1.4. Proprietăți ale legilor de compoziție internă

1. Asociativitatea

Definiție:

O operație algebrică „* ” pe mulțimea *M* se numeşte *asociativă* , dacă:

$$(x * y) * z = x * (y * z) , \forall x, y, z \in M$$

Exemple:

1. **Adunarea şi înmulțirea** sunt operații asociative pe oricare dintre mulțimile N, Z, Q, R, C.
2. **Adunarea matricelor** în mulțimea. $M_{nxn}(R)$ este asociativă .

3. Pe R se defineşte legea $* : R \times R \rightarrow R$, prin $x * y = xy - 2x - 2y + 1$.

Să cercetăm dacă legea * este asociativă:

$(x * y) * z = (xy - 2x - 2y + 1) * z = xyz - 2xz - 2yz + z - 2xy + 4x + 4y-2-2z+1 = xyz- 2xy -2xz-2yz + 4x + 4y - z - 1$ (*)

$x*(y*z) = x* (yz - 2y - 2z + 1) = xyz - 2xy - 2xz +x - 2x - 2yz +4y + 4z - 2 + 1 = xyz - 2xy - 2xz - 2yz -x + 4y + 4z - 1$ (**)

Din (*) şi (**) rezultă că operația nu este asociativă.

4. Tot pe R reluând calculele pentru operația $x*y = xy-2x-2y-6$ se ajunge la concluzia că aceasta este asociativă.

Observație

Dacă „* “ este o operație pe *M,* iar *H* este o parte a lui *M,* stabilă față de „* ”, atunci:
dacă „* ” este asociativă pe *M,* ea este asociativă şi pe *H.*

2. Comutativitatea

Definiție:

O operație algebrică „$*$ ” pe mulțimea M se numeşte *asociativă* , dacă:

$$x * y = y * x \ , \quad \forall x, y \in M$$

Exemple:

1. Adunarea şi înmulțirea pe oricare dintre mulțimile $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sunt legi de compoziție comutative.

Demonstrăm comutativitatea adunării numerelor complexe. Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 = a + ib$ şi $z_2 = a' + ib'$; avem $z_1 + z_2 = (a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + i(b + b') = (a' + a) + i(b' + b) = a' + ib' + a + ib = z_2 + z_1$, deci adunarea numerelor complexe este comutativă.

2. Reuniunea şi intersecția părților unei mulțimi sunt legi de compoziție comutative.

3. Pe $\mathbb{R}$ definim legea „$*$” astfel: $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x * x = 4xy - 5(x + y) + 3$, $\forall x,y \in \mathbb{R}$.

Arătăm că legea $*$ este comutativă: $x * y = 4xy - 5(x + y) + 3 = 4yx - 5(y + x) + 3 = y * x$, $\forall x,y \in \mathbb{R}$ (s-a folosit proprietatea de comutativitate a înmulțirii $x \cdot y = y \cdot x$ şi adunării $x + y = y + x$ numerelor reale).

4. În clasa a XI-a s-a arătat că înmulțirea matricelor nu este comutativă.

5. Scăderea în $\mathbb{Z}$ este o lege de compoziție necomutativă. Exemplu: $7 - 10 \neq 10 - 7$.

6. Compunerea funcțiilor nu este comutativă. Într-adevăr fie $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ definite prin:

$f(x) = 2x^2$ şi $g(x) = x - 3$.

Atunci $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2(g(x))^2 = 2(x - 3)^2 = 2x^2 - 12x + 18$;

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) - 3 = 2x^2 - 3$.

Se vede că $f \circ g \neq g \circ f$.

Observații:

1. **Dacă** „* “ este o operație pe *M,* iar *H* este o parte a lui *M,* stabilă față de „* ”, atunci: dacă „* “ este comutativă pe *M,* ea este comutativă şi pe *H.*

2. Dacă „* “ este o operație pe *M* dată prin **tabla operației**, operația „* “ **este comutativă** dacă şi numai dacă **tabla operației este simetrică față de diagonala principală.**

3. Distributivitatea

Definiție:

Fie „* “ şi „º “ două operații algebrice pe aceeaşi mulțime *M.*

Spunem că operația „*” este distributivă la stânga față de operația „° “, dacă:

(1) $x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z), \quad \forall x, y, z \in M$

Spunem că operația „* “ este distributivă la dreapta față de operația „º “, dacă:

(2) $(y \circ z) * x = (y * x) \circ (z * x), \quad \forall x, y, z \in M$

Spunem că operația „* “ este distributivă față de operația „° “, dacă este distributivă atât la stânga cât şi la dreapta, adică sunt verificare ambele condiții (1) şi (2).

Exemple:

1. Pe oricare dintre mulțimile N, Z, Q, R, C sunt definite operațiile de adunare şi înmulțire. Legea de compoziție „înmulțirea" este distributivă față de „adunare":

a • (b + c) = ab + ac, pentru orice *a,b,c e N, Z, Q, R,* C.

2. Pe mulțimea $M_n(R)$ sunt definite adunarea şi înmulțirea matricelor. înmulțirea este distributivă față de adunare:

A • (B + C) = AB + AC, pentru orice A,B,C.

4. Elementul neutru

Fie *(x, y)* → *x* * *y* o lege de compoziție pe mulțimea *M*.
Spunem că legea admite element neutru dacă *există* $e \in M$ **astfel încât:**

$$x*e = e*x = x \text{, pentru orice } x \in M$$

Elementul *e* cu această proprietate (dacă există) se numeşte *element neutru* față de operația "*"

Exemplu:

Pe $\mathbb{Z}$, $x * y = x + y + 1$ admite elementul neutru $e = -1 \in \mathbb{Z}$, deoarece:
$x * (-1) = x + (-1) + 1 = x$ şi $(-1) * x = -1 + x + 1 = x$, $\forall x \in M$.

Exemple:

1. Față de legea de compoziție $(x, y) \to x \cdot y$, în mulțimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale, elementul neutru este număr real 1, deoarece pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem:

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x, (\forall)\, x \in \mathbb{R}.$$

2. Considerăm pe mulțimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi legea de compoziție $(x, y) \to x + y$. Elementul neutru este numărul întreg 0, deoarece este singurul număr întreg pentru care $x + 0 = 0 + x = x$, $(\forall)\, x \in \mathbb{Z}$.

Dacă o lege de compoziție internă admite element neutru, atunci acesta este unic

3. în mulțimea $M_n(R)$ a matricelor pătrate de ordinul n cu coeficienți reali avem legile de compoziție:

adunarea $(A, B) \to A + B$ şi **înmulțirea** $(A, B) \to A \cdot B$.

Elementele neutre față de aceste legi de compoziție sunt respectiv matricea 0_n (matricea zero de ordin n) şi matricea unitate de ordin n care s-a notat cu I_n.

$$0_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & .. & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}; I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & .. & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

5. Fie $M = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$. M este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea, deoarece $A(x) \cdot A(y) = A(2xy) \in M$, $(\forall)\ A(x), A(y) \in M$. $A(\frac{1}{2}) \in M$ şi $A(\frac{1}{2}) \cdot A(x) = A(x) \cdot A(\frac{1}{2}) = A(x)$, $(\forall)\ A(x) \in M$, deci $A(\frac{1}{2})$ este element neutru al operației „·" pe M.

Deşi $I_3 \cdot A(x) = A(x) \cdot I_3 = A(x)$, $(\forall)\ A(x) \in M$, I_3 nu este element neutru al operației „·" pe M, deoarece $I_3 \notin M$.

Observație

In cazul când legea de compoziție este **notată aditiv**, elementul neutru este **notat cu 0** şi se numeşte **elementul zero**.

Dacă legea de compoziție este **notată multiplicativ**, elementul neutru se numeşte **elementul unitate**.

Problemă rezolvată

Fie mulțimea $A = (-1, 1)$ pe care se definește legea: $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$. Să se determine elementul neutru față de această lege.

Soluție. Notăm cu e elementul neutru dacă el există: $x*e = e*x = x \Leftrightarrow \dfrac{x+e}{1+xe} = x \Leftrightarrow$ $x+e = x+x^2e \Leftrightarrow e(1-x^2) = 0$, $(\forall)x \in (-1, 1) \Rightarrow e = 0$ și $0 \in A$. În concluzie elementul neutru este 0.

Verificare: $x * 0 = \dfrac{x+0}{1+x\cdot 0} = x$ și $0 * x = \dfrac{0+x}{1+0\cdot x} = x$.

Definiție:

Un cuplul (G, *), unde G este o mulțime nevidă iar „*" este o operație algebrică pe mulțimea G <u>asociativă</u> şi care <u>admite element neutru</u> se numeşte monoid.

Să definim prin inducție compunerea unui număr finit de elemente din *M*:

Fie *(x, y)* → *x * y* o lege de compoziție asociativă pe *M*. Definim $x_1 * x_2 * \ldots * x_n = (x_1 * x_2 * \ldots * x_{n-1}) * x_n$

$$x_1 * x_2 * x_3 = (x_1 * x_2) * x_3$$

$$x_1 * x_2 * x_3 * x_4 = (x_1 * x_2 * x_3) * x_4$$

....

$$x_1 * x_2 * x_3 * \ldots * x_n = (x_1 * x_2 * x_3 * \ldots * x_{n-1}) * x_n$$

Puterea *n-a* *a* lui *x*

Fie *M* o mulțime înzestrată cu o lege de compoziție asociativă, *multiplicativă* şi cu element neutru *e*.
Pentru orice *x e* M şi orice *n eN* definim puterea *n-a a* lui *x* prin:

$$x^n = \begin{cases} x \cdot x \cdot \ldots \cdot x \quad (n - factori), daca\ n \neq 0 \\ e \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad n = 0 \end{cases}$$

Avem evident $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$

Multiplii lui *x*

Dacă *M* este înzestrată cu o lege de compoziție asociativă *aditivă* şi dacă element neutru 0 *e M* atunci pentru orice *x e* M *şi* orice *n e* N, definim *nx* prin:

$$nx = \begin{cases} x + x + \ldots + x \quad (n - termeni), daca\ n \neq 0 \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad n = 0 \end{cases}$$

Avem evident $mx + nx = (m+n)x$

5. Element simetrizabil

Dacă „* ” este o operație pe mulțimea M, având elementul neutru *e*, spunem că un element *x e* M este *simetrizabil* față de operația „* ”, dacă există *x' e M* cu proprietatea: $x * x' = x' * x = e$.
Elementul x' se numeşte *simetricul* lui *x* față de operația „* ”.

Notație

In notație aditivă (adunare), simetricul elementului *x* se notează cu - *x* şi se numeşte *opusul* lui *x*.
în notația multiplicativă (inmultire) simetricul lui *x*, dacă există, se notează x^{-1} sau $\frac{1}{x}$ şi se numeşte *inversul* lui *x* (iar *x* se numeşte *element inversabil*), evident $x \neq 0$.

Observatie
Dacă x *e* M are un element simetric, atunci acesta este unic.

Exemple:

1. **Față de adunarea definită pe mulțimea numerelor naturale, singurul element simetrizabil este 0.**
2. **Considerând înmulțirea definită pe Z singurele elemente simetrizabile sunt 1 şi -1.**
3. **Față de adunarea definită pe Z toate elementele sunt simetrizabile.**
4. **Pe mulțimea $M_n(C)$ a matricelor pătratice de ordinul *n*, elementele simetrizabile față de înmulțire sunt matricele *A* cu det $A \neq 0$, simetricul matricei *A* fiind matricea inversă A^{-1} .**
Pe aceeaşi mulțime $M_n(C)$ considerând operația de adunare observăm că orice matrice *A* este simetrizabilă şi are ca simetric matricea - *A*, numită opusa matricei *A*.

5. **Față de compunerea funcțiilor elementele simetrizabile sunt funcțiile bijective, deoarece o funcție este inversabilă dacă și numai dacă este bijectivă.**

6. **Pe mulțimea R a numerelor reale se definește legea de compoziție „* ” astfel:**

$*: R\times R \to R$, $x * y = xy - 7x - 7y + 56$ al cărei element neutru este $e = 8$. Căutăm elementele simetrizabile.

Fie $x \in R$.. Căutăm $x' \in R$ astfel încât $x * x' = x' * x = 8 \Leftrightarrow xx' - 7x - 7x' + 56 = xx' - 7x' - 7x + 56 = 8 \Leftrightarrow$ (deoarece pe R adunarea și „•" sunt comutative) $\Leftrightarrow xx' - 7x - 7x' + 56 = 8 \Leftrightarrow x'(x - 7) = 7x - 48$.

i) Dacă $x = 7$ ecuația devine $x' \cdot 0 = 1$, care nu are soluție. Prin urmare, $x = 7$ nu este simetrizabil.

ii) Dacă $x \neq 7$ obținem $x' = \frac{7x-48}{x-7} \in R$, prin urmare orice element din R \ {7} este simetrizabil.

De exemplu simetricul lui 2 este numărul $2' = \frac{7\cdot 2-48}{2-7} = \frac{34}{5}$

*Dacă „ * " este o operație pe M, asociativă cu element neutru, notăm* **U(M) mulțimea elementelor** *din M,* **simetrizabile** *față de operația „*".*

Exemple;

1. **Pentru mulțimea Z înzestrată cu înmulțirea, U(Z) = {- 1, 1}.**
2. **Pentru R cu legea $x * y = xy - 7x - ly + 56$, după cum am văzut anterior, U(R) = R\{7}.**
3. **Pentru, $M_3(C)$, înzestrată cu înmulțirea, avem**

$U(M_3(C)) = \{A \mid \det A \neq 0\}$.

Observație:

Fie „* ” o lege de compoziție internă asociativă și cu element neutru, definită pe o mulțime *M*. Atunci:

1°. Dacă elementele $x,.y$ sunt simetrizabile, atunci $x * y$ este simetrizabil și $(x * y)' = y' * x'$

2°. Dacă elementul x este simetrizabil, atunci simetricul său x' este de asemenea simetrizabil și $(x')' = x$

Exemple:

1. Pentru înmulțirea matricelor pe $M_3(\mathbb{R})$, dacă A și B sunt inversabile, atunci $A \cdot B$ este inversabilă și $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Spre exemplu, pentru $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ avem $A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 13 \\ 13 & 34 \end{pmatrix}$.

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $(A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 34 & -13 \\ -13 & 5 \end{pmatrix} = B^{-1} \cdot A^{-1}$, iar

$A^{-1} \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 29 & -17 \\ -17 & 10 \end{pmatrix} \neq (A \cdot B)^{-1}$.

2. Funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$ și $g(x) = 3x + 1$ sunt inversabile. $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$ și $g^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}$.

Funcția $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = 2(3x+1)$ are inversa $(f \circ g)^{-1}(x) =$ $= \frac{\frac{1}{2}x - 1}{3} = \frac{x-2}{6} = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$, iar $(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = \frac{x-1}{6}$.

Probleme rezolvate

1. Definim pe $\mathbb{R}$ legea de compoziție „*" prin: $x * y = xy - 3x - 3y + 12$, $(\forall) x, y \in \mathbb{R}$.

   a) Să se arate că $A = (2, 4)$ este o parte a lui $\mathbb{R}$ stabilă în raport cu legea „*".

   b) Să se demonstreze că: $26 < xyz - 36(xy + yz + zx) + 9(x + y + z) < 28$ oricare ar fi $x, y, z \in A$.

Soluție. a) Considerăm $x, y \in A$, atunci: $2 < x < 4$ și $2 < y < 4$, de unde $|x - 3| < 1$ și $|y - 3| < 1$, ceea ce implică $|(x - 3)(y - 3)| < 1$. Aceasta se mai scrie: $-1 < (x - 3)(y - 3) < 1 \Leftrightarrow -1 < xy - 3x - 3y + 9 < 1$ și adunând 3 în toți membrii avem $2 < xy - 3(x + y) + 12 < 4$, adică $x * y \in A$, ceea ce arată că A este parte a lui $\mathbb{R}$ stabilă în raport cu legea de compoziție „*".

b) Deoarece $x * (y * z) = xyz - 3(xy + yz + zx) + 9(x + y + z) - 24$, rezultă că:

$$xyz - 3(xy + yz + zx) + 9(x + y + z) = x * (y * z) + 24.$$

Deoarece $x * (y * z) \in A$ (căci $x, y, z \in A$, iar „*" este lege de compoziție pe A), deducem că: $2 < x * (y * z) < 4 \Leftrightarrow 26 < x * (y * z) + 24 < 28$.

2. Pe $\mathbb{R}$ definim legea de compoziție: $x * y = 2xy + ax + by + 3$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.

i) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care legea este asociativă.

ii) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care legea admite element neutru.

iii) Dacă legea este asociativă și admite element neutru, determinați elementele simetrizabile.

iv) Dacă $a = b = -2$, verificați dacă $M = [1, \infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu „*”.

Soluție. i) „*” asociativă $\Rightarrow (x * y) * z = (\forall)\ x, y, z \in \mathbb{R}$.

$(x * y) * z = 2(x * y) \cdot z + a(x * y) + bz + 3 = 2(2xy + ax + by + 3) \cdot z +$
$+ a(2xy + ax + by + 3) + bz + 3 = \underline{4xyz} + 2axz + \underline{2byz} + 6z + \underline{2axy} + a^2x +$
$+ \underline{aby} + 3a + bz + \underline{3}$ (1)

$x * (y * z) = 2x(y * z) + ax + b(y * z) + 3 = 2x(2yz + ay + bz + 3) + ax +$
$+ b(2yz + ay + bz + 3) + 3 = \underline{4xyz} + \underline{2axy} + 2bxz + 6x + ax + \underline{2byz} + \underline{aby} +$
$+ b^2z + 3b + \underline{3}$ (2)

Din (1) și (2) rezultă: „*” asociativă $\Leftrightarrow 2axz + 6z + a^2x + 3a + bz = 2bxz + 6x + ax +$
$+ b^2z + 3b, (\forall) x, y, z \in \mathbb{R}$. (3)

Pentru $x = 0$ obținem: $(6 + b)z + 3a = b^2z + 3b$, $(\forall) z \in \mathbb{R}$, deci

$$\begin{cases} 6 + b = b^2 \\ 3a = 3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \in \{-2; 3\} \\ a = b \end{cases}.$$

Verificăm în relația (3) (deoarece am obținut valorile dintr-un caz particular) pentru $a = b = -2$: $-4xz + 6z + 4x - 6 - 2z = 4xz + 6x - 2x + 4z - 6$, evident adevărată. Pentru $a = b = 3$: $6xz + 6z + 9 + 3z = 6xz + 6x + 3x + 9z + 9$, evident adevărată.

Prin urmare: „*” este asociativă pentru $a = b = -2$ sau $a = b = 3$.

ii) „*” admite element neutru $\Leftrightarrow \exists\, e \in \mathbb{R}$ astfel încât $e * x = x * e = x$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xe + ax + be + 3 = x \\ 2ex + ae + bx + 3 = x \end{cases}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$. Identificăm coeficienții și obținem:

$$\begin{cases} 2e + a = 1 \\ be + 3 = 0 \\ 2e + b = 1 \\ ae + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ ae + 3 = 0 \end{cases}.$$ Dacă $a = 0$, ecuația $ae + 3 = 0$ nu are soluții. Prin urmare „*” admite element neutru $\Leftrightarrow a = b \neq 0$, caz în care elementul neutru este $e = -\frac{3}{a} \in \mathbb{R}$.

iii) Dacă legea este asociativă și admite element unitate, distingem două cazuri: $a = b = -2$; $e = \frac{3}{2}$ și $a = b = 3$; $e = -1$.

Aflăm elementele simetrizabile în primul caz, al doilea caz îl lăsăm ca exercițiu.

$x * y = 2xy - 2x - 2y + 3$; $e = \frac{3}{2}$.

Fie $x \in \mathbb{R}$, x simetrizabil $\Leftrightarrow \exists\, x' \in \mathbb{R}$ astfel încât $x * x' = x' * x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2xx' - 2x - 2x' +$
$+ 3 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2x'(x - 1) = -\frac{3}{2}$

Dacă $x = 1$ ecuația nu are soluție, deci $x = 1$ nu e simetrizabil.

Dacă $x \neq 1 \Rightarrow x' = -\frac{3}{4(x-1)} \in \mathbb{R}$, deci $(\forall)\ x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ e simetrizabil.

iv) $x \geq 1$ și $y \geq 1 \Rightarrow (x - 1)(y - 1) \geq 0 \Leftrightarrow xy - x - y + 1 \geq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2xy - 2x - 2y + 2 \geq 0 \Leftrightarrow 2xy - 2x - 2y + 3 \geq 1 \Leftrightarrow x * y \geq 1$.

Prin urmare, $M = [1, \infty)$ este stabilă față de legea „*”.

Prof:Ciocotisan Radu-Carei

3. Fie M o mulțime nevidă și fie $(x, y) \to x \cdot y$ o lege de compoziție pe M.

Notând: $H = \{a \in M \mid (xa) \cdot y = x(ay), (\forall) x,y \in M\}$, arătați că H este parte a lui M stabilă în raport cu legea dată.

Soluție. Dacă $a,b \in H$, atunci $(xa)y = x(ay)$ și $(xb)y = x(by)$, $(\forall)x,y \in M$. Prin urmare, $(x(ab))y = ((xa)b)y = (xa)(by) = x(a(by)) = x((ab)y)$, $(\forall)x,y \in M$ de unde $ab \in H$, q.e.d.

4. Să se determine funcțiile $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ astfel încât $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & f(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R}^* \right\}$ să fie parte a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, stabilă în raport cu înmulțirea matricelor.

Soluție. Avem: $\begin{pmatrix} x & f(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y & f(y) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy & xf(y)+f(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ rezultă că există $u \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $\begin{pmatrix} xy & xf(y)+f(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & f(u) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u = xy \\ f(u) = xf(y)+f(x) \end{cases} \Rightarrow f(x \cdot y) = x f(y) + f(x)$, $(\forall)x,y \in \mathbb{R}^*$ (1) în (1) înlocuim $x \to y$, $y \to x$ și obținem: $f(x \cdot y) = y f(x) + f(y)$, $(\forall)x,y \in \mathbb{R}^*$ (2).

Din (1) și (2) avem $x f(y) + f(x) = y f(x) + f(y)$, $(\forall)\ x,y \in \mathbb{R}^*$.

Dând lui y o valoare de exemplu $y = 2$ rezultă $x f(2) + f(x) = 2 f(x) + f(2)$, deci $f(x) = a(x-1)$, $(\forall)x \in \mathbb{R}^*$, $(a = f(2))$.

Deoarece am găsit forma funcției dintr-o valoare particulară, verificăm dacă satisface cerința, $(\forall)\ x,y \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{pmatrix} x & f(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y & f(y) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & a(x-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y & a(y-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} xy & axy - ax + ax - a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy & a(xy-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy & f(xy) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Prin urmare, funcțiile căutate sunt $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = a(x-1)$, $(\forall)a \in \mathbb{R}$.