



scri tuba  
scri GROUP

- | Administratie
- | Arta cultura
- | Biologie
- | Casa gradina
- | Diverse
- | Economie
- | Geografie
- | Gradinita
- | Istorie
- | Jurnalism
- | Limba
- | Literatura romana
- | Management
- | Medicina
- | Personalitati
- | Profesor scoala
- | Sociologie
- | **Stiinta**
  - | Arhitectura constructii
  - | Astronomie
  - | Chimie
  - | Drept
  - | Fizica
  - | Informatica
  - | Matematica
  - | Stiinte politice
  - | Tutorials
- | Tehnica mecanica
- | Timp liber

Username / Parola inexistent

**Adauga documente**

email

Login [Am uitat parola x Creaza cont nou](#)

[Home](#)   [Exploreaza](#)    [Upload](#)

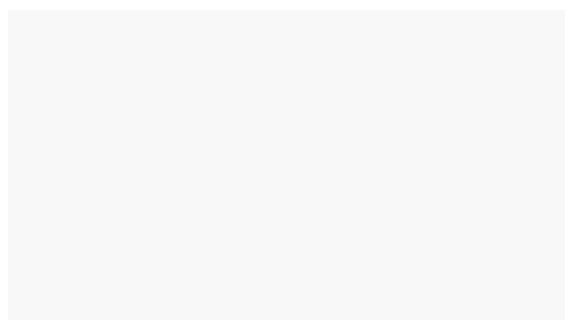


loading...



## [Reciproca teoremei lui Stolz-Cesaro](#)

Matematica





**3D Hoodies**  
**Buy online NOW!**

#### ALTE DOCUMENTE

[Varianta 1 matematica](#)

[Cercul](#)

[Olimpiada nationala de matematica etapa locala  
31- I- 2004](#)

[PLAN DE LECTIE - Media aritmetica a doua sau  
mai multe numere](#)

Politica privind hazardul - Proceduri privind  
evaluarea hazardului

[Tabla inmultirii](#)

[MATRICE DE EVALUARE](#)

MATEMATICĂ - Obiective cadru / de referinta si  
PLANIFICAREA ANUALĂ

[PROBLEME REZOLVATE CU MATRICE](#)

Google™ căutare personalizată

Search

RECIPROCA TEOREMEI LUI STOLZ-CESSARO

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} \left(1 - \frac{b_{n-1}}{b_n}\right) + \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} \cdot \frac{b_{n-1}}{b_n}$$

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} \cdot (1 - u) + xu$$

$$(1 - u)x = (1 - u) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} \quad (\text{dar } u \neq 1, \text{ se poate împarti prin } u)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = x$$

în cazul în care  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{b_{n+1}}$  nu exista sau este egala cu 1, nu ne putem pronunța asupra

reciprocei teoremei Stoltz - Cesaro. Totuși, în acest caz, numit caz de dubiu reciproca poate fi adevărată.

Exemplu :

Sa se calculeze :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n!} - \sqrt[n-1]{(n-1)!}) \quad (\text{Problema lui Traian Lalescu})$$

Vom folosi Teorema lui D'Alambert :

Dacă  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este un sir de numere reale strict pozitive și dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = u > 0 \text{ atunci } \sqrt[n]{u_n} = u$$

Fie  $u_n = \frac{(n+1)^n}{n!}$  atunci :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)^n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e$$

$$\text{Deci } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(n+1)^n}{n!}} = e \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} = e$$

Fie  $u_n = \frac{n^n}{n!}$  atunci :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\text{Deci } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = e \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$$

Avem :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1 \sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{[(n+1)!]^n}{(n!)^{n+1}} \right)^n =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(n+1)^n}{n!} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \right)^n =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \right)^{\frac{n}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)} \quad (\text{Dar } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1) \rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} = e$$

Prin urmare :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1 \sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}} \right)^n = e$$

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{n+1 \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n]{n!}} \right)^n =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( 1 + \frac{n+1 \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n]{n!}} \right)^{\frac{\sqrt[n]{n!}}{n+1 \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}}} \right)^{\frac{n+1 \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n]{n!}} \cdot n}$$

$$\rightarrow e = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1 \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n]{n!}}} \rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1\sqrt{(n+1)!} - n\sqrt{n!}}{n\sqrt{n!}} = 1 \rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1\sqrt{(n+1)!} - n\sqrt{n!})}{n\sqrt{n!}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n!}}{n}}$$

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1\sqrt{(n+1)!} - n\sqrt{n!}) = \frac{1}{e}$$

(Rezolvarea lui Marcel Tena)

O alta rezolvare ar fi aplicând reciproca teoremei

Stoltz - Cesaro în cazul de dubiu :

$$a_n = n\sqrt{n!} \text{ si } b_n = n \quad \forall n \in \mathbb{N} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{b_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \right) \text{ si avem :}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n!} - n\sqrt{(n-1)!}}{n - n + 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n\sqrt{n!} - n\sqrt{(n-1)!}) \Rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n\sqrt{n!} - n\sqrt{(n-1)!}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n!}}{n}$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n!}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^n =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (n\sqrt{n!} - n\sqrt{(n-1)!}) = \frac{1}{e}$$

Dupa cum se observa  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{b_{n+1}} = 1$  si totusi reciproca teoremei

Stoltz - Cesaro functioneaza. Aceasta a doua solutie nu poate fi considerata decât o verificare a primei rezolvari si a cazului ca în acest caz reciproca Stoltz - Cesaro este adevarata.

[Reciproca a doua a teoremei Stoltz-Cesaro](#)

Fie  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  si  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  doua siruri de numere reale a.î :

a) Exista  $\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = x$  (finit sau  $\pm \infty$ )

Atunci :

b) Sirul  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  are proprietatea ca :

$$0 < b_1 < b_2 < \dots < b_n < \dots$$

si  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$

Nici reciproca a doua nu este în general adevarata, dupa cum arata

urmatorul contraexemplu. Fie  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  si  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  cu  $a_n = b_n = (-1)^n$

Este evident ca :

$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = 1$  ,sirul  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nu are proprietatile din concluzie.



[Liniile din palmă indică cea mai bună metodă de a ÎNTINERI, citește si pivește](#)



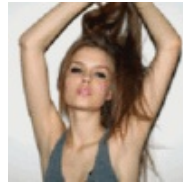
[Părul tău natural va arăta superb, ca în reclame. Află ce să adaugi în șampon](#)



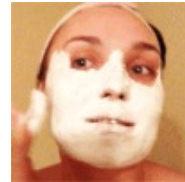
[Părul tău natural va arăta superb, ca în reclame. Află ce să adaugi în șampon](#)



[Creșterea accelerată a părului 24/7! +30 cm în 5 luni, 100% garantat](#)



[Trucuri pentru îngrijirea părului: cum mi-a crescut mai jos de talie în 2 ani](#)



[Înainte să treci de 30, poți rămâne tânără până la 55! Nu aștepta, acționează!](#)



[Masca de argilă ADÂNCEȘTE ridurile dacă nu o faci corect! Iată cum](#)

Sponsorizat de Adnow

## Document Info

Accesari: 1424

Apreciat:

## Comenteaza documentul:

Nu esti inregistrat

Trebuie sa fii utilizator inregistrat pentru a putea comenta

[Creaza cont nou](#)

## A fost util?

Daca documentul a fost util si crezi ca merita sa adaugi un link catre el la tine in site

## Copiaza codul

in pagina web a site-ului tau.

```
<a href="http://www.scribub.com/stiinta/matematika/Reciproc-teoremei-lui-StolzCe2352020110.php">
```



**ecoduri.com**  
EXPLICAM CODURI



**coduri**  
**POSTALE**



Copyright © [Contact](#) (SCRIGROUP Int. 2015 )