{v}_4 = (1, 0, -2, 5)$.
Deci endomorfismul $\mathcal{A}$ este diagonalizabil cu matricea diagonalizatoare C de forma

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Se obţine $D = C^{-1}AC$, adică $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

30. Să se reducă la forma canonică Jordan $\mathcal{A} : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$, $\mathcal{A}(\bar{x}) = (3x_1 + x_{2,} - 4x_1 - x_2, 7x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4, -17x_1 - 6x_2 - x_3)$, $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4$.

Soluţie:

În baza canonică a lui $\mathbf{R}^4$, endomorfismul $\mathcal{A}$ are matricea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ecuaţia caracteristică este $(1-\lambda)^4 = 0$ şi are soluţia $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1 = \lambda$ cu multiplicitatea $m_1 = 4$. Deoarece $\text{rang}(A - \lambda I) = 2$, numărul celulelor Jordan este egal cu $n - \text{rang}(A - \lambda I) = \dim S(\lambda) = 4 - 2 = 2$. Cele două celule pot fi una pătratică de ordinul întâi şi cealaltă pătratică de ordinul trei sau ambele pătratice de ordinul doi. Pentru a preciza ordinele celulelor folosim indicele de nilpotenţă al restricţiei $\mathcal{W}_1 = \frac{\mathcal{A}}{V_1} - \lambda J_1$, iar pentru aceasta trebuie să determinăm pe $V_1 = Ker(\mathcal{A} - \lambda J)^4$.

Deoarece

$$(A - \lambda I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 1 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obţinem $S(\lambda) = Ker(\mathcal{A} - \lambda I) \subset Ker(-\lambda J)^2 = Ker(\mathcal{A} - \lambda J)^3 = Ker(\mathcal{A} - \lambda J)^4 = V_1 = V = \mathbf{R}^4$. Deci restricţia $\mathcal{W}_1 = \frac{\mathcal{A}}{V_1} - \lambda J_1$ are indicele de nilpotenţă h_1 care este egal cu 2. Deoarece $\dim Ker(\mathcal{A} - \lambda J)^2 = 4$ şi $\dim Ker(\mathcal{A} - \lambda J) = \dim S(\lambda) = 2$ rezultă că numărul celulelor Jordan de tip $h_1 \times h_2$ cu $h_2 = 2$ este egal cu $\dim(a - \lambda J)^2 - \dim(a - \lambda I) = 4 - 2 = 2$.

În concluzie forma Jordan va fi dată de matricea
$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}$, unde $J_1 = J_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

31. Fie V un spaţiu vectorial real şi $\mathcal{B} = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n\}$ o bază a sa. Dacă considerăm
$V^* = \{f : V \to \mathbf{R} | f$ aplicaţie liniară$\}$
spaţiul vectorial dual spaţiului vectorial V şi aplicaţia
$h : V^* \to \mathbf{R}^n$, definită prin

$$h(f) = (f(\bar{a}_1), f(\bar{a}_2), \ldots, f(\bar{a}_n)) \ , \quad \forall f \in V^*$$

atunci arătaţi că h este un izomorfism de spaţii vectoriale reale.

Soluţie:

Arătăm că aplicaţia h este liniară şi bijectivă.
Fie $f, g \in V^*$ şi $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Atunci
$h(\alpha f + \beta g) = ((\alpha f + \beta g)(\bar{a}_1), \ldots, (\alpha f + \beta g)(\bar{a}_n)) =$
$= (\alpha f(\bar{a}_1) + \beta g(\bar{a}_1), \ldots, \alpha f(\bar{a}_n) + \beta g(\bar{a_n})) =$
$= \alpha\, (f(\bar{a}_1), \ldots, f(\bar{a}_n)) + \beta\, (g(\bar{a}_1), \ldots, g(\bar{a}_n)) = \alpha h(f) + \beta h(g)$.
Deci h este aplicaţie liniară.
Din $h(f) = h(g)$ rezultă că $f(\bar{a}_i) = g(\bar{a}_i)$, $\forall i = \overline{1, n}$ şi prin urmare $f = g$. (dacă două aplicaţii liniare coincid pe vectorii unei baze, atunci ele coincid pe tot spaţiul) Deci h este injectivă.
Fie $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^n$. Considerăm aplicaţia $f : V \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} x^i \alpha_i \ , \ \forall \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i \bar{a}_i \in V$$

Se observă că f este liniară, $f(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) = \alpha f(\bar{x}) + \beta f(\bar{y})$, şi $f(\bar{a}_j) = \alpha_j$, $\forall j = \overline{1, n}$. Deci $h(f) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ şi atunci h este surjectivă.
Deci h este izomorfism de spaţii vectoriale reale.

32. Fie $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\}$ baza canonică a spaţiului aritmetic $\mathbf{R}^n$ şi aplicaţiile $p^i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$,

$p^i(\bar{x}) = x^i$, $\forall \bar{x} = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbf{R}^n$ ($1 \leq i \leq n$).
a) Arătaţi că $p^i \in (\mathbf{R}^n)^*$, $\forall i = \overline{1,n}$;
b) Arătaţi că $\{p^1, p^2, \ldots, p^n\}$ este o bază pentru $(\mathbf{R}^n)^*$ şi anume chiar baza duală bazei $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\}$.

Soluţie:

a) $p^i(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) = \alpha x^i + \beta y^i = \alpha p^i(\bar{x}) + \beta p^i(\bar{y})$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\bar{x} = (x^1, \ldots, x^n)$, $\bar{y} = (y^1, \ldots, y^n) \in \mathbf{R}^n$, de unde rezultă că proiecţia canonică a lui $\mathbf{R}^n$ pe $\mathbf{R}$ (pe factorul "i" din produsul cartezian $\mathbf{R}^n$), $p^i \in (\mathbf{R}^n)^*$.
b) Se ştie că $\dim (\mathbf{R}^n)^* = \dim \mathbf{R}^n = n$. Prin urmare, pentru a demonstra că $\{p^1, p^2, \ldots, p^n\}$ este bază pentru $(\mathbf{R}^n)^*$, este suficient să verificăm că $\{p^1, p^2, \ldots, p^n\}$ este sistem liniar independent.
Într-adevăr, din $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i p^i = \mathbf{0}$ rezultă că $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i p^i\right)(\bar{x}) = 0$, $\forall \bar{x} = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbf{R}^n \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i p^i(\bar{x}) = 0 \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x^i = 0$, $\forall x^i \in \mathbf{R}$, $i = \overline{1,n}$.
Luăm $x^1 = 1, x^2 = 0, \ldots, x^n = 0$ şi obţinem $\alpha_1 = 0$, şi analog avem $\alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. Deci $\{p^1, p^2, \ldots, p^n\}$ este liniar independent, deci bază.
Cum $p^i(\bar{e}_i) = 1, \forall i = \overline{1,n}$ şi $p^i(\bar{e}_j) = 0, \forall j{=}i$ rezultă că $p^i(\bar{e}_j) = \delta^i_j$, adică $\{p^1, p^2, \ldots, p^n\}$ este duala bazei $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\}$.

2.2 Probleme propuse spre rezolvare

1. Fie V un spaţiu vectorial peste un corp comutativ K şi f un endomorfism al lui V. Se fac notaţiile $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$, ..., $f^n = f^{n-1} \circ f$. Arătaţi că au loc afirmaţiile:

   a) dacă $m \leq n$, atunci $Ker\ f^m \subseteq Ker\ f^n$;

   b) dacă există $p \geq 1$ astfel ca $Ker\ f^{n+p} = Ker\ f^n$ pentru un $n \geq 1$, fixat arbitrar, atunci $Ker\ f^{n+p} = Ker\ f^n$ are loc pentru orice $p \geq 1$;

c) $Ker\ f^n \cap Im\ f^n = \{\overline{0}\} \Leftrightarrow Ker\ f^{n+1} = Ker\ f^n$, pentru orice $n \geq 1$;

d) dacă $\dim V < \infty$, atunci există un număr natural $r \leq \dim V$ astfel ca $Ker\ f^r = Ker\ f^{r+1}$;

e) dacă $\dim E < \infty$, atunci există un număr natural $r \leq \dim V$ astfel ca $V = Ker\ f^r \oplus Im\ f^r$.

2. Fie $\mathbf{R}^3$ şi $\mathbf{R}^2$ spaţiile vectoriale aritmetice reale dotate cu bazele canonice $\mathcal{B}_1 = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$, respectiv $\mathcal{B}_2 = \{\overline{e}'_1, \overline{e}'_2\}$. Fie aplicaţia liniară $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, dată prin

   $f(\overline{e}_1) = \overline{e}'_1 + \overline{e}'_2,\ f(\overline{e}_2) = 2\overline{e}'_1 - 5\overline{e}'_2,\ f(\overline{e}_3) = \overline{e}'_1 + \sqrt{2}\overline{e}'_2.$

   a) Scrieţi matricea lui f relativ la bazele $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$.

   b) Dacă $\overline{x} = (1, 1, 2)$, atunci găsiţi vectorul $f(\overline{x})$.

   c) Este adevărat că $Ker\ f \oplus Im\ f = \mathbf{R}^3$? Justificaţi răspunsul.

3. Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ este matricea aplicaţiei liniare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, în raport cu baza canonică a lui $\mathbf{R}^3$, atunci se cer:

   a) determinaţi $f^{-1}(\{\overline{a}\})$, unde $\overline{a} = (1, 2, 1)$;

   b) determinaţi câte o bază şi dimensiunea pentru $Kerf$ şi Imf;

   c) este f un endomorfism diagonalizabil? Justificaţi răspunsul.

4. Fie $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ o aplicaţie liniară a cărei matrice în raport cu bazele canonice din $\mathbf{R}^3$ şi $\mathbf{R}^4$ este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

   a) Determinaţi rangul şi defectul aplicaţiei f.

b) Precizaţi câte o bază pentru $Ker\ f$ şi $Im\ f$.

c) Determinaţi o bază şi dimensiunea pentru subspaţiul $f(V)$, unde

$$V = \{\overline{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbf{R}^3 | x^1 - x^2 + 2x^3 = 0\}.$$

5. Fie $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $f(\overline{x}) = (x^1 + x^2 - x^3, 2x^1 + 2x^2 - 2x^3, -x^1 - x^2 + x^3)$, oricare ar fi $\overline{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbf{R}^3$. Se cer:

   a) Arătaţi că f este o aplicaţie liniară;

   b) Determinaţi câte o bază şi dimensiunea pentru $Ker\ f$ şi $Im\ f$;

   c) Este adevărat că $Ker\ f \oplus Im\ f = \mathbf{R}^3$? Justificare;

   d) Determinaţi valorile proprii şi vectorii proprii pentru f;

   e) Este f un endomorfism diagonalizabil? In caz afirmativ, determinaţi forma diagonală a matricii lui f şi baza lui $\mathbf{R}^3$ relativ la care f are forma diagonală.

6. Fie $f \in End(\mathbf{R}^3)$ care, în raport cu baza canonică a lui $\mathbf{R}^3$, are ecuaţiile:

$$\begin{cases} y^1 = x^1 + x^2 \\ y^2 = x^2 + x^3 \\ y^1 = x^1 + x^3 \end{cases}$$

   a) Stabiliţi că f este automorfism al lui $\mathbf{R}^3$;

   b) Determinaţi o bază şi dimensiunea subspaţiului $f(V)$, unde $V = \left\{\overline{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbf{R}^3 | x^1 + x^2 - x^3 = 0\right\}$;

   c) Este f un endomorfism diagonalizabil? Justificaţi răspunsul.

7. Fie $f \in End(K^3)$, care relativ la baza canonică a spaţiului vectorial aritmetic K^3 are matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Studiaţi dacă f este diagonalizabil şi găsiţi forma diagonală a matricii lui f, precum şi baza relativ la care f are acea matrice diagonală, dacă: a) $K = \mathbf{R}$; b) $K = \mathbf{C}$.

8. Să se determine câte o bază şi dimensiunea pentru nucleul şi imaginea aplicaţiei liniare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ pentru care $f(\overline{a}) = \overline{b}$, $f(\overline{b}) = \overline{c}$, $f(\overline{c}) = \overline{a}$, unde $\overline{a} = (1, 0, 1)$, $\overline{b} = (0, 1, 1)$, $\overline{c} = (1, 1, 0)$.

9. Se dau subspaţiile lui $\mathbf{R}^3$

   $V_1 = \left\{\overline{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbf{R}^3 | x^1 + x^2 + x^3 = 0\right\}$,

   $V_2 = \{(0, \alpha, 0) | \alpha \in \mathbf{R}\}$.

   Să se determine $f \in End(\mathbf{R}^3)$ astfel ca $Ker\ f = V_1$ şi $Im\ f = V_2$. Este f unic determinată? Justificaţi răspunsul.

10. Fie V un spaţiu vectorial real 2-dimensional. Să se determine toate endomorfismele f ale lui V cu proprietatea că $f \circ f = \mathbf{0}_V$.

Capitolul 3

Tensori

Fie bazele $\mathbf{B} = \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$, $\mathbf{B}' = \{\bar{e}_{1'}, \ldots, \bar{e}_{n'}\}$.

$$\bar{e}_{i'} = p^i_{i'} \bar{e}_i \tag{3.1}$$

(însumare după i).

Coeficienţii matricii trecerii inverse vor fi notaţi prin $q^{i'}_i$:

$$\bar{e}_i = q^{i'}_i \bar{e}_{i'} \tag{3.2}$$

(însumare după i'). Matricea $q^{i'}_i$ este inversa matricii $p^i_{i'}$, ceea ce poate fi scris astfel

$$p^i_{i'} q^{i'}_j = \begin{cases} 0, \text{ pentru } i \neq j, \\ 1, \text{ pentru } i = j, \end{cases} \tag{3.3}$$

sau prin egalitatea

$$p^i_{i'} q^{j'}_i = \begin{cases} 0, \text{ pentru } i' \neq j', \\ 1, \text{ pentru } i' = j'. \end{cases} \tag{3.4}$$

Pentru prescurtarea scrierii, mărimea depinzând de indicii i şi j, egală cu 0 pentru $i \neq j$ şi cu 1 dacă $i = j$ se notează cu δ^i_j (simbolul lui Kronecker); relaţia (3.3) se scrie echivalent

$$p^i_{i'} q^{i'}_j = \delta^i_j \tag{3.5}$$

iar relaţia (3.4) se scrie

$$p^i_{i'} q^{j'}_i = \delta^{i'}_{j'}\,, \tag{3.6}$$

În continuare vom prezenta ca un caz particular noţiunea de tensor de ordinul al doilea.

După cum un vector $\bar{x}$ în spaţiul euclidian tridimensional este caracterizat prin trei componente ξ^i $(i = 1, 2, 3)$, un tensor de ordinul al doilea, pe care îl vom nota prin T, este caracterizat într-o bază $\mathbf{B}'$ formată din trei elemente prin componentele ξ^{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$, iar într-o bază $\mathbf{B}'$ prin componentele $\xi^{i'j'}$ $(i', j' = 1, 2, 3)$. Între aceste componente se impun relaţiile

$$\xi^{i'j'} = q^{i'}_i q^{j'}_j \xi^{ij} \ \left(i', j' = 1, 2, 3\right) \tag{3.7}$$

(însumare după $i = 1, 2, 3$ şi $j = 1, 2, 3$).

Se poate acum trece la definiţia propriu zisă a noţiunii de tensor în general. Tensorii se împart în covarianţi, contravarianţi şi micşti. În plus, orice tensor are un ordin bine determinat (numărul de indici defineşte ordinul tensorului).

Începem cu definiţia tensorului covariant de ordinul trei.

Presupunem că există o regulă care permite ca în fiecare sistem de coordonate dintr-un spaţiu n-dimensional V_n să se construiască n^3 numere T_{ijk} (componentele tensorului), fiecare fiind definit pentru indicii i, j, k fixaţi între 1 şi n. Aceste numere T_{ijk} formează, prin definiţie, un tensor covariant de ordinul trei dacă transformarea mărimilor i, j, k prin trecerea la o nouă bază se realizează prin formula

$$T_{i'j'k'} = p^i_{i'} p^j_{j'} p^k_{k'} T_{ijk}\,.$$

În mod analog se definesc tensorii covarianţi de orice ordin; un tensor de ordin m are n^m componente (şi nu n^3) şi în formula de transformare se află nu trei factori de forma $p^i_{i'}$ ci m astfel de factori.

Dăm acum noţiunea de tensor contravariant de ordinul trei. Presupunem că există o regulă care permite ca în fiecare sistem de coordonate să se construiască n^3 numere T^{ijk}, fiecare din ele fiind definit pentru indicii i, j, k cuprinşi între 1 şi n. Aceste numere T^{ijk}

formează un tensor contravariant de ordin trei dacă transformarea mărimilor T^{ijk} prin schimbarea bazei are loc după formula

$$T^{i'j'k'} = q_i^{i'} q_j^{j'} q_k^{k'} T^{ijk} .$$

În mod analog se definesc tensori contravarianţi de orice ordin. În particular, coordonatele unui vector $\bar{x}$ formează un tensor contravariant de ordinul întâi.

Termenii "covariant" şi "contravariant", introduşi mai înainte, se explică în modul următor. "Covariant" înseamnă "care se schimbă la fel" cu vectorii unei baze, adică prin utilizarea coeficienţilor $p_{i'}^{i}$. "Contravariant" înseamnă "care se schimbă invers", adică prin utilizarea coeficienţilor $q_i^{i'}$.

Se pot de asemenea considera tensori micşti. De exemplu, n^3 numere T_{ij}^{k} date în fiecare sistem de coordonate, formează un tensor mixt de ordinul trei, de două ori covariant şi o dată contravariant, dacă transformarea acestor mărimi prin trecerea la o nouă bază se realizează după formula

$$T_{i'j'}^{k'} = p_{i'}^{i} p_{j'}^{j} q_k^{k'} T_{ij}^{k} .$$

În mod analog se definesc tensori micşti de l ori covarianţi şi de m ori contravarianţi.

1. Să se arate că mărimile δ_i^j formează un tensor de ordinul doi, o dată covariant şi o dată contravariant.

   Soluţie:

   Caracterul tensorial al mărimii δ_i^j ar fi demonstrat dacă această mărime ar putea fi pusă sub forma:

   $$\delta_i^j = p_i^{i'} q_{j'}^{j} \delta_{i'}^{j'}$$

   În acest scop, pornim de la modul de definire al simbolului lui Kronecker şi anume

   $$\delta_i^j = p_i^{i'} q_{i'}^{j} .$$

Ţinând cont de faptul că $\delta_j^j = 1$, rezultă că înmulţind egalitatea anterioară cu $\delta_j^j = p_j^{j'} q_{j'}^j$, aceasta rămâne neschimbată. Se obţine astfel

$$\delta_i^j = p_i^{i'} \cdot q_{i'}^j \cdot p_j^{j'} \cdot q_{j'}^j = p_i^{i'} \cdot q_{j'}^j \cdot (p_j^{j'} \cdot q_{i'}^j) = $$
$$= p_i^{i'} \cdot q_{j'}^j \cdot \delta_{i'}^{j'},$$

adică ceea ce trebuia demonstrat.

2. Un sistem de mărimi S_{ij} este definit în fiecare sistem de coordonate prin rezolvarea sistemului de ecuaţii

$$T^{ik} S_{ij} = \delta_j^i,$$

unde T^{ik} reprezintă un tensor contravariant de rang doi, astfel încât $\det(T^{ik})$=0.
Să se arate că S_{ij} este un tensor covariant de ordinul doi.

Soluţie:

Arătăm, pentru început, că T_{ik} este un tensor covariant de ordinul doi.
Pornim de la identitatea $T_{ik} \cdot T^{ik} = T$, unde T este un invariant (număr). Acest lucru este posibil întrucât T^{ik} este un tensor contravariant de ordinul doi şi $\det(T^{ik})$=0.
Identitatea precedentă se poate scrie astfel
$T_{ik} \cdot q_{i'}^i \cdot q_{k'}^k \cdot T^{i'k'} = T$,
sau $T_{ik} p_i^{i'} \cdot q_{i'}^i \cdot p_k^{k'} \cdot q_{k'}^k \cdot T^{i'k'} = p_i^{i'} p_k^{k'} T$,
adică $T_{ik} \cdot \delta_{i'}^{i'} \cdot \delta_{k'}^{k'} \cdot T^{i'k'} = p_i^{i'} \cdot p_k^{k'} \cdot T$.
Ultima egalitate se poate scrie sub forma
$T_{ik} \cdot \delta_{i'}^{i'} \cdot \delta_{k'}^{k'} \cdot T^{i'k'} \cdot T_{i'k'} = p_i^{i'} \cdot p_k^{k'} \cdot T \cdot T_{i'k'}$,
de unde se obţine că (având $\delta_{i'}^{i'} = \delta_{k'}^{k'} = 1$):
$T_{ik} \cdot T = T \cdot p_i^{i'} \cdot p_k^{k'} \cdot T_{i'k'}$,
adică $T_{ik} = p_i^{i'} \cdot p_k^{k'} T_{i'k'}$, ceea ce trebuia demonstrat.
În continuare, pornind de la sistemul de coordonate dat de

problemă obţinem:

$$T_{ik} \cdot T^{ik} \cdot S_{ij} = T_{ik} \cdot \delta_j^k \, ,$$

adică $T \cdot S_{ij} = T_{ij}$ (sumare după $k(= j)$).
Dar T_{ij} am arătat că este un tensor covariant de ordinul doi, iar T este un număr. Deci avem că S_{ij} este un tensor covariant de ordinul doi.

3. Dacă ξ^i reprezintă coordonatele unui vector $\bar{x}$, iar l_i reprezintă coeficienţii unei forme liniare, precizaţi care este interpretarea geometrică pentru $l_i \xi^i$?

Capitolul 4

Forme biliniare. Forme pătratice

Definiţia 4.1. O funcţie numerică $A(\bar{x}, \bar{y})$ de două argumente vectoriale $\bar{x}, \bar{y}$ dintr-un spaţiu vectorial V, $A : V \times V \to \mathbf{R}$ se numeşte funcţie biliniară sau formă biliniară, dacă ea este funcţie liniară de $\bar{x}$ pentru fiecare $\bar{y}$ fixat şi funcţie liniară de $\bar{y}$ pentru fiecare $\bar{x}$ fixat.

Altfel spus, $A(\bar{x}, \bar{y})$ este o formă biliniară de $\bar{x}$ şi $\bar{y}$ dacă pentru orice $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in V$ şi pentru orice $\alpha \in \mathbf{R}$ au loc relaţiile

$$\begin{cases} A(\bar{x} + \bar{z}, \bar{y}) = A(\bar{x}, \bar{y}) + A(\bar{z}, \bar{y}) \ , \\ A(\alpha\bar{x}, \bar{y}) = \alpha A(\bar{x}, \bar{y}) \ , \\ A(\bar{x}, \bar{y} + \bar{z}) = A(\bar{x}, \bar{y}) + A(\bar{x}, \bar{z}) \ , \\ A(\bar{x}, \alpha\bar{y}) = \alpha A(\bar{x}, \bar{y}) \ . \end{cases} \tag{4.1}$$

Presupunem că într-un spaţiu vectorial n-dimensional V_n o bază oarecare $\mathbf{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$. Notăm $A(\bar{e}_i, \bar{e}_k) = a_{ik}$ $(i, k = 1, 2, \dots, n)$.

Atunci pentru orice $\bar{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \bar{e}_i$, $\bar{y} = \sum\limits_{k=1}^{n} \eta_k \bar{e}_k$, avem

$$\begin{aligned} & A(\bar{x}, \bar{y}) = A\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \bar{e}_i \, , \, \sum_{k=1}^{n} \eta_k \bar{e}_k \right) = \\ & = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_i \eta_k A(\bar{e}_i, \bar{e}_k) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \xi_i \eta_k \, . \end{aligned} \tag{4.2}$$

Aşadar, am indicat reprezentarea cea mai generală a unei funcţii biliniare într-un spaţiu vectorial n-dimensional. Coeficienţii $a_{ik} = A(\bar{e}_i, \bar{e}_k)$ formează o matrice pătratică

$$A = A_{(\mathbf{B})} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ik})_{1 \leq i,k \leq n}$$

pe care o numim matricea formei biliniare $A(\bar{x}, \bar{y})$ în baza $\mathbf{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$.

Definiţia 4.2. O formă biliniară $A(\bar{x}, \bar{y})$ se numeşte simetrică dacă pentru orice vectori $\bar{x}$ şi $\bar{y}$

$$A(\bar{x}, \bar{y}) = A(\bar{y}, \bar{x}) \ .$$

Afirmaţia 4.1. Dacă forma biliniară $A(\bar{x}, \bar{y})$ în spaţiul n-dimensional V_n este simetrică atunci

$$a_{ik} = A(\bar{e}_i, \bar{e}_k) = A(\bar{e}_k, \bar{e}_i) = a_{ki} \,;$$

aşadar, matricea $A_{(\mathbf{B})}$ a unei forme biliniare simetrice în orice bază $\mathbf{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ a spaţiului V_n coincide cu matricea transpusă $A^t_{(\mathbf{B})}$.

Are loc şi afirmaţia inversă.

Reamintim că o matrice pătratică care coincide cu transpusa sa se numeşte matrice simetrică.

Prin trecerea la o nouă bază, matricea formei biliniare se modifică şi vom indica în ce mod. Fie $A_{(\mathbf{B})} = (a_{ji})_{1 \leq j,i \leq n}$ matricea unei forme biliniare $A(\bar{x}, \bar{y})$ într-o bază $\mathbf{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ şi $A_{(\mathbf{B'})} = (b_{ik})_{1 \leq i,k \leq n}$ matricea aceleiaşi forme în baza $\mathbf{B'} = \{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n\}$ $(i, j, k = 1, 2, \dots, n)$ şi presupunem că formulele de trecere de la o bază la alta au forma

$$\bar{f}_j = \sum_{j=1}^{n} p_j^{(i)} \bar{e}_j \ (i = 1, 2, \dots, n)$$

cu matricea de trecere $P = \left(p_j^{(i)}\right)_{1\leq i,j\leq n}$. În acest caz

$$\begin{aligned} b_{ik} &= A\left(\bar{f}_i, \bar{f}_k\right) = A\left(\sum_{j=1}^{n} p_j^{(i)} \bar{e}_j, \sum_{l=1}^{n} p_l^{(k)} \bar{e}_l\right) = \\ &= \sum_{j,l=1}^{n} p_j^{(i)} p_l^{(k)} A\left(\bar{e}_j, \bar{e}_l\right) = \sum_{j,l=1}^{n} p_j^{(i)} p_l^{(k)} a_{jl}\,. \end{aligned}$$

Formula obţinută se scrie

$$b_{ik} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \left(p_i^{(j)}\right)^t a_{jl} p_l^{(k)}\,, \tag{4.3}$$

unde $\left(p_i^{(j)}\right)^t = p_j^{(i)}$ este elementul matricii P^t, transpusa lui P (pentru a determina elementul în forma (4.3) pornim de la
$b_{ik} = \sum\limits_{j,l=1}^{n} p_j^{(i)} p_l^{(k)} a_{jl} = \sum\limits_{l=1}^{n} p_l^{(k)} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} p_j^{(i)} a_{jl}\right)$, notăm $\sum\limits_{j=1}^{n} p_j^{(i)} a_{jl} = c_{il}$;
în aceste condiţii expresia lui b_{ik} este dată de
$b_{ik} = \sum\limits_{l=1}^{n} p_l^{(k)} c_{il} = \sum\limits_{l=1}^{n} c_{il} \left(p_k^{(l)}\right)^t =$
$= \sum\limits_{l=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} p_j^{(i)} a_{jl} \left(p_k^{(l)}\right)^t = \sum\limits_{j,l=1}^{n} \left(p_i^{(j)}\right)^t a_{jl} p_l^{(k)}$).

Aşadar formula (4.3) se scrie matricial astfel

$$A_{(\mathbf{B'})} = P^t A_{(\mathbf{B})} P \tag{4.4}$$

(b_{ik} scris sub formă matricială (4.3) asigură îndeplinirea condiţiei pentru produsul matricilor).

Dacă forma biliniară $A\left(\bar{x}, \bar{y}\right)$ are rangul n, egal cu dimensiunea spaţiului V_n, atunci acea formă se numeşte nesingulară sau nedegenerată.

Definiţia 4.3. Prin formă pătratică pe un spaţiu vectorial V se înţelege orice funcţie $A\left(\bar{x}, \bar{x}\right)$ de un argument vectorial $\bar{x} \in V$, care se obţine dintr-o formă biliniară oarecare $A\left(\bar{x}, \bar{y}\right)$, înlocuind $\bar{y}$ cu $\bar{x}$.

Într-un spaţiu vectorial n-dimensional V_n cu o baza **B**$= \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\}$, orice formă pătratică se scrie în modul următor:

$$A(\bar{x}, \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \xi_i \xi_k \,, \tag{4.5}$$

unde $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sunt coordonatele vectorului $\bar{x}$ relativ la baza **B**.

Aşadar, în general, pentru o formă pătratică dată, pot exista mai multe forme biliniare generând forma pătratică considerată.

Afirmaţia 4.2. Există un caz important în care forma biliniară poate fi determinată cunoscând forma pătratică asociată: anume, cazul când forma biliniară este simetrică.

Afirmaţia 4.3. Pe de altă parte, pentru a obţine din formele biliniare toate formele pătratice posibile, este suficient să ne restrângem la forme biliniare simetrice.

Observaţia 4.1. Conform acestor consideraţii, în utilizarea formelor biliniare pentru studiul formelor pătratice este suficient să ne mărginim la forme biliniare simetrice şi la matrici simetrice corespunzătoare $(a_{jk})_{1\le j,k\le n}$, $a_{jk} = a_{kj}$.

Definiţia 4.4. O matrice simetrică $A = (a_{jk})_{1\le j,k\le n}$ a unei forme biliniare simetrice $A(\bar{x}, \bar{y})$ corespunzând unei forme pătratice $A(\bar{x}, \bar{x})$ se numeşte matricea acelei forme pătratice.

Observaţia 4.2. La schimbarea bazei, matricea A a unei forme pătratice $A(\bar{x}, \bar{x})$ coincide cu matricea formei biliniare simetrice corespunzătoare $A(\bar{x}, \bar{y})$ şi se schimbă ca aceasta din urmă:

$$A_{(\mathbf{B'})} = P^t A_{(\mathbf{B})} P \,,$$

unde P este matricea de trecere de la baza **B** la baza **B'**.

Observaţia 4.3. Rangul matricii unei forme pătratice nu depinde de alegerea bazei. De aceea se poate vorbi despre rangul formei pătratice $A(\bar{x}, \bar{x})$, subînţelegând prin aceasta rangul matricii acestei forme în orice bază a spaţiului V_n . Orice formă pătratică de rang n, egal cu dimensiunea spaţiului, se numeşte nesingulară.

Considerăm o formă pătratică oarecare $A(\bar{x}, \bar{x})$ într-un spaţiu vectorial n-dimensional.

Teorema 4.1. În spaţiul V_n există o bază $\mathbf{B}' = \{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots, \bar{f}_n\}$ în care pentru orice vector $\bar{x} = \sum_{k=1}^{n} \eta_k \bar{f}_k$ valoarea formei pătratice $A(\bar{x}, \bar{x})$ se calculează după formula

$$A(\bar{x}, \bar{x}) = \lambda_1 \eta_1^2 + \lambda_2 \eta_2^2 + \ldots + \lambda_n \eta_n^2 \,, \tag{4.6}$$

unde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sunt numere fixate.

Orice bază care are această proprietate se va numi bază canonică a lui $A(\bar{x}, \bar{x})$; în particular, numerele $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ vor fi numite coeficienţii canonici ai formei $A(\bar{x}, \bar{x})$.

Metoda Jacobi ne permite să determinăm aceşti coeficienţi şi coordonatele vectorilor bazei canonice căutate. Pentru aceasta impunem matricii $A_{(\mathbf{B}')}$ următoarea condiţie suplimentară: toţi minorii din colţurile din stânga sus ai matricii $A_{(\mathbf{B}')}$ până la ordinul $n-1$ inclusiv, adică $\delta_1 = a_{11}, \delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, ..., \delta_{n-1} =$ $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n-1} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n-1} \\ .... & .... & ... & .... \\ a_{n-11} & a_{n-12} & ... & a_{n-1n-1} \end{vmatrix}$ să fie diferiţi de zero.

Vectorii $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ sunt construiţi după formulele

$$\begin{cases} \bar{e}_1 = \bar{f}_1, \\ \bar{e}_2 = \alpha_1^{(1)} \bar{f}_1 + \bar{f}_2, \\ \bar{e}_3 = \alpha_1^{(2)} \bar{f}_1 + \alpha_2^{(2)} \bar{f}_2 + \bar{f}_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \bar{e}_{k+1} = \alpha_1^{(k)} \bar{f}_1 + \alpha_2^{(k)} \bar{f}_2 + \alpha_3^{(k)} \bar{f}_3 + \ldots + \alpha_k^{(k)} \bar{f}_k + \bar{f}_{k+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \bar{e}_n = \alpha_1^{(n-1)} \bar{f}_1 + \alpha_2^{(n-1)} \bar{f}_2 + \alpha_3^{(n-1)} \bar{f}_3 + \ldots + \alpha_{n-1}^{(n-1)} \bar{f}_{n-1} + \bar{f}_n, \end{cases} \tag{4.7}$$

unde coeficienţii $\alpha_i^{(k)}$ $(i = 1, 2, ..., k; k = 1, 2, ..., n-1)$ sunt deocamdată nedeterminaţi.

Impunem coeficienţilor $\alpha_i^{(k)}$ $(i = 1, 2, ..., k)$ condiţiile

$$A\left(\bar{e}_{k+1}, \bar{f}_1\right) = 0, A\left(\bar{e}_{k+1}, \bar{f}_2\right) = 0, \ldots, A\left(\bar{e}_{k+1}, \bar{f}_k\right) = 0\,. \tag{4.8}$$

Înlocuind în (4.8) expresia (4.7) a lui $\bar{e}_{k+1}$ şi folosind definiţia formei biliniare, se obţine sistemul liniar de ecuaţii relativ la mărimile $\alpha_i^{(k)}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$:

$$\begin{cases} A\left(\bar{e}_{k+1}, \bar{f}_1\right) = \alpha_1^{(k)} A\left(\bar{f}_1, \bar{f}_1\right) + \alpha_2^{(k)} A\left(\bar{f}_2, \bar{f}_1\right) + \cdots + \\ +\alpha_k^{(k)} A\left(\bar{f}_k, \bar{f}_1\right) + A\left(\bar{f}_{k+1}, \bar{f}_1\right) = 0, \\ A\left(\bar{e}_{k+1}, \bar{f}_2\right) = \alpha_1^{(k)} A\left(\bar{f}_1, \bar{f}_2\right) + \alpha_2^{(k)} A\left(\bar{f}_2, \bar{f}_2\right) + \cdots + \\ +\alpha_k^{(k)} A\left(\bar{f}_k, \bar{f}_2\right) + A\left(\bar{f}_{k+1}, \bar{f}_2\right) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A\left(\bar{e}_{k+1}, \bar{f}_k\right) = \alpha_1^{(k)} A\left(\bar{f}_1, \bar{f}_k\right) + \alpha_2^{(k)} A\left(\bar{f}_2, \bar{f}_k\right) + \cdots + \\ +\alpha_k^{(k)} A\left(\bar{f}_k, \bar{f}_k\right) + A\left(\bar{f}_{k+1}, \bar{f}_k\right) = 0. \end{cases} \tag{4.9}$$

Acest sistem neomogen de ecuaţii cu coeficienţii $A\left(\bar{f}_i, \bar{f}_j\right) = a_{ij}$, unde $i, j = 1, 2, \ldots, k$, are prin ipoteză determinantul diferit de zero şi prin urmare este compatibil şi determinat; aşadar se pot determina mărimile $\alpha_i^{(k)}$ şi în acelaşi timp se poate construi vectorul căutat $\bar{e}_{k+1}$. Pentru determinarea tuturor coeficienţilor $\alpha_i^{(k)}$ şi a tuturor vectorilor $\bar{e}_k$ este necesar ca pentru fiecare k să fie rezolvat sistemul corespunzător (4.9), adică un sistem de $n-1$ ecuaţii liniare. Notăm coordonatele vectorului $\bar{x}$ în baza $\mathbf{B}= \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\}$ cu $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ şi coordonatele lui $\bar{y}$ în aceeaşi bază prin $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$.

Se poate construi o bază (ca mai sus) în care forma biliniară $A(\bar{x}, \bar{y})$ poate fi exprimată sub forma

$$A(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i \eta_i, \tag{4.10}$$

unde ξ_i, η_i reprezintă coordonatele vectorilor $\bar{x}$, $\bar{y}$ în baza respectivă.

Pentru a calcula coeficienţii λ_i vom folosi formulele

$$\begin{array}{l} \lambda_1 = \delta_1 = a_{11}, \\ \lambda_2 = \frac{\delta_2}{\delta_1}, \\ \lambda_3 = \frac{\delta_3}{\delta_2}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \lambda_n = \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} \end{array} \tag{4.11}$$

Conform teoremei privind reducerea unei forme pătratice la forma canonică, orice formă pătratică $A(\bar{x},\bar{x})$ se reduce într-o anumită bază la forma canonică

$$A(\bar{x},\bar{x}) = \lambda_1\eta_1^2 + \cdots + \lambda_n\eta_n^2.$$

Printre numerele reale $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ există atâtea numere nenule cât rangul matricii formei $A(\bar{x},\bar{x})$. Ele sunt pozitive sau negative.

Teorema 4.2. (Legea inerţiei pentru forme pătratice a lui Sylvester) Numărul coeficienţilor pozitivi şi numărul coeficienţilor negativi în forma pătratică $A(\bar{x},\bar{x})$ sunt invarianţi ai formei (adică nu depind de alegerea bazei canonice).

Definiţia 4.5. O formă pătratică se numeşte pozitiv (negativ) definită, dacă $A(\bar{x},\bar{x}) > 0$ ($A(\bar{x},\bar{x}) < 0$) pentru orice $\bar{x} \in V$; forma $A(\bar{x},\bar{x})$ se numeşte pozitiv (negativ) semidefinită dacă $A(\bar{x},\bar{x}) \geq 0$ ($A(\bar{x},\bar{x}) \leq 0$) pentru orice $\bar{x} \in V$ (există cel puţin un $\bar{x}_1 \in V$ astfel încât $A(\bar{x}_1,\bar{x}_1) = 0$).

Observaţia 4.4. Forma $A(\bar{x},\bar{x})$ se numeşte nedefinită dacă există $\bar{x}_1 \in V$ astfel încât $A(\bar{x}_1,\bar{x}_1) > 0$ şi există $\bar{x}_2 \in V$ încât $A(\bar{x}_2,\bar{x}_2) < 0$.

4.1 Probleme rezolvate

1. Să se scrie sub formă de sumă de pătrate forma pătratică:
   $f(\bar{x}) = (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 + 2x^1x^2 + x^2x^3 + 2x^3x^1$,
   $\bar{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbf{R}^3$.

   Soluţie:

   $f(\bar{x}) = (x^1 + x^2 + x^3)^2 - 2(x^3)^2 - x^2x^3 =$
   $= (x^1 + x^2 + x^3)^2 + \frac{1}{8}(x^2)^2 - \frac{1}{8}(x^2 + 4x^3)^2$.

   Dacă punem $\begin{cases} \xi^1 &= x^1 + x^2 + x^3 \,, \\ \xi^2 &= x^2 \,, \\ \xi^3 &= x^2 + 4x^3 \end{cases}$

   se obţine $f(\bar{x}) = (\xi^1)^2 + \frac{1}{8}(\xi^2)^2 - \frac{1}{8}(\xi^3)^2$.

2. Fie forma pătratică
   $f(\bar{x}) = (x^1)^2 + (x^2)^2 - 3(x^3)^2 + (x^4)^2 - x^1x^2 + 3x^2x^3 + 5x^3x^4$,

$\bar{x} = (x^1, x^2, x^3, x^4) \in \mathbf{R}^4$.
Să se aducă la forma canonică folosind metoda lui Jacobi, apoi cea a lui Gauss.

Soluţie:

Avem $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{vmatrix} = 3/4$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & -3 \end{vmatrix} = -9/2$,
$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 3/2 & 0 \\ 0 & 3/2 & -3 & 5/2 \\ 0 & 0 & 5/2 & 1 \end{vmatrix} = -147/16$.
Forma pătratică în noua bază este

$$f(\bar{x}) = (\xi^1)^2 + \frac{4}{3}(\xi^2)^2 - \frac{1}{6}(\xi^3)^2 + \frac{24}{49}(\xi^4)^2 \ ,.$$

Folosind metoda lui Gauss, avem:
$f(\bar{x}) = (x^1 - \frac{1}{2}x^2)^2 + \frac{3}{4}(x^2)^2 + 3x^2x^3 - 3(x^3)^2 + (x^4)^2 + 5x^3x^4 =$
$= (x^1 - \frac{1}{2}x^2)^2 + \frac{3}{4}(x^2 + 2x^3)^2 - 6(x^3)^2 + 5x^3x^4 + (x^4)^2 =$
$= (x^1 - \frac{1}{2}x^2)^2 + \frac{3}{4}(x^2 + 2x^3)^2 - 6(x^3 - \frac{5}{12}x^4)^2 + \frac{147}{72}(x^4)^2$.
Deci, forma canonică este

$$f(\bar{x}) = (\xi^1)^2 + \frac{3}{4}(\xi^2)^2 - 6(\xi^3)^2 + \frac{147}{72}(\xi^4)^2 \,,$$

unde $\begin{cases} \xi^1 &= x^1 - \frac{1}{2}x^2 \\ \xi^2 &= x^2 + 2x^3 \\ \xi^3 &= x^3 - \frac{5}{12}x^4 \\ \xi^4 &= x^4 \end{cases}$.

Se observă că prin ambele metode obţinem acelaşi număr de pătrate, iar numărul coeficienţilor pozitivi este egal cu 3.

3. Fie $\mathbf{P}_2$ spaţiul vectorial al polinoamelor de o nedeterminată cu coeficienţi reali de grad cel mult 2. Definim forma biliniară

$$B(Q_1, Q_2) = \int_0^1 \widetilde{Q}_1(t) \cdot \widetilde{Q}_2(t)\, dt\,,\ \forall Q_1, Q_2 \in \mathbf{P}_2,$$

unde $\widetilde{Q}_1(t)$, $\widetilde{Q}_2(t)$ sunt funcţiile polinomiale asociate polinoamelor Q_1, Q_2.

Să se determine matricea formei B în raport cu baza $\mathcal{B} = \{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3\}$, unde $\mathcal{P}_1 = X^2 + X + 1$, $\mathcal{P}_2 = X + 1$, $\mathcal{P}_3 = 1$.

Soluţie:

Vom determina mai întâi matricea lui B în baza canonică $\mathcal{B}_c = \{X^2, X, 1\}$. Deoarece se observă că forma este simetrică, pentru a forma această matrice avem nevoie de următorii coeficienţi:

$$b_{11} = \int_0^1 t^2 \cdot t^2 \, dt = \int_0^1 t^4 \, dt = \frac{t^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{1}{5};$$

$$b_{12} = \int_0^1 t^2 \cdot t \, dt = \int_0^1 t^3 \, dt = \frac{t^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4};$$

$$b_{13} = \int_0^1 t^2 \cdot 1 \, dt = \int_0^1 t^2 \, dt = \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3};$$

$$b_{22} = \int_0^1 t \cdot t \, dt = \int_0^1 t^2 \, dt = \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3};$$

$$b_{23} = \int_0^1 t \cdot 1 \, dt = \int_0^1 t \, dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2};$$

$$b_{33} = \int_0^1 1 \cdot 1 \, dt = \int_0^1 1 \, dt = t \Big|_0^1 = 1;$$

Formăm matricea $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$. Exprimarea vectorilor din noua bază în funcţie de vectorii ce alcătuiesc baza canonică este:

$$\begin{cases} \mathcal{P}_1 = P_1 + P_2 + P_3 \\ \mathcal{P}_2 = P_1 + P_2 \\ \mathcal{P}_3 = P_1 \end{cases}$$

Matricea de trecere de la o bază la alta, formată cu componentele vectorilor $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$ este $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Atunci, conform formulei de schimbare a matricei asociate unei forme biliniare la schimbarea bazei, notând cu $\mathcal{A}$ matricea căutată, vom avea:

$$\mathcal{A} = M^T \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{60} \begin{pmatrix} 47 & 65 & 110 \\ 27 & 35 & 50 \\ 12 & 15 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{60} \begin{pmatrix} 222 & 112 & 47 \\ 112 & 59 & 27 \\ 47 & 27 & 12 \end{pmatrix}.$$

Observaţie: problema poate fi rezolvată şi calculând direct în baza $\mathcal{B}$ coeficienţii matricei asociate.

4. Fie $b : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ o formă biliniară pe spaţiul vectorial real V. Arătaţi că b este antisimetrică dacă şi numai dacă $b(\bar{x}, \bar{x}) = 0$, $\forall \bar{x} \in V$.

   Soluţie:

   Dacă b este antisimetrică, înseamnă că $b(\bar{x}, \bar{y}) = -b(\bar{y}, \bar{x})$, $\forall \bar{x}, \bar{y} \in V$. Luând $\bar{x} = \bar{y}$ rezultă că $b(\bar{x}, \bar{x}) = -b(\bar{x}, \bar{x})$, $\forall \bar{x} \in V$, adică $b(\bar{x}, \bar{x}) = 0$, $\forall \bar{x} \in V$.
   Invers, dacă $b(\bar{x}, \bar{x}) = 0$, $\forall \bar{x} \in V$, luăm $\bar{x} = \bar{a} + \bar{b}$, $\bar{a}, \bar{b} \in V$, arbitrari şi rezultă că
   $0 = b(\bar{a} + \bar{b}, \bar{a} + \bar{b}) = b(\bar{a}, \bar{a} + \bar{b}) + b(\bar{b}, \bar{a} + \bar{b}) =$
   $= b(\bar{a}, \bar{a}) + b(\bar{a}, \bar{b}) + b(\bar{b}, \bar{a}) + b(\bar{b}, \bar{b})$.
   Dar $b(\bar{a}, \bar{a}) = b(\bar{b}, \bar{b}) = 0$ şi atunci rezultă
   $b(\bar{a}, \bar{b}) = -b(\bar{b}, \bar{a})$, $\forall \bar{a}, \bar{b} \in V$.
   Deci b este antisimetrică.

5. Fie $b : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ o formă biliniară şi $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ baza canonică a lui $\mathbf{R}^3$. Dacă avem
   $b(\bar{e}_1, \bar{e}_1) = 1$, $b(\bar{e}_2, \bar{e}_2) = -1$, $b(\bar{e}_3, \bar{e}_3) = 2$,

$b(\bar{e}_1+\bar{e}_2,\bar{e}_2)=2$, $b(\bar{e}_2,\bar{e}_1-\bar{e}_2)=4$, $b(\bar{e}_2+\bar{e}_3,\bar{e}_3)=3$,
$b(\bar{e}_3,\bar{e}_2-\bar{e}_3)=-1$, $b(\bar{e}_1,\bar{e}_3)=3$ şi $b(\bar{e}_3,2\bar{e}_1-\bar{e}_2)=5$.
Se cer:
a) matricea formei biliniare b în raport cu baza $\mathcal{B}$;
b) arătaţi că b este o formă biliniară simetrică;
c) expresia analitică a formei biliniare b în raport cu baza $\mathcal{B}$;
d) matricea şi expresia analitică a formei biliniare b în raport cu o altă bază $\mathcal{B}^{'}=\{\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3\}$, unde
$\bar{a}_1=(1,0,1)$, $\bar{a}_2=(0,1,1)$, $\bar{a}_3=(1,1,0)$;
e) expresia analitică a formei pătratice $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$,
$f(\bar{x})=b(\bar{x},\bar{x})$, $\forall\bar{x}\in\mathbf{R}^3$, în raport cu baza $\mathcal{B}$;
f) forma canonică a formei pătratice f şi baza lui $\mathbf{R}^3$ relativ la care f are forma canonică, prin metoda lui Jacobi;
g) signatura lui f.

Soluţie:

a) Matricea formei biliniare b este $A=(a_{ij})_{i,j=\overline{1,3}}\in\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$, unde $a_{ij}=b(\bar{e}_i,\bar{e}_j)$. Atunci avem $a_{11}=1$, $a_{22}=-1$, $a_{33}=2$, $a_{13}=3$. Din faptul că $b(\bar{e}_1+\bar{e}_2,\bar{e}_2)=2$ rezultă $b(\bar{e}_1,\bar{e}_2)+b(\bar{e}_2,\bar{e}_2)=2$ şi ştiind că $a_{22}=b(\bar{e}_2,\bar{e}_2)=-1$ obţinem $a_{12}=b(\bar{e}_1,\bar{e}_2)=3$. În mod similar se deduce că $a_{21}=3$ din $b(\bar{e}_2,\bar{e}_1-\bar{e}_2)=4$ şi apoi $a_{23}=1$, $a_{32}=1$, $a_{31}=3$.
Deci matricea lui b în raport cu baza $\mathcal{B}$ este

$$A=\begin{pmatrix}1&3&3\\3&-1&1\\3&1&2\end{pmatrix}$$

b) Deoarece matricea formei biliniare b în raport cu baza $\mathcal{B}$ este simetrică rezultă că b este formă biliniară simetrică.
c) Expresia analitică a formei biliniare b în raport cu baza $\mathcal{B}$ este

$$b(\bar{x},\bar{y})=\sum_{i=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}a_{ij}x^iy^j=\tilde{x}^t_{\mathcal{B}}A\tilde{y}_{\mathcal{B}}$$

pentru $\bar{x} = \sum_{i=1}^{3} x^i \bar{e}_i$, $\bar{y} = \sum_{j=1}^{3} y^j \bar{e}_j$.
Deci $b(\bar{x}, \bar{y}) = x^1y^1 + 3x^1y^2 + 3x^2y^1 - x^2y^2 + 3x^1y^3 + 3x^3y^1 + x^2y^3 + x^3y^2 + 2x^3y^3$.
d) Matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}'$ este
$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi matricea formei biliniare b relativ la baza $\mathcal{B}'$ este $B = C^tAC = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 8 \\ 9 & 3 & 6 \\ 8 & 6 & 6 \end{pmatrix}$.
Expresia analitică a lui b relativ la noua bază $\mathcal{B}'$ este

$$b(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} b(\bar{a}_i, \bar{a}_j) s^i t^j = \tilde{x}^t_{\mathcal{B}'} B \tilde{y}_{\mathcal{B}'}$$

pentru $\bar{x} = \sum_{i=1}^{3} s^i \bar{a}_i$, $\bar{y} = \sum_{j=1}^{3} t^j \bar{a}_j$.
Deci $b(\bar{x}, \bar{y}) = 9s^1t^1 + 9s^1t^2 + 9s^2t^1 + 3s^2t^2 + 8s^1t^3 + 8s^3t^1 + 6s^2t^3 + 6s^3t^2 + 6s^3t^3$.
e) Expresia analitică a formei pătratice f relativ la baza canonică $\mathcal{B}$ este

$$f(\bar{x}) = \sum_{i,j=1}^{3} x^i x^j a_{ij} = \tilde{x}^t_{\mathcal{B}} \cdot A \cdot \tilde{x}_{\mathcal{B}} ,$$

pentru orice $\bar{x} = \sum_{i=1}^{3} x^i \bar{e}_i$. Deci

$$f(\bar{x}) = (x^1)^2 + 6x^1x^2 + 6x^1x^3 - (x^2)^2 + 2x^2x^3 + 2(x^3)^2 .$$

f) Matricea formei pătratice f relativ la baza canonică $\mathcal{B}$ este chiar matricea formei biliniară şi simetrică b din care provine:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Doarece toţi minorii diagonali $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = |1| = 1$,

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -10$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6$ sunt nenuli, putem aplica metoda lui Jacobi de aducere la forma canonică. Dacă y^1, y^2, y^3 sunt coordonatele lui $\bar{x}$ relativ la baza $\mathcal{B}^*$, în raport cu care expresia analitică a lui f are forma canonică, atunci

$$f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}(y^i)^2 = (y^1)^2 - \frac{1}{10}(y^2)^2 - \frac{5}{3}(y^3)^2$$

este forma canonică a formei pătratice f.
Baza $\mathcal{B}^* = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3\}$ se găseşte astfel:
Se aleg $\bar{b}_1 = \alpha_{11}\bar{e}_1$ astfel ca $b(\bar{e}_1, \bar{b}_1) = 1$, $\bar{b}_2 = \alpha_{21}\bar{e}_1 + \alpha_{22}\bar{e}_2$ astfel ca $b(\bar{e}_1, \bar{b}_2) = 0$ şi $b(\bar{e}_2, \bar{b}_2) = 1$, iar $\bar{b}_3 = \alpha_{31}\bar{e}_1 + \alpha_{32}\bar{e}_2 + \alpha_{33}\bar{e}_3$ astfel ca $b(\bar{e}_1, \bar{b}_3) = 0$, $b(\bar{e}_2, \bar{b}_3) = 0$ şi $b(\bar{e}_3, \bar{b}_3) = 1$.
Constantele α_{ij} se găsesc imediat:
din $b(\bar{e}_1, \bar{b}_1) = 1$ rezultă $\alpha_{11}b(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = 1$ şi $\alpha_{11} = 1$;
din $b(\bar{e}_1, \bar{b}_2) = 0$ şi $b(\bar{e}_2, \bar{b}_2) = 1$ rezultă sistemul:
$\begin{cases} \alpha_{21} + 3\alpha_{22} &= 0 \\ 3\alpha_{21} - \alpha_{22} &= 1 \end{cases}$, de unde $\alpha_{21} = 3/10$, $\alpha_{22} = -1/10$;
din $b(\bar{e}_1, \bar{b}_3) = 0$, $b(\bar{e}_2, \bar{b}_3) = 0$ şi $b(\bar{e}_3, \bar{b}_3) = 1$ rezultă sistemul:
$\begin{cases} \alpha_{31} + 3\alpha_{32} + 3\alpha_{33} &= 0 \\ 3\alpha_{31} - \alpha_{32} + \alpha_{33} &= 0 \\ 3\alpha_{31} + \alpha_{32} + 2\alpha_{33} &= 1 \end{cases}$,
de unde $\alpha_{31} = 1$, $\alpha_{32} = 4/3$, $\alpha_{33} = -5/3$.
Deci $\mathcal{B}^* = \{\bar{b}_1 = (1,0,0), \bar{b}_2 = (\frac{3}{10}, -\frac{1}{10}, 0), \bar{b}_3 = (1, \frac{4}{3}, -\frac{5}{3})\}$.
g) Signatura lui f este $(1, 2)$ pentru că forma canonică a lui f are un coeficient strict pozitiv şi doi coeficienţi strict negativi, adică indicele pozitiv de inerţie al formei pătratice f este $p = 1$ şi indicele negativ de inerţie este $q = 2$.

6. Fie $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ o formă pătratică pe $\mathbf{R}^4$ a cărei expresie

analitică în raport cu baza canonică a lui $\mathbf{R}^4$ este

$$f(\bar{x}) = x^1x^2 - x^2x^3 + x^3x^4 + x^4x^1 \ , \ \forall \bar{x} = \sum_{i=1}^{4} x^i \bar{e}_i \in \mathbf{R}^4 \, .$$

a) Găsiţi matricea formei pătratice f în raport cu baza canonică $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1 = (1,0,0,0), \bar{e}_2 = (0,1,0,0), \bar{e}_3 = (0,0,1,0), \bar{e}_4 = (0,0,0,1)\}$;
b) Găsiţi expresia analitică a polarei lui f relativ la baza canonică $\mathcal{B}$;
c) Folosind metoda lui Gauss, găsiţi forma canonică a formei pătratice f şi baza lui $\mathbf{R}^4$ relativ la care f are expresia canonică;
d) Găsiţi signatura lui f .

Soluţie:

a) Matricea $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,4}}$ a formei pătratice f în raport cu baza canonică $\mathcal{B}$ este chiar matricea formei biliniare simetrice b din care provine forma pătratică f (numită *polara* lui f), relativ la baza $\mathcal{B}$.
Din faptul că $b(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2}\left[f(\bar{x} + \bar{y}) - f(\bar{x}) - f(\bar{y})\right]$ putem determina elementele matricii cerute $a_{ij} = b(\bar{e}_i, \bar{e}_j)$.
În mod practic, pentru a evita calculele, elementele matricii A se determină astfel:
- elementul a_{ij}, cu i=j, este egal cu jumătate din coeficientul lui x^ix^j din expresia analitică a lui f ;
- elementul a_{ii} este egal coeficientul lui $(x^i)^2$ din expresia analitică a lui f .

$$\text{Deci } A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

b) Expresia analitică a polarei lui f relativ la baza canonică $\mathcal{B}$ se poate obţine după formula de mai sus sau, mai practic, prin dedublarea expresiei lui f din ipoteză. Deci

$b(\bar{x},\bar{y}) = \frac{1}{2}x^1y^2 + \frac{1}{2}x^2y^1 - \frac{1}{2}x^2y^3 - \frac{1}{2}x^3y^2 + \frac{1}{2}x^3y^4 + \frac{1}{2}x^4y^3 +$
$+\frac{1}{2}x^4y^1 + \frac{1}{2}x^1y^4$, $\forall \bar{x} = x^i\bar{e}_i,\ \bar{y} = y^j\bar{e}_j \in \mathbf{R}^4$.
c) Având în vedere expresia analitică a lui f, vom proceda mai întâi la schimbarea de coordonate:

$$I)\left\{\begin{array}{rcr} x^1 & = & t^1 + t^2 \\ x^2 & = & t^1 - t^2 \\ x^3 & = & t^3 \\ x^4 & = & t^4 \end{array}\right.$$

(de fapt, s-a schimbat baza lui $\mathbf{R}^4$ şi t^i, $i = \overline{1,4}$, sunt coordonatele lui $\bar{x}$ relativ la noua bază)
Atunci $f(\bar{x}) = (t^1)^2 - (t^2)^2 - t^1t^3 + t^2t^3 + t^3t^4 + t^1t^4 + t^2t^4 =$
$= \left[(t^1)^2 - t^1t^3 + t^1t^4 - \frac{1}{2}t^3t^4 + \frac{1}{4}(t^3)^2 + \frac{1}{4}(t^4)^2\right]$
$-\frac{1}{4}(t^3)^2 - \frac{1}{4}(t^4)^2 - (t^2)^2 + t^2t^3 + t^2t^4 + \frac{3}{2}t^3t^4 =$
$= \left(t^1 - \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}t^4\right)^2 -$
$- \left[(t^2)^2 - t^2t^3 - t^2t^4 + \frac{1}{4}(t^3)^2 + \frac{1}{4}(t^4)^2 + \frac{1}{2}t^3t^4\right] + 2t^3t^4$
şi prin urmare
$f(\bar{x}) = \left(t^1 - \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}t^4\right)^2 - \left(t^2 - \frac{1}{2}t^3 - \frac{1}{2}t^4\right)^2 + 2t^3t^4$.
Făcând schimbarea de coordonate:

$$II)\left\{\begin{array}{rcr} s^1 & = & t^1 - \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}t^4 \\ s^2 & = & t^2 - \frac{1}{2}t^3 - \frac{1}{2}t^4 \\ s^3 & = & t^3 \\ s^4 & = & t^4 \end{array}\right.$$

rezultă $f(\bar{x}) = (s^1)^2 - (s^2)^2 + 2s^3s^4$.
În final, din

$$III)\left\{\begin{array}{lcl} y^1 & = & s^1 \\ y^2 & = & s^2 \\ y^3 + y^4 & = & s^3 \\ y^3 - y^4 & = & s^4 \end{array}\right.$$

rezultă că forma canonică a formei pătratice f este

$$f(\bar{x}) = (y^1)^2 - (y^2)^2 + 2(y^3)^2 - 2(y^4)^2,$$

unde y^i, $i = \overline{1,4}$ sunt coordonatele vectorului $\bar{x}$ relativ la baza $\mathcal{B}^* = \{\bar{b}_i | i = \overline{1,4}\}$, în raport cu care f are forma canonică.

Baza $\mathcal{B}^*$ se găseşte astfel:
Dacă C este matricea de trecere de la baza canonică $\mathcal{B}$ la baza căutată $\mathcal{B}^*$, atunci $\tilde{x}_{\mathcal{B}^*} = C^{-1}\tilde{x}_{\mathcal{B}}$ sau
$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{pmatrix}$.
Pe de altă parte, dacă avem în vedere cele trei schimbări de coordonate avem:

$$\begin{cases} x^4 = t^4 = s^4 = y^3 - y^4 \\ x^3 = t^3 = s^3 = y^3 + y^4 \\ x^2 = t^1 - t^2 = s^1 - s^2 - t^4 = y^1 - y^2 - y^3 + y^4 \\ x^1 = t^1 + t^2 = s^1 + s^2 + t^3 = y^1 + y^2 + y^3 + y^4 \end{cases}$$

Atunci $\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^1 + y^2 + y^3 + y^4 \\ y^1 - y^2 - y^3 + y^4 \\ y^3 + y^4 \\ y^3 - y^4 \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{pmatrix}$
şi prin urmare $\mathcal{B}^* = \{\bar{b}_1 = (1,1,0,0), \bar{b}_2 = (1,-1,0,0),$
$\bar{b}_3 = (1,-1,1,1), \bar{b}_4 = (1,1,1,-1)\}$.
d) Signatura lui f este $(2,2)$. Deci f este formă pătratică nedefinită.

7. Fie $b : \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$, definită prin

$$b(X,Y) = 2Tr(XY) - Tr(X)Tr(Y),\ \forall X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$$

unde $Tr(A) = a_{11} + a_{22}$ este *urma* matricii $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,2}}$.
a) Arătaţi că b este o formă biliniară simetrică;
b) Găsiţi matricea formei biliniare b relativ la baza naturală a lui $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$,
$\mathcal{B} = \left\{ E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \right.$

$E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Big\}$;
c) Găsiţi expresia analitică a formei pătratice asociată $f(X) = b(X, X)$, relativ la baza naturală a lui $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$;
d) Aduceţi la forma canonică forma pătratică f şi determinaţi baza corespunzătoare;
e) Arătaţi că f este o formă pătratică nedefinită.

Soluţie:

a) Fixăm arbitrar matricile $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$,
$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}$ şi scalarii reali $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.
Atunci $XY = \begin{pmatrix} x_{11}y_{11} + x_{12}y_{21} & x_{11}y_{12} + x_{12}y_{22} \\ x_{21}y_{11} + x_{22}y_{21} & x_{21}y_{12} + x_{22}y_{22} \end{pmatrix}$ şi
$YX = \begin{pmatrix} y_{11}x_{11} + y_{12}x_{21} & y_{11}x_{12} + y_{12}x_{22} \\ y_{21}x_{11} + y_{22}x_{21} & y_{21}x_{12} + y_{22}x_{22} \end{pmatrix}$, de unde
$Tr(XY) = x_{11}y_{11} + x_{12}y_{21} + x_{21}y_{12} + x_{22}y_{22} = Tr(YX)$.
Prin urmare $b(X, Y) = b(Y, X)$ şi astfel b este formă simetrică.
Având în vedere simetria lui b, pentru a demonstra biliniaritatea aplicaţiei b este suficient să arătăm că b este liniară în primul argument, adică:

$$b(\alpha X + \beta Y, Z) = \alpha b(X, Z) + \beta b(Y, Z).$$

Cum $Tr(\alpha X + \beta Y) = \alpha Tr(X) + \beta Tr(Y)$ avem că
$b(\alpha X + \beta Y, Z) = 2Tr((\alpha X + \beta Y)Z) - Tr(\alpha X + \beta Y)Tr(Z) =$
$2Tr(\alpha XY + \beta YZ) - (\alpha Tr(X) + \beta Tr(Y))\, Tr(Z) =$
$2\alpha Tr(XY) + 2\beta Tr(YZ) - \alpha Tr(X)Tr(Z) - \beta Tr(Y)Tr(Z) =$
$\alpha\, (2Tr(XZ) - Tr(X)Tr(Z)) + \beta\, (2Tr(YZ) - Tr(Y)Tr(Z)) =$
$\alpha b(X, Z) + \beta b(Y, Z)$.
Deci b este formă biliniară simetrică.
b) Dacă matricile X şi Y sunt ca mai sus, atunci
$b(X, Y) = 2(x_{11}y_{11} + x_{12}y_{21} + x_{21}y_{12} + x_{22}y_{22}) -$
$-(x_{11} + x_{22})(y_{11} + y_{22}) = x_{11}y_{11} + x_{22}y_{22}$
$+2x_{12}y_{21} + 2x_{21}y_{12} - x_{11}y_{22} - x_{22}y_{11}$

este expresia analitică a lui b relativ la baza $\mathcal{B}$ pentru că coordonatele matricii X relativ la baza naturală $\mathcal{B}$ sunt chiar elementele matricii X, x_{ij} , $i, j = \overline{1,2}$.
(vezi $X = \sum\limits_{i,j=1}^{2} x_{ij}E_{ij}$).
Matricea formei biliniare b relativ la baza $\mathcal{B}$ este
$A = (b(E_{ij}, E_{kl}))_{i,j,k,l=\overline{1,2}}$.
Prin calcule, $b(E_{11}, E_{11}) = 2Tr(E_{11}^2) - (Tr(E_{11}))^2 = 1$, $b(E_{11}, E_{12}) = 0$, $b(E_{11}, E_{21}) = 0$, $b(E_{11}, E_{22}) = -1$, $b(E_{12}, E_{11}) = b(E_{11}, E_{12}) = 0$, $b(E_{12}, E_{12}) = 0$, $b(E_{12}, E_{21}) = b(E_{21}, E_{12}) = 2$, $b(E_{12}, E_{22}) = b(E_{22}, E_{12}) = 0$, $b(E_{21}, E_{11}) = b(E_{11}, E_{21}) = 0$, $b(E_{21}, E_{21}) = 0$,
$b(E_{21}, E_{22}) = b(E_{22}, E_{21}) = 0$, $b(E_{22}, E_{11}) = -1$,
$b(E_{22}, E_{22}) = 1$.
Deci $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbf{R})$,
c) Relativ la baza naturală $\mathcal{B}$, forma pătratică f asociată formei biliniare b are expresia analitică

$$f(X) = b(X, X) = (x_{11})^2 + (x_{22})^2 + 4x_{12}x_{21} - 2x_{11}x_{22}$$

pentru orice $X = (x_{ij})_{i,j=\overline{1,2}}$.
d) Folosind metoda lui Gauss, avem
$f(X) = \left[(x_{11})^2 - 2x_{11}x_{22} + (x_{22})^2\right] + 4x_{12}x_{21} =$
$= (x_{11} - x_{22})^2 + 4x_{12}x_{21}$.
După schimbarea de coordonate (de baze):

$$\begin{cases} t_{11} & = & x_{11} - x_{22} \\ t_{12} + t_{21} & = & x_{12} \\ t_{12} - t_{21} & = & x_{21} \\ t_{22} & = & x_{22} \end{cases}$$

obţinem forma canonică a lui f:
$f(X) = (t_{11})^2 + 4 \cdot (t_{12})^2 - 4 \cdot (t_{21})^2 + 0 \cdot (t_{22})^2$, pentru orice matrice $X = t_{11}F_{11} + t_{12}F_{12} + t_{21}F_{21} + t_{22}F_{22}$, unde

$\mathcal{B}^* = \{F_{ij} | i,j = \overline{1,2}\}$ este baza lui $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ relativ la care f are forma canonică.
Ştiind că matricea de trecere C de la $\mathcal{B}$ la $\mathcal{B}^*$ verifică $\tilde{x}_{\mathcal{B}} = C\tilde{x}_{\mathcal{B}^*}$ şi ţinând cont de relaţiile ce dau schimbarea de coordonate, avem că

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{12} \\ t_{21} \\ t_{22} \end{pmatrix}$$

şi atunci $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Deci baza $\mathcal{B}^*$ este
$\left\{ F_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, F_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, F_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \right.$
$\left. F_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$
e) Signatura lui f este $(2,1)$ şi atunci f este o forma pătratică nedefinită.

8. Folosind metoda lui Gauss să se aducă la forma canonică forma pătratică $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $f(\bar{x}) = x^1x^2 + x^2x^3 + (x^3)^2$, $\forall \bar{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbf{R}^3$.
   Găsiţi baza lui $\mathbf{R}^3$ în raport cu care f are forma canonică şi signatura lui f .

   Soluţie:

   Facem schimbarea de coordonate (de baze)

$$I) \begin{cases} x^1 &= t^1 + t^2 \\ x^2 &= t^1 - t^2 \\ x^3 &= t^3 \end{cases}$$

   şi rezultă că $f(\bar{x}) = (t^1)^2 - (t^2)^2 + t^1t^3 - t^2t^3 + (t^3)^2 =$
   $\left((t^1)^2 + t^1t^3 + \frac{1}{4}(t^3)^2\right) - (t^2)^2 - t^2t^3 + \frac{3}{4}(t^3)^2 =$

$\left(t^1+\frac{1}{2}t^3\right)^2-\left((t^2)^2+t^2t^3+\frac{1}{4}(t^3)^2+(t^3)^2\right)=$
$\left(t^1+\frac{1}{2}t^3\right)^2-\left(t^2+\frac{1}{2}t^3\right)^2+(t^3)^2\,.$
Apoi, din schimbarea de coordonate

$$II)\left\{\begin{array}{lcl} y^1 & = & t^1+\frac{1}{2}t^3 \\ y^2 & = & t^2+\frac{1}{2}t^3 \\ y^3 & = & t^3 \end{array}\right.$$

obţinem forma canonică $f(\bar{x})=(y^1)^2-(y^2)^2+(y^3)^2$, pentru orice vector $\bar{x}$, unde y^1,y^2,y^3 sunt coordonatele lui $\bar{x}$ relativ la baza $\mathcal{B}^*=\{\bar{b}_1,\bar{b}_2,\bar{b}_3\}$ corespunzătoare ultimei schimbări de coordonate (bază relativ la care f are forma canonică).
Din I) şi II) rezultă

$$\left\{\begin{array}{l} x^3=t^3=y^3 \\ x^1=t^1-t^2=y^1-y^2 \\ x^2=t^1+t^2=y^1+y^2-t^3=y^1+y^2-y^3 \end{array}\right.$$

şi atunci $\begin{pmatrix} x^1\\ x^2\\ x^3\\ x^4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y^1\\ y^2\\ y^3\\ y^4\end{pmatrix}$, adică matricea de trecere de la baza canonică la $\mathcal{B}^*$ este $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.
Deci $\mathcal{B}^*=\{\bar{b}_1=(1,1,0),\bar{b}_2=(1,-1,0),\bar{b}_3=(-1,0,1)\}$ şi signatura lui f este $(2,1)$, adică f este formă pătratică nedefinită.

9. Folosind metoda lui Jacobi să se aducă la forma canonică forma pătratică
$f(\bar{x})=2(x^1)^2+3(x^2)^2+4(x^3)^2-4x^1x^2-2x^1x^3+4x^2x^3$.
Găsiţi baza corespunzătoare şi signatura lui f .

Soluţie:

Matricea lui f relativ la baza canonică a lui $\mathbf{R}^3$
$\mathcal{B}=\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$ este $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1\\ -2 & 3 & 2\\ -1 & 2 & 4\end{pmatrix}$ şi se găseşte prin

intermediul polarei lui f (care are aceeaşi matrice ca şi f) sau mai simplu, prin algoritmul:
- elementul a_{ij} , $i{=}j$ este jumătate din coeficientul lui $x^i x^j$ din expresia lui f;
- elementul a_{ii} este chiar coeficientul lui $(x^i)^2$.
Din faptul că minorii diagonali $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = |2| = 2$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 2$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 5$ sunt nenuli rezultă că se poate aplica metoda lui Jacobi.
Deci forma canonică a lui f este

$$f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} \frac{1}{2}(y^1)^2 + (y^2)^2 + \frac{2}{5}(y^3)^2$$

unde $\bar{x} = y^1\bar{a}_1 + y^2\bar{a}_2 + y^3\bar{a}_3 \in \mathbf{R}^3$ şi
$\mathcal{B}^* = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$ este baza relativ la care f are forma canonică.
Se alege $\bar{a}_1 = \alpha_{11}\bar{e}_1$ astfel încât $b(\bar{e}_1, \bar{a}_1) = 1$, $\bar{a}_2 = \alpha_{21}\bar{e}_1 + \alpha_{22}\bar{e}_2$ astfel încât $b(\bar{e}_1, \bar{a}_2) = 0$, $b(\bar{e}_2, \bar{a}_2) = 1$ şi $\bar{a}_3 = \alpha_{31}\bar{e}_1 + \alpha_{32}\bar{e}_2 + \alpha_{33}\bar{e}_3$ astfel încât $b(\bar{e}_1, \bar{a}_3) = 0$, $b(\bar{e}_2, \bar{a}_3) = 0$, $b(\bar{e}_3, \bar{a}_3) = 1$ (unde b este polara formei pătratice f).
Din $b(\bar{e}_1, \bar{a}_1) = 1$ rezultă $\alpha_{11} b(\bar{e}_1, \bar{e}_1) = 1$ şi atunci $\alpha_{11} = 1/2$.
Din $b(\bar{e}_1, \bar{a}_2) = 0$, $b(\bar{e}_2, \bar{a}_2) = 1$ rezultă sistemul

$$\begin{cases} 2\alpha_{21} - 2\alpha_{22} & = & 0 \\ -2\alpha_{21} + 3\alpha_{22} & = & 1 \end{cases}$$

care are soluţia $(\alpha_{21} = 1, \alpha_{22} = 1)$.
Din $b(\bar{e}_1, \bar{a}_3) = 0$, $b(\bar{e}_2, \bar{a}_3) = 0$, $b(\bar{e}_3, \bar{a}_3) = 1$ obţinem sistemul

$$\begin{cases} 2\alpha_{31} - 2\alpha_{32} - \alpha_{33} & = & 0 \\ -2\alpha_{31} + 3\alpha_{32} + 2\alpha_{33} & = & 0 \\ -\alpha_{31} + 2\alpha_{32} + 4\alpha_{33} & = & 1 \end{cases}$$

de unde $\alpha_{31} = -1/5$, $\alpha_{32} = -2/5$, $\alpha_{33} = 2/5$.
Deci $\mathcal{B}^* = \{\bar{a}_1 = (1/2, 0, 0), \bar{a}_2 = (1, 1, 0),$

$\bar{a}_3 = (-1/5, -2/5, 2/5)\}$ şi signatura lui f este $(3,0)$, adică f este formă pătratică pozitiv definită.

10. Fie $F : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ care în bazele $B^3 = \{\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3\}$ cu $\overline{a}_1 = (1,1,0), \overline{a}_2 = (-1,0,2), \overline{a}_3 = (0,2,1)$ şi $B^2 = \{\overline{b}_1, \overline{b}_2\}$unde $\overline{b}_1 = (1,1)$, $\overline{b}_2 = (1,0)$ are expresia analitică:

$$F(\overline{x}, \overline{y}) = x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^1 + x^3 y^2.$$

Să se determine matricea asociată formei în bazele canonice $\mathcal{B}_c^2$ din $\mathbf{R}^2$ şi $\mathcal{B}_c^3$ din $\mathbf{R}^3$.

Soluţie:

Matricea asociată formei biliniare în bazele canonice $\mathcal{B}_c^3 = \{\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3\}$ în $\mathbf{R}^3$ şi $\mathcal{B}_c^2 = \{\overline{f}_1,\overline{f}_2\}$ în $\mathbf{R}^2$ (unde $\overline{e}_1 = (1,0,0)$, $\overline{e}_2 = (1,0,0)$, $\overline{e}_3 = (1,0,0)$; $\overline{f}_1 = (1,0)$, $\overline{f}_2 = (0,1)$) o putem afla identificând coeficienţii din exprimarea de mai sus a lui F. Obţinem $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Matricea de schimbare a bazei $\mathcal{B}_c^3 \to B^3$ este $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, deci matricea de schimbare a bazei $B^3 \to \mathcal{B}_c^3$ va fi $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Analog, matricea de schimbare a bazei $\mathcal{B}_c^2 \to B^2$ va fi $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, iar matricea de schimbare $B^2 \to \mathcal{B}_c^2$ va fi $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Conform formulei de schimbare a matricii asociate unei forme biliniare la schimbarea bazelor, avem:

$$A = \left(P^{-1}\right)^T \cdot \mathcal{A} \cdot Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Deci matricea asociată formei biliniare F în bazele canonice va fi

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

11. Fie $B : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ o formă biliniară şi să presupunem că avem relaţiile: $B(\overline{e}_1, \overline{e}_1) = 1$, $B(\overline{e}_2, \overline{e}_2) = 0$, $B(\overline{e}_3, \overline{e}_3) = 0$, $B(\overline{e}_1, \overline{e}_1 + \overline{e}_2) = 2$, $B(\overline{e}_1 + \overline{e}_3, \overline{e}_1) = \frac{3}{2}$, $B(\overline{e}_3, \overline{e}_1 + \overline{e}_2) = \frac{1}{2}$, $B(\overline{e}_2, \overline{e}_1 + \overline{e}_3) = \frac{3}{2}$, $B(\overline{e}_2, \overline{e}_1 - \overline{e}_3) = \frac{1}{2}$, $B(\overline{e}_1 + \overline{e}_2, \overline{e}_3) = \frac{1}{2}$, unde $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ este baza canonică.

a) Să se arate că B este o formă biliniară simetrică.

b) Să se găsească forma pătratică asociată lui B şi să se aducă la forma canonică prin metoda lui Gauss precizându-se baza corespunzătoare.

Soluţie:

a) Utilizând liniaritatea aplicaţiei B, avem
$B(\overline{e}_1, \overline{e}_1 + \overline{e}_2) = B(\overline{e}_1, \overline{e}_1) + B(\overline{e}_1, \overline{e}_2)$. Tinând cont de relaţiile de mai sus, obţinem $B(\overline{e}_1, \overline{e}_2) = 2 - 1 = 1$. Deoarece $B(\overline{e}_1 + \overline{e}_3, \overline{e}_1) = B(\overline{e}_1, \overline{e}_1) + B(\overline{e}_3, \overline{e}_1)$, $B(\overline{e}_3, \overline{e}_1) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$. Mai departe, $B(\overline{e}_3, \overline{e}_1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$. Din următoarele două relaţii, prin însumarea, respectiv scăderea lor, obţinem
$B(\overline{e}_2, \overline{e}_1) = 1$, $B(\overline{e}_2, \overline{e}_3) = \frac{1}{2}$.
In sfârşit, $B(\overline{e}_1 + \overline{e}_2, \overline{e}_3) = B(\overline{e}_1, \overline{e}_3) + B(\overline{e}_2, \overline{e}_3)$.
Deci $B(\overline{e}_1, \overline{e}_3) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$. Matricea A asociată formei biliniare în baza canonică este:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Se observă că B este formă biliniară simetrică.

b) Pentru doi vectori $\overline{x} = (x^1, x^2, x^3)$ şi $\overline{y} = (y^1, y^2, y^3)$ din $\mathbf{R}^3$, expresia analitică a formei va fi:

$$B(\overline{x}, \overline{y}) = (x^1, x^2, x^3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} =$$

$= x^1y^1 + x^1y^2 + x^2y^1 + \frac{1}{2}x^2y^3 + \frac{1}{2}x^3y^2.$

Considerând $F(\overline{x}) = B(\overline{x}, \overline{x})$, avem $F(\overline{x}) = \left(x^1\right)^2 + 2x^1x^2 + x^2x^3$. Grupând termenii ce conţin pe x^1, obţinem $F(\overline{x}) = \left(x^1 + x^2\right)^2 - \left(x^2\right)^2 + x^2x^3$. Mai departe, grupând termenii ce conţin pe x^2 şi formând pătrate, obţinem

$$F(\overline{x}) = \left(x^1 + x^2\right)^2 - \left(x^2 - \frac{x^3}{2}\right)^2 + \frac{\left(x^3\right)^2}{4}$$

Notăm:

$$(*) \begin{cases} y^1 = x^1 + x^2 \\ y^2 = x^2 - \frac{x^3}{2} \\ y^3 = x^3 \end{cases}$$

În raport cu baza $\mathcal{B} = \{\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3\}$ a lui $\mathbf{R}^3$ faţă de care $\overline{x}$ are coordonatele y^1, y^2, y^3 date mai sus, obţinem forma canonică: $F(\overline{x}) = \left(y^1\right)^2 - \left(y^2\right)^2 + \frac{1}{4}\left(y^3\right)^2$.

Matricea asociată formei, relativ la această bază este: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$. Pe de altă parte, dacă scriem matriceal (*), va rezulta:

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}.$$

Aşadar matricea $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de mai sus va fi inversa matricii de schimbare a bazei de la baza canonică la $\mathcal{B}$. Deci:

$$(\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3) = (\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= (\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

În concluzie, $\overline{f}_1 = \overline{e}_1$, $\overline{f}_2 = -\overline{e}_1 + \overline{e}_2$, $\overline{f}_3 = -\frac{1}{2}\overline{e}_1 + \frac{1}{2}\overline{e}_2 + \overline{e}_3$.

12. Fie V un spaţiu vectorial n dimensional. O aplicaţie ω, $\omega : V \times V \to \mathbf{R}$ se numeşte antisimetrică dacă $(\forall)\, \overline{x}, \overline{y} \in V$, $\omega(\overline{x}, \overline{y}) = -\omega(\overline{x}, \overline{y})$. Fixând o bază $B = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n\}$ şi considerând $\omega_{ij} = \omega(\overline{e}_i, \overline{e}_j)$, asociem bazei respective matricea $A = (\omega_{ij})_{i,j=\overline{1..n}}$. Dacă $\det A \neq 0$, atunci forma se spune că este nedegenerată. O formă biliniară cu proprietăţile de mai sus se numeşte *formă simplectică*.

   a) Arătaţi că determinantul matricii asociate unei forme antisimetrice nedegenerate în orice bază este nenul.

   b) Dacă există o astfel de formă ω definită pe V, atunci dimensiunea n este pară.

   Soluţie:

   a) Fie $\mathcal{B} = \{\overline{f}_1, \overline{f}_2, ..., \overline{f}_n\}$ o altă bază şi fie $M = \left(\alpha_j^i\right)_{i,j=\overline{1,n}}$ matricea de schimbare a bazei, adică $\overline{f}_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_i^j \overline{e}_j$, $i = \overline{1,n}$. Fie $\mathcal{A} = (\widetilde{\omega}_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ matricea asociată lui ω în noua bază. Atunci $\omega(\overline{f}_i, \overline{f}_j) = \sum\limits_{1 \leq p,q \leq n} \alpha_i^p \alpha_j^q \omega(\overline{e}_p, \overline{e}_q)$, $\forall i, j = \overline{1,n}$. Prin urmare:

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\omega}_{11} & \cdots & \widetilde{\omega}_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \widetilde{\omega}_{n1} & \cdots & \widetilde{\omega}_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \cdots & \alpha_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_n^1 & \cdots & \alpha_1^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_{11} & \cdots & \omega_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_{n1} & \cdots & \omega_{nn} \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \cdots & \alpha_n^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_1^n & \cdots & \alpha_n^n \end{pmatrix} \text{ sau } \mathcal{A} = M^T \cdot A \cdot M.$$

Atunci $\det \mathcal{A} = \det A \cdot (\det M)^2$ şi cum $\det M \neq 0, \det A \neq 0$, vom avea $\det \mathcal{A} \neq 0$.

b) Fie B matricea obţinută din A prin înmulţirea fiecărei linii cu -1. Vom avea $\det B = (-1)^n \det A$. Pe de altă parte, datorită relaţiei $\omega_{ij} = \omega(\overline{e}_i, \overline{e}_j) = -\omega(\overline{e}_j, \overline{e}_i) = -\omega_{ji}$ avem $B = A^T$, deci $\det B = \det A$. Atunci $(-1)^n = 1$, prin urmare n este par.

4.2 Probleme propuse spre rezolvare

1. Fie forma biliniară $b : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $b(\overline{x}, \overline{y}) = 2x^1y^1 + x^2y^2 + 5x^3y^3 - x^1y^2 + x^2y^1 + 5x^3y^1$, $\forall \overline{x} = (x^1, x^2, x^3)$, $\overline{y} = (y^1, y^2, y^3) \in \mathbf{R}^3$.

   a) Fără a determina matricea lui b relativ la baza canonică a lui $\mathbf{R}^3$, să se precizeze dacă b este simetrică sau dacă este antisimetrică;

   b) Determinaţi matricea lui b relativ la baza canonică a lui $\mathbf{R}^3$;

   c) Arătaţi că există şi sunt unice două forme biliniare pe $\mathbf{R}^3$, b_1 simetrică şi b_2 antisimetrică astfel ca $b(\overline{x}, \overline{y}) = b_1(\overline{x}, \overline{y}) + b_2(\overline{x}, \overline{y})$, $\forall \overline{x} = (x^1, x^2, x^3)$, $\overline{y} = (y^1, y^2, y^3) \in \mathbf{R}^3$;

   d) Găsiţi forma canonică a formei pătratice f asociate formei biliniare simetrice b_1, precum şi baza lui $\mathbf{R}^3$ relativ la care f are forma canonică găsită.

2. Dacă $\mathbf{R}_n[X]$ este spaţiul vectorial al polinoamelor cu coeficienţi reali, de grad cel mult n, se consideră aplicaţia $F : \mathbf{R}_n[X] \times \mathbf{R}_n[X] \to \mathbf{R}_{2n-3}[X]$ definită prin

   $$F(P, Q) = P''' \cdot Q - P'' \cdot Q' + P' \cdot Q'' - P \cdot Q''',$$

   unde P', P'', P''', ... sunt polinoame determinate de derivatele funcţiei polinomiale asociată polinomului P.

a) Arătaţi că aplicaţia F este liniară în ambele argumente şi antisimetrică;

b) Dacă se consideră $Q = X^n$, atunci să se determine matricea aplicaţiei liniare $g : P \to F(P, Q)$ relativ la bazele canonice ale domeniului şi codomeniului lui g;

c) Dacă $n = 3$, ce se spune despre $Ker\ g$ şi $Im\ g$?

d) Este g un endomorfism diagonalizabil, în cazul $n = 3$?

3. Fie
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
matricea unei forme pătratice f pe $\mathbf{R}^3$, relativ la baza cononică a lui $\mathbf{R}^3$.

a) Determinaţi expresia analitică pentru polara lui f;

b) Determinaţi o bază a lui $\mathbf{R}^3$ relativ la care f are o formă canonică;

c) Determinaţi signatura lui f;

d) Este diagonalizabil un endomorfism al lui $\mathbf{R}^3$ care, relativ la baza canonică a lui $\mathbf{R}^3$, are matricea A?

4. Fie $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ o formă pătratică a cărei expresie analitică, în raport cu baza canonică a lui $\mathbf{R}^3$ este
$$f(\overline{x}) = (x^1)^2 + (x^2)^2 + 4(x^3)^2 + 2x^1x^2 + 4x^1x^3 - 2x^2x^3,$$
$$\forall \overline{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbf{R}^3.$$

a) Se poate aplica metoda lui Jacobi pentru determinarea unei forme canonice pentru f? Dacă da, să se determine o formă canonică pentru f şi baza corespunzătoare, folosind această metodă.

b) Să se determine o formă canonică pentru f şi baza corespunzătoare, folosind metoda lui Gauss.

c) Este f negativ definită? Dar negativ semidefinită?

5. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Se cer:

   a) Arătaţi că forma biliniară b care are matricea AA^t, relativ la baza canonică a lui $\mathbf{R}^2$, este simetrică;

   b) Determinaţi o formă canonică pentru forma pătratică asociată $f(\overline{x}) = b(\overline{x}, \overline{x})$ şi baza corespunzătoare;

   c) Arătaţi că f este pozitiv definită.

Capitolul 5

Spaţii vectoriale euclidiene

Definiţia 5.1. 1) Un produs scalar pe un spaţiu vectorial real V este o aplicaţie $\langle , \rangle : E \times E \to \mathbf{R}$ care satisface condiţiile:

a) $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \langle \bar{y}, \bar{x} \rangle$;

b) $\langle \bar{x}, \bar{y} + \bar{z} \rangle = \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle + \langle \bar{x}, \bar{z} \rangle$;

c) $\langle \lambda \bar{x}, \bar{y} \rangle = \lambda \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$, pentru orice $\lambda \in \mathbf{R}$;

d) $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle > 0$, pentru orice $\overline{x} \neq \overline{0}$ şi $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = 0$, pentru $\bar{x} = \bar{0}$.

2) Un spaţiu vectorial real E se numeşte spaţiu vectorial euclidian real dacă pe E s-a definit un produs scalar $<, >$.

Axiomele a)-d) se pot formula spunând că produsul scalar este o formă biliniară b)-c), simetrică a) şi pozitiv definită d). Invers, orice formă ce satisface aceste proprietăţi poate fi luată ca produs scalar în E. Atunci:

$$\langle \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \bar{x}_i, \sum_{j=1}^{m} \beta_j \bar{y}_j \rangle = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j \langle \bar{x}_i, \bar{y}_j \rangle \,. \tag{5.1}$$

Aici $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m$ sunt vectori arbitrari ai spaţiului euclidian E, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ sunt scalari arbitrari.

Definiţia 5.2. Dacă pe spaţiul vectorial complex E avem aplicaţia $\langle , \rangle : E \times E \to \mathbf{C}$ care satisface condiţiile:

a) $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \overline{\langle \bar{y}, \bar{x} \rangle}$ pentru orice $\bar{x}, \bar{y} \in E$, iar $\overline{\langle \bar{y}, \bar{x} \rangle}$ reprezintă conjugatul lui $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$,

b) $\langle \bar{x}, \bar{y} + \bar{z} \rangle = \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle + \langle \bar{x}, \bar{z} \rangle$, pentru orice $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in E$,

c) $\langle \bar{x}, \lambda \bar{y} \rangle = \overline{\lambda} \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$, pentru orice $\bar{x}, \bar{y} \in E$ şi $\lambda \in \mathbf{C}$,

d) $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle > 0$, pentru orice $\bar{x} \neq \bar{0}$; $\langle \bar{0}, \bar{0} \rangle = 0$,

atunci $<, >$ se numeşte produs scalar pe E şi E se numeşte spaţiu vectorial euclidian complex (sau spaţiu unitar).

Din axiomele a)-c) rezultă formula generală

$$\langle \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \bar{x}_j, \sum_{k=1}^{q} \beta_k \bar{y}_k \rangle = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} \alpha_j \overline{\beta_k} \langle \bar{x}_j, \bar{y}_k \rangle,$$

pentru orice $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_p, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_q$ din E şi pentru orice numere complexe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$.

Având definit un produs scalar pe E, putem indica definiţia altor noţiuni metrice de bază-lungimea vectorilor şi unghiul a doi vectori.

Lungimea unui vector $\bar{x}$ într-un spaţiu euclidian E este prin definiţie numărul real pozitiv

$$|\bar{x}| = \sqrt{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} \tag{5.2}$$

Această definiţie rămâne valabilă şi pentru un vector $\bar{x}$ într-un spaţiu euclidian complex E.

Orice vector $\bar{x}$ de lungime 1 se numeşte normat. Orice vector nenul $\bar{y}$ poate fi normat, adică înmulţit cu un număr λ astfel încât ca rezultat să se obţină un vector normat. Într-adevăr, ecuaţia $|\lambda \bar{y}| = 1$ relativ la λ are de exemplu soluţia $\lambda = \frac{1}{|\bar{y}|}$.

Avem:

$$|\langle x, y \rangle| \leq |x| \, |y| \tag{5.3}$$

Inegalitatea (5.3) se numeşte inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwartz, cu egalitate dacă şi numai dacă vectorii $\bar{x}, \bar{y}$ sunt liniar dependenţi.

Se numeşte unghi neorientat între doi vectori nenuli $\bar{x}, \bar{y}$ acel unghi cuprins între 0^0 şi 180^0 al cărui cosinus este egal cu raportul

$$\frac{\langle x, y \rangle}{|x| \, |y|} .$$

Definiţia 5.3. Vectorii $\bar{x}$ şi $\bar{y}$ se numesc ortogonali dacă unghiul neorientat dintre ei este egal cu 90^0 (adică $\bar{x} \perp \bar{y}$).

Lema 5.1. Vectorii nenuli ortogonali doi câte doi $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, ..., $\bar{x}_k$ sunt liniar independenţi.

Lema 5.2. Dacă vectorii $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$, ..., $\bar{y}_k$ sunt ortogonali vectorului $\bar{x}$, atunci orice combinaţie liniară $\alpha_1\bar{y}_1 + \alpha_2\bar{y}_2 + \cdots + \alpha_k\bar{y}_k$ este de asemenea ortogonală lui $\bar{x}$.

În astfel de cazuri vom spune că vectorul $\bar{x}$ este ortogonal subspaţiului L. În general, dacă $F \subset E$ este o mulţime oarecare de vectori în spaţiul euclidian E, atunci vom spune că vectorul $\bar{x}$ este ortogonal mulţimii F dacă el este ortogonal oricărui vector din F.

Mulţimea G a tuturor vectorilor $\bar{x}$ ortogonali mulţimii F formează ea însăşi conform lemei 5.2. un subspaţiu al spaţiului E. Adeseori această situaţie se întâlneşte în cazul când F însuşi este un subspaţiu şi atunci subspaţiul G se numeşte complementul ortogonal al subspaţiului F.

Teorema 5.1. Într-un spaţiu euclidian n-dimensional E există o bază formată din n vectori ortogonali doi câte doi.

Definiţia 5.4. Se numeşte determinantul Gram al vectorilor $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, ..., $\bar{x}_k$ din spaţiul euclidian E, determinantul:

$$G\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k\right) = \begin{vmatrix} \langle \bar{x}_1, \bar{x}_1 \rangle & \langle \bar{x}_1, \bar{x}_2 \rangle & \cdots & \langle \bar{x}_1, \bar{x}_k \rangle \\ \langle \bar{x}_2, \bar{x}_1 \rangle & \langle \bar{x}_2, \bar{x}_2 \rangle & \cdots & \langle \bar{x}_2, \bar{x}_k \rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle \bar{x}_k, \bar{x}_1 \rangle & \langle \bar{x}_k, \bar{x}_2 \rangle & \cdots & \langle \bar{x}_k, \bar{x}_k \rangle \end{vmatrix}.$$

Are loc următorul rezultat:

Teorema 5.2 (Gram). Determinantul Gram al vectorilor $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, ..., $\bar{x}_k$ este nul dacă aceşti vectori sunt liniar dependenţi şi este strict pozitiv dacă vectorii sunt liniar independenţi. El este egal cu produsul pătratelor lungimilor vectorilor $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, ..., $\bar{x}_k$ dacă ei sunt ortogonali doi câte doi, în caz contrar el este mai mic decât această mărime.

5.1 Probleme rezolvate

1. În spaţiul $\mathbf{R}^n$ se defineşte următoarea regulă
   $\langle , \rangle \,:\, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, astfel:
   $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \xi^1\eta^1 + \xi^2\eta^2 + \cdots \xi^n\eta^n$,
   unde $\bar{x} = (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n)$, $\bar{y} = (\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^n)$.
   Să se arate că regula definită reprezintă un produs scalar pe $\mathbf{R}^n$.

   Soluţie:

   Verificăm dacă sunt îndeplinite proprietăţile produsului scalar (definit pe $\mathbf{R}$).
   a) $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \langle \bar{y}, \bar{x} \rangle$, $\forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbf{R}^n$.
   $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \xi^1\eta^1 + \cdots \xi^n\eta^n =$
   $= \eta^1\xi^1 + \cdots + \eta^n\xi^n = \langle \bar{y}, \bar{x} \rangle$
   b) $\langle \bar{x}, \bar{y} + \bar{z} \rangle = \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle + \langle \bar{x}, \bar{z} \rangle$, $\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbf{R}^n$.
   $\langle \bar{x}, \bar{y} + \bar{z} \rangle = \xi^1(\eta^1 + \delta^1) + \cdots + \xi^n(\eta^n + \delta^n) =$
   $= \xi^1\eta^1 + \xi^1\delta^1 + \cdots + \xi^n\eta^n + \xi^n\delta^n =$
   $= (\xi^1\eta^1 + \cdots + \xi^n\eta^n) + (\xi^1\delta^1 + \cdots \xi^n\delta^n) =$
   $= \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle + \langle \bar{x}, \bar{z} \rangle$, unde $\bar{z} = (\delta^1, \ldots, \delta^n)$.
   c) $\langle \lambda\bar{x}, \bar{y} \rangle = \lambda\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$, $\forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbf{R}^n$, $\forall \in \mathbf{R}$.
   $\lambda\bar{x} = (\lambda\xi^1, \ldots, \lambda\xi^n)$,
   $\lambda\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \lambda\xi^1\eta^1 + \cdots + \lambda\xi^n\eta^n =$
   $= \lambda(\xi^1\eta^1 + \cdots + \xi^n\eta^n) = \lambda\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$.
   d) $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle > 0$, $\forall \bar{x} \in \mathbf{R}^n$ şi
   $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$.
   Evident $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = (\xi^1)^2 + \cdots + (\xi^n)^2 \geq 0$
   şi $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \xi^1 = \cdots = \xi^n = 0$.
   Deci condiţiile din definiţia produsului scalar sunt îndeplinite şi astfel regula dată este un produs scalar pe $\mathbf{R}^n$.

2. În spaţiul $C([a, b])$ al funcţiilor continue şi reale pe intervalul $[a, b]$ se introduce următoarea regulă

$$\langle x, y \rangle \;: C([a, b]) \times C([a, b]) \longrightarrow C([a, b]), \text{ astfel}$$

$$\langle x,y\rangle = \int\limits_a^b x(t)y(t)dt\,,$$

unde $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \le t \le b$.
Să se arate că regula definită reprezintă un produs scalar pe $C([a,b])$.

Soluţie:

Verificăm dacă sunt îndeplinite proprietăţile produsului scalar.
a) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle\,,\ \forall x,y \in \mathcal{R}\,(a,b)\,.$
$\langle x,y\rangle = \int\limits_a^b x(t)y(t)dt = \int\limits_a^b y(t)x(t)dt = \langle y,x\rangle\,.$
b) $\langle x,y+z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle\,,\ \forall x,y,z \in \mathcal{R}\,(a,b)\,.$
$\langle x,y+z\rangle = \int\limits_a^b x(t)(y+z)(t)dt = \int\limits_a^b x(t)(y(t)+z(t))dt =$
$= \int\limits_a^b x(t)y(t)dt + \int\limits_a^b x(t)z(t)dt = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle\,.$
c) $\langle \lambda x,y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle\,,\ \forall x,y \in \mathcal{R}\,(a,b)\,,\ \lambda \in \mathbf{R}\,.$
$\langle \lambda x,y\rangle = \int\limits_a^b (\lambda x)(t)y(t)dt = \int\limits_a^b \lambda x(t)y(t)dt =$
$= \lambda\int\limits_a^b x(t)y(t)dt = \lambda\langle x,y\rangle\,.$
d) $\langle x,x\rangle \ge 0\,,\ \forall x \in \mathcal{R}\,(a,b)$
şi $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (funcţia identic nulă).
Evident $\langle x,x\rangle = \int\limits_a^b (x(t))^2 dt \ge 0$ şi
$\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow (x(t))^2 = 0\,\forall t \in (a,b)$, adică $x = 0$.
Condiţiile a)-d) sunt verificate. Deci regula prezentată în problemă defineşte un produs scalar pe $\mathcal{R}\,(a,b)\,.$

3. Fie E un spaţiu vectorial euclidian. Arătaţi că oricărei forme liniare ω, $\omega : E \to \mathbf{R}$, i se poate asocia în mod unic un vector $\overline{x} \in E$ astfel încât $<\overline{x},\overline{y}>= \omega(\overline{y}), (\forall)\ \overline{y} \in E$.

Soluţie:

Considerăm o bază ortonormată $\mathcal{B} = \{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n\}$ şi fie $\overline{x} = x^1\overline{e}_1 + \cdots + x^n\overline{e}_n$. Atunci, notând $\omega(\overline{e}_i) = \omega_i$, pentru a fi verificată relaţia din problemă va trebui să avem
$< \overline{x}, \overline{e}_i > = < \sum\limits_{j=1}^{n} x^j\overline{e}_j, \overline{e}_i > = x^i = \omega(\overline{e}_i) = \omega_i$.
Am determinat astfel componentele vectorului $\overline{x}$.
Fie $\overline{y} = y^1\overline{e}_1 + \cdots + y^n\overline{e}_n^1$, arbitrar.
Atunci $< \overline{x}, \overline{y} > = < \sum\limits_{j=1}^{n} x^j\overline{e}_j, \sum\limits_{j=1}^{n} y^j\overline{e}_j > = \sum\limits_{j=1}^{n} \omega^j y^j$.
Dar $\omega(\overline{y}) = \omega(\sum\limits_{j=1}^{n} y^j\overline{e}_j) = \sum\limits_{j=1}^{n} y^j\omega(\overline{e}_j) = \sum\limits_{j=1}^{n} y^j\omega^j$, deci vectorul $\bar{x}$ satisface relaţia cerută. Presupunând că există $\overline{x}_1$ cu aceeaşi proprietate, avem:

$< \overline{x} - \overline{x}_1, \overline{x} - \overline{x}_1 > = < \overline{x}, \overline{x} - \overline{x}_1 > - < \overline{x}_1, \overline{x} - \overline{x}_1 > =$

$= \omega(\overline{x} - \overline{x}_1) - \omega(\overline{x} - \overline{x}_1) = 0$.

De aici avem $\|\overline{x} - \overline{x}_1\| = 0$, rezultă $\overline{x} - \overline{x}_1 = 0$.

4. Fie aplicaţia $<,> : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ care în raport cu baza canonică $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$din $\mathbf{R}^3$ are expresia
$< \overline{x}, \overline{y} > = 2x^1y^1 + x^2y^2 - 2x^2y^3 - 2x^3y^2 + 6x^3y^3$, unde $\overline{x} = (x^1, x^2, x^3)$ şi $\overline{y} = (y^1, y^2, y^3)$.

   a) Să se arate că $(\mathbf{R}^3, <,>)$ este un spaţiu euclidian.

   b) Să se scrie matricea produsului scalar în raport cu baza canonică.

   c) Să se calculeze $|| \ \overline{x} \ ||$ şi $\cos(\overline{x}, \overline{y})$ unde $\overline{x} = \overline{e}_1 + \overline{e}_2 + \overline{e}_3$, $\overline{y} = \overline{e}_1 + 2e_2 - \overline{e}$.

   d) Să se ortonormeze sistemul de vectori $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$.

   Soluţie:

   a). Dacă $\overline{x}_1 = (x_1^1, x_1^2, x_1^3)$, $\overline{x}_2 = (x_2^1, x_2^2, x_2^3)$, atunci $\overline{x}_1 + \overline{x}_2 = ((x_1^1 + x_2^1), (x_1^2 + x_2^2), (x_1^3 + x_2^3))$,
   deci $< \overline{x}_1 + \overline{x}_2, \overline{y} > = 2(x_1^1 + x_2^1)y^1 + (x_1^2 + x_2^2)^2y^2 -$
   $-2(x_1^2 + x_2^2)y^3 - 2(x_1^3 + x_2^3)y^2 + 6(x_1^3 + x_2^3)x^3y^3 =$
   $= (2x_1^1y^1 + x_1^2y^2 - 2x_1^2y^3 - 2x_1^3y^2 + 6x_1^3y^3) +$

$+(2x_2^1 y^1 + x_2^2 y^2 - 2x_2^2 y^3 - 2x_2^3 y^2 + 6x_2^3 y^3) =$
$=< \overline{x}_1, \overline{y} > + < \overline{x}_2, \overline{y} >$, deci aplicaţia este liniară.
Omogenitatea produsului $<,>$ rezultă în mod asemănător.

Se observă că $< \overline{x}, \overline{y} >= 2x^1y^1 + x^2y^2 - 2x^2y^3 - 2x^3y^2 +$

$+6x^3y^3 = 2y^1x^1 + y^2x^2 - 2y^2x^3 - 2y^3x^2 + 6y^3x^3 =$

$=< \overline{y}, \overline{x} >$, deci aplicaţia$<,>$ este simetrică.

Presupunem că:
$< \overline{x}, \overline{x} >= 0 \Rightarrow 2\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 - 2x^2x^3 - 2x^3x^2 + 6\left(x^3\right)^2 = 0 \Rightarrow$
$2\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 - 4x^2x^3 + 6\left(x^3\right)^2 = 0 \Rightarrow$
$2\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 - 4x^2x^3 + 4\left(x^3\right)^2 + 2\left(x^3\right)^2 = 0 \Rightarrow$
$2\left(x^1\right)^2 + \left(x^2 - 2x^3\right)^2 + 2\left(x^3\right)^2 = 0 \Rightarrow x^1 = 0,\ x^2 - 2x^3 = 0,$
$x^3 = 0$, deci $x^1 = x^2 = x^3 = 0$, prin urmare $<,>$ este un produs scalar, iar $(\mathbf{R}^3, <,>)$ este spaţiu vectorial euclidian.

b) Pentru calcularea matricei asociate acestui produs scalar, o modalitate ar fi aceea de a calcula direct valoarea produsului pentru elementele componente ale bazei canonice, deci $< \overline{e}_i, \overline{e}_j >$, $i, j = \overline{1,3}$. Putem observa însă că expresia din enunţ a produsului scalar poate fi adusă la următoarea formă matriceală prin identificarea scalarilor:

$< \overline{x}, \overline{y} >= (x^1, x^2, x^3) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix}$, ţinând cont că $\overline{x}$,$\overline{y}$ sunt arbitrari, matricea asociată va fi:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

c) Observăm că $\overline{x} = (1, 1, 1)$, deci

$$< \overline{x}, \overline{x} >= (1, 1, 1) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5.$$

Atunci $\|\overline{x}\| = \sqrt{<\overline{x},\overline{x}>} = \sqrt{5}$.

Mai departe,

$$<\overline{x},\overline{y}>= (1,1,1)\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= (2,-1,4)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -4;$$

$$<\overline{y},\overline{y}>= (1,2,-1)\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= (2,4,-10)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 20, \text{deci } \ \|\overline{y}\| = \sqrt{<\overline{y},\overline{y}>} = \sqrt{20}.$$

Putem calcula acum:

$$\cos(\overline{x},\overline{y}) = \frac{<\overline{x},\overline{y}>}{\|\overline{x}\|\cdot\|\overline{y}\|} = \frac{-4}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}} = \frac{-2}{5}\,.$$

d) Vom ortogonaliza sistemul $\{\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3\}$ prin procedeul Gram-Schmidt. Ne propunem să găsim vectorii $\overline{a}_1 = \overline{e}_1$, $\overline{a}_2 = \alpha\overline{a}_1 + +\overline{e}_2$, $\overline{a}_3 = \beta\overline{a}_1 + \gamma\overline{a}_2 + \overline{e}_3$, cu α, β, $\gamma \in \mathbf{R}$
astfel încât $<\overline{a}_1,\overline{a}_2>= 0$, $<\overline{a}_1,\overline{a}_3>= 0$, $<\overline{a}_2,\overline{a}_3>= 0$.

Avem: $<\overline{a}_1,\overline{a}_2>= 0 \Rightarrow \alpha <\overline{e}_1,\overline{e}_1> + <\overline{e}_1,\overline{e}_2>= 0 \Rightarrow 2\alpha + 0 = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow \overline{a}_2 = \overline{e}_2$.

Analog , $<\overline{a}_1,\overline{a}_3>= 0 \Rightarrow \beta\cdot 2 + 0 = 0 \Rightarrow \beta = 0$

$<\overline{a}_2,\overline{a}_3>= 0 \Rightarrow \gamma <\overline{a}_2,\overline{a}_2> + <\overline{a}_2,\overline{e}_3>= 0 \Rightarrow$

$\gamma <\overline{e}_2,\overline{e}_2> + <\overline{e}_2,\overline{e}_3>\Rightarrow \gamma\cdot 1 - 2 = 0 \Rightarrow \gamma = 2 \Rightarrow$
$\overline{a}_3 = 2\overline{e}_2 + \overline{e}_3$.

Vom calcula acum $\|\overline{a}_1\|$, $\|\overline{a}_2\|$, $\|\overline{a}_3\|$. Avem:

$$< \bar{a}_1, \bar{a}_1 >= (1,0,0) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2,$$

$$< \bar{a}_2, \bar{a}_2 >= (0,1,0) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$< \bar{a}_3, \bar{a}_3 >= (0,2,1) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2.$$

Deci $\|\bar{a}_1\| = \sqrt{< \bar{a}_1, \bar{a}_1 >} = \sqrt{2}$, $\|\bar{a}_2\| = \sqrt{< \bar{a}_2, \bar{a}_2 >} = 1$, $\|\bar{a}_3\| = \sqrt{< \bar{a}_3, \bar{a}_3 >} = \sqrt{2}$.

Notăm $\bar{b}_1 = \frac{\bar{a}_1}{\|\bar{a}_1\|} = \frac{\bar{e}_1}{\sqrt{2}}$, $\bar{b}_2 = \frac{\bar{a}_2}{\|\bar{a}_2\|} = \bar{e}_2$, $\bar{b}_3 = \frac{\bar{a}_2}{\|\bar{a}_2\|} = \frac{2\bar{e}_2+\bar{e}_3}{\sqrt{2}}$.

Sistemul $\left\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3\right\}$ este un sistem ortonormat.

5. În spaţiul euclidian $(E, <,>)$ în raport cu baza ortonormată $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4\}$ se dă sistemul vectorial:
$S = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$, unde $\bar{a}_1 = (1,-1,1,0)$, $\bar{a}_2 = (1,1,1,1)$, $\bar{a}_3 = (1,0,0,1)$.

   Să se ortonormeze folosind procedeul Gram-Schmidt.

   Soluţie:

   Fie $\bar{b}_1 = \bar{a}_1$,$\bar{b}_2 = \alpha\bar{b}_1 + \bar{a}_2, \bar{b}_3 = \beta\bar{b}_1 + \gamma\bar{b}_2 + \bar{a}_3$.

   Determinăm α, β, γ din condiţiile:
   $< \bar{b}_1, \bar{b}_2 >=< \bar{b}_1, \bar{b}_3 >=< \bar{b}_2, \bar{b}_3 >= 0$.
   Dar $< \bar{b}_1, \bar{b}_2 >= 0 \Rightarrow$
   $\alpha < \bar{a}_1, \bar{a}_1 > + < \bar{a}_1, \bar{a}_2 >= 0 \Rightarrow$
   $\alpha(1^2 + (-1)^2 + 1^2 + 0^2) + (1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = 0 \Rightarrow$
   $3\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{-1}{3} \Rightarrow \bar{b}_2 = -\frac{1}{3}\bar{a}_1 + \bar{a}_2 = (\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 1)$.

   Mai departe $< \bar{b}_1, \bar{b}_3 >= 0 \Rightarrow \beta < \bar{b}_1, \bar{b}_1 > +$
   $+ < \bar{b}_1, \bar{a}_3 >= 0 \Rightarrow \beta \cdot 3 + 1 = 0 \Rightarrow \beta = -\frac{1}{3}$.

   De asemenea:
   $< \bar{b}_2, \bar{b}_3 >= 0 \Rightarrow \gamma < \bar{b}_2, \bar{b}_2 > + < \bar{b}_2, \bar{a}_3 >= 0 \Rightarrow$

$\gamma\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+(1)^2\right)+$
$+\left(\frac{2}{3}\cdot 1+\frac{4}{3}\cdot 0+\frac{2}{3}\cdot 0+1\cdot 1\right)=0 \Rightarrow \frac{33}{9}\cdot\gamma+\frac{15}{9}\Rightarrow \gamma=\frac{-5}{11}.$

Deci $\bar{b}_3=-\frac{1}{3}\cdot(1,-1,1,0)-\frac{5}{11}(\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{2}{3},1)+(1\ ,0,0,1)=$
$=(\frac{12}{33},-\frac{9}{33},-\frac{21}{33},\frac{18}{33})$. În concluzie,
$\bar{b}_1=(1\ ,-1,1,0)$, $\bar{b}_2=(\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{2}{3},1)$, $\bar{b}_3=(\frac{12}{33},-\frac{9}{33},\frac{21}{33},\frac{18}{33})$.
Mai departe, avem:

$||\ \bar{b}_1\ ||=\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2+0^2}=\sqrt{3}\,,$

$||\ \bar{b}_2\ ||=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+(1)^2}=\sqrt{\frac{33}{9}}\,,$

$||\ \bar{b}_3\ ||=\sqrt{\left(\frac{12}{33}\right)^2+\left(-\frac{9}{33}\right)^2+\left(-\frac{21}{33}\right)^2+\left(\frac{18}{33}\right)^2}=\sqrt{\frac{990}{1089}}$

$=\sqrt{\frac{10}{11}}.$

Aşadar $\left\{\bar{c}_1=\frac{\bar{b}_1}{||\bar{b}_1||},\bar{c}_2=\frac{\bar{b}_2}{||\bar{b}_2||},\bar{c}_3=\frac{\bar{b}_3}{||\bar{b}_3||}\right\}$ reprezintă un sistem ortonormat în $\mathbf{R}^3$.

6. Fie spaţiul euclidian canonic $\mathbf{R}^4$ şi forma pătratică $f:\mathbf{R}^4\to\mathbf{R}$, care relativ la baza canonică $\mathcal{B}$ a lui $\mathbf{R}^4$ are expresia analitică

$$f(\bar{x})=4x^1x^2-2x^1x^4-2x^2x^3+4x^3x^4\ ,\bar{x}=(x^1,x^2,x^3,x^4)\in\mathbf{R}^4\ .$$

Folosind metoda transformărilor ortogonale să se aducă la forma canonică forma pătratică f. Să se găsească baza relativ la care f are expresia canonică, precum şi signatura lui f.

Soluţie:

Matricea formei pătratice f relativ la baza canonică a lui $\mathbf{R}^4$ este

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -1\\ 2 & 0 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 2\\ -1 & 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

Vom afla valorile proprii şi vectorii proprii pentru operatorul liniar simetric $u : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$, a cărui matrice relativ la baza canonică a lui $\mathbf{R}^4$ (care este bază ortonormată în raport cu produsul scalar canonic pe $\mathbf{R}^4$, $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \sum\limits_{i=1}^{4} x^i y^i$) este chiar A, adică

$$f(\bar{x}) = \tilde{x}_{\mathcal{B}}^t A \tilde{x}_{\mathcal{B}} = \langle \bar{x}, u(\bar{x}) \rangle .$$

Se ştie că există o bază ortonormată $\mathcal{B}_1$, formată din vectori proprii ai lui u, relativ la care matricea lui u este diagonală, adică este

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}$$

($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ sunt valorile proprii ale lui u)
Deci $f(\bar{x}) = \tilde{x}_{\mathcal{B}_1}^t D \tilde{x}_{\mathcal{B}_1} = \langle \bar{x}, u(\bar{x}) \rangle = \sum\limits_{i=1}^{4} \lambda_i (y^i)^2$ este forma canonică a lui f (unde y^i, $i = \overline{1,4}$ sunt coordonatele lui $\bar{x}$ relativ la baza $\mathcal{B}_1$) şi $\mathcal{B}_1$ este baza relativ la care f are expresia canonică.
Concret, valorile proprii ale lui u se găsesc rezolvând ecuaţia caracteristică $\det(A - \lambda I_4) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda & 2 \\ -1 & 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 9) = 0 \text{, de unde}$$

rezultă valorile proprii $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = 3$.
Forma canonică a formei pătratice f este
$f(\bar{x}) = -3(y^1)^2 - (y^2)^2 + (y^3)^2 + 3(y^4)^2$, unde
$\tilde{x}_{\mathcal{B}_1}^t = (y^1, y^2, y^3, y^4)$, iar baza ortonormată $\mathcal{B}_1$ este formată cu $\bar{v}_i$ $(i = \overline{1,4})$ vectori proprii corespunzători valorilor proprii λ_i.
Evident, signatura lui f este $(2, 2)$. Prin urmare f este formă pătratică nedefinită.

Pentru $\lambda_1 = -3$, se rezolvă sistemul omogen:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3x^1 + 2x^2 - x^4 & = & 0 \\ 2x^1 + 3x^2 - x^3 & = & 0 \\ -x^2 + 3x^3 + 2x^4 & = & 0 \\ -x^1 + 2x^3 + 3x^4 & = & 0 \end{cases}$$

şi se obţine $x^1 = \alpha, x^2 = -\alpha, x^3 = -\alpha, x^4 = \alpha$ ($\alpha \in \mathbf{R}$).
Un vector propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_1 = -3$ este $\alpha(1, -1, -1, 1)$, $\alpha \in \mathbf{R}^*$ şi dacă luăm $\alpha = 1$ obţinem vectorul $\bar{u}_1 = (1, -1, -1, 1)$ cu lungimea $\|\bar{u}_1\| = 2$. Atunci $\bar{v}_1 = \frac{1}{\|\bar{u}_1\|}\bar{u}_1 = \frac{1}{2}(1, -1, -1, 1)$.
Pentru $\lambda_2 = -1$, se rezolvă sistemul omogen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^1 + 2x^2 - x^4 & = & 0 \\ 2x^1 + x^2 - x^3 & = & 0 \\ -x^2 + x^3 + 2x^4 & = & 0 \\ -x^1 + 2x^3 + x^4 & = & 0 \end{cases}$$

şi se obţine $x^1 = -\alpha, x^2 = \alpha, x^3 = -\alpha, x^4 = \alpha$ ($\alpha \in \mathbf{R}$).
Un vector propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_2 = -1$ este $\alpha(-1, 1, -1, 1)$, $\alpha \in \mathbf{R}^*$ şi dacă luăm $\alpha = 1$ obţinem vectorul $\bar{u}_2 = (-1, 1, -1, 1)$ cu lungimea $\|\bar{u}_2\| = 2$. Atunci $\bar{v}_2 = \frac{1}{\|\bar{u}_2\|}\bar{u}_2 = \frac{1}{2}(-1, 1, -1, 1)$.
Pentru $\lambda_3 = 1$, se rezolvă sistemul omogen:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -x^1 + 2x^2 \ \ - x^4 & = & 0 \\ 2x^1 - x^2 - x^3 & = & 0 \\ -x^2 - x^3 + 2x^4 & = & 0 \\ -x^1 \ \ + 2x^3 - x^4 & = & 0 \end{cases}$$

şi se obţine $x^1 = \alpha, x^2 = \alpha, x^3 = \alpha, x^4 = \alpha$ ($\alpha \in \mathbf{R}$).
Un vector propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_3 = 1$ este $\alpha(1,1,1,1)$, $\alpha \in \mathbf{R}^*$ şi dacă luăm $\alpha = 1$ obţinem vectorul $\bar{u}_3 = (1,1,1,1)$ cu lungimea $\|\bar{u}_3\| = 2$. Atunci $\bar{v}_3 = \frac{1}{\|\bar{u}_3\|}\bar{u}_3 = \frac{1}{2}(1,1,1,1)$.
Pentru $\lambda_4 = 3$, se rezolvă sistemul omogen:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -3x^1 + 2x^2 \ \ - x^4 & = & 0 \\ 2x^1 - 3x^2 - x^3 & = & 0 \\ -x^2 - 3x^3 + 2x^4 & = & 0 \\ -x^1 \ \ + 2x^3 - 3x^4 & = & 0 \end{cases}$$

şi se obţine $x^1 = -\alpha, x^2 = -\alpha, x^3 = \alpha, x^4 = \alpha$ ($\alpha \in \mathbf{R}$).
Un vector propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_4 = 3$ este $\alpha(-1,-1,1,1)$, $\alpha \in \mathbf{R}^*$ şi dacă luăm $\alpha = 1$ obţinem vectorul $\bar{u}_4 = (-1,-1,1,1)$ cu lungimea $\|\bar{u}_4\| = 2$. Atunci $\bar{v}_4 = \frac{1}{\|\bar{u}_4\|}\bar{u}_4 = \frac{1}{2}(-1,-1,1,1)$.
Deci $\mathcal{B}_1 = \left\{\bar{v}_1 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \bar{v}_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),\right.$
$\left.\bar{v}_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \bar{v}_4 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$.

7. Fie $(E, \langle , \rangle)$ un spaţiu vectorial euclidian real şi $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n\}$ un sistem ortonormat de vectori din E care verifică proprietatea

$$\|\bar{x}\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle \bar{a}_k, \bar{x} \rangle^2 , \ \forall \bar{x} \in E$$

Arătaţi că $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n\}$ este bază pentru E.

Soluţie:

Se ştie că orice sistem ortogonal de vectori este liniar independent. Cum $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n\}$ este un sistem ortonormat, rezultă că este ortogonal, deci liniar independent.
Pentru a încheia rezolvarea problemei, rămâne să demonstrăm că $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n\}$ este sistem de generatori pentru E. Fie $\bar{x} \in E$, arbitrar fixat. Considerăm

$$\left\langle \sum_{k=1}^{n} \langle \bar{a}_k, \bar{x} \rangle \bar{a}_k - \bar{x}, \bar{a}_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle \bar{a}_k, \bar{x} \rangle \cdot \langle \bar{a}_k, \bar{a}_j \rangle - \langle \bar{x}, \bar{a}_j \rangle =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \langle \bar{a}_k, \bar{x} \rangle \delta_{kj} - \langle \bar{x}, \bar{a}_j \rangle = \langle \bar{a}_j, \bar{x} \rangle - \langle \bar{x}, \bar{a}_j \rangle = 0, \ \forall j = \overline{1, n}\,.$$

Dacă se notează $\bar{y} = \sum\limits_{k=1}^{n} \langle \bar{a}_k, \bar{x} \rangle \bar{a}_k - \bar{x}$, atunci conform ipotezei rezultă că

$$\|\bar{y}\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle \bar{a}_k, \bar{y} \rangle^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle \bar{y}, \bar{a}_k \rangle^2 = 0$$

şi astfel $\bar{y} = 0$.
Deci $\bar{x} = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha^k \bar{a}_k$, unde $\alpha^k = \langle \bar{a}_k, \bar{x} \rangle \in \mathbf{R}$.

8. Fie $(E, \langle , \rangle)$ un spaţiu vectorial euclidian real cu baza ortonormată $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ şi $\bar{a} = \bar{e}_1 - \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3$. Dacă $f : E \to E$ este definită prin

$$f(\bar{x}) = \langle \bar{x}, \bar{a} \rangle \bar{a}\,, \ \forall \bar{x} \in E$$

se cer:
a) Arătaţi că f este un operator liniar şi simetric;
b) Scrieţi matricea lui f în raport cu baza $\mathcal{B}$ şi ecuaţiile lui f relativ la aceeaşi bază;
c) Determinaţi $Ker\, f$ şi $Im\, f$;
d) Determinaţi o bază ortonormată a lui $Ker\, f$;

e) Găsiţi o bază ortonormată a lui E relativ la care matricea lui f este diagonală.

Soluţie:

a) Deoarece avem $f(\alpha\bar{x}+\beta\bar{y})=\langle\alpha\bar{x}+\beta\bar{y},\bar{a}\rangle\bar{a}=$
$\langle\alpha\bar{x},\bar{a}\rangle\bar{a}+\langle\beta\bar{y},\bar{a}\rangle\bar{a}=\alpha\langle\bar{x},\bar{a}\rangle\bar{a}+\beta\langle\bar{y},\bar{a}\rangle\bar{a}=\alpha f(\bar{x})+\beta f(\bar{y})$,
oricare ar fi $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ şi $\bar{x},\bar{y}\in E$, rezultă că $f\in End\,(E)$.
f este simetric pentru că:
$\langle f(\bar{x}),\bar{y}\rangle=\langle\bar{x},\bar{a}\rangle\langle\bar{a},\bar{y}\rangle=\langle\bar{a},\bar{y}\rangle\langle\bar{x},\bar{a}\rangle=\langle\bar{y},\bar{a}\rangle\langle\bar{x},\bar{a}\rangle=$
$=\langle\bar{x},\langle\bar{y},\bar{a}\rangle\bar{a}\rangle=\langle\bar{x},f(\bar{y})\rangle,\ \forall\bar{x},\bar{y}\in E$.
b) Deoarece f este un operator liniar simetric rezultă că matricea sa, relativ la baza ortormată $\mathcal{B}$, este simetrică.
Se calculează $f(\bar{e}_i)$, $i=1,2,3$.
$f(\bar{e}_1)=\langle\bar{e}_1,\bar{a}\rangle\bar{a}=1\cdot\bar{a}=\bar{a}=\bar{e}_1-\bar{e}_2+2\bar{e}_3$,
$f(\bar{e}_2)=\langle\bar{e}_2,\bar{a}\rangle\bar{a}=(-1)\cdot\bar{a}=-\bar{a}=-\bar{e}_1+\bar{e}_2-2\bar{e}_3$,
$f(\bar{e}_3)=\langle\bar{e}_3,\bar{a}\rangle\bar{a}=2\cdot\bar{a}=\bar{a}=2\bar{e}_1-2\bar{e}_2+4\bar{e}_3$.
(deoarece $\langle\bar{e}_i,\bar{e}_j\rangle=\delta_{ij}$)
Deci, matricea lui f relativ la $\mathcal{B}$ este

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&1&-2\\2&-2&4\end{pmatrix}$$

Prin urmare, cum $f(\tilde{\bar{x}})_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}y^1\\y^2\\y^3\end{pmatrix}=A\tilde{x}_{\mathcal{B}}=A\begin{pmatrix}x^1\\x^2\\x^3\end{pmatrix}$,
obţinem ecuaţiile lui f relativ la baza $\mathcal{B}$:

$$\begin{cases}y^1&=&x^1-x^2+2x^3\\y^2&=&-x^1+x^2-2x^3\\y^3&=&2x^1-2x^2+4x^3\end{cases}$$

c) Nucleul operatorului f este
$Ker\,f=\{\bar{x}\in E|f(\bar{x})=\bar{0}\}=$
$=\left\{\bar{x}=\sum\limits_{i=1}^{3}x^i\bar{e}_i\in E|(x^1,x^2,x^3)\right.$ soluţie pentru sistemul

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^1 - x^2 + 2x^3 & = & 0 \\ -x^1 + x^2 - 2x^3 & = & 0 \\ 2x^1 - 2x^2 + 4x^3 & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Se observă că rangul matricii asociate acestui sistem liniar omogen este 1 şi atunci $\dim Ker\, f = \dim E - rang\, A = 2$.
Rezolvăm sistemul pentru a găsi o bază pentru $Kerf$, adică un sistem fundamental de soluţii pentru sistemul omogen de mai sus.

Avem soluţia generală $\left\{\begin{array}{rcl} x^1 & = & \alpha - 2\beta \\ x^2 & = & \alpha \\ x^3 & = & \beta \end{array}\right. \qquad (\alpha, \beta \in \mathbf{R})$

şi prin urmare $\bar{x} \in Ker\, f$ dacă şi numai dacă
$\bar{x} = (\alpha - 2\beta)\bar{e}_1 + \alpha\bar{e}_2 + \beta\bar{e}_3$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, adică
$\bar{x} = \alpha\bar{a}_1 + \beta\bar{a}_2$, unde $\bar{a}_1 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$ şi $\bar{a}_2 = -2\bar{e}_1 + \bar{e}_3$.
Deci $Ker\, f = \{\alpha\bar{a}_1 + \beta\bar{a}_2 | \alpha, \beta \in \mathbf{R}\} = L(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ şi
$\mathcal{B}_1 = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2\}$ este o bază pentru $Ker\, f$ pentru că rangul matricii pe ale cărei coloane avem coordonatele vectorilor $\bar{a}_1$ şi $\bar{a}_2$, relativ la baza $\mathcal{B}$, este 2.
Acum, $\dim Im\, f = \dim E - \dim Ker\, f = rangA = 1$ şi
$Imf = \{f(\bar{x}) | \bar{x} \in E\} = \{(x^1 - x^2 + 2x^3)\bar{e}_1 + (-x^1 + x^2 - 2x^3)\bar{e}_2 + (2x^1 - 2x^2 + 4x^3)\bar{e}_3 | x^i \in \mathbf{R}\}$.
Deci $Im\, f = \{(x^1 - x^2 + 2x^3)(\bar{e}_1 - \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3) | x^i \in \mathbf{R}\} = L(\bar{a})$ şi astfel $\{\bar{a}\}$ este o bază pentru $Im\, f$.
d) Deoarece $\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2 \rangle = -2+0+0 = -2$ rezultă că $\mathcal{B}_1 = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2\}$ nu este bază ortonormată pentru $Ker\, f$. Pentru a obţine o bază ortonormată vom utiliza procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt, plecând de la baza $\mathcal{B}_1$.
Se consideră $\bar{g}_1 = \bar{a}_1$ şi $\bar{g}_2 = \bar{a}_2 + \alpha\bar{g}_1$, unde $\alpha \in \mathbf{R}$ se află din condiţia de ortogonalitate $\langle \bar{g}_1, \bar{g}_2 \rangle = 0$.
Din $0 = \langle \bar{g}_1, \bar{g}_2 \rangle = \langle \bar{a}_1, \bar{a}_2 \rangle + \alpha\langle \bar{a}_1, \bar{a}_1 \rangle$ rezultă $-2 + 2\alpha = 0$, adică $\alpha = 1$. Astfel, obţinem că $\bar{g}_1 = \bar{a}_1 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$ şi $\bar{g}_2 = \bar{a}_2 + \bar{g}_1 = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3$.
Acum, calculând $\|\bar{g}_1\| = \sqrt{\langle \bar{g}_1, \bar{g}_1 \rangle} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$ şi $\|\bar{g}_2\| = \sqrt{\langle \bar{g}_2, \bar{g}_2 \rangle} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ şi considerând

$$\bar{f}_1 = \frac{1}{\|\bar{g}_1\|}\bar{g}_1\,,\ \bar{f}_2 = \frac{1}{\|\bar{g}_2\|}\bar{g}_2$$

rezultă că $B_1^* = \left\{\bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{e}_1 + \bar{e}_2), \bar{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3)\right\}$ este o bază ortonormată a lui $Ker\, f$.
e) Ecuaţia caracteristică $\det(A - \lambda I_3) = 0$ are toate rădăcinile reale (pentru că A este matrice simetrică).

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2(\lambda - 6) = 0$$

şi atunci valorile proprii sunt $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 6$.
Baza ortonormată relativ la care matricea lui f este diagonală este $\mathcal{B}^* = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$, unde $\bar{v}_i$ este un vector propriu (versor) corespunzător valorii proprii λ_i, iar forma diagonală a matricii operatorului f este:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (\lambda_1 = \lambda_2 = 0; \lambda_3 = 6)$$

Pentru $\lambda_{1,2} = 0$ avem sistemul

$$(A - \lambda_1 I_3)\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x^1 - x^2 + 2x^3 &= 0 \\ -x^1 + x^2 - 2x^3 &= 0 \\ 2x^1 - 2x^2 + 4x^3 &= 0 \end{cases}$$

de unde rezultă că subspaţiul propriu crespunzător valorii proprii 0 este $V_0 = Ker\,(f - 0 \cdot I_3) = Ker\, f$ şi atunci $\bar{v}_1 = \bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{e}_1 + \bar{e}_2)$, $\bar{v}_2 = \bar{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{3})$. Pentru $\lambda_3 = 6$ avem sistemul

$$(A - \lambda_3 I_3)\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x^1 - x^2 + 2x^3 &= 0 \\ -x^1 - 5x^2 - 2x^3 &= 0 \\ 2x^1 - 2x^2 - 2x^3 &= 0 \end{cases}$$

de unde rezultă $x^1 = \alpha/2, x^2 = -\alpha/2, x^3 = \alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$ şi astfel subspaţiul propriu crespunzător valorii proprii 6 este $V_6 = Ker\,(f - 6 \cdot I_3) = \{\alpha(\bar{e}_1 - \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3) | \alpha \in \mathbf{R}\} = L(\bar{a})$, cu

$\bar{a} = \bar{e}_1 - \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3$.
Luăm $\bar{v}_3 = \frac{1}{\|\bar{a}\|} \cdot \bar{a} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\bar{e}_1 - \bar{e}_2 + 2\bar{3})$ şi astfel obţinem baza ortonormată $\mathcal{B}^*$ (ştiind că vectorii proprii corespunzători la valori proprii distincte, pentru un operator liniar şi simetric, sunt ortogonali).
Observăm că $Ker\, f \oplus Im\, f = E$.

9. În spaţiul euclidian canonic $\mathbf{R}^5$ se dă subspaţiul

$$E_1 = \left\{ \bar{x} = (x^1, x^2, x^3, x^4, x^5) \middle| \left\{ \begin{array}{l} x^1 + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 = 0 \\ x^1 - x^2 - x^3 - x^4 - x^5 = 0 \end{array} \right. \right\}$$

a) Determinaţi complementul ortogonal al lui E_1, $E_1^{\perp}$;
b) Determinaţi $pr_{E_1}\bar{x}$, unde $\bar{x} = (3, 1, 2, 2, 0)$;
c) Scrieţi matricea proiectorului ortogonal P_1 al lui $\mathbf{R}^5$ pe E_1.

Soluţie:

a) Complementul ortogonal al lui E_1 este
$E_1^{\perp} = \{\bar{y} \in \mathbf{R}^5 | \bar{y} \perp E_1\} = \{\bar{y} \in \mathbf{R}^5 | \bar{y} \perp \bar{x}, \ \forall \bar{x} \in E_1\}$.
Matricea sistemului liniar omogen din definiţia lui E_1 este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cum $rangA = 2$, rezultă că $\dim E_1 = 5 - 2 = 3$.
Rezolvând sistemul $\left\{ \begin{array}{lcl} x^1 + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 & = & 0 \\ x^1 - x^2 - x^3 - x^4 - x^5 & = & 0 \end{array} \right.$ se obţine
$\bar{x} = (x^1, x^2, x^3, x^4, x^5) = (\alpha + \gamma, -\beta, \alpha, \beta, \gamma)$, cu $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$.
Deci $\bar{x} \in E_1 \Leftrightarrow \bar{x} = \alpha\bar{a}_1 + \beta\bar{a}_2 + \gamma\bar{a}_3$, unde $\bar{a}_1 = (1, 0, 1, 0, 0)$, $\bar{a}_2 = (0, -1, 0, 1, 0)$, $\bar{a}_3 = (1, 0, 0, 0, 1)$.
Adică $E_1 = L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3)$.
Cum rangul matricei $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ este 3, rezultă că

$\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$ este bază pentru E_1. Atunci $E_1^{\perp}$ este mulţimea vectorilor $\bar{y}$ din $\mathbf{R}^5$ care sunt ortogonali pe $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ şi $\bar{a}_3$, adică

$$E_1^{\perp} = \left\{ \bar{y} = (y^1, y^2, y^3, y^4, y^5) | \left\{ \begin{array}{rcl} y^1 + y^3 & = & 0 \\ -y^2 + y^4 & = & 0 \\ y^1 + y^5 & = & 0 \end{array} \right. \right\}.$$

Rezultă:
$E_1^{\perp} = \{\bar{y} \in \mathbf{R}^5 | \exists \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ astfel ca $\bar{y} = (\alpha, \beta, -\alpha, \beta, -\alpha)\}$ sau $E_1^{\perp} = L(\bar{a}_4, \bar{a}_5)$, unde $\bar{a}_4 = (1, 0, -1, 0, -1)$ şi $\bar{a}_5 = (0, 1, 0, 1, 0)$ este şi bază pentru $E_1^{\perp}$.
b) Deoarece $E_1 \oplus E_1^{\perp} = \mathbf{R}^5$, avem descompunerea unică

$$\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2\,,\ \bar{x}_1 \in E_1,\ \bar{x}_2 \in E_1^{\perp}$$

pentru orice vector $\bar{x} \in \mathbf{R}^5$.
Pentru $\bar{x} = (3, 1, 2, 2, 0)$, proiecţia sa ortogonală pe subspaţiul E_1, notată $\bar{x}_1 = pr_{E_1} \bar{x}$, se găseşte după cum urmează.
Din $\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$, $E_1 = L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3)$ şi $\bar{x}_1 \in E_1, \bar{x}_2 \in E_1^{\perp}$ rezultă

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \bar{x}, \bar{a}_1 \rangle = \langle \bar{x}_1, \bar{a}_1 \rangle + \langle \bar{x}_2, \bar{a}_1 \rangle = \langle \bar{x}_1, \bar{a}_1 \rangle \\ \langle \bar{x}, \bar{a}_2 \rangle = \langle \bar{x}_1, \bar{a}_2 \rangle + \langle \bar{x}_2, \bar{a}_2 \rangle = \langle \bar{x}_1, \bar{a}_2 \rangle \\ \langle \bar{x}, \bar{a}_3 \rangle = \langle \bar{x}_1, \bar{a}_3 \rangle + \langle \bar{x}_2, \bar{a}_3 \rangle = \langle \bar{x}_1, \bar{a}_3 \rangle \end{array} \right.$$

sau, dacă luăm $\bar{x}_1 = \sum\limits_{j=1}^{3} \alpha^j \bar{a}_j$, $\alpha^j \in \mathbf{R}$, avem:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha^1 \langle \bar{a}_1, \bar{a}_1 \rangle + \alpha^2 \langle \bar{a}_2, \bar{a}_1 \rangle + \alpha^3 \langle \bar{a}_3, \bar{a}_1 \rangle & = & \langle \bar{x}, \bar{a}_1 \rangle \\ \alpha^1 \langle \bar{a}_1, \bar{a}_2 \rangle + \alpha^2 \langle \bar{a}_2, \bar{a}_2 \rangle + \alpha^3 \langle \bar{a}_3, \bar{a}_2 \rangle & = & \langle \bar{x}, \bar{a}_2 \rangle \\ \alpha^1 \langle \bar{a}_1, \bar{a}_3 \rangle + \alpha^2 \langle \bar{a}_2, \bar{a}_3 \rangle + \alpha^3 \langle \bar{a}_3, \bar{a}_3 \rangle & = & \langle \bar{x}, \bar{a}_3 \rangle \end{array} \right.$$

Ţinând cont de faptul că
$\langle \bar{a}_1, \bar{a}_1 \rangle = 2$, $\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2 \rangle = 0$, $\langle \bar{a}_1, \bar{a}_3 \rangle = 0$, $\langle \bar{a}_2, \bar{a}_2 \rangle = 2$, $\langle \bar{a}_2, \bar{a}_3 \rangle = 0$, $\langle \bar{a}_3, \bar{a}_3 \rangle = 2$, $\langle \bar{x}, \bar{a}_1 \rangle = 5$, $\langle \bar{x}, \bar{a}_2 \rangle = 1$, $\langle \bar{x}, \bar{a}_3 \rangle = 3$, obţinem sistemul liniar

$$\left\{ \begin{array}{ccccl} 2\alpha^1 & & & = & 5 \\ & 2\alpha^2 & & = & 1 \\ & & 2\alpha^3 & = & 3 \end{array} \right.$$

de unde $\bar{x}_1 = \frac{5}{2}\bar{a}_1 + \frac{1}{2}\bar{a}_2 + \frac{3}{2}\bar{a}_3$, adică $pr_{E_1}\,\bar{x} = (4, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.
c) Proiectorul ortogonal al lui $\mathbf{R}^5$ pe subspaţiul E_1,
$P_1 : \mathbf{R}^5 \to E_1$, este dat prin $P_1(\bar{x}) \overset{def}{=} pr_{E_1}\,\bar{x} \overset{not}{=} \bar{x}_1$,
pentru orice $\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$, $\bar{x}_1 \in E_1$, $\bar{x}_2 \in E_1^{\perp}$.
Conform cu punctele a) şi b) $\mathcal{B}_1 = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4, \bar{a}_5\}$ este o bază a lui $\mathbf{R}^5$ (prin calcul, se poate verifica că cei cinci vectori sunt liniari independenţi). Atunci matricea lui P_1 relativ la baza $\mathcal{B}_1$ este:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pentru că $P_1(\bar{a}_1) = \bar{a}_1$, $P_1(\bar{a}_2) = \bar{a}_2$, $P_1(\bar{a}_3) = \bar{a}_3$,
$P_1(\bar{a}_4) = \bar{0}$, $P_1(\bar{a}_5) = \bar{0}$.
Observaţii: i) Se poate găsi matricea lui P_1 relativ la orice bază a lui $\mathbf{R}^5$. De exemplu, matricea lui P_1 relativ la baza canonică a lui $\mathbf{R}^5$ este $B_1 = CA_1C^{-1}$, unde C este matricea de trecere de la baza canonică la baza B_1 ,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ii) Proiectorul ortogonal P_2 al lui $\mathbf{R}^5$ pe $E_1^{\perp}$,
$P_2(\bar{x}) \overset{def}{=} pr_{E_1^{\perp}}\,\bar{x} \overset{not}{=} \bar{x}_2$ are, relativ la baza $\mathcal{B}_1$, matricea

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10. Fie E_1 un subspaţiu al spaţiului euclidian real E, iar $P_1 : E \to E_1$ definit prin $P_1(\bar{x}) = \bar{x}_1$, $\forall \bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$, $\bar{x}_1 \in E_1$, $\bar{x}_2 \in E_1^{\perp}$.
Să se arate că:
a) P_1 este un operator liniar şi simetric;
b) P_1 este un operator idempotent ($P_1 \circ P_1 = P_1$).
(P_1 se numeşte *proiectorul ortogonal* al spaţiului E pe subspaţiul E_1)
Reciproc, pentru orice operator liniar, simetric şi idempotent, $P : E \to E$, există un subspaţiu E_1 al lui E astfel încât P să fie proiectorul ortogonal lui E_1 pe E.

Soluţie:

a) Fie $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ şi $\bar{x}, \bar{y} \in E$, arbitrari fixaţi.
Avem descompunerile unice $\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$, $\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2$, $\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} = (\alpha\bar{x}_1 + \beta\bar{y}_1) + (\alpha\bar{x}_2 + \beta\bar{y}_2)$, unde $\bar{x}_1, \bar{y}_1, \alpha\bar{x}_1 + \beta\bar{y}_1 \in E_1$, $\bar{x}_2, \bar{y}_2, \alpha\bar{x}_2 + \beta\bar{y}_2 \in E_1^{\perp}$. Atunci vom avea:
$P_1(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) = \alpha\bar{x}_1 + \beta\bar{y}_1 = \alpha P_1(\bar{x}) + \beta P_1(\bar{y})$ şi
$\langle P_1(\bar{x}), \bar{y}\rangle = \langle \bar{x}_1, \bar{y}\rangle = \langle \bar{x}_1, \bar{y}_1\rangle + \langle \bar{x}_1, \bar{y}_2\rangle = \langle \bar{x}_1, \bar{y}_1\rangle$, iar
$\langle \bar{x}, P_1(\bar{y})\rangle = \langle \bar{x}, \bar{y}_1\rangle = \langle \bar{x}_1, \bar{y}_1\rangle + \langle \bar{x}_2, \bar{y}_1\rangle = \langle \bar{x}_1, \bar{y}_1\rangle$.
Deci P_1 este operator liniar şi simetric.
b) $(P_1 \circ P_1)(\bar{x}) = P_1(P_1(\bar{x})) = P_1(\bar{x}_1) = P_1(\bar{x}_1 + \bar{0}) = \bar{x}_1 ==$ $P_1(\bar{x})$, pentru orice $\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$. Deci P_1 este idempotent.
Reciproc, fie $P : E \to E$ un operator liniar, simetric şi idempotent.
Se consideră mulţimea $E_1 = \{\bar{x} \in E | P(\bar{x}) = \bar{x}\}$.
Deoarece $P(\alpha\bar{x}+\beta\bar{y}) = \alpha P(\bar{x})+\beta P(\bar{y}) = \alpha\bar{x}+\beta\bar{y}$ pentru orice $\bar{x}, \bar{y} \in E_1$ şi $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, rezultă că E_1 este subspaţiu vectorial al lui E.
Vom demonstra că operatorul P este proiectorul ortogonal al lui E pe subspaţiul E_1, adică arătăm că
$P : E \to E_1$ şi $P(\bar{x}) = \bar{x}_1$, $\forall \bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \in E$, $\bar{x}_1 \in E_1$, $\bar{x}_2 \in E_1^{\perp}$ (descompunere unică).
Din idempotenţă avem $P(P(\bar{x})) = P(\bar{x})$, $\forall \bar{x} \in E$ şi astfel $P(\bar{x}) \in E_1$, $\forall \bar{x} \in E$. Deci $Im\, P = E_1$ sau $P : E \to E_1$.
Fie $\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \in E$, $\bar{x}_1 \in E_1$, $\bar{x}_2 \in E_1^{\perp}$.

Atunci $P(\bar{x}) = P(\bar{x}_1) + P(\bar{x}_2)$ şi $P(\bar{x}_2) \in E_1$.
Dar, din simetria lui P, avem $\langle \bar{y}, P(\bar{x}_2) \rangle = \langle P(\bar{y}), \bar{x}_2 \rangle = 0$, $\forall \bar{y} \in E_1$. Rezultă $P(\bar{x}_2) \in E_1^{\perp}$ şi astfel
$P(\bar{x}_2) \in E_1 \cap E_1^{\perp} = \{\bar{0}\}$, adică $P(\bar{x}_2) = \bar{0}$.
Deci $P(\bar{x}) = \bar{x}_1$, $\forall \bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \in E$.
Se observă că $Ker\, P = E_1^{\perp}$.

11. Dacă $(E, \langle , \rangle)$ este un spaţiu euclidian şi $f \in End(E)$ este simetric, atunci arătaţi că complementul ortogonal $E_1^{\perp}$ al oricărui subspaţiu E_1 invariant faţă de f este de asemenea invariant faţă de f.

Soluţie:

Fie $\bar{x} \in E_1^{\perp}$, arbitrar fixat. Atunci:
$\langle f(\bar{x}), \bar{y} \rangle = \langle \bar{x}, f(\bar{y}) \rangle = 0$, pentru orice $\bar{y} \in E_1$ şi prin urmare $f(\bar{x}) \in E_1^{\perp}$. Deci $E_1^{\perp}$ este subspaţiu invariant faţă de f.

12. Fie $(E, \langle , \rangle)$ un spaţiu euclidian. Un operator $f \in End(E)$ se numeşte *ortogonal* dacă $\langle f(\bar{x}), f(\bar{y}) \rangle = \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$, $\forall \bar{x}, \bar{y} \in E$.
Arătaţi că:
a) Operatorul f este ortogonal dacă şi numai dacă matricea sa, în raport cu o bază ortonormată a lui E, este ortogonală.
b) Operatorul f este ortogonal dacă şi numai dacă
$\|f(\bar{x})\| = \|\bar{x}\|$, $\forall \bar{x} \in E$.

Soluţie:

a) O matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ este ortogonală dacă şi numai dacă $AA^t = A^tA = I_n$ $(n = \dim E)$, adică
$\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\alpha_{kj} = \delta_{ij}$, $\forall i, j = \overline{1, n}$.
Matricea lui f relativ la baza ortonormată $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ este $A = (\alpha_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, unde $f(\bar{e}_j) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_{kj}\bar{e}_k$, $j = \overline{1, n}$.
Atunci f este ortogonal dacă şi numai dacă:
$\langle f(\bar{x}), f(\bar{y}) \rangle = \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$, $\forall \bar{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i \bar{e}_i, \bar{y} = \sum\limits_{j=1}^{n} y^j \bar{e}_j \Leftrightarrow$

$\langle \sum\limits_{i=1}^{n} x^i f(\bar{e}_i), \sum\limits_{i=1}^{n} y^j f(\bar{e}_j) \rangle = \langle \sum\limits_{i=1}^{n} x^i \bar{e}_i, \sum\limits_{i=1}^{n} y^j \bar{e}_j \rangle \Leftrightarrow$
$\sum\limits_{i,j=1}^{n} x^i y^j \langle f(\bar{e}_i), f(\bar{e}_j) \rangle = \sum\limits_{i,j=1}^{n} x^i y^j \langle \bar{e}_i, \bar{e}_j \rangle \Leftrightarrow$
$\sum\limits_{i,j=1}^{n} x^i y^j \langle \alpha_{ki} \bar{e}_k, \alpha_{lj} \bar{e}_l \rangle = \sum\limits_{i,j=1}^{n} x^i y^j \langle \bar{e}_i, \bar{e}_j \rangle \Leftrightarrow$
$\sum\limits_{i,j=1}^{n} x^i y^j \alpha_{ki} \alpha_{lj} \langle \bar{e}_k, \bar{e}_l \rangle = \sum\limits_{i,j=1}^{n} x^i y^j \langle \bar{e}_i, \bar{e}_j \rangle \Leftrightarrow$
$\sum\limits_{i,j=1}^{n} x^i y^j \alpha_{ki} \alpha_{lj} \delta_{kl} = \sum\limits_{i,j=1}^{n} x^i y^j \delta_{ij}$, $\forall x^i, y^j \in \mathbf{R} \Leftrightarrow$
$\alpha_{ki} \alpha_{lj} \delta_{kl} = \delta_{ij} \Leftrightarrow \alpha_{ki} \alpha_{kj} = \delta_{ij} \Leftrightarrow$
$AA^t = A^t A = I_n$, adică A este matrice ortogonală.
b) Dacă f este operator ortogonal, luând $\bar{x} = \bar{y}$, obţinem $\|f(\bar{x})\|^2 = \|\bar{x}\|^2$, $\forall \bar{x} \in E$, adică $\|f(\bar{x})\| = \|\bar{x}\|$, $\forall \bar{x} \in E$.
Invers, dacă avem $\|f(\bar{x})\| = \|\bar{x}\|$, $\forall \bar{x} \in E$, atunci $\|f(\bar{x}-\bar{y})\| = \|\bar{x} - \bar{y}\|$, $\forall \bar{x}, \bar{y} \in E \Leftrightarrow \|f(\bar{x}) - f(\bar{y})\|^2 = \|\bar{x} - \bar{y}\|^2$, $\forall \bar{x}, \bar{y} \in E$ $\Leftrightarrow \langle f(\bar{x}) - f(\bar{y}), f(\bar{x}) - f(\bar{y}) \rangle = \langle \bar{x} - \bar{y}, \bar{x} - \bar{y} \rangle$, $\forall \bar{x}, \bar{y} \in E \Leftrightarrow$ $\langle f(\bar{x}), f(\bar{y}) \rangle = \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$, $\forall \bar{x}, \bar{y} \in E$, adică f este ortogonal.

13. Operatorul $f \in End(\mathbf{R}^3)$ are proprietatea că
$f(\bar{e}_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{e}_3$ şi $f(\bar{e}_2) = -\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{e}_3$,
unde $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ este o bază ortonormată a lui $\mathbf{R}^3$.
a) Găsiţi matricea lui f relativ la baza $\mathcal{B}$, ştiind că f este operator ortogonal;
b) Dacă $\bar{x} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 - \bar{e}_3$ şi $\bar{y} = \bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 + 3\bar{e}_3$, calculaţi $\|\bar{x} - \bar{y}\|$, $\|f(\bar{x}) - f(\bar{y})\|$ şi $\cos\theta$, $\cos\varphi$, unde $\theta = m(\bar{x}, \bar{y})$ şi $\varphi = m(f(\bar{x}), f(\bar{y}))$.

Soluţie:

a) Matricea lui f relativ la baza ortonormată $\mathcal{B}$ este ortogonală. Deasemenea, transpusa ei este tot ortogonală. Dar, se ştie că

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \cdot \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \cdot \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \cdot \end{pmatrix}$$

şi cum o matrice ortogonală $A = (\alpha_{i,j})_{i,j=\overline{1,3}}$ verifică $\alpha_{i1}\alpha_{1j} + \alpha_{i2}\alpha_{2j} + \alpha_{i3}\alpha_{3j} = \delta_{ij}$, $\forall i, j = \overline{1,3}$, avem că (dacă se aplică formulele de mai sus pentru A^t):
$\alpha_{13}^2 = 1 - \alpha_{11}^2 - \alpha_{12}^2 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} == \frac{1}{6}$, $\alpha_{13} = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$.
$\alpha_{23}^2 = 1 - \alpha_{21}^2 - \alpha_{22}^2 = 1 - 0 - \frac{1}{3} == \frac{2}{3}$, $\alpha_{23} = \pm\frac{2}{\sqrt{6}}$.
$\alpha_{33}^2 = 1 - \alpha_{31}^2 - \alpha_{32}^2 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} == \frac{1}{6}$, $\alpha_{33} = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$.
Prin urmare, matricea ortogonală A poate fi
$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ sau
$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.
Deci există doi operatori ortogonali în condiţiile date.
b) Se vor efectua calculele pentru operatorul ortogonal f a cărui matrice, relativ la baza $\mathcal{B}$, este:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

pentru celălalt operator calculele fiind similare.
Avem $\bar{x} - \bar{y} = 3\bar{e}_2 - 4\bar{e}_3$, $f(\bar{x}) - f(\bar{y}) = f(\bar{x} - \bar{y}) = 3f(\bar{e}_2) - 4f(\bar{e}_3) = \frac{-3\sqrt{2}-4}{\sqrt{6}}\bar{e}_1 + \frac{3\sqrt{2}-8}{\sqrt{6}}\bar{e}_2 + \frac{3\sqrt{2}+4}{\sqrt{6}}\bar{e}_3$, de unde
$\|\bar{x} - \bar{y}\| = \sqrt{0^2 + 3^2 + (-4)^2} = 5$ şi
$\|f(\bar{x}) - f(\bar{y})\| = \sqrt{(\frac{-3\sqrt{2}-4}{\sqrt{6}})^2 + (\frac{3\sqrt{2}-8}{\sqrt{6}})^2 + (\frac{3\sqrt{2}+4}{\sqrt{6}})^2} = 5$ (rezultat normal pentru că f este ortogonal).
Acum, $\cos\theta = \frac{\langle \bar{x}, \bar{y}\rangle}{\|\bar{x}\|\cdot\|\bar{y}\|} = \frac{1\cdot 1 + 1\cdot(-2) + (-1)\cdot 3}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}} = -\frac{4}{\sqrt{42}}$
şi $\cos\varphi = \frac{\langle f(\bar{x}), f(\bar{y})\rangle}{\|f(\bar{x})\|\cdot\|f(\bar{y})\|} = \cos\theta$.

14. Fie $\mathcal{M}_s(n; \mathbf{R}) = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) | A = A^t\right\}$ mulţimea matricilor pătratice de ordinul n, simetrice, cu elemente reale. Dacă se consideră aplicaţia

$\langle , \rangle : \mathcal{M}_s(n;\mathbf{R}) \times \mathcal{M}_s(n;\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$, dată prin
$\langle A, B\rangle \overset{def}{=} Tr(AB)$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_s(n;\mathbf{R})$, atunci:
a) Să se arate că $\langle , \rangle$ este un produs scalar pe spaţiul vectorial real $\mathcal{M}_s(n;\mathbf{R})$;
b) Pentru $n = 2$, să se ortonormeze baza
$\mathcal{B} = \left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Soluţie:

a) Dacă $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, $B = (b_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, $C = (c_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ matrici simetrice şi $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$, avem
$\langle \alpha A + \beta B, C\rangle = Tr((\alpha A + \beta B)C) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_{kk}$,
unde $c_{kk} = \sum\limits_{j=1}^{n} (\alpha a_{kj} + \beta b_{kj})c_{jk}$.
(se ştie că $Tr(A) \overset{def}{=} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{kk}$ este *urma* matricii A)
Atunci, $\langle \alpha A + \beta B, C\rangle = \alpha \sum\limits_{k,j=1}^{n} a_{kj}c_{jk} + \beta \sum\limits_{k,j=1}^{n} b_{kj}c_{jk} =$
$= \alpha Tr(AC) + \beta Tr(BC) = \alpha\langle A, C\rangle + \beta\langle B, C\rangle$ (1)
$\langle A, B\rangle = Tr(AB) = \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ki}b_{ik} =$
$= \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{k=1}^{n} b_{ik}a_{ki} = Tr(AB) = \langle B, A\rangle$ (2)
$\langle A, A\rangle = Tr(A^2) = \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ki}a_{ik} = \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{k,i=1}^{n} a_{ki}^2 > 0$ (3)
pentru că $A = A^t$.
$\langle A, A\rangle = 0 \Leftrightarrow a_{ki} = 0, \forall k, i = \overline{1, n}$, adică $A = \mathbf{R}$ (4)
Din (1)-(4) rezultă că $\langle , \rangle$ este un produs scalar pe $\mathcal{M}_s(n;\mathbf{R})$.
b) Se consideră $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 + \alpha B_1$,
$B_3 = A_3 + \beta B_1 + \gamma B_2$, unde α, β, γ se află din condiţiile:
$\langle B_1, B_2\rangle = 0$, $\langle B_1, B_3\rangle = 0$, $\langle B_2, B_3\rangle = 0$, adică
$\langle A_1, A_2\rangle + \alpha\langle A_1, A_1\rangle = 0$
$\langle A_1, A_3\rangle + \beta\langle A_1, A_1\rangle + \gamma\langle A_1, B_2\rangle = 0$
$\langle B_2, A_3\rangle + \beta\langle B_2, A_1\rangle + \gamma\langle B_2, B_2\rangle = 0$

Cum $A_1A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A_1A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_1A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $A_2A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A_2A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, rezultă $Tr(A_1A_2) = -2$, $Tr(A_1^2) = 3$ şi $\alpha = \frac{2}{3}$.

Deci $B_2 = A_2 + \frac{2}{3}A_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$.

În continuare, $A_1B_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $B_2B_2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$, $B_2A_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ şi atunci $Tr(A_1B_2) = Tr(B_2A_1) = 0$, $Tr(B_2^2) = \frac{2}{3}$, $Tr(B_2A_3) = \frac{4}{3}$.

Atunci, rezolvând sistemul $\begin{cases} -4 + 3\beta + 0\gamma &= 0 \\ \frac{4}{3} + 0\beta + \frac{2}{3}\gamma &= 0 \end{cases}$,
se obţine $\beta = \frac{4}{3}$, $\gamma = -2$ şi astfel
$B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Din baza ortogonală $\{B_1, B_2, B_3\}$ se obţine baza ortonormată căutată $\mathcal{B}^* = \{C_1, C_2, C_3\}$, unde
$C_1 = \frac{1}{\|B_1\|}B_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}$, $C_2 = \frac{1}{\|B_2\|}B_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix}$
şi
$C_3 = \frac{1}{\|B_3\|}B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(vezi $\|B_1\| = \sqrt{Tr(B_1^2)} = \sqrt{3}$, $\|B_2\| = \sqrt{Tr(B_2^2)} = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\|B_3\| = \sqrt{Tr(B_3^2)} = 1$)

15. Fie S, Q transformări liniare simetrice ale spaţiului vectorial euclidian E. Considerăm $B_1 = \{\overline{x} \in E \mid \| \overline{x} \| = 1\}$.
Notând cu $\lambda_{\max}$ (respectiv $\lambda_{\min}$) valoarea proprie maximală (minimală) a lui S şi cu $\mu_{\max}$ (respectiv $\mu_{\min}$) valoarea proprie maximală (minimală) a lui Q, arătaţi că $\lambda_{\max} \leq \mu_{\min}$ dacă şi numai dacă $< S(\overline{x}), \overline{x} > \leq < Q(\overline{y}), \overline{y} >, \forall \overline{x}, \overline{y} \in B_1$.

Soluţie:

"$\Rightarrow$" Se ştie că orice operator liniar simetric posedă o bază ortonormată formată din vectori proprii. Fie $\mathcal{B}_S = \{\overline{e}_1, ..., \overline{e}_n\}$ şi $\mathcal{B}_Q = \{\overline{f}_1, ..., \overline{f}_n\}$ o astfel de bază asociată operatorului liniar simetric S, respectiv Q. Fie $\overline{x} = x^1\overline{e}_1 + ... + x^n\overline{e}_n$; $\overline{y} = y^1\overline{f}_1 + ... + y^n\overline{f}_n$, $\overline{x}, \overline{y} \in B_1$. Atunci:

$$< S(\overline{x}), \overline{x} >=< S(\sum_{i=1}^{n} x^i\overline{e}_i), \sum_{i=1}^{n} x^i\overline{e}_i >=$$

$$=< \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x^i\overline{e}_i, \sum_{i=1}^{n} x^i\overline{e}_i >= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(x^i\right)^2 .$$

Analog, $< Q(\overline{y}), \overline{y} >= \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i \left(y^i\right)^2$. Dar:

$$< S(\overline{x}), \overline{x} >= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(x^i\right)^2 \leq \lambda_{\max} \sum_{i=1}^{n} \left(x^i\right)^2 =$$

$$= \lambda_{\max} \leq \mu_{\min} = \mu_{\min} \sum_{i=1}^{n} \left(y^i\right)^2 \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \mu_i \left(y^i\right)^2 =< Q(\overline{y}), \overline{y} > .$$

"$\Leftarrow$" $(\forall)$ $i, j = \overline{1..n}$, avem $\overline{e}_i$, $\overline{f}_j \in B_1$, deci

$$< S(\overline{e}_i), \overline{e}_i > \leq < Q(\overline{f}_j), \overline{f}_j > .$$

Atunci $\lambda_i \left|\left|\overline{e}_i\right|\right| \leq \mu_j \left|\left|\overline{f}_j\right|\right|$. De aici rezultă că $\lambda_{\max} \leq \mu_{\min}$.

16. Într-un spaţiu euclidian E considerăm definită o formă biliniară antisimetrică nedegenerată ω, $\omega : E \times E \to \mathbf{R}$(o *formă simplectică*, vezi problema 12, cap. 4). Dacă $\dim E = 2n$, arătaţi că putem găsi o bază $\mathcal{B} = \{\overline{e}_1, ..\overline{e}_n, .., \overline{e}_{2n}\}$ astfel încât

$$\omega(\overline{e}_i, \overline{e}_j) = 0; \omega(\overline{e}_{n+i}, \overline{e}_{n+j}) = 0; \omega(\overline{e}_i, \overline{e}_{n+j}) = \delta_{ij} ,$$

unde $i, j = \overline{1, n}$, iar $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } i = j \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$ (simbolul lui Kronecker).

Soluţie:

Vom rezolva problema prin inducţie după n.
Pentru $n = 1$, fie $\overline{x}$ fixat şi fie $\overline{y} \in E$ vectorul unic determinat (vezi problema 3) de relaţia:

$$< \overline{y}, \overline{z} >= \omega(\overline{x}, \overline{z}) \, , \; (\forall) \; \overline{z} \in E \, .$$

Atunci $\left\{ \frac{\overline{x}}{||\overline{x}||}, \frac{\overline{y}}{||\overline{y}||} \right\}$ este baza căutată. Presupunem afirmaţia adevărată pentru n şi fie E un spaţiu euclidian, $\dim E = 2(n+1)$. Fie $\overline{x}$, $\overline{y} \in E$ ca mai sus şi $W = L(\overline{x}, \overline{y})$. Fie W^T complementul ortogonal al lui W. Cum $\dim W^T = 2n$, fie $\{\overline{f}_1, ..\overline{f}_n, .., \overline{f}_{2n}\}$ cu proprietatea cerută. Notând $\overline{e}_1 = \frac{\overline{x}}{||\overline{x}||}$; $\overline{e}_{n+2} = \frac{\overline{y}}{||\overline{y}||}$; $\overline{e}_i = \overline{f}_{i-1}$, pentru $i = \overline{1, n}$ şi $i = \overline{n+2, 2n}$, observăm că baza $\{\overline{e}_1, ..\overline{e}_{n+1}, \overline{e}_{n+}, .., \overline{e}_{2n}\}$ satisface toate exigenţele enunţului.

17. Fie E un spaţiu euclidian şi ω o formă simplectică. Un subspaţiu W astfel încât $\omega(\overline{x}, \overline{y}) = 0$, $(\forall)$ $\overline{x}$, $\overline{y} \in W$, şi W cu această proprietate e maximal în raport cu relaţia de incluziune poartă numele de subspaţiu *lagrangean*. Dacă W este un astfel de subspaţiu, demonstraţi că $\dim W \leq \frac{\dim E}{2}$.

Soluţie:

Oricărui vector $\overline{x} \in W$ îi asociem în mod unic vectorul $I(\overline{x}) \in E$ astfel încât:

$$< I(\overline{x}), \overline{y} >= \omega(\overline{x}, \overline{y}) = 0 \, , (\forall) \; \overline{y} \in E$$

(vezi problema 3). Fie $\widetilde{W} = Im(I)$. Se observă că I este operator liniar. Demonstrăm că $Ker\, f = \{\overline{0}\}$. Presupunem că $(\exists)$ $\overline{x} \in W$ astfel încât $I(\overline{x}) = \overline{0}$.
Atunci $\omega(\overline{x}, \overline{y}) = \left\langle \overline{0}, \overline{y} \right\rangle = 0, (\forall) \; \overline{y} \in E$. Dar cum ω este nedegenerată, contradicţia provine din faptul că într-o bază

ce conţine vectorul $\overline{x}$, matricea asociată ar avea o întreagă linie nulă, deci va avea determinantul nul (vezi problema 12, cap. 4).
Atunci $\dim \widetilde{W} = \dim W$. Fie acum $\overline{x}, \overline{y} \in W$; din relaţia de mai sus rezulta că W şi $\widetilde{W}$ sunt ortogonale.
Atunci $\dim E \geq \dim W + \dim \widetilde{W} = 2 \cdot \dim W$. De aici rezultă concluzia problemei.

5.2 Probleme propuse spre rezolvare

1. Pe spaţiul vectorial aritmetic $\mathbf{R}^n$ se consideră aplicaţia biliniară $<< \cdot, \cdot >>$ definită prin

$$<< \overline{x}, \overline{y} >>= x^1y^1 + 2x^2y^2 + 3x^3y^3 + \cdots + nx^ny^n,$$

pentru orice $\overline{x} = (x^1, x^2, ..., x^n)$, $\overline{y} = (y^1, y^2, ..., y^n)$.

a) Arătaţi că $<< \cdot, \cdot >>$ este un produs scalar pe $\mathbf{R}^n$.

b) Verificaţi că baza canonică a lui $\mathbf{R}^n$ este ortonormată în raport cu acest produs scalar.

c) Arătaţi că există k_1, $k_2 > 0$ astfel încât $k_1 \cdot |\overline{x}| \leq ||\overline{x}|| \leq k_2 \cdot |\overline{x}|$, $\forall \overline{x} \in \mathbf{R}^n$, unde $|\cdot|$ reprezintă norma euclidiană pe $\mathbf{R}^n$ şi $||\cdot||$ reprezintă norma asociată produsului scalar $<< \cdot, \cdot >>$.

d) Scrieţi inegalitatea lui Cauchy pentru produsul scalar $<< \cdot, \cdot >>$. Comparaţi-o cu inegalitatea lui Cauchy scrisă pentru produsul scalar canonic $< \cdot, \cdot >$.

2. Fie E un spaţiu vectorial real, n-dimensional dotat cu două produse scalare $< \cdot, \cdot >_1$şi $< \cdot, \cdot >_2$. Să se arate că oricare ar fi perechea de vectori nenuli $\overline{x}$, $\overline{y} \in E$, unghiurile dintre cei doi vectori, corespunzătoare celor două produse scalare, sunt egale dacă şi numai dacă există $\lambda > 0$ astfel încât $< \overline{x}, \overline{y} >_1 = \lambda < \overline{x}, \overline{y} >_2$, pentru orice $\overline{x}$, $\overline{y} \in E$.

3. In spaţiul vectorial aritmetic $\mathbf{R}^3$ se consideră vectorii $\overline{a}_1 = (1, 0, 1)$, $\overline{a}_2 = (1, 1, 0)$, $\overline{a}_3 = (0, 1, 1)$, $\overline{a} = (1, 2, 3)$, $\overline{b} = (-1, 0, 4)$.

Să se calculeze unghiul vectorilor $\overline{a}$, $\overline{b}$ în spaţiul vectorial euclidian $\left(\mathbf{R}^3, <\cdot,\cdot>\right)$, unde $<\cdot,\cdot>$ este produsul scalar pe $\mathbf{R}^3$ în raport cu care baza $\{\overline{a}_1,\overline{a}_2,\overline{a}_3\}$ este ortonormată.

4. Dacă $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ este matricea unei forme pătratice pozitiv definite pe un spaţiu vectorial real V, atunci arătaţi că are loc inegalitatea

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x^i y^j\right)^2 \leq \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x^i x^j\right) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}y^i y^j\right)$$

pentru orice numere reale x^1, x^2, ..., x^n, y^1, y^2, ..., y^n.

5. Fie spaţiul vectorial euclidian real (sau complex) $(E, <\cdot,\cdot>)$ de dimensiune finită n, cu baza ortonormată $\mathcal{B} = \{\overline{e}_1, ..., \overline{e}_n\}$. Dacă se consideră o baza ortogonală $\mathcal{B}' = \{\overline{a}_1, ..., \overline{a}_n\}$, să se calculeze determinantul matricii de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}'$ în funcţie de lungimile vectorilor bazei $\mathcal{B}'$.

6. Fie $\mathcal{F}$ spaţiul vectorial real al funcţiilor reale continue definite pe intervalul $[0, 2\pi]$. Se defineşte aplicaţia

$$(f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to < f, g, >= \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt \in \mathbf{R}.$$

a) Arătaţi că perechea $(\mathcal{F}, <\cdot,\cdot>)$ este un spaţiu eculidian.

b) Dacă $f_0(x) = 1$, $f_{2n-1}(x) = \cos nx$, $f_{2n}(x) = \sin nx$, $n \in \mathbf{N}^*$, atunci arătaţi că sistemul de funcţii $S = \{f_0,\ f_1,\ f_2,\ ...\}$ este liniar independent în $\mathcal{F}$.

c) Ortonormaţi sistemul S, folosind procedeul Gram-Schmidt.

d) Găsiţi proiecţia ortogonală a funcţiei $f(x) = x$ pe subspaţiul lui $\mathcal{F}$ generat de funcţiile $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f_0$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}}f_1$, ..., $\frac{1}{\sqrt{\pi}}f_{2n}$.

Partea II

Geometrie analitică

Capitolul 6

Vectori liberi

Definiţia 6.1. Două segmente orientate nenule se numesc echipolente dacă au "aceeaşi direcţie", "acelaşi sens" şi "aceeaşi lungime".

Teorema 6.1. Relaţia de echipolenţă pentru segmente orientate nenule este o relaţie de echivalenţă.

Definiţia 6.2. Clasele de echivalenţă ale segmentelor orientate relativ la relaţia de echipolenţă se numesc vectori liberi. Direcţia, sensul şi lungimea care sunt comune segmentelor orientate ce definesc un vector liber se numesc direcţia, sensul şi lungimea vectorului liber.

Fie V^3 spaţiul vectorilor liberi şi $\overline{a}, \overline{b} \in V^3$. Pentru $\overline{a} \neq \overline{0}$ şi $\overline{b} \neq \overline{0}$, notăm cu $\varphi \in [0, \pi]$ unghiul neorientat dintre $\overline{a}$ şi $\overline{b}$.

Teorema 6.2. Funcţia $(.,.) : V^3 \times V^3 \to \mathbf{R}$ definită prin

$$\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = \begin{cases} \|\overline{a}\| \left\|\overline{b}\right\| \cos\varphi, \text{ pentru } \overline{a} \neq \overline{0} \text{ şi } \overline{b} \neq \overline{0} \\ 0\,, \text{ pentru } \overline{a} = \overline{0} \text{ sau } \overline{b} = \overline{0}, \end{cases}$$

este un produs scalar pe V^3.

Definiţia 6.3. Vectorul

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{cases} \|\overline{a}\| \left\|\overline{b}\right\| \sin\varphi \overline{e}\,, \text{ pentru } \overline{a} \text{ şi } \overline{b} \text{ necoliniari} \\ \overline{0}\,, \text{ pentru } \overline{a}, \overline{b} \text{ coliniari }, \end{cases}$$

unde $\overline{e}$ este un versor perpendicular pe $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ şi cu sensul dat de regula mâinii drepte pentru tripletul $\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{e}\right)$, se numeşte produsul vectorial dintre $\overline{a}$ şi $\overline{b}$.

Produsul vectorial este o aplicaţie biliniară definită pe $V^3 \times V^3$ cu valori în V^3.

Teorema 6.3. Pornind de la definiţia produsului vectorial se deduc următoarele proprietăţi:

1. $\overline{a} \times \overline{b} = -\overline{b} \times \overline{a}, \forall \overline{a}, \overline{b} \in V^3$ (anticomutativitate datorată tocmai orientării unghiului dintre cei doi vectori);

2. $t\left(\overline{a} \times \overline{b}\right) = (t\overline{a}) \times \overline{b} = \overline{a} \times \left(t\overline{b}\right), \forall t \in \mathbf{R}$ şi $\forall\ \overline{a}, \overline{b} \in V^3$;

3. $\overline{a} \times \left(\overline{b} + \overline{c}\right) = \overline{a} \times \overline{b} + \overline{a} \times \overline{c}, \quad \forall \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V^3$ (distributivitatea produsului vectorial faţă de adunarea vectorilor);

4. $\overline{a} \times \overline{0} = \overline{0}$, $\overline{a} \times \overline{a} = \overline{0}$, $\forall \overline{a} \in V^3$;

5. $\left\|\overline{a} \times \overline{b}\right\|^2 = \|\overline{a}\|^2 \left\|\overline{b}\right\|^2 - \left(\overline{a}, \overline{b}\right)^2, \forall \overline{a}, \overline{b} \in V^3$ (identitatea lui Lagrange);

6. produsul vectorial a doi vectori nenuli $\overline{a}, \overline{b} \in V^3$ este nul dacă şi numai dacă vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ sunt coliniari; dacă $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ nu sunt coliniari atunci norma $\left\|\overline{a} \times \overline{b}\right\|$ reprezintă aria paralelogramului construit pe reprezentanţii $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OB}$.

Simbolic, produsul vectorial se poate calcula cu ajutorul formulei următoare:

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ r_1 & s_1 & t_1 \\ r_2 & s_2 & t_2 \end{vmatrix}.$$

Fiind daţi vectorii liberi $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, numărul $\left(\overline{a}, \overline{b} \times \overline{c}\right)$ se numeşte produsul mixt al acestor vectori. Dacă $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ sunt necoplanari, atunci modulul produsului mixt reprezintă volumul paralelipipedului ce se poate construi pe reprezentanţii cu originea comună ai celor trei vectori.

Dacă notăm cu θ unghiul dintre direcţiile vectorilor $\overline{b}$ şi $\overline{c}$ şi cu φ unghiul dintre direcţiile vectorilor $\overline{a}$ şi $\overline{b} \times \overline{c}$; atunci

$$\left(\overline{a}, \overline{b} \times \overline{c}\right) = \left(\overline{a}, \overline{d}\right) = \|\overline{a}\| \left\|\overline{d}\right\| \cos\varphi = \left\|\overline{b} \times \overline{c}\right\| pr_{\overline{d}}\overline{a} = \pm V_{paralelipiped}$$

Au loc următoarele proprietăţi:

1. $\left(\overline{a}, \overline{b} \times \overline{c}\right) = \left(\overline{c}, \overline{a} \times \overline{b}\right) = \left(\overline{b}, \overline{c} \times \overline{a}\right)\ \forall \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V^3$;

2. $\left(\overline{a},\overline{b}\times\overline{c}\right)=-\left(\overline{a},\overline{c}\times\overline{b}\right)\ \forall\overline{a},\overline{b},\overline{c}\in V^3$;
3. $\left(t\overline{a},\overline{b}\times\overline{c}\right)=\left(\overline{a},t\overline{b}\times\overline{c}\right)=\left(\overline{a},\overline{b}\times t\overline{c}\right)\ \forall t\in\mathbf{R}$ şi $\forall\ \overline{a},\overline{b},\overline{c}\in V^3$;
4. $\left(\overline{a_1}+\overline{a_2},\overline{b}\times\overline{c}\right)=\left(\overline{a_1},\overline{b}\times\overline{c}\right)+\left(\overline{a_2},\overline{b}\times\overline{c}\right)\ \forall\ \overline{a_1},\overline{a_2},\overline{b},\overline{c}\in V^3$;
5. $\left(\overline{a}\times\overline{b},\overline{c}\times\overline{d}\right)=\begin{vmatrix}\left(\overline{a},\overline{c}\right) & \left(\overline{a},\overline{d}\right)\\ \left(\overline{b},\overline{c}\right) & \left(\overline{b},\overline{d}\right)\end{vmatrix}\ \forall\overline{a},\overline{b},\overline{c},\overline{d}\in V^3$ (identitatea lui Lagrange);
6. $\left(\overline{a},\overline{b}\times\overline{c}\right)=0$, dacă şi numai dacă:
   i) cel puţin unul dintre vectorii $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ este nul;
   ii) doi dintre vectori sunt coliniari;
   iii) vectorii $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ sunt coplanari.

Dacă

$$\overline{a}=r_1\overline{i}+s_1\overline{j}+t_1\overline{k},\overline{b}=r_2\overline{i}+s_2\overline{j}+t_2\overline{k},\overline{c}=r_3\overline{i}+s_3\overline{j}+t_3\overline{k},$$

în coordonate produsul mixt se scrie

$$\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)=(\overline{a},\overline{b}\times\overline{c})=\begin{vmatrix}r_1 & s_1 & t_1\\ r_2 & s_2 & t_2\\ r_3 & s_3 & t_3\end{vmatrix}.$$

6.1 Probleme rezolvate

1. Fie trapezul dreptunghic $ABCD$ în care $AD\|BC$, $\overline{AD}=\bar{a}$, $\overline{AB}=\bar{b}$, $m(A\hat{B}C)=\frac{5\pi}{6}$. Să se descompună $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, după vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$.

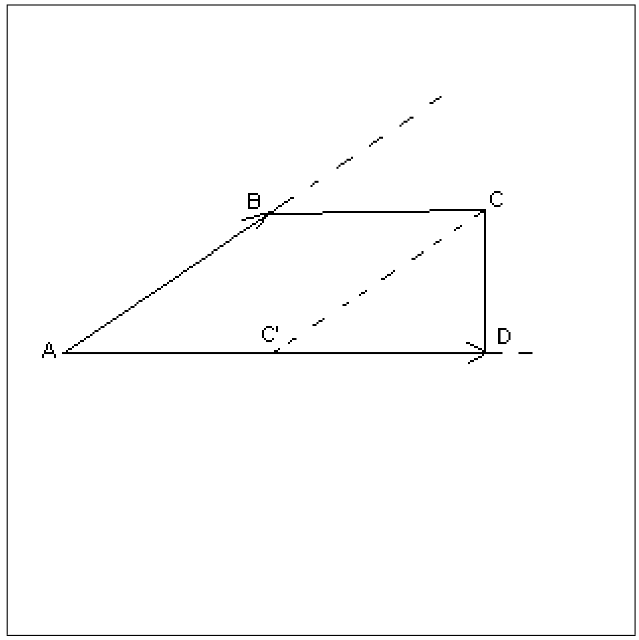
   Soluţie:

   Fie $CC'\|AB$ şi fie $\frac{\bar{a}}{\|\bar{a}\|}$ şi $\frac{\bar{b}}{\|\bar{b}\|}$ versorii corespunzători vectorilor $\overline{AD}$ şi $\overline{AB}$.

   Avem $\pi_{\bar{a}}(\overline{BC})=\overline{AC'}$, $\pi_{\bar{b}}(\overline{BC})=\overline{0}$ şi $\|\overline{AC'}\|=\|\overline{AD}\|-\|\overline{C'D}\|$.

   Deoarece triunghiul $CC'D$ este dreptunghic, $m(C\hat{C'}D)=\pi/6$, $\|\overline{CC'}\|=\|\bar{b}\|$, rezultă $\|\overline{C'D}\|=\frac{\|\bar{b}\|}{2}$.

   Din $\|\overline{AC'}\|=\|\bar{a}\|-\frac{\|\bar{b}\|}{2}$ rezultă $\pi_{\bar{a}}(\overline{BC})=\left(\|\bar{a}\|-\frac{\|\bar{b}\|}{2}\right)\cdot\frac{\bar{a}}{\|\bar{a}\|}$.


B
C
C'
A
D

Aşadar $\overline{BC} = \pi_{\bar{a}}(\overline{BC}) + \pi_{\bar{b}}(\overline{BC})$, $\overline{BC} = \left(\|\bar{a}\| - \frac{\|\bar{b}\|}{2}\right) \cdot \frac{\bar{a}}{\|\bar{a}\|}$,
$\overline{BC} = \left(1 - \frac{\|\bar{b}\|}{2\|\bar{a}\|}\right) \cdot \bar{a}$.
În continuare, avem $\pi_{\bar{a}}(\overline{DC}) = \overline{DC'}$, $\pi_{\bar{b}}(\overline{DC}) = \bar{b}$. Folosind $\overline{BC}$ se obţine $\overline{DC'} = \frac{\|\bar{b}\|}{2} \cdot \left(-\frac{\bar{a}}{\|\bar{a}\|}\right)$ şi atunci $\overline{DC'} = -\frac{\|\bar{b}\|}{2\|\bar{a}\|} \cdot \bar{a}$.
Deci $\overline{DC} = -\frac{\|\bar{b}\|}{2\|\bar{a}\|} \cdot \bar{a} + \bar{b}$
Avem $\pi_{\bar{a}}(\overline{AC}) = \overline{AC'}$, $\pi_{\bar{b}}(\overline{AC}) = \bar{b}$ şi folosind $\overline{BC}$ se obţine $\|\overline{AC'}\| = \|\bar{a}\| - \frac{\|\bar{b}\|}{2}$. Are loc $\overline{AC'} = \left(\|\bar{a}\| - \frac{\|\bar{b}\|}{2}\right) \cdot \frac{\bar{a}}{\|\bar{a}\|}$ şi atunci $\overline{AC} = \left(1 - \frac{\|\bar{b}\|}{2\|\bar{a}\|}\right) \cdot \bar{a} + \bar{b}$.
În final, $\overline{BD} = \bar{a} - \bar{b}$.

2. Se dau punctele A, B, C prin vectorii de poziţie $\overline{OA} = 14\bar{i} - 7\bar{j} + 2\bar{k}$, $\overline{OB} = 2\bar{i} + 2\bar{j} - 7\bar{k}$, $\overline{OC} = -2\bar{i} + 7\bar{j} + 2\bar{k}$.
a) Să se arate că triunghiul AOB este dreptunghic;
b) Să se arate că triunghiul BOC este isoscel;
c) Să se determine perimetrul triunghiului ABC;
d) Să se determine măsura unghiului $B\hat{A}C$.

Soluţie:

a) $(\overline{OA}, \overline{OB}) = 28 - 14 - 14 = 0$ implică $\overline{OA} \perp \overline{OB}$, adică triunghiul AOB este dreptunghic.
b) Triunghiul BOC este isoscel pentru că $\|\overline{OB}\| = \|\overline{OC}\| = \sqrt{57}$.
c) Avem $A(14, -7, 2), B(2, 2, -7), C(-2, 7, 2)$, $\overline{AB} = -12\bar{i} + 9\bar{j} - 9\bar{k}$, $\overline{BC} = -4\bar{i} + 5\bar{j} + 9\bar{k}$, $\overline{CA} = 16\bar{i} - 14\bar{j}$, $\|\overline{AB}\| = \sqrt{144 + 81 + 81} = \sqrt{306} = 3\sqrt{34}$, $\|\overline{BC}\| = \sqrt{16 + 25 + 81} = \sqrt{122}$, $\|\overline{CA}\| = \sqrt{256 + 196} = \sqrt{452} = 2\sqrt{113}$.
Deci $P_{\Delta\, ABC} = 3\sqrt{34} + \sqrt{122} + 2\sqrt{113}$.
d) Dacă $m(B\hat{A}C) = \varphi$, atunci

$$\cos\varphi = \frac{(\overline{AB}, \overline{AC})}{\|\overline{AB}\|\|\overline{AC}\|} = \frac{318}{6\sqrt{34 \cdot 113}} = \frac{53}{\sqrt{34 \cdot 113}}$$

şi $\varphi = \arccos \frac{53}{\sqrt{34 \cdot 113}}$.

3. Se dau vectorii $\bar{a} = \bar{i} + 2\lambda\bar{j} - (\lambda - 1)\bar{k}$, $\bar{b} = (3 - \lambda)\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}$, $\lambda \in \mathbf{R}$.
i) Pentru ce valoare a lui λ , vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ sunt ortogonali?
ii) Pentru λ găsit la i), să se calculeze mărimea algebrică a proiecţiei vectorului $\bar{a}$ pe vectorul $\bar{a} + \bar{b}$.

Soluţie:

i) $\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow (\bar{a}, \bar{b}) = 0$, adică $3 - \lambda + 2\lambda - 3(\lambda - 1) = 0$ sau $\lambda = 3$.
ii) Pentru $\lambda = 3$ se cere $pr_{\bar{a}+\bar{b}}(\bar{a}) = \frac{1}{\|\bar{a}+\bar{b}\|} \cdot (\bar{a}, \bar{a} + \bar{b})$.
Cum $\bar{a} = \bar{i} + 6\bar{j} - 2\bar{k}$, $\bar{b} = \bar{j} + 3\bar{k}$, $\bar{a} + \bar{b} = \bar{i} + 7\bar{j} + \bar{k}$, avem că $(\bar{a}, \bar{a} + \bar{b}) = 1 + 42 - 2 = 41$. Deci $pr_{\bar{a}+\bar{b}}(\bar{a}) = \frac{41}{\sqrt{51}}$.

4. Fie vectorii

$$\bar{r}_1 = \tfrac{1+\cos v}{\cos^2 u}\bar{j} + \tfrac{\sin u \sin v}{\cos^2 u}\bar{k} ,$$
$$\bar{r}_2 = -\sin v\bar{i} - \sin v tgu\bar{j} + \tfrac{\cos v}{\cos u}\bar{k} .$$

Folosind identitatea lui Lagrange, să se determine aria paralelogramului cu laturile $\|\bar{r}_1\|$ şi $\|\bar{r}_2\|$.

Soluţie:

Avem $\|\bar{r}_1 \times \bar{r}_2\|^2 = \|\bar{r}_1\|^2 \cdot \|\bar{r}_2\|^2 - (\bar{r}_1, \bar{r}_2)^2$ (identitatea lui Lagrange).
$\|\bar{r}_1\|^2 = \frac{(1+\cos v)^2}{\cos^4 u} + \frac{\sin^2 u \sin^2 v}{\cos^4 u}$,
$\|\bar{r}_2\|^2 = \sin^2 v + \sin^2 v tg^2 u + \frac{\cos^2 v}{\cos^2 u}$,
$(\bar{r}_1, \bar{r}_2) = -\frac{\sin u \sin v}{\cos^3 u}$
$\|\bar{r}_1 \times \bar{r}_2\|^2 = \left[\frac{(1+\cos v)^2}{\cos^4 u} + \frac{\sin^2 u \sin^2 v}{\cos^4 u}\right] \cdot \left(\sin^2 v + \sin^2 v tg^2 u + \frac{\cos^2 v}{\cos^2 u}\right) -$
$- \frac{\sin^2 u \sin^2 v}{\cos^6 u}$
$\|\bar{r}_1 \times \bar{r}_2\|^2 = \left(\frac{1+\cos^2 v + 2\cos v + \sin^2 u \sin^2 v}{\cos^4 u}\right) \cdot \frac{1}{\cos^2 u} - \frac{\sin^2 u \sin^2 v}{\cos^6 u}$
$\|\bar{r}_1 \times \bar{r}_2\|^2 = \frac{1+\cos^2 v + 2\cos v + \sin^2 u \sin^2 v - \sin^2 u \sin^2 v}{\cos^6 u}$
Deci $\|\bar{r}_1 \times \bar{r}_2\| = \frac{1+\cos v}{|\cos^3 u|}$.

5. Fiind daţi vectorii $\bar{a} = \bar{i} - 5\bar{j} - 7\bar{k}$, $\bar{b} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + 6\bar{k}$, $\bar{c} = -\bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k}$, se cere:

i) Să se calculeze $\bar{\omega} = \bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$;
ii) Să se verifice liniar dependenţa vectorilor $\bar{\omega}, \bar{b}, \bar{c}$.

Soluţie:

i) Ştiind că $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a}, \bar{c}) \cdot \bar{b} - (\bar{a}, \bar{b}) \cdot \bar{c}$ şi calculând $(\bar{a}, \bar{c}) = -1 - 10 + 14 = 3$, $(\bar{a}, \bar{b}) = 2 + 15 - 42 = -25$, $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = 3 \cdot (2\bar{i} - 3\bar{j} + 6\bar{k}) + 25 \cdot (-\bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k})$, se obţine $\bar{\omega} = -19\bar{i} + 41\bar{j} - 32\bar{k}$.
ii) $\alpha\bar{\omega} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c} = \bar{0} \Leftrightarrow$
$(-19\alpha + 2\beta - \gamma)\bar{i} + (41\alpha - 3\beta + 2\gamma)\bar{j} + (-32\alpha + 6\beta - 2\gamma)\bar{k} = \bar{0} \Leftrightarrow$
$$\begin{cases} -19\alpha + 2\beta - \gamma &= 0 \\ 41\alpha - 3\beta + 2\gamma &= 0 \\ -32\alpha + 6\beta - 2\gamma &= 0 \end{cases}.$$
Deoarece $\begin{vmatrix} -19 & 2 & -1 \\ 41 & -3 & 2 \\ -32 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 19{=}0$ sistemul liniar omogen anterior are numai soluţia banală ($\alpha = \beta = \gamma = 0$).
Deci $\bar{\omega}, \bar{b}, \bar{c}$ sunt liniari independenţi.

6. Se dau vectorii $\bar{a} = \bar{i} - \alpha\bar{j} + 3\bar{k}$, $\bar{b} = \alpha\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$, $\bar{c} = 3\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$.
i) Să se găsească valoarea lui α astfel înc^at vectorii $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ să fie coplanari;
ii) Pentru $\alpha = 2$, să se afle înălţimea paralelipipedului construit pe reprezentanţii vectorilor $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, înălţime corespunzătoare bazei formate de reprezentaţii vectorilor $\bar{a}, \bar{b}$.

Soluţie:

i) Vectorii $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ sunt coplanari dacă şi numai dacă$(\bar{a}, \bar{b} \times \bar{c}) = 0$, adică $\begin{vmatrix} 1 & -\alpha & 3 \\ \alpha & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$, $\alpha = \pm 3$.
ii) Dacă $\alpha = 2$ atunci $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ sunt necoliniari şi volumul paralelipipedului construit pe reprezentanţii lor este
$$V = |(\bar{c}, \bar{a} \times \bar{b})| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5.$$

Calculăm $\|\bar{a}\times\bar{b}\|^2 = \|\bar{a}\|^2\cdot\|\bar{b}\|^2 - (\bar{a},\bar{b})^2 = (1+4+9)\cdot(4+1+1) - 49 = 35$ şi atunci înălţimea cerută este $h = \frac{V}{\|\bar{a}\times\bar{b}\|} = \frac{5}{\sqrt{35}}$.

7. Să se arate că punctele $A(1,1,1)$, $B(3,-1,4)$, $C(0,7,-3)$, $D(5,7,2)$ sunt coplanare.

   Soluţie:

   Cele patru puncte sunt coplanare dacă şi numai dacă vectorii $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ sunt coplanari, adică $(\overline{AB}, \overline{AC}\times\overline{AD}) = 0$.
   Deoarece $\overline{AB} = 2\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}$, $\overline{AC} = -\bar{i} + 6\bar{j} - 4\bar{k}$, $\overline{AD} = 4\bar{i} + 6\bar{j} + \bar{k}$, avem $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -1 & 6 & -4 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0$.
   Deci punctele A, B, C, D sunt coplanare.

8. **Rotaţia în jurul lui** Oz**.** În reperul cartezian $\left\{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\right\}$ considerăm rotaţia $\mathcal{R}$ de axă Oz şi de unghi θ.

$$\begin{aligned} &\overline{i'} = \mathcal{R}\left(\bar{i}\right) = \cos\theta\ \bar{i} + \sin\theta\ \bar{j}\ , \\ &\overline{j'} = \mathcal{R}\left(\bar{j}\right) = -\sin\theta\ \bar{i} + \cos\theta\ \bar{j}\ , \\ &\overline{k'} = \mathcal{R}\left(\bar{k}\right) = \bar{k}\ . \end{aligned}$$

   Astfel din relaţia $x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = x'\overline{i'} + y'\overline{j'} + z'\overline{k'}$, găsim

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta\ , \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta\ , \\ z = z'\ . \end{cases}$$

   Matricea lui $\mathcal{R}$ este

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

   iar $\det A = +1$ şi deci $\mathcal{R}$ este o izometrie pozitivă.

   În particular, o rotaţie în planul xOy, de unghi θ, în jurul originii este caracterizată prin

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta\ , \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta\ . \end{cases}$$

Dintre izometriile în plan reţinem roto-translaţia caracterizată prin

$$\begin{cases} x = x' \cos\theta - y' \sin\theta \ + a \ , \\ y = x' \sin\theta + y' \cos\theta + b \ . \end{cases}$$

9. **Simetria faţă de un plan.** Fie reperul ortonormat $\left\{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\right\}$ şi $\mathcal{S}$ simetria în raport cu planul $\left(O, \bar{i}, \bar{j}\right)$.

$$\begin{cases} \overline{i'} = \mathcal{S}\left(\bar{i}\right) = \bar{i} \ , \\ \overline{j'} = \mathcal{S}\left(\bar{j}\right) = \bar{j} \ , \\ \overline{k'} = \mathcal{S}\left(\bar{k}\right) = -\bar{k} \ . \end{cases}$$

Astfel, din $x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = x'\overline{i'} + y'\overline{j'} + z'\overline{k'}$, găsim $\mathcal{S} : x = x'$, $y = y'$, $z = -z'$, sau scris matriceal

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Determinantul matricii lui $\mathcal{S}$ este -1 şi deci $\mathcal{S}$ este o izometrie negativă.

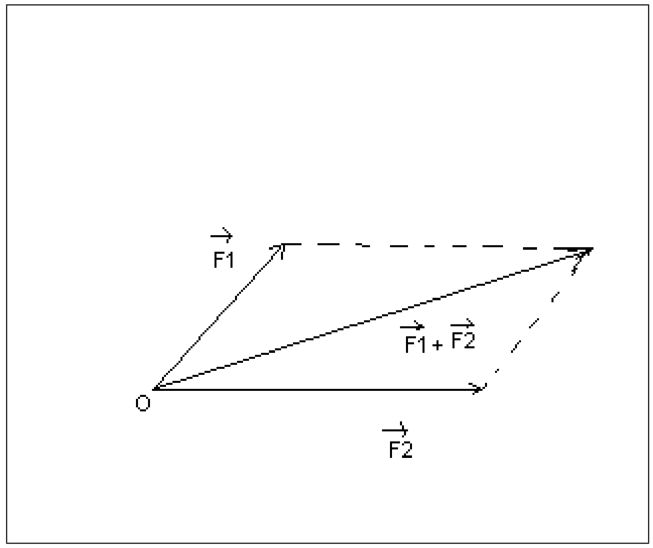
10. a) Să se arate că mulţimea forţelor din spaţiul fizic, aplicate în O, constituie un spaţiu vectorial real de dimensiune 3.

b) Să se arate că mulţimea forţelor aplicate în O, dintr-un plan (care trece prin O) al spaţiului fizic, constituie un spaţiu vectorial real de dimensiune 2.

c) Dacă în spaţiul tridimensional de la punctul a) se consideră baza $B = \{\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}\}$ şi un alt sistem de forţe $B' = \{\overrightarrow{F_1'}, \overrightarrow{F_2'}, \overrightarrow{F_3'}\}$, unde $\overrightarrow{F_1'} = 2\overrightarrow{F_1} - \overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_2'} = \overrightarrow{F_2} + 2\overrightarrow{F_3}$, $\overrightarrow{F_3'} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} - 3\overrightarrow{F_3}$, să se arate că B' constituie o nouă bază în care să se exprime forţa $\overrightarrow{F} = 3\overrightarrow{F_1} - \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3}$.

Soluţie:

a) Legea de compoziţie internă (numită adunarea forţelor) este definită după regula paralelogramului



şi are proprietăţile:

- asociativitate: $\left(\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}\right)+\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{F_1}+\left(\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}\right)$;

- comutativitate: $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_1}$;

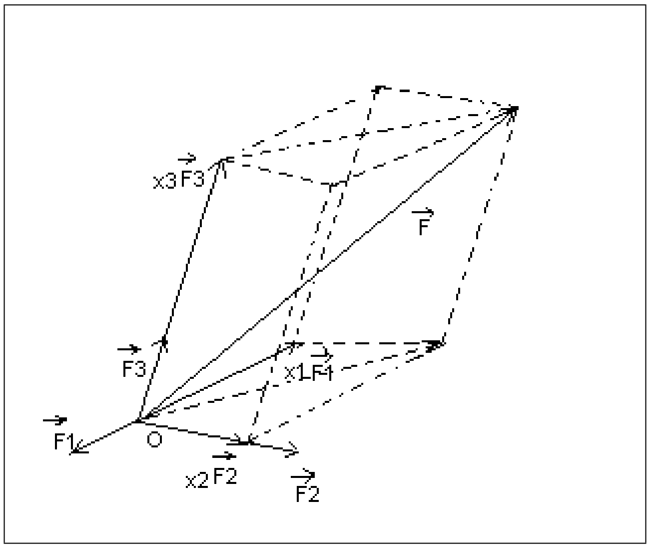
- elementul neutru este forţa nulă (care se confundă cu punctul O)

- orice forţă $\overrightarrow{F}$ are drept element simetric forţa opusă $-\overrightarrow{F}$.

Deci, mulţimea forţelor din spaţiul fizic, aplicate în O, împreună cu adunarea definită mai sus este grup abelian.

Legea de compoziţie externă (cu scalari reali) este înmulţirea forţelor cu scalari reali. Cele patru axiome se verifică imediat:
$\alpha\left(\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}\right)=\alpha\overrightarrow{F_1}+\alpha\ \overrightarrow{F_2}$; $\alpha\overrightarrow{F}+\beta\overrightarrow{F}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{F}$;
$\alpha\left(\beta\overrightarrow{F}\right)=(\alpha\beta)\ \overrightarrow{F}$; $1\ \overrightarrow{F}=\overrightarrow{F}$.

Prin urmare, mulţimea forţelor din spaţiul fizic, aplicate în O, este un spaţiu vectorial real.



Un sistem de trei vectori $B = \{\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}\}$ este o bază dacă cele trei forţe nu sunt coplanare. Într-adevăr, dacă cele trei forţe sunt necoplanare, atunci B este sistem liniar independent (altfel, una dintre ele s-ar scrie ca o combinaţie liniară de celelalte două şi astfel ar fi în planul lor) şi B este sistem de generatori (vezi figura următoare).

$$\overrightarrow{F} = x^1\overrightarrow{F_1} + x^2\overrightarrow{F_2} + x^3\overrightarrow{F_3}$$

Deci dimensiunea spaţiului este 3.

b) Similar cu punctul a) se introduce structura de spaţiu vectorial real, dar o bază este formată din două forţe necoliniare $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$.

c) Matricea pe ale cărei coloane avem coordonatele forţelor $\overrightarrow{F_1'}, \overrightarrow{F_2'}, \overrightarrow{F_3'}$ relativ la baza B este

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

şi are determinatul egal cu -12.

Deci sistemul B' constituie o bază (căci rangul matricii A este egal cu dimensiunea spaţiului) care este negativ orientată (relativ la orientarea spaţiului dată de baza B).

Coordonatele forţei $\overrightarrow{F}$ relativ la noua bază sunt date de formula $\overrightarrow{F}_{B'} = A^{-1}\overrightarrow{F}_B$, unde $\overrightarrow{F}_B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Deci $\overrightarrow{F}_{B'} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ sau $\overrightarrow{F} = \frac{3}{2}\overrightarrow{F'_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{F'_2}$.

11. În spaţiul fizic se raportează un sistem de corpuri la un reper $\mathcal{R} = \{O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$. Corpul $M(\overrightarrow{r})$ este supus atracţiei corpurilor fixe $M_i(\overrightarrow{r_i})$ de mase m_i $(i = 1, \ldots, n)$, forţa de atracţie fiind proporţională cu distanţa $||\overrightarrow{MM_i}||$ şi cu masa m_i . Să se găsească forţa rezultantă şi poziţia de echilibru a corpului M.

Soluţie:

Forţa de atracţie a corpului M de către corpul M_i este $\overrightarrow{F_i} = km_i(\overrightarrow{r_i} - \overrightarrow{r})$, k fiind un factor de proporţionalitate. Rezultanta va fi $\overrightarrow{R} = \sum\limits_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i} = k\left(\sum\limits_{i=1}^{n} m_i(\overrightarrow{r_i} - \overrightarrow{r})\right) = k\left(\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{r_i}\right) - k\left(\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\right)\overrightarrow{r}$.

Cum centrul de greutate al sistemului de corpuri (M_i) este $G(\overrightarrow{\rho})$, $\overrightarrow{\rho} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{r_i}$, avem $\overrightarrow{R} = k\left(\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\right)(\overrightarrow{\rho} - \overrightarrow{r})$.

Prin urmare, corpul M se află în echilibru dacă şi numai dacă $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{\rho}$ (din $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{0}$).

În coordonate avem $\overrightarrow{r}(x^j)$, $\overrightarrow{r_i}(x_i^j)$, $\overrightarrow{R}(X^j)$, $j = 1, 2, 3$, şi atunci rezultanta are componentele

$$X^j = k\left(\sum_{i=1}^{n} m_i x_i^j\right) - k\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) x^j ,$$

iar poziţia de echilibru are coordonatele $x^j = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i^j}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$.

6.2 Probleme propuse spre rezolvare

1. In spaţiul punctual tridimensional E_3, în raport cu reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$, se dau punctele $A(1,1,0)$, $B(0,1,1)$, $C(1,0,1)$, $D(1,1,1)$.

   a) Arătaţi că $\mathcal{R}' = \{A; \overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\}$ este un reper cartezian în E_3. Este $\mathcal{R}'$ reper ortonormat?

   b) Să se determine coordonatele punctului $M(1,2,3)$ în raport cu noul reper $\mathcal{R}'$.

2. In spaţiul punctual tridimensional E_3, în raport cu reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$, se dau punctele $A(1,-1,1)$, $B(1,0,1)$, $C(-1,2,1)$, $D(0,1,2)$.

   a) Arătaţi că A, B, C, D sunt necoplanare.

   b) Calculaţi volumul tetraedrului $ABCD$.

   c) Calculaţi distanţa de la punctul A la planul determinat de punctele B, C, D.

3. In spaţiul vectorilor liberi V^3 se consideră baza ortonormată $\mathcal{B} = \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ şi vectorul $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$. Fie $f : V^3 \to V^3$ definită prin $f(\bar{x}) = \bar{a} \times \bar{x}$, $\forall \bar{x} \in V^3$. Se cere:

   a) Arătaţi că f este o aplicaţie liniară.

   b) Scrieţi matricea lui f relativ la baza $\mathcal{B}$.

   c) Găsiţi câte o bază şi dimensiunea pentru $Ker\ f$ şi $Im\ f$.

d) Este adevărat că $Ker\ f \oplus Im\ f = V^3$? Justificare.

e) Este f un endomorfism diagonalizabil? Justificare.

4. In spaţiul vectorilor liberi V^3 se consideră baza ortonormată $\mathcal{B} = \{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ şi vectorii $\overline{a} = \overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$, $\overline{a} = \overline{i} - \overline{j} - \overline{k}$. Fie $f : V^3 \to V^3$ definită prin $f(\overline{x}) = (\overline{a} \times \overline{x}) \times \overline{b}$, $\forall \overline{x} \in V^3$. Se cere:

   a) Arătaţi că f este o aplicaţie liniară.

   b) Găsiţi câte o bază şi dimensiunea pentru $Ker\ f$ şi $Im\ f$.

   c) Este f un endomorfism diagonalizabil? Justificare.

5. In spaţiul vectorilor liberi V^3 se consideră baza ortonormată $\mathcal{B} = \{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ şi vectorii $\overline{a} = \overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$, $\overline{a} = \overline{i} - \overline{j} - \overline{k}$. Fie $f : V^3 \to V^3$ definită prin

$$f(\overline{x}) =< \overline{a}, \overline{x} > \overline{b}+ < \overline{b} \times \overline{x} > \overline{a}, \forall \overline{x} \in V^3.$$

   Se cere:

   a) Arătaţi că f este o aplicaţie liniară.

   b) Găsiţi câte o bază şi dimensiunea pentru $Ker\ f$ şi $Im\ f$.

   c) Este f un endomorfism diagonalizabil? Justificare.

6. In spaţiul vectorilor liberi V^3 se consideră baza ortonormată $\mathcal{B} = \{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ şi vectorii $\overline{a} = \overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$, $\overline{a} = \overline{i} - \overline{j} - \overline{k}$. Fie $f : V^3 \to V^3$ definită prin

$$f(\overline{x}) = \overline{a} \times \overline{x} + \overline{x} \times \overline{b}, \forall \overline{x} \in V^3.$$

   Se cere:

   a) Arătaţi că f este o aplicaţie liniară.

   b) Găsiţi câte o bază şi dimensiunea pentru $Ker\ f$ şi $Im\ f$.

   c) Este f un endomorfism diagonalizabil? Justificare.

Capitolul 7

Dreapta şi planul

În ipoteza că am fixat un punct O numit originea în E_3 şi o bază ortonormată $\left\{\overline{i},\overline{j},\overline{k}\right\}$ în V^3, fiecărui punct M din E_3 îi corespunde în mod unic un vector $\overline{r}=\overline{OM}$ numit vector de poziţie al punctului M; aceluiaşi vector îi corespunde în mod unic tripletul ordonat de numere reale $(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$ numite coordonatele euclidiene ale vectorului $\overline{OM}$ în raport cu baza $\left\{\overline{i},\overline{j},\overline{k}\right\}$; se scrie $\overline{OM}=x\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k}$.

Ansamblul riguros orientat (în sensul că pentru determinarea vectorilor lui se aplică regula burghiului) $\left\{O,\overline{i},\overline{j},\overline{k}\right\}$ se numeşte reper cartezian în E_3. Punctul O se numeşte originea reperului, iar $\left\{\overline{i},\overline{j},\overline{k}\right\}$ se numeşte baza reperului. Coordonatele euclidiene (x,y,z) ale vectorului de poziţie $\overline{r}=\overline{OM}$ se numesc coordonatele carteziene ale punctului M faţă de reperul ortonormat $\left\{O,\overline{i},\overline{j},\overline{k}\right\}$; $x=\left(\overline{i},\overline{r}\right)=pr_{\overline{i}}\overline{r}$ =abscisa, $y=\left(\overline{j},\overline{r}\right)=pr_{\overline{j}}\overline{r}$ =ordonata, $z=\left(\overline{k},\overline{r}\right)=pr_{\overline{k}}\overline{r}$ =cota.

Fie punctul fixat $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right),\ \overline{r}=x_0\overline{i}+y_0\overline{j}+z_0\overline{k}$. Fie un vector nenul $\overline{a}\left(l,m,n\right)$ din V^3 şi $\mathbf{d}$ o dreaptă care trece prin M_0 şi are direcţia lui $\overline{a}$. Punctul $M\left(x,y,z\right)$ aparţine dreptei $\mathbf{d}$ determinată de M_0 şi $\overline{a}$ dacă şi numai dacă vectorii $\overline{M_0M}$ şi $\overline{a}$ sunt coliniari, adică

$$\left(\overline{r}-\overline{r_0}\right)\times\overline{a}=\overline{0}.$$

Coliniaritatea vectorilor $\overline{r}-\overline{r_0}$ şi $\overline{a}$ se pune în evidenţă şi prin relaţia $\overline{r}-\overline{r_0}=t\overline{a}$, $t\in\mathbf{R}$ sau

$$\overline{r}=\overline{r_0}+t\overline{a},\ \ t\in\mathbf{R}.$$

Această ecuaţie vectorială este echivalentă cu trei ecuaţii în $\mathbf{R}^3$,

$$x=x_0+tl,\ \ y=y_0+tm,\ \ z=z_0+tn,t\in\mathbf{R}$$

numite ecuaţiile parametrice ale dreptei $\mathbf{d}$. Aceste ecuaţii se pot înlocui cu două ecuaţii carteziene în $\mathbf{R}^3$,

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

cu convenţia că dacă un numitor este nul, atunci numărătorul respectiv trebuie egalat cu zero.

Două puncte distincte $M_1\left(x_1,y_1,z_1\right)$ şi $M_2\left(x_2,y_2,z_2\right)$ determină o dreaptă $\mathbf{d}$ şi numai una.

Ecuaţiile carteziene ale dreptei $\mathbf{d}$ sunt

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Unghiul dintre două drepte orientate.

Fie $\mathbf{d}_1$ şi $\mathbf{d}_2$ două drepte orientate prin vectorii directori $\overline{a}$ şi $\overline{b}$. Prin unghiul dintre dreptele orientate $\mathbf{d}_1$ şi $\mathbf{d}_2$ se va înţelege unghiul dintre $\overline{a}$ şi $\overline{b}$, adică unghiul definit prin

$$\cos\varphi=\frac{\left(\overline{a},\overline{b}\right)}{\|\overline{a}\|\left\|\overline{b}\right\|}\ ,$$

sau

$$\sin\varphi=\frac{\left\|\overline{a}\times\overline{b}\right\|}{\|\overline{a}\|\left\|\overline{b}\right\|}\ ,\ \ \varphi\in[0,\pi]\,.$$

Distanţa de la un punct la o dreaptă.

Fie dreapta $\mathbf{d}$ de ecuaţii

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}\ ;$$

această dreaptă conţine punctul $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ şi are drept vector director pe $\overline{a}\,(l, m, n)$.

Fie A un punct din E_3 şi A' proiecţia sa pe dreapta . Lungimea segmentului $|AA'|$ este distanţa de la punctul A la dreapta $\mathbf{d}$ şi se notează cu $d\,(A, \mathbf{d})$. Din formula care dă aria paralelogramului construit pe reprezentanţii vectorilor $\overline{a}$ şi $\overline{M_0A}$ obţinem

$$d\,(A, \mathbf{d}) = \frac{\left\|\overline{a} \times \overline{M_0A}\right\|}{\|\overline{a}\|}\ .$$

Planul determinat de un punct şi un vector normal nenul.

Fiind dată o dreaptă $\mathbf{d} = \left\{N \mid \overline{M_0N} = t\overline{n}, t \in \mathbf{R}\right\}$ care trece prin punctul M_0 şi care are direcţia vectorului $\overline{n}$, există un singur plan $\mathcal{P}$ perpendicular pe $\mathbf{d}$ în M_0.

Observaţia 7.1. $M \in \mathcal{P}$ dacă şi numai dacă $\overline{M_0M} \perp \overline{n}$. De aceea, planul $\mathcal{P}$ este mulţimea

$$\mathcal{P} = \left\{M \mid \left(\overline{M_0M}, \overline{n}\right) = 0\right\}\ . \tag{7.1}$$

Dreapta $\mathbf{d}$ se numeşte normala la planul $\mathcal{P}$, vectorul $\overline{n}$ se numeşte vectorul normal al planului, punctul M care poate genera planul îl vom numi punct curent al lui $\mathcal{P}$.

Teorema 7.1. Orice plan $\mathcal{P}$ care conţine un punct curent $M\,(x, y, z)$ şi are un vector normal nenul $\overline{n} = (a, b, c)$ care trece prin $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$, $M_0 \in \mathcal{P}$, este caracterizat de ecuaţia:

$$ax + by + cz + d = 0,\ a, b, c, d \in \mathbf{R}\,. \tag{7.2}$$

Planul determinat de trei puncte necoliniare.

Pentru a stabili ecuaţia ce caracterizează planul determinat de punctele necoliniare $M_i\,(x_i, y_i, z_i)\,,\ i = 1, 2, 3$ procedăm în felul următor:

a) Folosim ecuaţia generală a planului (7.2) şi ecuaţiile obţinute prin înlocuirea coordonatelor punctelor M_i în această ecuaţie

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0, \\ ax_i + by_i + cz_i + d = 0,\ \ i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

a, b, c reprezintă coordonatele vectorului normal la planul respectiv determinat de cele trei puncte necoliniare. S-a obţinut un sistem de ecuaţii liniar omogen în necunoscutele a, b, c, d cu soluţii nebanale, deoarece a, b, c nu se pot anula simultan. Condiţia care asigură acest lucru este

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{7.3}$$

şi care reprezintă ecuaţia carteziană a planului.

b) Fie M un punct care poate genera planul, al cărui vector de poziţie este $\overline{OM} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$. Obţinem ecuaţia vectorială a planului $\mathcal{P}$ impunând condiţiile de coplanaritate a vectorilor $\overline{M_1M}, \overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}$, adică

$$\left(\overline{M_1M}\ ,\ \overline{M_1M_2} \times \overline{M_1M_3}\right) = 0.$$

Dacă $M_i\left(\overline{r_i}\right), \overline{r_i} = x_i\overline{i} + y_i\overline{j} + z_i\overline{k}$, relaţia anterioară este echivalentă cu ecuaţia vectorială

$$\left(\overline{r} - \overline{r_1}\ , \left(\overline{r_2} - \overline{r_1}\right) \times \left(\overline{r_3} - \overline{r_1}\right)\right) = 0,$$

sau

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Am obţinut ecuaţia carteziană a planului determinat de trei puncte necoliniare.

Planul determinat de un punct şi doi vectori necoliniari.

Fie $\overline{u} = (l_1, m_1, n_1)$ şi $\overline{v} = (l_2, m_2, n_2)$ doi vectori necoliniari, adică $\overline{u} \times \overline{v} \neq \overline{0}$ şi un punct cunoscut M_0. Cele trei elemente $M_0, \overline{u}, \overline{v}$ determină un plan unic $\mathcal{P}$. Construim reprezentanţii vectorilor $\overline{u}$ şi $\overline{v}$ ca fiind $\overline{M_0M_1}$ respectiv $\overline{M_0M_2}$. Un punct $M \in E_3$ aparţine planului dacă şi numai dacă vectorii $\overline{M_0M}, \overline{M_0M_1}$ şi $\overline{M_0M_2}$ sunt coplanari. Coplanaritatea acestor vectori o exprimăm astfel:

a) $\overline{M_0M} = r\overline{u} + s\overline{v}$; care scrisă în coordonate, această relaţie vectorială este echivalentă cu

$$\begin{aligned} x &= x_0 + rl_1 + sl_2, \\ y &= y_0 + rm_1 + sm_2, \quad r, s \in \mathbf{R} \\ z &= z_0 + rn_1 + sn_2, \end{aligned}$$

numite ecuaţiile parametrice ale planului $\mathcal{P}$, iar r şi s se numesc parametri.

b) $\left(\overline{M_0M}\ , \overline{u} \times \overline{v}\right) = 0$; scrisă în coordonate această ecuaţie vectorială conduce la ecuaţia carteziană

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Ecuaţiile normalei la plan care trece prin M_0 sunt

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Două plane neparalele şi neconfundate se intersectează după o dreaptă $\mathbf{d}$ şi determină un unghi diedru. Unghiul diedru format de cele două plane este măsurat prin unghiul plan φ, care se obţine secţionând planele $\mathcal{P}_1$ şi $\mathcal{P}_2$ cu un plan $\mathcal{P}_3$ perpendicular pe $\mathbf{d}$. Prin definiţie, unghiul diedru dintre cele două plane este unghiul dintre cei doi vectori normali $\overline{n_1}$ şi $\overline{n_2}$ determinat prin

$$\cos\varphi = \frac{(\overline{n_1}, \overline{n_2})}{\|\overline{n_1}\| \|\overline{n_2}\|} =$$

$$= \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}\ ,\ \varphi \in [0, \pi]\,.$$

Distanţa de la un punct la un plan.

Fie planul $\mathcal{P}$ de ecuaţie $ax + by + cz + d = 0$, al cărui vector normal este $\overline{n}\,(a, b, c)$. Fie $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ un punct din E_3 exterior planului şi fie $M_1\,(x_1, y_1, z_1)$ proiecţia lui M_0 pe planul $\mathcal{P}$.

Lungimea $\left\|\overline{M_1M_0}\right\|$ este distanţa de la punctul M_0 la planul $\mathcal{P}$ şi se notează cu $d\,(M_0, \mathcal{P})$.

$$d\left(M_0,\mathcal{P}\right)=\frac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Unghiul dintre o dreaptă orientată şi un plan.

Presupunem că dreapta $\mathbf{d}$ intersectează planul $\mathcal{P}$ (altfel dacă dreapta $\mathbf{d}$ este paralelă sau inclusă în planul $\mathcal{P}$ unghiul căutat este egal cu zero) şi presupunem cunoscute de asemenea pe $\overline{n}\left(a,b,c\right)$ şi $\overline{a}\left(l,m,n\right)$.

Fie $\mathbf{d}'$ proiecţia dreptei $\mathbf{d}$ pe planul $\mathcal{P}$. Unghiul căutat este unghiul dintre dreapta $\mathbf{d}$ şi $\mathbf{d}'$. Întrucât vectorul director al dreptei $\mathbf{d}'$ este greu de găsit, vom calcula unghiul complementar

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\frac{\left(\overline{n},\overline{a}\right)}{\left\|\overline{n}\right\|\left\|\overline{a}\right\|}$$

sau

$$\sin\varphi=\frac{al+bm+cn}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}\ .$$

Perpendiculara comună a două drepte oarecare din spaţiu.

Două drepte din spaţiu pot fi confundate, paralele, concurente sau oarecare. Pentru două drepte $\mathbf{d}_1$ şi $\mathbf{d}_2$ care admit pe $\overline{a_1}$ respectiv $\overline{a_2}$ ca vectori directori, există o direcţie normală comună unică dacă şi numai dacă dreptele $\mathbf{d}_1$ şi $\mathbf{d}_2$ sunt oarecare sau concurente. În acest caz există o dreaptă şi numai una care se sprijină simultan pe cele două drepte având direcţia $\overline{n}=\overline{a_1}\times\overline{a_2}$ numită perpendiculara comună a dreptelor $\mathbf{d}_1$ şi $\mathbf{d}_2$. Pentru a stabili ecuaţiile perpendicularei comune $\mathbf{d}$, observăm că această dreaptă apare ca intersecţia a două plane: planul $\mathcal{P}_1$, care conţine pe $\mathbf{d}_1$ şi $\overline{n}$ şi planul $\mathcal{P}_2$ care conţine pe $\mathbf{d}_2$ şi $\overline{n}$. Presupunând că dreptele $\mathbf{d}_1$ şi $\mathbf{d}_2$ trec respectiv prin punctele M_1 şi M_2 şi că N este punctul curent în $\mathcal{P}_1$, iar M este punctul curent în $\mathcal{P}_2$, ecuaţiile perpendicularei comune sunt

$$\mathbf{d}:\begin{cases}\left(\overline{M_1N},\overline{a_1}\times\overline{n}\right)=0\\ \\ \left(\overline{M_2M},\overline{a_2}\times\overline{n}\right)=0.\end{cases}$$

Distanţa dintre două drepte.

Fie două drepte $\mathbf{d}_1$ şi $\mathbf{d}_2$ descrise respectiv de punctele M şi N. Numărul $\inf d\left(M,N\right)$ se numeşte distanţa dintre dreptele $\mathbf{d}_1$ şi $\mathbf{d}_2$ şi se notează cu $d\left(\mathbf{d}_1;\mathbf{d}_2\right)$. Din considerente geometrice rezultă că $d\left(\mathbf{d}_1;\mathbf{d}_2\right)$ se află astfel:

1. dacă dreptele $\mathbf{d}_1$ şi $\mathbf{d}_2$ sunt concurente, atunci $d\left(\mathbf{d}_1;\mathbf{d}_2\right)=0$;

2. dacă $\mathbf{d}_1 \| \mathbf{d}_2$, atunci prin $M_0 \in \mathbf{d}_1$ se duce un plan perpendicular pe $\mathbf{d}_1$ care taie pe $\mathbf{d}_2$ în N_0 şi avem $d\left(\mathbf{d}_1;\mathbf{d}_2\right)=d\left(M_0,N_0\right)$;

3. dacă $\mathbf{d}_1$ şi $\mathbf{d}_2$ sunt oarecare, $d\left(\mathbf{d}_1;\mathbf{d}_2\right)=\left\|\overline{AB}\right\|$, punctele A şi B fiind pe perpendiculara comună $\mathbf{d}$ ($M_1 \in \mathbf{d}_1$ şi $M_2 \in \mathbf{d}_2$ sunt puncte cu coordonatele cunoscute). Această distanţă se mai poate afla astfel: prin dreapta $\mathbf{d}_1$ ducem un plan $\mathcal{P}$ paralel cu dreapta $\mathbf{d}_2$.

Atunci $d\left(\mathbf{d}_1;\mathbf{d}_2\right)=d\left(M_2,\mathcal{P}\right)$, unde M_2 este un punct cunoscut al dreptei $\mathbf{d}_2$. Figura anterioară arată că această distanţă este lungimea înălţimii paralelipipedului construit pe vectorii $\overline{M_1M_2}, \overline{a_1}, \overline{a_2}$.

Din semnificaţia produsului mixt rezultă

$$d\left(\mathbf{d}_1;\mathbf{d}_2\right)=\frac{\left|\left(\overline{M_1M_2},\overline{a_1}\times\overline{a_2}\right)\right|}{\left\|\overline{a_1}\times\overline{a_2}\right\|}.$$

7.1 Probleme rezolvate

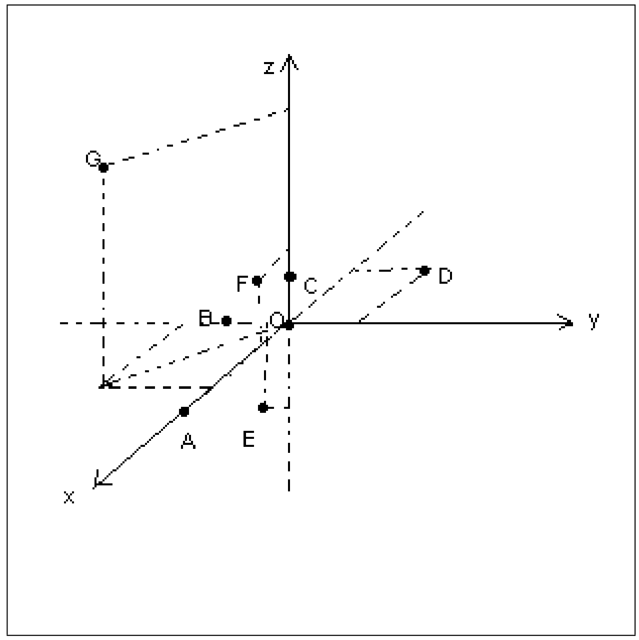
1. Să se figureze punctele $A(5,0,0)$, $B(0,-2,0)$, $C(0,0,3)$, $D(-3,2,0)$, $E(0,-1,-4)$, $F(2,0,4)$, $G(3,-5,8)$ şi să se scrie expresia vectorului de poziţie al punctului G faţă de reperul cartezian $\{O;\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$.

   Soluţie:

   $\overline{OG}=3\bar{i}-5\bar{j}+8\bar{k}$

2. Fie dreptele d_1 şi d_2 de vectori directori $\bar{n}_1=\bar{i}+\bar{k}$, respectiv $\bar{n}_2=-\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k}$. Să se scrie ecuaţiile parametrice ale unei drepte d_3 perpendiculare simultan pe d_1 şi d_2 şi care trece prin punctul $M(2,3,0)$.

   Soluţie:


z
G
F
C
D
B
O
y
A
E
x

Deoarece $\bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k} = \bar{0}$, rezultă că $d_1 \| d_2$ şi prin urmare cele două drepte admit o direcţie normală comună, $\bar{n} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2$.
Astfel, dreapta căutată are vectorul director $\bar{n}$ şi trece prin punctul M, adică are ecuaţiile parametrice

$$d_3 : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - 3t \\ z = t \end{cases}, \; t \in \mathbf{R}.$$

3. Se consideră punctele:
$A(1, 3, 0), B(3, -2, 1), C(\alpha, 1, -3), D(7, -2, 3)$.
i) Să se determine $\alpha \in \mathbf{R}$ astfel încât punctele A, B, C, D să fie coplanare;
ii) Pentru α găsit la punctul i), să se scrie ecuaţia carteziană a planului $(ABCD)$.

Soluţie:

i) Avem $\overline{AB} = 2\bar{i} - 5\bar{j} + \bar{k}$, $\overline{AC} = (\alpha - 1)\bar{i} - 2\bar{j} - 3\bar{k}$, $\overline{AD} = 6\bar{i} - 5\bar{j} + 3\bar{k}$.
Punctele A, B, C, D sunt coplanare dacă şi numai dacă cei trei vectori anterior prezentaţi sunt coplanari,
adică $(\overline{AB}, \overline{AC} \times \overline{AD}) = 0$.
Din $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ \alpha - 1 & -2 & -3 \\ 6 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 0$ rezultă $\alpha = -5$.
ii) Se determină ecuaţia carteziană a planului care trece prin A şi are vectorii directori astfel:

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 3 & z \\ 2 & -5 & 1 \\ -6 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

Se obţine ecuaţia carteziană a planului
$(ABCD) : x - 2z - 1 = 0$.

4. Fie dreptele $d_1 : \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z}{1}$, $d_2 : \frac{x}{-1} = \frac{y}{4} = \frac{z}{1}$.
i) Să se calculeze măsura unghiului φ, unde $\varphi = m(d_1 \hat{,} d_2)$;
ii) Să se scrie ecuaţia planului determinat de d_1 şi d_2.

Soluţie:

i) Vectorul director al lui d_1 este $\bar{a}(-1,4,1)$, iar al lui d_2 este $\bar{b}(-1,4,1)$. Rezultă că $d_1 \parallel d_2$ şi prin urmare $\varphi = 0$.
ii) Dreapta d_1 trece prin punctul $A(1,-2,0)$, iar d_2 trece prin $O(0,0,0)$. Planul determinat de d_1 şi d_2 este planul determinat de punctul A şi vectorii $\bar{a}$ şi $\overline{AO}(-1,2,0)$.
Ecuaţiile scalare parametrice ale planului căutat sunt:
$$\begin{cases} x &= 1 - r - s \\ y &= -2 + 4r + 2s \\ z &= r \end{cases}, \quad r, s \in \mathbf{R}.$$

5. Se dau punctele $A(1,3,2)$, $B(-1,2,1)$, $C(0,1,-1)$, $D(2,0,-1)$ şi planul $\pi : 2x + y - z - 1 = 0$. Să se stabilească care dintre ele se găsesc de aceeaşi parte cu originea axelor de coordonate faţă de planul dat.

Soluţie:

Fie $f(x,y,z) = 2x + y - z - 1$. Semnul funcţiei f se păstrează constant pentru punctele aflate de aceeaşi parte a planului π. Din $f(0,0,0) = -1 < 0$, $f(1,3,2) = 2 > 0$, $f(0,1,-1) = 1 > 0$, $f(-1,2,1) = -2 < 0$, $f(2,0,-1) = 4 > 0$ rezultă că A, C, D nu se află de aceeaşi parte cu O faţă de π, dar B se află de aceeaşi parte cu O faţă de π.

6. Fie dreptele $d_1 : \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z}{1}$, $d_2 : \frac{x}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$.
Să se determine:
i) ecuaţia perpendicularei comune;
ii) distanţa dintre d_1 şi d_2.

Soluţie:

i) Dreapta d_1 are vectorul director $\bar{a}_1(-1,4,1)$ şi trece prin punctul $A(1,-2,0)$, iar d_2 are vectorul director $\bar{a}_2(3,1,2)$ şi trece prin punctul $B(0,0,1)$.

Ecuaţiile perpendicularei comune se obţin dintr-un sistem ce conţine ecuaţiile a două plane: planul π_1 ce conţine dreapta d_1 şi vectorul arbitrar $\overline{AN}$ şi planul π_2 ce conţine dreapta d_2 şi vectorul arbitrar $\overline{BM}$.
Perpendiculara comună are ecuaţiile:

$$d\ :\ \begin{cases} (\overline{AN}, \bar{a}_1 \times \bar{n}) = 0 \\ (\overline{BM}, \bar{a}_2 \times \bar{n}) = 0 \end{cases},\quad \text{unde } \bar{n} = \bar{a}_1 \times \bar{a}_2\,.$$

$$\bar{n} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 7\bar{i} + 5\bar{j} - 13\bar{k}\,.$$

$$\bar{a}_1 \times \bar{n} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 4 & 1 \\ 7 & 5 & -13 \end{vmatrix} = -57\bar{i} - 6\bar{j} - 33\bar{k}\,,$$

$$\bar{a}_2 \times \bar{n} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 1 & 2 \\ 7 & 5 & -13 \end{vmatrix} = -23\bar{i} + 53\bar{j} + 8\bar{k}\,.$$

$\overline{AN} = (x-1)\bar{i} + (y+2)\bar{j} + z\bar{k}$, $\overline{BM} = x\bar{i} + y\bar{j} + (z-1)\bar{k}$.
$(\overline{AN}, \bar{a}_1 \times \bar{n}) = 0 \Leftrightarrow -57(x-1) - 6(y+2) - 33z = 0$,
$(\overline{BM}, \bar{a}_2 \times \bar{n}) = 0 \Leftrightarrow -23x + 53y + 8(z-1) = 0$.
Deci $d\ :\ \begin{cases} 19x + 2y + 11z - 9 = 0 \\ 23x - 53y - 8z + 8 = 0 \end{cases}$

ii) $d(d_1, d_2) = \frac{|(\overline{AB}, \bar{a}_1 \times \bar{a}_2)|}{\|\bar{a}_1 \times \bar{a}_2\|}$,
$\overline{AB} = -\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$, $\|\bar{a}_1 \times \bar{a}_2\| = \sqrt{243}$, $(\overline{AB}, \bar{a}_1 \times \bar{a}_2) = -10$.
Deci $d(d_1, d_2) = \frac{10}{\sqrt{243}}$.

7. Fie dreptele $d_1\ :\ \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1}$, $d_2\ :\ \frac{x-2}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{\alpha}$.
i) Să se determine $\alpha \in \mathbf{R}$ astfel încât $d_1 \cap d_2 = \emptyset$;
ii) Să se scrie ecuaţia planului determinat de d_1 şi d_2;
iii) Calculaţi $d(M_0, \pi)$, unde π este planul de la punctul ii), iar $M_0(5, -4, 1)$.

Soluţie:

i) Dreapta d_1 are vectorul director $\bar{a}_1(2, 3, 1)$ şi trece prin punctul $A(1, -1, 0)$. Dreapta d_2 are vectorul director $\bar{a}_2(2, 2, \alpha)$ şi trece prin punctul $B(2,0,-1)$.

$d_1 : \begin{cases} 3x-2y-5=0 \\ y-3z+1=0 \end{cases}$; $d_2 : \begin{cases} x-y-2=0 \\ \alpha y-2z-2=0 \end{cases}$

$d_1 \cap d_2$ este soluţia sistemului

$\begin{cases} 3x-2y=5 \\ y-3z=-1 \\ x-y=2 \\ \alpha y-2z=2 \end{cases}$.

$d = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3{=}0$.

Determinăm soluţia cu ajutorul regulii lui Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{-3}\ ;\ y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{-3}\ ;\ z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-3}$$

$x=1,\ y=-1,\ z=0$ şi atunci $d_1 \cap d_2 = \{C(1,-1,0)\}$ dacă şi numai dacă $\alpha y - 2z = 2$, adică $\alpha = -2$.

ii) Ecuaţia planului π determinat de d_1 şi d_2 este

$$\pi\ :\ \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0\,;$$

$\pi : -8x + 6y - 2z + 14 = 0$

iii)

$$d(M_0, \pi) = \frac{|(-8)\cdot 5 + 6\cdot(-4) + (-2)\cdot 1 + 14|}{\sqrt{(-8)^2 + 6^2 + (-2)^2}} = \sqrt{26}$$

8. Să se scrie ecuaţiile canonice ale dreptei ce trece prin punctul $M(3,4,6)$ şi este paralelă cu dreapta
$d\ :\ x = 6-t, y = 3+2t, z = 4-2t$.

Soluţie:

Dacă $\overline{r} = (x, y, z)$, atunci $\overline{r} \in d \Leftrightarrow \overline{r} = t\overline{a} + \overline{r_0}$ cu $\overline{a} = (-1, 2, -2)$; $\overline{r_0} = (6, 3, 4)$, deci vectorul director al dreptei d este $\overline{a}$. Notând cu d' dreapta căutată, deoarece $d' \parallel d$, rezultă că vor avea acelaşi vector director.

Ecuaţiile canonice ale dreptei d' cu $M \in d'$ şi d' având ca vector director $\overline{a} = (-1, 2, -2)$ vor fi :

$$\frac{x-3}{-1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-6}{-2}.$$

9. Se dă dreapta de ecuaţii :

$$d : \begin{cases} x + 3y + z - 1 = 0 \\ 2x + y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$$

şi $P(2, 3, 1)$.

a) Să se calculeze distanţa de la P la dreapta d .

b) Să se găsească coordonatele proiecţiei ortogonale a punctului P pe dreapta d.

Soluţie:

a) Din sistemul de ecuaţii ce defineşte d, considerând x, y necunoscute principale şi z necunoscută secundară, obţinem :

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{5} \\ x = -z + \frac{4}{5} \end{cases}$$

Atunci, notând $z = t$, obţinem ecuaţia parametrică a dreptei d:

$d : x = \frac{4}{5} - t$; $y = -\frac{1}{5}; z = t$.

Dreapta d va avea vectorul director $\overline{a} = (-1, 0, 1)$ şi va trece prin punctul $A = (\frac{4}{5}; -\frac{1}{5}; 0)$ corespunzător lui $t = 0$.

Atunci, conform teoriei, notând cu $d(P, d)$ distanţa de la punctul P la dreapta d, obţinem $d(P, d) = \frac{\left\|\overline{a}\times\overline{AP}\right\|}{\|\overline{a}\|}$. Scăzând din coordonatele punctului P coordonatele punctului A, vom avea $\overline{AP} = (\frac{6}{5}; \frac{16}{5}; 1)$.

Dar $\overline{a}\times\overline{AP} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{6}{5} & \frac{16}{5} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{16}{5}\overline{i}+\frac{11}{5}\overline{j}-\frac{16}{5}\overline{k} \Rightarrow \left\|\overline{a}\times\overline{AP}\right\| = \frac{\sqrt{633}}{5} \Rightarrow d(P,d) = \frac{\sqrt{633}}{5.\sqrt{2}}$;

b) Vom determina ecuaţia planului ce trece prin P şi e perpendicular pe $\overline{a}$. Aceasta este : $<\overline{a};\overline{P\widetilde{P}}>= 0$ cu $\widetilde{P}(x,y,z)$ un punct curent de pe planul π căutat. Obţinem $(-1)\cdot(x-2)+0\cdot(y-3)+1\cdot(z-1)=0$. De aici obţinem ecuaţia planului căutat:

$$\pi : -x+z+1=0$$

Pentru a determina punctul $P^{'}$ căutat formăm sistemul :

$\begin{cases} x+3y+z-1=0 \\ 2x+y+2z-3=0 \\ -x+0+z+1=0 \end{cases}$. Soluţia unică ($x=\frac{9}{10}$; $y=-\frac{2}{10}$; $z=-\frac{1}{10}$) ne dă cooordonatele punctului căutat $P^{'}(\frac{9}{10};-\frac{2}{10};-\frac{1}{10})$.

10. Să se afle măsura unghiului dreptelor:

$d_1 : \begin{cases} x-2y+z+1=0 \\ 2x+2z+1=0 \end{cases}$, $d_2 : \begin{cases} 3x+6y-z+3=0 \\ x+y+z-5=0 \end{cases}$

Soluţie:

Pentru a afla vectorul director al unei drepte date prin ecuaţii de genul:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$$

este suficient să calculăm :

$\overline{a} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$. Vectorul ce se obţine va fi chiar vectorul director al dreptei. În cazul nostru, avem:

$\overline{a}_1 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4\overline{i}+4\overline{k}$;

$$\overline{a}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 3 & 6 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 7\overline{i} - 4\overline{j} - 3\overline{k}.$$

Calculăm $\| \overline{a}_1 \| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = \sqrt{32}$,
$\| \overline{a}_2 \| = \sqrt{7^2 + (-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{74}$,
$< \overline{a}_1, \overline{a}_2 >= (-4) \cdot 7 + 0 \cdot (-4) + 4 \cdot (-3) = -40$.
Atunci $\cos(\overline{a}_1, \overline{a}_2) = \frac{-40}{\sqrt{74}.\sqrt{32}}$. Deoarece unghiul a două drepte se consideră a fi mai mare sau egal cu 0 şi mai mic sau egal cu $\frac{\pi}{2}$, considerând vectorii directori $\overline{a}_1$, $-\overline{a}_2$, vom avea $(d_1 \hat{,} d_2) = \arccos\left(\frac{40}{\sqrt{74}.\sqrt{32}}\right)$.

11. Fie d dreapta de ecuaţie $x = y - 1 = z - 2$ şi $A(1, 1, 1)$. Să se determine coordonatele simetricului punctului A faţă de dreapta d .

Soluţie:

Să determinăm ecuaţia planului π ce conţine A şi d este perpendiculară pe π. Ca mai înainte, notând $z = t$, obţinem ecuaţia parametrică a dreptei:

$$d : x = t, y = t + 1, z = t + 2.$$

Atunci vectorul director al dreptei va fi $\overline{a} = (1, 1, 1)$. Pentru a afla ecuaţia planului ce conţine A şi este perpendicular pe dreapta d, observăm că subspaţiul liniar director al său e perpendicular pe $\overline{a}$, deci $P \in \pi \Leftrightarrow \left\langle \overline{a}, \overline{AP} \right\rangle = 0$. Atunci avem:

$$\pi : 1 \cdot (x - 1) + 1 \cdot (y - 1) + 1 \cdot (z - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\pi : x + y + z - 3 = 0$$

Pentru a determina punctul $P = d \cap \pi$, formăm sistemul:

$$\begin{cases} x = y - 1 = z - 2 \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases}.$$

Obţinem drept soluţie coordonatele punctului $P(0;1;2)$.

Dacă $A^{'}$ este simetricul lui A faţă de P şi $A^{'}$ are coordonatele x, y, z, atunci avem :

$$\begin{cases} 0 = \frac{x+1}{2} \\ 1 = \frac{y+1}{2} \\ 2 = \frac{z+1}{2} \end{cases}.$$

De aici se găsesc x, y, z şi anume
$x = -1, y = 1, z = 3$.

12. Fie punctul $A(1, 0, 1)$ şi dreapta $d : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}$.

a) Calculaţi distanţa de la punctul A la dreapta d.

b) Găsiţi coordonatele proiecţiei ortogonale a punctului A pe dreapta d.

c) Găsiţi coordonatele simetricului punctului A faţă de dreapta d.

Soluţie:

a) Se observă că $A_0(1, -1, 0) \in d$ şi $\overline{a} = \overline{i} + 2\overline{j} - \overline{k}$ este un vector director pentru d. Atunci $\overline{A_0A} = \overline{j} + \overline{k}$, $\overline{A_0A} \times \overline{a} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -3\overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$, $||\overline{A_0A} \times \overline{a}|| = \sqrt{11}$, $||\overline{a}|| = \sqrt{6}$ şi $\rho(A, d) = \frac{||\overline{A_0A} \times \overline{a}||}{||\overline{a}||} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{6}}$.

b) Se consideră planul π care trece prin punctul A şi este perpendicular pe dreapta d. Atunci $\overline{a} = \overline{i} + 2\overline{j} - \overline{k}$ este un vector normal la π şi $\pi : (x-1) \cdot 1 + (y-0) \cdot 2 + (z-1) \cdot (-1) = 0$, adică $\pi : x + 2y - z = 0$.

Dacă se notează cu A' proiecţia ortogonală a lui A pe d, atunci $\{A'\} = d \cap \pi$ şi rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1} \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

se obţine $A'\left(\frac{7}{6}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{6}\right)$.

c) Dacă A_1 este simetricul lui A faţă de d, atunci A' este mijlocul segmentului $[AA_1]$ şi se obţin relaţiile

$$\begin{cases} x_{A'} = \frac{x_A + x_{A_1}}{2} \\ y_{A'} = \frac{y_A + y_{A_1}}{2} \\ z_{A'} = \frac{z_A + z_{A_1}}{2} \end{cases},$$

adică $A_1\left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)$.

13. Fie punctul $A(-1, 0, 1)$ şi dreapta $\pi : x + y - z + 2 = 0$.

a) Calculaţi distanţa de la punctul A la planul π.

b) Găsiţi coordonatele proiecţiei ortogonale a punctului A pe planul π.

c) Găsiţi coordonatele simetricului punctului A faţă de planul π.

Soluţie:

a) $\rho(A, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|1\cdot(-1) + 1\cdot 1 - 1\cdot 0 + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

b) Se consideră o dreaptă d care trece prin A şi este perpendiculară pe planul π. Atunci d are ecuaţiile canonice carteziene $d : \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-0}{-1}$, deoarece $\overline{n} = \overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$ (vector normal la π) este un vector director al dreptei d.

Dacă se notează cu A' proiecţia ortogonală a lui A pe π, atunci $\{A'\} = d \cap \pi$ şi rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1} \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

se obţine $A'\left(-\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

c) Dacă A_1 este simetricul lui A faţă de π, atunci A' este mijlocul segmentului $[AA_1]$ şi se obţin relaţiile

$$\begin{cases} x_{A'} = \frac{x_A + x_{A_1}}{2} \\ y_{A'} = \frac{y_A + y_{A_1}}{2} \\ z_{A'} = \frac{z_A + z_{A_1}}{2} \end{cases},$$

adică $A_1\left(-\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

14. Fie punctul $M(1,1,1)$, dreapta $d : \begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ x - 2z - 1 = 0 \end{cases}$ şi planul $\pi : x + 2y + 3z - 1 = 0$.

    a) Scrieţi ecuaţia carteziană generală a unui plan π_1 care trece prin M şi este paralel cu planul π.

    b) Scrieţi ecuaţiile canonice carteziene ale unei drepte d_1 care trece prin M şi este paralelă cu dreapta d_1.

    c) Studiaţi poziţia relativă a dreptei d faţă de planul π.

    Soluţie:

    a) Un vector normal la π este $\overline{n} = \overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k}$ şi atunci $\overline{n}$ este vector normal la π_1. Prin urmare $\pi : (x-1) \cdot 1 + (y-1) \cdot 2 + (z-1) \cdot 3 = 0$, adică $\pi : x + 2y + 3z - 6 = 0$.

    b) Un vector director pentru dreapta d cât şi pentru dreapta d_1 este $\overline{a} = \overline{n}_1 \times \overline{n}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\overline{i} + 3\overline{j} + \overline{k}$.
    Atunci $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{1}$.

    c) Deoarece vectorul normal la π, $\overline{n} = \overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k}$ şi vectorul director pentru d, $\overline{a} = 2\overline{i} + 3\overline{j} + \overline{k}$ nu sunt ortogonali ($< \overline{n}, \overline{a} >= 9 \neq 0$), rezultă că $d \cap \pi \neq \emptyset$. Rezolvând sistemul format cu ecuaţiile lui d şi π se obţine $d \cap \pi = \left\{ P\left(\frac{3}{11}, \frac{10}{11}, -\frac{4}{11}\right) \right\}$. Deci d "înţeapă" planul π în punctul P.

7.2 Probleme propuse spre rezolvare

1. Fie punctul $A(1, 0, -1)$ şi dreptele $d_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{1}$, $d : \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$.

    a) Studiaţi poziţia relativă a dreptelor d_1 şi d_2.

    b) Dacă d_1, d_2 sunt necoplanare, atunci scrieţi ecuaţiile perpendicularei comune şi calculaţi distanţa dintre d_1şi d_2. Altfel, scrieţi ecuaţia planului determinat de cele două drepte.

c) Scrieţi ecuaţiile dreptei care trece prin A şi intersectează dreptele d_1 şi d_2.

2. Să se scrie ecuaţiile dreptei care intersectează dreptele
$d_1 : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 4t \end{cases}$ şi $d_2 : \begin{cases} \frac{x+2}{3} = \frac{z-4}{-1} \\ y + 1 = 0 \end{cases}$

şi este paralelă cu dreapta $d_3 : \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ x + y - z + 4 = 0 \end{cases}$.

3. Să se scrie ecuaţiile bisectoarelor unghiurilor formate de dreptele $d_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-2}$ şi $d_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{\sqrt{2}}$.

4. Se consideră planul $\pi : x - y + 2z + 2 = 0$, punctul $A(0, 1, 3)$ şi dreapta $d : \begin{cases} 2x + y - z + 1 = 0 \\ x + y + z + 4 = 0 \end{cases}$. Se cere:

a) Să se scrie ecuaţia planului care trece prin A şi conţine dreapta d.

b) Să se scrie ecuaţia planului care conţine dreapta d şi este perpendicular pe planul π.

c) Să se scrie ecuaţia planului care conţine dreapta d şi paralel cu dreapta $g : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{-1}$.

5. Să se scrie ecuaţiile proiecţiei ortogonale a dreptei $d : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z + 4 = 0 \end{cases}$ pe planul $\pi : 3x + 2y - z - 1 = 0$ şi ecuaţiile simetricei dreptei d faţă de planul π.

Calculaţi o funcţie trigonometrică a unghiului format de dreapta d şi planul π.

Capitolul 8

Conice şi cuadrice

În E_3 considerăm reperul cartezian $\left\{O;\bar{i},\bar{j},\bar{k}\right\}$ şi forma pătratică afină $g: E_3 \to \mathbf{R}$ definită prin

$$g(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy+$$
$$+2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{10}x + 2a_{20}y + 2a_{30}z + a_{00},$$

cu $a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2 \neq 0$.

Definiţia 8.1. Mulţimea de nivel constant zero dată de ecuaţia

$$\sum = g^{-1}(0) = \left\{M(x,y,z) \mid (x,y,z) \in \mathbf{R}^3, g(x,y,z) = 0\right\},$$

se numeşte cuadrică sau suprafaţă algebrică de ordinul al doilea.

Se notează $\sum : g(x,y,z) = 0$.

Faţă de transformările ortogonale, ecuaţia $g(x,y,z) = 0$ are următorii invarianţi

$$\Delta = \det \overline{A}, \delta = \det A, I = trA,$$

$$J = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

unde

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{10} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{20} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{30} \\ a_{10} & a_{20} & a_{30} & a_{00} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Dacă cuadrica $\sum$ are centru, atunci coordonatele sale sunt în mod necesar soluţia sistemului

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial x} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{10} = 0, \\ \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial y} = a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{20} = 0, \\ \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial z} = a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{30} = 0. \end{cases}$$

Pentru stabilirea ecuaţiei canonice a cuadricei se poate proceda astfel:

i) Dacă $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$, se face translaţie.

ii) Dacă cel puţin unul din numerele a_{12}, a_{13}, a_{23} este nenul, atunci tipul cuadricei de ecuaţie

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz +$$

$$+ 2a_{23}yz + 2a_{10}x + 2a_{20}y + 2a_{30}z + a_{00} = 0,$$

este determinat de expresia termenilor de gradul al doilea, adică de forma pătratică

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz.$$

Matriceal această formă pătratică se scrie

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

sau

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Pentru matricea A se determină valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ şi vectorii proprii corespunzători care sunt ortogonali. Prin normare obţinem versorii $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$. Se notează cu R matricea ce conţine pe coloane coordonatele versorilor $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$; având în vedere posibilitatea înlocuirii unuia dintre versorii $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ prin opusul său sau posibilitatea renumerotării valorilor proprii, putem presupune $\det R = 1$. Rotaţia

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

reduce forma pătratică la forma diagonală $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2$. Direcţiile noilor axe de coordonate sunt date de direcţiile versorilor proprii $\overline{e_1}, \overline{e_2}$, respectiv $\overline{e_3}$. În final, dacă este cazul, se face o translaţie.

Teorema 8.1. Locul geometric al tuturor tangentelor la cuadrica $\sum$ în punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ este planul de ecuaţie

$$(x - x_0) \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0) \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0) \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Acest plan se numeşte planul tangent la cuadrica $\sum$ în punctul $M_0 \in \sum$.

Dreapta care trece prin M_0 şi este perpendiculară pe planul tangent se numeşte normală şi are ecuaţiile:

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)},$$

unde vectorul normal la planul tangent este
$\overline{n}\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\right)$.

8.1 Probleme rezolvate

1. Sub influenţa unei forţe punctul material M se mişcă pe cercul $C : x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$. Acţiunea forţei se întrerupe în momentul în care M a ajuns în poziţia $(1, -2)$. Să se determine traiectoria pe care o va urma mai departe punctul material M.

Soluţie:

Ecuaţia cercului C se poate scrie

$$C\,:\,(x-3)^2+(y+2)^2=4\,,$$

deci centrul cercului este $A(3,-2)$ şi raza sa este $r=2$.
Direcţia după care se va deplasa punctul M, dacă acţiunea forţei încetează, este direcţia tangentei la cercul C în punctul M, adică $d\colon(x-3)(1-3)+(y+2)(-2+2)-4=0$ (prin dedublare) sau $d\,:\,x=1$.

2. Fie conica dată de ecuaţia

$$\Gamma_1: g(x,y)=x^2-2xy+2y^2-4x-6y+3=0\,.$$

i) Să se calculeze invarianţii conicei;
ii) Să se găsească coordonatele centrului conicei;
iii) Să se găsească ecuaţia conicei redusă la centru;
iv) Să se găsească forma canonică a conicei.

Soluţie:

i) $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, $\overline{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ -1 & 2 & -3\\ -2 & -3 & 3\end{pmatrix}$

$\Delta=\det\overline{A}=\begin{vmatrix}1 & -1 & -2\\ -1 & 2 & -3\\ -2 & -3 & 3\end{vmatrix}=-26{=}0\Rightarrow\Gamma_1$ conică nedegenerată.
$\delta=\det A=1\Rightarrow\Gamma_1$ conică cu centru. $I=Tr\,A=3$.
Din faptul că $\delta>0$ şi $I\Delta<0$ rezultă că Γ_1 este o elipsă.
ii) Studiem centrul lui Γ_1.

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{1}{2}(2x-2y-4)=0\\ \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{1}{2}(-2x+4y-6)=0\end{cases}$$

$\begin{cases}x-y &= 2\\ -x+2y &= 3\end{cases}\Rightarrow x=7, y=5$ coordonatele centrului conicei.

iii) Ecuaţia conicei redusă la centru este
$(x^{'})^2 - 2x^{'}y^{'} + 2(y^{'})^2 - 26 = 0$.
(după translaţia $x^{'} = x - 7$, $y^{'} = y - 5$)
iv) Pentru a găsi forma canonică determinăm valorile proprii ale lui A.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0\,,$$

$\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.
Deteminăm vectorii proprii ai lui A

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{3+\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & 2 - \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(*)\begin{cases} \frac{-1-\sqrt{5}}{2}u_1 - v_1 = 0 \\ -u_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}v_1 = 0 \end{cases}$$

Sistemul (*) are soluţia trivială şi următoarea soluţie netrivială:

$$\begin{cases} u_1 &= k \\ v_1 &= \frac{-1-\sqrt{5}}{2}k,\ k \in \mathbf{R}\backslash\{0\}\,. \end{cases}$$

Pentru $k = 1$, $\overline{a}_1(u_1, v_1)$ este un vector propriu;
$\|\overline{a}_1\| = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$, deci $\overline{e}_1\left(\frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}, \frac{-1-\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\right)$.

Analog pentru $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ obţinem:

$$\begin{cases} u_2 &= k \\ v_2 &= \frac{\sqrt{5}+1}{2}k,\ k \in \mathbf{R}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

Pentru $k = 1$, $\overline{a}_2(u_2, v_2)$ este un vector propriu;
$\|\overline{a}_2\| = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$, deci $\overline{e}_2\left(\frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}, \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\right)$.

$$\det R = \begin{vmatrix} \frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} & \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} & \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \end{vmatrix} = 1.$$

Rotaţia:

$$\begin{cases} x' = \frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}x'' + \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}y'' \\ y' = \frac{-1-\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}x'' + \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}y'' \end{cases} \text{ conduce la}$$

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2}\left(x''\right)^2 + \frac{3-\sqrt{5}}{2}\left(y''\right)^2 - 26 = 0$$

$\frac{3+\sqrt{5}}{52}\left(x''\right)^2 + \frac{3-\sqrt{5}}{52}\left(y''\right)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{\left(x''\right)^2}{\frac{52}{3+\sqrt{5}}} + \frac{\left(y''\right)^2}{\frac{52}{3-\sqrt{5}}} - 1 = 0. \text{ (elipsă)}$$

3. Aceeaşi problemă ca precedenta (mai puţin forma canonică) pentru conica Γ_2 de ecuaţie
$\Gamma_2 : g(x,y) = x^2 - 2xy - y^2 - 4x - 6y + 3 = 0\,.$

Soluţie:

$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -3 \\ -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$;

$\Delta = \det \overline{A}$; $\Delta = -23$; $I = 0$; $\delta = \det A = -2\,.$

$\Delta \neq 0 \Rightarrow$conică nedegenerată; $\delta < 0$ şi $I = 0 \Rightarrow$hiperbolă echilateră.

$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{2}(2x - 2y - 4) = 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{1}{2}(-2x - 2y - 6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x + y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$x = -\frac{1}{2}$, $y = -\frac{5}{2}$ coordonatele centrului conicei.

Facem translaţia $x = -\frac{1}{2} + x'$ şi $y = -\frac{5}{2} + y'$. Ecuaţia conicei redusă la centru este:

$$\left(x'\right)^2 - 2x'y' - \left(y'\right)^2 + \frac{23}{2} = 0$$

4. Aceeaşi problemă cu precedenta pentru conica Γ_3 de ecuaţie

$$\Gamma_3 \,:\, g(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 4 = 0.$$

Soluţie:

$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\Delta = 0$; $I = 2$; $\delta = 0$.

$\Delta = 0 \Rightarrow$conică degenerată; $\delta = 0 \Rightarrow \Gamma_3 = D_1 \cup D_2$, unde D_1 şi D_2 sunt drepte paralele sau confundate, sau $\Gamma_3 = \Phi$. Ecuaţia conicei redusă la centru este :

$$(x')^2 + 2x'y' + (y')^2 = 0.$$

5. Să se determine forma canonică pentru conica Γ de ecuaţie

$$\Gamma : g(x,y) = 11x^2 - 24xy + 4y^2 + 2x + 16y + 11 = 0.$$

Soluţie:

$\overline{A} = \begin{pmatrix} 11 & -12 & 1 \\ -12 & 4 & 8 \\ 1 & 8 & 11 \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 11 & -12 \\ -12 & 4 \end{pmatrix}$;

$\Delta = \det \overline{A}$; $\Delta = -2000$; $I = 15$; $\delta = -100$.

$\Delta \neq 0 \Rightarrow$conică nedegenerată; $\delta < 0 \Rightarrow$ conica este o hiperbolă.

Se face rotaţia

$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$,

unde θ este unghiul determinat de ecuaţia:

$7\sin 2\theta = -24\cos 2\theta \Leftrightarrow \tan 2\theta = -\frac{24}{7} \Rightarrow$

$\tan\theta_{1,2} = \frac{7\pm 25}{24} \Leftrightarrow \tan\theta_{1,2} = \frac{4}{3}$ sau $\left(-\frac{3}{4}\right)$;

din $\tan\theta_1 = \frac{4}{3} \Rightarrow \begin{cases} \sin\theta_1 = \pm\frac{4}{5} \\ \cos\theta_1 = \pm\frac{3}{5} \end{cases}$;

din $\tan\theta_1 = \frac{-3}{4} \Rightarrow \begin{cases} \sin\theta_2 = \mp\frac{3}{5} \\ \cos\theta_2 = \pm\frac{4}{5} \end{cases}$.

Facem rotaţia: $\begin{cases} x = \frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y' \\ y = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{5}(3x' - 4y') \\ y = \frac{1}{5}(4x' + 3y') \end{cases}$

şi se obţine:

$-5(x')^2 + 20(y')^2 + 14x' + 8y' + 11 = 0 \Leftrightarrow$

$-5\left(x' - \frac{7}{5}\right)^2 + 20\left(y' + \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{88}{5} = 0.$

Facem translaţia $x' = \frac{7}{5} + x''$ şi $y' = -\frac{2}{5} + y''$, se obţine

$$-5\left(x''\right)^2 + 20\left(y''\right)^2 + \frac{88}{5} = 0.$$

Analog în celălalt caz.

6. Să se determine centrul, axele şi vârfurile conicei

$$\Gamma : g(x,y) = 16x^2 + 4xy + 19y^2 + 4x - 22y - 5 = 0.$$

Soluţie:

Centrul conicei este dat de:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial x} = 32x + 4y + 4 = 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial y} = 4x + 38y - 22 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + y + 1 = 0 \\ 2x + 19y - 11 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x = -\frac{1}{5}$, $y = \frac{3}{5}$ coordonatele centrului conicei.

Observaţie: Axele conicei sunt drepte ce trec prin centrul conicei de parametri directori, soluţiile ecuaţiilor în m:

$$a_{12}m^2 + (a_{11} - a_{22})m - a_{12} = 0\,.$$

$2m^2 - 3m - 2 = 0 \Rightarrow m_1 = 2, m_2 = -\frac{1}{2}$.
Axele sunt: $y - \frac{3}{5} = 2\left(x + \frac{1}{5}\right) \Leftrightarrow y = 2x + 1$;
$y - \frac{3}{5} = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{5}\right) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}\left(x - 1\right)$.
Vârfurile conicei sunt determinate de intersecţia axelor cu conica:

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ 16x^2 + 4xy + 19y^2 + 4x + -22y - 5 = 0 \end{cases} \text{şi}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}\left(x - 1\right) \\ 16x^2 + 4xy + 19y^2 + 4x + -22y - 5 = 0 \end{cases}.$$

Primul sistem are soluţiile:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{5};\, y_{1,2} = \frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{5}\,.$$

Vârfurile sunt A_1 de coordonate x_1, y_1 şi A_2 de coordonate x_2, y_2. Analog pentru cel de-al doilea sistem se obţin A_3 şi A_4 ca vârfuri.

7. În E_2, faţă de reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}\}$, se dă conica γ de ecuaţie
$3x^2 - 10xy + 3y^2 + 4x + 4y + 4 = 0$,
dreapta d de ecuaţie $x + y - 5 = 0$ şi punctul $A(1, 0)$.
Se cer:
a) natura şi genul conicei γ;
b) ecuaţia polarei punctului A în raport cu conica γ;
c) ecuaţiile tangentelor din A la conica γ;
d) coordonatele centrului conicei γ;
e) ecuaţiile axelor de simetrie ale conicei γ;
f) ecuaţiile asimptotelor conicei γ;
g) coordonatele polului dreptei d în raport cu conica γ;
h) ecuaţiile tangentelor la conică, paralele cu dreapta d;
i) ecuaţia diametrului conjugat direcţiei lui d;
j) ecuaţia canonică a conicei γ şi reperul canonic;

Soluţie:

a) Discriminantul mic este $\delta = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = -16 < 0$ şi astfel γ este o conică cu centru (unic de simetrie), de gen (tip) hiperbolic.

Discriminantul mare este $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 \\ -5 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -128 \neq 0$ şi atunci natura conicei este: γ conică nedegenerată.
Deci γ este o hiperbolă.
b) Ecuaţia polarei punctului $A(1, 0)$ în raport cu conica γ se obţine prin dedublarea ecuaţiei conicei în punctul A, adică
$3xx_0 - 5x_0y - 5xy_0 + 3yy_0 + 2x + 2x_0 + 2y + 2y_0 + 4 = 0$,
pentru $x_0 = 1, y_0 = 0$. Deci $5x - 3y + 6 = 0$.
c) Intersecţia dintre polara lui A şi conică este dată de sistemul

$$\begin{cases} 5x - 3y + 6 = 0 \\ 3x^2 - 10xy + 3y^2 + 4x + 4y + 4 = 0 \end{cases},$$

care are soluţiile $\left(1 + \frac{\sqrt{22}}{2}, \frac{11}{3} + \frac{5\sqrt{22}}{6}\right)$, $\left(1 - \frac{\sqrt{22}}{2}, \frac{11}{3} - \frac{5\sqrt{22}}{6}\right)$, care sunt coordonatele punctelor de intersecţie, B şi B', ale

polarei cu conica (chiar puncte de tangenţă).
Atunci tangentele duse din A la γ au ecuaţiile:
$AB\ :\ \frac{x-1}{\frac{+\sqrt{22}}{2}}=\frac{y-0}{\frac{11}{3}+\frac{5\sqrt{22}}{6}}$
$AB'\ :\ \frac{x-1}{\frac{-\sqrt{22}}{2}}=\frac{y-0}{\frac{11}{3}-\frac{5\sqrt{22}}{6}}$
d) Coordonatele centrului C al conicei γ se găsesc rezolvând sistemul $\begin{cases}\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x} & = & 0\\ \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial y} & = & 0\end{cases}$,
unde $F(x,y)=3x^2-10xy+3y^2+4x+4y+4\,.$
Deoarece $\frac{\partial F}{\partial x}=6x-10y+4$ şi $\frac{\partial F}{\partial y}=-10x+6y+4$, avem $C(1,1)\,.$
e) Ecuaţia care determină direcţiile $l\bar{i}+m\bar{j}$ ale axelor conicei este $(a_{11}-a_{22})lm+a_{12}(m^2-l^2)=0\,.$
Pentru conica γ avem $a_{11}=3$, $a_{22}=3$, $a_{12}=-5$. Dacă notăm cu $k=\frac{m}{l}$ $(l\neq 0)$ panta unei drepte care are direcţia (l,m) rezultă ecuaţia
$k^2-1=0$, de unde $k_1=-1$ şi $k_2=1$ sunt pantele axelor de simetrie. Cum axele trec prin centrul de simetrie $C(1,1)$, ele au ecuaţiile $y-1=-(x-1)$ şi $y-1=x-1$ sau $x+y-2=0$ şi $x-y=0\,.$
f) Direcţiile celor două asimptote sunt date de ecuaţia
$a_{11}l^2+2a_{12}lm+a_{22}m^2=0\,,$
adică $3k^2-10k+3=0$ (dacă $l\neq 0$ luăm $k=\frac{m}{l}$). Avem $k_1=1/3$, $k_2=3$ şi prin urmare direcţiile celor două asimptote sunt $\bar{i}+3\bar{j}$ şi $3\bar{i}+\bar{j}$.
Dacă $l\bar{i}+m\bar{j}$ este direcţia asimptotei, atunci ecuaţia ei este

$$l\frac{\partial F}{\partial x}+m\frac{\partial F}{\partial y}=0\,.$$

Deci, ecuaţiile asimptotelor conicei γ sunt
$(3x-5y+2)+3(-5x+3y+2)=0$ şi
$3(3x-5y+2)+(-5x+3y+2)=0\,,$
adică $3x-y-2=0$ şi $x-3y+2=0\,.$
Se observă că centrul C este pe asimptote, aşa cum este normal.
g) Fie $M_0(x_0,y_0)$ polul dreptei d în raport cu conica γ. Atunci

polara lui M_0 în raport cu γ este chiar dreapta d.
Se scrie ecuaţia polarei lui $M_0(x_0, y_0)$ în raport cu γ :
$(3x_0 - 5y_0 + 2)x + (-5x_0 + 3y_0 + 2)y + (2x_0 + 2y_0 + 4) = 0$
şi punem condiţia ca această dreaptă să fie chiar dreapta d : $x + y - 5 = 0$, adică

$$\frac{3x_0 - 5y_0 + 2}{1} = \frac{-5x_0 + 3y_0 + 2}{1} = \frac{2x_0 + 2y_0 + 4}{-5} = \lambda \in \mathbf{R}.$$

Rezultă sistemul $\begin{cases} 3x_0 - 5y_0 &= \lambda - 2 \\ -5x_0 + 3y_0 &= \lambda - 2 \end{cases}$,
de unde $x_0 = 1 - \frac{\lambda}{2}$ şi $y_0 = 1 - \frac{\lambda}{2}$ şi $\lambda = -\frac{8}{3}$.
Deci $x_0 = y_0 = \frac{7}{3}$ şi atunci $M_0(\frac{7}{3}, \frac{7}{3})$.
h) Orice dreaptă paralelă cu dreapta d are ecuaţia
d_λ : $x + y + \lambda = 0$, $\lambda \in \mathbf{R}$.
Intersectăm conica γ cu dreapta d_λ, adică obţinem sistemul

$$\begin{cases} 3x^2 - 10xy + 3y^2 + 4x + 4y + 4 &= 0 \\ x + y + \lambda &= 0 \end{cases}$$

şi punem condiţia ca ecuaţia de gradul doi în x să aibă o singură rădăcină reală (pentru ca dreapta să fie tangentă la conică).
Astfel, din $y = -x - \lambda$ rezultă $16x^2 + 16\lambda x + 3\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ şi trebuie ca $\Delta = 64(\lambda - 2)^2 = 0$, adică $\lambda = 2$.
Deci există o singură dreaptă tangentă la γ, care este paralelă cu d, de ecuaţie $x + y + 2 = 0$.
i) Diametrul conjugat cu direcţia lui d are ecuaţia

$$l\frac{\partial F}{\partial x} + m\frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

unde $l\bar{i} + m\bar{j} = \bar{i} - \bar{j}$ este direcţia dreptei d (vezi $d : y = -x + 5$, de unde panta lui d este $k = \frac{m}{l} = -1$).
Astfel, ecuaţia diametrului conjugat cu direcţia lui d este $x - y = 0$.
j) Mai întâi găsim valorile şi vectorii proprii ai matricei A

asociată conicei γ.
Polinomul caracteristic $P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -5 \\ -5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 25$ are rădăcinile $\lambda_1 = -2$ şi $\lambda_2 = 8$ (valorile proprii).
Pentru $\lambda_1 = -2$, sistemul care dă vectorii proprii asociaţi lui λ_1 este

$$(A - \lambda_1 I_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 5y & = & 0 \\ -5x + 5y & = & 0 \end{cases}.$$

Atunci $x = y = \alpha$ ($\alpha \in \mathbf{R}$) şi un vector propriu asociat lui $\lambda_1 = -2$ este $\bar{u}_1 = \bar{i} + \bar{j}$. Cum $\|\bar{u}_1\| = \sqrt{2}$ obţinem versorul $\bar{i}^{'} = \frac{1}{\|\bar{u}_1\|} \cdot \|\bar{u}_1\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{j}$.
Pentru $\lambda_1 = 8$, sistemul care dă vectorii proprii asociaţi lui λ_2 este

$$(A - \lambda_2 I_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x - 5y & = & 0 \\ -5x - 5y & = & 0 \end{cases}.$$

Atunci $x = -\alpha$, $y = \alpha$ ($\alpha \in \mathbf{R}$) şi un vector propriu asociat lui $\lambda_2 = 8$ este $\bar{u}_2 = -\bar{i} + \bar{j}$. Cum $\|\bar{u}_2\| = \sqrt{2}$ obţinem versorul $\bar{j}' = \frac{1}{\|\bar{u}_2\|} \cdot \|\bar{u}_2\| = -\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{j}$.
Acum, se face schimbarea de repere carteziene ortonormate

$$\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}\} \longrightarrow \mathcal{R}^{'} = \{O; \bar{i}^{'}, \bar{j}^{'}\}$$

dată prin relaţiile

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sau

$$\begin{cases} x & = & \frac{1}{\sqrt{2}}x^{'} - \frac{1}{\sqrt{2}}y^{'} \\ y & = & \frac{1}{\sqrt{2}}x^{'} + \frac{1}{\sqrt{2}}y^{'} \end{cases}$$

$\Big(M_{\mathcal{R}}(x,y) \longrightarrow M_{\mathcal{R}'}(x^{'}, y^{'}), \ \text{rotaţie} \Big)$
Relativ la noul reper $\mathcal{R}'$, ecuaţia lui γ este:

$\lambda_1(x')^2+\lambda_2(y')^2+4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)+4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)+4=0,$
adică $\gamma \ : \ -2(x')^2+8(y')^2+\frac{8}{\sqrt{2}}x'+4=0\,.$
Deci $\gamma \ : \ \frac{(x'-\sqrt{2})^2}{2^2}-\frac{(y')^2}{1^2}-1=0\,.$
În final, se mai face schimbarea de repere ortonormate (translaţie):

$$\mathcal{R}'=\{O;\bar{i}',\bar{j}'\}\longrightarrow \mathcal{R}''=\{O'';\bar{i}',\bar{j}'\}$$

dată prin
$\begin{cases} x'-\sqrt{2} & = & x'' \\ & y' & = y'' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = I_2 \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$
Atunci, ecuaţia lui γ relativ la reperul $\mathcal{R}''$ este

$$\frac{(x'')^2}{2^2}-\frac{(y'')^2}{1^2}-1=0$$

şi ea este ecuaţia canonică a hiperbolei γ. Reperul canonic este chiar reperul relativ la care conica are ecuaţia canonică, adică $\mathcal{R}''=\{O'';\bar{i}',\bar{j}'\}$.
Cum $O''_{\mathcal{R}'}(\sqrt{2},0)$, avem $O\bar{O}''=\sqrt{2}\bar{i}'=\bar{i}+\bar{j}$ şi astfel $O''_{\mathcal{R}}(1,1)$.
Schimbarea de repere $\mathcal{R}\longrightarrow\mathcal{R}''$ este dată prin

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

8. Să se arate că locul geometric al punctelor din plan, pentru care raportul distanţelor la un punct fix F (focar) şi la o dreaptă fixă d (directoare) este egal cu constanta e (excentricitate), este o conică nedegenerată (elipsă, hiperbolă sau parabolă).

Soluţie:

Fixăm un reper cartezian ortonormat $\mathcal{R}=\{O;\bar{i},\bar{j}\}$ în plan şi în raport cu acesta fie $F(x_0,y_0)$, $d \ : \ ax+by+c=0\,.$
Fie $M(x,y)$ un punct al locului geometric. Atunci

$$\frac{MF}{d(M,d)}=e \text{ sau } \frac{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}{\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}=e\Leftrightarrow$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = e^2 \frac{(ax + by + c)^2}{a^2 + b^2}.$$

După calcule, obţinem ecuaţia carteziană generală a unei conice

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$$

unde $a_{11} = a^2 + b^2 - e^2a^2$, $a_{12} = -e^2ab$, $a_{22} = a^2 + b^2 - e^2b^2$, $b_1 = -[x_0(a^2 + b^2) + e^2ac]$, $b_2 = -[y_0(a^2 + b^2) + e^2bc]$, $c = (x_0^2 + y_0^2)(a^2 + b^2) - e^2c^2$.
Prin urmare, locul geometric este o conică nedegenerată, pentru că $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{vmatrix} \neq 0$ (prin calcul).
Genul conicei este dat de discriminantul mic
$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = (a^2 + b^2)^2(1 - e^2)$.
Atunci, conica este elipsă pentru $e < 1$ ($\delta > 0$), parabolă pentru $e = 1$ ($\delta = 0$), hiperbolă pentru $e > 1$ ($\delta < 0$).
Observaţie: Dacă alegem reperul $\mathcal{R}$ astfel încât axa $Ox \perp d$ şi $O = F$, ecuaţia conicei se reduce la $x^2 + y^2 = e^2(x - \alpha)^2$, unde $d : x - \alpha = 0$.

9. În punctele de intersecţie ale conicei $\gamma : x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 6y = 0$ cu dreapta $d : 3x - y + 6 = 0$, se duc tangentele la această conică. Să se găsească punctul de intersecţie al acestor tangente.

Soluţie:

Din sistemul $\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 6y = 0 \\ y = 3x + 6 \end{cases}$
rezultă $x_1 = -1, y_1 = 3$ sau $x_2 = 0, y_2 = 6$.
Deci $\gamma \cap d = \{M_1(-1, 3), M_2(0, 6)\}$.
Tangenta la γ în punctul $M(x_0, y_0) \in \gamma$ are ecuaţia
$xx_0 - x_0y - xy_0 + yy_0 + x + x_0 - 3y - 3y_0 = 0$.
Atunci ecuaţia tangentei la γ în M_1 este $-3x + y - 10 = 0$ şi ecuaţia tangentei la γ în M_2 este $-5x + 3y - 18 = 0$.

Rezolvând sistemul format cu ecuaţiile celor două tangente

$$\begin{cases} -3x + y - 10 &= 10 \\ -5x + 3y - 18 &= 0 \end{cases}$$

se obţin coordonatele punctului de intersecţie al celor două tangente, $A(-3, 1)$.

10. În E_3 relativ la reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$, se dă cuadrica

$$\Gamma \ : \ 2x^2 + 16y^2 + 2z^2 - 8xy + 8yz - 2x - y + 2z + 3 = 0\,.$$

Se cer:
a) natura cuadricei şi rezolvarea problemei centrelor;
b) ecuaţia planului tangent la Γ în punctul $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma$ şi ecuaţiile normalei la Γ în acelaşi punct;
c) ecuaţia canonică a cuadricei Γ şi reperul natural ataşat acesteia.

Soluţie:

a) Matricea formei pătratice asociată cuadricei Γ este $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 16 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ şi atunci discriminantul mic asociat cuadricei este $\delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 16 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$, iar discriminatul mare este $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 & -1 \\ -4 & 16 & 4 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 1 & 3 \end{vmatrix} = -81 \neq 0$.

Prin urmare, Γ este cuadrică nedegenerată, fară centru (unic de simetrie).

Coordonatele eventualelor centre (de simetrie) sunt date de sistemul

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial F}{\partial x} &= 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial F}{\partial y} &= 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial F}{\partial z} &= 0 \end{cases},$$

unde
$F(x,y,z) = 2x^2 + 16y^2 + 2z^2 - 8xy + 8yz - 2x - y + 2z + 3$.
Sistemul de ecuaţii liniare care rezultă
$\begin{cases} 2x - 4y & = 1 \\ -4x + 16y + 4z & = \frac{1}{2} \\ 4y + 2z & = -1 \end{cases}$, este incompatibil
(vezi şi $\delta = 0$, dar Δ=0).
Deci cuadrica Γ nu are nici un centru de simetrie.
b) Prin dedublare în punctul $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma$, ecuaţia planului tangent la Γ în M_0 este
$2xx_0 + 16yy_0 + 2zz_0 - 4x_0y - 4xy_0 + 4y_0z + 4yz_0 - x_0 - x -$
$-\frac{1}{2}y_0 - \frac{1}{2}y + z + z_0 + 3 = 0,$ adică
$(2x_0 - 4y_0 - 1)x + (-4x_0 + 16y_0 + 4z_0 - \frac{1}{2})y +$
$+(4y_0 + 2z_0 + 1)z + (-x_0 - \frac{1}{2}y_0 + z_0 + 3) = 0$.
Normala la Γ în M_0 (care este o dreaptă ce trece prin M_0 şi este perpendiculară pe planul tangent la Γ, în M_0) are ecuaţiile

$$\frac{x - x_0}{2x_0 - 4y_0 - 1} = \frac{y - y_0}{-4x_0 + 16y_0 + 4z_0 - \frac{1}{2}} = \frac{z - z_0}{4y_0 + 2z_0 + 1}.$$

Altfel, ecuaţiile planului tangent, respectiv normalei la Γ în $M_0(x_0, y_0, z_0)$ sunt
$(x - x_0) \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0) \cdot \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) +$
$+(z - z_0) \cdot \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0$,
$\frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}$
c) Mai întâi se găsesc valorile proprii ale matricii A, rezolvând ecuaţia caracteristică $\det(A - \lambda I_3) = 0$, adică

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 & 0 \\ -4 & 16-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Rezultă valorile proprii $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 18$.
În continuare, pentru fiecare valoare proprie, se determină vectorii proprii corespunzători.

Pentru $\lambda_1 = 0$, se rezolvă sistemul liniar omogen

$$(A - \lambda_1 I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ adică}$$

$$\begin{cases} 2x - 4y &= 0 \\ -4x + 16y + 4z &= 0 \\ 4y + 2z &= 0 \end{cases}.$$

Rezultă $x = 2\alpha$, $y = \alpha$, $z = -2\alpha$ $(\alpha \in \mathbf{R})$.
Atunci un vector propriu corespunzător lui λ_1 este de forma $\bar{v}_1 = \alpha(2\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k})$, $\alpha \in \mathbf{R}^*$, iar pentru $\alpha = 1$ se obţine $\bar{u}_1 = 2\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$ cu lungimea $\|\bar{u}_1\| = \sqrt{4+1+4} = 3$.
Reţinem versorul $\bar{i}' = \frac{1}{\|\bar{u}_1\|} \cdot \bar{u}_1 = \frac{2}{3}\bar{i} + \frac{1}{3}\bar{j} - \frac{2}{3}\bar{k}$.
Pentru $\lambda_2 = 2$, se rezolvă sistemul liniar omogen

$$(A - \lambda_2 I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ adică}$$

$$\begin{cases} -4y &= 0 \\ -4x + 14y + 4z &= 0 \\ 4y &= 0 \end{cases}.$$

Rezultă $x = \alpha$, $y = 0$, $z = \alpha$ $(\alpha \in \mathbf{R})$.
Atunci un vector propriu corespunzător lui λ_2 este de forma $\bar{v}_2 = \alpha(\bar{i} + \bar{k})$, $\alpha \in \mathbf{R}^*$, iar pentru $\alpha = 1$ se obţine $\bar{u}_2 = \bar{i} + \bar{k}$ cu lungimea $\|\bar{u}_2\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.
Reţinem versorul $\bar{j}' = \frac{1}{\|\bar{u}_2\|} \cdot \bar{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{k}$.
Pentru $\lambda_3 = 18$, se rezolvă sistemul liniar omogen

$$(A - \lambda_3 I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ adică}$$

$$\begin{cases} -16x - 4y &= 0 \\ -4x - 2y + 4z &= 0 \\ 4y - 16z &= 0 \end{cases}.$$

Rezultă $x = \alpha\,,\ y = -4\alpha\,,\ z = -\alpha\ \ (\alpha \in \mathbf{R}\,)$.
Atunci un vector propriu corespunzător lui λ_1 este de forma $\bar{v}_3 = \alpha(\bar{i} - 4\bar{j} - \bar{k})\,,\ \alpha \in \mathbf{R}^*$, iar pentru $\alpha = 1$ se obţine $\bar{u}_3 = \bar{i} - 4\bar{j} - \bar{k}$ cu lungimea $\|\bar{u}_3\| = \sqrt{1+16+1} = 3\sqrt{2}\,.$
Reţinem versorul $\bar{k}' = \frac{1}{\|\bar{u}_3\|} \cdot \bar{u}_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\bar{i} - \frac{4}{3\sqrt{2}}\bar{j} - \frac{1}{3\sqrt{2}}\bar{k}\,.$
Conform teoriei operatorilor liniari simetrici, baza $\{\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\}$ este ortonormată şi pozitiv orientată (vezi faptul că determinantul matricii de trecere de la baza $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ la baza $\{\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\}$ are valoarea 1).
Prin urmare, se face schimbarea de repere carteziene ortonormate

$$\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\} \longrightarrow \mathcal{R}' = \{O' = O; \bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\}\,,$$

dată prin $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ (rotaţie)
şi astfel, se obţine ecuaţia lui Γ relativ la noul reper cartezian ortonormat $\mathcal{R}'$:
$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_3(z')^2 - 2\left(\frac{2}{3}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{3\sqrt{2}}z'\right) -$
$-\left(\frac{1}{3}x' - \frac{4}{3\sqrt{2}}z'\right) + 2\left(-\frac{2}{3}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' - \frac{1}{3\sqrt{2}}z'\right) + 3 = 0$, adică
$\frac{(y')^2}{9} + \frac{(z')^2}{1} - \frac{1}{6}(x' - 1) = 0$ sau

$$x' - 1 = \frac{(y')^2}{\frac{9}{6}} + \frac{(z')^2}{\frac{1}{6}}\,.$$

În final, se face schimbarea de repere carteziene ortonormate

$$\mathcal{R}' = \{O' = O; \bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\} \longrightarrow \mathcal{R}'' = \{O''; \bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\}\,,$$

dată prin $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = I_3 \cdot \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (translaţie)
Ecuaţia cuadricei Γ relativ la reperul $\mathcal{R}''$:

$$x'' = \frac{(y'')^2}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2} + \frac{(z'')^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2}$$

reprezintă forma redusă (canonică) a ecuaţiei cuadricei Γ sau ecuaţia canonică a lui Γ. Din forma ecuaţiei canonice se observă că Γ este un paraboloid eliptic.
Reperul natural al lui Γ este reperul $\mathcal{R}''$, în raport cu care cuadrica are ecuaţia canonică de mai sus. Originea reperului natural, O'', are, relativ la reperul $\mathcal{R}'$, coordonatele $1, 0, 0$, adică $\overline{OO''} = \bar{i}' = \frac{2}{3}\bar{i} + \frac{1}{3}\bar{j} - \frac{2}{3}\bar{k}$.
Deci schimbarea de repere $\mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}''$ este dată de

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

(rototranslaţie)

11. Fie cuadrica $\Gamma : x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 4y + 1 = 0$, dată relativ la un reper cartezian ortonormat $\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$.
a) Arătaţi că Γ este o sferă şi găsiţi coordonatele centrului ei şi raza ei;
b) Determinaţi punctele din spaţiul E_3 care au puterea cea mai mică faţă de sfera Γ;
c) Determinaţi punctele din planul $\pi : x + z - 2 = 0$ care au puterea cea mai mică faţă de sfera Γ;
d) Determinaţi punctele de pe dreapta
$d : \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{-1}$ care au puterea cea mai mică faţă de sfera Γ;
e) Cercetaţi poziţia planului $\pi' : x+y+z-1 = 0$ faţă de sfera Γ şi, dacă este cazul, găsiţi coordonatele centrului cercului $\pi' \cap \Gamma$ şi raza lui;
f) Găsiţi ecuaţiile tangentei la cercul $\pi' \cap \Gamma$ în punctul $P(x_0, y_0, z_0) \in \pi' \cap \Gamma$.

Soluţie:

a) Ecuaţia lui Γ se scrie
$(x^2 - 12x + 36) + (y^2 - 4y + 4) + z^2 - 36 - 4 + 1 = 0$ sau
$(x - 6)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = (\sqrt{39})^2$ şi atunci Γ este o sferă de

rază $R=\sqrt{39}$ şi de centru $C\,(6,2,0)$.
b) Puterea punctului $M(x,y,z)\in E_3$ faţă de sfera Γ este numărul

$$p(M)=p(x,y,x)=MC^2-R^2=-39$$

Deci $\min\{p(M)|M\in E_3\}=-R^2=p(C)$, adică există un singur punct în spaţiu $M=C$ (centrul sferei) care are puterea faţă de Γ cea mai mică.
c) $\min\{p(M)|M\in\pi\}=\min\{(x-6)^2+(y-2)^2+z^2-39|x+z=2\}=\min\{(x-6)^2+(x-2)^2+(y-2)^2-39|x,y\in\mathbf{R}\}=$
$=(4-6)^2+(4-2)^2+(2-2)^2-39=-31=p(M(4,2,-2))$, pentru că expresia $(x-6)^2+(x-2)^2+(y-2)^2-39$ are valoarea minimă pentru $y-2=0$ şi $(x-6)^2+(x-2)^2=2x^2-16x+40=-\frac{\Delta}{4a}=8=$ minimă, adică $y=2$, $x=-\frac{b}{2a}=4$, $z=-2$.
Deci punctul din planul π care are puterea cea mai mică faţă de sfera Γ este $M(4,2,-2)$.
d) Ecuaţiile scalare parametrice ale dreptei d sunt
$$\begin{cases} x &= 1+t\\ y &= -2+3t\\ z &= 1-t\end{cases}.$$
Puterea unui punct $M(x,y,z)\in d$ faţă de sfera Γ este
$p(M)=(1+t-6)^2+(-2+3t-2)^2+(1-t)^2-39=11t^2-36t+3$ şi atunci valoarea sa minimă $-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{218}{11}$ se atinge pentru $t=-\frac{b}{2a}=\frac{18}{11}$, adică pentru $M(29/11,32/11,-7/11)$.
e) Distanţa de la centrul C al sferei Γ la planul π' este

$$\rho(C,\pi')=\frac{|6\cdot 1+2\cdot 1+0\cdot 1-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{7\sqrt{3}}{2}<R=\sqrt{39}\,.$$

Deci intersecţia dintre planul π' şi sfera Γ este un cerc γ de centru C' şi rază r. Mai mult, $r=\sqrt{R^2-(\rho(C,\pi'))^2}=\frac{2\sqrt{51}}{3}$.
Pentru a găsi coordonatele centrului cercului γ, C', mai întâi vom scrie ecuaţia unei drepte ce trece prin C şi este perpendiculară pe planul π', adică $\frac{x-6}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-0}{1}$.
Cum C' este chiar proiecţia lui C pe planul π', rezolvând sis-

temul $\begin{cases} x-6=y-2=z \\ x+y+z-1=0 \end{cases}$ se obţine $C^{'}(11/3,-1/3,-7/3)$.

f) Tangenta la cercul γ în punctul $P(x_0,y_0,z_0)\in\gamma$ se află la intersecţia planului $\pi^{'}$ cu planul tangent la sfera Γ în P. Deci are ecuaţiile

$$\begin{cases} x+y+z-1=0 \\ (x_0-6)x+(y_0-2)y+z_0z+(-6x_0-2y_0+1)=0 \end{cases}$$

12. Se consideră familia de conice dată de ecuaţia:

$x^2+2\lambda xy+\lambda y^2+2\lambda x+2y+\lambda+1=0$,$\lambda\in\mathbf{R}$

a) Să se determine λ pentru care cuadrica are centru.

b) Să se determine locul centrului cuadricei când λ variază.

Soluţie:

Pentru a determina centrul cuadricei, formăm sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}=2x+2xy+2\lambda=0 \\ \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}=2\lambda x+2\lambda y+2=0 \end{cases}$$

unde $F(x,y,z)=x^2+2\lambda xy+\lambda y^2+2\lambda x+2y+\lambda+1$.

Formăm sistemul :

$$\begin{cases} 2x+2\lambda y=-2\lambda \\ 2\lambda x+2\lambda y=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+\lambda y=-\lambda \\ \lambda x+\lambda y=-1 \end{cases}$$

$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{vmatrix}=\lambda-\lambda^2.$

Pentru a avea centru, trebuie ca $\Delta\neq 0$, deci valorile căutate la punctul a) sunt $\mathbf{R}\setminus\{0,1\}$. Pentru a rezolva sistemul, fie $\Delta_1=\begin{vmatrix} -\lambda & \lambda \\ -1 & \lambda \end{vmatrix}=-\lambda^2+\lambda$, $\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ \lambda & -1 \end{vmatrix}=-1+\lambda^2$, deci $x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-\lambda^2+\lambda}{\lambda-\lambda^2}=1$, $y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-1+\lambda^2}{\lambda-\lambda^2}=-1-\frac{1}{\lambda}$, $\lambda\in\mathbf{R}\setminus\{0,1\}$ deci locul geometric este format din dreapta $x=1$, mai puţin punctele $(1,-1)$, $(1,-2)$.

13. Să se găsească ecuaţiile generatoarelor rectilinii ce se pot duce prin punctul $P(-1/2,-1,-1)$, pe cuadrica :

$\Gamma : 4x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4xz + yz + 8x + 3y + 5z + 4 = 0.$

Soluţie:

Dacă $\overline{v} = v^1\overline{i} + v^2\overline{j} + v^3\overline{k}$ este vectorul director al unei generatoare rectilinii, atunci cele două condiţii ce trebuie indeplinite, conform teoriei pentru ca dreapta ce trece prin P şi are un vector director pe $\overline{v}$ să fie generatoare rectilinie se scriu:

(1) $(v^1, v^2, v^3) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1/2 \\ 2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = 0$

(2) $\left((-1/2, -1, -1) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1/2 \\ 2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} + (4, 3/2, 5/2) \right) \cdot$

$\cdot \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = 0$

Obţinem :

(1)' $4(v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2 + 4v^1v^2 + 4v^1v^3 + v^2v^3 = 0$

(2)' $2v^1 + v^2 = 0$

Inlocuind $(2)'$ în $(1)'$ obţinem $(v^3)^2 = v^2v^3$, deci avem două cazuri :

caz 1) $v^3 = 0$, $2v^1 + v^2 = 0$; alegând $v^2 = 2$, obţinem $\overline{a}_1 = (-1, 2, 0)$

caz 2) $v^3 = v^2$, $2v^1 + v^2 = 0$; alegând $v^2 = 2$, obţinem $\overline{a}_2 = (-1, 2, 2)$

Vom scrie acum pe rând ecuaţiile dreptelor ce trec prin P şi au ca vector director pe $\overline{a}_1$, respectiv $\overline{a}_2$. Deci cele două generatoare vor fi :

$d_1 : x = -t + 1/2;\ y = 2t - 1;\ z = -1$

$d^2 : x = -t + 1/2;\ y = 2t - 1;\ z = 2t - 1$

14. Să se afle ecuaţia planelor tangente la elipsoidul $2x^2 + y^2 + 3z^2 - 1 = 0$, perpendiculare pe dreapta

$d : x = y = z.$

Soluţie:

Ecuaţia generală a unui plan tangent la elipsoidul dat are forma :

$$2x_0x + y_0y + 3z_0z - 1 = 0.$$

Vectorul director al dreptei d fiind $\overline{a} = (1, 1, 1)$, dacă acest vector este perpendicular pe planul tangent, vom avea relaţia:

$$\frac{2x_0}{1} = \frac{y_0}{1} = \frac{3z_0}{1}.$$

De aici, ţinând seama că $\frac{y_0^2}{2} + y_0^2 + \frac{y_0^2}{3} - 1 = 0$ obţinem $\frac{11}{6}y_0^2 = 1$, deci $y_0 = \pm\sqrt{\frac{6}{11}}$.

Vom avea deci două puncte ale căror coordonate le determinăm din relaţiile de mai sus, $P_1(\sqrt{\frac{6}{44}}; \sqrt{\frac{6}{11}}; \sqrt{\frac{6}{99}})$ şi $P_2(-\sqrt{\frac{6}{44}}; -\sqrt{\frac{6}{11}}; -\sqrt{\frac{6}{99}})$ şi deci două plane tangente în punctele respective:

$\pi_1 : \sqrt{\frac{6}{11}}x + \sqrt{\frac{6}{11}}y + \sqrt{\frac{6}{11}}z - 1 = 0,$

$\pi_2 : -\sqrt{\frac{6}{11}}x - \sqrt{\frac{6}{11}}y - \sqrt{\frac{6}{11}}z - 1 = 0.$

15. Să se aducă la forma canonică, precizându-se schimbările necesare de coordonate, următoarea cuadrică:

$\Gamma : x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 10xz + 2x + 4y - 10z - 1 = 0.$

Soluţie:

Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & -2 & 2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ matricea asociată cuadricei în reperul iniţial.

Avem:

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & -2 & 2 \\ -5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

deci cuadrica este degenerată.

Calculăm valorile proprii al operatorului liniar asociat matricii simetrice A în baza canonică:

$$P(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -5 \\ 2 & -2-\lambda & 2 \\ -5 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3+36\lambda =$$

$=(\lambda-6)(\lambda+6)(-\lambda)$, deci valorile proprii sunt 6, -6 şi 0. Vom căuta acum să găsim o bază ortonormată formată din vectori proprii corespunzători valorilor proprii:

Caz 1) Pentru $\lambda=6$, vectorul $\overline{v}=(v^1,v^2,v^3)$ este vector propriu al valorii $\lambda=6$ dacă şi numai dacă $(A-6\cdot I)\cdot\overline{v}=\overline{0}$, unde I este matricea unitate. Transcriind în coordonate, obţinem sistemul:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -5 \\ 2 & -8 & 2 \\ -5 & 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -5v^1+2v^2-5v^3=0 \\ 2v^1-8v^2+2v^3=0 \\ -5v^1+2v^2-5v^3=0 \end{cases}$$

Considerând v^1,v^2 necunoscute principale şi v^3 necunoscută secundară obţinem $v^1=v^3$, $v^2=-v^3$. Luăm $v^3=1$ şi obţinem $\overline{\nu}_1=(1,-1,1)$. Mai departe, prin normare, obţinem $\overline{f}_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Caz 2) $\lambda=-6$. Procedând ca mai sus, obţinem sistemul:

$$\begin{cases} 7v^1+2v^2-5v^3=0 \\ 2v^1+4v^2+2v^3=0 \\ -5v^1+2v^2+7v^3=0 \end{cases}$$

Considerând v^1,v^2 necunoscute principale şi v^3necunoscută secundară obţinem $v^1=v^3$, $v^2=-v^3$. Luăm $v^3=1$ şi obţinem vectorul $\overline{\nu}_2=(1,-1,1)$. Mai departe, împărţind prin norma lui $\overline{\nu}_3$, obţinem $\overline{f}_2=(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$.

Caz 3) Pentru $\lambda = 0$, procedând ca mai sus obţinem sistemul :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & -2 & 2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} v^1 + 2v^2 - 5v^3 = 0 \\ 2v^1 - 2v^2 + 2v^3 = 0 \\ -5v^1 + 2v^2 + v^3 = 0 \end{cases}.$$

Alegem v^1, v^2 necunoscute principale, v^3 necunoscută secundară. Obţinem $v^1 = v^3, v^2 = \frac{v^3}{2}$. Dând valoarea $v^3 = 2$, obţinem vectorul $\overline{v}_3 = (1, 2, 1)$. Mai departe normând pe $\overline{v}_3$, obţinem vectorul $\overline{f}_3 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$.

Efectuăm acum schimbarea de reper
$\{O, \overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\} \rightarrow \{O, \overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3\}$.
Coordonatele se vor schimba după regula:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Introducând aceste relaţii în ecuaţia cuadricei, obţinem:

$$6(x')^2 - 6(y') + 2(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{3}}y' + \frac{1}{\sqrt{6}}z') + 4(-\frac{1}{\sqrt{3}}y' + \frac{2}{\sqrt{6}}z') - 10(-\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{3}}y' + \frac{1}{\sqrt{6}}z') - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$6(x')^2 - 6(y')^2 + \frac{12}{\sqrt{2}}x' - \frac{12}{\sqrt{3}}y' - 1 = 0 \Rightarrow$$

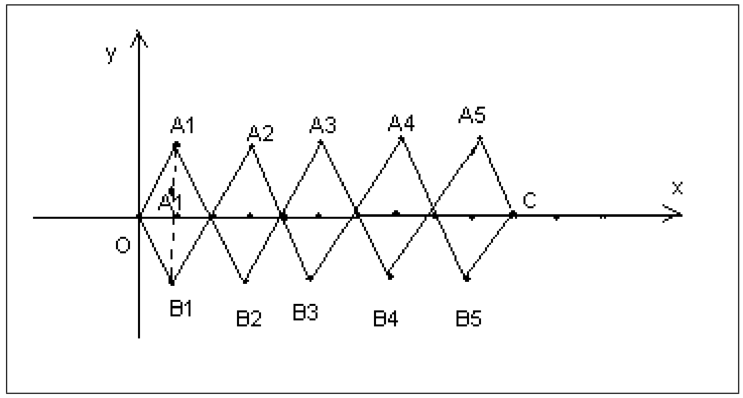
$$6(x' + \frac{1}{\sqrt{2}})^2 - 6(y' + \frac{1}{\sqrt{3}})^2 - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$(x' + \frac{1}{\sqrt{2}})^2 - (y' + \frac{1}{\sqrt{3}})^2 - \frac{1}{3} = 0.$$

Efectuând schimbarea de reper sugerată de relaţiile între coordonate:

$$\begin{cases} x'' = x' + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y'' = y' + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ z'' = z' \end{cases},$$

adică $\{O, \overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3\} \rightarrow \{O'(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0), \overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3\}$,



obţinem forma canonică

$$(x'')^2 - (y'')^2 - \frac{1}{3} = 0$$

deci cuadrica dată este un cilindru hiperbolic.

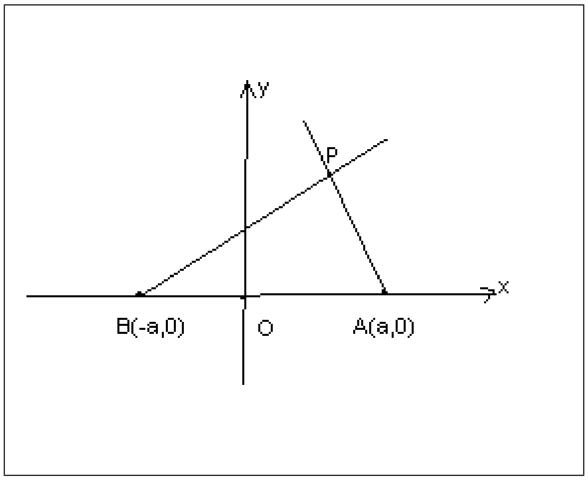
16. Pe figură este reprezentat un mecanism cu articulaţii care constă din barele OA_1, OB_1, CA_5, CB_5 de lungime a şi din barele $A_iB_{i+1}, A_{i+1}B_i$ de lungime $2a$. Atunci când C se apropie sau se depărtează de O, să se găsească locurile geometrice ale articulaţiilor A_i şi B_i.

    Soluţie:

    Considerând reperul ca în figură şi notând $||\overrightarrow{OA_1'}|| = \lambda > 0$, parametru, punctele articulaţiilor vor avea coordonatele $A_1(\lambda, \sqrt{a^2 - \lambda^2})$, $B_1(\lambda, -\sqrt{a^2 - \lambda^2})$, $A_2(3\lambda, \sqrt{a^2 - \lambda^2})$, $B_2(3\lambda, -\sqrt{a^2 - \lambda^2})$, ...

    Eliminând parametrul λ dintre cele două coordonate ale punctelor A_i şi B_i se obţine:

    - punctele A_1 şi B_1 descriu câte un sfert din cercul de ecuaţie $(x)^2 + (y)^2 - a^2 = 0$;



- punctele A_2 şi B_2 descriu câte un sfert din elipsa de ecuaţie $\frac{(x)^2}{(3a)^2} + \frac{(y)^2}{a^2} - 1 = 0$;

- punctele A_i şi B_i descriu câte un sfert din elipsa de ecuaţie $\frac{(x)^2}{[(2i-1)a]^2} + \frac{(y)^2}{a^2} - 1 = 0$,$(i = 3, 4, 5)$.

17. Două bare articulate în punctele fixe A şi B se rotesc în sensuri opuse intersectându-se mereu în punctul mobil P şi formând în orice moment cu direcţia fixă AB unghiuri complementare. Să se afle locul geometric al punctului P.

Soluţie:

Considerând reperul ca în figură, ecuaţiile celor două bare sunt:

$(AP) : \; y = (x - a)ctg\alpha$

$(BP) : \; y = (x + a)tg\alpha$

Eliminând, prin înmulţire, parametrul α, se obţine ecuaţia locului geometric, $x^2 - y^2 - a^2 = 0$, care este ecuaţia unei hiperbole echilatere. Evident, în mod practic, punctul P descrie două arce simetrice din această hiperbolă.

8.2 Probleme propuse spre rezolvare

1. Să se reducă la forma canonică şi să se reprezinte grafic conica de ecuaţie:

$$2x^2 - 6xy + 10y^2 - 8x + 12y + 2 = 0.$$

2. Să se reducă la forma canonică şi să se reprezinte grafic conica de ecuaţie:

$$7x^2 - 8xy + y^2 - 6x + 16y + 1 = 0.$$

3. Să se determine α astfel încât ecuaţia

$$2x^2 - xy - y^2 + \alpha x - 5y + 14 = 0$$

să reprezinte ecuaţia a două drepte.

4. Să se reducă la forma canonică şi să se reprezinte grafic conica de ecuaţie:

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0.$$

5. Să se determine α astfel încât ecuaţia

$$4x^2 + 12xy + \alpha y^2 + 6x + 9y + 2 = 0$$

să reprezinte ecuaţia a două drepte.

6. Se dă conica $\mathbf{\Gamma}$ de ecuaţie:

$$x^2 - 5xy + 6y^2 + x + 3y - 4 = 0.$$

Să se scrie ecuaţia tangentei la conică în punctul de coordonate $(1, 1)$.

7. Să se determine coordonatele centrului O' al cuadricei de ecuaţie:

$$x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy + 2xz - 2yz - 4x + 8y - 12z + 14 = 0.$$

Să se efectueze o translaţie în centrul cuadricei şi să se scrie ecuaţia cuadricei raportată la noul sistem translatat $O'x'y'z'$.

8. Să se calculeze distanţa dintre punctele de intersecţie ale dreptei d de ecuaţii parametrice:

$$x(t) = t,\ y(t) = 2 - t,\ z(t) = -3 + 2t$$

cu cuadrica de ecuaţie:

$$x^2 - y^2 + z^2 - 4y + 6z + 9 = 0.$$

9. Să se stabilească natura cuadricelor de ecuaţie:

$$9x^2(1+\lambda) - 16y^2(\lambda - 3) + 36z^2(\lambda - 2) - 18x(1+\lambda) - 64y(\lambda - 3) - \\ -55\lambda + 57 = 0,\ \lambda \in \mathbf{R}.$$

10. Fie paraboloidul hiperbolic de ecuaţie:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = z$$

şi punctul $M_0(0, 2, -1)$.

1) Să se scrie ecuaţiile generatoarelor rectilinii care trec prin M_0.

2) Să se calculeze măsura unghiului dintre aceste generatoare.

Partea III

Geometrie diferenţială

Capitolul 9

Curbe

Fie $\mathbf{R}^n$ spaţiul euclidian canonic cu n dimensiuni, $T_P\mathbf{R}^n$ spaţiul tangent în punctul P la $\mathbf{R}^n$ şi $J_P : \mathbf{R}^n \to T_P\mathbf{R}^n$ izomorfismul canonic. Notăm cu I un interval deschis (alteori închis, semiînchis sau reuniune de intervale) din $\mathbf{R}$.

Definiţia 9.1. O funcţie diferenţiabilă $\alpha : I \to \mathbf{R}^n$ se numeşte curbă parametrizată (drum) şi se notează cu (I, α).

Imaginea $\alpha(I) \subset \mathbf{R}^n$ se numeşte suportul curbei parametrizate (a drumului). α se numeşte parametrizare, iar $t \in I$ se numeşte parametru.

Din definiţia lui $\alpha(I)$ rezultă echivalenţa:

$$P \in \alpha(I) \Leftrightarrow \exists t \in I, P \in \alpha(t).$$

Dacă raportăm pe $\mathbf{R}^n$ la baza canonică, atunci func ţia α este caracterizată prin coordonatele ei euclidiene

$$\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)), t \in I$$

În contextul în care α este numită curbă parametrizată, relaţiile $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, ..., $x_n = x_n(t)$ se numesc ecuaţiile parametrice ale curbei.

Definiţia 9.2. Un punct P al lui α se numeşte simplu dacă există o singură valoare $t \in I$ astfel ca $\alpha(t) = P$. Dacă există mai multe valori distincte t astfel ca $\alpha(t) = P$, atunci punctul P se numeşte multiplu.

Definiţia 9.3. Dacă funcţia $\alpha : I \to \mathbf{R}^n$ este diferenţiabilă şi injectivă, atunci (I, α) se numeşte curbă parametrizată simplă.

Să presupunem că avem o funcţie de tipul $\alpha : [a, b] \to \mathbf{R}^n$. Această funcţie se numeşte diferenţiabilă dacă poate fi extinsă diferenţiabil la un interval deschis ce conţine $[a, b]$.

Definiţia 9.4. Dacă pentru funcţia diferenţiabilă $\alpha : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ are loc $\alpha(a) = \alpha(b)$, atunci (I, α) se numeşte curbă parametrizată închisă.

O curbă parametrizată închisă pentru care restricţia la $[a, b)$ este injectivă se numeşte curbă parametrizată simplă şi închisă.

O curbă parametrizată (I, α) se numeşte periodică dacă există un număr $T > 0$, astfel încât $t + T \in I$, $\alpha(t + T) = \alpha(t)$, $\forall\ t \in I$. Cel mai mic număr T care se bucură de această proprietate se numeşte perioada lui α. Se poate demonstra că imaginea unei curbe parametrizate închise admite o reprezentare parametrică periodică.

Definiţia 9.5. Un punct $P = \alpha(t)$ al drumului suport al curbei parametrizate (I, α) în care $\overrightarrow{\alpha'(t)} \neq \overrightarrow{0}$ se numeşte punct regulat (al curbei). Dacă $\overrightarrow{\alpha'(t)} \neq \overrightarrow{0}$, $\forall\ t \in I$, atunci curba (I, α) se numeşte curbă parametrizată regulată.

Dacă P este un punct regulat, atunci punctul P şi vectorul $\overrightarrow{\alpha'(t)}$ determină o dreaptă care apare ca limita dreptei PQ când $P = \alpha(t)$ este fix, iar Q tinde către P de-a lungul drumului suport al curbei.

Definiţia 9.6. Submulţimea $\mathcal{C} \subset \mathbf{R}^n$ se numeşte curbă (subvarietate unu dimensională) dacă pentru orice $M \in \mathcal{C}$, există o curbă parametrizată regulată (I, α) al cărei suport $\alpha(I)$ este o vecinătate deschisă a lui M în $\mathcal{C}$, iar aplicaţia $\alpha : I \to \alpha(I)$ este homeomorfism; curba parametrizată (I, α) cu această proprietate se numeşte parametrizare locală a curbei $\mathcal{C}$ în vecinătatea punctului M; dacă $\alpha(I) = \mathcal{C}$, parametrizarea (I, α) se numeşte globală, iar $\mathcal{C}$ se numeşte curbă simplă ($\alpha(I) \subseteq \mathcal{C}$ se mai numeşte arc elementar de curbă).

Definiţia 9.7. Fie P un punct regulat al curbei parametrizate (I, α). Dreapta care trece prin P şi are ca vector director pe $\overrightarrow{\alpha'(t)}$

se numeşte tangenta la drumul suport al curbei (I, α) în P (o vom numi în continuare tangenta la curbă).

Definiţia 9.8. Hiperplanul care trece prin P şi are drept vector normal pe $\overrightarrow{\alpha'(t)}$ se numeşte hiperplan normal la drumul suport al curbei parametrizată (I, α) în P (îl vom numi în continuare hiperplan normal la curbă).

Pentru elementele descrise anterior avem următoarele ecuaţii:

- tangenta

$$\frac{x_1 - x_1(t)}{x_1'(t)} = \frac{x_2 - x_2(t)}{x_2'(t)} = \cdots = \frac{x_n - x_n(t)}{x_n'(t)},$$

-hiperplanul normal

$$(x_1 - x_1(t))\, x_1'(t) + (x_2 - x_2(t))\, x_2'(t) + \cdots + (x_n - x_n(t))\, x_n'(t) = 0\,.$$

Un punct al unei curbe poate să nu fie regulat.

Definiţia 9.9. Un punct $P = \alpha(t) \in \alpha(I)$ corespunzător unei valori a lui t pentru care $\overrightarrow{\alpha'(t)} = 0$ se numeşte punct singular (al curbei).

Definiţia 9.10. Fie P un punct singular de ordinul m. Dreapta determinată de punctul P şi vectorul $\overrightarrow{\alpha^{(m)}(t)}$ se numeşte tangenta la drumul suport al curbei (I, α) în punctul P.

Hiperplanul care trece prin P şi are drept vector normal pe $\overrightarrow{\alpha^{(m)}(t)}$ se numeşte hiperplan normal la drumul suport al curbei (I, α) în P.

Sumarul definiţiei 9.10. este următorul:

tangenta drumului suport al curbei în punctul P are ecuaţia:

$$\frac{x_1 - x_1(t)}{x_1^{(m)}(t)} = \frac{x_2 - x_2(t)}{x_2^{(m)}(t)} = \cdots = \frac{x_n - x_n(t)}{x_n^{(m)}(t)},$$

iar hiperplanul normal la drumul suport al curbei în punctul P are ecuaţia:

$$(x_1 - x_1(t))\, x_1^{(m)}(t) + (x_2 - x_2(t))\, x_2^{(m)}(t) + \cdots + (x_n - x_n(t))\, x_n^{(m)}(t) = 0.$$

Planul osculator.

Fie $\mathcal{C}$ o curbă în $\mathbf{R}^3$, $M(x,y,z)$ şi $M_1(x_1,y_1,z_1)$ două puncte pe drumul suport al lui $\mathcal{C}$ şi $\overline{\tau}$ versorul tangentei la drumul suport al curbei în punctul M.

Definiţia 9.11. Fie planul $\mathcal{P}$ ce conţine pe $\overline{\tau}$ şi M_1. Planul π, ce se obţine când $M_1 \to M$, se numeşte planul osculator la drumul suport al curbei $\mathcal{C}$ în punctul M (îl vom numi plan osculator la curbă).

Teorema 9.1. Dacă $\overline{r} = \overline{r(t)}$ este ecuaţia vectorială a curbei $\mathcal{C}$, iar ecuaţia tangentei în punctul t la drumul suport al curbei $\mathcal{C}$ este dată vectorial de $\overline{R} = \overline{r(t)} + \lambda\frac{d\overline{r}}{dt}$, $\left|\frac{d\overline{r}}{dt}\right| \neq 0$, atunci ecuaţia planului osculator este dată de produsul mixt

$$\left(\left(\overline{R} - \overline{r}\right), \left(\frac{d\overline{r}}{dt} \times \frac{d^2\overline{r}}{dt^2}\right)\right) = 0.$$

Completare 9.1. Dacă curba $\mathcal{C}$ este dată prin ecuaţiile ei parametrice, planul osculator este definit de

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0,$$

sau folosind numai diferenţialele se obţine

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0.$$

Completare 9.2. Raţionamentul de mai sus funcţionează dacă $d\overline{r}$ nu este paralel cu $d^2\overline{r}$. Să arătăm că dacă acest fapt se întâmplă, curba $\mathcal{C}$ are drept suport geometric (drum suport) o dreaptă. Avem $d^2\overline{r} = \lambda d\overline{r}$, deci $x'' = \alpha x', y'' = \alpha y', z'' = \alpha z'$, sau $x = a_1 + b_1 e^{\alpha t}$, $y = a_2 + b_2 e^{\alpha t}$, $z = a_3 + b_3 e^{\alpha t}$ sau

$$\frac{x - a_1}{b_1} = \frac{y - a_2}{b_2} = \frac{z - a_3}{b_3} ,$$

deci o dreaptă.

Completare 9.3. Dacă o curbă are toate punctele suportului său geometric (drumul suport) situate în planul osculator, acesta este o curbă plană.

Binormala.

Fie $\mathcal{C}$ o curbă în $\mathbf{R}^3$ şi $M(x, y, z)$ $\in$drumului suport al lui $\mathcal{C}$.

Definiţia 9.12. Se numeşte binormala în punctul M la drumul suport al curbei $\mathcal{C}$, dreapta $\mathbf{B}$ perpendiculară pe planul osculator (o vom numi binormala la curbă).

Teorema 9.2. Ecuaţiile binormalei $\mathbf{B}$ în punctul M la drumul suport al curbei $\mathcal{C}$ sunt

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}} = \frac{Y-y}{\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}} = \frac{Z-z}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}.$$

Completare 9.4. Versorul binormalei $\overline{\beta}$ este dirijat în aşa fel încât $\left(\overline{\tau}, \overline{\nu}, \overline{\beta}\right)$ formează un triedru drept ($\overline{\nu}$ este versorul normalei principale). Avem deci relaţiile

$$\overline{\tau} = \overline{\nu} \times \overline{\beta},\ \overline{\nu} = \overline{\beta} \times \overline{\tau},\ \overline{\beta} = \overline{\tau} \times \overline{\nu}\ .$$

Completare 9.5. Ecuaţia vectorială a binormalei este

$$\overline{R} - \overline{r} = \lambda \left(\frac{d\overline{r}}{dt} \times \frac{d^2\overline{r}}{dt^2} \right).$$

Normala principală.

Fie $\mathcal{C}$ o curbă strâmbă, M $\in$drumului suport al curbei $\mathcal{C}$, $\overline{\tau}$ versorul tangentei, $\mathcal{N}$ planul normal şi π planul osculator la drumul suport al curbei în punctul M.

Definiţia 9.13. Se numeşte normală principală la drumul suport al curbei $\mathcal{C}$ în punctul M, normala la drumul suport al curbei $\mathcal{C}$, drum suport situat în planul osculator dirijat după $d^2\overline{r}$ (o vom numi normala principală la curbă).

Notăm cu $\overline{\nu}$ versorul normalei principale.

Teorema 9.3. Ecuaţiile normalei principale sunt

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ m & n \end{vmatrix}} = \frac{Y-y}{\begin{vmatrix} z' & x' \\ n & l \end{vmatrix}} = \frac{Z-z}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ l & m \end{vmatrix}},$$

unde $l = \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}$, $m = \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}$, $n = \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}$,
toate derivatele fiind calculate în punctul $M(x, y, z)$.

Observaţia 9.1. Normala principală **n** este intersecţia între planul normal

$$x'(X - x) + y'(Y - y) + z'(Z - z) = 0$$

şi planul osculator

$$l(X - x) + m(Y - y) + n(Z - z) = 0.$$

Planul rectificant.

Fie $\mathcal{C}$ o curbă în $\mathbf{R}^3$ şi $M(x, y, z) \in$ drumului suport al curbei $\mathcal{C}$.

Definiţia 9.14. Planul ce trece prin M şi este perpendicular pe normala principală se numeşte planul rectificant în punctul M al drumului suport al curbei $\mathcal{C}$ (sau plan rectificator al curbei).

Teorema 9.4. Ecuaţia planului rectificant în punctul M este

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x' & y' & z' \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0,$$

unde $l = \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}$, $m = \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}$, $n = \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}$,
toate derivatele fiind calculate în punctul M.

Completare 9.6. Planul normal $\mathcal{N}$, planul osculator π şi planul rectificant $\mathcal{R}$ formează un sistem de trei plane rectangulare două câte două.

Completare 9.7. Ecuaţia vectorială a planului rectificant este

$$\left(\overline{R} - \overline{r}, \frac{d\overline{r}}{dt} \times \left(\frac{d\overline{r}}{dt} \times \frac{d^2\overline{r}}{dt^2}\right)\right) = 0\ .$$

Elementul de arc al unei curbe în spaţiu.

Elementul de arc al unei curbe $\mathcal{C}$ este dat de

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}\,.$$

Teorema 9.5. **1.** Dacă $\mathcal{C}$ este definită printr-o reprezentare parametrică

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \ , t \in I,$$

atunci

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt.$$

2. Dacă $\mathcal{C}$ este definită vectorial $\overline{r} = \overline{r(t)}$, $t \in I$,

$$ds = |d\overline{r}| = \left|\frac{d\overline{r}}{dt}\right| dt.$$

Din definiţiile date anterior, rezultă:

1. planul normal $\mathcal{N}$ este determinat de versorul normalei principale $\overline{\nu}$ şi versorul binormalei $\overline{\beta}$;

2. planul osculator este determinat de versorul tangentei $\overline{\tau}$ şi versorul normalei principale $\overline{\nu}$;

3. planul rectificant (sau rectificator) este determinat de versorii tangentei $\overline{\tau}$ şi binormalei $\overline{\beta}$.

Triedrul format de $\left(\overline{\tau}, \overline{\nu}, \overline{\beta}\right)$ se numeşte triedrul Frenet.

Curbură.

Indicator sferic. Se consideră o curbă $\mathcal{C}$ cu drumul suport situat în $\mathbf{R}^3$şi o sferă $\mathcal{S}$ de rază 1, cu centrul în O. Fie M_1şi M_2 două puncte pe drumul suport al lui $\mathcal{C}$ şi fie $\overline{\tau}$ versorul tangentei la drumul suport al curbei $\mathcal{C}$ într-un punct M situat pe arcul M_1M_2 între cele două puncte. Fie $\overline{\tau'}$ un versor cu originea în O echipolent cu $\overline{\tau}$, deci cu extremitatea sa pe sfera $\mathcal{S}$ în punctul M'. Când M parcurge arcul M_1M_2, de la M_1la M_2, punctul M' descrie pe sferă un arc $M_1'M_2'$.

Definiţia 9.15. Arcul $M_1'M_2'$ se numeşte indicator sferic al tangentelor arcului M_1M_2 de pe drumul suport al lui $\mathcal{C}$.

Definiţia 9.16. Unghiul făcut de cele două tangente în M_1 şi M_2 este egal cu unghiul $\widehat{M_1'OM_2'}$ şi se numeşte unghiul de contingenţă al tangentelor în M_1 şi M_2.

Curbură. Dacă notăm cu $s_{M_2} - s_{M_1}$ lungimea arcului M_1M_2 şi $\sigma_{M_2'} - \sigma_{M_1'}$ lungimea arcului $M_1'M_2'$avem:

Definiţia 9.17. Raportul

$$K_m = \frac{\sigma_{M_2'} - \sigma_{M_1'}}{s_{M_2} - s_{M_1}}$$

se numeşte curbura medie a arcului M_1M_2.

Definiţia 9.18. Când $M_2 \to M_1 = M$, curbura K_m are limita (dacă există) dată de

$$K = \frac{d\sigma}{ds}$$

şi se numeşte curbura drumului suport al curbei $\mathcal{C}$ în punctul M (o vom numi în continuare curbura curbei).

Definiţia 9.19. Inversa curburii

$$\rho = \frac{1}{K}$$

se numeşte raza de curbură ρ a drumului suport al curbei $\mathcal{C}$ în punctul M (o vom numi în continuare raza de curbură a curbei).

Teorema 9.6. Curbura curbei $\mathcal{C}$ într-un punct M al drumului său suport este dată de

$$\frac{1}{K} = \frac{d\theta}{ds} ,$$

unde $d\theta$ este diferenţiala unghiului de contingenţă al tangentelor.

Torsiune.

Indicatorul sferic al binormalelor la drumul suport al unei curbe $\mathcal{C}$ se construieşte în mod analog ca în cazul tangentelor. Dacă $\overline{\beta}$ este versorul binormalei la drumul suport al curbei $\mathcal{C}$ într-un punct M situat între punctele M_1 şi M_2, fie $\overline{\beta'}$ un versor cu originea în O, echipolent cu $\overline{\beta}$, deci cu extremitatea sa pe sfera $\mathcal{S}$ în punctul M''. Când M parcurge arcul M_1M_2 de la M_1la M_2, punctul M'' descrie pe sferă un arc $M_1''M_2''$.

Definiţia 9.20. Arcul $M_1''M_2''$ se numeşte indicator sferic al binormalelor arcului M_1M_2 de pe $\mathcal{C}$.

Definiţia 9.21. Unghiul făcut de cele două binormale în M_1 şi M_2 este egal cu unghiul $\widehat{M_1''OM_2''}$ şi se numeşte unghiul de contingenţă al binormalelor în M_1 şi M_2.

Dacă notăm cu $s_{M_2} - s_{M_1}$ lungimea arcului M_1M_2 şi unghiul de contingenţă $\varphi_2 - \varphi_1$ al binormalelor, avem:

Definiţia 9.22. Raportul

$$\frac{1}{T_m} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{s_{M_2} - s_{M_1}}$$

se numeşte torsiunea medie a arcului M_1M_2.

Definiţia 9.23. Când $M_2 \to M_1 = M$, $\frac{1}{T_m}$ are limita $\frac{1}{T}$ (dacă există) dată de

$$\frac{1}{T} = \frac{d\varphi}{ds},$$

care se numeşte torsiunea drumului suport al curbei $\mathcal{C}$ în punctul M (o vom numi în continuare torsiunea curbei).

Definiţia 9.24. Inversa torsiunii în punctul M

$$T = \frac{ds}{d\varphi}$$

se numeşte raza de torsiune a drumului suport al curbei $\mathcal{C}$ în punctul M (o vom numi în continuare raza de torsiune a curbei).

Formulele lui Frenet.

Fie $\mathcal{C}$ o curbă şi M un punct situat pe drumul său suport din $\mathbf{R}^3$. Folosind notaţiile precedente, adică $\overline{\tau}$ reprezintă versorul tangentei, $\overline{\nu}$ versorul normalei principale, iar $\overline{\beta}$ versorul binormalei, are loc următorul rezultat.

Teorema 9.7.Între versorii triedrului Frenet, $\frac{1}{\rho}$ şi $\frac{1}{T}$ există următoarele relaţii:

1. $\frac{d\overline{\tau}}{ds} = \frac{\overline{\nu}}{\rho}$,
2. $\frac{d\overline{\beta}}{ds} = -\frac{\overline{\nu}}{T}$,
3. $\frac{d\overline{\nu}}{ds} = -\frac{\overline{\tau}}{\rho} + \frac{\overline{\beta}}{T}$,

numite formulele lui Frenet.

Aplicaţii ale formulelor Frenet.

1. Drumul suport al unei curbe $\mathcal{C}$, situat în $\mathbf{R}^3$ este o dreaptă dacă şi numai dacă

$$\frac{1}{\rho} = 0.$$

2. O curbă este "plană" dacă şi numai dacă

$$\frac{1}{T} = 0.$$

Observaţia 9.2. O curbă plană are drept plan osculator la drumul său suport chiar planul acestuia. Torsiunea este nulă, $\frac{1}{T} = 0$. În acest caz, formulele Frenet devin

$$\frac{d\overline{\tau}}{ds} = \frac{\overline{\nu}}{\rho}, \frac{d\overline{\nu}}{ds} = -\frac{\overline{\tau}}{\rho}.$$

Expresia analitică a curburii.

Din prima formulă a lui Frenet avem: $\frac{d\overline{\tau}}{ds} = \frac{\overline{\nu}}{\rho}$, $\frac{d\overline{\tau}}{ds} = \frac{d^2\overline{r}}{ds^2}$, deci $\overline{\nu} = \rho\frac{d^2\overline{r}}{ds^2}$ aşadar

$$\overline{\beta} = \overline{\tau} \times \overline{\nu} = \rho\overline{\tau} \times \frac{d^2\overline{r}}{ds^2} = \rho\frac{d\overline{r}}{ds} \times \frac{d^2\overline{r}}{ds^2} \tag{9.1}$$

adică

$$\frac{1}{\rho} = \left|\frac{d\overline{r}}{ds} \times \frac{d^2\overline{r}}{ds^2}\right|$$

(lucru care se obţine luând modulul relaţiei (9.1) şi ţinând cont că $\left|\overline{\beta}\right| = 1$).

Expresia analitică a torsiunii.

Pornind de la a treia formulă Frenet

$$\frac{d\overline{\nu}}{ds} = -\frac{\overline{\tau}}{\rho} + \frac{\overline{\beta}}{T},$$

avem

$$\left(\overline{\beta}, \frac{d\overline{\nu}}{ds}\right) = \frac{1}{T}\left(\overline{\beta}, \overline{\beta}\right) - \frac{1}{\rho}\left(\overline{\tau}, \overline{\beta}\right).$$

Dar $\left(\overline{\beta}, \overline{\beta}\right) = 1$ şi $\left(\overline{\tau}, \overline{\beta}\right) = 0$, rezultă

$$\left(\overline{\beta}, \frac{d\overline{\nu}}{ds}\right) = \frac{1}{T}, \ \overline{\beta} = \overline{\tau} \times \overline{\nu} = \frac{d\overline{r}}{ds} \times \overline{\nu}. \tag{9.2}$$

Avem $\overline{\beta} = \frac{d\overline{r}}{ds} \times \left(\rho \frac{d\overline{\tau}}{ds}\right) = \rho \left(\frac{d\overline{r}}{ds} \times \frac{d^2\overline{r}}{ds^2}\right)$ şi
$\overline{\nu} = \rho \frac{d\overline{\tau}}{ds} = \rho \frac{d^2\overline{r}}{ds^2}$; $\frac{d\overline{\nu}}{ds} = \frac{d\rho}{ds}\frac{d^2\overline{r}}{ds^2} + \rho \frac{d^3\overline{r}}{ds^3}$.
Înlocuind în (9.2) pe $\overline{\beta}$ şi $\frac{d\overline{\nu}}{ds}$ se obţine

$$\left(\rho\left(\frac{d\overline{r}}{ds} \times \frac{d^2\overline{r}}{ds^2}\right), \frac{d\rho}{ds}\frac{d^2\overline{r}}{ds^2} + \rho\frac{d^3\overline{r}}{ds^3}\right) = \frac{1}{T}$$

care ne dă expresia torsiunii.

9.1 Probleme rezolvate

1. Curba (C) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = z^2$, $z > 0$
   reprezintă un cerc în $\mathbf{R}^3$. Să se determine:
   i) reprezentarea parametrică a curbei C;
   ii) reprezentarea analitică explicită a curbei C;
   iii) ecuaţia vectorială a lui C.

   Soluţie:

   i) Din cele două ecuaţii rezultă că $2z^2 = a^2 \Rightarrow z^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow z = \frac{a}{\sqrt{2}}\ (z > 0)$. Din $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{2}}\cos\theta$, $y = \frac{a}{\sqrt{2}}\sin\theta$, unde $\theta \in [0, 2\pi)$, $a > 0$.
   ii) Din prima ecuaţie a lui C rezultă $z^2 = a^2 - x^2 - y^2$, deci $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. Din a doua ecuaţie a lui C avem $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Folosind reprezentarea parametrică, variabilele x şi y au următorul domeniu:
   $(x, y) \in \left[-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right] \times \left[-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right]$.
   iii) Ecuaţia vectorială este dată de $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$, adică
   $\overline{r}(\theta) = \frac{a}{\sqrt{2}}\left(\cos\theta\overline{i} + \sin\theta\overline{j} + \overline{k}\right)$, $\theta \in [0, 2\pi)$.

2. Locul geometric descris de un punct $M(x, y, z)$ ce se mişcă cu viteză constantă pe o dreaptă d, care se roteşte în jurul unei drepte Δ paralele cu d se numeşte *elice circulară*. Din definiţie rezultă ecuaţiile elicei

   $$x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ z = ht,\ t \in \mathbf{R}.$$

Să se determine tangenta la elice în punctul $t = \pi/4$.

Soluţie:

Ecuaţia tangentei la curba C, dată parametric, în punctul t este

$$\frac{X - x(t)}{x^{'}(t)} = \frac{Y - y(t)}{y^{'}(t)} = \frac{Z - z(t)}{z^{'}(t)}\,,\ (x^{'})^2 + (y^{'})^2 + (z^{'})^2 \neq 0$$

În cazul nostru avem
$x^{'}(t) = -R\sin t,\ y^{'}(t) = R\cos t,\ z^{'}(t) = h$, deci
$x^{'}(\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2}R,\ y^{'}(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}R,\ z^{'}(\pi/4) = h$, iar
$x(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}R,\ y(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}R,\ z(\pi/4) = \frac{h}{4}\pi$.
Ecuaţia tangentei este:

$$\frac{2X - \sqrt{2}R}{-\sqrt{2}R} = \frac{2Y - \sqrt{2}R}{\sqrt{2}R} = \frac{4Z - h\pi}{4h}$$

3. Să se scrie ecuaţia tangentei la curba C, definită de intersecţia cilindrilor $x^2 = y$, $y^2 = z$, în punctul $(1, 1, 1)$.

Soluţie:

Dacă curba C este dată implicit de ecuaţiile

$$F(x, y, z) = 0\,,\ H(x, y, z) = 0\,,\ (x, y, z) \in D \subset \mathbf{R}^3\,,$$

atunci ecuaţia tangentei este dată de

$$\frac{X - x}{A} = \frac{Y - y}{B} = \frac{Z - z}{C}\,,$$

unde $A = \frac{D(F,H)}{D(y,z)}$, $B = \frac{D(F,H)}{D(z,x)}$, $C = \frac{D(F,H)}{D(x,y)}$, A, B, C fiind calculaţi în (x, y, z) şi $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.
Avem ecuaţiile curbei C date implicit:
$F(x, y, z) = x^2 - y = 0$, $H(x, y, z) = y^2 - z = 0$.
Atunci $A = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial H}{\partial y} & \frac{\partial H}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2y & -1 \end{vmatrix} = 1$,

$$B = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial z} & \frac{\partial H}{\partial x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2x \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2x\,,$$

$$C = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial H}{\partial x} & \frac{\partial H}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & -1 \\ 0 & 2y \end{vmatrix} = 4xy\,.$$

În punctul $(1,1,1)$ avem $A = 1$, $B = 2$, $C = 4$ şi atunci ecuaţia tangentei la C în punctul $(1,1,1)$ este

$$\frac{X-1}{1} = \frac{Y-1}{2} = \frac{Z-1}{4}\,.$$

4. Să se scrie ecuaţia planului normal la curba

$$(C)\,:\, x = t^2,\, y = t^3,\, z = e^t\,,\ t \in \mathbf{R}\,,$$

în punctul $t = 1$.

Soluţie:

Pentru o curbă C definită parametric, ecuaţia planului normal este

$$(X-x)x^{'} + (Y-y)y^{'} + (Z-z)z^{'} = 0\,.$$

Avem $x^{'} = 2t$, $y^{'} = 3t^2$, $z^{'} = e^t$, $t \in \mathbf{R}$, şi atunci ecuaţia planului normal la curbă în $t = 1$ este
$2(X-1) + 3(Y-1) + e(Z-e) = 0\,.$

5. Să se scrie ecuaţia planului normal la curba C în punctul $(1,1,1)$, curbă definită de intersecţia cilindrului $z^2 = x$ cu paraboloidul $x^2 + y^2 = 2z$.

Soluţie:

Avem $F(x,y,z) = z^2 - x = 0$, $H(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2z$,

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial H}{\partial y} & \frac{\partial H}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2z \\ 2y & -2 \end{vmatrix} = -4yz\,,$$

$$B = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial z} & \frac{\partial H}{\partial x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2z & -1 \\ -2 & 2x \end{vmatrix} = 4xz + 2\,,$$

$$C = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial H}{\partial x} & \frac{\partial H}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = -2y\,.$$

Ecuaţia planului normal la curba C în punctul (x, y, z) este $A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0\,.$
În punctul $(1, 1, 1)$ avem $A = -4, B = 6, C = -2$ şi atunci ecuaţia planului normal în punctul $(1, 1, 1)$ este $-4(X - 1) + 6(Y - 1) - 2(Z - 1) = 0\,.$

6. Să se scrie ecuaţia planului osculator la elicea cilindrică

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = ht\,,\ t \in \mathbf{R}\,,$$

într-un punct curent al său $M(t)\,.$

Soluţie:

Avem $x' = -a\sin t\,,\ y' = a\cos t\ ,\ z' = h$ şi
$x'' = -a\cos t\,,\ y'' = -a\sin t\,,\ z'' = 0\,.$
Ecuaţia planului osculator este

$$\begin{vmatrix} X - a\cos t & Y - a\sin t & Z - ht \\ -a\sin t & a\cos t & h \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = 0$$

sau $h\sin t(X - a\cos t) - h\cos t(Y - a\sin t) + a(Z - ht) = 0\,.$

7. Să se determine ecuaţiile tangentei, binormalei şi normalei principale la curba

$$x = e^t,\ y = e^{-t},\ z = \sqrt{2}t\,,\ t \in \mathbf{R}\,,$$

în punctul $t = 0\,.$

Soluţie:

Avem $x(0) = 1, y(0) = 1, z(0) = 0\,,\ x'(0) = 1, y'(0) = -1,$
$z'(0) = \sqrt{2}\,,\ x''(0) = 1, y''(0) = 1, z''(0) = 0,$

$l = \begin{vmatrix} y^{'}(0) & z^{'}(0) \\ y^{''}(0) & z^{''}(0) \end{vmatrix} = -\sqrt{2}\,,\ m = \begin{vmatrix} z^{'}(0) & x^{'}(0) \\ z^{''}(0) & x^{''}(0) \end{vmatrix} = \sqrt{2}\,,$
$n = \begin{vmatrix} x^{'}(0) & y^{'}(0) \\ x^{''}(0) & y^{''}(0) \end{vmatrix} = 2\,.$
Ecuaţiile tangentei în punctul $(1, 1, 0)$ sunt

$$\frac{X-1}{1} = \frac{Y-1}{-1} = \frac{Z}{\sqrt{2}}\,,$$

iar ecuaţiile binormalei în $(1, 1, 0)$ sunt date de

$$\frac{X-x}{l} = \frac{Y-y}{m} = \frac{Z-z}{n} \text{ adică } \frac{X-1}{-\sqrt{2}} = \frac{Y-1}{\sqrt{2}} = \frac{Z}{2}\,.$$

Ecuaţiile normalei principale în punctul $(1, 1, 0)$ sunt date de

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} y^{'}(0) & z^{'}(0) \\ m & n \end{vmatrix}} = \frac{Y-y}{\begin{vmatrix} z^{'}(0) & x^{'}(0) \\ n & l \end{vmatrix}} = \frac{Z-z}{\begin{vmatrix} x^{'}(0) & y^{'}(0) \\ l & m \end{vmatrix}}\,,$$

adică $\frac{X-1}{-4} = \frac{Y-1}{-4}, Z = 0\,.$

8. Pentru elicea cilindrică

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = ht\,,\ t \in \mathbf{R}\,,$$

să se determine triedrul lui Frenet (muchiile şi feţele sale).

Soluţie:

Avem $x^{'} = -a\sin t$, $y^{'} = a\cos t$, $z^{'} = h$, $x^{''} = -a\cos t$,
$y^{''} = -a\cos t$, $z^{''} = 0\,.$
Ecuaţiile tangentei sunt

$$\frac{X - a\cos t}{-a\sin t} = \frac{Y - a\sin t}{a\cos t} = \frac{Z - ht}{h}\,.$$

Versorul $\bar{\tau}$ este $\bar{\tau} = \frac{1}{\sqrt{h^2+a^2}}\left(-a\sin t\bar{i} + a\cos t\bar{j} + h\bar{k}\right)$.
Ecuaţia planului normal este

$$-a\sin t(X - a\cos t) + a\cos t(Y - a\sin t) + h(Z - ht) = 0\,.$$

Ecuaţia planului osculator a fost determinată într-o problemă precedentă (6). Prin urmare, aceasta este
$h\sin t(X - a\cos t) - h\cos t(Y - a\sin t) + a(Z - ht) = 0\,.$
Ecuaţiile binormalei sunt

$$\frac{X - a\cos t}{h\sin t} = \frac{Y - a\cos t}{-h\sin t} = \frac{Z - ht}{a}\,,$$

iar versorul binormalei este $\bar{\beta} = \frac{1}{\sqrt{h^2+a^2}}\left(h\sin t\bar{i} - h\cos t\bar{j} + a\bar{k}\right).$
Ecuaţia planului rectificant este

$$\begin{vmatrix} X - a\cos t & Y - a\sin t & Z - ht \\ -a\sin t & a\cos t & h \\ h\sin t & -h\cos t & a \end{vmatrix} = 0$$

sau
$(a^2 + h^2)(X - a\cos t)\cos t - (a^2 + h^2)(Y - a\sin t)\sin t = 0.$
Ecuaţiile normalei principale sunt

$$\frac{X - a\cos t}{\cos t} = \frac{Y - a\sin t}{\sin t}\,,\ Z - ht = 0\,,$$

iar versorul normalei principale este $\bar{\nu} = \cos t\bar{i} + \sin t\bar{j} + 0\cdot\bar{k}$.
Versorii triedrului Frenet sunt

$$\begin{cases} \bar{\tau} &= \frac{1}{\sqrt{h^2+a^2}}\left(-a\sin t\bar{i} + a\cos t\bar{j} + h\bar{k}\right) \\ \bar{\beta} &= \frac{1}{\sqrt{h^2+a^2}}\left(h\sin t\bar{i} - h\cos t\bar{j} + a\bar{k}\right) \\ \bar{\nu} &= \cos t\bar{i} + \sin t\bar{j} \end{cases}$$

9. Pentru curba de interseţie a cilindrilor

$$x^2 = 2az\,,\ y^2 = 2bz\,,\ a > 0\,,\ b > 0\,,$$

să se determine triedrul lui Frenet.

Soluţie:

O reprezentare parametrică a curbei este dată de

$$x = \sqrt{2a}t\,,\ y = \sqrt{2b}t\,,\ z = t^2\,,\ t \in \mathbf{R}\,.$$

Avem
$x^{'} = \sqrt{2a},\ y^{'} = \sqrt{2b},\ z^{'} = 2t\,,\ x^{''} = 0,\ y^{''} = 0,\ z^{''} = 2.$
Ecuaţiile tangentei la curbă sunt

$$\frac{X - \sqrt{2a}t}{\sqrt{2a}} = \frac{Y - \sqrt{2b}t}{\sqrt{2b}} = \frac{Z - t^2}{2t}\,,$$

versorul $\bar{\tau}$ fiind dat de

$$\bar{\tau} = \frac{1}{\sqrt{2a + 2b + 4t^2}}\left(\sqrt{2a}\bar{i} + \sqrt{2b}\bar{j} + 2t\bar{k}\right)\ .$$

Ecuaţia planului normal este

$$\sqrt{2a}(X - \sqrt{2a}t) + \sqrt{2b}(Y - \sqrt{2b}t) + 2t(Z - t^2) = 0\,.$$

Ecuaţia planului osculator este

$$\begin{vmatrix} X - \sqrt{2a}t & Y - \sqrt{2b}t & Z - t^2 \\ \sqrt{2a} & \sqrt{2b} & 2t \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

sau $(X - \sqrt{2a}t)\sqrt{2b} - (Y - \sqrt{2b}t)\sqrt{2a} = 0\,.$
Ecuaţiile binormalei sunt

$$\frac{X - \sqrt{2a}t}{\sqrt{2b}} = \frac{Y - \sqrt{2b}t}{-\sqrt{2a}}\,,\ Z - t^2 = 0\,,$$

iar versorul binormalei este

$$\bar{\beta} = \frac{1}{\sqrt{2a + 2b}}\left(\sqrt{2b}\bar{i} - \sqrt{2a}\bar{j}\right)\ .$$

Planul rectificant are ecuaţia

$$\begin{vmatrix} X - \sqrt{2a}t & Y - \sqrt{2b}t & Z - t^2 \\ \sqrt{2a} & \sqrt{2b} & 2t \\ \sqrt{2b} & -\sqrt{2a} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

sau $2\sqrt{2a}t(X-\sqrt{2a}t)+2\sqrt{2b}t(Y-\sqrt{2b}t)-(2a+2b)(Z-t^2)=0$.
Ecuaţiile normalei principale sunt

$$\frac{X-\sqrt{2a}t}{\sqrt{2a}t}=\frac{Y-\sqrt{2b}t}{\sqrt{2b}t}=\frac{Z-t^2}{-(a+b)},$$

iar versorul normalei principale este

$$\bar{\nu}=\frac{1}{\sqrt{(a+b)(2t^2+a+b)}}\left(\sqrt{2a}t\bar{i}+\sqrt{2b}t\bar{j}-(a+b)\bar{k}\right).$$

Versorii triedrului Frenet sunt

$$\begin{cases} \bar{\tau} & = & \frac{1}{\sqrt{2a+2b+4t^2}}\left(\sqrt{2a}\bar{i}+\sqrt{2b}\bar{j}+2t\bar{k}\right) \\ \bar{\beta} & = & \frac{1}{\sqrt{2a+2b}}\left(\sqrt{2b}\bar{i}-\sqrt{2a}\bar{j}\right) \\ \bar{\nu} & = & \frac{1}{\sqrt{(a+b)(2t^2+a+b)}}\left(\sqrt{2a}t\bar{i}+\sqrt{2b}t\bar{j}-(a+b)\bar{k}\right) \end{cases}$$

10. Să se calculeze curbura şi torsiunea elicei
$x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=ht,\ t\in\mathbf{R}$.

Soluţie:

Avem $x'=-a\sin t,\ y'=a\cos t,\ z'=h,$

$x''=-a\cos t,\ y''=-a\sin t,\ z^{''}=0,$

$x^{'''}=a\sin t, y^{'''}=-a\cos t, z^{'''}=0.$

$ds=(x^{'2}+y^{'2}+z^{'2})^{1/2}dt=(a^2+h^2)^{1/2}dt,$

$\left|d\bar{r}\times d^2\bar{r}\right|=(a^2h^2\sin^2 t+a^2h^2\cos^2 t+a^4)^{1/2}dt^3=$
$=a(a^2+h^2)^{1/2}dt^3.$

Curbura este dată de

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\left|d\bar{r}\times d^2\bar{r}\right|}{ds^3}=\frac{a(a^2+h^2)^{1/2}dt^3}{(a^2+h^2)^{3/2}dt^3}=\frac{a}{a^2+h^2},$$

iar raza de curbură $\rho=\frac{a^2+h^2}{a}$ este constantă.

Pentru calculul torsiunii avem:

$\frac{1}{T} = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{|d\overline{r} \times d^2\overline{r}|^2};$

$\frac{1}{T} = \frac{\begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & h \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \\ a\sin t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix}}{a^2(a^2+h^2)};$

$\frac{1}{T} = \frac{ha^2}{a^2(a^2+h^2)}$; $\frac{1}{T} = \frac{h}{a^2+h^2}$,
iar raza de torsiune $T = \frac{a^2+h^2}{h}$ este constantă.

11. Să se afle razele de curbură şi torsiune pentru curba $y^2 = az, z^2 = ax$ în punctul (a, a, a).

Soluţie:

O reprezentare parametrică a curbei de intersecţie a celor doi cilindri este dată de $x(t) = at^4, y = at, z = at^2, t \in \mathbf{R}$.

Punctului (a, a, a) îi corespunde $t = 1$.

Avem:

$x' = 4at^3, y' = a, z' = 2at,$

$x'' = 12at^2, y'' = 0, z'' = 2a,$

$x''' = 24at, y''' = 0, z''' = 0,$

deci:

$$(0) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix};$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4at^3 & a & 2at \\ 12at^2 & 0 & 2a \\ 24at & 0 & 0 \end{vmatrix}; \ \Delta = 48a^3t.$$

$\left|\frac{d\overline{r}}{dt} \times \frac{d^2\overline{r}}{dt^2}\right| = \left[(12a^2t^2)^2 + (16a^2t^3)^2 + (4a^2)^2\right]^{1/2},$

$ds = (16a^2t^6 + a^2 + 4a^2t^2)^{1/2}dt;$

obţinem:

$\rho = \frac{(16a^2t^6+a^2+4a^2t^2)^{3/2}}{[144a^4t^4+256a^4t^6+16a^4]^{1/2}}$; în punctul $t = 1, \rho_1 = \frac{(21)^{3/2}}{\sqrt{416}}a$.

Pentru raza de torsiune avem în mod asemănător

$T = \frac{(12a^2t^2)^2+(16a^2t^3)^2+(4a^2)^2}{48a^3t}$;

în punctul $t = 1$ avem $T_1 = \frac{416}{48}a$; $T_1 = \frac{26}{3}a$.

12. Să se calculeze raza de curbură a curbei :

$\overline{r}(t) = (t - \sin t)\overline{i} + (1 - \cos t)\overline{j} + 4\sin t/2\overline{k}$, $t \in \mathbf{R}$.

Soluţie:

Pentru raza de curbură folosim formula

(1) $\qquad \rho = \sqrt{\frac{(x^2+y^2+z^2)^3}{A^2+B^2+C^2}}$.

unde $A = y'z'' - y''z', B = z'x'' - z''x', C = x'y'' - x''y'$.

În cazul problemei noastre $x(t) = t - \sin t$, $y(t) = 1 - \cos t$, $z(t) = 4\sin t/2,\ t \in \mathbf{R}$.

$x'(t) = 1 - \cos t,\ y'(t) = \sin t,\ z'(t) = 2\cos t/2$,

$x''(t) = \sin t,\ y''(t) = \cos t,\ z''(t) = -\sin t/2$.

$A = -(\sin t/2 \sin t + 2\cos t/2 \cos t)$, $B = 2\cos t/2 \sin t + \sin t/2 - \sin t/2 \cos t$, $C = \cos t - 1$.

Înlocuind x, y, z, A, B, C în formula (1) se obţine

$$\rho = \frac{4}{\sqrt{1 + \sin^2 t/2}}.$$

13. Să se calculeze curbura şi torsiunea curbelor :

a) $\overline{r}_1(t) = \cos^3 t \cdot \overline{i} + \sin^3 t \cdot \overline{j} + \cos 2t \cdot \overline{k}$;

b) $\overline{r}_2(t) = e^t \cos t \cdot \overline{i} + e^t \sin t \cdot \overline{j} + e^t \cdot \overline{k}$.

Observaţie: pentru curbură se aplică inversa formulei (1) din problema precedentă, iar pentru torsiune se aplică formula

$$\frac{1}{T} = -\frac{\Delta}{A^2 + B^2 + C^2},$$

unde Δ este dat de formula (0).

14. Să se calculeze cutrbura şi torsiunea curbei
$r(t) = 3t\bar{i} + 3t^2\bar{j} + 2t^3\bar{k}$.

Soluţie:

Avem $x(t) = 3t, y(t) = 3t^2, z(t) = 2t^3$,

$x'(t) = 3, y'(t) = 6t, z(t) = 6t^2$,

$x''(t) = 0, y''(t) = 6, z''(t) = 12t$,

$x'''(t) = 0, y'''(t) = 0, z'''(t) = 12$.

Aplicând formula inversă pentru (1) se obţine:

$\frac{1}{\rho} = \sqrt{\frac{A^2+B^2+C^2}{(x^2+y^2+z^2)^3}}$, iar $\frac{1}{T} = -\frac{\Delta}{A^2+B^2+C^2}$.

$A = 72t^2 - 36t^2$, $A = 36t^2$, $B = 0 - 36t$, $B = -36t$,
$C = 18 - 0$, $C = 18$.

Valoarea lui Δ este, $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 6t & 6t^2 \\ 0 & 6 & 12t \\ 0 & 0 & 12 \end{vmatrix}$; $\Delta = 216$.

$\frac{1}{\rho} = \sqrt{\frac{1296t^4+1296t^2+324}{(9t^2+9t^4+4t^6)^3}}$;

$\frac{1}{T} = -\frac{216}{324(4t^4+4t^2+1)} = \frac{-2}{3(4t^4+4t^2+1)}$.

9.2 Probleme propuse spre rezolvare

1. Să se calculeze elementul de arc al drumului suport al curbei **C**, definite de ecuaţia

$$\mathbf{\bar{r}} = t\bar{i} + t^2\bar{j} + \ln t\bar{k}, t > 0.$$

2. Fie o curbă al cărei drum suport este dat de **C**$= f^{-1}(0)$, unde $f(x, y) = y^2x + ay^2 + x^3 - ax^2$. Să se arate că originea este punct dublu pentru drumul suport al curbei. Să se determine tangentele la drumul suport al curbei în acest punct.

3. Se numeşte **curbă Ţiţeica**, curba pentru care

$$Td^2 = \textbf{constant},$$

unde T este raza de torsiune într-un punct arbitrar al curbei, iar d distanţa de la un punct fix la planul osculator al curbei.

Să se arate că drumul suport al curbei $\mathbf{C}$ definit de ecuaţia:

$$xyz = 1,\ y^2 = x$$

este o curbă Ţiţeica.

4. Fie curba al cărui drum suport este dat de funcţia $\alpha = (x, y) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, $x(t) = \frac{a}{3}(2\cos t + \cos 2t)$, $y(t) = \frac{a}{3}(2\sin t - \sin 2t)$.

   1) Să se arate că drumul suport al curbei α este periodic.

   2) Să se arate că drumul suport α pe $[0, 2\pi]$ este închis, simplu, dar nu este regulat.

   Drumul suport al curbei α se numeşte **hipocicloida lui Steiner**.

5. Să se arate că drumul suport al curbei date de ecuaţiile parametrice
$$x(t) = \frac{2+t^2}{1+t^2}, y(t) = \frac{t^3}{1+t^2}, t \in \mathbf{R},$$
   este simplu.

6. Se consideră drumul suport al curbei $\mathbf{C}$ dat de mulţimea

$$\{(x, y, z)\},$$

   unde

$$(x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\ f(x, y, z) = x^2 + y^2 = r^2,$$
$$g(x, y, z) = y^2 + z^2 = r^2$$

   şi pe el punctul $A\left(\frac{r\sqrt{2}}{2}, \frac{r\sqrt{2}}{2}, \frac{r\sqrt{2}}{2}\right)$.

   1) Să se determine tangenta, planul normal şi planul osculator la drumul suport al curbei $\mathbf{C}$ în punctul A.

   2) Să se determine curbura şi torsiunea curbei $\mathbf{C}$ în punctul A.

7. Să se determine elementele triedrului Frenet pentru drumul suport al curbei **C** de ecuaţii:

$$x(t) = \cos t,\ y(t) = \sin t,\ z(t) = \frac{t^2}{2},\ t \in \mathbf{R},$$

în punctul unde drumul suport al curbei **C** intersectează planul xOy.

8. Să se determine elementele triedrului Frenet pentru drumul suport al curbei **C** de ecuaţii:

$$x(t) = t\cos t,\ y(t) = t\sin t,\ z(t) = \frac{t^2}{2},\ t \in \mathbf{R},$$

în punctul unde drumul suport al curbei **C** intersectează planul xOy.

9. Fie curba **C** al cărei drum suport este dat de ecuaţiile:

$$x(t) = a\cos^2 t,\ y(t) = a\sqrt{2}\sin t\cos t,\ z(t) = a\sin^2 t,\ t \in \mathbf{R}.$$

Să se găsească ecuaţiile carteziene ale drumului suport al curbei **C** şi să se determine planul ei osculator în punctul $\left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{a}{2}\right)$.

10. Fie curba **C** al cărei drum suport este dat de ecuaţiile:

$$x(t) = 1 + t^3,\ y(t) = t^2 + t^3,\ z(t) = 5t^3 + 2t^2 + 2, t \in \mathbf{R}.$$

Să se determine tangenta şi planul normal la drumul suport al curbei **C** în punctul de coordonate $(1, 0, 2)$.

Capitolul 10

Suprafeţe

Definiţia 10.1. Se numeşte suprafaţă parametrizată şi se notează cu $(D, r) = \overline{r}(u, v) \in \mathbf{E}_3$ - numit modelul aritmetic al spaţiului euclidian asociat lui $\mathbf{R}^3$, o aplicaţie $r : D \to \mathbf{R}^3$ care este o funcţie vectorială $\overline{r}(u, v)$ netedă şi regulată, cu domeniul $D \subseteq \mathbf{R}^2$.

Domeniul $r(D) \subset \mathbf{R}^3$ se numeşte imaginea sau suportul suprafeţei parametrizate (D, r).

Definiţia 10.2. Suprafeţele parametrizate (D, r) şi (D_1, r_1) se numesc echivalente dacă există difeomorfismul $\lambda : D \to D_1$ încât $r = r_1 \circ \lambda$; difeomorfismul λ se numeşte schimbare de parametri (deoarece λ este difeomorfism imaginile a două suprafeţe parametrizate echivalente coincid).

Definiţia 10.3. Submulţimea $\mathcal{S} \subset \mathbf{E}_3$ se numeşte suprafaţă (geometrică = subvarietate 2 - dimensională în $\mathbf{E}_3$), dacă $\forall M \in \mathcal{S}$, există o vecinătate a sa $W \subseteq \mathcal{S}$ şi o suprafaţă parametrizată (D, r) astfel că $r(D) = W$, iar aplicaţia $r : D \to W$ este homeomorfism; perechea (D, r) se numeşte parametrizare locală a lui $\mathcal{S}$ într-o vecinătate a punctului M, iar $r(D) = W$ se numeşte domeniul parametrizării.

Suprafaţa $\mathcal{S}$ definită anterior se zice că este o suprafaţă simplă. În cazul când $r(D) = \mathcal{S}$ se zice că avem o parametrizare globală.

Definiţia 10.4. Fie funcţia $F(x, y, z)$ de clasă $C^{(k)}$ pe deschisul $V \subseteq \mathbf{R}^3$, deci netedă; submulţimea

$$\mathcal{S} = \{\ (x, y, z) \in V \mid F(x, y, z) = 0\ \}$$

se numeşte suprafaţă de nivel a funcţiei F.

Ecuaţia

$$F(x, y, z) = 0, (x, y, z) \in V \subset \mathbf{R}^3 \tag{10.1}$$

se numeşte ecuaţia implicită a suprafeţei $\mathcal{S}$.

Definiţia 10.5. O suprafaţă simplă $\mathcal{S}'$ este graficul unei funcţii netede de două variabile, deci

$$\mathcal{S}' = \left\{(x, y) \in D \subset \mathbf{R}^2 \mid z = f(x, y) \in \mathbf{R}^3 \backsim \mathbf{E}_3\right\}$$

Ecuaţia

$$z = f(x, y) \in \mathbf{R}^3 \backsim \mathbf{E}_3, (x, y) \in D \subset \mathbf{R}^2 \tag{10.2}$$

se numeşte ecuaţia explicită a suprafeţei $\mathcal{S}'$.

Un sistem de trei funcţii

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)\ ,\ (u, v) \in D \subset \mathbf{R}^2\ , \tag{10.3}$$

defineşte tot o suprafaţă $\mathcal{S}''$, printr-o reprezentare parametrică.

Definiţia 10.6. Ecuaţia vectorială a unei suprafeţe $\mathcal{S}''$ este dată de

$$\overline{r} = \overline{r}(u, v)\ ,\ (u, v) \in D \subset \mathbf{R}^2,$$

sau

$$\overline{r}(u, v) = x(u, v)\,\overline{i} + y(u, v)\,\overline{j} + z(u, v)\,\overline{k}\,,\ (u, v) \in D \subset \mathbf{R}^2.$$

Generarea suprafeţelor.

Din definiţiile date rezultă că suportul unei suprafaţe se obţine (este generat):

1. de un punct $M(x, y, z)$ care se mişcă în spaţiu după o lege care depinde de doi parametri;

2. de o curbă $\mathcal{C} \subset \mathbf{R}^3$, al cărei drum suport se mişcă după o lege care depinde de un parametru;

3. mai general, de o clasă de drumuri suport ale unor curbe $\mathcal{C} \subset \mathbf{R}^3$, definită de

$$F_1(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) = 0, \; F_2(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) = 0, \quad (10.4)$$

cu legăturile

$$\varphi_1(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) = 0, ..., \varphi_{p-1}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) = 0,$$

generează, când $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) \in \Delta \subset \mathbf{R}^p, (x, y, z) \in D \subset \mathbf{R}^3$, o suprafaţă $\mathcal{S}$.

Curbe situate pe o suprafaţă.

Dacă în ecuaţia (10.1) a unei suprafeţe

$$F(x, y, z) = 0, \; (x, y, z) \in V_3 \subset \mathbf{R}^3,$$

introducem o legătură între (x, y, z),

$$\Phi(x, y, z) = 0, \;\; (x, y, z) \in V_3 \subset \mathbf{R}^3,$$

ansamblul celor două ecuaţii defineşte o curbă pe suprafaţa $\mathcal{S}$ sau altfel spus, având suprafaţa $\mathcal{S}$ cu parametrizarea (D, r) şi curba $\mathcal{C}$ cu parametrizarea (I, α), se zice că $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ dacă $\alpha(I) \subset r(D)$.

Curbe parametrice.

Fie o suprafaţă definită parametric de ecuaţiile (10.1) astfel

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v) \;, \; (u, v) \in \Delta,$$

sau vectorial

$$\overline{r} = x(u, v)\,\overline{i} + y(u, v)\,\overline{j} + z(u, v)\,\overline{k}, (u, v) \in \Delta.$$

Suprafaţa $\mathcal{S}$ se numeşte regulată în punctul (u_0, v_0) dacă derivatele de ordinul întâi ale funcţiilor x, y, z sunt continue şi, în plus, determinanţii funcţionali

$$A = \frac{D(y, z)}{D(u, v)}, \; B = \frac{D(z, x)}{D(u, v)}, \; C = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$$

nu se anulează simultan în Δ, ceea ce este echivalent cu $\overline{r_u} \times \overline{r_v} \neq \overline{0}$, unde

$$\overline{r_u} = \frac{\partial \overline{r}}{\partial u}, \overline{r_v} = \frac{\partial \overline{r}}{\partial v}.$$

Vom presupune că la orice punct (x_0, y_0, z_0) îi corespunde (u_0, v_0) şi reciproc; u_0, v_0 se numesc coordonatele curbilinii ale punctului M_0 pe $\mathcal{S}$.

Definiţia 10.7. Se numeşte curbă parametrică u pe suprafaţa $\mathcal{S}$, curba definită de

$$\overline{r} = \overline{r}\,(u, v_0)\,,\ (u, v_0) \in \Delta,$$

deci $v = v_0$.

Definiţia 10.8. Se numeşte curbă parametrică v pe suprafaţa $\mathcal{S}$, curba definită de

$$\overline{r} = \overline{r}\,(u_0, v)\,,\ \ (u_0, v) \in \Delta,$$

deci $u = u_0$.

În general, o curbă $\mathcal{C}$ trasată pe o suprafaţă $\mathcal{S}$ este definită de ecuaţiile (10.4) astfel

$$\overline{r} = \overline{r}\,(u, v)\,,\ \varphi\,(u, v) = 0,\ (u, v) \in \Delta,$$

anume la ecuaţia suprafeţei $\mathcal{S}$ se adaugă o legătură între u şi v.

Din $\varphi\,(u, v) = 0$ obţinem în condiţiile teoremei de existenţă a funcţiilor implicite că $v = \psi\,(u)$, deci ecuaţia curbei $\mathcal{C}$ se scrie

$$\overline{r} = \overline{r}\,(u, \psi\,(u))\,,\ u \in I \subset \mathbf{R}\,.$$

Prin fiecare punct $(u_0, v_0) \in$ suportului suprafeţei $\mathcal{S}$ trece câte un drum suport al unei curbe (sau linie) parametrică.

Plan tangent la o suprafaţă.

Definiţia 10.9. Se numeşte plan tangent (dacă există) la suportul suprafeţei $\mathcal{S}$ într-un punct M , planul determinat de tangentele la toate drumurile suport ale curbele $\mathcal{C}$ ce trec prin punctul M, situate pe suportul suprafeţei $\mathcal{S}$ (în continuare acest plan îl vom numi plan tangent la suprafaţa $\mathcal{S}$ în punctul M).

Pentru o curbă parametrică u avem $d\overline{r} = \overline{r_u}du$, deci $\overline{r_u}$ este un vector tangent la drumul suport al curbei u. Pentru curba parametrică v avem $d\overline{r} = \overline{r_v}dv$ şi $\overline{r_v}$ este un vector tangent la drumul suport al curbei v.

Teorema 10.1. Într-un punct regulat M_0 al suportului unei suprafeţe $\mathcal{S}$, este admis un plan tangent definit de

$$\overline{r} = \overline{r_0} + \lambda\overline{r_u} + \mu\overline{r_v}\,,\ \lambda, \mu \in \mathbf{R}.$$

Observaţia 10.1. Ecuaţia planului tangent la suprafaţă se mai obţine scriind că vectorii $\overline{r} - \overline{r_0}, \overline{r_u}$ şi $\overline{r_v}$ sunt coplanari:

$$(\overline{r} - \overline{r_0}, \overline{r_u} \times \overline{r_v}) = 0.$$

Observaţia 10.2. Ecuaţia carteziană a planului tangent la suprafaţa $\mathcal{S}$ este

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = 0,$$

unde X, Y, Z este un punct curent pe plan şi (x, y, z) punctul de tangenţă.

Observaţia 10.3. Dacă suprafaţa este dată prin ecuaţia (10.1)

$$z = z\,(x, y)\,,\ (x, y) \in D,$$

ecuaţia planului tangent la suprafaţă este

$$Z - z = (X - x)\,\frac{\partial z}{\partial x} + (Y - y)\,\frac{\partial z}{\partial y}$$

şi se obţine, punând $x = u, y = v, z = z\,(u, v)$,

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ 1 & 0 & \frac{\partial z}{\partial u} \\ 0 & 1 & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Observaţia 10.4. Dacă suprafaţa este dată implicit de (10.1), adică

$$F\,(x, y, z) = 0,\ (x, y, z) \in V \subset \mathbf{R}^3,$$

ecuaţia planului tangent devine

$$(X-x)\,F'_x+(Y-y)\,F'_y+(Z-z)\,F'_z=0.$$

Normala unei suprafeţe.

Fie $\mathcal{S}$ o suprafaţă, M un punct de pe suportul suprafeţei în care $\mathcal{S}$ admite plan tangent.

Definiţia 10.10. Normala la planul tangent în punctul M se numeşte normala la suportul suprafeţei $\mathcal{S}$ în punctul M (în continuare o vom numi normala la suprafaţa $\mathcal{S}$ în punctul M).

Conform acestei definiţii rezultă:

1. Versorul normalei $\overline{\mathbf{n}}$ la suprafaţa $\mathcal{S}$ este dirijat după $\overline{r_u}\times\overline{r_v}$, deci

$$\overline{\mathbf{n}}=\frac{\overline{r_u}\times\overline{r_v}}{|\overline{r_u}\times\overline{r_v}|}.$$

2. Ecuaţiile normalei N la suprafaţă sunt

$$\frac{X-x}{F'_x}=\frac{Y-y}{F'_y}=\frac{Z-z}{F'_z}$$

când suprafaţa este dată prin ecuaţia $F\,(x,y,z)=0$;

ecuaţia normalei devine

$$\frac{X-x}{p}=\frac{Y-y}{q}=\frac{Z-z}{-1}\ ,$$

când suprafaţa este dată explicit de $z=z\,(x,y)$, iar

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},q=\frac{\partial z}{\partial y}.$$

3. Ecuaţia vectorială a normalei N la suprafaţa $\mathcal{S}$ în punctul M de vector de poziţie $\overline{r}$ este

$$\overline{R}=\overline{r}+\lambda\overline{r_u}\times\overline{r_v}.$$

4. Ecuaţia normalei la suprafaţa $\mathcal{S}$, dată parametric, este

$$\frac{X-x}{A}=\frac{Y-y}{B}=\frac{Z-z}{C}\ .$$

Definiţia 10.11. Suprafaţa $\mathcal{S} \subset \mathbf{E}_3$ se numeşte orientată dacă fiecare spaţiu tangent $T_M\mathcal{S}$ este orientat ($\forall M \in \mathcal{S}$) - ca subspaţiu vectorial euclidian izomorf cu $\mathbf{R}^3$. Aşa cum am precizat anterior, orientarea lui $T_M\mathcal{S}$ se face prin alegerea versorului normal $\overline{\mathbf{n}}\,(M)$ (astfel ca baza $(\overline{r_u}', \overline{r_v}', \overline{\mathbf{n}})$, să fie pozitiv orientată în $\mathbf{R}^3$, unde $(\overline{r_u}', \overline{r_v}')$ este baza naturală a lui $T_M\mathcal{S}$).

Elementul de arc.

Fie Γ o curbă al cărei drum suport este trasat pe suportul unei suprafeţe $\mathcal{S}$. Elementul de arc al unei curbe $\overline{r} = \overline{r\,(t)}$, $t \in I \subset \mathbf{R}$, este dat de

$$ds = |d\overline{r}| = \left|\frac{d\overline{r}}{dt}\right| dt.$$

Teorema 10.2. Elementul de arc ds al unei curbe Γ trasate pe o suprafaţă $\mathcal{S}$ definită de

$$\overline{r} = \overline{r}\,(u, v)\,, \ \ (u, v) \in D \subset \mathbf{R}^2\,,$$

este dat de

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

unde $E = |\overline{r_u}|^2\,, F = (\overline{r_u}, \overline{r_v})\,, G = |\overline{r_v}|^2$.

Prima formă pătratică.

Definiţia 10.12. Expresia

$$\Phi_1\,(M) = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

se numeşte prima formă pătratică fundamentală a suprafeţei $\mathcal{S}$.

Unghiul a două curbe trasate pe o suprafaţă.

Fie Γ şi Γ' două curbe cu drumurile suport trasate pe suportul suprafeţei $\mathcal{S}$, date de $\overline{r} = \overline{r}\,(u, v)\,, (u, v) \in D \subset \mathbf{R}^2$. Pe Γ şi Γ' avem

$$d\overline{r} = \overline{r_u}du + \overline{r_v}dv$$

şi respectiv

$$\delta\overline{r} = \overline{r_u}\delta u + \overline{r_v}\delta v.$$

Este cunoscut că

$$\cos\left(\Gamma, \Gamma'\right) = \frac{(d\overline{r}, \delta\overline{r})}{|d\overline{r}|\,|\delta\overline{r}|}\,. \tag{10.5}$$

Teorema 10.3. Unghiul ϖ a două curbe cu drumurile suport trasate pe suportul suprafeţei $\mathcal{S}$ este dat de

$$\cos\varpi = \frac{Edu\delta u + F\left(du\delta v + dv\delta u\right) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}}\ .$$

Observaţia 10.5. Unghiul curbelor parametrice u, v este dat de

$$\cos\varpi = \frac{F}{\sqrt{EG}}\ .$$

Observaţia 10.6. Sinusul unghiului ϖ este

$$\sin\varpi = \frac{\left(du\delta v - dv\delta u\right)\sqrt{EG - F^2}}{\left|d\overline{r}\right|\left|\delta\overline{r}\right|}\ .$$

Observaţia 10.7. Curbele parametrice sunt ortogonale, dacă $F = 0$.

Elementul de arie al unei suprafeţe.

Fie o suprafaţă definită parametric de (10.1)

$$x = x\left(u, v\right),\ y = y\left(u, v\right),\ z = z\left(u, v\right),\ \left(u, v\right) \in D \subset \mathbf{R}^2,$$

Definiţia 10.13. Se numeşte elementul de arie al suportului suprafeţei $\mathcal{S}$ (sau elementul de arie al suprafeţei $\mathcal{S}$), forma diferenţială

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}dudv.$$

Definiţia 10.13. Aria suportului suprafeţei $\mathcal{S}$ este dată de integrala dublă

$$A_{\mathcal{S}} = \int_{\mathcal{S}}\int \sqrt{EG - F^2}dudv.$$

Fie $\mathcal{S}$ o suprafaţă de ecuaţie vectorială $\overline{r} = \overline{r}\left(u, v\right), \left(u, v\right) \in D \subset \mathbf{R}^2$, $\overline{r}$ de clasă $C^{(2)}$, cu element de arie.

Definiţia 10.15. Se numeşte a doua formă pătratică fundamentală a unei suprafeţe orientate $\mathcal{S}$ într-un punct $M\left(u, v\right)$ al suportului său, produsul scalar

$$\Phi_2\left(M\right) = \left(\frac{\overline{r_u} \times \overline{r_v}}{\left|\overline{r_u} \times \overline{r_v}\right|}, d^2\overline{r}\right).$$

Teorema 10.4. 1. Dacă ecuaţia suprafeţei $\mathcal{S}$ este dată vectorial, avem

$$\Phi_2(M) = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2,$$

unde

$$L = \frac{(\overline{r_u}, \overline{r_v} \times \overline{r_{uu}})}{|\overline{r_u} \times \overline{r_v}|}, \ M = \frac{(\overline{r_u}, \overline{r_v} \times \overline{r_{uv}})}{|\overline{r_u} \times \overline{r_v}|}, \ N = \frac{(\overline{r_u}, \overline{r_v} \times \overline{r_{vv}})}{|\overline{r_u} \times \overline{r_v}|}.$$

2. Dacă ecuaţia suprafeţei $\mathcal{S}$ este dată parametric de $x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v), (u,v) \in D \subset \mathbf{R}^2$, coeficienţii L, M, N sunt daţi de

$$L = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \begin{vmatrix} x_u' & y_u' & z_u' \\ x_v' & y_v' & z_v' \\ x_{uu}'' & y_{uu}'' & z_{uu}'' \end{vmatrix}$$

$$M = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \begin{vmatrix} x_u' & y_u' & z_u' \\ x_v' & y_v' & z_v' \\ x_{uv}'' & y_{uv}'' & z_{uv}'' \end{vmatrix}$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \begin{vmatrix} x_u' & y_u' & z_u' \\ x_v' & y_v' & z_v' \\ x_{vv}'' & y_{vv}'' & z_{vv}'' \end{vmatrix}.$$

Observaţia 10.8. Deoarece

$$\overline{\mathbf{n}} = \frac{\overline{r_u} \times \overline{r_v}}{|\overline{r_u} \times \overline{r_v}|},$$

unde $\overline{\mathbf{n}}$ este versorul normalei la suprafaţa $\mathcal{S}$, rezultă că

$$\Phi_2(M) = \left(\overline{\mathbf{n}}, d^2\overline{r}\right).$$

Observaţia 10.9. Dacă $\mathcal{S}$ este dată explicit de $z = z(x,y)$, $(x,y) \in D \subset \mathbf{R}^2$, atunci

$$\Phi_2(M) = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \left[rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2\right],$$

unde

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Fie $\mathcal{S}$ o suprafaţă orientată (orientare precizată de funcţia-versor normal $\overline{n}$) dată de $\overline{r} = \overline{r}(u,v)$, $(u,v) \in D \subset \mathbf{R}^2$, $M \in$ suportului lui $\mathcal{S}$ şi $\overline{n}$ versorul normalei la suprafaţă în punctul M. Fie pe suportul lui $\mathcal{S}$ drumul suport al unei curbe Γ care trece prin punctul M şi $\overline{\nu}$ versorul normalei principale a curbei Γ în M. Avem

$$\overline{\nu} = \rho \frac{d\overline{\tau}}{ds} = \rho \frac{d^2\overline{r}}{ds^2}.$$

Dacă θ este unghiul între $\overline{\nu}$ şi $\overline{n}$, atunci

$$\cos\theta = (\overline{n}, \overline{\nu}) = \frac{\rho}{ds^2}\left(\overline{n}, d^2\overline{r}\right),$$

sau

$$\frac{\cos\theta}{\rho} = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}.$$

În aceste condiţii are loc următorul rezultat.

Teorema 10.5. Curbura unei curbe Γ cu drumul suport trasat pe suportul suprafeţei orientate $\mathcal{S}$ este dată de raportul $\frac{\Phi_2}{\Phi_1}$ al celor două forme pătratice fundamentale înmulţite cu $\frac{1}{\cos\theta}$, unde θ este unghiul format de normala la suprafaţă cu normala principală la curbă.

Definiţia 10.16. Se numeşte secţiune normală a drumului suport a curbei Γ pe suportul suprafeţei orientate $\mathcal{S}$ în punctul M, drumul suport al curbei Γ_1 situat pe suportul lui $\mathcal{S}$, având aceeaşi tangentă cu drumul suport al lui Γ în M, cu normala principală în M - normala suportului suprafeţei în punctul M (vom numi în continuare această secţiune ca secţiunea curbei Γ pe $\mathcal{S}$).

Observaţia 10.10. Secţiunea normală a unei curbe Γ situată pe $\mathcal{S}$ este drumul suport al curbei de intersecţie cu suportul suprafeţei $\mathcal{S}$ a planului determinat de tangenta $\overline{\mathbf{t}}$ la drumul suport al curbei Γ şi normala $\overline{n}$ la suportul suprafeţei $\mathcal{S}$.

Pentru secţiunea normală $\theta = 0$, deci dacă $\frac{1}{\rho_n}$ este curbura secţiunii normale, avem relaţia

$$\frac{1}{\rho_n} = \left|\frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\right|.$$

Între razele de curbură ale curbelor Γ şi Γ_1, avem relaţia

$$\rho = \rho_n \cos\theta.$$

În aceste condiţii are loc următorul rezultat.

Teorema lui Meusnier. Raza de curbură ρ a drumului suport a unei curbe Γ trasată pe suportul suprafeţei orientate $\mathcal{S}$ este proiecţia pe planul său osculator a razei de curbură ρ_n a secţiunii normale Γ_1.

Curbură tangenţială.

Definiţia 10.17. Dacă $\frac{1}{\rho}$ este curbura drumului suport al curbei Γ în punctul M, expresia

$$\frac{1}{\rho_t} = \frac{\sin\theta}{\rho}$$

se numeşte curbură tangenţială sau geodezică a drumului suport a curbei Γ în punctul M (în continuare o vom numi curbură tangenţială sau geodezică a curbei Γ în punctul M).

Observaţia 10.11. Dacă $\mathcal{T}$ este planul tangent la suportul suprafeţei $\mathcal{S}$ în punctul M şi Γ'' este proiecţia curbei Γ pe $\mathcal{T}$ şi ρ_t este raza de curbură a lui Γ', atunci $\rho_t = \rho_{\mathcal{T}}$, deci

$$\frac{1}{\rho_t} = \overline{n}\left(\frac{d\overline{r}}{ds} \times \frac{d^2\overline{r}}{ds^2}\right),$$

unde $\overline{n}$ este versorul normalei la suprafaţa $\mathcal{S}$ în punctul M.

Curburi principale.

Fie $\mathcal{S}$ o suprafaţă orientată şi $M\in$suportului suprafeţei $\mathcal{S}$, punctul M fiind regulat. Dacă R este raza de curbură a secţiunii normale, avem, în afară de semn,

$$\frac{1}{R} = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2};$$

dacă notăm

$$m = \frac{dv}{du}$$

obţinem

$$\frac{1}{R} = \frac{L + 2Mm + Nm^2}{E + 2Fm + Gm^2}.$$

Se observă că pe suportul suprafeţei orientate $\mathcal{S}$ curbura secţiunii normale în punctul M depinde numai de m, deoarece L, M, N, E, F, G sunt constante (depind numai de coordonatele lui M).

Definiţia 10.18. Se numesc curburi principale ale suportului suprafeţei orientate $\mathcal{S}$ în punctul M valorile extreme ale lui $\frac{1}{R}$ când m variază (în continuare le vom numi curburi principale ale suprafeţei $\mathcal{S}$ în punctul M).

Definiţia 10.19. Inversele curburilor principale se numesc raze de curbură principale.

Definiţia 10.20. Valorile lui m, care dau curburile principale, se numesc direcţiile principale ale suportului suprafeţei orientate $\mathcal{S}$ în punctul M (în continuare le vom numi direcţii principale ale suprafeţei orientate $\mathcal{S}$ în punctul M).

Teorema 10.6. Direcţiile principale sunt definite de ecuaţia

$$\begin{vmatrix} E & F & G \\ L & M & N \\ dv^2 & -dudv & du^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Observaţia 10.12. Ecuaţia direcţiilor principale are numai rădăcini reale. Într-adevăr, ecuaţia se scrie

$$m^2 (FN - MG) + m (EN - LG) + EM - FL = 0\,;$$

$$f(0) = EM - FL,\ f\left(-\frac{E}{F}\right) = \frac{EG - F^2}{F^2}(FL - EM),$$

deci

$$f(0)\ f\left(-\frac{E}{F}\right) = -\frac{EG - F^2}{F^2}(FL - EM)^2 < 0,$$

ceea ce este echivalent cu faptul că ecuaţia direcţiilor principale admite întotdeauna o rădăcină reală în intervalul $\left(0, -\frac{E}{F}\right)$.

Observaţia 10.13. Direcţiile principale sunt ortogonale.
Din ecuaţia lor

$$m_1 + m_2 = -\frac{EN - LG}{FN - MG},\ m_1 m_2 = \frac{EM - FL}{FN - MG}$$

şi din condiţia de ortogonalitate, ecuaţia

$$E + F\left(m_1 + m_2\right) + G m_1 m_2 = 0$$

este satisfăcută, deoarece

$$E\left(FN - MG\right) - F\left(EN - LG\right) + G\left(EM - FL\right) = 0.$$

Teorema 10.7. Ecuaţia curburilor principale este

$$\begin{vmatrix} L - \frac{E}{R} & M - \frac{F}{R} \\ M - \frac{F}{R} & N - \frac{G}{R} \end{vmatrix} = 0.$$

Linii de curbură pe o suprafaţă.

Fie $\mathcal{S}$ o suprafaţă, un punct $M \in$ suportului suprafeţei $\mathcal{S}$ şi m_1, m_2 direcţiile principale în punctul M pe suportul lui $\mathcal{S}$.

Definiţia 10.21. Curbele trasate pe suprafaţă, ce trec prin punctul M, soluţii ale ecuaţiei diferenţiale

$$\begin{vmatrix} E & F & G \\ L & M & N \\ \left(\frac{dv}{du}\right)^2 & -\frac{dv}{du} & 1 \end{vmatrix} = 0\,. \tag{10.6}$$

se numesc liniile de curbură ale suportului suprafeţei $\mathcal{S}$ ce trec prin punctul M (în continuare le vom numi linii de curbură ale suprafeţei $\mathcal{S}$ ce trec prin punctul M).

Observaţia 10.14. Ecuaţia (10.6) se scrie

$$\left(FN - MG\right)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + \left(EN - LG\right)\frac{dv}{du} + EM - FL = 0$$

şi este echivalentă cu două ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi. Condiţia cerută să treacă prin punctul M este o problemă Cauchy.

Observaţia 10.15. Soluţiile găsite sunt ortogonale. Ele determină pe $\mathcal{S}$ o reţea de curbe ortogonale numită reţeaua liniilor de curbură.

Curbele parametrice sunt linii de curbură dacă sunt ortogonale, deci $F = 0$ şi dacă ecuaţia (10.6) se reduce la $dudv = 0$, deci şi $M = 0$.

Curbura totală. Curbura medie.

Fie $\mathcal{S}$ o suprafaţă, un punct $M \in$ suportului suprafeţei $\mathcal{S}$ şi $\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}$ curburile principale în punctul M.

Definiţia 10.22. Se numeşte curbura totală a suportului suprafeţei $\mathcal{S}$ în punctul M numărul

$$K = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2}$$

(în continuare o vom numi curbură totală a suprafeţei $\mathcal{S}$ în punctul M).

Definiţia 10.23. Se numeşte curbura medie a suportului suprafeţei $\mathcal{S}$ în punctul M numărul

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

(în continuare o vom numi curbură medie a suprafeţei $\mathcal{S}$ în punctul M).

Teorema 10.8. Curbura totală şi curbura medie sunt date de

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},\ H = \frac{EN - 2FM + GL}{2\left(EG - F^2\right)}.$$

Definiţia 10.24. Un punct M $\in$suportului suprafeţei $\mathcal{S}$ se numeşte eliptic dacă $K > 0$ în M.

Definiţia 10.25. Un punct M $\in$suportului suprafeţei $\mathcal{S}$ se numeşte hiperbolic dacă $K < 0$ în M.

Definiţia 10.26. Un punct M $\in$suportului suprafeţei $\mathcal{S}$ se numeşte parabolic dacă $K = 0$ în M.

Observaţia 10.16. O suprafaţă cu toate punctele suportului său eliptice se numeşte suprafaţă de tip eliptic (sfera este o suprafaţă de tip eliptic).

Observaţia 10.17. O suprafaţă cu toate punctele suportului său hiperbolice se numeşte suprafaţă de tip hiperbolic.

Observaţia 10.18. O suprafaţă cu curbura totală constantă se numeşte suprafaţă de curbură constantă.

Observaţia 10.19. O suprafaţă cu curbura medie nulă $H = 0$ se numeşte suprafaţă minimă.

Suprafeţele minime au curbura totală negativă, deoarece din

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$$

rezultă

$$\frac{1}{R_1} = -\frac{1}{R_2},$$

deci

$$K = -\frac{1}{R^2} < 0.$$

Linii asimptotice.

Fie $\mathcal{S}$ o suprafaţă şi M un punct pe suportul lui $\mathcal{S}$.

Definiţia 10.27. Fie Γ o curbă al cărei drum suport trece prin punctul M şi este trasat pe suportul suprafeţei $\mathcal{S}$ şi $\bar{\mathbf{t}}$ versorul tangentei la drumul suport al lui Γ în M. Dacă Γ are curbura normală nulă, $\bar{\mathbf{t}}$ defineşte o direcţie asimptotică la suportul lui $\mathcal{S}$ în punctul M.

Teorema 10.9. Direcţiile asimptotice

$$\frac{dv}{du}$$

sunt date de ecuaţia

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0\,.$$

Observaţia 10.20. Prin punctul M trec două direcţii asimptotice distincte dacă $M^2 - LN > 0$, deci M este un punct hiperbolic.

Observaţia 10.21. Dacă $M^2 - LN = 0$, direcţiile asimptotice în punctul M sunt confundate. Punctul M este parabolic.

Observaţia 10.22. Dacă $M^2 - LN < 0$, direcţiile asimptotice sunt imaginar conjugate (nu sunt reale); punctul M este eliptic.

Definiţia 10.28. Curbele Γ cu drumurile suport trasate pe suportul suprafeţei $\mathcal{S}$ care în fiecare punct al lor sunt tangente la una din direcţiile asimptotice ce trec prin acel punct, se numesc liniile asimptotice ale suprafeţei $\mathcal{S}$.

Teorema 10.10. Determinarea liniilor asimptotice este o problemă Cauchy pentru cele două ecuaţii de ordinul întâi deduse din

$$L + 2M\frac{dv}{du} + N\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = 0\,. \tag{10.7}$$

Observaţia 10.23. Pentru o linie asimptotică, planul osculator este plan tangent la suportul suprafeţei $\mathcal{S}$. Într-adevăr, în acest caz avem

$$\frac{1}{\rho}\cos\theta = 0,\ \cos\theta = 0,\ \theta = \frac{\pi}{2} \text{ sau } \frac{1}{\rho} = 0,\ \rho = \infty$$

şi drumul suport al curbei este o dreaptă pe suportul lui $\mathcal{S}$; planul său osculator este nedeterminat.

Invers, din

$$\frac{1}{\rho}\cos\theta = 0,$$

rezultă ecuaţia (10.7).

Linii geodezice.

Fie $\mathcal{S}$ o suprafaţă şi $\overline{\mathbf{n}}$ versorul normalei la suportul suprafeţei $\mathcal{S}$ într-un punct M.

Definiţia 10.29. O linie Γ cu drumul suport trasat pe suportul suprafeţei $\mathcal{S}$ este o linie geodezică a lui S dacă în fiecare punct al drumului suport al lui Γ versorul $\overline{\mathbf{n}}$ se găseşte în planul osculator al curbei Γ.

Teorema 10.11. Dacă suprafaţa $\mathcal{S}$ este dată vectorial prin $\overline{r} = \overline{r}\,(u, v)$, ecuaţia liniilor geodezice este dată de

$$\overline{\mathbf{n}}\left(d\overline{r} \times d^2\overline{r}\right) = 0\,.$$

Observaţia 10.24. Dacă

$$\overline{r}\,(u, v) = x\,(u, v)\,\overline{i} + y\,(u, v)\,\overline{j} + z\,(u, v)\,\overline{k}$$

este ecuaţia lui $\mathcal{S}$ şi

$$d\overline{r} = \overline{i}dx + \overline{j}dy + \overline{k}dz,\ d^2\overline{r} = \overline{i}d^2x + \overline{j}d^2y + \overline{k}d^2z\,,$$

iar

$$\mathbf{n} = \frac{\overline{r_u} \times \overline{r_v}}{|\overline{r_u} \times \overline{r_v}|},\ \overline{r_u} \times \overline{r_v} = A\overline{i} + B\overline{j} + C\overline{k},$$

ecuaţia liniilor geodezice este o ecuaţie de ordinul doi

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0\,. \tag{10.8}$$

Observaţia 10.25. Planul osculator al lui Γ este determinat de $\overline{\tau}$ şi $\overline{\nu}$ (deoarece conţine şi pe $\overline{n}$ care este perpendicular pe $\overline{\tau}$), rezultă că vectorii $\overline{n}$ şi $\overline{\nu}$ sunt coliniari; deci pe Γ

$$\overline{\nu} = \lambda\overline{n} \text{ sau } \overline{\nu} = \mu\frac{d^2\overline{r}}{ds^2},\ \frac{d^2\overline{r}}{ds^2} = \lambda^*\overline{n},$$

adică

$$\frac{d^2x}{A} = \frac{d^2y}{B} = \frac{d^2z}{C}\,, \tag{10.9}$$

unde

$$A = \frac{D\,(y,z)}{D\,(u,v)},\ B = \frac{D\,(z,x)}{D\,(u,v)},\ C = \frac{D\,(x,y)}{D\,(u,v)}\,.$$

Observaţia 10.26. Dacă suprafaţa $\mathcal{S}$ este dată prin $F\,(x,y,z) = 0$, versorul $\overline{n}$ este dat de

$$\overline{n} = \left(\lambda\frac{\partial F}{\partial x}, \lambda\frac{\partial F}{\partial y}, \lambda\frac{\partial F}{\partial z}\right),$$

cu

$$\lambda = \frac{1}{\left(F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

şi pentru că

$$\frac{A}{F_x'} = \frac{B}{F_y'} = \frac{C}{F_z'}$$

rezultă din (10.9) că ecuaţia geodezicelor în acest caz se scrie

$$\frac{d^2x}{F_x'} = \frac{d^2y}{F_y'} = \frac{d^2z}{F_z'}\,.$$

10.1 Probleme rezolvate

1. Să se scrie ecuaţia planului tangent şi ecuaţiile normalei la suprafaţa $\Sigma\,:\,\bar{r}=(u+v)\bar{i}+u\bar{j}+\ln u\bar{k}\,,\,(u,v)\in(0,\infty)\times\mathbf{R}\,,$ în punctul $M(u=1;v=0)$.

   Soluţie:

   Se observă că $\bar{r}\in C^k\,,\,\forall k\geq 1\,.$ Atunci
   $\bar{r}_u=\frac{\partial\bar{r}}{\partial u}=x_u\bar{i}+y_u\bar{j}+z_u\bar{k}=\bar{i}+\bar{j}+\frac{1}{u}\bar{k}\,,$
   $\bar{r}_v=\frac{\partial\bar{r}}{\partial v}=x_v\bar{i}+y_v\bar{j}+z_v\bar{k}=\bar{i}\,.$
   Planul tangent la Σ în punctul $M(u=1;v=0)$ are ecuaţia

   $$\begin{vmatrix} x-x(1,0) & y-y(1,0) & z-z(1,0)\\ x_u(1,0) & y_u(1,0) & z_u(1,0)\\ x_v(1,0) & y_v(1,0) & z_u(1,0)\end{vmatrix}=0,$$

   adică $y-z-1=0\,.$
   Vectorul normal la Σ în punctul $M(u=1;v=0)$ este
   $\bar{r}_u(1,0)\times\bar{r}_v(1,0)=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=\bar{j}-\bar{k}\neq\bar{0}$ (deci M este punct ordinar) şi atunci normala la Σ în punctul $M(u=1;v=0)$ are ecuaţiile

   $$x-x(1,0)=0\,,\;\frac{y-y(1,0)}{1}=\frac{z-z(1,0)}{-1}\text{ sau}$$

   $$x-1=0\,,\;y+z-1=0\,.$$

2. Să se scrie ecuaţia planului tangent şi ecuaţiile normalei la suprafaţa
   $\Sigma\,:\,3x^2-y^2+4xz-3x-z+4=0$
   în punctul $M(0,0,4)\,.$

   Soluţie:

   Funcţia care apare în reprezentarea implicită a suprafeţei $\Sigma\,,$ $F(x,y,z)=3x^2-y^2+4xz-3x-z+4$ este de clasă C^k, $\forall k\geq 1$. Prin urmare Σ este o suprafaţă regulată de ordin k,

$\forall k \geq 1$.
Gradientul lui F, $\nabla F = \frac{\partial F}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\bar{k}$, este, în punctul $M(0,0,4)$, diferit de vectorul nul (vezi $\nabla F(0,0,4) = 13\bar{i} - \bar{k}$). Atunci punctul M este ordinar şi ecuaţia planului tangent la Σ în M este

$$(x-0)\cdot 13 + (y-0)\cdot 0 + (z-4)\cdot(-1) = 0 \Leftrightarrow 13x - z + 4 = 0\,.$$

Ecuaţiile normalei la Σ în punctul $M(0,0,4)$ sunt

$$\frac{x-0}{13} = \frac{y-0}{0} = \frac{z-4}{-1} \text{ sau } y = 0\,,\ x + 13z - 52 = 0\,.$$

3. Să se determine un punct P al suprafeţei $\Sigma\,:\ z = x^3 - 3xy$, în care normala la suprafaţă este perpendiculară pe planul $\pi\,:\ 5x + 6y + 2z - 7 = 0$. Scrieţi ecuaţia planului tangent la Σ în punctul P.

Soluţie:

Avem $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y\,,\ \frac{\partial z}{\partial y} = -3x$.
Ecuaţia planului tangent la Σ în $P(x_0, y_0, z_0)$ este

$$(x-x_0)\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0) - (z-z_0) = 0$$

şi ecuaţiile normalei N la Σ în $P(x_0,y_0,z_0)$ sunt

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)} = \frac{y-y_0}{\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)} = \frac{z-z_0}{-1}\,.$$

Normala N este perpendiculară pe planul π dacă şi numai dacă vectorul director al normalei N şi vectorul normal pe planul π sunt coliniari, adică coordonatele celor doi vectori sunt proporţionale.
Prin urmare $\frac{3x^2-3y}{5} = \frac{-3x}{6} = \frac{-1}{2} = \lambda \in \mathbf{R}$, de unde $x = 1$, $y = 11/6$, $\lambda = -1/2$, $z = -9/2$. Deci punctul căutat este $P(1; 11/6; -9/2) \in \Sigma$.
Ecuaţia planului tangent la Σ în $P(1; 11/6; -9/2)$
este $(x-1)\cdot(-5/2) + (y-11/6)\cdot(-3) - (z-9/2) = 0$ sau $5x + 6y + 2z - 25 = 0$.

4. Fie suprafaţa
$\Sigma\,:\,\bar r = u\bar i + (u+v)\bar j + (u+v^2)\bar k\,,\ (u,v)\in \mathbf{R}\times\mathbf{R}$,
şi curbele $\Gamma_1 : v = 1\,,\ \Gamma_2 : u = v\,$, situate pe suprafaţa Σ.
a) Să se calculeze lungimea arcului M_1M_2 al curbei Γ_2, unde $M_1(u=v=0)$ şi $M_2(u=v=1)\,$;
b) Să se calculeze măsura unghiului curbelor Γ_1 şi Γ_2 în $M_2\,$.

Soluţie:

Mai întâi, se determină *prima formă fundamentală* a suprafeţei Σ (zisă şi *metrica* suprafeţei)

$$\varphi(du,dv) = d\bar r^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2\,,$$

unde $E = \bar r_u^2 = \bar r_u\cdot\bar r_u\,,\ F = \bar r_u\cdot\bar r_v\,,\ G = \bar r_v^2 = \bar r_v\cdot\bar r_v\,.$
($\bar a\cdot\bar b$ reprezintă produsul scalar al celor doi vectori)
Deoarece $\bar r_u = \frac{\partial\bar r}{\partial u} = \bar i + \bar j + \bar k\,,\ \bar r_v = \frac{\partial\bar r}{\partial v} = \bar j + 2v\bar k\,,$
rezultă $E = 3,\ F = 1+2v,\ G = 1+4v^2$.
Deci $\varphi(du,dv) = 3du^2 + 2(1+2v)dudv + (1+4v^2)dv^2$.
Observaţii: i) Toate punctele suprafeţei (care este regulată de orice ordin) sunt puncte ordinare pentru că
$\bar r_u\times\bar r_v = (2v-1)\bar i - 2v\bar j + \bar k{=}\bar 0\,.$
ii) Prima formă fundamentală $\varphi(du,dv) = d\bar r^2$ este o formă pătratică pozitiv definită pentru fiecare punct M al suprafeţei Σ, cu ajutorul căreia se măsoară lungimi de arce de curbă pe suprafaţa Σ şi unghiuri dintre curbe.
a) Dacă parametrizăm curba $\Gamma_2 : u = v\,$, rezultă
$\Gamma : \begin{cases} u(t) = t \\ v(t) = t \end{cases}\,, t\in\mathbf{R}\,.$
Se observă că $M_1(t=0), M_2(t=1)\in\Gamma_2$ şi atunci lungimea arcului de curbă M_1M_2 este

$$l_{M_1M_2} = \int\limits_0^1 \|\bar r^{'}(t)\|\,dt = \int\limits_0^1 \sqrt{\varphi(u^{'}(t),v^{'}(t))}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^1 \sqrt{6+4t+4t^2}\,dt\,,$$

pentru că $u^{'}(t) = 1$, $v^{'}(t) = 1$.
Calculând integrala de mai sus, rezultă
$l_{M_1M_2} = \frac{1}{4}[3\sqrt{14} + 5\ln(3 + \sqrt{14}) - \sqrt{6} - 5\ln(1 + \sqrt{6})]$.
b) În punctul $M(u = 1; v = 1)$, coeficienţii formei I-a fundamentală sunt $E = 3$, $F = 1 + 2 \cdot 1 = 3$,
$G = 1 + 4 \cdot 1^2 = 5$.
Pe Γ_1 avem $dv = 0$. Pe Γ_2 avem $\delta v = \delta u$.
Dacă $\theta = m(\Gamma_1 \hat{,} \Gamma_2)$, atunci

$$\cos\theta = \left. \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + \delta u dv) + Gdv\delta v}{\sqrt{\varphi(du, dv)} \cdot \sqrt{\varphi(\delta u, \delta v)}} \right|_{M_2} =$$

$$= \frac{6du\delta u}{\sqrt{3} \cdot du \cdot \sqrt{14} \cdot \delta u} = \frac{\sqrt{42}}{7} ,$$

de unde $\theta = \arccos \frac{\sqrt{42}}{7}$.

5. Fie suprafaţa Σ care are reprezentarea parametrică
$\bar{r} = u\bar{i} + uv\bar{j} + (v + \ln u)\bar{k}$, $(u, v) \in (0, \infty) \times \mathbf{R}$.
Se cer:
a) Să se determine forma I-a fundamentală şi forma a II-a fundamentală pentru suprafaţa Σ;
b) Să se precizeze natura punctelor suprafeţei Σ ;
c) Să determine liniile asimptotice ale suprafeţei Σ ;
d) Să se calculeze curbura normală K_n a suprafeţei Σ ,
în punctul $P(u = 1, v = -1) \in \Sigma$, corespunzătoare curbei
$\Gamma : u - v^2 = 0$, situată pe Σ ;
e) Să se calculeze curburile principale, curbura totală şi
curbura medie în punctul $P(u = 1, v = -1)$;
f) Să se determine liniile de curbură ale suprafeţei Σ .

Soluţie:

a) Se observă că suprafaţa Σ este regulată de ordin $k \geq 2$ şi toate punctele sunt ordinare, pentru că având
$\bar{r}_u = \bar{i} + v\bar{j} + \frac{1}{u}\bar{k}$, $\bar{r}_v = u\bar{j} + \bar{k}$ rezultă
$\bar{r}_u \times \bar{r}_v = (v - 1)\bar{i} - \bar{j} + u\bar{k}$=0 .

Prima formă fundamentală este
$\varphi(du,dv)=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2=$
$=(1+v^2+\frac{1}{u^2})du^2+2(uv+\frac{1}{u})dudv+(u^2+1)dv^2$,
pentru că $E=\bar{r}_u^2=1+v^2+\frac{1}{u^2}$, $F=\bar{r}_u\cdot\bar{r}_v=uv+\frac{1}{u}$, $G=\bar{r}_v^2=u^2+1$.
A doua formă fundamentală este
$\psi(du,dv)=Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2$,
unde $L=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}(\bar{r}_u,\bar{r}_v,\bar{r}_{uu})$, $M=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}(\bar{r}_u,\bar{r}_v,\bar{r}_{uv})$,
$N=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}(\bar{r}_u,\bar{r}_v,\bar{r}_{vv})$.
Cum $\Delta=\|\bar{r}_u\times\bar{r}_v\|^2=u^2+v^2-2v+2$, $\bar{r}_{uu}=\frac{\partial^2\bar{r}}{\partial u^2}=-\frac{1}{u^2}\bar{k}$, $\bar{r}_{uv}=\frac{\partial^2\bar{r}}{\partial u\partial v}=\bar{j}$, $\bar{r}_{vv}=\frac{\partial^2\bar{r}}{\partial u\partial v}=\bar{0}$ şi
$(\bar{r}_u,\bar{r}_v,\bar{r}_{uu})=\begin{vmatrix}1 & v & \frac{1}{u}\\ 0 & u & 1\\ 0 & 0 & -\frac{1}{u^2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{u}$, $(\bar{r}_u,\bar{r}_v,\bar{r}_{uv})=$
$=\begin{vmatrix}1 & v & \frac{1}{u}\\ 0 & u & 1\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=-1$, $(\bar{r}_u,\bar{r}_v,\bar{r}_{vv})=\begin{vmatrix}1 & v & \frac{1}{u}\\ 0 & u & 1\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=0$,
rezultă că $L=-\frac{1}{u\sqrt{\Delta}}$, $M=-\frac{1}{\sqrt{\Delta}}$, $N=0$.
Deci $\psi(du,dv)=-\frac{1}{u\sqrt{\Delta}}du^2-\frac{2}{\sqrt{\Delta}}dudv$.
b) Deoarece $M^2-LN=\frac{1}{\Delta}+\frac{1}{u\Delta}\cdot 0=\frac{1}{\Delta}>0$ în orice punct $P\in\Sigma$, rezultă că toate punctele suprafeţei Σ sunt hiperbolice, adică prin orice punct $P\in\Sigma$ trec două linii asimptotice reale.
c) Ecuaţia diferenţială a liniilor asimptotice este

$$Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2=0,$$

adică $-\frac{1}{u\sqrt{\Delta}}du^2-\frac{2}{\sqrt{\Delta}}dudv=0$.
Prin urmare, avem $du=0$ sau $\frac{1}{u}du+2dv=0$. De aici rezultă ecuaţiile celor două familii de linii asimptotice:
$u=c_1$, respectiv $\ln u+2v=c_2$ (c_1,c_2 constante reale).
Prin orice punct $P(u_0,v_0)\in\Sigma$ trece o linie asimptotică $u=u_0$ ($c_1=u_0$) şi o linie asimptotică $\ln u+2v=c_2$ (unde constanta reală c_2 se determină din condiţia $\ln u_0+2v_0=c_2$, adică $c_2=\ln(u_0e^{2v_0})$).
d) Curbura normală K_n a lui Σ, în punctul $P(u=1,v=$

$-1) \in \Sigma$, corespunzătoare curbei $\Gamma : u - v^2 = 0$ ($\Gamma \subset \Sigma$) este

$$K_n = \frac{\psi(du, dv)}{\varphi(du, dv)} = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}$$

În punctul $P(u = 1, v = -1)$ avem $E = 3$, $F = 0$, $G = 2$, $\Delta = 6$, $L = -\frac{1}{\sqrt{6}}$, $M = -\frac{1}{\sqrt{6}}$, $N = 0$. De-a lungul curbei $\Gamma : u - v^2 = 0$ avem, prin diferenţiere, $du = 2vdv$ şi în punctul $P(u = 1, v = -1)$ avem $du = -2dv$. Atunci

$$K_n = \frac{-\frac{1}{\sqrt{6}}du^2 - \frac{2}{\sqrt{6}}dudv}{3du^2 + 2dv^2} = \frac{-\frac{4}{\sqrt{6}}dv^2 + \frac{4}{\sqrt{6}}dv^2}{12dv^2 + 2dv^2} = 0$$

e) Ecuaţia, cu necunoscuta K, care dă curburile principale în $P(u = 1, v = -1)$ este

$$\begin{vmatrix} EK - L & FK - M \\ FK - M & GK - N \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3K + \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 2K \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$6K^2 + \frac{2}{\sqrt{6}}K - \frac{1}{6} = 0$, de unde rezultă curburile principale ale lui Σ în P:
$K_n^{'} = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{42}}{36}$, $K_n^{''} = +\frac{\sqrt{6}+\sqrt{42}}{36}$.
Curbura totală a lui Σ în P este $K = K_n^{'} \cdot K_n^{''} = -\frac{1}{36}$.
Curbura medie a lui Σ în P este $H = \frac{K_n^{'} + K_n^{''}}{2} = -\frac{1}{6\sqrt{6}}$.
f) Ecuaţia diferenţială a liniilor de curbură ale lui Σ este

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ 1 + v^2 + \frac{1}{u^2} & uv + \frac{1}{u} & 1 + u^2 \\ -\frac{1}{u\Delta} & -\frac{1}{\Delta} & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$-\frac{1+u^2}{u}dudv + (v^2 - v + 1)du^2 - (1 + u^2)dv^2 = 0$.

6. Să se determine liniile geodezice ale planului $\pi \subset E_3$.

Soluţie:

Se consideră un reper cartezian ortonormat $Oxyz$ astfel încât $\pi = xOy$. Atunci planul π are reprezentarea parametrică $\pi \, : \, \bar{r} = u\bar{i} + v\bar{j}$, $(u, v) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$.
Curba $\Gamma \subset \pi$ este linie geodezică a lui π dacă şi numai dacă planul osculator al lui Γ conţine normala la π , în fiecare punct al lui Γ , adică $(\bar{r}^{'}, \bar{r}^{''}, \bar{N}) = 0$.
Se consideră curba $\Gamma : v = v(u)$, situată pe π .
Atunci $\bar{r} = u\bar{i} + v(u)\bar{j}$, $\bar{r}^{'} = \frac{d\bar{r}}{du} = \bar{i} + v^{'}\bar{j}$, $\bar{r}^{''} = v^{''}\bar{j}$, $\bar{N} = \frac{\bar{r}_u \times \bar{r}_v}{\|\bar{r}_u \times \bar{r}_v\|} = \bar{k}$.
Deci $(\bar{r}^{'}, \bar{r}^{''}, \bar{N}) = \begin{vmatrix} 1 & v^{'} & 0 \\ 0 & v^{''} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow v^{''} = 0 \Leftrightarrow$
$v(u) = c_1 u + c_2$ (c_1, c_2 constante reale).

Prin urmare, liniile geodezice ale planului π au ecuaţia vectorială parametrică
$\bar{r} = u\bar{i} + (c_1 u + c_2)\bar{j} = c_2\bar{j} + u(\bar{i} + c_1\bar{j})$, $u \in R$,
care reprezintă ecuaţia vectorială parametrică a unei drepte. Deci liniile geodezice ale planului π sunt dreptele sale.

7. Fie K_1 şi K_2 curburile principale ale suprafeţei S de separaţie a unui lichid. Presiunea normală p pe elementul de suprafaţă, într-un punct oarecare, este dată de ecuaţia lui Laplace $\sigma(K_1 + K_2) = p$, unde σ este tensiunea superficială, pe care o considerăm constantă. Să se afle presiunea p când S este paraboloidul hiperbolic.

Soluţie:

Dacă considerăm ecuaţia paraboloidului hiperbolic
$S \, : \, z = xy$, atunci $p = \frac{-2xy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$.

10.2 Probleme propuse spre rezolvare

1. Să se scrie elementul de arie al suportului suprafeţei sferice de ecuaţii:

$$x = R\sin\theta\cos\varphi,\ y = R\sin\theta\sin\varphi,\ z = R\cos\theta.$$

2. Să se scrie elementul de arie al suportului suprafeţei elicoidale de ecuaţii:

$$x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = hv,\ \ (u,v) \in D \subset \mathbf{R}^2.$$

3. Să se scrie elementul de arie al suportului suprafeţei paraboloidale de ecuaţii:
$$2zh = x^2 + y^2,\ z \geq 0,\ h > 0.$$

4. Să se calculeze a doua formă pătratică fundamentală pentru suportul suprafeţei sferice.

5. Să se calculeze a doua formă pătratică fundamentală pentru suportul suprafeţei elicoidale.

6. Să se găsească liniile asimptotice ale suportului suprafeţei de ecuaţii:

$$x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = u^n,\ \ (u,v) \in \mathbf{R}^2.$$

7. Pentru drumul suport al curbei strâmbe **C**, definită prin intersecţia suportului sferei **S** de ecuaţie

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$$

cu suportul elipsoidului **E** de ecuaţie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

să se scrie ecuaţiile tangentei, planului normal şi planului osculator.

8. Să se găsească liniile asimptotice la suportul suprafeţei de ecuaţie $z = x^2 - y^2$, apoi să se determine pe cele ce trec prin punctul de coordonate $(2, 1, 3)$.

9. Să se arate că hiperboloidul cu o pânză,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

   este o suprafaţă conexă, iar hiperboloidul cu două pânze

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0,$$

   nu este conex.

10. Suportul suprafeţei generate prin mişcarea unei drepte ce se sprijină pe drumul suport al unei elice circulare, întâlneşte axa Oz şi este paralelă cu planul xOy, se numeşte suportul unui elicoid cu plan director, sau suportul unei suprafeţe şurub.

    1) Să se găsească ecuaţia carteziană implicită a suportului suprafeţei.

    2) Să se determine prima şi a doua formă fundamentală pentru suporul suprafeţei.

Bibliografie

[1] G. Marinescu, *Spaţii vectoriale topologice şi pseudotopologice*, Editura Academiei, Bucureşti, 1959.

[2] D.K. Fadeev, I. Sominski, *Sbornik zadaci po vâsşei algebre*, Fizmatgiz, Moskva, 1961.

[3] A.G. Kuroş, *Lecţii po obşcei algebre*, Fizmatgiz, Moskva, 1962.

[4] I. Creangă, T. Luchian, *Introducere în calculul tensorial*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1963.

[5] M. Stoka, *Geometrie diferenţială*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1964.

[6] G.E. Şilov, *Matematiceski analiz*, Nauka, Moskva, 1969.

[7] P. Stavre, *Curs de geometrie diferenţială*, Litografia Universităţii din Craiova, 1970.

[8] I. Creangă, C. Haimovici, *Algebră liniară*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1970.

[9] T. Luchian, *Algebră abstractă*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1975.

[10] R. Miron, *Geometrie analitică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1976.

[11] I. Vladimirescu, G. Vraciu, *Algebra şi programare liniară. Culegere de probleme*, Reprografia Universităţii din Craiova, 1979.

[12] C. Udrişte, C. Radu, C. Dicu, O. Mălăncioiu, *Probleme de algebră, geometrie şi ecuaţii diferenţiale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

[13] A. Belage, J. Rouvre, J. Chastenet de Gery, R. Théodor, *Exercices résolus d'algébre linéaire*, Masson, 1983.

[14] I. Vladimirescu, *Matematici speciale*, Reprografia Universităţii din Craiova, 1987.

[15] Gh. Murărescu, V. Seleacu, *Culegere de probleme pentru uzul studenţilor,* Reprografia Universităţii din Craiova, 1987.

[16] C. Năstăsescu şi colectivul, *Probleme de structuri algebrice*, Editura Academiei, Bucureşti, 1988.

[17] C. Iacob, *Matematică aplicată în mecanică*, Editura Academiei, Bucureşti, 1989.

[18] Gh. Murărescu, *Curs de algebră liniară şi geometrie analitică*, Reprografia Universităţii din Craiova, 1991.

[19] C. Udrişte, *Aplicaţii de algebră, geometrie şi ecuaţii diferenţiale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1993.

[20] I. Vladimirescu, M. Popescu, *Algebră liniară şi geometrie analitică*, Editura Universitaria, Craiova, 1994.

[21] I. Vladimirescu, M. Popescu, *Algebră liniară şi geometrie n-dimensională*, Editura Radical, Craiova, 1996.

[22] Gh. Murărescu, *Curs de Geometrie Diferenţială*, Reprografia Universităţii din Craiova, 1998.

[23] G. Vraciu, *Elemente de algebră liniară cu aplicaţii*, Editura Radical, Craiova, 2000.

[24] M. M. Stănescu, *Algebră liniară, Geometrie analitică şi diferenţială*, Reprografia Universităţii din Craiova, 2000.

[25] M. M. Stănescu, F. Munteanu, V. Slesar, *Caiet de Seminar pentru Algebră liniară, Geometrie analitică şi Geometrie diferenţială*, Reprografia Universităţii din Craiova, 2001.