Anul IV, Nr. 1 **Ianuarie – Iunie 2002**

RECREAȚII MATEMATICE

REVIST| DE MATEMATIC| PENTRU ELEVI {I PROFESORI

$$e^{i\pi} = -1$$

Editura "Crenguța Gâldău"
IAŞI, 2002

Anul IV, Nr. 1 **Ianuarie - Iunie 2002**

RECREAȚII MATEMATICE

REVIST| DE MATEMATIC| PENTRU ELEVI {I PROFESORI

$$\boxed{e^{i\pi} = -1}$$

Apare cu sprijinul

FILIALEI IAŞI a SOCIETĂŢII de ŞTIINŢE MATEMATICE

IAȘI, 2002

<u>Semnificația formulei de pe copertă</u>:

Într-o formă concisă, formula $e^{i\pi} = -1$ leagă cele patru ramuri fundamentale ale matematicii:

ARITMETICA reprezentată de 1
GEOMETRIA reprezentată de π
ALGEBRA reprezentată de i
ANALIZA MATEMATICĂ reprezentată de e

Adresa redacției:

Catedra de Matematică – Universitatea Tehnică "Gh. Asachi" Iaşi
Bd. Carol I, nr.11, 6600, Iaşi
Tel. 032 – 213737 / int. 123
E-mail: acord@math.tuiasi.ro

ISSN 1582 - 1765
Bd. N. Iorga, Bl. K2, ap. 4
Tel. / Fax: 032 - 230598
IAŞI, 6600

Alin Spumă

Cu multă tristeţe şi părere de rău anunţăm dispariţia în luna decembrie, anul 2001, a unuia dintre cei mai ataşaţi şi entuziaşti membri ai redacţiei revistei noastre.

S-a născut în Iaşi , la 22 noiembrie 1974. În acest oraş drag lui, a parcurs în mod strălucit toate treptele învăţământului, de la cel elementar şi până la cel superior: a absolvit Liceul de informatică „Gr. Moisil" şi a obţinut licenţa în matematică la Universitatea „ Al. I. Cuza". A ocupat prin concurs un post de preparator la Catedra de algebră, Facultatea de matematică a universităţii ieşene.

Pasionat de matematică, s-a îndreptat spre domeniul Algebrei abstracte şi aplicaţiilor acesteia: după doi ani de masterat, s-a înscris la doctorat şi a susţinut examenele şi referatele programate. Lucra la teza de doctorat şi urma să plece în Germania, beneficiind de o bursă de studii, în momentul dispariţiei sale.

Timpul a pus capăt şirului de proiecte în care se avânta şi pentru realizarea cărora era atât de înzestrat.

A muncit cu multă pasiune şi pricepere şi a obţinut de timpuriu frumoase rezultate. Ca elev, a participat la fazele finale ale Olimpiadelor de matematică, Concursurilor rezolvitorilor Gazetei Matematice şi multor concursuri interjudeţene şi a fost răsplătit cu premii şi menţiuni. Ca student, a fost premiat la mai multe ediţii ale Concursului studenţesc Traian Lalescu şi la Sesiunile de comunicări ştiinţifice studenţeşti. Cadru didactic în învăţământul superior fiind, a participat cu regularitate la Conferinţele naţionale de Algebră din ultimii ani.

A dorit mult ca Iaşul să aibă o revistă de matematică elementară şi chiar a avut o iniţiativă personală în acest sens. Întors în ţară, după o perioadă de studii la Universitatea din Udine (Italia), s-a ataşat imediat de revista „Recreaţii matematice", care în acel moment pregătea apariţia primului său număr.

Cu competenţă şi fără a-şi menaja energia şi timpul, a contribuit la creşterea calităţii revistei cu fiecare număr nou apărut. Priceperea sa în tehnoredactarea pe calculator a fost o şansă a revistei la primele sale apariţii. A fost neobosit în promovarea şi distribuirea revistei, folosind orice prilej pe care-l avea: concursuri, tabere de matematică etc.

Era atât de tânăr şi era o prezenţă atât de vie printre noi, membrii redacţiei şi colaboratorii revistei, încât vestea dispariţiei lui a fost primită ca un fapt absurd şi incredibil.

Va rămâne mereu în amintirea noastră ca un exemplu de pasiune şi dăruire, hărnicie şi modestie, entuziasm şi competenţă.

Şi nu avem alt mod mai potrivit de a cinsti memoria celui ce a fost **Alin Spumă**, decât asigurând apariţia revistei, la care a ţinut atât de mult, făcând-o cât mai interesantă şi atractivă.

REDACŢIA REVISTEI

Petre Osmatescu (1925 – 2001)

Petre Osmatescu s-a născut în România la 20 iunie 1925 în satul Vădeni, comuna Moldova, județul Cetatea Albă. Ca o nedreptate istorică, orașul omonim din antichitate, înființat în secolul VI înainte de Christos sub denumirea de Tyras și făcând parte din Moldova lui Ștefan cel Mare, este rebotezat astăzi "Bielgorod Dnestrovski", iar comuna Moldova - "Krutoiarovska" și aparțin amândouă Ucrainei. Școala primară a terminat-o în comuna natală în 1938 (care, la acea dată, mai aparținea României).

În perioada 1945-1947, urmează cursurile pregătitoare de pe lângă Institutul Pedagogic "Ion Creangă" din Chișinău și apoi (1947-1951) cursurile institutului propriu-zis, începându-și cariera ca profesor de matematică și fizică la Școala Medie nr. 2 din Orhei (1951-1956), unde este ales președintele secției metodice de fizică și matematică (1954-1956). În 1956, este transferat la Institutul Pedagogic din Tiraspol.

În 1962, înființează la Tiraspol *Seminarul de Topologie Generală* , *Geometrie Analitică* și *Funcții Reale* pentru studenți și tinerele cadre. În 1964, își susține *teza de doctorat în matematică și fizică* .

În 1965, devine conferențiar, iar în 1979 profesor la Catedra de matematici superioare nr. 1 de la Institutul Politehnic din Chișinău. Cu această ocazie, introduce metodele analizei vectoriale în cursul de analiză matematică. Tot în 1965, înființează și conduce *Seminarul de Topologie Generală* de la Universitatea de Stat din Moldova. El este membru al Societății Matematice din Moldova și Președinte al Societății "East-West".

A fost numit în 1996 *Persoană Eminentă a Educației Publice* și a primit "*Mileniul 2000. Medalie de Onoare*". El a fost fondatorul și organizatorul celor șapte *Simpozioane Tiraspoliene de Topologie și Aplicații*, pe care le-a editat. Cercetările și rezultatele sale sunt de Topologie generală și Teoria funcțiilor .

A ținut conferințe în Canada, Egipt, Elveția, Germania, România, Spania și Turcia. Un întreg ciclu de conferințe l-a ținut la Universitatea Tehnică din Iași, cu care s-a semnat și un acord de cooperare interuniversitară.

O maladie necruțătoare a întrerupt firul vieții sale în noiembrie 2001, punând astfel capăt unei activități prodigioase.

Regretatul Profesor **Petre Osmatescu** , al cărui prieten am fost, s-a impus pe două fronturi, care se întrepătrund : pe de o parte, pe plan matematic, în topologie, prin introducerea *spațiilor subtile* , unde elementul de bază este diviziunea punctului (ceva analog cu divizarea atomului din fizică), teorie care și-a găsit aplicații în economie, finanțe și sociologie, cât și prin înființarea la Chișinău a revistei "*Scripta Scientiarum Matematicarum*", pe care a condus-o până în ultima clipă, iar pe de altă parte, pe plan românesc, s-a dedicat luptei, prin mijloace culturale, pentru reunificarea Basarabiei cu România, deziderat, care sperăm să nu rămână doar un vis al nostru.

Prof. dr. ***Petru CARAMAN***

Niels Henrik Abel – 200 de ani de la naştere

A fost una dintre fiinţele de excepţie ce natura rareori dă naştere în cursul unui secol.
August Leopold Crelle

N. H. Abel (1802-1829) s-a născut la Findöe într-o familie cu frumoase tradiţii. Moartea timpurie a tatălui şi falimentul bunicului său au dus familia la o existenţă precară. Se cunosc puţine lucruri despre Abel. Ocupaţiile lui favorite au fost teatrul şi matematica.

La 19 ani, student fiind, N. H. Abel propune o rezolvare algebrică a ecuaţiei de gradul a cincilea. Aceasta conţinea o eroare pe care tot el o găseşte doi ani mai târziu. În "*Mémoires sur les l'équations algébriques où on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré* " (1824), Abel pune capăt încercărilor de continuare a lucrărilor lui *Tartalia, Cardano* şi *Ferrari,* ce au durat mai bine de un secol.

În 1825 face o călătorie de studii în Germania, Franţa şi Italia. La Berlin cunoaşte pe *A. L. Crelle*, fondatorul revistei *Journal für die reine und angewandte Mathematik.* Multe din lucrările lui Abel au fost publicate în această revistă.

În iulie 1826 se află la Paris, unde cunoaşte pe cei mai importaţi membri ai Academiei de Ştiinţe: *Cauchy, Laplace, Legendre ş.a.* Pregăteşte şi depune la acest înalt for de ştiinţă cea mai importantă lucrare a sa *„Mémorie sur une propriété générale d'une classe très étendue des fonctions transcendentes*". A aşteptat zadarnic un răspuns din partea Academiei de Ştiinţe, în particular din partea lui *Cauchy* şi *Legendre*. Aici, în Paris, apar primele semne ale bolii sale. Răspunsul mult aşteptat vine la câteva luni după moartea sa. În 1830 i s-a acordat postum, pentru această lucrare, marele premiu al Academiei de Ştiinţe (împreună cu *Jacobi*). Memoriul a dispărut pentru un timp şi a fost publicat abia în 1841.

Din Paris se întoarce acasă unde îşi trăieşte ultimii doi ani de viaţă împovărat de griji. Moare la numai 26 de ani, răpus de tuberculoză, boală incurabilă în acea vreme.

În cinci ani de creaţii originale şi profunde, **Niels Henrik Abel** a reformat o parte a analizei matematice şi a deschis drumuri noi în teoria grupurilor şi în geometria analitică şi algebrică. A adus contribuţii în teoria ecuaţiilor algebrice şi ecuaţiilor abeliene, teoria seriilor binomiale şi a seriilor în general, teoria funcţiilor eliptice şi, mai general, a funcţiilor algebrice. Un număr mare de noţiuni şi teoreme importante poartă numele lui : integrale abeliene, grupuri abeliene, teorema Abel-Ruffini privind imposibilitatea rezolvării prin radicali a ecuaţiilor algebrice de grad mai mare decât patru etc.

Recent guvernul norvegian a hotărât crearea unui premiu care să poarte numele marelui matematician, **Premiul Abel**. Acesta este destinat domeniului matematicilor şi se acordă anual începând cu anul 2002. Valoarea premiului este de 200.000.000 coroane norvegiene (27.100.000 euro). Crearea unui Premiu Abel a fost propusă şi în 1902 de către regele Oscar II al Suediei şi Norvegiei. Datorită separării celor două ţări în 1905, proiectul a fost abandonat. Până acum, cel mai prestigios premiu pentru matematicieni a fost *medalia Fields*, acordată din patru în patru ani, începând din 1936. **Premiul Abel** este ca valoare şi importanţă comparabil cu *Premiul Nobel* (ce nu se acordă matematicienilor).

Prof. dr. ***Temistocle BÎRSAN***

Asupra ipotezei lui Goldbach

Petru MINUȚ [1]

Una din problemele care au impulsionat considerabil dezvoltarea teoriei numerelor şi care nu este încă rezolvată, în ciuda eforturilor făcute în ultimii 250 de ani de matematicieni dintre cei mai renumiți, este aşa numita ***ipoteză a lui Goldbach***.

Problema a fost pusă pentru prima dată în corespondența dintre *Christian Goldbach* şi *Leonhard Euler*, la vremea respectivă matematicieni la Academia din Sankt Petersburg. La 7 iunie 1742, Goldbach îi scrie lui Euler: *"Evident, orice număr (natural) este suma a trei numere prime".* La 30 iunie 1742, Euler îi răspunde: *"Consider ca o teoremă pe deplin adevărată că orice număr par este suma a două numere prime, deşi nu pot să o demonstrez"*. Prin tradiție s-a păstrat sub denumirea de ipoteza lui Goldbach următoarea afirmație:

Propoziția 1. *Orice număr natural par, mai mare ca* 2*, este suma a două numere prime* (de exemplu, $4=2+2$, $6=3+3$, $8=3+5$, $10=3+7=5+5$ etc.).

A fost formulată şi o ipoteză mai tare:

Propoziția 2. *Orice număr natural par, mai mare ca* 6*, este suma a două numere prime diferite.*

Propoziția 2 a fost verificată de *Pipping* pentru toate numerele pare până la 100000.

Teorema 1. *Propoziția 2 este echivalentă cu afirmația: orice număr natural mai mare ca 17 este suma a trei numere prime diferite.*

Demonstrație. Observăm că dacă n se reprezintă sub forma $n=p+q+r$, p,q,r prime, în cazul când n este impar toate trei numerele p,q,r sunt impare, iar în cazul când n este par unul dintre ele este par (deci 2) şi celelalte două impare.

Să mai observăm că nu există numere $n\in\mathbf{N}$ care să admită patru reprezentări de forma: $n=3+3+r_1$, $n=5+5+r_2$, $n=7+7+r_3$, $n=11+11+r_4$ (r_1,r_2,r_3,r_4 prime). Într-adevăr, în caz contrar ar rezulta că $r_1=r_4+16$, $r_2=r_4+12$, $r_3=r_4+8$. Ca urmare, dacă r_4 este de forma $r_4=3k$, atunci r_2 este multiplu de 3; dacă $r_4=3k+1$, atunci r_3 este multiplu de 3 şi dacă $r_4=3k+2$, atunci r_1 este multiplu de 3, absurd.

Presupunem că Propoziția 2 este adevărată şi fie $n>17$, n impar. Numerele pare $n-3$, $n-5$, $n-7$, $n-11$ sunt mai mari ca 6 şi se scriu sub forma unei sume de două numere prime diferite: $n-3=p_1+q_1$, $n-5=p_2+q_2$, $n-7=p_3+q_3$, $n-11=p_4+q_4$. Conform observației de mai sus, din aceste patru reprezentări ale lui n ca sume de trei numere prime există cel puțin una în care toți termenii sunt diferiți.

Dacă n este par, $n-2$ este par şi se poate scrie sub forma $n-2=p+q$, unde p şi q sunt două numere prime impare diferite, deci $n=2+p+q$.

[1] Prof. dr. , Catedra de algebră, Univ. "Al. I. Cuza", Iaşi

Invers, presupunem că orice număr mai mare ca 17 este suma a trei numere prime diferite. Dacă n este par, $n > 15$, avem $n+2$ par, $n+2 > 17$, $n+2 = 2+p+q$, deci $n = p+q$, p și q numere prime diferite. Pentru $6 < n \leq 15$ avem: 8=3+5, 10=3+7, 12=5+7, 14=3+11. Cu aceasta demonstrația este completă.

Teorema 2. *Dacă ipoteza lui Goldbach este adevărată, orice număr natural impar, mai mare ca 7, este suma a trei numere prime impare.*

Demonstrație. Dacă $2n+1 > 7$, $(2n+1)-3 = 2(n-1) > 4$ şi conform ipotezei lui Goldbach $(2n+1)-3 = p+q$, p, q prime, impare. Deci $2n+1 = 3+p+q$.

Observație. *I.M. Vinogradov* a demonstrat, în 1937, că *orice număr natural impar mai mare ca $3^{3^{16}}$ este sumă de trei numere prime.*

Considerăm propoziția:

Propoziția 3. *Orice număr natural impar, mai mare ca 7, este sumă de trei numere prime impare.*

Pentru a arăta că Propoziția 3 este o teoremă (propoziție adevărată) ar trebui verificat că orice număr natural impar *n*, $7 < n < 3^{3^{16}}$ se poate scrie ca o sumă de trei numere prime impare.

Teorema 3. *Dacă ipoteza lui Goldbach este adevărată, atunci orice număr întreg impar n se poate reprezenta, într-o infinitate de moduri sub forma $n = p+q-r$, unde p, q, r sunt numere prime.*

Demonstrație. Fie n un număr întreg impar. Putem alege, într-o infinitate de moduri, un număr prim impar r astfel încât $n+r > 4$. Conform ipotezei lui Goldbach există două numere prime impare p şi q astfel încât $n+r = p+q$.

Teorema 4. *Orice număr natural mai mare ca 11 este suma a două numere compuse.*

Demonstrație. Dacă n este par, $n-4$ este par (deci compus) şi $n = 4+(n-4)$. Dacă n este impar, $n-9$ este par (deci compus) şi $n = 9+(n-9)$.

Observație. *G.H. Hardy şi J.E. Littlewood* au formulat **ipoteza** că *orice număr natural n, suficient de mare este suma unui număr prim şi a unui pătrat* : $n = p+k^2$, p prim, $k \in \mathbf{N}$. Ipoteza nu a putut fi încă confirmată sau infirmată. O altă ipoteză a lui Hardy şi Littlewood a devenit teoremă prin demonstrația dată de *I.V. Linnik* în 1959 :

Teorema 5. *Orice număr natural, suficient de mare, este suma între un număr prim şi două pătrate: $n = p+k^2+h^2$, p prim, $k, h \in \mathbf{N}$.*

Demonstrația acestei teoreme nu poate fi făcută cu mijloace elementare.

Bibliografie

1. **D. A. Buhştab** – *Teoria cisel*, Moskva, 1960.
2. **C. Creangă, C. Cazacu, P. Minuț, Gh. Opaiț, C. Reischer** – *Introducere în teoria numerelor*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti , 1965.
3. **P. Minuț** – *Teoria numerelor. Capitole introductive*, Ed. "Crenguța Gâldău", Iaşi, 1997.
4. **W. Sierpinski** – *Ce ştim şi ce nu ştim despre numerele prime*, Ed. Științifică, Bucureşti, 1966.

Generalizarea teoremei de omologie a lui Barbilian

Constantin COCEA [1]

Strălucitul matematician Dan Barbilian a demonstrat că două triunghiuri echilaterale, de acelaşi centru, sunt triomoloage. Vom extinde în cele ce urmează acest rezultat. Are loc următoarea

Teoremă. *Fie ABC un triunghi cu centrul cercului înscris I;* A_1, B_1, C_1 *punctele de contact ale cercului înscris cu laturile, iar* $A_2B_2C_2$ *un triunghi având centrul cercului circumscris în I şi invers asemenea cu* $A_1B_1C_1$. *Atunci dreptele* AA_2, BB_2, CC_2 *sunt concurente (adică triunghiurile* ABC *şi* $A_2B_2C_2$ *sunt omologice)*

Demonstraţie. Fie *0, a, b, c* afixele punctelor I, A, B, C, iar $\mathcal{C}(I,1)$ cercul înscris de rază unitate. Atunci:

$$|a_1| = |b_1| = |c_1| = 1 \tag{1}$$

Triunghiul $A_2B_2C_2$ fiind invers asemenea cu $A_1B_1C_1$, cu centrul cercului circumscris I, rezultă că există $\lambda \in \mathbf{C}$ încât

$$a_2 = \lambda\overline{a_1}, b_2 = \lambda\overline{b_1}, c_2 = \lambda\overline{c_1} \tag{2}$$

În loc să demonstrăm concurenţa dreptelor AA_2, BB_2, CC_2, vom demonstra (având în vedere *teorema lui Desargues*) că punctele $\{\alpha\} = BC \cap B_2C_2$, $\{\beta\} = CA \cap C_2A_2$ şi $\{\gamma\} = AB \cap A_2B_2$ sunt coliniare.

Panta complexă a dreeptei IA_1 este $k_{IA_1} = \dfrac{a_1}{\overline{a_1}}$. Cum *BC* este tangentă cercului înscris, rezultă că ecuaţia lui *BC* este

$$(BC) \quad z - a_1 = -\frac{a_1}{\overline{a_1}}\left(\overline{z} - \overline{a_1}\right) \quad \text{sau} \quad z\,\overline{a_1} + \overline{z}a_1 - 2 = 0. \tag{3}$$

Se ştie că raportul în care o dreaptă de ecuaţie $\alpha z + \beta\overline{z} + \gamma = 0$ împarte un segment (*BC*), afixele lui *B* şi *C* fiind b respectiv c, este

$$R = \left|\frac{\alpha b + \beta\overline{b} + \gamma}{\alpha c + \beta\overline{c} + \gamma}\right|.$$

Prin urmare, ţinând seama de (2) şi (3), avem :

$$\frac{\overline{\alpha B_2}}{\overline{\alpha C_2}} = \left|\frac{\lambda\overline{b_1}\,\overline{a_1} + \overline{\lambda}b_1a_1 - 2}{\lambda\overline{c_1}\,\overline{a_1} + \overline{\lambda}c_1a_1 - 2}\right|. \tag{4}$$

Având în vedere expresiile analoage cu (4) ale rapoartelor $\dfrac{\overline{\beta C_2}}{\overline{\beta A_2}}$ şi $\dfrac{\overline{\gamma A_2}}{\overline{\gamma B_2}}$, obţinem:

[1] Profesor , Liceul Teoretic "D.Cantemir", Iaşi

$$\frac{\overline{\alpha B_2}}{\overline{\alpha C_2}}\frac{\overline{\beta C_2}}{\overline{\beta A_2}}\frac{\overline{\gamma A_2}}{\overline{\gamma B_2}}=1$$

ceea ce probează coliniaritatea punctelor α, β, γ, deci triunghiurile *ABC* şi $A_2B_2C_2$ sunt omologice.

Observaţie. Dacă *ABC* este echilateral , *I* este centrul comun al triunghiurilor *ABC* şi $A_1B_1C_1$ şi se obţine:

Teorema lui BARBILIAN. *Două triunghiuri echilaterale de acelaşi centru, ABC şi* $A_2B_2C_2$ *, sunt în trei moduri omologice:*

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & B & C \\ B_2 & C_2 & A_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & B & C \\ C_2 & A_2 & B_2 \end{pmatrix}.$$

Demonstraţia decurge din teorema anterioară, deoarece două triunghiuri echilaterale sunt în trei moduri invers asemenea.

Observaţie. Teorema se poate extinde şi astfel:

Teoremă. *Fie ABC un triunghi cu* I_a *centrul cercului exînscris corespunzător laturii BC, iar* A_1, B_1, C_1 *punctele de contact ale acestui cerc exînscris cu laturile BC, CA respectiv AB. Fie* $A_2B_2C_2$ *un triunghi invers asemenea cu triunghiul* $A_1B_1C_1$ *având centrul cercului circumscris în* I_a*. Atunci triunghiurile ABC si* $A_2B_2C_2$ *sunt omologice.*

Consecinţa 1. *Fie ABC un triunghi, iar* A_1, B_1, C_1 *punctele de contact ale cercului înscris* $\mathcal{C}$ *(I,r) cu laturile. Paralelele prin* B_1 *şi* C_1 *la BC retaie cercul* $\mathcal{C}$ *în* B_2, C_2*. Să se arate că dreptele* AA_1, BB_2, CC_2 *sunt concurente.*

Demonstraţie. Triunghiurile $A_1B_1C_1$ şi $A_2B_2C_2$ au acelaşi centru al cercului circumscris (punctul *I*) şi sunt invers egale, deci invers asemenea.

Consecinţa 2. *Fie ABC un triunghi, iar* A_1, B_1, C_1 *punctele de contact ale cercului înscris* $\mathcal{C}$ *(I,r) cu laturile. Notăm cu* A_2, B_2, C_2 *simetricele punctelor* A_1, B_1, C_1 *faţă de un diametru oarecare al cercului* $\mathcal{C}$*. Atunci dreptele* AA_2, BB_2, CC_2 *sunt concurente.*

Demonstraţie. Centrul cercului circumscris triunghiului $A_2B_2C_2$ este *I*, iar triunghiurile $A_2B_2C_2$ şi $A_1B_1C_1$ sunt invers egale, deci invers asemenea.

Bibliografie

1. **D. Barbilian - I. Barbu -** *Pagini inedite,* Editura Albatros, Bucureşti, 1981.
2. **C. Cocea** - *Proprietăţi remarcabile ale triunghiurilor invers asemenea,* Să înţelegem matematica, Bacău, 1992.
3. **C. Cocea** - *Teoreme de triortologie şi triparalelogie,* 1992.
4. **P. S. Modenov** - *Probleme de geometrie ,* Editura "Nauka", Moscova, 1979.
5. **N. Mihăileanu** - *Utilizarea numerelor complexe în geometrie,* Ed. Tehnică, Bucureşti, 1968.

Asupra unor şiruri de integrale

Iuliana GEORGESCU [1] ***şi Paul GEORGESCU*** [2]

Articolul de faţă prezintă un mod de calcul al limitelor unor şiruri $(x_n)_{n\geq 1}$ de termen general $x_n = \int_a^b f^n(x)dx$, cu f satisfăcând anumite ipoteze ce vor fi precizate ulterior. În particular, se pot determina limitele şirurilor $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1}, (c_n)_{n\geq 1}, (d_n)_{n\geq 1}$ de termen general $a_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$, $b_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$, $a_n = \int_0^{\pi/2} \mathrm{tg}^n x dx$, $a_n = \int_1^e \ln^n x dx$.

Insistăm mai întâi asupra unei soluţii eronate date în [**2**] pentru faptul că $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

„**Soluţie.**“ Aplicând teorema de medie, $\exists c \in (0, \pi/2)$ astfel încât $\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = = \pi/2 \cdot \sin^n c$. Deoarece $\sin c \in (0,1)$, avem $\lim_{n\to\infty} \sin^n c = 0$ şi, deci, $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = 0.$

Totuşi, c nu este constant, ci depinde de n, şi nu putem deduce că $\lim_{n\to\infty} \sin^n c = 0.$

În cele ce urmează vom indica un mod de calcul al unor limite de acest tip.

Teorema 1. *Dacă* $f:[a,b]\to[0,1]$ *este continuă, iar* $U(f) = \{x \in [a,b];\ f(x) = 1\}$ *este finită, atunci* $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f^n(x)dx = 0.$

Demonstraţie. Presupunem că $U(f) = \{x_1, x_2, \ldots x_k\}$ şi fie $\varepsilon > 0$ arbitrar, dar fixat. Considerăm $I_i = (a_i, b_i)$ cu $x_i \in I_i$ şi $\mathrm{l}(I_i) < \varepsilon/(k+1)$, $i = \overline{1,k}$ şi $\mathrm{l}(I_i)$ = lungimea intervalului I_i (daca $x_1 = a$ sau $x_k = b$, atunci $I_1 = [a_1, b_1)$, respectiv $I_k = (a_k, b_k]$).

Fie $D_1 = \bigcup_{i=1}^{k} [a_i, b_i]$ şi $D_2 = [a,b] \setminus \bigcup_{i=1}^{k} (a_i, b_i)$. Cum D_2 este o reuniune finită de intervale închise şi mărginite, şi f este continuă, există $M = \sup_{x\in D_2} f(x)$, iar $M < 1$. De aici, rezultă că $\int_{D_2} f^n(x)dx \leq M^n \cdot (\pi/2)$. Deoarece $f(x) \leq 1$, $\forall x \in [a,b]$, se deduce că $\int_{D_1} f^n(x)dx \leq \sum_{i=1}^{k} (b_i - a_i)\pi/2$. În consecinţă, $\int_a^b f^n(x)dx \leq k\varepsilon/(k+1) + M^n(\pi/2)$.

---

[1] Profesor, Liceul cu Program Sportiv, Iaşi

[2] Profesor, Liceul Teoretic „Grigore Moisil”, Iaşi

Alegând acum $n_0(\varepsilon)$ astfel încât $M^n \cdot (\pi/2) < \varepsilon/(k+1),\ \forall n \geq n_0(\varepsilon)$, se obține că $\int_a^b f^n(x)dx < \varepsilon,\ \forall n \geq n_0(\varepsilon)$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f^n(x)dx = 0.$

Observația 1. Ipoteza „$U(f)$ este finită” din enunț poate fi înlocuită cu „$U(f)$ este Jordan neglijabilă”, teorema rămânând valabilă cu aceeaşi demonstrație.

Corolar 1. *Dacă $f:[a,b]\to[0,1]$ este continuă şi strict crescătoare (sau strict descrescătoare), iar $f(b)=1$ (respectiv $f(a)=1$), atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f^n(x)dx = 0.$

Demonstrație. Suntem în ipotezele teoremei , cu $U(f)=\{b\}$, respectiv $U(f)=\{a\}$.

Aplicația 1. *Are loc relația* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$.

Soluție. Se aplică Corolarul 1, ținându-se seama de monotonia funcțiilor de sub semnul de integrală.

În cele ce vor urma vom nota cu $D(f)$ mulțimea punctelor de discontinuitate ale unei funcții f. Observăm că este valabilă deasemenea următoarea îmbunătățire a Teoremei 1.

Teorema 2. *Dacă $f:[a,b]\to[-1,1]$, iar $D(|f|)$ şi $U(|f|)$ sunt Jordan-neglijabile, atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f^n(x)dx = 0$.

Demonstrație. Deoarece f este integrabilă Riemann, $|f|, f^n$ şi $|f|^n$ sunt de asemenea integrabile Riemann. Fie acum $\varepsilon > 0$ arbitrar, dar fixat. Deoarece $D(|f|)$ este Jordan-neglijabilă , $\exists k \in \mathbf{N}^*$ şi $(I_i)_{1\leq i\leq k}$ astfel încât $I_i = (a_i, b_i)$, $D(|f|) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} I_k$ şi $\sum\limits_{i=1}^{k}(b_i - a_i) < \varepsilon/2$.

Notăm $D_1 = \bigcup\limits_{i=1}^{k}[a_i, b_i]$, $D_2 = [a,b] \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k}(a_i, b_i)$. Mai departe, $\int_{D_1} |f|^n(x)dx \leq \varepsilon/2$, şi cum $|f|^n$ este continuă pe D_2, $\int\limits_{D_2} f^n(x)dx$ se poate majora cu ajutorul Teoremei 1. Rezultă de aici că $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b |f|^n(x)dx = 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f^n(x)dx = 0.$

Aplicația 2. *Fie $b>0$, iar* $f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & x \in (0,b] \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$. *Atunci f este integrabilă Riemann, iar* $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f^n(x)dx = 0$.

Soluție. Se observă că $-1 \le f \le 1$, $\forall x \in [0, b]$ şi $D(|f|) = \{0\}$. Atunci f este integrabilă Riemann, conform criteriului Lebesgue de integrabilitate Riemann. Mai departe, $U(|f|) = \{2/(2k+1)\pi;\ k \in \mathbf{N}\}$ este de măsură Jordan nulă şi se poate aplica Teorema 2.

Observația 2. Folosind noțiuni de teoria măsurii şi integralei Lebesgue, mai precis teorema lui Egorov, se poate demonstra următorul rezultat:

Teorema 3. *Fie* $f:[a,b] \to I$ *continuă,* $g:[a,b] \to \mathbf{R}$ *integrabilă Riemann şi* $(g_n)_{n\ge1}$ *un şir de funcții continue,* $g_n : I \to \mathbf{R}$*, astfel încât* $(g_n \circ f)(x) \to g(x)$ $\forall x \in [a, b]$, *şi* $|(g_n \circ f)(x)| \le M$, $\forall x \in [a, b]$. *Atunci* $\int_a^b (g_n \circ f)(x)dx \to \int_a^b g(x)dx$.

Aplicația 3. Pentru $a = 0$, $b = \pi/2$, $g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \pi/2) \\ 1, & x = \pi/2 \end{cases}$, $g_n(x) = x^n$, $f(x) = \sin x$, remarcând că sunt îndeplinite condițiile Teoremei 3, iar $\int_0^{\pi/2} g(x)dx = 0$, obținem că $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Analog deducem că $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} d_n = 0$.

Aplicația 4 (**V. Drulă** şi **I. Paralescu**, *Problema 24154,* G.M. *7-8/1999*). *Calculați:*

a) $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x + \sin^{2n} x}dx$ b) $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin x + \sin^{2n} x}dx$.

Soluție. Aplicăm Teorema 3. Luăm

a) $a = 0$, $b = \pi/2$, $g_n(x) = \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{1+x^2+x^n}$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}, & x \in [0, \pi/2) \\ 1/3, & x = \pi/2 \end{cases}$,

b) $a = 0$, $b = \pi/2$, $g_n(x) = \frac{1}{1+x^2+x^{2n}}$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = \begin{cases} 1/1+x^2, & x \in [0, \pi/2) \\ 1/3, & , x = \pi/2 \end{cases}$.

Bibliografie

1. **D. M. Bătinețu *et al.*** – *Primitive şi integrale ,* Ed. Bârchi, Timişoara, 1998.
2. **V. Schneider** – *Culegere de probleme de analiză matematică,* Ed. Hyperion, Craiova, 1993.

O generalizare a lemei lui Riemann

Dan POPESCU [1] ***şi Florin POPOVICI*** [2]

În această notă sunt generalizate următoarele două rezultate:

Teorema 1 (Lema lui Riemann [3]). *Dacă* $f:[0,2\pi]\to \boldsymbol{R}$ *este o funcţie integrabilă Riemann, atunci şirurile* $\left(\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx\right)_{n\in N^*}$ *şi* $\left(\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx\right)_{n\in N^*}$ *sunt convergente şi avem* $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0 = \lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx$.

Teorema 2 (Problema XII.19 [1]). *Dacă* $f:[0,T]\to \boldsymbol{R}$ *este o funcţie continuă şi* $g:[0,\infty)\to[0,\infty)$ *este o funcţie continuă şi periodică de perioadă T, atunci*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T f(x)\,g(nx)\,dx = \frac{1}{T}\left(\int_0^T f(x)\,dx\right)\left(\int_0^T g(x)\,dx\right).$$

Amintim mai întâi un rezultat la care vom face referire.

Teorema 3[2]. *Dacă* $f:[a,b]\to \boldsymbol{R}$ *este o funcţie integrabilă Riemann şi* $\varphi:[c,d]\to[a,b]$ *este o funcţie bijectivă, derivabilă şi cu derivata integrabilă Riemann, atunci funcţia* $(f\circ\varphi)\varphi'$ *este integrabilă Riemann şi are loc formula "schimbării de variabilă"*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Corolar. *Fie* $\alpha\in \boldsymbol{R}^*$ *astfel încât funcţia de gradul întâi* $\varphi:[c,d]\to[a,b]$, $\varphi(x)=\alpha x+\beta$ *este o funcţie bijectivă. Dacă* $f:[a,b]\to \boldsymbol{R}$ *este o funcţie integrabilă Riemann atunci funcţia* $f\circ\varphi$ *este integrabilă Riemann şi are loc formula*

$$\int_a^b f(x)dx = \alpha\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))dt.$$

Rezultatul principal este dat de

Teorema 4 (Lema lui Riemann generalizată). *Dacă* $f:[0,T]\to \boldsymbol{R}$ *este o funcţie integrabilă Riemann şi* $g:[0,\infty)\to \boldsymbol{R}$ *este o funcţie periodică de perioadă T, astfel încât restricţia* $g|_{[0,T]}$ *este integrabilă Riemann, atunci avem:*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T f(x)\,g(nx)\,dx = \frac{1}{T}\left(\int_0^T f(x)\,dx\right)\left(\int_0^T g(x)\,dx\right). \tag{1}$$

[1] Profesor, Colegiul Naţional "Ştefan cel Mare", Suceava,

[2] Profesor, Liceul Teoretic "N. Titulescu" ,Braşov

Demonstrație. Conform Corolarului, funcția dată de $x \to g(nx)$, $x \in [0,T]$ este integrabilă Riemann. Urmează că şirul $\left(\int_0^T f(x)\, g(nx)\, dx \right)_{n \in N^*}$ este corect definit.

Pentru orice $n \in \boldsymbol{N^*}$ fie $\Delta_n = \left(0 = x_{n0} < x_{n1} < \ldots < x_{nn} = T\right)$, unde $x_{ni} = i\dfrac{T}{n}, (\forall) i \in \{0,1,\ldots n\}$. Conform primei teoreme de medie, pentru orice $i \in \{0,1,\ldots n\}$ există $\gamma_{ni} \in \left[\inf\left\{f(x) \middle| x \in [x_{n,\,i-1}, x_{ni}]\right\},\ \sup\left\{f(x) \middle| x \in [x_{n,\,i-1}, x_{ni}]\right\}\right]$ astfel încât

$$\int_{x_{n,\,i-1}}^{x_{ni}} f(x)dx = \gamma_{ni}\left(x_{ni} - x_{n,i-1}\right) = \gamma_{ni}\frac{T}{n} \tag{2}$$

Evident, avem

$$\int_0^T f(x)\, g(nx)\, dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{n,i-1}}^{x_{ni}} f(x)\, g(nx) dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{n,i-1}}^{x_{ni}} (f(x) - \gamma_{ni}) g(nx) dx + \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ni} \int_{x_{n,i-1}}^{x_{ni}} g(nx) dx. \tag{3}$$

Deoarece funcția g este periodică de perioadă T şi restricția $g\big|_{[0,T]}$ este integrabilă Riemann, rezultă că funcția g este mărginită, deci există $M \in (0,\infty)$ astfel încât $|g(x)| \le M, (\forall) x \in [0,\infty)$. Urmează că

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{n,\,i-1}}^{x_{ni}} (f(x) - \gamma_{ni}) g(nx) \right| \le \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{n,\,i-1}}^{x_{ni}} |f(x) - \gamma_{ni}|\, |g(nx)| dx \le$$

$$\le M \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{n,\,i-1}}^{x_{ni}} |f(x) - \gamma_{ni}|\, dx \le M\left(S_{\Delta_n}(f) - s_{\Delta_n}(f)\right)$$

unde $S_{\Delta_n}(f)$, $s_{\Delta_n}(f)$ notează sumele Darboux superioară şi inferioară relative la Δ_n.

De aici rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{n,\,i-1}}^{x_{ni}} (f(x) - \gamma_{ni}) g(nx) dx = 0. \tag{4}$$

Ținând cont de relația (2) şi de periodicitatea funcției g, se obțin egalitățile:

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_{ni} \int_{x_{n,i-1}}^{x_{ni}} g(nx) dx = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ni} \int_{(i-1)\frac{T}{n}}^{i\frac{T}{n}} g(nx) dx = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ni} \frac{1}{n} \int_{(i-1)T}^{iT} g(t) dt =$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ni} \frac{T}{n} \int_0^T g(t) dt = \frac{1}{T}\left(\int_0^T g(t) dt \right)\left(\sum_{i=1}^{n} \gamma_{ni} (x_{n,i-1} - x_{ni}) \right) = \frac{1}{T}\left(\int_0^T g(t) dt \right)\left(\int_0^T f(x) dx \right). \tag{5}$$

Din (3), (4) şi (5) rezultă că are loc (1).

Observație. Teoremele 1 şi 2 sunt particularizări ale Teoremei 4.

Bibliografie

1.D. Popescu - *Problema XII.19*, Recreații matematice 1/2001, p. 77.

2.F. Popovici, M. Bencze - *Asupra schimbării de variabile in integrala Riemann,* G.M. metodică*,* 3/1996, 161-164.

3.Gh. Sirețchi - *Calcul diferențial şi integral, vol I*, Ed. Ştiințifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985.

Câteva relații metrice deduse vectorial

Marian TETIVA [1]

Ne propunem să prezentăm în cele ce urmează o modalitate de deducere a unor relații metrice în triunghi sau în tetraedru cu ajutorul calculului vectorial. Ideea (simplă, dar eficientă) am întâlnit-o în lucrarea [**3**] şi este exprimată în

Propoziția 1. *Fie K, M, L trei puncte necoliniare. Pentru un punct P oarecare, următoarele afirmații sunt echivalente:*

a) Punctele L, M, P sunt coliniare;

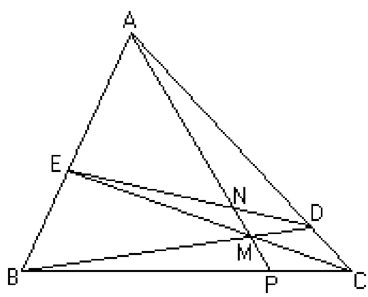
b) Există numerele reale l, m astfel încât l+m = 1 şi $\overrightarrow{KP} = l\overrightarrow{KL} + m\overrightarrow{KM}$

Demonstrație. $P \in LM \Leftrightarrow \exists l \in \mathbf{R}$ astfel încât $\overrightarrow{MP} = l\overrightarrow{ML} \Leftrightarrow \exists l \in \mathbf{R}$ astfel încât $\overrightarrow{KP} - \overrightarrow{KM} = l(\overrightarrow{KL} - \overrightarrow{KM}) \Leftrightarrow \exists l \in \mathbf{R}$ astfel încât $\overrightarrow{KP} = l\overrightarrow{KL} + (1-l)\overrightarrow{KM}$, q.e.d .

Mai departe vom rezolva câteva probleme folosind rezultatul din Propoziția 1. Începem cu problema din [**3**] care ne-a condus la această notă.

Problema 1. *Fie ABC un triunghi, iar E, D puncte situate pe laturile AB, respectiv AC. Considerăm punctul M, intersecția dreptelor BD şi CE; P şi N sunt intersecțiile dintre AM şi BC, respectiv AM şi DE. Să se arate ca are loc egalitatea:* $\dfrac{PN}{NA} = 2\dfrac{PM}{MA}$.

Soluție. Să notăm $p=\dfrac{AE}{EB}, q = \dfrac{AD}{DC}, \; m = \dfrac{AM}{MP}, \; n = \dfrac{AN}{NP}$. Cum $P \in BC$, există numerele x, y astfel încât $x+y=1$, şi $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$. Din $\overrightarrow{AE} = p\overrightarrow{EB}$ rezultă imediat $\overrightarrow{AE} = \dfrac{p}{p+1}\overrightarrow{AB}$; la fel , $\overrightarrow{AD} = \dfrac{q}{q+1}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AM} = \dfrac{m}{m+1}\overrightarrow{AP}$ şi $\overrightarrow{AN} = \dfrac{n}{n+1}\overrightarrow{AP}$. Egalitatea de mai sus poate fi scrisă în următoarele forme echivalente :



$\dfrac{m+1}{m}\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + \dfrac{q+1}{q}y\overrightarrow{AD}$,

$\dfrac{n+1}{n}\overrightarrow{AN} = \dfrac{p+1}{p}x\overrightarrow{AE} + \dfrac{q+1}{q}y\overrightarrow{AD}$,

$\dfrac{m+1}{m}\overrightarrow{AM} = \dfrac{p+1}{p}x\overrightarrow{AE} + y\overrightarrow{AC}$. Ținând seama de unicitatea scrierii unui vector în bazele $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}), (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AC})$ respectiv $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ şi de Propoziția 1, obținem egalitățile: $\dfrac{n+1}{n} = \dfrac{p+1}{p}x + \dfrac{q+1}{q}y$ (1); $\dfrac{m+1}{m} = \dfrac{p+1}{p}x + y$ (2); $\dfrac{m+1}{m} = x + \dfrac{q+1}{q}y$ (3). Adunând (2)

[1] Profesor, Colegiul Național "Gh. Roşca Codreanu", Bârlad

cu (3) şi ţinând seama de (1) şi de faptul că $x+y=1$, obţinem că $\frac{2}{m}=\frac{1}{n}$, q.e.d.

Problema 2 *(relaţia lui Van Aubel)***.** *Cu notaţiile din problema precedentă, are loc egalitatea* $\frac{AE}{EB}+\frac{AD}{DC}=\frac{AM}{MP}$.

Soluţie. Relaţia (2) de mai sus se scrie: $1+\frac{1}{m}=\left(1+\frac{1}{p}\right)x+1-x$, adică $mx=p$. Analog, din (3) obţinem $my=q$. Atunci $\frac{AE}{EB}+\frac{AD}{DC}=p+q=m(x+y)=m=\frac{AM}{MP}$, q.e.d.

Problema 3 ([**1**]). *Păstrăm notaţiile din Problema 1. În plus, considerăm punctele T, S pe laturile AB, AC astfel încât* $\frac{TA}{TB}=\alpha, \frac{SA}{SC}=\beta$. *Să se arate că* $M\in TS \Leftrightarrow \frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}=1$.

Soluţie. Vom avea, ca mai sus, $\overrightarrow{AT}=\frac{\alpha}{\alpha+1}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AS}=\frac{\beta}{\beta+1}\overrightarrow{AC}$. Din relaţia $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ rezultă că $\frac{m+1}{m}\overrightarrow{AM}=x\frac{\alpha+1}{\alpha}\overrightarrow{AT}+y\frac{\beta+1}{\beta}\overrightarrow{AS}$. Conform Propoziţiei 1 şi ţinând seama de unicitatea scrierii unui vector în baza $\left(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AS}\right)$, avem: $M\in TS \Leftrightarrow \frac{m+1}{m}=\frac{\alpha+1}{\alpha}x+\frac{\beta+1}{\beta}y \Leftrightarrow \frac{1}{m}=\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta} \Leftrightarrow \frac{1}{m}=\frac{p}{m\alpha}+\frac{q}{m\beta} \Leftrightarrow 1=\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}$, q.e.d.

Două cazuri particulare mai des întâlnite ale Problemei 3 sunt acelea în care punctul *M* este centrul de greutate G, respectiv centrul cercului înscris I pentru triunghiul ABC; cititorul se poate convinge că este valabil următorul enunţ:

Problema 3. *Fie ABC un triunghi şi punctele T, S pe laturile AB, AC. Atunci:*

a) $G\in TS \Leftrightarrow \frac{TB}{TA}+\frac{SC}{SA}=1$;

b) $I\in TS \Leftrightarrow b\frac{TB}{TA}+c\frac{SC}{SA}=a$, *unde a, b, c reprezintă lungimile laturilor triunghiului.*

Iată în continuare şi variantele în spaţiul cu trei dimensiuni ale chestiunilor discutate anterior; rezultatul similar celui din Propoziţia 1 este conţinut în:

Propoziţia 2. *Fie K, L, M, N patru puncte necoplanare. Un punct P este situat în acelaşi plan cu L, M, N dacă şi numai dacă există numerele reale l, m, n astfel încât* $l+m+n=1$ *şi* $\overrightarrow{KP}=l\overrightarrow{KL}+m\overrightarrow{KM}+n\overrightarrow{KN}$. *Altfel spus, dacă x,y,z sunt coordonatele vectorului* $\overrightarrow{KP}$ *în baza,* $\left(\overrightarrow{KL},\overrightarrow{KM},\overrightarrow{KN}\right)$, *atunci* $P\in(LMN)$ *dacă şi numai dacă* $x+y+z=1$.

Demonstraţia este asemanătoare. Avem $P\in(LMN) \Leftrightarrow \exists\, m,n\in\mathbf{R}$ astfel încât $\overrightarrow{LP}=m\overrightarrow{LM}+n\overrightarrow{LN} \Leftrightarrow \exists\, m,n\in\mathrm{R}$ astfel încât $\overrightarrow{KP}-\overrightarrow{KL}=m\left(\overrightarrow{KM}-\overrightarrow{KL}\right)+n\left(\overrightarrow{KN}-\overrightarrow{KL}\right) \Leftrightarrow$ $\exists l,m,n\in\mathbf{R}$, $l=1-m-n$ (deci cu $l+m+n=1$), astfel încât $\overrightarrow{KP}=l\overrightarrow{KL}+m\overrightarrow{KM}+n\overrightarrow{KN}$, q.e.d.

Folosind Propoziţia 2 putem rezolva:

Problema 4 ([**3**]). *Fie ABCD un tetraedru şi F, G, H puncte pe AB, AC, AD respectiv; fie M punctul comun planelor (FCD), (GBD), (HBC), iar P şi N punctele de intersecţie ale dreptei AM cu planele (BCD) respectiv (FGH). Atunci are loc:* $\frac{PN}{NA}=3\frac{PM}{MA}$.

Soluţie. Ca în Problema 1, să notăm $p=\frac{AF}{FB}$, $q=\frac{AG}{GC}$, $r=\frac{AH}{HD}$, $m=\frac{AM}{MP}$, $n=\frac{AN}{NP}$. Ţinând cont de unicitatea scrierii unui vector într-o bază şi de Propoziţia 2, obţinem mai întâi existenţa numerelor reale x, y, z astfel încât $x+y+z=1$ şi $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}+z\overrightarrow{AC}$, iar apoi echivalenţele:

$$\frac{n+1}{n}=\frac{p+1}{p}x+\frac{q+1}{q}y+\frac{r+1}{r}z \Leftrightarrow \frac{1}{n}=\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r};$$

$$\frac{m+1}{m}=\frac{p+1}{p}x+y+z \Leftrightarrow \frac{1}{m}=\frac{x}{p}; \frac{m+1}{m}=x+\frac{q+1}{q}y+z \Leftrightarrow \frac{1}{m}=\frac{y}{q};$$

$\frac{m+1}{m}=x+y+\frac{r+1}{r}z \Leftrightarrow \frac{1}{m}=\frac{z}{r}$. De aici $\frac{3}{m}=\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=\frac{1}{n}$, adică relaţia din enunţ.

De asemenea vom avea $1=x+y+z=\frac{p+q+r}{m} \Rightarrow p+q+r=m$, deci am rezolvat şi

Problema 5. *Cu aceleaşi notaţii din Problema 4 avem* $\frac{AF}{FB}+\frac{AG}{GC}+\frac{AH}{HD}=\frac{AM}{MP}$.

În încheiere propunem cititorului să rezolve problemele :

Problema 6. *Păstrăm notaţiile din Problemele 4 şi 5; în plus fie punctele S, T, U pe AB, AC, respectiv AD astfel încât* $\frac{AS}{SB}=\alpha, \frac{AT}{TC}=\beta, \frac{AU}{UD}=\gamma$. *Să se arate că:* $M\in(STU)\Leftrightarrow \frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}=1$.

Caz particular. Centrul de greutate al tetraedrului se află în planul (*STU*) dacă şi numai dacă $\frac{SB}{AS}+\frac{TC}{AT}+\frac{UD}{AU}=1$ ([**4**]).

Problema 7. *Fie ABCD un patrulater convex şi punctele M ,N, P, Q pe laturile sale AB, BC, CD, DA respectiv, astfel încât* $\frac{AM}{MB}=\frac{DP}{PC}=a, \frac{BN}{NC}=\frac{AQ}{QD}=b$. *Fie S intersecţia dreptelor MP şi NQ. Să se calculeze rapoartele* $\frac{QS}{SN}$ *şi* $\frac{MS}{SP}$ (O frumoasă soluţie sintetică a acestei probleme poate fi găsită în [**2**]).

Bibliografie

1. **M. Andronache** – *Problema 4* (p. 158) , G.M. 4/2000.
2. **D. Brânzei, R. Brânzei** – *Metodica predării matematicii,* Editura "Paralela 45", 2000.
3. **V.N. Dubrovski** – *Soluţia problemei M1062,* Kvant 1/1988.
4. **Gh**. **Szöllösy** – *Problema C: 2275,* G.M. 4/2000.

Inegalități geometrice. Aplicații

Dan-Ştefan MARINESCU [1] ***şi Ioan ŞERDEAN*** [2]

Scopul propus este de a demonstra, prin mijloace mai puțin folosite, două inegalități geometrice care au un număr mare de aplicații.

Propoziția 1. *Fie $n\in N$, $n\geq 2$ şi M, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ puncte din spațiu date. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$, atunci*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i MA_i^2\right) \geq \sum_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j A_i A_j^2 . \qquad (1)$$

Egalitatea se obține dacă şi numai dacă $\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{MA_i} = \vec{0}$.

Demonstrație. Avem: $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{MA_i}\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{MA_i}\right) \geq 0$, de unde

$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 MA_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j \overrightarrow{MA_i}\cdot\overrightarrow{MA_j} \geq 0$ sau $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 MA_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j MA_i MA_j \cos(A_i \hat{M} A_j) \geq 0.$

Cum din teorema cosinusului în ΔMA_iA_j, eventual degenerat, avem

$2MA_i MA_j \cos(A_i \hat{M} A_j) = MA_i^2 + MA_j^2 - A_iA_j^2$, urmează că

$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 MA_i^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j \left(MA_i^2 + MA_j^2\right) \geq \sum_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j A_i A_j^2$ şi, deci, are loc inegalitatea (1).

Observație. Există şi alte demonstrații ale inegalității (1) pentru cazul în care punctele sunt coplanare şi $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$.

Următorul caz particular este util în aplicații :

Corolar. *Fie $n\geq 3$, $A_1 A_2 \ldots A_n$ un poligon şi M un punct dat. Atunci $(\forall)$ $a_1, a_2, \ldots, a_n \in$* **R** *are loc inegalitatea (1).*

Aplicația 1. *Dacă ABC este un triunghi oarecare şi $\alpha,\beta,\gamma\in R$, atunci*

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2 R^2 \geq a^2\beta\gamma + b^2\gamma\alpha + c^2\alpha\beta.$$

L. Panaitopol

Soluție. În (1) luăm $a_1=\alpha$, $a_2=\beta$, $a_3=\gamma$ şi M punctul O (centru cercului circumscris). Ca un caz particular al acestei aplicații se obține

Aplicația 2. *Dacă ABC este un triunghi şi $\alpha, \beta, \gamma\in R$, atunci $a^2\beta\gamma+b^2\gamma\alpha+c^2\alpha\beta\leq 0$.*

Aplicația 3. *Fie $x, y, z \in R_+^*$. Atunci*

$$\frac{xy}{(x+z)^2(y+z)^2} + \frac{yz}{(y+x)^2(z+x)^2} + \frac{zx}{(z+y)^2(x+y)^2} \leq \frac{1}{16}\left(\frac{1}{xy} - \frac{1}{yz} - \frac{1}{zx}\right).$$

D-Şt. Marinescu, **I. Şerdean** (*etapa locală 1998*)

---

[1] Profesor, Liceul teoretic „Iancu de Hunedoara“, Hunedoara
[2] Profesor, Colegiul Național „Aurel Vlaicu“, Orăştie

Soluție. În Aplicația 1 se va lua $\alpha=x$, $\beta=y$, $\gamma=z$ și $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$. Din $R=\frac{abc}{4S}$, obținem $R=\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{4\sqrt{xyz(x+y+z)}}$ etc.

Aplicația 4 . *Pentru orice priamidă triunghiulară $MABC$ avem* :
$aMA^2+bMB^2+cMC^2\geq abc$ ($a=BC$, $b=AC$, $c=AB$). G.M. – 2/1995, p.88

Soluție. Se obține din (1) pentru $n=3$ și $a_1=a$, $a_2=b$, $a_3=c$.

Aplicația 5. *Fie ABC un triunghi și M un punct al planului său. Atunci*
$MA^4+MB^4+MC^4\geq a^2b^2c^2/(a^2+b^2+c^2)$. **I. Tomescu**, G.M. – 6/1972

Soluție. Conform inegalității Cauchy – Buniakovski – Schwarz, avem:
$$\left(MA^4+MB^4+MC^4\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq\left(aMA^2+bMB^2+cMC^2\right).$$
Combinând aceasta cu inegalitatea din Aplicația 4, deducem inegalitatea cerută.

Aplicația 6 . *Fie ABC un triunghi, P un punct în planul său, iar $PA=x$, $PB=y$, $PC=z$. Să se arate că $ayz+bxz+cxy\geq abc$.* **C. Cocea**

Soluție. Luăm în Corolar n=3, M=P, $a_1=a/x$, etc. Obținem:
$$\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)(ax+by+cz)\geq\frac{a^2bc}{yz}+\frac{ab^2c}{xz}+\frac{abc^2}{xy}=\frac{abc}{xyz}(ax+by+cz)$$
$$\Rightarrow\ \frac{ayz+bxz+cxy}{xyz}\geq\frac{abc}{xyz}\ \Rightarrow\ ayz+bxz+cxy\geq abc.$$

Aplicația 7. Dacă *$A_1A_2\ldots A_n$ este un poligon și M un punct oarecare, atunci*
$$n\sum_{i=1}^{n}MA_i^2\geq\sum_{1\leq i<j\leq n}A_iA_j^2.$$ G.M. – 5/1995, p.193

Soluție. Luăm $a_i=1, i=\overline{1,n}$ în Corolar.

Aplicația 8. Dacă *$A_1A_2,\ldots A_n$ este un poligon înscris în cercul $C(O,R)$, atunci*
$$n^2R^2\geq\sum_{1\leq i<j\leq n}A_iA_j^2.$$ **M. Chiriță**, **M. Dincă** – *Numere complexe*

Soluție. În Corolar se consideră $a_i=1, i=\overline{1,n}$ și punctul M în O.

Cel de-al doilea rezultat general este următorul:

Propoziția 2. *Pentru orice $n\in N$, $n\geq3$ și orice $x_1, x_2,\ldots, x_n\in R$ avem:*
$$2\sum_{k=1}^{n}x_k^2-2\sum_{k=1}^{n}x_k+2\sum_{k=1}^{n}x_k(1-x_{k+1})\cos\frac{2\pi}{n}+n\geq n\cos^2\frac{\pi}{n}\ (x_{n+1}=x_1).\tag{2}$$
Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x_1=x_2=\ldots=x_n=1/2$.

Demonstrație. Pentru $n=3$ inegalitatea revine la

$A=2\sum_{k=1}^{3}x_k^2-3\sum_{k=1}^{3}x_k+\sum_{k=1}^{3}x_kx_{k+1}+\frac{9}{4}\geq0$ (cu $x_4=x_1$). Deoarece $\sum x_k^2\geq\sum x_kx_{k+1}$, avem: $A \geq \sum x_k^2 + 2\sum x_k x_{k+1} - 3\sum x_k + \dfrac{9}{4} = \left(\sum x_k\right)^2 - 3\sum x_k + \dfrac{9}{4} = \left(\sum x_k - \dfrac{3}{2}\right)^2 \geq 0$,

deci (2) are loc pentru n=3.

Pentru $n \geq 4$ inegalitatea (2) revine la

$$B = 2\sum x_k^2 - 2\sum x_k\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right) - 2\sum x_k x_{k+1}\cos\frac{2\pi}{n} + n\sin^2\frac{\pi}{n} \geq 0.$$

Cum $-2x_k x_{k+1} \geq -\left(x_k^2 + x_{k+1}^2\right), k=\overline{1,n}$, prin multiplicare cu $\cos\dfrac{2\pi}{n}$ (ce este ≥0 pentru n≥4) şi apoi sumare după k, obţinem: $-2\sum x_k x_{k+1}\cos\dfrac{2\pi}{n} \geq -2\sum x_k^2 \cos\dfrac{2\pi}{n}$.

Ca urmare, avem: $B \geq 2\sum x_k^2\left(1-\cos\dfrac{2\pi}{n}\right) - 2\sum x_k\left(1-\cos\dfrac{2\pi}{n}\right) + n\sin^2\dfrac{\pi}{n} =$

$$= 4\sum x_k^2 \sin^2\frac{\pi}{n} - 4\sum x_k \sin^2\frac{\pi}{n} + n\sin^2\frac{\pi}{n} = \sum (2x_k - 1)^2 \sin^2\frac{\pi}{n} \geq 0 \quad \text{q.e.d}$$

Aplicaţia 9. *Se consdideră triunghiul echilateral ABC de latură 1 şi punctele $A_1 \in (BC)$, $B_1 \in (CA)$, $C_1 \in (AB)$. Să se arate că* $A_1B_1^{\,2} + B_1C_1^{\,2} + C_1A_1^{\,2} \geq \dfrac{3}{4}$.

Concurs de matematică 1988 – etapa finală

Soluţie. Notând $x_1=BA_1, x_2=CB_1, x_3=AC_1$ şi , conform teoremei cosinusului , inegalitatea revine la

$$2\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) - 2\left(x_1 + x_2 + x_3\right) - x_1(1-x_2) - x_2(1-x_3) - x_3(1-x_1) + 3 \geq \frac{3}{4},$$ adică (2) pentru n=3.

Aplicaţia 10. *Pe laturile unui pătrat ABCD de latură 1 se consideră punctele $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CD)$, $Q \in (DA)$ astfel încât* $MN^{\,2} + NP^{\,2} + PQ^{\,2} + QM^{\,2} = 2$. *Să se arate că MNPQ este pătrat.* **C. Năsturică**, Cardinal – 3/1991, p.55

Soluţie. Notăm $AM=x_1$, $BN=x_2$, $CP=x_3$, $DQ=x_4$. Egalitatea se scrie: $2\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2\right) - 2\left(x_1 + x_2 + x_3 + x_4\right) + 4 = 2$, adică în (2) pentru $n=4$ are loc egalitate, deci $x_1=x_2=x_3=x_4=1/2$ şi M, N, P, Q, vor fi mijloacele laturilor pătratului *ABCD.* În consecinţă *MNPQ* este pătrat.

Aplicaţia 11. *Fie $A_1 A_2, \ldots A_n$, n≥4, un poligon regulat de latură 1 şi $P_1 \in (A_1 A_2)$, $P_2 \in (A_2 A_3)$, … , $P_n \in (A_n A_1)$. Să se arate că* $P_1P_2^2 + P_2P_3^2 + \ldots + P_nP_1^2 \geq n\cos\dfrac{2\pi}{n}$.

R.M.T – 1,2 / 1989 , Problema 6539

Soluţie. Notând cu $P_1A_2 = x_1, P_2A_3 = x_2, \ldots, P_nA_1 = x_n$, teorema cosinusului aplicată triunghiurilor $P_1A_2P_2$, $P_2A_3P_3$, … ,$P_nA_1P_1$ ne conduce la

$$P_1P_2^2 = x_1^2 + (1-x_1)^2 - 2x_1(1-x_1)\cos\frac{(n-2)\pi}{n}, \cdots, P_nP_1^2 = x_n^2 + (1-x_n)^2 - 2x_n(1-x_n)\cos\frac{(n-2)\pi}{n}$$

Prin sumare obţinem: $P_1P_2^2 + P_2P_3^2 + \ldots + P_nP_1^2 = 2\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} x_k + 2\sum_{k=1}^{n} x_k(1-x_k)\cos\dfrac{2\pi}{n} + n$

şi, în conformitate cu (2), deducem inegalitatea cerută.

Asupra unei clase de şiruri recurente

Dan POPESCU [1]

Scopul acestui articol este prezentarea unei metode de abordare a unei clase de şiruri recurente de primul ordin. Mai precis, dat şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ prin

$$x_1 \in D \subset R \quad \text{şi} \quad x_{n+1} = f(x_n), \forall\, n \in N^*, \tag{1}$$

unde $f : D \to D$, se pune problema existenţei limitei $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$ în $\overline{R}$.

În ipoteza că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \overline{R} - \{0\}$, şirul $(nx_n)_{n\geq 1}$ are limita evidentă; rămâne de investigat cazul în care $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Rezultatul principal este cuprins în următoarea

Teoremă. *Fie* $D \subset R^*$ *având originea ca punct de acumulare, funcţia* $f : D \to D$ *şi şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *definit prin (1) astfel încât sunt îndeplinite condiţiile:* 1^0 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ *şi* 2^0 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - f(x)}{xf(x)} = l \in \overline{R}$. *Au loc implicaţiile:*

(a) dacă $l \in \overline{R} - \{0\}$ *, atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = \dfrac{1}{l}$ *;*

(b) dacă l=0 şi există o vecinătate V_1 a originii încât $\dfrac{x - f(x)}{xf(x)} > 0, \forall\, x \in \mathrm{V}_1 \cap D$ *, atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = +\infty$ *;*

(c) dacă l=0 şi există o vecinătate V_2 a originii încât $\dfrac{x - f(x)}{xf(x)} < 0, \forall\, x \in \mathrm{V}_2 \cap D$ *, atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = -\infty$.

Demonstraţie. Se aplică criteriul Stolz-Cesàro şirului $\left(\dfrac{1}{nx_n}\right)_{n\geq 1}$ scris sub forma $\left(\dfrac{1/x_n}{n}\right)_{n\geq 1}$. În ipotezele impuse avem: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1/x_{n+1} - 1/x_n}{(n+1)-1} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n - f(x_n)}{x_n f(x_n)} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x - f(x)}{xf(x)} = l \in \overline{R}.$.

Urmează că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{nx_n} = l$ şi afirmaţiile (*a*), (*b*), (*c*) decurg imediat.

Prezentăm mai întâi câteva aplicaţii directe ale acestei teoreme.

1 (G.M. – 11,12/1986*, C: 649*, **M. Bencze**). *Fie şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *definit prin* $x_1 > 0$ *şi* $x_{n+1} = \ln(1 + x_n), \forall\, \mathrm{n} \in \mathrm{N}^*$. *Să se demonstreze că* $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = 2$.

2 (G.M. – 3/1987*, 21056*, **F. Dumitrel**). *Dacă şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *se defineşte prin* $x_1 > 0$ *şi* $x_{n+1} = x_n 2^{-x_n}, \forall\, \mathrm{n} \in \mathrm{N}^*$*, să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$.

---

[1] Profesor, Colegiul Naţional „Ştefan cel Mare“, Suceava

3 (G.M. – 10/1987, *21253*, **M. Lascu**). *Fie şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *definit prin* $x_1 > 0$ *şi* $x_{n+1} = \ln(1 + arctg(x_n)), \forall\, n \in N^*$. *Să se arate că şirul* $(nx_n)_{n\geq 1}$ *este convergent la 2.*

4 (R.M.T. – 2/1987, *6256*, **V. Bivolaru**). *Se consideră şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *încât* $x_1 > 0$ *şi* $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2}{2x_n - \ln(1+x_n)}, n \in N^*$. *Să se arate că şirul este convergent şi să i se calculeze limita.*

5 (G.M.– 4/1995, *23241*, **V. Nicula**). *Fie* $p \in N^*$, $x_1 \in (0, 1/p)$ *şi* $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)(1 - 2x_n)...(1 - px_n), \forall\, n \in N^*$. *Să se calculeze limita* $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$.

6 (G.M. – 1/1997, *23668,* **A. Vernescu**). *Dacă şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *este definit prin* $x_1 > 0$ *şi* $x_{n+1} = \sqrt{x_n + \dfrac{1}{4}} - \dfrac{1}{2}, \forall\, n \in N^*$, *să se studieze natura şirului* $(nx_n)_{n\geq 1}$ *şi, în caz de convergenţă, să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$.

Condiţia 1^0 din teoremă se verifică uşor pentru fiecare dintre şirurile precedente. În privinţa condiţiei 2^0, pentru funcţia aferentă $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ indicăm:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)} = \dfrac{1}{2}$,

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - x\, 2^{-x}}{x^2 2^{-x}} = \ln 2$,

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \ln(1+arctg\, x)}{x \ln(1+arctg\, x)} = \dfrac{1}{2}$,

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \dfrac{x^2}{2x - \ln(1+x)}}{\dfrac{x^3}{2x - \ln(1+x)}} = \dfrac{1}{2}$,

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - x(1-x)(1-2x)...(1-px)}{x^2(1-x)(1-2x)...(1-px)} = \dfrac{p(p+1)}{2}$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sqrt{x + \dfrac{1}{4}} + \dfrac{1}{2}}{x\left(\sqrt{x+\dfrac{1}{4}} + \dfrac{1}{2}\right)} = 1.$

Observaţie. În privinţa problemei 5, menţionăm că pentru $p = 1$ se obţine o problemă din revista *Matematika v şkole, 5/1984*.

Prezentăm acum câteva probleme care sunt sub incidenţa Teoremei, fapt care nu este însă evident.

7 (G.M. – 5,6/1988, *21458*, **M. Banyai**). *Fie* $k>0$, $x_1>k$ *şi* $x_{n+1} = x_n^2/(x_n - k)$, $\forall\, n \in N^*$. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{x_n}$.

Soluţie. Se constată că $(x_n)_{n\geq 1}$ este crescător şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Aplicăm Teorema şirului $(y_n)_{n\geq 1}$ definit prin $y_n = \dfrac{1}{x_n}, \forall\, n \in N^*$. Avem $y_{n+1} = y_n(1 - ky_n)$, $\forall\, n \in N^*$, şi

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. Funcția $f:(0,1)\to(0,1)$ dată de $f(x) = x(1-kx)$ are $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-f(x)}{xf(x)} = k$.

. Ca urmare, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{x_n} = \lim ny_n = \frac{1}{k}$.

8 (G.M. – 1/1989, *21668*, **M. Lascu**). *Fie şirul* $(x_n)_{n\ge 1}$ *definit de* $x_1 = 1$ *şi* $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}, \forall\, \mathrm{n} \in \mathrm{N}^*$. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{\sqrt{2n}}$ (enunț parțial).

Soluție. Se constată că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Notăm $y_n = 2/x_n^2, \forall\, n\in N^*$, şi deducem că $y_{n+1} = 4y_n/(y_n^2 + 4y_n + 4)$. Utilizând Teorema, obținem: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{\sqrt{2n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{ny_n}} = 1$.

9 (G.M. – 6,7/1990, *22115*, **M. P. Mihail**). *Dacă* $a, b, x_1 > 0$ *şi* $x_n = x_n^2\ /(a+bx_n)$,

$\forall\, \mathrm{n}\in\mathrm{N}^*$, *să se calculeze* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{nx_n}}$.

Soluție. Se introduce şirul $(y_n)_{n\ge 1}$ prin $y_n = x_n^2, n\ge 1$. Urmează $y_{n+1} = y_n^2/(a+b\sqrt{y_n})^2, n\ge 1, f(x) = x^2/(a+b\sqrt{x})^2, x>0$, etc. Discuție după b şi x_1.

10 (G.M. – 11/1993, *C: 1463*, **L. Panaitopol).** *Se consideră şirul* $(x_n)_{n\ge 1}$ *definit prin* $x_1 > 1$ *şi* $x_{n+1} = x_n + \sqrt{x_n} - 1, \forall\, \mathrm{n}\in\mathrm{N}^*$. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^2}$.

Soluție. Cu $y_n = 1/\sqrt{x_n}, n\ge 1$, obținem $y_{n+1} = y_n/\sqrt{1+y_n-y_n^2}, n\ge 1$, şi găsim, în cele din urmă, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^2} = \frac{1}{4}$.

11 (R.M.T. – 2/1997*, X127*, **V.Bivolaru**). *Fie şirul* $(x_n)_{n\ge 1}$ *definit prin* $x_1 > 0$, $x_{n+1} = x_n\cdot a^{-x_n}, \forall n\in N^*$, *unde a>1. Dacă* $y_n = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{\ln n}, \forall n\in N^*$, *să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Soluție. Cu criteriul Stolz-Cesàro, avem:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\ln n - \ln(n-1)} = \lim_{n\to\infty} nx_n\frac{1}{\ln n-\ln(n-1)} = \lim_{n\to\infty} nx_n = \frac{1}{\ln a}$$

ultima egalitate stabilindu-se cu ajutorul Teoremei (ca în Problema 3).

12 (G.M. – 1/1998, *C:2005*, **M. Bencze**). *Fie şirul* $(x_n)_{n\ge 1}$ *astfel ca* $x_1 > 0$ *şi* $(1+x_n)x_{n+1} = 1 + x_n^2, \forall n\in N^*$. *Să se demonstreze că* $(x_n)_{n\ge 1}$ *este convergent şi să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} n(1-x_n)$.

Soluție. Considerăm $y_n = 1-x_n, n\ge 1$. Avem $y_{n+1} = (y_n - y_n^2)/(2-y_n),\ n\ge 1$, şi $f(x) = (x-x^2)/(2-x), x<0$, etc. Limita este egală cu zero.

Un criteriu de concurență a dreptelor

Temistocle BÎRSAN [1]

În revista *Recreații Științifice, IV (1886), pag. 48*, este enunțată următoarea

Problemă. *În orice triunghi, dreptele ce unesc picioarele înălțimilor corespunzătoare la două laturi, picioarele bisectorelor alăturate cu înălțimile şi picioarele perpendicularelor duse din centrul cercului înscris pe cele două laturi trec prin acelaşi punct.*

În acelaşi volum, la pag. 118, este prezentată o soluție sintetică a problemei, dată de *N.Gr. Bălănescu*, elev la Şcoala de Poduri şi Şosele din Paris.

Începem prezenta notă cu un *criteriu de concurență* a trei drepte determinate de punctele lor de intersecție cu două dintre laturile unui triunghi. Cu ajutorul acestuia vom da apoi o soluție „tehnică“ problemei de mai sus.

Fie un triunghi ABC şi dreptele d_1, d_2 şi d_3 ce intersectează în M, P şi respectiv R dreapta AB şi în N, Q şi respectiv S dreapta AC. Considerăm că pozițiile acestor puncte sunt determinate de rapoartele următoare:

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MA}} = m\ ,\quad \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = n\ ;\qquad \frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} = p,\quad \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} = q\ ;\qquad \frac{\overline{RB}}{\overline{RA}} = r,\quad \frac{\overline{SC}}{\overline{SA}} = s. \tag{1}$$

Menționăm că aceste puncte au poziții oarecare pe dreptele AB şi AC, dar că, în cele ce urmează, *vom exclude tacit anumite cazuri triviale*, cum ar fi: două dintre drepte sunt paralele sau coincid, cele trei drepte sunt concurente într-un punct situat pe AB sau AC, una dintre drepte trece prin vârful A etc.

Propoziția 1. *Dreptele d_1, d_2 şi d_3 determinate de numerele m,n,p,q,r,s date de (1) sunt concurente dacă şi numai dacă aceste numere îndeplinesc condiția*

$$(ps - rq) + (rn - ms) + (mq - pn) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & p & r \\ n & q & s \end{vmatrix} = 0\,. \tag{2}$$

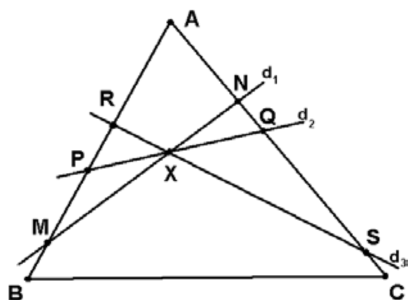
Demonstrație. Din (1) obținem uşor relațiile:

$$\overline{MA} = \frac{1}{m-1}\overline{AB}\,,\quad \overline{MB} = \frac{m}{m-1}\overline{AB}\,;\quad \overline{NA} = \frac{1}{n-1}\overline{AC}\,,\quad \overline{NB} = \frac{n}{n-1}\overline{AC} \quad \text{şi analoagele.} \tag{3}$$

Fie $\{X\} = d_1 \cap d_2$ şi $\{X'\} = d_1 \cap d_3$. Utilizând teorema lui Menelaus relativ la ΔAMN şi transversalele PQ şi RS şi ținând seama de (3), avem: d_1, d_2, d_3 concurente $\Leftrightarrow$ X şi X' coincid

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{XM}}{\overline{XN}} = \frac{\overline{X'M}}{\overline{X'N}} \Leftrightarrow \frac{\overline{PM}}{\overline{PA}} \cdot \frac{\overline{QA}}{\overline{QN}} = \frac{\overline{RM}}{\overline{RA}} \cdot \frac{\overline{SA}}{\overline{SN}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{PB} - \overline{MB}}{\overline{PA}} \cdot \frac{\overline{QA}}{\overline{QA} - \overline{NA}} = \frac{\overline{RB} - \overline{MB}}{\overline{RA}} \cdot \frac{\overline{SA}}{\overline{SA} - \overline{NA}} \Leftrightarrow$$



[1] Prof. dr., Catedra de matematică, Univ. Tehnică „Gh. Asachi”, Iaşi

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{p}{p-1}-\frac{m}{m-1}}{\frac{1}{p-1}}\cdot\frac{\frac{1}{q-1}}{\frac{1}{q-1}-\frac{1}{n-1}}=\frac{\frac{r}{r-1}-\frac{m}{m-1}}{\frac{1}{r-1}}\cdot\frac{\frac{1}{s-1}}{\frac{1}{s-1}-\frac{1}{n-1}}\Leftrightarrow (ps-rq)+(rn-ms)+(mq-pn)=0.$$

Soluția Problemei. Fie d_1, d_2, d_3 dreptele ce unesc picioarele înălțimilor, picioarele bisectoarelor şi, respectiv, punctele de contact ale cercului înscris (puncte pe dreptele AB şi AC). Atunci $m=-\frac{a\cos B}{b\cos A}, n=-\frac{a\cos C}{c\cos A}$; $p=-\frac{a}{b}$, $q=-\frac{a}{c}$; $r=-\frac{p-b}{p-a}, s=-\frac{p-c}{p-a}$ şi condiția (2) se verifică prin calcul direct.

Observație. Fie A_0 punctul de concurență a dreptelor din problemă şi B_0, C_0 punctele analoage acestuia. Vom arăta într-o notă următoare că AA_0, BB_0, CC_0 sunt concurente.

În particular, dacă M coincide cu B şi S coincide cu C (i.e. $m=s=0$), vom obține:

Propoziția 2. *Fie ABC un triunghi oarecare. Dreapta PQ trece prin punctul de intersecție a cevienelor BN şi CR dacă şi numai dacă numerele p,q,n,r definite ca în (1) satisfac condița*

$$\frac{p}{r}+\frac{q}{n}=1 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & p & r\\ n & q & 0\end{vmatrix}=0. \qquad (4)$$

Observație. Acest ultim rezultat este cunoscut ([3, Teorema 3], [2, Teorema 1 – o formă diferită a condiției] etc.). În locurile citate (cât şi în alte locuri!) sunt indicate condițiile în care dreapta PQ trece prin diferite puncte remarcabile ale triunghiului:

$G(r=n=-1)$, $I(r=-\frac{a}{b}, n=-\frac{a}{c})$, $H(-\frac{a\cos B}{b\cos A},-\frac{a\cos C}{c\cos A})$, $O(-\frac{\sin 2A}{\sin 2B},-\frac{\sin 2A}{\sin 2C})$, $K(-\frac{a^2}{b^2},-\frac{a^2}{c^2})$, $\Gamma(-\frac{p-b}{p-a},-\frac{p-c}{p-a})$, $N(-\frac{p-a}{p-b},-\frac{p-a}{p-c})$, unde K, Γ, N sunt punctele lui *Lemoine*, *Gergonne* şi respectiv *Nagel*. Se obțin rezultatele:

1. $G\in PQ \Leftrightarrow \frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}+\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}=-1$,

2. $H\in PQ \Leftrightarrow tgB\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}+tgC\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}=-tgA$,

3. $I\in PQ \Leftrightarrow b\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}+c\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}=-a$,

4. $O\in PQ \Leftrightarrow \sin 2B\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}+\sin 2C\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}=-\sin 2A$

5. $K\in PQ \Leftrightarrow b^2\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}+c^2\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}=-a^2$,

6. $\Gamma\in PQ \Leftrightarrow \frac{1}{p-b}\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}+\frac{1}{p-c}\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}=-\frac{1}{p-a}$

7. $N\in PQ \Leftrightarrow (p-b)\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}+(p-c)\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}=-(p-a)$ etc.

Foarte adesea aceste condiții sunt date pentru cazul restrictiv când $P\in(AB)$ şi $Q\in(AC)$, fapt care justifică renunțarea la lucrul cu segmente orientate.

Bibliografie

1. *Colecția revistei „Recreații ştiințifice“ (1883-1886).*
2. C. Chiser – *Condiții necesare şi suficiente ca o dreaptă să treacă prin puncte importante dintr-un triunghi*, G.M. – 9/2000.
3. N. Oprea – *Un punct şi o dreaptă remarcabilă din planul unui triunghi*, G.M. – 11/1996.

Câteva consecințe ale unei relații a lui Gergonne

Ioan SĂCĂLEANU [1]

În triunghiul ABC considerăm cevienele AA', BB', CC' concurente în *M*. Notăm $x=\frac{AM}{MA'}$, $y=\frac{BM}{MB'}$, $z=\frac{CM}{MC'}$; constatăm că dacă M este centrul de greutate al triunghiului, atunci x,y,z sunt numere naturale. Ne propunem să determinăm toate punctele $M\in \text{Int}\,ABC$ cu proprietatea următoare:

rapoartele x,y,z *corespunzătoare lui* M *sunt numere naturale.* (*)

În particular, vom așeza într-un cadru firesc și vom extinde rezultatul obținut în [**1**].

Pornim de la următoarea

Teoremă(Gergonne). *În triunghiul ABC, cevienele* AA', BB', CC' *sunt concurente în M. Atunci* $\frac{MA'}{AA'}+\frac{MB'}{BB'}+\frac{MC'}{CC'}=1$ (vezi [**2**]).

Cu notațiile inițiale, putem rescrie concluzia $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}=1$; în mod necesar, unul dintre termenii sumei din stânga trebuie să fie cel puțin $\frac{1}{3}$. Vom presupune că $\frac{1}{x+1}\geq\frac{1}{3}$, de unde $x\leq 2$. Cum $x\in\mathbf{N}^*$, rezultă că $x=1$ sau $x=2$.

Dacă $x=1$, atunci $\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}=\frac{1}{2}$, i.e. $(y-1)(z-1)=4$ și deoarece $y,z\in\mathbf{N}^*$, rezultă că $(y,z)\in\{(2,5),(3,3),(5,2)\}$.

Dacă $x=2$, atunci $\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}=\frac{2}{3}$. Unul dintre termenii din stânga trebuie să fie cel puțin $\frac{1}{3}$; să presupunem că $\frac{1}{y+1}\geq\frac{1}{3}$, adică $y\leq 2$. Dacă $y=1$, obținem $z=5$, iar dacă $y=2$, rezultă $z=2$.

În concluzie, (x,y,z) poate lua valorile (2,2,2), (1,3,3), (1,2,5), precum și toate permutările posibile ale acestor triplete. Avem astfel 3 tipuri de puncte *M* cu proprietatea (*), pe care le vom nota corespunzător *M*[2,2,2], *M*[1,3,3], *M*[1,2,5]. Ne propunem în continuare să caracterizăm geometric fiecare dintre aceste tipuri de puncte.

Propoziția 1. *Un punct M este de tipul M[2,2,2] dacă și numai dacă este centrul de greutate al triunghiului ABC.*

---

[1] Profesor, Liceul Teoretic "Ștefan cel Mare", Hârlău

Demonstrație. Suficiența este evidentă. Pentru a demonstra necesitatea, aplicăm teorema lui Menelaus în triunghiul $AB'M$ cu transversala $BA'C$; obținem $\frac{BM}{BB'} \cdot \frac{B'C}{CA} \cdot \frac{AA'}{A'M} = 1$. Din ipoteză, $\frac{AA'}{A'M} = 3$, $\frac{BM}{BB'} = \frac{2}{3}$ și atunci $\frac{B'C}{CA} = \frac{1}{2}$, adică B' este mijlocul lui $[AC]$. Rezultă că M se află situat pe mediana $[BB']$ astfel încât $\frac{MB'}{BB'} = \frac{1}{2}$, deci M este centrul de greutate al triunghiului ABC.

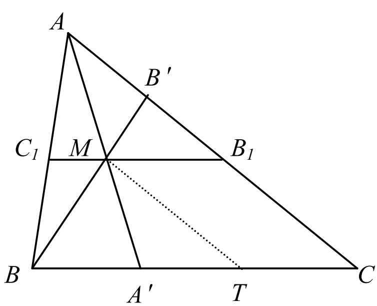
Propoziția 2. *Un punct M este de tipul $M[1,3,3]$ dacă și numai dacă este mijlocul medianei $[AA']$ (analog pentru $M[3,1,3]$ și $M[3,3,1]$).*

Demonstrație. Dacă $M[1,3,3]$, atunci $\frac{C'M}{MC} = \frac{B'M}{MB} = \frac{1}{3}$, deci $B'C' \parallel BC$ conform reciprocei teoremei lui Thales aplicată în triunghiul MBC. Rezultă de aici că $\frac{AC'}{C'B} = \frac{AB'}{B'C}$ și folosind teorema lui Ceva obținem că $\frac{BA'}{A'C} = 1$, deci $[AA']$ este mediană, iar M este mijlocul său.

Reciproc, dacă M este mijlocul medianei $[AA']$, evident că $x = 1$. Din teorema lui Ceva obținem că $\frac{AC'}{C'B} = \frac{AB'}{B'C}$, deci $B'C' \parallel BC$, de unde $\Delta C'MB' \sim \Delta CMB$ și $\Delta AB'C' \sim \Delta ABC$. Obținem de aici că $\frac{1}{y} = \frac{1}{z} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{AB'}{AC}$. Pe de altă parte, aplicând teorema lui Menelaus în triunghiul $AA'C$ cu transversala BMB', rezultă că $\frac{BA'}{BC} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{MA}{MA'} = 1$ și cum $\frac{BA'}{BC} = \frac{1}{2}$, $\frac{MA}{MA'} = 1$, avem că $\frac{CB'}{B'A} = 2$, i.e. $\frac{AB'}{AC} = \frac{1}{3}$. În concluzie, $y = z = 3$, deci M este de tipul $M[1,3,3]$.

Propoziția 3. *Un punct M este de tipul M[1,2,5] dacă și numai dacă aparține liniei mijlocii $[C_1B_1]$ și o împarte în două segmente având raportul 2 (au loc și afirmațiile analoage pentru M[1,5,2] etc.).*

Demonstrație.



Fie $M[1,2,5]$; cum $x = 1$, rezultă că M aparține liniei mijlocii $[C_1B_1]$. Ducem $MT \parallel AC$, $T \in BC$; atunci MB_1CT este paralelogram și deci $[MB_1] \equiv [TC]$. Aplicând teorema lui Thales în triunghiul BCB' obținem $\frac{BT}{TC} = \frac{BM}{MB} = 2$, deci $CT = \frac{1}{3}BC = \frac{2}{3}B_1C_1$, adică $MB_1 = \frac{2}{3}B_1C_1$.

Reciproc, fie $M \in [C_1B_1]$ astfel încât $\frac{MB_1}{C_1M} = 2$. Cum M aparține liniei mijlocii, evident că $x = 1$. Cu notațiile precedente, $CT = MB_1 = \frac{2}{3}C_1B_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}BC = \frac{1}{3}BC$, deci $\frac{BT}{TC} = 2$. Din teorema lui Thales aplicată în $\Delta BCB'$ rezultă că $\frac{BM}{MB'} = \frac{BT}{TC} = 2$, adică $y = 2$. Folosind acum relația lui Gergonne, se deduce că $z = 5$.

Aplicația 1. *Centrul cercului circumscris triunghiului ABC are proprietatea (*) dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.*

Demonstrație. Presupunem că O are proprietatea (*). Dacă, prin absurd, $O \in B_1C_1$, atunci $C_1O \perp AB$ şi $B_1O \perp AC$, deci *A, B, C* ar fi coliniare. Rezultă că $O \notin B_1C_1$ şi de aici urmează că O este de tipul O [2,2,2], adică $O \equiv G$, deci triunghiul ABC este echilateral. Reciproca este imediată.

Aplicația 2. *Centrul cercului înscris are proprietatea (*) dacă şi numai dacă triunghiul ABC este echilateral.*

Demonstrație. Presupunem că I are proprietatea (*). Dacă, prin, absurd, $I \in B_1C_1$, atunci $\sphericalangle C_1IB \equiv \sphericalangle IBC$ şi deci $\sphericalangle C_1IB \equiv \sphericalangle C_1BI$, adică triunghiul C_1BI este isoscel cu $[BC_1] \equiv [C_1I]$. Analog, $[CB_1] \equiv [B_1I]$, de unde $BC = 2B_1C_1 = 2C_1I + 2B_1I = 2BC_1 + 2CB_1 = AB + AC$, imposibil. Rezultă că I este punct de tipul I[2,2,2], adică $I \equiv G$, deci triunghiul ABC este echilateral. Reciproca este evidentă.

Observația 1. Acest rezultat este demonstrat pe o altă cale în [**1**].

Observația 2. Există triunghiuri neechilaterale al căror ortocentru are proprietatea (*). Caracterizarea acestora este dată mai jos (Aplicația 4) şi o propunem spre rezolvare, împreună cu două probleme ajutătoare:

Aplicația 3. *Fie triunghiul ABC, M si N mijloacele laturilor [AB], respectiv [AC] iar H intersecția inălțimilor AA' şi BB'. Au loc echivalențele:*

1) $\frac{BC}{3} = \frac{AB}{\sqrt{5}} = \frac{AC}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow H \in [MN]$ *şi HN=2HM* $\Leftrightarrow \frac{HA}{HA'} = 1$ *şi* $\frac{HB}{HB'} = 2$;

2) $\frac{BC}{2} = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{AC}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$ *H este mijlocul lui [MN]* $\Leftrightarrow \frac{HA}{HA'} = 1$ *şi* $\frac{HA}{HB'} = 3$.

Aplicația 4. *Ortocentrul triunghiului ABC are proprietatea (*) dacă şi numai dacă laturile triunghiului sunt direct proporționale fie cu* 1,1,1, *fie cu* 3, $2\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, *fie cu* 2, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$.

Bibliografie

1. **Iulica Georgescu** – *Asupra unei clase de triunghiuri*, G.M. 2-3/1982.
2. **Liviu Nicolescu, Vladimir Boskoff** – *Probleme practice de geometrie*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1990.

Unele şiruri monotone cu limita e sau e^{-1}

Gheorghe COSTOVICI [1]

În Propoziţiile care urmează, vom demonstra prin metode elementare monotonia unor şiruri cu limita e sau e^{-1}.

Propoziţia 1. *Şirul* $e_n(x) = (1+\frac{1}{n+x})^n$ *este crescător,* $\forall x \geq 0$ *fixat.*

Demonstraţie. Din $a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + ... + ab^{n-1} + b^n)$, în ipoteza $a > b \geq 0$, se obţine că $a^n[a-(a-b)(n+1)] < b^{n+1}$. Luând în această inegalitate $a = 1+\frac{1}{n+x}$ şi $b = 1+\frac{1}{n+1+x}$, găsim că $e_n(x)[1+\frac{x}{(n+x)(n+x+1)}] < e_{n+1}(x)$, care atrage $e_n(x) < e_{n+1}(x)$, $\forall n \geq 1$, $\forall x \geq 0$ fixat.

Propoziţia 2. *Şirul* $a_n(x) = (1+\frac{1}{n+x})^{n+1}$ *este descrescător,* $\forall x \in (-1,0]$ *fixat.*

Demonstraţie. Considerăm funcţia $f:[1,\infty) \to \mathbf{R}$, $f(t) = (1+\frac{1}{t+x})^{t+1}$, cu $x \in (-1,0]$ arbitrar fixat. Avem $f'(t) = f(t)[\ln(1+\frac{1}{t+x}) - \frac{t+1}{(t+x+1)(t+x)}]$, $t \geq 1$.

Folosind $\ln(1+y) < y$, $\forall y > 0$, rezultă $\ln(1+\frac{1}{t+x}) - \frac{t+1}{(t+x+1)(t+x)} < \frac{1}{t+x} - \frac{t+1}{(t+x+1)(t+x)} = \frac{x}{(t+x+1)(t+x)} \leq 0$, adică $f'(t) < 0, \forall t \geq 1$ şi deci f este descrescătoare. Atunci $f(n) > f(n+1)$, i.e. $a_n(x) > a_{n+1}(x)$, $\forall n \geq 1$, ceea ce încheie demonstraţia.

Propoziţia 3. *Şirul* $b_n(x) = (1-\frac{1}{n+x})^n$ *este descrescător,* $\forall x \geq 1$ *fixat.*

Demonstraţie. Observăm că $b_n(x) = (1-\frac{1}{n+x})^n = \frac{1}{(1+\frac{1}{n+x-1})^n} = \frac{1}{e_n(x-1)}$, $\forall n \geq 1$. Şirul $e_n(x-1)$ este crescător pentru $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ şi are termeni pozitivi, deci $b_n(x)$ este descrescător pentru orice $x \geq 1$ fixat.

Propoziţia 4. *Şirul* $c_n(x) = (1-\frac{1}{n+x})^{n+1}$ *este crescător,* $\forall x \in (0,1]$.

Demonstraţie. Observăm că

[1] Conf. dr., Catedra de matematică, Univ. Tehnică "Gh. Asachi", Iaşi

$$c_n(x) = (1-\frac{1}{n+x})^{n+1} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n+x-1})^{n+1}} = \frac{1}{a_n(x-1)}, \forall n \geq 1.$$

Conform cu Propoziția 2, șirul $a_n(x-1)$ este descrescător pentru $x-1 \in (-1,0] \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x \in (0,1]$ și are termenii pozitivi, deci $c_n(x)$ este crescător pentru $x \in (0,1]$.

Propoziția 5. *Şirul* $E_n(p) = (1+\frac{1}{n})^{n+p}$ *este descrescător,* $\forall p \in \mathbf{N}^*$.

Demonstrație. Din identitatea

$$a^{n+p} - b^{n+p} = (a-b)(a^{n+p-1} + a^{n+p-2}b + ... + ab^{n+p-2} + b^{n+p-1}), \quad a > b > 0,$$

rezultă $a^{n+p} - b^{n+p} > (a-b)(n+p)b^{n+p-1}$. Punând aici $a = 1+\frac{1}{n}$ și $b = 1+\frac{1}{n+1}$, se obține $(1+\frac{1}{n})^{n+p} > (1+\frac{1}{n+1})^{n+p}(1+\frac{n+p}{n(n+2)})$ pentru $n \geq 1$ și p fixat. Ținând seama că $1+\frac{n+p}{n(n+2)} > 1+\frac{1}{n+1}$, va rezulta $(1+\frac{1}{n})^{n+p} > (1+\frac{1}{n+1})^{n+1+p} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow E_n(p) > E_{n+1}(p)$, ceea ce încheie demonstrația.

Propoziția 6. *Şirul* $E_n(x) = (1+\frac{1}{n})^{n+x}$ *este descrescător,* $\forall x \geq 1$ *fixat.*

Demonstrație. Se consideră funcția $f:[1,\infty) \to \mathbf{R}$, $f(t) = (1+\frac{1}{t})^{t+x}$, unde $x \geq 1$ fixat. Atunci $f'(t) = f(t)[\ln(1+\frac{1}{t}) - \frac{t+x}{t(t+1)}]$ și folosind inegalitatea $\ln(1+y) < y$ pentru $y \geq 0$, avem $\ln(1+\frac{1}{t}) - \frac{t+x}{t(t+1)} < \frac{1}{t} - \frac{t+x}{t(t+1)} = \frac{1-x}{t(t+1)}$, de unde $f'(t) < 0$ și deci f este descrescătoare pentru $t \geq 1$. Avem $f(n) > f(n+1) \Leftrightarrow E_n(x) > E_{n+1}(x)$ pentru $n \geq 1$, ceea ce încheie demonstrația.

Observație. Propoziția 5 este un caz particular al Propoziției 6, având însă o demonstrație elementară.

Propoziția 7. *Şirul* $u_n(x) = (1-\frac{1}{n})^{n+x}$ *este crescător,* $\forall x \geq 0$ *fixat.*

Demonstrație. Putem scrie $u_{n+1}(x) = (1-\frac{1}{n+1})^{n+1+x} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{n+x+1}} = \frac{1}{E_n(x+1)}$.

Conform Propoziției 6, șirul $E_n(x+1)$ este descrescător pentru $x+1 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$ și are termenii pozitivi. Rezultă ca șirul $u_{n+1}(x)$ este crescător, adică $u_2(x) < u_3(x) < ... < u_n(x) < ...$. Dar $u_1(x)=0$, deci avem și $u_1(x) < u_2(x)$, ceea ce încheie demonstrația.

Propoziția 8. *Şirul* $v_n(x)=(1-\frac{1}{n+1})^{n+x}$ *este descrescător,* $\forall x\le 0$ *fixat.*

Demonstrație. Se consideră funcția $g:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $g(t)=(1-\frac{1}{t+1})^{t+x}$, unde $x\le 0$ fixat. Avem $g'(t)=g(t)[\ln(1-\frac{1}{t+1})+\frac{t+x}{t(t+1)}]$ şi folosind inegalitatea $\ln(1-y)<-y, \forall\, 0<y<1$, găsim $\ln(1-\frac{1}{t+1})+\frac{t+x}{t(t+1)}<-\frac{1}{t+1}+\frac{t+x}{t(t+1)}=\frac{x}{t(t+1)}\le 0$ pentru $t\in(0,\infty)$. Deci $g'(t)<0$, $\forall t\in(0,\infty)$, adică g este descrescătoare pe $(0,\infty)$. Vom avea $g(n)>g(n+1)\Leftrightarrow v_n(x)>v_{n+1}(x)$, $\forall n\ge 1$, ceea ce încheie demonstrația.

Propoziția 9. *Şirul* $v_n(x)=(1-\frac{1}{n+1})^{n+x}$ *este crescător,* $\forall x\ge 1$ *fixat.*

Demonstrație. Avem $v_n(x)=(1-\frac{1}{n+1})^{n+x}=\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{n+x}}=\frac{1}{E_n(x)}$, $\forall n\ge 1$.

Conform Propoziției 6, şirul $E_n(x)$ este descrescător pentru $x\ge 1$ şi are termenii pozitivi, deci $v_n(x)$ este crescător, $\forall x\ge 1$ fixat.

Observații. În demonstrația Propoziției 1, ne-am inspirat din [**1**;p. 24-25]. Relativ la şirul $E_n(x)$, în [**2**; p. 223-224] se arată pe cale neelementară că este descrescător pentru $x\ge\frac{1}{2}$ şi crescător pentru $x<\frac{1}{2}$. In [**3**; p. 13-14] se arată pe cale elementară ca şirul $E_n(\frac{1}{2})$ este descrescător. Şirurile studiate în Nota de față au aplicație în studiul unor serii de funcții.

Bibliografie

1. **Fr. Junker** – *Höhere Analysis I,* 1920.
2. **G. Klambauer** – *Problems and Propositions in Analysis*, New York, 1979.
3. **A. Vernescu** – *Şiruri de numere reale,* Bucureşti, 2000.

Studiu comparativ privind câteva medii uzuale

Claudiu-Ştefan POPA [1]

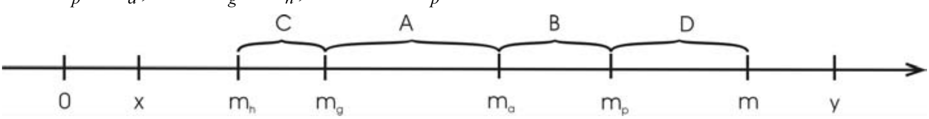
Vom folosi în cele ce urmează următoarele convenții de notare: dacă $x, y > 0$, atunci $m_h = \dfrac{2xy}{x+y}$, $m_g = \sqrt{xy}$, $m_a = \dfrac{x+y}{2}$, $m_p = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}$ sunt *mediile armonică*, *geometrică*, *aritmetică*, respectiv *pătratică* ale numerelor x şi y. De asemenea, introducem $m = \dfrac{x^2+y^2}{x+y}$ – *media ponderată* a numerelor x şi y cu ponderile reale x, respectiv y. În acest context, m_h poate fi privită ca media ponderată a numerelor x şi y cu ponderile y, respectiv x. Au loc următoarele inegalități între medii:

$$m_h \le m_g \le m_a \le m_p \le m \tag{1}$$

cu egalitate pentru $x = y$.

Se observă uşor prin calcul că $m - m_a = m_a - m_h$, (2)
deci media aritmetică a numerelor x şi y este medie aritmetică şi pentru numerele m_h şi m. De asemenea, aşa cum m_g este şi medie geometrică între m_h şi m_a, la fel m_p este medie geometrică între m_a şi m, deoarece $\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}} = \sqrt{\dfrac{x+y}{2} \cdot \dfrac{x^2+y^2}{x+y}}$. (3)

Vom presupune în continuare $x < y$ şi, ca în figura de mai jos, notăm $A = m_a - m_g$, $B = m_p - m_a$, $C = m_g - m_h$, $D = m - m_p$:



Propoziție. *Cu notațiile de mai sus, avem*: $\dfrac{A}{2} < C < B < D < A$. (4)

Demonstrație. Pentru prima inegalitate, avem echivalent:

$$\frac{A}{2} < C \Leftrightarrow m_a - m_g < 2m_g - 2m_h \Leftrightarrow m_a + 2m_h < 3m_g .$$

Însă $m_a + 2m_h = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{4ab}{a+b} \le 2\sqrt{\dfrac{a+b}{2} \cdot \dfrac{4ab}{a+b}} = 2\sqrt{2ab} < 3\sqrt{ab} = 3m_g$. La fel,

$$C < B \Leftrightarrow m_g - m_h < m_p - m_a \Leftrightarrow \frac{x+y}{2} - \frac{2xy}{x+y} < \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} - \sqrt{xy} \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x-y)^2}{2(x+y)}\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{xy}\right) < \frac{x^2+y^2}{2} - xy \Leftrightarrow \frac{(x-y)^2}{2}\left[1 - \left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{xy}\right) \cdot \frac{1}{x+y}\right] > 0$$

[1] Profesor, Şcoala „Alecu Russo”, Iaşi

$$\overset{x\neq y}{\Leftrightarrow} 1 > \left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{xy}\right)\cdot\frac{1}{x+y} \Leftrightarrow x+y > \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{xy} \Leftrightarrow A > B\ .$$

Pentru a arăta că $A > B$, să observăm mai întâi că $m_p^2 + m_g^2 = 2m_a^2$, relație ce rezultă în urma unui calcul de rutină; deci $m_a = \sqrt{(m_p^2 + m_g^2)/2}$. Pe de altă parte, aplicând (1) numerelor m_p și m_g, avem că $\sqrt{(m_p^2 + m_g^2)/2} \geq (m_p + m_g)/2$, cu egalitate pentru $m_p = m_g \Leftrightarrow x = y$. Cum $x \neq y$, rezultă că $m_a > (m_p + m_g)/2$, adică $A > B$.

În continuare să aplicăm inegalitatea $\sqrt{xy} - x \leq y - \sqrt{xy}$ (echivalentă cu $m_g \leq m_a$) numerelor m_a și m.. Ținând seama de (3) rezultă că $m_p - m_a \leq m - m_p \Leftrightarrow B \leq D$, egalitatea fiind atinsă pentru cazul exceptat $x = y$.

În fine, inegalitatea $D < A$ rezultă din faptul că $A + C = B + D$ (relație echivalentă cu (2)) şi $C < B$.

Observația 1. Rezultatul demonstrat generalizează unele probleme apărute în *Gazeta Matematică*. Astfel problemele

E: 11 997. *Dacă* $x, y > 0$, *demonstrați că* $\sqrt{xy} \leq \dfrac{x+y}{4} + \dfrac{xy}{x+y}$.

Gh. Necşuleu şi Ion Necşuleu

E: 12 162. *Dacă* $x, y > 0$, *să se arate că* $x + y \geq \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{xy}$.

Claudiu-Ştefan Popa

sunt simple transcripții ale inegalităților $A > C$, respectiv $A > B$.

Observația 2. Se pot obține inegalități mai interesante, în care să apară mai multe dintre medii. Prezentăm un exemplu: adunând membru cu membru inegalitățile $A \geq B$, $A \geq C$ și $A \geq A$ obținem $3A \geq A + B + C \Leftrightarrow \dfrac{x+y}{2} - \sqrt{xy} \geq \dfrac{1}{3}\left(\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}} - \dfrac{2xy}{x+y}\right)$, inegalitate a cărei demonstrație directă este destul de laborioasă.

Observația 3. Relațiile (4) arată că oricum am alege trei dintre numerele A, B, C, D, ele pot constitui laturile unui triunghi (în cazul $x \neq y$).

Observația 4. Continuând ideea, aşezăm pe o axă numerele $C < B < D < A$ și comparând lungimile intervalelor care apar, obținem noi inegalități în care apar mediile. În acest sens, problema:

E: 12 177. *Dacă* $x, y > 0$, *demonstrați că* $\dfrac{x+y}{4} + \dfrac{xy}{x+y} - \sqrt{xy} \leq \left|\dfrac{x-y}{2}\right|$.

Manuela Prajea

este banală, întrucât se reduce la $A - C \leq |x - y|$, inegalitate grosieră.

Aplicații ale monotoniei mediilor în raport cu ordinul lor

Codrin ANDREI* şi *Ştefan RUSU [1]

Fie date numerele $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbf{R}^*_+$ ($n \in \mathbf{N}^*$) şi $\alpha \in \mathbf{R}$. Se numeşte *media de ordin α* a numerelor $x_1, x_2, ..., x_n$ numărul $M_\alpha(x_1,...,x_n)$ (pe scurt, M_α) definit prin

$$M_\alpha = \begin{cases} \left(\dfrac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + \cdots + x_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha}, & \alpha \neq 0 \\ \sqrt[n]{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}, & \alpha = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Observăm că $M_0 = \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} = G_n$ este *media geometrică*, $M_1 = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = A_n$ - *media aritmetică* şi că $M_{-1} = \dfrac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + ... + \dfrac{1}{x_n}} = H_n$ - *media armonică* a numerelor date.

Mai general, se numeşte *media ponderată de ordin α* a numerelor $x_1, x_2, ..., x_n$ cu ponderile (pozitive) $p_1, p_2, ..., p_n$ numărul $M_\alpha(x, p)$ (pe scurt, M_α) definit prin

$$M_\alpha(x, p) = \begin{cases} \left(\dfrac{p_1 x_1^\alpha + p_2 x_2^\alpha + ... + p_n x_n^\alpha}{p_1 + p_2 + ... + p_n}\right)^{1/\alpha}, & \alpha \neq 0 \\ \left[(x_1)^{p_1}(x_2)^{p_2} ... (x_n)^{p_n}\right]^{1/(p_1 + p_2 + ... + p_n)}, & \alpha = 0 \end{cases} \tag{2}$$

(pentru $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1$, (2) devine (1)).

Vom prezenta mai întâi un rezultat binecunoscut, anume :

Propoziție. *Mediile (ponderate sau nu) sunt monoton crescătoare în raport cu ordinul lor, adică* $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\alpha < \beta \implies M_\alpha \leq M_\beta$.

Demonstrație. Să presupunem mai întâi că avem $0 < \alpha < \beta$. Ca urmare, există $t > 1$ astfel încât $\beta = t\alpha$. Utilizăm *inegalitatea lui Jensen* pentru funcția convexă $f(x) = x^t$, $x \in (0, \infty)$, şi scriem :

$$\left(\frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_n x_n}{p_1 + p_2 + ... + p_n}\right)^t \leq \frac{p_1 x_1^t + p_2 x_2^t + ... + p_n x_n^t}{p_1 + p_2 + ... + p_n}. \tag{3}$$

Înlocuim în aceasta $x_1, x_2, ..., x_n$ respectiv cu $x_1^\alpha, x_2^\alpha, ..., x_n^\alpha$; obținem :

[1] Elevi, Liceul Teoretic "Gr. Moisil", Iaşi

$$\left(\frac{p_1x_1^{\alpha}+p_2x_2^{\alpha}+\ldots+p_nx_n^{\alpha}}{p_1+p_2+\ldots+p_n}\right)^t \le \frac{p_1x_1^{t\alpha}+p_2x_2^{t\alpha}+\ldots+p_nx_n^{t\alpha}}{p_1+p_2+\ldots+p_n}$$

şi , prin ridicare la puterea pozitivă $\frac{1}{t\alpha}$ deducem că $M_\alpha \le M_{t\alpha}$, adică $M_\alpha \le M_\beta$.

Dacă $\alpha<\beta<0$, atunci există $t>1$ astfel încât $\alpha=t\,\beta$. Se procedează în mod similar: în (3) se înlocuiesc $x_1, x_2, \ldots, x_n$ cu $x_1^{\beta}, x_2^{\beta}, \ldots, x_n^{\beta}$, se ridică la puterea negativă $\frac{1}{t\beta}$ ambii membri ai inegalităţii rezultate şi se obţine $M_\beta \ge M_{t\beta}$, adică $M_\alpha \le M_\beta$.

În sfârşit, dacă în inegalitatea $M_\alpha < M_\beta$ ($0<\alpha<\beta$) facem ca α să tindă la zero, vom obţine $M_0 < M_\beta$ ($\beta>0$). Tot ca un caz limită se obţine şi $M_\alpha < M_0$ ($\alpha<0$). Q.e.d.

Indicăm câteva aplicaţii ale propoziţiei de mai sus.

1. *Să se rezolve ecuaţia* $\left(x+\frac{1}{x}\right)^y+\left(x-\frac{1}{x}\right)^y=2x^y$, $x\ge 1$ *şi* $y>0$.

Soluţie. Avem trei cazuri :

I. $y=1$. Ecuaţia devine $\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(x-\frac{1}{x}\right)=2x$ şi aceasta este verificată de orice $x\ge 1$.

Aşadar perechile $(x,1)$, $\forall\ x\ge 1$, sunt soluţii ale ecuaţiei date.

II. $0<y<1$. Utilizând inegalitatea $M_y \le M_1$ pentru numerele distincte $\left(x+\frac{1}{x}\right)^y$ şi $\left(x-\frac{1}{x}\right)^y$

obţinem : $\left(x+\frac{1}{x}\right)^y+\left(x-\frac{1}{x}\right)^y<2\left(\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(y+\frac{1}{y}\right)\right]\Big/2\right)^y=2x^y$, deci ecuaţia dată nu are soluţii în acest caz.

III. $y>1$. Utilizăm de această dată inegalitatea $M_1 \le M_y$ pentru aceleaşi numere distincte şi obţinem că membrul întâi al ecuaţiei este strict mai mare ca $2x$. Deci nu avem soluţii.

Rezumând, ecuaţia dată are ca soluţii perechile $(x,1)$, $\forall\ x\ge 1$.

2. *Fie* $a, b, c>0$ *cu* $abc=1$. *Demonstraţi inegalitatea* $2(a+b+c)\le a^2b+ab^2+a^2c+$ $+ac^2+b^2c+bc^2$ (**V. Popa**, *G : 615*, R. M. Galaţi, nr. 17-18).

Soluţie. Prin calcul direct constatăm că $a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2-2(a+b+c)$ $=(a+b+c)(ab+bc+ca-2)-3abc$ şi, deci,avem de arătat că $(a+b+c)(ab+bc+ca-2)\ge 3$ (1) (am utilizat condiţia $abc=1$). Inegalitatea $A\ge G$ pentru numerele a, b, c revine la $a+b+c\ge 3$ (2) iar $G\ge H$ conduce la $1\ge 3/(ab+bc+ca)$ sau $ab+bc+ca-2\ge 1$ (3) (s-a ţinut seama de relaţia $abc=1$). Din (2) şi (3) , prin înmulţire, se obţine (1).

3. *Să se arate că* $\frac{1}{2^{n-1}} \le \sin^{2n}\alpha + \cos^{2n}\alpha \le 1,\ \forall\ \alpha \in \mathbf{R}$ *şi* $n \in \mathbf{N}^*$.

Soluţie. Partea dreaptă se dovedeşte astfel : $\sin^{2n}\alpha + \cos^{2n}\alpha \le (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^n = 1$.

Pentru a dovedi inegalitatea din partea stângă, utilizăm $M_1 \le M_n$ pentru numerele $\sin^2\alpha$ şi $\cos^2\alpha$; obţinem : $\sin^{2n}\alpha + \cos^{2n}\alpha \ge 2[(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)/2]^n = 1/2^{n-1}$, q.e.d.

4. *Fie ABC un triunghi dreptunghic în A şi numărul* $\alpha \in \mathbf{R}$. *Au loc inegalităţile* :

(i) $b^\alpha + c^\alpha \le 2^{1-\alpha/2}a^\alpha$, *dacă* $\alpha \le 2$ (ii) $b^\alpha + c^\alpha \ge 2^{1-\alpha/2}a^\alpha$, *dacă* $\alpha \ge 2$.

Soluţie. Avem $\alpha \le 2 \Rightarrow M_\alpha(b,c) \le M_2(b,c) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[(b^\alpha + c^\alpha)/2\right]^{1/\alpha} \le \left[(b^2 + c^2)/2\right]^{1/2} = a/\sqrt{2} \Rightarrow b^\alpha + c^\alpha \le 2^{1-\alpha/2}a^\alpha .$$

Similar se procedează pentru a dovedi (ii).

5. *Fie ABC un triunghi echilateral înscris în cercul C(O,R) şi* $M \in C(O,R)$ *oarecare. Arătaţi că* $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ *astfel încât* $\alpha \le 2$, $2 \le \beta \le 4$ *şi* $\gamma \ge 4$ *au loc inegalităţile:*

(i) $MA^\alpha + MB^\alpha + MC^\alpha \le 3\cdot 2^{\alpha/2}\cdot R^\alpha$; *(ii)* $MA^\gamma + MB^\gamma + MC^\gamma \ge 3\cdot 6^{\gamma/4}\cdot R^\gamma$

(iii) $3\cdot 2^{\beta/2}\cdot R^\beta \le MA^\beta + MB^\beta + MC^\beta \le 3\cdot 6^{\beta/4}\cdot R^\beta$.

Soluţie. Sunt cunoscute relaţiile următoare : $MA^2+MB^2+MC^2=6R^2$ şi $MA^4+MB^4+MC^4=18R^4$ ([**1**], pp. 27-28). Ca urmare, $M_2(MA, MB, MC)=R\sqrt{2}$ şi $M_4(MA,MB,MC)=R\sqrt[4]{6}$. Pe de altă parte, avem : $M_\alpha \le M_2 \le M_\beta \le M_4 \le M_\gamma$. Din $M_\alpha \le M_2$ urmează că $MA^\alpha + MB^\alpha + MC^\alpha = 3(M_\alpha)^\alpha \le 3(M_2)^\alpha = 3\cdot 2^{\alpha/2}\cdot R^\alpha$, adică (i). Analog se obţin (ii) şi (iii).

6. *Fie ABCD un pătrat înscris înscris în cercul C(O, r). Fie* $M \in C(O,r)$ *şi* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ *astfel încât* $\alpha \le 2$, $2 \le \beta \le 4$ *şi* $\gamma \ge 4$. *Arătaţi că au loc inegalităţile* :

(i) $MA^\alpha + MB^\alpha + MC^\alpha + MD^\alpha \le 4\cdot(3/2)^{\alpha/2}\cdot r^\alpha$; *(ii)* $MA^\gamma + MB^\gamma + MC^\gamma + MD^\gamma \ge 4\cdot 6^{\gamma/4}\cdot r^\gamma$

(iii) $4\cdot(3/2)^{\beta/2}\cdot r^\beta \le MA^\beta + MB^\beta + MC^\beta + MD^\beta \le 4\cdot 6^{\beta/4}\cdot r^\beta$.

Soluţie. Se utilizează egalităţile: $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 6r^2$ şi $MA^4 + MB^4 + MC^4 + MD^4 = 24r^4$ [**4**] şi , procedând ca în problema precedentă, se obţin inegalităţile cerute.

Bibliografie

1.C. Cocea - *200 de probleme din geometria triunghiului echilateral,* Ed. „Gh. Asachi”, Iaşi, 1992 .

2.L. Pîrşan, C.-G. Lazanu -*Probleme de algebră şi trigonometrie,* Ed. Facla, Timişoara,1983.

3.V. Ştefănescu, N. Deval - *Asupra unor inegalităţi între medii generalizate şi aplicaţiile lor,* G.M. –1/1985, 8-11.

4.G. Ţiţeica – *Culegere de probleme de geometrie,* Ed. Tehnică, Bucureşti, 1956.

Funcții care admit / nu admit primitive

Dumitru GĂLEATĂ [1] ***și Gabriel POPA*** [2]

Ne propunem în ceea ce urmează o abordare cât mai intuitivă a unor probleme considerate în general ca fiind „dificile”, grupate în următoarele clase:

I. Dată o funcție, să se stabilească faptul că admite primitive;

II. Dată o funcție, să se arate că nu admite primitive;

III. Dată o funcție a cărei expresie depinde de anumiți parametri, să se determine valorile acestora astfel încît funcția să admită primitive.

În redactarea acestui articol am pornit de la constatarea că soluțiile date în diverse cărți unora dintre problemele din [**2**], pag. 13-14, sunt artificiale şi greu de urmărit de către elevi. Propunem în cele ce urmează o prezentare pe care o credem logică şi adecvată predării la clasă.

I. ***(i) Orice funcție continuă admite primitive.***

Problema 1. *Funcția* $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^5}e^{\frac{-1}{x^2}} & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$ *admite primitive.*

Soluție. Substituția $\dfrac{1}{x^2}=t$ conduce la $\dfrac{1}{x^5}=t^{\frac{5}{2}}$ dacă $x>0$ şi $\dfrac{1}{x^5}=-t^{\frac{5}{2}}$ dacă $x>0$, deci $\lim\limits_{x\downarrow 0}f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t^{\frac{5}{2}}}{e^t}=0$; $\lim\limits_{x\uparrow 0}f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{-t^{\frac{5}{2}}}{e^t}=0,$ de unde $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0=$ $f(0)$, adică f este continuă în 0. Cum f este evident continuă pe $(-\infty, 0)$ şi pe $(0, \infty)$, rezultă că f continuă pe $\boldsymbol{R}$, deci f admite primitive.

Problema 2. *Funcțiile* $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x} & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$ *şi* $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $g(x)=\begin{cases}x\cos\dfrac{1}{x} & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$ *admit primitive.*

Soluție. Pentru f, avem $\left|x\sin\dfrac{1}{x}-0\right|\leq|x|\xrightarrow{x\to 0}0$, deci $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$, adică f este continuă . Analog se procedează pentru g .

(ii) Anumitor funcții li se pot construi efectiv primitivele.

---

[1] Profesor, Grup Şcolar "Ştefan Procopiu", Iaşi

[2] Profesor, Liceul Teoretic "Garabet Ibrăileanu", Iaşi

Problema 3. *Funcțiile* $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & ,x \neq 0 \\ 0 & ,x = 0 \end{cases}$ *şi* $g: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$,

$g(x) = \begin{cases} 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x} & ,x \neq 0 \\ 0 & ,x = 0 \end{cases}$ *admit primitive.*

Soluție. Considerăm funcția $F(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & ,x \neq 0 \\ 0 & ,x = 0 \end{cases}$, care este derivabilă pe $\boldsymbol{R}^*$ şi $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in \boldsymbol{R}^*$. Să mai arătăm că F este derivabilă în origine, iar $F'(0) = 0$:

$$F'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} x\ \sin\frac{1}{x} = 0$$

(vezi Problema 2), deci F este primitivă a lui f. Analog se procedează pentru g.

Generalizare 1. *Funcțiile* $f_n: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f_n(x)=\begin{cases} nx^{n-1}\sin\frac{1}{x} - x^{n-2}\cos\frac{1}{x} & ,x \neq 0 \\ 0 & ,x = 0 \end{cases}$ *şi*

$g_n: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $g_n(x)=\begin{cases} nx^{n-1}\cos\frac{1}{x} + x^{n-2}\sin\frac{1}{x} & ,x \neq 0 \\ 0 & ,x = 0 \end{cases}$ *admit primitive,* $\forall n \geq 2$.

Generalizare 2. *Funcțiile* $f_n: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$,

$f_n(x)=\begin{cases} (n+1)x^n\sin\frac{1}{x^n} - n\cos\frac{1}{x^n} & ,x \neq 0 \\ 0 & ,x = 0 \end{cases}$

şi $g_n: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $g_n(x)=\begin{cases} (n+1)x^n\cos\frac{1}{x^n} + n\sin\frac{1}{x^n} & ,x \neq 0 \\ 0 & ,x = 0 \end{cases}$ *admit primitive,* $\forall n \geq 1$.

(iii) O combinație liniară a unor funcții ce admit primitive, admite primitive.

Problema 4. *Funcțiile* $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x)=\begin{cases} \sin\frac{1}{x} & ,x \neq 0 \\ 0 & ,x = 0 \end{cases}$ *şi* $g: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $g(x)=\begin{cases} \cos\frac{1}{x} & ,x \neq 0 \\ 0 & ,x = 0 \end{cases}$ *admit primitive.*

Soluție. Funcția f se poate scrie ca o combinație liniară cu coeficienții –2, 1 a funcțiilor g din Problemele 2 şi 3, deci admite primitive. Analog pentru g.

Observația 1. Dacă F este o primitivă a funcției f, atunci funcția $f(\frac{x}{\alpha})$ admite primitiva $\alpha F\left(\frac{x}{\alpha}\right)$.

Observația 2. Funcțiile f și g sînt exemple de funcții necontinue (cu discontinuitate de specia a doua în origine) care admit primitive.

Problema 5. *Funcțiile* $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x)=\begin{cases} \sin^2 \dfrac{1}{x} & ,x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & ,x = 0 \end{cases}$ *și* $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $g(x)= \begin{cases} \cos^2 \dfrac{1}{x} & ,x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & ,x = 0 \end{cases}$ *admit primitive.*

Soluție. Avem $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}(1-\cos\dfrac{2}{x}) & ,x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & ,x = 0 \end{cases} = \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\begin{cases} \cos\dfrac{2}{x} & ,x \neq 0 \\ 0 & ,x = 0 \end{cases}$ și analog pentru g.

Problema 6. *Funcțiile* $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x)=\begin{cases} \sin^3 \dfrac{1}{x} & ,x \neq 0 \\ 0 & ,x = 0 \end{cases}$ *și* $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $g(x)= \begin{cases} \cos^3 \dfrac{1}{x} & ,x \neq 0 \\ 0 & ,x = 0 \end{cases}$ *admit primitive.*

Soluție. $\sin\dfrac{3}{x} = 3\sin\dfrac{1}{x} - 4\sin^3\dfrac{1}{x}$, deci $f(x)=\dfrac{3}{4}\begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & ,x \neq 0 \\ 0 & ,x = 0 \end{cases} - \dfrac{1}{4}\begin{cases} \sin\dfrac{3}{x} & ,x \neq 0 \\ 0 & ,x = 0 \end{cases}$, fiecare dintre funcțiile din dreapta admițând primitive cf. Problemei 4 și Observației 1.

Generalizare. *Funcția* $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x)=\begin{cases} \sin^{2n+1} \dfrac{1}{x} & ,x \neq 0 \\ 0 & ,x = 0 \end{cases}$ *admite primitive* (O.M.,etapa județeană, 1982).

II. ***(i) Funcțiile care nu au P.D. nu admit primitive.*** În acest sens, ținând seama de proprietățile unei funcții cu P.D., putem proceda în mai multe moduri:

- Dacă $Im\, f$ nu este interval, atunci f nu admite primitive;
- Dacă f are discontinuități de specia I , atunci f nu admite primitive.

Problema 7. *Funcția* $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = [x]$ *nu admite primitive.*

Soluție. $Im\, f = \boldsymbol{Z}$, care nu este interval.

Problema 8. *Funcția* $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = x - [x] = \{x\}$ *nu admite primitive.*

Soluție. Pentru $k \in \boldsymbol{Z}$, avem $\lim\limits_{x \uparrow k} f(x) = 1, \lim\limits_{x \downarrow k} f(x) = 0$, deci f are discontinuități de specia I.

Problema 9. *Funcția* $h : (a,b) \to \boldsymbol{R}$, $h(x)= \begin{cases} f(x) & ,x \in (a,b) \cap Q \\ g(x) & ,x \in (a,b) / Q \end{cases}$, *cu* f *și* g

funcții continue distincte, nu admite primitive (O.M., etapa finală, 1981).

Soluție. Cum $f \neq g$, există $x_0 \in (a, b)$ a.î. $f(x_0) \neq g(x_0)$. Cum $\boldsymbol{R}$ este separat Hausdorff, putem alege $V_f \in V(f(x_0))$ și $V_g \in V(g(x_0))$ a.î. $V_f \cap V_g = \varphi$. Deoarece f, g sunt continue, există $U_f, U_g \in V(x_0)$ (pe care le putem presupune intervale deschise) a.î. $\forall x \in (a, b) \cap U_f \Rightarrow f(x) \in V_f$ *și* $\forall x \in (a, b) \cap U_g \Rightarrow g(x) \in V_g$. Observăm acum că $(a, b) \cap U_f \cap U_g$ este un interval, iar imaginea sa prin h este o reuniune de mulțimi disjuncte incluse în V_f respectiv V_g, care nu poate fi interval.

Observație. Particularizând convenabil funcțiile f și g, obținem soluții pentru problemele II.5, 6, pag. 13 din [**2**].

(ii) Pentru anumite funcții, putem demonstra efectiv că nu admit primitive.

Problema 10. *Funcția* $f_1 : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f_1(x)=\begin{cases} \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x} & ,x \neq 0 \\ 0 & ,x = 0 \end{cases}$ *nu admite primitive* (v. și Problema 3).

Soluție. Observăm că $\left(x \sin\frac{1}{x}\right)' = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$, deci o eventuală primitivă a lui f_1 are în mod necesar forma $F(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x} + c_1 & ,x \neq 0 \\ c_2 & ,x = 0 \end{cases}$. Cum F trebuie să fie continuă, atunci $c_1 = \lim\limits_{x\to 0} F(x) = F(0) = c_2$, deci $c_1 = c_2$. Funcția F trebuie să fie derivabilă, deci există limita $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$, ceea ce nu este posibil. Urmează că f_1 nu admite primitive.

(iii) Reducere la absurd.

Problema 11. *Funcția* $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & ,x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & ,x = 0 \end{cases}$ *nu admite primitive.*

Soluție. Presupunem că f ar admite primitive. Cum funcția $g(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & ,x \neq 0 \\ 0 & ,x = 0 \end{cases}$ admite primitive (v. Problema 4), atunci diferența lor admite primitive, deci funcția $h(x) = f(x) - g(x) = \begin{cases} 0 & ,x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & ,x = 0 \end{cases}$ admite primitive. Însă $Im\, h = \{0, \frac{1}{2}\}$ nu este interval, deci h nu admite primitive. Presupunerea făcută este falsă.

Observația 1. Problema de mai sus furnizează un exemplu de funcție cu P.D. care nu admite primitive.

Observația 2. Putem da, folosind acest raționament, nenumărate exemple de funcții cu ramuri care nu admit primitive. De altfel, în unele culegeri de teste grilă în vederea pregătirii a diverse examene, se întâlnesc probleme de forma:

„*Funcția* $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & ,x \neq 0 \\ a & ,x = 0 \end{cases}$ *admite primitive d.n.d.* $a = \ldots$"

Elevii trebuie obişnuiți să „simtă" valoarea potrivită a constantei încă înainte de a trece la rezolvarea propriu-zisă a problemei !

III. Apar deseori aplicații de tipul:

Problema 12. *Se consideră funcția* $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \begin{cases} ae^x & ,x \leq 0 \\ \dfrac{\sqrt{1+x}-b}{x} & ,x > 0 \end{cases}$ *cu* $a, b \in \boldsymbol{R}$. *Determinați* a, b *a.î.* f *să admită primitive.*

Metoda uzuală de abordare a unor astfel de probleme este căutarea primitivelor lui f pe ramuri, considerarea unei primitive F sub forma generală

$F(x)=\begin{cases} ae^x + c_1 & ,x < 0 \\ c_2 & ,x = 0 \\ 2\sqrt{x+1} + \ln\dfrac{x}{x^b(1+\sqrt{x+1})^2} + c_3 & ,x > 0 \end{cases}$ şi determinarea apoi a constantelor *a* şi *b* a.î. F să fie continuă şi derivabilă.

Propusă pentru prima oară în clasă, problema primeşte însă de obicei următoarea rezolvare: „Pentru ca f să admită primitive, trebuie ca f să fie continuă şi putem afla a, b din continuitatea lui f". Lăsând la o parte confuzia care se face între condiția necesară şi cea suficientă, în contextul dat un astfel de răspuns nu este chiar atât de greşit. În [**4**] este enunțat şi parțial demonstrat următorul rezultat (Problema 10, pag. 118):

Teoremă. *Fie* I *un interval,* x_0 *punct interior lui* I, *iar* $f: I \to \boldsymbol{R}$ *o funcție cu P.D. Dacă* f *are limite laterale în* x_0, *atunci* f *este continuă în* x_0.

Demonstrația dată în [4] este valabilă numai în cazul limitelor laterale finite (adică al discontinuităților de specia I), însă ea poate fi adaptată şi în cazul general. Presupunem, prin reducere la absurd, că $f(x_0 - 0) < f(x_0)$ (limita putând fi finită sau $-\infty$) şi fie α un număr între cele două valori. Atunci $\forall V \in V(f(x_0 - 0)), \exists U \in V(x_0)$ a.î. $\forall x \in U$, $x < x_0 \Rightarrow f(x) \in V$. Considerând $V = (f(x_0 - 0), \alpha)$, există U – pe care o putem lua $U = [a, x_0)$ – a.î. $\forall x \in U \Rightarrow f(x) \in V$; altfel spus, $f(x) < \alpha, \forall x \in [a, x_0)$. Rezultă că f nu ia valoarea α pentru $x \in [a, x_0]$, fals.

Revenind la Problema 12, f admite primitive, deci are P.D. În plus, f are limite laterale în 0 : $f(0 - 0) = a$, iar $f(0 + 0) = \begin{cases} \pm\infty & ,b \neq 1 \\ \frac{1}{2} & ,b = 1 \end{cases}$. Din teorema de mai sus, rezultă că $a=\frac{1}{2}$, $b=1$.

Bibliografie

1. **V. Arsinte** – *Probleme elementare de calcul integral* , Ed. Univ. Bucureşti, 1995.
2. **N. Boboc, I. Colojoară** – *Analiză matematică* , manual cl. a XII-a, E.D.P., 1999.
3. **M. Ganga** – *Elemente de analiză matematică* , cl. a XII-a, Ed. Mathpress, 1999.
4. **Gh. Gussi et al.** – *Analiză matematică* , manual cl. a XI-a, E.D.P., 1999.

Construcţii geometrice cu echerul

Eugenia COHAL [1]

Nota Redacţiei. S-au primit de la mai mulţi elevi rezolvitori soluţii necorespunzătoare la problema *VII.20* din *Rec.Mat-1/2001* : aceştia au confundat *echerul abstract* cu *echerul şcolar* ce are un unghi de 30°. Este binevenită această lucrare ce aduce clarificări în această privinţă.

Geometria constructivă sau *teoria construcţiilor geometrice* este o parte a geometriei fascinantă prin problematica abordată , vechimea şi istoria ei, printr-un număr de probleme celebre formulate în antichitate şi care şi-au găsit rezolvarea după multe secole de cercetări şi cu utilizarea cunoştinţelor de algebră şi analiză matematică. Mulţi şi străluciţi matematicieni au fost atraşi de acest domeniu de care şi-au legat numele prin contribuţiile aduse.

Rezolvarea problemelor de construcţii (geometrice) depinde de instrumentele admise a fi utilizate. Pe lângă *riglă* şi *compas* , de-a lungul timpului au fost folosite şi alte instrumente : *rigla bilaterală*, *rigla cu etalon*, *distanţierul*, *echerul* etc. sau au fost inventate instrumente speciale cu care puteau fi trasate anumite curbe.

Fiecare instrument (sau grup de instrumente) se defineşte prin operaţiile fundamentale ce pot fi efectuate cu acesta (acestea).

În prezenta Notă atenţia se concentrează asupra unui singur instrument: *echerul.* Acesta trebuie imaginat ca două rigle fixate sub un unghi drept în două capete ale lor. I se mai spune *echerul drept* în contrast cu *echerul oblic* (*colţarul*). Evident, echerul se deosebeşte de instrumentul şcolar cu acelaşi nume.

În fapt, echerul este definit de operaţiile (construcţiile) ce se pot face cu el pornind de la elementele date de problemă (puncte, drepte etc.) cât şi de la anumite elemente luate arbitrar. Operaţiile fundamentale ce definesc echerul sunt în număr de trei:

1° construirea dreptei ce trece prin două puncte şi determinarea punctului de intersecţie a două drepte ;

2° construirea perpendicularei la o dreaptă ce trece printr-un punct;

3° construirea unui punct pe o dreptă din care două puncte se văd sub un unghi drept.

Dăm acum câteva construcţii ce pot fi făcute cu ajutorul echerului.

1. *Construcţia paralelei la o dreaptă d printr-un punct P exterior ei.* Se construieşte cu echerul d' perpendiculară pe d şi care trece prin P (2°). Apoi se construieşte d'' perpendiculară în P dreptei d' (2°). Evident, d'' este drepta ce trebuia construită.

2. *Multiplicarea segmentelor.* Pentru a dubla, tripla etc. un segment AB dat procedăm astfel (fig. 1):

Prin punctul A costruim două drepte d şi d_1 (1°), d oarecare iar d_1 perpendiculară pe d (2°). Perpendiculara în B pe dreapta AB (2°) taie dreptele d_1 şi d în punctele B_1 , respectiv B_2 (1°). Fie d_2 perpendiculara în B_2 pe d (2°). Perpendiculara în B_1 pe drepta d_1 se intersectează cu d_2 în punctul C_2 (2°, 1°). Perpendiculara pe drepta AB ce trece prin C_2

[1] Profesor, Liceul teoretic "Mihai Eminescu", Iaşi

intersectează dreptele d_1 şi AB în punctele C_1 şi repectiv C. Obţinem similar punctele D_2 , D_1, D ş. a. m. d. Segmentele AB, BC, CD etc. sunt congruente ca proiecţii pe dreapta AB ale segmentelor congruente AB_1, B_1C_1, C_1D_1 etc.

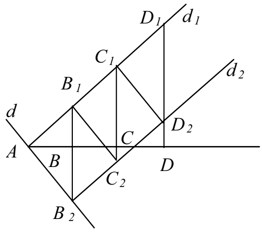


Fig.1

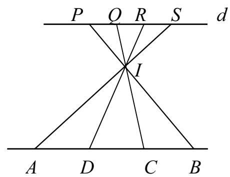


Fig. 2

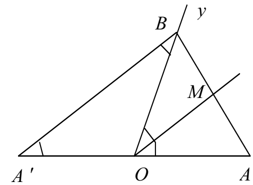


Fig. 3

3. *Împărţirea segmentelor*. Să urmărim pe fig. 2, împărţirea segmentului AB în *trei părţi* congruente ; avem $d \| AB$ (construcţia 1), segmeentele *PQ, QR, RS* congruente (construcţia 2) şi $AS \cap BP = \{I\}$. Punctele C şi D , ce împart segmentul AB în trei părţi congruente, se obţin ca intersecţiile dreptei AB cu dreptele RI şi QI.

Înjumătăţirea se face printr-o construcţie mai simplă : se proiectează pe AB centrul unui dreptunghi oarecare construit (cu echerul) pe segmentul AB.

4. *Construcţia bisectoarei unui unghi* . Procedeul este indicat de fig.3, unde s-au luat: A arbitrar, A' simetricul lui A fată de O (construcţia 2), B se obţine punând vârful echerului pe latura Oy astfel ca laturile lui să treacă prin punctele A şi A' (operaţia 3°) şi $OM \| A'B$. Faptul că semidreapta OM este bisectoarea unghiului xOy decurge din congruenţa unghiurilor marcate.

Observaţie. Dat un triunghi ABC se pot construi cu echerul punctele *H, G, O, I.*

5. *Construcţia centrului unui cerc***.** Fie A un punct pe cercul dat. Punem vârful echerului în A şi marcăm cu B şi C punctele în care laturile lui intersectează cercul. Dreapta BC trece prin centrul cercului. Luăm pe cerc un alt punct A' şi obţinem o dreaptă $B'C'$ în acelaşi mod. Centrul cercului este punctul de intersecţie a acestor drepte.

6. *Intersecţia unei drepte cu un cerc***.** Fie dat un cerc printr-un diametru AB (echivalent, prin centru şi un punct al său) şi o dreaptă *d*. Conform cu 3° , găsim cu echerul un punct $P \in d$ din care diametrul *AB* se vede sub unghi drept. Atunci, *P* se află şi pe cerc. Al doilea punct de intersecţie căutat se poate construi (cu echerul) ca simetricul lui *P* în raport cu dreapta perpendiculară pe d şi care trece prin centrul cercului.

Rezolvarea următoarelor probleme (cu echerul) o propunem cititorilor (eventual se găseşte în [**2**] , p.73).

7. *Date o dreaptă d şi un punct* $O \in d$ *, să se determine un punct* $P \in d$ *astfel încât* $OP = AB$ *, segmentul AB fiind dat.*

8. *Date o dreaptă* d *şi un punct* P *, să se ducă prin P o dreaptă care să formeze cu* d *un unghi de mărime egală cu a unui unghi cunoscut.*

Observaţie . *Orice construcţie cu rigla şi compasul poate fi efectuată cu echerul.*

Bibliografie

1. N.F. Cetveruhin – *Metodele construcţiilor geom*etrice (l. rusă), Moscova, 1952.
2. A. Tóth – *Noţiuni de teoria construcţiilor geometrice*, Ed. Did. Şi Ped., Bucureşti, 1963.

Teorema celor patru culori

Silviana IONESEI [1]

Cum se face că matematica – produs prin excelenţă al gândirii umane, independent de experienţă – poate fi atât de admirabil adaptată obiectelor lumii reale?

Albert Einstein

Este binecunoscut faptul că marile probleme ale matematicii, cum ar fi **Marea Teoremă a lui Fermat** sau **Conjectura lui Goldbach**, au contribuit enorm la dezvoltarea acestei ştiinţe. Din eforturile matematicienilor (timp de zeci sau chiar sute de ani) de a găsi o rezolvare la întrebări în aparenţă simple s-au născut noi discipline în matematică, cu aplicaţii spectaculoase.

Problema celor patru culori are toate valenţele unei probleme de mare "carieră": în primul rând formularea ei este extrem de simplă, nu presupune cunoştinţe matematice; în al doilea rând, ea a rămas nerezolvată timp de peste un secol, fiind surprinzător de grea şi a suscitat preocuparea multor matematicieni de prestigiu.

Iată câteva repere istorice.

În 1852 un geograf din Edinburgh (istoria nu i-a reţinut numele) l-a informat pe prietenul său, student în matematici, că foloseşte cel mult patru culori pentru o hartă împărţită în regiuni, fără ca două regiuni vecine să aibă aceeaşi culoare (precizăm că este vorba despre hărţi plane, cu regiuni închise, iar "vecine" sunt regiunile cu o linie de frontieră comună; două regiuni care se întâlnesc într-un număr finit de puncte nu sunt considerate vecine).

Tânărului matematician, pe nume *Francis Guthrie*, i-au plăcut cele aflate şi a cerut informaţii mai ample, însă geograful l-a încredinţat că acest procedeu e foarte răspândit şi aplicat pretutindeni din cauza economiei care-l prezintă. Răspunsul nu a fost mulţumitor pentru *Guthrie* ; el şi-a propus să demonstreze acest fapt dar nu a reuşit.

Fratele său, *Frederick*, studia chimia la Londra şi aflând de problema care-l preocupa pe *Francis* a cerut ajutorul profesorului *August De Morgan*, dar nici acesta nu a găsit o demonstraţie satisfăcătoare.

În câţiva ani, problema a ajuns "la modă" printre matematicieni. Astfel, *A. Cayley* nefiind nici el capabil să demonstreze valabilitatea teoremei, a propus-o Societăţii Matematice din Londra.

Să trecem în revistă câteva din rezultatele parţiale ale demonstrării teoremei.

Faptul că trei culori nu sunt suficiente pentru colorarea oricărei hărţi plane a fost repede constatat (vezi fig.1).

[1] Profesor, Colegiul Naţional "C. Negruzzi" , Iaşi

De Morgan a demonstrat că nu există hartă formată din 5 regiuni astfel încât să fie două câte două vecine, deci aceasta poate fi colorată cu patru culori.

A. B. Kempe, un avocat din Londra, membru al Societății Matematice din Londra şi deosebit de pasionat de matematică a publicat în 1879 un articol în care susținea că a demonstrat teorema. Raționamentul lui era deosebit de ingenios; el redusese problema la hărți normale, adică hărți în care nu există țări închise complet în alte țări şi nici puncte

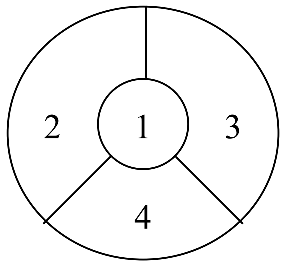


Fig.1

în care se întâlnesc mai mult de trei regiuni. Deşi raționamentul s-a dovedit incomplet, el conținea ideile de bază ce au condus la demonstrația corectă un secol mai târziu. Astfel, oricărei hărți i se poate asocia un graf în care fiecare regiune este reprezentată printr-un punct şi două puncte vor fi legate printr-o muchie dacă şi numai dacă punctele corespund la două regiuni vecine (vezi fig.2).

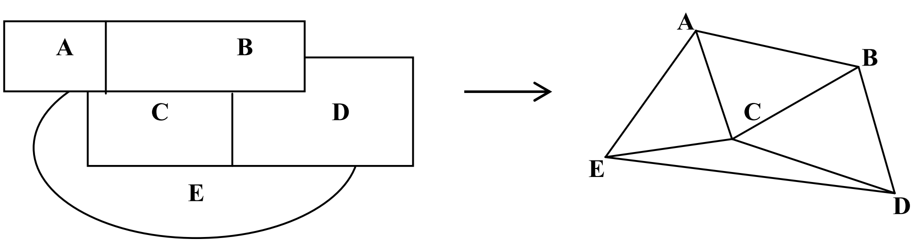


Fig.2

În acest mod problema colorării regiunilor de pe hartă revine la problema colorării punctelor din graful asociat astfel încât punctele legate printr-o muchie să fie colorate diferit.

Problema celor patru culori a contribuit la cercetari importante în teoria grafurilor, cum ar fi "numerele cromatice ale grafurilor".

Cu ajutorul unui graf special, matematicianul *P. J. Heawood* a arătat în 1890 că demonstrația lui Kempe are o eroare nu tocmai uşor de înlăturat.

Mai târziu, în 1913, matematicianul *Ph. Franklin* de la Massachusetts Institute of Technology ridică limita numărului de regiuni pentru care problema este rezolvată de la 5 la 21, iar în 1940 *Winn* reuşeşte să ajungă la 35 de regiuni.

Un alt rezultat deosebit de interesant se datorează lui *P. J. Heawood*, care şi-a consacrat 60 de ani din viaţă studierii problemei. Iată-l: probabilitatea de a găsi o hartă cu mai mult de 36 regiuni care să nu poată fi colorată cu patru culori este mai mică decât 10^{-10000} ! (de remarcat că 10^{10000} este un număr mai mare decât numărul atomilor din întreaga galaxie …).

O "teoremă a celor cinci culori" (faptul că cinci culori sunt eficiente pentru a colora o hartă) a fost obţinută relativ uşor; o demonstraţie elementară a acestui rezultat poate fi găsită în "*Despre numere şi figuri*" de *H. Rademacher* şi *O. Toeplitz*.

Pe la mijlocul sec. XX s-a conturat ideea de rezolvare a problemei prin mărirea numărului de regiuni pentru care patru culori sunt suficiente şi examinarea unor aşa-zise configuraţii inevitabile. Dacă ar fi fost posibil să se producă toate aceste configuraţii şi să se arate că ele pot fi colorate cu patru culori, atunci demonstraţia ar fi fost completă.

Cea mai eficientă metodă de producere a configuraţiilor s-a dovedit a fi un algoritm implementat pe calculator de *W. Haken* şi *K. Appel* , Universitatea Illinois, SUA , care au lucrat aproape 1200 ore şi, în fine, demonstraţia a fost încheiată [**1**].

Un an mai târziu, folosind o altă procedură de reducere a configuraţiilor inevitabile, *F. Allaise* de la Universitatea Waterloo, Ontario, CA, a reuşit să obţină demonstraţia teoremei în numai 50 de ore de dialog om-calculator.

Entuziasmul firesc stârnit în lumea matematicienilor de acestă reuşită neobişnuită până atunci a fost "temperat" de voci sceptice care susţineau că aceasta nu e o teorema de matematică în sensul clasic. Astfel, *T. Tymoczko* în articolul "*Problema celor patru culori şi semnificaţia ei filozofică*" (Journal of Philosophy, 1979) afirmă că teorema exprimă un adevăr a posteriori şi nu a priori, ca orice adevăr matematic. Argumentele sale se bazează în principal pe imposibilitatea de a verifica manual ("cu creionul") demonstraţia, dat fiind faptul că nu există un unic algoritm care să verifice toate programele posibile pe calculator.

În replică, *E. R. Swart* scrie în [**5**] că inconvenientul semnalat de preopinentul său este aparent, deoarece calculele foarte numeroase efectuate pe calculator erau de rutină, iar programul utilizat poate fi verificat. Sarcina calculatorului a fost copleşitoare prin dimensiuni, sarcină pe care omul ştia cum să o abordeze, dar n-ar fi putut-o termina niciodată.

A fost prima situaţie memorabilă în urma căreia lumea matematicienilor a trebuit să admită existenţa unor demonstraţii parţial accesibile omului, cât şi dreptul calculatorului de a ne sprijini în stabilirea adevărurilor matematice.

Bibliografie

1. K. Appel, W. Haken – *Every Planar Map Is Four Colorable* , Bulletin of the American Mathematical Society, 82(1976), 711-712.

2. F. Câmpan – *Probleme celebre*, Ed. Albatros, Bucureşti, 1972.

3. Gh. Păun – *Din spectacolul matematicii*, Ed. Albatros, Bucureşti, 1983.

4. L.A. Steen – *Mathematicians Today*, Twelve Informal Essays, Springer–Verlag, 1978.

5. E.R Swart – *The Philosophical Implications of the Four-Color Problem*, The American Mathematical Monthly, 87(1980), 697-707.

Introducerea operației de adunare la clasa I

Petru ASAFTEI [1]

Introducerea operației de adunare la clasa I se poate face fie folosind reuniunea a două mulțimi disjuncte, fie folosind rigletele.

În prezenta notă metodică utilizăm prima variantă, considerând că aceasta este mai puternic ancorată în experiența de viață. Vom putea folosi astfel un vocabular mai bogat, contribuind astfel la o mai bună înțelegere a operației de adunare.

În predarea-învățarea noțiunilor cu conținut matematic la școlarii mici, conform cerințelor psiho-pedagogice, trebuie să parcurgem următoarele etape:

I. Etapa operării cu mulțimile de obiecte concrete (*etapa perceptivă*). În această etapă se realizează acțiunea nemijlocită cu obiecte concrete din mediul înconjurător.

Exemplu. Pe o farfurie punem trei mere și patru pere, apoi prin numărare constatăm că avem șapte fructe. (Se recomandă să folosim cel puțin o frază în care să fie incluși termenii premergători operației de adunare ; exemplu : "Copii, dacă la trei mere adăugăm patru pere, obținem șapte fructe".)

II. Etapa formării reprezentărilor imaginativ-concrete (*etapa semi-abstractă*). În această etapă se construiesc mulțimi cu mere și pere (jetoane), apoi se face reuniunea lor (fig. 1). Această construcție se efectuează simultan la tablă și pe caiete. Fiecărei mulțimi care intră în reuniune îi atașăm cifra care indică numărul de fructe (*3*, respectiv *4*). Mulțimii obținută prin reuniune îi atașăm cifra *7* (prin numărare). Această etapă putem să o încheiem cu o frază de genul : " Copii dacă punem la un loc *3* mere și *4* pere obținem *7* fructe ".

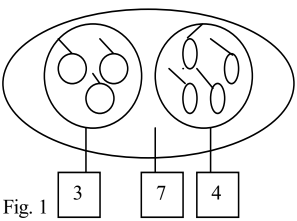


Fig. 1

III. Etapa scrierii și efectuării adunării (*etapa abstractă*). Acum reprezentăm atât merele cât și perele cu aceleași simboluri (steluțe, cerculețe etc.) (fig. 2). Se explică elevilor că pentru a arăta faptul că am pus la un loc o mulțime cu trei elemente și alta cu patru elemente se folosește semnul (simbolul matematic) „+ ", numit *plus,* și scriem *3+4*. Scrierea *3+4* se citește "*trei plus patru*" sau "*trei adunat cu patru*".

Din etapele precedente, prin numărare, elevii au constatat că mulțimea obținută prin *punere la un loc* are șapte elemente. Atenționăm elevii ca *3+4* și *7* reprezintă *tot atât*. Pentru a exprima acest lucru se folosește simbolul „=" și scriem *3+4=7* se citește "*trei plus patru este egal cu șapte* ". Spunem elevilor că scrierea *3+4* reprezintă *adunarea neefectuată* a numerelor *3* și *4* iar scrierea *3+4=7* înseamnă *efectuarea adunării* numerelor *3* și *4*. Explicăm

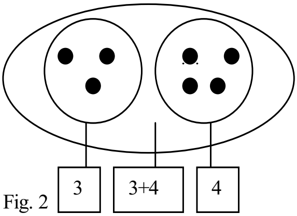


Fig. 2

[1] Profesor, Școala Normală "Vasile Lupu", Iași

elevilor că trecerea de la scrierea *3+4=7* s-a făcut prin *operația de adunare*.

Trebuie să dăm elevilor un algoritm eficient de efectuare a operației de adunare în acest stadiu. Să scriem adunarea *5+2* şi să numărăm de la *5*, înainte, încă două numere în şirul numerelor naturale. Ajungem astfel la numărul *7* şi spunem elevilor că *7* este rezultatul adunării numerelor *5* şi *2*. Scriem şi în acest caz *5+2=7*. Pentru verificarea corectitudinii rezultatului obținut putem să apelăm la procedeul *punerii la un loc*. În continuare putem să dăm terminologia specifică operației de adunare. Referindu-ne la ultima scriere *5+2=7* spunem elevilor că numerele *5* şi *2* sunt numere care se adună şi se numesc *termenii adunării*, primul termen, respectiv, al doilea termen. Despre *7* spunem că este *rezultatul adunării* sau *totalul*.

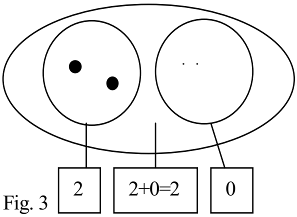


Fig. 3

Un caz special îl reprezintă adunarea când unul dintre termeni este zero. Folosim o nouă reprezentare (fig. 3) din care elevii constată că dacă punem la un loc o mulțime cu două elemente şi o mulțime fără nici un element, obținem tot o mulțime cu două elemente. Faptul că am pus elementele celor două mulțimi la un loc se scrie *2+0*. Numărând elementele noii mulțimi găsim *2* elemente. Cum *2+0* şi *2* reprezintă tot atât putem scrie *2+0=2*. Spunem elevilor că *0* îl lasă pe *2* neschimbat prin operația de adunare. Cu un demers asemănător se pot justifica şi scrierile *0+2=2* şi *0+0=0*. Deoarece *0* are aceste proprietăți îl numim *element neutru* la adunare.

Suntem pregătiți să punem în evidență *proprietatea de simetrie a relației de egalitate* folosind relația *tot atât*. *Exemplu.* Deoarece *7* reprezintă tot atât ca şi *5+2*, putem să scriem *7=5+2* şi *5+2=7*.

După ce am consolidat algoritmul de adunare, putem să dăm şi cele două proprietăți importante ale ei: *comutativitatea* şi *asociativitatea.* Propunând elevilor să efectueze adunările *5+4* şi *4+5* vor constata că obțin acelaşi rezultat, numărul *9*, deci *5+4* şi *4+5* reprezintă tot atât. Din acest motiv scriem *5+4=4+5* . Spunem elevilor că *rezultatul unei adunări nu se schimbă dacă schimbăm termenii între ei* ; în aceasta constă proprietatea de comutativitate. Pe baza proprietății de comutativitate se introduce conceptul de *probă a adunării* prin adunare.

Exemplu. Propunem elevilor să efectueze adunarea *5+3*. Numărând de la *5*, înainte, încă trei numere consecutive, vor obține rezultatul *8*. Le spunem elevilor că putem verifica acest rezultat efectuând adunarea *3+5*, adică numărând de la *3*, înainte, încă cinci numere consecutive din şirul numerelor naturale. Elevii vor constata că obțin acelaşi rezultat :*8* .

Pentru a justifica proprietatea de asociativitate, propunem elevilor să adune numerele *2*, *4* şi *3* astfel: întâi să adune numerele *2* şi *4* iar rezultatul obținut să îl adune cu *3*, apoi să adune numerele *3* şi *4* iar rezultatul să îl adune cu *2*. În primul caz elevii au efectuat *(2+4)+3* iar în al doilea caz au efectuat *(4+3)+2* care este tot atât ca şi *2+(4+3)*. Cum în ambele cazuri elevii au obținut acelaşi rezultat, numărul *9*, putem scrie *(2+4)+3=(4+3)+2* şi spunem elevilor că au utilizat *asocierea*, întâi a lui *2* cu *4*, a doua oară a lui *4* cu *3*. Putem să introducem scrierea *2+4+3*, numită *sumă cu trei termeni*, însemnând *(2+4)+3* sau *(4+3)+2*.

Observații. 1) Învățătorul trebuie să explice rolul parantezelor în astfel de scrieri.
2) După ce elevii pot să scrie cu uşurință aceste proprietăți pe exemple numerice, se poate trece la scrierea literală a lor, făcându-se mențiunea că literele pot reprezenta numere.

Concurs de admitere 2001 , Iaşi

Facultatea de Informatică , Universitatea "Al. I. Cuza"

Elemente de analiză matematică

I. a)

1. Privitor la numărul de asimptote, care dintre afirmaţiile de mai jos pot fi adevărate pentru o funcţie f: **R**→**R** ?

i) f are două asimptote orizontale, două asimptote oblice şi o asimptotă verticală ;
ii) f are o asimptotă orizontală, o asimptotă oblică şi o asimptotă verticală ;
iii) f are o asimptotă orizontală, o asimptotă oblică şi nici o asimptotă verticală ;
iv) f are două asimptote oblice, două asimptote verticale şi nici una orizontală.

Justificaţi răspunsul (răspunsurile) ales(e).

2. Care din propoziţiile de mai jos exprimă o proprietate adevărată privind continuitatea şi derivabilitatea?

i) Orice funcţie continuă într-un punct este derivabilă în acel punct ;
ii) Orice funcţie derivabilă într-un punct este continuă în acel punct ;
iii) Orice funcţie continuă pe intervalul [a,b] este derivabilă pe intervalul (a,b) ;
iv) Orice punct în care o funcţie oarecare este derivabilă şi continuă este punct de extrem al acelei funcţii.

3. Pentru o funcţie f : **I**→**R**, **I** interval deschis, f derivabilă pe **I**, fie $a\in$**I** un punct de minim local sau global. Atunci:

i) $f_s'(a)\neq f_d'(a)$; ii) $f'(a)>0$; iii) $f'(a)<0$; iv) $f'(a)=0$.

4. Fie o funcţie oarecare f:[a,b]→**R**, a<b, f derivabilă pe intervalul (a,b). Atunci:

i) Între două rădăcini consecutive ale lui f există cel mult o rădăcină a lui f' ;
ii) Între două rădăcini consecutive ale lui f' există cel mult o rădăcină a lui f ;
iii) Între două rădăcini consecutive ale lui f există cel puţin o rădăcină a lui f' ;
iv) Între două rădăcini consecutive ale lui f' există cel puţin o rădăcină a lui f.

Justificaţi răspunsul (răspunsurile) ales(e).

5. Care dintre afirmaţiile de mai jos sunt adevărate pentru orice şir de numere reale?

i) Orice şir convergent este marginit ; ii) Orice şir convergent este monoton ;
iii) Orice şir mărginit este convergent; iv) Orice şir monoton este convergent .

<u>Notă.</u> Răspunsurile se vor da numai pe teza cu colţuri înnegrite, sub forma: "I.a) 1.x", unde x ∈ { i, ii, iii, iv} etc. Fiecare întrebare are cel puţin una din cele patru variante corectă. Dacă la o întrebare sunt adevărate mai multe variante, atunci se vor indica toate variantele adevărate. Punctajul la o întrebare nu se acordă dacă indicaţi şi variante false. Acolo unde se cere, se va adăuga justificarea răspunsului dat.

b) Fie funcţia f: **R**→**R**, $f(x)=\begin{cases}-\sqrt{-x}, & x<0\\ 1+\sqrt{x}, & x\geq 0\end{cases}$.

1. Să se studieze continuitatea funcţiei în punctul x=0.

2. Să se studieze derivabilitatea funcţiei în punctul x=0.

3. Să se comenteze rezultatele de la puntele **I.b)1.** şi **I.b)2.** prin prisma răspunsului care l-aţi dat la punctul **I.a) 2 .**

II. a) Fie $a\in\mathbf{R}$, $a>0$, fixat şi $(x_n)_{n\geq 0}$ şirul definit prin relaţia de recurenţă:

$x_n = \dfrac{1}{2}\left(x_{n-1} + \dfrac{a}{x_{n-1}}\right)$, $\forall n \geq 1$, cu $x_0 = 2$. Să se studieze convergenţa acestui şir.

b) Să se reprezinte grafic funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x) = e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}}$, a şi b constante reale.

Algebra

III. a) Fie (G, $\bullet$) un grup cu proprietatea că $(xy)^2 = x^2y^2$ pentru oricare x, y din G. Demonstraţi că G este grup abelian.

b) Să se discute după valorile parametrilor $a\in Z_8, b\in Z_8$ şi să se rezolve în $\boldsymbol{Z_8}$ ecuaţia $ax+b=\hat{0}$. Fiecare caz identificat va fi ilustrat printr-o ecuaţie (a=?, b=?) şi prin soluţiile respective.

IV. a) Definiţia corpului comutativ.

b) Fie a, b, c numere reale. Definim pe $\mathbf{R}$ legile de compoziţie:
$x\oplus y = ax+by-2$, oricare ar fi x şi y numere reale; $x\otimes y = xy-2x-2y+c$, oricare ar fi x şi y numere reale. Determinaţi a, b şi c astfel încât $(\mathbf{R}, \oplus, \otimes)$ să fie corp.

<u>Facultatea de automatică şi calculatoare, Univ. Tehnică "Gh. Asachi"</u>

1. Suma cuburilor rădăcinilor trinomului $3x^2+3(a+1)x+a^2$, $a\in\mathbf{R}$, are valoarea maximă dacă:

(a) $a=\dfrac{1}{4}$; (b) $a=\dfrac{3}{4}$; (c) $a=-\dfrac{3}{4}$; (d) $a>0$; (e) $a\in[-2,-1]$.

2.Mulţimea rădăcinilor ecuaţiei $\dfrac{a^2}{x}-\dfrac{b^2}{x-1}=a^2+b^2$, $a, b\in\mathbf{C}$, $ab\neq 0$, este:

(a) $\{0, 1\}$; (b) $\left\{\dfrac{a^2-i|ab|}{a^2+b^2}, \dfrac{a^2+i|ab|}{a^2+b^2}\right\}$; (c) $\left\{\dfrac{a^2-iab}{a^2+b^2}, \dfrac{a^2+iab}{a^2+b^2}\right\}$;

(d) $\left\{\dfrac{2a^2-i|ab|}{a^2+b^2}, \dfrac{2a^2+i|ab|}{a^2+b^2}\right\}$; (e) $\left\{\dfrac{2a^2-iab}{a^2+b^2}, \dfrac{2a^2+iab}{a^2+b^2}\right\}$.

3. Funcţia $f:(0,1)\cup(1,+\infty)\to\mathbf{R}$, definită de $f(x)=x^{\frac{1}{\ln x}}$, este:

(a) strict descrescătoare pe (0, 1) şi strict crescătoare pe (1, +∞);
(b) strict crescătoare pe (0, 1) şi strict descrescătoare pe (1, +∞);
(c) injectivă; (d) constantă; (e) surjectivă.

4. Fie sistemul $\begin{cases} ax+y=1+a \\ x+ay=1-a \end{cases}$ cu $a\in\mathbf{R}$. Să se determine a, astfel încât sistemul să fie compatibil determinat şi soluţia să satisfacă condiţia $x>0$, $y>0$.

(a) $-2 < a < 1+\sqrt{2}$; (b) $-1 < a < \sqrt{2}-1$; (c) $-1-\sqrt{2} < a < 1$
(d) $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}-1$; (e) $-1-\sqrt{2} < a < -1+\sqrt{2}$.

5. Se consideră şirul (x_n), dat prin relaţia $x_n = \frac{1}{2}(1+x_{n-1})$ pentru $n \geq 1$, în care $x_0 < 1$ este un număr real fixat. Să se studieze monotonia şirului şi să se afle $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

(a) (x_n) crescător şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$; (b) (x_n) crescător şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$;

(c) (x_n) descrescător şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$; (d) (x_n) descrescător şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$;

(e) (x_n) crescător şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{3}{2}$.

6. Se dă funcţia f : **R**→**R** prin relaţia $f(x) = \frac{x+m}{x^2+1}e^{-x}$, în care m este un parametru real. Să se afle valoarea lui m pentru care f are extrem în punctul $x = 1$ şi să se precizeze natura acestui extrem.

(a) $m = \frac{3}{2}$, $x = 1$ punct de maxim; (b) $m = \sqrt{3}$, $x = 1$ punct de minim;

(c) $m = \frac{1}{2}$, $x = 1$ punct de maxim; (d) $m = -\frac{1}{2}$, $x = 1$ punct de maxim;

(e) $m = \frac{1}{e}$, $x = 1$ punct de minim.

7. Valoarea integralei $\int_0^1 \frac{x\,dx}{(x+1)(x^2+1)}$ este:

(a) $= \frac{3}{2}$; (b) $= \frac{1+\pi}{2}$; (c) $= \frac{1}{8}(\pi - 2\ln 2)$; (d) $= \frac{1}{4}(\pi + \ln 2)$; (e) $= \frac{1}{4}(\pi + \sqrt{3})$.

8. Se consideră dreptunghiul *ABCD* unde *AB=3BC*. Pe latura *CD* se ia punctul *E* astfel că $EC \equiv BC$, iar $AE \cap DB = \{O\}$. Se cere măsura unghiului *DOA*.

(a) 30°; (b) $\arccos\frac{\sqrt{5}}{3}$; (c) 45°; (d) $\arcsin\frac{\sqrt{5}}{3}$; (e) 60°.

9. Să se determine soluţiile ecuaţiei $\sin^{10} x + \cos^{10} x = \frac{29}{16}\cos^4 2x$.

(a) $\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$; (b) $-\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$; (c) $\frac{3\pi}{8} + k\pi$; (d) $\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}$; (e) $k\frac{\pi}{8}$ ($k \in$ **Z**).

10. O mărgea se obţine dintr-un corp sferic sfredelind o gaură de forma unui cilindru circular drept. Ştiind că înălţimea cilindrului este 6 se cere volumul mărgelei.

(a) 24π; (b) 36π; (c) 48π; (d) $\frac{100\pi}{3}$; (e) $\frac{50\pi}{3}$.

Notă. Timp de lucru 3 ore. Fiecare problemă are numai una din cele cinci variante corectă.

Capacitate - teste pregătitoare

Ion SECRIERU[1] *şi Cezar Marius ROMAŞCU*[2]

Testul 1

A. **1.** Ştiind că viteza luminii este 300 000 km/s, atunci distanța de 1 an-lumină este egală cu………. km.

2. În timpul semestrului I al anului şcolar 2001-2002, un elev a obținut la matematică notele 7, 7, 9, 7, 7, 7, iar la teză nota 8. Media la sfârşitul semestrului este …………

3. Valoarea raportului $\dfrac{36\% \text{ din } 12}{12\% \text{ din } 36}$ este …………..

4. Un avion pleacă de la Londra la ora 5^{40} G.M.T. şi ajunge la Bucureşti la ora 12^{00} ora locală. Timpul în care a parcurs avionul distanța Londra-Bucureşti este……..

5. Sistemul $\begin{cases} (x-1)^2+(y+3)^2=10 \\ (x-y)(x+y)=(x+1)^2-y^2-9 \end{cases}$ are soluțiile……………….

6. Fie punctele $A(-2, -2)$, $B(1, 2)$. Distanța AB este……………….

7. Ştiind că raza Pământului este 6400 km, atunci:

a) lungimea Ecuatorului este…………km;

b) lungimea paralelei 45^0 este……….km.

8. Un teren are forma unui dreptunghi cu lungimea de 150 m şi lățimea de 50 m.

a) Suprafața acestui teren este………..m^2;

b) Costul aratului pentru un hectar este 1 000 000 lei; atunci aratul terenului costă …………lei.

9. O piramidă patrulateră regulată are latura bazei de 12 cm, iar unghiul diedru dintre o față laterală şi planul bazei este de 60^0.

a) Aria secțiunii diagonale a piramidei este………cm^2;

b) Volumul piramidei este……….cm^3.

B. **10.** La un concurs de matematică, valoarea cumulată a premiilor primilor patru clasați a fost 3 200 000 lei. Premierea a fost făcută după cum urmează: mențiunea primeşte o optime din sumă, iar premiile III, II şi I au fost răsplătite direct proporțional cu numerele 2,5; 5, respectiv 6,5. Ce sumă a primit fiecare premiant?

11. Fie funcțiile $f, g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax+b$, $g(x) = -2x+4$.

a) Determinați funcția f ştiind că graficul acesteia trece prin punctele $A(1, 1)$, $B(0, 2)$;

b) Reprezentați grafic, folosind acelaşi sistem de axe, funcțiile f şi g;

c) Determinați aria suprafeței cuprinse între graficele celor două funcții şi axa Oy.

12. Fie trapezul isoscel $ABCD$ înscris într-un cerc de rază 24. Ştiind că bazele AB şi CD sunt de o parte şi de alta a centrului cercului şi subîntind unghiuri de 120^0, respectiv 60^0, să se calculeze:

a) lungimile bazelor;

b) aria şi perimetrul trapezului;

---

[1] Profesor, Grupul Şcolar Economic nr. 2 "Virgil Madgearu", Iaşi

[2] Profesor, Şcoala Picioru Lupului, Ciurea (Iaşi)

c) raportul volumelor corpurilor obținute prin rotirea trapezului o dată în jurul bazei mici, apoi în jurul bazei mari.

Testul 2

A. **1.** Numerele naturale $\overline{4x3y}$ divizibile cu 45 sunt………

2. Soluția inecuației $|(x+2)(x+5)|+|4x+20|\le 0$ este ………..

3. Calculând $(1+\sqrt{3})(\sqrt{4+2\sqrt{3}}-2\sqrt{3})$, obținem………..

4. Dacă numerele naturale a, b sunt astfel încât $\frac{a}{b}=\frac{4}{7}$ și $[a, b]=308$, atunci $a+b=$………..

5. Pentru $A=\{x\in N; |x-1|\le 4\}$; $B=\{x\in R; |x+1|>3\}$ și $C=\left\{x\in \mathbf{Z}; \frac{x+2}{x-3}\le 0\right\}$, avem că $A\cap B\cap C=$……………

6. Aria laterală a unui cilindru având ca secțiune axială un pătrat este egală cu aria laterală a unui con echilater. Raportul volumelor este………

7. Un romb are un unghi de 120^0 și înălțimea $4\sqrt{3}$ cm.

a) Perimetrul rombului este……….cm;

b) Latura unui hexagon regulat echivalent cu rombul este………cm.

8. Într-un cub $ABCDA'B'C'D'$ distanța de la vârful A' la mijlocul E al laturii $[BC]$ este 15 cm.

a) Aria cubului este………cm^2;

b) Volumul cubului este……..cm^3.

9. Dacă la $\frac{4}{11}$ dintr-un număr adăugăm $\frac{3}{5}$ din alt număr obținem $\frac{53}{55}$; $\frac{3}{5}$ din primul număr este cu $\frac{13}{55}$ mai mare decât $\frac{4}{11}$ din al doilea număr.

a) $\frac{x}{13}+\frac{y}{53}=$ …………..;

b) $x+y=$……………

B. **10.** Se dau proporțiile $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}$ și $\frac{b}{4}=\frac{c}{5}$, cu $a, b, c\in\mathbf{Z}$.

a) Să se determine k și p așa încât $\frac{a}{8}=\frac{b}{k}=\frac{c}{p}$;

b) Pentru $k=12$ și $p=15$, să se determine a, b, c în fiecare din următoarele cazuri: (i) $a+b+c=70$; (ii) $a^2+b^2+c^2=433$.

11. Pe laturile $[BC]$ și $[AD]$ ale paralelogramului $ABCD$ se construiesc în exterior pătratele $BCMN$ și $ADPQ$. Să se demonstreze că:

a) $[BP]\equiv[ND]$;

b) PN, MQ, AC și BD sunt drepte concurente.

12. O piramidă patrulateră regulată $SABCD$ are toate muchiile de lungimi egale. Știind că apotema piramidei este de $6\sqrt{3}$ cm, să se calculeze:

a) aria laterală şi volumul piramidei;
b) unghiul diedru format de planele (SAB) şi (ABC);
c) distanța de la centrul bazei la o fața laterală.

Testul 3

A. **1.** Dacă $\sqrt{\overline{xyz}} = \overline{yz}$, atunci $\overline{xyz} =$ ....

2. Pentru n $\in \boldsymbol{Z}$, fracția $\dfrac{n^2+n+6}{n+1} \in \boldsymbol{Z}$ dacă n$\in$ $\{.........\}$.

3. Rezultatul calculului $\sqrt{\dfrac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}} + \sqrt{\dfrac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}$ este ....

4. Între bazele trapezului $ABCD$ există relațiile m_a=10 şi m_g=5; lungimea segmentului paralel cu bazele care trece prin punctul de intersecție a diagonalelor este…

5. Într-un paralelogram $ABCD$ (BC>CD), mediatoarea diagonalei [BD] intersectează dreptele AB şi CD în E, respectiv F. Patrulaterul $BFDE$ este...........

6. Lungimea şi lățimea paralelipipedului dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ sunt valorile absolute ale soluțiilor ecuației $\dfrac{x+a}{x-a} + \dfrac{x-a}{x+a} = \dfrac{a(4a-3x)}{x^2-a^2}$, $a \in \boldsymbol{R}_+$, iar înălțimea reprezintă jumătate din lungime. Dacă M, N sunt mijloacele segmentelor $[AD]$, respectiv $[A'B']$, atunci $d(M, N)$=..................

7. Secțiunea axială a unui con echilater are înălțimea de $6\sqrt{3}$ cm.
a) Aria totală a conului este……..cm^2;
b) Volumul conului este………..cm^3.

8. Fie mulțimile $A=\left\{x \in \boldsymbol{Z} \left| \dfrac{6}{x-1} \in \boldsymbol{Z}, -6 \le x \le 4 \right.\right\}$ şi $B=\{x \in \boldsymbol{Z} | -2 \le 3x+4 \le 13\}$.

Atunci A=$\{$……….$\}$ şi B=$\{$………..$\}$.

9. Fie mulțimile A=$\{$-2, 0, 2$\}$şi B=$\{$-2, 4, 10$\}$. O funcție liniară f: $A \to B$ are legea de compoziție $f(x)$=…… sau $f(x)$=………

B. **10.a)** Să se compare numerele $a= \dfrac{3^{111}}{5^{333}}$ şi $b= \dfrac{3^{291}}{5^{453}}$.

b) Să se arate că numărul $a= 5^{n+3} \cdot 2^n - 125$ este divizibil cu 45 pentru orice $n \in \boldsymbol{N}$.

11. Fie funcțiile f, g: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = ax+b$, $g(x) = cx+d$.
a) Să se determine f şi g ştiind că $f(x-1) = -3x-5-f(2)$ şi $f(2x+3) = g(2x)+5$;
b) Determinați valoarea parametrului real m pentru care ecuația $mx^2+f(x)=0$ are soluțiile egale; aflați aceste soluții.

12. Doi elevi privesc simultan şi din aceeaşi parte un turn. Primul vede vârful turnului sub un unghi de 45^0, iar al doilea sub un unghi de 30^0. Ştiind că înălțimea copiilor este de 1,50 m iar distanța de la turn până la al doilea elev este $9\sqrt{3}$ m, aflați:
a) înălțimea turnului;
b) distanța dintre cei doi copii.

Testul 4

A. **1.** Să se determine numerele naturale a şi b ştiind că $(a, b)=15$ şi $a\cdot b=3150$.

2. Aflaţi elementele mulţimii $A=\left\{\overline{abc}\,\middle|\,\sqrt{\overline{abc}-\sqrt{c}}\in \mathbf{N}\right\}$, ştiind că $a\neq b\neq c\neq a$.

3. Găsiţi numerele naturale a, b, c ştiind că a reprezintă 20% din b, suma dintre a şi c este 24, iar b şi c sunt direct proporţionale cu 5 şi 7.

4. Dacă $a^2+b^2+c^2+14=4a+2b+6c$, calculaţi $\frac{a\cdot c}{b}$.

5. Determinaţi funcţiile liniare $f: \mathbf{R}\to \mathbf{R}$ cu proprietatea că $f(x-2)\cdot f(x+2)=x^2-2x-3$, $\forall\, x\in\mathbf{R}$.

6. Într-un triunghi ascuţitunghic în care $m(\hat{B})$ este cu 50^0 mai mare decât $m(\hat{C})$ se construiesc înălţimea AD şi bisectoarea CE. Ştiind că $m(B\hat{A}D)$ şi $m(B\hat{E}A)$ sunt direct proporţionale cu 3 şi 4, să se calculeze măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

7. O prismă din lemn are ca bază un pătrat cu diagonala $12\sqrt{2}$ cm. Ştiind că masa prismei este 30,24 kg, aflaţi masa unui cilindru din acelaşi material înscris în prisma dată.

8. Un trapez isoscel are aria 85 cm^2 şi înălţimea 5 cm. Ştiind că diferenţa bazelor trapezului este 24 cm, aflaţi perimetrul său.

9. Un paralelogram are laturile de 10 cm, respectiv 14 cm, iar măsura unghiului ascuţit este 60^0. Aflaţi lungimile înălţimilor paralelogramului.

B. **10.** Preţul unui produs a fost redus de două ori succesiv, prima oară cu 10% , iar a doua oară cu 30%, ajungând în final de 69 300 lei. Să se afle:

a) preţul iniţial al produsului;
b) preţul după două scumpiri succesive cu 10% şi 30%, pornind de la preţul final;
c) preţul în dolari la un curs al zilei de 32 000 lei, în toate cele trei variante.

11. Să se rezolve sistemul $\begin{cases}(x+y-1)^2-(x-y)(x+y)+63=2y(y+x)\\ \frac{2x-y}{7}-\frac{2y-x}{4}+9=y\end{cases}$.

12. Apotema bazei unei prisme triunghiulare regulate este $\sqrt{3}$, iar diagonala unei feţe laterale este 10 Să se calculeze:

a) aria totală a prismei;
b) înălţimea unui tetraedru regulat ce are o faţă echivalentă cu o bază a prismei;
c) raportul dintre volumul tetraedrului astfel determinat şi volumul prismei.

Testul 5

A. **1.** Ştiind că x şi y sunt direct proporţionale cu 2 şi 3, atunci $\frac{3x^2-xy+2y^2}{x^2-xy+3y^2}=$...........

2. Dacă $(a, b)=6$, $[a, b]=336$ şi $a<10$, atunci $a+b=$.............

3. Dacă x, y, z sunt invers proporţionale cu $\frac{1}{5},\frac{1}{8}$ şi 3, iar $2x-y+3z=9$, atunci $y+z$ reprezintă ....% din x.

4. În triunghiul isoscel ABC, $[AB]\equiv[AC]$, $m(\hat{BAC})=36^0$, $BC=4$, iar BD este bisectoare cu $D\in(AC)$. Atunci $AB\cdot CD=$…………

5. Cercurile $C_1(O_1, 3)$ şi $C_2(O_2, 2)$ sunt tangente exterior, iar tangentele lor comune exterioare se intersectează în P. Atunci $PO_2=$...............

6. Aria unui dreptunghi este 60 cm^2, iar lungimea este cu 7cm mai mare decât lăţimea. Lungimea diagonalei dreptunghiului este ....

7. Un triunghi dreptunghic are o catetă de 12 cm, iar suma dintre cealaltă catetă şi ipotenuză este 24 cm.

a) Lungimea ipotenuzei este............cm;

b) Aria triunghiului este ....cm^2.

8. Fie $A=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}$, $B=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}+\dfrac{1-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}+\dfrac{2+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}+\dfrac{2-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$.

a) Numărul A este un număr..........;

b) Produsul $A\cdot B$ este egal cu ………

9. Se dă ecuaţia $mx=\dfrac{2x-m}{2}+6$, $m\in\mathbf{R}$.

a) Dacă ecuaţia are soluţia $x=3$, atunci $m=$............;

b) Pentru $m=2$, ecuaţia are soluţia $x=$.............

B. **10.** Fie $E_1(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{1-x^2}}:\dfrac{x}{5}$; $E_2(y)=\left(\dfrac{y}{y-3}+\dfrac{y-3}{y}-1\right):\dfrac{y^2-3y+9}{3y}$.

a) Aduceţi expresiile la forma cea mai simplă;

b) Rezolvaţi sistemul $\begin{cases}\dfrac{2}{5}E_1(x)-E_2(y)=-4\\ E_1(x)+\dfrac{1}{2}E_2(y)=-1\end{cases}$.

11. Măsurile unghiurilor A, B, C ale triunghiului ABC sunt direct proporţionale cu numerele 6,5; 5 şi 0,5, iar mediatorea laturii $[AC]$ taie latura $[BC]$ în E. Aflaţi $m\left(\hat{BAE}\right)$.

12. Fie $VABC$ o piramidă triunghiulară regulată cu înălţimea de $6\sqrt{2}$ şi unghiul diedru dintre o faţă laterală şi planul bazei de măsură 45^0.

a) Aflaţi aria totală a piramidei;

b) Determinaţi aria laterală şi volumul trunchiului obţinut prin secţionarea piramidei printr-un plan paralel cu baza aflat la o distanţă de $2\sqrt{2}$ cm faţă de vârf;

c) Aflaţi raportul dintre volumele piramidei şi cel al unui con circular drept în care poate fi înscrisă aceasta.

Bacalaureat - teste pregătitoare

Gabriel MÎRŞANU [1]

Testul 1

I. **1. a)** Se consideră funcțiile $f : A \to B,\quad g : B \to C$ unde A, B, C sunt submulțimi ale lui **R**. Să se arate că:

(i) dacă $g \circ f$ este injectivă, atunci f este injectivă;

(ii) dacă $g \circ f$ este surjectivă, atunci g este surjectivă.

b) Fie $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ o funcție cu proprietatea $(f \circ f)(x) = x^2, \forall x \in (0, \infty)$.
Să se arate că :

(i) f este o funcție bijectivă;

(ii) $f(x^2) = f^2(x), \quad \forall x \in (0, \infty)$;

(iii) $\sqrt{f(x)} = f(\sqrt{x}), \quad \forall x \in (0, \infty)$.

2. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin : $x_0 = 0, \quad x_{n+1} = \sqrt{6 - x_n}$.

a) Să se studieze monotonia şi mărginirea şirului $(x_{2n})_{n\geq 0}$.

b) Să se studieze monotonia şi mărginirea şirului $(x_{2n+1})_{n\geq 0}$.

c) Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent şi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

3. Fie elipsa de ecuație : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

a) Să se arate că dreapta $y = mx + n$ este tangentă elipsei dacă şi numai dacă
$n = \pm\sqrt{a^2m^2 + n^2}$.

b) Să se determine locul geometric al punctelor din plan din care se pot duce tangente perpendiculare la elipsă.

II. **1.** Se consideră determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & x^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & x^4 \end{vmatrix}$, unde *a, b, c, x* $\in$ **R.**

a) Dezvoltați determinantul după coloana a patra punând rezultatul sub forma unui polinom $p(x)$.

b) Determinați coeficientul dominant şi rădăcinile polinomului $p(x)$.

c) Scrieți polinomul sub formă de produs.

2. Fie funcția continuă $f : [a, b] \to$ **R**. Să se arate că pentru orice cuplu de numere reale pozitive α, β se poate determina un număr $c \in [a, b]$, astfel încât

$$\alpha f(a) + \beta f(b) = (\alpha + \beta) f(c).$$

---

[1] Profesor, Liceul Teoretic " Gr. Moisil ", Iaşi

III. Fie $G=(-k,k)$, unde $k\in\mathbf{R}$, $k>0$. Pe G se defineşte o operaţie: $(x,y)\to x*y=\dfrac{k^2(x+y)}{k^2+x\cdot y}$.

a) Arătaţi că $(G, *)$ este grup abelian.

b) Arătaţi că funcţia $f:G\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{2k}\ln\dfrac{k+x}{k-x}$ este un izomorfism între grupurile $(G, *)$ şi $(\mathbf{R}, +)$.

IV. **a)** Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ o funcţie continuă şi periodică de perioadă principală T. Să se arate că

$$\int_a^{a+nT} f(x)\,dx = n\cdot\int_0^T f(x)\,dx,\ \forall\, a\in\mathbf{R} \text{ şi } n\in\mathbf{N}.$$

b) Folosind punctul **a)**, să se calculeze :

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\int_{-1+\varepsilon}^{1+\varepsilon}\frac{|\sin n\arccos x|}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Testul 2

I. **1.** Se dă o mulţime A care are n elemente. Împărţim toate submulţimile lui A în clase (disjuncte), punând în aceeaşi clasă toate submulţimile lui A care au acelaşi număr de elemente. Care dintre aceste clase este cea mai numeroasă ?

2. Fie $f:\mathbf{R}\setminus\{1,2\}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ şi $a_n=n^2\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}f^{(k)}(n+3)$.

a) Să se determine determine derivata de ordin n a lui x.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

3. Se consideră punctele $A(-2,1)$, $B(2,-1)$, $C(-1,8)$.

a) Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC.

b) Să se determine coordonatele punctului D, al patrulea vârf al paralelogramului $ABCD$, pentru care BC este o diagonală.

c) Să se scrie ecuaţia cercului circumscris triunghiului ABC.

II. **1.** Fie familia de funcţii de gradul al doilea :

$$f_m(x)=(m+1)x^2-mx+1,,\ \mathrm{M}\in\mathbf{R}\setminus\{-1\}$$

a) Să se arate că parabolele asociate acestor funcţii trec prin două puncte fixe.

b) Să se determine locul geometric al punctelor descris de vârfurile parabolelor.

2. Să se determine o primitivă a funcţiei $f:[0,1]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\ln(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})$.

III. Fie polinomul $f\in\mathbf{Z}_6[X]$, $f=\hat{4}x^4+\hat{2}x^3+\hat{2}x^2+\hat{4}x+\hat{3}$.

a) Să se arate că f nu admite rădăcini în $\mathbf{Z}_6$.

b) Să se arate că f se poate descompune în produsul a două polinoame, din care unul de gradul întâi.

IV. Fie funcţia $f:D\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{vmatrix}|x| & \ln|x| & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & \ln|x|\end{vmatrix}$.

a) Să se determine domeniul maxim de definiţie D şi apoi să se studieze continuitatea şi derivabilitatea funcţiei f.

b) Să se arate că restricția lui f la $(0, \infty)$ este bijectivă şi apoi să se calculeze $\left(f^{-1}\right)'(0), \left(f^{-1}\right)''(0)$.

c) Să se determine primitivele lui f pe $\mathbf{R}^*$.

d). Să se calculeze aria suprafeței plane determinate de graficul funcției f, axa Ox şi dreptele x=1, x=3.

Testul 3

I. 1. Să se rezolve inecuația : $2^{3x} + 8^{-x} + 3 \cdot 2^{x} - 8 + 3 \cdot 2^{-x} \le 0$.

2. Fie $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$ şi $S(x) = x + x^2 + \ldots + x^n$.

a) Să se calculeze $S(x)$ şi $S'(x)$.

b) Folosind **a)** să se calculeze $T(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n$.

c) Să se calculeze limita şirului $(a_n)_{n\ge1}$ cu $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$.

II. 1. Fie M mulțimea matricilor de tipul (m, n) în care toate elementele sunt egale cu 1 sau (–1) şi astfel încât produsul numerelor din fiecare linie, respectiv coloană să fie egal cu (–1). Să se calculeze numărul de elemente al mulțimii M.

2. a) Enunțați *teorema lui Lagrange*.

b) Aplicați *teorema lui Lagrange* funcției $f : [e, \pi] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \ln x$.

c) Demonstrați inegalitatea : $e^{\pi} > \pi^{e}$.

III. 1. Fie $G = \left\{ f_\alpha : (b, \infty) \to R \;\middle|\; f_\alpha(x) = b + (x-b)^\alpha,\ \alpha \in R^*, b > 0 \right\}$.

a) Să se arate că $(G, \circ)$ este grup abelian.

b) Să se demonstreze că $(G, \circ) \cong (R, \cdot)$.

2. Fie $P \in Z[X]$ un polinom pentru care $P(0), P(1)$ sunt impare. Să se arate că ecuația $P(x)=0$ nu are rădăcini întregi.

IV. 1. Fie funcția $f : I \to \mathbf{R}$, I interval inclus în $\mathbf{R}$ $a \in I$ şi funcția f este derivabilă în a.

Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} n\left[f(a+\frac{1}{n}) + f(a+\frac{2}{n}) + \cdots f(a+\frac{k}{n}) - kf(a) \right]$, unde $k \in \mathbf{N}^*$ este fixat.

2. Fie şirul $(a_n)_{n\ge1}$ cu termenul general $a_n = \int_0^1 x(1-x)^n dx$, $n \in \mathbf{N}^*$.

a) Să se determine a_n.

b) Să se calculeze $b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

c) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} b_n$.

Testul 4

I. 1. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ un şir de numere reale nenule. Să se arate că acest şir este o progresie aritmetică , dacă şi numai dacă pentru orice $n \ge 2$, avem relația :

$$\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+\cdots+\frac{1}{x_{n-1}x_n}=\frac{n-1}{x_1x_n}.$$

2. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 0}$, $x_n = n\pi - 2n\, arctgn$.

a) Să se arate că $(x_n)_{n\geq 0}$ este un şir monoton şi mărginit.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

3. Să se demonstreze că produsul distanţelor unui punct oarecare al hiperbolei $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$, la cele două asimptote , este egal cu $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

II. **1.** Determinaţi părţile stabile finite ale lui **Z** în raport cu înmulţirea. Este **R\Q** parte stabilă a lui **R** în raport cu adunarea , respectiv cu înmulţirea ?

2. Fie funcţia $f:[0,x]\to \mathbf{R}$, $f(x)=\int_0^x \ln\frac{1-t}{1+t}\,dt,\quad x\in(0,1)$.

a) Să se calculeze $f'(x)$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\arcsin x^2}$.

III. Fie $(G,\cdot)$ şi $(G,\cdot')$ două grupuri, $f:G\to G'$ un morfism de grupuri şi mulţimea $\operatorname{Ker} f=\{x\in G \mid f(x)=e'\}$, e' fiind elementul neutru al lui G'.

a) Să se arate că Ker*f* este subgrup al lui *G*.

b) Să se arate că morfismul *f* este injectiv dacă şi numai dacă Ker*f*={e}.

IV. **1.** Fie funcţia $g:[0,1]\to\mathbf{R}$, $g(x)=\begin{cases} x^3, & x\in[0,1]\setminus\{1,\frac{1}{2},\ldots\frac{1}{n}\} \\ 3^x, & x\in\{1,\frac{1}{2},\ldots\frac{1}{n}\}\end{cases}$ $n\in\mathbf{N}^*$.

Să se arate că *g* este integrabilă pe [0, 1] şi să se calculeze $\int_0^1 g(x)dx$.

2. Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{p}{x}-\frac{\ln x}{x}$, $n\in\mathbf{N}^*$.

Să se calculeze *S*(*m*) , aria suprafeţei mărginită de graficul funcţiei *f*, axa *Ox*, şi dreptele *x*=1 , *x*=*m* (*m* >1). Să se determine *m*, astfel încât $S(m)=p\ln m-1/2$.

Testul 5

I. **1.** Fie şirul de numere complexe $(z_n)_{n\geq 1}$ definit prin $z_1=-i, z_2=i, z_n-z_{n-1}=q(z_{n-1}-z_{n-2})$ pentru $n\geq 2$, q fiind un număr complex dat diferit de 1.

a) Calculaţi z_3 şi z_4.

b) Arătaţi că $z_n - z_{n-1} = 2iq^{n-2}$ şi deduceţi că $z_n - z_1 = 2\,i\frac{1-q^{n-1}}{1-q}$.

c) Arătaţi că afirmaţiile “ $z_n=-i$ ” şi “*q* este rădăcină de ordinul *n*-1 a unităţii sunt echivalente.

2. **a)** Definiți noțiunea de punct de inflexiune al unei funcții şi dați interpretarea geometrică.

b) Să se determine punctele de inflexiune ale funcției : f: **R**→**R**, $f(x)=\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}$.

3. Fie elipsa (E) : $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}-1=0$.

a) Să se scrie ecuațiile tangentelor la elipsă, duse din punctul $A(-16, 9)$.

b) Dacă se notează cu T_1, T_2 punctele de contact ale celor două tangente de la punctul **a)** cu elipsa (E) , să se determine ecuația dreptei T_1T_2.

c) Calculați distanța de la punctul A la dreapta T_1T_2.

II. **1**. **a)** Rezolvați în **R** inecuatia $\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}>\frac{3}{4}$.

b) Să se găsească rangul celui mai mare termen din dezvoltarea $\left(\frac{6}{7}+\frac{1}{7}\right)^{2002}$.

2. **a)** Arătați că funcția f: **R**→**R**, $f(x)=\begin{cases}1, & x\in Q\\ 0, & x\in R\setminus Q\end{cases}$ nu admite primitive pe **R**.

b) Găsiți o funcție g : **R**→**R** care nu admite primitive pe **R** , astfel încât funcția compusă $f\circ g$ să admită primitive pe **R** (f fiind funcția de la punctul **a)**).

III. **1**.Arătați că polinomul $f=x^2+3x+3$ divide polinomul, $g=(x+1)^{3n+2}+x+2, \forall n\in$N*.

2. Fie $\hat{a}, \hat{b}\in \mathbf{Z}_n$, şi ecuația $\hat{a}\cdot x=\hat{b}$. Arătați că:

a) dacă $(a, n)=1$, atunci ecuația $\hat{a}\cdot x=\hat{b}$ admite soluție unică.

b) dacă $(a, n)=d>1$ şi d nu divide pe b, atunci ecuația $\hat{a}\cdot x=\hat{b}$ nu are soluții.

IV. **1.** Fie funcția $f:[0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}|x\ln x-x|, & x\in(0,\infty)\\ 0, & x=0\end{cases}$.

a) Studiați continuitatea şi derivabilitatea lui f pe $[0,\infty)$

b) Studiati variatia funcției f şi reprezentați graficul ei.

c) Arătati că restricția lui f la $[e,\infty)$ are inversă, $f^{\ 1}$, şi studiați derivabilitatea lui $f^{\ 1}$.

d) Calculați $f'(e^3)$ şi $(f^{-1})''(2e^2)$.

e) Calculati aria suprafeței plane mărginită de graficul funcției f, axa Ox, şi dreptele $x=\sqrt{e},\ x=e^2$.

2. Fie $f:(0,\infty)\to\mathbf{R},\ f(x)=e^{x^2}-1-x^2-x^4$.

a) Să se arate că $f'(x)>0, \forall x>0$.

b) Să se arate că $f(x)>0, \forall x>0$.

c) Să se demonstreze că : $\int_0^1 e^{x^2}dx>1{,}43$.

Soluțiile problemelor propuse în nr. 1/2001

Clasele primare

P.7. *Crizantema are cu 38 timbre mai puțin decât colega ei, Maria. Câte timbre trebuie să mai cumpere Crizantema pentru a avea cu cel mult 4 timbre în plus față de Maria?*

Crizantema Mironeanu, elevă, Iaşi

Soluție. Pentru a o egala pe Maria, Crizantema mai are nevoie de 38 timbre. Pentru a o depăşi cu cel mult 4 timbre, ea trebuie să mai cumpere, pe lângă cele 38, încă 1,2,3 sau 4 timbre. Deci Crizantema trebuie să mai cumpere 39,40,41 sau 42 timbre.

P.8. *Să se arate că din numerele 1,2,3,...,10 nu se pot forma două şiruri de numere, cu acelaşi număr de numere, astfel încât adunând numerele din fiecare şir să obținem sume egale.*

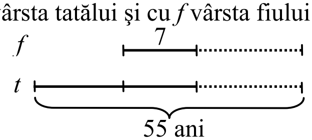
Maria Mursa, elevă, Iaşi

Soluție. Suma numerelor 1,2,3,…,10 este 55. Dacă ar exista cele două şiruri de numere cu sume egale, atunci cele două sume adunate ar trebui să dea 55. Acest lucru este imposibil deoarece nu există două numere naturale egale care să dea suma 55.

P.9. *Aflați vârsta în prezent a tatălui unui băiat ştiind că băiatul are 7 ani, iar atunci când băiatul va avea vârsta tatălui, tatăl va avea 55 ani.*

Înv. Elena Marchitan, Iaşi

Soluție. Să figurăm cele două vârste ținând cont de relațiile dintre ele. Notăm cu t vârsta tatălui şi cu f vârsta fiului.



Se observă că vârsta de 55 de ani este formată din vârsta fiului şi din dublul diferenței dintre vârsta tatălui şi a fiului în prezent.

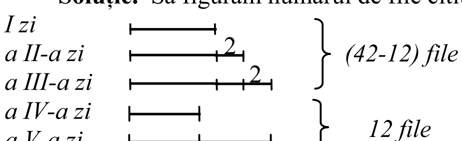
1. Care este dublul diferenței dintre cele două vârste în prezent? $55 - 7 = 48$
2. Care este diferența dintre cele două vârste în prezent? $48 : 2 = 24$
3. Care este vârsta tatălui în prezent? $24 + 7 = 31$

R : 31

P. 10. *George şi-a propus să citească în cinci zile o carte ce are 42 file. Numărul filelor citite în primele trei zile este reprezentat de numere pare consecutive. În a patra şi a cincea zi a citit 12 file. Ştiind că în ultima zi a citit de două ori mai mult decât în ziua precedentă, să se afle câte file a citit George în fiecare zi.*

Înv. Geta Dragnea, Iaşi

Soluție. Să figurăm numărul de file citite de George în fiecare zi



1. Câte file a citit în primele trei zile? $42 - 12 = 30$

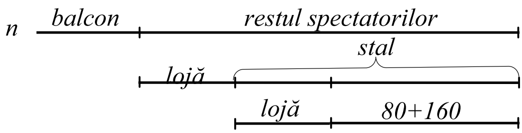
2. Care este triplul numărului de file citit în prima zi? 30 – 6 = 24
3. Câte file a citit în prima zi? 24 : 3 = 8
4. Câte file a citit în a doua zi? 8 + 2 = 10
5. Câte file a citit în a treia zi? 10 + 2 = 12
6. Câte file a citit în a patra zi? 12 : 3 = 4
7. Câte file a citit în a cincea zi? 4 · 2 =8

R : 8 file, 10 file, 12 file, 4file, 8 file.

P. 11. *Câți spectatori au fost aseară la Teatrul Național "Vasile Alexandri", din Iaşi, dacă la balcon au fost 160 de spectatori, la lojă un sfert din restul spectatorilor, iar la stal cu 80 spectatori mai mult decât la lojă şi balcon împreună?*

Înv. Rodica Agrici, Iaşi

Soluție. Să figurăm repartiția spectatorilor, n fiind numărul total.



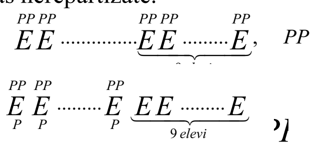
1. Cât reprezintă jumătate din restul spectatorilor? 80 + 160 = 240
2. Câți spectatori au stat la lojă şi stal? 240 · 2 = 480
3. Câți spectatori au fost la teatru? 480 + 160 = 640

R : 640 spectatori

P.12. *Moş Crăciun împarte daruri elevilor clasei a IV-a. Dacă ar da fiecărui copil câte 2 pachete, ar rămâne în sac 2 pachete. Dacă ar oferi fiecărui copil câte 3 pachete, ar rămâne 9 copii fără daruri. Câte pachete are Moş Crăciun în sac?*

Înv. Fănică Dragnea, Iaşi

Soluție. Figurăm cele două situații din problemă folosind simbolurile *E* (elev) şi *P* (pachet) Primul rând de simboluri sugerează fiecare elev a primit câte 2 pachete 2 pachete au rămas nerepartizate.



Al doilea rând de simboluri sugerează că primii elevi au primit câte 3 pachete iar ultimii 9 elevi nu au nici un pachet. Putem considera că al treilea pachet a fost oferit ultimilor 9 elevi. Acum putem scrie:

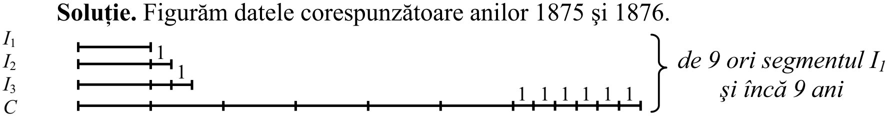
1.Câți elevi au primit câte 3 pachete? 2 · 9 + 2 · 1 = 20
2.Câte pachete are Moş Crăciun? 20 · 3 = 60

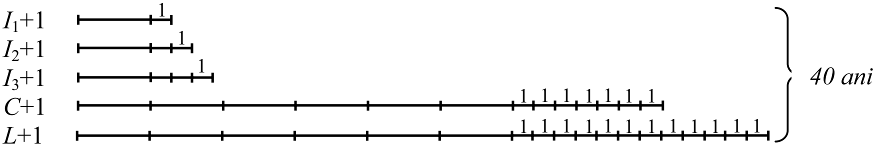
R : 60 pachete

P.13. *Scriitorul Ion Creangă a publicat povestea „Capra cu trei iezi" în 1875. Se spune că pe atunci capra ar fi avut o vârstă egală cu dublul sumei vârstelor iezişorilor ei, anii acestora fiind exprimați prin numere naturale consecutive. Peste un an, când s-a abătut necazul asupra caprei, lupul avea vârsta egală cu dublul sumei vârstelor de atunci ale iezilor, iar toți cinci aveau împreună 40 ani. Ce vârstă avea fiecare în anul publicării acestei poveşti?*

Înv. Mihai Agrici, Iaşi

Soluție. Figurăm datele corespunzătoare anilor 1875 şi 1876.





Unde I_1, I_2, I_3, C, L reprezintă vârstele celor cinci viețuitoare în anul 1875. Analizând figurarea corespunzătoare anului 1876, putem scrie:

1. Care este numărul segmentelor ce reprezintă vârsta I1?	$3 \cdot 1 + 2 \cdot 6 = 15$
2. Câți ani reprezintă aceste segmente?	$40 - 25 = 15$
3. Ce vârstă avea mezinul?	$15 : 15 = 1$
4. Ce vârstă avea iedul mijlociu?	$1 + 1 = 2$
5. Ce vârstă avea iedul cel mare?	$2 + 1 = 3$
6. Ce vârstă avea capra?	$(1+2+3) \cdot 2 = 12$
7. Ce vârstă avea lupul?	$(2+3+4) \cdot 2 - 1 = 17$

R : 1an, 2ani, 3ani, 12ani, 17ani.

<u>Clasa a V-a</u>

V.16. *Un automobilist vede la un moment dat pe kilometrajul de la bord numărul 12921. După două ore de mers cu viteză constantă, pe kilometraj a apărut următorul număr care se citeşte la fel în ambele sensuri. Aflați viteza de deplasare a automobilului.*

Gabriel Mârşanu, Iaşi

Soluție. Următorul număr care se citeşte la fel în ambele sensuri este 13031. În două ore de mers automobilistul a parcurs cu viteză constantă distanța de 110 km = 13031 km – 12921 km, deci viteza sa a fost de 55 km/h.

V.17. *Să se arate că fiecare termen al şirului: 19204, 9012004, 900120004, ... este un pătrat perfect.*

Constantin Chirilă, Iaşi

Soluția 1. Se observă că $9120 = 302^2$, $9012004 = 3002^2$ etc. În general, se pare că $9\underbrace{00.....0}_{p}12\underbrace{00.....0}_{p+1}4 = 3\underbrace{00.....0}_{p+1}2^2$. Se verifică prin ridicare la pătrat că egalitatea este adevărată; ca urmare, numerele din şir sunt pătrate perfecte.

Soluția 2 (*Schibinschi Greta, Botoşani*). Scriem:

$$9\underbrace{0.....0}_{p}12\underbrace{0.....0}_{p+1}4 = 9\cdot 10^{2p+4} + 12\cdot 10^{p+2} + 4 = 9\cdot 10^{2p+4} + 6\cdot 10^{p+2} + 6\cdot 10^{p+2} + 4 =$$

$$= 3\cdot 10^{p+2}(3\cdot 10^{p+2} + 2) + 2(3\cdot 10^{p+2} + 2) = (3\cdot 10^{p+2} + 2)^2 = 3\underbrace{0.....0}_{p+1}2^2.$$

V.18. *Arătați că, dacă suma a n numere naturale nenule este un număr prim, atunci aceste numere sunt prime între ele.*

Cristiana Artenie, elevă, Iaşi

Soluție. Fie $p = a_1 + a_2 + ... + a_n$, p număr prim şi $d = (a_1, a_2, ... , a_n)$. Atunci $d \mid a_1$, $d \mid a_2$, … , $d \mid a_n$ şi deci $d \mid a_1 + a_2 + ... + a_n$, adică $d \mid p$. Ca urmare sau $d = 1$, sau $d = p$; arătăm că nu putem avea $d = p$ şi de aici va rezulta concluzia. Într-adevăr, dacă $d = p$, atunci numerele de date se scriu: $a_1 = pa_1', ..., a_n = pa_n'$ şi vom avea $pa_1' + pa_2' + ... + pa_n' = p$ sau $a_1' + a_2' + ... + a_n' = 1$, ceea ce nu se poate!

V.19. *Fie a, b, p, q* $\in N^*$. *Aflați valorile pe care le poate lua numărul* $(1+A)^B$, *unde* $A = \underbrace{a+b-a-b+a+b-...}_{p\ termeni}$ *și* $B = \underbrace{b+a-b-a+b+a-...}_{q\ termeni}$

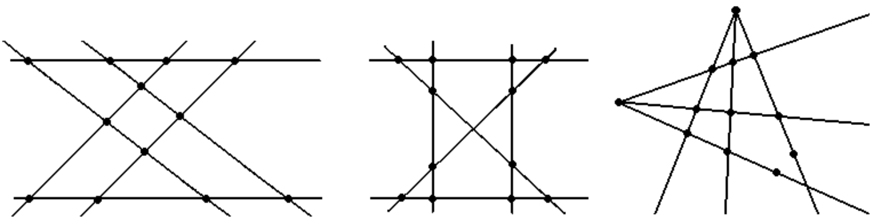
Cristiana Constanda, elevă, Iaşi

Soluție. Observăm că numărul A are valorile 0, a, $a + b$ sau b, după cum $p = \boldsymbol{M}4$, $p = \boldsymbol{M}4 + 1$, respectiv $p = \boldsymbol{M}4 + 3$. Ca urmare, $1+A \in \{1, 1+a, 1+a+b, 1+b\}$. În mod analog, $B \in \{0, b, a+b, a\}$. În consecință, avem: $(1+A)^B \in \{1, (1+a)^a, (1+b)^b, (1+a)^{a+b}, (1+b)^a, (1+b)^b, (1+b)^{a+b}, (1+a+b)^0, (1+a+b)^b, (1+a+b)^{a+b}\}$.

V.20. *Să se aranjeze 12 puncte pe 6 drepte astfel încât pe fiecare dreaptă să fie situate 4 puncte (indicați cel puțin două aranjamente de acest fel).*

Andrea Balla, elevă, Braşov

Soluție. Reproducem trei dintre numeroasele soluții primite de redacție.



Clasa a VI-a

VI.16. *Fie a şi b două numere întregi. Arătaşi echivalența afirmațiilor următoare: 1°* $1000a+b \vdots 43$; *2°* $a+4b \vdots 43$; *3°* $11b-8a \vdots 43$; *4°* $7b-9a \vdots 43$.

Gheorghe Costovici, Iaşi

Soluție. Vom arăta că 1° ⇒ 2° ⇒ 3° ⇒ 4° ⇒ 1°. Avem:

1°⇒ $1000a+b = 43k \Rightarrow (23\cdot 43+11)a+b = 43k \Rightarrow 23\cdot 43a+11a+b = 43k \Rightarrow$ ⇒ $4\cdot 23\cdot 43a+44a+4b = 4\cdot 43k \Rightarrow 4\cdot 23\cdot 43a+43a+(a+4b) = 4\cdot 43k \Rightarrow a+4b \vdots 43$;

2°⇒ $a+4b = 43k \Rightarrow -8a-32b = -8\cdot 43k \Rightarrow (11b-8a)-43b = -8\cdot 43k \Rightarrow 11b-8a \vdots 43$;

3°⇒ $11b-8a = 43k \Rightarrow 99b-72a = 9\cdot 43k \Rightarrow 43b+56b-72a = 9\cdot 43k \Rightarrow 43b+8(7b-9a) = 9\cdot 43k \Rightarrow 7b-9a \vdots 43$;

4°⇒ $7b-9a = 43k \Rightarrow 135\cdot 7b-135\cdot 9a = 135\cdot 43k \Rightarrow 945b-1215a = 135\cdot 43k \Rightarrow 946b-b-1000a-215a = 135\cdot 43k \Rightarrow 43(22b-5a)-(1000a+b) = 135\cdot 43k \Rightarrow 1000a+b \vdots 43$.

VI.17. *Fie* $E = 2^{4n+2} + 3^{4n} + 4^{4n} + 5^{2n} + 6^{2n}$, $n \in$ **N**.

1) Arătați că E nu este pătrat perfect.

2) Aflați n astfel încât $E \vdots 9$.

Cristiana Constanda, elevă, Iaşi

Soluție. 1) Dacă $n = 0$, atunci $E = 8$ şi nu este pătrat perfect. Dacă $n \geq 1$, atunci ultima cifră a numărului E este ultima cifră a sumei $4+1+6+5+6 = 22$, deci E se termină în 2 şi de aici rezultă că nu poate fi pătrat perfect.

2) Dacă $n = 0$, $E = 8$ nu se divide prin 9. Dacă $n \geq 1$, atunci $6^{2n} \vdots 9$ şi deci avem:

$E \vdots 9 \Leftrightarrow 2^{4^{n+2}}+4^{4^n}+5^{2n} \vdots 9 \Leftrightarrow 2^{n+2}\cdot 2^{3n}+16^{2n}+(9\text{-}4)^{2n} \vdots 9 \Leftrightarrow 2^{n+2}\cdot(9\text{-}1)^n+2^{2n}\cdot(9\text{-}1)^{2n}+4^{2n} \vdots 9$
$\Leftrightarrow (-1)^n\cdot 2^{n+2}+2^{2n}+2^n(9\text{-}1)^n \vdots 9 \Leftrightarrow (-1)^n\cdot 2^n\cdot 4+2^n\cdot 2^n+(-1)^n\cdot 2^n \vdots 9 \Leftrightarrow 5\cdot(-1)^n+2^n \vdots 9.$

Dacă $n = 6k$ $(k \geq 1)$, atunci $5\cdot(-1)^n+2^n \vdots 9 \Leftrightarrow (5+2^{6k}) \vdots 9 \Leftrightarrow 5+(9\text{-}1)^{2k} \vdots 9 \Leftrightarrow (5+1) \vdots 9$, fapt care nu este adevărat. La fel se arată că E nu se divide cu 9 dacă $n = 6k+1$, $n = 6k+3$ sau $n = 6k+4$ $(k \geq 0)$.

Dacă $n = 6k+2$ sau $n = 6k+5$ $(k \geq 0)$, atunci E se divide cu 9, deoarece:

$$5\cdot(-1)^{6k+1}+2^{6k+2} \vdots 9 \Leftrightarrow 5+4(9\text{-}1)^{2k} \vdots 9 \Leftrightarrow (5+4) \vdots 9 \text{ etc.}$$

V.18. *Să se descompună în factori primi numărul S dat de:*

$$S = 123456789 + 234567891 + 345678912 + ... +12345678.$$

Paraschiva Bîrsan, Iaşi

Soluție. Scriind reprezentarea în baza 10 al fiecărui termen din suma S, obținem :

$$S = (1+2+ ... +9)\cdot 10^8 + (1+2+ ... +9)\cdot 10^7 + ... + (1+2+ ... +9) =$$
$$=45(10^8+10^7+ ... +10 + 1) = 45[10^6(10^2+10+1) + 10^3(10^2+10+1) + (10^2+10+1)]=$$
$$= 45(10^2+10+1)(10^6+10^3+1) = 3^2\cdot 5\cdot 111\cdot 1001001 = 3^4\cdot 5\cdot 37\cdot 333667,$$

aceasta fiind descompunerea în factori primi a numărului S.

VI.19. *Să se afle cinci numere raționale ştiind că:a) suma lor este 351; b) primele trei sunt invers proporționale cu primele trei numere prime; c) ultimele trei sunt direct proporționale cu 7, 11 şi 13.*

Cristiana Artenie, elevă, Iaşi.

Soluție. Fie a, b, c, d şi e cele cinci numere. Condițiile din enunț se scriu: $a+b+c+d+e = 351$, $2a = 3b = 5c$ şi $\frac{c}{7}=\frac{d}{11}=\frac{e}{13}$. Din ultimele relații deducem că $a=\frac{5c}{2}$, $b=\frac{5c}{3}$, $d=\frac{11c}{7}$, $e=\frac{13c}{7}$ şi înlocuind în prima egalitate obținem o ecuație cu necunoscuta c etc.

VI.20. *Fie a, b∈* **N** *şi c∈* **Q** *direct proporționale cu p_1, p_2, p_3, unde $p_1 < p_2 < p_3$ sunt numere prime.*

a) Arătați că $c \in$ $\mathbf{N}^*$.

b) Determinați p_1, p_2, p_3 dacă $a+b < 35 = c$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluție. a) Din $\frac{a}{p_1}=\frac{b}{p_2}=\frac{c}{p_3}$ deducem $ap_2 = bp_1$ şi $c=\frac{a}{p_1}\cdot p_3$. Din prima egalitate rezultă $p_1 \mid ap_2$ şi deci $p_1 \mid a$, adică $\frac{a}{p_1}=k \in \mathbf{N}^*$. Folosind a doua egalitate, obținem $c \in \mathbf{N}^*$.

b) Avem: $a+b < 35 = c \Rightarrow k(p_1+p_2) < 35 = kp_3 \Rightarrow 35 = kp_3$ şi $p_1+p_2 < p_3 \Rightarrow p_3 \in \{5, 7\}$ şi $p_1+p_2 < p_3$. Dacă $p_3 = 3$, atunci $p_1 = 2$ şi $p_2 = 3$ (deoarece $p_1 < p_2 < p_3$) şi nu avem $p_1+p_2 < p_3$. Rămâne $p_3=7$, caz în care inegalitatea $p_1+p_2 < p_3$ este îndeplinită numai de numerele prime $p_1 = 2$, $p_2 = 3$.

Clasa a VII-a

VII.16. *Să se cerceteze care dintre elementele mulțimii $A=\{(x,y) \in \boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{Q};\ 4x^2+12x+9 + |y^2-25|=0\}$ aparțin graficului funcției $f(x) = -2x+2$, $x \in \boldsymbol{R}$.*

Cristiana Constanda, elevă, Iaşi

Soluție. Avem: $A = \{(x,y) \in \mathbf{Q}\times\mathbf{Q};\ (2x+3)^2+|y^2-25| = 0\} = \{(x,y)\in\mathbf{Q}\times\mathbf{Q};\ 2x+3 = 0$ şi $y^2-25 = 0\} = \{(x,y)\in\mathbf{Q}\times\mathbf{Q};\ x = -\frac{3}{2}$ şi $y = \pm 5\} = \left\{(-\frac{3}{2}, -5), (-\frac{3}{2}, 5)\right\}$. Cum $f(-\frac{3}{2}) = 5$, numai al doilea punct al lui A aparține graficului lui f.

VII.17. *a) Fie x, y, z* $\in [2, +\infty)$. *Arătați că* $(x^2+y)(y^2+z)(z^2+x) \geq 27xyz$.

b) Fie x, y, z $\in [3, +\infty)$. *Arătați că* $(x^2+y)(y^2+z)(z^2+x) \geq 64xyz$.

Lucian Tuțescu, Craiova

Mai general, pentru orice $n\in\mathbf{N}$ fixat are loc inegalitatea:

$$(x^2+y)(y^2+z)(z^2+x) \geq (n+1)^3xyz,\ \forall x, y, z \in [n, +\infty). \qquad (1)$$

(pentru $n = 2$ şi $n = 3$ se obțin inegalitățile din enunț).

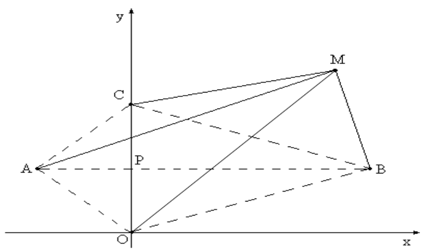
Soluția 1 (în maniera autorului). Cum $x \geq n \Rightarrow x^2 \geq nx \Rightarrow x^2+y \geq nx+y$ şi cum $nx+y = x+\ldots+x+y \geq (n+1)\sqrt[n+1]{x^n y}$, obținem $x^2+y \geq (n+1)\sqrt[n+1]{x^n y}$. Analog, $y^2+z \geq$ $\geq (n+1)\sqrt[n+1]{y^n z}$, $y^n+x \geq (n+1)\sqrt[n+1]{z^n x}$. Prin înmulțirea membru cu membru a ultimelor trei inegalități se obține (1).

Soluția 2 (în maniera mai multor elevi din Braşov). Are loc $x^2+y \geq (n+1)x,\ \forall x, y \in [n, +\infty)$ căci $x^2 + y \geq (n+1)x \Leftrightarrow x^2 - (n+1)x + n + (y-n) \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-n) + (y-n) \geq 0$. Înmulțind membru cu membru inegalitatea $x^2 + y \geq (n+1)x$ cu analoagele ei, obținem (1).

VII.18. *Să se determine numerele reale x şi y pentru expresia* $\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(x+a)^2+(y-a)^2} + \sqrt{(x-b)^2+(y-a)^2} + \sqrt{x^2+(y-c)^2}$ *(a,b,c* $\in \mathbf{R}_+$*) este minimă şi să se afle apoi această valoare minimă.*

Cristiana Artenie, elevă, Iaşi

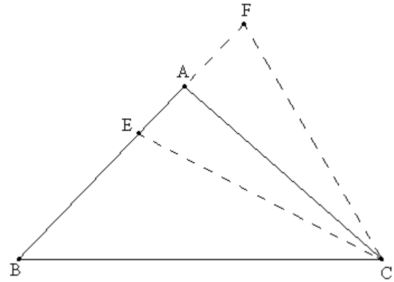
Soluție. În raport cu un sistem Oxz de axe coordonate figurăm punctele $O(0,0)$, $A(-a,a)$, $B(b,a)$, $C(0,c)$ şi $M(x,y)$. Deoarece $\sqrt{x^2+y^2} = MO$, $\sqrt{(x+a)^2+(y-a)^2} = MA$, $\sqrt{(x-b)^2+(y-a)^2} = MB$ şi $\sqrt{x^2+(y-c)^2} = MC$, problema revine la determinarea minimului expresiei $E = MO+MA+MB+MC$, atunci când M este un punct oarecare din plan.



Avem inegalitățile: $MO + MC \geq OC$ (ΔMOC), $MA+MB \geq AB$ (ΔMAB), deci $E \geq$ $\geq AB+OC$, cu egalitate pentru $M \in (OC) \cap$ $\cap (AB)$, adică M coincide cu $P(0,a)$. Ca urmare, $E_{\min}$ se obține pentru $x = 0$, $y = a$ şi are valoarea $E_{\min} = 2a+b+|a-c|$.

VII.19. *Se consideră un triunghi dreptunghic isoscel ABC cu vârful în A şi se notează cu E şi F punctele de intersecție ale cercurilor* $\mathcal{C}(C, \frac{3}{4}BC)$ *şi* $\mathcal{C}(A, \frac{1}{4}BC)$. *Să se arate că punctele B, E şi F sunt coliniare.*

Adrian Zanoschi, Iaşi



Soluţie. Fie $AB = AC = a$. Avem: $AE = =AF = \frac{BC}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ şi $CE = CF = \frac{3BC}{4} = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$. Se observă de aici că $AE^2 + AC^2 = \frac{2a^2}{16} + a^2 = \frac{18a^2}{16} = EC^2$, deci ΔAEC este dreptunghic în A, adică $AE \perp AC$, de unde rezultă că $E \in AB$. Analog se arată că $F \in AB$, deci B, E, F sunt coliniare.

VII.20. *Să se împartă cu ajutorul unui echer negradat un segment [AB] în trei părţi de lungimi egale.*

Constatin Cocea, Iaşi

Soluţie. Vezi **E. Cohal** - "*Construcţii geometrice cu echerul*", p.41 din acest număr.

Clasa a VIII-a

VIII.16. *Fie* $n \in \mathbf{N}^*$ *şi* $A_n = \left\{\overline{x_1 x_2 \ldots x_n}\right\}$. *Definim funcţia* $d: A_n \times A_n \to \mathbf{N}$ *prin* $d(x, y) =$ *Card* $\left\{i / i \in \overline{1,n}, x_i \neq y_i\right\}$, *unde* $x = \overline{x_1 x_2 \ldots x_n}$ *şi* $y = \overline{y_1 y_2 \ldots y_n}$.

Să se arate că d este o distanţă, adică satisface condiţiile: 1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$; *2)* $d(x,y) = d(y,x), \forall x,y \in A_n$; *3)* $d(x,y) \le d(x,z)+d(z,y), \forall x,y,z \in A_n$.

Petru Asaftei, Iaşi

Soluţie. Verificăm pe rând 1), 2) şi 3):

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n \Leftrightarrow x = y$.

2. $d(x, y) = d(y, x), \forall x,y \in A_n$, căci perechile de numere (x, y) şi (y, x) au aceleaşi cifre distincte.

3. Să presupunem că $d(x, y) = k = \text{Card}\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$(deci $x_{i_1} \neq y_{i_1}, \ldots, x_{i_n} \neq y_{i_n}$ şi $x_j = y_j$ pentru $j \notin \{i_1, \ldots, i_k\}$) şi fie $z = \overline{z_1, z_2, \ldots, z_n}$. Fie p numărul indicilor din $\{i_1, \ldots, i_k\}$ pentru care coincid cifrele lui z şi x şi fie q numărul acelora pentru care coincid cifrele lui z şi y. Evident, avem $p+q \le k$. Deoarece $z_{i_1} = x_{i_1} \Rightarrow z_{i_1} \neq y_{i_1}$ şi $z_{i_1} = y_{i_1} \Rightarrow z_{i_1} \neq x_{i_1}$ etc., rezultă că $d(x, z) \ge k-q$ şi $d(z, y) \ge k-p$. Ca urmare, $d(x, z) + d(z, y) \ge 2k- (p+q) \ge k = d(x, y)$, adică este verificată 3).

VIII.17. *Arătaţi că* $\alpha \in (0,1)$, *ştiind că numărul real* α *este o soluţie a ecuaţiei* $2x^5 + x^3 - 1 = 0$.

Dumitru Neagu, Iaşi

Soluţia 1. Avem: $2\alpha^5 + \alpha^3 - 1 = 0 \Rightarrow \alpha^3(2\alpha^2+1) = 1 \Rightarrow \alpha^3 = \frac{1}{2\alpha^2+1} \Rightarrow 0 < \alpha^3 < 1 \Rightarrow 0 < \alpha < 1$ (s-a utilizat faptul că $\alpha \neq 0$, zero nefiind soluţie a ecuaţiei date).

Soluţia 2. Dacă $x \le 0$, atunci $2x^5+x^3-1 \le -1 < 0$, deci $x \le 0$ nu este soluţie a ecuaţiei date. Dacă $x \geq 1$, atunci $2x^5 + x^3 - 1 \geq 2 + 1 - 1 > 0$, deci $x \geq 1$ nu este soluție a ecuației date. Cum numărul α este soluție a acestei ecuații, rezultă că $\alpha \in (0,1)$.

VIII.18. *Dacă x,y $\in$ [0,1], atunci avem:*

$$x + y \leq \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1+\sqrt{1-y^2}} + \sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-\sqrt{1-y^2}} .$$

Constantin Cocea, Iaşi

Soluție. Ridicând inegalitatea dată la pătrat (avem voie!), obținem: $x^2+y^2+2xy \leq$ $(1+\sqrt{1-y^2} - \sqrt{1-x^2} - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}) + (1-\sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-x^2} - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}) + 2xy$, echivalentă cu $(1-x^2) + (1-y^2) \geq 2\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$, adevărată conform inegalității mediilor.

VIII.19. *Să se determine numerele naturale $n \geq 2$ ştiind că mulțimea* $\left\{ x \in N / \dfrac{x^2-x-1}{n} \in N \right\} \cap \{1,2,...,n\}$ *este formată dintr-un singur element.*

Cristinel Mortici, Constanța

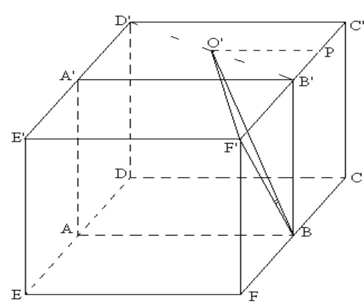
Soluție. Fie $n \geq 2$ un număr cu proprietatea dorită şi fie $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$ unicul număr pentru care $n \mid x^2+x+1$. Cum $n+1-x \in \{1, 2, \ldots, n\}$ şi $n \mid (n+1-x)^2 - (n+1-x)-1$ (după cum se vede din egalitatea $(n+1-x)^2 - (n+1-x)-1 = n(n-2x+1) + (x^2-x+1)$, din unicitatea lui x rezultă că $n+1-x=x$, deci $x = \dfrac{n+1}{2}$ şi atunci n este impar: $n = 2k+1$, $x = k+1$. În consecință, $n \mid x^2-x-1 \Rightarrow 2k+1 \mid (k+1)^2 - (k+1)-1 \Rightarrow 2k+1 \mid k^2+k-1 \Rightarrow 2k+1 \mid 4k^2+4k-4 \Rightarrow 2k+1 \mid (2k+1)^2 - 5 \Rightarrow 2k+1 \mid 5 \Rightarrow k \in \{1, 5\}$. Se verifică direct că numai $n = 5$ satisface cerințele problemei.

VIII.20. *Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu O' centrul feței $A'B'C'D'$. Calculați tangenta unghiului dintre BO' şi $A'D$.*

Cristiana Constanda, elevă, Iaşi

Soluție. „Dublând cubul" ca în figură se obține paralelipipedul $EFCDE'F'C'D'$, în care $F'B \parallel A'D$ (ambele paralele cu $E'A$). Observăm că $\sphericalangle(A'D, O'B) = \sphericalangle(F'B, O'B) = \sphericalangle F'BO' = \alpha$. Pentru laturile triunghiului $F'BO'$ avem: $F'B = a\sqrt{2}$, $O'B = \sqrt{O'B'^2 + B'B^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$ şi $O'F' = \sqrt{O'P^2 + F'P^2} = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$ (unde p este mijlocul muchiei $B'C'$).

Aplicând teorema cosinusului în $\Delta F'BO'$, obținem: $\dfrac{10a^2}{4} = 2a^2 + \dfrac{6a^2}{4} - 2\, a\sqrt{2}\, \dfrac{a\sqrt{6}}{2}\cos\alpha$, de unde $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$. Ca urmare, $\sin\alpha = \sqrt{1-\dfrac{3}{36}} = \dfrac{\sqrt{33}}{6}$ şi deci $\mathrm{tg}\alpha = \sqrt{11}$.



Clasa a IX-a

IX.16. *În ipoteza că ecuația cu coeficienți reali* $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ *are rădăcinile* x_1, x_2, x_3 *reale, să se demonstreze echivalența:*

$$x_i > 0,\ i = 1, 2, 3,\ \Leftrightarrow\ a < 0,\ b > 0,\ c < 0,\ ab < c.$$

Adrian Corduneanu, Iaşi

Soluție. Conform relațiilor lui Viète, avem:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a,\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b,\ x_1x_2x_3 = -c \qquad (1)$$

Ecuația din enunț se poate scrie şi sub forma $(x^2 + b)(x + a) = ab - c$ (2).

Dacă $x_i > 0$, $i = 1, 2, 3$, atunci din (1) rezultă că $a < 0$, $b \geq 0$ şi $c < 0$. Tot din (1) se poate deduce că $x_1 + a = -(x_2 + x_3) < 0$. De aici şi din egalitatea obținută punând x_1 în locul lui x în (2) deducem că $ab - c < 0$.

Reciproc, să presupunem că sunt îndeplinite condițiile din enunț privind coeficienții. Din (1) avem $x_1x_2x_3 = -c > 0$ şi atunci nu toate numerele x_1, x_2, x_3 pot fi negative. Fie $x_1 > 0$; rezultă că are loc şi $x_2x_3 > 0$ (3). Pe de altă parte, din $ab < c$ şi din (2) cu x_1 în locul lui x, se obține că $x_1 + a < 0$. Însă $x_1 + a = -(x_2 + x_3)$, deci $x_2 + x_3 > 0$ (4). Din (3) şi (4) decurge că $x_2 > 0$ şi $x_3 > 0$.

IX.17. *Arătați că ecuația* $\{x^2\} + \{y^2\} = \{z^2\}$ *are o infinitate de soluții în* **Q** \ **Z** ({a} *reprezintă partea fracționară a numărului real a*).

R. Bărbulescu şi M.B. Ion, elevi, Lucian Tuțescu, prof. , Craiova

Soluție (dată de un grup de elevi din Braşov). Scriem egalitatea $3^2 + 4^2 = 5^2$ sub forma: $\left(\frac{3}{7^n}\right)^2 + \left(\frac{4}{7^n}\right)^2 = \left(\frac{5}{7^n}\right)^2$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Deoarece: $\left\{\left(\frac{3}{7^n}\right)^2\right\} = \left(\frac{3}{7^n}\right)^2$, $\left\{\left(\frac{4}{7^n}\right)^2\right\} = \left(\frac{4}{7^n}\right)^2$, $\left\{\left(\frac{5}{7^n}\right)^2\right\} = \left(\frac{5}{7^n}\right)^2$, $\forall n \in N^*$,

urmează că tripleta $(x, y, z) = \left(\frac{3}{7^n}, \frac{4}{7^n}, \frac{5}{7^n}\right)$ este o soluție a ecuației din enunț $\forall n \in N^*$.

IX.18. *Determinați funcțiile* $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *pentru care avem:* $f(x^3 + 3x^2 + 3x) \leq x \leq f^3(x) + 3f^2(x) + 3f(x)$ $\forall x \in \mathbf{R}$. *Generalizare.*

Gabriel Popa, Iaşi

Soluție. Vom rezolva direct următoarea problemă mai generală:

Dacă $\varphi\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *este o funcție surjectivă şi strict crescătoare, să se determine funcțiile* $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *pentru care:* $f(\varphi(x)) \leq x \leq \varphi(f(x))$, $\forall x \in \mathbf{R}$. (1)

Din ipoteză, φ este inversabilă şi avem $\varphi(x) = t \Leftrightarrow x = \varphi^{-1}(t)$ Atunci, ținând seama şi de monotonia lui φ, au loc:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(\varphi(x)) \le x, \ \forall x \in \mathbf{R} \\ x \le \varphi(f(x)), \ \forall x \in \mathbf{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(t) \le \varphi^{-1}(t), \ \forall t \in \mathbf{R} \\ \varphi^{-1}(x) \le f(x), \ \forall x \in \mathbf{R} \end{cases} \Leftrightarrow f(x) \le \varphi^{-1}(x) \le f(x), \ \forall x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow f = \varphi^{-1}.$$

În cazul particular considerat, $\varphi(x) = x^3 + 3x^2 + 3x = (x+1)^3 - 1$ şi este evident strict crescătoare şi surjectivă, deci $f(x) = \varphi^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1} - 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

IX.19. *Arătaţi că în orice triunghi are loc inegalitatea:* $(a^8 + b^8 + c^8 + 3) R^4 \ge 8r^2a^2b^2c^2$.

Mihai Bogdan Ion, elev, Craiova

Soluţie. Se ştie că în orice triunghi au loc $R \ge 2r$ şi $a^4 + b^4 + c^4 \ge 16S^2$, cu egalitate pentru triunghiul echilateral. Atunci:

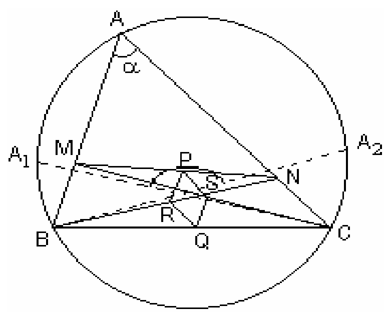
$$\left(a^8 + b^8 + c^8 + 3\right)R^4 = 2\left(\frac{a^8+1}{2} + \frac{b^8+1}{2} + \frac{c^8+1}{2}\right)R^4 \ge 2\left(\sqrt{a^8} + \sqrt{b^8} + \sqrt{c^8}\right)R^4 =$$

$$= 2\left(a^4 + b^4 + c^4\right)R^4 \ge 2 \cdot 16S^2 \cdot R^4 \ge 2 \cdot \frac{a^2b^2c^2}{R^2} \cdot R^2 \cdot 4r^2 = 8r^2a^2b^2c^2.$$

IX.20. *Pe laturile AB şi AC ale tringhiului ABC se consideră punctele M, respectiv N, astfel încât BM ≡ CN = k (constant). Dacă B şi C sunt fixe şi* $m(\hat{A})$ *este constantă, să se afle locul geometric al mijlocului segmentului MN.*

Cătălin Calistru, Iaşi

Soluţie. Fie P, Q, R, S respectiv mijloacele segmentelor $[MN]$, $[BC]$, $[BN]$, $[CM]$. Laturile patrulaterului $PRQS$ sunt linii mijlocii în triunghiurile NMB, BNC, CMB, respectiv MNC şi cum $BM \equiv CN = k$, rezultă că $PRQS$ este romb de latură $\frac{k}{2}$. În plus, unghiurile acestui romb au măsuri constante (α, respctiv $\pi - \alpha$), deci indiferent de poziţia punctului A, diagonala PQ a rombului are lungime constantă $QP = k \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$. Cum Q este fix, rezultă că P descrie



un arc de cerc de centru Q şi rază $r = k \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$, delimitat de dreptele CA_1 şi CA_2 corespunzătoare poziţiilor limită ale punctului A pe arcul capabil de unghi α ($BA \ge k$, $CA \ge k$). Dacă A descrie arcul simetric din semiplanul inferior, P parcurge un alt arc de cerc, simetricul primului faţă de BC.

Clasa a X-a

X.16. *Să se determine numărul funcţiilor* $f : \{1,2,\ldots n\} \to \{-1,1\}$ *cu proprietatea că* $\sum_{i=1}^{n} f(i) = k$, $k, n \in \mathbf{N}$, $n \ge 2$, $k < n$.

Petru Asaftei, Iaşi

Soluție. Fie $X \subset \{1,2,...,n\}$ mulțimea acelor elemente a căror imagine prin f este –1. Evident că $X \neq \varnothing$, altfel $\sum_{i=1}^{n} f(i) = n > k$. Notăm $x = \text{card}\, X$. Atunci

$$k = \sum_{i=1}^{n} f(i) = \sum_{i \in X} f(i) + \sum_{j \notin X} f(j) = -x + (n - x) \Rightarrow 2x = n - k \Rightarrow x = \frac{n-k}{2}.$$

Dacă n şi k au parități diferite, nu există funcții ca în enunț. Pentru n şi k de aceeaşi paritate, funcțiile căutate sunt bine determinate de submulțimea X; numărul lor va fi deci egal cu numărul submulțimilor cu $\frac{n-k}{2}$ elemente ale mulțimii $\{1,2,...,n\}$, adică $C_n^{\frac{n-k}{2}}$.

X.17. *Fie* $f : \mathbf{R} \to (0, \infty)$ *definită prin* :

$$f(\mathrm{x}) = \begin{cases} a^x, & x \in \mathbf{Q} \\ b^x, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases} \qquad a,b \in \mathbf{N}\setminus\{0,1\},\ a \neq b.$$

Notăm cu $\boldsymbol{M}_{a,b}$ *mulțimea acestor funcții şi cu* $\boldsymbol{I} = \{ f \in \boldsymbol{M}_{a,b} \mid f$ *injectivă* $\}$, $\boldsymbol{S} = \{ f \in \boldsymbol{M}_{a,b} \mid f$ *surjectivă* $\}$.

1) $\boldsymbol{I} \neq \varnothing$, $\boldsymbol{S} \neq \varnothing$ *şi* $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{S}$.
2) *dacă* $(a, b) = 1$, *atunci* f *nu-i nici injectivă şi nici surjectivă.*
3) *este adevarată reciproca afirmației de la punctual* ***2)****?*

Dumitru Gherman, Paşcani

Soluție. Vom demonstra că f surjectivă $\Leftrightarrow$ f injectivă $\Leftrightarrow \exists r \in \mathbf{Q}^*$ astfel încât $b = a^r$.

a) *f surjectivă $\Rightarrow$ f injectivă.* Într-adevăr, să presupunem prin absurd că f nu este injectivă; atunci $\exists x_1 \in \mathbf{Q}$**,** şi $\exists x_2 \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$ astfel încât $f(x_1) = f(x_2)$, de unde $a^{x_1} = b^{x_2}$, adică $x_1 = x_2 \log_a b$, deci $\log_a b \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$**,** prin urmare ecuația $f(x) = b$ nu are soluție, ceea ce contrazice faptul că f este surjectivă.

b) *f injectivă $\Rightarrow \exists r \in \mathbf{Q}^*$ astfel încât $b = a^r$.* Vom proceda tot prin reducere la absurd; presupunem că $b \neq a^r, \forall r \in \mathbf{Q}^*$. Atunci $\log_b a \notin \mathbf{Q}$ şi, ca urmare, $f(\log_b a) = b^{\log_b a} = a = f(1)$. Cum f injectivă, urmează că $\log_b a = 1$, imposibil.

c) *$\exists r \in \mathbf{Q}^*$ astfel încât $b = a^r \Rightarrow f$ surjectivă.* Pentru $y \in (0, \infty)$, considerăm ecuația $f(x) = y$. Dacă $\log_a y \in \mathbf{Q}$, atunci $x_1 = \log_a y$ este soluție a acestei ecuații; în caz contrar, $x = \frac{1}{r} \log_a y \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ este soluție a ecuației.

Acum cerințele problemei sunt imediate. Pentru a=2, b=4, avem $f \in \boldsymbol{I}$ iar $\boldsymbol{I}$=$\boldsymbol{S}$ conform primei echivalențe dovedite. Punctul **2)** rezultă din ultima echivalență, iar reciproca sa este falsă: de exemplu, $f \notin \boldsymbol{I}$ pentru a=2 şi b=6, însă (2,6) $\neq$ 1.

X.18. *Fie ABCD un patrulater convex, orientat pozitiv, ale cărui vârfuri au afixele a, b, c, d. Să se arate că ABCD este pătrat dacă şi numai dacă $d-a=i(b-a)$ şi $a+c=b+d$.*

Adrian Corduneanu, Iaşi

Soluţie. Prin translaţia $z \to z - a$, obţinem patrulaterul $A'B'C'D'$ congruent cu *ABCD*, unde $A'(0)$, $B'(b-a)$, $C'(c-a)$, $D'(d-a)$. Avem: *ABCD* pătrat $\Leftrightarrow$ $A'B'C'D'$ pătrat $\Leftrightarrow$ $A'B'C'D'$ paralelogram şi OD' se obţine din OB' printr-o rotaţie de unghi $\frac{\pi}{2}$ în sens direct $\Leftrightarrow$ $c-a=(b-a)+(d-a)$. şi $d-a=i(b-a)$ $\Leftrightarrow$ $a+c=b+d$ şi. $d-a=i(b-a)$.

X.19. *Fie x, y, z, a, b, c* $\in$ **C.** *Notăm $\alpha = xa + yb + zc$, $\beta = xb + yc + za$ şi $\gamma = xc + ya + zb$. Să se arate că dacă numerele complexe α, β, γ sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral, atunci cel puţin unul din tripletele (x, y, z) şi (a, b, c) reprezintă afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.*

Constantin Cocea, Iaşi

Soluţie. Concluzia problemei se obţine imediat folosind următoarele observaţii :

(i) *u, w, z* sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral dacă şi numai dacă $u^2 + w^2 + z^2 - uw - uz - wz = 0$;

(ii) Are loc relaţia (ce se poate verifica printr-un calcul de rutină):

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \left(x^2 + y^2 + z^2 + xy + xy + yz\right)\left(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac\right).$$

X.20. *Stabiliţi natura triunghiului în care au loc simultan relaţiile:*

$2^{\cos A + \cos B - 1} = 2^{2\cos A} + 2$, $2^{\cos B + \cos C + 1} = 2^{2\cos B} + 2$, $2^{\cos C + \cos A + 1} = 2^{2\cos C} + 2$.

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

Soluţie. Cu notaţiile $x = 2^{\cos A}$, $y = 2^{\cos B}$ şi $z = 2^{\cos C}$, ipoteza problemei se scrie $2xy = x^2 + 2$, $2yz = y^2 + 2$, $2zx = z^2 + 2$. Avem: $2xy \le x^2 + y^2$ şi analoagele şi atunci se obţine că $2 \le y^2, 2 \le z^2, 2 \le x^2$. Deci, $1 \le 2\cos B$, $1 \le 2\cos C$, $1 \le 2\cos A$, de unde m($\hat{A}$)≤60°, m($\hat{B}$)≤60°, m($\hat{C}$)≤60°. Deoarece m($\hat{A}$) + m($\hat{B}$) + m($\hat{C}$) = 180°, inegalităţile precedente se transformă în egalităţi, adică triunghiul *ABC* este echilateral.

Clasa a XI-a

XI.16. *Fie numerele $a, b \in$ **C** şi matricele $A, B \in M_n$ (**C**) astfel încât $aAB + bBA = I_n$, I_n fiind matricea unitate de ordin $n \ge 1$. Să se demonstreze că* $\det(AB - BA) = 0$ *sau există $\omega \in U_n = \{z \in C \mid z^n = 1\}$ încât $a + b\omega = 0$.*

Dan Popescu, Suceava

Soluţie. Din ipoteză obţinem că $a(AB - BA) + (a+b)BA = I_n$, deci are loc egalitatea $a(AB - BA) = I_n - (a+b)BA$. Analog $-b(AB - BA) = I_n - (a+b)AB$. Pe de altă parte, $\det(I_n - tAB) = \det(I_n - tBA)$ $\forall t \in$ **C**, căci matricele *AB* şi *BA* au acelaşi polinom caracteristic. Rezultă că $\det(a(AB - BA)) = \det((-b)(AB - BA))$. Presupunând că $\det(AB - BA) \ne 0$, urmează că $a^n = (-b)^n$, relație care împreună cu ipoteza asigură că $ab \neq 0$ (deci $b \neq 0$) și atunci $(-a/b)^n = 1$, ceea ce încheie demonstrația.

XI.17. *Fie* $0 < x_1 < x_2$ *și* $\alpha, \beta \in (0,1)$. *Să se arate că șirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *dat de* $x_{2n+1} = x_{2n-1}^{\alpha} x_{2n}^{1-\alpha}$, $x_{2n+2} = x_{2n}^{\beta} x_{2n-1}^{1-\beta}$, $n \geq 1$, *este convergent.*

Gheorghe Costovici, Iaşi

Soluție. Pornind de la observația că $0 < x_1 < x_3 < x_4 < x_2$, se arată prin inducție matematică faptul că $0 < x_{2n-1} < x_{2n+1} < x_{2n+2} < x_{2n}$, $\forall n \geq 1$. Atunci subşirul $(x_{2n-1})_{n\geq 1}$ este crescător și mărginit superior de x_2, deci este convergent la l_1, subşirul $(x_{2n})_{n\geq 1}$ este descrescător și mărginit inferior de x_1, deci este convergent la l_2 și în plus $l_1 \leq l_2$. Trecând la limită în relațiile de recurență, obținem că $l_1 = l_1^{\alpha} l_2^{1-\alpha}$, deci $l_1^{1-\alpha} = l_2^{1-\alpha}$, adică $l_1 = l_2$, aşadar $(x_n)_{n\geq 1}$ este un şir convergent.

XI.18. *Să se demonstreze inegalitatea* $\displaystyle\sum_{k=1}^{99} e^{\arcsin(k/100)} > \frac{1999 \cdot 99}{\pi^7}$.

Lucian-Georges Lăduncă, Iaşi

Soluție. Plecând de la inegalitatea cunoscută $\sin x < x, x \in (0,1]$ și folosind monotonia funcției arcsin, rezultă că $x < \arcsin x$, $x \in (0,1)$, de unde $e^{\arcsin x} > e^x$, $x \in (0,1]$. Pe de altă parte, se arată imediat că $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$, $\forall x > 0$, deci $e^{\arcsin x} > 1 + x + \frac{x^2}{2}$, $\forall x \in (0,1)$. Facem, pe rând, $x = 1/100, 2/100, \ldots, 99/100$ și sumăm inegalitățile obținute. Se deduce că $\displaystyle\sum_{k=1}^{99} e^{\arcsin(k/100)} > 99 + \frac{1}{100}\sum_{k=1}^{99} k + \frac{1}{2 \cdot 100^2}\sum_{k=1}^{99} k^2 = \frac{99 \cdot 1999}{1200} > \frac{99 \cdot 1999}{\pi^7}$.

XI.19. *Determinați funcțiile* f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *continue în* $x_0 = 1$ *și care verifică relația:*

$$f(a^2x - a^2 + 1) - 2f(ax - a + 1) + f(x) = (a-1)^2(x-1), \ \forall x \in \mathbf{R},$$

unde a>1 este un număr real dat.

Dumitru - Dominic Bucescu, Iaşi

Soluție. Cu substituția $x - 1 = t$, ecuația funcțională dată devine:

$$f(a^2t + 1) - 2f(at + 1) + f(t) = (a-1)^2 t, \quad \forall t \in \mathbf{R} \tag{1}$$

Evident că funcția identică $1_{\mathbf{R}}$ verifică (1); fie f o altă soluție. Avem $(f - 1_{\mathbf{R}})(a^2t + 1) - 2(f - 1_{\mathbf{R}})(at + 1) + (f - 1_{\mathbf{R}})(t) = 0$, $\forall t \in \mathbf{R}$, echivalent cu $g(a^2t) - 2g(at) + g(t) = 0$ $\forall t \in \mathbf{R}$, unde funcția g: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(t) = (f - 1_{\mathbf{R}})(t+1)$ este continuă în $t_0 = 0$. Definim $h: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h(t) = g(at) - g(t)$, funcție continuă în $t_0 = 0$, cu proprietățile: $h(0) = 0$, $h(at) - h(t) = 0$, $\forall t \in \mathbf{R}$. Inductiv, obținem

$$h(t)=h\left(\frac{1}{a}t\right)=h\left(\frac{1}{a^2}t\right)=\dots h\left(\frac{1}{a^n}t\right)\ ,\ \forall t\in\mathbf{R},\ \forall t\in\mathbf{N}^*$$

şi făcând $n\to\infty$, rezultă că $h(t)=\lim\limits_{n\to\infty}h\left(\frac{1}{a^n}t\right)=h\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a^n}t\right)=h(0)=0$, $\forall t\in\mathbf{R}$, deci

$g(at)-g(t)=0$, $\forall t\in\mathbf{R}$. Reluând raționamentul anterior obținem că $g(t)=g\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a^n}t\right)=$

$=h(0)=c$, deci $g=1_{\mathbf{R}}+c\ \ (c\in\mathbf{R})$. Reciproc, aceste funcții verifică evident relația (1).

XI.20. *Într-un plan dat se consideră punctele fixe A, A' şi punctul mobil P. Se notează cu P' proiecția punctului P pe mediatoarea segmentului A A' şi cu P'' simetricul lui P față de dreapta A A'. Să se afle locul geometric al punctului P ştiind că dreapta P'P'' este paralelă cu dreapta lui Euler a triunghiului PAA'.*

Paraschiva Bîrsan, Iaşi

Soluție. Fie $\{G\}=PO\cap P'P''$, unde O este mijlocul lui AA'. Din $\Delta OGP'\sim\Delta PGP''$, obținem $\frac{OG}{GP}=\frac{OP'}{PP''}=\frac{1}{2}$, deci G este centrul de greutate al $\Delta PAA'$. Cum dreapta lui Euler conține punctul G, rezultă din ipoteză că aceasta esta chiar $P'P''$. Deoarece centrul cercului circumscris Δ AA' P este intersecția dreptei lui Euler cu o mediatoare, urmează că P' este punctul din plan egal depărtat de P, A, A'. Atunci $P'P^2=P'A^2=P'O^2+OA^2$. Raportând planul la un reper ortogonal cu originea în O şi având pe AA' drept axă a absciselor, fie (x,y) coordonatele lui P. Relația precedentă conduce la $x^2-y^2=a^2$, unde $AA'=a$. Deci locul geometric al punctului P este hiperbola echilateră de semiaxe a şi având ca axe de simetrie dreptele AA' şi mediatoarea segmentului $[AA']$.

Clasa a XII-a

XII.16. *Cercetați dacă există funcții continue* $f:\mathbf{R}^*\to\mathbf{R}^*$ *pentru care*

$$F(2x+1/x)=2F(x)\cdot F(1/x),\ \forall x\in R^*,$$

unde F este o primitivă a funcției f.

Gabriel Popa, Iaşi

Soluție. Pentru început, să observăm că relația din enunț are sens, întrucât $2x+1/x\neq 0\ \ \forall x\in\mathbf{R}^*$, adică putem defini $F(2x+1/x)$. Cum F este derivabilă, derivând membru cu membru relația dată, se obține: $(2-1/x^2)f(2x+1/x)=$
$=2f(x)F(1/x)-(2/x^2)F(x)\cdot f(1/x),\forall x\in R^*$. Luând în această egalitatea $x=1\in\mathbf{R}^*$, obținem că $f(3)=0\notin \operatorname{Im} f$, deci nu există funcții f cu proprietățile cerute.

XII.17. *Dacă funcția* $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^*$ *este continuă, impară şi periodică de perioadă principală T, calculați* $I=\int_0^T f(f(x)+kx)dx,\ k\in\mathbf{Z}$.

Dumitru Gherman, Paşcani

Soluție. Cu schimbarea de variabilă $x=T-u$ obținem:

$$I=-\int_T^0 f(f(T-u)+k(T-u))du=\int_0^T f(f(-u)-ku+kT)du=\int_0^T f(-f(u)-ku)du=$$

$$=-\int_0^T f(f(u)+ku)du=-I\Rightarrow I=0\ .$$

XII.18. *Calculați* $I=\int\frac{x^{2000}}{x^{2668}+1}dx$ *şi* $J=\int\frac{x^{666}}{x^{2668}+1}dx$, $x\in(0,\infty)$.

Lucian-Georges Lăduncă, Iaşi

Soluție.

$$I+J=\int\frac{x^{2000}+x^{666}}{x^{2668}+1}dx=\int\frac{x^{666}+1/x^{668}}{x^{1334}+1/x^{1334}}dx=\frac{1}{667}\int\frac{\left(x^{667}-1/x^{667}\right)'}{\left(x^{667}-1/x^{667}\right)^2+2}dx=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{1334}\operatorname{arctg}\frac{x^{667}-1/x^{667}}{\sqrt{2}}+C\ .$$

$$I-J=...=\frac{1}{667}\int\frac{\left(x^{667}+1/x^{667}\right)'}{\left(x^{667}+1/x^{667}\right)^2-2}dx=\frac{\sqrt{2}}{2668}\ln\frac{x^{667}+1/x^{667}-\sqrt{2}}{x^{667}+1/x^{667}+\sqrt{2}}+C\ .$$

Formând un sistem din relațiile obținute, aflăm valorile lui I şi J.

XII.19. *Dacă* $T>0$ *este perioadă pentru funcția continuă* $f:[0,\infty)\to\mathbf{R}$ *şi* $g:[0,T]\to\mathbf{R}$ *este continuă, să se demonstreze relația:*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T g(x)f(nx)dx=\frac{1}{T}\left(\int_0^T f(x)dx\right)\cdot\left(\int_0^T g(x)dx\right).$$

Dan Popescu, Suceava

Soluție. A se vedea nota **D. Popescu şi F. Popovici** – *O generalizare a lemei lui Riemann* , în acest număr al revistei, p.12.

XII.20. *Fie* $(G,\cdot)$ *un grup comutativ de ordin n. Să se arate că:* $(\prod_{i=1}^{n-1}a_i)^{n-2}=$ $(\prod_{i=1}^{n-1}a_i)^{n+2}=$

$=e$, *unde* $e,a_1,a_2,\dots a_{n-1}$ *sunt elementele grupului G, e- elementul neutru.*

Cristian Frăsinaru, Iaşi

Soluție. Deoarece $|G|=n$, rezultă că $a_i^n=e,\forall i=\overline{1,n-1}$ (fie din teorema lui Lagrange, fie cf. pb. R-4, cap.III, §3 din manualul în vigoare – în cazul comutativ), deci $(\prod_{i=1}^{n-1}a_i)^n=e$ (1). Aplicația $f:G\to G$, $f(x)=x^{-1},\forall x\in G$, este injectivă şi cum G este finit, rezultă că f este bijectivă. Atunci: $\{e,a_1,...,a_{n-1}\}=G=\{e^{-1},a_1^{-1},...,a_{n-1}^{-1}\}$ şi deci are loc egalitatea $e\cdot a_1\cdot....\cdot a_{n-1}=e^{-1}\cdot a_1^{-1}\cdot...\cdot a_{n-1}^{-1}$, ceea ce implică $(\prod_{i=1}^{n-1}a_i)^2=e$ (2). Din (1) şi (2), concluzia problemei urmează imediat.

Probleme propuse [1]

Clasele primare

P.24. Aflaţi numerele a, b, c, d ştiind că verifică în acelaşi timp următoarele egalităţi: $a + 3 = b$, $b + 3 = c$, $c + 3 = d$, $a + 3 = 10$.

(*Clasa I*) **Înv. Maria Racu, Iaşi**

P.25. Un elev din clasa I, fixând un număr din şirul numerelor naturale, constată că suma numerelor din faţa lui nu este mai mică decât 55, iar suma aceasta adunată cu numărul fixat nu depăşeşte pe 66. Despre ce număr este vorba?

(*Clasa I*) **Luminiţa Popa, elevă, Iaşi**

P.26. Pe trei borcane de compot, unul de cireşe, altul de vişine şi al treilea cu amestec de cireşe şi vişine, toate etichetele au fost puse greşit. Scoţând un singur fruct dintr-un singur borcan, determinaţi conţinutul fiecăruia.

(*Clasa a II-a*) ***

P.27. Să se scrie numărul 31 folosind cele patru operaţii aritmetice şi numai cifra 3 (se cer cel puţin două soluţii).

(*Clasa a II-a*) **Andrea Balla, elevă, Braşov**

P.28. Câte pagini are o carte dacă pentru paginarea ei s-a folosit cifra 9 de 117 ori?

(*Clasa a III-a*) **Crizantema Mironeanu, elevă, Iaşi**

P.29. Ioana şi Alina au cules împreună 165 de nuci. Ioana a cules mai puţine nuci decât Alina; ea face un calcul şi observă că triplul diferenţei dintre numărul nucilor culese de ele reprezintă tocmai numărul nucilor culese de Alina. Câte nuci a cules fiecare fată?

(*Clasa a III-a*) **Înv. Maria Racu, Iaşi**

P.30. Arătaţi că dintre oricare patru numere naturale diferite, mai mici decât 1000000, se pot alege două a căror diferenţă să se împartă exact la 3.

(*Clasa a IV-a*) **Roxana Bolocan, elevă, Iaşi**

P.31. O veveriţă descoperă un alun încărcat cu fructe şi îşi face provizii pentru iarnă transportând la scorbura sa alternativ: o dată două alune, o dată trei alune. După ce transportă 47 de alune, face o pauză pentru a se odihni. Să se calculeze ce distanţă a parcurs veveriţa în total, dacă de la alun la scorbura ei este o distanţă de x hm x dam x m, unde x are ca valoare cel mai mic număr natural posibil.

(*Clasa a IV-a*) **Înv. Mihai Agrici, Iaşi**

P.32. Un părinte îşi împarte averea astfel: la primul copil 10 milioane plus o cincime din rest, la al doilea copil 20 de milioane plus o cincime din noul rest, la al treilea 30 de milioane plus o cincime din noul rest şi aşa mai departe. Să se afle suma împărţită de părinte, precum şi numărul copiilor, ştiind că toţi au moşteniri egale.

(*Clasa a IV-a*) **Mihai Gârtan, Iaşi**

Clasa aV-a

V.26. Să se determine cifrele distincte şi nenule a, b, c, d, e, f, g pentru care rezultatul înmulţirii alăturate este cel mai mare posibil:

$$\begin{array}{r} a\,0\,b\,\cdot \\ \underline{c\,0\,d} \\ e * f \\ \underline{g * *\;\;} \\ g * * * f \end{array}$$

Ioan Săcăleanu, Hârlău

V.27. Trei apicultori au tras împreună 700 kg miere de albine. Când au împărţit mierea, primul apicultor a luat jumătate, al doilea jumătate din rest, al treilea jumătate din

[1] Se primesc soluţii până la data de 15. 01. 2003.

noul rest, apoi operaţiunea se repetă până se împarte toată mierea. Să se afle câtă miere a luat fiecare.

Cătălin-Cristian Budeanu, Iaşi

V.28. Arătaţi că $N_1 = 3^{2001} + 2^{2001}$ şi $N_2 = 3^{2002} - 2^{2002}$ sunt numere divizibile cu 5.

Dorina Carapanu, Iaşi

V.29. Să se afle numerele $\overline{abc}$ pentru care $\overline{abc} = \overline{ac} \cdot b^2$.

Romanţa Ghiţă şi Ioan Ghiţă, Blaj

V.30. Dacă x_i, $i=\overline{1,500}$, sunt numere naturale nedivizibile cu 5, atunci numărul $N = 4x_1^4 + 8x_2^8 + 12x_3^{12} + ... + 2000x_{500}^{2000}$ este divizibil cu 5.

Tamara Culac, Iaşi

Clasa aVI-a

VI.26. Fie $A = 4a + 6b - c$, $B = 4a - 3b - c, C = -3a - 11b - 28c$, unde $a,b,c \in \mathbf{Z}$. Dacă $(A, B)=23$, arătaţi că $(A, B, C)=23$.

Cristiana Constanda, elevă, Iaşi

VI.27. Să se rezolve în $\mathbf{Z}$ sistemul

$$3x + 2y \leq 8; \quad x - y \leq 1; \quad 3x - 1 = 1..$$

Mihai Crăciun, Paşcani

VI.28. Să se rezolve în $\mathbf{N}$ ecuaţia

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + n(n+1) - (n+1) - (n+2) - ... - 2n = 2 + 4 + ... + 2n.$$

Dumitru - Dominic Bucescu, Iaşi

VI.29. În triunghiul ascuţitunghic ABC, bisectoarea interioară a unghiului $\hat{B}$ intersectează înălţimea din A în E. Fie $F \in (DC$ astfel încât $AE=EF$. Arătaţi că $BE \perp AF$.

Tamara Culac, Iaşi

VI.30. Pe ipotenuza *(BC)* a triunghiului dreptunghic *ABC* se consideră punctele *N* şi *M* astfel încât *BN=AB, CM=AC.* Dacă *P* şi *Q* sunt proiecţiile punctelor *M* şi *N* pe dreptele *AN*, respectiv *AM*, demonstraţi că segmentele *(MP), (NQ)* şi *(PQ)* se pot constitui în laturile unui triunghi.

Cătălin Calistru, Iaşi

Clasa a VII-a

VII.26. Determinaţi $a \in \mathbf{Q}$ ştiind că $\sqrt{a + \sqrt{2}} - \sqrt{2} \in \mathbf{Q}$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

VII.27. Determinaţi $a \in \mathbf{R}$ astfel încât sistemul

$$x_1^2 + (a+1)x_1 + \frac{a^2}{4} = x_2, \quad ... \quad , x_{n-1}^2 + (a+1)x_{n-1} + \frac{a^2}{4} = x_n, \; x_n^2 + (a+1)x_n + \frac{a^2}{4} = x_1$$

să admită numai soluţii întregi.

Cătălin Calistru, Iaşi

VII.28. Fie zece numere naturale nenule care au suma egală cu 55. Să se arate că printre ele există trei care pot fi lungimile laturilor unui triunghi.

Adrian Zanoschi, Iaşi

VII.29. Fie *ABCD* un pătrat, *O* centrul său, iar *M* şi *P* mijloacele segmentelor *(OA)*, respectiv *(CD)*. Să se arate că triunghiul BMP este dreptunghic isoscel.258

Constantin Cocea şi Dumitru Neagu, Iaşi

VII.30. Fie $ABCD$ un pătrat de latură 1 şi punctele $M\in(AD)$, $N\in(BC)$, $\{P\}=BM\cap AN$. Dacă $S_{DCNPM}=\frac{1}{2}$, demonstrați că $1<AM+BN\leq\frac{4}{3}$ şi $AM\cdot BN\leq\frac{4}{9}$.

Emil Vasile, Ploieşti

Clasa aVIII-a

VIII.26. Demonstrați că ecuația $(t^2+1)x^2+4t^2x+4t^2-t=0$ are numai două soluții în $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$.

Mihai Crăciun, Paşcani

VIII.27. Determinați $x,y\in\mathbf{Z}$ pentru care fracția $\dfrac{x+y}{x^2+xy+y^2}$ este echivalentă cu $\dfrac{5}{19}$ (în legătură cu *E: 9314** din G.M. 11-12/1987).

Gabriel Popa, Iaşi

VIII.28. Fie a,b numere naturale de parități diferite. Aflați valorile lui n pentru care $S_n=a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\ldots+ab^{n-1}+b^n$ este divizibil cu $a+b$.

Mihaela Predescu, Piteşti

VIII.29. Se consideră piramida triunghiulară regulată $VABC$ cu latura bazei a, iar muchia laterală $2a$. Fie M mijlocul lui (VA), iar N un punct pe (VB) astfel încât $VN=\dfrac{3a}{4}$. Aflați distanța de la V la planul (MNC).

Adrian Corduneanu, Iaşi

VIII.30. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare astfel încât $AB=4\sqrt{73}$, $CD=4\sqrt{29}$. Notăm cu E, F mijloacele segmentelor (AB), respectiv (CD). Să se arate că mijloacele segmentelor (AF), (BF), (CE), (DE) sunt vârfurile unui paralelogram şi să se calculeze aria acestuia ştiind că are o latură de lungime $\sqrt{194}$.

Romanța Ghiță şi Ioan Ghiță, Blaj

Clasa a IX-a

IX.26. Dacă $a\in(0,\infty)$, să se rezolve ecuația $[x]+\dfrac{a}{[x]}=\{x\}+\dfrac{a}{\{x\}}$. Discuție.

D. M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti

IX.27. Să se determine funcțiile $f, g:[0,\infty)\to[0,\infty)$, unde g este surjectivă şi aditivă şi $g(y)+g(f(x))=f(x+g(y)),\ \forall\ x,y\in[0,\infty)$.

Ioan Săcăleanu, Hârlău

IX.28. Să se determine funcțiile $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ pentru care $(\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n \text{ ori}})(x)=x+\alpha$, $\alpha\in\mathbf{R}$ fixat, iar funcția $g=f-1_{\mathbf{R}}$ este monotonă.

Mihail Bencze, Braşov

IX.29. Să se arate că în orice triunghi ABC are loc inegalitatea

$$\frac{l_a^3}{h_a}+\frac{l_b^3}{h_b}+\frac{l_c^3}{h_c}\le\frac{3R}{2r}\sqrt{p(p^3-3abc)}\,.$$

Viorel Cornea și Dan Ștefan Marinescu, Hunedoara

IX.30. În patrulaterul *ABCD* considerăm punctele *R* și *S* pe diagonala *BD*, în interioarele triunghiurilor *ABC*, respectiv *ACD*. Notăm $\{M\}=CR\cap AB$, $\{N\}=AR\cap BC$, $\{P\}=AS\cap CD$ și $\{Q\}=CS\cap AD$. Știind că $\frac{AM^2}{MB^2}+\frac{BM^2}{MC^2}+\frac{CP^2}{PD^2}+\frac{DQ^2}{QA^2}=4$, să se arate că $\frac{AM^n}{MB^n}+\frac{BM^n}{MC^n}+\frac{CP^n}{PD^n}+\frac{DQ^n}{QA^n}=4$, $\forall n\in\mathbf{N}$.

Cătălin Calistru, Iași

Clasa a X-a

X.26. Fie ecuația $x^4-S_1x^3+Sx^2+mx-m-1=0$, unde S este aria unui triunghi neechilateral ABC, iar S_1 este aria triunghiului $A_1B_1C_1$ determinat de punctele de intersecție ale bisectoarelor interioare cu cercul circumscris triunghiului ABC. Să se determine $m\in\mathbf{R}$ știind că ecuația admite un număr impar de rădăcini în $(0,1)$.

Dumitru Gherman, Pașcani

X.27. Fie $r\in[1,\infty)$, $D=\{z\in\mathbf{C};|z|\le r\}$ și $P\in\mathbf{C}[X]$, $P(X)=aX^2+bX+c$. Să se arate că dacă $P(z)\in D$, $\forall z\in D$, atunci $a,b,c\in D$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, București

X.28. Rezolvați ecuația $z^2(2^{|z|^2}-1)+z(2^{|z-1|}-1)+1=0$, $z\in\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}$.

Emil Vasile, Ploiești

X.29. Un motan scoate cu ajutorul unui pahar un număr de peștișori dintr-un acvariu. Câți peștișori trebuie să conțină acvariul astfel încât motanul să aibă matematic speranța că va scoate 5 dintre ei?

Gabriel Popa, Iași

X.30. Fie $M=\{1,2,\dots,n\}$. Să se afle numărul de k-uple $(A_1,A_2,\dots,A_k)$ de submulțimi ale lui *M* astfel încât $\bigcup_{i=1}^{k}A_i=M$ și $\mathrm{Card}\left(\bigcap_{i=1}^{k}A_i\right)=l$, $l\le n$ fixat.

Lucian-Georges Lădunca, Iași

Clasa a XI-a

XI.26. Fie $A\in M_n(\mathbf{R})$. Dacă $\mathrm{Tr}\,({}^tA\cdot A+({}^tA)^*\cdot A^*)=2n\det A$, atunci ${}^tA=A^*$.

Iuliana Georgescu și Paul Georgescu, Iași

XI.27. Fie $a\in[0,1)$ și $(x_n)_{n\ge0}$ un șir de numere reale astfel încât

$$x_n^2\le a\cdot\max\left\{x_{n-1}^2,\frac{1}{2}\left(x_n^2+x_{n-1}^2\right)\right\},\ \forall n\in\mathbf{N}^*.$$

Arătați că șirul $(x_n)_{n\ge0}$ este convergent și determinați limita sa.

Aurel Muntean, Sibiu

XI.28. Să se determine $p \in \mathbf{R}$ pentru care limita şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin termenul general $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n^p}{\sqrt{k+\sqrt{k^2-1}}}$ este finită şi nenulă.

Constantin Chirilă, Iaşi

XI.29. Să se arate că $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln \ln n}\left(\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+.....+\frac{1}{n}}-1\right)=1$.

Marian Tetiva, Bârlad

XI.30. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ o funcție discontinuă şi care are proprietatea lui Darboux. Dacă există o funcție $g:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ astfel încât $f(x+y)=g(f(x),y)$, pentru orice $x,y\in\mathbf{R}$, atunci funcția f nu are limită la ∞.

Ştefan Alexe, Piteşti

Clasa a XII-a

XII.26. Se consideră mulțimea $M=\left\{\begin{pmatrix} 1-a^2 & a^2 & -a\sqrt{2} \\ -a^2 & 1+a^2 & -a\sqrt{2} \\ a\sqrt{2} & -a\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}; a\in A\right\}$, unde $A = \mathbf{Z}$ sau $A = \mathbf{Q}$ sau $A = \mathbf{R}$. Arătați că $(M,\cdot)$ este grup; este acesta izomorf cu $(A_+^*,\cdot)$?

Gheorghe Costovici, Iaşi

XII.27. Fie $(G,\cdot)$ un grup cu $Z(G)\neq\{e\}$ şi H un subgrup netrivial al lui G. Să se demonstreze că există $x,y\in G\setminus H$, $x\neq y^{-1}$, astfel încât $xy\in H$ şi $yx\in H$. Dați exemplu de grup care nu are această proprietate.

Ovidiu Munteanu, student, Braşov

XII.28. Calculați $\int \sqrt[n]{tgx}\,dx, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, pentru $n\in\{2,3,4\}$.

Daniel Jinga, Piteşti

XII.29. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ o funcție continuă şi $t>0$. Pentru $a,b>0$, să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^t-(k-1)^t}{n^t} f\left(n^{-t}\left(k^a(k-1)^b\right)^{\frac{t}{a+b}}\right).$$

Mihail Bencze, Braşov

XII.30. Să se arate că $\int_0^1 e^{x^2}\frac{\ln(1+x)}{(1+x^2)^2}dx\in\left[\frac{\pi}{8}\ln 2,\frac{e\pi}{16}\right]$.

Cristian Moanţă, Craiova

Probleme pentru pregătirea concursurilor [1]

Nivel gimnazial

G6. Dacă un număr natural se poate scrie ca sumă de două pătrate perfecte, atunci orice putere a sa se poate scrie, de asemenea, ca sumă de două pătrate perfecte.

***

G7. Arătați că numărul $\overline{aa...a}$ (2001 cifre) nu poate fi pătrat perfect, oricare ar fi cifra a în baza 10.

***

G8. Determinați $n \in \mathbf{Z}$ pentru care $\dfrac{3n\,(18n+13)-28}{3n+1}$ este fracție reductibilă.

Dumitru- Dominic Bucescu, Iaşi

G9. Se dau trei fişicuri de monede aşezate vertical, asupra cărora putem efectua una dintre operațiile O_1: luăm cele două monede de deasupra unui fişic şi le aşezăm peste altul, sau O_2: luăm cele două monede de deasupra unui fişic şi le aşezăm câte una peste fiecare dintre celelalte două fişicuri.

a) Găsiți o condiție necesară pentru ca, după un număr de operații, toate fişicurile să conțină la fel de multe monede;

b) Arătați că această condiție nu este suficientă dacă este permisă o singură operație, însă este suficientă în cazul în care sunt permise amândouă.

Gabriel Popa, Iaşi

G10. Pentru $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, rezolvați ecuația

$$\sqrt{\frac{n+1}{n}-x_1}+\sqrt{\frac{n+1}{n}-x_2}+...+\sqrt{\frac{n+1}{n}-x_n}+\sqrt{x_1+x_2+...+x_n}=n+1 .$$

Mihai Totolici, Galați

G11. Rezolvați în $\mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$ ecuația $x^2+y^2=5445$.

Daniela Iosub, elevă, Iaşi

G12. Să se determine $n, m \in \mathbf{N}^*$ pentru care $\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+...+\left[\sqrt{n}\right]=n^m$.

Adrian Zanoschi, Iaşi

G13. Arătați ca numerele 18^n şi 2^n+18^n, $n \in \mathbf{N}$, au acelaşi număr de cifre.

Gheorghe Iurea, Iaşi

G14. Să se arate că nu există nici un triunghi dreptunghic având catetele numere raționale, iar ipotenuza egală cu 2001.

Constantin Cocea, Iaşi

G15. Să se arate că $E(x,y,z) \geq 3$, dacă

$$E(x,y,z)=\sqrt{x^2-2x\sin z-4\cos z+5}+\sqrt{y^2-2y\sin z-6\cos z+10}\,,\qquad x,y,z \in \mathbf{R}.$$

Cristiana Artenie, elevă, Iaşi

G16. Fie M un punct în interiorul triunghiului echilateral ABC astfel încât $MA^2=MB^2+MC^2-\sqrt{2}\,MB\cdot MC$; calculați măsura unghiului $B\hat{M}C$. Generalizare.

Corneliu Brădățeanu, Paşcani

G17. Fie $ABCD$ un patrulater convex ce nu are diagonalele perpendiculare, B_1 şi D_1 proiecțiile punctelor B, respectiv D pe AC, iar A_1 şi C_1 proiecțiile punctelor A, respectiv C

[1] Se primesc soluții până la data de 15.01.2003

pe BD. Să se arate că $\frac{S_{BB_1DD_1}}{S_{CC_1AA_1}} = \left(\frac{BD}{AC}\right)^2$ şi $S_{ABCD}^2 \cdot \cos^2(BD, AC) = S_{BB_1DD_1} \cdot S_{CC_1AA_1}$.

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

G18. Fie ABC un triunghi cu $m(\hat{A}) \leq 90°$. Pe latura (BC) se consideră punctele M şi N astfel încât AM şi AN să fie simetrice faţă de bisectoarea unghiului A. Cercul circumscris triunghiului AMN intersectează laturile AB şi AC în E, respectiv F. Dacă $\{I\} = BF \cap CE$ şi $\{P\} = AI \cap BC$, demonstraţi că $AP \geq \frac{BC}{2}$.

Florin Nicolaescu, Balş

G19. Fie $A_1A_2A_3$ un triunghi echilateral înscris în cercul $C(O,R)$ şi cercurile C_i $(i=1,2,3)$ de aceeaşi rază r, tangente interior cercului C în vârfurile A_i corespunzătoare. Să se arate că pentru orice $P \in C(O,R)$ are loc relaţia $t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 =$ constant, unde t_i $(i=1,2,3)$ este lungimea tangentei dusă din P la cercul C_i.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

G20. Să se arate că pentru orice alegere a 12 numere naturale consecutive nu se pot numerota muchiile unui cub astfel ca suma numerelor aflate pe trei muchii care au un vârf comun să fie aceeaşi pentru toate vârfurile cubului (nu se numerotează două muchii cu acelaşi număr). Să se arate că este posibilă numerotarea descrisă dacă se aleg convenabil 12 numere dintre oricare 13 numere naturale consecutive.

Constantin Chirilă, Iaşi

Nivel liceal

L6. Fie $x_1, x_2, \cdots x_n$, $n \in \mathbf{N} \setminus \{0,1\}$, numere reale cu proprietatea $\frac{x_1}{S-x_1} + \frac{x_2}{S-x_2} + \ldots + \frac{x_n}{S-x_n} = 1$, unde $S = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Arătaţi că $\frac{x_1^3}{S-x_1} + \frac{x_2^3}{S-x_2} + \ldots.. + \frac{x_n^3}{S-x_n} \leq -\frac{S^2}{n}$.

Răzvan Bărbulescu, elev, Craiova

L7. În triunghiul ABC, $m(\hat{A}) \geq 60°$, considerăm medianele CN, BN' şi bisectoarele BE, CE'. Notăm $\{P\} = CN \cap BE, \{Q\} = CE' \cap BN'$. Arătaţi că punctele P şi Q nu pot fi ambele pe înălţimea din A.

Ioan Săcăleanu, Hârlău

L8. Fie triunghiul ABC şi $M \in \text{Int}\, ABC$, $MA \cap C(MBC) = \{M, A_1\}$, $MB \cap C(MCA) = \{M, B_1\}$, $MC \cap C(MAB) = \{M, C_1\}$. Să se arate că $\frac{MA_1}{MA} + \frac{MB_1}{MB} + \frac{MC_1}{MC} \geq 6$.

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

L9. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic cu $a \leq b \leq c$ şi $u, v, w \in (0, \infty)$, $u \leq v \leq w$. Dacă $uGA + vGB + wGC = (u+v+w)R$, unde G este centrul de greutate al triunghiului, iar R este raza cercului circumscris, atunci triunghiul ABC este echilateral. Generalizare

Paul Georgescu şi Gabriel Popa, Iaşi

L10. a) Fie $n \in \mathbf{N}^*$, $n \geq 2$. Să se arate că există o progresie aritmetică de numere naturale care nu are nici un termen de forma x^n, $x \in \mathbf{N}$.

b) Dacă o progresie aritmetică de numere naturale conține un termen de forma x^n, $x \in \mathbf{N}$, atunci să se arate că progresia conține o infinitate de termeni de această formă.

Adrian Zanoschi, Iaşi

L11. Să se rezolve în $\mathbf{N}^*$ ecuația $2 \cdot 3^x = 3 \cdot 2^y + 174$.

Daniela Iosub, elevă, Iaşi

L12. Fie *ABCD* un patrulater convex; notăm $\{O\}=AC \cap BD$, *M* mijlocul lui (*AB*), *N* mijlocul lui (*CD*). Pentru propozițiile $P_1 : ABCD$ inscriptibil; $P_2 : OM \perp CD$; $P_3 : ON \perp AB$, să se arate că: a) $P_1 \wedge P_2 \Rightarrow P_3$; b) $P_2 \wedge P_3 \Rightarrow P_1$; c) $P_3 \wedge P_1 \Rightarrow P_2$ (în legătură cu problema *C:2265* din G.M. 3⁄2000).

Viorel Cornea şi Dan Ştefan Marinescu, Hunedoara

L13. Fie $P \in \mathbf{R}[X]$, $P(X) = a_1 X^n + a_2 X^{n-1} + \ldots + a_{n-1} X + a_n$, $n \geq 2$ cu $a_1 > 0$ şi cu toate rădăcinile pozitive şi subunitare. Să se arate că $(n-1)a_1 + a_2 + (-1)^{n-1} a_n > 0$.

Gheorghe Molea, Curtea de Argeş

L14. Pentru $n \in \mathbf{N}^*$ considerăm polinomul $P_n(X) = \begin{vmatrix} X+1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 2 & X^2+2 & 2 & \ldots & 2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n & n & n & \ldots & X^n+n \end{vmatrix}$.

a) Arătați că zero este rădăcină multiplă de ordin $\dfrac{n(n-1)}{2}$ a acestui polinom;

b) Dacă *n* este par, P_n nu are rădăcini reale nenule, iar dacă *n* este impar, P_n are o singură rădăcină reală nenulă, care este simplă şi situată în intervalul $(-2,-1]$.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

L15. Fie $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ şi $(c_n)_{n \geq 1}$ un şir convergent de numere reale. Să se arate că şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $x_n = \{n\alpha + c_n\}$ nu este monoton.

Iuliana Georgescu şi Paul Georgescu, Iaşi

L16. a) Fie $a < b$ şi $M = \{\mathrm{f} : [\mathrm{a}, \mathrm{b}] \to [\mathrm{a}, \mathrm{b}];\ \ \mathrm{f\ monotonã}\}$. Arătați că există $f \in M$ cu $f(x) \neq x$, $\forall x \in [a,b]$ şi că orice asemenea funcție nu are proprietatea lui Darboux.

b)Demonstrați că $\forall f \in M$, $\exists c \in [a,b]$ astfel încât $f(c)[a+b-f(c)] = c(a+b-c)$.

Ştefan Alexe, Piteşti

L17. Fie A un număr real pozitiv şi $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ o funcție derivabilă pentru care $f(0) = 0$ şi $|f'(x)| \leq Af^n(x)$, $\forall x \in [0,\infty)$, unde n este un număr natural dat, $n \geq 1$, iar $f^n = f \circ f \ldots \circ f$. Atunci f este identic nulă.

Sorin Puşpană, Craiova

L18. Fie $A \in M_n(\mathbf{Z})$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$ astfel încât $I_n + sA$ este inversabilă şi $(I_n + sA)^{-1} \in M_n(\mathbf{Z})$ pentru orice $s \in \{1,2,\ldots 2n\}$.

a) Să se arate că $I_n + kA$ este inversabilă pentru orice $k \in \mathbf{Z}$ şi $(I_n + kA)^{-1} \in M_n(\mathbf{Z})$;

b) Dacă $A^2 = 0_n$, să se arate că $G = \{I_n + kA; k \in Z\}$ este grup în raport cu înmulțirea matricelor şi să se determine toate subgrupurile lui G.

Marian Ionescu, Piteşti

L19. Fie H un subgrup al grupului altern $(A_{2002}, \circ)$. Dacă

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 1999 & 2000 & 2001 & 2002 \\ 1 & 2 & \dots & 1999 & 2001 & 2002 & 2000 \end{pmatrix} \in H$$

şi $\sigma \circ \rho \circ \sigma^{-1} \in H$, $\forall \sigma \in A_{2002}$, să se arate că $H = A_{2002}$.

Lucian-Georges Lăduncă, Iaşi

L20. Fie $a \in \mathbf{R}$, $a > 1$. Se consideră funcția $f : [1, a] \to \mathbf{R}$ de două ori derivabilă. Să se arate că dacă funcția $g : [1, a] \to \mathbf{R}$, $g(x) = xf'(x)$ este monoton crescătoare ,atunci.

$$f\left(\sqrt{a}\right)\ln a \le \int_1^a \frac{f(t)}{t}dt .$$

Marcel Chiriță, Bucureşti

LISTA MEMBRILOR FILIALEI IAŞI a S.S.M.*

- continuare din nr. 1/2000 şi nr. 1/2001 -

68. ANDONE Elena	- Şcoala "Vasile Conta" Iaşi
69. GRIGORAŞ Julieta	- Liceul Teoretic "Vasile Alecsandri" Iaşi
70. TIMOHE Gheorghe	- Liceul Teoretic "Emil Racoviță" Iaşi
71. TRANDAFIR Ilie	- Liceul Teoretic "Emil Racoviță" Iaşi
72. BÎRSAN Paraschiva	- Liceul Teoretic "Garabet Ibrăileanu" Iaşi
73. BÎRSAN Temistocle	- Universitatea Tehnică "Gh. Asachi" Iaşi
74. BÎRSAN Mircea	- Universitatea "Al. I. Cuza" Iaşi
75. CARAPANU Dorina	- Liceul Teoretic "Garabet Ibrăileanu" Iaşi
76. MIRON Nicu	- Liceul Teoretic "Emil Racoviță" Iaşi
77. DUCA Alina Nicoleta	- Liceul de Arte "Octav Băncilă" Iaşi
78. CADIŞ Mihaela Narcisa	- Grupul Şcolar Energetic Iaşi
79. PALAGHIU Maria	- Grupul Şcolar Energetic Iaşi
80. PLĂEŞU Veronica	- Şcoala "Titu Maiorescu" Iaşi
81. COVALCIUC Margareta	- Şcoala "Titu Maiorescu" Iaşi
82. COVALCIUC Dumitru	
83. MIHALACHE Vasile	- Şcoala "Titu Maiorescu" Iaşi
84. SIMIRAD Constantin	- Colegiul Național "C. Negruzzi" Iaşi
85. SIMIRAD Cristina	- Şcoala nr. 10 Iaşi
86. PAVLIUC Cristina	- Liceul Teoretic "Al. I. Cuza" Iaşi
87. HAIVAS Mihai	- Institutul de cercetări Iaşi
88. SUSANU Gelu	- Liceul Teoretic "Gr. Moisil" Iaşi
89. GEORGESCU Iulia	- Liceul Teoretic "Gr. Moisil" Iaşi

*Lista va fi continuată în numerele următoare.

Pagina rezolvitorilor

BRAŞOV

Şcoala generală nr.5. **Clasa a V-a**. POSTEUCĂ Raluca: P(12,21), V(21-23); POSTEUCĂ Bogdan: P(12,21), V(21-23).

Liceul Teoretic "N. Titulescu". **Clasa a IX-a.** BORŞOŞ Olivia-Dana: VII.16, VIII(17, 23,24), IX.17; BOSCORNEA Ionuţ Bogdan: VII.16, VIII(17,23,24), IX.17; BURSUCANU Lucian: VII.16, VIII(17,23,24), IX.17; CENŢU Nicoleta Veronica: VII.16, VIII(17,23,24), IX.17; EDU Vladimir: VII.16, VIII(17,23,24), IX.17; GHEORGHE Liana Elena: VII.16, VIII(17,23,24), IX.17; HALIPPA Andra: VII.16, VIII(17,23,24), IX.17; LITRĂ Anatolie: VII.16, VIII(17,23,24), IX.17; MOARCĂS Liviu George: VII.16, VIII(17,23,24), IX.17; ONCIOIU Cristina: VII.16, VIII(17,23,24), IX.17; PANĂ Andreea: VII.16, VIII(17,23,24), IX.17; PASCAL Andreea: VII.16, VIII(17,23,24), IX.17; PLATON Alexandru: VII.16, VIII(17,23,24), IX.17; RĂCHITEANU Lavinia: VII.16, VIII(17,23,24), IX.17; RUSEN Adrian Nicolae: VII.16, VIII(17,23,24), IX.17; ŞOIMU Adelina: VII.16, VIII(17,23,24), IX.17; TUDOR Ioana: VII.16, VIII(17,23,24), IX.17.**Clasa a X-a.** BRAŞOVEANU Adina: VIII.24, IX.23, X(20,22-24); CHELMEA Andreea: VIII(17,24), IX.23,X(22,23); CHIŞ Cristina: VIII.24, IX.23, X(20,22-24); CURCAN Diana: VIII.24, IX.23, X(20,22-24); DINU Cristina: VIII.24, IX.23, X(20,22-24); DIŞOR Mihaela: VIII(17,24), IX.23, X(22,23); ELEKEŞ Alexandra: VIII(17,24), IX.23, X(22,23); EPURE Alexandru: VIII.24, IX.23, X(20,22-24); EZARU Lucian: VIII.24, IX.23, X(20,22-24); GAVRILĂ Ramona: VIII(17,24), IX.23, X(22,23); HOŢOLEANU Cristina: VIII.24, IX.23, X(20,22-24); JEGAN Alina: VIII(17,24), IX.23, X(22,23); LUNGU Cezar: VIII(17,24), IX.23, X(22,23); NEAGOE Lăcrămioara: VIII(17,24), IX.23, X(22,23); OANCEA Vlad: VIII.24, IX.24, X(20,22,23); OSTAFI Andrei: VIII.24, IX.23, X(20,22-24); PAHONŢU Radu: VIII(17,24), IX.23, X(22,23); PETRIŞORU Doris-Georgiana: VIII.24, IX.23, X(20,22-24); PUŞCAŞU Andreea: VIII.24, IX.23, X(20,22-24); PUŞCOIU Lucian: VIII(17,24), IX.23, X(22,23); SAVEI Ionela: VIII(17,24), IX(17,23), X(22,23); TODORUŢ Anca: VIII.24, IX.23, X(20,22-24); ŢUICĂ Tatiana: VIII(17,24), IX.23, X(22,23); VĂRĂREANU Andrei: VIII.24, IX.23, X(22-24). **Clasa a XII-a.** BÎCLEA Timea: X.24, XI(22,23,25), XII(20,24): CĂPRARU Andrei: X(20,24), XI(22,25), XII.20; CERCELEA Rareş: X.24, XI(22,25), XII(20,24); DOBOŞ Claudiu: X(22-24), XI(22,23,25), XII.24; DUMITRU Andrei: X(20,24), XI(22,23,25), XII(20,24); FERĂSTOARU Valentin: X(20,23), XI(22,23,25), XII(20,24); FORSEA Adrian: X(22-24), XI(22,23,25), XII(20,24); GHERGHE Mihai: X(20,24), XI(22,25), XII.20; IORDACHE Florin: X(20,23,24), XI(22,23,25), XII(20,24); MUŞOIU Rareş: X(23,24), XI(22,23,25), XII(20,24); NĂSTASĂ Gabriel: X(22,23), XI(22,25), XII.20; ROŞCA Silviu: X(20,24), XI(22,23,25), XII(20,24); ROTOPĂNESCU Roxana: X(20,22-24), XI.25, XII.20; ŞAGĂU Marian: X(23,24), XI(22,23,25), XII(20,24); ŢÂRU Ana-Maria: X(20,22-24), XI(22,25), XII.20.

CRAIOVA

Colegiul Naţ. "Fraţii Buzeşti". **Clasa a V-a.** TUŢESCU Anca-Ştefania:V(21-25),VI.22.

IAŞI

Şcoala nr. 3 "Alexandru Vlahuţă". **Clasa a IV-a** (înv. GALIA Gabriela). CHITIC Andreea: P(14-18,20); CIOBANU Diana Luciana: P(14-18,20); SOFICU Corina-Maria: P(14-17,19,20); VRABIE Corina-Roxana: P(14-16,19,20).

Şcoala nr. 7 "Nicolae Tonitza". **Clasa a IV-a** (înv. MELINTE Rodica). ANDRONIC

Mihaela: P(14, 16-23); DUMITRIU Alexandru: P(14, 16-19).**Clasa a IV-a** (înv. TUDOSE Elena). BOTEZ Alin: P(14-23); CHILCOŞ Claudia: P(14-23); CHIRIAC Alexandra:P(14-23); CIUBOTARIU Remus: P(14-18,21); IONESCU Mihai-Bogdan: P(14-21,23); ZORICI Iulian: P(14-18,20-23). **Clasa a IV-a** (înv. PANAINTE Adriana). CURCĂ Bogdan P(14-18,21); ONUȚĂ Adina: P(14,15,17,19-21); SÂRGHE Nicoleta: P(14,15,17, 19-21); TRUFANDA Alexandru: P(14-17,20,21).

Şcoala nr. 11 "Otilia Cazimir". **Clasa a III-a**. (înv. PÂRÂIALĂ D-tru). TIBA Marius: P(14-22).

Şcoala nr.17 "Ion Creangă" **Clasa a VI-a** BĂDIȚĂ Vasilică Valentin: V(16, 19-21, 23),VI.17; CASIAN Manuela: P(9,12), V(16,18) VI.17; IFTODE Andreea P(9,12), V(16,18,20,21); LUPU Andreea-Mădălina: P(9,12), V(20,21), VI.17; SOFRONEA Gabriela: P.9, V(20,21), VI(16,17); TANANA Irina-Eliza: P(9,12), V(16,19,21) VI.17.

Şcoala nr. 22 "B.P. Haşdeu" **Clasa a IV-a** (înv. TÂRZIORU Iuliana). BARAN Ligia-Maria P(14-23); BĂLĂUȚA Bogdan-Alexandru: P(14-23); CHIHAIA Mihai: P(14-18, 20-23); MACOVEI Smaranda-Teona: P(14-23); PRODAN Andreea: P(14-23); RAIȚĂ Bogdan: P(14-23); SILION Cătălina: P(14-23); SPÂNU Dragoş: P(14-23).

Şcoala nr. 23 "Titu Maiorescu" .**Clasa a II-a** (înv. CHIRILĂ Beatrice). TUDORACHE Alexandru-Gabriel: P(7-11, 14-18, 20,21).

Şcoala nr. 43 "Dimitrie Sturdza". **Clasa a IV-a** (înv. OBREJA Rodica). OPRICĂ Adelina: P(14,16,17,21,22)

Colegiul Național "C. Negruzzi". **Clasa a IX-a**. ARTENIE Cristiana: VII(16,22), VIII(17, 18, 20-24), IX(16,18,22,24).

Liceul Teoretic "Gr. Moisil" **Clasa a VII-a**. COSTIN Ciprian : V(21-23, 25), VI(21-23,25), VII(22,23,25), G(2,3). **Clasa a XII-a**. ALECSANDRESCU Ioana: XI(21-24), XII.24.

Liceul Teoretic "Garabet Ibrăileanu" **Clasa a V-a .** BABIUC Sanda: P(9,12,13,21), V(16,20,21,23); BUDEANU Ştefana: P(9,13,22), V(16,20,21); FUIOREA Bogdan: P(9,12,21-23), V.16; GAVRILESCU Ioana: P(10,19,20,22), V.16; TURCHINĂ Ariadna: P(9,12,13,21-23), V(20,21); UNGUREANU Dragoş: P(9,10,13,21,22), V(20,21).

Clasa a VI-a. PETRUŞCĂ Magda: P(9,12,13), V(19,21). **Clasa a VII-a**. CHIRVASE Ariadna : V.23, VI(22,23,25), VII.22; JUVERDEANU George: V(21,23), VI(22,23,25), VII.23; PRUTEANU Irina: : V.23, VI(22,25), VII(22,23); STANCIU Filip: V(16, 20, 21, 23), VI(18,19,22).

Liceul Teoretic "M. Eminescu". **Clasa a VII-a**. AVRAM Mircea: V(21-23,25), VI(23,25), VII.22; CIUCANU Radu: V(21-23,25), VI.25; DĂNĂILĂ MIHAI: V(21-23), VI(22,23,25), VIII.23; EŞANU Ruxandra: V(16,21,23,25), VI.19, VIII.23; GRAMSCHI Raluca: V(21,23,25), VI(19,25), VIII.23; TOFAN Andrei: V(21-23,25), VI(23,25); TUDOSE Ştefan: V(16,20,21,23,25), VI.25; TURLIUC Călin Rareş: V(22-25), VI(21,25); **Clasa a VIII-a**. BUZDUGA Alexandru: VI(21,25), VIII(21,24,25).

Redacția revistei "**Recreații matematice**" acordă câte un premiu în cărți elevilor:

COSTIN Ciprian (Lic. Teoretic "Gr. Moisil"): 1/2001(8pb), 2/2001(8pb), 1/2002(12pb).
CIUCANU Radu (Lic. "M. Eminescu"): 1/2001(8pb), 2/2001(6pb), 1/2002(5pb).
DĂNĂILĂ Mihai (Lic. "M. Eminescu"): 1/2001(5pb), 2/2001(7pb), 1/2002(7pb).
TOFAN Andrei (Lic. "M. Eminescu"): 1/2001(6pb), 2/2001(8pb), 1/2002(6pb).
TURLIUC Călin Rareş (Lic. "M. Eminescu"): 1/2001(6pb), 2/2001(6pb), 1/2002(6pb).

Revista **RECREAȚII MATEMATICE** apare de *două ori pe an* (la datele de 1 martie şi 1 septembrie) şi se adresează elevilor, profesorilor, studenților şi tuturor celor pasionați de matematicile elementare.

În atenția tuturor colaboratorilor

Materialele trimise redacției spre publicare (note şi articole, chestiuni de metodică, probleme propuse etc.) trebuie prezentate îngrijit, clar şi concis; ele trebuie să prezinte interes pentru un cerc cât mai larg de cititori. Se recomandă ca textele să nu depăşească patru pagini. Evident, **ele trebuie să fie originale şi să nu fi apărut sau să fi fost trimise spre publicare altor reviste.**

Problemele originale destinate rubricii **Probleme propuse** vor fi redactate pe foi separate câte una pe fiecare foaie, cu enunț şi demonstrație/rezolvare, fiind însoțite de numele autorului, şcoala şi localitatea unde lucrează/învață.

Redacția revistei va decide asupra oportunității publicării materialelor primite.

În atenția elevilor

Numele elevilor care vor trimite redacției soluții corecte la exercițiile şi problemele din rubrica **Probleme propuse** vor fi menționate în **Pagina rezolvitorilor**. Elevii vor ține seama de următoarele reguli:

1. Pot trimite soluții la **minimum cinci probleme propuse în numărul prezent şi cel anterior al revistei***;* pe o foaie va fi redactată soluția unei singure probleme.

2. Elevii din clasele **VI-XII** au dreptul să trimită soluții la problemele propuse pentru clasa lor, pentru orice clasă mai mare, din două clase mai mici şi imediat anterioare. Elevii din clasa a **V**-a pot trimite soluții la problemele propuse pentru clasela a IV-a, a V-a şi orice clasă mai mare, iar elevii claselor **I-IV** pot trimite soluții la problemele propuse pentru oricare din clasele primare şi orice clasă mai mare. Orice elev poate trimite soluții la problemele de concurs (de tip G şi L).

3. Vor fi menționate următoarele date personale: numele şi prenumele, clasa, şcoala şi localitatea.

4. Plicul cu probleme rezolvate se va trimite prin poştă (sau va fi adus direct) la adresa Redacției:

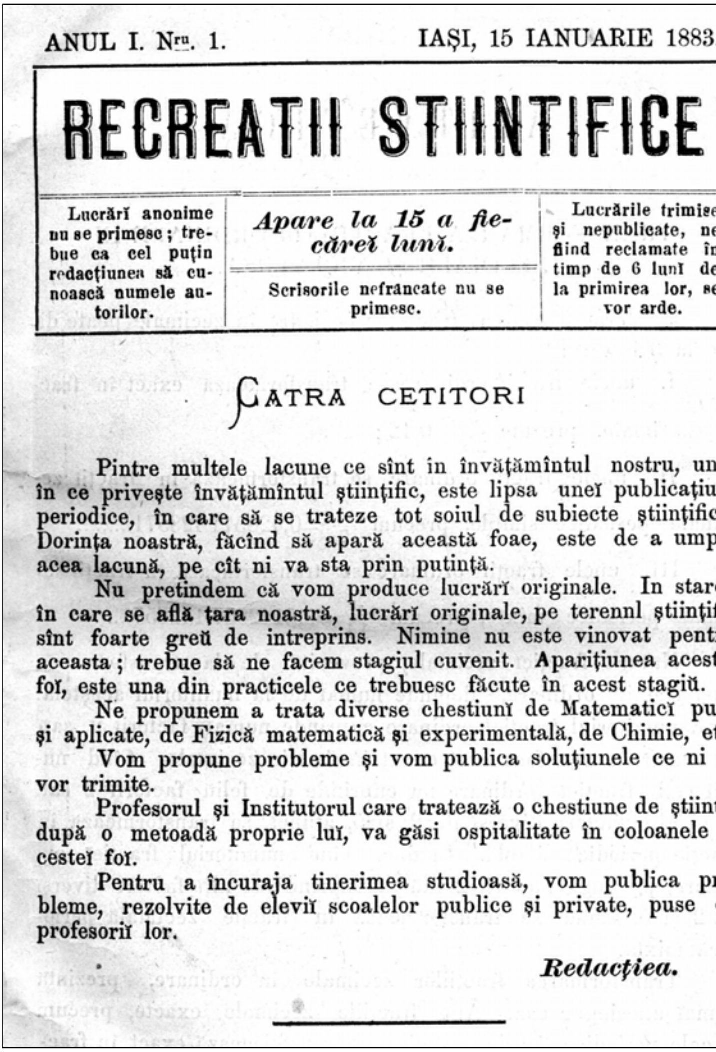
Prof. dr. Temistocle Bîrsan
Catedra de Matematică
Universitatea Tehnică "Gh. Asachi" Iaşi
Bulevardul Carol I nr. 11, 6600, Iaşi
(pentru "Recreații Matematice")
E-mail: tbi@math.tuiasi.ro

CUPRINS

Recreaţii ştiinţifice - „cea întâi brazdă”

La 15 ianuarie 1883 apare la Iaşi primul număr al revistei "Recreaţii ştiin
ce va dura timp de şase ani, cu câte un număr pe lună.

Obiectivele urmărite, racordate la cerinţele din acele timpuri ale învăţă
"de o înţelepciune ce face cinste fondatorilor revistei" **[6]** şi apar expus
claritate în *"Cătră cetitori"* - cuvâtul de început din 15 ianuarie 1883:



ANUL I. Nru. 1. IAŞI, 15 IANUARIE 1883

RECREATII STIINTIFICE

Lucrărĭ anonime nu se primesc ; trebue ca cel puţin redacţiunea să cunoască numele autorilor.	*Apare la 15 a fie-căreĭ lunĭ.* Scrisorile nefrancate nu se primesc.	Lucrările trimise şi nepublicate, ne fiind reclamate în timp de 6 lunĭ de la primirea lor, se vor arde.

CATRA CETITORI

Pintre multele lacune ce sînt in învăţămîntul nostru, un
în ce priveşte învăţămîntul ştiinţific, este lipsa uneĭ publicaţiu
periodice, în care să se trateze tot soiul de subiecte ştiinţific
Dorinţa noastră, făcînd să apară această foae, este de a ump
acea lacună, pe cît ni va sta prin putinţă.

Nu pretindem că vom produce lucrărĭ originale. In star
în care se află ţara noastră, lucrărĭ originale, pe terennl ştiinţi
sînt foarte greŭ de intreprins. Nimine nu este vinovat pent
aceasta ; trebue să ne facem stagiul cuvenit. Apariţiunea acest
foĭ, este una din practicele ce trebuesc făcute în acest stagiŭ.

Ne propunem a trata diverse chestiunĭ de Matematicĭ pu
şi aplicate, de Fizică matematică şi experimentală, de Chimie, e

Vom propune probleme şi vom publica soluţiunele ce ni
vor trimite.

Profesorul şi Institutorul care tratează o chestiune de ştiin
după o metoadă proprie luĭ, va găsi ospitalitate în coloanele
ceste foĭ.

Pentru a încuraja tinerimea studioasă, vom publica pr
bleme, rezolvite de eleviĭ scoalelor publice şi private, puse
profesoriĭ lor.

Redacţiea.

Apariţia revistei "Recreaţii ştiinţifice" este strâns legată de condiţiile is
epocă. Unirea Principatelor şi Proclamarea Independenţei României, câ

structurale din timpul domniei lui Al. I. Cuza și apoi a regelui Carol I a
politic și legislativ al formării statului român modern și afirmării acestuia.
românesc, întocmai ca și societatea românească în general, a trecut prin m
frământări: înființarea celor două universități din Iași și București, reforma î
din 1964, multele regulamente menite să organizeze rețeaua de școli și
programele acestora etc.

Pe de altă parte, licențiații români ai universităților apusene (din Fra
sau Italia) odată reveniți în țară realizau imediat faptul că, în climatul ex
fi putut întreprinde cercetări originale proprii. Acestora le revenea obligați
importantă pentru acel moment de a contribui la edificarea învățământu
de a ține lecții și a elabora manuale și cursuri în limba română, de a pre
viitoare ce urma să facă pasul către creația științifică originală.

Fondatorii reviste sunt: *N. Culianu, C. Climescu* și *I. Melik* - profesori
de științe din Iași, *G. I. Lucescu* și *V. Paladi* - profesori de matematică la L
din Iași, *G. I. Roșiu* și *I. D. Rallet* - profesori de matematică la Școala Mi
G. Zarifopol - profesor de fizică și chimie la Școala Militară din Iași, *I. V. F*
de matematică la Școala Normală "Vasile Lupu" din Iași și *I. M. Dospinesc*
matematică la Gimnaziul "Ștefan cel Mare" din Iași.

Este *prima revistă din țară cu profil științific*, materialele publicate acop
ramuri ale științei: matematică, fizică, chimie, mineralogie, geografie, as
mografie etc. Se adresează cu precădere elevilor din școlile secundare,
profesorilor.

Majoritatea fondatorilor erau licențiați în matematică sau profesau acea
se explică astfel faptul că *"Recreațiile științifice" au un conținut predomina*
multe numere de revistă au un conținut exclusiv matematic.

Un număr are în medie 25 pagini; doar în anii II, V și VI numerele 7 și 8
au fost tipărite împreună, ca o singură revistă de 40 pagini. Structura c
număr este: articole, probleme rezolvate și probleme propuse. Date fiin
care a apărut, materialele publicate în paginile revistei, articole și problem
ate sau erau prelucrări din tratatele și revistele de circulație din acea vre
de matematică vizează diversele ei ramuri: aritmetică, algebră, geome
analitică, descriptivă și diferențială), mecanică teoretică și astronomie, ma
arială, istoria matematicii, problemele învățământului matematic. Problem
trezit un viu interes printre elevii din Iași și din toată țara; plecați la studii
unii dintre foștii colaboratori ai revistei au continuat să trimită soluții. Pen
elevilor, redacția publică soluțiile corecte primite și menționează numele tut
au dat-o. Sunt tipărite liste de rezolvitori în ordinea numărului de problem
"Către cetitori" din nr. 1/1885, redacția revistei apreciază că rezultatele ob
doi ani sunt pozitive: *"[...] rezultatele la care am ajuns sînt în destul de*
O mișcare în această direcție, între elevii eminenți din scoalele noastre,
s-a determinat. Un număr însemnat de tineri ne trimet regulat soluții, dir

destul de ingenioase".

Nu ne propunem să facem o analiză a conţinutului revistei (v. **[6]**,**[**
selecta doar câteva aspecte ce considerăm că sunt semnificative şi interes

C. Climescu, sufletul revistei "Recreaţii ştiinţifice", a publicat multe
domenii diverse. În ciclul "Câteva curbe celebre şi importante", încep
încheiat în vol.III, expune principalele curbe plane clasice: cisoida lui Dio
cicloide, spirale etc.

I. Melik publică în nr. 3/1883 articolul "Despre scrierea numerelor cu li

G. I. Roşiu traduce (după o ediţie italiană) *prima carte a "Elementelor*
publică în vol.II şi III ale revistei. Precizăm că traducerea completă în lin
"Elementelor" a fost făcută mult mai târziu de *Victor Marian* şi publicat
Gazetei Matematice în trei volume, 1939-1941.

I. D. Rallet contribuie cu articole variate: maxime şi minime geometri
ale patrulaterului circumscriptibil, formulele fundamentale ale trigonometr
terminanţi, echilibrul unui punct material etc.

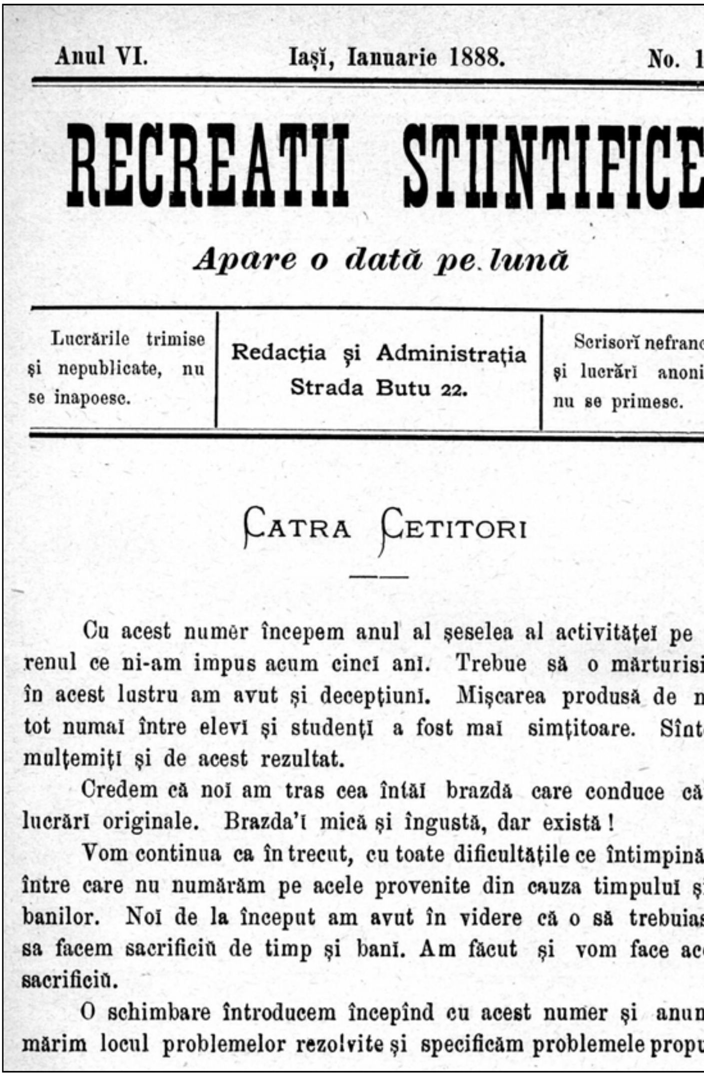
G. I. Lucescu publică printre altele un studiu amplu şi documentat des
timpului şi calendar, iar *I. V. Praja* abordează chestiuni de aritmetică (proble
ş. a.), geometrie (transversale, poli şi polare ş.a.), analiză etc.

Revista "Recreaţii ştiinţifice" a reuşit să atragă colaborarea unor emi
din acele timpuri: *Miltiade Tzony* - Facultatea de ştiinţe din Iaşi, a publica
probleme", ce este prima culegere de probleme de mecanică teoretică din
leme); *P. Tanco* - profesor din Năsăud, cu chestiuni de filozofia matematicii
Constantin Gogu - Universitatea din Bucureşti, cu câteva scrisori despre c
Solomon - inginer, cu chestiuni de istoria matematicii din antichitate; pro
V. Buţureanu (mineralogie) şi *August Scriban* (geografie) ş.a.

Nu puţini sunt aceia care, în drum către o strălucită carieră, au fos
lor activi rezolvitori ai "Recreaţiilor ştiinţifice": *Ermil Pangrati* - profesor
descriptivă şi rector al Universităţii din Bucureşti, *Anastasie Obreja* - crea
chimie organică din Iaşi, *Vasile Cristescu* - unul din cei patru "stâlpi" ai G
atice, *Dimitrie Pompeiu* - ilustrul matematician român, *Petre Culianu*, *Gr*
şi mulţi alţii.

Rezolvitorii erau mai ales elevi ai liceelor şi şcolilor militare sau studen
din toate colţurile ţării (de atunci!): Dorohoi, Bacău, Bârlad, Focşani, Bucu
Apar şi rezolvitori cu profesii mai depărtate de matematică: un preot din
profesor de limba franceză din Bacău, o persoană ce semnează cu "Vârfu

Cu o muncă susţinută şi mari sacrificii materiale, redactorii au scos
asigurat revistei un nivel de calitate înalt. Ei sunt pe deplin conştienţi
obţinute şi de faptul că prin munca lor au apropiat momentul apariţiei lucr
Acest lucru rezultă fără echivoc din cuvântul redacţiei *"Către cetitori"* la în
al VI-lea:


Anul VI. Iași, Ianuarie 1888. No. 1

RECREATII STIINTIFICE

Apare o dată pe lună

Lucrările trimise și nepublicate, nu se inapoesc.	Redacția și Administrația Strada Butu 22.	Scrisori nefranc și lucrări anoni nu se primesc.

CATRA CETITORI

Cu acest numer începem anul al șeselea al activităței pe renul ce ni-am impus acum cinci ani. Trebue să o mărturisi în acest lustru am avut și decepțiuni. Mișcarea produsă de n tot numai între elevi și studenți a fost mai simțitoare. Sînt mulțemiți și de acest rezultat.

Credem că noi am tras cea întâi brazdă care conduce că lucrări originale. Brazda'i mică și îngustă, dar există!

Vom continua ca în trecut, cu toate dificultățile ce întimpină între care nu numărăm pe acele provenite din cauza timpului ș banilor. Noi de la început am avut în videre că o să trebuias sa facem sacrificiŭ de timp și bani. Am făcut și vom face ac sacrificiŭ.

O schimbare întroducem începînd cu acest numer și anun mărim locul problemelor rezolvite și specificăm problemele propu

Greutățile materiale fac ca odată cu publicarea numărului din decembr exact după șase ani, revista să înceteze să apară. Se cuvine să menționăm principal al "Recreațiilor științifice" a fost *C. Climescu*. Pe coperta reviste an este scris: *"Redacția și Administrația la Dl. C. Climescu, Profesor la Științe, Strada Butu 22"*. Aceeași adresă apare și în casetele ce urmează număr din ultimul an de apariție (cum se poate vedea și în reproducerea

Foști rezolvitori ai "Recreațiilor științifice" își vor aduce aminte cu re
aceasta. Peste timp, mari matematicieni români vor avea cuvinte de ap
curajul, sacrificiile și fapta celor care *"au tras cea întăi brazdă"*.

Peste nici șapte ani de la dispariția lor, "Recreațiile științifice" își afl
în *"Gazeta matematică"*, ai cărei fondatori și colaboratori au știut și au re
imense greutăți și obstacole și să facă din visul cercetării originale o rea
și-a serbat un veac de existență neîntreruptă și este mereu tânără.

Prof. dr. Temistocle B

„Recreații științifice" - prezență în conștiința posterității

Rezolvirea problemelor este unul din cele mai bune stimulente pentr
cineva către studiul matematicilor. Experiența noastră personală ne p
acesta. Mai mulți dintre noi datoresc acest gust revistei ‹‹Recreații Ști
apărut în timp de 6 ani la Iași și pe care noi încercăm a o continua.

Redacția ["Gazetei matema

Pe când la București se petreceau aceste prefaceri de societăți științific
științe din Iași se hotărăsc să scoată o revistă științifică, și anume ‹‹Recrea
care a apărut cu mari greutăți șase ani, de la 1883-1888. Revista consacra
parte matematicilor și propunea probleme pentru folosul liceenilor. Ace
contribuit mult la răspîndirea gustului pentru studiul matematicilor la noi

Ion Ion

Cea dintâi încercare de a ieși din acest impas, de a rupe inerția, de a
curent de preocupare științifică și de a crea astfel un început de atmosferă
voltării științei matematice, a fost făcută la Iași prin publicarea ‹‹Recreațiil

Gheorghe Ți

Omagiu pios primilor pionieri ai studiilor matematice la noi; omagiu pi
reviste matematice ‹‹Recreații Științifice›› și vrednicilor ei fondatori ș
omagiu Gazetei Matematice și acelor care au întemeiat-o și susținut-o pr
lor până azi.

Gr. G. Stratile

"Recreațiile științifice" au apărut în 1883 vizând obiective de o întele
cinste fondatorilor revistei. [...] Discret și oarecum neașteptat cum a apăru
decembrie 1888, prima revistă științifică românească menită să deschidă c
originale.

Ilie Popa [

Pe lângă învăţământul matematic secundar şi superior, o contribuţie
dezvoltarea ştiinţei matematice la noi în ţară şi a interesului faţa de a
au adus-o, în perioada aceasta de pregătire, cele două reviste care au
şi Bucureşti: "Recreaţii ştiinţifice", care a durat din 1883 până în 188
matematică", înfiinţată la 15 septembrie 1895.

George Şt. Ando

În ţara noastră, publicaţiile periodice destinate propagării gustului şi co
tru propunerea şi rezolvarea de probleme matematice aniversează un seco
În 1883 a apărut la Iaşi, prin dragostea şi devotamentul unui grup de
seamă, profesori universitari sau secundari, ingineri, fizicieni, medici, rev
Ştiinţifice", căreia Universitatea din Iaşi şi Societatea de Ştiinţe Matema
România i-au aniversat centenarul apariţiei la sfârşitul anului 1983.

Nicolae Teodo

Revista şi-a întrerupt activitatea pe neaşteptate. Ea a reuşit să tre
interes pentru matematici în rândul elevilor şi studenţiolor. Mare parte din
formaţi de "Recreaţii ştiinţifice" au devenit profesori şi ingineri cu o serioa
matematicile elementare.

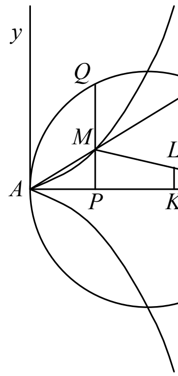
Nicolae Mihăilea

Bibliografie

1. **Recreaţii ştiinţifice (1883 - 1888)** - colecţia revistei.
2. ******* - *Introducere*, Gazeta matematică, an.I, nr.1, septembrie 1895
este autorul acestei "Introduceri" - sarcină încredinţată de redacţia G.M.)
3. **I. Ionescu** - *Constituirea, administrarea şi redactarea ‹ ‹Gazetei Matem
apărut în volumul Gazeta Matematică, 1895-1935. Istoric - învăţăminte (v*
Biblioteca ‹ ‹Gazetei Matematice››, vol. XI, Bucureşti, 1935.
4. **Gh. Ţiţeica** - *Rolul ‹‹Gazetei Matematice›› în dezvoltarea ştiinţei matem
nia*, ibidem.
5. *Sărbătorirea celor 40 ani ai "Gazetei matematice". Cuvântarea D-lui profeso
lescu*, G.M. XLI (1936), 361-374.
6. **I. Popa** - *‹‹Recreaţii ştiinţifice›› - precursoare a ‹ ‹Gazetei Matematice››*
A, 9/1955, 492-493.
7. **I. Popa** - *Dezvoltarea matematicii*, apărut în *Contribuţii la istoria dezvoltă
din Iaşi*, vol. II, Bucureşti, 1960.
8. **G. Şt. Andonie** - *Istoria matematicii în România*, vol.I, Ed. Ştiinţifică, B
9. **N. Teodorescu ş.a.** - *Probleme din Gazeta Matematică*, Ed. Tehnică, B
(citat din *Prefaţă*, semnată de acad. N. Teodorescu, preşedintele S.S.M.R
10. **Gh. Bantaş** - *O pagină din istoria matematicii româneşti: centenarul rev
ştiinţifice"*, Probleme de istoria şi filozofia ştiinţei, vol. X, Acad. R.S.R., fi
11. **N. Mihăileanu** - *Revistele de matematici elementare din România (până
Gil, Zalău, 1995.

Câteva curbe celebre şi importante

1. Cisoida lui Diocles[1]



Se dă un cerc, pe care se ia un punct A; fie AB diametrul ce trece prin acest punct şi TT' tangenta în B; prin A se duce o secantă care taie cercul în H şi tangenta în G; pe secantă se ia, cu începere de la punctul A, o lungime AM egală cu HG - porţiunea de secantă dintre cerc şi tangentă - ; locul geometric al punctelor M este Cisoida lui Diocles.

Să însemnăm prin R raza cercului; originea de coordonate să fie A; direcţia diametrului AB să fie luată ca axă de x şi perpendiculara în A pe acest diametru să fie axa de y.

Fie M un punct al Cisoidei, ale cărui coordonate sînt $x = AP$ şi $y = MP$. Prin ipoteză avem $AM = HG$, de unde rezultă $AP = DB$. În triunghiul dreptunghiu AHB, avem

$$HD^2 = AD \cdot DB = x\,(2R - x)\,;$$

apoi triunghiurile asemenea AMP şi AHD dau

$$\frac{HD}{MP} = \frac{AD}{AP} \quad \text{sau} \quad \frac{HD}{y} = \frac{2R - x}{x}.$$

Eliminând HD între relaţiunile (1) şi (2), avem

$$(2R - x)\,y^2 = x^3 \quad \text{sau} \quad x^3 + xy - 2Ry^2 = 0.$$

Aceasta este ecvaţia **Cisoidei**.

Curba este simetrică în privirea axei de x, căci la fiecare valoare dat
punde pentru y două valori egale şi de semne contrare. Ea se compune di
indefinite, egale între ele, situate de o parte şi de alta a axei de x.

Originea A este un punct de **înapoiere de specia întăia**. În adevăr, dac
la teoria punctelor **multiple**, ştim că coordonatele unui asemenea punct, sa
curbei şi întăilor derivate parţiale; avem

$$f\,(x,y) = x^3 + xy^2 - 2Ry^2, \quad f'_x = 3x^2 + y^2, \quad f'_y = 2xy - 4$$

coordonatele punctului A sînt $x = 0$ şi $y = 0$, care substituite în aceste re

$$f\,(0,0) = 0, \quad f'_0 = 0, \quad f'_0 = 0,$$

[1] Articol preluat din "Recreaţii Ştiinţifice", an II (1884), nr. 1, 19-23.
Ciclul "Câteva curbe celebre şi importante" cuprinde 9 lecţii prezente în numerele c
care sunt expuse principalele curbe plane: Cisoida lui Diocles (care deschide ciclul), conc
de, melcul lui Pascal , strofoida, ovalele lui Cassini, cicloide, epicicloide, conice şi spira
S-au păstrat *termenii de matematică* din textul original, dar s-au făcut modificări în
şi ortografiei (astfeliŭ - astfel, valorĭ - valori, daŭ - dau, adecă - adică, s'a - s-a etc).

ceea ce însemnează că originea este un punct **duplu**; apoi dacă formăm e
telor în acest punct găsim $y^2 = 0$; adică tangentele în acest punct se co
de x. Așadar, originea este un punct duplu de **înapoiere** și de **întâia spe**
este de o parte și de alta a tangentei.

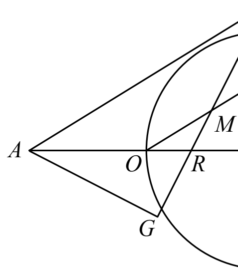
Cisoida admite o asimptotă paralelă cu axa de y, căci știm că aceste
capătă egalând cu zero coeficienții celei mai înalte puteri a lui y, ceea ce d
de unde $x = 2R$, adică tangenta la cercul TT' este asimptotă Cisoidei.

Asimptote neparalele cu axele nu sînt.

Cercul dat este numit cercul director al Cisoidei.

Newton a dat Cisoidei următoarea descripție mecanică.

Fie un punct fix A și o dreaptă fixă TT'; din A se duce perpendiculara AD pe dreapta fixă; apoi se imaginează un unghi drept care se mișcă astfel că una din laturile lui trece prin punctul A, iar extremitatea celeilalte laturi, - luată egală cu AD -, se razimă pe dreapta fixă; dacă G este vârful unghiului drept și H extremitatea laturii a doua, punctul M din mijlocul laturii GH descrie Cisoida.



Să luăm mijlocul O al dreptei AD și din punctul D ca centru cu DO ca rază să descriem un cerc; să unim AH, apoi
mijlocul laturii GH.

Vom demonstra mai întâi că dreptele AH și OM sînt paralele între e
triunghiurile dreptunghe AGH și ADH sînt egale căci $AH = AH$, apo
conform enunciului. De aici rezultă $AG = DH$ și fiindcă unghiurile ARG
egale ca opuse la vârf, apoi rezultă că și triunghiurile dreptunghe AGR
egale între ele.

Din egalitatea acestor două din urmă triunghiuri rezultă $GR = RD$ și
$= GM$, apoi mai rezultă $OR = RM$ și $AO = HM$ și prin urmare drepte
sînt paralele.

Fiindcă punctul O este mijlocul dreptei AO, din paralelismul acestor dr
că OM taie pe HD într-un punct care-i la mijlocul dreptei HD.

Să arătăm acum că triunghiurile HIM și DIM sînt egale; în adevăr, a
$HM = DO = DN$; apoi $ungh.NID = ungh.HIM$; pe urmă succesiv
$= ungh.MOR = ungh.HAD = ungh.AHG = ungh.HMI$, așadar
fiindcă $OI = IK$, apoi rezultă $IM = IN$ și prin urmare $OM = NK$.

Așadar, în mișcarea unghiului drept AGH, punctul M descrie o Cisoid
director este acel descris din D ca centru cu DO ca rază.

Cisoida a fost imaginată de **Diocles** (500 a. Ch.) pentru a rezolvi **prob**
medii proporționale[1]. Iată cum se rezolvește această problemă.

[1] Sublinierele din această frază nu apar şi în textul original.

Ecvația (3) fiind rezolvită în privirea lui y dă:

$$y=\frac{x^2}{\sqrt{x\,(2R-x)}}.$$

Luăm semnul $+$ înaintea radicalului fiindcă considerăm ramura de deasupr

Să însămnăm prin z ordonata punctului de pe cerc al căriu abscisă est

$$z^2=x\,(2R-x)\,.$$

Comparând ecvațiile (4) și (5) avem raporturile

$$\frac{2R-x}{z}=\frac{z}{x}=\frac{x}{y}.$$

Fie a și b liniile între care se cere a se afla două medii proporționale.

Să înmulțim terminii raporturilor (6) prin $\frac{b}{y}$, ceea ce dă

$$\frac{\frac{(2R-x)\,b}{y}}{\frac{bz}{y}}=\frac{\frac{bz}{y}}{\frac{bx}{y}}=\frac{\frac{bx}{y}}{b}.$$

Să luăm pe Cisoidă un punct astfel ca să avem

$$\frac{(2R-x)\,b}{y}=a,$$

ceea ce revine a considera punctul comun Cisoidei, - reprezentată prin ec dreptei - reprezentată prin ecvația (8) -; atunci raporturile (7) se pot scrie

$$\frac{a}{\frac{bz}{y}}=\frac{\frac{bz}{y}}{\frac{bx}{y}}=\frac{\frac{bx}{y}}{b}.$$

Să punem $\frac{bz}{y}=\alpha$ și $\frac{bx}{y}=\beta$, vom avea $\frac{a}{\alpha}=\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{b}$. Aceste trei raportu ecvații, din care vom scoate pe α și β. Astfel cantitățile $\frac{bz}{y}$ și $\frac{bx}{y}$ vor f aceste vor fi cele două medii proporționale între a și b.

Dacă Cisoida este construită, pentru a găsi punctul de pe ea cu ajutoru rezolvi problema, trebuie să construim dreapta (8), care este o dreaptă punctul B, pentru aceea luăm o lungime $BK=a$, rădicăm perpendicu dreapta BL este dreapta (8). Punctul M în care această dreaptă tai punctul căutat, și avem

$$AP=x,\quad MP=y,\quad QP=z;$$

prin urmare cele două medii proporționale între a și b vor fi $\quad b\cdot\frac{QP}{MP}$ și b

(Va urma)

C. CLIMI

Scrierea numerelor cu litere chirilice[2]

Toate popoarele, afară de vechii chinezi și de un trib puțin cunoscut de Aristot[3] au adoptat sistema de numerație zecimală, în care numerele sîn perioade de câte zece unități. *Baza*, în această sistemă de numerație, es zece unități de un ordin oarecare trebuiesc ca să formeze o unitate de o mai înalt.

Scrierea oricărui numer se face astăzi numai cu zece semne, numite *ci* nouă reprezintă pe cele dintâi nouă numere întregi, și care sînt :

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
unu,	doi,	trei,	patru	cinci,	șese,	șepte,	opt,	no

Semnul al zecelea este 0 sau *zero*, prin care se arată lipsa de unită oarecare.

S-a admis că orice cifră pusă la stânga unei alte cifre reprezintă unit mai mari decât aceasta din urmă, adică unități de ordinul imediat superior dând acestor semne, diferite locuri se poate exprima, într-un chip nu se p orice numer, fie oricât de mare numerul unităților din care el se compune.

Semnele acestea le-am împrumutat, pe la mijlocul secolului al X, de l dânșii pare că le-au luat de la indieni, adevărații întemeietori ai științei câ

În vechime, era obeciul de a se reprezenta numerele cu litere.

Grecii însemnau numerele cu literele din alfabetul lor; diferite ordine de zeci, sute, . . . , se deosebeau unele de altele prin accente puse deasupra lit

Romanii, pentru scrierea numerelor, întrebuințau șepte semne principa

I	**V**	**X**	**L**	**C**	**D**	**M**
unu,	cinci,	zece,	cincizeci,	o sută,	cinci sute,	o m

Cu ajutorul acestor litere, și prin chipul combinării lor făcută după ni statornicite, se pot scrie numere din o mie și orice numer de sute, zeci și u

În cărțile românești vechi, în cronici precum și în cărțile religioase, hrisoave, se găsesc numere scrise cu litere chirilice.

În reprezentarea chirilică a numerelor, unimilor, zecile și sutele se însean se vede în tabela de mai la vale, fiecare cu câte un semn deosebit, o liter chirilic având deasupra lor un semn, poate spre a arăta că litera este luat Astfel, pentru a scrie un numer oarecare, mai mic decât o mie, în no trebuiesc 27 semne.

Aceleași litere, având semnul ҂ în stânga lor și puțin mai jos, serves unitățile din clasa miilor, adică unimile de mii, zecile de mii și sutele de m

Alte rânduri de semne convenționale, puse alături cu aceleași litere, ar spre a reprezenta unitățile din celelalte clase mai înalte, clasa milioanelor,

[2] Articol preluat din "Recreații Științifice", an I (1883), nr. 3, 57-60.
[3] *Bossut*, Istoria generală a matematicilor.

TABELA

de scrierea numerelor cu litere cirilice.

А҃	В҃	Г҃	Д҃	Є҃	Ѕ҃	З҃	И҃
1	2	3	4	5	6	7	8
Ї҃	А҃І	В҃І	Г҃І	Д҃І	Є҃І	Ѕ҃І	З҃І	И҃І
10	11	12	13	14	15	16	17	18
К҃	КА҃	КВ҃ .... Л҃	М҃	Н҃	Ѯ҃	О҃	П҃
20	21	22 . . . 30	40	50	60	70	80
Р҃	С҃	Т҃	ОУ҃	Ф҃	Х҃	Ѱ҃	Ѡ҃
100	200	300	400	500	600	700	800
҂А҃	҂В҃	҂Г҃	҂Д҃	҂Є҃	҂Ѕ҃		
1000	2000	3000	4000	5000	6000		
҂И҃	҂Ѳ҃	҂І҃	҂К҃	҂Л҃	҂М҃		
8000	9000	10 000	20 000	30 000	40 000		
҂Ѯ҃	҂О҃	҂П҃	҂Ч҃	҂Р҃	҂С҃		
60 000	70 000	80 000	90 000	100 000	200 000		
҂ОУ҃	҂Ф҃	҂Х҃	҂Ѱ҃	҂Ѡ҃			
400 000	500 000	600 000	700 000	800 000	90		

1883 ... MDCCCLXXXIII .... ҂АѠП҃

...; totuşi, numerele exprimând milioanele precum şi ordine mai înalte urm în cuvinte.

Caracteristic este modul cum se potriveşte de bine scrierea numerelor în lică cu numirea lor. Se ştie că, numerele cuprinse între zece şi douăzeci prezi în ceea ce priveşte numirea lor, de la regula generală întemeiată pe modu Pe când la numerele de la douăzeci înainte, compuse din zeci şi unimi, întâi zecile şi apoi unimile, dacă sînt, ca de exemplu în: patruzeci şi patr nouă etc., la numerele cuprinse între zece şi douăzeci, se enunţă mai întâi zecile: treisprezece, optsprezece etc. În reprezentarea chirilică a numerelo întocmai după cum se enunţă: unităţile se scriu înainte sau după zeci, du numirea numerului.

Este lesne de văzut că numerele exprimate cu litere se pot supune c numerele scrise cu cifre arabe; singura deosebire stă într-aceea că calculul întâi, cu atâta mai lung şi mai greu, cu cât numerul va fi mai mare.

I. M. M

Acad. Radu Miron la a 75-a aniversar

Academician profesor doctor docent **Radu Miron**.....ce se mai poa în câteva rânduri!? Şi totuşi...profesorul **Radu Miron** este preferatul raţii de studenţi ai Facultăţii de Matematică din Iaşi. Prezenţă caris fiteatru, reuşeşte să captiveze în mod natural auditoriul. Cu mult calm remarcabilă, cele mai întunecate capitole ale matematicii se limpeze tra opacă din spatele oglinzii capătă o transparenţă de cristal chiar şi disimulat în student.

Şi totuşi...profesorul **R. Miron** aruncă peste noi, ca un prestidigi imensă care este opera sa, operă care conţine peste 250 de lucrări şt bibliografice, mongrafii etc.

Trăind peste 50 de ani în atmosfera Seminarului Matematic "Al. My vărat laborator de creaţie ştiinţifică în câmpul abstract al matematicii demică de înaltă ţinută, profesorul R. Miron este un continuator al acele aur" a matematicienilor români. Menţionăm aici numele lui *Alexandru* torul Seminarului Matematic, *Octav Mayer, Gheorghe Vrănceanu, G* *Mendel Haimovici, Adolf Haimovici, Dimitrie Mangeron, Constantin* *Popa, Gheorghe Gheorghiev* ş. a.

Remarcat de profesori încă din primii ani de studenţie este num anul II, iar după absolvirea facultăţii este încadrat ca cercetător la Matematică, Filiala Iaşi a Academiei. In 1957 îşi susţine teza de d tlul "*Problema geometrizării sistemelor mecanice neolonome*", sub co demicianului *Mendel Haimovici*, lucrare publicată în întregime în rev Cercetări Matematice.

Parcurgând întreaga ierarhie universitară este numit în 1969 profes de Geometrie a Facultăţii de Matematică din Universitatea "Al. I. Cuz director al Institutului de Matematică. Decan al Facultăţii de Matema 1972-1976, conducător de doctorat din 1972, şef al Catedrei de Geom al Consiliului Profesoral şi al Senatului, profesorul R. Miron a desfăş activitate didactică şi educativă.

Activitatea de cercetare ştiinţifică a profesorului R. Miron este bine lumea întreagă. Este stabilită şi recunoscută contribuţia sa importan la dezvoltarea Geometriei Diferenţiale moderne şi a aplicaţiilor ei în Fi

Profesorul **R. Miron** a creat şi dezvoltat în matematică noi ramuri *configuraţiilor Myller, teoria invariantă a spaţiilor Finsler, spaţii La Lagrange generalizate, teoria subspaţiilor Lagrange, geometria spaţiilo ordin superior, spaţii Hamilton, spaţii Hamilton generalizate, teoria spaţiilor fibrate, teoria lagrangeană a relativităţii şi electromagnetis Einstein şi Maxwell.* A rezolvat multe probleme deschise ca: *prelungir riemanniene, finsleriene, lagrangeene, spaţii Finsler de ordin superior*

Cercetările iniţiate şi dezvoltate de profesorul R.Miron au avut un asupra specialiştilor în geometrie şi nu numai. Profesorul *Makoto Ma* Universitatea din Kyoto, în cartea sa "Fundamentele Geometriei Fi

Finsler speciale" se referă la conceptul de "reper Miron" şi "ecuaţii fun reperului Miron". Profesorul *Masao Hashiguchi* atribuie numele de "s unui caz remarcabil de spaţii Hamilton, introduse pentru prima dată R. Miron, iar *G. S. Asanov*, de la Universitatea din Moscova, aplică mode ale profesorului R. Miron în cosmologie şi obţine cea mai bună deviaţ periheliului planetelor Marte, Venus şi Mercur. Bazându-se pe teori R. Miron, *G. Beil* (S.U.A.) a obţinut o bună teorie gauge şi *P. L. Anton* a aplicat-o în biologie.

Profesorul **R. Miron** a creat în România o şcoală de matematică care a cooperat pe parcursul multor ani cu oameni de ştiinţă din Ja S.U.A., Germania, Italia, Anglia, Canada, Ungaria, Egipt etc. Un nu doctoranzi din ţară şi străinătate (Japonia, Italia, Ungaria, Vietnan titlul de doctor în matematică sub conducerea d-sale.

Având un renume deosebit în lumea Matematicii, profesorul R. Mir tat ca "visiting professor" la prestigioase universităţi ca: *Universitatea* (Japonia, 1988, 1990, 1992), Bary (Italia, 1987), *Freiburg şi Münche* 1975, 1990), *Edmonton* (Canada, 1992).

Profesorul **R. Miron** a publicat o parte din lucrările sale în cola ometri japonezi: *M. Matsumoto, M. Hashiguchi, Y. Ichijio, S. Kikuch be, S. Ikeda* sau cu membrii ai Seminarului Naţional de Geometrie grange, iniţiat de dânsul în 1980 la Universitatea din Braşov.

Este primul preşedinte al Societăţii Balcanice a Geometrilor cons ţiativa sa şi a profesorului *G. Tsagas* de la Universitatea Aristotel din (Grecia) în 1994-1995. "Instituto per la Ricerca di Base" din Italia fesorului R. Miron titlul de "Full Professor in the Division of Mathe I.R.B.".

Profesorului **R. Miron** i s-a acordat *Premiul Ministerului Educaţie miul "Gh. Ţiţeica" al Academiei (1968) şi a fost ales membru al Acade (1991).*

Profesorul **R. Miron** a scris în colaborare cu profesorul *M. Anas* de pionerat "*Geometria spaţiilor Lagrange: teorie şi aplicaţii*", publica Kluwer Academic (S.U.A.) în prestigioasa serie "Fundamental Theorie Mai amintim două titluri importante de monografii care concentreaz matice ale profesorului R.Miron: "*Geometria spaţiilor Lagrange de o Aplicaţii în Mecanică şi Fizică*" (Kluwer Academic, 1997) şi "*Geom Finsler de ordin superior*" (Hadronic Press, U.S.A., 1998).

Impreună cu profesorul *P. L. Antonelli* de la Universitatea din Alber R. Miron este editorul cărţii "*Geometrie Finsler şi Lagrange.Aplicaţi Biologie*", publicată deasemeni de Kluwer Academic în 1996.

Chiar dacă pe 3 octombrie 2002, **profesorul Radu Miron** a împl vârstă de 75 de ani, sunt convins că "surprizele matematice" vor c uimească.

Prof. dr. ***Alexandru N***

Numere prime din progresii aritmetic

Petru Minuţ[1]

Un număr natural p, $p > 1$, se numeşte *număr prim* dacă nu ar
înafară de 1 şi p.

Lemă. *Un număr natural n, $n > 1$, are un divizor prim.*

Demonstraţie. Fie M mulţimea tuturor numerelor naturale care
ai lui n diferiţi de 1. $M \neq \emptyset$, deoarece $n \in M$. În M există un numă
mai mic, p. Arătăm, prin reducere la absurd, că p este prim. Presupu
compus: $p = ab$, $1 < a < p$. Din $a \,|\, p$ şi $p \,|\, n$ rezultă că $a \,|\, n$. Am găsit
lui n mai mic ca p ceea ce contrazice alegerea lui p.

Teorema 1. *În mulţimea numerelor naturale există o infinitate de n*

Demonstraţie. Există numere prime. De exemplu 2, care nu po
divizori în afară de 1 şi 2. Folosim metoda reducerii la absurd. Presupu
o mulţime finită de numere prime în $\mathbb{N}$, $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$. Conside
ajutător $N = p_1 p_2 \ldots p_k + 1$. Deoarece $N > 1$, există un număr prim
$p \in P$ rezultă că $p \,|\, p_1 p_2 \ldots p_k$. Dacă două numere sunt multipli de p, at
lor este multiplu de p. Rezultă că $p \,|\, 1$, ceea ce implică $p = 1$ şi contraz
numărului prim.

Observaţie. Teorema 1 o găsim enunţată şi demonstrată pentru
opera lui **Euclid** *"Elemente"* (sec. III î. Ch.) şi este cunoscută sub
teorema lui Euclid. Se cunosc numeroase demonstraţii ale acestei teore

Singurul număr prim par este 2. Aranjăm numerele impare în două

$$\underline{3}, \underline{7}, \underline{11}, 15, \ldots, 4k-1, \ldots$$

$$1, \underline{5}, 9, \underline{13}, \ldots, 4k+1, \ldots$$

Constatăm că în aceste şiruri (progresii aritmetice), mergând până la te
tot mai mare, găsim noi termeni care sunt numere prime. Dacă luăm şi
aritmetice, de exemplu:

$$\underline{3}, \underline{13}, \underline{23}, 33, \underline{43}, \underline{53}, 63, \underline{73}, 83, \ldots$$

$$\underline{2}, \underline{7}, 12, \underline{17}, 22, 27, 32, \underline{37}, 42, \underline{47}, \ldots$$

constatăm acelaşi lucru. Este uşor de demonstrat că în progresia (1) exis
de numere prime.

Teorema 2. *Există o infinitate de numere prime de forma $p = 4k$*

Demonstraţie. Procedăm prin reducere la absurd. Am pus dej
câteva numere prime de această formă (şirul (1)). Presupunem că exi
finit de numere prime de acest fel: $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Construim numărul
$= 4p_1 p_2 \ldots p_n - 1$. Deoarece $N > 1$, există p prim, $p \,|\, N$. Orice număr
de 2 este de forma $p = 4k - 1$ sau $p = 4k + 1$. Dacă toţi divizorii primi
de forma $p = 4k + 1$, numărul N este de forma $N = 4h + 1$, deci $4 \,|\, N -$
ceea ce implică $4 \,|\, 2$. Contradicţie! Există divizori primi ai lui N de forn

---

[1] Prof. dr., Univ. "D. Cantemir", Tg. Mureş

p un asemenea divizor. Rezultă că $p \in \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, deci $p \mid 4p_1p_2$
$p \mid N$ rezultă $p = 1$. Contradicţie! Presupunerea că există un număr fi
prime de forma $p = 4k - 1$ nu poate fi adevărată.

Teorema 2 se generalizează după cum urmează:

Teorema 3. *Pentru orice număr natural n, $n \neq 0$, există o infinit*
prime p de forma $p = nk - 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Demonstraţie. Pentru $n = 1$, $\{nk - 1 \mid k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N} \cup \{-1\}$ şi
remei este adevărată (teorema lui Euclid). Pentru $n = 2$, $\{nk -$
$= \{-1, 1, 3, 5, 7, \ldots\}$ şi afirmaţia teoremei este adevărată (există o inf
mere prime impare).

Pentru demonstraţia teoremei în cazul $n > 2$ vom folosi lema urmă

Lemă. *Pentru orice număr natural n, $n > 1$, avem:*

$$\prod_{\substack{1 \leq r < n \\ (r,n)=1}} r \equiv \pm 1 \pmod{n}.$$

Demonstraţie. Pentru $n = 2$ congruenţa este evidentă. Pentru n
$1 \leq r < n$, $(r, n) = 1$, ştim că există soluţie unică pentru congruenţa rx
Deci, există un singur r', $1 \leq r' < n$, $(r', n) = 1$ astfel încât $rr' \equiv$
membrul întâi al congruenţei (5) înlocuim produsele rr' cu 1 pentru
care $r' \neq r$. Rezultă că $\prod_{(r,n)=1} r \equiv \prod_{\substack{(r,n)=1 \\ r^2 \equiv 1 \pmod{n}}} r$. Observăm c
proprietatea că $r^2 \equiv 1 \pmod{n}$ avem $r(n - r) \equiv -1 \pmod{n}$. Rezult
întâi al congruenţei (5) este congruent cu $(-1)^k$, unde $2k$ este număr
proprietatea $r^2 \equiv 1 \pmod{n}$ (r şi $n - r$ au ambii această proprietat
demonstrată.

Revenim la demonstraţia teoremei în cazul $n > 2$. Vom arăta pri
absurd, că există o infiniate de numere prime p de forma $p = nak - 1$
a este produsul numerelor naturale mai mici ca n şi prime cu n luat
sau $-$ după cum produsul acestor numere este congruent cu $+1$ sau
Presupunem că există un număr finit de numere p de forma $p = nak - 1$:
Considerăm numărul ajutător $N = nap_1p_2 \ldots p_s - 1$. $N > 1$ deoarece
$s = 0$, $N = na - 1 > n - 1 \geq 1$. Există p prim, $p \mid N$; p este de forma
$(r, Na) = 1$. Din $p = Nau + r \equiv nu + r \pmod{n}$ rezultă că p şi $nu +$
rest la împărţirea cu n. Rezultă că $r < n$ şi nu putem avea $1 < r < n -$
rezulta că $r \mid n$ sau $r \mid a$, deci $r \mid p$ şi contrazicem faptul că p este prim.
p este de forma $p = nau \pm 1$. Dacă toţi divizorii lui N ar fi de forma
ar fi şi el de această formă. Prin urmare, există un divizor prim p al lu
$p = nau - 1$. Rezultă că $p \in \{p_1, p_2, \ldots, p_s\}$, $p \mid nap_1p_2 \ldots p_s$ şi cum
$p \mid 1$, deci $p = 1$ şi contrazicem definiţia numărului prim.

Teorema 2 se obţine din Teoremei 3 luând $n = 4$. Din Teorema 3 re
o infinitate de numere prime p de forma $p = 6k - 1$, $k \in \mathbb{N}$ sau $p =$
ş.a.m.d.

Pentru a arăta că progresia (2) conţine o infinitate de numere pri
următoarea

Lemă. *Oricare ar fi numărul natural n, $n > 1$, numărul* $(n!)^2 +$
primi şi aceştia sunt de forma $p = 4k + 1$.

Demonstraţie. Pentru $n > 1$, numărul $(n!)^2 + 1$ este impar, m
Există $p \,|\, (n!)^2 + 1$, $p \neq 2$. Deci p este de forma $p = 4k + 1$ sau $p = 4$
este de forma $p = 4k+3$, din $p \,|\, (n!)^2 + 1$ rezultă $p \,|\, (n!)^{2(2k+1)} + 1$, adică
şi apoi $p \,|\, (n!)^p + n!$. Conform cu *mica teoremă a lui Fermat* $p \,|\, (n!)^p$
$p \,|\, 2n!$, deci $p \leq n$, $p \,|\, n!$ ceea ce implică $p \,|\, 1$, contradicţie!

Teorema 4. *Există o infinitate de numere prime p de forma $p = 4$*

Demonstraţie. Folosim din nou metoda lui Euclid. Presupunem
număr finit de numere prime de forma $4k + 1$: $p_1 = 5 < p_2 < \cdots < p_s$
numărul ajutător $N = [(p_1 p_2 \ldots p_s)!]^2 + 1$. Acesta admite, conform lem
prim p de forma $p = 4k + 1$ şi ajungem din nou la contradicţia $p \,|\, 1$.

Pentru generalizarea Teoremei 4 avem nevoie de câteva chestiuni pre
k un număr natural, $k \geq 1$. Ecuaţia $x^k - 1 = 0$ are rădăcinile $x_h = e^{\frac{2\pi h}{k}}$
$i \sin \dfrac{2h\pi}{k}$, $h = 0, 1, \ldots k - 1$. Considerăm polinomul $F_n(x) = \prod_{(h,n)=}$
unde produsul se face după numerele $h \in \{0, 1, \ldots, n - 1\}$ care sun
Gradul lui $F_n(x)$ este $\varphi(n)$ ($\varphi(n)$ = numărul numerelor naturale ma
prime cu n, este cunoscută sub numele de *funcţia indicatoare a lui Eule*
că $x^k - 1 = \prod_{n \,|\, k} F_n(x)$ (produsul se face după divizorii pozitivi a
$x^k - 1 = F_k(x)\, G_k(x)$, unde $G_k(x)$ este cel mai mic multiplu comun al
$x^n - 1$, $n \,|\, k$, $n < k$, având coeficientul termenului de grad cel mai
1. Deoarece $G_k(x)$ este un polinom cu coeficienţi întregi, atunci şi
polinom cu coeficienţi întregi. Observăm că pentru orice număr într
avem $F_k(x)\, G_k(x) \neq 0$.

Lema 1. *Fie n un divizor propriu al lui k ($n \neq 1$, $n \neq k$). Pentr*
întreg x, $x \neq \pm 1$, avem: $\left(x^n - 1, \dfrac{x^k - 1}{x^n - 1}\right) \,|\, k$.

Demonstraţie. Notăm $k = nd$, $x^n - 1 = y$. Vom avea:

$$\frac{x^k - 1}{x^n - 1} = \frac{(y + 1)^d - 1}{y} = y^{d-1} + C_d^1 y^{d-2} + \cdots + d \equiv d \,(\text{mod}$$

Dacă $\delta = \left(x^n - 1, \dfrac{x^k - 1}{x^n - 1}\right)$, din $\delta \,|\, y$ rezultă $\delta \,|\, d$ şi, cum $d \,|\, k$, rezultă

Lema 2. *Fie $x \in \mathbb{Z}$, $x \neq \pm 1$. Orice divizor prim, comun lui F_k*
este un divizor al lui k.

Demonstraţie. Fie p prim, $p \,|\, F_k(x)$, $p \,|\, G_k(x)$. Din $p \,|\, G_k(x)$ rez
$n \in \mathbb{N}^*$, $n \,|\, k$, $n < k$, astfel încât $p \,|\, F_n(x)$ (deoarece $G_k(x) = \prod_{n \,|\, k}$
dacă un număr prim divide un produs atunci el divide cel puţin unul d
Din $p \,|\, x^n - 1$ şi $p \,|\, F_k(x)$ rezultă $p \,\Big|\, \dfrac{x^k - 1}{x^n - 1}$ şi $p \,\Big|\, \left(x^{n-1}, \dfrac{x^k - 1}{x^n - 1}\right)$. C
1, $p \,|\, k$.

Teorema 5. *Pentru orice număr natural k, $k \geq 1$, există o infinit*
prime de forma $p = nk + 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Demonstraţie. Pentru $k = 1$ enunţul teoremei este adevărat (*te*
clid). Pentru $k > 1$, arătăm mai întâi că există numere prime de form

Pentru $x = ky$, $y \in \mathbb{Z}$ vom avea: $F_k(x)\,G_k(x) = x^k - 1 \equiv -1\,(\mathrm{mod}$
ecuaţiile $F_k(x) = \pm 1$ au un număr finit de rădăcini, putem alege
$F_k(x) \neq \pm 1$. Există numere prime p care sunt divizori ai lui $F_k(x)$. I
$(p\,|\,k \Rightarrow p\,|\,x \Rightarrow p|1)$, rezultă (conform Lemei 2) că $p \nmid G_k(x)$ şi de
oricare ar fi numărul natural n, $n\,|\,k$, $n < k$. Deci $x^n \not\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,n)$, n
$x^k \equiv 1\,(\mathrm{mod}\,n)$. Fie $n = (k, p-1)$. Există două numere întregi s şi
$n = sk + t(p-1)$. Rezultă că $x^n = \left(x^k\right)^s \left(x^{p-1}\right)^t \equiv 1\,(\mathrm{mod}\,p)$. Nu pute
deci $n = k$. Conform cu *mica teoremă a lui Fermat* $x^{p-1} \equiv 1\,(\mathrm{mod}\,p$
$p-1$ este multiplu de k. Într-adevăr, dacă δ este cea mai mică putere î
pozitivă a lui x astfel încât $x^\delta \equiv 1\,(\mathrm{mod}\,p)$, atunci $x^a \equiv 1\,(\mathrm{mod}\,p)$ ⇐
$a = \delta b$, atunci $x^a = \left(x^\delta\right)^b \equiv 1\,(\mathrm{mod}\,p)$. Dacă $x^a \equiv 1\,(\mathrm{mod}\,p)$, $a = b\delta +$
nu putem avea $\delta > 0$ deoarece $x^a \equiv x^r \equiv 1\,(\mathrm{mod}\,p)$ şi contrazicem a
Deci, $p - 1 = nk$, adică $p = nk + 1$.

Fie p_1 un număr prim de forma $p_1 = n_1 k + 1$. Luăm $k_1 = p_1 k$. Co
părţi a demonstraţiei există un număr prim p_2 de forma $p_2 = np_1 k + 1$
orice număr prim p_1 de forma $p_1 = nk + 1$ există un număr prim p_2 de a
$p_2 > p_1$. Rezultă că există o infinitate de numere prime p de forma
$n \in \mathbb{N}$.

Enunţul cel mai general, care cuprinde drept cazuri particulare to
prezentate, îl constitue teorema următoare, cunoscută în literatura ma
denumirea de *teorema lui Dirichlet*.

Teorema 6. *Oricare ar fi numerele $l \in \mathbb{Z}$ şi $k \in \mathbb{N}^*$, $(l, k) =$
aritmetică

$$l, l + k, l + 2k, \ldots l + nk, \ldots$$

conţine o infinitate de numere prime.

Condiţia $(l, k) = 1$ este necesară . Dacă $(l, k) = d > 1$, toţi term
sunt multipli de d. Demonstraţia Teoremei 6, în cazul general, nu p
prin metode ale matematicii elementare.

Problema numărului de numere prime dintr-o progresie aritmetic
pentru prima oară în 1775 de *Leonard Euler* în cazul particular $l =$
sa *"Théorie des nombres"* *A. M. Legendre* a dat o demonstraţie Teore
pe o ipoteză, care ulterior s-a dovedit a fi falsă. Prima demonstraţie
fost dată în 1837 de *Lejeune P. G. Dirichlet* care a creat un aparat a
(*seriile Dirichlet*). Demonstraţia lui *Dirichlet* este considerată actul
teoriei analitice a numerelor.

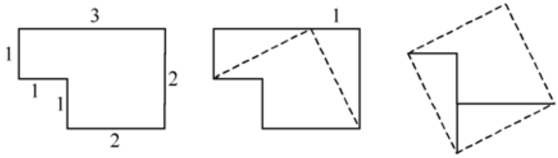
Bibliografie

1. **I. Creangă, C. Cazacu, P. Minuţ, Gh. Opaiţ, C. Reischer** - *Introd*
numerelor, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1965.
2. **Hua Loo Keng** - *Introduction to Number Theory*, Springer Verlag, E
berg, 1982.
3. **P. Minuţ** - *Teoria numerelor. Capitole introductive*, Editura "Creng
Iaşi, 1997.
4. **C. P. Popovici** - *Teoria numerelor*, Ed. didactică şi pedagogică, Bucur
5. **W. Sierpinski** - *Ce ştim şi ce nu ştim despre numerele prime*, Editu
Bucureşti, 1966.

Recreaţie matematică şi nu numai

Horea BANEA[1]

Este cunoscută următoarea problemă - joc: *Să se descompună poligo alăturată prin două linii drepte astfel încât din poligoanele obţinute pr se realizeze un pătrat.* Soluţia este indicată în figură.



Sugerat de aceasta, propunem următoarea problemă:

Dintr-o bucată de carton, de forma poligonului de mai sus, printr-o o dreaptă şi realipirea bucăţilor obţinute se realizează diferite figuri d poligoane convexe. Să se găsească toate situaţiile distincte. Să se calcu laturilor poligoanelor obţinute.

În legătură cu enumerarea propusă facem următoarele precizări:

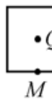
• Situaţii distincte sunt cele în care T = *tăietura* şi/sau P = *pol* diferă între ele.

• Cazurile în care cu aceeaşi T obţinându-se componente simetr realiza acelaşi P în diferite moduri, vor fi considerate doar variante e aceleiaşi situaţii cu excepţia cazurilor în care alipirea aceleiaşi compo la alt segment al componentei de bază (=cea mai mare) care vor fi c situaţii distincte.

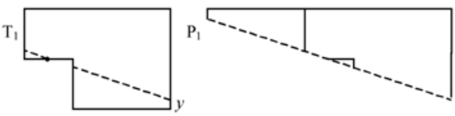
• Când T este variabilă, obţinându-se acelaşi tip de P dar cu dimens depinzând de un parametru, se consideră ca o singură situaţie, dar cazur ale parametrului care conduc la P cu anumite particularităţi se enumer cazul general.

• Nu se enumeră, fiind socotite variante echivalente, figurile obţinute rea pe verso a întregii figuri obţinute într-un caz.

• Pentru a uşura urmărirea efectuării tăieturilor indicăm gruparea lor în raport cu anumite puncte remarcabile prin care au fost duse: $M : T_{1-16}$; $N : T_{17-22}$; $P : T_{23}$; $Q : T_{25,26}$.

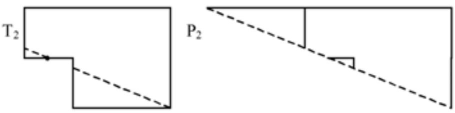


• Enumerarea lungimilor laturilor se face începând cu cea superioară, în sens matematic. Justificarea calculelor, bazându-se doar pe teorema lui Pitagora şi pe asemănarea triunghiurilor, se lasă p



Trapez dreptunghic variabil:

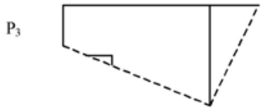
$5,\ y,\ \sqrt{4y^2 - 8y + 29},\ 2 - y$



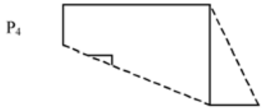
Triunghi dreptunghic: $5,\ \sqrt{29},$

---

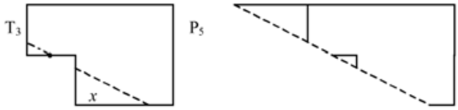
[1] Conf. dr., Univ. "Transilvania", Braşov



Patrulater inscriptibil: $\frac{19}{5}, \frac{4}{5},$

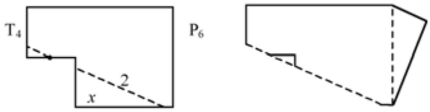


Pentagon: $3, \frac{4}{5}, \frac{3\sqrt{29}}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2\sqrt{2}}{5}$



Trapez dreptunghic variabil:

$3+x,\ \sqrt{4x^2+4x+5},\ 2-x,$

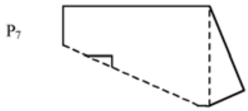


Hexagon:

$3,\ \sqrt{4-x^2},\ \frac{2x+2}{x},\ 2-x,$

$x \approx 1,84,\ x^4+x^3-2,75x^2$

Obs. Nu se consideră şi P_5.

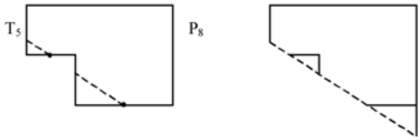


Hexagon:

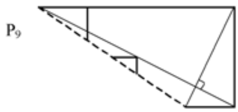
$3,\ \sqrt{4-x^2},\ \frac{2x+2}{x},\ 2-x,$

x ca la P_6.

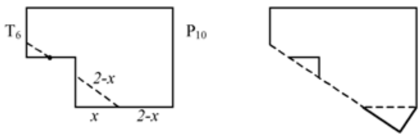
Obs. Aceeaşi ca la P_6.



Trapez dreptunghic: $3,\ \frac{2}{3},\ \sqrt{13},$



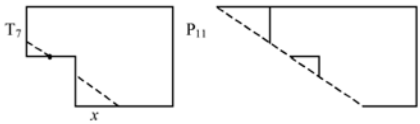
Trapez dreptunghic ortogonal: $4,$



Pentagon: $3,\ 2\sqrt{1-x},\ \frac{x+2}{x},\ 2$

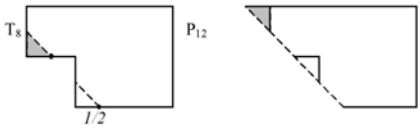
$x \approx 0,89\,,\quad 4x^3+x^2-3x$

Obs. Nu se consideră şi P_5.



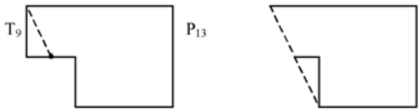
Trapez dreptunghic circumscript

$\frac{5+\sqrt{5}}{2},\ 3,\ \frac{5-\sqrt{5}}{2},\ 2;\quad x =$

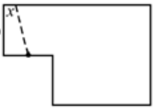


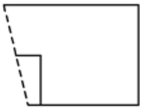
Trapez dreptunghic: $7/2,\ 2\sqrt{2},\ 3$

Obs. Realizat prin alipirea alt
faţă de P_5.

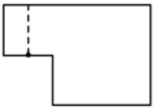
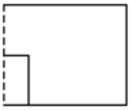


Trapez dreptunghic: $3,\ \sqrt{5},\ 2,\ 2.$

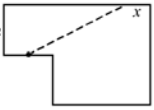
T10 

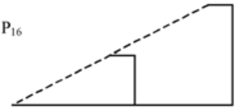
P14 

Trapez dreptunghic variabil:
$3-x,\ \sqrt{4x^2-4x+5},\ 2+x,\ 2;$

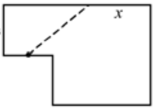
T11 
P15 

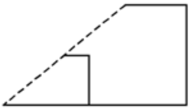
Dreptunghi: $\frac{5}{2},\ 2,\ \frac{5}{2},\ 2.$
Obs. Are variante echivalente.

T12 

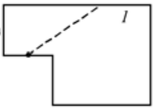
P16 

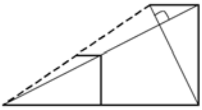
Trapez dreptunghic variabil:
$x,\ \sqrt{4x^2-20x+29},\ 5-x,\ 2;$

T13 

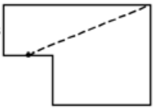
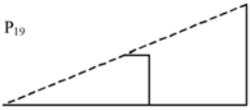
P17 

Trapez dreptunghic circumscripti
$$x = \frac{5-\sqrt{5}}{2},\ 3,\ \frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

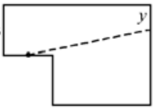
T14 

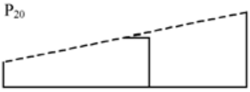
P18 

Trapez dreptunghic ortogonal: 1,

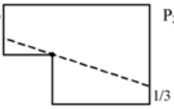
T15 
P19 

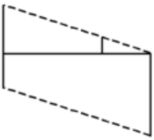
Triunghi dreptunghic: $\sqrt{29},\ 5,\ 2.$

T16 

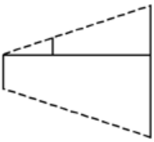
P20 

Trapez dreptunghic variabil:
$\sqrt{4y^2-8y+29},\ y,\ 5,\ 2-y;$

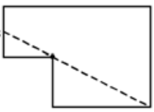
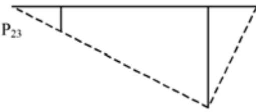
T17 

P21 

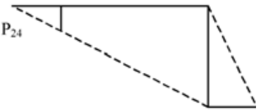
Paralelogram: $\sqrt{10},\ \frac{5}{3},\ \sqrt{10},\ \frac{5}{3}.$

P22 

Trapez isoscel: $\sqrt{10},\ \frac{2}{3},\ \sqrt{10},\ \frac{8}{3}.$

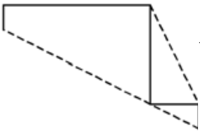
T18 
P23 

Triunghi dreptunghic: $5,\ 2\sqrt{5},\ \sqrt{}$

P24 

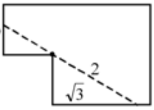
Trapez: $4,\ 2\sqrt{5},\ 1,\ \sqrt{5}.$

P_{25}

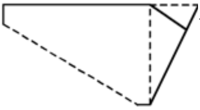


Pentagon: $3,\ \frac{1}{2},\ 2\sqrt{5},\ \frac{1}{2},\ \sqrt{5}.$

T_{19}



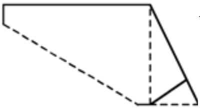
P_{26}



Pentagon:

$\frac{9+2\sqrt{3}}{3},\ \frac{3-\sqrt{3}}{3},\ \frac{6+2\sqrt{3}}{3},\ 2$ -

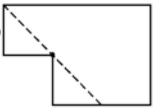
P_{27}



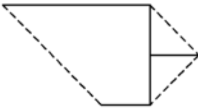
Pentagon:

$3,\ \frac{3-\sqrt{3}}{3},\ \frac{6+2\sqrt{3}}{3},\ \frac{6-\sqrt{}}{3}$

T_{20}

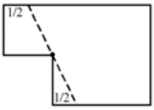


P_{28}
P_{29}

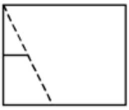


Pentagon: $3,\ 2\sqrt{2},\ 1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{2}.$
Obs. Cele două triunghiuri îşi
locurile. Sunt şi variante echival

T_{21}

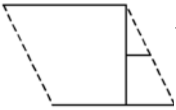


P_{30}



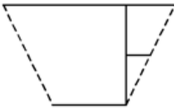
Dreptunghi: $\frac{5}{2},\ 2,\ \frac{5}{2},\ 2.$

P_{31}



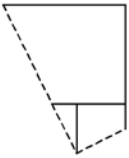
Paralelogram: $\frac{5}{2},\ \sqrt{5},\ \frac{5}{2},\ \sqrt{5}.$

P_{32}



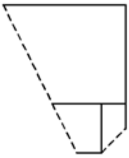
Trapez isoscel: $\frac{7}{2},\ \sqrt{5},\ \frac{3}{2},\ \sqrt{5}.$

P_{33}



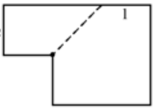
Patrulater inscriptibil: $\frac{5}{2},\ \frac{3\sqrt{5}}{2},$

P_{34}

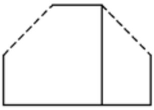


Pentagon: $\frac{5}{2},\ \frac{3\sqrt{5}}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{5}}{2},\ 2.$

T_{22}



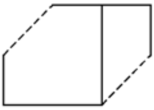
P_{35}



Hexagon inscriptibil cu axă de s

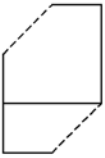
$1,\ \sqrt{2},\ 1,\ 3,\ 1,\ \sqrt{2}.$

P_{36}



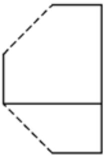
Hexagon cu centru de simetrie:

$2,\ \sqrt{2},\ 1,\ 2,\ \sqrt{2},\ 1.$

P37 

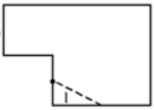
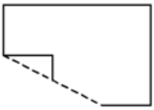
Hexagon cu centru de simetrie:

$1, \sqrt{2}, 2, 1, \sqrt{2}, 2.$

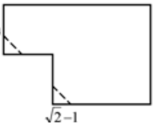
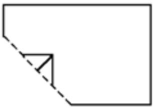
P38 

Hexagon inscriptibil cu axă de s

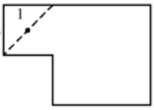
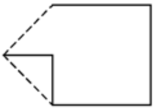
$1, \sqrt{2}, 1, \sqrt{2}, 1, 3.$

T23  P39 

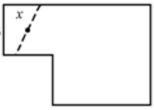
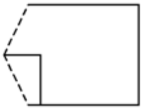
Pentagon: $3, 1, \sqrt{5}, 1, 2.$

T24  P40 P41 

Pentagon: $3, 2-\sqrt{2}, 2, 3-\sqrt{2},$
Obs. Cele două truinghiuri îşi
locurile. Sunt şi variante echival

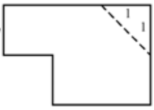
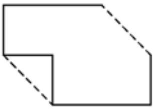
T25  P42 

Pentagon cu axă de simetrie: 2,
Obs. Are variante echivalente.

T26  P43 

Pentagon variabil cu axă de sim
$3-x, \sqrt{4x^2-4x+2}, \sqrt{4x^2-4x}$

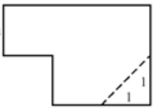
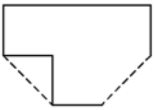
$1/2 < x < 1.$

T27  P44 

Hexagon cu centru de simetrie:

$2, 1, \sqrt{2}, 2, 1, \sqrt{2}.$

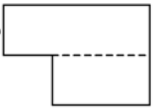
Obs. Are variante echivalente.

T28  P45 

Hexagon inscriptibil cu axă de s

$3, 1, \sqrt{2}, 1, \sqrt{2}, 1.$

Obs. Are variante echivalente.

T29  P46 

Dreptunghi: 5, 1, 5, 1.
Obs. Are variante echivalente.

P47 

Dreptunghi: 5, 1, 5, 1.
Obs. Are variante echivalente.

*
* *

Această listă lungă de poligoane (adresăm cititorilor provocarea c
altele remarcabile) permite utilizarea ei în diferite moduri adaptate la
tinţelor celor cărora li se adresează şi la scopurile urmărite de propună
plu, propunem următoarele:

1) Să se găsească doar situaţiile care dau triunghiuri sau patrulat

particulare: trapeze ş. a.)

2) În ce situaţie se obţine figura cu perimetrul maxim sau minim?

3) Ce tipuri distincte de poligoane se pot obţine? (triunghi dreptu unghi, paralelogram, trapez, trapez isoscel, trapez dreptunghic, trapez bil, trapez ortodiagonal, patrulater inscriptibil, pentagon, pentagon cu trie, hexagon, hexagon cu centru de simetrie, hexagon cu axă de sime în considerare doar particularităţile "clasice" neluând în considerare ca: pentagon cu două unghiuri drepte ş. a.).

4) Care tăietură dă cel mai mare număr de variante echivalente? obţină acelaşi poligon; de exemplu T_{20} dă 16 variante căci dacă notăm decupate prin I cel de sus şi II cel de jos, respectiv prin F (faţă) şi V (ele pot fi aşezate pentru a forma pentagonul în cele două poziţii S (s astfel:

$$\begin{array}{lcccccccc} S: & IF & IF & IV & IV & IIF & IIV & IIF & IIV \\ J: & IIF & IIV & IIF & IIV & IF & IF & IV & IV \end{array}$$

şi toate aceste combinaţii încă o dată numărate dacă întoarcem întreg verso.

5) Dacă se consideră o singură faţă a cartonului care situaţii nu s (De exemplu T_2 cu P_4).

6) Care situaţii duc la poligoane congruente? (De exemplu P_{35}, P_{3}

7) De ce nu se pot realiza poligoane convexe cu mai mult de şase la

8) Rezolvarea aproximativă a ecuaţiilor de gradul 3 şi 4 care au apă pot constitui un pretext pentru a prezenta la o activitate suplimentar Cardano, respectiv Ferrari).

9) Relativ la tăieturi: care este cea mai mică? cea mai mare? cea poligonul în două bucăţi echivalente (de aceeaşi arie)?

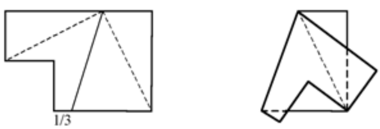
*

* *

În încheiere să revenim la problema iniţială adaptând-o la mulţimea mai sus şi anume:

Se poate ca printr-o singură tăietură în linie dreaptă să realizăm din un pătrat?

Răspunsul este afirmativ doar dacă îndoim în prealabil cartonul aşa cat mai jos (după bisectoarea unghiului drept format de cele două tăiet în soluţia sa).



Dar această problemă cu îndoire şi tăiere poate iniţia o altă RECRE MATICĂ.

Asupra unor perechi de şiruri liniar recu

D. M. BĂTINEŢU-GIURGIU[1]

În această notă matematică vom evidenţia proprietăţile unor pere fiecare satisfăcând o anumită recurenţă liniară omogenă de ordinul al ficienţi constanţi.

Spunem că un şir $(x_n)_{n\geq 0}$ de numere reale, satisface o recurenţă l omogenă de ordinul al doilea, dacă există $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ şi există încât:

$$x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0, \ \forall n \geq k.$$

În funcţie de valorile coeficienţilor $a, b \in \mathbb{R}$ şi de condiţiile iniţiale $x_{k+1} = v \in \mathbb{R}$ se obţin diferite şiruri, dintre care unele cunoscute şi de

De exemplu, dacă $a = b = 1$, $k = 0$ se obţine recurenţa:

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

pe care o vom numi *recurenţa Fibonacci-Lucas*.

Dacă în recurenţa (2) considerăm $x_0 = F_0 = 0$, $x_1 = F_1 = 1$, $x_n =$ *şirul lui Fibonacci* care satisface recurenţa:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dacă în recurenţa (2) considerăm $x_0 = L_0 = 2$, $x_1 = L_1 = 1$, $x_n =$ *şirul lui Lucas*, şir care satisface recurenţa:

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dacă în (1) luăm $a = -2$, $b = 1$, $k = 1$ se obţine recurenţa liniară:

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow x_{n+2} - x_{n+1} = \cdots = x_2 - x_1 = r$$

numită *recurenţa progresiilor aritmetice de raţie* $r \in \mathbb{R}$.

În fine, dacă în recurenţa (1) luăm $a = -2$, $b = -1$, $k = 0$ obţi *liniară cu coeficienţi constanţi de tip Pell*:

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} - x_n = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dacă în recurenţa (6) considerăm $x_0 = P_0 = 0$, $x_1 = P_1 = 1$, $x_n =$ *şirul lui Pell*, care satisface recurenţa:

$$P_{n+2} = P_n + 2P_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

De asemenea, dacă în (6) luăm $x_0 = Q_0 = 1$, $x_1 = Q_1 = 1$, $x_n =$ *şirul lui Pell asociat* $(Q_n)_{n\geq 0}$, şir care satisface recurenţa:

$$Q_{n+2} = 2Q_{n+1} + Q_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Mai departe, vom enunţa şi demonstra unele propoziţii care sco anumite proprietăţi pe care le verifică unele perechi formate dintr-un ş recurenţa (2) şi un şir care verifică recurenţa (5).

Propoziţia 1. *Dacă* $(x_n)_{n\geq 0}$ *satisface recurenţa (2) în care* x_0 $x_1 = d \in \mathbb{R}_+^*$, *iar* $(u_n)_{n\geq 1}$ *este o progresie aritmetică de raţie* $r \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=1}^{n} u_k x_k = u_n x_{n+2} - r\left(x_{n+3} - x_4\right) - x_2 u_1, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

[1] Profesor, Colegiul Naţional "Matei Basarab", Bucureşti

Demonstraţie. Vom demonstra afirmaţia prin metoda inducţiei m

Pentru $n = 1$ relaţia (9) devine $u_1x_1 = u_1x_3 - r(x_4 - x_4) - x_2u$ $= u_1(x_3 - x_1) = u_1x_2$ ceea ce arată că pentru $n = 1$, enunţul este adev

Pentru $n = 2$ relaţia (9) devine $u_1x_1 + u_2x_2 = u_2x_4 - r(x_5 - x$ $u_2(x_4 - x_2) = u_1(x_1 + x_2) + r(x_5 - x_4) \Leftrightarrow u_2x_3 = (u_1 + r)x_3 = u_2$ deduce că enunţul este adevărat şi pentru $n = 2$.

Presupunem că enunţul este adevărat pentru $n \geq 2$, (adică relaţia (cată) şi să demonstrăm că ea este verificată şi pentru $n+1$. Avem de

$$\sum_{k=1}^{n+1} u_kx_k = u_{n+1}x_{n+3} - r(x_{n+4} - x_4) - x_2u_1.$$

Într-adevăr, relaţia (10) este echivalentă cu

$$\sum_{k=1}^{n} u_kx_k + u_{n+1}x_{n+1} = u_{n+1}x_{n+3} - r(x_{n+4} - x_4) - x_2u_1$$

relaţie care (în condiţiile verificării condiţiei (9)) este echivalentă cu:

$$u_nx_{n+2} - r(x_{n+3} - x_4) - x_2u_1 + u_{n+1}x_{n+1} = u_{n+1}x_{n+3} - r(x_{n+4} - x$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1}(x_{n+3} - x_{n+1}) = u_nx_{n+2} + r(x_{n+4} - x_{n+3}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_{n+2}u_{n+1} = u_nx_{n+2} + rx_{n+2} = (u_n + r)x_{n+2} = u_{n+1}x_n$$

de unde (dacă ţinem seama că $x_n \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$) deducem că relaţia vărată. Conform principiului inducţiei matematice rezultă că enunţul pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi astfel propoziţia este demonstrată.

Observaţie. Dacă $x_0 = 0 = F_0$, $x_1 = 1 = F_1$ iar $(u_n)_{n\geq 1}$ est aritmetică de raţie r din relaţia enunţului deducem că

$$\sum_{k=1}^{n} u_kF_k = u_nF_{n+2} - r(F_{n+3} - F_4) - u_1,$$

adică am obţinut *Problema C:2310* propusă de **Florin Rotaru** în p.360. Dacă aici luăm $r = 0$ şi $u_n = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ deducem că şirul verifică relaţia

$$\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Propoziţia 2. *Dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este un şir de numere reale strict satisface recurenţa (2) iar şirul $(u_n)_{n\geq 1}$ are proprietatea că există încât*

$$\sum_{k=1}^{n} u_kx_k = u_nx_{n+2} - r(x_{n+3} - x_4) - x_2u_1, \ \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

atunci şirul $(u_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică de raţie r.

Demonstraţie. Vom face şi aici demonstraţia prin metoda inducţie Pentru $n = 2$ relaţia enunţului devine:

$$u_1x_1 + u_2x_2 = u_2x_4 - r(x_5 - x_4) - x_2u_1 \Leftrightarrow u_1x_1 + r(x_4 + x_3 - x_4) + u_1x_2$$

$$\Leftrightarrow u_1(x_1 + x_2) + rx_3 = u_2x_3 \Leftrightarrow u_1x_3 + rx_3 = u_2x_3 \Leftrightarrow (u_1 + r)x_3$$

de unde dacă ţinem seama că $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ deducem că $u_2 = u_1 + r$

Presupunem că $u_n = u_{n-1} + r$, $n \geq 2$ şi să demonstrăm că u_{n}
Într-adevăr, pentru $n+1$ relaţia (11) se scrie:

$$\sum_{k=1}^{n+1} u_k x_k = u_{n+1} x_{n+3} - r\left(x_{n+4} - x_4\right) - x_2 u_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} u_k x_k + u_{n+1} x_{n+1} = u_{n+1} x_{n+3} - r\left(x_{n+4} - x_4\right) - x_2$$

în care dacă ţinem seama de relaţia (11) obţinem:

$$u_n x_{n+2} - r\left(x_{n+3} - x_4\right) - x_2 u_1 + u_{n+1} x_{n+1} = u_{n+1} x_{n+3} - r\left(x_{n+4} -\right.$$

$$u_{n+1}\left(x_{n+3} - x_{n+1}\right) = u_n x_{n+2} + r\left(x_{n+4} - x_{n+3}\right) \Leftrightarrow u_{n+1} x_{n+2} = u_n x$$

de unde prin simplificare cu $x_{n+2} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ deducem că $u_{n+1} = u_n$

Conform principiului inducţiei matematice rezultă că $u_{n+1} = u_n$
ceea ce arată că $\left(u_n\right)_{n \geq 1}$ este o progresie aritmetică de raţie r.

Propoziţia 3. *Dacă $\left(u_n\right)_{n \geq 1}$ este o progresie aritmetică de raţie iar $\left(x_n\right)_{n \geq 0}$ este un şir de numere reale astfel încât $x_0 \geq 0$, $x_1 > 0$, x dacă*

$$\sum_{k=1}^{n} u_k x_k = u_n x_{n+2} - r\left(x_{n+3} - x_4\right) - x_2 u_1, \ \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

atunci $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Demonstraţie. Procedăm şi acum prin inducţie matematică. Co
lui pentru $n = 0$, avem $x_2 = x_1 + x_0$. Pentru $n = 1$ relaţia (12) d
$u_1 x_3 - r\left(x_4 - x_4\right) - x_2 u_1 \Leftrightarrow u_1 x_1 + u_1 x_2 = u_1 x_3$ de unde, dacă ţi
$u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, obţinem că $x_3 = x_2 + x_1$, adică afirmaţia enunţului e
şi pentru $n = 1$. Presupunem că $x_{k+2} = x_{k+1} + x_k$, $\forall k = \overline{0, n}$ şi să dem

$$x_{n+3} = x_{n+2} + x_{n+1}.$$

Dacă în (12) înlocuim n cu $n-1$ deducem că

$$\sum_{k=1}^{n-1} u_k x_k = u_{n-1} x_{n+1} - r\left(x_{n+2} - x_4\right) - x_2 u_1, \ \forall n \geq 2.$$

Dacă în (12) ţinem seama de (14) obţinem că

$$u_n x_n + \sum_{k=1}^{n-1} u_k x_k = u_n x_{n+2} - r\left(x_{n+3} - x_4\right) - x_2 u_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_n x_n + u_{n-1} x_{n+1} - r\left(x_{n+2} - x_4\right) - x_2 u_1 = u_n x_{n+2} - r\left(x_{n+3} - x\right.$$

$$\Leftrightarrow u_n\left(x_n + x_{n+1} - x_{n+2}\right) + r\left(x_{n+3} - x_{n+2} - x_{n+1}\right) = 0,$$

dar $x_n + x_{n+1} - x_{n+2} = 0$ în baza ipotezei de inducţie şi deci rămâne

$$r\left(x_{n+3} - x_{n+2} - x_{n+1}\right) = 0 \Rightarrow x_{n+3} = x_{n+2} + x_{n+1}.$$

Conform principiului inducţiei matematice rezultă că $x_{n+2} = x_{n+1} +$
astfel propoziţia este demonstrată.

Bibliografie

1. **M. D. Bătineţu** - *Şiruri*, Editura Albatros, Bucureşti, 1979.
2. *Gazeta Matematică*, Colecţia 1895-2001.

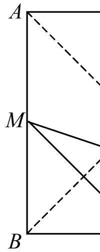
Asupra unei probleme de construcţie

Anca TIMOFTE, Alexandru ŢURCANU[1]

Punctul de plecare al acestei note a fost una dintre problemele
rezolvare absolvenţilor clasei a VII-a în cadrul **Concursului "Recrea
tice"** din 27 august 2002. Enunţul acestei probleme este următorul:

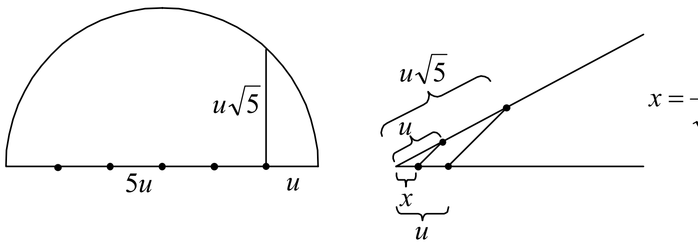
*Fie dat un segment $[MN]$. Construiţi cu rigla şi compasul un p
astfel încât $M \in [AB]$, $AM = MB$, iar $N \in [AC]$, $AN = 3NC$. (L
construcţiile care trebuie efectuate.)* (**Gabriel Popa**)

Prezentăm în continuare soluţia dată de autorul problemei, aşa cum
baremul de corectare:



Soluţia 1. *Să presupunem problema rezolvată* şi fie P mijlocul segmentului $[BC]$. Atunci $NP \| BD$, $PM \| AC$ (ca linii mijlocii), deci $NP \perp MP$ şi $m(\widehat{MPB}) = 45°$. Dacă a este lungimea laturii pătratului, atunci $MP = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $NP = = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$, deci $MN = \dfrac{a\sqrt{10}}{4}$, de unde $NP = \dfrac{1}{\sqrt{5}} MN$.

Construcţia. Vom lua ca unitate un segment u de lungime egală cu cea a segmentului $[MN]$.



Ca în figurile de mai sus, construim un segment de lungime $\dfrac{1}{\sqrt{5}}u$
cercul de diametru $[MN]$ cu cercul de centru N şi rază $\dfrac{1}{\sqrt{5}}u$, obţinân
Construim triunghiul dreptunghic isoscel de ipotenuză $[MP]$ şi aflăm a
al pătratului. Apoi, A şi C sunt simetricele lui B faţă de M, respectiv
se obţine ca intersecţie a paralelelor duse prin A şi C la BC, respectiv

Demonstrarea faptului că $ABCD$ astfel determinat este pătrat cu
dorite, este imediată. Evident că problema are soluţie, unică până la
planului.

Vom da mai jos încă două soluţii ale acestei probleme. Prima are av
foloseşte nici un punct auxiliar; este însă necesară o bună cunoaştere a

[1] Elevi, Şcoala nr.7 "Octav Băncilă", Botoşani

cu rigla şi compasul. A doua are la bază un raţionament mai elaborat,
numai construcţii la nivelul manualelor.

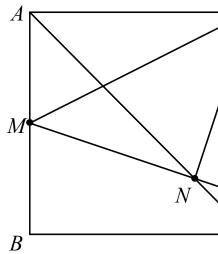
Soluţia 2. Pe figura şi notaţiile din prima soluţie, aplicăm teoren
în $\triangle AMN$:

$$MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cdot \cos(\widehat{MAN}) =$$
$$= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5a^2}{8}$$

deci $a = \dfrac{2\sqrt{10}}{5} MN$.

Rezultă următoarea *construcţie*: determinăm un segment de lungim
unde $u = MN$. Vârful A al pătratului este la intersecţia arcului ca
construit pe $[MN]$ drept coardă, cu cercul de centru M şi rază $\dfrac{a}{2}$. Afl
fiind simetricul lui A faţă de M etc.

Soluţia 3. *Presupunem problema rezolvată* şi aplicăm teorema lui Menelaus în $\triangle ABC$ cu transversala $M - N - P$; obţinem:



$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{BP}{PC} = 3 \Rightarrow BC = 2PC.$$

Aplicând acum Menelaus în $\triangle MNP$ cu transversala $C - N - A$, găsim:

$$\frac{PC}{CB} \cdot \frac{BA}{AM} \cdot \frac{MN}{NP} = 1 \Rightarrow \frac{MN}{NP} = 1 \Rightarrow MN = NP.$$

Să observăm că $\triangle DAM \equiv \triangle DCP$ (C.C.), de unde $MD = DP$ şi $\widehat{A}$
Ultima relaţie arată că

$$m(\widehat{MDP}) = m(\widehat{MDC}) + m(\widehat{CDP}) = m(\widehat{MDC}) + m(\widehat{ADM}) = m(\widehat{A}$$

aşadar $\triangle MDP$ este dreptunghic isoscel. Fie $\{T\} = MP \cap CD$; teorema
a semănării aplicată în $\triangle PBM$ cu $CT \| BM$ arată că $\dfrac{PT}{PM} = \dfrac{PC}{PB} = \dfrac{1}{3}$

Construcţia. Aflăm P ca simetric al lui M faţă de N. Intersect
diametru $[MP]$ cu mediatoarea acestui segment, determinând vârful D
Aflăm punctul $T \in [MP]$ care împarte segmentul în raportul $\dfrac{PT}{PM} =$
intersecţia dreptei DT cu semicercul de diametru $[DP]$ aflat în semipla
de dreapta DP ce conţine punctul N. Vârfurile A şi B ale pătratului
acum cu uşurinţă.

Observaţie. Problema se poate generaliza considerând că punctele
luate astfel încât $AM = m\,MB$ şi $AN = n\,NC$.

Câteva aplicaţii ale teoremei lui Case

Marius PACHIŢARIU[1]

O generalizare remarcabilă a *teoremei lui Ptolemeu* este *teorema*
numeşte *distanţă tangenţială* dintre cercurile $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$, notată d_{12}, lungi
lor comune exterioare.

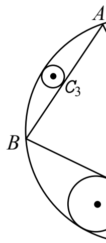
Teorema lui Casey. *Dacă cercurile $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_4$ sunt tange*
terior sau toate exterior) la cercul $\mathcal{C}$, ordinea punctelor de tangenţă
numerotarea acestor cercuri, atunci are loc relaţia:

$$d_{12} \cdot d_{34} + d_{23} \cdot d_{41} = d_{13} \cdot d_{24}.$$

Rezultatul rămâne adevărat dacă cercurile $\mathcal{C}_i$ (toate sau o parte
generează în puncte sau dacă cercul $\mathcal{C}$ devine dreaptă.

Aplicaţia 1. *Fie ABC un triunghi înscris în cercul $\mathcal{C}$ şi cercur*
tangente la $\mathcal{C}$ interior precum şi laturilor (BC), (CA) şi respectiv $(A$
A şi $\mathcal{C}_1$, B şi $\mathcal{C}_2$, C şi $\mathcal{C}_3$ să fie de părţi diferite faţă de BC, CA,
Notăm cu l_1, l_2, l_3 lungimile tangentelor din A, B, C la cercurile $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$
Are loc echivalenţa:

$$d_{12} = d_{23} = d_{31} \Leftrightarrow l_1 = \frac{b+c}{2},\ l_2 = \frac{c+a}{2},\ l_3 = \frac{a+b}{2}.$$



Soluţie. Observăm mai întâi că $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ sunt tangente la laturi în mijlocul acestora. Aplicând teorema lui Casey pentru cercurile $\mathcal{C}$ şi A, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_3$; $\mathcal{C}$ şi B, $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_1$; $\mathcal{C}$ şi C, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_2$, obţinem:

$$\frac{b}{2}d_{13}+\frac{c}{2}d_{12}=l_1 d_{23},\ \frac{c}{2}d_{12}+\frac{a}{2}d_{23}=l_2 d_{13},\ \frac{a}{2}d_{23}+\frac{b}{2}d_{13}=l_3 d_{12}.$$

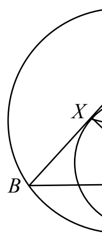
Din acestea, rezultă imediat implicaţia "$\Rightarrow$". Invers, după înlocuirea lui l_1 cu $\dfrac{b+c}{2}$ etc., aceste relaţii se scriu:

$$b\,(d_{13}-d_{23}) = c\,(d_{23}-d_{12})\,,\ c\,(d_{12}-d_{13}) = a\,(d_{13}-d_{23})\,,\ a\,(d_{23}-d_{12}) =$$

$$\text{i.e. } \frac{d_{12}-d_{13}}{a} = \frac{d_{23}-d_{12}}{b} = \frac{d_{13}-d_{23}}{c} = \frac{0}{a+b+c}$$

(suma numărătorilor fiind nulă). Deducem că $d_{12}-d_{13}=0$, $d_{23}-d_{12}=0$
deci $d_{12} = d_{23} = d_{31}$, q.e.d.

Aplicaţia 2. *Fie ABC un triunghi înscris în cercul $\mathcal{C}$ şi cu $m(\widehat{A}$*
$\mathcal{C}'\,(O', R')$ cercul tangent la $\mathcal{C}$ interior şi la laturile $[AB]$ şi $[AC]$. S
$R' = \dfrac{4}{3}r$, unde r este raza cercului înscris în triunghiul dat.



Soluţie. Fie $\{X\}=AB\cap\mathcal{C}'$, $\{Y\}=AC\cap\mathcal{C}'$ şi $l = AX = = AY = XY$ ($\triangle AXY$ este echilateral, căci $m(\widehat{A}) = 60°$). Relativ la $\mathcal{C}$ şi cercurile A, C, $\mathcal{C}'$, B aplicăm teorema lui Casey:

$$b\,(c-l) + c\,(b-l) = al,$$

[1] Elev, cl. a IX-a, Colegiul Naţional, Iaşi

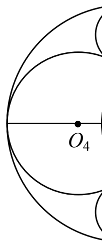
de unde obţinem că $l = \dfrac{2bc}{a+b+c} = \dfrac{bc}{p} = \dfrac{bc}{S}r = \dfrac{2bc}{bc\sin A}r = \dfrac{4}{\sqrt{3}}r$. Pe

$R' = O'X = \dfrac{XY}{2\sin 60^\circ} = \dfrac{l}{\sqrt{3}}$. Ca urmare, $R' = \dfrac{4}{3}r$.

Aplicaţia 3. *Cercurile $\mathcal{C}_i\left(O_i, r_i\right)$, $i = \{1,2,3,4\}$ sunt tangente (î merotării) la cercul $\mathcal{C}\left(O, r\right)$ şi, pentru orice $i \in \{1,2,3,4\}$, $\mathcal{C}_i$ este ta şi $\mathcal{C}_{i+1}$ ($\mathcal{C}_{-1}$ fiind $\mathcal{C}_4$, iar $\mathcal{C}_5$ fiind $\mathcal{C}_1$). Atunci, în condiţia că puncte cât şi O, O_3, O_4 sunt coliniare, avem:*

a) $4r_1r_2r_3r_4 = \left(r - r_1\right)\left(r - r_2\right)\left(r - r_3\right)\left(r - r_4\right)$, dacă $\mathcal{C}_i$ sunt tan la $\mathcal{C}$;

b) $4r_1r_2r_3r_4 = \left(r + r_1\right)\left(r + r_2\right)\left(r + r_3\right)\left(r + r_4\right)$, dacă $\mathcal{C}_i$ sunt tan la $\mathcal{C}$.

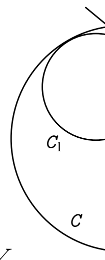


Soluţie. Se stabileşte uşor că două cercuri de raze a şi b tangente exterior au lungimea α a tangentei comune exterioare dată de $d = 2\sqrt{ab}$. Ca urmare, teorema lui Casey ne conduce la relaţia:

$$2\sqrt{r_1r_2} \cdot 2\sqrt{r_3r_4} + 2\sqrt{r_2r_3} \cdot 2\sqrt{r_1r_4} = d_{13} \cdot d_{24}.$$

Datorită coliniarităţii punctelor O, O_1 O_3, avem $d_{13}^2 = \left(2r - r_1 - r_3\right)^2 - \left(r_1 - r_3\right)^2$, adică $d_{13}^2 = 4\left(r - r_1\right)\left(r - r_3\right)$; analog $d_{24}^2 = 4\left(r - r_2\right)\left(r - r_4\right)$. Înlocuind în relaţia precedentă obţinem formula de la punctul a). Punctul b) se dovedeşte în mod

Aplicaţia 4. *Fie dat un cerc $\mathcal{C}$ şi pe el punctele A şi B. De o p a dreptei AB considerăm cercurile $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ tangente interior la $\mathcal{C}$ şi ta $[AB]$ în punctele X şi respectiv Y. Să se determine poziţia punctelor pentru care $d_{12} = \dfrac{1}{2}AB$.*



Soluţie. Cu teorema lui Casey aplicată lui $\mathcal{C}$ şi cercurilor $\mathcal{C}_1$, A, $\mathcal{C}_2$, B, obţinem $AX \cdot BY + AY \cdot BX = AB \cdot d_{12}$. Condiţia din enunţ este echivalentă cu

$$AX \cdot BY + AY \cdot BX = \frac{1}{2}AB \cdot AB \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2AX \cdot BY + 2AY \cdot BX = \left(AX + BX\right) \cdot \left(AY + BY\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AX \cdot BY + AY \cdot BX - AX \cdot AY - BX \cdot BY = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(AX - BX\right) \cdot \left(BY - AY\right) = 0 \Leftrightarrow AX = BX \text{ sau } AY = BY,$$

adică unul dintre punctele X şi Y trebuie să fie mijlocul coardei $[AB]$ (c fi oriunde pe $[AB]$) pentru a fi îndeplinită condiţia problemei.

Bibliografie.

1. **M. Drăguşin** - *Despre utilitatea unui rezultat prea puţin folosit: teore* G.M. 12/1995, 716-720.
2. **N. Roman** - *Asupra unor probleme date la O.I.M.*, G.M. 3/2000, 99-1

Extinderi de inele şi corpuri - o posibilă lecţie de recapitulare final[ă]

Dumitru GHERMAN[1]

Pentru ca recapitularea să aibă eficienţă, trebuie ca în organizarea
de unele principii:

- la recapitulare nu se parcurge din nou întreaga materie;
- trebuie să se urmărească, pe cât este posibil, realizarea unei leg
  versele ramuri ale matematicii şcolare;
- recapitularea trebuie să aducă elemente noi, probleme care pot fi
  prelucrarea creatoare a cunoştinţelor anterioare;
- se are în vedere stimularea lucrului individual al elevului, folosin
  indicată de profesor şi / sau căutând noi surse;
- recapitularea trebuie să ţină cont de structura şi cerinţele exame

În cele ce urmează, vom prezenta un proiect didactic pentru o pos
recapitulare finală la clasa a XII-a. Nu ne propunem să rezolvăm toa
sau să demonstrăm toate teoremele ce vor apărea; majoritatea aparţin f
şi poate fi consultată bibliografia.

I. Inelul întregilor pătratici. Fie d un număr întreg liber de păt

$$\mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right]=\left\{x\in\mathbb{C}\mid x=m+n\sqrt{d},\ m,n\in\mathbb{Z}\right\}.$$

1) $\left(\mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right];+,\cdot\right)$ este un subinel al corpului numerelor complexe,
de integritate.

2) $\mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right]$ este izomorf cu inelul matricelor de forma $\begin{pmatrix} m & n \\ dn & m \end{pmatrix}$,
raport cu operaţiile uzuale cu matrice.

3) Inelele $\mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right]$ şi $\mathbb{Z}\left[\sqrt{d'}\right]$ sunt izomorfe dacă şi numai dacă $d=$
în primul rând că un izomorfism f între cele două inele invariază elem
atunci el este bine determinat de valoarea $f\left(\sqrt{d}\right)$).

4) Subinelele unitare ale lui $\mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right]$ sunt de forma

$$A_n=\left\{a+bn\sqrt{d}\mid a,b\in\mathbb{Z}\right\},\quad n\in\mathbb{N}.$$

5) Definim aplicaţia *normă* $N:\mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right]\to\mathbb{Z}$, $N\left(m+n\sqrt{d}\right)=m^2$
notăm cu $\bar{x}=m-n\sqrt{d}$ conjugatul întregului pătratic $x=m+n\sqrt{d}$,
are proprietăţi asemănătoare modulului: $N(x)=x\cdot\bar{x}$, $N(xy)=N($
aici, $x\in U\left(\mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right]\right)\Leftrightarrow N(x)\in U(\mathbb{Z})=\{\pm1\}$.

6) Grupul multiplicativ al elementelor inversabile din $\mathbb{Z}[i]$ este $U(\mathbb{Z}[$

[1] Profesor, Liceul Teoretic "Mihail Sadoveanu", Paşcani

7) Fie $\alpha \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Q}$ astfel încât mulţimea $A = \{m + n\alpha \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$
de operaţiile uzuale din $\mathbb{C}$. Dacă A are exact patru elemente inver
$A = \mathbb{Z}[i]$.

8) Dacă $d \in \{2, 3, 5\}$, atunci $U(\mathbb{Z}[d])$ conţine o infinitate de elem
găsi în $U(\mathbb{Z}[d])$ elemente pozitive oricât de mici (este suficient să gă
element, considerând apoi puterile acestuia şi conjugatele lor).

Problemele **1-6** sunt rezolvate în [**3**]; problema **7** a fost propusă de
la etapa finală a Olimpiadei de Matematică în 1997, iar **8** poate fi găsit
examenului de bacalaureat din ultimii ani.

II Corpul numerelor pătratice. Fie d un număr întreg libe
definim

$$\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right) = \left\{z \in \mathbb{C} \mid z = a + b\sqrt{d},\ a, b \in \mathbb{Q}\right\}.$$

1) $\left(\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right); +, \cdot\right)$ este subcorp al lui $\mathbb{C}$ (inversul elementului n
este $\dfrac{1}{a^2 - db^2}\left(a - b\sqrt{d}\right) \in \mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$, deoarece $a^2 - db^2 \neq 0$; altfel,
$\sqrt{d} = \pm\dfrac{a}{b} \notin \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$!).

2) $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ este izomorf cu mulţimea matricelor de forma $\begin{pmatrix} a & b \\ db & a \end{pmatrix}$,
formează corp în raport cu operaţiile uzuale.

3) Corpurile $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ şi $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d'}\right)$ sunt izomorfe dacă şi numai dac
gurele automorfisme ale corpului $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ sunt aplicaţia identică şi cea
ambele invariind elementele lui $\mathbb{Q}$.

4) Dacă un subcorp $K \subset \mathbb{C}$ este astfel încât $End\ K = \{f, g\}$ şi f
$x \in \mathbb{Q}$, atunci există un întreg liber de pătrate $d \neq 1$ pentru care $K =$

5) Dacă $f \in \mathbb{Q}[x]$, atunci $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$, $\forall z \in \mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$; de aic
orice polinom cu coeficienţi raţionali, are eventualele rădăcini din $\mathbb{Q}\left(\sqrt{}\right.$
conjugate.

Problemele **1-3** pot fi găsite în [**3**], problema **4** a fost propusă la
Olimpiadei de Matematică din 1988 de către *Marcel Ţena*, iar **5** poat
urmând pas cu pas demonstrarea unor rezultate analoage din manuale

III Extinderi pătratice. Corpuri pitagorice. Fie $r \in \mathbb{Q}_+^*$ astfel
definim ca mai sus corpul $\mathbb{Q}(\sqrt{r})$, care este subcorp al lui $\mathbb{R}$ din poziti

1) $\mathbb{Q}(\sqrt{r})$ este cel mai mic subcorp al lui $\mathbb{R}$ care include $\mathbb{Q} \cup \{\sqrt{r}\}$.

2) Putem gândi pe $\mathbb{Q}(\sqrt{r})$ ca un $\mathbb{Q}$-spaţiu vectorial, definind înm
torilor" din $\mathbb{Q}(\sqrt{r})$ cu "scalari" din $\mathbb{Q}$ prin restricţionarea înmulţirii
$\mathbb{Q}(\sqrt{r})$ (de fapt, din $\mathbb{R}$). Dimensiunea acestui spaţiu vectorial este 2
$\{1, \sqrt{r}\}$ (a se găsi şi alte baze!).

3) Polinomul $f = X^2 - r \in \mathbb{Q}[X]$ este ireductibil peste $\mathbb{Q}$, dar ad
$\sqrt{r}$ în $\mathbb{Q}(\sqrt{r})$; orice alt polinom $g \in \mathbb{Q}[X]$ care admite rădăcina $\sqrt{r}$ se
Spunem că f este *polinomul minimal* al lui $\sqrt{r}$.

4) Din puncte de vedere geometric, extinderea lui $\mathbb{Q}$ la $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ se
compasul. De exemplu, $\sqrt{r}$ este abscisa unuia dintre punctele de i
cercului de centru O şi rază $\frac{1}{2}(r+1)$ cu dreapta $y=\frac{1}{2}(r-1)$.

5) Considerând $r_1, r_2, \dots \in \mathbb{Q}_+^*$, definim $\mathbb{Q}_{r_1}=\mathbb{Q}\left(\sqrt{r_1}\right)$, $\mathbb{Q}_{r_2}=\mathbb{Q}$
, $\mathbb{Q}_{r_n}=\mathbb{Q}_{r_{n-1}}\left(\sqrt{r_n}\right)$, ... ; spunem că am *adjuncţionat* la $\mathbb{Q}$, pe rân
$\sqrt{r_1}, \sqrt{r_2}, \dots, \sqrt{r_n}, \dots$. Am construit astfel şirul de extinderi

$$\mathbb{Q}\subset\mathbb{Q}_{r_1}\subset\mathbb{Q}_{r_2}\subset\cdots\subset\mathbb{Q}_{r_n}\subset\cdots\subset\mathbb{R}.$$

Cum $\mathbb{Q}$ este mulţime numărabilă, putem alege $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ astf
număr obţinut, pornind de la $\mathbb{Q}$, prin efectuarea unui număr finit de adu
înmulţiri, împărţiri şi extrageri de rădăcini pătrate (un astfel de numă
număr pitagoric) să aparţină unui anumit $\mathbb{Q}_{r_n}$. Notăm $\mathbb{K}=\bigcup_n \mathbb{Q}_{r_n}$ -
merelor pitagorice; se arată că aceasta nu depinde de alegerea şirului $r_1,$
şi că formează un subcorp al lui $\mathbb{R}$, închis la operaţiile aritmetice şi
rădăcinii pătrate şi care este "cel mai mic" (în sensul incluziunii) cu
etăţi.

IV Construcţii cu rigla şi compasul.

1) Dacă L este un subcorp al lui $\mathbb{R}$ iar (D) este o dreaptă ce trece prin
având coordonatele în $L\times L$, atunci ecuaţia dreptei are coeficienţi di
un cerc care are centrul de coordonate din $L\times L$ şi trece printr-un as
are coeficienţii ecuaţiei sale din L.

2) Fie L subcorp în $\mathbb{R}$, iar $M(x,y)$ un punct în plan; spunem că
structibil cu rigla şi compasul plecând de la L dacă el poate fi obţinut p
de drepte şi cercuri având coeficienţii în L. Dacă M este un astfel de
fie $x,y\in L$, fie există $u\in L, u>0$ astfel încât $x,y\in L\left(\sqrt{u}\right)$.

3) Numim *număr constructibil cu rigla şi compasul* un număr real
donată a unui punct constructibil. Se arată că orice număr real cons
totodată şi număr pitagoric. Ca o consecinţă, polinomul minimal al un
structibil are gradul putere a lui 2. De aici rezultă *imposibilitatea du*
trisecţiei unghiului şi cuadraturii cercului (pentru amănunte, v.[**1**],[**2**],

4) Corpul ordonat $\mathbb{K}\subset\mathbb{R}$ se bucură de un anumit tip de comple
mită *completitudine euclidiană*: cercetat cu rigla şi compasul, nu se va
niciodată că lipseşte vreun punct. Tocmai confuzia dintre această c
şi *completitudinea Cantor - Dedekind* a lui $\mathbb{R}$ a întârziat soluţionarea
clasice ale antichităţii.

Bibliografie

1. **T. Bîrsan** - *Trisecţia unghiului*, Recreaţii Matematice, 2/2001, 38-41.
2. **E. Moise** - *Geometrie elementară dintr-un punct de vedere superior*,
reşti, 1980.
3. **C. Niţă, T. Spircu** - *Probleme de structuri algebrice*, Ed. Tehnică, Bu
4. **I. Tofan, C. Volf** - *Algebră - Inele, Module, Teorie Galois*, Ed. Matrix
reşti, 2001.

Metode şi procedee de rezolvare a proble
de maxim sau de minim

Gheorghe CROITORU[1]

Ne propunem în cele ce urmează să prezentăm, prin exemple, o seri
şi metode prin care pot fi soluţionate problemele de maxim sau de minir
pe mai multe căi a unei aceleiaşi probleme va permite cititorului să com
acestora, precum şi să aleagă contextul cel mai potrivit pentru aplica
alteia dintre ele.

Problema 1. *Să se afle minimul expresiei* $E(x) = x^2 + \dfrac{a^3}{x}$, x
$a \in \mathbb{R}_+^*$ *este dat.*

Soluţia 1. Aplicând inegalitatea mediilor, obţinem că

$$E(x) = \frac{x^3 + a^3}{x} = \frac{x^3 + \frac{a^3}{2} + \frac{a^3}{2}}{x} \geq \frac{3\sqrt[3]{x^3 \cdot \frac{a^3}{2} \cdot \frac{a^3}{2}}}{x} = \frac{3\sqrt[3]{2}\ldots}{2}$$

egalitatea fiind atinsă atunci când $x^3 = \dfrac{a^3}{2}$, i.e. $x = \dfrac{a}{\sqrt[3]{2}}$. Urmeaz
$= \dfrac{3\sqrt[3]{2}a^2}{2}$.

Soluţia 2. Se ştie că, dacă $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ şi suma $x + y = const$, at
$x^m y^n$ $(m, n \in \mathbb{N}^*)$ este maxim pentru $\dfrac{x}{m} = \dfrac{y}{n}$; dual, dacă $x^m y^n =$
suma $x + y$ este minimă pentru $\dfrac{x}{m} = \dfrac{y}{n}$ (aceste afirmaţii se extind la u
de termeni / factori şi la cazul în care exponenţii sunt din $\mathbb{Q}_+^*$).

Întrucât $x^2 \left(\dfrac{a^3}{x}\right)^2 = a^6 = const$, urmează că $E(x)$ are valoare n
când $x^2 = \dfrac{a^3}{2x} \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{\sqrt[3]{2}}$. Se obţine $E_{\min} = E\left(\dfrac{a}{\sqrt[3]{2}}\right) = \dfrac{3\sqrt[3]{2}a^2}{2}$.

Soluţia 3. Fie funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = E(x)$. Extremele acestei funcţii se pot găsi folosind prima derivată. Avem că $f'(x) = \dfrac{2x^3 - a^3}{x^2}$, care se anulează pentru $x = \dfrac{a}{\sqrt[3]{2}}$. Tabelul de variaţie este prezentat alăturat.

x	0		$\frac{a}{\sqrt[3]{2}}$
f'	$-$	$-$	0
f	∞	$\searrow$	E_{m}

Problema 2. *Aflaţi valorile extreme ale expresiei* $E(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$
(**Paul Georgescu, Gabriel Popa,** *Problema 24739*, G.M. 9/2002)

Soluţia 1. Pentru $x \neq (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, notând $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, obţ
$= \dfrac{-3t^2 + 2t - 3}{t^2 + 3}$, $t \in \mathbb{R}$. Pentru a afla mulţimea valorilor lui E, fie $y = $
$t \in \mathbb{R}$, deci $t^2(y+3) - 2t + (3y+3) = 0$, unde $t \in \mathbb{R}$. Se impune condiţ

[1] Profesor, Liceul Teoretic "Al. I. Cuza", Iaşi

ce conduce la $y \in \left[-2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}, -2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$. Pe de altă parte, $E\left((2k +\right.$

$\in \left(-2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}, -2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$. Urmează că $E_{\min} = -2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$, iar $E_{\max}$

(se dovedeşte uşor faptul că aceste valori extreme sunt efectiv atinse).

Soluţia 2. Definim punctele $M(\cos x, \sin x)$, $A(-2, 3)$; atunci $E(x$ panta dreptei AM. Pentru $x \in \mathbb{R}$, M parcurge cercul trigonometric şi exteriorul acestui cerc, urmează că valorile extreme ale lui $E(x)$ sunt când AM este una dintre tangentele duse din A la cerc. Fie $d : y - 3$ ecuaţia unei drepte prin A; aceasta este tangentă la $\mathcal{C}(0,1)$ când *di* Folosind formula care dă distanţa de la un punct la o dreaptă, obţinem

$$\frac{|2m+3|}{\sqrt{m^2+1}} = 1 \Leftrightarrow 3m^2 + 12m + 8 = 0 \Leftrightarrow m \in \left\{-2 \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}\right\}$$

În concluzie, $E_{\min} = -2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$, iar $E_{\max} = -2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Soluţia 3. Putem evident utiliza derivata întâi în studiul funcţiei a siei $E(x)$.

Problema 3. *Dintr-o bară metalică de formă cilindrică se obţine p bară paralelipipedică. Să se determine dimensiunile dreptunghiului de încât pierderea de material să fie minimă.*

Soluţia 1. Notând cu x şi y dimensiunile dreptunghiului şi cu R ra problema revine la a găsi maximul funcţiei $f(x, y) = xy$, în condiţ $x^2 + y^2 = 4R^2$. Însă, cum x, y sunt pozitive, produsul xy este ma produsul x^2y^2. Deoarece suma $x^2 + y^2$ este constantă, x^2y^2 este maxim $= y^2 = 2R^2$. Dimensiunile dreptunghiului căutat sunt, prin urmare, x

Soluţia 2. Studiul funcţiei $f(x,y) = xy$ pentru $x, y > 0$, $x^2 + y^2 =$ studiul funcţiei $g(x) = x\sqrt{4R^2 - x^2}$, $x \in (0, 2R)$ şi acesta se face apelând

Soluţia 3. Când se caută extremele unei funcţii $f(x, y)$, între vari o legătură de forma $\varphi(x, y) = 0$, se aplică în general *metoda multip Lagrange*. Dacă f, φ sunt de clasă C^1, considerăm funcţia auxiliară

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Punctul (x_0, y_0) din domeniul lui f este punct de extrem al acestei f numai dacă (x_0, y_0) este soluţie a sistemului

$$F'_x(x, y) = 0, \quad F'_y(x, y) = 0, \quad \varphi(x, y) = 0,$$

iar egalităţile $\varphi'_x(x_0, y_0) = 0$, $\varphi'_y(x_0, y_0) = 0$ nu sunt satisfăcute simult

În cazul nostru, $F(x, y) = xy + \lambda\left(x^2 + y^2 - 4R^2\right)$ şi avem de rezol

$$y + 2\lambda x = 0, \quad x + 2\lambda y = 0, \quad x^2 + y^2 - 4R^2 = 0,$$

neadmiţând soluţiile pentru care $2x = 2y = 0$. Obţinem imediat că $x =$

Problema 4. *Două oraşe A, B sunt situate respectiv la 10 km şi râu rectiliniu, iar proiecţia lungimii AB pe direcţia râului este de 20 k oraşe trebuie alimentate cu apă de la o uzină amplasată pe marginea r*

poziţia uzinei pentru care lungimea conductelor ce o leagă de cele dou
minimă.

Soluţia 1. Dacă A'' este simetricul lui A faţă de direcţia râului, iar
uzinei, evident că $[AM] \equiv [A''M]$, deci $AM + MB = A''M + MB$. Acea
sumă este minimă când A'', M, B sunt puncte coliniare; punctul M
a uzinei astfel obţinut se caracterizează prin congruenţa unghiurilor
MA, respectiv MB cu normala la direcţia râului (v. figura 1).

Notând $x = A'M$, din $\triangle MAA' \sim \triangle MBB'$ obţinem că

$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{A'M}{MB'} \Leftrightarrow \frac{10}{15} = \frac{x}{20 - x} \Leftrightarrow x = 8 \text{ (km)}.$$

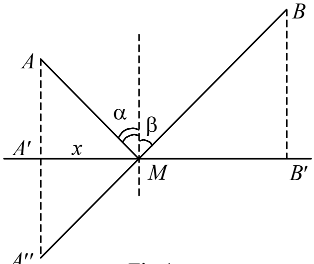


Fig.1

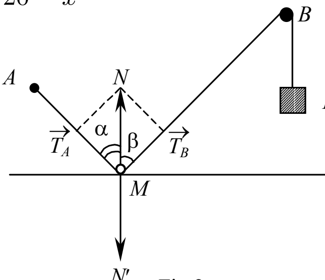


Fig.2

Soluţia 2. Un fir inextensibil de lungime suficient de mare este fixa
printr-un inel M ce poate culisa pe direcţia d şi apoi printr-un mic scrip
Capătul liber are ataşată o greutate P, care la echilibru se va afla cât m
sol, minimizând astfel lungimea $MA + MB$. În această poziţie de echilib
$\overrightarrow{T_A}$ şi $\overrightarrow{T_B}$ care acţionează în fire sunt egale în modul, paralelogramul forţe
deci punctul căutat M este determinat din nou de congruenţa unghiur

Soluţia 3. Locul geometric al punctelor X pentru care $XA + XB$
o elipsă de focare A şi B. Considerând fasciculul de elipse omofocale (
B), punctul căutat M este dat de intersecţia cu d a acelei elipse din fa
tangentă la d. Proprietatea optică a elipsei asigură din nou congruenţ
α şi β.

Soluţia 4. Cu notaţiile din Soluţia 1, $AM = \sqrt{100 + x^2}$, $MB = \sqrt{2}$
şi avem de determinat minimul funcţiei $f(x) = \sqrt{100 + x^2} + \sqrt{225 + (20-}$

Notă. Există multe alte procedee şi metode de abordare a probl
trem; menţionăm, pentru importanţa lor, metodele programării liniare
grafurilor. Pentru alte aplicaţii, poate fi consultată bibliografia.

Bibliografie.

1. **M. Cerchez** - *Aplicaţii ale matematicii în practică*, E.D.P., Bucureşti.
2. **A. Leonte, C. Niculescu** - *Culegere de probleme de algebră şi analiz*
Ed. "Scrisul Românesc", Craiova, 1981.
3. **C. Udrişte, E. Tănăsescu** - *Minime şi maxime ale funcţiilor reale de v*
Ed. Tehnică, Bucureşti, 1980.
4. *Gazeta Matematică* (colecţie).

Comentarii asupra unui exerciţiu

Dan PLĂEŞU[1]

Exerciţiu. *Fie numerele naturale nenule a, b. Să se demonstreze c*

$$19 \mid (5a+4b) \Leftrightarrow 19 \mid (9a+11b)\,.$$

Soluţie (tip "culegere"). 1) $19 \mid (5a+4b) \Rightarrow 19 \mid 11\,(5a+4b) \Rightarrow$
$19 \mid (55a+44b) \Rightarrow 19 \mid [19a+4\,(9a+11b)] \Rightarrow 19 \mid 4\,(9a+11b) \overset{(19,4)=1}{\Rightarrow} 1$

2) $19 \mid (9a+11b) \Rightarrow 19 \mid 5\,(9a+11b) \Rightarrow 19 \mid (45a+55b) \Rightarrow$
$19 \mid [19b+9\,(5a+4b)] \Rightarrow 19 \mid 9\,(5a+4b) \overset{(19,9)=1}{\Rightarrow} 19 \mid (5a+4b)\,.$

Comentariu metodic

Se poate pune, firesc, întrebarea: *prin care raţionament s-a ajuns la expresia* $5a+4b$ *trebuie înmulţită cu* 11*, iar* $9a+11b$ *cu* 5? Prezent urmează un punct de vedere în această privinţă.

Determinăm numerele naturale $n, x, y, x \neq 0$ astfel încât să avem:

$$n\,(5a+4b) = 19\,(xa+yb) + z\,(9a+11b)\,.$$

Comparând coeficienţii lui a şi b obţinem:

$$\begin{cases} 19x+9z=5n \\ 19y+11z=4n \end{cases}.$$

Înmulţind prima relaţie cu 4 şi a doua cu 5 şi scăzând membru cu mem
$76x-95y=19z$, de unde, prin înpărţirea la 19, rezultă:

$$4x-5y=z.$$

Dăm lui x şi y acele valori pentru care expresia $x+y+z$ este minimă şi
malitatea expresiei precedente nu este necesară ci recomandată pentru
calculelor!). Astfel, considerând $x=1$, $y=0$ obţinem $z=4$. Rezultă n
egalitatea:

$$11\,(5a+4b) = 19a+4\,(9a+11b)\,.$$

În mod analog, pentru demonstrarea implicaţiei reciproce, determin
naturale $n, x, y, z \neq 0$ astfel încât să avem:

$$n\,(9a+11b) = 19\,(xa+yb) + z\,(5a+4b)\,.$$

Efectuând calculele, se obţine $z=-11x+9y$. Rezultă, luând $x=0$, y
şi $n=5$. Deci, avem:

$$5\,(9a+11b) = 19b+9\,(5a+4b)\,.$$

Observaţie. Raţionamentele sunt valabile şi pentru numere întreg

În încheiere, propunem cititorilor demonstrarea următoarelor echiv

$$\begin{array}{ll} 1) & 11 \mid (2a+5b) \Leftrightarrow 11 \mid (3a+2b)\,, \\ 2) & 23 \mid (2a+3b) \Leftrightarrow 23 \mid (9a+2b)\,, \\ 3) & 19 \mid (11a+2b) \Leftrightarrow 19 \mid (18a+5b)\,. \end{array}$$

[1] Profesor, Şcoala Normală "Vasile Lupu", Iaşi

Câteva probleme privind triplete pitagor

Mircea CRÂŞMĂREANU[1]

Subiectul "triplete pitagoreice" are o istorie bogată, fiindu-i dedica
ticole (a se vedea în acest sens capitolul IV din [**2**], unde la pagina 189
câteva tabele cu astfel de triplete).

Definiţie. *Tripletul de numere naturale nenule* (x, y, z) *cu* max
numeşte pitagoreic dacă $x^2 + y^2 = z^2$.

Se ştie că forma generală a unui triplet pitagoreic ([**1**], [**2**, ex.5.
este:

$$x = \alpha^2 - \beta^2,\ y = 2\alpha\beta,\ z = \alpha^2 + \beta^2,$$

cu α, β numere naturale nenule şi prime între ele, adică $(\alpha, \beta) = 1$.

În cele ce urmează prezentăm câteva generalizări ale unor rezultate
triplete pitagoreice, rezultate aflate în bibliografia română.

1. $60 \mid xyz$.

Demonstraţie. Avem $xyz = 2\alpha\beta\left(\alpha^2 - \beta^2\right)\left(\alpha^2 + \beta^2\right) = 2\alpha\beta\left(\alpha^4\right.$

(i) Divizibilitatea cu $3\,(5)$. Dacă α sau β este multiplu de $3\,(5)$ am te
nu, conform teoremei lui Fermat, avem $\alpha^2 \equiv \beta^2 \equiv 1 \pmod 3$ $\left(\alpha^4 \equiv \beta^4\right.$
de unde rezultă divizibilitatea cu 3 şi 5.

(ii) Divizibilitatea cu 4. Deoarece $(\alpha, \beta) = 1$ cel mult unul dintre
par.

(ii_1) $\alpha = 2k$, $\beta = 2l + 1 \Rightarrow xyz = 4k\,(2l+1)\left(4k^2 - 4l^2 - 4l - 1\right) \times$
$\times \left(4k^2 + 4l^2 + 4l + 1\right)$

(ii_2) $\alpha = 2k + 1$, $\beta = 2l + 1 \Rightarrow xyz = 16\,(2k+1)\,(2l+1)\left(k^2 + k -\right.$
$\times \left(2k^2 + 2k + 2l^2 + 2l + 1\right)$.

În concluzie avem şi divizibilitatea cu 4.

Observaţie. Divizibilitatea cu 4 constituie *Problema C:827*, G.M.-1
Augustin Stan, iar divizibilitatea cu 5 *Problema E:6303*, G.M.-8/197
În [**2**] la pagina 171 este citat **P. Lenthéric** ca fiind autor al acestui rez
anului 1830!

2. *z şi orice putere a sa este suma a două pătrate diferite.*

Demonstraţie. Pentru z avem concluzia datorită relaţiei (1) cu $(\alpha,$
tru puterile lui z aplicăm *Problema E:5888**, G.M.-5/1977, autor **Şte**
(pentru rezolvare a se vedea G.M.-10/1977, p.405-406):

Dacă un număr natural este suma a k pătrate diferite atunci oric
este suma a k pătrate diferite.

3. *Se cer lungimile catetelor unui triunghi dreptunghic aşa încât p*
fie de p ori perimetrul, cu p un număr prim dat.

[1] Lector dr., Facultatea de matematică, Univ. "Al. I. Cuza", Iaşi

Demonstraţie. Din $xy = p(x+y+z)$ rezultă $2\alpha\beta\left(\alpha^2-\beta^2\right) = $
adică $\beta(\alpha-\beta) = p$. Cum p este număr prim rezultă că avem soluţiile
$(1,p), (p,1)$ deci $(\alpha,\beta) = (p+1,1), (p+1,p)$. În concluzie avem:

(i) $x = (p+1)^2 - 1^2 = p(p+2)$, $y = 2(p+1)$,

(ii) $x = (p+1)^2 - p^2 = 2p+1$, $y = 2p(p+1)$.

Observaţie. Pentru $p = 2$ se obţine *Problema OG:111*, G.M.-
Valer Pop.

4. (G.M.-5/1979, *Problema O:35*, **Bucur B. Ionescu**) *Există tripl*
cu x, y, z numere prime?

Soluţie. Din $y = 2\alpha\beta$ rezultă singura posibilitate $\alpha = \beta = 1$ dar a
$x = \alpha^2 - \beta^2 = 0$, imposibil. Deci răspunsul este negativ.

5. (G.M.12/1979, *Problema E:6736**, **I. Joldiş**) $x+y+z \mid xy$.

Demonstraţie. $x+y+z = 2\alpha(\alpha+\beta)$, iar $xy = 2\alpha\beta\left(\alpha^2-\beta^2\right)$.

6. (*Problema 7.8*, [**3**, p.190 + p.199]) $x^2 - xy + y^2$ *este suma a do*

Demonstraţie. $x^2-xy+y^2 = \left(\alpha^2-\beta^2\right)^2 - 2\alpha\beta\left(\alpha^2-\beta^2\right) + 4\alpha^2\beta^2 =$
$+\alpha^2(\alpha-\beta)^2$.

7. *Dacă p şi q sunt numere naturale nenule şi prime între ele,*
ecuaţia diofantică $p^2x^2 + q^2y^2 = 2p^2q^2z^2$.

Soluţie. Considerând $x = qu$ şi $y = pv$ obţinem $u^2 + v^2 = 2z^2$ de
$z^2 = \left(\dfrac{u+v}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{u-v}{2}\right)^2$ şi deci $\dfrac{u-v}{2} = 2\alpha\beta$, $\dfrac{u+v}{2} = \alpha^2-\beta^2$, z
concluzie:

$$x = q\left(\alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2\right),\ y = p\left(\alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2\right),\ z = \alpha^2 +$$

cu $(\alpha,\beta) = 1$.

Observaţie. Pentru $p = 2$, $q = 3$ se obţine *Problema 5.9* din [**3**, p.

Bibliografie

1. **V. Claudian** - *Analiză diofantică,* G.M.-1/1970, 1-9.
2. **L. E. Dickson** - *History of the theory of numbers, vol. II - Diophan*
Chelsea, N. Y., 1952.
3. **P. Radovici-Mărculescu** - *Probleme de teoria elementară a numerelor*
Seria "Culegeri de probleme de matematică şi fizică", Bucureşti, 1986.

Câteva aplicaţii ale inegalităţii Cauchy-Buni

Ioana CRĂCIUN şi Gheorghe CRĂCIUN

Dacă $a_1, a_2, \ldots a_n$ şi $b_1, b_2, \ldots b_n$ sunt numere reale, $n \in N$, $n \geq 2$,
inegalitatea Cauchy-Buniakowski:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq \left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots\right.$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{b_n}$ *sau* $a_i = b_i = 0,$

Demonstraţie. Notăm $S\left(a^2\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2$, $S(ab) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_kb_k$. Avem:

$$0 \leq (a_ib_j - a_jb_i)^2 = a_i^2b_j^2 - 2(a_ib_j)(a_jb_i) + a_j^2b_i^2, \quad i, j = \overline{1,}$$

Sumăm după j şi obţinem: $0 \leq a_i^2 S\left(b^2\right) - 2a_ib_iS(ab) + b_i^2 S\left(a^2\right)$, $i =$
acum după i: $0 \leq S\left(a^2\right)S\left(b^2\right) - 2S^2(ab) + S\left(a^2\right)S\left(b^2\right)$, adică $S^2(ab)$
q.e.d.

Aplicaţii

1. *Fie pătratul $ABCD$ şi M, N două puncte pe cercul înscris în ac*
se arate că

$$\mathcal{A}_{ABCD} \geq \frac{1}{3}(AM \cdot AN + BM \cdot BN + CM \cdot CN + DM \cdot D$$

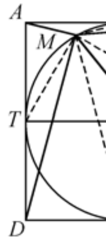
Fie P, R, S, T mijloacele laturilor AB, BC, CD, DA. Din teorema m

$$MP^2 = \frac{MA^2 + MB^2}{2} - \frac{AB^2}{4}, \quad MR^2 = \frac{MB^2 + MC^2}{2} - \frac{B}{}$$

$$MS^2 = \frac{MC^2 + MD^2}{2} - \frac{CD^2}{4}, \quad MT^2 = \frac{MD^2 + MA^2}{2} - \frac{D}{}$$

Adunând obţinem

$$MP^2 + MR^2 + MS^2 + MT^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 -$$



Triunghiurile PMS şi TMR sunt dreptunghice, deci $MP^2 + MS^2 = PS^2 = AB^2$ şi $MT^2 + MR^2 = TR^2 = AB^2$. Adunând obţinem $MP^2 + MS^2 + MT^2 + MR^2 = 2AB^2$, deci $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 3AB^2$ (egalitate cunoscută). Analog, $NA^2 + NB^2 + NC^2 + ND^2 = 3AB^2$. Folosind inegalitatea Cauchy-Buniakowski, avem:

$$\left(MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2\right)\left(NA^2 + NB^2 + NC^2 + ND\right.$$

$$\geq (AM \cdot AN + BM \cdot BN + CM \cdot CN + DM \cdot DN)^2 \text{ sau}$$

$$9AB^2 \geq (AM \cdot AN + BM \cdot BN + CM \cdot CN + DM \cdot DN)^2$$

$$\Leftrightarrow 3\mathcal{A}_{ABCD} \geq AM \cdot AN + BM \cdot BN + CM \cdot CN + DM \cdot D$$

2. *Fie $a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathbb{R}$. Să se afle $x_1, x_2, \ldots x_n$ ştiind că $a_1x_1 +$*
$+a_nx_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2$ şi $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2$.

[1] Profesori, Plopeni (Prahova)

Conform inegalităţii C-B, avem:

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)^2 \le \left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdot\cdot$$

cu egalitate dacă $x_i = ka_i$, $i = \overline{1,n}$. Ţinând cont de condiţiile din e

că $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2\right)^2 \le \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2\right)$, care are loc cu semnul de egalita

relaţia precedentă este o egalitate şi rezultă că $x_i = ka_i$, $i = \overline{1,n}$. Înloc

condiţie din enunţ, obţinem: $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 = k^2 \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2$, deci $k^2 = 1$ şi $x_i = a_i$,

Observaţie. Pentru $n = 3$ şi $a_1 = 2$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$ obţinem prob
(**Alfred Eckstein**, G.M. - 11/2000).

3. *Fie $A_1, A_2, \ldots A_n$ un poligon convex şi M un punct în inter
proiectează M pe laturile $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$ în punctele $M_1, M_2, .$
arate că:*

$$A_1M_1{}^2 + A_2M_2{}^2 + \cdots + A_nM_n{}^2 \ge \frac{1}{4}\left(A_1A_2{}^2 + A_2A_3{}^2 + \cdots + A$$

Fie $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ fixat. În triunghiurile MA_iM_i şi $MA_{i+1}M_i$
rema lui Pitagora: $M_iM^2 = A_iM^2 - A_iM_i{}^2 = A_{i+1}M^2 - A_{i+1}M_i^2$
$A_{n+1} = A_1$). Scriind a doua egalitate pentru $i = \overline{1,n}$ şi sumând, găsim

$$\sum_{i=1}^{n} A_iM_i{}^2 = \sum_{i=1}^{n} A_{i+1}M_i{}^2.$$

Dacă notăm $A_iM_i = x_i$, iar $A_iA_{i+1} = a_i$, această ultimă relaţie
$+x_2^2 + \cdots + x_n^2 = (a_1 - x_1)^2 + (a_2 - x_2)^2 + \cdots + (a_n - x_n)^2$ sau, efectu
$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 - 2(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdot$
$\Leftrightarrow a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = \frac{1}{2}\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)$. Aplicând ineg
avem: $(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)^2 \le \left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)\left(a_1^2 + a_2^2 +\right.$
egalitate dacă şi numai dacă $a_i = kx_i$, $i = \overline{1,n}$. În consecinţă, rezultă

$$\left(\frac{1}{2}\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\right)^2 \le \left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots\right.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right) \le x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2,$$

adică relaţia dorită. Pentru a avea egalitate punem condiţia $a_i =$
găsim $k = 2$. Deci $M_1, \ldots M_n$ sunt pe mediatoarele laturilor poligonu
inscriptibil, iar M va fi centrul cercului circumscris lui.

4. *Să se determine suma elementelor mulţimii* $M = \left\{\overline{abc} \mid \frac{a+b}{\sqrt{3(a^2+}}\right.$

Inegalitatea $(a + b + c)^2 \le 3\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$ se deduce imediat cu a
lităţii C-B. Deci $\frac{a+b+c}{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}} \le 1$, cu egalitate pentru $a = b$
că $M = \{111, 222, 333, \ldots, 999\}$ şi $111 + 222 + \cdots + 999 = 111(1 +$
$= 111 \cdot 45 = 4995$.

Concursul "Recreaţii Matematice"

Ediţia a II-a, Iaşi, 27 August 2002

Clasa a VII-a

1. Fie $x, y, z \in (0, \infty)$ cu $x + y + z = 1$. Să se determine cele mai
care le pot lua expresiile

$$E = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}; \quad F = \left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \left(\frac{zx}{y}\right)^2.$$

Cornel Noană, Focşani şi Lucian Tuţes

2. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $x = \sqrt{n^2 + n}$.

a) Să se arate că $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ şi să se afle $[x]$.

b) Să se determine primele două zecimale de după virgulă ale
$n = 2002^{2002}$.

Cornel Noa

3. Fie dat un segment $[MN]$. Construiţi numai cu rigla şi compa
$ABCD$ astfel încât $M \in [AB]$, $AM = MB$, iar $N \in [AC]$, $AN = 3N$
toate construcţiile care trebuie efectuate.)

Gabrie

Clasa a VIII-a

1. Dacă suma, produsul şi câtul a două numere iraţionale sunt, fi
raţionale, calculaţi suma cuburilor celor două numere.

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi (Recreaţii Matema

2. Să se rezolve în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ecuaţia $x^2(y + 1) + y^2(x + 1) + 1 = 0$.

Gabrie

3. Fie $ABCA'B'C'$ un trunchi de piramidă oarecare. Notăm cu G,
greutate ale bazelor, iar $\{D\} = BC' \cap CB'$, $\{E\} = AC' \cap CA'$, $\{F\} =$
se arate că dreptele BE, CF şi GG' sunt concurente.

Dan B

Clasa a IX-a

1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $x^n - 3[x] + 2 = 0$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Cornel Noa

2. Să se arate că pentru orice $\alpha \in (0, 2\pi)$, există $n \in \mathbb{Z}$ astfel încât

Gheorgh

3. Fie D_b, D_c, F_a, E_a puncte de tangenţă ale cercurilor exînscrise tr
cuţitunghic ABC cu dreptele suport ale laturilor, astfel încât $B \in (D_cC$
$B \in (AF_a)$, $C \in (AE_a)$. Să se arate că: $D_cF_a \| D_bE_a \Leftrightarrow \sin^2\frac{A}{2} = \sin^2$

Temistocle

Clasa a X-a

1. Fie $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$.

a) Să se arate că dacă toate rădăcinile polinomului sunt reale şi m
2, atunci $(-1)^n P(1) + a_{n-1} + 2n \geq 1$.

$b)$ Să se arate că dacă toate rădăcinile polinomului sunt reale, pozi

decât 2, atunci $\dfrac{2^n + 2^{n-2}a_{n-2} + 2^{n-4}a_{n-4} + \dots}{2^{n-1}a_{n-1} + 2^{n-3}a_{n-3} + 2^{n-5}a_{n-5} + \dots} < -1.$

Carmen Nejneru şi Vlad Ma

2. Să se arate că $\cos\left(n \operatorname{arctg} 2\sqrt{2}\right) \in \mathbb{Q}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Gheorgh

3. Fie A, B două puncte fixate, iar M un punct variabil în plan. imaginile lui M prin rotaţiile în jurul punctului A, respectiv B, de ungh $-\dfrac{\pi}{2}$. Dacă vectorul $\overrightarrow{A'B'}$ păstrează aceeaşi direcţie, arătaţi că M parcu Reciproca este adevărată?

Gabrie

Clasa a XI-a

1. Fie $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ două polinoame, fiecare având câte o rădăcin $P\left(\dfrac{1}{2002} + x + Q^4(x)\right) = Q\left(\dfrac{1}{2002} + x + P^4(x)\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, arătaţi că

Lucian Tuţe

2. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât există $m \in \mathbb{N}$, $m > n \geq 3$ şi α pentru care $A^{m+1} - \alpha A^m - \alpha A + I_n = O_n$. Să se arate că $|\det A| = 1$.

Lucian-Georges Lăduncă, Iaşi (Recreaţii Matema

3. Determinaţi funcţiile continue $f : (0,1) \to (0,\infty)$ pentru care $= f\left(\dfrac{xy}{2xy - x - y + 1}\right)$, $\forall x, y \in (0,1)$.

Lucian L

Concurs de admitere 2002, Iaşi

Facultatea de Informatică, Universitatea "Al. I. C

Analiză matematică

1. Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două şiruri de numere reale.

i) Dacă $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge către a şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge către b, ce se despre convergenţa şirului $a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n, \ldots$? Să se justifice r

ii) Dacă $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ şi $b_n = (-1)^{2n+1} + \sqrt[n+2]{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, să se studiez şirului $a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n, \ldots$.

2. Fie funcţia $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)$. Să se arate că:

i) $|f(x_2) - f(x_1)| < |x_2 - x_1|$, $\forall x_1, x_2 \in [-1,1]$, $x_1 \neq x_2$;

ii) există un singur $x_0 \in (-1,1)$, astfel încât $f(x_0) = x_0$.

Algebră

1. Fie $(G, *)$ şi $(\Gamma, \circ)$ două grupuri. Să se demonstreze că dacă f izomorfism, atunci şi $f^{-1} : \Gamma \to G$ este izomorfism.

2. Fie dat $q \in \mathbb{Q}^*$. Să se arate că:

i) funcţia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $f(k) = q^k$, este morfism de la grupul $(\mathbb{Z}$, $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$;

ii) dacă $q \notin \{-1, 1\}$, atunci există un subgrup al lui $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ izom $(\mathbb{Z}, +)$. Să se precizeze acest subgrup.

3. Fie $f \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = \widehat{1} \oplus X \oplus X^2 \oplus \cdots \oplus X^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi prin $X \oplus \widehat{2}$, dacă şi numai dacă n este multiplu al lui 3.

4. Să se descompună în factori ireductibili peste $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ şi respectiv $g = X^4 + X^3 - X^2 - 2X - 2$, ştiind că g se divide prin $X - \alpha$, unde α e de ordinul trei a unităţii.

Algebră - colegiu

1. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $t(A)$ suma elementelor de pe diagonala princip A şi $\det(A)$ determinantul matricii A. Să se arate că:

i) $A^2 - t(A)\cdot A + \det(A)\cdot I_2 = O_2$, unde I_2 şi O_2 sunt matricea unita matricea nulă din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$;

ii) dacă $A^2 = O_2$, atunci $t(A) = 0$.

2. *i)* Fie $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Să se scrie explicit toţi apar în expresia determinantului matricii A şi care sunt de forma $(-1)^{i+}$

ii) α fiind un parametru real, să se discute şi să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 2x - 3y - z = 1 \\ -4x + 6y + 2z = -2\alpha \end{cases}.$$

3. Fie $H = \left\{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q},\ x^2 - 2y^2 = 1\right\}$. Arătaţi că H este a lui $\mathbb{R}$ în raport cu înmulţirea şi că toate elementele lui H sunt si raport cu operaţia indusă.

4. Să se determine polinoamele $f, g \in \mathbb{Z}[X]$, de gradul 1, astfel înca

$$\left(X^2 + 2X + 2\right)\cdot f + \left(X^2 + 3X + 3\right)\cdot g = 1.$$

Fac. de Electronică şi Telecomunicaţii, Univ. Tehnică "

Matematică

1. Ce relaţie există între numerele reale $A = n^{\sqrt{n+1}}$ şi $B = (n+1)$

a) $A > B$; *b)* $A = B$; *c)* $A < B$; *d)* $A \geq B$; *e)* $A \leq B$

2. Mulţimea soluţiilor inecuaţiei $C_{16}^{k-2} > C_{16}^{k}$ este

a) $\{4, 5, \ldots, 9\}$; *b)* $\emptyset$; *c)* $\{17, 18, 19\}$; *d)* $\{10, 11, \ldots, 16\}$; *e)* $\{1$

3. Fie inecuaţia $\log_x \sqrt{x+30} \geq 1$. Soluţiile acestei inecuaţii sunt

a) $x \in (-\infty, -5]$; *b)* $x \in [6, \infty)$; *c)* $x \in (1, 6]$; *d)* $x \in (1, \infty)$;

4. Fie $I(a) = \displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{|x-a|+1}$, $a \in \mathbb{R}$ şi $L = \lim\limits_{a \to 2} I(a)$. Atunci:

a) $L = 2$; *b)* $L = 2\ln 2$; *c)* $L = 4\ln 2$; *d)* $L = 8\ln 2$; *e)* $L =$

5. Sistemul $\begin{cases} \alpha x + \beta y + 2z = 1 \\ \alpha x + (2\beta - 1) y + 3z = 1 \\ \alpha x + \beta y + (\beta + 3) z = 2\beta - 1 \end{cases}$ cu $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ este com

terminat pentru

a) $\alpha \in \mathbb{R}, \beta = -1$; *b)* $\alpha = 0, \beta = 5$ sau $\alpha \in \mathbb{R}, \beta = 1$; *c)* $\alpha = 0$

d) $\alpha = 0, \beta = -1$ sau $\alpha \in \mathbb{R}, \beta = 5$; *e)* $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$.

6. Să se afle soluţiile ecuaţiei $\dfrac{\sin^2 x}{\cos x\,(1 + \operatorname{tg} x)} - \dfrac{\cos^2 x}{\sin x\,(1 + \operatorname{ctg} x)} =$

a) $x = k\pi \pm \dfrac{\pi}{2}$; *b)* $x = 2k\pi \pm \dfrac{\pi}{3}$; *c)* $x \in \emptyset$; *d)* $x = k\pi \pm \dfrac{\pi}{6}$; *e)* $x =$

7. Numărul complex $\dfrac{(1+i)^{2002}}{(1-i)^n}$ este real pentru $n \in \mathbb{N}$ de forma

a) $n \in \mathbb{N}$; *b)* $n = 4k$; *c)* $n = 4k + 1$; *d)* $n = 4k + 2$; *e)* $n = 4k$

8. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^{2n} - X^n + X^4 + 1$,
Să se determine restul r al împărţirii polinomului f la polinomul g.

a) $r = (n+4) X - n - 2$; *b)* $r = nX$; *c)* $r = (n+2) X + n$

d) $r = (n+4) X + n - 2$; *e)* $r = 2nX$.

9. Se consideră funcţia f care satisface relaţia: $2f\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right) + f\Big($

pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$. Valoarea derivatei $f^{(n)}(-2)$ este

a) $(-1)^n \dfrac{n!}{3^{n+1}}$; *b)* $\dfrac{n!}{3^{n+1}}$; *c)* $(-1)^n \dfrac{n!}{2 \cdot 3^n}$; *d)* $(-1)^n \dfrac{n!}{3^n}$; *e*

10. Funcţia $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^n + 1}{x^3 + 1}$, $n \in \mathbb{N}$, are cel puţi
verticală şi nu admite asimptote orizontale sau oblice pentru

a) $n = 2k + 1,\ k \in \mathbb{N}$; *b)* $n \in \mathbb{N}$; *c)* $n < 4$; *d)* $n = 4$; *e)* $n = 2$

Fac. de Automatică şi Calculatoare, Univ. Tehnică "C

Matematică - ingineri

1. Valorile parametrului real a pentru care rădăcinile x_1, x_2 ale ec
$-2\left(a^2 + 2a + 1\right) x + a^2 + 1 = 0$ satisfac $x_1 + x_2 \leq 4x_1 x_2$ sunt:

a) $a > 0$; *b)* $a = 0$; *c)* $a = -1$; *d)* $a = 1$; *e)* $a \neq 2$.

2. Fie polinoamele $f = X^{2n} - X^n + X^4 + 1$, $n > 4$ şi $g = (X$
determine restul împărţirii lui f la g.

a) $(n+4)X-n-2$; *b)* $nX+n-2$; *c)* $(n+2)X-n-$
d) $(n+4)X+n-2$; *e)* $(n-4)X+n-2$.

3. Dacă a este o rădăcină a ecuaţiei $x^2+x+1=0$ şi $A=\begin{pmatrix}1 & 1 \\ 1 & a \\ 1 & a^2\end{pmatrix}$

a) $A^2=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&3\\0&3&0\end{pmatrix}$; *b)* $A^2=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&2\\0&2&0\end{pmatrix}$; *c)* $A^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix}$

d) $A^2=\begin{pmatrix}2&2&0\\0&2&2\\2&0&2\end{pmatrix}$; *e)* $A^2=\begin{pmatrix}3&3&0\\0&3&3\\3&0&3\end{pmatrix}$.

4. Legea de compoziţie $x*y=\dfrac{1}{2}(x+y-xy+1)$ este o lege de gr
pe mulţimea:
a) $\mathbb{R}$; *b)* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; *c)* $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$; *d)* $\mathbb{R}\setminus\{1\}$; *e)* $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

5. Să se afle $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2n+1}+\dfrac{1}{2n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n+n}\right)$.

a) $\ln 2$; *b)* $\ln\dfrac{3}{2}$; *c)* $\dfrac{\pi}{2}$; *d)* $\dfrac{1}{2}e$; *e)* $1+\ln\dfrac{3}{2}$.

6. Se dă funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{-2\}\to\mathbb{R}$, definită prin $f(x)=\dfrac{x+m}{x+2}e$
este parametru real. Să se precizeze valorile lui m pentru care f are do
extrem.
a) $m\in[2,6]$; *b)* $m\in(-\infty,2/3]$; *c)* $m\in(2/3,6)$; *d)* $m\in(-\infty,2$
e) $m\in(-\infty,2/3)\cup(6,\infty)$.

7. Să se determine parametrul a, astfel încât să avem $1<\int_0^1\dfrac{x^2+}{x^2+}$

a) $3<a<3+\dfrac{2\sqrt{3}}{\pi}$; *b)* $3-\dfrac{\sqrt{3}}{\pi}<a<3$; *c)* $3<a<3\left(1+\right.$

d) $3-\dfrac{\pi}{6}<a<\pi$; *e)* $3<a<\dfrac{7\sqrt{\pi}}{2}$.

8. Se dă un triunghi de arie S şi de laturi a,b,c. Fie M,N,P proiec
cercului înscris pe laturi. Se cere aria $\triangle MNP$.
a) $\dfrac{a+b+c}{3abc}S^2$; *b)* $\dfrac{abc(a+b+c)}{16S}$; *c)* $\dfrac{S^2\sqrt{3}}{3abc}$; *d)* $\dfrac{3S^2\sqrt{3}}{(a+b+c)^2}$; *e)*

9. Să se rezolve ecuaţia $\sin(2x+1)=\cos(2x-1)$.
a) $\pm\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{2}$; *b)* $\pm\dfrac{\pi}{8}+k\pi$; *c)* $\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{2}$; *d)* $(-1)^k\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{2}$; *e)* $(-1)^k\dfrac{\pi}{8}$

10. Unghiul diedru dintre două feţe adiacente ale unui octaedr
măsura, exprimată în radiani, egală cu:

a) $\dfrac{\pi}{2}$; *b)* $\dfrac{2\pi}{3}$; *c)* $\dfrac{5\pi}{8}$; *d)* $2\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; *e)* $2\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Matematică - colegiu

1. Soluţiile sistemului $\begin{cases} xy+x+y=11 \\ x^2y+xy^2=30\end{cases}$ sunt:

$a)$ $(x,y)\in\{(-2,3),(-3,2)\}$; $b)$ $(x,y)\in\{(1,-5),(-5,1$
$c)$ $(x,y)\in\{(2,3),(1,5)\}$; $d)$ $(x,y)\in\{(3,2),(5,1)\}$;
$e)$ $(x,y)\in\{(2,3),(3,2),(1,5),(5,1)\}$.

2. Să se rezolve inecuaţia $\log_2(9-2^x)>3-x$.

$a)$ $x<8$; $b)$ $0<x<3$; $c)$ $2<x<4$; $d)$ $x>3$; $e)$ nu există

3. Dacă matricea $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ satisface $A^3=aA^2+bA$, atunc

$a)$ $(a,b)=(3,2)$; $b)$ $(a,b)=(3,3)$; $c)$ $(a,b)=(2,2)$; $d)$ $(a,b)=$
$e)$ $(a,b)=(-2,3)$.

4. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $*$ prin relaţia: $x*y=xy+$
$\forall x,y\in\mathbb{R}$. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât legea să fie comutativă

$a)$ $a=1,b=\frac{1}{2}$; $b)$ $a=0,b=0$ sau $a=1,b=\frac{1}{2}$; $c)$ $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2},b=$
$a=\frac{1-\sqrt{5}}{2},b=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$; $d)$ $a=4,b=2$; $e)$ nu există solu

5. Să se afle $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^2+1}{n+2}\ln\frac{n+1}{n}}$.

$a)$ $\frac{1}{2}$; $b)$ 1; $c)$ e; $d)$ $\sqrt{e}$; $e)$ ∞.

6. Se consideră funcţia $f(x)=\frac{x^2+mx+2}{x^2+2x+m}$, unde $m\in\mathbb{R}$ este un p
se determine m, astfel încât domeniul ei de definiţie să fie $\mathbb{R}$ şi să admi
puncte de extrem.

$a)$ $m\in(1,2)\cup(2,\infty)$; $b)$ $m\in(2,\infty)$; $c)$ $m\in(-3,\infty)$; $d)$ $m\in(1,2)$; $e)$ r

7. Să se calculeze $\int\frac{xdx}{(x+a)^{3/2}}$, $x\in(-a,\infty)$ $(a\neq 0)$.

$a)$ $2\left(\sqrt{x+a}-\frac{1}{\sqrt{x+a}}\right)+C$; $b)$ $2\left(\sqrt{x+a}-\frac{a}{\sqrt{x+a}}\right)+C$; $c)$
$d)$ $\frac{2}{3}\frac{x+a+1}{\sqrt{x+a}}+C$; $e)$ $2\frac{x+2a}{\sqrt{x+a}}+C$.

8. Într-un patrulater convex se cunosc diagonalele d_1,d_2 şi un ungh
Se cere aria patrulaterului ale cărui vârfuri sunt mijloacele laturilor ce

$a)$ $\frac{1}{4}d_1d_2\cos\alpha$; $b)$ $\frac{1}{4}d_1d_2\sin\alpha$; $c)$ $\frac{1}{4}\left(d_1^2+d_2^2-d_1d_2\right)\sin$
$d)$ $\frac{1}{4}d_1d_2(\sin\alpha+\cos\alpha)$; $e)$ $\frac{1}{16}(d_1+d_2)^2\sin\alpha$.

9. Se dau numerele $x=\cos 3$, $y=\operatorname{tg}3$, $z=\operatorname{ctg}3$. Atunci

$a)$ $x<y<z$; $b)$ $y<x<z$; $c)$ $z<y<x$; $d)$ $x<z<y$; $e)$ z

10. Locul geometric al centrelor sferelor ce trec prin două puncte
este

$a)$ o sferă; $b)$ o dreaptă; $c)$ două drepte perpendiculare; $d)$ u
$e)$ două plane perpendiculare.

Capacitate - teste pregătitoare

Testul 1 (*prof. Gheorghe TIMOHE*)

I. 1. Valorile raţionale ale numerelor x şi y pentru care $x($
$+y\left(\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)=-4\sqrt{2}-\sqrt{3}$ sunt ....

2. Descompusă în produs de doi factori expresia $E(x)=x^2-9y^2$ -
egală cu ....

3. Fie $E=\left[\frac{99}{98}\right]+\left[\frac{98}{97}\right]+\left[\frac{97}{96}\right]+\left[\frac{96}{95}\right]+\left[\frac{95}{94}\right]+\left[\frac{94}{93}\right]+\left[\frac{93}{92}\right]+$
unde $[x]$ - partea întreagă a numărului $x\in\mathbb{R}$; atunci $\sqrt{E}=$ ....

4. Soluţia în $\mathbb{N}$ a inecuaţiei $\sqrt{3+2\sqrt{2}}\,x+\sqrt{3-2\sqrt{2}}\,x<2$ este ....

5. Dacă numerele prime x şi y satisfac relaţia $2x+3y=16$
........................, $y=$ ....

6. Într-un vas în formă de cub se toarnă 6 l apă, ceea ce reprez
capacitatea vasului. Diagonala cubului este egală cu ....

7. Dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic sunt direct propor
şi 10, iar diagonala are lungimea de $10\sqrt{2}$ cm. Volumul paralelipipedulu

8. Fie $ABCD$ un trapez cu bazele $AB=13$ cm şi $CD=15$ cm, M
încât $MD=2MA$ şi $MN\|AB$, $N\in[BC]$.

a) Valoarea raportului $\frac{BN}{BC}$ este .... *b*) $MN=$ ....

9. Fie AC şi BC două tangente la un cerc $\mathcal{C}(O,R)$ în A şi B, $m(\angle$
$AO=8$ cm.

a) $m(\angle AOB)=$ .... *b*) lungimea coardei $AB=$ ....

II. 1. *a*) Reprezentaţi într-un sistem de coordonate carteziene t
(x,y) care verifică relaţiile $|x-1|=3$ şi $|x-y|\leq 3$.

b) Fie $E(x)=(3|x|-1)/|x|$. Determinaţi $x\in\mathbb{R}^*$ pentru care $E($

2. Demonstraţi că suma distanţelor de la vârfurile unui triunghi
exterioară lui este egală cu suma distanţelor de la mijloacele laturilor t
aceeaşi dreaptă.

3. Pe planul pătratului $ABCD$ de latură a se ridică perpendicular
Fie M şi N proiecţiile lui A pe (OBC) şi (OCD), iar P şi L proiecţi
pe (AOD), respectiv MH. Să se determine: *a*) MP şi AL; *b*) ung
planelor (AMH) şi (ABC); *c*) poziţia punctului Q pe OC astfel înc
$\triangle OBD$ să fie minim.

Testul 2 (*prof. Gheorghe TIMOHE*)

I. 1. Propoziţia "$\forall n\in\mathbb{N}$, $n(n+3)+3$ este număr prim" este ......

2. Fie $S=\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\cdots+\frac{1}{299}$. Dintre S şi $\frac{2}{3}$ este mai mare ....

3. Soluţiile ecuaţiei $||3x-1|-12|=4$ sunt ....

4. *a*) Dacă $0<b<a$, atunci $\left(\sqrt{ab},a\right)\cap(b,(a+b)/2)=$ ....

b) Dacă $A=\left(2^{1999},2^{2000}\right)\cap\mathbb{Z}$, atunci $card\ A=$ ....

5. Rezolvând sistemul $\begin{cases}|x+2|+|y-3|=7\\|x+2|+3=y-3\end{cases}$, obţinem $(x,y)\in$ ....

6. Fie $ABCD$ - trapez de baze $AB=7$ cm, $CD=2$ cm şi latur

$BC = 4$ cm şi $AD = 3$ cm. Măsura unghiului dintre AD şi BC .... grade.

7. Fie $ABCDA'B'C'D'$ - cub. Atunci $m(\angle(A'C', AD')) =$ ....

8. Aria $\triangle ABC$ este 268 cm^2. Aria triunghiului format de mijlo sale este ....

9. Fie $\triangle ABC$ cu $m(\angle A) = 60°$, $m(\angle B) = 80°$, $(AA', (BB', (CC'$ unghiurilor $\triangle ABC$ (A', B', C' aparţin cercului circumscris $\triangle ABC$).

a) $m(\angle B'C'A') =$ .... *b*) $m(\angle A'B'C') =$ ....

II. 1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -x + 1$.

a) Calculaţi aria suprafeţei determinată de graficele funcţiilor şi O

b) $A = \left\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x + y) \leq f\left(2\sqrt{xy}\right)\right\}$. Reprezentaţi gr lui A.

c) $B = \left\{n \in \mathbb{N} \mid |g(n)| \leq 8\sqrt{2}\right\}$. Determinaţi suma elementelor di

2. Fie numerele $a = \left(\sqrt{2} + 1\right)\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\ldots\left(\sqrt{100} + \sqrt{99}\right)\left(\sqrt{10\right.$ $b = \left(\sqrt{2} - 1\right)\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)\ldots\left(\sqrt{100} - \sqrt{99}\right)\left(\sqrt{101} + \sqrt{100}\right)$.

a) Arătaţi că $a + b > 2$. *b*) Comparaţi numerele $(1 - a)(1 + b)$ şi

3. Tetraedrul $ABCD$ se secţionează cu un plan α paralel cu mu $[CD]$, $AB = a$, $CD = b$. Planul α intersectează muchiile $[BD], [BC],$ N, M, P şi respectiv Q.

a) Demonstraţi că patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram.

b) Dacă $\dfrac{BM}{MC} = x$, $x > 0$, exprimaţi aria paralelogramului $MNPQ$ a, b, x şi măsura unghiului dintre AB şi CD.

c) Determinaţi poziţia punctului $M \in [BC]$ pentru care aria par $MNPQ$ este maximă.

Testul 3 (*prof. Lidia BOSÂNCIANU*)

1. Cel mai mic număr natural nenul divizibil cu 88 şi care poa produsul a trei numere naturale consecutive este ....

2. Dacă $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, şi $cd = 1$, valoarea minimă a expresiei $a^2 +$ $+2ab - 2ac - 2ad - 2bc - 2bd + 14$ este ....

3. Numerele $5 - x$, $2x + 3$ şi $5x - 2$, $x \in \mathbb{R}$, reprezintă lungimile triunghi. Atunci $x \in$ ....

4. Ecuaţiile $(m - 1)^2(x + 2) + 9 = (m - 1)^2 - 3(m - 1)(x + 2)$, $(m -$ $= 3(3x + m + 5)$, $m \in \mathbb{R}$ sunt echivalente dacă m ....

5. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2|x| - f(-1) - 3$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Atunci $f(x) =$

6. Fie $ABCD$ un dreptunghi, $MA \perp (ABC)$, N mijlocul lui (BC), $= 6$ cm şi $MD = 4\sqrt{3}$ cm, atunci $d(M, DN) =$ ....

7. Fie $\triangle ABC$ oarecare, $M \in (BC)$ astfel încât $MC = \dfrac{1}{3}BC$, N încât $AN = \dfrac{1}{4}AC$, iar $AM \cap BN = \{P\}$. Atunci $\dfrac{AP}{PM} =$ ....

8. $ABCDA'B'C'D'$ este un paralelipiped dreptunghic cu perime cm. Dacă diagonala paralelipipedului are lungimea de 20 cm şi formeaz laterală un unghi cu măsura de 30°, *volumul* $[ABCDA'B'C'D']$ este ....

9. Fie un con circular drept cu secţiunea axială un triunghi isoscel şi perimetrul 18 cm.

a) Măsura unghiului corespunzător sectorului de cerc obţinut prin
conului este ....

b) Volumul conului este ....

II. 1. Să se găsească ultimele două cifre ale numărului

$$A = \left[\left(2^{2n} + 2^{2n+1} + 2^{2n+2} + 2^{2n+3}\right)\cdot 4^{2n} + \left(4^{2n} + 4^{2n+1} + 4^{2n+2} + 4^{2n}\right.\right.$$
$$-\frac{2^{2n+1} + 2^{2n+3}}{4^n + 4^{n+1}}, n \in \mathbb{N}^*.$$

2. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$ cu $x_1 x_2 \ldots x_n = 1$. Să se demonstreze in

$$(x_1 + \sqrt{x_2} + 1)(x_2 + 2\sqrt{x_2} + 1)\ldots(x_n + n\sqrt{x_n} + 1) > 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot n\,(n$$

3. $VABCD$ este o piramidă patrulateră regulată având toate muchi
a. Fie Q mijlocul lui (CV) şi $(\mathcal{C})$ cercul înscris în triunghiul VBC.

a) Să se arate că $(BDQ) \perp (VBC)$.

b) Dacă M este un punct oarecare pe $(\mathcal{C})$ şi $N \in (BD)$, să se detern
minimă posibilă pentru (MN).

Testul 4 (*prof. Lidia BOSÂNCIANU*)

1. Fie $a = 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \cdots \cdot 2^{100} - \left(16^2\right)^{631}$. Atunci $a =$ ....

2. Ştiind că $6\left(3^a + \overline{bb}\right) + 2^c = 493$, atunci $\overline{abc} =$ ....

3. Dacă $\dfrac{a-13}{b} = \dfrac{a}{b+7}$, $a, b \in \mathbb{N}^*$, atunci cea mai mare valoare pentru

4. Mulţimea $A = \left\{\overline{ab} \in \mathbb{N} \mid \sqrt{\left(\overline{ab}+36\right)/\left(\overline{ab}-36\right)} \in \mathbb{N}\right\} =$ ....

5. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x-1) = -3x + 1 - f(2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Atunci $f(x$

6. Fie M mijlocul laturii (AB) a dreptunghiului $ABCD$, $MN \perp A$
şi $8MN = AC$. Atunci $m(\widehat{BAC}) =$ ....

7. Fie $\triangle ABC$ cu $m(\widehat{B}) - m(\widehat{C}) = 40°$. Fie $AD \perp BC$ şi $(AE$ bisecto
$D, E \in (BC)$. Dacă $(AD$ şi $(AE$ împart $\widehat{BAC}$ în trei unghiuri cu m
proporţionale cu $1, 2, 3$, atunci măsurile unghiurilor $\triangle ABC$ sunt ....

8. Într-un cilindru cu diametrul de 4 cm şi înălţimea de 25 cm se
bile cu raza de 20 mm.

a) Care este numărul maxim de bile ce încap în cilindru?

b) Câte procente din volumul cilindrului ocupă bilele?

9. Într-o piramidă patrulateră regulată, secţiunea diagonală este
dreptunghic isoscel. Atunci $A_t / A_l =$ ....

II. 1. Fie $a, b \in \mathbb{Z}$. Arătaţi că $\left|a - b^2\right| + a^2 + a = 0 \Longleftrightarrow a = b = 0.$

2. Rezolvaţi în $\mathbb{N}$ ecuaţia $y = \dfrac{x_2 x_3 \ldots x_n + x_1 x_3 \ldots x_n + \cdots + x_1 x_2}{x_1 x_2 \ldots x_n \left(x_1 + x_2 + \cdots + x_n\right.}$

3. Fie $\triangle ABC$ dreptunghic isoscel, $(AB) \equiv (AC)$ şi $AB = a$. S
(ABC), $CS = a$.

a) Calculaţi aria totală şi volumul piramidei $SABC$ în funcţie de a

b) Aflaţi $m(\widehat{(SAB),(ABC)})$.

c) Dacă $CP \perp SB$ şi Q este mijlocul muchiei (SA), să se demonstr
laterul $ABPQ$ este inscriptibil.

Soluţiile problemelor propuse în nr. 1/2

Clasele primare

P.24. *Aflaţi numerele a, b, c, d ştiind că verifică în acelaşi timp urr litătăţi: $a+3=b$, $b+3=c$, $c+3=d$, $a+3=10$.*

(*Clasa I*) **Înv. Mari**

Soluţie. Din ultima relaţie aflăm pe a, $a = 10-3 = 7$, apoi $b =$ $c = 10+3 = 13$, $d = 13+3 = 16$.

P.25. *Un elev din clasa I, fixând un număr din şirul numerelor natu că suma numerelor din faţa lui nu este mai mică decât* 55*, iar suma ac cu numărul fixat nu depăşeste pe* 66*. Despre ce număr este vorba?*

(*Clasa I*) **Luminiţa Popa**

Soluţie. Suma numerelor din faţa numărului căutat poate fi 55 doua sumă poate fi $66, 65, 64, \ldots$. Dacă a doua sumă nu este 66, at mare valoare posibilă a numărului căutat este $65 - 55 = 10$. Suma p numere nenule este 45, ceea ce nu corespunde datelor problemei. Deduc sumă este 66. Dacă prima sumă nu este 55, atunci cea mai mare va a numărului căutat este $66 - 56 = 10$ şi iarăşi ajungem la o contradic căutat este $66 - 55 = 11$.

P.26. *Pe trei borcane de compot, unul de cireşe, altul de vişine ş amestec de cireşe şi vişine, toate etichetele au fost puse greşit. Scoţ fruct dintr-un singur borcan, determinaţi conţinutul fiecăruia.*

(*Clasa a II-a*)

Soluţie. Se scoate un fruct din borcanul cu eticheta CV. Dacă cireaşă, atunci în borcanul cu eticheta V nu putem avea numai vişi cireşe. Rezultă că avem cireşe şi vişine. În acest caz avem corespondе conţinut $\boxed{\text{CV}}\to$C, $\boxed{\text{C}}\to$V, $\boxed{\text{V}}\to$CV. Dacă fructul extras este vişină, corespondenţa $\boxed{\text{CV}}\to$V, $\boxed{\text{C}}\to$CV, $\boxed{\text{V}}\to$C.

P.27. *Să se scrie numărul* 31 *folosind cele patru operaţii aritme cifra* 3 *(se cer cel puţin două soluţii).*

(*Clasa a II-a*) **Andrea Balla, el**

Soluţie. 1) $[(3+3)\cdot 3-3]\cdot(3-3:3)+3:3 = 15\cdot 2+1 = 31$.

2) $[(3+3:3)\cdot 3-(3-3:3)]\cdot 3+3:3 = 10\cdot 3+1 = 31$.

P.28. *Câte pagini are o carte dacă pentru paginarea ei s-a folosit c ori?*

(*Clasa a III-a*) **Crizantema Mironeanu**

Soluţie. De la pagina 1 la pagina 100 se foloseşte cifra 9 de 20 ori. de la pagina 1 la pagina 600 se foloseşte cifra 9 de 120 de ori. Pentru a ori cifra 9 trebuie să eliminăm paginile: $600, 599, 598$. Cartea are 597 p

P.29. *Ioana şi Alina au cules împreună* 165 *de nuci. Ioana a cul nuci decât Alina; ea face un calcul şi observă că triplul diferenţei d nucilor culese de ele reprezintă tocmai numărul nucilor culese de Alina*

cules fiecare fată?
(*Clasa a III-a*) **Înv. Mari**

Soluţie. Examinând textul se constată că Alina are trei părţi ia
părţi din cele cinci părţi egale. Alina a cules $165 : 5 \cdot 3 = 33 \cdot 3 = 99$ (n
a cules $165 - 99 = 66$ (nuci).

P.30. *Arătaţi că dintre oricare patru numere naturale diferite, m* $1\,000\,000$*, se pot alege două a căror diferenţă să se împartă exact la* 3.
(*Clasa a IV-a*) **Roxana Bolocan**

Soluţie. La împărţirea cu 3 resturile posibile sunt $0, 1, 2$. Înseamn
două numere din cele patru vor da acelaşi rest la împărţirea cu 3. Fi
$b = 3d + r$, $a > b$. Avem $a - b = 3c - 3d = 3\,(c - d)$.

P.31. *O veveriţă descoperă un alun încărcat cu fructe şi îşi face p iarnă transportând la scorbura sa alternativ: o dată două alune, o do După ce transportă* 47 *de alune, face o pauză pentru a se odihni. Să s distanţă a parcurs veveriţa în total, dacă de la alun la scorbura ei este* x *hm* x *dam* x *m, unde* x *are ca valoare cel mai mic număr natural p*
(*Clasa a IV-a*) **Înv. Mihai**

Soluţie. Numărul x nu poate fi 0. Înseamnă că x este 1. Distanţa d
la alun este de 1hm 1dam 1m= 111m. Pentru prima grupă de 5 alune pa
Alun-Scorbură-Alun-Scorbură, deci $3 \cdot 111$m. Pentru fiecare grupă de
restul de 42, parcurge traseul Scorbură-Alun-Scorbură-Alun-Scorbură,
Deoarece sunt 8 grupe, veveriţa va parcurge $8 \cdot 4 \cdot 111$m. Pentru restul
parcurge traseul Scorbură-Alun-Scorbură, deci $2 \cdot 111$m.

În total veveriţa parcurge $(3 + 32 + 2) \cdot 111\text{m} = 37 \cdot 111\text{m} = 4107\text{m}$

P.32. *Un părinte îşi împarte averea astfel: la primul copil* 10 *m cincime din rest, la al doilea copil* 20 *de milioane plus o cincime din al treilea* 30 *de milioane plus o cincime din noul rest şi aşa mai depar suma împărţită de părinte, precum şi numărul copiilor, ştiind că toţi egale.*
(*Clasa a IV-a*) **Mihai**

Soluţie. Din faptul că primii doi copii au primit sume egale rezultă c
$5 = 10$, adică $R_1 - R_2 = 50$. Al doilea copil primeşte din suma de $\frac{4}{5}$
ce înseamnă că $\frac{4}{5}$ din R_1 depăşeşte pe R_2 cu 20 milioane. Avem R_1
$4 \cdot R_1 : 5 - R_2 = 20$ de unde rezultă $R_1 : 5 = 30$. Obţinem $R_1 = 5$
$S = 10 + 150 = 160$ (milioane). Deci suma împărţită este de 160 mili
copil a primit $10 + 150 : 5 = 40$ (milioane). Numărul copiilor este 160

Clasa a V-a

V.26. *Să se determine cifrele distincte şi nenule* a, b, c, d, e, f, g *pentru care rezultatul înmulţirii alăturate este cel mai mare posibil:*

Ioan Sacăleanu, Hârlău

Soluţie. Avem $ad = e < 10$ şi $ac = g < 10$. Deoarece

g *
g *

cifrele $a, b, c, \ldots, g$ sunt distincte, rezultă că $ad, ac \in \{1 \cdot 2,\ 1 \cdot 3,\ \ldots\ , 1$
$2 \cdot 4,\ 3 \cdot 1,\ 3 \cdot 2\}$. Cum $a \neq 1$ (căci altfel am avea $d = e$) şi $c \neq 1$, $d \neq$
similare), urmează că $ad, ac \in \{2 \cdot 3, 2 \cdot 4, 3 \cdot 2\}$. Ca urmare, pentru ca
enunţ, să fie maxim, luăm $g = 8$, $e = 6$, $a = 2$, $d = 3$, $c = 4$. Au rămas
b şi f. Observăm că $b, f \in \{1, 5, 7, 9\}$. Dar $b \neq 1$ (căci altfel $f = 3$
(altfel $f = 5 = b$). Deci $b = 7$ şi $f = 1$ sau $b = 9$ şi $f = 7$. În consecinţ
mai mare este $209 \cdot 403 = 84227$ şi cifrele căutate sunt: $a = 2$, $b = 9$,
$e = 6$, $f = 7$, $g = 8$.

V.27. *Trei apicultori au tras împreună 700 kg miere de albine. Câ*
mierea, primul apicultor a luat jumătate, al doilea jumătate din rest, a
tate din noul rest, apoi operaţiunea se repetă până se împarte toată
afle câtă miere a luat fiecare.

Cătălin-Cristian B

Soluţie. Se observă că primul apicultor ia de două ori mai multă
doilea, iar al doilea de două ori mai multă decât al treilea. Dacă x note
de miere luată de al treilea apicultor, atunci al doilea ia $2x$, iar primul
relaţia $x + 2x + 4x = 700$. Rezultă că $x = 100$; deci al treilea ia 100 k
doilea 200 kg, iar primul 400 kg.

V.28. *Arătaţi că* $N_1 = 3^{2001} + 2^{2001}$ *şi* $N_2 = 3^{2002} - 2^{2002}$ *sunt nu*
cu 5.

Dorina Ca

Soluţie. Ultima cifră a unui număr de forma 2^{4n} este 6, iar a unuia
este 1. Prin urmare, $2^{2000} = 2^{4 \cdot 500}$ se termină în 6, iar $2^{2001} = 2^{2000}$
cifră 2. La fel obţinem că 3^{2001} se termină în 3. Ca urmare, N_1 se t
este, deci, divizibil cu 5.

În privinţa numărului N_2, observăm că 3^{2002} se termină în 9, 2^{2002}
N_2 în $9 - 4 = 5$. Deci, $N_2 \,\vdots\, 5$.

V.29. *Să se afle numerele* $\overline{abc}$ *pentru care* $\overline{abc} = \overline{ac} \cdot b^2$.

Romanţa Ghiţă şi Ioan

Soluţie. Valorile $b = 0$ şi $b = 1$ nu sunt posibile deoarece condiţia
scrie $\overline{a0c} = 0$ şi respectiv $\overline{a1c} = \overline{ac}$ şi aceste egalităţi sunt false. Nici
valoare posibilă, căci $100a + 20 + c = 40a + 4c \Leftrightarrow 60a + 20 = 3c$, ceea c
fals ($3c$ poate fi cel mult 27).

Pentru $b = 3$ avem: $100a + 30 + c = 90a + 9c \Leftrightarrow 5a + 15 = 4c$.
implică $c \,\vdots\, 5$, adică $c = 5$, precum şi $a = 1$. Obţinem că $\overline{abc} = 135$ e
problemei.

Arătăm că nu putem avea $b \geq 4$. Într-adevăr, $\overline{abc} = \overline{ac} \cdot b^2 \Leftrightarrow 100a +$
$\times (10a + c) \Leftrightarrow 10b = \left(10ab^2 - 100a\right) + \left(b^2 c - c\right) \Leftrightarrow 10b = 10\left(b^2 - 10\right)$
(1). Dacă $b \geq 4$, atunci $b^2 - 10 > 0$, $b^2 - 1 > 0$ şi din (1) rezultă că $10b$
(am minorat a cu 1 şi c cu 0). Constatăm că această inegalitate nu-
valorile $b = 4, 5, \ldots, 9$.

Numărul $\overline{abc} = 135$ este singura soluţie.

V.30. *Dacă* x_i, $i = \overline{1, 500}$, *sunt numere naturale nedivizibile* *numărul* $N = 4x_1^4 + 8x_2^8 + 12x_3^{12} + \cdots + 2000x_{500}^{2000}$ *este divizibil cu* 5.

Tamara

Soluţia I (a autorului). Numărul $x_i, i = \overline{1, 500}$, este de una
$M_5 + 1$, $M_5 + 2$, $M_5 + 3$, $M_5 + 4$. Arătăm că $x_i^4 = M_5 + 1$. Într-
$(M_5+1)^4 = (M_5+1)(M_5+1)(M_5+1)(M_5+1) = M_5+1$, $(M_5+2)^4$
$= M_5 + 1$, $(M_5+3)^4 = M_5 + 3^4 = M_5 + 1$, $(M_5+4) = M_5 + 4$
Evident, avem şi faptul că numerele $x_i^8, x_i^{12}, \ldots, x_i^{2000}$ sunt de forma M
$N = 4(M_5+1) + 8(M_5+1) + \cdots + 2000(M_5+1) = M_5 + 4(1+2+$
$= M_5 + 4\dfrac{501 \cdot 500}{2} = M_5 + 2 \cdot 500 \cdot 501 = M_5$.

Soluţia II (dată de eleva Tuţescu Anca Ştefania, Craiova).

$$N = \left(4x_1^4 - 4 + 4\right) + \left(8x_2^8 - 8 + 8\right) + \cdots + 2000\left(x_{500}^{2000} - 2000 + 2\right.$$

$$N = 4\left(x_1^4 - 1\right) + 8\left(x_2^8 - 1\right) + \cdots + 2000\left(x_{500}^{2000} - 1\right) + 4(1+2+\cdots$$

Cum $4(1+2+\cdots+500) = 4\dfrac{501 \cdot 500}{2} = 2 \cdot 501 \cdot 500$, rezultă că
al numărului N se divide cu 10. Pe de altă parte, pentru orice num
nu-i divizibil cu 5, avem: $U(x) \in \{1,2,3,4,6,7,8,9\}$, $U\left(x^2\right) \in \{1,4,6$
$\{1,6\}$, $U\left(x^8\right) \in \{1,6\}$ etc. Ca urmare, $U\left(x_1^4-1\right)$, $U\left(x_2^8-1\right)$, $\ldots$, U
$\{0,5\}$; iar $U\left[4\left(x_1^4-1\right)\right]$, $U\left[8\left(x_2^8-1\right)\right]$, $\ldots$, $U\left[2000\left(x_{500}^{2000}-1\right)\right] \in \{$

În consecinţă, toţi termenii din scrierea (1) a lui N sunt divizibili

$N \vdots 10$.

Clasa a VI-a

VI.26. *Fie* $A = 4a + 6b - c$, $B = 4a - 3b - c$, $C = -3a - 11$
$a, b, c \in \mathbb{Z}$. *Dacă* $(A, B) = 23$, *arătaţi că* $(A, B, C) = 23$.

Cristiana Constanda

Soluţie. Nu trebuie să arătăm, de fapt, decât că $C \vdots 23$. Avem
deci $9b \vdots 23$ şi cum $(9, 23) = 1$, atunci $b \vdots 23$. Din $A = 4a + 6b - c \vdots 23$, u
că $4a - c \vdots 23$, deci $c = 4a - 23k$, $k \in \mathbb{Z}$. În aceste condiţii, $C = -3a$
$= -3a - 11b - 28(4a - 23k) = -115a - 11b + 28 \cdot 23k$, fiecare termen
de 23.

VI.27. *Să se rezolve în* $\mathbb{Z}$ *sistemul:* $3x + 2y \leq 8$; $\quad x - y \leq 1$; $\quad 3x$

Mihai Crăci

Soluţie. Avem: $y = 3x - 1 \leq 8 - 2y - 1 = 7 - 2y \Rightarrow 3y \leq$
$y = 3x - 1 \leq 3(1+y) - 1 = 2 + 3y \Rightarrow -2y \leq 2 \Rightarrow y \geq -1$; deoarece $y \in$
$y \in \{-1, 0, 1, 2\}$. Însă $x = \dfrac{y+1}{3}$ şi singurele soluţii convenabile sunt (0

VI.28. *Să se rezolve în* $\mathbb{N}$ *ecuaţia*

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n+1) - (n+1) - (n+2) - \cdots - 2n = 2 + 4$$

Dumitru - Dominic B

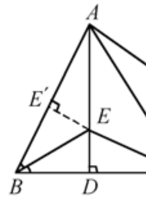
Soluţie. Plecând de la identitatea $k(k+1) = \frac{1}{3}[k(k+1)(k+2) -$
în care dăm valori lui k de la 1 la n, obţinem prin sumare $1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots$
$= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$. Scăzând în ambii membri ai ecuaţiei date suma 1
obţinem echivalent:

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{2n(2n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \Leftrightarrow \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$$

altfel spus $\frac{n+1}{6} = 1$, ceea ce antrenează $n = 5$.

VI.29. *În triunghiul ascuţitunghic ABC, bisectoarea interioară*
intersectează înălţimea AD în E, $D \in [BC]$. Fie $F \in (DC$ astfel înc
Arătaţi că $BE \perp AF$.

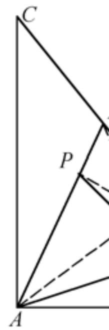
Tamara



Soluţie. Fie $E' \in [AB]$ astfel încât $EE' \perp AB$. Cum E se află pe bisectoarea lui $\widehat{B}$, este egal depărtat de laturile unghiului: $ED = EE'$. Atunci $\triangle AEE' \equiv \triangle FED$ (C.I.), deci $\widehat{AEE'} \equiv \widehat{DEF}$, de unde rezultă că E', E, F sunt coliniare, adică $FE' \perp AB$. Urmează că E este ortocentrul $\triangle ABF$, aşadar $BE \perp AF$.

VI.30. *Pe ipotenuza (BC) a triunghiului dreptunghic ABC se consideră punctele N şi M astfel încât $BN = AB$, $CM = AC$. Dacă P şi Q sunt proiecţiile punctelor M şi N pe dreptele AN, respectiv AM, demonstraţi că segmentele (MP), (NQ) şi (PQ) se pot constitui în laturile unui triunghi.*

Cătălin Calistru, Iaşi



Soluţie. Fie $\{R\} = MP \cap NQ$ ortocentrul $\triangle AMN$; atunci $AR \perp BC$. Avem:

$$m(\widehat{BAM}) = m(\widehat{BAR}) - m(\widehat{MAR}) = 90^\circ - m(\widehat{B}) -$$
$$- \left(90^\circ - m(\widehat{AMC})\right) = m(\widehat{AMC}) - m(\widehat{B}) =$$
$$= m(\widehat{MAC}) - m(\widehat{B}) = m(\widehat{MAR}) + 90^\circ - m(\widehat{C}) - m(\widehat{B}) = m($$

Analog se arată că şi $m(\widehat{CAN}) = m(\widehat{NAR})$, deci $m(\widehat{MAN}) = \frac{1}{2}m(\widehat{A}) =$
$\triangle PAM$ şi $\triangle QAN$ sunt triunghiuri isoscele, de unde $MP = AP$ şi
Urmează că (MP), (NQ), (PQ) se pot constitui în laturile unui tri
$\triangle APQ$.

Clasa a VII-a

VII.26. *Determinaţi $a \in \mathbb{Q}$ ştiind că $\sqrt{a+\sqrt{2}} - \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.*

Gheorgh

Soluţie. Fie $x = \sqrt{a+\sqrt{2}} - \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Atunci $a + \sqrt{2} = 2 + 2x\sqrt{}$
$a, x \in \mathbb{Q}$, urmează că $a = 2 + x^2$ şi $1 = 2x$. De aici, $x = \frac{1}{2}$ şi $a = \frac{9}{4}$. R

$a = \dfrac{9}{4}$ avem că $\sqrt{a+\sqrt{2}} - \sqrt{2} = \dfrac{2\sqrt{2}+1}{2} - \sqrt{2} = \dfrac{1}{2} \in \mathbb{Q}$.

VII.27. *Determinaţi $a \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul*

$$x_1^2+(a+1)\,x_1+\frac{a^2}{4} = x_2, \ldots,\; x_{n-1}^2+(a+1)\,x_{n-1}+\frac{a^2}{4} = x_n,\; x_n^2+(a+1$$

să admită numai soluţii întregi.

Cătălin C

Soluţie. Adunând membru cu membru ecuaţiile, efectuând reduceri

obţinem că $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(x_i+\frac{a}{2}\right)^2 = 0$, de unde în mod necesar $x_1 = x_2 = \cdots$

Cum dorim ca sistemul să aibă soluţii întregi, rezultă $a = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$.
este imediat că $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = -k$ constituie soluţie a sistemulu

VII.28. *Fie zece numere naturale nenule care au suma egală cu 5*
că printre ele există trei care pot fi lungimile laturilor unui triunghi.

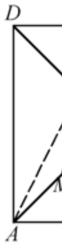
Adrian Z

Soluţie. Să ordonăm crescător numerele: $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq$
că $a_{i+1} < a_i + a_{i+2}$, $\forall i = \overline{1,8}$; ar mai trebui să arătăm că există
$\{1, 2, \ldots, 8\}$ pentru care $a_{i+1} > a_{i+2} - a_i$. Pentru aceasta, să presupun
$a_{i+1} \leq a_{i+2} - a_i$, $\forall i = \overline{1,8}$, i.e. $a_{i+2} \geq a_i + a_{i+1}$, $\forall i = \overline{1,8}$. A
$a_3 \geq a_1 + a_2 \geq 1 + 1 = 2$, $a_4 \geq a_2 + a_3 \geq 1 + 2 = 3$ şi în continuare a
$a_7 \geq 13$, $a_8 \geq 21$, $a_9 \geq 34$, $a_{10} \geq 55$. Atunci $a_1+a_2+\cdots+a_{10} \geq 1+1+\cdots$
adică $55 \geq 143$, absurd.

VII.29. *Fie $ABCD$ un pătrat, O centrul său, iar M şi P mijloace*
(OA), respectiv (CD). Să se arate că triunghiul BMP este dreptungh

Constantin Cocea şi Dumitru

Soluţia I (dată de elevul Mihul Andrei, Iaşi). Fie M', M'' proiecţiile punctului M pe BC şi respectiv CD. Avem: $MM' = \dfrac{1}{2}(AB + OO')$ şi $MM'' = \dfrac{1}{2}(AD + OP)$ (ca linii mijlocii în trapezele $ABO'O$ şi $ADPO$) şi deci $MM' = MM''$. Evident, $M'B = M''P$. Deducem că $\triangle BM'M \equiv \triangle PM''M$, deci $MB \equiv MP$ şi $\widehat{BMM'} \equiv \widehat{PMM''}$. Ultima relaţie conduce la $\widehat{BMP} \equiv \widehat{M'MM''}$. Unghiul $\widehat{M'MM''}$ fiind drept, urmează că $\widehat{BMP}$ este unghi drept şi, deci, $\triangle BMP$ este dreptunghic isoscel.



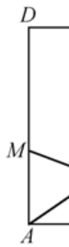
Soluţia II. Fie a latura pătratului. Avem că $PA^2 = AD^2 + DP^2 = \dfrac{5a^2}{4}$. Aplicând teorema medianei în $\triangle PAO$ şi în $\triangle BOA$, obţinem $PM^2 = \dfrac{10a^2}{16}$, $BM^2 = \dfrac{10a^2}{16}$, deci $PM = BM$. Pe de altă parte, $BP^2 = \dfrac{5a^2}{4}$ şi atunci lungimile PM, MB, PB sunt numere pitagoreice, de unde concluzia.

VII.30. *Fie $ABCD$ un pătrat de latură 1 şi punctele $M \in (AD$*
$\{P\} = BM \cap AN$. Dacă $S_{DCNPM} = \dfrac{1}{2}$, demonstraţi că $1 < AM$

$AM \cdot BN \leq \dfrac{4}{9}$.

Emil Va

Soluţie. Fie $x = AM$, $y = BN$, $z = PP'$ (unde $PP' \perp AB$). Din ipoteză, $S_{ABM} + S_{ABN} - S_{ABP} = \dfrac{1}{2}$, prin urmare $x + y - z = 1$. Dar $\dfrac{z}{x} + \dfrac{z}{y} = \dfrac{BP'}{AB} + \dfrac{P'A}{AB} = 1$, deci $z = \dfrac{xy}{x+y} \leq \dfrac{x+y}{4}$, unde am ţinut seama de inegalitatea între media armonică şi cea aritmetică. Rezultă că $x + y = 1 + z \leq 1 + \dfrac{x+y}{4}$, adică $x + y \leq \dfrac{3}{4}$. Pe de altă parte, $x + y - \dfrac{xy}{x+y} = 1$ implică $xy = (x+y)(x+y-1) \leq \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{9}$; am folosit faptul evident că $x +$



Clasa a VIII-a

VIII.26. *Demonstraţi că ecuaţia* $\left(t^2+1\right)x^2 + 4t^2x + 4t^2 - 5 = 0$ *ar* *soluţii în* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Mihai Crăc

Soluţie. Ecuaţia se scrie echivalent $t^2(x+2)^2 = t - x^2$. Dacă x $t - x^2 = 0$, deci $t = 4$. Dacă $x \in \mathbb{Z} \setminus \{-2\}$, atunci $t^2(x+2)^2 \geq t$, iar $t-$ tatea este atinsă dacă şi numai dacă $t = x = 0$. În concluzie, $S = \{(0,$

VIII.27. *Determinaţi* $a \in \mathbb{R}$ *ştiind că ecuaţia* $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x$ *singură soluţie reală.*

Gabrie

Soluţie. Dacă $P(x)$ este expresia din membrul stâng al ecuaţiei, p

$$P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + a = x^2(1-x)^2 - 2x(1-x)$$

şi de aici se observă că $P(x) = P(1-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Cum ecuaţia are o reală x_0, trebuie ca $x_0 = 1 - x_0$, adică $x_0 = \dfrac{1}{2}$. Înlocuind, obţinem în că $a = \dfrac{7}{16}$. Dacă $a = \dfrac{7}{16}$, ecuaţia devine $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 \left(x^2 - x + \dfrac{7}{4}\right) = 0$ singura soluţie reală (dublă) $x = \dfrac{1}{2}$.

VIII.28. *Fie* a, b *numere naturale prime între ele. Aflaţi valorile* *care* $S_n = a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + ab^{n-1} + b^n$ *este divizibil cu* $a +$

Mihaela Pred

Soluţie. Dacă n impar, atunci S_n are un număr par de termeni şi $(a^n + b^n) + \left(a^{n-1}b + ab^{n-1}\right) + \cdots = (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1}\right)$ $\times \left(a^{n-3} - a^{n-4}b + \cdots + b^{n-3}\right) + \cdots = (a+b)A$, deci $S_n \vdots\, a + b$. Dac atunci $S_n = a\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1}\right) + b^n$ şi cum $n-1$ impar, divide cu $a + b$. Rezultă că $S_n \vdots\, a + b \Leftrightarrow b^n \vdots\, a + b$; vom arăta că aceast este imposibilă în condiţiile date. Avem că $(b, a+b) = 1$, deoarec $d \mid a + b$, atunci $d \mid a$ şi $d \mid b$, adică $d \mid (a, b)$, deci $d \mid 1$. Urmează că în de

lor, numerele b şi $a+b$ nu au nici un factor prim comun, afirmaţie vala
numerele b^n şi $a+b$. În concluzie, pentru n par, S_n nu se divide cu a

VIII.29. *Se consideră piramida triunghiulară regulată $VABC$ cu b iar muchia laterală $2a$. Fie M mijlocul lui (VA), iar N un punct p încât $VN=\dfrac{3a}{4}$. Aflaţi distanţa de la V la planul (MNC).*

Adrian Cord

Soluţie. Cu teorema medianei în $\triangle VAC$, obţinem $CM=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. F lui Stewart în $\triangle VBC$, rezultă $CN=\dfrac{a\sqrt{31}}{4}$. Din teorema cosinusulu obţinem $MN=\dfrac{a}{2}$. Cunoaştem prin urmare laturile $\triangle CMN$ şi cu form aflăm aria sa: $S_{CMN}=\dfrac{10a^2\sqrt{15}}{128}$. Calculând acum volumul tetraedrul două moduri, când folosim drept bază $\triangle VMN$ găsim că $V_{VMNC}=\dfrac{a^3}{6}$ luăm drept bază $\triangle CMN$, volumul fiind cunoscut, obţinem că distan planul (MNC) este $h=\dfrac{a\sqrt{165}}{25}$.

VIII.30. *Fie A,B,C,D patru puncte necoplanare astfel încât $CD=4\sqrt{29}$. Notăm cu E,F mijloacele segmentelor (AB), respect se arate că mijloacele segmentelor (AF), (BF), (CE), (DE) sunt paralelogram şi să se calculeze aria acestuia ştiind că are o latură de l*

Romanţa Ghiţă şi Ioan

Soluţie. Fie M,N,P,Q mijloacele segmentelor (EC), (AF), $(ED$ $[BF]$. În $\triangle ECD$, (MP) este linie mijlocie, iar (EF) este mediana; şi (EF) se înjumătăţesc. Raţionând analog în $\triangle FAB$, deducem că (se înjumătăţesc. Rezultă că MP şi NQ sunt concurente în mijlocu se înjumătăţesc, deci M,N,P,Q sunt coplanare şi $MNPQ$ este para O centrul acestuia. Avem că $OQ=\dfrac{1}{4}AB=\sqrt{73}$, $OP=\dfrac{1}{4}CD=$ $PQ=\sqrt{194}$, aria $\triangle OPQ$ se poate calcula cu formula lui Herron sau aflâ obţinem $S_{OPQ}=\dfrac{1}{2}$ şi deci $S_{MON}=\dfrac{1}{2}$. Cum (PO) este mediană în $\triangle$ că $S_{PON}=S_{POQ}=\dfrac{1}{2}$ şi deci $S_{OMQ}=\dfrac{1}{2}$. În final, $S_{MNPQ}=2$.

Clasa a IX-a

IX.26. *Dacă $a\in(0,\infty)$, să se rezolve ecuaţia $[x]+\dfrac{a}{[x]}=\{x\}+\dfrac{a}{\{x\}}$*

D. M. Bătineţu-Giurgi

Soluţie. Pentru existenţa numitorilor, $x\notin[0,1)$ şi $x\notin\mathbb{Z}$. Ec echivalent $([x]-\{x\})\left(1-\dfrac{a}{[x]\{x\}}\right)=0$, iar prima paranteză nu se Rămâne că $[x]\{x\}=a$, deci $\{x\}=\dfrac{a}{n}$, unde $n=[x]$ este din $\mathbb{N}^*$ deoa

$\{x\} \geq 0$. Atunci $x = n + \dfrac{a}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n > [a]$.

IX.27. *Să se determine funcţiile $f, g : [0, \infty) \to [0, \infty)$, unde g est aditivă şi $g(y) + g(f(x)) = f(x + g(y))$, $\forall x, y \in [0, \infty)$.*

Ioan Săcăle

Soluţie. Fie $y_0 \in [0, \infty)$ pentru care $g(y_0) = 0$; atunci obţinem $f(x)$, $\forall x \in [0, \infty)$ (1). Prin urmare, $g(y) + f(x) = f(x + g(y))$, $\forall$ relaţie care pentru $x = 0$ arată că $f(g(y)) = f(0) + g(y)$, $\forall y \in [0, \infty)$ este surjectivă, pentru orice $z \in [0, \infty)$, găsim $y \in [0, \infty)$ astfel încât g (2) deducem $f(z) = f(0) + z$, $\forall z \in [0, \infty)$. Înlocuind în (1) şi folosin este aditivă, obţinem că $g(z) = z$, $\forall z \in [0, \infty)$.

IX.28. *Să se determine funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care $(\underbrace{f \circ f \circ}_{n}$ $= x + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$ fixat, iar funcţia $g = f - 1_{\mathbb{R}}$ este monotonă.*

Mihail Ber

Soluţie. Aplicând f în ambii membri ai egalităţii din enunţ obţinem $= f(x) + \alpha$, $\forall x \in \mathbb{R}$, de unde $g(x+\alpha) = f(x+\alpha) - (x+\alpha) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.Cum g monotonă, rezultă că g constantă: $g(x) = k$, $\forall x$ $f(x) = x + k$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci $(\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ ori}})(x) = x + nk = x + \alpha$. Ur adică $f(x) = x + \dfrac{\alpha}{n}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

IX.29. *Să se arate că în orice triunghi ABC are loc inegalitatea*

$$\frac{l_a^3}{h_a} + \frac{l_b^3}{h_b} + \frac{l_c^3}{h_c} \leq \frac{3R}{2r}\sqrt{p\left(p^3 - 3abc\right)}$$

Viorel Cornea şi Dan Ştefan Marinescu,

Soluţie. Din egalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz, obţinem că

$$\left(\sum \frac{l_a^3}{h_a}\right)^2 \leq \left(\sum l_a^6\right)\left(\sum \frac{1}{h_a^2}\right).$$

Se ştie că $OG^2 = R^2 - \dfrac{1}{9}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \geq 0$, deci $a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$ şi at al doilea factor: $\sum \dfrac{1}{h_a^2} = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{4S^2} \leq \dfrac{9R^2}{4S^2}$. Acum

$$l_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2} \leq \sqrt{bc}\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} = \sqrt{p(p-a)}, \text{ deci}$$

$\sum l_a^6 \leq p^3 \sum (p-a)^3 = p^3\left[3p^3 - 3p^2(a+b+c) + 3p\left(a^2 + b^2 + c^2\right) - \left(\right.\right.$
Un calcul de rutină arată că $a^3 + b^3 + c^3 = 3p\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + 3abc -$
rezultă că $\sum l_a^6 \leq p^3\left(p^3 - 3abc\right)$. Revenind în (1), deducem concluzia

IX.30. *În patrulaterul $ABCD$ considerăm punctele R şi S pe diag interioarele triunghiurilor ABC, respectiv ACD. Notam $\{M\} = CR$*

$= AR\cap BC$, $\{P\} = AS\cap CD$ *şi* $\{Q\} = CS\cap AD$. *Ştiind că* $\dfrac{AM^2}{MB^2} + \dfrac{B}{N}$
$+\dfrac{DQ^2}{QA^2} = 4$, *să se arate că* $\dfrac{AM^n}{MB^n} + \dfrac{BN^n}{NC^n} + \dfrac{CP^n}{PD^n} + \dfrac{DQ^n}{QA^n} = 4$, $\forall n \in$

Cătălin C

Soluţie. Aplicând teorema lui Ceva în $\triangle ABC$ şi $\triangle ACD$ şi combi
obţinute, rezultă că $\dfrac{AM}{MB}\cdot\dfrac{BN}{NC}\cdot\dfrac{CP}{PD}\cdot\dfrac{DQ}{QA} = 1$. Putem scrie:

$$\frac{AM^2}{MB^2} + \frac{BN^2}{NC^2} + \frac{CP^2}{PD^2} + \frac{DQ^2}{QA^2} = 4\sqrt[4]{\frac{AM^2}{MB^2}\cdot\frac{BN^2}{NC^2}\cdot\frac{CP^2}{PD^2}\cdot \frac{D}{Q}}$$

deci este atinsă egalitatea în inegalitatea mediilor; atunci $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{BN}{NC} =$
Concluzia este acum imediată.

Clasa a X-a

X.26. *Fie ecuaţia* $x^4 - S_1x^3 + Sx^2 + mx - m - 1 = 0$, *unde* S
triunghi neechilateral ABC, *iar* S_1 *este aria triunghiului* $A_1B_1C_1$
punctele de intersecţie a bisectoarelor interioare cu cercul circumscri
ABC. *Să se determine* $m \in \mathbb{R}$ *ştiind că ecuaţia admite un număr imp*
în $(0,1)$.

Dumitru Gherm

Soluţie. Dacă notăm $f(x) = x^4 - S_1x^3 + Sx^2 + mx - m - 1$, atun
ecuaţia dată să admită un număr impar de rădăcini în $(0,1)$ este echival
$f(1) < 0$, adică $(-m-1)(S - S_1) < 0 \quad (*)$. Să determinăm acum sem
$S - S_1$. Avem $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$ şi $S_1 = 2R^2 \sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A+C}{2}$
$= 2R^2\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$, de unde rezultă că $SS_1 = 8\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$
tate dacă şi numai dacă triunghiul ABC este echilateral. Deci, în condiţ
are loc $S < S_1$ şi atunci, având în vedere relaţia $(*)$, obţinem $m \in (-\infty$

X.27. *Fie* $r \in [1,\infty)$, $D = \{z \in \mathbb{C};\ |z| \le r\}$ *şi* $P \in \mathbb{C}[X]$, $P($
$+bX + c$. *Să se arate că dacă* $P(z) \in D$, $\forall z \in D$, *atunci* $a, b, c \in D$.

D.M. Bătineţu-Giurgi

Soluţie. Fie $1, \varepsilon$ şi ε^2 rădăcinile ecuaţiei $x^3 = 1$. Deoarece $\{1, \varepsilon, \varepsilon^2\}$
că $P(1) = a + b + c \in D$, $P(\varepsilon) = a\varepsilon^2 + b\varepsilon + c \in D$ şi $P(\varepsilon^2) = a\varepsilon +$
De aici, obţinem că $3c = P(1) + P(\varepsilon) + P(\varepsilon^2)$, $3a = P(1) + \varepsilon P($
şi $3b = P(1) + \varepsilon^2 P(\varepsilon) + \varepsilon P(\varepsilon^2)$. Folosind aceste egalităţi deduce
$= \left|P(1) + P(\varepsilon) + P(\varepsilon^2)\right| \le |P(1)| + |P(\varepsilon)| + \left|P(\varepsilon^2)\right| \le 3r$ şi, analog
$3|b| \le 3r$. Deci, $a, b, c \in D$.

X.28. *Rezolvaţi ecuaţia* $z^2\left(2^{|z|^2} - 1\right) + z\left(2^{|z-1|} - 1\right) + 1 = 0$, $z \in$

Emil Va

Soluţie. Fie $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R},\ b \ne 0)$, $2^{|z|^2} - 1 = \alpha \in \mathbb{R}$ şi $2^{|z-1|}$
Cu aceste notaţii ecuaţia noastră devine: $\left(a^2 - b^2 + 2abi\right)\alpha + (a + bi)$
$2ab\alpha + b\beta = \left(a^2 - b^2\right)\alpha + a\beta + 1 = 0$, de unde obţinem $\left(-a^2 - b^2\right)\alpha$
$\left(2^{a^2+b^2} - 1\right)\left(a^2 + b^2\right) = 1 \quad (*)$.

Deoarece funcţia $f(t) = t(2^t - 1)$ este strict crescătoare pe $(0, \infty$
ecuaţia $(*)$ are o soluţie unică şi anume $a^2 + b^2 = 1$. De aici deduc
şi înlocuind în egalitatea $2a\alpha + \beta = 0$, obţinem $\beta = -2a$, adică $2^{\sqrt{2}}$
Dacă facem notaţia $c = 1 - 2a$, cum $|a| \leq 1$, rezultă $c \leq 3$. Pe de a
$2^{\sqrt{1+c}} = c \geq 0$, obţinem $c \geq 2$, deci $c = 2^{\sqrt{1+c}} \geq 2^{\sqrt{3}} > 2^{5/3} > 3$. C
care am ajuns arată că ecuaţia dată nu are soluţie.

X.29. *Un motan scoate cu ajutorul unui pahar un număr de pe un acvariu. Câţi peştişori trebuie să conţină acvariul astfel încât mo matematic speranţa că va scoate* 5 *dintre ei?*

Gabrie

Soluţie. Notăm cu n numărul de peştişori din acvariu. Fie X varia care ia ca valori numărul de peştişori care se află în paharul motan culăm $p_k = P(\{X = k\})$. Deoarece sunt în total 2^n cazuri egal posi submulţimilor unei mulţimi cu n elemente), dintre care sunt favorab $p_k = \dfrac{C_n^k}{2^n}$. Aşadar, tabloul de repartiţie al variabilei aleatoare X este:

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n \\ \dfrac{C_n^0}{2^n} & \dfrac{C_n^1}{2^n} & \dfrac{C_n^2}{2^n} & \dots & \dfrac{C_n^n}{2^n} \end{pmatrix}.$$

Motanul poate spera că va extrage un număr de peştişori egal cu speranţ (sau media) variabilei X, adică

$$E(x) = m = \sum_{k=1}^{n} p_k x_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{kC_n^k}{2^n} = \frac{n2^{n-1}}{2^n} = \frac{n}{2}.$$

Prin urmare, avem $n/2 = 5$, deci $n = 10$.

X.30. *Fie* $M = \{1, 2, \dots, n\}$. *Să se afle numărul de* k*-uple* $(A_1, A$ *submulţimi ale lui* M *astfel încât* $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = M$ *şi* $Card\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) = l$, l

Lucian-Georges L

Soluţie. Fie $N = \{(0, 0, \dots 0, 1), (0, 0, \dots, 1, 0), \dots, (1, 1, \dots$ mulţimea k-uplelor formate din 0 şi 1, fără elementul $(0, 0, \dots, 0, 0)$. M $2^k - 1$ elemente.

A partiţiona $M = \{1, 2, \dots, n\}$ în k submulţimi $(A_1, A_2, \dots, A_k$ $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = M$ este totuna cu a defini o funcţie $f : M \to N$ prin $= (j_1, j_2, \dots, j_k) \in N$, unde $j_i = 1$ dacă $j \in A_i$ şi $j_i = 0$ dacă exemplu, $f(3) = (1, 1, 0, \dots, 0, 1)$ dacă şi numai dacă $3 \in A_1$, $3 \in A$ $3 \notin A_3, A_4, \dots, A_{k-1}$). Numărul acestor funcţii este $\left(2^k - 1\right)^n$, dar nu ultima condiţie din ipoteză.

Observăm că $j \in A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k$ dacă şi numai dacă $f(j) =$ N. Deci, condiţia $Card\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) = l$ este echivalentă cu $Card(\{j \in$ $= (1, 1, \dots, 1)\}) = l$. Cum numărul de moduri în care l elemente din prin f în $(1, 1, \dots, 1)$ este C_n^l, rezultă că răspunsul problemei este C_n^l (

Clasa a XI-a

XI.26. *Fie* $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Dacă* $\operatorname{tr}\left({}^tA\cdot A+({}^tA)^*\cdot A^*\right)=2n\det A$, *a*

Iuliana Georgescu şi Paul Geo

Soluţie. Se ştie că $\operatorname{tr}(X+\alpha Y)=\operatorname{tr}X+\alpha\operatorname{tr}Y$ $(\alpha\in\mathbb{R})$, $\operatorname{tr}(XY$
$XX^*=(\det X)\,I_n$ şi $\left({}^tX\right)^*={}^t(X^*)$, $\forall X,Y\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Egalitatea d
astfel:

$$\operatorname{tr}\left({}^tA\cdot A+\left({}^tA\right)^*\cdot A^*\right)=\operatorname{tr}\left(A\cdot A^*+\left({}^tA\right)\cdot\left({}^tA\right)^*\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\operatorname{tr}\left(A\cdot{}^tA+A^*\cdot{}^t(A^*)\right)=\operatorname{tr}\left(A\cdot A^*+\left({}^tA\right)\cdot{}^t(A^*)\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\operatorname{tr}\left(A\cdot\left({}^tA-A^*\right)+\left(A^*-{}^tA\right)\cdot{}^t(A^*)\right)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\operatorname{tr}\left(\left(A-{}^t(A^*)\right)\cdot\left({}^tA-A^*\right)\right)=0,$$

de unde, notând cu $C=A-{}^t(A^*)$, obţinem $\operatorname{tr}\left(C\cdot{}^tC\right)=0$. Ultima rela
cu observaţia $C\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ne conduce la condiţia $C=O_n$, adică ${}^tA=$

XI.27. *Fie* $a\in[0,1)$ *şi* $(x_n)_{n\geq 0}$ *un şir de numere reale astfel încâ*

$$x_n^2\leq a\cdot\max\left\{x_{n-1}^2,\ \frac{1}{2}\left(x_n^2+x_{n-1}^2\right)\right\},\quad\forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Arătaţi că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ *este convergent şi determinaţi limita sa.*

Aurel Mu

Soluţie. Dacă $\max\left\{x_{n-1}^2,\frac{1}{2}\left(x_n^2+x_{n-1}^2\right)\right\}=x_{n-1}^2$, atunci x_n^2
$|x_n|\leq k_1|x_{n-1}|$, unde $k_1=\sqrt{a}\in[0,1)$. Dacă $\max\left\{x_{n-1}^2,\frac{1}{2}\left(x_n^2+x_{n-}\right.\right.$
$=\frac{1}{2}\left(x_n^2+x_{n-1}^2\right)$, avem $x_n^2\leq\frac{a}{2}\left(x_n^2+x_{n-1}^2\right)$ sau $\left(1-\frac{a}{2}\right)x_n^2\leq\frac{a}{2}x_{n-}^2$
$\leq\frac{a}{2-a}x_{n-1}^2$ şi deci $|x_n|\leq k_2|x_{n-1}|$, unde $k_2=\sqrt{\frac{a}{2-a}}\in[0,1)$.

Fie $k=\max\{k_1,k_2\}$. Deoarece $k\in[0,1)$ şi $|x_n|\leq k|x_{n-1}|\leq k^2|$
$\leq k^n|x_0|$, rezultă că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ converge la zero.

XI.28. *Să se determine* $p\in\mathbb{R}$ *pentru care limita şirului* $(a_n)_{n\geq}$
termenul general $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n^p}{\sqrt{k+\sqrt{k^2-1}}}$ *este finită şi nenulă.*

Constantin

Soluţie. Avem succesiv:

$$\begin{aligned}a_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{n^p}{\sqrt{k+\sqrt{k^2-1}}}=\sum_{k=1}^{n}n^p\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)=\\&=\frac{n^p\sqrt{2}}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)=\frac{n^p\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{n+1}-1\right)=\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}n^{p+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right).\end{aligned}$$

Deci, şirul (a_n) are limita finită nenulă dacă şi numai dacă $p=-\frac{1}{2}$.

XI.29. *Să se arate că* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\ln\ln n}\left(\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}}-1\right)=1.$

Marian Te

Soluţie. Scriem termenul general x_n sub forma: $x_n = \dfrac{n(u_n-1)}{\ln a_n}$

$u_n = \sqrt[n]{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}}$, $a_n = 1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}$ şi $b_n = \ln n$. Di

$< \sqrt[n]{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}} < \sqrt[n]{n}$, $n \geq 2$ deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$. Atunci, a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(u_n-1)}{\ln a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{u_n-1}{\ln u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{u_n-1}{\ln[1+(u_n-1)]} =$$

Folosind criteriul lui Stolz-Cesàro, găsim că $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=1$. În consec

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln a_n}{\ln b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\ln(a_n/b_n)}{\ln b_n}+1\right]=1$. De aici şi din (1), obţinem că

XI.30. *Fie* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *o funcţie discontinuă şi care are proprietate* *Dacă există o funcţie* $g:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *astfel încât* $f(x+y)=g(f(x),y)$ $x,y\in\mathbb{R}$*, atunci funcţia* f *nu are limită la* ∞.

Ştefan A

Soluţie. Dacă f ar fi injectivă, cum f are proprietatea lui Darbou că f este continuă, ceea ce contrazice ipoteza. Deci f nu este injectivă ş $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ astfel încât $f(a)=f(b)$. Aşadar, avem $f(a+x) =$ $= g(f(b),x) = f(b+x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, de unde rezultă că $f(x)=f(x+b$ adică f este periodică şi $T=b-a$ este o perioadă a ei. Cum f est rezultă că f nu este constantă şi deci există $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha\neq\beta$ astfel încât Considerând şirurile $x_n=\alpha+nT$ şi $y_n=\beta+nT$, $n\in\mathbb{N}$, care tind $f(x_n)=f(\alpha+nT)=f(\alpha)\to f(\alpha)$ şi $f(y_n)=f(\beta+nT)=f(\beta)$ ce demonstrează că f nu are limită la $+\infty$.

Clasa a XII-a

XII.26. *Se consideră multimea* $M = \left\{\begin{pmatrix} 1-a^2 & a^2 & -a\sqrt{2} \\ -a^2 & 1+a^2 & -a\sqrt{2} \\ a\sqrt{2} & -a\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}\right.$

unde $A=\mathbb{Z}$ *sau* $A=\mathbb{Q}$ *sau* $A=\mathbb{R}$. *Arataţi că* $(M,\cdot)$ *este grup; este* *cu* $\left(A_+^*,\cdot\right)$*?*

Gheorghe Co

Soluţie. Notăm cu $M(a)$, $a\in A$, un element oarecare al mulţimii $M(a)\cdot M(b)=M(a+b)$ $(*)$, $\forall a,b\in A$, rezultă că înmulţirea este lege ţie internă pe M. Folosindu-ne de relaţia $(*)$ şi având în vedere că asociativă şi comutativă pe A rezultă că înmulţirea este asociativă şi M. Mai mult, se observă că $M(0)$ este element neutru pentru înmul orice $M(a)\in M$ admite un simetric, şi anume, $M(-a)\in M$. Prin u este grup comutativ. În fine, se verifică uşor că funcţia $f:M\to A_+^*$, f este un izomorfism între grupurile $(M,\cdot)$ şi $\left(A_+^*,\cdot\right)$.

XII.27. *Fie* $(G,\cdot)$ *un grup cu* $Z(G)\neq\{e\}$ *şi* H *un subgrup netr*

Să se demonstreze că există $x, y \in G \backslash H$, $x \neq y^{-1}$, astfel încât $xy \in$
Daţi exemplu de grup care nu are această proprietate.

Ovidiu Munteanu, stud

Soluţie. Oricare ar fi $x \in G \backslash H$ şi oricare ar fi $u \in H \backslash \{e\}$, avem $y =$
(într-adevăr, dacă $y = x^{-1}u \in H$, atunci $y^{-1} \in H$ şi deci $x = uy^{-1}$
este fals). De aici, deducem că $xy = u \in H$. Deoarece $yx = x^{-1}u$
mai demonstrăm că există $x \in G \backslash H$ şi $u \in H \backslash \{e\}$ astfel încât $x^{-1}u$
$Z(G) = \{a \in G \mid ab = ba, \forall b \in G\} \neq \{e\}$, rezultă că există $x \in G \backslash H$
astfel încât $xu = ux$, deci $x^{-1}ux = u \in H$. Cu aceasta prima parte a
este încheiată.

Pentru a doua parte, considerăm $S_3 = \left\{e, \sigma, \tau, \tau^2, \sigma\tau, \sigma\tau^2\right\}$ şi H
observă că nu există $x, y \in G \backslash H$ astfel încât $xy = yx = \sigma$. Într-
prin absurd, ar exista $x, y \in G \backslash H$ astfel încât $xy = yx = \sigma$, atunci
$x^{-1}\sigma x = \sigma$, deci $x\sigma = \sigma x$. Cum σ nu comută cu nici un element din G
că ultima egalitate este falsă.

XII.28. *Calculaţi* $\int \sqrt[n]{\operatorname{tg} x}\,dx$, *$x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, pentru $n \in \{2, 3, 4\}$.*

Daniel Ji

Soluţie. Notând $I_n = \int \sqrt[n]{\operatorname{tg} x}\,dx$, $J_n = \int \sqrt[n]{\operatorname{ctg} x}\,dx$ şi efectuân
$\sqrt[n]{\operatorname{tg} x} = t$, obţinem: $I_n = n \int \dfrac{t^n}{1+t^{2n}}dt$, $J_n = n \int \dfrac{t^{n-2}}{1+t^{2n}}dt$.

Pentru $n = 3$,

$$I_3 = 3 \int \frac{t^3}{1+t^6}dt \overset{t^2=u}{=} \frac{3}{2} \int \frac{u}{1+u^3}du = \frac{1}{2} \int \left(\frac{-1}{u+1} + \frac{u+1}{u^2-u+1}\right.$$

Pentru $n = 2$, considerăm

$$I_2 \pm J_2 = 2 \int \frac{t^2 \pm 1}{1+t^4}dt = 2 \int \frac{t^2\left(1 \pm \dfrac{1}{t^2}\right)}{t^2\left(t^2 + \dfrac{1}{t^2}\right)}dt = 2 \int \frac{\left(t \mp \dfrac{1}{t}\right)}{\left(t \mp \dfrac{1}{t}\right)^2}$$

Prin urmare,

$$I_2 + J_2 = \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x} - \sqrt{\operatorname{ctg} x}}{\sqrt{2}} + C,\ I_2 - J_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x} + \sqrt{\operatorname{ct}}}{\sqrt{\operatorname{tg} x} + \sqrt{\operatorname{ct}}} \right.$$

şi se calculează uşor valoarea lui I_2.

Pentru $n = 4$, procedăm la fel:

$$\begin{aligned} I_4 \pm J_4 &= 4 \int \frac{t^4 \pm t^2}{1+t^8}dt = 4 \int \frac{1 \pm \dfrac{1}{t^2}}{t^4 + \dfrac{1}{t^4}}dt = \\ &= 4 \int \frac{\left(t \mp \dfrac{1}{t}\right)'}{\left(t \mp \dfrac{1}{t}\right)^4 \pm 4\left(t \mp \dfrac{1}{t}\right)^2 + 2}dt = 4 \int \frac{du}{u^4 \pm 4u^2} \end{aligned}$$

XII.29. *Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă şi $t>0$. Pentru a*
calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^t-(k-1)^t}{n^t}f\left(n^{-1}\left(k^a(k-1)^b\right)^{\frac{t}{a+b}}\right).$$

Mihail Ben

Soluţie. Fie $\Delta_n=\left\{\frac{0^t}{n^t},\frac{1^t}{n^t},\ldots,\frac{n^t}{n^t}\right\}$ o diviziune a intervalului

$\|\Delta_n\|=\max\limits_{k\in\{0,1,\ldots,n\}}\frac{k^t-(k-1)^t}{n^t}=\frac{n^t-(n-1)^t}{n^t}\to 0$ pentru $n\to\infty$
puncte intermediare media geometrică ponderată a punctelor de divizi

$$\xi_k=\left[\left(\frac{k^t}{n^t}\right)^a\left(\frac{(k-1)^t}{n^t}\right)^b\right]^{\frac{1}{a+b}}=n^{-t}\left(k^a(k-1)^b\right)^{\frac{t}{a+b}},\ k=$$

Atunci

$$\sigma_{\Delta_n}(f,\xi)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^t-(k-1)^t}{n^t}f\left(n^{-t}\left(k^a(1-k)^b\right)^{\frac{t}{a+b}}\right).$$

Cum $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ este continuă, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{\Delta_n}(f,\xi)=\int_0^1 f(x$

XII.30. *Să se arate că* $\int_0^t e^{x^2}\frac{\ln(1+x)}{(1+x^2)^2}dx\in\left[\frac{\pi}{8}\ln 2,\ \frac{e\pi}{16}\ln 2\right]$.

Cristian Moar

Soluţie. Notăm cu I integrala din enunţ şi fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f($
Deoarece $e^x\geq 1+x^2$, $x\in\mathbb{R}$, avem că $f(x)\geq 1$; deoarece f este crescă
(căci $f'(x)=\frac{2x^3e^{x^2}}{(1+x^2)^2}\geq 0$, $x\in[0,1]$), rezultă că $f(x)\leq f(1)=\frac{e}{2}$. C

$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx\leq I\leq\frac{e}{2}\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$$

şi rămâne de arătat că $J=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{8}\ln 2$.

Într-adevăr, cu schimbarările $x=\operatorname{tg}t$ şi $t=\frac{\pi}{4}-u$, vom avea

$$\begin{aligned}J&=\int_0^{\pi/4}\ln(1+\operatorname{tg}t)\,dt=-\int_{\pi/4}^{0}\ln\left(1+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-u\right)\right)du\\&=\int_o^{\pi/4}\ln\frac{2}{1+\operatorname{tg}u}du=\int_0^{\pi/4}\ln 2du-J,\end{aligned}$$

de unde $J=\frac{\pi}{8}\ln 2$.

Soluţiile problemelor pentru pregătirea conc
din nr. 1/2002

A. Nivel gimnazial

G6. *Dacă un număr natural se poate scrie ca suma a două pă nenule distincte, atunci orice putere a sa se poate scrie, de asemened două pătrate perfecte nenule.*

Soluţie. Fie $a = b^2 + c^2$, cu $b, c \in \mathbb{N}^*$, iar $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $n = 2$ $a^n = a^{2k}a = a^{2k}\left(b^2+c^2\right) = \left(a^k b\right)^2 + \left(a^k c\right)^2$, cu $a^k b, a^k c \in \mathbb{N}^*$. Dacă demonstra mai întâi afirmaţia pentru $k = 1$. Într-adevăr, $a^2 = b^4 +$ $= \left|b^2 - c^2\right|^2 + (2bc)^2$, cu $B = \left|b^2 - c^2\right|$, $C = 2bc \in \mathbb{N}^*$. Pentru k $a^n = a^{2k-2}a^2 = a^{2(k-1)}\left(B^2+C^2\right) = \left(a^{k-1}B\right)^2 + \left(a^{k-1}C\right)^2$, cu $a^{k-1}B$

G7. *Arătaţi că numărul $\overline{aa\ldots a}$ (2001 cifre) nu poate fi pătrat p ar fi cifra a în baza 10.*

Soluţie. Afirmaţia este adevărată în cazul general al unui num $n \geq 2$ cifre. Numerele $\overline{22\ldots 2}$, $\overline{33\ldots 3}$, $\overline{77\ldots 7}$ şi $\overline{88\ldots 8}$ nu pot fi pă din cauza ultimei cifre. Cum orice pătrat perfect este fie de forma $4k$ $4k+1$, $k \in \mathbb{N}$, nu pot fi pătrate perfecte numerele $\overline{11\ldots 1}$, $\overline{55\ldots 5}$, $\overline{66\ldots}$ În sfârşit, dacă $\overline{44\ldots 4} = 4 \cdot \overline{11\ldots 1}$ ar fi pătrat perfect, atunci $\overline{11\ldots}$ perfect, absurd.

G8. *Determinaţi $n \in \mathbb{Z}$ pentru care $\dfrac{3n(18n+13)-28}{3n+1}$ este fracţi*

Dumitru - Dominic B

Soluţie. Deoarece $3n(18n+13) - 28 = (3n+1)(18n+7) - 35$, f simplifică prin $d \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ dacă d este un divizor al lui 35. Pentru d că $3n+1 = 5l$, $l \in \mathbb{Z}$, ecuaţie diofantică cu soluţia particulară $l = -1$, generală $l = -1+3k$, $n = -2+5k$, $k \in \mathbb{Z}$. Pentru $d = 7$, găsim $l = 3p+$ $p \in \mathbb{Z}$. În concluzie, valorile căutate ale lui n sunt $\{5k-2 \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{7p$

G9. *Se dau trei fişicuri de monede aşezate vertical, asupra cărora una dintre operaţiile O_1: luăm cele două monede de deasupra unui fişi peste altul, sau O_2: luăm cele două monede de deasupra unui fişic şi l una peste fiecare dintre celelalte două fişicuri.*

a) Găsiţi o condiţie necesară pentru ca, după un număr de operaţii, să conţină la fel de multe monede;

b) Arătaţi că această condiţie nu este suficientă dacă este permisă raţie, însă este suficientă în cazul în care sunt permise amândouă.

Gabrie

Soluţie. Deoarece numărul total de monede rămâne constant pe p tuării operaţiilor, acest număr trebuie să fie în mod necesar un mult mare sau egal cu 6.

Presupunând că distribuţia iniţială a monedelor este $(3, 2, 1)$, în co este permisă o singură operaţie, se arată că egalizarea celor trei fişicuri n considerând toate mişcările ce pot fi efectuate. În cazul în care ambele

permise, aşezând în mod repetat câte două monede din fişicul cel m
cel mai mic, ajungem fie ca fişicurile să se egalizeze, fie ca în vârfuril
o situaţie de tipul $(3,2,1)$. În această situaţie, succesiunea $(3,2,1)$
$(2,2,2)$ rezolvă problema.

G10. *Pentru* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, *rezolvaţi ecuaţia*

$$\sqrt{\frac{n+1}{n}-x_1}+\sqrt{\frac{n+1}{n}-x_2}+\ldots\sqrt{\frac{n+1}{n}-x_n}+\sqrt{x_1+x_2+\cdots+$$

Mihai Tot

Soluţie. Cu notaţiile $u_i=\sqrt{\dfrac{n+1}{n}-x_i}$, $x=\overline{1,n}$, $u_{n+1}=\sqrt{x_1+$
obţinem că $u_1+u_2+\cdots+u_{n+1}=n+1$, iar $u_1^2+u_2^2+\cdots+u_{n+1}^2=n$
$(u_1+u_2+\cdots+u_{n+1})^2=(n+1)\left(u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2\right)$, deci este atinsă
inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz aplicată numerelor u_1, u_2,
$1, \ldots, 1$. Urmează că $u_1=u_2=\cdots=u_{n+1}=1$, de unde $x_1=x_2=\cdot$

G11. *Rezolvaţi în* $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ *ecuaţia* $x^2+y^2=5445$.

Daniela Iosub

Soluţie. Vom folosi următorul rezultat din teoria numerelor: *dacă p*
un număr prim şi $p\,|\,a^2+b^2$, $a,b\in\mathbb{N}^*$, *atunci* $p\,|\,a$ *şi* $p\,|\,b$. Din ipote
şi $11\,|\,x^2+y^2$, $x,y\in\mathbb{N}^*$, iar 3 sau 11 sunt numere prime de forma
urmare, $33\,|\,x$ şi $33\,|\,y$, deci $x=33l$, $y=33m$, $l,m\in\mathbb{N}^*$. Înlocui
obţinem că $l^2+m^2=5$, $l,m\in\mathbb{N}^*$, adică $(l,m)\in\{(1,2),(2,1)\}$. De
$\in\{(33,66),(66,33)\}$.

G12. *Să se determine* $n,m\in\mathbb{N}^*$ *pentru care* $\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+\ldots[\sqrt{}$

Adrian Za

Soluţie. Pentru $n=1, m\in\mathbb{N}^*$ relaţia dată se verifică. Căutăm sol
Nu putem avea $m\geq 2$, deoarece

$$\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+\ldots\left[\sqrt{n}\right]\leq\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}<n\sqrt{n}<n^2\leq$$

Rămâne de cercetat cazul $m=1$; se observă că $n=2$ şi $n=3$ dau soluţ
iar pentru $n\geq 4$ obţinem

$$\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+\ldots\left[\sqrt{n}\right]\geq 1+1+1+\sqrt{4}+\cdots+\sqrt{n}>3+2(n-3)$$

adică nu mai găsim soluţii. În concluzie, $(n,m)\in\{(1,a)\ \mid a\in\mathbb{N}^*\}\cup\{$

G13. *Arătaţi că numerele* 18^n *şi* 2^n+18^n, $n\in\mathbb{N}$, *au acelaşi num*

Gheorgh

Soluţie. Să presupunem prin reducere la absurd că 18^n are k cifre
are mai mult de k cifre, deci $2^n+18^n\geq 10^k>18^n\geq 10^{k-1}$. Evident, k
împărţind prin 2^n această inegalitate, obţinem:

$$1+9^n\geq 5^k2^{k-n}>9^n\Rightarrow 2^{k-n}5^k=1+9^n,$$

deoarece $2^{k-n}5^k\in\mathbb{N}$. Pe de altă parte, $1+9^n=1+(8+1)^n=$
$2^{k-n}5^k=M4+2$, de unde $k-n=1$; relaţia (1) devine $2\cdot 5^{n+1}=$

Numerele $n=0,1,2,3$ nu verifică (2), iar pentru $n\geq 4$ avem că

$$\left(\frac{9}{5}\right)^n=(1,8)^n\geq(1,8)^4=(3,24)^2>(3,2)^2=10,24>10$$

adică $9^n>10\cdot 5^n=2\cdot 5^{n+1}$, deci (2) nu este verificată pentru $n\geq 4$.
obţinută încheie demonstraţia.

G14. *Să se arate că nu există nici un triunghi dreptunghic având c*
raţionale, iar ipotenuza egală cu 2001*.*

Constantin

Soluţie. Pentru a arăta că ecuaţia $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{z^2}{t^2}=2001$ nu are soluţ
suficient să demonstrăm că ecuaţia $m^2+n^2=2001p^2$ (1) nu are
Folosind rezultatul amintit în soluţia problemei **G11** şi observând că $3\,|\,$
că în mod necesar m şi n sunt multipli de 3; $m=3m_1$, $n=3n_1$, m_1,n_1
(1) devine $3\left(m_1^2+n_1^2\right)=667p^2$ şi cum $(3,667)=1$, urmează că $p=$
După înlocuire, $m_1^2+n_1^2=2001p_1^2$ (2).

Dacă presupunem că ecuaţia (1) admite soluţii, fie o asemenea soluţi
Din (2) se obţine însă o nouă soluţie cu $p_1<p$, contradicţie! Urmează
soluţii în $\mathbb{N}^*$, de unde concluzia.

Notă. Metoda folosită se numeşte *metoda coborârii* şi a fost utiliza
strarea *Marii Teoreme a lui Fermat* în cazurile $n=3$ şi $n=4$.

G15. *Să se arate că* $E(x,y,z)\geq 3$*, dacă* $E(x,y,z)=\sqrt{x^2-2x\sin z}$
$+\sqrt{y^2-2y\sin z-6\cos z+10},\quad x,y,z\in\mathbb{R}$.

Cristiana Artenie

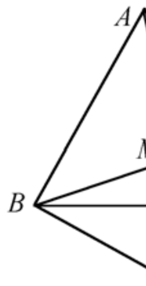
Soluţie. Se observă că

$$E\left(x,y,z\right)=\sqrt{\left(x-\sin z\right)^2+\left(2-\cos z\right)^2}+\sqrt{\left(y-\sin z\right)^2+\left(3-\cos z\right)^2}$$

unde $M\left(\cos z,\sin z\right)$, $P\left(2,x\right)$, $Q\left(3,y\right)$, $x,y,z\in\mathbb{R}$. Punctul M parcur
tate $\mathcal{C}$, iar punctele P şi Q parcurg dreptele verticale $d_1:x=2$, respec
Minimul lui $E\left(x,y,z\right)$ se atinge pentru $\{M\}=\mathcal{C}\cap[Ox$, $\{P\}=d_1\cap Ox$, $\{$
în acest caz $E\left(x,y,z\right)=3$, de unde concluzia.

G16. *Fie* M *un punct în interiorul triunghiului echilateral* AB
$MA^2=MB^2+MC^2-\sqrt{2}MB\cdot MC$ *; calculaţi măsura unghiului* $\widehat{BMC}$*.*

Corneliu Brădăţea

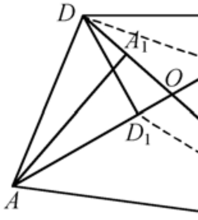


Soluţie. În general, vom arăta că dacă $MA^2=$
$=MB^2+MC^2-2MB\cdot MC\cos\alpha$, atunci $m(\widehat{BMC})=$
$=\alpha+60°$. În situaţia problemei date, va rezulta că
$m(\widehat{BMC})=105°$.

Fie D în semiplanul determinat de BC opus lui A astfel încât $\triangle MBD$ este echilateral. Atunci $m(\widehat{ABM})=$
$=m(\widehat{CBD})=60°-m(\widehat{MBC})$, de unde $\triangle ABM\equiv$
$\equiv\triangle CBD$ (LUL), deci $AM=DC$. Cum $MD=MB$,
relaţia de mai sus se scrie $CD^2=MD^2+MC^2-2MD\times$
$\times MC\cos\alpha$, ceea ce arată că $m(\widehat{DMC})=\alpha$, adică $m(\widehat{BMC})=60°+$

G17. *Fie $ABCD$ un patrulater convex ce nu are diagonalele perpend*
D_1 proiecţiile punctelor B, respectiv D pe AC, iar A_1 şi C_1 proiecţiile
respectiv C pe BD. Să se arate că $\dfrac{S_{BB_1DD_1}}{S_{CC_1AA_1}} = \left(\dfrac{BD}{AC}\right)^2$ *şi* $S^2_{ABCD} \cdot \cos^2$
$= S_{BB_1DD_1} \cdot S_{CC_1AA_1}$.

Claudiu-Ştefa

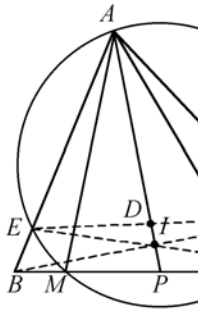


Soluţie. Avem că $S_{ABCD} = S_{ACD} + S_{ACB} =$
$= \dfrac{AC \cdot DD_1}{2} + \dfrac{AC \cdot BB_1}{2} = \dfrac{BB_1 + DD_1}{2} AC$. Pe de altă parte, BB_1DD_1 este trapez sau paralelogram ($BB_1, DD_1 \perp B_1D_1$) cu înălţimea $[B_1D_1]$, deci $S_{BB_1DD_1} = \dfrac{BB_1 + DD_1}{2} B_1D_1$. Atunci $\dfrac{S_{BB_1DD_1}}{S_{ABCD}} = \dfrac{B_1D_1}{AC}$.

Observăm că $\triangle DOD_1 \sim \triangle BOB_1$ şi de aici $\dfrac{B_1O}{D_1O} = \dfrac{BO}{DO}$, adică
deci $B_1D_1 = BD\dfrac{D_1O}{DO} = BD\left|\cos(\widehat{AC, BD})\right|$. Rezultă că $\dfrac{S_{BB_1D}}{S_{ABC}}$
$\times \left|\cos(\widehat{AC, BD})\right|$. Analog se obţine că $\dfrac{S_{CC_1AA_1}}{S_{ABCD}} = \dfrac{AC}{BD}\left|\cos(\widehat{AC, BD})\right.$
apoi înmulţind membru cu membru ultimele două egalităţi, găsim rela
cluzie.

G18. *Fie ABC un triunghi cu $m(\widehat{A}) \leq 90°$. Pe latura (BC)*
punctele M şi N astfel încât AM şi AN să fie simetrice faţă de bisecto
A. Cercul circumscris triunghiului AMN intersectează laturile AB
respectiv F. Dacă $\{I\} = BF \cap CE$ şi $\{P\} = AI \cap BC$, demonstraţi c

Florin Nico



Soluţie. Din ipoteză, $\widehat{EAM} \equiv \widehat{NAF}$, deci în cercul $\mathcal{C}$ avem că $\overset{\frown}{EM} \equiv \overset{\frown}{FN}$, de unde $EF \| MN$. Fie $\{D\} = AP \cap EF$; atunci $\triangle AED \sim \triangle ABP$ şi $\triangle AFD \sim \triangle ACP$ şi va rezulta că $\dfrac{ED}{BP} = \dfrac{AD}{AP} =$
$= \dfrac{DF}{PC}$, i.e. $\dfrac{ED}{FD} = \dfrac{BP}{CP}$ (1). Din asemănările $\triangle EID \sim \triangle CIP$ şi $\triangle DIF \sim \triangle PIB$ obţinem, ca mai sus, $\dfrac{ED}{FD} = \dfrac{CP}{BP}$ (2). Din (1) şi (2) urmează că $(BP) \equiv (CP)$.

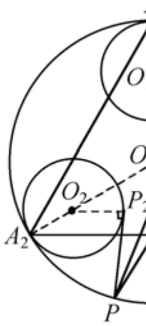
Presupunem prin reducere la absurd că $AP < \dfrac{BC}{2}$, adică $AP < BP$
Atunci $m(\widehat{BAP}) > m(\widehat{B})$ şi $m(\widehat{PAC}) > m(\widehat{C})$, deci $m(\widehat{BAP}) + m(\widehat{PA}$
$+m(\widehat{C})$, de unde $m(\widehat{A}) > 180° - m(\widehat{A})$, i.e. $m(\widehat{A}) > 90°$, ceea ce contr
problema este astfel rezolvată.

G19. *Fie $A_1A_2A_3$ un triunghi echilateral înscris în cercul $\mathcal{C}(O, R$*

$\mathcal{C}_i$ $(i = 1,2,3)$ *de aceeaşi rază* r*, tangente interior cercului* $\mathcal{C}$ *în vârfu punzătoare. Să se arate că pentru orice* $P \in \mathcal{C}(O,R)$ *are loc relaţia t constant, unde* t_i $(i = 1,2,3)$ *este lungimea tangentei dusă din* P *la ce*

Temistocle

Soluţie. Fie O_i centrul cercului $\mathcal{C}_i$, $i = \overline{1,3}$. Evident că $\triangle O_1O_2O_3$ este echilateral, iar centrul său este punctul O. Avem:



$$\sum t_i^2 = \sum PP_i^2 \overset{(1)}{=} \sum \left(PO_i^2 - r^2\right) = -3r^2 + \sum PO_i^2 \overset{(2)}{=}$$
$$= -3r^2 + \left(3PO^2 + \sum OO_i^2\right) = -3r^2 + 3R^2 + 3\left(R-r\right)^2 =$$
$$= 6R^2 - 6Rr = \text{constant},$$

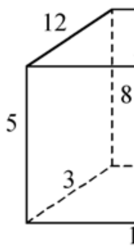
unde (1) se justifică prin aplicarea teoremei lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice PP_iO_i, iar (2) prin relaţia lui Leibniz.

G20. *Să se arate că pentru orice alegere a* 12 *numere naturale con pot numerota muchiile unui cub astfel ca suma numerelor aflate pe tre au un vârf comun să fie aceeaşi pentru toate vârfurile cubului (nu se două muchii cu acelaşi număr). Să se arate că este posibilă numero dacă se aleg convenabil* 12 *numere dintre oricare* 13 *numere naturale*

Constantin

Soluţie. Fie $n+1, n+2, \ldots, n+12, n \in \mathbb{N}$ şi să presupunem p suma numerelor de pe oricare trei muchii adunate adiacente este s. Ob $= 2[(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+12)]$, de unde, după calcule, găsim $2s$ Am ajuns evident la o contradicţie, deoarece în stânga avem un num dreapta unul impar.

Pentru partea a doua, fără a restrânge generalitatea, putem considera numerele $1, 2, \ldots, 13$; cazul general se reduce imediat la acesta. Fie c numărul pe care îl vom elimina. Cu raţionamentul de mai sus, obţinem $4s = 91 - c$ şi cum $s = \dfrac{91-c}{4} \in \mathbb{N}$, în mod necesar $c \in \{3, 7, 11\}$, deci $s \in \{22, 21, 20\}$. Pentru $c = 7$, vom da o aşezare a numerelor $1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13$ care să respecte cerinţele problemei: fiecare pereche de numere simetrice faţă de 7 de forma $(p, 14-p)$ se scriu pe muchii simetrice faţă de ce astfel încât suma într-un vârf să fie 21.



B. Nivel liceal

L6. *Fie* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$*, numere reale cu proprietatea*

$$\frac{x_1}{S-x_1} + \frac{x_2}{S-x_2} + \cdots + \frac{x_n}{S-x_n} = 1,$$

unde $S = \sum_{i=1}^n x_i$*. Arătaţi că*

$$\frac{x_1^3}{S-x_1} + \frac{x_2^3}{S-x_2} + \cdots + \frac{x_n^3}{S-x_n} \le -\frac{S^2}{n}.$$

Răzvan Bărbulescu, e

Soluţie. Din relaţia dată în ipoteză, deducem succesiv:

$$\frac{x_1}{S-x_1}+\frac{x_2}{S-x_2}+\cdots+\frac{x_n}{S-x_n}=1 \Leftrightarrow \frac{Sx_1}{S-x_1}+\frac{Sx_2}{S-x_2}+\cdots+\frac{S$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1(S-x_1)+x_1^2}{S-x_1}+\frac{x_2(S-x_2)+x_2^2}{S-x_2}+\cdots+\frac{x_n(S-x_n)+x_n^2}{S-x_n^2}$$

$$\Leftrightarrow x_1+\frac{x_1^2}{S-x_1}+x_2+\frac{x_2^2}{S-x_2}+\cdots+x_n+\frac{x_n^2}{S-x_n}=S \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1^2}{S-x_1}+\frac{x_2^2}{S-x_2}+\cdots+\frac{x_n^2}{S-x_n}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1^2+\frac{x_1^3}{S-x_1}+x_2^2+\frac{x_2^3}{S-x_2}+\cdots+x_n^2+\frac{x_n^3}{S-x_n}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1^3}{S-x_1}+\frac{x_2^3}{S-x_2}+\cdots+\frac{x_n^3}{S-x_n}=-\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right.$$

Însă $\sqrt{\dfrac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}} \geq \left|\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right|$, de unde rezultă imed

L7. *În triunghiul ABC, $m(\widehat{A})>60°$, considerăm medianele CN, toarele BE, CE'. Notăm $\{P\}=CN\cap BE$, $\{Q\}=CE'\cap BN'$. Arăta P şi Q nu pot fi ambele pe înălţimea din A.*

Ioan Săcăle

Soluţie. Să presupunem prin absurd că P şi Q aparţin înălţimii $(A$ teorema lui Menelaus în $\triangle ABD$ cu transversala $N-P-C$, apoi teorem în acelaşi triunghi, obţinem

$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BC}{CD}\cdot\frac{DP}{PA}=1 \Rightarrow \frac{BC}{CD}\cdot\frac{BD}{BA}=1 \Rightarrow \frac{a}{b\cos C}\cdot\frac{c\cos B}{c}=1 \Rightarrow$$

Repetând raţionamentul în $\triangle ACD$, obţinem că $\dfrac{a}{c}=\dfrac{\cos C}{\cos B}$, deci $a^2=bc$. Însă $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$, de unde $b^2+c^2-bc(1+2\cos$ urmare $\left(\dfrac{b}{c}\right)^2-\dfrac{b}{c}(1+2\cos A)+1=0$ şi cum $\Delta=4\cos^2 A+4\cos A-$ $\cos A\in\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)$, deducem că $\dfrac{b}{c}\notin\mathbb{R}$, absurd.

Notă. Soluţie corectă s-a primit de la *Marius Pachiţariu*, elev, Iaş

L8. *Fie triunghiul ABC şi $M\in \operatorname{Int} ABC$, $MA\cap\mathcal{C}(MBC)$ $MB\cap\mathcal{C}(MCA)=\{M,B_1\}$, $MC\cap\mathcal{C}(MAB)=\{M,C_1\}$. Să se arate*

$$\frac{MA_1}{MA}+\frac{MB_1}{MB}+\frac{MC_1}{MC}\geq 6.$$

Neculai Roman, M

Soluţie. Fie $x=m(\widehat{BMA_1})$, $y=m(\widehat{CMB_1})$, $z=m(\widehat{AMC_1})$; e $+y+z=180°$. Dacă R_1 este raza cercului prin M,B,C, avem: A_1B $A_1C=2R_1\sin z$, $BC=2R_1\sin(x+z)=2R_1\sin y$. Aplicând teorema în patrulaterul inscriptibil MBA_1C, obţinem succesiv:

$$MA_1 \cdot BC = MB \cdot A_1C + MC \cdot A_1B \Leftrightarrow MA_1 \sin y = MB \sin z + M$$
$$\Leftrightarrow \frac{MA_1}{MA} = \frac{MB \sin z}{MA \sin y} + \frac{MC \sin x}{MA \sin y}.$$

Scriind relaţiile analoage şi adunându-le, concluzia urmează imediat $a + \frac{1}{a} \geq 2$, $\forall \in (0, \infty)$.

În cazul particular $M = O$, obţinem inegalitatea remarcabilă

$$OA_1 + OB_1 + OC_1 \geq 6R,$$

unde R este raza cercului circumscris $\triangle ABC$. Să mai observăm că e atinsă în triunghiul echilateral.

L9. *Fie ABC un triunghi ascuţitunghic cu $a \leq b \leq c$ şi u, v $u \leq v \leq w$. Dacă $uGA + vGB + wGC = (u + v + w) R$, unde G e greutate al triunghiului, iar R este raza cercului circumscris, atunci tri este echilateral.*

Paul Georgescu şi Gabrie

Soluţie. Fie $f : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, $f(M) = u|z_M - z_A| + v|z_M - z_B| +$ Deoarece $z_C = \dfrac{2z_0 + z_H}{3}$, din inegalitatea modulului obţinem că $f(G$ $+\dfrac{1}{3} f(H)$. Din ipoteză, $f(G) = f(O)$, deci $f(H) \geq f(O)$. Pe de altă p inegalitatea lui Jensen funcţiei concave $\cos : \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \to [0, 1]$, găsim că

$$f(H) = 2R(u \cos A + v \cos B + w \cos C) \leq 2R(u + v + w) \cos \left(\frac{uA +}{u +}\right.$$

Din inegalitatea lui Cebâşev, $uA + vB + wC \geq \dfrac{1}{3}(u + v + w)(A +$ $f(H) \leq 2R(u + v + w) \cos \dfrac{\pi}{3} = f(O)$. Am obţinut că $f(H) = f(O)$ atinsă egalitatea în inegalităţile Jensen şi Cebâşev, adică $\triangle ABC$ este

L10. *a) Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$. Să se arate că există o progresie numere naturale care nu are nici un termen de forma x^n, $x \in \mathbb{N}$.*

b) Dacă o progresie aritmetică de numere naturale conţine un ter x^n, $x \in \mathbb{N}$, atunci să se arate că progresia conţine o infinitate de term formă.

Adrian Za

Soluţie. *a*) Să demonstrăm că progresia aritmetică $a_k = 4k+2$, $k \in$ nici un termen de forma x^n, $x \in \mathbb{N}$. Într-adevăr, acest fapt rezultă di $(4m)^n = M_4$, $(4m + 1)^n = M_4 + 1$, $(4m + 2)^n = M_4$, $(4m + 3)^n = M_4$

b) Fie o progresie de numere naturale cu raţia r care conţine un term Numărul natural $(x + r)^n$ este termen al progresiei, deoarece

$$(x + r)^n = x^n + nx^{n-1}r + \cdots + r^n = x^n + \left(nx^{n-1} + \cdots + r^{n-}\right.$$

Analog se demonstrează că orice număr de forma $(x + kr)^r$, $k \in \mathbb{N}$, e progresiei.

L11. *Să se rezolve în $\mathbb{N}^*$ ecuaţia $2 \cdot 3^x = 3 \cdot 2^y + 174$.*

Daniela Iosub

Soluţie. Cum $x, y \in \mathbb{N}^*$, atunci $a = x - 1$, $b = y - 1$ sunt num
Împărţind ecuaţia prin 6, obţinem ecuaţia echivalentă $3^a = 2^b + 29$, $a,$
$3^a = (3-1)^b + 29$, deci $3^a = M_3 + (-1)^b + 29$, prin urmare b trebu
$b = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$ (deoarece este evident că $b = 0$ nu convine). Obţinem
i.e. $(4-1)^a = 4^k + 29$, de unde $M_4 + (-1)^a = 4^k + 29$, adică a trebuie să f
$l \in \mathbb{N}^*$ ($a = 0$ nu convine). În aceste condiţii, ecuaţia devine $\left(3^l - 2^k\right)$ (
şi cum 29 este prim, iar $3^l - 2^k < 3^l + 2^k$, găsim că $3^l - 2^k = 1$, $3^l + 2^k =$
astfel format nu are soluţii în $\mathbb{N}$ şi atunci ecuaţia iniţială nu are soluţii

L12. *Fie $ABCD$ un patrulater convex; notăm $\{O\} = AC \cap BD$
lui (AB), N mijlocul lui (CD). Pentru propoziţiile P_1 : $ABCD$ ins
$OM \perp CD$; P_3 : $ON \perp AB$, să se arate că: a) $P_1 \wedge P_2 \Rightarrow P_3$; b) P
c) $P_3 \wedge P_1 \Rightarrow P_2$ (în legătură cu problema C:2265 din G. M. 3/2000).*

Viorel Cornea şi Dan Ştefan Marinescu,

Soluţie. *a*) Dacă $ABCD$ inscriptibil, din puterea punctului O f
circumscris obţinem că $OA \cdot OC = OB \cdot OD$. Avem succesiv:

$$P_2 \Rightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}\right) = 0 =$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + (OA \cdot OC - OB \cdot OD) = 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} - (OA \cdot OC - OB \cdot OD) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right)\left(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC}\right) = 0 \Rightarrow -2\,\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{ON} = 0 \Rightarrow AB \perp$$

b) Se procedează analog.

c) Dacă $OM \perp CD$, se obţine relaţia (1). Din $ON \perp AB$ deducem

$$-OD \cdot OB + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OA} + OA \cdot OC = 0$$

Adunând (1) şi (2), găsim că $OA \cdot OC = OB \cdot OD$, adică $ABCD$ este

L13. *Fie $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(X) = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_{n-1} X +$
$a_0 > 0$ şi cu toate rădăcinile pozitive şi subunitare. Să se arate că (n
$+ (-1)^n a_n > 0$.*

Gheorghe Molea, Curt

Soluţie. Avem: $(n-1) a_0 + a_1 + (-1)^n a_n > 0 \Leftrightarrow -\dfrac{a_1}{a_0} - (-1)^n$
$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i - \prod_{i=1}^n x_i < n - 1$, unde $x_i \in (0,1)$, $i = \overline{1,n}$, sunt rădăcinile

Prin inducţie completă, se dovedeşte uşor inegalitatea: $1 - \prod_{i=1}^n (1 -$
$\forall b_i \in (0,1)$, $i = \overline{1,n}$, $n \geq 2$.

Luăm în aceasta $b_i = 1 - x_i$, $i = \overline{1,n}$, şi obţinem:

$$1 - \prod_{i=1}^n x_i < \sum_{i=1}^n (1 - x_i) \Longleftrightarrow 1 - \prod_{i=1}^n x_i < n - \sum_{i=1}^n x_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i - \prod_{i=1}^n$$

q.e.d.

L14. *Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ considerăm polinomul* $P_n(X)= \begin{vmatrix} X+1 & 1 & 1 \\ 2 & X^2+2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots \\ n & n & n \end{vmatrix}$

a) Arătaţi că zero este rădăcină multiplă de ordin $\dfrac{n(n+1)}{2}$ *a aces*

b) Dacă n este par, P_n nu are rădăcini reale nenule, iar dacă n este o singură rădăcină reală nenulă, care este simplă şi situată în interval

Temistocle

Soluţie. Considerând ultima linie ca o sumă de două linii, avem:

$$P_n(X) = X^n P_{n-1}(X) + n \begin{vmatrix} X+1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & X^2+2 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-1 & n-1 & \dots & X^{n-1}+(n-1) \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Scăzând ultima linie înmulţită respectiv cu $1, 2, \dots, n-1$ din celelalte, o de recurenţă

$$P_n(X) = X^n P_{n-1}(X) + nX^{n(n-1)/2},$$

din care se deduce, prin calcule de rutină, că

$$P_n(X) = X^{n(n-1)/2} Q_n(X)$$

$$\text{cu } Q_n(X) = X^n + X^{n-1} + 2X^{n-2} + \dots + (n-1)X + n$$

Afirmaţia $a)$ rezultă direct din (2) şi (3). Afirmaţia $b)$ în cazul scriind polinomul Q_n sub forma

$$Q_n(X) = \left(X^n + X^{n-1} + \frac{1}{2}X^{n-2}\right) + \left[\frac{3}{2}X^{n-2} + X^{n-3} + \frac{3}{2}X^{n}\right.$$

$$+ \left[\frac{5}{2}X^{n-4} + 5X^{n-5} + \frac{5}{2}X^{n-6}\right] + \dots + \left[\frac{n-3}{2}X^4 + (n-3)X^3 + \right.$$

$$+ \left(\frac{n-1}{2}X^2 + (n-1)X + n\right)$$

şi observând că parantezele pătrate au discriminantul nul, iar cele negativ.

Dacă n este impar, verificăm mai întâi că Q'_m are valori pozitive într-adevăr, procedăm ca mai sus, observând că

$$Q'_n(X) = nX^{n-1} + (n-1)X^{n-2} + 2(n-2)X^{n-3} + \dots + (n-2)\cdot 2X$$

$$= \left[nX^{n-1} + 1\cdot(n-1)X^{n-2} + \frac{1\cdot(n-1)}{2}X^{n-3}\right] + X^{n-3}$$

$$+ \left[\frac{3\cdot(n-3)}{2}X^{n-3} + 3\cdot(n-3)X^{n-4} + \frac{3\cdot(n-3)}{2}X^{n-5}\right] + X^{n-}$$

$$+ \left[\frac{(n-4)\cdot 4}{2}X^4 + (n-4)\cdot 4X^3 + \frac{(n-4)\cdot 4}{2}X^2\right] + X^2 +$$

$$+ \left[\frac{(n-2)\cdot 2}{2}X^2 + (n-2)\cdot 2X + (n-1)\right].$$

Partea a doua a afirmaţiei b) rezultă din faptul că $Q_n(x) > 0$ pe
$Q_n(-2)\,Q_n(-1) < 0$ şi funcţia $x \to Q_n(x)$ este strict crescătoare pent

L15. *Fie* $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ *şi* $(c_n)_{n\geq 1}$ *un şir convergent de numere reale.*
şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ *definit prin* $x_n = \{n\alpha + c_n\}$ *nu este monoton.*

Iuliana Georgescu şi Paul Geo

Soluţie. Să observăm că $\{x\} \geq \{y\} \Rightarrow \{x-y\} = \{x\} - \{y\}$. Pr
$(x_n)_{n\geq 1}$ este crescător. Atunci, deoarece acest şir este mărginit, el va
şi $x_{n+1} - x_n \to 0$. Pe de altă parte, $x_{n+1} - x_n = \{(n+1)\,\alpha + c_{n+1}\}$ −
$= \{\alpha + c_{n+1} - c_n\}$ .Dar $\alpha + c_{n+1} - c_n \to \alpha$ şi $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, deci $\{\alpha +$
$\{\alpha\} > 0$. Prin urmare, $x_{n+1} - x_n \to \{\alpha\} > 0$. Absurd.

L16. *a) Fie* $a < b$ *şi* $M = \{f : [a,b] \to [a,b]\,;\ f \text{ monotonă}\}$. *Ară*
$f \in M$ *cu* $f(x) \neq x$, $\forall x \in [a,b]$ *şi că orice asemenea funcţie nu are pr*
Darboux.

b) Demonstraţi că $\forall f \in M$, $\exists c \in [a,b]$ *astfel încât* $f(c)\,[a+b-f(c)]$

Ştefan A

Soluţie. a) Funcţia $f : [a,b] \to [a,b]$ definită prin $f(x) = a$ -
$x \in [a,(a+b)/2)$ şi $f(x) = a$, dacă $x \in [(a+b)/2, b]$, satisface condiţi

Presupunem că există o funcţie $f \in M$ fără puncte fixe şi cu proprie
boux pe $[a,b]$. Fiind monotonă, f poate avea discontinuităţi doar de
având proprietatea lui Darboux, f nu are nici discontinuităţi de aces
că f este continuă pe $[a,b]$ şi tot aşa este şi $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f($
$g(a)\,g(b) = [f(a) - a]\,[f(b) - b] \leq 0$, deducem că $\exists c \in [a,b]$ astfel în
adică $f(c) = c$. Atunci c este un punct fix al funcţiei f, ceea ce c
supunerea făcută.

b) Fie $f \in M$. Presupunem că f este crescătoare şi notăm $E = \{x \in [a$
Observăm că E este nevidă şi mărginită ($a \leq f(a)$ şi $E \subset [a,b]$).
$\exists c = \sup E$ şi, evident, $c \in [a,b]$. Din $x \leq c$, $\forall x \in E$, deducem că $x \leq$
$\forall x \in E$. Deci $f(c)$ este un majorant al mulţimii E şi avem $c \leq$
este crescătoare, rezultă că $f(c) \leq f(f(c))$, de unde deducem că $f(c$
$f(c) \leq c$. Aşadar, $f(c) = c$ (1).

Dacă f este descrescătoare, atunci $h : [a,b] \to [a,b]$, $h(x) = a +$
crescătoare şi, procedând că mai sus, $\exists d \in [a,b]$ astfel încât $h(d) = d$,
$= a + b - d$ (2).

Din (1) şi (2) rezultă că $\forall f \in M$ ecuaţia $[f(x) - x]\,[a + b - x - f$
$f(x)\,[a+b-f(x)] = x\,(a+b-x)$ are soluţii în $[a,b]$, deci $\exists c \in [a,$
$f(c)\,[a+b-f(c)] = c\,(a+b-c)$.

L17. *Fie* A *un număr real pozitiv şi* $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *o func*
pentru care $f(0) = 0$ *şi* $|f'(x)| \leq Af^n(x)$, $\forall x \in [0,\infty)$, *unde* n *es*
natural dat, $n \geq 1$, *iar* $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$. *Atunci* f *este identic nul*

Sorin Puşpa

Soluţie. Este suficient să arătăm că f este identic nulă pe ori
forma $[0,\beta]$, $\beta > 0$. Presupunem că $\exists \alpha > 0$ astfel încât f nu-i identic
adică avem $M > 0$, unde $M = \sup\limits_{x\in[0,\alpha]} f(x)$. Cu teorema creşterilor fi
$\forall x \in [0,\alpha]$ are loc relaţia $f(x) = xf'(c)$, unde $c \in (0,x)$; deci $f(x)$

$\leq xA\left|f^n(c)\right| \leq \alpha AM$, $\forall x \in [0,\alpha]$. Ca urmare, $f(x) \leq \alpha AM$, $\forall x \in [$
$M \leq \alpha AM$ sau $\alpha A \geq 1$.

Fie $\Delta = (0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}, \alpha)$ o diviziune a intervalului $[0,\alpha]$ c
$(*)$. Dacă f nu-i identic nulă pe $[0,\alpha_1]$, atunci $M_1 = \sup\limits_{x\in[0,\alpha_1]} f(x) > 0$
obţinem $f(x) \leq \alpha_1 AM_1$, $\forall x \in [0,\alpha_1]$; deducem că $M_1 \leq \alpha_1 AM_1$, ad
ceea ce contrazice $(*)$. În concluzie f este identic nulă pe $[0,\alpha_1]$. În pa
$f(\alpha_1) = 0$ şi cu intervalul $[\alpha_1, \alpha_2]$ procedăm la fel ca şi cu $[0,\alpha_1]$ etc.

După un număr finit de paşi, deducem că f este identic nulă pe în
$[0,\alpha]$. Presupunerea iniţială făcută este falsă. În concluzie, f este id
$[0,\infty)$.

L18. *Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ astfel încât $I_n + sA$ este*
$(I_n + sA)^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ pentru orice $s \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

a) Să se arate că $I_n + kA$ este inversabilă pentru orice $k \in \mathbb{Z}$ şi (
$\in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$;

b) Dacă $A^2 = O_n$, să se arate că $G = \{I_n + kA;\ k \in \mathbb{Z}\}$ este gru
înmulţirea matricelor şi să se determine toate subgrupurile lui G.

Marian Ion

Soluţie. *a*) Se arată uşor afirmaţia: $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ este inversabilă
$\Leftrightarrow \det C = \pm 1$. Fie $P(x) = \det(I_n + xA)$, $\operatorname{grad} P \leq n$, $P \in \mathbb{Z}(X)$.
$s \in \{0, 1, 2, \ldots, 2n\}$, avem: $C_s = I_n + sA$ este inversabilă în $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}$
$= \pm 1 \Leftrightarrow P(s) = \pm 1$. Prin urmare, există cel puţin $n+1$ numere s
valoare 1 sau cel puţin $n+1$ numere s în care P este -1.

Considerăm că există $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1} \in \{0, 1, 2, \ldots, 2n\}$ astfel în
$= P(u_2) = \cdots = P(u_{n+1}) = 1$; analog se procedează în celălalt ca
$Q(X) = P(X) - 1$, de grad cel mult n, se anulează pentru $n+1$ valori
$Q = 0$ şi $P = 1$. Rezultă că $\det(I_n + kA) = 1$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ şi, în consecin
dorită.

b) Dacă $C_s = I_n + sA$, $C_t = I_n + tA$, $s, t \in \mathbb{Z}$, atunci, în ipotez
$C_s C_t = C_{s+t}$. Se verifică uşor că G este grup în raport cu înmulţi
şi că $(G, \cdot) \simeq (\mathbb{Z}, +)$ prin $f : \mathbb{Z} \to G$, $f(k) = I_n + kA$. Deoarce su
$(\mathbb{Z}, +)$ sunt de forma $H = m\mathbb{Z}$, $m \geq 0$, rezultă că subgrupurile lui $($
$\{I_n + mkA;\ k \in \mathbb{Z}\}$ cu $m \in \mathbb{N}$.

L19. *Fie H un subgrup al grupului altern $(A_{2002}, \circ)$. Dacă*

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & 1999 & 2000 & 2001 & 2002 \\ 1 & 2 & \ldots & 1999 & 2001 & 2002 & 2000 \end{pmatrix} \in H$$

şi $\sigma \circ \rho \circ \sigma^{-1} \in H$, $\forall \sigma \in A_{2002}$, să se arate că $H = A_{2002}$.

Lucian-Georges L

Soluţie. Se ştie că grupul altern $(A_n, \circ)$, $n \geq 3$, este generat de ciclu
3. Pentru a demonstra că $H = A_{2002}$ este suficient să arătăm că orice as
află în H. Pentru aceasta, fie (α, β, γ) un 3-ciclu oarecare $(\alpha, \beta, \gamma \in \{1,$
Fie $\sigma = \begin{pmatrix} \ldots & a & \ldots & b & \ldots & 2000 & 2001 & 2002 \\ \ldots & a' & \ldots & b' & \ldots & \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$, unde a, b, a', b'
fel încât $\sigma \in A_{2002}$. Se constată că $(\alpha, \beta, \gamma) = \sigma \circ \rho \circ \sigma^{-1} \in H$.

L20. *Fie $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$. Se consideră funcţia $f : [1,a] \to \mathbb{R}$ de două*
Să se arate că dacă funcţia $g : [1,a] \to \mathbb{R}$, $g(x) = xf'(x)$ este monoto
atunci

$$f\left(\sqrt{a}\right)\ln a \leq \int_1^a \frac{f(t)}{t}dt.$$

Marcel Chiriţ

Soluţie. Cum g este funcţie crescătoare, rezultă că $g' \geq 0$, adică f' (
≥ 0, $\forall x \in [1,a]$.

Fie funcţia $h : [0,1] \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(a^x)$. Avem: $h'(x) = a^x$
$h''(x) = a^x \ln^2 a\,[f'(a^x) + a^x f''(a^x)] \geq 0$, $\forall x \in [1,a]$, de unde rezu
convexă. Conform inegalităţii lui Jensen, avem:

$$h\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{h(x_1) + h(x_2) + \cdots + h(x_n)}{n}, \ \forall x_1, x_2, \ldots$$

Pentru $x_k = \dfrac{k}{n}$, $k = \overline{1,n}$ şi trecând la limită pentru $n \to \infty$ obţinem

$$h\left(\frac{1}{2}\right) \leq \int_0^1 h(t)\,dt, \quad \text{adică} \quad f\left(\sqrt{a}\right) \in \int_0^1 f(a^x)\,dx.$$

În ultima relaţie efectuăm schimbarea $a^x = t$ şi obţinem inegalitatea c

---

LISTA MEMBRILOR FILIALEI IAŞI a S.

- continuare din nr. 1/2000, 1/2001 şi 1/2002 -

90. GALL Eduard	Inginer, S.C. Easten, Iaşi
91. URSACHE Felicia-Camelia	Şcoala gen. nr.36, Iaşi
92. LĂMĂTIC Lidia-Carmen	Grupul Şcolar Agricol Holboc
93. MACSIMIUC Delia	Şcoala "Otilia Cazimir", Iaşi
94. FARCAŞANU Ana-Corina	Şcoala gen. nr.36, Iaşi
95. BAICAN Tatiana	Colegiul "C.Negruzzi", Iaşi
96. BUCĂTARU Mihaela	Colegiul "E.Racoviţă", Iaşi
97. BUCĂTARU Ion	Fac. de matematică, Univ. "Al
98. CREŢU Ines	Şcoala gen. nr.42, Iaşi
99. ASIMINOAIEI Ana	Liceul de chimie, Iaşi
100. NAZARIE Elena	Liceul de chimie, Iaşi
101. PÂSLARU Margareta Adriana	Şcoala prof. specială, Tg. Fru
102. BOTÂRCĂ Mihaela	Şcoala gen. nr.10, Iaşi
103. LĂDUNCĂ Lucian-Georges	Liceul de informatică "Gr.Moi
104. GOŞMAN Neculai	Şcoala "G.Ibrăileanu", Tg.Fru
105. ONICIUC Carmen-Elena	Şcoala nr.6 "M.Busuioc", Paş
106. LUPULEASA Iuliana	
107. ŞTIURCĂ Ecaterina	Grupul Şcolar "M.Sturza", Ia
108. ANIŢA Alice	Colegiul Naţional, Iaşi
109. PREDA Anişoara	Şcoala "D.D.Pătrăşcanu", Tor

[1] Lista va fi continuată în numerele următoare.

Probleme propuse

Clasele primare

P.44. Un vecinul al unui vecin al numărului 81 este egal cu un vecin
al numărului 77. Despre ce număr este vorba?
(*Clasa I*) **Mihaela Rusu**

P.45. Adunând trei numere naturale a, b, c obţinem suma 62. Prim
mai mare decât al treilea şi împreună au suma 12. Care sunt cele trei
(*Clasa* a *II-a*) **Înv. Mari**

P.46. Mihai, Dan şi Petru practică fiecare un alt fel de sport şi a
fotbal sau volei. Mihai şi voleibalistul locuiesc în acelaşi bloc. Cel care
cel care joacă fotbal l-au urmărit pe Petru la un meci. Ce sport practi
(*Clasa a II-a*) **Adina Dohotaru**

P.47. Diferenţa a două numere este 48. Această diferenţă este cu
decât jumătatea unuia dintre ele. Determinaţi numerele.
(*Clasa a III-a*) **Înv. Rodica Rot**

P.48. Un agricultor împarte un teren în trei parcele. În fiecare an, f
este cultivată numai cu una din culturile: grâu, porumb sau legume.
anul 2003, agricultorul se hotărăşte ca pe fiecare parcelă să fie altă cult
consecutivi.

a) Care este primul an după 2003 în care se repetă culturile pe cele

b) Se poate preciza care este ordinea culturilor pe cele trei parcele
(*Clasa a III-a*) **Andreea Surugiu**

P.49. La un moment dat, cerând unei persoane anul naşterii, acea
"anul acesta împlinesc 25 ani, iar dacă aş scrie toate numerele înce
terminând cu anul naşterii şi apoi toate numerele începând cu 1 şi term
în care ne aflăm mi-ar trebui 13710 cifre. În ce an ne aflam când am pu
(*Clasa a III-a*) **Prof. Cătălin - Cristian B**

P.50. a) Câte numere trebuie adăugate şirului $1, 2, 4, 5, 7, 8, \ldots, 9$
obţine toate numerele de la 1 la 98?

b) Efectuaţi $1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 + \cdots + 97 + 98 - 2 \cdot (3 + 4 + 5 +$
(*Clasa a IV-a*) **Georgiana Ciobanu**

P.51. Produsul a două numere naturale este 913 368. Unul din nu
unităţilor şi cifra zecilor mai mare ca 2 şi mai mică decât 8. Dacă la
mărim cifra zecilor cu 2 şi micşorăm cifra unităţilor cu 1, obţinem un p
951 425. Aflaţi cele două numere.
(*Clasa a IV-a*) **Înv. Elena Ză**

P.52. În trei cutii sunt 212 bile. Din prima cutie se scoate un număr
doua de 2 ori mai mult şi încă două bile, din a treia se scoate cât triplul
bile scos din a doua cutie. În fiecare cutie rămâne un număr de bile eg
total al bilelor scos din cele trei cutii la un loc. Câte bile au fost în fie
(*Clasa a IV-a*) **Înv. Mari**

P.53. Efectuând o singură cântărire, să se ia 475g dintr-un kilog

utilizând două greutăţi, una de 200g şi cealaltă de 150g.
(*Clasa a IV-a*) **Prof. Petru**

Clasa a V-a

V.36. Fie n un număr impar, iar $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $n \in \mathbb{N}^*$ numere c
la n dau câturi distincte şi resturi distincte. Arătaţi că valoarea mi
$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ este multiplu de 12.

Dragoş Ungurean

V.37. Comparaţi fracţiile $a = \dfrac{333331}{333334}$ şi $b = \dfrac{222221}{222223}$.

Maria Co

V.38. Să se arate că $2^a + 2^b + 2^c + 2^d + 2^e \neq 2003$, $\forall a, b, c, d, e \in \mathbb{N}$

Irina Ispas, st

V.39. Să se determine numerele prime $p_1 < p_2 < p_3 < p_4$ astfel î
$p_1 + p_2 + p_3 + p_4$, $p_3 - p_2$, $p_4 - p_3$ să fie, de asemenea, prime.

Petru

V.40. Este posibilă o partiţionare a mulţimii $\{1, 2, \ldots, 12n + 9\}$ î
mulţimi disjuncte, fiecare cu câte trei elemente, astfel încât în fiecare s
element să fie suma celorlaltor două?

Titu Zvonaru

Clasa a VI-a

VI.36. Fie $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$. Arătaţi că printre valorile naturale ale
adevărată propoziţia $n^2 + k \,\vdots\, n + k$, există cel puţin trei pătrate perfec

Claudiu Ştefa

VI.37. Numerele 1160, 1604 şi 2270 dau acelaşi rest la împărţirea
împărţitorul n.

Cristian

VI.38. Demonstraţi că nu există numere naturale x, y, z direct pro
trei numere naturale consecutive, astfel încât $x + y + z$ să fie număr p

Alexandru Negrescu, ele

VI.39. Radu şi Mihai joacă de mai multe ori un joc în urma cărui
primeşte a puncte, iar cel care pierde primeşte b puncte $(a, b \in \mathbb{N}^*$,
scorul final este $61 - 49$ în favoarea lui Radu, iar Mihai a câştigat 4 partid

Adrian Za

VI.40. Fie $\triangle ABC$ cu $m(\widehat{A}) = 120°$. Perpendiculara în C pe AC
mediatoarea lui $[AB]$ în D; notăm $\{E\} = CD \cap AB$. Să se arate că AB
şi numai dacă $m(\widehat{BDE}) = 90°$ şi $BE = 2AB$.

Ioan Săcăle

Clasa a VII-a

VII.36. Să se arate că $\sqrt{\dfrac{1}{n}} + \sqrt{\dfrac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{\dfrac{2n-1}{n}} < 2n - 1$, $\forall n$

Cătălin C

VII.37. Arătaţi că în baza de numeraţie 7 printre numerele ce se s
$0, 1, 2$ există o infinitate care sunt pătrate perfecte şi o infinitate ce nu

perfecte. Aceste afirmaţii rămân valabile dacă se folosesc cifrele 3, 5, 6

Ruxandra Ioana Vâlcu

VII.38. Fie a, b, c cifre nenule, $a \neq c$. Să se arate că dacă $\frac{\overline{ab}}{\overline{cb}}$
(termenii primei fracţii conţinând câte 2003 cifre b), atunci $b = a + c$.

Mihaela Bu

VII.39. Dacă $x < y < z$ sunt lungimile laturilor unui triunghi
atunci $x^n + y^n \neq z^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

Dumitru

VII.40. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic cu $m(\widehat{A}) = 60°$, iar M
astfel încât $m(\widehat{BMC}) = 150°$. Notăm cu P, Q, R proiecţiile lui M p
respectiv AB. Să se arate că $\triangle PQR$ este dreptunghic.

Constantin

Clasa a VIII-a

VIII.36. Determinaţi cardinalul minim al unei mulţimi B pentr
defini funcţii $f : \mathbb{R} \to B$ astfel încât $f(-1) < 0$ şi $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$

Iulia Zanosch

VIII.37. If $a, b, c \in (0, \infty)$ prove the following inequalities:

a) $(a + b + c)^3 - \left(a^3 + b^3 + c^3\right) \geq 24$ where $abc = 1$;

b) $(a + b + c)^3 - \left(a^3 + b^3 + c^3\right) \geq \frac{8\sqrt{3}}{3}$ where $ab + bc + ac = 1$.

Zdravko Starc, Vršac

VIII.38. Fie $n \in \mathbb{N}$ fixat. Arătaţi că există o infinitate de nume
astfel încât $x^{2n} + y^{2n} + z^{2n} = x^{2n+1} + y^{2n+1} + z^{2n+1}$.

Lucian Tuţes

VIII.39. Fie $ABCD$ un patrulater strâmb cu $[AD] \equiv [BC]$. Să se
dreptele paralele d_1, d_2, d_3, d_4 astfel încât $A \in d_1$, $B \in d_2$, $C \in d$
$dist\,(d_1, d_4) = dist\,(d_2, d_3)$.

Horia Mihail Teodoresc

VIII.40. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub, iar $O \in (BB')$. Dreptel
intersectează (ABC) în E, respectiv F, iar AO şi CO intersectează $($
respectiv F'.

a) Arătaţi că $EF \cdot E'F'$ nu depinde de poziţia lui O;

b) Arătaţi că $S_{BB'E'E} \geq S_{ABCD}$ şi determinaţi O pentru care se atin

Monica N

Clasa a IX-a

IX.36. Determinaţi $x < 0 < y$ astfel încât $xy + \frac{y}{x} = y^3 - 5y + 2$.

Cezar Lupu, elev

IX.37. Pentru $x \in [1, \infty)$, $n \in \mathbb{N}^*$, demonstraţi inegalitatea

$$\left(x^{n+1} + 1\right)(x^n - 1) \geq 2nx^n(x - 1).$$

Marius Pachiţari

IX.38. Să se arate că $\dfrac{x^{n+1}}{y^n}+\dfrac{y^{n+1}}{z^n}+\dfrac{z^{n+1}}{x^n}\geq x+y+z,\ \forall x,y,z>$

Gigel Buth

IX.39. Să se rezolve ecuaţia $\dfrac{1}{2\sqrt{[x]^3}}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{[x]\cdot[x+1]^3}}=\dfrac{2}{[x]\cdot[x+}$

Daniel Ji

IX.40. Fie $M\neq G$ în planul $\triangle ABC$ şi D,E,F mijloacele la $[CA]$ şi respectiv $[AB]$. Considerăm punctele X,Y,Z astfel încât $\overline{X}$ $\overrightarrow{YE}=m\overrightarrow{YM}$, $\overrightarrow{ZF}=m\overrightarrow{ZM}$, $m\neq 1$.

a) Dacă $m\neq\dfrac{3}{2}$, atunci AX,BY,CZ sunt concurente în S, cu $\overrightarrow{SG}=$

b) Dacă $m=\dfrac{3}{2}$, atunci AX,BY,CZ sunt paralele cu GM.

Virgil Nicul

Clasa a X-a

X.36. Să se rezolve inecuaţia $a^{\log_b^2 x}+x^{\log_b x}\leq a+b$, unde $a,b\in($

Daniela Dodan

X.37. Fie $a,b\in(0,1)\cup(1,\infty)$ şi funcţia injectivă $f:(0,\infty)\to$ funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(a^x)+f(b^x)$ este constantă. Să se arate c există funcţii f care satisfac ipotezele problemei.

Dan Popes

X.38. Fie $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ cu $a>b>c>d$. Să se arate că a,b,c,d sun aritmetică dacă şi numai dacă $(a-b)(b-c)(c-d)=\left(\dfrac{a-d}{3}\right)^3$.

A. V. Miha

X.39. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic cu dimens $AD=b$, $AA'=c$. Dacă $M\in Int\,A'B'C'D'$, notăm cu α,β,γ măsuri pe care AM le face cu AB, AD şi respectiv AA'. Să se arate că

$$AM<a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma<AC'.$$

Cătălin C

X.40. a) Pentru $x,y,z\geq 0$, demonstraţi inegalitatea

$$\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{x+z}+\sqrt{y+z}\right)\cdot\sqrt{xy+xz+yz}\geq 3\sqrt{6xyz}$$

b) Cu notaţiile uzuale, în orice triunghi are loc inegalitatea

$$\frac{R}{r}-2\geq\frac{9}{4}\cdot\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)^2+\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}.$$

Marian Te

Clasa a XI-a

XI.36. Fie D,M două matrice nesingulare de ordin n, D diag triunghiulară. Dacă $D={}^tMDM$, să se arate că M este tot o matr având ± 1 pe diagonala principală.

Adrian Cord

XI.37. Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ astfel încât $\det(A + \alpha{}^tA) = 0$, unde $\alpha \in$
Să se arate că $\det(A + {}^tA) = \dfrac{-2(\alpha-1)^2}{\alpha}\det A$.

Marian Ionescu, Piteşti şi Lucian Ţuţes

XI.38. Să se determine funcţiile continue $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$
$f(f(x)) + 2f(x) = 3x$, $\forall x \geq 0$.

Mihail Ben

XI.39. Fie şirul $(y_n)_{n\geq 1}$ astfel încât şirul $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\right)_{n\geq 1}$ este conv
$(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+^*$ are proprietatea că $x_n \leq x_{n+1}(1 + x_n y_{n+1})$, $\forall n \geq 1$, a
$\left(\dfrac{1}{x_n}\right)_{n\geq 1}$ este convergent.

Gheorghe Molea, Curt

XI.40. Fie $x_0 \in [-1, 1]$; arătaţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, ecuaţia 3
are o singură soluţie $x_{n+1} \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$. Demonstraţi că şirurile $(x_n)_{n\geq 0}$
sunt convergente şi calculaţi limitele lor.

Marian Te

Clasa a XII-a

XII.36. Să se determine $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ pentru care ecuaţia $x^2 = x$
unică în $\mathbb{Z}_n$; rezolvaţi ecuaţia în acest caz.

Andrei N

XII.37. Fie $(G, +)$ un subgrup al grupului $(\mathbb{R}, +)$. Să se determi
crescătoare de la $(G, +)$ la $(\mathbb{R}, +)$.

Dan Ştefan Marinescu şi Viorel Cornea,

XII.38. Determinaţi funcţiile derivabile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât f'
şi $g'(x) = f(x) - x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Gheorgh

XII.39. Fie $f, g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g$
$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \beta \in \mathbb{R}$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{g(n)}}{x+\alpha}dx$, unde $\alpha \in$

Adrian Sandovici, Pi

XII.40. Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă cu derivata continu
$xf'(x) \geq f(x)$, $\forall x \in [0, 1]$, iar $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{f(x)}{x}$ există şi este finită. Să se ara

$$f(1) \geq \min\left(2\int_0^1 f(x)\,dx, \int_0^1 \frac{f(x)}{x}dx\right).$$

Marcel Chiriţ

Probleme pentru pregătirea concursuri

A. Nivel gimnazial

G36. Fie $x, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât x divide $10^n - 1$, însă x nu divide 1

$k < n$. Să se arate că x divide $10^m - 1$ dacă şi numai dacă $m \vdots n$.

N. N.

G37. $2n$ muzicieni ($n > 2$) participă la un festival. La fiecare co
dintre ei cântă iar ceilalţi ascultă. Să se determine numărul minim de c
încât fiecare muzician să-i asculte pe toţi ceilalţi.

Titu Zvonaru

G38. Mulţimea $A \subset \mathbb{Z}$ are cinci elemente. Adunând în toate mod
câte trei elemente din mulţime, obţinem următoarele 10 sume: 3, 6,
15, 16, 18, 20. Determinaţi mulţimea A. (În legătură cu o problemă d
Iugoslavia.)

Gabrie

G39. Fie $x_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$, unde $n \geq 2003$, astfel încât

$$\begin{cases} x_1 - (n+1)\, x_2 + n x_3 \geq n - 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-2} - (n+1)\, x_{n-1} + n x_n \geq n - 1 \\ x_{n-1} - (n+1)\, x_n + n x_1 \geq n - 1 - n^2 \\ x_n - (n+1)\, x_1 + n x_2 \geq 2n - 1. \end{cases}$$

Dacă $x_1 = 1$, să se calculeze x_{2003}.

Romeo

G40. Comparaţi numerele reale a şi b, ştiind că $a^2 - 14a + b^2 + 6b$

Bogdan Răducan

G41. Dacă $0 < x \leq y \leq z$, să se arate că

$$3 \leq \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x} \leq \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \leq \frac{x}{z} + 1 + \frac{z}{x} \leq \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z}{x}$$

Ovidiu Pop

G42. Determinaţi $a, b \in \mathbb{R}$ dacă $[x] + [x + a] = [bx]$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Gheorgh

G43. Fie $\widehat{xOy}$ un unghi oarecare şi P un punct în interiorul său.
punctele $A, B \in [Ox$ cu $A \in (OB)$ şi $C, D \in [Oy$ cu $C \in (OD)$ as
unghiurile PAB şi PCD să fie echilaterale. Arătaţi că dreptele OP, A
concurente dacă şi numai dacă P se află pe bisectoarea unghiului dat.

Temistocle

G44. Fie $VABC$ o piramidă, iar G centrul de greutate al $\triangle A$
ce trece prin G taie dreptele VA, VB, VC în A', B' şi respectiv C'. S
$\frac{VA}{VA'} + \frac{VB}{VB'} + \frac{VC}{VC'} = 3$.

Constantin

G45. Fie $SABC$ un tetraedru în care $\triangle ABC$ nu este echilater
ile $[SA], [SB], [SC]$ nu sunt toate congruente. Demonstraţi că exist
$A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ pe dreptele SA, SB, SC, BC, AC şi respectiv A
trulaterele $A_1B_1A_2B_2$, $B_1C_1B_2C_2$ şi $A_1C_1A_2C_2$ să fie trapeze izoscele

$A_1C_1 \| A_2C_2$, $B_1C_1 \| B_2C_2$) dacă şi numai dacă
$$SA^2 \left(AB^2 - AC^2\right) + SB^2 \left(BC^2 - BA^2\right) + SC^2 \left(CA^2 - CB^2\right)$$
Daly Marciuc

B. Nivel liceal

L36. Fie $\triangle ABC$ şi $\mathcal{M}$ triunghiul său median. Dacă P este un p
interiorul sau pe laturile lui $\mathcal{M}$, iar A', B', C' sunt intersecţiile dreapt
CP cu laturile BC, CA şi respectiv AB, atunci $\frac{1}{4} < \frac{AP \cdot BP \cdot CP}{AA' \cdot BB' \cdot CC'}$
Marian Ione

L37. Fie cercurile $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ şi $\mathcal{C}$ astfel încât $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ sunt tangente exte
cercurile $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ sunt tangente interior lui $\mathcal{C}$ în B, respectiv C. Tang
interioară cercurilor $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ taie cercul $\mathcal{C}$ în A şi A_1, dreapta AB taie
AC taie $\mathcal{C}_2$ în L. Să se arate că $\frac{1}{DA} + \frac{1}{DA_1} = \frac{2}{KL}$.
Neculai Roman, Mi

L38. Fie $\triangle ABC$ şi punctele $D, D' \in BC$ conjugate armonic în rapo
B şi C. Cercul circumscris $\triangle ADD'$ intersectează AB în M şi AC î
că, dacă $MN \perp BC$, atunci $[AD$ şi $[AD'$ sunt bisectoarele unghiului $\widehat{A}$
exterioară) sau $m(\widehat{A}) = 90°$.
Temistocle

L39. Determinaţi toate numerele naturale nenule n pentru care $\frac{an}{p}$
pătrat perfect, unde $a, p \in \mathbb{N}^*$.
Mihai

L40. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ astfel încât $\det\left(A^2B + AB^2\right)$ este impar
că $A + \alpha B$ este inversabilă pentru orice $\alpha \in \mathbb{Q}$.
Marian Ursăre

L41. Demonstraţi că grupul simetric S_{32} nu are elemente de ordin
Paul Georgescu şi Gabrie

L42. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel finit cu cel puţin 5 elemente şi cu $1 + 1 \in$
Fie $M = \left\{x \in A \mid x^2 = 1\right\}$, $I = \left\{x \in A \mid x^2 = x\right\}$. Să se arate că card
$<$ card A /2.
Ovidiu Munte

L43. Determinaţi polinoamele $P \in \mathbb{R}[X]$ pentru care $P(z) \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$,
Gheorgh

L44. Fie $n \geq 2$ număr natural, iar $f_0, f_1, f_2, \ldots$ un şir de poli
prin: $f_0 = (X+1)^n$, $f_{p+1} = X \cdot f_p'$, $\forall p \geq 0$. Definim încă $h_p = f_p$
$+ \cdots + (-1)^{p-1} \sigma_{p-1}^{p-1} f_1$, $\forall p \geq 1$, unde $\sigma_k^n = \sum\limits_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} i_1 i_2 \ldots i_k$, $k \in$
sunt sumele simetrice fundamentale ale numerelor $1, 2, \ldots, n$. Să se ara
$h_p = n(n-1)\ldots(n-p+1) X^p (X+1)^{n-p}$, $\forall p = 1, 2, \ldots$
Marian Te

L45. Fie $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ continuă. Dacă funcţia $F : [0, \infty)$ -
$= \int_0^x f(t)\, dt$ este mărginită, să se arate că $\lim\limits_{n \to \infty} n \int_0^1 x f(nx)\, dx = 0$.
Adrian Za

Pagina rezolvitorilor

BOTOŞANI

Şcoala nr. 7 "Octav Băncilă". **Clasa a VIII-a.** NEGRESCU Alexa
28,30,32,34), VII(26,32), VIII(26,27,32,34), G(7,11,32).

BRAŞOV

Şcoala generală nr. 5. **Clasa a VI-a.** POSTEUCĂ Raluca: V(26,3
35), VII(34). **Clasa a VII-a.** POSTEUCĂ Bogdan: V(26,31,33), VI(34

Şcoala generală nr. 20. **Clasa a VII-a.** BOERIU Adela: VI(31-35)

Liceul "N. Titulescu". **Clasa a IX-a.** ANDRAŞ Cristian: VII(26
VIII(32); BORICEAN Mihai: VII(26,29,32,34,35), VIII(32,33); BUF
VII(26,29,32,34,35), VIII(27,32,33); CIOBOTĂ Andreea: VII(26,29,3
(32,33); CIOBOTĂ Cristian: VII(26,29,32,34,35), VIII(32,33); CÎMP
VII(26,29,32,34,35), VIII(27,32,33); COSTEA Rodica: VII(26,29,34)
FERAR Achim: VII(26,29,32,34,35), VIII(27,32,33); FUNDUREAN
VII(26,29,32,34,35), VIII(32,33); GHILIFTOIU Mirela: VII(26,29,32
CEA Ovidiu: VII(26,29,32,34,35), VIII(27,32, 33); MANEA George: VI
35), VIII(32); MIHALCEA Cătălin: VII(26, 29,32,34,35), VIII(32);
hai: VII(26,29,32,34,35), VIII(27,32,33); MUNTEAN Alexandru: VII
VIII(32); MUNTEANU Luminiţa: VII(26,32,24), VIII(32,33); PUCHE
VII(26,29,32, 34,35), VIII(27,32,33); RÎŞCU Laura: VII(26,27,29,34,35)
VLAD Daniel: VII(26,29,32,34,35), VIII(27).

CRAIOVA

Colegiul Naţional "Fraţii Buzeşti". **Clasa a VI-a.** TUŢESCU A
V(31,35), VI(31,32,34), VII(31,32), G(21); **Clasa a VIII-a.** DINU Lav
VIII(31,32), G(21,23,26).

FOCŞANI

Colegiul Naţional "Unirea". **Clasa a VIII-a.** SECARĂ Andree
VII(31,32), VIII(32,34,35), G(21,23,25).

HÂRLĂU (IAŞI)

Liceul Teoretic "Ştefan cel Mare". **Clasa a VII-a.** ANTOCI Bog
30), VI(29,33,34,35), VII(29,32); BURICAN Bogdan Alexandru: V(28,3
VII(29); MIHULCĂ Lucian: V(27,28,30,32), VI(29,34,35), VII(29,31,32
Marian-Dragoş: V(27,28,30,32,33), VI(29,33-35), VII(29); ROTARU I
28,32), VI(29,32-35), VII(29).

IAŞI

Colegiul Naţional "C.Negruzzi". **Clasa a VI-a.** ROŞU Eugen
VI(31-35), VII(32), VIII(32), G(21,23,27). **Clasa a X-a.** IACOB Alin:
L(21,28,29).

Liceul "Garabet Ibrăileanu". **Clasa a VI-a.** BUDEANU Ştefan
V(31-33), VI(31); FUIOREA Bogdan: P(42), V(31,32), VI(31,32); U
Dragoş: P(42), V(31-33), VI(31,32). **Clasa a VIII-a.** ANDRIESCU
35), VII(32), VIII(34); BRĂNIŞTEANU Ştefana:VI(35), VII(31,32), C
VERDEANU George: VI(33,34), VII(32,35), VIII(34); MOROŞANU M
35), VII(31,32); TĂNASE Ioana: VI(33-35), VII(31,32); TUDORACHI

35), VII(31,32), VIII(32). **Clasa a X-a.** TONU Constantin: VII X(33), G(32,33).

Liceul Teoretic "M.Eminescu". **Clasa a VIII-a.** AVRAM Mircea: 35), VII(26,28,29,32),VIII(27); CIUCANU Radu: VI(27,34,35), VII(2 (27); DĂNĂILĂ Mihai: VI(27,33-35), VII(26,29,32), VIII(27); DUŞA (27,34), VII(31,32), VIII(33); TOFAN Andrei: VI(27,34,35), VII(26,29, TUDOSE Ştefan: VI(27,34,35), VII(26,32), VIII(27); TURLIUC Ra 35), VII(29); GRAMSCHI Raluca: VI(26,27,34,35) (4 probleme). **C** DUMITRESCU Roxana: VII(26,29,31,32), VIII(31,32,34,35), IX(31).

Şcoala "G.Coşbuc". **Clasa a II-a** (înv. GALIA Paraschiva). CI Cătălina: P(24,27,34-36); MIHĂILESCU Laura-Ioana: P(24,27,34-36 Constantin: P(24,27,34-36). **Clasa a II-a** (înv. RACU Maria). BARA P(24,27,34-36); BURLACU Claudiu: P(24,27,34-36); CALOIAN Andre 36); CĂLIN Georgiana: P(24,27,34-36); CRĂCIUN Mădălina: P(24,27 GĂN Crina-Alexandra: P(24,27,34-36); MOISA Bogdan: P(24,27,34-3 Răzvan: P(24,27,34-36); RUSU Flavia: P(24,27,34-36).

Şcoala "Al. Vlahuţă". **Clasa a IV-a** (înv. MAXIM Gabriela). CIO Florin: P(34-42); MUNTEANU Ioana-Alexandra: P(34-42); SOFICU P(35-37,39,40); STURZU Tudor-Nicolae: P(33-42).

Şcoala "Alexandru cel Bun". **Clasa a II-a** (înv. SPÂNU Doiniţa) Ionuţ-Mihai: P(24,25,27,33-35); COJOCARIU Oana-Alexandra: P(24, COJOCARU Veronica: P(24,25,27,33-36); DAMIAN Daniel: P(24,25,2 REA Roxana-Maria: P(24,25,27,33-37); FURTUNĂ Marta: P(24, 25,27 NIE Ioana: P(24,25,27,34-36); IVANOV Alla: P(24,25,27,33-36); M Mihai: P(24,25,27,33-36); MIHĂILĂ Tofana-Maria: P(24,25,27,33-37 Ciprian: P(24,25,27,33-37); PĂTRAŞC Ilinca: P(24,25,27,33,36,37); R dru: P(24,25,27,33-37); SÂRBU Silviu Alexandru: P(24,25,27,33,35, Andreea: P(24,25,27,33-37); URSU Gina-Ioana: P(24,25,27,33-36).

Şcoala "B.P.Haşdeu". **Clasa a IV-a** (înv. ŞTEFAN Liviu). PIN Liviu: P(24-31); PINTILIE Nicoleta: P(24-30); ŞTERBULEAC Da 31). **Clasa a IV-a** (înv. TÂRZIORU Iuliana). CHIHAIA Mihai-Seb 43); RAIŢĂ Bogdan: P(34-43); SILION Cătălina: P(34-42); SPÂNU D P(33-43).

Şcoala "N.Tonitza". **Clasa a III-a** (înv. MARCU Monica). BUTNA P(35-37,39,40); ONUŢĂ Alin: P(35-37,39,40). **Clasa a IV-a** (înv Elena). ANDRUŞCĂ Loredana: P(34,38-42); BONCU Andrei: P(34,3

Şcoala "T.Maiorescu". **Clasa a III-a** (înv. CHIRILĂ Beatrice). T Alexandru-Gabriel: P(34-41).

Şcoala "O.Cazimir". **Clasa a IV-a** (înv. PÂRÂIALĂ Dumitru). P(38-43).

PLOIEŞTI

Colegiul Naţional "I.L.Cargiale". **Clasa a VI-a.** JELEA An V(21,23,28) (soluţiile au fost primite înainte de apariţia nr. 1/2002).

IMPORTANT

- În scopul unei legături rapide cu redacţia revistei, pot fi utiliz toarele adrese e-mail: **tbi@math.tuiasi.ro**, **popagabriel@** Pe această cale colaboratorii pot purta cu redacţia un dialog materialele trimise acesteia, procurarea numerelor revistei etc
- La *problemele de tip L* se primesc soluţii de la orice iubitor de m elementare (indiferent de *preocupare profesională* sau *vârstă* dintre soluţiile acestor probleme - ce sunt publicate în revista an - va fi urmată de numele tuturor celor care au rezolvat-o.
- **Adresăm cu insistenţă rugămintea ca materialele tr vistei să nu fie (să nu fi fost) trimise şi altor publicaţ**

Redacţia revistei "Recreaţii matematice" acordă câte o **di premiu** în cărţi următorilor elevi:

ANDRIESCU Alina (Lic. "G. Ibrăileanu", cl. a VIII-a): 2/2001 ((5pb), 1/2003 (5pb);

BRĂNIŞTEANU Ştefana (Lic. "G.Ibrăileanu", cl. a VIII-a): 2/2001 (11pb), 1/2003 (5pb);

BUDEANU Ştefana (Lic. "G. Ibrăileanu", cl. a VI-a): 1/2002 (6pb), 1/2003 (6pb);

CHIHAIA Mihai - Sebastian (Şc. "B. P. Haşdeu", cl. a IV-a): 1 2/2002 (9pb), 1/2003 (10pb);

JUVERDEANU George (Lic. "G. Ibrăileanu", cl. a VIII-a): 1/2002 (5pb), 1/2003 (5pb);

RAIŢĂ Bogdan (Şc. "B. P. Haşdeu", cl. a IV-a): 1/2002 (10pb), 2 1/2003 (10pb);

SILION Cătălin (Şc. "B. P. Haşdeu", cl. a IV-a): 1/2002 (10pb), 2 1/2003 (9pb);

SPÂNU Dragoş - Andrei (Şc. "B. P. Haşdeu", cl. a IV-a): 1/2002 ((9pb), 1/2003 (11pb);

TUDORACHE Alexandru - Gabriel (Şc. "T. Maiorescu", cl. a I (12pb), 2/2002 (7pb), 1/2003 (8pb);

TUDOSE Ştefan (Lic. "M. Eminescu", cl. a VIII-a): 1/2001 (5pb), 1/2003 (5pb);

TUŢESCU Anca Ştefania (Colegiul Naţional "Fraţii Buzeşti", Craio 1/2002 (6pb), 2/2002 (8pb), 1/2003 (8pb);

UNGUREANU Bogdan (Lic. "G. Ibrăileanu", cl. a VI-a): 1/2002 (7pb), 1/2003 (6pb), autor al problemei V.3

Cărţile au fost oferite de revista "Recreaţii matematic

Editura *PARALELA 45*

Al V-lea Congres internaţional al matematicienilor români

Piteşti, 22 - 28 iunie, 2003

Incepând cu anul 1929, s-au organizat, până în prezent, cinci cong naţional ale matematicienilor români.

Primul Congres a avut loc în anul 1929 la Cluj având ca promotor **Sergescu**, dar având concursul celor mai reputaţi matematicieni român perioadă.

Al II-lea Congres a avut loc la Turnu Severin în 1932, bucurând primul de participarea unor mari matematicieni ai timpului, **Paul Monte Denjoy**, **Waclaw Sierpinski** şi alţii.

Al III-lea Congres s-a desfăşurat la Bucureşti în 1945, cu o participa a matematicienilor străini, date fiind condiţiile dificile de la sfârşitul celui război mondial.

Cel de-**al IV-lea Congres** a fost organizat tot la Bucureşti, cu o pre cială, în anul 1956. Statul român a făcut un efort special şi prestigiul bucurau matematicienii romani (toţi formaţi în marile şcoli din occident) invitarea unui număr însemnat de matematicieni străini, de faimă inte Din *Franţa* au participat **Jacques Hadamard** şi **Arnaud Denjoy**, din **Masuo Hukuhara**, din *Germania* - **W. Blaschke**, din *Statele Unite* - **E** şi **S. Eilenberg**, din *Uniunea Sovietică* - **I. Vekua**, din *Polonia* - **K. Kur** **T. Wazewski**. A fost un prilej de reîntâlnire a matematicienilor români di lui **Grigore Moisil**, **Gheorghe Vrănceanu**, **Miron Nicolescu**, **Simio** **Nicolae Teodorescu**, **Tiberiu Popoviciu** cu foştii lor mentori sau cole

După o întrerupere de 47 de ani, s-a organizat cel de-**al V-lea Congr** *versitatea din Piteşti*, al cărei *Rector dr. Gheorghe Barbu* este el însuşi ma (format la Iaşi şi Bucureşti). Domnia sa şi-a asumat sarcinile dificile ale congresului, *eveniment organizat sub egida Academiei Române, a Univer cureşti şi a Institutului de Matematică "S. Stoilow" al Academiei Român* zarea congresului a fost reuşită, datorită în primul rând comitetului local zare, autorităţilor locale şi sprijinului acordat de la Bucureşti. Ca o nou ristică a acestui congres, subliniem prezenţa unui număr însemnat de mat români care-şi desfăşoară acum activitatea în ţări străine (a se vedea *Liber matica*, vol. XXIII, în care se află numele şi adresele a peste 300 de mat români ce deţin catedre în universităţi din străinătate, pe toate continente *"Ziarul de Azi"* din Piteşti, în timpul desfăşurării congresului, a publicat relatări şi informaţii privind participarea unor reputaţi matematicieni str a multor matematicieni români care au activat sau activează în alte ţări. din ultima categorie vom aminti academicienii **Nicolae Cristescu** şi **Nic** **culeanu**, **Sergiu Klainerman** (Princeton), **Dan Burghelea** (Columbu **Daniel Tataru** (Berkeley, CA), **Henri Moscovici** (Columbus - Ohio), M (Tel Aviv), **Radu Theodorescu** (Laval, Canada).

Spre deosebire de multe alte congrese sau conferinţe cu participare inte congresele internaţionale ale matematicienilor români au fost întotdeauna

zate printr-o largă reprezentare a tuturor domeniilor de bază din cerceta
matică. Astfel, cele peste 400 de comunicări anunţate pentru Congresu
au fost distribuite în 15 secţii, începând cu *Logica*, *Algebra* şi *Teoria*
mergând până la *Istoria şi Filozofia matematicii* şi *Pedagogia matematic*
reprezentate *Geometria*, *Analiza clasică şi modernă*, *Ecuaţiile diferenţi*
controlului optimal, *Teoria probabilităţilor şi Statistica matematică*, *Cercet*
ţională, *Mecanica* şi *Astronomia*, *Fizica matematică*. Lucrările s-au desfă
în plenul congresului (începând cu şedinţa de deschidere la care *Ambasado*
la Bucureşti, E. S. **Philippe Étienne**, el însuşi matematician şi admirab
a captivat audienţa), precum şi în numeroase secţii pe specialităţi.

Pe lângă matematicienii străini care au participat la Congres, venind
Unite, *Canada*, *Franţa*, *Germania*, *Rusia*, *Ungaria*, *Italia* şi alte ţări,
remarcăm prezenţa destul de însemnată a matematicienilor din *Republica*

Este destul de dificil să prezentăm o vedere de ansamblu asupra desfăşu
gresului al V-lea al matematicienilor români, dată fiind varietatea domen
date de către participanţi. Vom sublinia totuşi faptul că *programul şi d*
lucrărilor congresului s-au încadrat în standardele internaţionale. O cri
adus organizatorilor a fost aceea că data congresului a coincis cu multipl
academice, cum ar fi: examenele studenţeşti, examenul de licenţă şi alte
acesta, mulţi doritori din ţară de a participa au fost absenţi.

Vom încheia subliniind faptul că acest al V-lea Congres a ilustrat
matematicii româneşti, *încadrarea ei reuşită în comunitatea matematică*
nală. Să sperăm că următorul congres va avea loc după o perioadă
îndelungată ca până acum.

Constantin CORDUNEAN
University of Texas at Arli

Observatorul din Iaşi – 90 de ani de la înfiin

Înfiinţarea observatoarelor astronomice din Bucureşti (în 1908) şi ap
(în 1913) face parte dintr-un proces mai amplu de modernizare a învăţ
universitar şi a cercetării ştiinţifice, proces impulsionat de **Legea Haret**
care se va maturiza în condiţiile social-politice şi culturale din **România**

Încă din momentul înfiinţării în 1860 a **Universităţii din Iaşi**, în
"secţiei ştiinţelor pozitive din facultatea de filozofie" sunt prevăzute şi
mecanică şi astronomie, dar catedrele aferente vor căpăta fiinţă mai tâ
legea învăţământului din 1864, care se pune în aplicare începând cu d
febr. 1865, se creează **Facultatea de ştiinţe**, desprinsă din Facultatea d
şi având trei secţii distincte: fizică, matematică şi ştiinţe naturale; una d
catedre ale noii facultăţi este cea de *geodezie teoretică şi astronomie*. La 15
este numit profesor titular al acestei catedre **Neculai Culianu**, care o
până în 1906, anul pensionării sale. N. Culianu trece licenţa în ştiinţe m
la Sorbona, este atras de astronomie şi de Observatorul din Paris, cu
şi rămâne prieten pentru toată viaţa cu astronomul francez *Camille Fl*
N. Culianu este autor al unui *Curs de cosmografie* pentru liceu (două edi
1902). Universitatea din Iaşi a primit, chiar din momentul înfiinţării, de la
de Medici şi Naturalişti din Iaşi un bun instrument de observaţii astrono
aparţinuse poetului moldovean *Costache Conachi* şi pe care moştenitorii
acesteia.

După înfiinţarea Catedrei de astronomie (în 1864) au fost achiziţion
instrumente; ele au fost depozitate într-o cămăruţă a vechiului local al u
încât nici nu puteau fi arătate studenţilor. Cu toate insistenţele nu s-a r
îndelungat obţinerea fondurilor pentru construirea unui observator astron

Constantin Popovici este licenţiat al Facultăţii de ştiinţe din Iaşi (190
la Paris cu o bursă "Adamachi" unde obţine din nou licenţa în matemati
apoi doctoratul la Sorbona (1908) în domeniul ecuaţiilor diferenţiale. În
numit la Catedra de geometrie analitică a universităţii ieşene, iar în 1910
în Franţa pentru specializare în astronomie şi documentare în privinţa
viitorului observator din Iaşi. Se reîntoarce şi este numit în 1911 la C
astronomie, geodezie şi mecanică cerească, Universitatea din Iaşi.

C. Popovici este fondatorul Observatorului astronomic din Iaşi, a
dealul Copou; piatra de temelie a clădirii a fost pusă la 12 sept. 1912, i
s-a făcut la mijlocul lui decembrie 1913.

C. Popovici este primul director al Observatorului (în perioada 1913-193
le instrumente intrate în dotarea acestuia au fost cele provenite de la ca
astronomie înfiinţat de N. Culianu. Prin strădaniile lui C. Popovici şi a
şi colaboratorului său, **Vintilă Şiadbei**, au fost achiziţionate noi instr
lunetă meridiană, un *ecuatorial Ressel*, două *cronometre* (pentru timpul m
sideral), un *fotometru Graff* şi altele necesare procesului didactic.

În anul 1938 Catedra de astronomie este transformată într-o con
C. Popovici se transferă la Bucureşti. În perioada 1938-1944, **Vintilă**
suplinit conferinţa de astronomie.

Ca urmare a evacuării Observatorului, prilejuită de cel de-al doilea războ
o bună parte a aparaturii din dotarea acestuia s-a deteriorat sau a fost su

În 1948 **Victor Nadolschi** ocupă prin concurs conferinţa de astronomi
directorul Observatorului din Iaşi, funcţie deţinută până în anul 1966. V.
este un eminent continuator al lui C. Popovici şi al lui V. Şiadbei.
organizează şi relansează activitatea şi pune bazele *astronomiei fotograf*
V. Nadolschi achiziţionează un *astrograf Zeiss* (1956), un *fotometru fotoelec*
un *ecuatorial Zeiss cotit* (1960), un *aparat pentru măsurat clişee* (1963),
zenital Meopta (1963) etc.

Începând cu anul 1966 activitatea didactică şi de cercetare este coor
Iulian Breahnă, absolvent al Universităţii din Bucureşti, secţia de astro

Din 1966 funcţionează în cadrul Observatorului din Iaşi un *atelier d*
fină şi un *laborator electronic* necesare întreţinerii şi cercetării. A fost a
un *orologiu cu cuarţ* care, completat ulterior cu alte anexe, constituie şi
un cronograf digital de precizie.

În anul 1980 a fost achiziţionat un *planetariu Zeiss* destinat învăţăm
tronomiei, care a fost instalat în incinta Universităţii din Iaşi. Studenţi
posibilitatea de a-şi însuşi mai uşor o multitudine de fenomene privind ci
dinamica sistemului planetar al Soarelui. Planetariul a atras până în prez
mii de vizitatori.

Cu prilejul *eclipsei totale de Soare din 11 august 1999* s-a achiziţionat u
CCD (dispozitiv cu cuplaj de sarcină) de performanţă şi o *cameră Astro*
înregistrări continue de imagini.

În perioada 1951-1999, pe lângă Observator şi prin grija personalului
funcţionat o *staţie seismică*. Observaţiile efectuate de aceasta au pus î
două focare seismice: unul la circa 25 km dincolo de Prut şi al doilea în zo
Zorleni.

Activitatea de cercetare desfăşurată pe lângă Observatorul din Iaşi s-a
în peste 140 lucrări. **C. Popovici** a generalizat legea Newton-Coulomb prin
rea unei forţe neconservative, rezultată dintr-o combinaţie a gravitaţiei
cu presiunea luminii. **V. Şiadbei** obţine rezultate noi privind traiectoriile
şi cometelor şi face observaţii asupra eclipselor de Lună şi Soare, stabilind
simple pentru calculul acestora. **V. Nadolschi** s-a preocupat de teoria
grupurilor de pete solare, continuă tradiţia observării eclipselor şi are
a fi pus bazele astronomiei fotografice la Iaşi. Abordarea unor teme din
radioastronomiei s-a dovedit deosebit de dificilă, deşi s-au depus efortur
pentru crearea bazei materiale necesare unei astfel de cercetări.

Cu toate că de-a lungul timpului au fost de înlăturat multe dificultă
cole, la Observatorul din Iaşi s-a reuşit să se desfăşoare o activitate car
cunoscut în ţară şi în străinătate. Aceste afirmaţii sunt dovedite şi de acord
lui de membru al *Uniunii Astronomice Internaţionale* următorilor astron
Constantin Popovici, Vintilă Şiadbei, Victor Nadolschi şi *Iulian Breahnă*

Redacţia revistei

Marea teoremă a lui Fermat pentru polinoa

Temistocle BÎRSAN[1]

1. Odată cu căderea Constantinopolului (1453), mulţi învăţaţi biz îndreptat spre Europa de Vest aducând cu ei manuscrise preţioase - m care supravieţuiseră devastării Bibliotecii din Alexandria se adunaseră timpului în această capitală a lumii.

Prin hazardul împrejurărilor, şase din cele 13 volume ale *Aritmeticii* l au ajuns în Franţa. Învăţatul şi amatorul de matematică francez **Claud Bachet de Méziriac** îşi dă seama de importanţa cărţii lui Diofant şi publ o versiune în limba latină a *Aritmeticii*, care cuprinde peste o sută de p rezolvările detaliate ale lui Diofant.

Pentru **Pierre Fermat** (1601-1665) *Aritmetica* lui *Diofant* a fost l-a pus în contact cu bogatele cunoştinţe ale popoarelor antice în dire numerelor şi sursa de inspiraţie pentru noi şi subtile probleme pe care formula. Fermat obişnuia să noteze pe marginile cărţii lui Diofant come cule şi schiţe de demonstraţii. Nu s-a preocupat să-şi publice rezultatele straţiile, dar se amuza comunicându-şi rezultatele altor matematicieni ai provocându-i la rezolvarea acestora.

În Cartea a II-a a *Aritmeticii*, Fermat găseşte informaţii bogate relativ pitagoreice, adică trei numere naturale ce verifică ecuaţia lui Pitagora

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Ştia că Euclid demonstrase că există o infinitate de astfel de triplete. Ce s însă, dacă în loc de (1) se consideră ecuaţia

$$x^n + y^n = z^n,$$

unde $n \geq 3$? Răspunsul lui Fermat, notat ca observaţie pe marginea cărţii este cu totul surprinzător: *nu există nici o soluţie a ecuaţiei* (2) *cu num nenule, dacă* $n = 3, 4, \ldots$. Urmează notat următorul comentariu:

Cuius rei demonstrationem mirabilem sane detex hanc marginis exi caperet [**4**]. (Mă aflu în posesia unei demonstraţii minunate a acestei afi marginea paginii este prea strâmtă pentru a o cuprinde.)

Această extraordinară descoperire, care astăzi poartă numele de **Marea a lui Fermat**, cât şi alte rezultate, ar fi putut să rămână necunoscute lum ticienilor şi să se piardă, dacă, după moartea lui Fermat, fiul său cel mai fi examinat însemnările scrise de tatăl său pe margini şi n-ar fi publicat *lui Diofant conţinând şi observaţiile lui Pierre de Fermat* (Toulouse, 1670

Pe parcursul câtorva secole, cele mai sclipitoare minţi de matematicier cat şi şi-au adus contribuţia la rezolvarea acestei enigme (şi, totodată, lăsată de Fermat: **Euler**, **Sophie Germain**, **Dirichlet**, **Legendre**, **Lamé Kummer** ş. a. Drumul ce duce la demonstrarea *Marii teoreme a lui F*

[1] Prof. dr., Catedra de matematică, Univ. Tehnică "Gh. Asachí", Iaşi

presărat cu reuşite parţiale, ambiţii, înfrângeri, decepţii, orgolii, intrigi, t
sinucidere etc. [**4**].

În anul 1995, după opt ani de muncă neîntreruptă, în completă izol
colegii săi şi păstrând o discreţie totală asupra cercetărilor sale, englezu
Wiles pune capăt enigmei de peste 350 de ani: *Marea teoremă a lui F
demonstrată!* Demonstraţia dată de Wiles este, însă, accesibilă unui num
de specialişti; în fapt, Wiles pentru a atinge scopul a dovedit justeţea
Taniyama - Shimura utilizând o aparatură matematică modernă şi sofistic
eliptice, forme modulare, reprezentări Galois ş. a. [**5**].

2. Este cunoscut faptul că inelul $\mathbb{Z}$ al numerelor întregi şi inelul $\mathbb{C}$ [
noamelor cu coeficienţi numere complexe au proprietăţi asemănătoare.
apare ca firească problema rezolvării ecuaţiilor (1) şi (2) în $\mathbb{C}[X]$.

În privinţa ecuaţiei (1) constatăm uşor, ca şi în cazul numeric, că are
de soluţii: $\forall p, q \in \mathbb{C}[X]$, luăm

$$x(X) = [p(X)]^2 - [q(X)]^2, \quad y(X) = 2p(X)\,q(X), \quad z(X) = [p(X)]^2$$

şi verificăm direct că tripleta $(x(X), y(X), z(X))$ este o soluţie a ecua
$\mathbb{C}[X]$.

Similar cu Marea teoremă a lui Fermat se formulează

Teorema lui Fermat pentru polinoame ([3], [5]). *Dacă n este
$n \geq 3$, atunci ecuaţia* (2) *nu are soluţii în $\mathbb{C}[X]$ cu polinoame neconstan
prime.*

Surprinzător, spre deosebire de Marea teoremă a lui Fermat, pentru ac
se cunoaşte o demonstraţie elementară şi simplă, accesibilă unui elev de li
tatul este cunoscut din sec. al XIX-lea şi a fost demonstrat utilizând cu
geometrie algebrică. Demonstraţia elementară la care ne-am referit se
o teoremă de dată recentă datorată matematicienilor **W. Stothers** (198
pendent, **R. C. Mason** (1983), teoremă foarte importantă şi în sine. Su
câteva (puţine!) pregătiri.

Fie $p \in \mathbb{C}[X]$ un polinom neconstant având rădăcinile $a_1, a_2, \ldots, a_k$
de multiplicitate respective $m_1, m_2, \ldots, m_k$; deci p se scrie sub forma

$$p(X) = \alpha \prod_{i=1}^{k} (X - a_i)^{m_i}, \quad \alpha \in \mathbb{C}^*.$$

Notăm gradul polinomului p şi numărul rădăcinilor sale distincte cu $\deg p$
$n_0(p)$, adică

$$\deg p = m_1 + m_2 + \cdots + m_k, \quad n_0(p) = k.$$

Menţionăm că, dacă $p, q \in \mathbb{C}$ sunt neconstante, avem

$$\deg(pq) = \deg p + \deg q, \quad n_0(pq) \leq n_0(p) + n_0(q),$$

cu egalitate dacă şi numai dacă p şi q sunt relativ prime.

Derivata formală a polinomului p dat de (3) este

$$p'(X) = \alpha[m_1 (X - a_1)^{m_1 - 1} (X - a_2)^{m_2} \cdots (X - a_k)^{m_k} + \cdots +$$
$$+ m_k (X - a_1)^{m_1} \cdots (X - a_{k-1})^{m_{k-1}} (X - a_k)^{m_k - 1}]$$

şi, ca urmare, cel mai mare divizor comun al polinoamelor p şi p' are forn

$$(p,p') = \beta\,(X-a_1)^{m_1-1}\,(X-a_2)^{m_2-1}\cdots(X-a_k)^{m_k-1}\,.$$

Atunci

$$\deg\,(p,p') = (m_1-1)+(m_2-1)+\cdots+(m_k-1) = \deg p - n_0\,($$

de unde obţinem relaţia

$$\deg p = \deg\,(p,p') + n_0\,(p)\,.$$

Teorema Mason - Stothers. *Fie $p,q,r \in \mathbb{C}\,[X]$ neconstante şi rel*
Dacă are loc egalitatea $p+q=r$, atunci

$$\max\{\deg p, \deg q, \deg r\} \leq n_0\,(pqr) - 1.$$

Demonstraţie (dată de **Noah Snyder** [**3**], p.30). Vom începe cu două utile. Mai întâi, în prezenţa condiţiei $p+q=r$, polinoamele p, q, r sunt rel dacă şi numai dacă sunt prime două câte două. Apoi, întrucât enunţul teo simetric în p, q, r (căci putem scrie egalitatea şi sub forma $p+q+r$ restrângem generalitatea dacă vom presupune că polinomul r are grad ridicat. Ca urmare, inegalitatea de demonstrat se scrie

$$\deg r \leq n_0\,(pqr) - 1.$$

Avem

$$p'q - pq' = p'\,(p+q) - p\,(p'+q') = p'r - pr'.$$

Constatăm că (p,p') şi (q,q') divid membrul stâng, iar (r,r') divide meml deci şi pe cel stâng. Cum p, q, r sunt prime două câte două, urmează c $(p,p')\cdot(q,q')\cdot(r,r')$ divide $p'q-pq'$. În consecinţă,

$$\deg\,(p,p') + \deg\,(q,q') + \deg\,(r,r') \leq \deg\,(p'q-pq') \leq \deg p + \deg q$$

sau, datorită relaţiei (4) şi analoagelor ei,

$$\deg p - n_0\,(p) + \deg q - n_0\,(q) + \deg r - n_0\,(r) \leq \deg p + \deg q -$$

deci

$$\deg r \leq n_0\,(p) + n_0\,(q) + n_0\,(r) - 1.$$

Cum p, q, r sunt prime două câte două, obţinem în final

$$\deg r \leq n_0\,(pqr) - 1,$$

care este tocmai relaţia $(5')$ de demonstrat.

Demonstraţia Teoremei lui Fermat pentru polinoame. Presu ecuaţia (2) pentru $n \geq 3$ ar avea o soluţie $(x\,(X)\,, y\,(X)\,, z\,(X))$ cu polinoa stante relativ prime. Aplicăm teorema Mason - Stothers polinoamelor $p(X$ $q\,(X) = [y\,(X)]^n$ şi $r\,(X) = [z\,(X)]^n$. Obţinem

$$\deg\,[x\,(X)]^n \leq n_0\,([x\,(X)]^n \cdot [y\,(X)]^n \cdot [z\,(X)]^n) - 1$$

sau

$$n \deg x\,(X) \leq n_0\,(x\,(X)\cdot y\,(X)\cdot z\,(X)) - 1.$$

Ţinând seama că $x(X)$, $y(X)$ şi $z(X)$ sunt prime două câte două şi d
$n_0(p) \leq \deg p$, $\forall p \in \mathbb{C}[X]$, vom avea

$$n \deg x(X) \leq n_0(x(X)) + n_0(y(X)) + n_0(z(X)) - 1 \leq$$
$$\leq \deg x(X) + \deg y(X) + \deg z(X) - 1.$$

Obţinem astfel inegalitatea

$$n \deg x(X) \leq \deg x(X) + \deg y(X) + \deg z(X) - 1,$$

precum şi inegalităţile analoage scrise pentru $y(X)$ şi $z(X)$, care adunat

$$n(\deg x(X) + \deg y(X) + \deg z(X)) \leq 3(\deg x(X) + \deg y(X) + \deg z$$

adică

$$(n-3)(\deg x(X) + \deg y(X) + \deg z(X)) \leq -3.$$

Evident, dacă $n \geq 3$, această relaţie ne conduce la o absurditate, ceea
demonstraţia.

3. Analogia care există între inelele $\mathbb{Z}$ şi $\mathbb{C}[X]$ pune în mod firesc
"translării" teoremei Mason - Stothers de la polinoame la numerele în
încât Marea teoremă a lui Fermat să poată fi demonstrată elementar.

D. Masser şi **J. Oesterle** (1986) au ajuns la aşa - numita *conject*
urmare a unor consideraţii de geometrie algebrică şi teoria funcţiilor modu
în legătură cu teorema Mason - Stothers).

Dacă $m \in \mathbb{N}^*$ are descompunerea în factori primi $m = \prod_{i=1}^{k} p_i^{m_i}$, atunci
radicalul lui m numărul $N_0(m) = \prod_{i=1}^{k} p_i$.

Conjectura abc ([2], [3]). *Dat* $\varepsilon > 0$, *există o constantă* $C(\varepsilon)$
pentru orice întregi a, b, c *nenuli şi relativ primi cu* $a + b = c$ *avem ineg*

$$\max\{|a|, |b|, |c|\} \leq C(\varepsilon)(N_0(abc))^{1+\varepsilon}.$$

Această conjectură spune că, dacă în descompunerea numerelor a,
factori primi cu exponenţi mari, aceşti factori sunt compensaţi prin factori
mulţi, dar cu exponentul 1.

Să enunţăm acum aşa - numita

Teorema lui Fermat asimptotică. *Există un întreg pozitiv* n_1 *cu p*
că, dacă $n \geq n_1$, *atunci ecuaţia* (2) *nu are soluţii cu* x, y, z *întregi şi* xy

Cu aceleaşi argumente ca în cazul polinoamelor se poate dovedi urmă

Teoremă ([2], [3]). *Conjectura abc implică Teorema lui Fermat asim*

Demonstraţie. Fie date x, y, z pozitive şi relativ prime astfel înc
(x, y, z) să fie soluţie a ecuaţiei (2), adică $x^n + y^n = z^n$.

Notăm $a = x^n$, $b = y^n$ şi $c = z^n$ şi observăm că

$$N_0(abc) = N_0(x^n y^n z^n) = N_0(xyz) \leq xyz.$$

Utilizând conjectura abc obţinem

$$x^n \leq C(\varepsilon)(xyz)^{1+\varepsilon}, \quad y^n \leq C(\varepsilon)(xyz)^{1+\varepsilon}, \quad z^n \leq C(\varepsilon)(xyz)^{1+}$$

Prin înmulţire, rezultă că

$$(xyz)^n \leq [C(\varepsilon)]^3 (xyz)^{3+3\varepsilon},$$

de unde

$$(n - 3 - 3\varepsilon)\log(xyz) \leq 3\log C(\varepsilon)$$

şi cum $xyz > 2$, obţinem

$$n < \frac{3\log C(\varepsilon)}{\log 2} + 3 + 3\varepsilon.$$

Notăm

$$n_1 = \left[\frac{3\log C(\varepsilon)}{\log 2} + 3 + 3\varepsilon\right].$$

Urmează că ecuaţia (2) nu are soluţii ce verifică condiţiile specificate da
ceea ce trebuia demonstrat.

Observaţie. Această cale nu oferă o demonstraţie a Marii teoreme a l
Într-adevăr, numărul n_1 definit de (6) depinde de $C(\varepsilon)$ (putem conside
$C(1)$ pentru a fixa ideile). Determinarea efectivă a constantei $C(\varepsilon)$ nu e
cută. Dacă, de exemplu, $C(1)$ s-ar putea efectiv determina, atunci de
Marii Teoreme a lui Fermat s-ar reduce la un număr finit de cazuri, care
abordate prin calcul direct.

4. Interesul pentru Marea teoremă a lui Fermat nu s-a stins nici du
strarea ei. Au rămas întrebări fără răspuns, sunt formulate altele noi. Da
nu a dat decât o demonstraţie eronată, care ar putea fi natura greşelii făc
această demonstraţie ar fi corectă, care este acel argument ingenios produ
lui Fermat ce a scăpat atâtor matematicieni iluştri? Este posibilă o de
elementară, accesibilă şi unor persoane cu cunoştinţe obişnuite de matem

În 1966, **Andrew Beal** instituie un premiu pentru demonstrarea sau
aşa - numitei *Conjecturi Beal*, care este o generalizare a problemei lui Fe

Ecuaţia $x^p + y^q = z^r$, *p, q, r numere întregi mai mari ca* 2, *nu are ni
cu x, y, z întregi pozitivi şi relativ primi* ([**6**], [**1**]).

Bibliografie

1. **A. Corduneanu** - *Despre Marea teoremă a lui Fermat*, Recreaţii M
1 (1999), nr.1, 37-39.
2. **S. Lang** - *Old and new conjectured diophantine inequalities*, Bull. AMS,
37-75.
3. **S. Lang** - *Math Talks for Undergraduates*, Springer, 1999.
4. **S. Singh** - *Marea teoremă a lui Fermat*, Humanitas, Bucureşti, 1998.
5. **A. Wiles** - *Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem*, Annals
142 (1995), 443-551.
6. *** - *Beal's Conjecture*, The New Zealand Math. Mag., 35 (1998),

De la o problemă cu matrice la transformă
elementare

Marian TETIVA[1]

1. Introducere. Problema la care ne referim în titlu este următoarea

Să se arate că nu există matrice pătratice $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *astfel încât* XY
I_n *fiind matricea unitate de ordinul* n.

Este o problemă cunoscută, care poate fi întâlnită în mai multe ma
culegeri, care s-a dat la concursuri etc. şi nu este tocmai simplă: un elev
întotdeauna descurajat de enunţuri de tipul *"să se arate că există /nu*
Mai mult, în această situaţie nu prea avem altă cale de abordare în afara
utilizează noţiunea de urmă a unei matrice şi proprietăţile sale. Istoria
este cam aşa: prin anii '70 ai secolului trecut ea era propusă la olimpiadă
'80 a pătruns în manuale pentru ca în anii '90 să ajungă a fi parte din di
de bacalaureat sau admitere la facultate; aceasta spune ceva despre felul
evoluat programele învăţământului matematic elementar în România. N
că elevul mediu din ziua de azi se află în acelaşi impas ca şi cel de acum do
treizeci de ani (sau poate chiar mai rău) atunci când este confruntat cu
probleme. De aceea această notă i se adresează, dar numai dacă este cu
interesat de matematică.

Amintim că *urma* matricei $A = (a_{ij})_{1 \leq i,\, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este, prin
numărul $\mathrm{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ (suma elementelor situate pe
principală" a matricei). Sunt cunoscute următoarele proprietăţi ale urme

1° $\mathrm{Tr}(A + B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

2° $\mathrm{Tr}(\alpha A) = \alpha\, \mathrm{Tr}(A)$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

3° $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Primele două egalităţi se mai pot scrie condensat în forma $\mathrm{Tr}(\alpha A$
$= \alpha\, \mathrm{Tr}(A) + \beta\, \mathrm{Tr}(B)$, oricare ar fi $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ şi $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi expr
ritatea urmei: $\mathrm{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ este *aplicaţie liniară* (sau *morfism* de
vectoriale). De aici deducem $\mathrm{Tr}(XY - YX) = \mathrm{Tr}(XY) - \mathrm{Tr}(YX) = 0$ p
$X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi aceasta explică de ce egalitatea din enunţ nu poate avea
nici o pereche de matrice X, Y: matricea $XY - YX$ are urma nulă, deci n
egală cu I_n, a cărei urmă este n.

Remarcăm că matricea I_n din enunţ poate fi înlocuită cu orice matrice
n având urma nenulă, enunţul şi rezolvarea rămânând valabile; problem
uşor reformulată astfel:

Dacă pentru o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *există* $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *astfel*
$XY - YX$, *atunci* $\mathrm{Tr}(A) = 0$.

Atunci se naşte în mod natural întrebarea dacă reciproca acestei afi
adevărată, adică se pune problema valabilităţii următorului enunţ:

Fie A *o matrice pătratică de ordin* n *cu elemente numere complexe.*
matricei A *este nulă, atunci există* $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *astfel încât* $A = XY$

[1] Profesor, Colegiul Naţional "Gh. Roşca Codreanu", Bârlad

În cele ce urmează ne propunem să rezolvăm această problemă; mai
arătăm că răspunsul la întrebare este afirmativ.

Ideea rezolvării este să căutăm nişte matrice $Y, Z \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât
fi scrisă în forma $A = Z - YZY^{-1}$ (Y fiind inversabilă, desigur); atunci pr
fi rezolvată: e suficient să alegem $X = ZY^{-1}$ şi avem $A = \left(ZY^{-1}\right)Y - Y$
$= XY - YX$.

Aici cititorul poate avea o nemulţumire: de unde şi până unde aceste m
în locul lui Xşi Y din enunţ? Să remarcăm că din proprietatea 3° rezultă
4° $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}\left(CAC^{-1}\right)$, $\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, C inversabilă (se dovedeşte im
$A = \left(AC^{-1}\right)C$). Matricele de forma A şi CAC^{-1} sunt asemenea, iar p
4° spune că acestea au aceeaşi urmă.

Desigur, problemele abia încep. Sunt necesare câteva pregătiri.

2. Matrice asemenea şi transformări elementare. Fie K un corp
cititorul mai puţin familiarizat cu această noţiune abstractă poate cons
notaţie pentru unul dintre corpurile numerice uzuale $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$.

Două matrice $X, Y \in \mathcal{M}_n(K)$ se numesc *matrice asemenea (*sau *sim*
există $U \in \mathcal{M}_n(K)$ cu $\det U \neq 0$ astfel încât $Y = UXU^{-1}$ (vom nota
Cititorul poate verifica uşor faptul că relaţia de asemănare (similaritate) es
de echivalenţă pe mulţimea $\mathcal{M}_n(K)$.

Transformările elementare care se fac asupra unei matrice sunt, în
cele mai simple modificări care nu îi afectează rangul, adică interschimba
linii (sau coloane), adunarea unei linii (coloane) înmulţite cu un număr (
element al corpului K) la altă linie (respectiv coloană), sau chiar înmu
linii (coloane) cu un număr nenul. Una din cele mai simple aplicaţii a
calculul rangului unei matrice; de asemenea, se pot folosi aceste transform
rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare.

Să începem prezentarea transformărilor elementare cu aşa numitele m
mentare; legătura va apărea curând. Vom nota cu E_{ij} matricea pătratic
n peste corpul K ale cărei elemente sunt toate nule, cu excepţia element
linia i şi coloana j care este egal cu 1. Se verifică uşor că matricele E_{ij},
$1 \le j \le n$ formează o bază a spaţiului vectorial $\mathcal{M}_n(K)$ peste K, precum
$E_{ij}E_{kl} = 0_n$, $j \neq k$ şi $E_{ij}E_{jl} = E_{il}$.

Se numesc *matrice elementare* următoarele tipuri de matrice pătratice
n, cu elemente din K:

1) Matricele $T_{ij}(a) = I_n + aE_{ij}$; aici $a \in K$ şi $i, j \in \{1, 2, \ldots n\}$ sunt ind
Matricea $T_{ij}(a)$ se obţine din matricea unitate făcându-i o singură modi
mentul de pe linia i şi coloana j devine a. Se constată imediat că (vezi pr
matricelor E_{ij})

$$T_{ij}(0) = I_n,\ T_{ij}(a)\,T_{ij}(b) = T_{ij}(a+b)\,,$$

$$T_{ij}(a) \in GL_n(K)\,,\ T_{ij}(a)^{-1} = T_{ij}(-a)\,,\ \forall a, b \in K,$$

unde $GL_n(K) = \{U \in \mathcal{M}_n(K) \mid \det U \neq 0\}$ - *grupul general liniar de or*
corpul K. Deci $\{T_{ij}(a) \mid a \in K\}$ formează, pentru $i \neq j$ fixate, un grup
grupul $(K, +)$. Să vedem ce efect are înmulţirea unei matrice oarecare cu

$T_{ij}(a)$. Fie $A = (a_{kl})_{1\le k,l\le n}$ o matrice din $\mathcal{M}_n(K)$, care mai poate
$A = \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}E_{kl}$. Atunci

$$T_{ij}(a)A = (I_n + aE_{ij})\left(\sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}E_{kl}\right) = \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}E_{kl} + \sum_{k,l=1}^{n} aa_{kl}E_{ij}$$
$$= \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}E_{kl} + \sum_{l=1}^{n} aa_{jl}E_{il}.$$

Ce înseamnă asta? Înseamnă că elementele matricei $T_{ij}(a)A$ rămân
ale matricei A, cu excepţia celor de pe linia i: aici, în locul elementulu
acum $a_{il} + aa_{jl}$, adică matricea $T_{ij}(a)A$ se obţine din A prin adunarea
a liniei j înmulţite cu a, cu alte cuvinte înmulţirea la stânga cu o mat
realizează o transformare elementară a matricei A. De asemenea, se poate
acelaşi fel că matricea $AT_{ij}(a)$ se obţine din A prin adunare la coloana j
i înmulţite cu a.

2) Matricele $Q_{ij} = T_{ij}(-1)T_{ji}(1)T_{ij}(-1)$ $(i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j)$
în categoria matricelor elementare. Avem

$$Q_{ij} = T_{ij}(-1)T_{ji}(1)T_{ij}(-1) = (I_n - E_{ij})(I_n + E_{ji})(I_n - E_{ij}) =$$
$$= (I_n + E_{ji} - E_{ij} - E_{ii})(I_n - E_{ij}) = I_n + E_{ji} - E_{ij} - E_{ii} - E_{ij} - E$$
$$= I_n - E_{ii} - E_{jj} - E_{ij} + E_{ji},$$

deci Q_{ij} este matricea care se obţine din matricea unitate prin schimbar
elemente: elementele de pe diagonala principală, de pe linia i, coloana i şi
j, coloana j se înlocuiesc cu zerouri; în locul elementului de pe linia i şi
avem -1, iar în locul celui de pe linia j şi coloana i se găseşte 1. La fel
să calculăm

$$Q_{ij}A = (I_n - E_{ii} - E_{jj} - E_{ij} + E_{ji})\left(\sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}E_{kl}\right) =$$
$$= \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}E_{kl} - \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}E_{ii}E_{kl} - \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}E_{jj}E_{kl} - \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}E_{ij}E_{kl} + \sum_{k,l=1}^{n}$$
$$= \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}E_{kl} - \sum_{l=1}^{n} a_{il}E_{il} - \sum_{l=1}^{n} a_{jl}E_{jl} - \sum_{l=1}^{n} a_{jl}E_{il} + \sum_{l=1}^{n} a_{il}E_{il};$$

aşadar, matricea $Q_{ij}A$ se obţine din A prin înlocuirea liniei i, respectiv j
înmulţită cu -1, respectiv cu linia i. Asemănător, se poate observa că schi
care le produc asupra lui A înmulţirea cu matricea Q_{ij} la dreapta sunt u
coloana i se înlocuieşte cu coloana j, iar coloana j se înlocuieşte cu coloana
cu -1. Să mai spunem că, fiind produs de matrice inversabile, Q_{ij} este, de
matrice inversabilă; avem

$$Q_{ij}^{-1} = T_{ij}(-1)^{-1}T_{ji}(1)^{-1}T_{ij}(-1)^{-1} = T_{ij}(1)T_{ji}(-1)T_{ij}(1)$$

şi, deci, $Q_{ij}^{-1} = Q_{ij}$.

3) Un alt tip de matrice elementare sunt matricele $D_i(d) = I_n + ($
$1 \le i \le n$, $d \in K$ fiind nenul; o astfel de matrice se obţine din matric
modificându-i un singur element: în locul lui 1 de pe linia i şi coloana i pu
e greu de văzut că înmulţirea unei matrice A oarecare cu $D_i(d)$ la stânga
la dreapta) îi modifică doar linia (respectiv coloana) i, anume o înlocuieşte
cu linia (respectiv coloana) i înmulţită cu d. De asemenea, $D_i(d)$ este inv
are inversa $D_i(d)^{-1} = D_i\left(d^{-1}\right)$.

4) Vom folosi matricele P_{ij} pe care le definim prin

$$P_{ij} = D_i(-1)\,Q_{ij} = Q_{ij}D_j(-1) = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}.$$

Verificaţi aceste egalităţi! Observaţi forma matricei P_{ij} şi efectul său la
matricea AP_{ij} (respectiv $P_{ij}A$) se obţine din A prin interschimbarea liniilor
coloanelor) i şi j. Şi nu în ultimul rând, arătaţi că P_{ij} este inversabilă şi

3. Rezolvarea problemei. Să demonstrăm aşadar următoarea

Propoziţie. *Fie K un corp comutativ infinit şi $A \in \mathcal{M}_n(K)$ o matr*
urmă este zero. Atunci există matricele $X, Y \in \mathcal{M}_n(K)$ astfel încât $A =$

Demonstraţie. Pentru început vom presupune că nu există nici o s
a mulţimii $\{a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}\}$ a elementelor de pe diagonala principală a
pentru care suma elementelor să fie nulă, desigur, cu excepţia întregii mu
vedea imediat la ce ne foloseşte această presupunere, iar la sfârşit ne vom d
nu este prea restrictivă). Deoarece, conform ipotezei, avem $a_{11} + a_{22} + \cdots$
se pot determina elementele $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$ astfel încât

$$a_{11} = a_1 - a_2,\ a_{22} = a_2 - a_3,\ \ldots\ ,\ a_{n-1,n-1} = a_{n-1} - a_n\ ,\ a_{nn} = a_n$$

E clar că, datorită ipotezei suplimentare pe care am făcut-o, oricare d
elementele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt distincte; vom folosi acest lucru mai depart

Putem scrie pe A în forma $A = B - C$, unde

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ldots & a_{n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n,n-1} & a_n \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} a_2 & -a_{12} & \ldots & -a_{1,n-1} \\ 0 & a_3 & \ldots & -a_{2,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Aşa cum am arătat la început, pentru rezolvarea problemei ar fi s
arătăm că matricele B şi C sunt asemenea. În acest scop, vom arăta c
$C \sim C'$, unde

$$B' = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_n \end{pmatrix},\ C' = \begin{pmatrix} a_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_1 \end{pmatrix}$$

şi $B' \sim C'$. Folosind faptul că asemănarea matricelor este o relaţie de e
obţinem că $B \sim C$.

Să le luăm pe rând. Ne amintim că înmulţirea unei matrice cu matr
stânga (respectiv la dreapta) schimbă între ele liniile (respectiv coloanele
acelei matrice. De aceea, pentru $M \in \mathcal{M}_n(K)$, matricea $P_{ij}MP_{ij}^{-1} =$

are schimbate între ele elementele de pe diagonala principală situate pe
coloanele) i şi j; de asemenea, mai sunt afectate şi celelalte elemente de p
coloanele i şi j. Aceasta nu are însă importanţă în cazul unor matrice p
sau C', la care toate elementele din afara diagonalei principale sunt zero
$P_{ij}B'P_{ij}^{-1} = P_{ij}B'P_{ij}$ este o matrice care diferă de B' doar prin acee
schimbat între ele locurile două elemente de pe diagonala principală, a
a_j. Cum orice permutare e produs de transpoziţii, e clar că după un n
de asemenea transformări o putem aduce pe B' la orice formă în care pe
principală apar elementele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ permutate cumva (şi în rest, ze
particular, B' este asemenea cu C'.

Să arătăm acum că $B \sim B'$ (şi nu vom mai face demonstraţia pentru c
fiind întru totul asemănătoare). Începem prin a observa următorul calcul

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ a(\alpha-\gamma)+\beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix},$$

dacă a este ales convenabil, adică dacă $a = \beta/(\gamma-\alpha)$; desigur, asta se
numai în cazul în care $\alpha \neq \gamma$.

Un calcul asemănător se poate face şi pentru matrice de ordin n.
considera $T_{ij}(a)BT_{ij}(a)^{-1} = T_{ij}(a)BT_{ij}(-a)$, unde $i > j$, elementul a_{ij}
(i,j) se înlocuieşte cu $a(a_j - a_i) + a_{ij}$ şi a poate fi ales astfel încât acest
devină nul (căci am presupus că $a_i \neq a_j$). Mai sunt afectate şi celelalte el
liniei i (la care se adună linia j înmulţită cu a) şi ale coloanei j (la care
coloana i înmulţită cu $-a$). Remarcăm că aceste transformări oricum nu po
zerourile de deasupra diagonalei principale, care rămân intacte, şi nici ele
pe diagonala principală.

Acum e clar ce avem de făcut: mai întâi calculăm $T_{21}(a)BT_{21}(a)^{-1}$ ca
un a bine ales reprezintă o matrice B_1 asemenea cu B care are în poziţi
zero (asta dacă nu era dinainte; de altfel se poate vedea uşor că, dacă
atunci a care ne trebuie este $a = 0$ deci $T_{21}(a) = T_{21}(0)$ este, de fapt
identică). Apoi, pentru această matrice calculăm $T_{31}(a)B_1T_{31}(a)^{-1}$, care
anumit a este o matrice asemenea cu B_1 (deci şi cu B) şi are 0 în poziţi
poate vedea că elementul 0 obţinut la pasul anterior nu va fi afectat. C
astfel, lucrând cu matrice de forma $T_{i1}(a)$ până când toate elementele de
coloană "de sub" a_1 devin zerouri, apoi trecem şi facem zerouri pe coloa
"sub" a_2, folosind transformări de tip $T_{32}(a), \ldots, T_{n2}(a)$ (adică înmulţim
la stânga şi cu inversele lor la dreapta; la fiecare pas similaritatea ma
păstrează), în ordine, alegând, desigur, de fiecare dată valoare care trebuie
Elementele nule obţinute pe prima coloană nu vor fi afectate, la fel cele de
deasupra diagonalei principale, Tot aşa vom proceda până când, la urmă
la o matrice care are partea de deasupra diagonalei principale neschimb
diagonala principală, iar sub diagonala principală are numai zerouri, adic
la B' şi la concluzia dorită că aceasta este asemenea cu B.

În concluzie, am arătat că matricele B şi C sunt asemenea, deci am a
unde ne-am propus: există $V \in GL_n(K)$ astfel încât $C = VBV^{-1}$; a
$= B - C = B - VBV^{-1}$ şi notând $X = BV^{-1}$, $Y = V$ avem $A = XY - Y$

Demonstraţia ar fi încheiată, dacă n-ar mai fi un mic amănunt de l

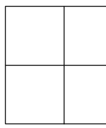
facem cu ipoteza suplimentară pe care am impus-o (şi de care, s-a dovedit
avem mare nevoie, căci dacă elementele de pe diagonală nu sunt distincte,
alege pe a astfel încât $T_{ij}(a)$ să producă un zero în locul lui a_{ij})? Răspunsu
de greu şi arată, cum spuneam, că restricţia dată de această ipoteză nu este
de ... restrictivă. E suficient să împărţim mulţimea elementelor de pe di
submulţimi disjuncte două câte două, fiecare dintre acestea având suma e
0 şi fiecare nemaiavând altă submulţime (strictă) pentru care suma eleme
0. Să numim $b_1, \ldots, b_k$ elementele unei asemenea submulţimi (a căror
aşadar, zero); pentru acestea putem determina $c_1, c_2, \ldots, c_k$ astfel încât b_1
$b_2 = c_2 - c_3, \ldots, b_{k-1} = c_{k-1} - c_k$, $b_k = c_k - c_1$. Mai mult, oricare d
$c_1, c_2, \ldots, c_k$ sunt distincte două câte două şi proprietăţile lor se păstrea
înlocuim cu $c_1 + t$, $c_2 + t, \ldots, c_k + t$, $t \in K$. Găsim câte o grupare de asem
distincte două câte două pentru fiecare submulţime de b-uri a mulţimii e
de pe diagonala principală, iar apoi alegem câte un t pentru fiecare astfel
încât toate c-urile să fie distincte două câte două (ceea ce sigur se poate fa
în care corpul K este infinit; gândiţi-vă de ce!). Mai departe totul dec
deoarece putem scrie matricea noastră ca diferenţa a două matrice, una in
superior triunghiulară, fiecare dintre aceste elemente sunt distincte două
Propoziţia este complet demonstrată.

Noi ne-am propus să rezolvăm problema în cazul corpurilor uzuale
$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, de aceea ipoteza pe care am făcut-o asupra infinităţii corpulu
deranjează foarte mult; totuşi, se prea poate ca această presupunere s
legată de rezolvarea pe care am dat-o aici şi să nu fie esenţială. Aşada
întrebarea dacă este valabil enunţul propoziţiei demonstrate şi în cazul
finit.

În încheiere, să mai spunem că nu există nici o pretenţie de originalitat
rarea acestei note; este foarte posibil ca această soluţie să fie cunoscută, at
autorul nu are nici un fel de referinţă pentru problema discutată, pe care
doar din folclor (în urmă cu câţiva ani această problemă mi-a fost comun
viu grai" de către un elev, actualmente student strălucit al Facultăţii de M
din Bucureşti; aşa că îi mulţumesc pe această cale lui **Dragoş Deliu**, care
să caut să rezolv această problemă, căutări din care s-a născut şi această

Recreaţii ... matematice

1. Să se îndepărteze patru segmente din figura alăturată (alcătuită din şase pătrate) astfel încât noua figură să fie formată din trei pătrate.



Notă. Soluţia problemei se poate găsi la pagina 39.

Trei perle ale olimpiadelor de matematic

Gabriel DOSPINESCU[1]

Problemele propuse la testele de selecţie pentru OIM sau la fazele na
diverse ţări se remarcă prin profunzimea (şi uneori simplitatea) ideilor care
În cele ce urmează, vom rezolva trei probleme propuse la astfel de teste
în anii 2002 şi 2003, demonstrând dificultatea rezolvării problemelor de "n
elementară", precum şi tendinţa accentuată de a îmbina algebra, teoria nu
analiza matematică în actul de concepere şi rezolvare a unor asemenea perl
tice.

1. Un prim exemplu este următoarea problemă propusă la unul din
selecţie pentru OIM în anul 2002, in Vietnam. În rezolvare vom folosi d
rezultate legate de ecuaţia de gradul al doilea. După cum se ştie, multe
dificile se rezolvă relativ uşor folosind trinomul de gradul al doilea (metoda
Vom da doar două exemple, fără a insista prea mult.

1) *Arătaţi că dacă numărul* $d = \dfrac{a}{bc} + \dfrac{b}{ca} + \dfrac{c}{ab}$ *este întreg, iar* a, b, c *su*
naturale, atunci d *este* 1 *sau* 3.

2) *Arătaţi că, dacă numerele naturale distincte şi nenule* a_1, a_2, $\ldots$,
$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = n a_1 a_2 \cdots a_n$, *atunci ele sunt prime între ele două câ*

Încercaţi să rezolvaţi aceste două probleme înainte de abordarea probl

PROBLEMA 1. *Să se demonstreze că există un număr* $m \geq 2002$ *şi*
naturale nenule a_1, a_2, $\ldots$, a_m, *distincte, astfel încât* $\prod\limits_{i=1}^{m} a_i^2 - 4\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2$ *s*
perfect.

Soluţie. Vom folosi trinomul pentru a crea soluţii pentru anumite ecu
tice, deci în mod constructiv.

Ar fi bine să dispară $\prod\limits_{i=1}^{m} a_i^2$. Deci, să scriem expresia sub forma

$$\prod_{i=1}^{m} a_i^2 - 4\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \left(\prod_{i=1}^{m} a_i - k\right)^2 .$$

Pentru a "scăpa" şi de 4, luăm $k = 2$. Aşadar am adus problema la o
"acceptabilă" (dar nu mai puţin dificilă):

Arătaţi că există $m \geq 2002$ *şi* $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{N}^*$ *distincte astfel încâ*

$$1 + a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_m^2 = a_1 a_2 \cdots a_m \; .$$

Să căutăm m astfel încât $m-3$ dintre necunoscutele ecuaţiei (1) să fie
revine la ecuaţia

$$x^2 + y^2 + z^2 + m - 2 = xyz.$$

Privind această ecuaţie ca una de gradul al doilea în z, vom încerca să
criminantul nul. Deci $x^2y^2 = 4\left(x^2 + y^2 + m - 2\right)$. Luăm $x = 2a$, $y = 2b$

[1] Student, Facultatea de Matematică-Informatică, Bucureşti

$m = 4\left(a^2-1\right)\left(b^2-1\right)-2$. Să concluzionăm: putem alege $b > a > 2002$ putem lua $m = 4\left(a^2-1\right)\left(b^2-1\right)-2 > 2002$. Atunci ecuaţia (2) va av $(x,y,z) = (2a,2b,2ab)$. Rezultă că ecuaţia (1) are soluţia $(2a,2b,2ab,$ Dar putem scrie (1) şi sub forma

$$1^2 - 1\cdot 2a\cdot 2b\cdot 2ab + (2a)^2 + (2b)^2 + (2ab)^2 + m - 3 = 0.$$

Din relaţiile lui Viète rezultă că şi $2a\cdot 2b\cdot 2ab-1$ este soluţie a ecua care în loc de 1 punem t. Aşadar am redus cu o unitate numărul celor m am obţinut o nouă soluţie a ecuaţiei (1): $(2a,2b,2ab,2a\cdot 2b\cdot 2ab-1,1,1,$

Analog, scriem

$$1^2 - 1\cdot 2a\cdot 2b\cdot 2ab\left(2a\cdot 2b\cdot 2ab-1\right) + (2a)^2 + (2b)^2 + (2ab)^2 +$$

$$+\left(2a\cdot 2b\cdot 2ab-1\right)^2 + m - 4 = 0.$$

Deci obţinem o altă soluţie a ecuaţiei (1), cu număr şi mai mic de 1:

$$(2a,2b,2ab,2a\cdot 2b\cdot 2ab-1,2a\cdot 2b\cdot 2ab\cdot\left(2a\cdot 2b\cdot 2ab-1\right)-1,1,1,\ldots$$

Astfel, rezultă că putem elimina pe rând fiecare 1 din m-upla $(2a,2b,2ab,$ Riguros, aceasta înseamnă că folosind succesiv relaţiile lui Viète, obţinem uplă $(x_1,x_2,\ldots,x_k,1,1,\ldots,1)$ în care este clar că $2a = x_1 < 2b = x_2 <$ $< \cdots < x_k$. La sfârşit (căci după cel mult m paşi am eliminat toţi de 1), soluţie $(a_1,a_2,\ldots,a_m)$ a ecuaţiei (1), în care $a_1 < a_2 < \cdots < a_m$. Acea va satisface condiţiile enunţului.

2. Continuăm cu o frumoasă problemă propusă la ultima rundă a poloneze în anul 2003. Simplitatea soluţiei care urmează nu are însă nici cu dificultatea problemei, căci multe metode de atacare a problemei nu un rezultat.

PROBLEMA 2. *Determinaţi polinoamele cu coeficienţi întregi* f *etatea că pentru orice* n *natural avem* $f(n) \mid 2^n - 1$.

Soluţie. Evident, problema ar fi banală dacă s-ar demonstra că există de numere n pentru care 2^n-1 este număr prim. Dar, dupa cum vom vedea acceptă şi soluţii mai "blânde".

Cum este clar că nu putem afla prea multe despre divizorii şi factorii 2^n-1, vom încerca să lucrăm cu divizori ai numerelor de forma $f(n)$. Pr care ne vine în minte, ţinând seama că f are coeficienţi întregi, este rezultatul următor: $m-n \mid f(m)-f(n)$. Deci, va trebui să căut astfel încât $f(m) \mid f(n)$. După căutări mai mult sau mai puţin lungi $f(n) = n + f(n) - n \mid f(n+f(n)) - f(n)$. Deci $f(n) \mid f(n+f(n))$.

În acest moment, jumătate din problemă este rezolvată. Într-adevăr, f cu $-f$, putem presupune că f are coeficientul dominant pozitiv. Atunc astfel încât pentru $n > M$ să avem $f(n) \in \mathbb{N}$. Fixăm un $n > M$. Avem $f(n$ $f(n) \mid f(n+f(n)) \mid 2^{n+f(n)}-1 = (2^n-1)\,2^{f(n)} + 2^{f(n)} - 1$ (evident, $n+$ deci $f(n) \mid 2^{f(n)}-1$. Dacă am putea demonstra că singurul număr natura care $n \mid 2^n-1$ este 1, atunci ar rezulta că pentru $n > M$ avem $f(n) =$ ar fi constanta 1. Dar faptul că $n \mid 2^n-1$ implică $n=1$ este binecunoscu de simplu. Să presupunem că $n > 1$ şi să luăm p cel mai mic factor pri

Atunci este clar că $(n, p-1) = 1$. Dar $p \mid n \mid 2^n - 1$ şi $p \mid 2^{p-1} - 1$ (t
Fermat). Deci $p \mid \left(2^n - 1, 2^{p-1} - 1\right)$. Se ştie că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = 2^n$ -
Mersenne (adică $(x_m, x_n) = x_{(m,n)}$). Rezultă că $p \mid (x_n, x_{p-1}) = x_{(n,p-1)}$
contradicţie. Aşadar $n = 1$ şi f este constanta 1. Cum, dacă f este soluţi
$-f$ este soluţie, deducem că polinoamele cerute sunt constantele -1 şi 1.

3. Încheiem scurta incursiune prin matematica elementară cu o proble
de dificilă, propusă la un test de selecţie în Vietnam, 2002. Dificultatea
constă mai ales în faptul că admite multe soluţii (care nici nu se intrezăres
frumuseţea constă în îmbinarea algebrei cu analiza matematică şi teoria
Nu exagerăm dacă afirmăm că următoarea problemă este una dintre cele
şi frumoase probleme referitoare la polinoame, propuse la vreun concurs p

PROBLEMA 3. *Determinaţi toate polinoamele $p \in \mathbb{Z}[X]$ cu prop
există un polinom $q \in \mathbb{Z}[X]$ pentru care $q^2(X) = \left(X^2 + 6X + 10\right) p^2(X)$*

Soluţie. Evident, orice rezolvitor "sârguincios" va scrie relaţia din
forma $q^2(X-3) = \left(X^2+1\right) p^2(X-3) - 1$ şi va nota $f(X) = p(X-3$
$= q(X-3)$. Deci

$$\left(X^2+1\right) f^2(X) = g^2(X) + 1.$$

Aici este însă punctul de oprire, căci orice încercare ulterioară de rezolva
Ca de obicei, vom putea presupune că f şi g au coeficienţii dominanţi po
putem schimba f cu $-f$ sau g cu $-g$, fără a se modifica nimic). Deci exist
încât pentru orice $n > M$ să avem $f(n), g(n) \in \mathbb{N}$.

Apelăm acum la teoria numerelor. Este binecunoscut faptul că toate
numere naturale ale ecuaţiei Pell $x^2 + 1 = 2y^2$ sunt date de

$$x_n = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n-1} + \left(1-\sqrt{2}\right)^{2n-1}}{2},\ y_n = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n-1} - \left(1-\sqrt{2}\right)}{2\sqrt{2}}$$

Ce se întâmplă dacă substituim x_n în (1)? Obţinem $g^2(x_n) + 1 = 2($
Da, şi perechea $(g(x_n), y_n f(x_n))$ este soluţie a ecuaţiei Pell şi aceasta s
pentru orice $n > M$. Deci există şirurile $(a_n)_{n>M}$, $(b_n)_{n>M}$ astfel încât $g($
$y_n f(x_n) = y_{b_n}$.

Acum începe partea analizei matematice. Fie $\operatorname{grad} g = k$, $\operatorname{grad} f = m$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\sqrt{2}\right)^{2a_n - 1 - k(2n-1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2x_{a_n}}{\left(1+\sqrt{2}\right)^{k(2n-1)}} =$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{g(x_n)}{x_n^k}\left(\frac{x_n}{\left(1+\sqrt{2}\right)^{(2n-1)}}\right)^k = \text{finit.}$$

Rezultă că şirul de numere întregi $(2a_n - 1 - k(2n-1))_{n>M}$ este conve
staţionar. Aşadar, există $n_0 > M$ astfel încât pentru $n > n_0$
$2a_n - 1 - k(2n-1) = u$, pentru o constantă întreagă u. Ca urmare, pen
avem

$$g\left(\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n-1} + \left(1-\sqrt{2}\right)^{2n-1}}{2}\right) = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{k(2n-1)+u} + \left(1-\sqrt{2}\right)^{k(}}{2}$$

Rezultă că

$$g\left(\frac{x-\dfrac{1}{x}}{2}\right)=\frac{x^k\left(1+\sqrt{2}\right)^u+\left(-\dfrac{1}{x}\right)^k\left(1-\sqrt{2}\right)^u}{2}$$

pentru orice x din mulţimea $\left\{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n-1} \mid n>n_0\right\}$. Aducând la acela
în (2), obţinem o identitate polinomială adevărată pentru o infinitate de
variabilei, deci (2) este adevărată pentru orice x nenul. După ce aducem
numitor şi egalăm coeficienţii dominanţi în (2), deducem că $2^{k-1}\left(1+\sqrt{\right.}$
unde α_k este coeficientul dominant al lui g. Dar aceasta implică $u=0$
pentru orice x nenul, avem

$$g\left(\frac{x-\dfrac{1}{x}}{2}\right)=\frac{x^k+\left(-\dfrac{1}{x}\right)^k}{2}.$$

Dacă notăm $x=t+\sqrt{t^2+1}$, din (3) obţinem că pentru orice t avem

$$g(t)=\frac{\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)^k+\left(t-\sqrt{t^2+1}\right)^k}{2}.$$

Luăm în (1) $x=i$ şi obţinem că $g^2(i)=-1$. Deci, folosind (4), obţinem
adică k este impar. Din (4) şi (1) rezultă prin calcul că

$$f^2(X)=\left[\frac{\left(X+\sqrt{X^2+1}\right)^k+\left(\sqrt{X^2+1}-X\right)^k}{2\sqrt{X^2+1}}\right]^2,\ k \text{ impar.}$$

Cum f este polinom şi are coeficientul dominant pozitiv, deducem din (5

$$f(X)=\frac{\left(X+\sqrt{X^2+1}\right)^k+\left(\sqrt{X^2+1}-X\right)^k}{2\sqrt{X^2+1}}.$$

Dar, dacă f verifică (1), atunci şi $-f$ verifică aceeaşi relaţie. Mai mult,
din membrul drept al relaţiei (6) are coeficienţi întregi. Rezultă că există
de polinoame care verifică relaţia (1)

$$\pm\frac{\left(X+\sqrt{X^2+1}\right)^k+\left(\sqrt{X^2+1}-X\right)^k}{2\sqrt{X^2+1}},\ k \text{ impar.}$$

În sfârşit, obţinem că polinoamele p cerute se obţin din polinoamele (7
X cu $X+3$.

Ce-ar mai fi de adăugat după prezentarea acestor trei nestemate din
sfârşit al problemelor elementare de matematică? Şlefuite cu răbdarea b
cele trei probleme adaugă o paletă de lumini începând cu actul creator al
lor şi terminând cu soluţiile propuse. Fiecare dintre noi are nevoie de asem
iar această scurtă prezentare se înscrie pe această linie.

În legătură cu o problemă de concurs

Dan Ştefan MARINESCU[1]

La etapa finală a Olimpiadei de matematică din anul 1989 prof. univ. d
panu a propus următoarea problemă:

Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *este o funcţie integrabilă, continuă pe* (a,b) *şi* $\int_a^b f$
atunci pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ *există* n *numere distincte* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in$ (
ca

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{n(b-a)}{\dfrac{1}{f(x_1)} + \dfrac{1}{f(x_2)} + \cdots + \dfrac{1}{f(x_n)}}.$$

(enu

Enunţul şi o soluţie a problemei pot fi aflate în [**3**]. În cele ce ur
prezenta o generalizare a acestei frumoase probleme.

Pentru ceea ce ne-am propus, avem nevoie de

Propoziţia 1. *Fie* $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ *două funcţii cu următoarele propr*

i) f, g *continue pe* $[0,1]$,

ii) f, g *derivabile pe* $(0,1)$,

iii) $f(1) \neq f(0)$ *şi* $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (0,1)$.

Atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ *şi orice* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n > 0$ *cu* $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdot$
există $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0,1)$ *cu* $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ *astfel încât*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \frac{g'(x_i)}{f'(x_i)} = \frac{g(1) - g(0)}{f(1) - f(0)}\ .$$

Demonstraţie. Fie $h : [0,1] \to \mathbb{R}$, $h(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{f(1) - f(0)}$; evident h est
pe $[0,1]$, derivabilă pe $(0,1)$ şi $h(0) = 0$, $h(1) = 1$.

Pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ considerăm funcţia continuă h_k : [
$h_k(x) = h(x) - \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i$. Cum $h_1(0) = -\alpha_1 < 0$, $h_1(1) = h(1) - \alpha_1 = 1$
conchidem, din continuitatea funcţiei h_1, că există $c_1 \in (0,1)$ cu h_1 (c
$h(c_1) = \alpha_1$. Analog, $h_2(c_1) = h(c_1) - \alpha_1 - \alpha_2 = -\alpha_2 < 0$, $h_2(1) = h(1) -$
$= 1 - \alpha_1 - \alpha_2 > 0$, de unde acelaşi raţionament conduce la existenţa unui
astfel încât $h_2(c_2) = 0 \Leftrightarrow h(c_2) = \alpha_1 + \alpha_2$. Inductiv, găsim $0 < c_1 <$
$< c_{n-1} < 1$ astfel încât

$$h(c_1) = \alpha_1, \quad h(c_2) = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \ldots \quad , h(c_{n-1}) = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha$$

Fie $c_0 = 0$ şi $c_n = 1$, atunci pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ funcţiile h ş
condiţiile din teorema lui Cauchy pe intervalul $[c_{k-1}, c_k]$; ca urmare, d
există $x_1 \in (c_0, c_1)$, $x_2 \in (c_1, c_2)$, $\ldots$, $x_n \in (c_{n-1}, c_n)$ astfel încât

$$\frac{h'(x_1)}{g'(x_1)} = \frac{h(c_1) - h(c_0)}{g(c_1) - g(c_0)}, \ \frac{h'(x_2)}{g'(x_2)} = \frac{h(c_2) - h(c_1)}{g(c_2) - g(c_1)}, \ \ldots, \ \frac{h'(x_n)}{g'(x_n)} = \frac{h(c_n)}{g(c_n)}$$

de unde, împreună cu (3), avem:

[1] Profesor, Liceul Teoretic "Iancu de Hunedoara", Hunedoara

$$\frac{\alpha_1}{g(c_1)-g(c_0)}=\frac{h'(x_1)}{g'(x_1)},\ \frac{\alpha_2}{g(c_2)-g(c_1)}=\frac{h'(x_2)}{g'(x_2)},\ \ldots,\ \frac{\alpha_n}{g(c_n)-g(c_{n-1})}$$

ceea ce, ţinând seama de faptul că $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n>0$, conduce la relaţiile

$$\alpha_1\frac{g'(x_1)}{h'(x_1)}=g(c_1)-g(c_0),\ \alpha_2\frac{g'(x_2)}{h'(x_2)}=g(c_2)-g(c_1),\ \ldots,\ \alpha_n\frac{g'(x_n)}{h'(x_n)}=g$$

De aici, prin adunare, obţinem $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{g'(x_i)}{h'(x_i)}=g(c_n)-g(c_0)=g(1)-g$

$h'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(1)-f(0)}$, $\forall x\in(0,1)$, conchidem că are loc relaţia (2).

Corolarul 1 [1]. *Dacă* $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ *este o funcţie continuă pe* $[0,1]$, *pe* $(0,1)$, $f(0)=0$, $f(1)=1$, *atunci pentru orice* $n\in N^*$ *şi orice* $k_1,k_2,$ *există* $x_1,x_2,\ldots,x_n\in(0,1)$ *distincte două câte două astfel încât* $\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{f'(x}$ (vezi şi [**2**], [**4**]).

Demonstraţie. Considerăm în Propoziţia 1, $\alpha_i=k_i\Big/\sum_{i=1}^{n}k_i$, pe $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ şi $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=x$.

Corolarul 2. Fie $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ două funcţii integrabile, continu $\int_a^b f(x)\,dx\neq 0$ şi $g(x)\neq 0$, $\forall x\in(a,b)$. Atunci, pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ şi $\alpha_n>0$ cu $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=1$, există n numere distincte $x_1,x_2,\ldots,$ astfel ca

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{g(x_i)}{f(x_i)}=\int_a^b g(x)\,dx\Big/\int_a^b f(x)\,dx.$$

Demonstraţie. Fie $f_1,g_1:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_1(x)=\int_0^x f((1-t)a+tb)\,d$ $=\int_0^x g((1-t)a+tb)\,dt$. În mod evident, f_1 şi g_1 sunt bine definite, verific din Propoziţia 1 şi $g_1(1)-g_1(0)=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$, $f_1(1)-f_1(0)=\dfrac{1}{b-a}$ De unde există $c_1<c_2<\cdots<c_n$ din $(0,1)$ astfel încât

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{g_1'(c_i)}{f_1'(c_i)}=\frac{\int_a^b g(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{g((1-c_i)a+c_ib)}{f((1-c_i)a+c_ib)}=\frac{\int_a^b g(x)}{\int_a^b f(x)}$$

Luând $x_i=(1-c_i)a+c_ib$, $\forall i=\overline{1,n}$, evident că $x_1<x_2<\cdots<x_n$ formula (4).

Observaţie. Egalitatea (1) se obţine luând în (4) $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha$ $g(x)=1$, $\forall x\in[a,b]$.

Bibliografie

1. **G. G. Z. Giang -** *Problema 1125*, Math. Mag.
2. **P. Orno -** *Problema 1053*, Math. Mag.
3. **I. Tomescu (coordonator)** - *Probleme date la olimpiadele de matema licee (1950–1990)*, Ed. ştiinţifică, Bucureşti, 1992.
4. ******* - *Problema C:1791*, G. M. 3/1996.

Asupra unei probleme propuse la O. I. M. -

Neculai ROMAN[1]

La O. I. M. în anul 1982 a fost propusă problema B3 – GB:

Fie ABC un triunghi şi P un punct în interiorul lui astfel ca $\angle PAC$
Fie L, M picioarele perpendicularelor din P pe BC, CA respectiv. Fie
lui $[AB]$. Să se demonstreze că $DL = DM$.

Enunţul şi o soluţie a acestei probleme se poate găsi în [**1**], pag. 322 ş
blema are şi o soluţie mai simplă, accesibilă şi elevului de gimnaziu şi c
a fi cunoscută. De asemenea, vom arăta că problema are loc pentru o m
variată de puncte din planul triunghiului. În acest scop, vom demonstra u

Teoremă. *Fie ABC un triunghi, D mijlocul lui $[AB]$ şi punctele*
dreptele AC, respectiv BC astfel ca $C \in (AA^{'})$ şi $C \in (BB')$. Fie P
în planul triunghiului şi L, M picioarele perpendicularelor din P pe B
tiv AC. Să se demonstreze că dacă $P \in \mathrm{Int}\,(\angle ACB) \cup \mathrm{Int}\,(\angle A'CB'$
$\angle PAC \equiv \angle PBC$ sau dacă $P \in \mathrm{Int}\,(\angle BCA') \cup \mathrm{Int}\,(\angle ACB')$ astfel ca m
$+m\,(\angle PBC) = 180^\circ$ atunci $DM = DL$.

Demonstraţie. Fie punctele D' şi D'' mijloacele segmentelor $[PA]$
$[PB]$ (fig. 1, 2 şi 3).

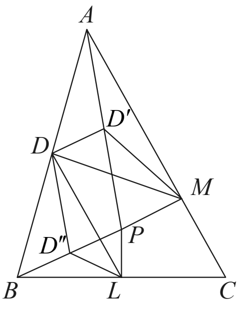


Fig. 1

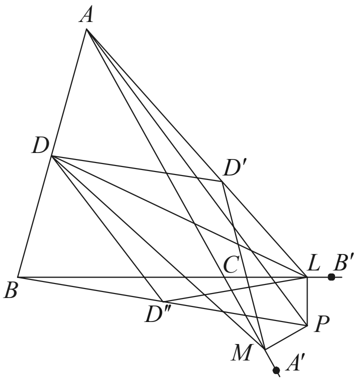


Fig. 2

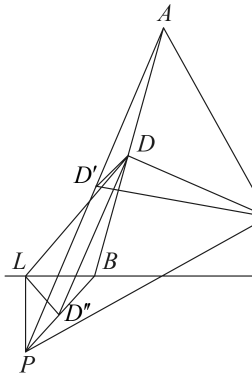


Fig. 3

Avem $MD' = \dfrac{PA}{2} = DD''$, ($[MD']$ mediana corespunzătoare ipo
$\triangle AMP$ şi $[DD'']$ linie mijlocie în $\triangle APB$).

Deci

$$[MD'] \equiv [DD''] .$$

Analog,

$$[LD''] \equiv [DD'] .$$

Din $PD'DD''$ paralelogram, rezultă că

$$\angle PD'D \equiv \angle PD''D$$

[1] Profesor, Şcoala "V. Alecsandri", Mirceşti, Iaşi

Din $P \in \text{Int}(\angle ACB) \cup \text{Int}(\angle A'CB')$ astfel ca $\angle PAC \equiv \angle PBC$ (fig. 1 şi 2
că $\angle PD'M \equiv \angle PD''L$ (teorema unghiului exterior).

Dacă $P \in \text{Int}(\angle BCA')$ astfel ca $m(\angle PAC) + m(\angle PBC) = 180°$ (fig
$\angle PAC \equiv \angle PBL$ şi deci $\angle PD'M \equiv \angle PD''L$ (teorema unghiului exteri
$P \in \text{Int}(\angle ACB')$ astfel ca $m(\angle PAC) + m(\angle PBC) = 180°$, atunci $\angle PBC$
şi deci $\angle PD'M \equiv \angle PD''L$.

În concluzie,

$$\angle PD'M \equiv \angle PD''L.$$

Din relaţiile (3) şi (4) rezultă că

$$\angle MD'D \equiv \angle LD''D.$$

Acum din relaţiile (1), (2) şi (5) rezultă că $\triangle MD'D \equiv \triangle DD''L$, de und
$[DM] \equiv [DL]$ şi deci $DM = DL$.

Teorema reciprocă. *Fie ABC un triunghi, D mijlocul lui $[AB]$ şi p*
B' pe dreptele AC respectiv BC astfel ca $C \in (AA')$ şi $C \in (BB')$. Fie p
M pe dreptele BC respectiv AC astfel ca $DM = DL$. Perpendicularele în
AC respectiv BC se întâlnesc în P. Să se demonstreze afirmaţiile:

a) dacă $P \in \text{Int}(\angle ACB) \cup \text{Int}(\angle A'CB')$, atunci $\angle PAC \equiv \angle PBC$;

b) dacă $P \in \text{Int}(\angle ACB') \cup \text{Int}(\angle BCA')$, atunci $m(\angle PAC) + m(\angle PB$

Demonstraţie. *a*) Fie punctele D' şi D'' mijloacele segmentelor $[PA$
$[PB]$.

Se arată uşor că $\triangle MD'D \equiv \triangle DD''L$, de unde rezultă că

$$\angle MD'D \equiv \angle DD''L.$$

Din $PD'DD''$ paralelogram, rezultă

$$\angle PD'D \equiv \angle PD''D.$$

Din relaţiile (6) şi (7) obţinem

$$\angle PD'M \equiv \angle PD''L.$$

a) Dacă $P \in \text{Int}(\angle ACB) \cup \text{Int}(\angle A'CB')$, atunci din (8) rezultă $\angle PAC$
(fig.1 şi 2).

b) Dacă $P \in \text{Int}(\angle BCA')$ (fig. 3), atunci din relaţia (8) rezultă că $\angle PAC$
şi, deci, $m(\angle PAC) + m(\angle PBC) = 180°$.

Dacă $P \in \text{Int}(\angle ACB')$, atunci din relaţia (8) rezultă: $\angle PBC \equiv \angle P$
$m(\angle PAC) + m(\angle PBC) = 180°$.

Bibliografie

1. I. Cuculescu - *Olimpiadele internaţionale de matematică ale el*
Tehnică, Bucureşti, 1984.

NOTA ELEVULUI

Asupra unei ecuaţii funcţionale

Loredana AGORE[1]

Scopul acestei note este rezolvarea ecuaţiei funcţionale

$$f\left(axy+x+y\right)=bf\left(x\right)f\left(y\right)+c\left[f\left(x\right)+f\left(y\right)\right]+d \quad (a,b,c,d\in \mathbb{R}$$

în mulţimea funcţiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sau $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ sau $f:\mathbb{R}^*_+\to\mathbb{R}$.

În ecuaţia (1) este cuprinsă *ecuaţia lui Cauchy*

$$f\left(x+y\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right),$$

ale cărei soluţii se numesc *funcţii aditive*, precum şi următoarele *ecuaţi*
sunt reductibile la ecuaţia lui Cauchy:

$$f\left(x+y\right)=f\left(x\right)f\left(y\right),$$

$$f\left(xy\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right),$$

$$f\left(xy\right)=f\left(x\right)f\left(y\right).$$

Rezolvarea în detaliu a ecuaţiilor $(2)-(5)$ se poate găsi în [**1**]. Tot în [**1**],
studiată şi ecuaţia funcţională obţinută considerând în (1) $a\geq 0$, $c=1$, a

Rezolvarea ecuaţiei funcţionale (1) constă în reducerea ei, potrivit cu
a, b, c şi d, la una dintre ecuaţiile $(2)-(5)$. Distingem câteva cazuri.

I $a\neq 0,\ b\neq 0$. Înmulţim ecuaţia (1) cu b şi apoi punem rezultatul o
forma

$$bf\left(\frac{(ax+1)(ay+1)-1}{a}\right)+c=\left[bf\left(\frac{(ax+1)-1}{a}\right)+c\right]\cdot$$

$$\cdot\left[bf\left(\frac{(ay+1)-1}{a}\right)+c\right]+bd+c$$

Cu notaţiile $\alpha=bd+c-c^2$, $u=ax+1$, $v=ay+1$ şi $\mathrm{g}(t)=bf\left(\dfrac{t-1}{a}\right)$
ecuaţia (6) se scrie

$$g\left(uv\right)=g\left(u\right)g\left(v\right)+\alpha.$$

Dacă $bd=c^2-c$, adică $\alpha=0$, atunci (7) este de tipul (5) şi se reduce
lui Cauchy [**1**]. Soluţiile se exprimă cu funcţiile aditive sau sunt funcţii c

Dacă $bd\neq c^2-c$, deci $\alpha\neq 0$, luăm $u=v=1$ în (7) şi obţinem $g\left(1\right)=[$
De aici, $g\left(1\right)=\dfrac{1}{2}\left[1\pm\sqrt{1-4\alpha}\right]=\dfrac{1}{2}\left[1\pm\sqrt{\left(1-2c\right)^2-4bd}\right]$, cu condiţia
$\Leftrightarrow bd\leq c^2-c+\dfrac{1}{4}$. Pe de altă parte, ecuaţia (7) cu $v=1$ devine

$$g\left(u\right)=g\left(u\right)g\left(1\right)+\alpha\Leftrightarrow g\left(u\right)=\frac{\alpha}{1-g\left(1\right)}\Leftrightarrow g\left(u\right)=g\left(1\right)$$

(evident, $g\left(1\right)\neq 1$). Ca urmare, ecuaţia (1) are, în cazul considerat, d
date de $f\left(x\right)=\dfrac{1}{b}\left[g\left(1\right)-c\right]=\dfrac{1}{2b}\left[\left(1-2c\right)\pm\sqrt{\left(1-2c\right)^2-4bd}\right]$.

[1] Elevă, cl. a XI-a, Colegiul Naţional "Mihai Viteazul", Bucureşti

II $a = 0$, $b \neq 0$. Ecuaţia (1) devine

$$f(x+y) = bf(x)f(y) + c[f(x)+f(y)] + d$$

şi se poate scrie în forma

$$bf(x+y) + c = [bf(x)+c][bf(y)+c] + bd + c - c^2$$

sau, notând $\alpha = bd + c - c^2$ şi $g(t) = bf(t) + c$, $t \in \mathbb{R}$,

$$g(x+y) = g(x)g(y) + \alpha.$$

Dacă $bd = c^2 - c$, atunci (10) este de tipul (3) etc.

Dacă $bd \neq c^2 - c$, în (8) luăm $x = y = 0$ şi obţinem $f(0) = b[f(0)]^2 + 2cf$

deci $f(0) = \frac{1}{2b}\left[(1-2c) \pm \sqrt{(1-2c)^2 - 4bd}\right]$ (în mod necesar, $(1-2c)^2$

$\Leftrightarrow 1 - 4\alpha \geq 0$). Dar, dacă în (8) luăm $y = 0$ şi apoi grupăm convenabil, a

$$[1 - bf(0) - c]f(x) = cf(0) + d \overset{(*)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow [1 - bf(0) - c]f(x) = [1 - bf(0) - c]f(0) \Leftrightarrow f(x) = f(0)$$

$(1 - bf(0) - c \neq 0 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} bd \neq c^2 - c)$. Avem două soluţii:

$$f(x) = f(0) = \frac{1}{2b}\left[(1-2c) \pm \sqrt{(1-2c)^2 - 4bd}\right].$$

III $a \neq 0$, $b = 0$. În acest caz, (1) se scrie

$$f(axy + x + y) = c[f(x) + f(y)] + d.$$

Dacă $c = 1$, punem (11) în forma

$$f\left(\frac{(ax+1)(ay+1)-1}{a}\right) + d = \left[f\left(\frac{(ax+1)-1}{a}\right) + d\right] + \left[f\left(\frac{(ay+1)}{a}\right.\right.$$

sau, notând $u = ax + 1$, $v = ay + 1$ şi $g(t) = f\left(\frac{t-1}{a}\right) + d$, $t \in \mathbb{R}$,

$$g(uv) = g(u) + g(v),$$

care este o ecuaţie de tipul (4).

Dacă $c \neq 1$, pentru $x = y = 0$ luat în (11) obţinem

$$f(0) = 2cf(0) + d \Leftrightarrow (1-2c)f(0) = d.$$

Cum, pentru $y = 0$ în (11), avem

$$f(x) = cf(x) + cf(0) + d \overset{(12)}{\Leftrightarrow} f(x) = cf(x) + f(0) - cf(0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-c)f(x) = (1-c)f(0) \Leftrightarrow f(x) = f(0) \overset{(12)}{\Leftrightarrow} f(x) = \frac{d}{1-2}$$

dacă mai presupunem în plus $c \neq \frac{1}{2}$. Este banală verificarea faptului că, în

impuse, $f(x) = \frac{d}{1-2c}$ este soluţie a ecuaţiei (11).

Dacă $c = \frac{1}{2}$, avem de rezolvat ecuaţia

$$f(axy + x + y) = \frac{1}{2}[f(x) + f(y)] + d.$$

Pentru $x = y = 0$, obţinem $f(0) = \frac{1}{2}[f(0) + f(0)] + d$, deci $d = 0$. Lu
$y = -\frac{1}{a}$ în (13) cu $d = 0$, vom avea $f(0) = \frac{1}{2}\left[f(x) + f\left(\frac{-1}{a}\right)\right]$, de un
că $f(x) = k$ (constant), $\forall x \in \mathbb{R}$. Se verifică uşor că această funcţie este î
soluţie pentru orice $k \in \mathbb{R}$.

IV $a = 0$, $b = 0$. Este vorba de ecuaţia

$$f(x+y) = c[f(x) + f(y)] + d.$$

Dacă $c = 1$, (14) se poate scrie

$$f(x+y) + d = [f(x) + d] + [f(x) + d],$$

care este o ecuaţie Cauchy în $g(t) = f(t) + d$, $t \in \mathbb{R}$.

Dacă $c \neq 1$, luăm $x = y = 0$ în (14) şi obţinem, ca şi în cazul
relaţiile echivalente (12). Se continuă tot ca în cazul amintit şi se obţ
$f(x) = f(0) = \frac{d}{1-2c}$, $x \in \mathbb{R}$, dacă $c \neq \frac{1}{2}$.

Dacă $c = \frac{1}{2}$, (14) se scrie

$$f(x+y) = \frac{1}{2}[f(x) + f(y)] + d.$$

Luând $x = y = 0$, constatăm că $d = 0$. Punând în (15) $d = 0$ şi fixâ
obţinem $f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(0)]$. Deci $f(x) = f(0) =$ constant, $\forall x \in \mathbb{R}$,
este soluţie a ecuaţiei (15).

Bibliografie

1. **V. Pop** - *Ecuaţii funcţionale. Ecuaţii clasice şi probleme*, Ed. Median
Napoca, 2002.

Recreaţii ... matematice

2. Un călător, care nu avea la el decît un lanţ cu şapte verigi de aur,
într-o zi la un han. El se înţelege cu hangiul să-l plătească pentru fiecare z
la han câte o verigă de aur. Dacă stă şapte zile şi plata trebuie făcută în
care este numărul minim de tăieturi care trebuie făcute în lanţ pentru a p
preţul convenit? (Se acceptă ca, atunci când este cazul, hangiul să dea
ca rest un număr de verigi (posibil toate!) pe care le-a primit deja.)

3. Care este eroarea în "demonstraţia" de mai jos a egalităţii $3 = 0$?

$x^2 - x + 1 = 0 \quad \mid \cdot x$	$x^3 - (-1) = 0$
$x^3 - x^2 + x = 0$	$x^3 = -1$
$x^3 - (x^2 - x) = 0$	$x = -1$

Punând $x = -1$ în $x^2 - x + 1 = 0$, obţinem $3 = 0$.

Notă. Soluţiile problemelor 2 şi 3 se pot găsi la pagina 39.

Asupra unei inegalităţi condiţionate

Cezar LUPU[1]

La OBM - 2001 a fost dată problema următoare:

Fie a, b, c numere reale strict pozitive astfel încât $a+b+c \geq abc$. Să
$a^2+b^2+c^2 \geq abc\sqrt{3}$. **Cristinel Mortici,**

Soluţia autorului utilizează metoda reducerii la absurd. Presupunem
inegalitatea contrară, adică $a^2+b^2+c^2 < abc\sqrt{3}$. Aplicând inegalitate
Schwarz, obţinem $abc\sqrt{3} > a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2 \geq \frac{1}{3}(abc)^2$, de unde
Pe de altă parte, aplicând inegalitatea mediilor, avem $abc\sqrt{3} > a^2 +$
$\geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ şi, deci, $abc > 3\sqrt{3}$. Se obţine astfel o contradicţie.

Alte soluţii ale acestei probleme sunt prezentate în [**1**] şi [**2**].

1. Problema de mai sus poate fi întărită astfel:

Problema 1. *Să se arate că, dacă $a, b, c > 0$ şi $a+b+c > a$*
$ab+bc+ca \geq abc\sqrt{3}$.

Soluţia I. Ipoteza şi concluzia se pot scrie în felul următor: $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}$
$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \sqrt{3}$. Utilizăm binecunoscuta inegalitate $(x+y+z)^2 \geq 3(xy$
$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ (1) pentru a obţine $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 \geq 3\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right)$, din c
că $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \sqrt{3}$.

Soluţia II. Inegalitatea cerută rezultă direct din inegalitatea $ab+$
$\geq \sqrt{3abc(a+b+c)}$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_+$ (2) (aceasta se reduce la (1), dacă not
$y = bc$ şi $z = ca$).

Problema 2. *Se consideră $a, b, c > 0$ astfel încât $a+b+c \geq abc$. Să*

$$\frac{bc}{a^2(b+c)}+\frac{ca}{b^2(c+a)}+\frac{ab}{c^2(a+b)} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$ **Ce**

Soluţie. Pentru prescurtarea scrierii folosim însumarea ciclică $\sum$. A

$$\sum \frac{bc}{a^2(b+c)} = \frac{1}{abc}\sum \frac{(bc)^2}{a(b+c)} \geq \frac{1}{abc}\cdot\frac{(bc+ca+ab)^2}{2(bc+ca+ab)} = \frac{ab+bc+}{2abc}$$

(s-a folosit $(bc+ca+ab)^2 \leq 2(bc+ca+ab)\sum \frac{(bc)^2}{a(b+c)}$, adevărată conf
lităţii Cauchy-Schwarz).

2. Având ca punct de plecare inegalitatea condiţionată dată la OB
obţine inegalităţi geometrice într-un triunghi. Să observăm mai întâi că a

Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi oarecare înscris într-
rază egală cu unitatea, atunci $a+b+c \geq abc$.

În [**2**] sunt date patru demonstraţii. Reproducem una dintre ele.
$4RS = abc$ şi $S = pr$ conduc la relaţia $\frac{abc}{a+b+c} = 2Rr$. Utilizând i
lui Euler şi faptul că $R = 1$, obţinem inegalitatea dorită.

[1] Elev, cl. a X-a, Colegiul Naţional "Mircea cel Bătrân", Constanţa

Ca urmare, în condiţia impusă triunghiului, are loc şi i
$a^2+b^2+c^2 \geq abc\sqrt{3}$. De altfel, aceasta din urmă rezultă direct din
inegalitate $a^2+b^2+c^2 \geq 4S\sqrt{3}$ (*Weitzenböck*, 1919) pentru $R=1$.

O întărire a acestor inegalităţi este dată de

Problema 3. *În orice triunghi este satisfăcută inegalitatea* $ab+bc+ca \geq a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab} \geq 4S\sqrt{3}$. *În particular, dacă* R *=* $ab+bc+ca \geq a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab} \geq abc\sqrt{3}$.

Soluţie. Prima parte a dublei inegalităţi se dovedeşte astfel: $\sum ab \geq \sum$
$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}} \Leftrightarrow A^2+B^2+C^2 \geq AB+BC+CA$
$A=\frac{1}{\sqrt{a}}$, $B=\frac{1}{\sqrt{b}}$ şi $C=\frac{1}{\sqrt{c}}$), care este adevărată.

Demonstrăm acum partea a doua, adică $\sum a\sqrt{bc} \geq 4S\sqrt{3}$ sau $\sum$ –
Cu inegalitatea Cauchy-Schwarz sau utilizând inegalitatea (2) de mai su
$\sum \frac{1}{\sqrt{bc}} \geq \frac{9}{\sum\sqrt{bc}} \geq \frac{9}{\sqrt{3(ab+bc+ca)}}$. Este suficient ca $\frac{9}{\sqrt{3(ab+bc+}}$
sau, echivalent, $ab+bc+ca \leq 9R^2$. Aceasta decurge din $ab+bc+ca \leq a$
şi faptul cunoscut că într-un triunghi are loc $a^2+b^2+c^2 \leq 9R^2$.

Problema 4. *Să se arate că în orice triunghi înscris într-un cerc de cu 1 are loc inegalitatea* $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}+\sqrt{3} \leq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$. **Ce**

Soluţie. Este binecunoscută inegalitatea $a^2+b^2+c^2 \geq 4S\sqrt{3}+$
$+(b-c)^2+(c-a)^2$ (*Finsler* şi *Hadwiger*, 1938). Este echivalentă cu $2(ab+$
$-\left(a^2+b^2+c^2\right) \geq 4S\sqrt{3}$ şi ţinând seama că $R=1$, conduce la inegalitate

Problema 5. *În orice triunghi înscris într-un cerc de rază* 1 *are loc*
inegalitate: $\frac{a}{bc(b+c)}+\frac{b}{ca(c+a)}+\frac{c}{ab(a+b)} \geq \frac{3}{2(a+b+c)}$. **Ce**

Soluţie. Utilizând rezultatul din Problema 3 şi inegalitatea Cauch
putem scrie: $\frac{3a^2b^2c^2}{2(a+b+c)} \leq \frac{(a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab})^2}{2(a+b+c)} \leq \sum \frac{(a\sqrt{bc})^2}{b+c}$, de
împărţire cu $a^2b^2c^2$, obţinem inegalitatea dorită.

3. Propunem spre rezolvare următoarele probleme:

1. Se consideră a, b, c trei numere reale strict pozitive astfel încât $a+b$
Arătaţi că $\frac{a^2}{bc(b+c)}+\frac{b^2}{ca(c+a)}+\frac{c^2}{ab(a+b)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$. **Cezar Lu**

2. Fie ABC un triunghi oarecare înscris într-un cerc de rază egală cu
că $PA+PB+PC \geq \frac{\sqrt{3}}{3}AB \cdot BC \cdot CA$, $\forall P \in \mathrm{Int}(ABC)$. **Ce**

Bibliografie

1. **M. Bălună şi M. Becheanu** (prezentare de) - *A 18-a OBM, 3-9 mai 200*
GM - 5-6/2001, 229-236.
2. **Cezar Lupu** - *Asupra unei probleme de concurs*, Rev. Mate(matică), 200

O metodă de demonstrare a concurenţei unor

Gabriel POPA, Paul GEORGESCU[1]

Vom exemplifica în cele ce urmează aplicabilitatea unei metode de dem concurenţei unor drepte, prea puţin utilizată în contextul introducerii noi şcolare de geometrie.

Date două puncte A, B având vectorii de poziţie $\vec{r}_A$ şi respectiv $\vec{r}_B$, v poziţie al unui punct al dreptei AB este de forma

$$\vec{r}_M = \lambda \vec{r}_A + (1-\lambda)\,\vec{r}_B,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

(*ecuaţia vectorială* a dreptei AB). Având o dreaptă ataşată unui triunghi, poziţie al unui punct curent M al său poate fi exprimat funcţie de vectorii ai vârfurilor şi de un parametru real λ. Considerând încă o dreaptă (cu p notat μ), pentru a afla punctul comun celor două drepte vom avea de r sistem liniar în λ şi μ.

Dacă dorim să probăm concurenţa a trei drepte, le vom intersecta două şi vom urmări dacă vectorii de poziţie ai punctelor obţinute coincid presupune, în general, un important volum de calcule, însă este "sigură" în plus faţă de alte metode, poziţionarea punctului de concurenţă.

Problema 1. *Fie ABC un triunghi şi $M, N \in (BC)$, $P, Q \in (AC)$, R puncte astfel încât $BM = CN = CP = AQ = AR = BS = x$, unde $< \min\{AB, BC, CA\}$. Dacă A_1, B_1, C_1 sunt respectiv mijloacele segment (RN), (MQ), arătaţi că dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente.*

Constant

Soluţie. Punctul S împarte segmentul orientat $\overline{BA}$ în raportul $\dfrac{\overline{SB}}{\overline{SA}}$ atunci

$$\vec{r}_S = \frac{c-x}{c}\left[\vec{r}_B + \frac{x}{c-x}\vec{r}_A\right] = \frac{c-x}{c}\vec{r}_B + \frac{x}{c}\vec{r}_A\ .$$

Analog, $\vec{r}_P = \dfrac{b-x}{b}\vec{r}_C + \dfrac{x}{b}\vec{r}_A$ şi atunci

$$\vec{r}_{A_1} = \frac{1}{2}\left(\vec{r}_S + \vec{r}_P\right) = \frac{x\,(b+c)}{2bc}\vec{r}_A + \frac{c-x}{2c}\vec{r}_B + \frac{b-x}{2b}\vec{r}_C\ .$$

Vectorul de poziţie al unui punct curent X al dreptei AA_1 va fi

$$\vec{r}_X = \lambda \vec{r}_{A_1} + (1-\lambda)\,\vec{r}_A = \left[\frac{\lambda x\,(b+c)}{2bc} + (1-\lambda)\right]\vec{r}_A + \frac{\lambda\,(c-x)}{2c}\vec{r}_B + \frac{\lambda\,(b}{}$$

unde $\lambda \in \mathbb{R}$. Cu totul analog, vectorul de poziţie al unui punct curent Y BB_1 va fi

$$\vec{r}_Y = \frac{\mu\,(c-x)}{2c}\vec{r}_A + \left[\frac{\mu x\,(a+c)}{2ac} + (1-\mu)\right]\vec{r}_B + \frac{\mu\,(a-x)}{2a}\vec{r}_C\ .$$

[1] Profesori, Colegiul Naţional şi Liceul de Informatică "Gr. Moisil", Iaşi

Intersecţia celor două drepte se obţine rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda x\,(b+c)}{2bc} + (1-\lambda) = \dfrac{\mu\,(c-x)}{2c} \\ \dfrac{\lambda\,(c-x)}{2c} = \dfrac{\mu x\,(a+c)}{2ac} + (1-\mu) \\ \dfrac{\lambda\,(b-x)}{2b} = \dfrac{\mu\,(a-x)}{2a}\,. \end{cases}$$

Sistemul este compatibil determinat, cu soluţia

$$\lambda = \frac{2bc\,(a-x)}{x^2\,(a+b+c) - 2x\,(ab+bc+ac) + 3abc}\,;$$

$$\mu = \frac{2ac\,(b-x)}{x^2\,(a+b+c) - 2x\,(ab+bc+ac) + 3abc}\,.$$

Punctul comun al dreptelor AA_1 şi BB_1 este T, unde

$$\vec{r}_T = \frac{1}{x^2\,(a+b+c) - 2x\,(ab+bc+ac) + 3abc}\left[a\,(b-x)\,(c-x)\,\vec{r}_A\right.$$

$$\left. + \, b\,(a-x)\,(c-x)\,\vec{r}_B + c\,(a-x)\,(b-x)\,\vec{r}_C\right]\,.$$

Scriind acum ecuaţia vectorială a dreptei CC_1 şi aflând intersecţia aceste
obţinem acelaşi punct T. Urmează că AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente.

Observaţii.

1) Calcule foarte asemănătoare rezolvă problema $L.25.a)$ din R. M.
autor **Constantin Cocea**. Legat de punctul $b)$ al acestei probleme,
notele apărute în R. M. T. numerele 2/1991 şi 1/1996, putem observa
calculul vectorial ajută la simplificarea soluţiilor (a se vedea şi [**4**]).

2) În [**6**] se demonstrează concurenţa înălţimilor şi bisectoarelor unu
folosind această metodă; aceste demonstraţii au constituit punctul de ple
ticolului de faţă.

3) Calculele pot fi simplificate atunci când, din considerente geometr
anumite simetrii verificate de punctul de concurenţă.

Problema 2. *Fie H ortocentrul $\triangle ABC$, M, N şi P mijloacele latu
$[CA]$ respectiv $[AB]$, iar $A_1 \in (AH)$, $B_1 \in (BH)$, $C_1 \in (CH)$ a
$\dfrac{AA_1}{A_1H} = \dfrac{BB_1}{B_1H} = \dfrac{CC_1}{C_1H}$. Să se arate că dreptele A_1M, B_1N şi C_1P sunt c*

Gabriel Popa, Paul G

Soluţie. Raportăm planul la un reper cu originea în centrul cercului c
triunghiului şi fie $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$, $\vec{r}_C$ vectorii de poziţie ai vârfurilor. Dacă $\dfrac{A_1H}{AA_1} =$

$$\vec{r}_H = \vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C\,, \quad \vec{r}_M = \frac{1}{2}\left(\vec{r}_B + \vec{r}_C\right),$$

$$\vec{r}_{A_1} = \frac{1}{1+k}\vec{r}_H + \frac{k}{1+k}\vec{r}_A = \vec{r}_A + \frac{1}{1+k}\vec{r}_B + \frac{1}{1+k}\vec{r}_C\,.$$

Căutăm un punct $Q \in (A_1M)$ astfel încât $\dfrac{A_1Q}{QM} = l$, iar $\vec{r}_Q$ să se exprin funcţie de $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$ şi $\vec{r}_C$:

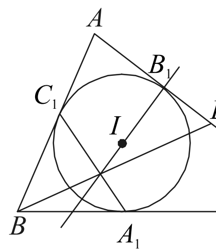
$$\vec{r}_Q = \frac{1}{1+l}\vec{r}_{A_1} + \frac{l}{1+l}\vec{r}_M = \frac{1}{1+l}\left[\vec{r}_A + \left(\frac{l}{2} + \frac{1}{1+k}\right)\vec{r}_B + \left(\frac{l}{2} + \frac{1}{1+k}\right.\right.$$

pentru $\frac{l}{2}+\frac{1}{1+k} = 1 \Leftrightarrow l = \frac{2k}{1+k}$, obţinem că $\vec{r}_Q = \frac{1+k}{1+3k}\left(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C\right.$
căutăm $Q' \in (B_1N)$ şi $Q'' \in (C_1P)$ care să se exprime simetric funcţie d
$\vec{r}_C$; vom găsi că $Q' = Q'' = Q$, deci cele trei drepte sunt concurente.

Problema 3. *Laturile (AB), (BC), (AC) ale triunghiului ABC sun cercului înscris de centru I în punctele C_1, A_1 respectiv B_1. Dacă B_2 es laturii (AC), demonstraţi că dreptele B_1I, A_1C_1 şi BB_2 sunt concurente*

Olimpiadă Rep.

Soluţie. Funcţie de vectorii de poziţie ai vârfurilor $\triangle ABC$, vectorii de poziţie ai punctelor care apar în problemă sunt:



$$\vec{r}_{A_1} = \frac{a+b-c}{2a}\vec{r}_B + \frac{a+c-b}{2a}\vec{r}_C \ ;$$

$$\vec{r}_{B_1} = \frac{b+a-c}{2b}\vec{r}_A + \frac{b+c-a}{2b}\vec{r}_C \ ;$$

$$\vec{r}_{C_1} = \frac{c+a-b}{2c}\vec{r}_A + \frac{c+b-a}{2c}\vec{r}_B \ ;$$

$$\vec{r}_{B_2} = \frac{1}{2}\left(\vec{r}_A + \vec{r}_C\right); \quad \vec{r}_I = \frac{a}{a+b+c}\vec{r}_A + \frac{b}{a+b+c}\vec{r}_B + \frac{c}{a+b+c}\vec{r}$$

Fie X un punct pe IB_1; atunci

$$\vec{r}_X = \lambda\vec{r}_{B_1} + (1-\lambda)\,\vec{r}_I = \left[\frac{\lambda\,(b+a-c)}{2b} + \frac{(1-\lambda)\,a}{a+b+c}\right]\vec{r}_A +$$

$$+\frac{(1-\lambda)\,b}{a+b+c}\vec{r}_B + \left[\frac{\lambda\,(b+c-a)}{2b} + \frac{(1-\lambda)\,c}{a+b+c}\right]\vec{r}_C, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Căutăm o valoare a lui λ pentru care $\vec{r}_X$ să aibă o exprimare simetrică î
deci

$$\frac{\lambda\,(b+a-c)}{2b} + \frac{(1-\lambda)\,a}{a+b+c} = \frac{\lambda\,(b+c-a)}{2b} + \frac{(1-\lambda)\,c}{a+b+c} \Leftrightarrow \lambda = -\frac{b}{a+}$$

pentru această valoare a lui λ,

$$\vec{r}_X = \frac{a+c-b}{2\,(a+c)}\vec{r}_A + \frac{b}{a+c}\vec{r}_B + \frac{a+c-b}{2\,(a+c)}\vec{r}_C.$$

Fie acum Y punct pe A_1C_1; atunci

$$\vec{r}_Y = \mu\vec{r}_{A_1} + (1-\mu)\,\vec{r}_{C_1} = (1-\mu)\,\frac{c+a-b}{2c}\vec{r}_A +$$

$$+\left[\frac{\mu\,(a+b-c)}{2a} + \frac{(1-\mu)\,(c+b-a)}{2c}\right]\vec{r}_B + \frac{\mu\,(a+c-b)}{2a}\vec{r}_C$$

Căutând o valoare pentru μ astfel încât $\vec{r}_Y$ să aibă o exprimare simetrică î
obţinem $\mu = \frac{a}{a+c}$ şi, pentru această valoare,

$$\vec{r}_Y = \frac{a+c-b}{2\,(a+c)}\vec{r}_A + \frac{b}{a+c}\vec{r}_B + \frac{a+c-b}{2\,(a+c)}\vec{r}_C \ ,$$

adică $Y = X$. Să observăm în final că, datorită simetriei în $\vec{r}_A$ şi $\vec{r}_C$, aces
află şi pe mediana BB_2.

Probleme propuse

1. Fie G_A, G_B, G_C, G_D centrele de greutete ale feţelor tetraedrului
M un punct interior tetraedrului. Dacă A', B', C', D' sunt situate re
semidreptele $(MG_A$, $(MG_B$, $(MG_C$, $(MG_D$, în exteriorul tetraedrului, a
$\dfrac{MG_A}{G_AA'} = \dfrac{MG_B}{G_BB'} = \dfrac{MG_C}{G_CC'} = \dfrac{MG_D}{G_DD'}$, să se arate că dreptele AA', BB',
sunt concurente.

Gabriel Popa, Paul G

2. Fie ABC un triunghi înscris în cercul $\mathcal{C}$, A_1, B_1, C_1 punctele de pe $\mathcal{C}$
opuse vârfurilor, iar G_A, G_B, G_C centrele de greutate ale triunghiurilor A_1B
respectiv C_1AB. Arătaţi că dreptele AG_A, BG_B, CG_C sunt concurente înt
situat pe dreapta lui Euler a $\triangle ABC$.

Gabriel Popa, Paul G

3. Fie M în interiorul $\triangle ABC$. Bisectoarele interioare ale unghiuri
$\widehat{CMA}$, $\widehat{AMB}$ taie laturile $[BC]$, $[CA]$, respectiv $[AB]$ în A_1, B_1, respectiv
arate că AA_1, BB_1 şi CC_1 sunt concurente.

Gheorg

4. Fie D, E, F punctele de tangenţă ale cercului înscris în $\triangle ABC$
$[BC]$, $[CA]$, respectiv $[AB]$. Paralela prin E la AB taie FD în Q, iar pa
D la AB taie EF în T. Să se arate că dreptele CF, DE şi TQ sunt conc

Marc

5. Fie tetraedrul $ABCD$ şi punctele $M \in (AB)$, $N \in (CD)$, $P \in (BC)$,
astfel încât $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{DN}{NC}$, $\dfrac{BP}{PC} = \dfrac{AQ}{QD}$. Notăm $\{A_1\} = BN \cap DP$, $\{B_1\} =$
$\{C_1\} = BQ \cap DM$, $\{D_1\} = AP \cap CM$. Să se arate că dreptele AA_1, B
DD_1 sunt concurente.

Bibliografie

1. **C. Cocea** - *Problema L.25*, R. M. T. - 2/1990.
2. **C. Cocea** - *Problema X.8*, R. M. T. - 1/1996.
3. **P. Georgescu, G. Popa** - *Structuri fundamentale în algebra liniară, geo torială şi geometria analitică*, Ed. MatrixRom, Bucureşti, 2003.
4. **G. Popa** - *Aplicaţii ale dimensiunii dreptei vectoriale, planului vectorial şi vectorial*, Matematica pentru elevi, Galaţi, 17-18/2001.
5. **G. Popa, P. Georgescu** - *Dreapta lui Euler privită ca loc geometric*, Re tematice - 2/2002.
6. **E. Murgulescu, N. Donciu** - *Culegere de probleme de geometrie analit renţială* (vol. I), E. D. P., 1971.
7. ******* - *A 46-a Olimpiadă de Matematică a Rep. Moldova*, R. M. T - 3/

Teorema ariciului şi câteva aplicaţii

Dumitru MIHALACHE[1]

În aceasta notă ne propunem să prezentăm un rezultat mai puţin v
literatura matematică românească din ultimii ani, precum şi o aplicaţi
neaşteptată a sa; credem că cititorii interesaţi vor găsi destule alte pro
să-l folosească. Vom prezenta **teorema ariciului** în mod gradat (denu
justificată de aspectul configuraţiilor ce vor apărea); în plan mai întâi pent
şi apoi pentru poligon oarecare, iar în spaţiu pentru tetraedru şi pe urmă
poliedru arbitrar, cu demonstraţii între care există analogii.

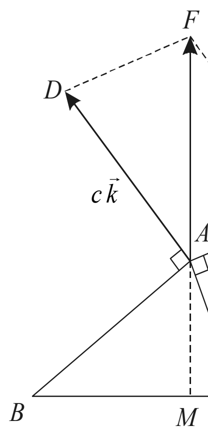
Propoziţia 1. *Fie ABC un triunghi şi $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ versori perpendiculari
BC, CA, respectiv AB, îndreptaţi spre exteriorul triunghiului. Cu notaţ
are loc egalitatea $a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} = \vec{0}$.*

Demonstaţia I. Notăm $\vec{S} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$; avem că $\vec{S} \cdot a\vec{i} = a^2 + ab\,\vec{i} \cdot$
Deoarece unghiul dintre $\vec{i}$ şi $\vec{j}$ are măsura $180° - m(\widehat{C})$, obţinem că $\vec{i} \cdot \vec{j} =$
procedând la fel, analoagele. Folosind identitatea $b\cos C + c\cos B = a$, gă

$$\vec{S} \cdot a\vec{i} = a^2 - ab\cos C - ac\cos B = a\,(a - b\cos C - c\cos B) = 0.$$

Similar, $\vec{S} \cdot b\vec{j} = 0$, prin urmare $\vec{S}$ este ortogonal pe doi vectori necoliniari,

Demonstraţia II. Construim, ca în figură, reprezentanţi cu originea în A ai vectorilor $b\vec{j}$ şi $c\vec{k}$, fie aceştia $\overrightarrow{AE}$, respectiv $\overrightarrow{AD}$; fie încă F al patrulea vârf al paralelogramului construit pe aceşti vectori. Se observă atunci că $\triangle ABC \equiv \triangle EFA$ (L.U.L.), deci $AF = BC = a$ şi $\widehat{FAE} \equiv \widehat{ACB}$. De aici, $m(\widehat{MAC}) =$ $= 180° - m(\widehat{CAE}) - m(\widehat{EAF}) = 90° - m(\widehat{ACB})$, adică $m(\widehat{AMC}) = 90°$, unde $\{M\} = AF \cap BC$. Urmează că $\overrightarrow{AF}$ este ortogonal pe BC, are lungimea a şi sens opus lui $\vec{i}$, deci $\overrightarrow{AF} = -a\vec{i}$. Pe de altă parte, $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} = b\vec{j} + c\vec{k}$, de unde concluzia.



Să observăm că putem considera că teorema ariciului a fost demonstrată cu prima metodă (sau cu alta,
vom vedea că mai există); atunci relaţia $a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} = \vec{0}$ conduce, avân
figura de mai sus, la $\overrightarrow{AF} = -a\vec{i}$, i.e. $AF \perp BC$, $AF = BC$, plus o condi
sensul. Prin urmare, putem afirma că, din punct de vedere logic, teorem
pentru triunghi este echivalentă cu următorul enunţ (pb. 45, pg. 49 din [

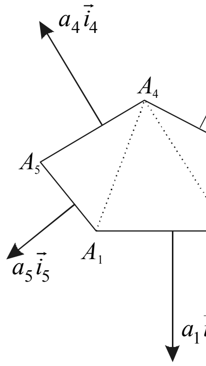
Problema 1. *Se consideră $\triangle ABC$ pe ale cărui laturi $[AB]$ şi $[AC]$
iesc în exterior pătratele $ABGD$ şi $ACKE$. Dacă O este mijlocul lui
$AO = BC/2$ şi $AO \perp BC$.*

Altfel spus, mediana din A în $\triangle ADE$ este înălţime în $\triangle ABC$; atenţie
Şi încă un amănunt: nu trebuie ignorat cazul în care unul din unghiurile
este drept sau obtuz.

[1] Profesor, Colegiul Naţional "Gh. Roşca Codreanu", Bârlad

Propoziţia 2. *Fie $A_1A_2\dots A_n$ un poligon cu laturile de lungimi A*
$A_2A_3 = a_2$, *...*, $A_nA_1 = a_n$. *Pentru fiecare* $k = \overline{1,n}$, *pe latura de lung*
construieşte un versor $\vec{i}_k$ *orientat spre exteriorul poligonului*
$a_1\vec{i}_1 + a_2\vec{i}_2 + \cdots + a_n\vec{i}_n = \vec{0}$.

Demonstraţie. Să remarcăm că, deşi poate să nu fie convex, se subînţelege că poligonul nu trebuie să aibă autointersecţii; vă convingeţi uşor că pentru o "funditţă" formată cu două laturi opuse ale unui dreptunghi şi cu diagonalele sale, proprietatea nu are loc (asta dacă reuşiţi să stabiliţi care este interiorul şi care este exteriorul ei!).



Împărţim poligonul în triunghiuri cu interioarele disjuncte, prin diagonale care nu se intersectează. Aplicăm apoi Propoziţia 1 fiecărui triunghi, însumăm relaţiile obţinute şi concluzia urmează dacă ţinem seama de faptul că pe laturile comune pentru câte două triunghiuri (diagonale ale poligonului!) sunt construiţi câte doi vectori cu

Bineînţeles, demonstraţia poate căpăta şi o formă mai tehnică, utilizâ inducţiei matematice; lăsăm acest demers în seama cititorului. Să spunem aceste demonstraţii deoarece în cazul poliedrelor se va observa o temeini în argumentare. Cazul plan poate fi rezolvat mult mai simplu, chiar în u formă mai generală:

Propoziţia 2′. *Fie $A_1A_2\dots A_n$ un poligon şi $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ vectori în orientaţi către exteriorul poligonului, încât, pentru fiecare $k = \overline{1,n}$, $\vec{v}_k$ ar cât $[A_kA_{k+1}]$ şi formează un acelaşi unghi α cu $\overrightarrow{A_kA_{k+1}}$. Atunci $\vec{v}_1+\vec{v}_2+\cdot$*

Demonstraţie (aflată de autor de la prof. **Marian Tetiva**, Bârla servăm că $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ se obţin din $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}, \dots$, respectiv $\overline{A_n}$ rotaţie de acelaşi unghi α. Cum $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \cdots + \overrightarrow{A_nA_1} = \vec{0}$, la fel ş $+ \cdots + \vec{v}_n = \vec{0}$.

Pentru teorema ariciului în spaţiu avem nevoie de următoarea

Lemă. *Fie $A_1A_2A_3A_4$ un tetraedru; notăm cu S_k aria feţei opuse vâr cu α_{hk} unghiul feţelor de arii S_h şi S_k, format spre interiorul tetraedrul are loc egalitatea $S_1 = S_2\cos\alpha_{12} + S_3\cos\alpha_{13} + S_4\cos\alpha_{14}$.*

Demonstraţie. Considerăm întâi că A_1 se proiectează pe planul (A punctul H interior $\triangle A_2A_3A_4$. Atunci $S_{HA_3A_4} = S_2\cos\alpha_{12}$, $S_{HA_2A_4} =$ $S_{HA_2A_3} = S_4\cos\alpha_{14}$ şi $S_{HA_3A_4} + S_{HA_2A_4} + S_{HA_2A_3} = S_1$, de unde conclu namentul este analog în cazul în care $H \notin \operatorname{Int} A_2A_3A_4$.

Să observăm analogia cu egalitatea $b\cos C + c\cos B = a$ din cazul triu

Propoziţia 3. *Cu notaţiile din lemă, fie versorii $\vec{i}_k$, $k = \overline{1,4}$, ortogona pe feţele de arii S_k şi orientaţi spre exteriorul tetraedrului. Atunci*

$$S_1\vec{i}_1 + S_2\vec{i}_2 + S_3\vec{i}_3 + S_4\vec{i}_4 = \vec{0}.$$

Demonstraţia pe care o dăm este după [**3**] şi decurge la fel cu aceea ţiei 1. Notăm aşadar $\vec{S} = S_1\vec{i}_1 + S_2\vec{i}_2 + S_3\vec{i}_3 + S_4\vec{i}_4$ şi, folosind Lema

că
$$\vec{S}\cdot S_1\vec{i}_1 = S_1^2 - S_1S_2\cos\alpha_{12} - S_1S_3\cos\alpha_{13} - S_1S_4\cos\alpha_{14} = 0$$
şi încă trei relaţii analoage. Fiind ortogonal pe trei vectori necoplanari,
este în mod necesar $\vec{0}$.

Propoziţia 4. *Fie un poliedru convex cu ariile feţelor S_1, S_2, ... , S Pe planul feţei de arie S_k se construieşte versorul $\vec{i}_k$ perpendicular, or exteriorul poliedrului. Are loc relaţia $S_1\vec{i}_1 + S_2\vec{i}_2 + \cdots + S_n\vec{i}_n = \vec{0}$.*

Demonstraţie. Partiţionăm poliedrul în tetraedre cu interioarele dis care două tetraedre având în comun cel mult o faţă. Pentru fiecare tetr struim vectorii perpendiculari pe planele feţelor, spre exterior, de lungin ariile feţelor respective. Aplicăm pentru fiecare tetraedru Propoziţia 3 şi ţi că pe fiecare faţă a tetraedrelor care nu este faţă a poliedrului iniţial sunt doi vectori care se anulează reciproc.

O altă demonstraţie a teoremei ariciului pentru tetraedre poate fi gă şi utilizează produsul vectorial, iar o frumoasă demonstraţie în cazul gen în [**4**], bazată pe ideea că suma proiecţiilor vectorilor pe orice dreaptă (pb. *M119* din *Kvant*). În spaţiu, o demonstraţie analoagă cu cea a Pr nu se poate găsi.

Folosind Propoziţia 3, putem obţine valabilitatea următorului enunţ credem că ele sunt echivalente), care reprezintă extinderea în spaţiu a Pr

Problema 2. *Cu notaţiile din lemă, construim punctul B_2 de ceala planului $(A_1A_2A_3)$ decât A_2 şi astfel încât $A_1B_2 \perp (A_1A_3A_4)$, iar A_1B_2 ric egal cu S_2. Analog construim B_3 şi B_4, apoi paralelipipedul $A_1B_2B_3'B_4$ pe vectorii $\overrightarrow{A_1B_2}$, $\overrightarrow{A_1B_3}$, $\overrightarrow{A_1B_4}$. Atunci $A_1A_1' \perp (A_2A_3A_4)$ şi $A_1A_1' = S_1$*

În încheiere, propunem rezolvarea următoarelor probleme:

1. Deduceţi, cu teorema ariciului, că fiecare latură a unui poligon este decât suma celorlaltor laturi; generalizare în spaţiu. Este reciproca adevă

2. Demonstraţi *teoremele cosinusurilor* pentru tetraedru:
$$S_1^2 = S_2^2 + S_3^2 + S_4^2 - 2S_2S_3\cos\alpha_{23} - 2S_2S_4\cos\alpha_{24} - 2S_3S_4\cos\alpha$$
$$S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2\cos\alpha_{12} = S_3^2 + S_4^2 - 2S_3S_4\cos\alpha_{34}.$$
Arătaţi că aceste egalităţi sunt valabile şi dacă S_1, S_2, S_3, S_4 sunt lungimi unui patrulater (redefinind α_{hk}).

3. Rezolvaţi Problema 2 sintetic (sau pe orice altă cale) şi obţineţi astfe ţa logică dintre Problema 2 şi Propoziţia 3.

Bibliografie

1. **D. Brânzei, S. Aniţa, C. Cocea** - *Planul şi spaţiul euclidian*, Ed. Bucureşti, 1986.
2. **J. Hadamard** - *Lecţii de geometrie elementară. Geometrie plană*, Ed Bucureşti, 1960.
3. **M. Miculiţa** - *Introducere în geometria tetraedrului*, Ed. Mined, Iaşi, 19
4. *Probleme din revista KVANT* (traduse şi selectate de **H. Banea**), E. D. P., 1983.

CHESTIUNI COMPLEMENTARE MANUALELOR

Numărul polinoamelor ireductibile din $\mathbb{Z}_p$ [

Elena ROGOJINĂ[1]***, Lucian-Georges LĂDUNC***

Problema 3 propusă la Berkeley Preliminary Exams, Fall 1985, cere *de*
numărului polinoamelor ireductibile de grad 3 şi coeficientul dominant $\widehat{1}$
([**2**], p. 230). Mai general, *Problema 150* din G. M. (seria A), nr. 1/2003,
minarea numărului polinoamelor ireductibile de grad 3 din $\mathbb{Z}_p[X]$, *p prim*
Popa, [**3**]).În nota de faţă vom urmări rezolvarea acestor probleme şi vom
poate fi aflat *numărul polinoamelor ireductibile de grad n din* $\mathbb{Z}_p[X]$, *p p*

Să observăm mai întâi că polinomul $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ este ireductibil peste
numai dacă polinomul $X^k + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_n^{-1} a_k X^k$ este ireductibil (unde evident
este inversabil peste corpul $\mathbb{Z}_p$); este deci suficient să găsim numărul po
normate (monice) ireductibile, prin înmulţirea acestui număr cu $p-1$ aflân
la problemă.

Numărul polinoamelor de forma $f = X^3 + aX^2 + bX + c$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$
Ca în [**2**], să vedem întâi câte dintre aceste polinoame sunt reductibile. P
reductibile din $\mathbb{Z}_p$ sunt fie de forma $f = (X-i)(X-j)(X-k)$, $i, j, k \in$
forma $f = (X-i)\left(X^2 + mX + n\right)$, $i, m, n \in \mathbb{Z}_p$ şi $X^2 + mX + n$ iredu
$\mathbb{Z}_p$. Prima dificultate care trebuie depăşită în trecerea de la $p = 5$ la ca
este numărarea polinoamelor de primul tip: observăm că numărul lor e
numărul tipurilor de cuvinte de lungime 3 formate cu elementele mulţim
este dat de numărul combinărilor cu repetiţie

$$\overline{C_p^3} = C_{p+2}^3 = \frac{p(p+1)(p+2)}{6}.$$

Aflăm acum câte polinoame normate ireductibile de grad 2 peste $\mathbb{Z}_p$ ex
$p = 2$, în $\mathbb{Z}_2[X]$ există patru polinoame de grad 2, dintre care singurul ired
$X^2 + X + \widehat{1}$. Fie $p \geq 3$ prim; în $\mathbb{Z}_p[X]$ există p^2 polinoame de forma X^2
dintre care sunt reductibile cele pentru care $\Delta = m^2 - \widehat{4}n$ este pătratul u
$a \in \mathbb{Z}_p$. Numărul acestor "pătrate perfecte" este $\dfrac{p+1}{2}$. Într-adevăr (v., d
[**2**], *Problema 12*, Spring 1977), $Q(p) = \{\widehat{0}\} \cup \{x \in \mathbb{Z}_p^* \mid x = a^2,\ a \in \mathbb{Z}_p^*\} =$
unde $f : \mathbb{Z}_p^* \to \mathbb{Z}_p^*$, $f(a) = a^2$ este morfism de grupuri. Deoarece $p \geq 3$, ecu
are exact două soluţii, $\widehat{1}$ şi $\widehat{p-1}$, deci $\operatorname{Ker} f = \{\widehat{1}, \widehat{p-1}\}$ şi cum $\operatorname{Im} f \cong$
atunci $\operatorname{Card}(\operatorname{Im} f) = \dfrac{p-1}{2}$, prin urmare $\operatorname{Card} Q(p) = \dfrac{p-1}{2} + 1 = \dfrac{p+1}{2}$
perechilor $(m, n) \in \mathbb{Z}_p^2$ pentru care Δ este "pătrat perfect" este $\dfrac{p(p+}{2}$
fiecare valoare dată lui m, n ia $\dfrac{p+1}{2}$ valori, dat fiind faptul că $\widehat{4}$ este i

---

[1] Studentă, Universitatea "Ovidius", Constanţa
[2] Profesor, Liceul de Informatică "Gr. C. Moisil", Iaşi

$\mathbb{Z}_p$, p fiind impar). Prin urmare, numărul polinoamelor normate ireductib
2 este $p^2 - \dfrac{p(p+1)}{2} = \dfrac{p(p-1)}{2}$, relaţie adevărată şi pentru $p = 2$.

În final, numărul polinoamelor normate ireductibile de grad 3 din $\mathbb{Z}$
$p^3 - \dfrac{p(p+1)(p+2)}{6} - p \cdot \dfrac{p(p-1)}{2} = \dfrac{p(p-1)(p+1)}{3}$.

Evident, această metodă de numărare este sortită eşecului în cazul polinoamelor ireductibile de grad n din $\mathbb{Z}_p[X]$, dat fiind faptul că există cele două tipuri de polinoame reductibile din cazul $n = 3$. Modalitatea de problemei poate fi urmărită detaliat în [**1**], pp. 188-191 şi foloseşte rezultat de teoria corpurilor; vom prezenta mai jos numai desfăşurarea ideilor.

Pentru un polinom normat ireductibil de gradul d din $\mathbb{Z}_p[X]$, are loc e

$$f \mid X^{p^n} - X \Leftrightarrow d \mid n.$$

Se arată că polinomul $X^{p^n} - X$ nu are rădăcini multiple, deci în descompu produs de polinoame normate ireductibile nu există factori care să se repete echivalenţei anunţate, această descompunere cuprinde ca factori toate p normate ireductibile din $\mathbb{Z}_p[X]$ al căror grad divide pe n, de unde $p^n = \sum_{d|n}$ am notat cu $\rho(k,p)$ numărul polinoamelor normate ireductibile de grad k

Aplicaţia $\mu : \mathbb{N}^* \to \{-1, 0, 1\}$, $\mu(1) = 1$, $\mu(n) = (-1)^r$ dacă n este r numere prime distincte şi $\mu(n) = 0$ dacă $n > 1$ şi n nu este liber de numeşte *funcţia lui Möbius*. Această funcţie aritmetică are proprietatea orice aplicaţie $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$, avem că

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \cdot F(d) = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot F\left(\frac{n}{d}\right),$$

unde $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$, $F(n) = \sum\limits_{d|n} f(d)$; relaţia de mai sus poartă numele *de inversiune a lui Möbius*. Aplicând această formulă funcţiei $f : \mathbb{N}^* \to$ $= n \cdot \rho(n,p)$, avem că $F(n) = p^n$ şi atunci

$$\rho(n,p) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) p^d = \frac{1}{n} \sum_{n|d} \mu(d)\, p^{n/d}.$$

Aşadar, numărul polinoamelor normate ireductibile de grad n din $\mathbb{Z}$ $\dfrac{1}{n} \sum\limits_{n|d} \mu(d)\, p^{n/d}$. În cazul particular $n = 3$, avem

$$\rho(3,p) = \frac{1}{3} \sum_{d|3} \mu(d)\, p^{3/d} = \left[\frac{1}{3}\mu(1) \cdot p^3 + \mu(3) \cdot p\right] = \frac{1}{3}\left(p^3 - p\right) = \frac{p(p-}{}$$

adică regăsim rezultatul problemei [**3**].

Bibliografie

1. **T. Albu, I. D. Ion** - *Itinerar elementar în algebra superioară*, Ed. ALL, 1997.
2. **C. Costara, D. Popa** - *Berkeley Preliminary Exams*, Ed. Ex Ponto, 2000.
3. **G. Popa** - *Problema 150*, G. M. (seria A), nr. 1/2003.

Funcţiile lui Smarandache – proprieţăţi eleme

Prezenta Notă este rezultatul unei selecţii din n trimis Redacţiei de către Minh Perez, Rehoboth, NM, S

Funcţia Smarandache apare în literatura matematică cu mult timp în u istorice pot fi găsite în **J. Sándor** - *The Smarandache function introd than 80 years ago!* Octogon Mathematical Magazine, 9 (2001), no. 2, **F. Smarandache** redescoperă şi cercetează această funcţie şi are meri generat un curent de preocupări în privinţa acesteia.

Definim *funcţia Smarandache* $S(n)$ pe mulţimea $\mathbb{N}^*$ prin: $S(1) = 1$, $n \geq 2$, $S(n)$ este cel mai mic număr natural pentru care $S(n)!$ se divide c

În cele ce urmează, sunt adunate o serie de proprietăţi ale funcţiei Sm şi ale unor generalizări ale ei.

1. *Dacă p este prim, atunci $S(p) = p$. Reciproca este adevărată?* **Begay**)

Soluţie. Dacă p este prim, atunci $r!$ nu este divizibil cu p pentru r < altă parte, $p!$ se divide cu p şi, cum este cel mai mic număr cu această p rezultă că $S(p) = p$. Reciproca nu este adevărată: lăsând la o parte cazul cu 1 neprim, avem contraexemplul $S(4) = 4$. Pot fi găsite alte contraexe

2. *Dacă n este liber de pătrate, iar p este cel mai mare factor prim d punerea sa, atunci $S(n) = p$.* (**Leonardo Motta**)

Soluţie. Fie $n = a \cdot b \cdot \ldots \cdot p$ descompunerea în factori primi a l $a < b < \cdots < p$. Atunci $p!$ conţine în scrierea sa toţi divizorii primi ai $S(n) \leq p$. Pentru $r < p$, observăm că $r!$ nu se divide cu p, deci $S(n) \geq p$ că $S(n) = p$, ceea ce doream.

În particular, $S(n) = p = \dfrac{n}{q} \leq \dfrac{n}{2}$ (deoarece în scrierea $n = p \cdot q$, av (**T. Yau**)

3. *Dacă p este prim, atunci $S(p^p) = p^2$.* (**Alecu Stuparu**)

Soluţie. Deoarece $S(p^p)$ trebuie să se dividă cu p, iar p este prim, $S(p^p)$ trebuie să fie un multiplu nenul al lui p, fie acesta k_p. Mai mult, fiin se divide cu p^p, trebuie să avem $k_p \geq p$ (se vede că $p(p-1)!$ se divide cu nu şi cu p^p). Atunci p^2 este cel mai mic număr al cărui factorial se divide unde concluzia.

Asemănător pot fi definite *a doua şi a treia funcţie Smarandache*: S_2 (mai mic număr natural pentru care $S_2(n)!!$ se divide cu n (unde $m!!$ est numerelor nenule cel mult egale cu m, de aceeaşi paritate ca şi m); S_3 (mai mic număr natural pentru care $S_3(n)!!!$ se divide cu n (unde $m!!!$ est numerelor nenule cel mult egale cu m, care dau acelaşi rest ca şi m la împăr

4. *Dacă $n \geq 3$ este un număr par liber de pătrate, iar p este cel mai m prim din descompunerea sa, atunci $S_2(n) = 2p$.* (**Gilbert Johnson**)

Soluţie. Fie $n = 2 \cdot a \cdot b \cdot \ldots \cdot p$, cu $2 < a < b < \cdots < p$ numere pr $S_2(n) = 2p - k$, unde $1 \leq k < 2p$, atunci $(2p - k)!!$ nu se divide prin p.

$(2p)!! = 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2a) \cdot \ldots \cdot (2b) \cdot \ldots \cdot (2p)$ se divide la n şi, cum este c
număr cu această proprietate, urmează concluzia.

5. *Fie p număr prim impar; să se determine $S_2\left(p^{k+2}\right)$, unde $p = 2k$*
Godunov)

Soluţie. Ca în rezolvarea problemei **3**, se arată că $S_2\left(p^{k+2}\right) = p^2$.

6. *Dacă n este multiplu nenul al lui 3, atunci $S_3(n)$ este tot mul*
(**K. L. Ramsharan**)

Soluţie. Fie $m = S_3(n)$; dacă m nu ar fi multiplu de 3, atunci $m!!! =$
$\cdot (m-6)\ldots$ nu s-ar divide nici el cu 3 şi atunci $m!!!$ nu se divide cu n.
$S_3(n)$ este multiplu de 3.

7. *Să se rezolve ecuaţia diofantică $S_2(x) = p$, unde p este un nu*
(**Gilbert Johnson**)

Soluţie. Pentru p prim fixat, vom determina numărul de numere
astfel încât $S_2(x) = p$. Avem că $p!!$ se divide cu x, iar p este cel mai mi
această proprietate. Cum p este prim, x trebuie să fie multiplu de p.

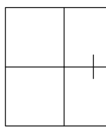
a) Dacă $p = 2$, atunci $x = 2$.

b) Dacă $p > 2$, atunci x este produsul dintre p şi o combinaţie de 0, 1 sau
dintre factorii 3, 5, ... , $p-2$. Notând $k = \dfrac{p-3}{2}$, avem $C_k^0 = 1$ soluţie cu
factor ($x = p$), C_k^1 soluţii cu doi factori ($x = p \cdot 3, p \cdot 5, \ldots, p \cdot (p-2)$), C
trei factori etc. Numărul total de soluţii este cel mult egal cu $C_k^0 + C_k^1 + \cdots$

Recreaţii ... matematice

Soluţiile problemelor enunţate la paginile 15 şi 26.

1. Înlăturând segmentele marcate se obţine o figură formată
din trei pătrate.



2. Cu o tăietură făcută în veriga a treia obţinem trei bucăţi de lanţ f
o verigă, două verigi şi patru verigi. În prima zi călătorul plateşte o verigă
dă bucata formată din două verigi şi ia înapoi o verigă; a treia zi dă hangi
izolată; a patra zi dă bucata din patru verigi şi primeşte ca rest celelalte
de la hangiu; a cincea zi dă iarăşi veriga izolată; a şasea zi dă bucata din
şi ia veriga înapoi; în sfârşit, în a şaptea zi dă hangiului şi veriga rămasă.

Aşadar, este suficientă o singură în lanţ pentru a putea fi făcută plata
zilnic.

3. Iată interpretarea corectă a calculului efectuat: dacă există o solu
ecuaţiei $x^2 - x + 1 = 0$, aceasta poate fi -1. Egalitatea $3 = 0$, obţinu
$x = -1$ în ecuaţie, arată că -1 nu este soluţie şi, deci, ecuaţia nu are solu

MATEMATICA ÎN CLASELE PRIMARE

În legătură cu o problemă de aritmetică propusă la BAC'99.

Romanţa GHIŢĂ şi Ioan GHIŢĂ[1]

În august 1999, la bacalaureat, profilul pedagogic, a fost propusă prob

Într-un depozit erau 185 *t cărbuni, iar în altul* 237 *t. Din primul dep* *câte* 15 *t cărbuni pe zi, iar din al doilea câte* 18 *t pe zi. După câte zile* *depozitul al doilea de* $1\frac{1}{2}$ *ori mai mult cărbune dacât în primul?*

Soluţie ([1]). Dacă în cel de-al doilea depozit ar fi $\frac{2}{3}$ din 237 t (adic din el s-ar scoate zilnic $\frac{2}{3}$ din 18 t (adică 12 t), după numărul de zile cerut ar fi egale. Diferenţa de $185\,\mathrm{t} - 158\,\mathrm{t} = 27\,\mathrm{t}$ este anulată de diferenţa de cantităţile scoase zilnic în 9 zile.

Considerăm că această soluţie necesită unele clarificări. Întâi, $\frac{2}{3}$ rep versul lui $1\frac{1}{2}$. Apoi, diferenţa de 3 t nu este cea dintre 18 şi 15, ci dintr coincidenţa între diferenţele de tone scoase zilnic este una nefericită.

Practic, dintr-o cantitate x aflată în depozitul I se scade zilnic câte a, cantitate y aflată în depozitul II se scade zilnic b ($x < y$, $a < b$). Ne numărul p de zile după care în depozitul II rămâne o cantitate de $\frac{m}{n}$ > mare decât cea rămasă în depozitul I ($a > \frac{n}{m}b$, $x > \frac{n}{m}y$).

Dacă în depozitul II ar fi $\frac{n}{m}y$ şi s-ar scoate zilnic $\frac{n}{m}b$, după cele p zile cantitatea $C = \frac{n}{m}y - p \cdot \frac{n}{m}b = \frac{n}{m}(y - pb)$, egală cu cea rămasă în prim (deoarece $y - pb = \frac{m}{n}(x - pa)$ din ipoteza problemei). Diferenţa $y - \frac{n}{my}$ e de diferenţa $a - \frac{n}{m}b$ în $\left(x - \frac{n}{m}y\right) : \left(a - \frac{n}{m}b\right)$ zile.

Putem formula probleme asemănătoare, cu condiţia de a alege datele încât să fim conduşi la operaţii cu numere naturale.

Probleme propuse.

1. Într-o tabără şcolară sunt 792 elevi, iar în alta 531. Din fiecare tab din 5 în 5 minute grupuri de câte 36 şi respectiv 23 elevi în drumeţii. minute în prima tabără se vor afla de 9/7 ori mai mulţi elevi decât într-a

2. În două coşuri se găsesc 405 şi respectiv 800 bomboane. În fiecare câte 15, respectiv 32 bomboane. După câte zile în coşul al doilea vor fi c multe bomboane decât în primul?

Bibliografie

1. Gh. Andrei şi colab. - *Admiterea 1999*, Ed. GIL, Zalău, 1999.

[1] Profesori, Col. Naţ. "I. M. Clain", Blaj

Concursul "Recreaţii Matematice"

Ediţia a III-a, Iaşi, 28 August 2003

Clasa a VII-a

1. Rezolvaţi în $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ecuaţia $\dfrac{a}{b+1} + \dfrac{b}{a+1} = 1$.

Alexandru Negrescu, Botoşani (RecMa

2. Un triunghi are două mediane perpendiculare, iar suma lungimil
stantă. Să se determine maximul ariei triunghiului.

Mihai Gavrilu

3. Fie XOY un unghi oarecare şi P un punct în interiorul lui. Se
punctele $A, B \in OX$ cu $A \in (OB)$ şi $C, D \in OY$ cu $C \in (OD)$ astfel încât
rile PAB şi PCD să fie echilaterale. Arătaţi că, dacă dreptele OP, AD
concurente, atunci P se află pe bisectoarea unghiului XOY.

Temistocle Bîrsan, Iaşi (RecMa

Clasa a VIII-a

1. Fie $n \in \mathbb{N}$ fixat. Arătaţi că există o infinitate de numere $x, y, z \in \mathbb{Z}$
$x^{2n} + y^{2n} + z^{2n} = x^{2n+1} + y^{2n+1} + z^{2n+1}$.

Lucian Tuţescu, Craiova (RecMa

2. Găsiţi întregii pozitivi n, x_1, x_2, $\ldots$, x_n astfel încât $x_1 + x_2 + \cdots +$
şi produsul $x_1 x_2 \ldots x_n$ să fie maxim.

Agnes Constantinescu,

3. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub. Cubul este pătat cu cafea pe ma
jumătate din suprafaţa lui totală. Arătaţi că există două puncte pe supraf
coliniare cu centrul cubului care nu sunt pătate cu cafea.

Valerica Benţa, Iaşi şi Mugur Roşca

Clasa a IX-a

1. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\dfrac{1}{2\sqrt{[x]^3}} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{[x+1]^3 \cdot [x]}} = \dfrac{2}{[x] \cdot [x+2]}$, un
partea întreagă a lui x.

Daniel Jinga, Piteşti (RecMa

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie care satisface

$$\left(n^2 + 3n + 3\right) f(n+2) - 2\left(n^2 + n - 1\right) f(n+1) + \left(n^2 - n + 1\right) f(n$$

pentru orice n natural. Ştiind că $f(0) = 0$ şi $f(1) = 1$, calculaţi $f(2003)$.

Andrei Ned

3. Fie pătratul $ABCD$, E mijlocul lui (AB), $M \in (CD)$, $N \in (AD)$
$BM \parallel EN$. Să se arate că MN este tangenta cercului $\mathcal{C}(S, r)$ înscris în p

Nicu M

Clasa a X-a

1. Fie $a, b \in (0,1) \cup (1, \infty)$ şi funcţia injectivă $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ astfel în
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(a^x) + f(b^x)$ este constantă. Să se arate că $ab = 1$

funcţii f care satisfac ipotezele problemei.

Dan Popescu, Suceava (RecMa

2. Să se afle locul geometric al imaginilor numărului complex $z =$

$\alpha \in (0, \pi)$.

Mihai Gavrilu

3. Un triunghi de arie S se proiectează pe trei plane perpendiculare două. Dacă ariile proiecţiilor sunt S_1, S_2, respectiv S_3, să se demo $S \leq S_1 + S_2 + S_3 < S\sqrt{3}$.

Gheorghe I

Clasa a XI-a

1. Fie D, M două matrice nesingulare de ordin n, D diagonală, iar M lară. Dacă $D = {}^tMDM$, să se arate că M este tot o matrice diagonală, pe diagonala principală.

Adrian Corduneanu, Iaşi (RecMa

2. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ două şiruri de numere naturale mai mari c arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - y_n}{y_n} = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p_{x_n} - p_{y_n}}{p_{y_n}} = 0$, unde p_n este al n-lea nu

Gabriel Mîr

3. În tetraedrul $ABCD$ se consideră notaţia $(ab) = m\,[\angle\,(ABC; AB$ punzătoare muchiei AB şi analoagele, corespunzătoare la celelalte muchii.

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos(cd) & \cos(bd) & \cos(bc) \\ \cos(cd) & -1 & \cos(ad) & \cos(ac) \\ \cos(bd) & \cos(ad) & -1 & \cos(ab) \\ \cos(bc) & \cos(ac) & \cos(ab) & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Silviu Boga

4. O pată de ulei curge pe un râu. La un moment dat ea intersecte unui fir de telegraf. Să se demonstreze că există un moment în care um împarte pata de ulei în două porţiuni de aceeaşi arie.

Vlad Marti

Clasa a IX-a (BARAJ)

1. Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică egalitatea

$$xf\left(x^3 + x + 1\right) + f\left(-x^3 + 3x^2 - 4x + 3\right) = x + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Silviu Boga

2. Se dau mulţimile: $A = \left\{x^2 + x \mid x \in \mathbb{Z}\right\}$, $B = \left\{x^3 + x \mid x \in\right.$ $= \left\{x^4 + x^3 + x^2 + x \mid x \in \mathbb{Z}\right\}$, $D = \left\{2x^4 \mid x \in \mathbb{Z}\right\}$. Determinaţi mulţim $B \cap D$.

Andrei Nedelcu, Iaşi (RecMa

Concursul interjudeţean "Octav Onicescu

Ediţia a VII-a, 31 oct. - 2 nov. 2003, Botoşani

Această ediţie a **Concursului de matematică "Octav Onicescu"** a cunc
ticipare numeroasă şi entuziastă, antrenând elevi din 5 judeţe: *Botoşani*, *Ia*
Vaslui şi *Vrancea.*

Ceea ce particularizează în mod deosebit acest concurs este faptul că se p
rezolvare aceleaşi subiecte pentru toţi participanţii de la clasa a IX-a până la cl
Subiectele propuse nu sunt axate pe materia studiată de fiecare elev la nivelul să
ci încearcă să pună în valoare abilităţile matematice pure ale concurenţilor.

Deschiderea festivă a concursului şi premierea s-au desfăşurat în Aula Ma
"A. T. Laurian" din Botoşani, iar alături de elevi şi profesori au participat şi
locale. De partea organizatorică s-a ocupat **I. S. J. Botoşani** şi **C. N. "A. T. I**

Sarcina elaborării subiectului de concurs a revenit, ca în fiecare an, dom
sori **Adrian Boţan** şi **Adrian Panaete**, iar misiunea corectării lucrărilor s
brilor catedrei de matematică de la C. N. "A. T. Laurian". Preşedintele com
prof. univ. dr. **Eugen Popa** de la Facultatea de Matematică, Universitatea "
din Iaşi.

Publicăm în continuare problemele propuse concurenţilor şi lista prem

1. Fie a_1, a_2, a_3, $\ldots$, a_{2003} numerele 1, 2, 3, $\ldots$, 2003 în altă ordin
că măcar două din numerele $|a_1 - 1|$, $|a_2 - 2|$, $\ldots$, $|a_{2003} - 2003|$ sunt eg

2. De pe o tablă de şah 7×7 scot un pătrat; arătaţi că pătratele răm

a) nu pot fi acoperite cu 24 de dominouri 1×2 dacă pătratul scos e A

b) pot fi acoperite cu 24 de dominouri dacă pătratul scos e D4 şi
acoperire cu număr minim de dominouri orizontale (justificare).

3. Dacă n este natural, găsiţi restul împărţirii lui 10^n prin 999 şi ar
număr natural divizibil cu 999 are măcar 3 cifre nenule. Câte numere cu c
cifre fiecare au fix 3 cifre nenule şi se divid cu 999?

4. Câte pătrate ale unei table de şah 340×121 sunt tăiate în interior
diagonalele tablei? Dar pentru o tablă 340×120?

5. Ali Baba şi cei 40 de hoţi stau în cerc în jurul focului şi vor să
mod egal 4100 de galbeni care iniţial se află împărţiţi la întâmplare la câ
ei (posibil la unul singur). Ali Baba bate din palme şi la comanda lui fie
41 dă un galben vecinului din stânga sa, dacă acesta are mai puţin dec
vecinul are egal sau mai mult nu primeşte nimic!). Dacă nu au realizat
Ali Baba bate din palme din nou etc. Justificaţi că după un timp sumele
(toţi 100 de galbeni).

Premiaţii sunt: *premiul I* - **Chirilă Cezar** (C. N. "M. Eminescu",
premiul II - **Istrate Carmen Maria** (C. N. "Unirea", Focşani), *pre*
Pachiţariu Marius (Colegiul Naţional Iaşi). Au fost acordate 21 menţi

[1] Selecţiuni din materialul trimis redacţiei de către elevul **Alexandru Negrescu** şi
Tomiţă, C. N. "A. T. Laurian", Botoşani

Concurs de admitere 2003, Iaşi

Facultatea de Informatică, Universitatea "Al. I. Cuza"

Algebră

I. 1. Se dă matricea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, unde $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ este inelul matricelo
de ordin 3 cu elemente reale, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Să se arate că $A^3 = I_3$ şi
relaţia $(A - I_3)\left(A^2 + A + I_3\right) = 0$.

2. Fie $\sigma \in S_3$ o permutare din grupul simetric de grad 3, astfel înc
(e notează permutarea identică). Demonstraţi că există $k \in \{1, 2, 3\}$ a
$\sigma(k) = k$.

3. Demonstraţi că polinomul $P = X^3 + \frac{1}{2}X + 1$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[$

II. 1. Fie G un grup cu n elemente, $n \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că în orice coloa
operaţiei lui G apar n elemente distincte.

2. Fie $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ inelul numerelor întregi. Determinaţi toate morfisme
$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

3. Fie $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ corpul numerelor complexe. Să se arate că $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de
$f(z) = \overline{z}$ este izomorfism de corpuri ($\overline{z}$ notează conjugatul numărului con

Analiză matematică

I. 1. Fie $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Demonstraţi că şirul $(H_r$
nemărginit.

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi mărginită. Demonstraţi că exi
astfel încât $f(x_0) = x_0$.

3. Fie $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x+1}$. Să se calculeze $f^{(n)}(0)$, un
iar $f^{(n)}$ notează derivata de ordin n a funcţiei f.

II. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ considerăm $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots +$

a) Reprezentaţi grafic funcţia $g : D \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f_3(x) - f_2(x)}{f_1(x)}$, u
domeniul maxim de definiţie al funcţiei g.

b) Arătaţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, ecuaţia $f_n(x) = 0$ are o unică so
u_n, în intervalul $[0, 1]$.

c) Demonstraţi că şirul $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este convergent.

d) Să se determine $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$.

Fac. de Electronică şi Telecomunicaţii, Univ. Tehnică "G

1. Rangul termenului din dezvoltarea $\left(\frac{\sqrt{a}}{3} + \frac{3}{\sqrt[3]{a}}\right)^{13}$ care îl conţine p

a) 8 *b*) 6 *c*) 3 *d*) 4 *e*) 9

2. Suma $\sum\limits_{k=1}^{n} \left(2^k + 3^k\right)/6^k$ este egală cu

a) $1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}$ *b*) $2 - \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}$ *c*) $\frac{3}{2} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2 \cdot 3^n}$ *d*) $\frac{1}{2^n} +$
e) $\frac{3}{2} - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2 \cdot 3^n}$

3. Se consideră inecuaţia $(m+1)\,e^{-2x} + 2\,(m+1)\,e^{-x} + m > 0$, x
$m \in \mathbb{R}$ este un parametru. Valorile lui m pentru care inecuaţia este verific
sunt

a) $(-\infty, 0]$ *b*) $[0, +\infty)$ *c*) $[-1, 0]$ *d*) $(0, 1)$ *e*) $(-\infty, -1)$

4. Mulţimea tuturor valorilor $m \in \mathbb{R}$ astfel ca sistemul

$$\begin{cases} mx + y - z = 0 \\ x + (m+1)\,y + z = 2 + m - m^2 \\ x - 2y - mz = -2 + 3m - m^2 \end{cases}$$

să fie compatibil este

a) $\{2\}$ *b*) $\{-2, -1, 2\}$ *c*) $\mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$ *d*) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ *e*) $\mathbb{R} \setminus \{-2, -$

5. Numărul complex z, care satisface $|z| + z = \dfrac{10}{2-i}$ este

a) $2 + \dfrac{3}{2}i$ *b*) $-2 + 5i$ *c*) $\dfrac{3}{2} - 2i$ *d*) $\dfrac{1}{2} + 3i$ *e*) $\dfrac{3}{2} + 2i$

6. Să se determine m astfel ca $l = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{(1 - \cos x)^m}$ să fie finit şi difer
Să se precizeze şi valoarea lui l.

a) $m = \dfrac{3}{4}, l = \dfrac{2}{3}$ *b*) $m = 3, l = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ *c*) $m = \dfrac{3}{2}, l = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ *d*) $m = \dfrac{\sqrt{3}}{2},$
e) $m = 2, l = \dfrac{1}{6}$

7. Mulţimea valorilor funcţiei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2 \ln x - 1}{x^2}$ este

a) $\left(-\infty, 1/e^2\right]$ *b*) $(0, \infty)$ *c*) $\mathbb{R}$ *d*) $(0, \sqrt{e})$ *e*) $\left[1/e^2, \infty\right)$

8. Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt rădăcinile ecuaţiei $x^n + 1 = 0$, atunci valo
$\dfrac{1}{1 - x_1} + \dfrac{1}{1 - x_2} + \cdots + \dfrac{1}{1 - x_n}$ este

a) $n/2$ *b*) n^2 *c*) n *d*) $n\,(n+1)$ *e*) $-n$

9. Să se calculeze $I = \displaystyle\int_{-1}^{2} \max\left(x - \frac{x^3}{3}, \operatorname{arctg} x\right) dx.$

a) $\operatorname{arctg} 2 + \ln 3$ *b*) $-\dfrac{5}{12} + 2 \operatorname{arctg} 2 - \dfrac{1}{2} \ln 5$ *c*) $\dfrac{5}{12} - 2 \operatorname{arctg} 3$
d) $\dfrac{5}{11} - 2 \operatorname{arctg} 2 + \ln 3$ *e*) $-\dfrac{5}{12} + \operatorname{arctg} 2$

10. Să se afle soluţia ecuaţiei $\arcsin \dfrac{1}{x-1} + \arcsin \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{\pi}{2}$.

a) $\sqrt{3 + \sqrt{5}}$ *b*) $-\sqrt{3 + \sqrt{5}}$ *c*) $\sqrt{2 + \sqrt{5}}$ *d*) $-\sqrt{2 + \sqrt{5}}$ *e*) $\sqrt{1 +$

Fac. de Automatică şi Calculatoare, Univ. Tehnică "Gh

1. Să se determine parametrul real m astfel încât ecuaţia $x^2 + 2mx + ($
să admită rădăcinile reale x_1 şi x_2 verificând $x_1 < 1 < x_2$.

a) $m \in \left(-\infty, \dfrac{1 - \sqrt{17}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1 + \sqrt{17}}{2}, \infty\right)$ *b*) $m \in \left(-\infty, -\dfrac{5}{3}\right)$ *c*) $m \in$
d) $m \in \emptyset$ *e*) $m \in \left(\dfrac{1 - \sqrt{17}}{2}, -\dfrac{3}{5}\right)$

2. Aflaţi numărul termenilor raţionali din dezvoltarea binomială $\left(\sqrt[3]{7}\right.$

$a)$ 1 $\quad b)$ 2 $\quad c)$ 3 $\quad d)$ 4 $\quad e)$ 5

3. Fie sistemul

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+ay+2az=b \\ a^2x+a^2y+2a^2z=b^2 \end{cases} \qquad a,b\in\mathbb{R},\ b\neq 0.$$

Care din următoarele afirmaţii este falsă?

$a)$ Dacă $a=0$, sistemul este incompatibil $\quad b)$ Dacă $a=b$, sistemul e tibil nedeterminat $\quad c)$ Există $a,b\in\mathbb{R}$, $b\neq 0$ astfel încât sistemul are so $d)$ Dacă $a\neq 0$ şi $a\neq b$, sistemul este incompatibil $\quad e)$ Dacă $a=1$ şi b sistemul este incompatibil

4. Fie $M=(-\infty,-1)\cup(-1,\infty)$ şi legea de compoziţie internă pe M $x\circ y=3ax+by+xy$, $\forall x,y\in M$, unde $a,b\in\mathbb{R}$, $b\neq 0$. Să se afle a şi b $(M,\circ)$ să fie grup abelian şi să se precizeze simetricul x' al unui elemen $x\in M$.

$a)$ $a=\dfrac{1}{3}, b=1, x'=\dfrac{-x}{x+1}$ $\quad b)$ $a=1, b=3, x'=\dfrac{x}{x+1}$ $\quad c)$ $a=\dfrac{1}{3}, b=1,$

$d)$ $a=1, b=\dfrac{1}{3}, x'=\dfrac{-x}{x+1}$ $\quad e)$ $a=\dfrac{1}{3}, b=1, x'=\dfrac{1}{x+1}$

5. Se dă şirul definit prin relaţia $x_{n+1}=x_n+(-a)^n$, $n\in\mathbb{N}^*$, x_1 $0<a<1$. Care din următoarele afirmaţii este adevărată:

$a)$ şirul este strict crescător cu limita $+\infty$ $\quad b)$ şirul este strict descr limita $-\infty$ $\quad c)$ şirul nu este monoton, dar are limita $\dfrac{-a}{a+1}$ $\quad d)$ şirul este st tor cu limita 1 $\quad e)$ şirul nu este monoton, deci nu are limită

6. Se dă $f:\mathbb{R}\setminus\{0,2,4,6\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{3}{x-4}+\dfrac{5}{x-6}+\pi$ punctelor în care graficul funcţiei intersectează axa Ox este

$a)$ 0 $\quad b)$ 1 $\quad c)$ 2 $\quad d)$ 3 $\quad e)$ 4

7. Fie ecuaţia diferenţială $y'+\dfrac{1}{x}y=6x$, $x>0$. Să se precizeze interva care $y(x)>0$, unde $y(x)$ este soluţia care satisface condiţia $y(1)=1$.

$a)$ $x\in(1,2)$ $\quad b)$ $x\in\left(\sqrt[3]{2},\infty\right)$ $\quad c)$ $x\in\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}},\infty\right)$ $\quad d)$ $x\in(2,3)$ $\quad e)$ x

8. Se dau triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ ce au centrele de greutate G şi vectorul $\overrightarrow{GG'}$ este egal cu

$a)$ $\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'})$ $\quad b)$ $\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'})$ $\quad c)$ $\dfrac{2}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{C}$ $\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{C'A'})$ $\quad d)$ $\dfrac{1}{6}(\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{CA'}+\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{CB'})$ $\quad e)$ $\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB'}+$

9. Să se determine mulţimea punctelor din planul complex care sun numerelor z care verifică ecuaţia $z^2-z|z|+|z|^2=0$.

$a)$ două drepte perpendiculare $\quad b)$ un cerc cu centrul în origine $\quad c)$ d paralele $\quad d)$ două semidrepte $\quad e)$ două cercuri concentrice

10. Numărul soluţiilor ecuaţiei $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-1}+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x+1}-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2-}$

$a)$ 1 $\quad b)$ 2 $\quad c)$ 3 $\quad d)$ 4 $\quad e)$ o infinitate

Soluţiile problemelor propuse în nr. 1 / 20

Clasele primare

P.44. *Un vecin al unui vecin al numărului* 81 *este egal cu un vecin al* *al numărului* 77. *Despre ce număr este vorba?*

(*Clasa I*) **Mihaela Rusu, e**

Soluţie. Acest număr trebuie să fie mai mare ca 77 şi mai mic decât 81 se află în secvenţa 77□□□81. Este vorba despre numărul 79.

P.45. *Adunând trei numere naturale* a, b, c *obţinem suma* 62. *Primul* *mai mare decât al treilea şi împreună au suma* 12. *Care sunt cele trei nu*

(*Clasa* a *II-a*) **Înv. Maria F**

Soluţie. Numărul $b = 62 - 12 = 50$. Perechea (a, c) poate fi: (12, (10, 2); (9, 3); (8, 4) sau (7, 5). Tripletul (a, b, c) poate lua valorile: (12, 50, 0 (10, 50, 2); (9, 50, 3); (8, 50, 4) sau (7, 50, 5).

P.46. *Mihai, Dan şi Petru practică fiecare un alt fel de sport şi anu* *fotbal sau volei. Mihai şi voleibalistul locuiesc în acelaşi bloc. Cel care joc* *cel care joacă fotbal l-au urmărit pe Petru la un meci. Ce sport practică f*

(*Clasa a II-a*) **Adina Dohotaru, e**

Soluţie. Din textul problemei se deduce că Petru nu joacă volei sau f el joacă tenis. Mihai şi voleibalistul locuiesc în acelaşi bloc. Aceasta în Mihai nu joacă volei. Soluţia problemei este: Petru joacă tenis, Mihai joa Dan joacă volei.

P.47. *Diferenţa a două numere este* 48. *Această diferenţă este cu* 22 *decât jumătatea unuia dintre ele. Determinaţi numerele.*

(*Clasa a III-a*) **Înv. Rodica Rotar**

Soluţie. Fie $a - b = 48$. Avem două cazuri: 1) $48 = b : 2 + 22$ de und $b = 52$ şi $a = 100$. 2) $48 = a : 2 + 22$ de unde obţinem $a = 52$ şi $b = 4$.

P.48. *Un agricultor împarte un teren în trei parcele. În fiecare an, fiec* *este cultivată numai cu una din culturile: grâu, porumb sau legume. În* *anul* 2003, *agricultorul se hotărăşte ca pe fiecare parcelă să fie altă cult* *ani consecutivi.*

a) Care este primul an după 2003 *în care se repetă culturile pe cele tr*

b) Se poate preciza care este ordinea culturilor pe cele trei parcele în a

(*Clasa a III-a*) **Andreea Surugiu, e**

Soluţie. Presupunem că în anul 2003 avem ordinea (grâu, legume, În anul 2004 putem avea (legume, porumb, grâu) sau (porumb, grâu, le anul 2005 putem avea (porumb, grâu, legume) sau (legume, porumb, grâu avem din nou ordinea (grâu, legume, porumb). Răspunsul la a) este anu Ordinea culturilor se mai repetă în 2009, 2012, 2015, 2018. Nu putem prec culturilor în anul 2019.

P.49. *La un moment dat, cerând unei persoane anul naşterii, aceasta* *"anul acesta împlinesc* 25 *ani, iar dacă aş scrie toate numerele începâ* *terminând cu anul naşterii şi apoi toate numerele începând cu* 1 *şi ter*

anul în care ne aflăm mi-ar trebui 13710 *cifre. În ce an ne aflam câ*
întrebarea?
(*Clasa a III-a*) **Prof. Cătălin - Cristian Bud**

Soluţie. Pentru scrierea numerelor de la $1 - 999$ sunt necesare 2889 cifr că anul naşterii nu poate fi format din trei cifre. Într-adevăr, $2 \cdot 2889 + 25 \cdot$ $n \leq 4$. Anul naşterii este de forma $\overline{abcd}$. Fie x numărul cifrelor pent numerelor de la 1 la $\overline{abcd}$. Transpunând în ecuaţie ceea ce a spus persoana $x + (x + 4 \cdot 25) = 13710$, cu soluţia $x = 6805$. Pentru scrierea numerelor la $\overline{abcd}$ sunt necesare $6805 - 2889 = 3916$ cifre, ceea ce înseamnă că de la sunt $3916 : 4 = 979$ numere. Înseamnă că anul $\overline{abcd}$ este 1978. Întrebarea în anul $1978 + 25 = 2003$.

P.50. *a*) *Câte numere trebuie adăugate şirului* $1, 2, 4, 5, 7, 8, \ldots, 97, 9$ *obţine toate numerele de la* 1 *la* 98*?*

b) *Efectuaţi* $1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 + \cdots + 97 + 98 - 2 \cdot (3 + 4 + 5 + \cdots$
(*Clasa a IV-a*) **Georgiana Ciobanu, e**

Soluţie. *a*) Lipsesc numerele: $3, 6, 9, \ldots 96$ care pot fi scrise: $3 \cdot 1$, $3 \cdot 2$ $3 \cdot 32$. Se observă că lipsesc 32 numere.

b) Expresia de calculat se poate scrie:

$$1 + 2 + (4 - 3) + (5 - 3) + (7 - 4) + (8 - 4) + \cdots + (97 - 34) + (98 -$$
$$= 1 + 2 + (1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 63 + 64) = 3 + 64 \cdot 65 : 2 = 3 + 2080 =$$

P.51. *Produsul a două numere naturale este* 913 368*. Unul din nume* *unităţilor şi cifra zecilor mai mare ca* 2 *şi mai mică decât* 8*. Dacă la a* *mărim cifra zecilor cu* 2 *şi micşorăm cifra unităţilor cu* 1*, obţinem un* *cu* 951 425*. Aflaţi cele două numere.*
(*Clasa a IV-a*) **Înv. Elena Zărn**

Soluţie. Fie a şi b numerele căutate. Obţinem

$$(a + 20 - 1) \cdot b = 951425 \Leftrightarrow ab + 19b = 951425 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 913368 + 19b = 951425 \Leftrightarrow b = 2003 \Rightarrow a = 913368 : 2003 = 45$$

P.52. *În trei cutii sunt* 212 *bile. Din prima cutie se scoate un număr* *a doua de* 2 *ori mai mult şi încă două bile, din a treia se scoate cât triplul* *de bile scos din a doua cutie. În fiecare cutie rămâne un număr de b* *numărul total al bilelor scos din cele trei cutii la un loc. Câte bile au fos* *cutie?*
(*Clasa a IV-a*) **Înv. Maria I**

Soluţie. Notăm cu p numărul bilelor scos din prima cutie. Rezultă c cutie rămân $9p + 8$ bile. Deducem că în toate cutiile au fost $36p + 32$ bil $36p + 32 = 212$, de unde $p = 5$. În cele trei cutii au fost 58, 65, respectiv

P.53. *Efectuând o singură cântărire, să se ia* 475 *g dintr-un kilogra* *utilizând două greutăţi, una de* 200 *g şi cealaltă de* 150 *g.*
(*Clasa a IV-a*) **Prof. Petru As**

Soluţie. Utilizăm o balanţă cu braţe egale. Distribuim kilogramu şi câte una din cele două greutăţi, pe cele două talere, până realizăm echilibru. Pe fiecare taler vom avea 675 g. Masa căutată este pe talerul află greutatea de 200 g: $675\,\mathrm{g} - 200\,\mathrm{g} = 475\,\mathrm{g}$ zahăr.

Clasa a V-a

V.36. *Fie n un număr impar, iar $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $n \in \mathbb{N}^*$ numere car la n dau câturi distincte şi resturi distincte. Arătaţi că valoarea minim $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ este multiplu de 12.*

Dragoş Ungureanu,

Soluţie. Conform ipotezei, avem: $a_1 = nc_1 + r_1$, $a_2 = nc_2 + r_2, \ldots, a_n$ unde $\{r_1, r_2, \ldots, r_n\} = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Astfel, suma

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n\,(c_1 + c_2 + \cdots + c_n) + \frac{n\,(n-1)}{2}$$

este minimă dacă $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\} = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, deci

$$S_{\min} = n\,\frac{n\,(n-1)}{2} + \frac{n\,(n-1)}{2} = \frac{n\,(n-1)\,(n+1)}{2}.$$

Cum n este impar, rezultă că $(n-1)\,(n+1) \,\vdots\, 8$, deci $S_{\min} \,\vdots\, 4$. Pe de deoarece n, $n-1$, $n+1$ sunt numere consecutive, rezultă că $S_{\min} \,\vdots\, 3$. Pr $S_{\min}$ este multiplu de 12.

V.37. *Comparaţi fracţiile $a = \dfrac{333331}{333334}$ şi $b = \dfrac{222221}{222223}$.*

Maria Cojo

Soluţie. Avem $\dfrac{1}{a} = 1 + \dfrac{3}{333331}$ şi $\dfrac{1}{b} = 1 + \dfrac{2}{222221}$. Cum $3 \cdot 222221 >$ rezultă că $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$, deci $b > a$.

V.38. *Să se arate că $2^a + 2^b + 2^c + 2^d + 2^e \neq 2003$, $\forall a, b, c, d, e \in \mathbb{N}$.*

Irina Ispas, stud

Soluţie. Presupunem că există cinci numere naturale $a \leq b \leq c \leq d$ încât

$$2^a + 2^b + 2^c + 2^d + 2^e = 2003.$$

Dacă $a \neq 0$, atunci termenul din stânga al egalităţii (1) este par şi atu contradicţie. Pentru $a = 0$, relaţia (1) devine: $2^b + 2^c + 2^d + 2^e = 2002$ $2^{10} = 1024$, rezultă că numai e ar putea avea, eventual, valoarea 10.

Dacă $e = 10$, atunci $2^b + 2^c + 2^d = 978$. În acest caz, dacă $b, c, d \leq$ $2^b + 2^c + 2^d \leq 3 \cdot 256 < 978$. Aşadar, $d = 9$ şi $2^b + 2^c = 466$, ceea ce nu e

Dacă toate numerele b, c, d, e sunt strict mai mici ca 10, se observă trei numere pot fi 9 (altfel avem $2^b + 2^c + 2^d + 2^e \geq 4 \cdot 512 > 2002$) şi cel trebuie să fie 9 (deoarece, în caz contrar, avem $2^b + 2^c + 2^d + 2^e < 2^9 + 2^9$ < 2002). Prin urmare, $c = d = e = 9$ şi atunci $2^b = 2002 - 3 \cdot 2^9 = 476$, a

V.39. *Să se determine numerele prime $p_1 < p_2 < p_3 < p_4$ astfel încâ $p_1 + p_2 + p_3 + p_4$, $p_3 - p_2$, $p_4 - p_3$ să fie, de asemenea, prime.*

Petru M

Soluţie. Deoarece $p_1 + p_2 + p_3 + p_4$ este un număr prim mai mare ca că el este impar şi atunci unul dintre numerele p_1, p_2, p_3, p_4 trebuie să fi $p_1 = 2$. Cum p_2, p_3 şi p_4 sunt impare, înseamnă că $p_3 - p_2$ şi $p_4 - p_3$ s având în vedere că sunt prime, rezultă că $p_3 - p_2 = p_4 - p_3 = 2$. De aic

că $p_3 = p_2 + 2$ şi $p_4 = p_2 + 4$. Se observă că $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$ şi p
o soluţie a problemei ($2 + 3 + 5 + 7 = 17$ este număr prim). Dacă $p_2 >$
$p_2 = 3k + 1$ sau $p_2 = 3k + 2$, $k \in \mathbb{N}^*$. În cazul $p_2 = 3k + 1$, avem $p_3 = 3$
nu este prim, iar în cazul $p_2 = 3k + 2$, avem $p_4 = 3k + 6$, care nu este prim
$p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$ este singura soluţie.

V.40. *Este posibilă o partiţionare a mulţimii $\{1, 2, \ldots, 12n + 9\}$ în 4*
mulţimi disjuncte, fiecare cu câte trei elemente, astfel încât în fiecare subm
element să fie suma celorlaltor două?

Titu Zvonaru, I

Soluţia I. Fie $\{a, b, c\}$ o mulţime astfel încât $a = b + c$. De aici,
elementele mulţimii $\{a, b, c\}$ sunt ori toate pare, ori două impare şi unul pa
pentru ca să fie posibilă o partiţie ca în problemă, trebuie ca mulţimea dată
un număr par de numere impare. Deoarece mulţimea dată are $6n+5$ nume
rezultă că partiţionarea nu este posibilă.

Soluţia II. Să presupunem că ar fi posibilă o partiţie în condiţiile impus
fiecare din cele $4n + 3$ submulţimi de trei elemente are suma elementelor e
număr par, deci suma elementelor mulţimii $\{1, 2, \ldots, 12n + 9\}$ ar trebui să
par. Cum, $1 + 2 + \cdots + 12n + 9 = \dfrac{(12n + 10)(12n + 9)}{2} = (6n + 5)(12n$
este un număr impar, rezultă că partiţionarea cerută nu este posibilă.

Clasa a VI-a

VI.36. *Fie $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$. Arătaţi că printre valorile naturale ale lui*
adevărată propoziţia $n^2 + k \,\vdots\, n + k$, există cel puţin trei pătrate perfecte.

Claudiu Ştefan I

Soluţie. Din $n^2 + k = n^2 - k^2 + k^2 + k = (n - k)(n + k) + k^2 + k$,
$n^2 + k \,\vdots\, n + k$ dacă şi numai dacă $k^2 + k \,\vdots\, n + k$. Cum $A = \{k, k + 1, k^2 + k\}$
putem lua $n + k$ din mulţimea A şi atunci obţinem $n \in \{0, 1, k^2\}$. Astfe
trei pătrate perfecte care verifică cerinţa problemei.

VI.37. *Numerele 1160, 1604 şi 2270 dau acelaşi rest la împărţirea pri*
împărţitorul n.

Cristian L

Soluţie. Conform ipotezei, avem: $1160 = nc_1 + r$, $1604 = nc_2 + r$, 2270
unde $r < n$ şi $r, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{N}$. Scăzând aceste egalităţi două câte două
$444 = n(c_2 - c_1)$, $666 = n(c_3 - c_2)$ şi $1110 = n(c_3 - c_1)$, deci n este divi
al numerelor 444, 666, 1110. Cum $(444, 666, 1110) = 222$ rezultă că $n \in$
$37, 74, 111, 222\}$, valori care verifică ipoteza problemei.

VI.38. *Demonstraţi că nu există numere naturale x, y, z direct propo*
trei numere naturale consecutive, astfel încât $x + y + z$ să fie număr prim

Alexandru Negrescu, elev,

Soluţie. Dacă presupunem contrariul, avem

$$\frac{x}{n} = \frac{y}{n+1} = \frac{z}{n+2} = \frac{x + y + z}{3n + 3}, \quad \text{cu } n \in \mathbb{N}^*.$$

De aici, obţinem că $3y = x + y + z$, deci $3 \mid x + y + z$, care împreună cu
$x + y + z$ este prim ne conduce la concluzia că $x + y + z = 3$ şi deci $y = 1$.

în relaţia (1), găsim $\frac{x}{n} = \frac{1}{n+1}$, adică $x = \frac{n}{n+1}$, care nu aparţine lui $\mathbb{N}$.

VI.39. *Radu şi Mihai joacă de mai multe ori un joc în urma căruia c primeşte a puncte, iar cel care pierde primeşte b puncte* ($a, b \in N^*$, $a >$ *scorul final este* $61 - 49$ *în favoarea lui Radu, iar Mihai a câştigat* 4 *par a şi b.*

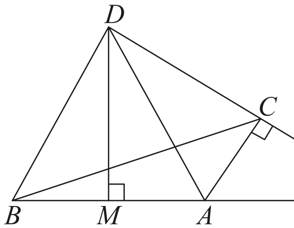
Adrian Zanc

Soluţie. Dacă notăm cu x numărul partidelor câştigate de Radu, avem $= 61$, $4a + xb = 49$, de unde obţinem că $(x+4)(a+b) = 110$. De aici vedere că $x + 4 \geq 9$ şi $a + b \geq 3$, rezultă că $x + 4 = 22$ şi $a + b = 5$ sau şi $a + b = 10$ sau $x + 4 = 10$ şi $a + b = 11$. În primul caz, avem $x = 18$, $xa + 4b$ este un număr par, diferit de 61, deci această situaţie nu convine. la fel, constatăm că nici al treilea caz nu convine. În al doilea caz, găsim x şi $b = 3$, care este soluţia problemei.

VI.40. *Fie* $\triangle ABC$ *cu* $m(\widehat{A}) = 120°$. *Perpendiculara în* C *pe* AC *in mediatoarea lui* $[AB]$ *în* D; *notăm* $\{E\} = CD \cap AB$. *Să se arate că* A *dacă şi numai dacă* $m(\widehat{BDE}) = 90°$ *şi* $BE = 2AB$.

Ioan Săcăleanu

Soluţie. Fie M mijlocul lui AB.



Presupunem că $AB = 2AC$. În acest caz rezultă că $AM = AC$, deci $\widehat{CDA} = \widehat{ADM} = \widehat{MDB} = \alpha$. Cum suma unghiurilor patrulaterului $DMAC$ este $360°$, obţinem că $\alpha = 30°$, deci $\widehat{BDE} = 90°$. Triunghiul DAB este isoscel şi are unghiul $\widehat{BDA}$ de $60°$, adică este echilateral şi, prin urmare, $DA = AB$. În plus $\widehat{DBA} = 60°$, deci $\widehat{AEC} = 30°$. Atunci $\triangle ACD \equiv \triangle ACE$ (C.U.), de unde $AD = AE$. În concluzie, $BA = AD =$ $BE = 2AB$.

Fie acum $\widehat{BDC} = 90°$ şi A mijlocul lui BE. Cum $AC \parallel BD$, rezultă că linie mijlocie în triunghiul BDE, deci $AC = \frac{1}{2}BD$. Din $\widehat{CAE} = 60°$ şi obţinem că $\widehat{DBA} = 60°$, deci triunghiul DBA este echilateral, ceea ce concluzia $BD = AB$. Aşadar, avem $AC = \frac{1}{2}AB$ sau $AB = 2AC$.

Clasa a VII-a

VII.36. *Să se arate că* $\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{\frac{2n-1}{n}} < 2n - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Cătălin Cali

Soluţia I (un grup de elevi de la **Colegiul Naţional** din Iaşi şi **A** **Negrescu**, elev, Botoşani)**.** Avem $\sqrt{\frac{k}{n}} < \frac{1 + k/n}{2} = \frac{k+n}{2n}$, $\forall k = \overline{1, 2}$ urmare,

$$\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{\frac{2n-1}{n}} < \frac{1}{2}\left[2n - 1 + \frac{1}{n}(1 + \cdots + (2n-1))\right.$$

$$= \frac{1}{2}\left[2n-1+\frac{1}{n}\cdot\frac{(2n-1)\,2n}{2}\right] = 2n-1.$$

Soluţia II. Membrul din stânga al inegalităţii date se poate scrie gr
menii de forma $\sqrt{\frac{n-k}{n}}$, $\sqrt{\frac{n+k}{n}}$, $k \in \{1,2,\ldots,n-1\}$. În acest fel, obţi
paranteze şi termenul $\sqrt{\frac{n}{n}} = 1$. Deoarece

$$\left(\sqrt{\frac{n-k}{n}}+\sqrt{\frac{n+k}{n}}\right)^2 = 2+2\sqrt{\frac{n-k}{n}}\sqrt{\frac{n+k}{n}} < 2+2\,\frac{\frac{n-k+n+}{n}}{2}$$

rezultă că $\sqrt{\frac{n-k}{n}}+\sqrt{\frac{n+k}{n}} < 2$, de unde concluzia.

VII.37. *Arătaţi că în baza de numeraţie* 7 *printre numerele ce se scri*
$0,1,2$ *există o infinitate care sunt pătrate perfecte şi o infinitate ce nu s*
perfecte. Aceste afirmaţii rămân valabile dacă se folosesc cifrele $3,5,6$*?*

Ruxandra Ioana Vâlcu, e

Soluţie. Se observă că $\underbrace{100\ldots01}_{n+1 \text{ cifre}}{}^2_{(7)} = (7^n+1)^2 = 7^{2n}+2\cdot 7^n+1 = \underbrace{10\ldots}_{2n}$
este pătrat perfect, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, iar $\underbrace{10\ldots020\ldots2}_{2n+1 \text{ cifre}}{}_{(7)} = \underbrace{10\ldots020\ldots1}_{2n+1 \text{ cifre}}{}_{(7)}+1$
trat perfect pentru nici un $n \in \mathbb{N}^*$, deoarece este cuprins între $(7^n+1)^2$ şi

Dacă $n \in \mathbb{N}$, atunci putem scrie $n = 7k+r$, unde $k, r \in \mathbb{N}$, $r < 7$.
$n^2 = 7k'+r'$, cu $r' \in \{0,1,2,4\}$, rezultă că nici un pătrat perfect scris în
se termină cu 3, 5 sau 6. Prin urmare, răspunsul la ultima întrebare este

VII.38. *Fie* a, b, c *cifre nenule,* $a \neq c$. *Să se arate că dacă* $\frac{\overline{abb.}}{\overline{cbb..}}$
(termenii primei fracţii conţinând câte 2002 *cifre* b*), atunci* $b = a+c$.

Mihaela Bucă

Soluţie. Dacă notăm $n = \underbrace{11\ldots1}_{2002 \text{ cifre}}$, avem succesiv:

$$\frac{a\cdot 10^{2003}+10nb+c}{c\cdot 10^{2003}+10nb+a} = \frac{10a+c}{10c+a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10^{2003}\left(a^2-c^2\right)+100nb\,(c-a)+10nb\,(a-c)+10\left(c^2-a^2\right) =$$

$$\Leftrightarrow 10^{2003}\,(a+c)-100nb+10nb-10\,(c+a) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a+c)\cdot 10\cdot\left(10^{2002}-1\right)-90bn = 0 \Leftrightarrow (a+c)\cdot 10\cdot 9n-90bn = 0 \Leftrightarrow$$

VII.39. *Dacă* $x < y < z$ *sunt lungimile laturilor unui triunghi d*
atunci $x^n+y^n \neq z^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

Dumitru N

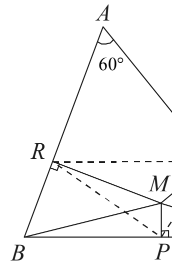
Soluţie. Din relaţia $z > y > x$, rezultă că $z^{n-2} > y^{n-2}$ şi $z^{n-2} > x^n$
ar fi $n \geq 3$. De aici, obţinem că, pentru orice $n \geq 3$, avem:

$$z^n = z^{n-2}\cdot z^2 = z^{n-2}\left(x^2+y^2\right) > x^{n-2}\cdot x^2+y^{n-2}\cdot y^2 = x^n+y$$

VII.40. *Fie* ABC *un triunghi ascuţitunghic cu* $m(\widehat{A}) = 60°$, *iar* $M \in$

astfel încât $m(\widehat{BMC}) = 150°$. *Notăm cu* P, Q, R *proiecţiile lui* M *pe* I
respectiv AB. *Să se arate că* $\triangle PQR$ *este dreptunghic.*

Constantin C



Soluţie. Deoarece patrulaterele $MPBR$ şi $MPCQ$ sunt inscriptibile, avem: $\widehat{MPR} = \widehat{RBM} = 90° - \widehat{RMB}$ şi $\widehat{MPQ} = \widehat{QCM} = 90° - \widehat{QMC}$. Astfel, obţinem:

$$\widehat{RPQ} = \widehat{MPR} + \widehat{MPQ} = 180° - (\widehat{RMB} + \widehat{QMC}) =$$
$$= 180° - (360° - \widehat{RMQ} - \widehat{BMC}) =$$
$$= 180° - (360° - 120° - 150°) = 180° - 90° = 90°.$$

Clasa a VIII-a

VIII.36. *Determinaţi cardinalul minim al unei mulţimi* B *pentru* c
defini funcţii $f : \mathbb{R} \to B$ *astfel încât* $f(-1) < 0$ *şi* $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$, ∀

Iulia Zanoschi, e

Soluţie. Vom demonstra că mulţimea B trebuie să aibă cel puţin tre
şi că există o funcţie care are codomeniul B format din trei elemente şi în
restul condiţiilor din enunţ.

Avem $f(1) = f((-1)(-1)) = f(-1) f(-1) > 0$. Pe de altă parte, c
$f(0 \cdot (-1)) = f(0) f(-1)$, rezultă că $f(0)[f(-1) - 1] = 0$, deci $f(0)$
urmare, $f(-1)$, $f(0)$ şi $f(1)$ sunt trei numere distincte, ceea ce înseamn
cel puţin trei elemente. În fine, se observă că $f : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$, de
$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$, verifică toate condiţiile cerute.

VIII.37. *If* $a, b, c \in (0, \infty)$ *prove the following inequalities:*
a) $(a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3) \geq 24$ *where* $abc = 1$;
b) $(a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3) \geq \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ *where* $ab + bc + ac = 1$.

Zdravko Starc, Vršac, Serbia and Mo

Soluţie. *a*) Se ştie că, oricare ar fi numerele a, b, c, are loc egalitatea

$$(a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3) = 3(a+b)(b+c)(c+a).$$

Având în vedere identitatea (1) şi inegalitatea mediilor, putem scrie:

$$(a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3) = 3(a+b)(b+c)(c+a) \geq$$
$$\geq 3 \cdot 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca} = 24abc = 24.$$

b) *Soluţia I* (**Irina Mustaţă**, elevă, Iaşi). Prin înmulţirea ultimelor d
teze din partea dreaptă a relaţiei (1) şi ţinând cont că $ab + bc + ca =$
$(a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3) = 3(a+b)(c^2+1)$; similar, avem şi $(a +$
$(a^3+b^3+c^3) = 3(b+c)(a^2+1)$ şi $(a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3) = 3(c +$
Prin adunarea acestora avem

$$(a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3) = (a+b)(c^2+1) + (b+c)(a^2+1) + (c+a$$
$$= 2(a+b+c) + ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) =$$
$$= 2(a+b+c) + (a+b+c)(ab+bc+ca) - 3abc, \text{ adică}$$

$$(a+b+c)^3-\left(a^3+b^3+c^3\right)=3(a+b+c)-3abc.$$

Observăm că din $3=3(ab+bc+ca)\leq(a+b+c)^2$ rezultă că $a+b+c$

din $1=ab+bc+ca\geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ deducem că $abc\leq\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$. Revenind la (2)

$(a+b+c)^3-\left(a^3+b^3+c^3\right)\geq 3\sqrt{3}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$.

Soluţia II (**Marius Pachiţariu**, elev, Iaşi). Cum $ab+ac+bc=1$, av

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right)=$$

$$=(a+b+c)\left[(a+b+c)^2-3(ab+ac+bc)\right]=(a+b+c)^3-3(a+$$

Astfel, inegalitatea de la punctul b) se va scrie $3(a+b+c)-3abc\geq\dfrac{8\sqrt{}}{3}$

$$a+b+c-abc\geq\frac{8\sqrt{3}}{9}.$$

Pentru a justifica inegalitatea (2), vom demonstra dubla inegalitate:

$$\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}\geq\sqrt[3]{abc},\quad\forall a,b,c>0.$$

Pentru prima parte a relaţiei (3), observăm că

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2\geq\frac{ab+bc+ca}{3}\Leftrightarrow(a+b+c)^2\geq 3(ab+ac+bc)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0,$$

evident adevărată. Pentru partea a doua, folosim inegalitatea mediilor:

$$\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}\geq\sqrt{\sqrt[3]{ab\cdot bc\cdot ca}}=\sqrt{\left(\sqrt[3]{abc}\right)^2}=\sqrt[3]{abc}.$$

Revenind la inegalitatea (2), avem:

$$a+b+c-abc\geq 3\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}-\left(\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}\right)^3=\frac{8\sqrt{3}}{9}$$

Soluţia III (dată de autor). Din inegalitatea lui Carlson:

$$\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}}\geq\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}},\quad\forall a,b,c>0$$

şi identitatea (1), rezultă că:

$$(a+b+c)^3-\left(a^3+b^3+c^3\right)=3(a+b)(b+c)(c+a)\geq$$

$$\geq 3\cdot 8\left(\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}\right)^3=3\cdot 8\cdot\frac{1}{3\sqrt{3}}=\frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

VIII.38. *Fie $n\in\mathbb{N}$ fixat. Arătaţi că există o infinitate de numere astfel încât $x^{2n}+y^{2n}+z^{2n}=x^{2n+1}+y^{2n+1}+z^{2n+1}$.*

Lucian Tuţescu

Soluţie. Dacă luăm $z = -y$, atunci din relaţia dată, obţinem:
$$2y^{2n} = x^{2n}(x-1).$$
O soluţie a acestei din urmă ecuaţii putem găsi alegând $x - 1 = 2a^{2n}$
Într-adevăr, în acest caz egalitatea (1) devine $2y^{2n} = \left(2a^{2n}+1\right)^{2n} \cdot 2a^{2n}$
găsim $y = \pm a\left(2a^{2n}+1\right)$. Deci, există o infinitate de numere cu propriet
$x = 1 + 2a^{2n}$, $y = a\left(2a^{2n}+1\right)$, $z = -a\left(2a^{2n}+1\right)$, $a \in \mathbb{Z}^*$.

VIII.39. *Fie $ABCD$ un patrulater strâmb cu $[AD] \equiv [BC]$. Să se co dreptele paralele d_1, d_2, d_3, d_4 astfel încât $A \in d_1$, $B \in d_2$, $C \in d_3$,* dist $(d_1, d_4) =$ dist (d_2, d_3).

Horia Mihail Teodorescu,

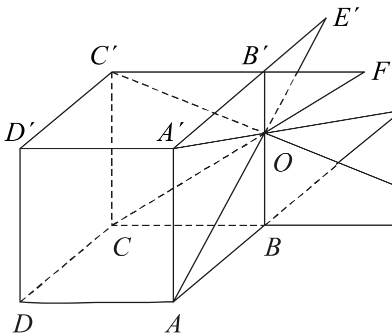
Soluţie. Fie d o dreaptă care face unghiuri egale cu AD şi BC (evid găsi o astfel de dreaptă). Dreptele d_1, d_2, d_3 şi d_4, duse prin A, B, C D şi paralele cu d, satisfac condiţiile problemei. Într-adevăr, dacă notăm picioarele perpendicularelor din A şi B pe d_4, respectiv d_3 avem că $\triangle AED$ (I. U.), deci $AE = BF$, adică dist $(d_1, d_4) =$ dist (d_2, d_3).

VIII.40. *Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub, iar $O \in (BB')$. Dreptele A intersectează (ABC) în E, respectiv F, iar AO şi CO intersectează $($ E', respectiv F'.*

a) Arătaţi că $EF \cdot E'F'$ nu depinde de poziţia lui O;

b) Arătaţi că $S_{BB'E'E} \geq S_{ABCD}$ şi determinaţi O pentru care se atinge

Monica Ned



Soluţie. a) Cum $(A'B'C') \parallel (ABC)$ şi $(EOF) \cap (A'B'C') = A'C'$, $(EOF) \cap (ABC) = EF$, rezultă că $EF \parallel A'C'$, deci $\triangle A'OC' \sim \triangle EOF$, de unde deducem că
$$\frac{EF}{A'C'} = \frac{EO}{OA'} = \frac{BO}{B'O}. \qquad (1)$$
Analog, putem demonstra că $\triangle AOC \sim \triangle E'OF'$, deci
$$\frac{E'F'}{AC} = \frac{E'O}{OA} = \frac{B'O}{OB}. \qquad (2)$$
Din (1) şi (2), obţinem $\dfrac{EF \cdot E'F'}{AC \cdot A'C'} = 1$, deci $EF \cdot E'F' = AC^2 = \text{const.}$

b) Fie $B'O = x$. Atunci, avem $\dfrac{B'E'}{a} = \dfrac{x}{a-x}$ şi $\dfrac{BE}{a} = \dfrac{a-x}{x}$. De aici
$$S_{BB'E'E} = \frac{BB' \cdot (B'E' + BE)}{2} = \frac{a^2}{2}\left(\frac{x}{a-x} + \frac{a-x}{x}\right) \geq \frac{a^2}{2} \cdot 2 = a^2 =$$
Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $\dfrac{x}{a-x} = 1$, adică $x = \dfrac{a}{2}$, ceea ce în O este mijlocul segmentului $[BB']$.

Clasa a IX-a

IX.36. *Determinaţi $x < 0 < y$ astfel încât $xy + \dfrac{y}{x} = y^3 - 5y + 2$.*

Cezar Lupu, elev, C

Soluţie. Ecuaţia dată este echivalentă cu:

$$x+\frac{1}{x}+5=y^2+\frac{2}{y}.$$

Cum $x<0$, rezultă că $x+\frac{1}{x}+5\leq -2+5=3$, cu egalitate numai pent
Pe de altă parte, având în vedere că $y>0$, putem scrie:

$$y^2+\frac{2}{y}=y^2+\frac{1}{y}+\frac{1}{y}\geq 3\sqrt[3]{y^2\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{y}}=3,$$

cu egalitate numai pentru $y=1$. Aşadar, egalitatea (1) este posibilă dac
dacă $x+\frac{1}{x}+5=3=y^2+\frac{2}{y}$, adică pentru $x=-1$ şi $y=1$.

IX.37. *Pentru $x\in[1,\infty)$, $n\in\mathbb{N}^*$, demonstraţi inegalitatea*

$$\left(x^{n+1}+1\right)\left(x^n-1\right)\geq 2nx^n\left(x-1\right).$$

Marius Pachiţariu,

Soluţia I. Inegalitatea dată se transformă succesiv astfel:

$$x^{2n+1}-x^{n+1}+x^n-1\geq 2nx^{n+1}-2nx^n\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^{2n+1}-1\geq(2n+1)\left(x^{n+1}-x^n\right)$$

Inegalitatea (1) este adevărată pentru $x=1$, iar pentru $x>1$ este echi
$\frac{x^{2n+1}-1}{x-1}\geq(2n+1)x^n$ sau $\frac{1+x+x^2+\cdots+x^{2n}}{2n+1}\geq x^n$, care rezultă d
tatea mediilor în felul următor:

$$\frac{1+x+x^2+\cdots+x^{2n}}{2n+1}\geq\sqrt[2n+1]{1\cdot x\cdot x^2\cdots x^{2n}}=x^{\frac{(2n+1)2n}{2(2n+1)}}=x^n$$

Soluţia II (Irina Mustaţă, elevă, Iaşi**).** Prin inducţie completă.

IX.38. *Să se arate că* $\frac{x^{n+1}}{y^n}+\frac{y^{n+1}}{z^n}+\frac{z^{n+1}}{x^n}\geq x+y+z$, $\forall x,y,z>0$,

Gigel Buth, S

Soluţie. În GM - 4/2002, p. 146, *L. Panaitopol* enunţă şi demonstreaz
următor:

Dacă $p\geq 1$ şi $a_i\geq 0$, $b_i>0$ pentru $i\in\overline{1,n}$, atunci

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^p}{b_i^{p-1}}\geq\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^p}{\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^{p-1}}.$$

Inegalitatea din enunţ rezultă imediat din aceasta.

IX.39. *Să se rezolve ecuaţia* $\frac{1}{2\sqrt{[x]^3}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{[x]\cdot[x+1]^3}}=\frac{2}{[x]\cdot[x+2]}$

Daniel Jing

Soluţie. Ecuaţia are sens dacă $[x]>0$, adică $[x]\geq 1$. Dacă face
$[x]=y\in\mathbb{N}^*$, ecuaţia dată devine:

$$\frac{1}{2y\sqrt{y}}+\frac{1}{3(y+1)\sqrt[3]{y}}=\frac{2}{y(y+2)}.$$

Deoarece $\sqrt{y} = \sqrt{y \cdot 1} \leq \dfrac{y+1}{2}$ (2) şi $\sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{y \cdot 1 \cdot 1} \leq \dfrac{y+2}{3}$ (3),
$\dfrac{1}{2y\sqrt{y}} + \dfrac{1}{3(y+1)\sqrt[3]{y}} \geq \dfrac{1}{y(y+1)} + \dfrac{1}{(y+1)(y+2)} = \dfrac{2}{y(y+2)}$. Prin urma
(1) are soluţie dacă şi numai dacă (2) şi (3) sunt simultan egalităţi, adică y
soluţia ecuaţiei date este $x \in [1, 2)$.

IX.40. *Fie $M \neq G$ în planul $\triangle ABC$ şi D, E, F mijloacele latur* *$[CA]$ şi respectiv $[AB]$. Considerăm punctele X, Y, Z astfel încât $\overrightarrow{XD}$* *$\overrightarrow{YE} = m\overrightarrow{YM}$, $\overrightarrow{ZF} = m\overrightarrow{ZM}$, $m \neq 1$.*

a) Dacă $m \neq \dfrac{3}{2}$, atunci AX, BY, CZ sunt concurente în S, cu $\overrightarrow{SG} =$

b) Dacă $m = \dfrac{3}{2}$, atunci AX, BY, CZ sunt paralele cu GM.

Virgil Nicula,

Soluţie. *a*) Avem:

$$\overrightarrow{SG} = \frac{2m}{3}\overrightarrow{SM} \Leftrightarrow \overrightarrow{SM} + \overrightarrow{MG} = \frac{2m}{3}\overrightarrow{SM} \Leftrightarrow \frac{2m-3}{3}\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{MG}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MS} = \frac{3}{3-2m}\overrightarrow{MG} \Leftrightarrow \overrightarrow{MS} = \frac{1}{3-2m}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right).$$

Fie punctul S' definit prin egalitatea $\overrightarrow{MS'} = \dfrac{1}{3-2m}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right)$
verifica, prin calcul, faptul că S' aparţine dreptelor AX, BY, CZ, deci a
fi concurente în $S' \equiv S$ şi atunci este adevărată şi egalitatea $\overrightarrow{SG} = \dfrac{2m}{3}$
demonstrăm, de exemplu, că $S' \in AX$. Pentru aceasta vom demonstra
$\overrightarrow{XS'}$ şi $\overrightarrow{S'A}$ sunt coliniari:

$$\overrightarrow{XS'} = \overrightarrow{MS'} - \overrightarrow{MX} = \frac{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}}{3-2m} - \frac{\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}}{2-2m} =$$

$$= \frac{(2-2m)\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}}{(3-2m)(2-2m)},$$

$$\overrightarrow{S'A} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MS'} = \overrightarrow{MA} - \frac{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}}{3-2m} = (2-2m)\overrightarrow{XS}$$

b) Pentru $m = \dfrac{3}{2}$, avem:

$$\overrightarrow{XD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{XM} \Leftrightarrow \overrightarrow{XM} + \overrightarrow{MD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{XM} \Leftrightarrow \overrightarrow{MX} = -2\overrightarrow{MD} = -(\overrightarrow{MB} +$$

şi atunci $\overrightarrow{XA} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MX} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$. Analog
$\overrightarrow{YB} = \overrightarrow{ZC} = 3\overrightarrow{MG}$, deci dreptele AX, BY, CZ sunt paralele.

Clasa a X-a

X.36. *Să se rezolve inecuaţia $a^{\log_b^2 x} + x^{\log_b x} \leq a + b$, unde $a, b \in (1,$*

Daniela Dodan, e

Soluţie. Din egalitatea $x = b^{\log_b x}$, $x > 0$, rezultă că $x^{\log_b x} = b^{\log}$
Deci, inecuaţia dată este echivalentă cu

$$a^{\log_b^2 x} + b^{\log_b^2 x} \leq a + b.$$

Dacă facem notaţia $\log_b^2 x = \alpha \geq 0$ şi avem în vedere obsevaţiile $\alpha > 1 \Rightarrow$ $> a + b$, $\alpha \leq 1 \Rightarrow a^\alpha + b^\alpha \leq a + b$, obţinem că inecuaţia (1) este echi $\log_b^2 x \leq 1$, deci $x \in \left[b^{-1}, b\right]$.

X.37. *Fie $a, b \in (0,1) \cup (1, \infty)$ şi funcţia injectivă $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(a^x) + f(b^x)$ este constantă. Să se arate c că există funcţii f care satisfac ipotezele problemei.*

Dan Popescu

Soluţie. Fie $g(x) = f(a^x) + f(b^x) = k$, $\forall x \in \mathbb{R}$, unde $k \in \mathbb{R}$. At $k = f(x) + f\left(b^{\log_a x}\right) = f\left(a^{\log_b x}\right) + f(x)$, $\forall x > 0$, de unde rezultă că f $= f\left(a^{\log_b x}\right)$. Cum f este funcţie injectivă, deducem că $b^{\log_a x} = a^{\log_b x}$, $\log_a^2 b = 1$, adică $a = b$ sau $ab = 1$. Dacă $a = b$, atunci $f(a^x) = \frac{g(x}{2}$ sau $f(x) = \frac{k}{2}$, $x > 0$, ceea ce contrazice injectivitatea funcţiei f. Pentr $f(x) = \log_a x$, se obţine $g(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

X.38. *Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ cu $a > b > c > d$. Să se arate că a, b, c, d sunt î aritmetică dacă şi numai dacă $(a-b)(b-c)(c-d) = \left(\frac{a-d}{3}\right)^3$.*

A. V. Mihai,

Soluţie. Dacă a, b, c, d sunt în progresie aritmetică de raţie r, atunci dată este echivalentă cu $r \cdot r \cdot r = \left(\frac{3r}{3}\right)^3$, care este, evident, adevărată.

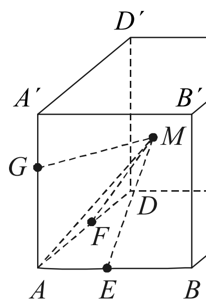
Reciproc, dacă are loc egalitatea din enunţ, atunci $a - d = 3\sqrt[3]{(a-b)(b}$ sau $(a-b) + (b-c) + (c-d) = 3\sqrt[3]{(a-b)(b-c)(c-d)}$, adică media ar numerelor $a-b$, $b-c$ şi $c-d$ este egală cu media lor geometrică. De aici $a - b = b - c = c - d$, deci a, b, c, d sunt în progresie aritmetică.

X.39. *Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic cu dimensiun $AD = b$, $AA' = c$. Dacă $M \in \operatorname{Int} A'B'C'D'$, notăm cu α, β, γ măsurile pe care AM le face cu AB, AD şi respectiv AA'. Să se arate că*

$$AM < a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma < AC'.$$

Cătălin Cal

Soluţie. Fie E, F şi G proiecţiile punctului M pe laturile AB, AD şi respectiv AA'. Astfel avem $\cos\alpha = \frac{AE}{AM}$, $\cos\beta = \frac{AF}{AM}$ şi $\cos\gamma = \frac{AG}{AM}$, de unde deducem că $AE\cos\alpha + AF\cos\beta + AG\cos\gamma =$ $= \frac{AE^2 + AF^2 + AG^2}{AM} = \frac{AM^2}{AM} = AM$. De aici, având în vedere că $AE < AB = a$, $AF < AD = b$, $AG < AA' = c$ şi $\cos\alpha > 0$, $\cos\beta > 0$, $\cos\gamma > 0$, rezultă că $AM < a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma$. Pentru a doua parte a inegalităţii vom folosi inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski-Schwarz şi identitatea $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$:



$$a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma < \sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma} =$$

X.40. *a) Pentru* $x, y, z \geq 0$, *demonstraţi inegalitatea*

$$\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{x+z}+\sqrt{y+z}\right) \cdot \sqrt{xy+xz+yz} \geq 3\sqrt{6xyz}.$$

b) Cu notaţiile uzuale, în orice triunghi are loc inegalitatea

$$\frac{R}{r}-2 \geq \frac{9}{4} \cdot \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2+\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}.$$

Marian Tetiv

Soluţie. *a*) Din relaţiile

$$\sqrt{x+y}+\sqrt{x+z}+\sqrt{y+z} \geq 3\sqrt[6]{(x+y)(x+z)(y+z)} \geq 3\sqrt[6]{8xyz} = 3\sqrt{}$$

$$\sqrt{xy+xz+yz} \geq \sqrt{3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}} = \sqrt{3}\sqrt[6]{x^2y^2z^2}$$

rezultă că

$$\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{x+z}+\sqrt{y+z}\right)\sqrt{xy+xz+yz} \geq 3\sqrt{6}\sqrt{xyz} = 3\sqrt{6x}$$

b) Vom aplica inegalitatea de la punctul *a*) pentru $x=p-a$, $y=p-b$ ş
Cu notaţiile făcute, avem:

$$x+y=c, \quad x+z=b, \quad y+z=a,$$

$$xy+xz+yz=\sum(p-a)(p-b)=\sum\left(p^2-(a+b)p+ab\right)=$$

$$=3p^2-4p^2+\sum ab=-p^2+\left(p^2+r^2+4Rr\right)=r^2+4Rr,$$

$$xyz=(p-a)(p-b)(p-c)=\frac{S^2}{p}=pr^2.$$

Astfel, inegalitatea de la *a*) devine $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\sqrt{r^2+4Rr} \geq 3$
$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2\left(r^2+4Rr\right) \geq 54pr^2$, deci $1+4\frac{R}{r} \geq \frac{27(a+b+c)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)}$

obţinem că

$$\frac{R}{r}-2 \geq \frac{27(a+b+c)}{4\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}-\frac{9}{4}=\frac{9}{4}\,\frac{3(a+b+c)-\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{}\right.}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}$$

$$=\frac{9}{4}\,\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2+\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}.$$

Clasa a XI-a

XI.36. *Fie* D, M *două matrice nesingulare de ordin* n, D *diagona*
triunghiulară. Dacă $D={}^tMDM$, *să se arate că* M *este tot o matrice*
având ± 1 *pe diagonala principală.*

Adrian Cordun

Soluţie.

Fie $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$, cu $\lambda_i \neq 0$, $i = \overline{1,n}$, $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots \\ 0 & m_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}$

$m_{ii} \neq 0$, $i = \overline{1,n}$ şi M_{ij} complementul algebric al lui m_{ij} în matricea M.
$d = \det M \neq 0$. Relaţia dată este echivalentă cu $DM^{-1} = {}^tMD$. Deoarec

$$DM^{-1} = \frac{1}{d} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{11} & M_{21} & \dots & M_{n1} \\ 0 & M_{22} & \dots & M_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & M_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{d} \begin{pmatrix} \lambda_1 M_{11} & \lambda_1 M_{21} & \dots & \lambda_1 M_{n1} \\ 0 & \lambda_2 M_{22} & \dots & \lambda_2 M_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n M_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{şi}$$

$${}^tMD = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & \dots & 0 \\ m_{12} & m_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{1n} & m_{2n} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 m_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_1 m_{12} & \lambda_2 m_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1 m_{1n} & \lambda_2 m_{2n} & \dots & \lambda_n m_{nn} \end{pmatrix}$$

rezultă că $m_{ij} = 0$, oricare ar fi $i < j$ şi $\dfrac{\lambda_i M_{ii}}{d} = \lambda_i m_{ii}$, $i = \overline{1,n}$. Di
pentru $i < j$, deducem că M este matrice diagonală şi atunci $\dfrac{M_{ii}}{d} = \dfrac{1}{m_{i}}$
deci avem $m_{ii}^2 = 1$, $i = \overline{1,n}$, adică $m_{ii} = \pm 1$, $i = \overline{1,n}$. Cazul în care M e
triunghiulară se tratează în mod analog.

XI.37. *Fie* $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ *astfel încât* $\det(A + \alpha\, {}^tA) = 0$, *unde* $\alpha \in \mathbb{R}\setminus$
Să se arate că $\det(A + {}^tA) = \dfrac{-2(\alpha - 1)^2}{\alpha} \det A$.

Marian Ionescu, Piteşti şi Lucian Tuţescu

Soluţie. $P(x) = \det(A + x\, {}^tA)$, $x \in \mathbb{C}^*$ este o funcţie polinominală
mai mic sau egal cu 3. Deoarece

$$P(x) = \det\left(x\left(\frac{1}{x}A + {}^tA\right)\right) = x^3 \det\left(\frac{1}{x}A + {}^tA\right) =$$

$$= x^3 \det\left(\frac{1}{x}\,{}^tA + A\right) = x^3 P\left(\frac{1}{x}\right), \quad \forall x \in \mathbb{C}^*,$$

rezultă că P este polinom reciproc, deci $P(x) = (\det A)\, x^3 + ax^2 + a$
Cum, prin ipoteză, $P(\alpha) = 0$, înseamnă că şi $P\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) = 0$. De aici
vedere că $P(-1) = 0$, obţinem că $P(x) = (\det A)(x - \alpha)\left(x - \dfrac{1}{\alpha}\right)(x + 1$

$$\det\left(A+{}^tA\right)=P\left(1\right)=\left(\det A\right)\left(1-\alpha\right)\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\cdot 2=\frac{-2\left(\alpha-1\right)^2}{\alpha}\det A.$$

XI.38. *Să se determine funcţiile continue $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ p* $f\left(f\left(x\right)\right)+2f\left(x\right)=3x,\ \forall x\geq 0.$

Mihail Bencz

Soluţie. Fie $f_n\left(x\right)=\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n \text{ ori}}\left(x\right)$, $x\geq 0$, $n\in\mathbb{N}^*$. Pentru or şi $x\geq 0$, avem că $f_k\left(x\right)+2f_{k-1}\left(x\right)=3f_{k-2}\left(x\right)$, $\forall k=\overline{2,n}$, de unde p deducem că $f_n\left(x\right)+3f_{n-1}\left(x\right)=f_1\left(x\right)+3x$, $\forall n\geq 3$, $\forall x\geq 0$. De aici, ob

$$f_3\left(x\right)+3f_2\left(x\right)=f_1\left(x\right)+3x,$$
$$f_4\left(x\right)+3f_3\left(x\right)=f_1\left(x\right)+3x,$$
$$f_5\left(x\right)+3f_4\left(x\right)=f_1\left(x\right)+3x,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f_n\left(x\right)+3f_{n-1}\left(x\right)=f_1\left(x\right)+3x,\ \forall n\geq 3,\ \forall x\geq 0.$$

Mai departe, înmulţind prima ecuaţie cu $\left(-\frac{1}{3}\right)^0$, a doua cu $\left(-\frac{1}{3}\right)^1$, $\left(-\frac{1}{3}\right)^2$ etc. şi apoi adunându-le, găsim relaţia

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-3}f_n\left(x\right)+3f_2\left(x\right)=\left(f_1\left(x\right)+3x\right)\cdot\left(1+\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+\right.$$

sau

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-3}f_n\left(x\right)+9x-6f\left(x\right)=\frac{3}{4}\left(f_1\left(x\right)+3x\right)\cdot\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right),\forall n\geq$$

Din ipoteză rezultă că $f\left(x\right)\leq\frac{3x}{2}$, $\forall x\geq 0$, şi atunci $f_n\left(x\right)\leq\left(\frac{3}{2}\right)^n x$, $\forall x\geq 0$. De aici, obţinem că $0\leq\frac{f_n\left(x\right)}{3^n}\leq\frac{x}{2^n}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\geq 0$, adică

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_n\left(x\right)}{3^n}=0,\quad\forall x\geq 0.$$

Din (1) şi (2), rezultă că $9x-6f\left(x\right)=\frac{3}{4}\left(f\left(x\right)+3x\right)$, $\forall x\geq 0$, deci $f\left(x\right)=$

Observaţie. Nu este nevoie de *continuitatea* funcţiei f.

XI.39. *Fie şirul $\left(y_n\right)_{n\geq 1}$ astfel încât şirul $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\right)_{n\geq 1}$ este converg* *$\left(x_n\right)_{n\geq 1}\subset\mathbb{R}_+^*$ are proprietatea că $x_n\leq x_{n+1}\left(1+x_ny_{n+1}\right)$, $\forall n\geq 1$, arăt* *$\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\geq 1}$ este convergent.*

Gheorghe Molea, Curtea

Soluţie. Deoarece $x_n>0,\forall n\geq 1$, rezultă că inegalitatea din enunţ e lentă cu $\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} \leq y_{n+1}$, $\forall n \geq 1$, de unde deducem că

$$\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_1} \leq y_2 + y_3 + \cdots + y_n = \sum_{i=1}^{n} y_i - y_1, \quad \forall n \geq 1.$$

Cum în partea dreaptă a ultimei relaţii este un şir convergent, deci mărgi
că şirul $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\geq 1}$ este şi el mărginit.

Pe de altă parte, relaţia $\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n-1}} \leq y_n = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i - \sum\limits_{i=1}^{n-1} y_i$ este echi
$\frac{1}{x_n} - \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \leq \frac{1}{x_{n-1}} - \sum\limits_{i=1}^{n-1} y_i$, $\forall n \geq 2$, sau, cu notaţia $z_n = \frac{1}{x_n} - \sum\limits_{i=1}^{n} y_i$,
$\forall n \geq 2$. De aici, având în vedere că şirul $(z_n)_{n\geq 1}$ este mărginit, fiind
două şiruri mărginite, rezultă că şirul $(z_n)_{n\geq 1}$ este convergent. Prin urma
termenul general $\frac{1}{x_n} = z_n + \sum\limits_{i=1}^{n} y_i$ este convergent.

XI.40. *Fie $x_0 \in [-1, 1]$; arătaţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, ecuaţia $3x - 4x$
o singură soluţie $x_{n+1} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Demonstraţi că şirurile $(x_n)_{n\geq 0}$ şi
sunt convergente şi calculaţi limitele lor.*

Marian Tetiv

Soluţie. Să arătăm, pentru început, că dacă $a \in [-1, 1]$, atunci ecuaţia 3
are o singură soluţie în intervalul $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Pentru aceasta, considera
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = 3x - 4x^3 - a$. Deoarece $f\left(-\frac{1}{2}\right)$
$= (-1 - a)(1 - a) \leq 0$ şi f este continuă, rezultă că f se anulează
dată în intervalul $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Cum $f'(x) = 3\left(1 - 4x^2\right) \geq 0$, $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$
că f este strict crescătoare pe $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, deci ecuaţia $f(x) = 0$ are o sing
în intervalul $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Mai putem observa că, dacă $\alpha = \arcsin a$, avem $3\sin\frac{\alpha}{3} - 4\sin^3\frac{\alpha}{3} =$
şi $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ implică $\sin\frac{\alpha}{3} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Deci $\sin\frac{\alpha}{3}$ este tocmai solu
tervalul $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ a ecuaţiei $3x - 4x^3 = a$. Astfel, am demonstrat că, p
$a \in [-1, 1]$, ecuaţia $3x - 4x^3 = a$ are o singură soluţie în intervalul $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right.$
$\sin\frac{\alpha}{3} = \sin\frac{\arcsin a}{3}$.

Revenind la problema noastră, rezultă, din cele arătate mai sus,
orice $n \in \mathbb{N}$, x_{n+1} este bine definit şi $x_{n+1} = \sin\frac{\arcsin x_n}{3}$. De aici,

$\arcsin x_{n+1} = \dfrac{\arcsin x_n}{3}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, deci $\arcsin x_n = \dfrac{\arcsin x_0}{3^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. A
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sin(\arcsin x_n) = 0$ şi

$$\lim_{n\to\infty} 3^n x_n = \lim_{n\to\infty} (3^n \arcsin x_n) \cdot \frac{x_n}{\arcsin x_n} = \arcsin x_0.$$

Clasa a XII-a

XII.36. *Să se determine $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ pentru care ecuaţia $x^2 = x + \widehat{1}$ unică în $\mathbb{Z}_n$; rezolvaţi ecuaţia în acest caz.*

Andrei Ned

Soluţie. Dacă $\widehat{a} \in \mathbb{Z}_n$ este soluţie a ecuaţiei $x^2 = x + \widehat{1}$, atunci şi soluţie a acestei ecuaţii $((\widehat{1} - \widehat{a})^2 = \widehat{1} - \widehat{2a} + \widehat{a}^2 = \widehat{1} - \widehat{2a} + \widehat{a} + \widehat{1} = (\widehat{1} - \widehat{a})$ ecuaţia trebuie să aibă soluţie unică, este necesar să avem $\widehat{a} = \widehat{1} - \widehat{a}$, sau Deoarece $\widehat{a}^2 = \widehat{a} + 1$ implică $\widehat{4}\widehat{a}^2 = \widehat{4}\widehat{a} + \widehat{4}$, sau $(\widehat{2a} - \widehat{1})^2 = \widehat{5}$, rezultă că aici, obţinem că $n = 5$ şi atunci ecuaţia dată are soluţia unică $\widehat{a} = \widehat{3}$.

XII.37. *Fie $(G, +)$ un subgrup al grupului $(\mathbb{R}, +)$. Să se determine crescătoare de la $(G, +)$ la $(\mathbb{R}, +)$.*

Dan Ştefan Marinescu şi Viorel Cornea, H

Soluţie. Dacă $G = \{0\}$, atunci $f : G \to \mathbb{R}$, $f(0) = 0$ este funcţia căut

Dacă $G \neq \{0\}$, atunci există $x_0 \in G \setminus \{0\}$ şi atunci dacă notăm a

observăm că $a \geq 0$. Folosind definiţia morfismului de grupuri se poate prin inducţie că $f(nx) = nf(x)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in G$. De aici, deducem că $= nf(x_0) = nax_0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Fie un element oarecare $y \in G$. Dacă $x_0 > 0$, avem succesiv:

$$\left[\frac{n(y+x_0)}{x_0}\right] \leq \frac{n(y+x_0)}{x_0} < \left[\frac{n(y+x_0)}{x_0}\right] + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \Rightarrow$$

$$f\left(\left[\frac{n(y+x_0)}{x_0}\right] x_0\right) \leq f(n(y+x_0)) \leq f\left(\left(\left[\frac{n(y+x_0)}{x_0}\right] + 1\right) x_0\right), \quad \forall$$

$$\left[\frac{n(y+x_0)}{x_0}\right] ax_0 \leq n(f(y) + ax_0) \leq \left(\left[\frac{n(y+x_0)}{x_0}\right] + 1\right) ax_0, \quad \forall n \in$$

$$\frac{1}{n}\left[\frac{n(y+x_0)}{x_0}\right] ax_0 \leq f(y) + ax_0 \leq \left(\frac{1}{n}\left[\frac{n(y+x_0)}{x_0}\right] + \frac{1}{n}\right) ax_0, \quad \forall n$$

de unde, trecând la limită pentru $n \to \infty$, obţinem

$$ax_0 \frac{y+x_0}{x_0} \leq f(y) + ax_0 \leq ax_0 \frac{y+x_0}{x_0},$$

deci $f(y) = ay$. Dacă $x_0 < 0$, se ajunge, în mod analog, la acelaşi rezulta

În sfârşit, observăm că funcţia $f : G \to \mathbb{R}$, $f(y) = ay$, $a > 0$, este u crescător de grupuri.

XII.38. *Determinaţi funcţiile derivabile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $f'(x)$ şi $g'(x) = f(x) - x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.*

Gheorghe I

Soluţie. Adunând cele două relaţii date, obţinem $(f+g)'(x) =$ (
$\forall x \in \mathbb{R}$, sau $\left(e^{-x}(f+g)\right)'(x) = 0$, de unde găsim $f(x)+g(x) = Ce^{x}$, $\forall x$
$C \in \mathbb{R}$ este o constantă arbitrară. Revenind la prima ecuaţie, avem

$$f'(x) = Ce^{x} + x - f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

sau $(e^{x} f(x))' = Ce^{2x} + xe^{x}, \forall x \in \mathbb{R}$, deci $f(x) = \dfrac{C}{2}e^{x} + k_1 e^{-x} + x -$
Analog, obţinem $g(x) = \dfrac{C}{2}e^{x} - k_2 e^{x} - x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Se verifică uşor
funcţii satisfac sistemul de ecuaţii dat.

XII.39. *Fie* $f, g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ *astfel încât* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x)$
$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \beta \in \mathbb{R}$. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{g(n)}}{x+\alpha} dx$, *unde* $\alpha \in [1,$

Adrian Sandovici, Piat

Soluţie. Din ipoteză rezultă că există n_0 astfel încât $f(n) > 0$ şi
$\forall n \geq n_0$. Pentru $n \geq n_0$, avem:

$$I_n = f(n)\int_0^1 \frac{x^{g(n)}dx}{x+\alpha} = \frac{f(n)}{g(n)}\int_0^1 \left(x^{g(n)}\right)' \frac{x}{x+\alpha}\, dx =$$

$$= \frac{f(n)}{g(n)}\left[\left.\frac{x^{g(n)+1}}{x+\alpha}\right|_0^1 - \alpha\int_0^1 \frac{x^{g(n)}}{(x+\alpha)^2}\, dx\right].$$

Deoarece

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{g(n)}dx}{(x+\alpha)^2} \leq \int_0^1 x^{g(n)}dx = \frac{1}{g(n)+1}$$

şi $\lim\limits_{n\to\infty} g(n) = \infty$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{g(n)}dx}{(x+\alpha)^2} = 0$. Aşadar, avem $\lim\limits_{n\to\infty} I$

XII.40. *Fie* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *o funcţie derivabilă cu derivata continuă*
$xf'(x) \geq f(x)$, $\forall x \in [0,1]$, *iar* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{f(x)}{x}$ *există şi este finită. Să se arate*

$$f(1) \geq \min\left(2\int_0^1 f(x)\,dx, \int_0^1 \frac{f(x)}{x}dx\right).$$

Marcel Chiriţă,

Soluţie. Din $xf'(x) \geq f(x)$, $\forall x \in [0,1]$ rezultă că $\displaystyle\int_0^1 xf'(x)\,dx \geq$
sau $\left. xf(x)\right|_0^1 - \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx \geq \int_0^1 f(x)\,dx$, deci $f(1) \geq 2\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ (1).

Deoarece $\lim\limits_{x\searrow 0} \dfrac{f(x)}{x}$ există şi este finită, rezultă că $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x) = 0$. Astf

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{x}dx = \lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_\varepsilon^1 \frac{f(x)}{x}\, dx \leq \lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_\varepsilon^1 f'(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\searrow 0}(f(1) - f(\varepsilon))$$

ceea ce, împreună cu relaţia (1), conduce la inegalitatea din enunţ.

Soluţiile problemelor pentru pregătirea concur
din nr. 1 / 2003

A. Nivel gimnazial

G36. *Fie $x, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât x divide $10^n - 1$, însă x nu divide 10^k*

$k < n$. Să se arate că x divide $10^m - 1$ dacă şi numai dacă $m \vdots n$.

N. N. Hâ

Soluţie. Dacă $m \vdots n$, atunci $m = 0$ sau există $q \in \mathbb{N}^*$ astfel încât m

primul caz, avem $10^m - 1 = 0 \vdots x$, iar în al doilea avem:

$$10^m - 1 = (10^n)^q - 1 = (10^n - 1)\left((10^n)^{q-1} + \cdots + 1\right) \vdots x.$$

Să presupunem acum că $10^m - 1 \vdots x$, $m \neq 0$ şi $m = nq + r$, cu $0 < r <$
şi din ipoteză, obţinem că $x \mid 10^m - 1 - (10^{nq} - 1) = 10^{nq+r} - 10^{nq} = 10^{n}$
Deoarece din $x \mid 10^n - 1$ rezultă că $(x, 10) = 1$, deci $(x, 10^{nq}) = 1$,
precedentă deducem că $x \mid 10^r - 1$, ceea ce contrazice ipoteza. Prin ur

$10^m - 1 \vdots x$, atunci $m \vdots n$.

G37. *$2n$ muzicieni $(n > 2)$ participă la un festival. La fiecare conce
dintre ei cântă iar ceilalţi ascultă. Să se determine numărul minim de con
încât fiecare muzician să-i asculte pe toţi ceilalţi.*

Titu Zvonaru,

Soluţie. Fie a_1, a_2, ..., a_{2n} cei $2n$ muzicieni. Dacă la un concert,
ei ascultă pe un coleg care cântă, spunem că are loc o "audiţie". As
concert la care cântă p muzicieni, există $p(2n - p)$ audiţii. Deoarece $\sqrt{p}$
$\leq \dfrac{p + 2n - p}{2} = n$, adică $p(2n - p) \leq n^2$, rezultă că numărul maxim de
loc atunci când n muzicieni cântă şi n ascultă.

Să presupunem că la primul concert cântă muzicienii a_1, a_2, ..., a_n
putea fi ascultat de a_2, a_3, ..., a_n, muzicianul a_1 trebuie să mai cânte la
în care să nu cânte a_2, a_3, ..., a_n, apoi a_2 trebuie să cânte într-un conc
nu cântă a_1, a_3, ..., a_n şi aşa mai departe. Deci, numărul minim de co
cel puţin $n + 1$. Să arătăm că acest număr este $n + 1$ indicând o aranj
$n+1$ concerte astfel încât să fie îndeplinită cerinţa problemei. Pentru acea
notaţiile:

$$A_k = \{a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{2n}\} - \{a_{n+k}\}, \quad B_k = \{a_1, a_2, \ldots a_n\} - \{a_k\},$$

şi repartizăm muzicienii astfel:

	Muzicieni care cântă	Muzicieni care ascultă
1)	a_1, a_2, ..., a_n	a_{n+1}, a_{n+2}, ..., a_{2n}
2)	a_1, A_1	B_1, a_{n+1}
3)	a_2, A_2	B_2, a_{n+2}
...	....	....
n)	a_{n-1}, A_{n-1}	B_{n-1}, a_{2n-1}
$n+1$)	a_n, A_n	B_n, a_{2n}

G38. *Mulţimea $A \subset \mathbb{Z}$ are cinci elemente. Adunând în toate modur*

câte trei elemente din mulţime, obţinem următoarele 10 *sume:* 3*,* 6*,* 8*,*
15*,* 16*,* 18*,* 20*. Determinaţi mulţimea A.* (*În legătură cu o problemă de c*
Iugoslavia.)

Gabriel I

Soluţie. Fie $A = \{a, b, c, d, e\}$ cu $a < b < c < d < e$ şi fie $S = a + b +$
Adunând cele 10 sume din enunţ obţinem 120. Deoarece în această su
element al mulţimii A apare exact de 6 ori, rezultă că $6S = 120$, dec
Prin urmare, adunând în toate modurile posibile câte două elemente di
obţinem următoarele 10 rezultate: 17 $(= 20 - 3)$, 14 $(= 20 - 6)$, 12, 10,
2, 0. Acum, din $a + b = 0$ şi $a + c = 2$, găsim $b = -a$ şi $c = 2 - a$.
$e + d = 17$ şi $e + c = 14$, deducem că $d = -e + 17$ şi $c = -e + 14$, deci e
Aşadar, putem scrie $A = \{a, -a, -a + 2, -a + 5, a + 12\}$. A treia sumă
crescătoare) este $a + d$ sau $b + c$ şi este egală cu 4. Cum $a + d = a - a + 5 =$
doar $b + c = -a - a + 2 = -2a + 2 = 4$, de unde rezultă că $a = -1$. În
avem $A = \{-1, 1, 3, 6, 11\}$.

G39. *Fie $x_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, unde $n \geq 2003$, astfel încât*

$$\begin{cases} x_1 - (n+1)\, x_2 + n x_3 \geq n - 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-2} - (n+1)\, x_{n-1} + n x_n \geq n - 1 \\ x_{n-1} - (n+1)\, x_n + n x_1 \geq n - 1 - n^2 \\ x_n - (n+1)\, x_1 + n x_2 \geq 2n - 1. \end{cases}$$

Dacă $x_1 = 1$, să se calculeze x_{2003}.

Romeo Ce

Soluţie. Cu notaţiile $y_k = x_k - k + 1$, $k = \overline{1, n}$, sistemul dat devine:

$$y_1 - (n+1)\, y_2 + n y_3 \geq 0,\ y_2 - (n+1)\, y_3 + n y_4 \geq 0,\ \ldots\ ,\ y_n - (n+1)\, y_1 + n y$$

de unde, prin adunare, obţinem $0 \geq 0$. Aşadar, toate inegalităţile din si
trebuie să fie egalităţi, adică

$$y_1 - y_2 = n\,(y_2 - y_3)\,,\quad y_2 - y_3 = n\,(y_3 - y_4)\,,\quad \ldots\quad ,\ y_n - y_1 = n\,(y_1 -$$

Înmulţind membru cu membru relaţiile din sistemul (2), obţinem

$$(y_1 - y_2)\,(y_2 - y_3) \cdot \ldots \cdot (y_{n-1} - y_n)\,(y_n - y_1) =$$
$$= n^n\,(y_1 - y_2)\,(y_2 - y_3) \cdot \ldots \cdot (y_{n-1} - y_n)\,(y_n - y_1)\,,$$

de unde rezultă că una din paranteze este zero şi atunci conform cu (2),
$= y_2 = \cdots = y_n$. Prin urmare, $1 = x_1 = x_2 - 1 = x_3 - 2 = \cdots = x_n -$
$x_{2003} = 2003$.

G40. *Comparaţi numerele reale a şi b, ştiind că $a^2 - 14a + b^2 + 6b +$*

Bogdan Răducanu,

Soluţia I (un grup de elevi de la **Colegiul Naţional** din Iaşi şi **A**
Negrescu, elev, Botoşani**).** Relaţia din enunţ se scrie $(a - 7)^2 + (b +$
Deducem că $|a - 7| \leq 5$ şi $|b + 3| \leq 5$, de unde $a \in [2, 12]$ şi $b \in [-$
$b \leq 2 \leq a$ şi cum $a \neq b$ (prin verificare directă), rezultă că $a > b$.

Soluţia II. Dacă facem notaţia $a = b + t$ problema revine la compara
zero. Înlocuind pe a în egalitatea dată, obţinem $2b^2 + 2b\,(t - 4) + t^2 - 14$
ecuaţie care are soluţie dacă şi numai dacă $\Delta = t^2 - 8t + 16 - 2t^2 + 2$

$= -t^2 + 20t - 50 \geq 0$. De aici, rezultă că $t \in \left[10 - 5\sqrt{2}, 10 + 5\sqrt{2}\right]$, c
Aşadar, avem $a > b$.

G41. *Dacă* $0 < x \leq y \leq z$, *să se arate că*

$$3 \leq \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x} \leq \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \leq \frac{x}{z} + 1 + \frac{z}{x} \leq \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2}.$$

Ovidiu Pop, S

Soluţie. Prima inegalitate rezultă din inegalitatea mediilor. Inegalita
este echivalentă cu $x^2y + z^2x + y^2z \leq x^2z + y^2x + z^2y$, sau $(y-x)(z-x)($
care este adevărată în virtutea ipotezei $0 < x \leq y \leq z$. Inegalitatea a
echivalentă cu $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} \leq \frac{x}{z} + 1$, adică $(z-y)(x-y) \leq 0$, care este ade
sfârşit, pentru a demonstra ultima inegalitate vom folosi din nou inegalit
ilor. Avem: $\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 \geq 2 \cdot \frac{x}{z}$, $\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 + \left(\frac{z}{x}\right)^2 \geq 3$, $\left(\frac{z}{x}\right)^2 +$
Adunând aceste relaţii, obţinem $2\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2}\right) \geq 2\left(\frac{x}{z} + 1 + \frac{z}{x}\right)$, q.e

G42. *Determinaţi* $a, b \in \mathbb{R}$, *dacă* $[x] + [x+a] = [bx]$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

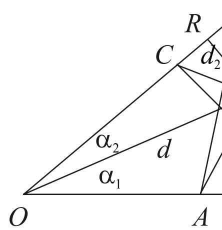
Gheorghe I

Soluţie. Luând $x = 0$ în egalitatea dată găsim $[a] = 0$, deci $a \in [0,1)$. D
$x - 1 + x + a - 1 < [x] + [x+a] = [bx] \leq bx$, $\forall x \in \mathbb{R}$, rezultă că $a - 2 \leq$
$\forall x \in \mathbb{R}$, deci $b = 2$. Aşadar, avem $[x] + [x+a] = [2x]$, $\forall x \in \mathbb{R}$, de un
în vedere că $[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x]$, deducem că $[x+a] = \left[x + \frac{1}{2}\right]$, $\forall x \in$
aici, luând $x = \frac{1}{2}$, obţinem $a + \frac{1}{2} \in [1,2)$, adică $a \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \cap [0,1)$
Dacă $a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, atunci putem alege un $x_0 \in \left(1 - a, \frac{1}{2}\right)$ şi avem $0 <$
$< 1 < x_0 + a$. În acest caz însă $\left[x_0 + \frac{1}{2}\right] = 0$, iar $[x_0 + a] \geq 1$, deci rela
este valabilă. Prin urmare, avem $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$, valori care verifică egalita

G43. *Fie* $\widehat{xOy}$ *un unghi oarecare şi* P *un punct în interiorul său. Se*
punctele $A, B \in [Ox$ *cu* $A \in (OB)$ *şi* $C, D \in [Oy$ *cu* $C \in (OD)$ *astfel încât*
rile PAB *şi* PCD *să fie echilaterale. Arătaţi că dreptele* OP, AD *ş*
concurente dacă şi numai dacă P *se află pe bisectoarea unghiului dat.*

Temistocle Bî

Soluţie. Fie $OP \cap BD = \{M\}$, $PR \perp CD$, $PQ \perp AB$ $(R \in CD, Q \in AB)$ şi $PQ = d_1$, $PR = d_2$, $OP = d$. Avem:



$$\frac{MB}{MD} = \frac{OB \sin\alpha_1}{OD \sin\alpha_2} = \frac{OB\, d_1}{OD\, d_2}\,, \quad OQ = \sqrt{d^2 - d_1^2}\,,$$

$$OA = OQ - AQ = \sqrt{d^2 - d_1^2} - d_1/\sqrt{3},$$

$$OB = OQ + QB = \sqrt{d^2 - d_1^2} + d_1/\sqrt{3},$$

$$OR = \sqrt{d^2 - d_1^2}, \quad OC = \sqrt{d^2 - d_2^2} - d_2/\sqrt{3}, \quad OD = \sqrt{d^2 - d_2^2} + d$$

Cu aceste observaţii, putem scrie succesiv: OP, AD şi BC sunt concuren

$$\frac{MB}{MD} \cdot \frac{CD}{CO} \cdot \frac{AO}{AB} = 1 \Leftrightarrow \frac{OB \cdot d_1}{OD \cdot d_2} \cdot \frac{2d_2/\sqrt{3}}{OC} \cdot \frac{OA}{2d_1/\sqrt{3}} = 1 \Leftrightarrow OA \cdot OB = O$$

$$\left(\sqrt{d^2 - d_1^2} - d_1/\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{d^2 - d_1^2} + d_1/\sqrt{3}\right) = \left(\sqrt{d^2 - d_2^2} - d_2/\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{d^2 - d_2^2}\right.$$

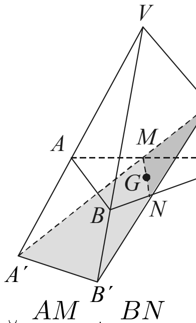
$$\Leftrightarrow d^2 - d_1^2 - d_1^2/3 = d^2 - d_2^2 - d_2^2/3 \Leftrightarrow d_1 = d_2 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2.$$

G44. *Fie $VABC$ o piramidă, iar G centrul de greutate al $\triangle ABC$ ce trece prin G taie dreptele VA, VB, VC în A', B' şi respectiv C'. Să*

$$\frac{VA}{VA'} + \frac{VB}{VB'} + \frac{VC}{VC'} = 3.$$

Constantin C

Soluţie. Fie $\{N\} = B'C' \cap BC$ şi $\{M\} = A'C' \cap AC$. Aplicând teorema lui Menelaus în triunghiurile VAC şi VBC, obţinem: $\frac{A'A}{A'V} \cdot \frac{C'V}{C'C} \cdot \frac{MC}{MA} = 1$ şi $\frac{B'B}{B'V} \cdot \frac{C'V}{C'C} \cdot \frac{NC}{NB} = 1$, de unde rezultă că



$$\frac{A'A}{VA'} + \frac{B'B}{VB'} = \frac{CC'}{VC'}\left(\frac{AM}{MC} + \frac{NB}{NC}\right) = \frac{CC'}{VC'} \text{ sau}$$

$$\frac{VA' - VA}{VA'} + \frac{VB' - VB}{VB'} = \frac{VC - VC'}{VC'} \text{ sau}$$

$\frac{VA}{VA'} + \frac{VB}{VB'} + \frac{VC}{VC'} = 3$. (Am folosit că $G \in MN$ implică $\frac{AM}{MC} + \frac{BN}{NC} =$

G45. *Fie $SABC$ un tetraedru în care $\triangle ABC$ nu este echilateral, ile $[SA], [SB], [SC]$ nu sunt toate congruente. Demonstraţi că există ş $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ pe dreptele SA, SB, SC, BC, AC şi respectiv AB a trulaterele $A_1B_1A_2B_2$, $B_1C_1B_2C_2$ şi $A_1C_1A_2C_2$ să fie trapeze isoscele (A_1 $A_1C_1 \| A_2C_2$, $B_1C_1 \| B_2C_2$) dacă şi numai dacă*

$$SA^2\left(AB^2 - AC^2\right) + SB^2\left(BC^2 - BA^2\right) + SC^2\left(CA^2 - CB^2\right) =$$

Daly Marciuc, S

Soluţie. Să presupunem că $A_1B_1A_2B_2$, $B_1C_1B_2C_2$ şi $A_1C_1A_2C_2$ su isoscele în modul indicat. Din $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ rezultă că $B_2A_2 \parallel AB$ şi ap rezultă că $B_2C_2 \parallel BC$ şi $A_2C_2 \parallel AC$. De aici, deducem că $AB_2A_2C_2$ şi sunt paralelograme, deci C_2 este mijlocul lui AB. Analog, obţinem că B_2 mijloacele laturilor AC şi BC.

Din $A_1B_1 \parallel AB$, $A_1C_1 \parallel AC$ şi $B_1C_1 \parallel BC$ rezultă că

$$\frac{A_1A}{SA} = \frac{B_1B}{SB} = \frac{C_1C}{SC} = k.$$

Notând $BC = a$, $AC = b$ şi $AB = c$, avem: $A_1B_2^2 = A_2B_1^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow k^2SA^2 + \frac{b^2}{4} - k \cdot \frac{SA^2 + b^2 - SC^2}{2} = k^2SB^2 + \frac{a^2}{4} - k \cdot \frac{SB^2 + a^2 - S}{2}$$

$$A_1B_2^2 = A_2B_1^2 \Leftrightarrow 2k\left(SB^2 - SA^2\right) = a^2 - b^2.$$

În mod analog, găsim echivalenţa:

$$B_1C_2^2 = C_1B_2^2 \Leftrightarrow 2k\left(SB^2 - SC^2\right) = c^2 - b^2.$$

În fine, din (2) şi (3) rezultă că

$$SA^2\left(c^2-b^2\right) + SB^2\left(a^2-c^2\right) + SC^2\left(b^2-a^2\right) = 0.$$

Reciproc, relaţia (4) poate fi scrisă astfel:

$$\frac{a^2-b^2}{2\left(SB^2-SA^2\right)} = \frac{c^2-b^2}{2\left(SB^2-SC^2\right)} \overset{\text{not}}{=} k.$$

Alegem A_1, B_1, C_1 pe SA, SB, SC astfel încât să avem relaţia (1). În ac
(5) rezultă că $A_1B_1A_2B_2$ şi $B_1C_1B_2C_2$ sunt trapeze isoscele, unde A_2, B_2
mijloacele laturilor BC, AC şi AB ($A_1B_1 \parallel AB \parallel A_2B_2$ etc.). Dacă A_1
$B_1C_1B_2C_2$ sunt trapeze isoscele înseamnă că $A_1A_2 = B_1B_2$ şi $B_1B_2 =$
$A_1A_2 = C_1C_2$, adică şi $A_1C_1A_2C_2$ este isoscel.

B. Nivel liceal

L36. *Fie $\triangle ABC$ şi $\mathcal{M}$ triunghiul său median. Dacă P este un pu
interiorul sau pe laturile lui $\mathcal{M}$, iar A', B', C' sunt intersecţiile dreptelor
CP cu laturile BC, CA şi respectiv AB, atunci* $\frac{1}{4} < \frac{AP \cdot BP \cdot CP}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} \leq$

Marian Ionesc

Soluţie. Notăm $S_1 = \sigma(PBC)$, $S_2 = \sigma(PCA)$, $S_3 = \sigma(PAB)$ şi $S =$
Se stabilesc cu uşurinţă relaţia $\frac{AP}{AA'} = \frac{S_2+S_3}{S}$ şi analoagele şi se deduce
Gergonne $\frac{AP}{AA'} + \frac{BP}{BB'} + \frac{CP}{CC'} = 2$. Cu inegalitatea mediilor
$2 \geq 3\sqrt[3]{\frac{AP}{AA'} \cdot \frac{BP}{BB'} \cdot \frac{CP}{CC'}}$, de unde deducem a doua parte a dublei ineg
enunţ. Pentru prima parte, observăm mai întâi că, dacă P se află în interi
laturile triunghiului $\mathcal{M}$, au loc inegalităţile $S_2+S_3 \geq S_1$, $S_3+S_1 \geq S_2$ şi S_1
Notând $x = \frac{1}{2}(S_2+S_3-S_1)$, $y = \frac{1}{2}(S_3+S_1-S_2)$, $z = \frac{1}{2}(S_1$
$t = x+y+z$ şi observând că $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ (numai unul poa
$t > 0$, avem:

$$\frac{AP}{AA'} \cdot \frac{BP}{BB'} \cdot \frac{CP}{CC'} = \frac{(S_2+S_3)(S_3+S_1)(S_1+S_2)}{S^3} =$$

$$= \frac{(t+x)(t+y)(t+z)}{8t^3} > \frac{t^3+t^2(x+y+z)}{8t^3} = \frac{2t}{8t}$$

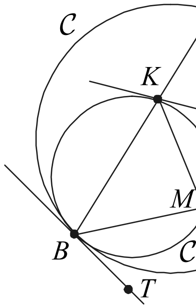
Notă. Soluţie corectă s-a primit de la **Marius Pachiţariu**, elev, Iaşi
Notă. Această problemă apare în articolul *"About elementary inequal
angle"* (**M. Dincă**, **M. Bencze**) din revista *Octogon Math. Magazine*
no. 1B, p. 472. Aici nu se cere ca punctul P să fie în interiorul sau pe l
unghiului $\mathcal{M}$, dar soluţia prezentată este incorectă.

L37. *Fie cercurile $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ şi $\mathcal{C}$ astfel încât $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ sunt tangente
D, iar cercurile $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ sunt tangente interior lui $\mathcal{C}$ în B, respectiv C.*

comună interioară cercurilor $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ taie cercul $\mathcal{C}$ în A şi A_1, dreapta
în K, iar AC taie $\mathcal{C}_2$ în L. Să se arate că $\dfrac{1}{DA}+\dfrac{1}{DA_1}=\dfrac{2}{KL}$.

Neculai Roman, Mirc

Soluţie. Fie $\{M\}=\mathcal{C}_1\cap BC$, $\{N\}=\mathcal{C}_2\cap BC$ şi T un punct pe tangenta în B la cercurile $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$.



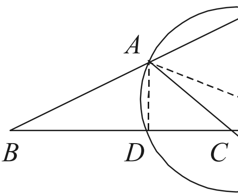
Arătăm că dreapta KL este tangenta comună exterioară cercurilor $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$. Într-adevăr, avem $m(\widehat{MKB})=m(\widehat{MBT})=m(\widehat{CBT})=m(\widehat{CAB})$, deci $MK\parallel CA$. Ca urmare, $\widehat{MKL}\equiv\widehat{KLA}$. Cum $\widehat{KLA}\equiv\widehat{CBA}$, deoarece $\triangle KLA\sim\triangle CBA$ (fapt ce decurge din $AK\cdot AB=AL\cdot AC=AD^2$), rezultă că $\widehat{MKL}\equiv\widehat{CBA}$. Deci $\widehat{MKL}\equiv\widehat{MBA}$, adică KL este tangentă la cercul $\mathcal{C}_1$. Analog se arată că drepta KL este tangentă la $\mathcal{C}_2$.

Aplicăm teorema lui Casey pentru cercurile $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, cercurile degene
tangente interior la $\mathcal{C}$ şi obţinem relaţia $AD\cdot A_1D+AD\cdot A_1D=AA$
$\dfrac{2}{KL}=\dfrac{AA_1}{AD\cdot A_1D}$, adică $\dfrac{2}{KL}=\dfrac{1}{AD}+\dfrac{1}{A_1D}$.

L38. *Fie $\triangle ABC$ şi punctele $D,D'\in BC$ conjugate armonic în rap*
furile B şi C. Cercul circumscris $\triangle ADD'$ intersectează AB în M şi
Arătaţi că, dacă $MN\perp BC$, atunci $[AD$ şi $[AD'$ sunt bisectoarele u
(interioară şi exterioară) sau $m(\widehat{A})=90^\circ$.

Temistocle Bî

Soluţie. Avem $MN\perp DD'\Leftrightarrow MD^2+ND'^2=MD'^2+ND^2$ (1). D
$\dfrac{DB}{DC}=\dfrac{D'B}{D'C}=\alpha$, atunci $BD=\dfrac{\alpha a}{1+\alpha}$, $CD=$ $=\dfrac{a}{1+\alpha}$, $BD'=\dfrac{\alpha a}{\alpha-1}$, $CD'=\dfrac{a}{\alpha-1}$ (2). Exprimând puterea punctelor B şi C faţă de cercul (ADD'), vom obţine relaţiile: $c\cdot BM=BD\cdot BD'$ şi $b\cdot CN=CD\cdot CD'$ sau



$$BM=\frac{\alpha^2a^2}{c\left(\alpha^2-1\right)}\quad\text{şi}\quad CN=\frac{a^2}{b\left(\alpha^2-1\right)}.\qquad(3)$$

Utilizând teorema cosinusului în $\triangle BMD$, $\triangle CND'$, $\triangle BMD'$ şi $\triangle CND$,

$$\left(BM^2+BD^2-2BM\cdot BD\cos B\right)+\left(CN^2+CD'^2-2CN\cdot CD'\cos\right.$$
$$=\left(BM^2+BD'^2-2BM\cdot BD'\cos B\right)+\left(CN^2+CD^2+2CN\cdot CD\right.$$

şi, ţinând seama de (2) şi (3), găsim $-4\alpha\left(\alpha^2-1\right)a^2+\dfrac{4\alpha^3a^3}{c}\cos B-\dfrac{4a^3\alpha}{b}$
Din nou utilizând teorema cosinusului, obţinem

$$-\left(\alpha^2-1\right)2b^2c^2+\alpha^2b^2\left(a^2+c^2-b^2\right)-c^2\left(a^2+b^2-c^2\right)=0\quad\text{s}$$
$$b^2\left(a^2-b^2-c^2\right)\alpha^2-c^2\left(a^2-b^2-c^2\right)=0,$$

ultima echivalentă cu $\alpha=\pm\dfrac{c}{b}$ sau $a^2=b^2+c^2$, de unde rezultă concluzia

L39. *Determinaţi toate numerele naturale nenule n pentru care* $\frac{an\,(a}{p\,(p}$ *pătrat perfect, unde $a, p \in \mathbb{N}^*$.*

Mihai Ha

Soluţie. Fie $\frac{a^2n^2+2an}{p\,(p+1)} = y^2$, $y \in \mathbb{N}^*$. Avem $(an+1)^2 - p\,(p+1)$ unde, cu $x = an+1$, obţinem ecuaţia lui Pell: $x^2 - p\,(p+1)\,y^2 = 1$, care fundamentală $(x_0, y_0) = (2p+1, 2)$ şi soluţia generală

$$x_k = \frac{1}{2}\left[\left(x_0 + y_0\sqrt{p\,(p+1)}\right)^k + \left(x_0 - y_0\sqrt{p\,(p+1)}\right)^k\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(2p+1+2\sqrt{p\,(p+1)}\right)^k + \left(2p+1-2\sqrt{p\,(p+1)}\right)^k\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{p+1}+\sqrt{p}\right)^{2k} + \left(\sqrt{p+1}-\sqrt{p}\right)^{2k}\right],$$

$$y_k = \frac{1}{2\sqrt{p\,(p+1)}}\left[\left(x_0 + y_0\sqrt{p\,(p+1)}\right)^k - \left(x_0 - y_0\sqrt{p\,(p+1)}\right)^k\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{p\,(p+1)}}\left[\left(\sqrt{p+1}+\sqrt{p}\right)^{2k} - \left(\sqrt{p+1}-\sqrt{p}\right)^{2k}\right].$$

Prin urmare, avem:

$$n_k = \frac{1}{2a}\left[\left(\sqrt{p+1}+\sqrt{p}\right)^{2k} + \left(\sqrt{p+1}-\sqrt{p}\right)^{2k} - 2\right]$$

care este soluţie dacă $2a \mid \left[\left(\sqrt{p+1}+\sqrt{p}\right)^{2k} + \left(\sqrt{p+1}-\sqrt{p}\right)^{2k} - 2\right]$.

Notă. Soluţie corectă s-a primit de la **Marius Pachiţariu**, elev, Iaşi

L40. *Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ astfel încât* $\det\left(A^2B + AB^2\right)$ *este impar.* *că $A + \alpha B$ este inversabilă pentru orice $\alpha \in \mathbb{Q}$.*

Marian Ursărescu

Soluţie. Deoarece $\det\left(A^2B+AB^2\right) = \det A \cdot \det(A+B) \cdot \det B$ este impar, rezultă că $\det A$, $\det(A+B)$ şi $\det B$ sunt numere impare. mul $p(X) = \det(A+XB) = \det A + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + (\det B)$ $p(1) = \det(A+B) = \det A + a_1 + \cdots + a_{n-1} + \det B$ este număr impar că şi $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$ este număr impar. Să presupunem acum că p are o rădăcină raţională $\alpha = \frac{p}{q}$, cu $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, $(p,q) = 1$. În avem $p \mid \det A$ şi $q \mid \det B$, deci p şi q sunt impare. Din $p(\alpha) = 0$, $(\det A)\,q^n + a_1pq^{n-1} + \cdots + a_{n-1}p^{n-1}q + (\det B)\,p^n = 0$, sau $(\det A)\,q^n + ($ $+a_1\left(p^{n-1}q-1\right) + \cdots + a_{n-1}\left(p^{n-1}q-1\right) = -(a_1 + \cdots + a_{n-1})$, egalitat falsă deoarece membrul din stânga este par, iar cel din dreapta este im urmare $p(\alpha) = \det(A+\alpha B) \neq 0$, pentru orice număr raţional α, adic $A + \alpha B$ este inversabilă oricare ar fi $\alpha \in \mathbb{Q}$.

L41. *Demonstraţi că grupul simetric S_{32} nu are elemente de ordin* 20

Paul Georgescu şi Gabriel I

Soluţie. Presupunem că există $\sigma \in S_{32}$ un element de ordin 2002, $= \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$ descompunerea sa în produs de cicli disjuncţi cu ordinele k

k_n. Avem $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = 32$ şi $[k_1, k_2, \ldots, k_n] = 2002$. Cum $2002 = 2$
rezultă că există k_{i1}, k_{i2}, k_{i3}, k_{i4}, nu neapărat distincte, astfel încât $2 \mid k$
$11 \mid k_{i3}$, $13 \mid k_{i4}$. Dacă k_{i1}, k_{i2}, k_{i3}, k_{i4} sunt distincte, atunci $k_{i1} + k_{i2} + k_{i3}$
ceea ce este fals. Dacă două, sau mai multe, din cele patru ordine coin
ordinul corespunzător se divide cu produsul factorilor ce-i corespund, fiinc
sau egal decât produsul aceloraşi factori şi deci mai mare sau egal decât
Astfel, în acest caz obţinem iarăşi că suma ordinelor este mai mare sau e
ceea ce este fals.

L42. *Fie $(A, +, \cdot)$ un inel comutativ şi finit, cu cel puţin 5 elem*
$1 + 1 \in A$ inversabil. Fie $M = \{x \in A \mid x^2 = 1\}$, $I = \{x \in A \mid x^2 =$
arate că $\operatorname{card} M = \operatorname{card} I < \operatorname{card} A\ /2$.

Ovidiu Muntean

Soluţie. Dacă $a \in A$, atunci $2^{-1}(1 + a) \in A$ şi avem: $2^{-1}(1 +$
$\left(2^{-1}(1 + a)\right)^2 = 2^{-1}(1 + a) \Leftrightarrow 2^{-2}\left(1 + 2a + a^2\right) = 2^{-1}(1 + a) \Leftrightarrow 1 +$
$= 2(1 + a) \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow a \in M$, de unde rezultă egalitatea $\operatorname{card} M = \operatorname{card}$

Să demonstrăm acum partea a doua a relaţiei date. Dacă avem $\operatorname{card} I$
$\operatorname{card} A \geq 5 > 2 \operatorname{card} I$. În continuare ne ocupăm de cazul în care card
această situaţie, fie $a \in I \setminus \{0, 1\}$ şi atunci $1 - a \in I \setminus \{0, 1, a\}$. Într-ad
$1 - a = a$, rezultă că $a = 2^{-1}$, adică a este inversabil şi din $a^2 = a$ obţinem
ce este fals. Avem deci $\operatorname{card} I > 3$. Fie $J = \{x \in A \mid -x \in I\}$ şi atunci I
pentru că $x \in I \cap J$ înseamnă $x = -x = x^2$, deci $2x = 0$, adică $x = 0$.
parte, avem $I \cap M = \{1\}$ şi $J \cap M = \{-1\}$. Cum I, J, M au acelaşi
elemente, rezultă că are loc $\operatorname{card} A \geq 3 \operatorname{card} I - 3 > 2 \operatorname{card} I$.

L43. *Determinaţi polinoamele $P \in \mathbb{R}[X]$ pentru care $P(z) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\forall z$*

Gheorghe I

Soluţie. Polinoamele de gradul 1, $P(X) = aX + b$ $(a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq$
ipoteza, deci sunt soluţii ale problemei. Arătăm că acestea sunt singurele

Fie $P \in \mathbb{R}[X]$ cu $\operatorname{grad} P = n \geq 2$ şi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = P(x) = a_0 x^n$
$+ \cdots + a_n$ $(a_0 \neq 0)$ funcţia polinomială asociată acestuia. Fie $a_0 > 0$ (
proceda dacă $a_0 < 0$). Observăm că $\forall m \in \mathbb{R}$ ecuaţia $f(x) = m$ are nu
reale (n soluţii), în caz contrar ar exista $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ şi $f(z) = m \in \mathbb{R}$.

Dacă n este par, atunci $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$. De aici şi din continuitatea lu
că $\operatorname{Im} f = [m, \infty)$, unde $m = \inf\{f(x); x \in \mathbb{R}\}$. Pentru $k < m$ ecuaţia f
are soluţii reale, fals.

Dacă n este impar, avem $f'(x) = n a_0 x^{n-1} + \cdots$, deci $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f'(x)$
$f'(x) > 0$ pentru $|x|$ suficient de mare. Deci f este strict crescătoare pe
$(-\infty, \alpha)$ şi (β, ∞) $(\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ convenabil aleşi). De aici, din continuitat
f (deci mărginirea ei pe orice interval $[\alpha, \beta]$) şi din faptul că $\lim\limits_{x \to +\infty} f($
deducem că $\exists \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(\beta) \geq f(x)$, $\forall x \in (-\infty, \beta]$. Ca urmar
$f(x) = k$, cu $k > f(\beta)$ au soluţie reală unică, fals.

L44. *Fie $n \geq 2$ număr natural, iar $f_0, f_1, f_2, \ldots$ un şir de polinoa*
prin $f_0 = (X + 1)^n$, $f_{p+1} = X \cdot f_p'$, $\forall p \geq 0$. Definim încă $h_p = f_p -$
$+ \cdots + (-1)^{p-1} \sigma_{p-1}^{p-1} f_1$, $\forall p \geq 1$, unde $\sigma_k^n = \sum\limits_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} i_1 i_2 \ldots i_k$, $k \in \{$

sunt sumele simetrice fundamentale ale numerelor $1, 2, \ldots, n$. *Să se arat*
$h_p = n(n-1)\cdots(n-p+1)X^p(X+1)^{n-p}$, $\forall p = 1, 2, \ldots$

Marian Tetiv

Soluţie. Să arătăm că $h_{p+1} = Xh_p' - ph_p$. Avem $h_{p+1} = \sum_{k=0}^{p}(-1)^k \sigma$

$$=\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\left(\sigma_k^{p-1}+p\sigma_{k-1}^{p-1}\right)f_{p+1-k}=\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k\sigma_k^{p-1}f_{p+1-k}+\sum_{k=1}^{p}(-1)^k p\sigma_{k-}^{p-}$$

$= X\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k\sigma_k^{p-1}f_{p-k}' - p\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}^{p-1}f_{p+1-k} = Xh_p' - ph_p$ (am
$\sigma_0^n = 1$ şi $\sigma_k^n = 0$, pentru $k < 0$ sau $k > n$).

Demonstraţia se poate face prin inducţie şi se bazează pe formula stabil
din enunţ, deducem că $h_1 = f_1 = Xf_0' = nX(X+1)^{n-1}$. Să presupuner
are loc egalitatea $h_p = n(n-1)\cdots(n-p+1)X^p(X+1)^{n-p}$. În acest
scrie:

$$\begin{aligned}h_{p+1} = Xh_p' - ph_p = n(n-1)\cdots(n-p+1)pX^p(X+1)^{n-p} +\\ +n(n-1)\cdots(n-p+1)(n-p)X^{p+1}(X+1)^{n-p+1} -\\ -pn(n-1)\cdots(n-p+1)X^p(X+1)^{n-p} =\\ = n(n-1)\cdots(n-p+1)(n-p)X^{p+1}(X+1)^{n-p+1}.\end{aligned}$$

Să mai observăm că, deoarece $h_n = n!\,X^n$, $h_{n+1} = Xn!\,nX^{n-1} - n\,n!\,X^n =$
că $h_p = 0$, pentru orice $p \geq n+1$.

L45. *Fie* $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *continuă. Dacă funcţia* $F : [0,\infty) \to$
$= \int_0^x f(t)\,dt$ *este mărginită, să se arate că* $\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 xf(nx)\,dx = 0.$

Adrian Zanc

Soluţie. Dacă în integrala $I_n = \int_0^1 nxf(nx)\,dx$ facem schimbarea d
$nx = t$, obţinem $I_n = \int_0^n \frac{t}{n}f(t)\,dt$. Fie $\varepsilon \in (0,1)$. Avem

$$|I_n| \leq \int_0^{n\varepsilon}\frac{n\varepsilon}{n}f(t)\,dt + \int_{n\varepsilon}^{n}\frac{n}{n}f(t)\,dt = \varepsilon\int_0^{n\varepsilon}f(t)\,dt + \int_{n\varepsilon}^{n}f(t)\,d$$

Deoarece F este mărginită, există $M > 0$ astfel încât $F(x) < M, \forall x \in \mathbb{R}_+$
f este continuă, rezultă că F este derivabilă şi $F'(x) = f(x) \geq 0, \forall x \in$
este crescătoare. De aici, având în vedere mărginirea funcţiei F, deducem
$\lim_{x\to\infty} F(x)$ şi este finită. Prin urmare, $\lim_{x\to\infty}(F(x) - F(x\varepsilon)) = \lim_{x\to\infty}\int_{x\varepsilon}^{x} f$
de unde rezultă că există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_0$ are loc:

$$\left|\int_{n\varepsilon}^{n} f(t)\,dt\right| = \int_{n\varepsilon}^{n} f(t)\,dt < \varepsilon.$$

Din relaţiile (1), (2), şi (3) obţinem $|I_n| < \varepsilon\int_0^{n\varepsilon} f(t)\,dt + \varepsilon < \varepsilon(M+1)$
ceea ce înseamnă că $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.

Probleme propuse

Clasele primare

P.64. Într-o piesă de teatru sunt 12 personaje, copii şi adulţi. Câţi co
piesă, dacă la fiecare doi adulţi corespunde un copil?
(*Clasa I*) **Alexandra Radu, e**

P.65. Se dau jetoanele $\boxed{\text{AT}}$ $\boxed{\text{II}}$ $\boxed{\text{CRE}}$ $\boxed{\text{ŢII}}$ $\boxed{\text{AŢII}}$ $\boxed{\text{RECR}}$
$\boxed{\text{REC}}$. Care este numărul cel mai mare de jetoane cu care se poate form
"RECREAŢII"?
(*Clasa I*) **Oxana Pascal, elevă, Rep.**

P.66. Într-o livadă sunt tot atâţia peri cât şi meri. Sunt 6 rânduri c
rânduri cu meri. Numărul merilor de pe un rând întrece cu 5 numărul pe
un rând. Câţi pomi sunt în acea livadă?
(*Clasa II-a*) **Înv. Maria I**

P.67. Dintr-o mulţime de 5 copii, orice grupare de trei conţine cel pu
Câţi băieţi pot fi în mulţime?
(*Clasa II-a*) **Andreea Surugiu, e**

P.68. Dacă Ina ar împărţi numărul nucilor culese de ea la numărul nu
de sora sa, ar obţine 7 rest 6. Ştiind că Ina a cules cu 78 nuci mai mult
sa, aflaţi câte nuci a cules fiecare.
(*Clasa III-a*) **Înv. Doiniţa Sp**

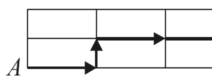
P.69. Într-o împărţire cu rest, în care împărţitorul este mai mare ca no
împărţitorul cu o unitate şi efectuând din nou împărţirea obţinem câtul
0. Aflaţi câtul şi restul împărţirii iniţiale.
(*Clasa III-a*) **Înv. Mariana Toma, Muncelu de**

P.70. Într-o tabără internaţională de matematică sunt elevi din patru
garia, Grecia, Republica Moldova şi România. Dacă 21 elevi nu sunt di
23 nu sunt din Grecia, 22 elevi nu sunt din Republica Moldova şi 21 ele
din România, câţi elevi sunt din fiecare ţară?
(*Clasa III-a*) **Georgiana Ciobanu, e**

P.71. Fiecare pătrat din figura alăturată $\square\square\square$ se colorează cu o altă
câte moduri putem face acest lucru având la dispoziţie patru culori?
(*Clasa IV-a*) **Înv. Cătălina Raţă, Coarnele Ca**

P.72. Aruncăm două zaruri şi adunăm punctele de pe cele două feţe de
a) Câte sume diferite putem obţine? *b*) Câte sume se pot forma în t
diferite?
(*Clasa IV-a*) **Înv. Gheorghe Toma, Muncelu de**

P.73. În figura alăturată este pus în evidenţă un drum format din şase segmente care pleacă din A şi ajunge în B. Câte drumuri de felul acesta se pot construi?



(*Clasa IV-a*) **Înv. Constantin Raţă, Coarnele Ca**

Clasa a V-a

V.46. Aflaţi $n \in \mathbb{N}$ pentru care $11^n + 9^n$ şi $11^n - 9^n$ sunt simult
perfecte.

Andrei - Sorin Cozma,

V.47. Să se arate că numărul $\overline{51a51a}$ nu poate fi scris ca produsul a pa
prime.

Cătălin Bud

V.48. Se consideră fracţiile $x_1 = \dfrac{9}{14}$, $x_2 = \dfrac{10}{21}$, $x_3 = \dfrac{11}{28}$, $\ldots$. Scr
x_{1000} şi apoi ordonaţi crescător primele 1000 de fracţii.

Dumitru Gherman

V.49. Determinaţi numărul tripletelor $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ dacă $3a + 2b +$
$a + 2b + 3c = 602$. Dacă în plus $a < b < c$, determinaţi a, b şi c.

Gheorghe I

V.50. Câte numere de 7 cifre se pot scrie folosind cifrele 1, 2 şi 3, as
să apară de 2 ori, 2 să apară de 3 ori şi 3 să apară de 2 ori? Dar dacă în lo
1, 2 şi 3 considerăm cifrele 0, 1 şi respectiv 2?

Petru As

Clasa a VI-a

VI.46. Suma dintre opusul unui număr natural şi inversul altui num
este $-119,992$. Să se determine numerele.

Ciprian Ba

VI.47. Aflaţi restul împărţirii numărului $N = 2844^{2844} + 4107^{4107}$
prin 79.

Tamara C

VI.48. a) Într-o proporţie cu termeni nenuli, un extrem este suma
trei termeni dacă şi numai dacă celălalt extrem are inversul egal cu suma
celorlalţi trei termeni.

b) Dacă din patru numere raţionale nenule distincte unul este suma cel
iar altul are inversul egal cu suma inverselor celorlaltor trei, atunci num
termeni ai unei proporţii.

Claudiu - Ştefan

VI.49. Să se arate că orice număr natural relativ prim cu 10 admite u
care se scrie folosind numai cifra 3.

Lucian - Georges Lădu

VI. 50. Fie $\triangle ABC$ cu $[AC] \equiv [BC]$, D mijlocul lui $[AB]$, P un punct
AB, iar M şi L picioarele perpendicularelor din P pe AC, respectiv BC.
că $[DM] \equiv [DL]$.

Neculai Roman, Mirc

Clasa a VII-a

VII.46. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuaţiile:

a) $x^{100} + x^{77} + x^{50} + x^{21} + x^{10} + x^5 + 1 > 0$;

b) $x^{100} - x^{77} + x^{50} - x^{21} + x^{10} - x^5 + 2 < 0$.

Vasile Solcanu, Bogdăneşti

VII.47. Să se rezolve în $\mathbb{Z}^2$ ecuaţia $u^2v + uv^2 = 2u^2 + 2v^2 - 40$.

Mihai Crăciun

VII.48. Dacă $a_i = i + \sqrt{i}$, $\forall i = \overline{1, 2004}$, precizaţi dacă numărul

$$N = a_1 - a_2 - a_3 + a_4 + a_5 - a_6 - a_7 + a_8 + \cdots + a_{2001} - a_{2002} - a_{2003}$$

este negativ, pozitiv sau nul.

Viorel Cornea şi Dan Ştefan Marinescu, H

VII.49. Fie $\triangle ABC$ echilateral şi $D \in (BC)$. Notăm cu M_1, M_2 segmentelor $[BD]$, respectiv $[CD]$. Paralela prin M_1 la AC intersectează iar paralela prin M_2 la AB intersectează AC în E. Să se arate că dreptele şi M_2F sunt concurente.

Nicolae Gross şi Lucian Tuţescu

VII. 50. Fie $ABCD$ un trapez cu bazele $[AB]$ şi $[CD]$. O parale intersectează AD, AC, BD şi BC în punctele E, F, G şi respectiv H. că $EH = 3FG$ dacă şi numai dacă DF, CG şi AB sunt drepte concurent

Adrian Zanc

Clasa a VIII-a

VIII.46. Să se demonstreze că nu există $m, n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $\dfrac{m}{n} +$

Alexandru Negrescu, elev,

VIII.47. Pentru $\forall x \in (0, \infty)$, să se demonstreze inegalitatea

$$\frac{\left(x^5+x^3+x^2+1\right)\left(x^3+x^2+2\right)+\left(x^4+x^3+x+1\right)\left(x^3+x+2\right)+\left(x^3+x^2+x+1\right)\left(\right.}{x^6+x^5+x^4+2x^3+x^2+x+1}$$

Mircea Coşbuc,

VIII.48. Găsiţi numerele prime p şi q pentru care $p^2 + q = 37q^2 + p$.

Liviu Smarandache

VIII.49. Fie $\triangle ABC$ dreptunghic în A cu $AB = AC = a$. Consider $\perp (ABC)$, $MA = a\sqrt{2}$ şi $N \in AM$ astfel încât $m(\widehat{CN, BM}) = 60°$. lungimea segmentului $[AN]$.

Romanţa Ghiţă şi Ioan Gh

VIII.50. Fie patrulaterul convex $ABCD$ cu $AB = BC$, $m(\widehat{A}) = m$ $m(\widehat{B}) \leq 90°$ şi fie O mijlocul lui $[BD]$. Pe perpendiculara în O pe planul ia un punct V astfel încât $OV = OB$. Să se arate că $d\,(D, (VAB)) = 2\,d\,($ dacă şi numai dacă $m(\widehat{ABC}) = 60°$.

Monica Ned

Clasa a IX-a

IX.46. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} - \sqrt[2n]{x-2} = 2$, unde n

Dan Popescu

IX.47. Să se determine şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ de numere strict pozitive pentru

$$a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - \cdots + (-1)^{n-1} a_n^2 = (-1)^{n-1} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n), \quad \forall n$$

Marian Ursărescu

IX.48. Fie $a, b, c \in (0, \infty)$ cu $a + b + c + \sqrt{abc} = 4$. Să se arate că

$$\frac{a^2}{a+\sqrt{bc}} + \frac{b^2}{b+\sqrt{ca}} + \frac{c^2}{c+\sqrt{ab}} \geq \frac{3}{2}.$$

Cezar Lupu, elev, C

IX.49. Să se arate că $\triangle ABC$ este isoscel în fiecare din ipotezele:
a) $2m_a + b = 2m_b + a$; *b*) $2m_a + a = 2m_b + b$.

Marius Pachiţariu,

IX.50. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ascuţitunghic ABC. I
C sunt măsurile în radiani ale unghiurilor triunghiului, iar $A \cdot \overrightarrow{IA} + B \cdot \overrightarrow{IB} + C$
să se arate că $\triangle ABC$ este echilateral.

Constantin Micu, Meline

Clasa a X-a

X.46. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia $2^{x-1} + 2^{x^2-1} = \frac{y^2 +}{y^2}$
aibă soluţii în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Petru Răduc

X.47. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ distincte, cu $z_2 + z_3 = 2$ şi astfel încât $|z_1 - 1| =$
$= |z_3 - 1|$. Să se arate că $(z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_3)$ este număr complex pur ima

Lidia Nicola

X.48. Se consideră planele paralele α şi β aflate la distanţa h unul de
$\triangle ABC$ echilateral inclus în planul β.

a) Să se afle locul geometric al punctelor $M \in \alpha$ pentru care MA
$= MB^2 + MC^2$.

b) Să se determine $M \in \alpha$ astfel încât suma $MA^2 + MB^2 + MC^2$ să f

Viorel Cornea şi Dan Ştefan Marinescu, H

X.49. Să se arate că $\sin^3 x + \sin^3 y + \sin^3 z - 3 \sin x \sin y \sin z \geq$

$$\geq \frac{3}{4} [\sin x (1 - \cos (y - z)) + \sin y (1 - \cos (z - x)) + \sin z (1 - \cos (x$$

$\forall x, y, z \in [0, \pi/3]$.

Marian Tetiv

X.50. Fie $a_k, b_k, c_k \in \mathbb{N}$, $k \in \overline{1, n}$; notăm cu $f(p)$ numărul tripletelor
de submulţimi (nu neapărat nevide) cu reuniunea $M = \{1, 2, \ldots, n\}$, or
disjuncte şi astfel încât numărul $\sum\limits_{i \in M \setminus A} a_i + \sum\limits_{i \in M \setminus B} b_i + \sum\limits_{i \in M \setminus C} c_i - p$ să fi
de 3 (convenim ca $\sum\limits_{i \in \emptyset} x_i = 0$). Arătaţi că dacă $f(0) = f(1) = f(2)$, atun
pentru care $a_i + b_i + c_i \,\vdots\, 3$.

Gabriel Dospinescu, student, I

Clasa a XI-a

XI.46. Determinaţi $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ pentru care $\det(A + B) = 2$ şi $\det($

Cezar Lupu, elev, C

XI.47. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrice cu $a_{ij} = \begin{cases} a, \text{ dacă } i = j \\ b, \text{ dacă } i \neq j \end{cases}$, unde $b \neq$
Arătaţi că A este inversabilă şi determinaţi A^{-1}.

Gheorghe I

XI.48. Se defineşte şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ prin $x_n = x_{n-1}^2 - [x_{n-1}]$, $\forall n \geq$
$\in \left[0, \left(1+\sqrt{5}\right)/2\right)$. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Cătălin Ţigăeru

XI.49. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$, $(a_n)_{n\geq 0}$ şiruri de numere reale astfel încât $\sum\limits_{n=}^{\infty}$
$|x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}| + |x_{n+1} - 3x_n + 2x_{n-1}| \leq a_n$, $\forall n \geq 1$. Să se arate
este convergent.

Paul Georgescu şi Gabriel P

XI.50. Fie $n \in 2\,\mathbb{N}$, iar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea că $f\Bigg($
$\geq f\left(\sqrt[n+1]{x^n y}\right)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Să se arate că funcţia este descrescătoare pe
crescătoare pe $[0, \infty)$. (În legătură cu *Problema 2819* din *Crux Mathem*
nr. 2/2003.)

Titu Zvonaru, B

Clasa a XII-a

XII.46. Să se determine funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dacă $(\mathbb{R}, *)$ este gr
cu proprietatea că simetricul oricărui element $x \in [-1, 1]$ se află în $[-$
$x * y = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Ioan Săcăleanu

XII.47. Fie $G = (a, b)$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, iar "$\cdot$" înmulţirea numerelor re
determine a, b astfel încât $\left(\mathbb{R}_+^*, \cdot\right) \cong (G, \cdot)$ printr-un izomorfism de forma f
$f(x) = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, cu $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

Alexandru Blaga şi Ovidiu Pop, S

XII.48. Fie $(G, \cdot)$ grup de element neutru e şi $x, y \in G$ penrtru care a

a) $\exists k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ a. î. $x^k = e$; *b*) $\exists p \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ a. i. $xy = y^p x$.

Să se arate că:

1) $xy^n x^{k-1} = y^{np}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$; 2) $xy = yx \Leftrightarrow y^{n(p-1)} = e$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Mihai Ha

XII.49. Se consideră numerele reale $b > a \geq 0$, $c \geq 1$ şi funcţiil
$f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_{na}^{nb} g(x)\,dx = d \in \mathbb{R}$. Să se arate că şiru
$u_n = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{c + f(x) + g(nx)}\,dx$ este convergent şi să se afle limita sa.

D. M. Bătineţu - Giurgiu, B

XII.50. Fie $s(n)$ suma cifrelor numărului natural n. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to}$
unde $k \in \mathbb{N}$ este fixat.

Gabriel Dospinescu, student, P

Probleme pentru pregătirea concursurilo

A. Nivel gimnazial

G56. Fie $m \in \mathbb{Z}$, $n \in 2\,\mathbb{Z}+1$ fixate. Să se arate că ecuaţia $nx + y = $
are o unică soluţie (x_0, y_0) cu proprietatea că $|y_0| < |n|/2$.

Petru As

G57. Un şeic a lăsat moştenire celor doi fii ai săi cinci cămile, cu c
unul să primească jumătate, iar celălalt o treime. Moştenitorii nu şi-au put
averea, aşa că au apelat la un înţelept care trecea pe acolo, călare pe o că
a procedat înţeleptul?

Câte probleme asemănătoare mai putem formula (în care moştenirea
cămile, iar fiii primesc a p-a şi a q-a parte)?

Gabriel

G58. Să se rezolve în $\mathbb{N}^2$ ecuaţia $2^x + 1 = 5^y$.

Irina Mustaţă, elevă, şi Valentina Bler

G59. Fie $A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid s(2000n) + s(2002n) = 2s(2001n)\}$, unde pri
notat suma cifrelor lui x. Demonstraţi că orice număr natural nenul are u
ce aparţine lui A.

Gabriel Dospinescu, student,

G60. Să se demonstreze că pentru orice $a, b, c \in (0, \infty)$ are loc

$$\frac{ab}{(a+b)^2} + \frac{bc}{(b+c)^2} + \frac{ca}{(c+a)^2} \leq \frac{1}{4} + \frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ .$$

Gabriel Dospinescu, student,

G61. Să se demonstreze că pentru orice $a, b, c \in (0, \infty)$ are loc

$$\left(\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}\right)^3 \geq 54\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}}{abc} \geq 27\frac{(a+b)(b+c}{abc}$$

Marian Tetiv

G62. Fie $ABCD$ un patrulater convex în care se poate înscrie pătrat
de centru O ($M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CD)$, $Q \in (AD)$). Să s
$AB + BC + CD + DA \geq \sqrt{2}\,(AO + BO + CO + DO)$. Când are loc egal

Lucian Tuţescu, Craiova şi Ioan Şerdear

G63. În $\triangle ABC$ cu $m(\widehat{A}) = 10°$ şi $m(\widehat{B}) = 100°$ construim M
$N \in (AC)$ astfel ca $m(\widehat{MCB}) = 40°$ şi $m(\widehat{NBC}) = 75°$. Să se afle $m(\widehat{AM}$

Octavian Bondo

G64. Prin punctul P al laturii (AC) a $\triangle ABC$ se duc paralele la med
şi CC', care intersectează laturile (BC) şi (AB) în E, respectiv F. F
$= EF \cap AA'$, $\{N\} = EF \cap CC'$, iar L şi Q mijloacele segmentelor $[FP]$
$[PE]$. Să se arate că dreptele ML, NQ şi $A'C'$ sunt concurente.

Andrei Ned

G65. Fie $SABCD$ o piramidă cu baza $ABCD$ dreptunghi, M proie
pe SB şi N proiecţia lui C pe SA, iar $\{P\} = AM \cap NB$. Ştiind că M
$N \in (SA)$, să se arate că $NP \cdot SA \cdot MB = SM \cdot AN \cdot PB$.

Daniel Ştefan Ninu,

A. Nivel liceal

L56. Fie $ABCD$ patrulater convex şi $\{P\} = AB \cap CD$, $\{Q\} =$
Considerăm $J \in (AQ)$, $L \in (BQ)$, $K \in (DP)$, $N \in (AP)$ astfel încât
$QL = CB$, $PK = DC$ şi $PN = AB$. Să se arate că $JL \parallel NK$.

Carmen Nej

L57. Fie $\triangle ABC$ înscris în cercul $\mathcal{C}$ şi punctele $D \in (CB$, $D' \in (BC$
$\widehat{CAD} \equiv \widehat{ABC}$, $\widehat{BAD'} \equiv \widehat{ACB}$. Se mai consideră cercul $\mathcal{C}_1$ tangent la AD
$\mathcal{C}$, cercul $\mathcal{C}_2$ tangent la AD', CD' şi la $\mathcal{C}$, iar $\{E\} = \mathcal{C}_1 \cap [BD]$, $\{F\} = \mathcal{C}_2 \cap$
se arate că cercul circumscris $\triangle AEF$ şi cercul înscris în $\triangle ABC$ sunt con

Neculai Roman, Mirc

L58. Pe muchiile $(Ox$, $(Oy$ şi $(Oz$ ale unui triedru oarecare se conside
$A, L \in (Ox$, $B, M \in (Oy$ şi $C, N \in (Oz$ astfel încât $OA = OB = OC =$
$= OM = ON = b$ $(a < b)$. Notăm $\alpha = m(\widehat{Oy, Oz})$, $\beta = m(\widehat{Oz, Ox})$, $\gamma =$
şi $\{P\} = (AMN) \cap (BNL) \cap (CLM)$, $\{Q\} = (LBC) \cap (MCA) \cap (N$
calculeze distanţa PQ în funcţie de a, b, α, β, γ.

Temistocle Bî

L59. Care este probabilitatea ca latura şi diagonalele unui romb, luat
plare, să fie laturile unui triunghi?

Petru M

L60. Fie $A_1A_2\ldots A_n$ şi $B_1B_2\ldots B_n$ $(n > 2)$ două poligoane înscris
cerc de centru O şi având centrele de greutate tot în O. Să se arate că p
merota vârfurile poligonului $A_1A_2\ldots A_n$ pentru a obţine un nou poligon A_i
în care $A_{i_j} \neq B_j$ pentru $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Gabriel Dospinescu, student,

L61. Fie $n \geq 3$. Să se determine maximul expresiei $E = x_1^3x_2^2 + x_2^3$
$+x_n^3x_1^2 + (n-1)^{2(n-1)}x_1^3x_2^3\cdots x_n^3$, când numerele nenegative $x_1, x_2, \ldots, x_n$

Gabriel Dospinescu, student,

L62. Rezolvaţi ecuaţia $2x^2 = y(y+1)$; $x, y \in \mathbb{N}$.

Mircea Bî

L63. Fie $G \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ un grup netrivial în raport cu produsul uzual al
Presupunem că există $X \in G$ astfel încât pe fiecare linie, respectiv coloa
existe cel mult un element nenul şi acesta egal cu 1. Să se demonstrez
$k \in \{1, 2, \ldots n\}$ astfel încât G este izomorf cu un subgrup al lui $GL_k(\mathbb{R})$
$GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$).

Ovidiu Muntean

L64. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin: $x_1, x_2 \in \mathbb{N}^*$, $x_{n+2} = \dfrac{[x_{n+1}, x_n]}{x_{n+1}}$, n
$x_{2003} = 2004$, demonstraţi că şirul nu este convergent.

Iuliana Georgescu şi Paul Georg

L65. Fie $n \in \mathbb{N}$ şi funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde $f(x) = x^{2n}\cos(1/x$
$f(0) = 0$, $f(x) = x^{2n}\sin(1/x)$, $\forall x > 0$, iar $g(x) = x^{2n+1}\sin(1/x)$, $\forall x <$
şi $g(x) = x^{2n+1}\cos(1/x)$, $\forall x > 0$. Să se afle cel mai înalt ordin de deri
acestor funcţii şi să se studieze problema continuităţii acestor derivate în

Gheorghe Cost

Pagina rezolvitorilor

BOTOŞANI

Colegiul Naţional "A. T. Laurian". **Clasa a IX-a**. NEGRESCU A
VII(39,40,42,44), VIII(36,40,42), IX(36,37,39), X(39,40), G(42,54).

BRAŞOV

Şcoala gen. nr. 5. **Clasa a VII-a**. POSTEUCĂ Bogdan: V.37, VI
VII.39; POSTEUCĂ Raluca: V.37, VI (37,38,40), VII.39.

CONSTANŢA

Colegiul Naţional "Mircea cel Bătrân". **Clasa a X-a**. LUPU Ceza
IX(38,39,40), X(38,40), XI(37,38).

CRAIOVA

Şcoala nr. 22 "M. Eliade". **Clasa a IV-a** (înv. VANŢU Angela).
Ioan: P(54-63).

HÂRLĂU (Iaşi)

Liceul "Ştefan cel Mare". **Clasa a VI-a**. CIOFU Alexandra: P(50
VI.39, VII.41; SAVA Cristina Amelia: P(52,61,63), V(41,44); SCRIPCARI
P.61, V(41,44), VI(37,42); SPIRIDON Florin: P(50,61), V(37,41), VII.41;
Ionuţ: V(37-39), VI(38,39). **Clasa a VIII-a.** ANTOCI Bogdan: VI(39
VII.44; BURICAN Bogdan - Alexandru: VI(37,38,42,44,45), VII(41,44);
Lucian: VI(39,40,44,45), VII.44.

HUNEDOARA

Liceul "Iancu de Hunedoara". **Clasa a VII-a**. CRĂCIUN Maria:
VI(42,44), VII.41.

IAŞI

Colegiul Naţional "C. Negruzzi". **Clasa a V-a**. OLARIU Tudor: P(51
V(43,45), VI.39; TIBA Marius: P(58,61-63), V(42,45), VI.42.

Colegiul Naţional. **Clasa a V-a**. ANDRONIC Adrian: V(36,38,39,41-
ANDRONIC Adrian Constantin: V(36,38,39,41-45), VI.42; BALAN Ele
V(36,38,39,41-44); BARBACARIU Ioana: V(36,38,39,41,42); BERCU Tu
38,39,41-44); CAPRARU Mădălina: V(36,38,41-44); CHELSĂU Andre
38,39,40-45); CHIDIU Alexandru: V(36,38,39,41-45); DOBROVICEANU
V(36,38,39,41-43); GAFIŢANU Oana: V(36,39,41-43); GEORGESCU A
62), V(36,38,41,42,44); MÂNZĂŢEANU Maria-Adelina: V(36,38,39,41-4
Monica: V(36,38,39,41-44); MOŞNEGUŢU Cătălina Elena: V(36,38,39,4
LAGHIA Irina: V(36,38,39,41-45); POPA Ana-Maria: V(36,38,39,41-4
TUR George: V(36,38,39,41-44); SMARANDA Sava: V(36,38,40-44); T
xandra: V(36,38,39,41,42). **Clasa a IX-a**. CAZACU Roxana: VII.41,
G(40,47); CHIRUŢA Marta: VII.41, VIII.42, IX(38,39), G.40; HAMCIU
VII(41,42), VIII.42, IX(36,39); PRODAN Diana: VII.41, IX(36,38), G(
MOFTE Diana: VII.41, IX(36,38), G(40,47). **Clasa a X-a**. DUMITR
xana: VIII(37,42), IX(37,39), X(36-38,42), G(40,50); PACHIŢARIU Ma
50,52), L(46,47,49,50). **Clasa a XI-a**. MUSTAŢĂ Irina: X.42, XI(41,4
G(46,47,52), L(46,47).

Liceul "M. Eminescu". **Clasa a V-a**. BOHOTIN Alexandru: P(48,49,5

V.37; COHAL Călin: P(48,58,60,63), V(38,39,42), VI.38. **Clasa a VI-a** Mihaela: V(42-44), VI(37,42); CIURARU Ionela Alexandra: V(42-44), IPATE Cristina Alexandra: V(42-44), VI(37,42).

Liceul "G. Ibrăileanu". **Clasa a VII-a**. UNGUREANU Dragoş: V VI(39,42).

Şcoala nr. 7 "N. Tonitza". **Clasa a II-a** (înv. TUDOSE Elena). CÂR P(54-57,60); DOBRIN Diana - Maria: P(54-57,60); LEONTE Anca: P POSTICĂ Simona - Alexandra: P(54-57,60); ROTARIU Larisa: P(54-57,6 Răzvan: P(54-57,60). **Clasa a II-a** (înv. MELINTE Rodica). BACIU Cipr 57,60); BÂRZU Constantin: P(54-57,60); BOTOŞANU Bianca - Miha 57,60); BUZDUGAN Petru - Cătălin: P(54-57,60); CEUCĂ Dănuţ - Vasi 57,60); CONSTANTINESCU Diana - Gabriela: P(54-57,60); CUCUTEA Cătălin: P(54-57,60); GUŞOVATE Diana - Ştefana: P(54-57,60); LEOGA Diana: P(54-57,60); MIRON Vlad - Ştefan: P(54-57,60); MOTAN Geanin P(54-57,60); ROTARIU Marian: P(54-57,60); SUCIUC Raluca: P(54-57, - COSTIN Andrada - Mihaela: P(54-57,60). **Clasa a IV-a** (înv. MARCU BUTNARU Valentin: P(52,58-62); ONUŢĂ Alin: P(52,58-62).

Şcoala nr. 13 "Alexandru cel Bun". **Clasa a III-a** (înv. SPÂNU BURLACU Ionuţ: P(54-57,61); DAMIAN Daniel: P(54-57,61); FURTU P(54-57,61); IFTENIE Ioana - Cătălina: P(54-57,61); RUSU Alexand 57,61); URSU Gina - Ioana: P(54-57,61).

Şcoala nr. 22 "B. P. Hasdeu". **Clasa a II-a** (înv. TÂRZIORU Iuliana). LIŢEI Victor: P(54-57,60); APOSTOL Ana - Maria: P(54-57,60,61); B drei: P(54-57,60); BURUIANĂ Cătălina: P(54-57,60,61); CUBERSCHI P 57,60,61); EŞANU Geogiana: P(54-57,60); GREIEROSU Claudia: P(54 GÂNDU Alexandra - Livia: P(54-57,60,61); LĂMĂTIC Ioana: P(47,54-5 BEGEA Andrada: P(54,56,57,60,61); UNGUREANU Teofana: P(54-57,60 **sa a II-a**. (înv. TUTU Laura). ANDRONICIUC Ana - Miruna: P(54 BUHU Vlad: P(54-57,60); BURUIANĂ Sebastian: P(54-57,60,61); BUZ - Andrei: P(54-57,60); CEOBANU Andrei - Nicolae: P(54-57,60); CH Alexandra - Elena: P(54-57,60,61); COSTĂCHESCU Ioana: P(54-57,60 HOI Ovidiu: P(54-57,60,61); GELIP Ioana: P(54-57,60); GHERAN An P(54-57,60); GRIGORE Georgiana: P(54-57,60); GURĂU Raluca - Clau 57,60); HATESCU Iustina: P(54-57,60); HORBOVANU Bianca - Alexan 57,60); NĂSTASE Andrei Ionuţ: P(54-57,60,61). **Clasa a II-a** (înv. DO Liliana). TURCU Andrei - Daniel: P(54-57,60,61).

Şcoala nr. 23 "T. Maiorescu". **Clasa a IV-a** (înv. CHIRILĂ Beatrice RACHE Alexandru - Gabriel: P(54-63).

Şcoala nr. 26 "G. Coşbuc". **Clasa a III-a** (înv. RACU Maria). BA Ioana - Mioara: P(54-57,61); BULGARU Ionela - Alexandra: P(54-57,61) CU Claudiu: P(54-57,61); CALOIAN Andrei: P(54-57,61); CĂLIN Georg dreea: P(54-57,61); CRĂCIUN Mădălina: P(54-57,61); IFROSĂ Adria 57,61); IOJĂ Petru - Alexandru: P(54-56,59,61); LEAGĂN Crina - P(54-57,61); MOISA Bogdan: P(54-57,61); PINTILIE Răzvan - Florin: P RUSU Flavia: P(54-57,61). **Clasa a III-a** (înv. GALIA Paraschiva). AL

dra - Mădălina: P(54-57,61); CIOABĂ Oana - Cătălina: P(54-57,61);
Marius - Cătălin: P(54-57,61); HOMEA Liviu: P(54-57,61); HUIDEŞ G
57,61); MANOLIU Mădălina: P(54-57,61); MIHĂILESCU Laura: P(54-57
CĂ Alexandru: P(54-57,61); POPA Florin: P(54-57,61); SCUTARIU C
P(54-57,61).

Premii acordate rezolvitorilor

Pentru apariţia de trei ori la rubrica *"Pagina rezolvitorilor"* redacţ
"Recreaţii matematice" acordă câte o **diplomă** şi un **premiu** în cărţi u
elevi:

BARABULĂ Ioana (Şc. nr. 26 "G. Coşbuc", cl. a III-a): 1/2003 (5p
(5pb), 1/2004 (5pb);

BURLACU Ionuţ (Şc. nr. 13 "Alexandru cel Bun", cl. a III-a): 1/2003 (6
(5pb), 1/2004 (5pb);

BUTNARU Valentin (Şc. nr. 7 "N. Tonitza", cl. a IV-a): 1/2003 (5p
(6pb), 1/2004 (6pb);

CALOIAN Andrei (Şc. nr. 26 "G. Coşbuc", cl. a III-a): 1/2003 (5pb), 2/2
1/2004 (5pb);

CĂLIN Georgiana (Şc. nr. 26 "G. Coşbuc", cl. a III-a): 1/2003 (5pb), 2/2
1/2004 (5pb);

CIOABĂ Oana - Cătălina (Şc. nr. 26 "G. Coşbuc", cl. a III-a): 1/2
2/2003 (5pb), 1/2004 (5pb);

CRĂCIUN Mădălina (Şc. nr. 26 "G. Coşbuc", cl. a III-a): 1/2003 (5p
(5pb), 1/2004 (5pb);

DAMIAN Daniel (Şc. nr. 13 "Alexandru cel Bun", cl. a III-a): 1/2003 (6p
(5pb), 1/2004 (5pb);

FURTUNĂ Marta (Şc. nr. 13 "Alexandru cel Bun", cl. a III-a): 1/2
2/2003 (5pb), 1/2004 (5pb);

IFTENIE Ioana - Cătălina (Şc. nr. 13 "Alexandru cel Bun", cl. a III-
(6pb), 2/2003 (5pb), 1/2004 (5pb);

LEAGĂN Crina - Alexandra (Şc. nr. 26 "G. Coşbuc", cl. a III-a): 1/2
2/2003 (5pb), 1/2004 (5pb);

MIHĂILESCU Laura - Ioana (Şc. nr. 26 "G. Coşbuc", cl. a III-a): 1/2
2/2003 (5pb), 1/2004 (5pb);

MOISĂ Bogdan (Şc. nr. 26 "G. Coşbuc", cl. a III-a): 1/2003 (5pb), 2/2
1/2004 (5pb);

NEGRESCU Alexandru (C. N. "A. T. Laurian", Botoşani, cl. IX-a): 1/2
2/2003 (17pb), 1/2004 (14pb);

ONUŢĂ Alin (Şc. nr. 7 "N. Tonitza", cl. a IV-a): 1/2003 (5pb), 2/2
1/2004 (6pb).

PINTILIE Răzvan - Florin (Şc. nr. 26 "G. Coşbuc", cl. a III-a): 1/2
2/2003 (5pb), 1/2004 (5pb);

POSTEUCĂ Bogdan (Şc. nr. 5, Braşov, cl. a VII-a): 1/2002 (5pb), 1/2
1/2004 (5pb).

POSTEUCĂ Raluca (Şc. nr. 5, Braşov, cl. a VII-a): 1/2002 (5pb), 1/2
1/2004 (5pb).

RUSU Alexandru (Şc. nr. 13 "Alexandru cel Bun", cl. a III-a): 1/2003 (8
(5pb), 1/2004 (5pb);

RUSU Flavia (Şc. nr. 26 "G. Coşbuc", cl. a III-a): 1/2003 (5pb), 2/2
1/2004 (5pb);

SCUTARU Constantin (Şc. nr. 26 "G. Coşbuc", cl. a III-a): 1/2003 (5p
(5pb), 1/2004 (5pb);

URSU Gina - Ioana (Şc. nr. 13 "Alexandru cel Bun", cl. a III-a): 1/2
2/2003 (5pb), 1/2004 (5pb).

LISTA MEMBRILOR FILIALEI IAŞI a S. S

continuare din nr. 1/2000, 1/2001, 1/2002 şi 1/2003

110.	MIHĂILĂ Marcela	Şcoala "D.D.Pătrăşcanu", Tome
111.	BOBOC Romela	Şcoala "D.D.Pătrăşcanu", Tome
112.	TEMNEANU Mitică	Univ. Tehnică "Gh. Asachi", Ia
113.	MIRON Mirel	Liceul "C. Negruzzi", Iaşi
114.	ROTUNDU Raluca	Şcoala gen. Gropniţa, jud. Iaşi
115.	APETREI Laura	
116.	NAVROTESCU Mariana	Gr. şc. "Al. I. Cuza", Iaşi
117.	CHIORESCU Daniela Marinela	Gr. şc. "D. Mangeron", Iaşi
118.	AVĂDANI Adela	Şcoala gen. nr.37, Iaşi
119.	STRACHINĂ Monica	Şcoala gen. nr.37, Iaşi
120.	BÂRGHIŞAN Mariana	Gr. şc. "Tehnoton", Iaşi
121.	SPIRIDON Ana - Mărioara	Şc. nr. 3 "Iordache Cantacuzino
122.	TUDORACHE Nelu	Liceul "V. Alecsandri", Iaşi
123.	DASCĂLU Cristina	Liceul "M. Eminescu", Iaşi
124.	CORDUNEANU Adrian	Univ. Tehnică "Gh. Asachi", Ia
125.	ROŞU Mărioara	Liceul de artă, Iaşi

IMPORTANT

- În scopul unei legături rapide cu redacţia revistei, pot fi utilizate următoa
e-mail: **tbi@math.tuiasi.ro**, **popagabriel@go.com** . Pe această cale co
pot purta cu redacţia un dialog privitor la materialele trimise acesteia,
numerelor revistei etc.
- La *problemele de tip L* se primesc soluţii de la orice iubitor de matematici
(indiferent de *preocupare profesională* sau *vârstă*). Fiecare dintre soluţ
probleme - ce sunt publicate în revistă după un an - va fi urmată de num
celor care au rezolvat-o.
- **Adresăm cu insistenţă rugămintea ca materialele trimise revis
fie (să nu fi fost) trimise şi altor publicaţii.**

Anul VII, Nr. 1 **Ianuarie – Iunie**

RECREAȚII MATEMATICE

REVISTĂ DE MATEMATICĂ PENTRU ELEVI ŞI PROFES

$$e^{i\pi} = -1$$

Editura "Crenguța Gâldău"

IAŞI - 2005

<u>Semnificația formulei de pe copertă:</u>

Într-o formă concisă, formula $e^{i\pi} = -1$ leagă cele patru ramuri fun
tale ale matematicii:

ARITMETICA	reprezentată de 1
GEOMETRIA	reprezentată de π
ALGEBRA	reprezentată de i
ANALIZA MATEMATICĂ	reprezentată de e

Adresa redacției:

Catedra de Matematică – Universitatea Tehnică "Gh. Asachi" Iaşi
Bd. Carol I, nr.11, 700506, Iaşi
Tel. 032 – 213737 / int. 123
E-mail: acord@math.tuiasi.ro

ISSN 1582 - 1765
Bd. N. Iorga, Bl. K2, ap. 4, IAŞI
Tel. / Fax: 032 – 230598

TIPĂRITĂ LA SL&F IMPEX IAŞI
Bd. Carol I, nr. 3-5
Tel. 0788 498933
E-mail: simonaslf@yahoo.com

Anul VII, Nr. 1 **Ianuarie – Iunie**

RECREAŢII MATEMATICE

REVISTĂ DE MATEMATICĂ PENTRU ELEVI ŞI PROFES

$$e^{i\pi} = -1$$

Revistă cu apariţie semestrială
publicată de

ASOCIAŢIA “RECREAŢII MATEMATICE

IAŞI - 2005

200 de ani de la naşterea lui Dirichlet

Johan Peter Gustav Lejeune- a fost unul dintre marii matematicien lui XIX şi ai tuturor timpurilor.

S-a născut la 13 februarie 1805, tatea Düren, oraş situat la jumătate dintre Köln şi Aachen, în Germania în Imperiul Francez al lui Napoleon) unui funcţionar poştal. Numele de fa *Dirichlet*, mai precis *Lejeune-Dirichl* de la bunicul său care a locuit în oraş în apropiere de Liège, în Belgia ("L Richlet").

Dirichlet a fost un elev strălu nând studiile secundare la vârsta Încă înainte de a intra la gimnaziul dovedeşte pasiune pentru matema tuind banii de buzunar pe cărţi de m

După absolvirea colegiului, la Köln, se hotărăşte să urmeze cursurile u în Franţa. Soseşte la Paris în 1822, purtând cu el ca pe o biblie,*Disquisitio meticae*, cunoscutul tratat al lui **Gauss**. Aici va urma cursurile Facultăţi de la Collège de France. Începând din vara lui 1823 este bine primit în casa Foy, unde locuieşte şi dă lecţii de limbă germană soţiei şi fiicei acestuia. Maximilien Sébastien Foy a fost una dintre figurile remarcabile ale războ Napoleon şi din 1819 lider al opoziţiei liberale din Camera deputaţilor.

La Paris, **Dirichlet** intră în contact cu mari matematicieni precum Poisson, Laplace şi Fourier. Ultimul l-a impresionat în mod deosebit, fapt c consecinţă interesul său pentru seriile trigonometrice şi fizica matematică. perioadă redactează *prima sa contribuţie originală în matematică: de marea teoremă a lui Fermat pentru cazul* $n = 5$. Această teoremă afirmă orice număr natural n, $n > 2$, nu există numere întregi diferite de 0 a $x^n + y^n = z^n$. Demonstraţia completă a acestei teoreme a fost dată abia în ai secolului XX (v. [**1**], [**2**], [**4**], [**5**]). Ulterior, **Dirichlet** a fost primul ma care a observat că unele demonstraţii date pentru cazuri particulare al lui Fermat, de către mari matematicieni, erau greşite deoarece se bazau că în inele de extensiune a lui $\mathbb{Z}$, descompunerea unui număr ca produs ireductibili (care nu se mai pot descompune) este unică, ipoteză care este fa unele dintre aceste inele. Această observaţie a impus diferenţierea într de număr ireductibil şi cea de număr prim (un număr diferit de zero şi numeşte număr prim dacă ori de câte ori divide un produs de numere, divid unul dintre factori) şi a avut implicaţii profunde în dezvoltarea teoriei nu algebrei.

La sfârşitul anului 1825, după moartea generalului Foy, **Dirichlet** se hotă întoarcă în Germania. La recomandarea lui **Alexander von Humboldt** doctorat onorific (nu cunoştea limba latină, condiţie obligatorie în acel ti obţinerea unui doctorat) ceea ce îi permite să-şi susţină teza de docenţă ş titlul de profesor. Predă la Universitatea din Breslau (astăzi Wroklaw la Liceul militar din Berlin şi, timp de 27 de ani neîntrerupt, la Univer Berlin. Dintre cei mai străluciţi elevi ai săi, din această perioadă, men L. Kronecker şi B. Riemann.

În 1831 se căsătoreşte cu Rebeca Mendelssohn, soră cu celebrul compo

Contemporanii săi îl apreciau ca pe un excelent matematician şi profe era lipsit de anumite defecte: se îmbrăca neglijent, era mereu cu o ţigară o cafea în faţă, puţin preocupat de imaginea sa şi mereu în întârziere.

În 1843, maestrul şi prietenul său **Karl Jacobi** este diagnosticat ca fi de diabet şi Dirichlet îl însoţeşte pentru o perioadă de 18 luni în Italia, und Roma, Florenţa, Sicilia. Climatul blând din Italia ameliorează starea de lui Jacobi. Călătoria efectuată în 1844 - 1845 a fost posibilă datorită une obţinute de Alexander von Humboldt de la Friedrich Wilheem al IV-lea.

După moartea lui Gauss, în 1855, succede acestuia la catedra de la Un din Göttingen. Activitatea sa în acest mare centru matematic al lumii e la 5 mai 1859 Dirichlet trece în lumea umbrelor ca urmare a unei maladii

Evantaiul lucrărilor lui **Dirichlet** ilustrează profunzimea culturii mate mane din perioada de început a epocii de aur a acesteia, inaugurată de Ka Gauss, cel mai mare matematician al timpurilor moderne. Lucrările lui aco aspectele ale matematicii; totuşi cele de teoria numerelor, analiză şi teoria lui sunt cele mai importante. Multe noţiuni şi rezultate îi poartă acum nu

În teoria numerelor a demonstrat că, dacă a şi b sunt numere întregi şi în şirul $(an + b)_{n \in \mathbb{N}}$ există o infinitate de numere prime, rezultat cunoscut s de *teorema lui Dirichlet*. Demonstraţia dată de Dirichlet acestei teorem este considerată actul de naştere a teoriei analitice a numerelor. Dirichle contribuţie importantă la *elaborarea instrumentelor de lucru pentru teoria numerelor* prin introducerea seriilor ataşate funcţiilor aritmetice, numite *ile lui Dirichlet*, crearea *teoriei unităţilor* şi preocupările sale privind *re numerelor întregi prin forme pătratice aritmetice* (v. [**4**]).

De asemenea, lui Dirichlet datorăm *principiul sertarelor*, ce afirmă că, $n + 1$ obiecte în n sertare, atunci cel puţin un sertar conţine cel puţin do Dirichlet utilizează acest principiu în studiul corpului numerelor algebrice

În teoria potenţialului se ocupă cu problema Dirichlet privind existenţ armonice. Tot el a dat *condiţia Dirichlet* pentru convergenţa seriilor trigo

Ideile lui **Dirichlet** nu au pierdut strălucirea odată cu trecerea timpul tarea matematicii în ultimii 200 de ani a pus în evidenţă profunzimea ace

Bibliografie

1. **A. Corduneanu** - *Despre Marea teoremă a lui Fermat*, RecMat - 1/1999
2. **P. Minuţ** - *Pierre Fermat - Patru secole de la naşterea sa*, RecMat - 2/2
3. **P. Minuţ** - *Numere prime din progresii aritmetice*, RecMat - 1/2003, 15-
4. **P. Minuţ** - *Teoria numerelor*, Ed. Matrix-Rom, Buc., 2001 (pp. 35-50, 2
5. **M. M. Postnikov** - *Despre teorema lui Fermat*, Ed. did. şi ped., Bucure

Prof. dr. Petru MINU

Fractali (II)

Ştefan FRUNZĂ[1], **Irina FRUNZĂ**[2]

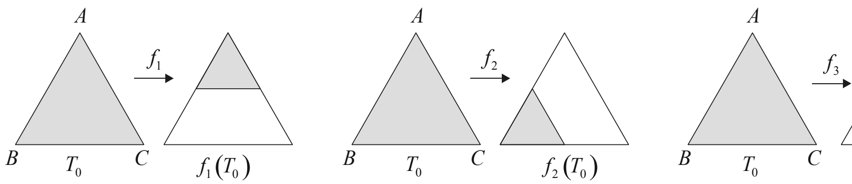
Fractal este un obiect fracţionat la infinit (cuvântul derivă din latin
derivat, la rândul său, din verbul *frangere* - a rupe, a sparge). Terme
introdus de americanul de origine poloneză **Benoit Mandelbrot** în 1975.
în acelaşi timp precisă şi generală a unui obiect fractal este dificilă. Pentru
vagă, fractalii sunt, după Mandelbrot, mulţimi care prezintă neregularită
scările. O structură fractală e aceeaşi în mic ca şi în mare, aproape sau d

În natură se pot întâlni *structuri prefractale* (termenul îi aparţine de
lui Mandelbrot). Ca exemple ar putea servi frunzele de spini, cele de fe
de zăpadă, norii etc. Structurile fractale sunt abstracţiuni matematice ol
regulă, din structuri prefractale prin trecere la limită. Şirul de mulţimi
care ne dă la limită o structură fractală este, de regulă, un şir recure
obţine dintr-o structură prefractală iniţială (*iniţiator)* aplicându-i succe
transformare (*generator*). Exemple în acest sens se găsesc în [**1**]-[**6**]: *curba
curba fulgului de zăpadă, praful lui Cantor, sita lui Sierpinski, carpeta lui
buretele lui Menger* etc.

În [**1**], pe care o continuăm în nota de faţă, au fost stabilite sau indicat
unile în sens Richardson ale câtorva fractali: curba lui Koch are dimensiun
$D = \dfrac{\log 4}{\log 3}$, praful lui Cantor – $\dfrac{\log 2}{\log 3}$, sita lui Sierpinski – $\dfrac{\log 3}{\log 2}$, sita tridir
a lui Sierpinski – $\dfrac{\log 4}{\log 2}$, buretele lui Menger – $\dfrac{\log 20}{\log 3}$ etc.

O altă caracteristică a unei structuri fractale, pe care ne propunem să o
în continuare, este *autosimilaritatea.*

Majoritatea structurilor fractale sunt autosimilare într-un sens care va
în continuare. Să începem prin a considera *covorul lui Sierpinski.* El se po
pornind de la triunghiul echilateral iniţial ABC şi aplicând succesiv tre
omotetia de centru A şi raport $1/2$ şi analoagele cu centrele B şi C (să
respectiv cu f_1, f_2, f_3).

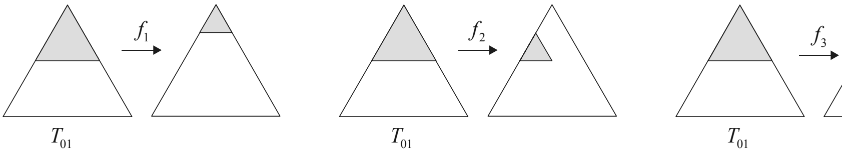


Astfel, după primul pas iterativ, putem scrie:

$$S_1 = f_1(T_0) \cup f_2(T_0) \cup f_3(T_0),$$

[1] Prof. dr., Facultatea de matematică, Univ. "Al. I. Cuza", Iaşi
[2] Profesor, Grupul Şcolar Agricol "M. Kogălniceanu", Miroslava (Iaşi)

cele trei mulţimi ale reuniunii putând avea în comun două câte două c
punct. Să notăm $f_1(T_0) = T_{01}$ şi să urmărim efectul aplicării celor tr
asupra lui.



Urmărind analog transformările lui $f_2(T_0) = T_{02}$ şi $f_3(T_0) = T_{03}$ cons

$$S_2 = f_1(S_1) \cup f_2(S_1) \cup f_3(S_1).$$

Se poate demonstra prin inducţie că

$$S_{n+1} = f_1(S_n) \cup f_2(S_n) \cup f_3(S_n), \quad n \geq 1,$$

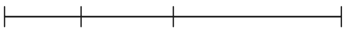
unde S_n este aproximanta de ordin n a covorului lui Sierpinski S [**1**]. Mu
membrul drept al relaţiei (1) nu pot avea în comun două câte două dec
un punct.

Din relaţia (1) se poate deduce (elementar) că

$$S = f_1(S) \cup f_2(S) \cup f_3(S).$$

Mulţimile din membrul drept al lui (2) pot avea două câte două cel mul
în comun şi fiecare este similară cu S cu raportul de asemănare $\frac{1}{2}$.

O asemenea situaţie am mai întâlnit-o doar la figurile cele mai simple
tria elementară (segmente de dreaptă sau arce de cerc).



Un segment de dreaptă poate fi împărţit în oricât de multe segmente adia
lare fiecare cu segmentul iniţial.

Rezultatul precedent are o strânsă legătură cu noţiunile de măsură şi d
Să amintim rezultatul din plan că raportul ariilor a două figuri asemene
cu pătratul raportului de asemănare. Un rezultat similar are loc în spaţiu
volumelor a două corpuri asemenea este egal cu puterea a treia a rap
asemănare.

În [**1**] s-a arătat că şi obiectele fractale pot fi "măsurate" şi că măsu
legătură cu dimensiunea fractală. Dacă rezultatul de geometrie clasică a
sus s-ar extinde corespunzător la obiecte fractale, atunci din relaţia (2) a

$$m(S) = m(f_1(S)) + m(f_2(S)) + m(f_3(S)) =$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^D m(S) + \left(\frac{1}{2}\right)^D m(S) + \left(\frac{1}{2}\right)^D m(S),$$

unde $m(S)$ este măsura lui S iar D este dimensiunea fractală a lui S. Ac

$0 < m(S) < \infty$ (ceea ce e destul de rezonabil), obţinem din (3) relaţia

$$1 = 3\left(\frac{1}{2}\right)^D$$

care permite determinarea directă a lui D: $2^D = 3$, $D = \dfrac{\log 3}{\log 2}$. Reg
dimensiunea determinată prin metoda lui Richardson.

O proprietate analoagă de "autosimilaritate" o prezintă şi *mulţimea l*
ale cărei aproximante succesive sunt:

$$C_0 = [0,1], \qquad C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right],$$

$$C_2 = \left[0, \frac{1}{3^2}\right] \cup \left[\frac{2}{3^2}, \frac{3}{3^3}\right] \cup \left[\frac{6}{3^2}, \frac{7}{3^2}\right] \cup \left[\frac{8}{3^2}, \frac{9}{3^2}\right], \quad \ldots$$

Se observă că $\left[0, \dfrac{1}{3}\right] = f_1(C_0)$, unde $f_1(x) = \dfrac{x}{3}$ şi $\left[\dfrac{2}{3}, 1\right] = f_2(C_0)$, unde $f($
Se poate demonstra că

$$C_{n+1} = f_1(C_n) \cup f_2(C_n), \quad n \geq 1,$$

de unde se deduce (elementar) că

$$C = f_1(C) \cup f_2(C).$$

Întrucât f_1 şi f_2 sunt similarităţi de raport $\dfrac{1}{2}$, pentru determinarea d
fractale se obţine ecuaţia $1 = 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^D$, de unde $D = \dfrac{\log 2}{\log 3}$ în concordanţă c
determinată prin metoda lui Richardson.

Sistemele de funcţii $\{f_1, f_2, f_3\}$ (implicat în covorul lui Sierpinski) şi $\{$
plicat în mulţimea lui Cantor) se numesc sisteme iterate de funcţii. *Curba*
poate obţine printr-un sistem iterat de 4 similarităţi (implicând omotetii
toate de raport $\dfrac{1}{3}$ [**2**]. Pentru determinarea dimensiunii fractale a curbe
se obţine ecuaţia $1 = 4\left(\dfrac{1}{3}\right)^D$, de unde $D = \dfrac{\log 4}{\log 3}$ în concordanţă iarăşi c
determinată prin metoda lui Richardson.

Bibliografie

1. **Şt. Frunză** - *Fractali*, RecMat - 2/2002, 1-5.
2. **Şt. Frunză** - *Fractali*, curs opţional, anul IV, Fac. Matematică - Informa
3. **J. - F. Gornyet** - *Physique et structures fractales*, Masson, Paris, 1992.
4. **B. B. Mandelbrot** - *Les objects fractales: forme, hasard et dimension*, Fl
Paris 1975.
5. **A. Le Méhauté** - *Les géométries fractales*, Hermès, Paris, 1990.
6. **H. Takayasu** - *Fractales in the physical sciences*, Manchester Univer
Manchester and New York, 1990.

Asupra monotoniei unor şiruri

Dumitru MIHALACHE, Marian TETIVA[1]

În această notă ne propunem să investigăm monotonia şirurilor care a
cizarea ordinului de convergenţă al câtorva şiruri uzuale. Mai precis, d
şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ este a (finită), iar $(z_n)_{n\geq 1}$ este un şir cu limita zero astfel î

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a}{z_n},$$

finită şi nenulă, atunci spunem că $(z_n)_{n\geq 1}$ dă *ordinul de convergenţă* al şiru
către limita sa (este un fel de a măsura "rapiditatea" cu care $(a_n)_{n\geq 1}$ tinde l
ajutorul unor şiruri cunoscute şi/sau mai accesibile; a se vedea şi [**2**]). Ne
să cercetăm dacă şirul cu termenul general $(a_n - a)/z_n$ este sau nu monoto
unor şiruri $(a_n)_{n\geq 1}$ des întâlnite şi importante în analiza matematică.

Primul şir de care ne ocupăm este cel cu termenul general

$$E_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Aşa cum se ştie, acesta este convergent, are limita e, iar ordinul său de co
este dat de relaţia

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot n!(e - E_n) = 1,$$

ceea ce se verifică uşor cu teorema lui Cesàro - Stolz (cazul $\frac{0}{0}$). Pentru a ve
tonia şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general $x_n = n \cdot n!(e - E_n)$ trebuie să
x_n cu x_{n+1}. Avem

$$x_n \ ? \ x_{n+1} \Leftrightarrow n(e - E_n) \ ? \ (n+1)^2 \left(e - E_n - \frac{1}{(n+1)!}\right) \Leftrightarrow \frac{n+1}{n!(n^2+n+1)}$$

Este bine cunoscută şi inegalitatea $e - E_n < \dfrac{1}{n \cdot n!}$ (v. [**3**]); cum $\dfrac{n}{n!(n^2}$
$< \dfrac{1}{n \cdot n!}$, de aici nu putem obţine nimic. Atunci vom proceda astfel:

$$e - E_n = \frac{1}{n!} \lim_{p\to\infty} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)} >$$

$$> \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right.$$

Un calcul simplu (chiar dacă, poate, neplăcut!) arată că expresia de pe ul
este egală cu

$$\frac{n^3 + 10n^2 + 34n + 41}{n!(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} > \frac{n+1}{n!(n^2+n+1)},$$

ultima inegalitate fiind echivalentă cu

$$n^5 + 11n^4 + 45n^3 + 85n^2 + 75n + 41 > n^5 + 11n^4 + 45n^3 + 85n^2 + 74$$

adică evidentă pentru orice număr natural n. Astfel am demonstrat

[1] Profesori, Colegiul Naţional "Gheorghe Roşca Codreanu", Bârlad

Propoziţia 1. *Şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *cu termenul general* $x_n = n \cdot n!(e - E_n)$
crescător.

O altă metodă de a demonstra Propoziţia 1 este prezentată în

Exerciţiul 1. *Arătaţi că şirul* $(u_n)_{n\geq 1}$ *cu termenul general*

$$u_n = E_n + \frac{n+1}{n!(n^2+n+1)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

este strict crescător cu limita e şi deduceţi de aici inegalitatea $x_n < x_{n+1}$

Şi încă o observaţie: avem acum inegalităţile

$$\frac{n+1}{n!(n^2+n+1)} < e - E_n < \frac{1}{n \cdot n!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

care implică, şi ele, faptul că $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot n!(e - E_n) = 1$ (cum?).

Următorul de care ne ocupăm este *şirul lui Euler*, care defineşte număru
considerăm

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad \forall n \geq 1.$$

Iar facem apel la o relaţie cunoscută (a se vedea [**4**], sau [**6**]), anume

$$\lim_{n\to\infty} n\,(e - e_n) = \frac{e}{2};$$

deci ne interesează acum (din punct de vedere al monotoniei) şirul (x_n)
menul general $x_n = n(e - e_n)$, $\forall n \geq 1$. Dar, înainte, să demonstrăm

Lema 1. *Funcţia definită prin* $f(x) = x\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$*, pentru orice* $x > 0$
convexă pe $(0, \infty)$.

Demonstraţie. Vom folosi prima dintre inegalităţile

$$\frac{2}{2x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$$

(pentru care se poate vedea tot [**6**]; de altfel, sunt nişte inegalităţi destul
late, care arată că, pentru funcţia logaritm natural, punctul intermediar d
lui Lagrange este cuprins între mediile aritmetică şi geometrică ale ext
intervalului pe care se aplică, aici intervalul $[x, x+1]$), desigur, după ce v
derivata a doua. Cititorul este invitat să verifice că

$$f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left[x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x+1}\right], \quad \forall x > 0 \quad \text{şi}$$

$$f''(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left[x \ln^2\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x+1} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{x+3}{(x+1)^2}\right],$$

Atunci, procedând cum am anunţat, vom putea scrie

$$f''(x) > \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left[x \frac{4}{(2x+1)^2} + \frac{2}{x+1} \cdot \frac{2}{2x+1} - \frac{x+3}{(x+1)^2}\right] \quad \text{s}$$

$$f''(x) > \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \frac{3x+1}{(x+1)^2(2x+1)^2}, \quad \forall x > 0,$$

de unde $f''(x) > 0$, $\forall x > 0$, şi lema este dovedită.

Propoziţia 2. *Şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *definit prin*

$$x_n = n\left[e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right] = n(e - e_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

este strict crescător.

Demonstraţie. Inegalitatea de demonstrat este $n(e - e_n) < (n+1)(e$
este echivalentă cu $(n+1)e_{n+1} - ne_n < e$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Cum

$$\lim_{n\to\infty} [(n+1)e_{n+1} - ne_n] = \lim_{n\to\infty} [(n+1)(e_{n+1} - e) - n(e_n - e) + e]$$

înseamnă că ar fi suficient să arătăm că şirul $((n+1)e_{n+1} - ne_n)_{n\geq 1}$
crescător. Dar monotonia acestui şir decurge din inegalitatea

$$(n+1)e_{n+1} - ne_n < (n+2)e_{n+2} - (n+1)e_{n+1} \Leftrightarrow f(n+2) + f(n) > 2$$

această ultimă formă nu este nimic altceva decât inegalitatea lui Jense
funcţiei convexe f şi numerelor n şi $n+2$. Demonstraţia este încheiată.

Exerciţiul 2. *Studiaţi monotonia şirului* $(x_n)_{n\geq 1}$ *definit prin*

$$x_n = n\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - e\right], \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Mai departe considerăm şirul cu termenul general

$$\zeta_n(\alpha) = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

unde $\alpha > 1$ este un număr fixat. Se vede imediat că acest şir este stric
şi (ceva mai greu) mărginit superior, deci are o limită finită, pe care o
$\zeta(\alpha)$. În paranteză fie spus, funcţia care asociază fiecărui număr real $\alpha >$
se numeşte *funcţia zeta a lui Riemann* şi are mare importanţă în multe d
matematicii. Se mai ştie că ordinul de convergenţă al şirului $(\zeta_n(\alpha))_{n\geq 1}$
egalitatea

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha-1}(\zeta(\alpha) - \zeta_n(\alpha)) = \frac{1}{\alpha - 1}$$

(vezi, de exemplu, [**8**]). Aşadar, ne interesează monotonia şirului $(x_n)_{n\geq 1}$

$$x_n = n^{\alpha-1}\left(\zeta(\alpha) - \zeta_n(\alpha)\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*;$$

în legătură cu aceasta avem

Propoziţia 3. *Şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$*, cu termenul general* $x_n = n^{\alpha-1}(\zeta(\alpha$
$\forall n \in \mathbb{N}^*$*, este strict crescător.*

Demonstraţie. Inegalitatea $x_n < x_{n+1}$ devine în acest caz (după câte
ţinând cont de $\zeta_{n+1}(\alpha) = \zeta_n(\alpha) + \dfrac{1}{(n+1)^\alpha}$)

$$\frac{1}{(n+1)[(n+1)^{\alpha-1} - n^{\alpha-1}]} + \zeta_n(\alpha) < \zeta(\alpha).$$

Notând

$$u_n = \frac{1}{(n+1)[(n+1)^{\alpha-1} - n^{\alpha-1}]} + \zeta_n(\alpha), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

observăm că este suficient să demonstrăm că şirul $(u_n)_{n\geq 1}$ este strict cr
să rezulte inegalitatea pe care o avem de demonstrat (deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} u_n =$
ce se stabileşte uşor). Avem

$$u_n < u_{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)[(n+1)^{\alpha-1}-n^{\alpha-1}]} < \frac{1}{(n+2)[(n+2)^{\alpha-1}-(n+1)^{\alpha-1}]} + $$

$$\frac{1}{(n+1)^{\alpha} - n^{\alpha-1}(n+1)} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha}} < \frac{1}{(n+2)^{\alpha} - (n+1)^{\alpha-1}(n+2}$$

$$n^{\alpha-1}(n+1)(n+2)^{\alpha} - n^{\alpha-1}(n+1)^{\alpha} < (n+1)^{2\alpha} \Leftrightarrow$$

$$n^{\alpha-1}[(n+2)^{\alpha} - (n+1)^{\alpha}] < (n^2+2n+1)^{\alpha} - (n^2+2n)^{\alpha}.$$

Pentru a demonstra această ultimă inegalitate, aplicăm teorema lui Lagran
$x \mapsto x^{\alpha}$, pe intervalele $[n+1, n+2]$ şi $[n^2+2n, n^2+2n+1]$; obţinem

$$(n+2)^{\alpha} - (n+1)^{\alpha} = \alpha c_n^{\alpha-1}, \quad c_n \in [n+1, n+2] \quad \text{şi}$$

$$(n^2+2n+1)^{\alpha} - (n^2+2n)^{\alpha} = \alpha d_n^{\alpha-1}, \quad d_n \in [n^2+2n, n^2+2n+$$

Cum $nc_n < n(n+2) = n^2+2n < d_n$ şi $\alpha > 1$, rezultă $n^{\alpha-1} \cdot \alpha c_n^{\alpha-1} < \alpha$
este tocmai inegalitatea de demonstrat.

În fine, ne vom ocupa de şirul care dă ordinul de convergenţă al şirului c
constanta lui Euler. Ştim că aceasta este

$$c = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$$

şi că

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n - c\right) = \frac{1}{2}$$

(a se vedea [**5**]). Avem şi aici nevoie, mai întâi, de un mic rezultat ajutăt

Lema 2. *Funcţia* $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ *dată de*

$$f(x) = x\ln x + (x+2)\ln(x+2) - 2(x+1)\ln(x+1) - \frac{1}{x+1}, \quad \forall x$$

este strict descrescătoare şi strict pozitivă pe intervalul $(0,\infty)$.

Demonstraţie. Funcţia f este strict descrescătoare pe intervalul $(0,$

$$f'(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{(x+1)^2}\right) + \frac{1}{(x+1)^2} < 0, \quad \forall x > 0,$$

conform inegalităţii $\ln(1+t) < t$, $\forall t > -1$, $t \neq 0$. Cum $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$
rutină!) rezultă că $f(x) > 0$, $\forall x \in (0,\infty)$.

Exerciţiul 3. *Funcţia* f *din Lema 2 este strict convexă pe intervalul*

Propoziţia 4. *Şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *cu termenul general*

$$x_n = n\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n - c\right)$$

este strict crescător.

Demonstraţie. Inegalitatea $x_n < x_{n+1}$ se rescrie în forma

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + 1 + n \ln n - (n+1) \ln(n+1) > c$$

şi ar fi demonstrată dacă am putea arăta că şirul $(u_n)_{n \geq 1}$, dat de

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + 1 + n \ln n - (n+1) \ln(n+1), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

este strict descrescător (deoarece $(u_n)_{n \geq 1}$ are limita c - demonstraţi!). D
tatea $u_n > u_{n+1}$ se reduce la

$$n \ln n + (n+2) \ln(n+2) - 2(n+1) \ln(n+1) - \frac{1}{n+1} > 0$$

şi decurge din lema anterioară, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$; astfel, demons
încheiată.

Şi, odată cu ea, este încheiată şi această notă. Dar calculele pot cont
exemplu:

Exerciţiul 4. *Studiaţi monotonia şirului* $(x_n)_{n \geq 1}$, *pentru*

a) $x_n = (n+1) \left[e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]$;

b) $x_n = (n+1) \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - e \right]$;

c) $x_n = \sqrt{n} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} - l\right)$, *unde* $l = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \right.$

Bibliografie

1. **D. Andrica, V. Berinde, L. Toth, A. Vernescu** - *Ordinul de converge*
şiruri, G. M. A, 7-8/1998.
2. **V. Berinde** - *Despre ordinul de convergenţă al şirurilor de numere re*
4/1998.
3. **Gh. Gussi, O. Stănăşilă, Gh. Stoica** - *Analiză matematică*, manual p
a XI-a, Editura Didactică şi Pedagogică, 1983.
4. **E. Păltănea** - *Asupra vitezei de convergenţă a şirului* $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, G. M.
5. **A. Vernescu** - *Ordinul de convergenţă al şirului de definiţie a constante*
G. M. 10-11/1983.
6. **A. Vernescu** - *O demonstraţie simplă a unei inegalităţi relative la num*
M. 5-6/1988.
7. **A. Vernescu** - *Asupra convergenţei unui şir cu limita* $\ln 2$, G. M. 10-11/
8. **A. Vernescu** - *Asupra seriei armonice generalizate*, G. M. A, 3/1997.

O teoremă uitată - inegalitatea lui Surány

Gabriel DOSPINESCU[1]

Cu mult timp în urmă, pe lista problemelor propuse pentru prestigiosu
"Miklos Schweitzer" a apărut şi următoarea inegalitate datorată lui Surá

Teoremă. *Pentru orice numere reale nenegative* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *are loc i*

$$(n-1)\left(a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n\right) + na_1a_2\cdots a_n \geq$$
$$\geq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \cdots + a\right.$$

Departe de a fi o simplă aplicaţie a unor inegalităţi cunoscute – cel pu
câte cunoaştem până în prezent – această teoremă dificilă reprezintă o
foarte tare, ce permite rafinări ale multor inegalităţi clasice. Fiind mai pu
cută, vom prezenta pentru început demonstraţia ei, deloc facilă, urmând
să subliniem câteva consecinţe interesante. Aşadar,

Demonstraţia teoremei. Vom folosi inducţia matematică. Pent
inegalitatea este trivială. Să presupunem că am reuşit să o demonstrăm
variabile şi să considerăm $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1} \geq 0$. Datorită simetriei şi o
acestei inegalităţi, putem presupune că $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_{n+1}$ şi $a_1 + a_2 + \cdot$
Să observăm însă că inegalitatea pe care trebuie să o demonstrăm se resc

$$n\sum_{i=1}^{n} a_i^{n+1} + na_{n+1}^{n+1} + na_{n+1}\prod_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1}\prod_{i=1}^{n} a_i - (1+a_{n+1})\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^n + a_{n+1}^n\right.$$

Ipoteza de inducţie asigură valabilitatea inegalităţii

$$na_{n+1}\prod_{i=1}^{n} a_i \geq a_{n+1}\sum_{i=1}^{n} a_i^{n-1} - (n-1)a_{n+1}\sum_{i=1}^{n} a_i^n.$$

Ca urmare, mai rămâne de demonstrat inegalitatea

$$\left(n\sum_{i=1}^{n} a_i^{n+1} - \sum_{i=1}^{n} a_i^n\right) - a_{n+1}\left(n\sum_{i=1}^{n} a_i^n - \sum_{i=1}^{n} a_i^{n-1}\right) +$$
$$+ a_{n+1}\left(\prod_{i=1}^{n} a_i + (n-1)a_{n+1}^n - a_{n+1}^{n-1}\right)$$

Desigur, va fi suficient să demonstrăm inegalităţile

$$\left(n\sum_{i=1}^{n} a_i^{n+1} - \sum_{i=1}^{n} a_i^n\right) - a_{n+1}\left(n\sum_{i=1}^{n} a_i^n - \sum_{i=1}^{n} a_i^{n-1}\right) \geq 0,$$

$$a_{n+1}\left(\prod_{i=1}^{n} a_i + (n-1)a_{n+1}^n - a_{n+1}^{n-1}\right) \geq 0$$

pentru a finaliza demonstraţia pasului inductiv. Din fericire, (5) şi (6) nu s
Într-adevăr, (5) rezultă combinând trei observaţii simple. Prima este i

[1] Student, École Normale Supérieure, Paris

$n\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^n - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^{n-1} \geq 0$, ce rezultă imediat din inegalitatea lui Cebâşev, a

relaţia evidentă $a_{n+1} \leq \dfrac{1}{n}$ şi, în sfârşit, a treia observaţie este inegalitatea

$$n\sum_{i=1}^{n} a_i^{n+1} - \sum_{i=1}^{n} a_i^n \geq \frac{1}{n}\left(n\sum_{i=1}^{n} a_i^n - \sum_{i=1}^{n} a_i^{n-1}\right),$$

ce se poate obţine adunând toate inegalităţile de forma $na_i^{n+1} + \dfrac{1}{n}a_i^{n\cdot}$
$i = \overline{1, n}$. (6) este şi mai uşor de demonstrat; rezultă din următorul şir de
şi identităţi evidente:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i + (n-1)a_{n+1}^n - a_{n+1}^{n-1} = \prod_{i=1}^{n} (a_i - a_{n+1} + a_{n+1}) + (n-1)a_{n+1}^n -$$

$$\geq a_{n+1}^n + a_{n+1}^{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{n+1}) + (n-1)a_{n+1}^n - a_{n+1}^{n-1} = 0.$$

Astfel, am reuşit să dovedim (2) şi demonstraţia se încheie.

Odată demonstrată (1), să vedem ce obţinem pentru valori mici ale nu
variabile.

Pentru $n = 3$ obţinem

$$a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + 3a_1a_2a_3 \geq a_1^2(a_2 + a_3) + a_2^2(a_3 + a_1) + a_3^2(a_1 + a_2$$

adică binecunoscuta *inegalitate a lui Schur*.

Pentru $n = 4$, după calcule de rutină, rezultă inegalitatea

$$2\left(\sum_{i=1}^{4} a_i^4 + 2\prod_{i=1}^{4} a_i\right) \geq \sum_{1\leq i<j\leq 4} a_ia_j\left(a_i^2 + a_j^2\right),$$

care este mai tare decât *inegalitatea lui Turkevici* [**1**]:

$$\sum_{i=1}^{4} a_i^4 + 2\prod_{i=1}^{4} a_i \geq \sum_{1\leq i<j\leq 4} a_i^2a_j^2.$$

Continuăm cu simple observaţii ce decurg din (1). Astfel, luând $s =$
$+\cdots + a_n$, rezultă că

$$n \cdot a_1a_2\cdots a_n \geq \sum_{i=1}^{n} a_i^{n-1}\left(s - (n-1)a_i\right).$$

Să observăm că în ipoteza $a_i < \dfrac{s}{n-1}$, $i = \overline{1, n}$, obţinem o întărire a clasicei
a lui *D. S. Mitrinović* şi *D. D. Adamović* [**2**]:

$$a_1a_2\cdots a_n \geq (s-(n-1)a_1)(s-(n-1)a_2)\cdots(s-(n-1)a_n), \quad s = a_1 + a_2$$

dacă $a_i < \dfrac{s}{n-1}$, $i = \overline{1, n}$. (Pentru a vedea că (7) este mai tare decât (8
decât să aplicăm inegalitatea mediilor în (7).)

Putem obţine uşor din (1) şi următoarea rafinare a inegalităţii mediilo

$$\frac{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n}{n} - a_1 a_2 \cdots a_n \geq \frac{n}{n-1}\left[\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^n - a_1 a\right.$$

Într-adevăr, să remarcăm că inegalitatea lui Jensen implică imediat inega

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \cdots + a_n^{n-1}\right) \geq n^2 \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a}{n}\right.$$

Din (1) şi (10), dupa câteva calcule simple, obţinem (9). Din păcate, pr metodă nu obţinem cea mai bună constantă în locul lui $\frac{n}{n-1}$ din membr inegalităţii (9). Am reuşit să demonstrăm că aceasta este $\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}$, d straţia depăşeşte cadrul acestei scurte note.

O aplicaţie surprinzătoare a inegalităţii lui Surányi o constituie şi urm

Propoziţie (Vasile Cârtoaje). *Pentru orice numere* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *inegalitatea*

$$a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n + n(n-1)a_1 a_2 \cdots a_n \geq$$

$$\geq a_1 a_2 \cdots a_n (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a}\right.$$

Demonstraţie. Din nou, vom folosi inducţia, dar vom vedea că pas se reduce exact la inegalitatea lui Surányi. Pentru $n = 3$, (11) coincid cu inegalitatea lui Schur. Să presupunem acum că (11) este adevărată pe variabile şi fie $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$. Aplicând ipoteza inductivă pentru fiecar $n-1$ numere dintre a_1, a_2, …, a_n, obţinem

$$a_j \cdot \sum_{i \neq j} a_i^{n-1} + (n-1)(n-2)a_1 a_2 \cdots a_n \geq a_1 a_2 \cdots a_n \left(\sum_{i \neq j} a_i\right)\left(\sum_{i \neq j} \frac{1}{a_i}\right),$$

Însumând relaţiile din (12), rezultă inegalitatea

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n a_i^{n-1}\right) - \sum_{i=1}^n a_i^n + n(n-1)(n-2)a_1 a_2 \cdots a_n \geq$$

$$\geq a_1 a_2 \cdots a_n \cdot \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i \neq j} a_i\right)\left(\sum_{i \neq j} \frac{1}{a_i}\right.$$

Fie acum $A = \sum_{i=1}^n a_i$, $B = \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}$. Este evident lanţul de egalităţi următor

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i \neq j} a_i\right)\left(\sum_{i \neq j} \frac{1}{a_i}\right) = \sum_{j=1}^n (A - a_j)\left(B - \frac{1}{a_j}\right) = nAB - AB - AB + n = (n-$$

care, împreună cu (13), implică

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{n-1}\right)-\sum_{i=1}^{n} a_i^n+n(n-1)(n-2)a_1a_2\cdots a_n \geq a_1a_2\cdots a_n\,(n+($$

Combinând acum (1) cu (14), obţinem

$$(n-2)\sum_{i=1}^{n} a_i^n + n(n-1)(n-2)a_1a_2\cdots a_n \geq (n-2)a_1a_2\cdots a_n\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)$$

care nu este altceva decât (11) înmulţită cu $n-2$. Pasul inductiv fiind d
propoziţia este dovedită.

Să observăm că şi (11) este o rafinare a inegalităţii mediilor. Scriind-o

$$\frac{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n}{n}-a_1a_2\cdots a_n \geq$$
$$\geq \frac{a_1a_2\cdots a_n}{n}\left[(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\right.$$

ne întrebăm dacă nu cumva este mai slabă decât (9). Răspunsul este ne
inegalitatea

$$\frac{n^2}{n-1}\left[\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n-a_1a_2\cdots a_n\right] \geq$$
$$\geq a_1a_2\cdots a_n\left[(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right.\right.$$

nu este adevarată pentru orice $a_1, a_2, ..., a_n > 0$. Aceasta se observă ime
$a_1 \to 0$ şi $a_2 = a_3 = ... = a_n = 1$. Însă nici (11) nu este mai tare decât (
rezultă iarăşi uşor.

În încheiere, menţionăm că, folosind aceeaşi tehnică precum cea utiliz
a demonstra (11), se poate arăta că inegalitatea

$$\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^n}{a_1a_2\cdots a_n}-n \geq$$
$$\geq (n-1)^{n-1}\left[(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)-\right.$$

este adevărată pentru $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ şi că este mai tare decât (11).
aceasta şi multe altele, într-o altă poveste…

Bibliografie

1. *Colecţia revistei Kvant.*

2. D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić, A. M. Fink - *Classical and New Ine
Analysis*, Kluwer Academic Publishers, 1993.

3. T. Andreescu, V. Cârtoaje, G. Dospinescu, M. Lascu - *Old and N
lities*, Gil Publishing House, 2004.

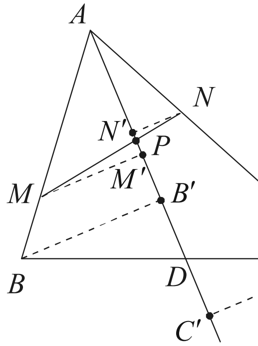
Rapoarte determinate de o ceviană şi o secantă într-un triunghi

***Titu ZVONARU*[1], *Bogdan IONIŢĂ*[2]**

În triunghiul ABC considerăm ceviana AD, cu $D \in (BC)$. Dacă o
tersectează laturile AB, AC şi ceviana AD în punctele M, N, respectiv
sunt adevărate următoarele două relaţii:

$$\frac{AM}{AB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{AC}{AN} \cdot \frac{PN}{PM} = 1 \quad (R_1), \qquad \frac{AP}{PD} = \frac{BC \cdot \dfrac{AM}{MB} \cdot \dfrac{AN}{NC}}{BD \cdot \dfrac{AM}{MB} + DC \cdot \dfrac{AN}{NC}}$$

Demonstraţie. (1) Fie M', N', B', C' proiecţiile punctelor M, N, B, respectiv C pe dreapta AD. Folosind triunghiuri dreptunghice asemenea, avem:

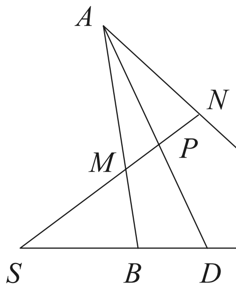


$$\frac{AM}{AB} = \frac{MM'}{BB'}; \quad \frac{BD}{DC} = \frac{BB'}{CC'};$$
$$\frac{AC}{AN} = \frac{CC'}{NN'}; \quad \frac{PN}{PM} = \frac{NN'}{MM'},$$

de unde, prin înmulţire, obţinem relaţia (R_1).

(2) Notăm $\dfrac{AM}{MB} = x$, $\dfrac{AN}{NC} = y$. Dacă $MN \parallel BC$, atunci $\dfrac{AP}{PD} = \dfrac{AM}{MB} = \dfrac{AN}{NC}$ şi relaţia (R_2) este adevărată.

Dacă $x \neq y$, fie $\{S\} = MN \cap BC$; presupunem că punctul B este situat între S şi C. Cu teorema lui Menelaus aplicată la $\triangle ABC$ şi transversala SMN obţinem $\dfrac{SB}{SC} \cdot \dfrac{NC}{NA} \cdot \dfrac{MA}{MB} = 1$, de unde rezultă $\dfrac{SB}{SB+a} = \dfrac{y}{x}$, adică $SB = \dfrac{ay}{x-y}$. Aplicând acum teorema lui Menelaus în $\triangle ABD$ cu transversala SMP avem $\dfrac{SB}{SD} \cdot \dfrac{PD}{PA} \cdot \dfrac{MA}{MB} = 1$, adică



$\dfrac{PA}{PD} = \dfrac{SB}{SB+BD} \cdot x$ şi obţinem $\dfrac{PA}{PD} = \dfrac{BC \cdot xy}{BD \cdot x + DC \cdot y}$, care este tocma

Prezentăm în continuare câteva aplicaţii ale relaţiilor (R_1) şi (R_2).

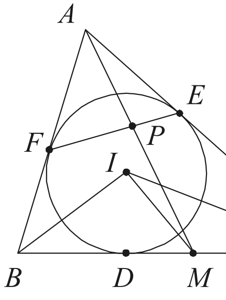
Problema 1. *Laturile (AB), (BC), (AC) ale triunghiului ABC sun cercului înscris de centru I în punctele D, E, respectiv F. Bisectoarea i unghiului $\widehat{BIC}$ intersectează latura BC în punctul M. Notăm $\{P\} =$ Să se demonstreze că $(DP$ este bisectoarea unghiului $\widehat{FDE}$.* (Propusă de *Olimpiada Mediteraneană de Matematică* în 1998.)

---

[1] Profesor, Comăneşti (Bacău)

[2] Profesor, Bucureşti

Soluţie. Cu notaţiile obişnuite într-un triunghi, avem $AE = AF = p - a$, $BD = BF = p - b$, $CD = CE = p - c$, $DF = 2\,(p-b)\sin\dfrac{B}{2}$, $DE = 2\,(p-c)\sin\dfrac{C}{2}$. Cu teorema bisectoarei şi teorema sinusurilor, în $\triangle BIC$ obţinem $\dfrac{BM}{MC} = \dfrac{BI}{CI} = \dfrac{\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{B}{2}}$.



Aplicând relaţia (R_1), avem $\dfrac{AF}{AB}\cdot\dfrac{MB}{MC}\cdot\dfrac{AC}{AE}\cdot\dfrac{PE}{PF} = 1$, de unde rezul

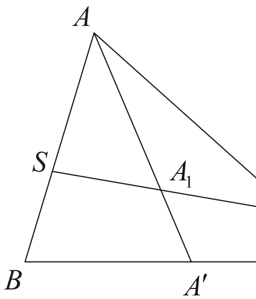
$$\frac{PE}{PF} = \frac{c}{p-a}\cdot\frac{\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}\cdot\frac{p-a}{b} = \frac{c\sin\frac{B}{2}}{b\sin\frac{C}{2}} = \frac{c\sin\frac{C}{2}}{b\sin\frac{B}{2}}\cdot\frac{\sin^2\frac{B}{2}}{\sin^2\frac{C}{2}} =$$

$$= \frac{c\sin\frac{C}{2}}{b\sin\frac{B}{2}}\cdot\frac{(p-a)\,(p-c)}{ac}\cdot\frac{ab}{(p-a)\,(p-b)} = \frac{(p-c)\sin\frac{C}{2}}{(p-b)\sin\frac{B}{2}} =$$

şi, conform reciprocei teoremei bisectoarei, $(DP$ este bisectoarea unghiulu

Problema 2. *Fie ABC un triunghi şi $M, N \in (BC)$, $P, Q \in (AC)$, R puncte astfel încât $BM = CN = CP = AQ = AR = BS = x$, unde* $\min\{AB, BC, CA\}$. *Fie A_1, B_1, C_1 puncte aparţinând segmentelor $(S$ (MQ) astfel încât AA_1, BB_1, CC_1 sunt ceviene de rang k în triunghi BRN, respectiv CQM. Demonstraţi că dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt c* (Generalizarea unei probleme propuse de **Constantin Cocea** în *RMT - 1* se obţine pentru $k = 0$.)

Soluţie. Notăm cu A' intersecţia dreptelor AA_1 şi BC. Avem $AS = c - x$, $AP = b - x$, $\dfrac{A_1S}{A_1P} = \left(\dfrac{c-x}{b-x}\right)^k$ şi cu relaţia (R_1) obţinem $\dfrac{AS}{AB}\cdot\dfrac{A'B}{A'C}\cdot\dfrac{AC}{AP}\cdot\dfrac{A_1P}{A_1S} = 1$, de unde rezultă că $\dfrac{A'B}{A'C} = \dfrac{c}{b}\left(\dfrac{b-x}{c-x}\right)^{k+1}$.

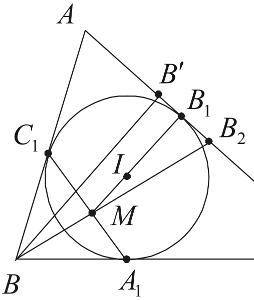


Consideraţii analoage relativ la punctele B' şi C'. Concluzia rezult reciproca teoremei lui Ceva.

Problema 3. *Laturile (AB), (BC), (AC) ale triunghiului ABC sun cercului înscris de centru I în punctele C_1, A_1, respectiv B_1. Dacă B_2 locul laturii (AC), demonstraţi că dreptele B_1I, A_1C_1 şi BB_2 sunt* (*Olimpiadă*, **Republica Moldova**)

Soluţie. Fie B' proiecţia vârfului B pe latura AC. Notăm cu M intersecţie al medianei BB_2 cu B_1I. Deoarece $B_1I \perp AC$, rezultă că ME

obţinem $\dfrac{BM}{MB_2} = \dfrac{B'B_1}{B_1B_2}$. Dar



$B'B_1 = p - a - c\cos A$, $B_1B_2 = \dfrac{b}{2} - (p-a)$, deci

$$\frac{BM}{MB_2} = \frac{p - a - c\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{\dfrac{b}{2} - (p-a)} =$$

$$= \frac{b + c - a - \dfrac{b^2+c^2-a^2}{b}}{b - (b + c - a)} = \frac{a^2 - c^2 - b(a-c)}{b(a-c)} = \frac{a - b + c}{b}.$$

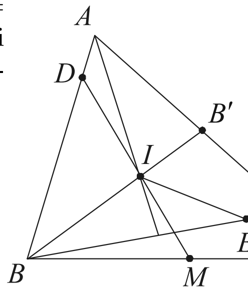
Dacă $A_1C_1 \cap BB_2 = \{M'\}$ cu relaţia (R_2) avem

$$\frac{BM'}{M'B_2} = \frac{b\cdot\dfrac{p-b}{p-c}\cdot\dfrac{p-b}{p-a}}{\dfrac{b}{2}\cdot\dfrac{p-b}{p-c} + \dfrac{b}{2}\cdot\dfrac{p-b}{p-a}} = \frac{p-b}{(p-a)(p-c)}\cdot\frac{2(p-a)(p-c)}{p-a+p-c} = \frac{a}{}$$

şi rezultă că $M \equiv M'$; dreptele A_1C_1, B_1I, BB_2 sunt concurente.

Problema 4. *Fie ABC un triunghi cu $AB < AC$, I centrul cerc şi M mijlocul laturii BC. Notăm cu D intersecţia dintre IM şi AB, intersecţia lui CI cu perpendiculara din B pe AI. Să se demonstreze că* (*Problema 2915*, *Crux Mathematicorum - 2/2004*, propusă de **Toshio Se**

Soluţie. Notăm $\{B_1\} = BE \cap AC$, $\{B'\} = BI \cap AC$. În triunghiul ABB_1, bisectoarea AI este şi înălţime, deci $AB_1 = AB = c$, $B_1C = b - c$. Cu teorema bisectoarei în $\triangle BCB_1$ obţinem $\dfrac{BE}{EB_1} = \dfrac{a}{b-c}$.



Fie acum $\dfrac{BD}{DA} = x$. Cu relaţia (R_2) rezultă că

$$\frac{BI}{IB'} = \frac{AC\cdot\dfrac{BM}{MC}\cdot x}{CB'\cdot\dfrac{BM}{MC} + B'A\cdot x};$$

dar $\dfrac{BM}{MC} = 1$, $CB' = \dfrac{ab}{a+c}$, $B'A = \dfrac{bc}{a+c}$, $\dfrac{BI}{IB'} = \dfrac{a}{CB'}$, deci

$$\frac{a+c}{b} = \frac{bx}{\dfrac{ab}{a+c} + \dfrac{bc}{a+c}\cdot x} \Leftrightarrow 1 = \frac{bx}{a+cx} \Rightarrow x = \frac{a}{b-c}.$$

Deci $\dfrac{BE}{EB_1} = \dfrac{BD}{DA}$ şi rezultă că $DE \parallel AC$.

Observaţie. Alte soluţii pentru Problema 2 (cazul $k = 0$) şi Probler găsite în [**1**].

Bibliografie

1. G. Popa, P. Georgescu - *O metodă de demonstrare a concurenţei u* RecMat - 1/2004, 29–32.

Asupra unor ecuaţii diofantice pătratice

Gheorghe MOLEA[1]

Scopul acestui material este de a prezenta câteva procedee de rezolv
ecuaţii diofantice de gradul al doilea cu două sau trei necunoscute accesibi
gimnazial şi a le aplica în rezolvarea câtorva probleme întâlnite în *Gazeta M*
sau alte publicaţii.

Teorema 1. *Soluţiile întregi ale ecuaţiei*

$$ax^2 + bxy + cy + d = 0,$$

unde $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$ *şi* $d \in \mathbb{Z}$, *sunt*

$$(x, y) \in \left\{ \left(\frac{p-c}{b}, \frac{q-ap+2ac}{b^2} \right) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ p, q \in \mathbb{Z},\ pq = -\left(ac^2 + b^2 \right.\right.$$

Demonstraţie. Înmulţind ecuaţia cu b^2 şi apoi scăzând ac^2 din amb
obţinem

$$ab^2x^2 + b^3xy + cb^2y + db^2 - ac^2 = -ac^2 \Leftrightarrow (bx + c)\left(abx + b^2y - ac\right) = -$$

Ca urmare, soluţiile întregi ale ecuaţiei (1) sunt soluţiile întregi ale sistem

$$bx + c = p, \quad abx + b^2y - ac = q; \quad p, q \in \mathbb{Z},$$

unde $pq = -\left(ac^2 + b^2d\right)$. Rezolvarea acestor sisteme conduce la soluţiile

$$x = \frac{p-c}{b}, \quad y = \frac{q-ap+2ac}{b^2},$$

deci soluţiile întregi ale ecuaţiei (1) sunt date de (2).

Aplicaţie. *Rezolvaţi în numere întregi ecuaţia* $9x^2 - 4xy - y = 1$ (
Agore – *E:12418*, G.M. - 10/2002).

Soluţie. Avem $a = 9$, $b = -4$, $c = -1$, $d = -1$, deci $-\left(ac^2 + b^2d\right) =$
$(p, q) \in \{(1, 7), (7, 1), (-1, -7), (-7, -1)\}$. Ţinând seama de (2), obţine
$(x, y) \in \{(-2, -5), (0, -1)\}$.

Teorema 2. *Soluţiile întregi ale ecuaţiei*

$$ax^2 + bx - ay^2 + c = 0,$$

$a, b, c \in \mathbb{Z}^*$, *sunt*

$$(x, y) \in \left\{ \left(\frac{p+q-2b}{4a}, \frac{q-p}{4a} \right) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ p, q \in \mathbb{Z},\ pq = b^2 - 4ac \right\}$$

Demonstraţie. Înmulţind (3) cu $4a$ şi adunând apoi b^2 la ambii membr

$$\left(4a^2x^2 + 4abx + b^2\right) - 4a^2y^2 = b^2 - 4ac \Leftrightarrow (2ax + b - 2ay)(2ax + b + 2ay)$$

Revine la a găsi soluţiile sistemelor liniare

$$2ax + b - 2ay = p, \quad 2ax + b + 2ay = q; \quad p, q \in \mathbb{Z},$$

cu $pq = b^2 - 4ac$. Soluţiile întregi ale acestora, deci şi ale ecuaţiei (3), su
(4).

---

[1] Profesor, Şcoala "Basarab I", Curtea de Argeş

Aplicaţie. *Să se rezolve în numere întregi ecuaţia* $x^2 + 13x = y^2$
Achim – *C:2487*, G.M. - 3/2002).

Soluţie. Avem $a = 1$, $b = 13$, $c = 26$ şi $b^2 - 4ac = 65$. Deci (p, q)
$(65, 1), (5, 13), (13, 5), (-1, -65), (-65, -1), (-5, -13), (-13, -5)\}$ şi, din
ile căutate sunt $(x, y) \in \{(10, 16), (10, -16), (-2, 2), (-2, -2), (-23, -16)$
$(-11, -2), (-11, 2)\}$.

Teorema 3. *Soluţiile în* $\mathbb{Z}^3$ *ale ecuaţiei*

$$x^2 + ay^2 = \left(a + b^2\right) z^2, \quad a, b \in \mathbb{Z}^*,$$

sunt date de

$$x = t\left(2amn - bm^2 + abn^2\right), \ y = t\left(an^2 - 2bmn - m^2\right), \ z = t\left(an^2 + m^2\right), \ t, m$$

Demonstraţie. Ecuaţia (5) se mai scrie $(x + bz)(x - bz) = a(z - y$
este echivalentă cu ansamblul sistemelor liniare

$$m(x + bz) = an(z - y), \quad n(x - bz) = m(z + y); \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Rezolvate în raport cu x şi y, acestea conduc la soluţiile

$$x = \frac{z\left(2amn - bm^2 + abn^2\right)}{an^2 + m^2}, \quad y = \frac{z\left(an^2 - 2bmn - m^2\right)}{an^2 + m^2}; \quad m, n$$

Notând $z = t\left(an^2 + m^2\right)$, $t \in \mathbb{Z}$, obţinem ca posibile soluţii ale ecuaţiei (5
(x, y, z) cu x, y, z daţi de (6). Se verifică uşor că toate aceste triplete sunt
ecuaţiei date.

Aplicaţie. *Să se arate că există o infinitate de numere întregi* x, y, z
$x^2 + y^2 = 2z^2$ (**Dana** şi **Eugen Radu** – *Probleme de matematică pentru*
şi examene).

Soluţie. Luând în (6) $a = b = 1$, găsim că soluţiile ecuaţiei $x^2 + y^2$
date de

$$x = t\left(n^2 - 2mn - m^2\right), \ y = t\left(n^2 + 2mn - m^2\right), \ z = t\left(m^2 + n^2\right), \quad t,$$

Exerciţiu. Rezolvaţi în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ecuaţia $x^2 - y^2 = 3z^2$.

Teorema 4. *Soluţiile ecuaţiei*

$$ax^2 + bxy + c^2y^2 = z^2, \quad a, b, c \in \mathbb{Z},$$

în mulţimea $\mathbb{Z}^3$ *sunt date de*

$$x = t\left(bm^2 - 2cmn\right), \quad y = t\left(n^2 - am^2\right), \quad z = t\left(bmn - cn^2 - acm^2\right), \quad t, m,$$

Demonstraţie. Scriind ecuaţia dată în forma $x(ax + by) = (z - cy)$
procedând ca în cazul ecuaţiei (5) obţinem sistemele liniare

$$nx + cmy = mz, \quad amx + (bm - cn)y = nz; \quad m, n \in \mathbb{Z},$$

şi în cele din urmă rezultatul dorit.

Aplicaţie. *Se consideră* $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$. *Demonstraţi că ecuaţia î*
$ax^2 + bx + c^2 = z^2$ *are o infinitate de soluţii în mulţimea numerelor raţion*
Buth – *C:2690*, G.M. - 12/2003).

Soluţie. Ecuaţia din enunţ se obţine din (7) pentru $y = 1$. Ţinând sea
urmează că $t\left(n^2 - am^2\right) = 1$ şi, deci,

$$x = \frac{bm^2 - 2cmn}{n^2 - am^2}, \quad z = \frac{bmn - cn^2 - acm^2}{n^2 - am^2}; \quad m, n \in \mathbb{Z} \quad \text{cu} \quad n^2 - a$$

Aşadar, ecuaţia dată are o infinitate de soluţii (x, y) cu $x, y \in \mathbb{Q}$.

Aplicaţie. *Să se arate că ecuaţia $x^2 + xy + y^2 = 1$ are o infinitate numere raţionale* (**L. Panaitopol, D. Şerbănescu** – *Probleme de teoria şi combinatorică pentru juniori*, Problema 153).

Soluţie. Procedăm ca în aplicaţia precedentă. Luând $a = b = c = 1$ (7), se obţine ecuaţia dată. Din (8), avem $t\left(mn - m^2 - n^2\right) = 1$ şi apoi

$$x = \frac{m^2 - 2mn}{mn - m^2 - n^2} \in \mathbb{Q}, \quad y = \frac{n^2 - m^2}{mn - m^2 - n^2} \in \mathbb{Q}; \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

Observaţie. Pentru $a = c = 1$ şi $b = 0$ ecuaţia (7) devine *ecuaţia* $x^2 + y^2 = z^2$, iar (8) conduce la soluţiile acesteia: $x = 2mnt$, $y = ($
$z = \left(m^2 + n^2\right) t$ cu $t, m, n \in \mathbb{Z}$.

Recreaţii ... matematice

Truelul

Un *truel* este asemănător cu un *duel*, dar există trei participanţi în lo

Domnii X, Y şi Z se hotărăsc să rezolve un conflict truelându-se cu până când va rămâne în viaţă doar unul dintre ei. X este cel mai pros nimereşte în medie ţinta doar o dată din trei. Y este un trăgător mai bun ţinta de două ori din trei. Z este cel mai bun trăgător, nimereşte ţinta dată. Pentru a face truelul mai echitabil, X trage primul, urmat de Y este în viaţă), urmat de Z (dacă mai este în viaţă) ş. a. m. d., luând ostili început, până când rămâne în viaţă numai unul singur dintre ei.

Întrebarea este următoarea: asupra cui ar trebui să tragă X primul să

Notă. Răspunsul se găseşte la p. 70.

O caracterizare a funcţiilor convexe cu ajut derivatelor laterale

Florin POPOVICI[1]

Vom presupune cunoscute proprietăţile elementare ale funcţiilor convex privinţă pot fi consultate [**1**] sau [**3**]. Un rol aparte îl va juca următoarea

Teoremă (**O. Stolz**; v. *Teorema 1.3.3* din [**1**] sau *Propoziţia 7.1.4* din $f : I \to \mathbb{R}$ *este o funcţie convexă pe intervalul deschis* I*, atunci* f *este d stânga şi la dreapta în orice punct din* I *şi, dacă* $x, y \in I$ *şi* $x \leq y$*, avem*

$$f'_{-}(x) \leq f'_{+}(x) \leq f'_{-}(y) \leq f'_{+}(y) .$$

Nota de faţă are strânsă legătură cu lucrarea [**2**] şi o presupune cunos lizând derivatele laterale în locul derivatei, în [**2**] este presentată o gen teoremei de medie a lui Lagrange şi, ca o consecinţă, se face următoarea funcţiile convexe:

Teorema lui Lagrange pentru funcţii convexe ([**2**], *Corolarul 1* $I \to \mathbb{R}$ *o funcţie convexă,* I *deschis. Atunci,* $\forall a, b \in I$ *cu* $a < b$*,* $\exists c \in (a, b$

$$f'_{-}(c) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'_{+}(c) .$$

Scopul nostru este de a dovedi o reciprocă a Teoremei lui Stolz şi, a obţine o caracterizare a funcţiilor convexe – Corolarul de mai jos.

Teoremă. *Dacă* $f : I \to \mathbb{R}$*,* I *interval deschis, este derivabilă la s dreapta pe* I *şi* $\forall x, y \in I$*,* $x < y$*, au loc inegalităţile* (1)*, atunci* f *este con*

Demonstraţie. Fie $x, y, z \in I$ cu $x < y < z$. Teorema precedentă $\exists c \in (x, y)$ şi $\exists d \in (y, z)$ astfel încât

$$f'_{-}(c) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'_{+}(c) \quad \text{şi} \quad f'_{-}(d) \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y} \leq f'_{+}($$

Cum, datorită ipotezei, $c < d$ implică $f'_{+}(c) \leq f'_{-}(d)$, rezultă că

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ f(x) & f(y) & f(z) \end{vmatrix} \geq 0$$

şi, conform Corolarului 3 al Propoziţiei 1.4.3 din [**3**], funcţia f este conve

Corolar. *Fie* $I \subset \mathbb{R}$ *un interval deschis. O funcţie* $f : I \to \mathbb{R}$ *este co şi numai dacă* f *este derivabilă la stânga şi la dreapta pe* I *şi are loc* (1) *p* $x, y \in I$ *cu* $x < y$*.*

Bibliografie

1. **C. P. Niculescu** - *Convex Function, Basic Theory and Applications*, Un Press, Craiova, 2003.
2. **F. Popovici** - *O generalizare a teoremelor de bază ale calculului diferenţial* 2/2004, 104-105.
3. **Gh. Sireţchi** - *Calcul diferenţial şi integral*, vol. I, Ed. Şt. şi Encicl., Bu

[1] Profesor, Liceul "N. Titulescu", Braşov

NOTA ELEVULUI

Asupra problemei G67

Adrian ZAHARIUC[1]

În *RecMat - 2/2004*, p. 157, am propus următoarea problemă:

Problema 1. *Spunem că un număr natural este* ***decompozabil*** *da scrie ca suma a două numere naturale cu aceeaşi sumă a cifrelor. Să există o infinitate de numere naturale care nu sunt decompozabile.*

În original, problema se referea la o bază de numeraţie oarecare b. U ment simplu (un exemplu trivial şi un argument de paritate) ne arată b impar, mulţimea numerelor decompozabile coincide cu mulţimea nume deci problema este epuizată. În cazul b par, numerele nedecompozabile mai rare. În cele ce urmează, ne vom referi la cazul decimal, $b = 10$, pen complicaţii inutile. Cititorul poate extinde folosind exact aceeaşi tehnică obţinut în cazul $b = 10$ pentru orice număr b par.

Scopul acestei Note este de a da o formă generală simplă tuturor nume compozabile. Voi da răspunsul la această problemă încă din enunţ:

Problema 2. *Un număr natural n este nedecompozabil dacă şi num una din formele:* $19\dots99$, $39\dots99$, $59\dots99$, $79\dots99$, $99\dots99$, *cu un nu de cifre sau* $29\dots99$, $49\dots99$, $69\dots99$, $89\dots99$, *cu un număr par de ci*

Soluţie. Să rezolvăm întâi partea mai delicată: dacă n nu are nic tre formele menţionate mai sus, atunci n este decompozabil. Aceasta următoarele două leme:

Lema 1. *Pentru orice astfel de n, există $a \leq n$ astfel încât*

$$s(a) \equiv s(n-a) (\mathrm{mod}\, 2).$$

Demonstraţie. Dacă $s(n)$ este par, atunci luăm direct $a = 0$, deci $s(n)$ impar. În acest caz, n trebuie să aibă o cifră, în afară de prima, 9 deoarece altfel ar avea una dintre formele interzise. Fie c valoarea a şi p poziţia ei (de la dreapta la stânga). Evident, putem alege această încât înaintea ei să nu fie cifra zero. Atunci luăm $a = 10^{p-1}(c+1)$. La $a + (n-a) = n$ se face un singur transport, deci

$$s(n-a) + s(a) = s(n) + 9 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2) \quad \Rightarrow \quad s(a) \equiv s(n-a) (\mathrm{mod}$$

Lema 2. *Dacă există $a \leq n$ astfel încât $s(a) \equiv s(n-a) (\mathrm{mod}\, 2)$, at $A \leq n$ astfel încât $s(A) = s(n-A)$.*

Demonstraţie. Fie k numărul de cifre ale lui n. Notăm

$$a = \overline{a_1 a_2 \dots a_k}, \quad n - a = \overline{b_1 b_2 \dots b_k},$$

unde câteva dintre primele cifre pot fi 0. Ştim că

$$0 \equiv a_1 + \cdots + a_k + b_1 + \cdots + b_k = (a_1 + b_1) + \cdots + (a_k + b_k)(\mathrm{mod}$$

[1] Elev, cl. a X-a, Colegiul Naţional "Ferdinand I", Bacău

deci numărul elementelor mulţimii $I = \{i \in \{1, 2, \ldots, k\};\ 2$ nu divide a_i
par. Atunci există $I = I_1 \cup I_2$ o partiţie a lui I în două clase cu acelaşi
elemente. Fie

$$A_i = \begin{cases} (a_i + b_i)/2, & i \notin I \\ (a_i + b_i + 1)/2, & i \in I_1 \\ (a_i + b_i - 1)/2, & i \in I_2 \end{cases}$$

şi $B_i = a_i + b_i - A_i$, $i = \overline{1,k}$. Este clar că $A_i, B_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Avem

$$\overline{A_1 A_2 \ldots A_k} + \overline{B_1 B_2 \ldots B_k} = \sum_{i=1}^{k} (A_i + B_i)\, 10^{k-i} = \sum_{i=1}^{k} (a_i + b_i)\, 10^{k-i} = a$$

Avem că

$$\sum_{i=1}^{k} A_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i + b_i}{2} + \frac{|I_1|}{2} - \frac{|I_2|}{2} = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i + b_i}{2},$$

dar

$$\sum_{i=1}^{k} A_i + \sum_{i=1}^{k} B_i = \sum_{i=1}^{k} (a_i + b_i) \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} A_i = \sum_{i=1}^{k} B_i,$$

deci $s(A) = s(n - A)$, unde $A = \overline{A_1 A_2 \ldots A_k}$ şi prima parte este rezolvată

Să presupunem acum că n are una dintre formele interzise şi să demo
este nedecompozabil. Să presupunem prin absurd că există $a, b \le n$ cu
astfel încât $s(a) = s(b)$. Observaţia esenţială este că la adunarea $a + b =$
transporturi. Să presupunem prin absurd că totuşi am avea transportur
cifra cea mai nesemnificativă (cea mai din dreapta) la care se face trans
faptul că este cea mai nesemnificativă cifră cu această proprietate rezultă
din dreapta sa nu s-a facut transport. Atunci această cifră este obtinuţă
adunarea unei cifre m a lui a cu o cifră n a lui b, dar $m + n \le 18$, iar restul
lui $m + n$ la 10 trebuie să fie 9, deci $m + n = 9$. Rezultă că la acea cifră n
transport, contradicţie. Atunci $s(n) = s(a) + s(b) = 2s(a)$, deci $s(n)$ est
nici unul dintre numerele care intră în discuţie nu are suma cifrelor pară ş
la o contradicţie, deci n este nedecompozabil.

Recreaţii ... matematice

1. În "egalitatea"

$$\frac{XXIII}{VII} = II$$

mutaţi un beţişor astfel încât să obţineţi o egalitate aproximativă cât ma

Roxana Căpăţână, e

2. Adăugaţi o cifră pară la dreapta unui număr, astfel încât să obţineţi
impar.

Gabriel I

Notă. Răspunsurile se găsesc la p. 26.

Matematică şi algoritmi

Irina MUSTAŢĂ[1]

Majoritatea problemelor de informatică se rezolvă cu ajutorul unei se
ritmi, care se adaptează de la caz la caz. Din problemele de mai jos, se v
uneori anumite observaţii matematice fie uşurează abordarea acestor pr
întăresc rezultatul.

1. La **Concursul Info-Oltenia** din 2004 s-a dat următoarea problem

*Să se afişeze numărul de descompuneri ale unui număr dat în sumă
naturale nenule. O descompunere şi o permutare a ei nu se vor număra d*
(Enunţ adaptat).

Un programator "conştiincios" va aplica probabil backtracking (alg
generează toate soluţiile de descompunere) şi apoi le va contoriza. De
de abordare este corectă, se ştie că backtracking-ul are o complexitate
operaţii efectuate) exponenţială, determinând un timp de execuţie mai în
Să privim problema altfel: vom încerca să găsim o funcţie recursiv
turnează numărul căutat. Pentru a evita numărarea simultană a unei solu
mutării ei, vom lua numerele care apar în descompunerea lui n în ordine c
Presupunem că putem construi o funcţie recursivă $f(n)$ (cu un singur p
care returnează numărul cerut. Atunci $f(n) = f(n-1) + f(n-2) +$
(Adică din n scădem k iar numărul de descompuneri posibile va fi $f(n$
facem suma după k). Numai că, în acest caz apare o problemă majoră: d
$n = 2+n-2$ şi calculăm $f(n-2)$, la un moment dat primul termen al desc
ar fi 1, deci am obţine $n = 2 + 1 + \ldots$, ceea ce contrazice ordonarea ale
numerele din descompunerea lui n.
Se impune, aşadar, necesitatea construirii unei funcţii cu doi paramet
cu următoarea semnificaţie: $f(n,k)$ reprezintă numărul de descompuner
ale lui n în sumă de termeni $\geq k$. Este clar că enunţul problemei cere f
asemenea se observă că $f(n,n) = 1$ şi $f(n,k) = 0$ pentru $k > n$.
Acum putem scrie definiţia funcţiei $f(n,k)$, căreia îi putem da ulterior
n, 1:

$$f(n,k) = \begin{cases} 1, & n = k, \\ 0, & n < k, \\ \sum\limits_{l=k}^{n-1} f(n-l,l), & n > k. \end{cases}$$

Se observă că atât codul, cât şi resursele consumate sunt mult mai restr
în cazul backtracking-ului.

2. O altă problemă de acelaşi gen ar fi:

Afişaţi toate soluţiile ecuaţiei $3x + y + 4xz = 100$ *cu* $x, y, z \in \mathbb{N}$.

[1] Elevă, cl. a XII-a, Colegiul Naţional, Iaşi

Şi în acest caz este de aşteptat o aplicare de backtracking, dar putem
ecuaţia: $x(4z+3) = 100 - y$. Acum raţionăm în felul următor. Alegem
24 şi, pentru z astfel luat, alegem x de la 1 la $\left[\dfrac{100}{4z+3}\right]$. Apoi îl obţine
$100 - x(4z+3)$ şi tipărim tripletul (x, y, z). În final tipărim şi soluţiile (0
$z \in \mathbb{N}$. Prin metoda de mai sus, obţinem într-adevăr toate soluţiile (z poat
valoare de la 0 la 24, deoarece pentru $z \geq 25$ şi x nenul avem $4z+3 > 10$
$100 - y \leq 100$, deci $x \leq \dfrac{100}{4z+3}$ şi, cum $x \in \mathbb{N}$, $x \leq \left[\dfrac{100}{4z+3}\right]$).

Observaţie. Numărul 100 poate fi înlocuit cu orice $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Un alt exerciţiu interesant este următorul:

Se dau m numere întregi nenule $b_1, \ldots, b_m$ şi n numere întregi nenule
a_n. Să se determine o submulţime a mulţimi $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ care să
valoarea expresiei

$$E = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n,$$

ştiind că $m \geq n$ şi $x_i \in \{b_1, \ldots, b_m\}$, $i = \overline{1, n}$.

Sortăm crescător ambele şiruri (a_i) şi (b_i). Evident, la ambele şiruri
numerele negative în partea stângă şi cele pozitive în partea dreaptă.

Vom enunţa *inegalitatea rearanjărilor*, pe care o vom aplica la această

Fie $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$, $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ şiruri de nume
$S(\sigma) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)}$, unde σ este o permutare a mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$. At
este maxim pentru $\sigma(i) = i$, $\forall i = \overline{1, n}$, şi minim pentru $\sigma(i) = n + 1 - i$,

Şirul (a_i) este alcătuit din k numere strict negative şi $n - k$ numere în
pozitive. Pentru a maximiza suma este necesar să înmulţim numerele p
(a_i) cu cele mai mari numere din (b_i) şi numerele negative cu cele mai m
din (b_i) (deoarece cele mai mici numere strict negative din (b_i) au modulul
deci $a_ib_i > 0$ va putea fi maximizat, iar cele mai mici numere pozitive în
numere negative vor da cele mai mici în modul numere negative, deci ce
termeni). Aşadar vom înmulţi k numere negative ale şirului (a_i) cu cele
numere ale şirului (b_i), iar cele $n - k$ numere pozitive ale şirului (a_i) le v
cu cele mai mari $n - k$ numere ale şirului (b_i). Aceste două submulţimi
suprapune, întrucât $m \geq n$, iar numărătoarea începe din capetele opuse
(b_i) sortat. Din inegalitatea rearanjărilor obţinem că permutarea lui {
pentru care $\sum\limits_{i=1}^{k} a_ib_i$ este maximă e permutarea identică şi analog pentru
$\{a_{k+1}, \ldots, a_n\}$ şi $\{b_{m-n+k+1}, \ldots, b_m\}$.

Să remarcăm că programul propriu-zis va fi astfel redus la nişte paşi
simpli: sortarea crescătoare a şirurilor (a_i) şi (b_i), aflarea numărului k d
negative ale lui (a_i) şi, în final, tipărirea soluţiei: primele k numere din stâ
(b_i) şi ultimele $n - k$ numere din dreapta din (b_i).

4. *Un colier este format din mărgele roşii şi albastre. La un moment colierul într-un punct şi îl întindem în linie dreaptă. Apoi scoatem de pe fi din capătul stâng până când întâlnim una din cealaltă culoare. Analog pentru capătul drept. Dându-se datele despre colier sub forma unui şir rar indică culoarea mărgelelor succesive), să se calculeze numărul maxim de care îl putem scoate, precum şi locul unde trebuie tăiat colierul.* (Enunţ

(**Olimpiada Internaţională de Informat**

Considerăm un vector cu n componente (adică un şir $a_1, \ldots, a_n$). Iniţ 0 toate elementele vectorului, ne plasăm pe primul element al vectorului şi colierului caracter cu caracter, câtă vreme caracterul citit este acelaşi cu c mărim cu 1 valoarea reţinută de primul element al vectorului. Când ca schimbă ne poziţionăm pe următoarea componentă a vectorului şi contin la sfârşitul şirului cu acelaşi procedeu. De fapt, vectorul reţine lungim secvenţelor succesive de mărgele colorate la fel.

Când tăiem colierul, o putem face în două feluri: fie în interiorul un colorate la fel, fie despărţind două secvenţe colorate diferit. În primul ce întindem colierul, numărul maxim de mărgele ce pot fi scoase este n mărgele al acelei secvenţe, în timp ce în al doilea caz, numărul maxim o suma numerelor de mărgele din două secvenţe consecutive. Este evident noi e mai convenabil să tăiem colierul între două secvenţe.

Maximul care poate fi obţinut este maximul dintre sumele numerelor a două secvenţe succesive. Acesta se poate găsi uitându-ne la vectorul anterior. Fie k numărul de elemente nenule al acestui vector. Dacă k comparăm sumele $v[1]+v[2]$, $v[2]+v[3]$, $\ldots$, $v[k-1]+v[k]$. Dacă k este i oricare două secvenţe consecutive au culori diferite, rezultă că secvenţele de $v[1]$ şi $v[k]$ au aceeaşi culoare, deci la "închiderea" colierului se vor singură secvenţă de lungime $v[1]+v[k]$. În acest caz, trebuie aflat maxi $v[k]+v[1]+v[2]$, $v[1]+v[k]+v[k-1]$, $v[i]+v[i+1]$, $i=\overline{2,k-2}$.

Locul unde trebuie tăiat colierul se obţine uşor. Presupunem că face între $v[i]$ şi $v[i+1]$. Atunci poziţia unde vom tăia este $\sum\limits_{j=1}^{i} v[j]$.

Recreaţii ... matematice

Soluţiile problemelor enunţate la p. 23.

1. Mutând un beţişor de la numărător deasupra numărului din memb obţine

$$\frac{XXII}{VII} = \varPi,$$

care este o egalitate aproximativă cu o eroare foarte mică ($\frac{XXII}{VII} = \frac{22}{7} \approx 3$ iar $\pi \approx 3,14159\ldots$).

2. Se adaugă cifra 0, dar ... la exponent, obţinându-se numărul in exemplu, $7^0 = 1$ etc.).

Asupra unei probleme de concurs

Alexandru NEGRESCU[1]

La cea de-a VI-a ediţie a *Concursului interjudeţean de matematică "Ra*
care a avut loc la Vaslui în perioada 5 - 7 noiembrie 2004, a fost propusă
clasa a X-a următoarea problemă:

Dacă A, B, C sunt măsurile unghiurile unui triunghi, atunci

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \geq 2\sqrt{3}.$$

Precizaţi când are loc egalitatea.

Vă prezentăm în continuare cinci soluţii pentru această inegalitate, lăsâ
dumneavostră să decideţi care este cea mai frumoasă.

Soluţia I (prezentată în baremul de corectare). Deoarece $\sin A$, s
sunt strict pozitive, avem

$$\left(\sum \sin A\right)\left(\sum \frac{1}{\sin A}\right) \geq 9 \quad \text{sau} \quad \sum \frac{1}{\sin A} \geq \frac{9}{\sum \sin A}.$$

Conform *inegalităţii Cauchy - Buniakowski - Schwarz*, avem

$$\left(\sum \sin A\right)^2 \leq 3 \sum \sin^2 A = 3 \sum \frac{1-\cos 2A}{2} = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} \sum \cos 2A$$

Cum

$$\sum \cos 2A = 2\cos^2 C - 1 - 2\cos(A-B)\cos C =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(2\cos C - \cos(A-B))^2 + \sin^2(A-B) - 3\right] \geq -$$

rezultă că

$$\left(\sum \sin A\right)^2 \leq \frac{9}{2} + \frac{9}{4} = \frac{27}{4} \quad \text{sau} \quad \sum \sin A \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Combinând rezultatele precedente obţinem $\sum \frac{1}{\sin A} \geq 9 \cdot \frac{2}{3\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$, ad
tatea dorită. Se constată uşor că egalitatea are loc dacă şi numai dacă
este echilateral.

Soluţia a II-a (Alexandru Negrescu). Conform teoremei sinusur
$\sin A = \frac{a}{2R}$ etc. Inegalitatea de demonstrat devine

$$\frac{2R}{a} + \frac{2R}{b} + \frac{2R}{c} \geq 2\sqrt{3} \Leftrightarrow R\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \leq$$

Cum $3/\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \leq \frac{a+b+c}{3} = \frac{2p}{3}$, rămâne să arătăm că $\frac{2p}{3} \leq$
$p \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}R$, ceea ce este o cunoscută inegalitate a lui Mitrinović.

[1] Elev, cl. a X-a, Colegiul Naţional "August Treboniu Laurean", Botoşani

Soluţia a III-a (Alexandru Negrescu şi prof. **Liliana Tomiţa)**
inegalităţii mediilor avem

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C}}.$$

Ştim că $\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C\leq\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$ ([**1**], pag. 123-124), cu egalitate pentru
echilateral. Înlocuind mai sus, obţinem

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\geq 3\Big/\sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}}{8}}=3\Big/\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}.$$

Soluţia a IV-a (Alexandru Ţurcanu şi **Şerban Vatavu**, elevi, C.N
nescu", Botoşani**).** Conform inegalităţii mediilor, avem

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\geq\frac{9}{\sin A+\sin B+\sin C}.$$

Dar, conform *inegalităţii lui Jensen* pentru funcţii concave are loc

$$\sin\frac{A+B+C}{3}\geq\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\quad\text{sau}\quad\sin A+\sin B+\sin C\leq$$

care, înlocuită în relaţia precedentă, conduce la inegalitatea dorită.

Soluţia a V-a (Alexandru Negrescu). Ridicând relaţia din enunţ
obţinem

$$\sum\frac{1}{\sin^2 A}+2\sum\frac{1}{\sin A\cdot\sin B}\geq 12$$

sau

$$\sum\frac{1}{\sin^2 A}+2\,\frac{\sum\sin A}{\prod\sin A}\geq 12.$$

Cu inegalitatea mediilor şi ţinând seama că $\prod\cos A\leq\dfrac{1}{8}$, rezultă că

$$\sum\frac{1}{\sin^2 A}\geq\frac{9}{\sum\sin^2 A}=\frac{9}{2+2\prod\cos A}\geq\frac{9}{2+2\cdot\frac{1}{8}}=4.$$

Pe de altă parte, cu inegalitatea mediilor şi ţinând seama că $\prod\sin A\leq$
şi

$$2\,\frac{\sum\sin A}{\prod\sin A}\geq\frac{2\cdot 3\sqrt[3]{\prod\sin A}}{\prod\sin A}=\frac{6}{\sqrt[3]{\left(\prod\sin A\right)^2}}\geq 6\Big/\sqrt[3]{\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)^2}=$$

Prin adunare, obţinem inegalitatea $(*)$, care este echivalentă cu cea de de

Bibliografie

1. **T. Cohal** - *Probleme de trigonometrie*, Editura Moldova, Iaşi, 1994.
2. **M. Ganga** - *Manual pentru clasa a IX-a, profil M1, M2*, Editura Mathpres
2003.
3. **M. Ganga** - *Manual pentru clasa a X-a, profil M1*, Editura Mathpres
2003.

Din nou asupra unei probleme de concur

Constantin APOSTOL[1]

În revista *"Recreaţii matematice"* nr. 2, iulie - decembrie 2004, a apăru profesorilor **D. Mihalache** şi **M. Tetiva**, care "generalizează" o problem am propus-o la *Concursul Naţional de Matematică "Laurenţiu Duican"* mai 2003, cu următorul enunţ:

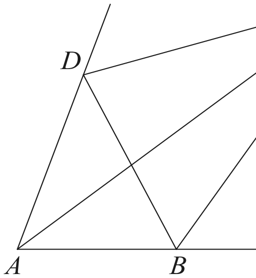
În patrulaterul convex $ABCD$, măsurile unghiurilor $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ şi $\widehat{D}$ porţionale cu numerele 8, 12, 5 şi 11. Să se arate că dacă $(BD$ estre unghiului $\widehat{B}$, atunci $(AC$ este bisectoarea unghiului $\widehat{A}$.

Printr-un calcul simplu, din faptul că $\dfrac{m(\widehat{A})}{8} = \dfrac{m(\widehat{B})}{12} = \dfrac{m(\widehat{C})}{5} = \dfrac{m(\widehat{D})}{11}$ că $m(\widehat{A}) = 80°$, $m(\widehat{B}) = 120°$, $m(\widehat{C}) = 50°$, $m(\widehat{D}) = 110°$.

Problema am propus-o pentru clasa a VII-a, aşa că o rezolvare trigono era de aşteptat din partea elevilor. Profesorii nominalizaţi mai sus, au dat soluţie trigonometrică, care depăşeşte nivelul de pregătire al elevilor, dar soluţie geometrică, la nivelul programei şcolare, care le-a permis şi o "gen în sensul elaborării unor probleme rezolvabile pe aceeaşi idee.

În rândurile care urmează îmi propun să exprim soluţiile cu care am blema comisiei de concurs, care se încadrează cerinţelor programei de conc este aceeaşi cu a Olimpiadei Naţionale pentru clasa a VII-a.

Soluţia I. Prelungind latura (AB), obţinem că suplementul unghiului $\widehat{ABC}$ are măsura de 60° şi cum $(BD$ este bisectoarea unghiului $\widehat{B}$, care are măsura de 120°, deducem că $(BC$ este bisectoarea exterioară a unghiului $\widehat{B}$ din triunghiul ABD.



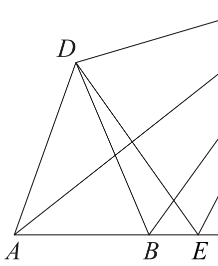
În triunghiul ABD, prin calcul, deducem că $m(\widehat{ADB}) = 40°$ şi, deci, $m(\widehat{BDC}) = 70°$. Suplementul unghiului $\widehat{ADC}$, care se obţine prelungind latura (AD), are 70°. Aşadar, $(DC$ este bisectoarea exterioară a unghiului $\widehat{D}$ în triunghiul ABD.

Astfel, pentru triunghiul ABD, $(BC$ şi $(DC$ sunt bisectoarele ext unghiurilor $\widehat{B}$, respectiv $\widehat{D}$; acestea sunt concurente în C. Deducem c bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{A}$.

Soluţia a II-a. Pe semidreapta $(AB$ luăm punctul E astfel încât $AE =$ arăta că $\triangle ADC \equiv \triangle AEC$. Din triunghiul isoscel ADE, cu $m(\widehat{A}) = 80°$ $m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{AED}) = 50°$. Rezultă $m(\widehat{EDC}) = 60°$, căci $m(\widehat{ADC}) =$ $(BD$ este bisectoarea unghiului $\widehat{ABC}$, deci $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{DBC}) = m(\widehat{CE}$

[1] Profesor, Colegiul Naţional "Al. Vlahuţă", Râmnicu Sărat

Avem, în patrulaterul convex $DBEC$, $m(\widehat{EDC}) =$ $= m(\widehat{EBC}) = 60^\circ$, deci acest patrulater este inscriptibil, de unde deducem că $m(\widehat{CED}) =$ $= m(\widehat{CBD}) = 60^\circ$.



Din $m(\widehat{CED}) = 60^\circ$ şi $m(\widehat{EDC}) = 60^\circ$, deducem că triunghiul CDE este isoscel cu vârful C şi deci, $CD = CE$. Rezultă $\triangle ADC \equiv \triangle AEC$ (LLL); aşadar, $(AC$ este bisectoarea unghiului $\widehat{A}$.

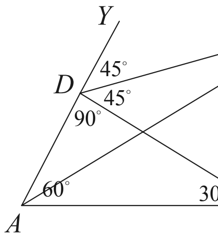
În continuare, voi prezenta o problemă care se poate rezolva cu ideea
anterioare:

În patrulaterul convex $ABCD$ măsurile unghiurilor sunt: $m(\widehat{A})=60^\circ$,
$m(\widehat{C}) = 60^\circ$, $m(\widehat{D}) = 135^\circ$. Să se arate că dacă $(BD$ este o trisectoare
$\widehat{D}$, atunci $(AC$ este bisectoarea unghiului $\widehat{A}$ sau $(CA$ este bisectoarea un

Soluţie. Vom deosebi două cazuri:

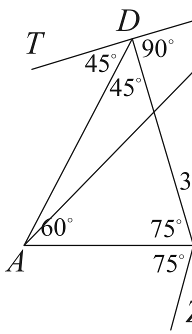
I. când $m(\widehat{CDB}) = \dfrac{m(\widehat{D})}{3} = \dfrac{135^\circ}{3} = 45^\circ$;

II. când $m(\widehat{ADB}) = \dfrac{m(\widehat{D})}{3} = \dfrac{135^\circ}{3} = 45^\circ$.



În cazul I, prelungind latura (AB), obţinem $m(\widehat{CBX}) = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$, deci $(BC$ este bisectoarea unghiului $\widehat{DBX}$ (1). Prelungind latura (AD), obţinem $m(\widehat{CDY}) = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$, deci $(DC$ este bisectoarea unghiului $\widehat{BDY}$ (2).

Din (1) şi (2), deducem că $(AC$ este bisectoarea unghiului $\widehat{A}$.



În cazul II, prelungind latura (CB), obţinem $m(\widehat{ABZ}) = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$, deci $(BA$ este bisectoarea unghiului $\widehat{DBZ}$ (3).

Prelungind latura (CD), obţinem

$$m(\widehat{ADT}) = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ,$$

deci $(DA$ este bisectoarea unghiului $\widehat{BDT}$ (4).

Din (3) şi (4), deducem că $(CA$ este bisectoarea unghiului $\widehat{C}$.

Bibliografie

1. **F. Diac** - *A XI-a ediţie a Concursului Naţional de Matematică "Laurenţi*
Braşov, 2003, G.M. - 11/2003, 433-438.

2. **D. Mihalache, M. Tetiva** - *Asupra unei probleme de concurs*, RecMa
111-113.

3. **C. Apostol** - *Preocupări matematice*, Ed. "Radical", 1966.

Două funcţii cu aceeaşi derivată pe un inter
nu diferă neapărat printr-o constantă

***Paul GEORGESCU*[1]*, Gabriel POPA*[2]**

Printre "cunoştinţele" dobândite de unii elevi în urma studierii Analize
tice de liceu se numără, din păcate, şi următoarea "teoremă", menţionată î
[**1**], pag. 282:

*Dacă $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ au aceeaşi derivată pe (a, b), atunci ele dife
constantă.*

"Demonstraţia" urmează linia de mai jos:

Dacă $f'(x) = g'(x)$, $\forall x \in (a, b)$, atunci $(f - g)'(x) = f'(x) - g$
$\forall x \in (a, b)$, deci $f - g$ este constantă pe (a, b).

Desigur, nu avem neapărat că $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$, $\forall x \in (a, b$
ce nici măcar nu are sens pentru $f'(x) = g'(x) = \pm\infty$ şi deci demonstra
sus este invalidă.

Observăm că "f are derivată pe (a, b)" nu este acelaşi lucru cu "f este de
(a, b)"; un exemplu este dat de $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x - \frac{a+b}{2}}$, care a
pe (a, b) fără a fi derivabilă pe (a, b), deoarece $f'_s\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'_d\left(\frac{a+b}{2}\right)$

Dacă, în plus, f şi g sunt presupuse a fi derivabile pe (a, b), atunci raţi
de mai sus este corect, conducând la următorul binecunoscut rezultat:

*Dacă $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile au aceeaşi derivată pe (a, b), atunc
printr-o constantă.*

Prezentăm în continuare un exemplu, datorat matematicianului polon
law Ruziewicz, de un număr infinit de funcţii cu aceeaşi derivată pe u
diferenţa oricăror două nefiind constantă, [**3**]. Vezi, de asemenea, [**2**] pag.

Fie $s \geq 1$. Împărţim segmentul $[0, s]$ în trei părţi în aşa fel încât segm
lociu are lungimea $\frac{1}{3}$, iar centrul său este centrul segmentului $[0, s]$. Aco
segmentul mijlociu cu semicercul superior de diametru $\frac{1}{3}$ determinat de ac
ştergem acest segment (exclusiv capetele). Împărţim apoi fiecare dintre
segmente rămase în câte trei segmente în aşa fel încât segmentele mijlo
lungimea $\frac{1}{3^2}$, iar centrele segmentelor care sunt împărţite să coincidă cu ce
mentelor mijlocii. De asemenea, acoperim segmentele mijlocii cu semicerc
ametru $\frac{1}{3^2}$ determinate de acestea şi apoi ştergem aceste segmente, exclusi
Repetând această procedură, la pasul n vom avea de construit 2^{n-1} sem
diametru $\frac{1}{3^n}$ şi de şters diametrele corespunzătoare, exclusiv capetele,
Obţinem deci o infinitate numărabilă de semicercuri şi fie M_s reuniunea s
rămase neacoperite şi a semicercurilor.

---

[1] Lector dr., Catedra de matematică, Univ. Tehnică "Gh. Asachi", Iaşi
[2] Profesor, Colegiul Naţional, Iaşi

Este evident că M_s poate fi privit ca graficul unei funcţii continue $f_{...}$
$\left[0, \frac{1}{6}\right]$; demonstraţia acestui fapt foloseşte convergenţa uniformă a unui
de funcţii continue.

Fie atunci $F_s : [0, s] \rightarrow \left[0, \frac{\pi}{56}\right]$, $F_s(t) = \int_0^t f_s(x)\, ds$, pentru $0 \leq t \leq$
F_s este derivabilă cu derivata continuă, iar deoarece $f_s(x) \geq 0$, $\forall x \in [0, s]$
crescătoare. Mai mult, din modul de construcţie a lui M_s se observă că p
$0 \leq t_1 < t_2 \leq s$ intervalul $[t_1, t_2]$ are un subinterval comun cu un interv
de un semicerc, deoarece după pasul n orice subinterval al lui $[0, s]$ de lun
are un subinterval comun cu un interval acoperit de un semicerc.

Cum pe aceste subintervale f ia valori strict pozitive şi este continuă,
$F_s(t_1) < F_s(t_2)$, deci F_s este strict crescătoare. Mai mult,
$F_s(s) = \frac{\pi}{8}\left(\frac{1}{3^2} + \frac{2^2}{3^4} + \dots\right) = \frac{\pi}{56}$, iar $F_s(0) = 0$.

Cum F_s este strict crescătoare şi surjectivă, ea este inversabilă şi fie Φ_s :
$[0, s]$ inversa sa. Observăm că, deoarece F_s este continuă şi strict cresc
este de asemenea continuă şi strict crescătoare. Determinăm acum Φ_s'
$u \in \left[0, \frac{\pi}{56}\right]$.

Dacă $u = F_s(t_s)$, $0 \leq t_s \leq s$, cu $f_s(t_s) \neq 0$, atunci $\Phi_s'(u) = \frac{1}{F_s'(t_s)} =$

Dacă $u = F_s(t_s)$, $0 \leq t_s \leq s$, cu $f_s(t_s) = 0$, atunci $F_s'(t_s) = 0$ şi nu pu
formula de derivare a funcţiei inverse. Totuşi, utilizând definiţia derivat
că F_s este strict crescătoare, obţinem că $\Phi_s'(u) = +\infty$.

Fie acum $1 \leq s_1 < s_2 < \infty$. Utilizând semnificaţia geometrică a
Riemann, remarcăm că are loc următoarea proprietate:

Dacă $0 \leq t_1 \leq s_1$ *şi* $0 \leq t_2 \leq s_2$, *iar* $F_{s_1}(t_1) = F_{s_2}(t_2)$, *atunci* $f_{s_1}(t_1)$

(este important de notat că razele semicercurilor construite pentru ce
ale lui s nu depind de s, iar dacă $F_{s_1}(t_1) = F_{s_2}(t_2)$, atunci $M_1(t_1,$
$M_2(t_2, f_{s_2}(t_2))$ trebuie să se afle la aceeaşi înălţime, pe semicercuri corespu

Fie $u \in \left[0, \frac{\pi}{56}\right]$. Dacă $u = f_{s_1}(t_{s_1})$, $0 \leq t_{s_1} \leq s_1$, cu $f_{s_1}(t_{s_1}) \neq 0$, fie 0
astfel ca $u = f_{s_2}(t_{s_2})$. Atunci $F_{s_1}(t_{s_1}) = F_{s_2}(t_{s_2})$, deci $f_{s_1}(t_{s_1}) = f_{s_2}(t_2$
proprietăţii de mai sus, şi deci $\Phi_{s_1}'(u) = \Phi_{s_2}'(u) = \frac{1}{f_{s_1}(t_{s_1})}$. Dacă $u =$
$0 \leq t_{s_1} \leq s_1$, cu $f_{s_1}(t_{s_1}) = 0$, fie $0 \leq t_{s_2} \leq s_2$ astfel ca $u = F_{s_2}(t_{s_2}$
$F_{s_1}(t_{s_1}) = F_{s_2}(t_{s_2})$, deci $f_{s_1}(t_{s_1}) = f_{s_2}(t_{s_2}) = 0$, conform proprietăţii de
deci $\Phi_{s_1}'(u) = \Phi_{s_2}'(u) = +\infty$.

În concluzie, Φ_{s_1} şi Φ_{s_2} au aceeaşi derivată pe $\left[0, \frac{\pi}{56}\right]$. Cum $F_{s_1}(0) = F$
iar $F_{s_1}(s_1) = F_{s_2}(s_2) = \frac{\pi}{56}$, deducem că $\Phi_{s_1}(0) = \Phi_{s_2}(0) = 0$, iar Φ_{s_1}
$\Phi_{s_2}\left(\frac{\pi}{56}\right) = s_2$, deci Φ_{s_1} şi Φ_{s_2} nu diferă printr-o constantă. De aici,
$F = \{\Phi_s; s \geq 1\}$ este o mulţime de funcţii cu aceeaşi derivată pe $\left[0, \frac{\pi}{56}\right]$

oricăror două nefiind constantă, ceea ce încheie construcţia exemplului.

*

* *

Prezentăm în cele ce urmează, pe scurt, definiţia derivatelor Dini ale u
reale [**2**].

Fie $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in (a,b)$. Numim *derivata Dini superioară*
inferioară) la dreapta a lui f în x_0 numărul $D^+ f(x_0) = \lim\limits_{x \searrow x_0} \sup \frac{f(x}{}$

(respectiv $D_+ f(x_0) = \lim\limits_{x \searrow x_0} \inf \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$). Analog se pot defini *de*
superioară, respectiv *inferioară*, *la stânga* a lui f în x_0, notate $D^- f(x_0)$
$D_- f(x_0)$.

Privitor la relaţia dintre derivatele Dini şi derivatele clasice ale unei fun
punct x_0, se poate observa că dacă $D^+ f(x_0) = D_+ f(x_0)$, atunci f are
dreapta în x_0 în sens clasic şi $f'_+(x_0) = D^+ f(x_0) = D_+ f(x_0)$, un rezulta
tor având loc şi pentru derivata la stânga, iar dacă toate cele patru deriva
o valoare comună în x_0, atunci f are derivată în x_0. Este însă de remarcat
funcţii f i se pot asocia cele patru derivate Dini în x_0, spre deosebire de
laterale clasice.

Indicăm acum extinderile unor rezultate clasice folosind derivate Dini.

Teorema 1. *Fie* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *continuă pe* (a,b). *Dacă* $Df =$
cu excepţia unei mulţimi cel mult numărabile, unde D *poate fi orice der*
atunci f *este constantă pe* (a,b).

Teorema 2. *Fie* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *continuă pe* (a,b). *Dacă* $Df \geq$
cu excepţia unei mulţimi cel mult numărabile, unde D *poate fi orice der*
atunci f *este crescătoare pe* (a,b).

Teorema 3. *Fie* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *continuă pe* (a,b) *şi* $x_0 \in (a,b)$. *Dacă*
derivatele Dini este continuă în x_0, *la fel sunt şi celelalte trei. În acest*
cele patru derivate Dini în x_0 *sunt egale, iar* f *este derivabilă în* x_0.

Încheiem cu o extindere a rezultatului privitor la funcţiile derivabile
derivată pe un interval .

Teoema 4. *Fie* $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ *continue pe* (a,b). *Dacă* Df *şi* Dg
egale şi finite pe (a,b) *cu excepţia unei mulţimi cel mult numărabile, un*
fi orice derivată Dini, atunci f *şi* g *diferă printr-o constantă pe* (a,b).

Bibliografie

1. **M. Ganga** - *Manual de matematică: clasa a XI-a*, Mathpress, Ploieşti, 2
2. **R. Kannan, C. K. Krueger** - *Advanced Analysis on the Real Line*, Sprin
New York, 1996.
3. **S. Ruziewicz** - *Sur les fonctions qui ont la même dérivée et dont la diffé*
pas constante, Fundamenta Mathematicae 1(1920), 148–151 (accesibil şi
electronic la adresa http://matwbn.icm.edu.pl/wyszukiwarka.php).

CORESPONDENŢE

Probleme selectate de la Olimpiadele de Mate
ale Republicii Moldova

Notă. *Material trimis pentru publicare Redacţiei de către Dr.* ***Valeri***
Facultatea de Matematică şi Informatică, Universitatea de Stat din Chişi

Enunţuri

1. Se consideră şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $a_n = \left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{n}\right]$, $n \in \mathbb{N}$
este partea întreagă a numărului x. Să se arate că

$$a_n = 2 + a_{n-1},$$

dacă şi numai dacă n este un număr prim. (*O. R. M. – 1997*)

2. Să se demonstreze că, pentru orice numere naturale $m, n \geq 2$, c
dintre numerele $\sqrt[n]{m}$ şi $\sqrt[m]{n}$ nu depăşeşte numărul $\sqrt[3]{3}$. (*O. R. M. – 1996*

3. Polinomul $P(X)$ de grad $n \geq 5$, cu coeficienţi întregi, are n rădă
distincte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, unde $\alpha_1 = 0$. Să se găsească toate rădăcinile
polinomului $P(P(X))$. (*O. R. M. – 1997*)

4. Fie triunghiul ABC cu înălţimea CD. Se ştie că $AB = 1999$, B
şi $AC = 2000$. Cercurile înscrise în triunghiurile ACD şi BCD sunt t
segmentul CD în punctele M şi N respectiv. Să se afle MN. (*O. R. M.*

5. Fie $ABCD$ un pătrat de latură 1. Pe laturile AB şi CD se ia
interioare X şi Y. Fie M punctul de intersecţie a dreptelor XD şi YA şi
de intersecţie a dreptelor XC şi YB. Pentru ce poziţie a punctelor X
patrulaterului $XNYM$ este maximă? (*O. R. M. – 1997*)

6. Doi fraţi au vândut n pui cu câte n lei fiecare. Banii i-au împă
fratele mai mare a luat 10 lei, apoi cel mai mic 10 lei, apoi din nou cel
ş. a. m. d. Fratelui mai mic i-a revenit la sfârşit o sumă mai mică decât 1
luat acest rest şi încă briceagul fratelui mai mare, ambii acceptând că au
final acelaşi câştig. Cât costă briceagul? (*O. R. M. – 1996*)

7. Fie n un număr natural astfel încât numărul $2n^2$ are 28 de divizor
distincţi, iar numărul $3n^2$ are 24 de divizori distincţi. Câţi divizori di
numărul $6n^2$? (*O. R. M. – 1999*)

8. Din cubuleţe de latură 1 se construieşte un cub de latură 45. În cub
1998 de cubuleţe sunt populate de bacterii. În fiecare secundă bacteriile
în orice alt cubuleţ, care are cel puţin trei feţe comune cu cubuleţele deja
Este posibil ca bacteriile să ocupe toate cubuleţele? (*O. R. M. – 1998*)

9. Într-o şcoală primară rurală învaţă 20 de copii. Fiecare doi copii a
un bunic comun. Să se demonstreze că unul dintre bunici are în această
puţin 14 nepoţi. (*O. R. M. – 1996*)

10. În timpul unei bătălii comune fiecare dintre cei 2001 de cocoşi a
pană de la un alt cocoş şi fiecare cocoş a rămas fără o pană. Se ştie că prin

3 cocoşi se găseşte unul care nu a rupt nici o pană de la ceilalţi doi. Să se
cel mai mic număr k cu proprietatea: tăind cel mult k cocoşi putem aş
cocoşi în două coteţe astfel încât nici un posesor de pană străină să nu
în acelaşi coteţ cu stăpânul penei. (*O. R. M. – 2001*)

Soluţiile problemelor

1. Scriem egalitatea (1) sub forma

$$\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{n}\right]=2+\left[\frac{n-1}{1}\right]+\left[\frac{n-1}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{n-1}{n-1}\right.$$

După reducerea termenilor obţinem

$$\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{n-1}\right]=\left[\frac{n-1}{2}\right]+\left[\frac{n-1}{3}\right]+\cdots+\left[\frac{n-1}{n-1}\right.$$

Pentru orice $2\le k\le n-1$ avem $\left[\frac{n}{k}\right]\ge\left[\frac{n-1}{k}\right]$. Deci,

$$\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{n-1}\right]\ge\left[\frac{n-1}{2}\right]+\left[\frac{n-1}{3}\right]+\cdots+\left[\frac{n-1}{n-1}\right.$$

Presupunem adevărată egalitatea (1), deci şi (2). Dacă n este un număr
$n=ab$, $2\le a<n$, atunci $\left[\frac{n}{a}\right]=b>\left[\frac{n-1}{a}\right]=b-1$. Ca urmare, inega
este strictă, ceea ce contrazice (2).

Reciproc, fie n un număr prim. Atunci pentru orice $2\le k\le n-1$ avem
cu $t,r\in\mathbb{N}$ şi $1\le r<k$. În acest caz $\left[\frac{n}{k}\right]=t=\left[\frac{n-1}{k}\right]$. Prin urmare,
(2), deci şi (1), este adevărată.

2. Dacă $m<n$, atunci $\sqrt[n]{m}<\sqrt[n]{n}<\sqrt[m]{n}$. Pentru $m>n$ avem $\sqrt[m]{}$
$<\sqrt[n]{m}$. Deci, $\min\{\sqrt[m]{n},\sqrt[n]{m}\}\le\sqrt[n]{n}$, oricare ar fi $m,n\ge 2$. Vom demo
inducţie că pentru orice $n\ge 2$ avem $\sqrt[n]{n}\le\sqrt[3]{3}$ sau $n^3\le 3^n$. Pentru $n=$
inegalitatea este adevărată. Presupunem că ea este adevărată pentru $k\ge$

$$(k+1)^3=k^3+3k^2+(3k+1)\le k^3+k^3+k^3=3k^3\le 3\cdot 3^k=3^k$$

ceea ce finalizează demonstraţia. Deci, pentru orice $m,n\ge 2$ avem $\min\{$
$\sqrt[3]{3}$.

3. Numărul k este o rădăcină a polinomului $P(P(X))$, dacă el este
uneia din ecuaţiile $P(x)=\alpha_i$, unde $i=1,2,\ldots,n$. Să arătăm că $P(k)\ne$
ar fi $k\in\mathbb{Z}$ şi $i\ge 2$.

Presupunem că există $k\in\mathbb{Z}$ astfel încât $P(k)=\alpha_2$. Atunci $k\ne 0$.
rezultă că polinomul $P(X)$ are forma $P(X)=aX(X-\alpha_2)(X-\alpha_3)\cdots($
$a\in\mathbb{Z}^*$. Prin urmare, $ak(k-\alpha_2)(k-\alpha_3)\cdots(k-\alpha_n)=\alpha_2$. Relaţia $k\mid$
$\alpha_2=kt$, $t\in\mathbb{Z}^*$. Dar $ak(1-t)(k-\alpha_3)\cdots(k-\alpha_n)=t$ implică $(1-t)\mid t$.

Rezultă că $t=2$, pentru care avem $ak(k-\alpha_3)(k-\alpha_4)(k-\alpha_5)\cdots(k-$
Observăm că numerele k, $k-\alpha_3$, $k-\alpha_4$ şi $k-\alpha_5$ sunt distincte. Dar n
nu poate fi scris ca produs de câteva numere întregi, dintre care cel puţi

fie distincte. Deci, presupunerea făcută este falsă şi $P(k) \neq \alpha_i$, oricare ar
$i \geq 2$.

Deci, rădăcinile întregi ale polinomului $P(P(X))$ sunt soluţiile întregi a
$P(x) = 0$, adică numerele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

4. Fie E şi F punctele de tangenţă a dreptei AB cu cercurile înscris
în triunghiurile ADC şi BCD. Aplicând teorema lui Pitagora, avem

$$AC^2 - BC^2 = (AC^2 - CD^2) - (BC^2 - CD^2) = AD^2 - BD^2 =$$
$$(AD - BD)(AD + BD) = (AD - BD) \cdot AB.$$

Înlocuind valorile date, obţinem că $AD - BD = 4$.

Pe de altă parte, avem $DE = DM$, $DF = DN$ şi $CD + AD = 2D$
$CD + BD = 2DN + BC$. De aici rezultă că

$$AD - BD = 2DM + AC - 2DN - BC = 2(DM - DN) + 2.$$

Prin urmare, $2(DM - DN) = AD - BD - 2 = 2$. Rezultă că $MN = 1$.

5. Observăm că $\triangle BNX \sim \triangle YNC$. Presupunem că $BX \geq CY$
$XN \geq NC$ (menţionăm că $XN = NC$, dacă şi numai dacă $BX = C$
siderăm pe $[XN]$ punctul P astfel încât $NP = NC$. Atunci: S_{BNP}
$S_{YPN} = S_{YNC}$, $S_{BPX} \geq S_{YXP}$ (egalitatea are loc doar în cazul când B
Din trapezul $XBCY$ avem $S_{XNY} = S_{BCN}$. Prin urmare,

$$S_{BNX} + S_{YNC} = S_{BPX} + S_{BNP} + S_{YNC} \geq$$
$$S_{YXP} + S_{BCN} + S_{YPN} = S_{XNY} + S_{BCN} = 2\,S_{XNY}.$$

Rezultă că $S_{XNY} \leq \dfrac{1}{4}\,S_{XBCY}$. Prin analogie, se arată că $S_{XYM} \leq \dfrac{1}{4}\,S$
urmare,

$$S_{XNYM} = S_{XNY} + S_{XYM} \leq \frac{1}{4}\,(S_{XBCY} + S_{AXYD}) = \frac{1}{4}\,S_{ABCD}$$

Dacă $BX = CY$, atunci aria este maximă: $S_{XNYM} = \dfrac{1}{4}\,S_{ABCD} = \dfrac{1}{4}$.

6. Din enunţ rezultă că suma încasată este de n^2 lei. Fie $n = 10a$
$a, b \in \mathbb{N}$, $0 \leq b < 10$. Atunci $n^2 = 100a^2 + 20ab + b^2 = 20a(5a + b) + b^2$
luat în total un număr impar de câte 10 lei. Rezultă că numărul zecilor
n^2 este impar, ceea ce implică $b^2 = 16$ sau $b^2 = 36$. În ambele cazuri restu
cu 6. Deci, ultima dată fratelui mai mic i-a revenit 6 lei, cu 4 lei mai p
fratelui mai mare. Deoarece împărţirea a fost corectă, rezultă că preţul
este de 2 lei.

7. Se ştie că pentru orice număr natural m cu descompunerea
$m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, numărul divizorilor (pozitivi) distincţi ai numărului n
cu $d(m) = (\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$ (se demonstrează prin inducţie în raport c
k de factori primi).

Scriem descompunerea canonică a numărului $n = 2^{\alpha} 3^{\beta} p_1^{\gamma_1} \cdots p_k^{\gamma_k}$, unde
sunt factori primi distincţi şi diferiţi de 2 şi 3 cu exponenţi întregi $\alpha, \beta \geq$
$(i = 1, \ldots, k)$. Atunci, numărul divizorilor (pozitivi) distincţi ai
$2n^2 = 2^{2\alpha+1} 3^{2\beta} p_1^{2\gamma_1} \cdots p_k^{2\gamma_k}$ este egal cu

$$d(2n^2) = (2\alpha + 2)(2\beta + 1)(2\gamma_1 + 1) \cdots (2\gamma_k + 1).$$

Analog, avem

$$d(3n^2) = (2\alpha+1)(2\beta+2)(2\gamma_1+1)\cdots(2\gamma_k+1),$$
$$d(6n^2) = (2\alpha+2)(2\beta+2)(2\gamma_1+1)\cdots(2\gamma_k+1).$$

Notăm $c = (2\gamma_1+1)\cdots(2\gamma_k+1)$. Din condiţiile problemei avem

$$\begin{cases} (2\alpha+2)\,(2\beta+1)\,c = 28 \\ (2\alpha+1)\,(2\beta+2)\,c = 24 \end{cases}.$$

Numărul c este un divizor comun al numerelor 28 şi 30. În plus, c este im
$c = 1$. Sistemul (4) pentru $c = 1$ are soluţia în numere naturale $\alpha =$
Rezultă că $d(6n^2) = (2\alpha+2)(2\beta+2)c = 32$.

8. După ocuparea de către bacterii a unui cubuleţ nou numărul feţelor c
de pe frontieră ale volumului ocupat de bacterii nu creşte. Numărul maxin
de acest fel este egal cu $1998 \times 6 = 11988$, iar numărul feţelor cubuleţelor d
ale cubului construit este egal cu $45 \times 45 \times 6 = 12150$. Deci, bacteriile nu
toate cubuleţele.

9. Notăm cu A şi B cei doi bunici ai unui elev oarecare. Fie X mulţim
care au A şi B ca bunici. În condiţiile problemei, restul elevilor vor av
dintre bunici sau pe A sau pe B. Fie Y şi Z mulţimile acelora pentru
respectiv B este bunic. Notăm cu C al treilea bunic al unui elev din m
(primul bunic fiind A). Ca urmare, toţi elevii din Z vor avea ca bunici
acelaşi mod, deducem că şi toţi elevii din Y au pe C ca bunic. Aşadar, e
trei bunici: A, B, C. Dacă a, b, c notează numărul de nepoţi pe care îi a
clasă A, B şi respectiv C, rezultă că $a+b+c = 40$. Observăm că $a \leq$
$c \leq 13$ implică $a+b+c \leq 39 < 40$. Deci, măcar unul dintre a, b, c este $\geq$
măcar un bunic are 14 nepoţi.

10. Vom spune că $n\,(n > 1)$ cocoşi formează un n-ciclu, dacă ei pot
astfel încât primul cocoş a rupt o pană de la al doilea, al doilea a rupt o pa
treilea etc., iar ultimul cocoş a rupt o pană de la primul. Astfel, mulţime
poate fi partiţionată în cicluri.

Toţi cocoşii din orice n-ciclu par (n este număr par) se aşază în co
cocoşii cu un număr de ordine par într-un coteţ, iar cei cu număr de ordi
celălalt.

Pentru orice n-ciclu impar (n este un număr impar) este necesar şi s
tăiem un cocoş, de exemplu, ultimul. În acest caz ceilalţi cocoşi se aşa
coteţe după metoda precedentă. Menţionăm că din ipoteză rezultă că nu
un 3-ciclu de cocoşi.

Deoarece $2001 = 5 \times 400 + 1$, rezultă că nu există mai mult de 400 cicl
Dar deoarece un cocoş nu poate forma un ciclu, rezultă că există cel m
cicluri impare (de exemplu, 399 de 5-cicluri şi un 6-ciclu).

Prin urmare, se pot tăia oricând cel mult $k = 399$ de cocoşi (câte unul
impare), pentru a aşeza ceilalţi cocoşi conform cerinţelor din enunţ.

Probleme pentru clasa a VIII-a – *Holger STE*

Enunţuri şi soluţii

1. *Patru numere adunate două câte două dau sumele* 4, 7, 9, 14, 16
sunt cele patru numere?

Soluţie. Fie x_1, x_2, x_3 şi x_4 cele patru numere. Vom presupune, fără
generalitatea, că $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$. Observăm că $x_1 + x_2 \leq x_1 + x_3 \leq$
$x_2 + x_3 \leq x_2 + x_4 \leq x_3 + x_4$. Relativ la sumele $x_1 + x_4$ şi $x_2 + x_3$ putem
$x_1 + x_4 \leq x_2 + x_3$ cât şi $x_2 + x_3 \leq x_1 + x_4$. Ca urmare, suntem conduşi la u
două sisteme:

$$x_1+x_2=4,\ x_1+x_3=7,\ x_1+x_4=9,\ x_2+x_3=14,\ x_2+x_4=16,\ x_3+x_4$$

$$x_1+x_2=4,\ x_1+x_3=7,\ x_1+x_4=14,\ x_2+x_3=9,\ x_2+x_4=16,\ x_3+x_4$$

Rezolvăm mai întâi sistemul (1). Adunând primele două ecuaţii şi d
scăzând a patra, obţinem $2x_1 = -3$. Prin înlocuire în primele trei ecu
$x_1 = -\dfrac{3}{2}$, $x_2 = \dfrac{11}{2}$, $x_3 = \dfrac{17}{2}$, $x_4 = \dfrac{21}{2}$, care verifică şi ultimele două ecua

În mod similar, sistemul (2) conduce la soluţia $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 6$

2. *Demonstraţi că prin "rotirea către dreapta" a unui număr de* 8 *cif*
cu 73*, se obţine tot un număr divizibil cu* 73*. (Se spune că un număr n*
"rotit către dreapta", dacă ultima cifră este mutată în faţa primei cifre
1234 → 4123*.)*

Soluţie. Fie $x = \overline{x_7x_6x_5x_4x_3x_2x_1x_0}$ un astfel de număr şi $y = \overline{x_0x_7x_6x}$
rotitul său către dreapta. Avem

$$\begin{aligned}7x + 3y =& 7\left(10^7x_7 + 10^6x_6 + \cdots + 10x_1 + x_0\right) + 3\left(10^7x_0 + 10^6x_7 + \cdots + 1\right.\\
=& \left(3 \cdot 10^7 + 7\right) x_0 + \left(7 \cdot 10^7 + 3 \cdot 10^6\right) x_7 + \left(7 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^5\right) x_6 +\\
& + \left(7 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10\right) x_2 + (7 \cdot 10 +\\
=& \left(3 \cdot 10^7 + 7\right) x_0 + 73 \cdot 10^6x_7 + 73 \cdot 10^5x_6 + \cdots + 73 \cdot 10x_2 + 73x\end{aligned}$$

Dar $3 \cdot 10^7 + 7 = 73 \cdot 410956$ şi, deci, $7x + 3y$ este divizibil cu 73. Deoarece
lui x şi y nu se divid cu 73, rezultă că x şi y pot fi doar simultan divizibi

3. *Aflaţi cifrele necunoscute* x, y, z *din egalitatea* $20\,058\,473 \cdot 11! = \overline{x00y}$

Soluţie. Egalitatea din enunţ se scrie $2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 20\,058\,473 = \overline{x00yz0}$
Observăm că puterile lui 5 sau ale lui 2, cu care este divizibil numărul, dau
doar despre ultimele lui 8 cifre (care, însă, sunt cunoscute). Apelăm la c
divizibilitate cu 7, 9 şi 11, aplicate numărului $\overline{x00yz00550464}$, care vor ant
x, y, z; obţinem

$$x + y + z + 24 = 9i, \quad x - y + z + 2 = 11j, \quad x - y + 2z + 5 = 7$$

(pentru ultima egalitate s-a folosit faptul că un număr este divizibil cu 7
ponderată a cifrelor sale cu ponderile 1, 3, 2, −1, −3, −2, utilizate periodi
de la unităţi spre puterile mai mari ale lui 10, este divizibilă cu 7).

Cum $1 \leq x \leq 9$ şi $0 \leq y, z \leq 9$, din (1) rezultă că avem $25 \leq 9i \leq 51$, -7
$-4 \leq 7k \leq 32$, adică

$$i \in \{3, 4, 5\}, \quad j \in \{0, 1\}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Soluţia sistemului (1) în x, y, z este

$$x = \frac{1}{2}\left(9i + 33j - 14k - 20\right), \quad y = \frac{1}{2}\left(9i - 11j - 22\right), \quad z = 7k - 11j$$

Expresia lui y din (3) arată că i şi j trebuie să aibă aceeaşi paritate. C
există trei cazuri:

1° $i = 3$ şi $j = 1$, caz ce conduce la $y = -3$, ceea ce este imposibil;

2° $i = 5$ şi $j = 1$, care dă $x = 29 - 7k$, $y = 6$ şi $z = 7k - 14$; pentr
obţine soluţia $x = 8$, $y = 6$, $z = 7$;

3° $i = 4$ şi $j = 0$, care dă $x = 8 - 7k$, $y = 7$, $z = 7k - 3$; pentru $k =$
soluţia $x = 1$, $y = 7$, $z = 4$.

Aşadar, sunt posibile două numere divizibile cu 9, 7 şi 11: 800 670 055
100 740 055 046 400. Pentru a decide care este numărul corect este neces
test de divizibilitate, şi anume, cu 27. Puterile lui 10 împărţite la 27 pot d
1, 10 sau -8, în mod periodic. Aplicând această observaţie la primul num

$$1 \cdot (0 + 6 + 5 + 0 + 0) + 10 \cdot (0 + 4 + 5 + 7 + 0) - 8 \cdot (4 + 0 + 0 + 6 + 8$$

deci acest număr este divizibil cu 27. Relativ la al doilea număr avem

$$1 \cdot (0 + 6 + 5 + 0 + 0) + 10 \cdot (0 + 4 + 5 + 4 + 0) - 8 \cdot (4 + 0 + 0 + 7 + 1$$

adică acest număr nu se divide cu 27 şi trebuie exclus.

În final, singura soluţie valabilă este numărul 800 670 055 046 400.

4. *Un număr x format din cinci cifre diferite şi nenule este divizibil cu
că suma tuturor numerelor de cinci cifre distincte ce se pot forma cu a
cifre (inclusiv x) este divizibilă cu* 2399976.

Soluţie. Fie $x = \overline{x_1x_2x_3x_4x_5}$. Cifra x_1 este exact de $4! = 24$ ori pe prin
Adunarea tuturor acestor prime poziţii egale cu x_1 dă numărul $24 \cdot 1000$
poziţia a doua, a treia etc. apare cifra x_1 tot de 24 ori. Cifra x_1 va contrib
totală S cu

$$24 \cdot 10000 + 24 \cdot 1000 + 24 \cdot 100 + 24 \cdot 10 + 24 \cdot 1 = 24 \cdot 11111 = 266$$

Aceasta e valabil pentru orice cifră. Deci pentru suma S avem

$$S = 266664\left(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5\right).$$

Deoarece x e divizibil cu 9, atunci şi $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ este divizib
consecinţă, S este divizibilă cu $266\,664 \cdot 9 = 2\,399\,976$.

5. *Găsiţi toate perechile de numere întregi x şi y care sunt soluţii a
diofantice $2x^2 + 7xy + 3y^2 = 228$.*

Soluţie. Scriem ecuaţia în forma $(x + 3y)(2x + y) = 228$. Dacă nu
este descompus într-un produs de doi factori întregi $p \cdot q = 228$, atunci p
sistemul

$$2x + y = p, \quad x + 3y = q$$

cu soluţia

$$x = \frac{3p - q}{5}, \quad y = \frac{2q - p}{5}.$$

228 are divizorii 1, 2, 3, 4, 6, 12, 19, 38, 57, 76, 114, 228 şi cei corespu
semnul minus. Dacă înlocuim p şi q cu aceşti divizori şi calculăm, obţinen

p	1	2	3	4	6	12	19	38	57	76	11
q	228	114	76	57	38	19	12	6	4	3	2
x	-45	$-\frac{108}{5}$	$-\frac{67}{5}$	-9	-4	$\frac{17}{5}$	9	$\frac{108}{5}$	$\frac{167}{5}$	45	68
y	91			22	14		1			-14	-2

În concluzie, avem perechile de soluţii $(-45, 91)$, $(-9, 22)$, $(-4, 14)$, $(9, 1$
şi $(68, -22)$, împreună cu variantele negative $(45, -91)$, $(9, -22)$, $(4, -14)$
$(-45, 14)$ şi $(-68, 22)$.

6. *Găsiţi toate perechile de numere întregi x şi y care sunt soluţii a*
diofantice $2x^2 + 3y^2 = 77$.

Soluţie. Dacă perechea (x, y) este soluţie, atunci şi perechile $(-x,$
şi $(-x, -y)$ sunt soluţii. E suficient să considerăm soluţiile nenegative.
$x^2 \geq 0$ avem $0 \leq 3y^2 \leq 77$ sau $0 \leq y \leq 5$. y nu poate fi par, deoarece $2x$
şi 77 este impar. E destul să dăm lui y valorile 1, 3 şi 5. Ultimele două
valori întregi pentru x. Obţinem $(x, y) = (1, 5)$, $(5, 3)$ şi $(x, y) = (-1, 5$
$(-1, -5)$, $(-5, 3)$, $(5, -3)$, $(-5, -3)$.

7. *Considerăm numărul natural n, $1000 \leq n < 5000$. Formăm numă*
sau 13 cifre) obţinut scriind în ordine cifrele lui $3n$, $2n$ şi respectiv n.
acest număr este divizibil cu $2^8 + 1$.

Soluţie. Numărul $2n$ are patru cifre deoarece $n < 5000$. Deci numărul
ca în enunţ, are 12 sau 13 cifre. Atunci avem

$$m = 300\,000\,000n + 20\,000n + n = 300\,020\,001n = 3 \cdot 41 \cdot 257 \cdot 9491$$

Deci m este divizibil cu $2^8 + 1 = 257$.

8. *Şase numere prime $7 < p_1 < p_2 < p_3 < p_4 < p_5 < p_6$ formează un*
numere prime", dacă p_2, p_3 şi p_4, p_5 sunt numere prime gemene (adică
$= p_5 - p_4 = 2$), iar $p_2 - p_1 = p_4 - p_3 = p_6 - p_5 = 4$. Demonstraţi că sum
divizibilă cu 630.

Soluţie. Fie M numărul care satisface

$$p_1 = M - 8,\ p_2 = M - 4,\ p_3 = M - 2,\ p_4 = M + 2,\ p_5 = M + 4,\ p_6 =$$

Deoarece p_i sunt numere prime mai mari ca 7, nu pot fi divizibile prin 2,
Ca urmare, M este impar şi divizibil cu 3, 5 şi 7. M se poate reprezenta, c
$M = 210k + 105$. Atunci, avem

$$p_1 = 210k + 97,\ p_2 = 210k + 101,\ p_3 = 210k + 103,$$
$$p_4 = 210k + 107,\ p_5 = 210k + 109,\ p_6 = 210k + 113$$

şi, în concluzie, $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1260k + 630 = 630\,(2k + 1)$

9. *Este posibil ca suma a şapte pătrate perfecte succesive să fie un pătr*

Soluţie. Suma a şapte pătrate perfecte consecutive se poate scrie ast

$$(n-3)^2 + (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 = 7$$

Pentru ca rezultatul să fie pătrat perfect este necesar ca $n^2 + 4$ să fie div
Dar n^2 dă doar resturile 0, 1 sau -3 la împărţirea cu 7. Ca urmare, $7\,(n$
divizibil cu 7, dar nu cu 49 şi nu poate să fie pătrat perfect.

Concursul "Recreaţii Matematice"

Ediţia a IV-a, Muncel - Iaşi, 28 August 2004

Clasa a VII-a

1. Să se rezolve în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ecuaţia $x^2 + y^2 - xy + 2x - 2y + 1 = x^2y^2$.

Cătălin Budc

2. Să se arate că numărul 4^{999} se scrie în baza 10 cu cel puţin 601 cifr

Gabriel I

3. Fie $\triangle ABC$ cu $m(\widehat{B}) = 60°$, $m(\widehat{C}) = 50°$ şi punctele $M \in (BC)$, astfel încât $m(\widehat{BAM}) = m(\widehat{BCN}) = 5°$. Dacă I este centrul cercului $\triangle ABC$, să se arate că punctele M, N, I sunt coliniare.

Gheorghe I

4. Fie $ABCD$ un dreptunghi de centru O. Considerăm $N \in (AO)$, lui $[AD]$, $\{P\} = MN \cap CD$, $\{E\} = OP \cap BC$. Să se arate că $NE \perp BC$.

Andrei Nedelcu, Iaşi *(RecMat*

Clasa a VIII-a

1. Considerăm mulţimile $A = \left\{ y \mid y \in \mathbb{R}, y = \dfrac{x - [x]}{x}, x \geq 1 \right\}$, $B =$ se demonstreze că $A = B$.

Vasile Nec

2. Să se arate că ecuaţia $x^3 + y^5 = t^7$ are o infinitate de soluţii în $(\mathbb{N}^*$

Artur Bălăucă,

3. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub de muchie a, iar P un punct pe segme Determinaţi poziţiile lui P pentru care cu distanţele de la P la planel $(B'BD)$, respectiv $(C'BD)$ se poate construi un triunghi.

Gabriel Popa, Paul Georg

4. Fie $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$. Spunem că un număr natural este *decompoza* poate scrie ca suma a două numere cu aceeaşi sumă a cifrelor în baza b. că există o infinitate de numere care nu sunt decompozabile.

Adrian Zahariuc, Bacău *(RecMat*

Clasa a IX-a

1. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ fixat. Determinaţi $x, y \in \mathbb{R}$ pentru care $x^n + y^n = x^{n+1} +$

Gheorghe I

2. Fie $0 < n_i < 144$, $i = 1, 2, \ldots, 12$, douăsprezece numere naturale di se demonstreze că mulţimea $S = \{n_1, n_2, \ldots, n_{12}\}$ conţine două submulţim ale căror elemente au aceeaşi sumă.

Cătălin Budc

3. Fie $\triangle ABC$ de laturi a, b, c; notăm cu l_a, l_b lungimile bisectoarelor ale unghiurilor $\widehat{A}$, respectiv $\widehat{B}$. Dacă $l_a = a$ şi $l_b = b$, să se calculez unghiurilor $\triangle ABC$.

Vasile Nec

4. Există funcţii $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care

$$|f(x+y+z+t)+\cos x+\cos y+\cos z+\cos t|<4, \quad \forall x,y,z,t \in$$

Lucian Tuţescu, Craiova *(RecMat*

Clasa a X-a

1. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia $2^{x-1}+2^{x^2-1}=\frac{y^2+}{y^2}$ aibă soluţii în $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

Petru Răducanu, Iaşi *(RecM*

2. Arătaţi că există o infinitate de numere naturale n pentru care divide $n!$.

Lucian Tuţescu

3. Fie $\mathcal{S}_1(O_1,r_1)$, $\mathcal{S}_2(O_2,r_2)$ două sfere, iar $A_i \in \mathcal{S}_1$, $B_i \in \mathcal{S}_2$, $i=$ astfel încât A_iB_i, $i=\overline{1,4}$ să fie tangente comune la cele două sfere. Fie segmentului $[A_iB_i]$, $i=\overline{1,4}$. Să se determine un punct $P \in O_1O_2$ pentru $PM_1+PM_2+PM_3+PM_4$ să fie minimă.

Gabriel Popa, Paul Georg

4. Există triunghiuri pentru care $IH=2004$ şi $GH=2003$? (notaţii

Lucian Lăduncă, Andrei Ned

Clasa a XI-a

1. *a*) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funcţie derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $a \in \mathbb{R}^*\setminus \operatorname{Im} f'$. Să pentru orice funcţii $g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ecuaţiile

$$g(x)=h(x), \quad (f\circ g)(x)-ag(x)=(f\circ h)(x)-ah(x)$$

au aceleaşi mulţimi de soluţii.

b) Să se rezolve ecuaţia $2x+\sin(\sin x)=3\sin x$.

Silviu Boga

2. Se dă cercul $(\mathcal{C})$ şi dreapta (d) tangentă lui. Din punctul M, mobil (d), se duce tangenta MT la cercul $(\mathcal{C})$. Se cere:

a) locul geometric al punctului care împarte segmentul $[MT]$ în rapor

b) să se reprezinte grafic acest loc pentru $k=1$.

Gabriel Mîr

3. Fie $k,n,p,q \in \mathbb{N}^*$, n, p, q impare, iar $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Să se demo $A^{2^k}+pA+qI_n \neq O_n$.

Romeo Ili

4. Fie $k \in \mathbb{N}^*$; să se arate că ecuaţia $x^{n+k}-x^n-x^{n-1}-\cdots-x-1$ singură soluţie pozitivă (pe care o notăm cu x_n). Să se arate că şirul $(x$ convergent şi să se afle limita sa.

Dumitru Mihalache, Marian Tetiva, Bârlad *(RecMat*

FUNDAŢIA CULTURALĂ "POIANA" (dir. Da

a oferit două premii în valoare de câte **1 000 000 lei**, pentru cele mai bu la gimnaziu şi liceu, următorilor elevi:

1. **Hurmuz Daniel**, cl. a VIII-a, *Şcoala nr. 7, Botoşani,*
2. **Săvescu Cristian**, cl. a IX-a, *Colegiul Naţional "Unirea", Focşan*

Concursul interjudeţean "Octav Onicescu

Ediţia a VIII-a, Botoşani, 30 octombrie 2004

1. Pe data de 30 octombrie o veveriţă lacomă are 2004^{2004} alune. În
are un număr par de alune ea mănâncă jumătate din ele, iar în celela
mănâncă nimic şi mai culege 3 alune. Arătaţi că începând cu o anumită
va mânca doar câte 3 alune odată la 2 zile.

2. Broscuţele stau în cerc în jurul lacului de la Ipoteşti. În prima secun
una din ele. În fiecare din secundele următoare orăcăie doar acelea ce a
vecină care a orăcăit în secunda anterioară. Dovediţi că 2005 broscuţe
toate deodată de la un moment dat încolo, dar 2004 broscuţe nu vor orăcă
toate deodată.

3. Pe o tablă de şah $n \times n$ sunt aşezate n^2 numere egale fiecare cu
(nu toate egale). Prin *mutare* se înţelege că alegem o linie şi o coloană
schimbăm semnele tuturor numerelor de pe linie şi apoi tuturor celor de p
Se ştie că după câteva astfel de mutări toate numerele pot fi făcute 1.
dacă n este par, plecând de la configuraţia iniţială putem face toate nume
dacă n este impar nu putem face niciodată toate numerele -1.

4. De aceeaşi parte a unei drepte se consideră 2003 puncte distincte A
A_{2003} astfel încât orice cerc cu centrul pe dreaptă să conţină cel mult d
puncte. Se numeşte "cerc bun" un cerc cu centrul pe dreaptă, ce trece p
din puncte şi lasă 1001 puncte în interiorul său şi 1001 în exterior. Arăta

a) orice punct de pe dreaptă (cu excepţia eventual a unui număr finit
este centrul unui "cerc bun";

b) dacă absolut toate "cercurile bune" trec prin A_{1002} (deci prin *ace*
atunci cele 2003 puncte sunt situate pe o perpendiculară pe dreapta dată

5. *a*) Se dau $n \geq 2004$ sertare aşezate în linie. În primele 2003 din st
câte o bilă. La un *pas* se alege o bilă oarecare ce are sertar gol în dreapta
în acesta, astfel că bilele "migrează" una câte una spre dreapta. Arătaţi c
$2003\,(n-2003)$ paşi nici o bilă nu mai poate fi mutată.

b) Se dau $n \geq 2004$ numere reale distincte astfel încât suma oricăror 2
să fie tot unul din cele n numere. Arătaţi că $n = 2004$, că jumătate din nu
pozitive şi celelalte sunt opusele lor.

Rezultatele obţinute au fost următoarele:

Premiul I – **Pachiţariu Marius** (Colegiul Naţional Iaşi).

Premiul II – **Chirilă Cezar** (Colegiul Naţional “Tudor Vianu”, Bucu

Premiul III – **Ţurcanu Alexandru**, **Vatavu Şerban** (Colegiul Naţio
Eminescu”, Botoşani).

Menţiuni – **Roşu Eugenia** (Iaşi), **Istrate Carmen** (Focşani), **Bere**
(P. Neamţ), **Milatinovici Bianca** (Iaşi), **Hurmuz Daniel** (Botoşani),
Ciprian (Suceava), **Galea Lucian** (Botoşani), **Cepoi Alexandru** (Suce
călu Sorin (P. Neamţ), **Georgescu Flavian** (P. Neamţ), **Coşbuc Mir**
Mihalcea Marcel (Vaslui), **Plămadă Andrei** (Botoşani).

PROBLEME ŞI SOLUŢII

Soluţiile problemelor propuse în nr. 1 / 20

Clasele primare

P.64. *Într-o piesă de teatru sunt* 12 *personaje, copii şi adulţi. Câţi*
în piesă, dacă la fiecare doi adulţi corespunde un copil?
(*Clasa I*) **Alexandra Radu, e**

Soluţie. Formăm grupe de forma (copil, adult, adult) până epuizăm p
Putem forma patru grupe de acest fel. Rezultă că în piesă joacă patru co

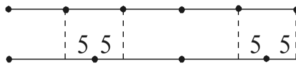
P.65. *Se dau jetoanele* $\boxed{\text{AŢ}}$ $\boxed{\text{II}}$ $\boxed{\text{CRE}}$ $\boxed{\text{ŢII}}$ $\boxed{\text{AŢII}}$ $\boxed{\text{RECR}}$ $\boxed{\text{EA}}$ $\boxed{\text{R}}$
Care este numărul cel mai mare de jetoane cu care se poate forma cuvântul
AŢII"?
(*Clasa I*) **Oxana Pascal, elevă, Rep.**

Soluţie. Cuvântul "RECREAŢII" poate fi format astfel: $\boxed{\text{RE}}$ $\boxed{\text{CR}}$
$\boxed{\text{REC}}$ $\boxed{\text{RE}}$ $\boxed{\text{AŢ}}$ $\boxed{\text{II}}$ şi $\boxed{\text{RECR}}$ $\boxed{\text{EA}}$ $\boxed{\text{ŢII}}$. Numărul cel mai mare
utilizate este patru.

P.66. *Într-o livadă sunt tot atâţia peri cât şi meri. Sunt* 6 *rânduri c*
rânduri cu meri. Numărul merilor de pe un rând întrece cu 5 *numărul pe*
un rând. Câţi pomi sunt în acea livadă?
(*Clasa a II-a*) **Înv. Maria I**

Soluţie. Utilizăm metoda figurativă.

Numărul perilor din cele 6 rânduri:
Numărul merilor din cele 4 rânduri:



Din figurarea mărimilor se deduce că un rând de peri are 5+5 = 10 pomi
perilor este $6 \cdot 10 = 60$. Numărul tuturor pomilor din livadă este $60 + 60$

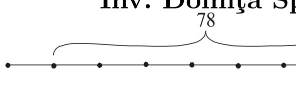
P.67. *Dintr-o mulţime de* 5 *copii, orice grupare de trei conţine cel pu*
Câţi băieţi pot fi în mulţime?
(*Clasa a II-a*) **Andreea Surugiu, e**

Soluţie. În mulţime nu putem avea mai mult de 2 băieţi, altfel am găs
de trei în care nu avem cel puţin o fată. În concluzie, putem avea 2 băie
sau nici unul.

P.68. *Dacă Ina ar împărţi numărul nucilor culese de ea la numărul nu*
de sora sa, ar obţine 7 *rest* 6*. Ştiind că Ina a cules cu* 78 *nuci mai mult*
sa, aflaţi câte nuci a cules fiecare.
(*Clasa a III-a*) **Înv. Doiniţa Sp**

Soluţie. Utilizăm metoda figurativă.

Numărul nucilor culese de Ina:
Numărul nucilor culese de sora Inei:



Numărul nucilor culese de sora Inei este $(78 - 6) : 6 = 72 : 6 = 12$.
nucilor culese de Ina este $7 \cdot 12 + 6 = 84 + 6 = 90$.

P.69. *Într-o împărţire cu rest, în care împărţitorul este mai mar*
mărind împărţitorul cu o unitate şi efectuând din nou împărţirea obţin

şi restul 0. Aflaţi câtul şi restul împărţirii iniţiale.
(*Clasa a III-a*) **Înv. Mariana Toma, Muncelu de**

Soluţie. Împărţirea iniţială este $D = I \times C + R$, $R < I$. A doua împ
exactă şi avem $D = (I + 1) \times 9$. Rezultă $D = I \times 9 + 9$. Cum $I > 9$ obţi
şi $R = 9$.

P.70. *Într-o tabără internaţională de matematică sunt elevi din patru garia, Grecia, Republica Moldova şi România. Dacă 21 elevi nu sunt din 23 nu sunt din Grecia, 22 elevi nu sunt din Republica Moldova şi 21 ele din România, câţi elevi sunt din fiecare ţară?*
(*Clasa a III-a*) **Georgiana Ciobanu, e**

Soluţie. Dacă 21 elevi nu sunt din Bulgaria, înseamnă că sunt din G publica Moldova şi România.

Analog, 23 elevi sunt din Bulgaria, Republica Moldova şi România;
22 elevi sunt din Bulgaria, Grecia şi România;
21 elevi sunt din Bulgaria, Grecia şi Republica Moldova.

Triplul elevilor din cele patru ţări este $21 + 23 + 22 + 21 = 87$. Numă din cele patru ţări este $87 : 3 = 29$. Rezultă $29 - 21 = 8$ elevi din Bulgar elevi din Grecia, $29 - 22 = 7$ elevi din Republica Moldova şi $29 - 21 =$ România.

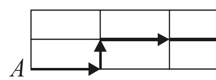
P.71. *Fiecare pătrat din figura alăturată* □□□ *se colorează cu o altă câte moduri putem face acest lucru având la dispoziţie patru culori?*
(*Clasa a IV-a*) **Înv. Cătălina Raţă, Coarnele Ca**

Soluţie. Dacă alegem culorile C_1, C_2, C_3 din cele patru, putem să c tratele în şase moduri diferite: (C_1, C_2, C_3), (C_1, C_3, C_2), (C_2, C_1, C_3), (C (C_3, C_1, C_2), (C_3, C_2, C_1). Cele trei culori pot fi alese în patru modu (C_1, C_2, C_3), (C_1, C_2, C_4), (C_1, C_3, C_4) şi (C_2, C_3, C_4). Pentru fiecare ale şase moduri diferite de colorare. În total avem $6 \times 4 = 24$ moduri diferite d

P.72. *Aruncăm două zaruri şi adunăm punctele de pe cele două feţe d a) Câte sume diferite putem obţine? b) Câte sume se pot forma în t diferite?*
(*Clasa a IV-a*) **Înv. Gheorghe Toma, Muncelu de**

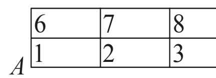
Soluţie. *a*) Suma minimă care se poate forma este $1 + 1 = 2$, iar c este $6 + 6 = 12$. Toate numerele de la 2 la 12 sunt sume posibile. *b*) sume care se pot forma în trei moduri diferite sunt: $6 = 1 + 5 = 2 +$ $7 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4$ şi $8 = 2 + 6 = 3 + 5 = 4 + 4$. În trei moduri dife forma trei sume.

P.73. *În figura alăturată este pus în evidenţă un drum format din şase segmente care pleacă din A şi ajunge în B. Câte drumuri de felul acesta se pot construi?*



(*Clasa a IV-a*) **Înv. Constantin Raţă, Coarnele Ca**

Soluţie. Orice drum de acest fel conţine numai două segmente verticale. Numărul drumurilor coincide cu numărul perechilor distincte de segmente ver-



ticale prin care trec drumurile cu şase segmente. Aceste perechi sunt: (1,
(1, 8), (1, 7), (1, 6), (2, 9), (2, 8), (2, 7), (2, 6), (3, 8), (3, 7), (3, 6), (4, 7), (4
În total se pot construi 15 drumuri formate din şase segmente.

Clasa a V-a

V.46. *Aflaţi $n \in \mathbb{N}$ pentru care $11^n + 9^n$ şi $11^n - 9^n$ sunt simult perfecte.*

Andrei - Sorin Cozma,

Soluţie. Dacă n este par, $U(11^n + 9^n) = 1 + 1 = 2$, deci $11^n + 9^n$ n pătrat perfect. Dacă n este impar, $U(11^n - 9^n) = U\left(\overline{\ldots 1} - \overline{\ldots 9}\right) = 2$, de nu poate fi pătrat perfect. Rezultă că nu există $n \in \mathbb{N}$ cu proprietăţile do

V.47. *Să se arate că numărul $\overline{51a51a}$ nu poate fi scris ca produsul a pa prime.*

Cătălin Bud

Soluţie. Avem că $\overline{51a51a} = \overline{51a} \cdot 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \overline{51a}$. Însă $\overline{51a}$ e compus, oricare ar fi cifra a în baza 10, de unde concluzia.

V.48. *Se consideră fracţiile $x_1 = \dfrac{9}{14}$, $x_2 = \dfrac{10}{21}$, $x_3 = \dfrac{11}{28}$, $\ldots$. Scr x_{1000} şi apoi ordonaţi crescător primele 1000 de fracţii.*

Dumitru Gherman

Soluţie. Numărătorii fracţiilor sunt 9, $9+1$, $9+2$, ... Numărătorul l fi $9+999 = 1008$. Numitorii fracţiilor sunt 14, $14+7$, $14+\dot{2}7$, ... Numitor va fi $14 + 999 \cdot 7 = 7007$; deci $x_{1000} = \dfrac{1008}{7007}$. Observăm că $x_1 = \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{2}$; x $x_3 = \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{4}$; ...; $x_{1000} = \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{1001}$. Atunci $x_{1000} < x_{999} < \cdots < x_3 < x_2$

Observăm că dacă indicelui îi adunăm 8 obţinem numărătorul. Dacă adunăm 1 şi îl înmulţim cu 7 obţinem numitorul, deci $x_{1000} = \dfrac{1000 + 8}{(1000+1) \cdot}$

V.49. *Determinaţi numărul tripletelor $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ dacă $3a + 2b +$ $a + 2b + 3c = 602$. Dacă în plus $a < b < c$, determinaţi a, b şi c.*

Gheorghe I

Soluţie. Avem că $(a + 2b + 3c) - (3a + 2b + c) = 602 - 598$, deci $c -$ aici, $c = a + 2$ şi apoi $b = 298 - 2a$, unde $a \in \{0, 1, 2, \ldots, 149\}$. Prin urm 150 de triplete, având forma $(a, 298 - 2a, a + 2)$. Dacă în plus $a < b <$ $a < 298 - 2a < a + 2$, de unde $296 < 3a < 298$, deci $a = 99$ şi apoi $b = 10$

V.50. *Câte numere de 7 cifre se pot scrie folosind cifrele 1, 2 şi 3, 1 să apară de 2 ori, 2 să apară de 3 ori şi 3 să apară de 2 ori? Dar da cifrelor 1, 2 şi 3 considerăm cifrele 0, 1 şi respectiv 2?*

Petru As

Soluţie. Dacă prima cifră 1 se găseşte pe primul loc, a doua cifră 1 p locurile 2, 3, ..., 7, deci 6 poziţii. Dacă prima cifră 1 se găseşte pe locul doua cifră 1 poate ocupa locurile 3, 4, ..., 7, deci 5 poziţii etc. În total, 1 pot fi aşezate în $6 + 5 + \cdots + 1 = 21$ moduri. Pentru fiecare poziţionar 1, rămân 5 locuri libere care pot fi ocupate în $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ moduri

rămânând astfel exact trei locuri libere pentru cifrele 2. Folosind regula p
obţinem $21 \cdot 10 \cdot 1 = 210$ numere de 7 cifre.

În al doilea caz, cifrele 0 pot fi aşezate în $5+4+3+2+1 = 15$ modu
în $4+3+2+1 = 10$ moduri, rămânând libere exact trei poziţii pentru
$15 \cdot 10 \cdot 1 = 150$ numere.

Clasa a VI-a

VI.46. *Suma dintre opusul unui număr natural şi inversul altui num
este* $-119,992$. *Să se determine numerele.*

Ciprian Ba

Soluţie. Fie $n \in \mathbb{N}$ şi $k \in \mathbb{N}^*$ cele două numere, adică $-n + \dfrac{1}{k} =$
Atunci $k \neq 1$ şi $\dfrac{1}{k} - 0,008 = n - 120$, de unde $\left|\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{125}\right| \in \mathbb{N}$. Însă

$$\left|\frac{1}{k} - \frac{1}{125}\right| \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{125} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{125} < 1,$$

deci $\dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{125}$, adică $n = 120$, $k = 125$.

VI.47. *Aflaţi restul împărţirii numărului* $N = 2844^{2844} + 4107^{4107}$
prin 79.

Tamara C

Soluţie. Se ştie că $(a+b)^n = \mathcal{M}a + b^n$; atunci $2844^{2844} = \mathcal{M}79$,
$= (4108-1)^{4107} = \mathcal{M}79 - 1$, iar $6398^{6398} = (6399-1)^{6398} = \mathcal{M}79$
urmare, $N = \mathcal{M}79$, deci restul cerut este 0.

VI.48. a) *Într-o proporţie cu termeni nenuli, un extrem este sum
trei termeni dacă şi numai dacă celălalt extrem are inversul egal cu suma
celorlalţi trei termeni.*

b) *Dacă din patru numere raţionale nenule distincte unul este suma cel
iar altul are inversul egal cu suma inverselor celorlaltor trei, atunci num
termeni ai unei proporţii.*

Claudiu - Ştefan P

Soluţie. a) În condiţiile $a, b, c, d \in \mathbb{Q}^*$, $ad = bc$, avem că $a = b + c + d$
$a - d = b + c \Leftrightarrow \dfrac{a-d}{ad} = \dfrac{b+c}{bc} \Leftrightarrow \dfrac{1}{d} - \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{b} \Leftrightarrow \dfrac{1}{d} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$.

b) Dacă $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ şi $a = b + c + d$, $\dfrac{1}{d} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$, atunci $a - d = b$
$\dfrac{1}{d} - \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$, adică $a - d = b + c \neq 0$ şi $\dfrac{a-d}{ad} = \dfrac{b+c}{bc}$, deci $ad = bc$, i.

VI.49. *Să se arate că orice număr natural relativ prim cu* 10 *admite u
care se scrie folosind numai cifra* 3.

Lucian - Georges Lădu

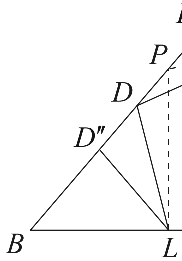
Soluţie. Fie $n \in \mathbb{N}$ cu $(n, 10) = 1$. Considerăm numerele 3, 33, 333, . .

există printre acestea măcar două care dau acelaşi rest la împărţirea prin
principiului cutiei. Evident că n divide diferenţa acestor numere, iar aceast
este de forma $\overline{33\ldots3} \cdot 10^k$. Deoarece $\left(n, 10^k\right) = 1$, urmează că $n \mid \overline{33\ldots3}$

VI.50. *Fie $\triangle ABC$ cu $[AC] \equiv [BC]$, D mijlocul lui $[AB]$, P un punct*
AB, iar M şi L picioarele perpendicularelor din P pe AC, respectiv
arate că $[DM] \equiv [DL]$.

Neculai Roman, Mirc

Soluţie. Deosebim trei cazuri, după cum $P \in [AB]$, $P \in [BA \setminus [AB]$ sau $P \in [AB \setminus [AB]$. Vom trata numai prima situaţie, celelalte rezolvându-se asemănător. Ne situăm cu $P \in [DA]$, ca în figură şi fie D', D'' mijloacele segmentelor $[PA]$, respectiv $[PB]$; demonstrăm că $\triangle DD'M \equiv \triangle LD''D$. Avem că $DD' = \dfrac{1}{2}(AB - PA) = \dfrac{1}{2}PB = D''L$, iar $DD'' = \dfrac{1}{2}(AB - PB) = \dfrac{1}{2}PA = D'M$. În plus, $m(\widehat{DD'M}) = 2\,m(\widehat{BAC}) = 2\,m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{LD''D})$ şi atunci congruenţa de triunghiuri anunţată urmează conform LUL.
$[DM] \equiv [DL]$.



Clasa a VII-a

VII.46. *Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuaţiile:*

a) $x^{100} + x^{77} + x^{50} + x^{21} + x^{10} + x^{5} + 1 > 0$;

b) $x^{100} - x^{77} + x^{50} - x^{21} + x^{10} - x^{5} + 2 < 0$.

Vasile Solcanu, Bogdăneşti

Soluţie. *a)* Fie $E(x) = x^{100} + x^{77} + x^{50} + x^{21} + x^{10} + x^{5} + 1$. Da
evident că $E(x) > 0$. Pentru $x \in (-1, 0)$, avem $x^{2k} > 0$ şi $x^{2k+1} + 1$
$E(x) = x^{100} + x^{50}\left(x^{27}+1\right) + x^{10}\left(x^{11}+1\right) + x^{5} + 1 > 0$. Dacă $x =$
$E(-1) = 1 > 0$. În sfârşit, dacă $x \in (-\infty, -1)$, atunci $x^{2k+1} + 1 < 0$, x^{2k+}
$E(x) = x^{77}\left(x^{23}+1\right) + x^{21}\left(x^{29}+1\right) + x^{5}\left(x^{5}+1\right) + 1 > 0$. În concluzie,
$\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Dacă $F(x) = x^{100} - x^{77} + x^{50} - x^{21} + x^{10} - x^{5} + 2$, atunci $F(x) = E(-$
$\forall x \in \mathbb{R}$, deci inecuaţia dată nu are soluţie în $\mathbb{R}$.

VII.47. *Să se rezolve în $\mathbb{Z}^2$ ecuaţia $u^2v + uv^2 = 2u^2 + 2v^2 - 40$.*

Mihai Crăciun

Soluţie. Ecuaţia se scrie echivalent $uv(u+v) = 2(u+v)^2 - 4u$
$uv(u+v+4) = 2\left[(u+v)^2 - 16\right] - 8 \Leftrightarrow (u+v+4)(uv - 2u - 2v + 8)$
$uv - 2u - 2v + 8 = (u-2)(v-2) + 4$. Considerând toate cazurile posibil
final soluţiile $(u, v) \in \{(2, -8), (-8, 2)\}$.

VII.48. *Dacă $a_i = i + \sqrt{i}$, $\forall i = \overline{1, 2004}$, precizaţi dacă numărul*

$$N = a_1 - a_2 - a_3 + a_4 + a_5 - a_6 - a_7 + a_8 + \cdots + a_{2001} - a_{2002} - a_{200}$$

este negativ, pozitiv sau nul.

Viorel Cornea şi Dan Ştefan Marinescu, H

Soluţie. Avem că $N = N_1 + N_2$, unde

$$N_1 = (1 - 2 - 3 + 4) + (5 - 6 - 7 + 8) + \cdots + (2001 - 2002 - 2003 + 20$$

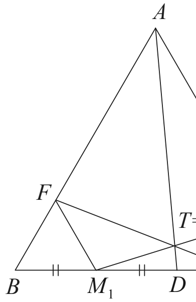
$$N_2 = \left(\sqrt{1} - \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{4}\right) + \left(\sqrt{5} - \sqrt{6} - \sqrt{7} + \sqrt{8}\right) + \cdots + \left(\sqrt{2001} - \sqrt{2002} - \sqrt{20}\right.$$

Evident că $N_1 = 0$ şi cum vom arăta că fiecare paranteză din scrierea lui N_2
tivă, va rezulta că $N < 0$. Pentru a demonstra că $\sqrt{p} + \sqrt{p+3} < \sqrt{p+1}$
$\forall p \geq 1$, este suficient să ridicăm la pătrat în ambii membri, obţinând du
$p^2 + 3p < p^2 + 3p + 2$, fapt adevărat.

VII.49. *Fie $\triangle ABC$ echilateral şi $D \in (BC)$. Notăm cu M_1, M_2 segmentelor $[BD]$, respectiv $[CD]$. Paralela prin M_1 la AC intersectează iar paralela prin M_2 la AB intersectează AC în E. Să se arate că dr M_1E şi M_2F sunt concurente.*

Nicolae Gross şi Lucian Tuţescu

Soluţie. Deoarece $\triangle BFM_1$ şi $\triangle CEM_2$ sunt echilaterale, avem $BM_1 = BF = FM_1$, $CE = CM_2 = EM_2$, $AF = CM_1$ şi $AE = BM_2$. Fie $\{S\} = AD \cap EM_1$, $\{T\} = AD \cap FM_2$. Aplicând teorema lui Menelaus în $\triangle ABC$ cu transversala $M_1 - S - E$ şi în $\triangle ABD$ cu transversala $F - T - M_2$, obţinem



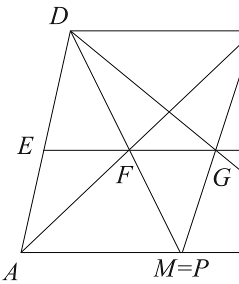
$$\frac{M_1D}{M_1C} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AS}{SD} = 1 = \frac{M_2D}{M_2B} \cdot \frac{BF}{FA} \cdot \frac{AT}{TD},$$

de unde $\dfrac{AS}{SD} = \dfrac{AT}{TD}$, adică $S = T$.

VII. 50. *Fie $ABCD$ un trapez cu bazele $[AB]$ şi $[CD]$. O paral intersectează AD, AC, BD şi BC în punctele E, F, G şi respectiv H. că $EH = 3FG$ dacă şi numai dacă DF, CG şi AB sunt drepte concuren*

Adrian Zan

Soluţie. Aplicăm teorema fundamentală a asemănării în $\triangle ADC$ şi în $\triangle BDC$, obţinem că $\dfrac{EF}{DC} = \dfrac{AE}{AD}$ şi $\dfrac{GH}{DC} = \dfrac{BH}{BC}$ de unde, având în vedere că $\dfrac{AE}{AD} = \dfrac{BH}{BC}$, rezultă că $EF = GH = u$. Notăm încă $v = FG$ şi să presupunem că $EH = 3FG$; atunci $2u + v = 3v$, adică $u = v$. Astfel, în $\triangle DEG$ avem DF mediană şi $AB \parallel EG$, deci DF intersectează AB în mijlocul M al segmentului $[AB]$. Analog rezultă că CG intersectează AB în M, de unde urmează că DF, CG şi AB sunt concurente. Reciproc, da drepte sunt concurente în P, notăm $AP = a$, $PB = b$ şi obţinem că $\dfrac{u}{v} = \dfrac{a}{b}$ de unde $u = v$, adică $EH = 2u + v = 3v = 3FG$.



Clasa a VIII-a

VIII.46. *Să se demonstreze că nu există $m, n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $\dfrac{m}{n} +$*

Alexandru Negrescu, elev,

Soluţie. Relaţia dată se scrie $t^2 - 2003t + 1 = 0$, unde $t = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. condiţii, discriminantul ecuaţiei în t trebuie să fie pătratul unui număr raţ pătrat perfect. Însă $\Delta = 2003^2 - 4 = 2001 \cdot 2005$ nu este pătrat perfect.

Notă. Se poate arăta că relaţia $\dfrac{m}{n}+\dfrac{n}{m}\in\mathbb{N}^*$ implică $\dfrac{m}{n}+\dfrac{n}{m}=2$.

VIII.47. *Pentru* $\forall x\in(0,\infty)$, *să se demonstreze inegalitatea*

$$\frac{\left(x^5+x^3+x^2+1\right)\left(x^3+x^2+2\right)+\left(x^4+x^3+x+1\right)\left(x^3+x+2\right)+\left(x^3+x^2+x+1\right)\left(\right.}{x^6+x^5+x^4+2x^3+x^2+x+1}$$

Mircea Coşbuc,

Soluţie. Cu notaţiile $a=x+1$, $b=x^2+1$, $c=x^3+1$, inegalitat
succesiv

$$\frac{ac\,(a+c)+bc\,(b+c)+ab\,(a+b)}{abc}\geq 6\Leftrightarrow\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}$$

Ultima inegalitate rezultă din cunoscutele $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\geq 2$ şi analoagele.

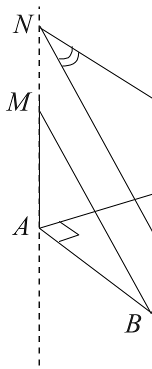
VIII.48. *Găsiţi numerele prime p şi q pentru care* $p^2+q=37q^2+p$

Liviu Smarandache

Soluţie. Evident $p\neq q$ şi scriem ipoteza sub forma $p\,(p-1)=q\,(37q$
$(p,q)=1$. Urmează că $37q-1=tp$, $t\in\mathbb{N}^*$, deci $p\,(p-1)=qtp$, adică p
înlocuind în ipoteză găsim că $qt^2+t=37q-1$. De aici, $q\left(37-t^2\right)=t+$
$37-t^2\geq 0$, prin urmare $t\in\{1,2,3,4,5,6\}$. După încercări, singurul ca
rămâne $t=6$, când $q=7$, $p=43$.

VIII.49. *Fie* $\triangle ABC$ *dreptunghic în A cu* $AB=AC=a$. *Considerăm* M
$MA=a\sqrt{2}$ *şi* $N\in AM$ *astfel încât* $m(\widehat{CN,BM})=60^\circ$. *Să se afle lun*
mentului $[AN]$.

Romanţa Ghiţă şi Ioan Gh



Soluţie. Fie N de aceeaşi parte a planului (ABC) ca şi M; notăm $AN=x$. Construim $d\parallel MB$, cu $N\in d$; evident că $NP\subset(AMB)$ şi fie $\{P\}=AB\cap d$. Din $\triangle ABM\sim\triangle APN$, obţinem $AP=\dfrac{x\sqrt{2}}{2}$, $NP=\dfrac{x\sqrt{6}}{2}$. Cu teorema lui Pitagora în $\triangle APC$ şi $\triangle NAC$, găsim $PC=\sqrt{a^2+\dfrac{x^2}{2}}$, $NC=\sqrt{a^2+x^2}$. Deoarece $m(\widehat{PNC})=$ $=m(\widehat{CN,BM})=60^\circ$, teorema cosinusului în $\triangle NPC$ duce la o ecuaţie în x, cu soluţia admisibilă $x=\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. Analog se tratează cazul când N se află de cealaltă parte a planului (ABC), obţinând acelaşi rezultat.

VIII.50. *Fie patrulaterul convex ABCD cu* $AB=BC$, $m(\widehat{A})=m($
$m(\widehat{B})\leq 90^\circ$ *şi fie O mijlocul lui* $[BD]$. *Pe perpendiculara în O pe planul*
ia un punct V astfel încât $OV=OB$. *Să se arate că* $d\,(D,(VAB))=2\,d\,($
dacă şi numai dacă $m(\widehat{ABC})=60^\circ$.

Monica Ned

Soluţie. Observăm că $ABCD$ este patrulater înscris în cercul de diam
şi fie $r=OA=OB=OC=OD=OV$. Notăm $\{P\}=AC\cap BD$ ş
evident că $AP=PC$ şi $AP\perp BD$. Calculând în două moduri volumul t

$VABD$, obţinem că $h_1 = d(D,(VAB)) = VO \cdot \dfrac{S_{ABD}}{S_{VAB}} = \dfrac{2r\sqrt{5}}{5}$.

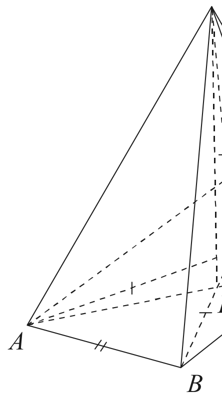
Deoarece $VP \perp AC$, $VP = \sqrt{r^2+x^2}$ şi $AC = 2\sqrt{r^2-x^2}$, calculând în două moduri volumul lui $VDAC$, găsim

$$h_2 = d(D,(VAC)) = \frac{VO \cdot S_{DAC}}{S_{VAC}} = \frac{2r(r-x)}{\sqrt{r^2+x^2}}.$$

Atunci $h_1 = 2h \Leftrightarrow \sqrt{5}(r-x) = \sqrt{r^2+x^2} \Leftrightarrow 2x^2 - 5rx + 2r^2 = 0$ şi $x \in [0,r] \Leftrightarrow x = \dfrac{r}{2} \Leftrightarrow BP = \dfrac{3r}{2}$ şi

$$AP = \frac{r\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\widehat{ABD} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$$

$$m(\widehat{ABD}) = 30^\circ \Leftrightarrow m(\widehat{ABC}) = 60^\circ.$$



Clasa a IX-a

IX.46. *Să se rezolve ecuaţia* $\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} - \sqrt[2n]{x-2} = 2$, *unde*

Dan Popescu

Soluţie. Din condiţiile de existenţă a radicalilor obţinem $x \in [2,3$ $t = \sqrt[2n]{x-2} \in [0,1]$. Ecuaţia se scrie atunci $\sqrt{t^{2n}+1} + \sqrt{1-t^{2n}} = 2$ $\sqrt{a} + \sqrt{b} \le \sqrt{2} \cdot \sqrt{a+b}$, deci $2 + t \le \sqrt{2} \cdot \sqrt{t^{2n}+1+1-t^{2n}} = 2$, adică consecinţă, singura soluţie a ecuaţiei este $x = 2$.

IX.47. *Să se determine şirul* $(a_n)_{n\ge1}$ *de numere strict pozitive pentr*

$$a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - \cdots + (-1)^{n-1} a_n^2 = (-1)^{n-1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n), \quad \forall$$

Marian Ursărescu

Soluţie. Pentru $n = 1$, obţinem $a_1^2 = a_1$, adică $a_1 = 1$. Pentru $n =$ $a_1^2 - a_2^2 = -a_1 - a_2$, deci $a_2^2 - a_2 - 2 = 0$ şi, cum $a_2 > 0$, găsim $a_2 = 2$. $a_n = n$, $\forall n \ge 1$, fapt care se demonstrează prin inducţie matematică. P că $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $\ldots$, $a_k = k$, avem că

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{k-1} k^2 + (-1)^k a_{k+1}^2 = (-1)^k (1 + 2 + \cdots + k) + ($$

de unde, după calcule, folosind faptul că $\sum\limits_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} i^2 = (-1)^{k-1} \dfrac{k(}{}$ $\sum\limits_{i=1}^{k} i = \dfrac{k(k+1)}{2}$, obţinem că $a_{k+1}^2 - a_{k+1} - k(k+1) = 0$. Unica soluţie acestei ecuaţii de grad II este $a_{k+1} = k+1$, ceea ce încheie demonstraţia.

IX.48. *Fie* $a, b, c \in (0,\infty)$ *cu* $a + b + c + \sqrt{abc} = 4$. *Să se arate că*

$$\frac{a^2}{a+\sqrt{bc}} + \frac{b^2}{b+\sqrt{ca}} + \frac{c^2}{c+\sqrt{ab}} \ge \frac{3}{2}.$$

Cezar Lupu, elev, C

Soluţie. Conform inegalităţii mediilor, $4 = a + b + c + \sqrt{abc} \geq 4$
de unde $abc \leq 1$, prin urmare $a + b + c \geq 3$. Folosind acum inegalitatea
Schwartz şi cunoscuta $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ac)$, avem:

$$\left[(a+\sqrt{bc})+(b+\sqrt{ca})+(c+\sqrt{ab})\right]\left[\frac{a^2}{a+\sqrt{bc}}+\frac{b^2}{b+\sqrt{ca}}+\frac{c^2}{c+\sqrt{ab}}\right] \geq (a$$

$$\Rightarrow \sum \frac{a^2}{a+\sqrt{bc}} \geq \frac{(a+b+c)^2}{\sum a + \sum \sqrt{bc}} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)} \geq \frac{3}{2}.$$

IX.49. *Să se arate că $\triangle ABC$ este isoscel în fiecare din ipotezele:*
a) $2m_a + b = 2m_b + a$; *b)* $2m_a + a = 2m_b + b$.

Marius Pachiţariu,

Soluţie. Folosind torema medianei, avem că

$$4\left(m_a^2 - m_b^2\right) = \left[2\left(b^2+c^2\right)-a^2\right] - \left[2\left(a^2+c^2\right)-b^2\right] = 3\left(b^2 - a^2\right.$$

În ipoteza *a*), obţinem că $(a-b)[2m_a + 2m_b + 3(a+b)] = 0$ şi, cum par
trată ia valori strict pozitive, rămâne că $a = b$. În ipoteza *b*), găsim $(a$
$+2m_b - 3(a+b)] = 0$. Însă $2m_a < b+c$, $2m_b < a+c$, deci $2(m_a+m_b) <$
În plus, $c < a+b$, prin urmare $2(m_a+m_b) < 3(a+b)$, adică paranteza
valori strict negative şi din nou $a = b$.

IX.50. *Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ascuţitunghic ABC
B, C sunt măsurile în radiani ale unghiurilor triunghiului, iar $A\cdot\overrightarrow{IA}+B$
$\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$, să se arate că $\triangle ABC$ este echilateral.*

Constantin Micu, Meline

Soluţie. Deoarece $a\,\overrightarrow{IA}+b\,\overrightarrow{IB}+c\,\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$, relaţia din ipoteză arată că $\frac{a}{A}$

Pe de altă parte, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, prin urmare $\frac{\sin A}{A} = \frac{\sin B}{B}$
Considerăm funcţia $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$; vom demonstra că f
descrescătoare. Fie $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $x < y$; avem:

$$f(y) - f(x) = \frac{\sin y}{y} - \frac{\sin x}{x} = \frac{x(\sin y - \sin x) - (y-x)\sin x}{xy} =$$

$$= \frac{2x \sin\frac{y-x}{2}\cos\frac{x+y}{2} - (y-x)\sin x}{xy} <$$

$$< \frac{2x\frac{y-x}{2}\cos x - (y-x)\sin x}{xy} = \frac{(y-x)(x-\operatorname{tg} x)\cos}{xy}$$

(Am folosit faptul că $0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x$, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, apoi că $\frac{x+}{2}$
$\cos\frac{x+y}{2} < \cos x$, deoarece funcţia cosinus este descrescătoare pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
că f este injectivă şi atunci faptul că $f(A) = f(B) = f(C)$ conduce la A
deci $\triangle ABC$ este echilateral.

Clasa a X-a

X.46. *Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia $2^{x-1} + 2^{x^2-1} = \frac{y^2}{}$*
să aibă soluţii în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Petru Rădu

Soluţie. Observăm că pentru orice $a \in \mathbb{R}$ ecuaţia dată are soluţii în exemplu, perechea $(0,0)$ pentru $a \neq 0$ şi perechile $(0,y)$, $y \in \mathbb{Z}^*$, pentru a

X.47. *Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ distincte, cu $z_2+z_3 = 2$ şi astfel încât $|z_1 - 1| =$ $= |z_3 - 1|$. Să se arate că $(z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_3)$ este număr complex pur ima*

Lidia Nicola

Soluţia I. Să observăm întâi că $(z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_3) \neq 0$, dat fiind faptu z_3 sunt distincte. Atunci faptul că $(z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_3)$ este pur imaginar es echivalent cu:

$$(z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_3) + (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)(z_1 - z_3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(z_1 - z_2)[(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) + (\bar{z}_2 - \bar{z}_3)] + [(\bar{z}_1 - \bar{z}_3) + (\bar{z}_3 - \bar{z}_2)](z_1 - z_3) =$$

$$(z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) + (\bar{z}_1 - \bar{z}_3)(z_1 - z_3) = z_2\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_3 - \bar{z}_2 z_3 + z_3\bar{z}$$

$$|z_1 - z_2|^2 + |z_1 - z_3|^2 = |z_2 - z_3|^2 .$$

Fie A_1, A_2, A_3, C punctele de afixe z_1, z_2, z_3 şi respectiv 1. Deoarece implică $(z_2 - 1) + (z_3 - 1) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{CA_2} + \overrightarrow{CA_3} = \overrightarrow{0}$, rezultă că $[A_2A_3]$ este şi, deci $\triangle A_1A_2A_3$ este dreptunghic în A_1. Atunci $A_1A_2{}^2 + A_1A_3{}^2 = A_2$ tocmai relaţia de demonstrat scrisă sub forma (1).

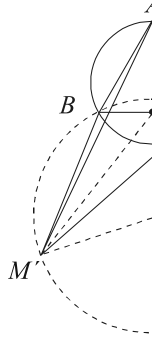
Soluţia a II-a (prof. **Dumitru Găleată**, Iaşi; **Diana Timofte**, elevă condiţia $z_2+z_3 = 2$ rezultă că $z_3 = 2-z_2$ şi, deci, $|z_3 - 1| = = |2 - z_2 - 1|$ aşadar, egalitatea a 2-a din condiţie este superfluă. Notând $z_k = a_k + ib$ din $z_2 + z_3 = 2$ deducem că $a_2 + a_3 = 2$ şi $b_2 + b_3 = 0$, iar din $|z_1 - 1|$ obţinem $a_1^2 - 2a_1 + 1 + b_1^2 = = a_2^2 - 2a_2 + 1 + b_2^2$. Ţinând seama de aceste calcul direct, se arată că $\mathrm{Re}\,(z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_3) = 0$.

X.48. *Se consideră planele paralele α şi β aflate la distanţa h unul de celălalt şi $\triangle ABC$ echilateral inclus în planul β.*

a) Să se afle locul geometric al punctelor $M \in \alpha$ pentru care $MA^2 + h^2 = MB^2 + MC^2$.

b) Să se determine $M \in \alpha$ astfel încât suma MA^2+ $+MB^2 + MC^2$ să fie minimă.

Viorel Cornea şi
Dan Ştefan Marinescu, Hunedoara



Soluţie. *a*) Fie $M' = \mathrm{Pr}_\beta\, M$; atunci $MA^2 = h^2 + M'A^2$ şi analoagele, deci relaţia care caracterizează pe M devine $M'A^2 = M'B^2 + M'C^2$. Fie D simetricul lui A faţă de BC şi fie a latura $\triangle ABC$. Aplicând teorema medianei în $\triangle M'AD$ şi în $\triangle M'B$

$$4M'P^2 = 2\left(M'A^2 + M'D^2\right) - AD^2 = 2\left(M'B^2 + M'C^2\right) - BC$$

de unde, după calcule, $M'D^2 = a^2$. Atunci locul punctului M' este inclu

de centru D şi rază a. Se arată uşor că orice punct de pe acest cerc aparţ
lui M'. Rezultă că locul lui M este proiecţia locului lui M' pe planul α.

b) Dacă T este punctul lui Torricelli al $\triangle ABC$, avem:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = h^2 + M'A^2 + h^2 + M'B^2 + h^2 + M'C^2$$

$$\geq 3h^2 + \frac{(M'A + M'B + M'C)^2}{3} \geq 3h^2 + \frac{(TA + TB + TC)^2}{3},$$

cu egalitate dacă $M' = O$ - centrul cercului circumscris şi, pe de altă part
Însă $\triangle ABC$ este echilateral, deci $O = T$ şi atunci suma este minimă dacă M

X.49. *Să se arate că* $\sin^3 x + \sin^3 y + \sin^3 z - 3 \sin x \sin y \sin z \geq$

$$\geq \frac{3}{4} [\sin x (1 - \cos (y - z)) + \sin y (1 - \cos (z - x)) + \sin z (1 - \cos (x -$$

$\forall x, y, z \in [0, \pi/3]$.

Marian Tetiv

Soluţie. Funcţia sinus este concavă pe intervalul $[0, \pi]$; aplicând ineg
Jensen cu argumentele $3x, 3y, 3z \in [0, \pi]$, obţinem că

$$\sin 3x + \sin 3y + \sin 3z \leq 3 \sin (x + y + z) \Leftrightarrow$$

$$3 \sum \sin x - 4 \sum \sin^3 x \leq 3 \sum \sin x \cos y \cos z - 3 \sin x \sin y \sin z$$

$$4 \sum \sin^3 x - 12 \sin x \sin y \sin z \geq 3 \sum \sin x - 3 \sum \sin x \cos y \cos z - 9 \sin$$

După rearanjarea termenilor în membrul drept şi împărţirea prin 4, obţi
litatea dorită. Egalitate se obţine pentru $x = y = z$.

X.50. *Fie* $a_k, b_k, c_k \in \mathbb{N}$, $k \in \overline{1, n}$; *notăm cu* $f(p)$ *numărul tripletelo
de submulţimi (nu neapărat nevide) cu reuniunea* $M = \{1, 2, \ldots, n\}$, *o
disjuncte şi astfel încât numărul* $\sum\limits_{i \in M \setminus A} a_i + \sum\limits_{i \in M \setminus B} b_i + \sum\limits_{i \in M \setminus C} c_i - p$ *să f
de* 3 *(convenim ca* $\sum\limits_{i \in \emptyset} x_i = 0$*). Arătaţi că dacă* $f(0) = f(1) = f(2)$, *atu
pentru care* $a_i + b_i + c_i \,\vdots\, 3$.

Gabriel Dospinescu, student,

Soluţie. Vom folosi metoda descrisă în articolul *Combinatorică ...*
publicat de autorul problemei în nr. 2/2003 al revistei. Fie $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3}$
avem că

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\varepsilon^{a_i + b_i} + \varepsilon^{b_i + c_i} + \varepsilon^{c_i + a_i}\right) = \sum_{\substack{A \cup B \cup C = M \\ A \cap B = B \cap C = C \cap A = \emptyset}} \varepsilon^{\sum\limits_{i \in C} (a_i + b_i) + \sum\limits_{i \in B} (a_i + c_i) +}$$

fapt care se obţine desfăcând parantezele în stânga şi grupând term
$\varepsilon^p = \varepsilon^{p (\mathrm{mod}\, 3)}$ şi atunci, utilizând ipoteza, obţinem că

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\varepsilon^{a_i + b_i} + \varepsilon^{b_i + c_i} + \varepsilon^{c_i + a_i}\right) = f(0) + f(1) \varepsilon + f(2) \varepsilon^2.$$

Dacă $f(0) = f(1) = f(2)$,produsul din stânga este zero, deci există $i \in$
care $\varepsilon^{a_i + b_i} + \varepsilon^{b_i + c_i} + \varepsilon^{c_i + a_i} = 0$. Aceasta este posibil dacă şi numai dac

$a_i + b_i \pmod 3$, $b_i + c_i \pmod 3$ şi $c_i + a_i \pmod 3$ reprezintă o permutare a
$0, 1, 2$ şi atunci $3 \mid a_i + b_i + b_i + c_i + c_i + a_i$, deci $3 \mid a_i + b_i + c_i$.

Clasa a XI-a

XI.46. *Determinaţi* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ *pentru care* $\det(A+B) = 2$ *şi* $\det($

Cezar Lupu, elev, C

Soluţie. Fie A, B ca în enunţ şi fie $P(X) = \det(A + XB) \in \mathbb{Z}[X]$, p
grad n. Din ipoteză, $P(1) = 2$ şi $P(3) = 5$. Se ştie că, dacă $P \in \mathbb{Z}[X]$
sunt distincte, atunci $P(a) - P(b) \vdots a - b$; în cazul nostru, $P(3) - P(1) \vdots$
$3 \vdots 2$, absurd. În concluzie, nu există matrice cu proprietăţile dorite.

XI.47. *Fie* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *matrice cu* $a_{ij} = \begin{cases} a, \text{ dacă } i = j \\ b, \text{ dacă } i \neq j \end{cases}$, *und*
$\frac{a}{b} \notin \mathbb{Z}$. *Arătaţi că* A *este inversabilă şi determinaţi* A^{-1}.

Gheorghe I

Soluţie. Adunând toate liniile la prima şi apoi scăzând, pe rând,
din celelalte coloane, obţinem că $\det A = [a + (n-1)b](a-b)^{n-1} \neq 0$
$a + (n-1)b = 0 \Rightarrow \frac{a}{b} = 1 - n \in \mathbb{Z}$, iar $a - b = 0 \Rightarrow \frac{a}{b} = 1 \in \mathbb{Z}$, situaţii con
Rezultă că A este inversabilă. Pentru determinarea inversei, fie $A = (a -$
unde I este matricea unitate, iar B matricea având toate elementele e
Avem:

$$\begin{aligned}
A^2 &= (a-b)^2 I + 2b(a-b)B + b^2 B^2 = \\
&= (a-b)^2 I + 2b(a-b) \cdot \frac{1}{b}[A - (a-b)I] + b^2 \cdot n \cdot \frac{1}{b}[A - (a-
\\
&= I \cdot \left[(a-b)^2 - 2(a-b)^2 - bn(a-b)\right] + A \cdot [2(a-b) + bn] = \\
&= [2a + b(n-2)] \cdot A - (a-b)[a + b(n-1)] \cdot I \Rightarrow \\
A &= [2a + b(n-2)] \cdot I - (a-b)[a + b(n-1)] \cdot A^{-1} \Rightarrow \\
A^{-1} &= \frac{2a + b(n-2)}{(a-b)(a+bn-b)} \cdot I - \frac{1}{(a-b)(a+bn-b)} \cdot A
\end{aligned}$$

XI.48. *Se defineşte şirul* $(x_n)_{n \geq 0}$ *prin* $x_n = x_{n-1}^2 - [x_{n-1}]$,
$x_0 \in \left[0, \left(1 + \sqrt{5}\right)/2\right)$. *Să se arate că* $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$.

Cătălin Ţigăeru

Soliţie. Dacă $x_0 \in [0, 1)$, atunci $[x_0] = 0$ şi se demonstrează uşor pr
că $x_n = x_0^{2^n}$; prin urmare, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$. Dacă $x_0 = 1$, se observă imediat
$\forall n \geq 1$, adică $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$ şi în acest caz.

Presupunem că $x_0 \in \left(1, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$. Se arată prin inducţie că $x_n \in \Big(0$
$\forall n \geq 1$. În plus, x_n poate lua valorile x_{n-1}^2, 0 sau $x_{n-1}^2 - 1$, după cum x_n
$x_{n-1} = 1$, respectiv $x_{n-1} \in \left(1, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$; în fiecare caz, $x_n - x_{n-1} \leq 0$
este descrescător. Rezultă că şirul este convergent şi fie l limita sa. Vom

că există $n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $[x_{n_0}] = 0$; atunci $x_n = x_{n_0}^{2^{n-n_0}}, \forall n \geq n_0$ (prin

de unde concluzia. Să presupunem deci prin absurd că $x_n \in \left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right.$

În acest caz, $x_n = x_{n-1}^2 - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ şi, trecând la limită în această relaţ

că $l = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Aceasta contrazice însă faptul că şirul este descrescăt

încheie demonstraţia.

XI.49. *Fie* $(x_n)_{n\geq 0}$, $(a_n)_{n\geq 0}$ *şiruri de numere reale astfel încât* $\sum\limits_{n=}^{\infty}$

$|x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}| + |x_{n+1} - 3x_n + 2x_{n-1}| \leq a_n$, $\forall n \geq 1$. *Să se arate*
este convergent.

Paul Georgescu şi Gabriel

Soluţie. Demonstrăm întâi că, dacă $(z_n)_{n\geq 0}$ şi $(a_n)_{n\geq 0}$ sunt şiruri

reale cu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, astfel încât $|z_{n+1} - z_n| \leq a_n$, $\forall n \geq 0$, atunci (

convergent. Într-adevăr, deoarece $|z_n| \leq |z_0| + \sum\limits_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k| \leq |z_0| + \sum\limits_{k=0}^{n-1}$

că $(z_n)_{n\geq 0}$ este mărginit. Apoi, fiindcă $-a_n \leq z_{n+1} - z_n \leq a_n$, $\forall n \geq$

$z_{n+1} + \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k \leq z_n + \sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k$, deci şirul $y_n = z_n + \sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k$ este monoton d

şi mărginit, adică $(y_n)_{n\geq 0}$ este convergent. Însă şirul $\left(\sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k\right)_{n\geq 0}$ este

la 0, deci $(z_n)_{n\geq 0}$ este şir convergent.

Aplicăm acest rezultat şirurilor $z_n^1 = x_{n+1} - x_n$ şi $z_n^2 = x_{n+1} - 2x_n$
convergenţa lor; atunci $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent ca diferenţă de şiruri con

XI.50. *Fie* $n \in 2\,\mathbb{N}$, *iar* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *o funcţie cu proprietatea că* $f\,($

$\geq f\left(\sqrt[n+1]{x^n y}\right)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. *Să se arate că funcţia este descrescătoare pe*
crescătoare pe $[0, \infty)$. (În legătură cu *Problema 2819* din *Crux Mathe*
nr. 2/2003.)

Titu Zvonaru,

Soluţie. Fie $a, b \in [0, \infty)$ astfel încât $a > b$. Deoarece

$$\frac{nx + y}{n+1} = \frac{x + x + \cdots + x + y}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{x^n y}, \quad \forall x, y > 0,$$

încercăm să găsim x, y astfel încât $a = \dfrac{nx + y}{n+1}$, $b = \sqrt[n+1]{x^n y}$. Prin

x trebuie să fie soluţie a ecuaţiei $nx^{n+1} - (n+1)\,ax^n + b^{n+1} = 0$.
$g(x) = nx^{n+1} - (n+1)\,ax^n + b^{n+1}$, avem că g este funcţie continuă de
$= b^{n+1} - a^{n+1} < 0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} g(x) = \infty$, deci ecuaţia $g(x) = 0$ admite o u

$x_0 > a > 0$; corespunzător găsim pe y_0. În aceste condiţii,

$$f(a) = f\left(\frac{nx_0 + y}{n+1}\right) \geq f\left(\sqrt[n+1]{x_0^n y_0}\right) = f(b),$$

adică f este crescătoare pe $[0, \infty)$.

Dacă $a, b \in (-\infty, 0]$ cu $a > b$ procedăm asemănător, cu observaţia că î
$\dfrac{nx+y}{n+1} \leq \sqrt[n+1]{x^n y}$, iar radicalul are sens dat fiind faptul că n este par.

Clasa a XII-a

XII.46. *Să se determine funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dacă $(\mathbb{R}, *)$ este gr cu proprietatea că simetricul oricărui element $x \in [-1, 1]$ se află în $[-$ $x * y = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.*

Ioan Săcăleanu

Soluţie. Notăm cu e elementul neutru al grupului şi cu x' simetricul $x = x * e$, $\forall x \in \mathbb{R}$, rezultă că $f(x) = x - f(e)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Pentru $x =$ $f(e) = \dfrac{e}{2}$, deci $f(x) = x - \dfrac{e}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Deoarece $x * x' = e$, avem că $f(x) +$ prin urmare $x' = 2e - x$. Pentru $x = 1$, $x' = 2e - 1 \in [-1, 1]$, de unde $e \in [$ $x = -1$, $x' = 2e + 1 \in [-1, 1]$, de unde $e \in [-1, 0]$. Rămâne că $e = 0$, deci funcţie care verifică toate condiţiile din problemă.

XII.47. *Fie $G = (a, b)$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, iar "$\cdot$" înmulţirea numerelor reale. S mine a, b astfel încât $\left(\mathbb{R}_+^*, \cdot\right) \cong (G, \cdot)$ printr-un izomorfism de forma f $f(x) = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, cu $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.*

Alexandru Blaga şi Ovidiu Pop, S

Soluţie. Deoarece $(G, \cdot)$ este grup şi 1 este unitatea faţă de înmulţire, $a < 1 < b$ şi $f(1) = 1 \Leftrightarrow \alpha + \beta = \gamma + \delta$.

Dacă $b \in \mathbb{R}$, fie $x, y \in G$, $1 < x < b$, $1 < y < b$. Cum $(G, \cdot)$ este grup că $xy < b^2 \leq b$, de unde $b^2 \leq b$ sau $b \in (0, 1)$, ceea ce este în contradicţi Rezultă că $b \notin \mathbb{R}$, deci $b = +\infty$.

Deoarece $f'(x) = \dfrac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma x + \delta)^2}$, funcţia f este strict monotonă pe $(0, \infty)$

Cazul I. f strict crescătoare pe $(0, \infty) \Leftrightarrow \alpha\delta - \beta\gamma > 0$. Este necesar ca $\lim\limits_{x \to 0}$ şi $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$, adică $\dfrac{\beta}{\delta} = a$ şi $\gamma = 0$, $\dfrac{\alpha}{\delta} > 0$. Aşadar,

$$f(x) = \frac{\alpha x + a\delta}{\delta} = (1 - a)x + a, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$$

(am utilizat faptul că relaţia $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ revine la $\alpha = (1 - a)\delta$. C $x = y = 2$ în condiţia de morfism obţinem $f(4) = [f(2)]^2$, rezultă că

$$4 - 3a = (2 - a)^2 \Leftrightarrow a^2 - a = 0 \Leftrightarrow a \in \{0, 1\}.$$

Convine doar $a = 0$. În concluzie, $a = 0$, $b = +\infty$ şi $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$.

Cazul II. f strict descrescătoare pe $(0, \infty) \Leftrightarrow \alpha\delta - \beta\gamma < 0$. Urmăm aceeaşi cale şi obţinem $a = 0$, $b = +\infty$ şi $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$.

XII.48. *Fie $(G, \cdot)$ grup de element neutru e şi $x, y \in G$ penrtru care*

a) $\exists k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ *a. î.* $x^k = e$; b) $\exists p \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ *a. i.* $xy = y^p x$.

Să se arate că:

1) $xy^n x^{k-1} = y^{np}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$; 2) $xy = yx \Leftrightarrow y^{n(p-1)} = e$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Mihai Ha

Soluţie. 1) Demonstrăm afirmaţia prin inducţie după n. Pentru $n = 1$
$= y^p x x^{k-1} = y^p x^k = y^p$. Presupunem concluzia adevărată pentru n şi să c
pentru $n+1$; avem:

$$xy^{n+1}x^{k-1} = (xy)\left(y^n x^{k-1}\right) = y^p x \cdot y^n x^{k-1} = y^p y^{np} = y^{(n+1)p}$$

2) Dacă $xy = yx$, atunci $y^p x = yx$, deci $y^p = y$ şi prin urmare $y^{p-1} =$
avem şi $y^{n(p-1)} = e^n = e$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Reciproc, dacă $y^{n(p-1)} = e$, $\forall$
particular $y^{p-1} = e$, deci $xy = y^p x = y^{p-1} \cdot yx = e \cdot yx = yx$, ceea
rezolvarea.

XII.49. *Se consideră numerele reale $b > a \geq 0$, $c \geq 1$ şi funcţii*
$f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ astfel încât $\lim_{n\to\infty} \int_{na}^{nb} g(x)\,dx = d \in \mathbb{R}$. Să se arate că şiru
$u_n = \int_a^b \frac{1}{c + f(x) + g(nx)}\,dx$ este convergent şi să se afle limita sa.

D. M. Bătineţu - Giurgiu,

Soluţie. Din ipotezele problemei, avem că

$$0 \leq \frac{1}{c + f(x)} - \frac{1}{c + f(x) + g(nx)} = \frac{g(nx)}{[c + f(x)][c + f(x) + g(nx)]} \leq$$

pentru $x \in [a, b]$ şi $n \in \mathbb{N}^*$. Prin integrare, deducem că

$$0 \leq \int_a^b \frac{1}{c + f(x)} - u_n \leq \int_a^b g(nx)\,dx.$$

Însă

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \int_a^b g(nx)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_{an}^{bn} g(t)\,dt = d \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

prin urmare există limita şirului $(u_n)_{n\geq 1}$, egală cu $\int_a^b \frac{1}{c + f(x)}\,dx$.

XII.50. *Fie $s(n)$ suma cifrelor numărului natural n. Să se calculeze*
unde $k \in \mathbb{N}$ este fixat.

Gabriel Dospinescu, student,

Soluţie. Vom arăta întâi că orice multiplu nenul al lui $A = \underbrace{11\ldots1}_{m}$
cifrelor cel puţin m. Într-adevăr, să presupunem că există B cel mai mi
nenul al lui A cu $s(B) < m$. Cum $s(iA) \geq m$, $\forall i \in \overline{1,9}$ se impun
$B \geq 10A > 10^m$; fie $B = a_r 10^r + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0$, unde $r \geq m$. Consideră
$C = B - 10^{r-m}(10^m - 1)$.

Evident că $C < B$ şi A divide C. În plus, dacă $a_{r-m} < 9$ atunci $s(C) =$
dacă $a_{r-m} = 9$, atunci $s(C) < s(B)$, prin urmare C este un număr mai
B şi având proprietăţile acestuia, absurd. Rămâne deci că $s(nA) \geq m$, $\forall$

Acum, deoarece $\underbrace{11\ldots1}_{[\lg n]} \mid 10^{[\lg n]} - 1$, iar $10^{[\lg n]} - 1 \mid n!$ fiindcă $10^{[\lg n]}$
aplicând rezultatul demonstrat mai sus urmează că $s(n!) \geq [\lg n]$. Se ş
$\lim_{n\to\infty} \frac{[\lg n]}{\ln^k \ln n} = \infty$, prin urmare $\lim_{n\to\infty} \frac{s(n!)}{\ln^k \ln n} = \infty$.

Soluţiile problemelor pentru pregătirea concur
din nr. 1 / 2004

A. Nivel gimnazial

G56. *Fie $m \in \mathbb{Z}$, $n \in 2\,\mathbb{Z}+1$ fixate. Să se arate că ecuaţia $nx + y =$ r
are o unică soluţie (x_0, y_0) cu proprietatea că $|y_0| < |n|/2$.*

Petru As

Soluţie. Pentru existenţa soluţiei, să observăm că există $q, r \in \mathbb{Z}$, $0 \leq$
$m = nq + r$ (din teorema împărţirii cu rest). Dcaă $0 \leq r < \dfrac{|n|}{2}$, luăm $x_0 =$
Dacă $\dfrac{|n|}{2} < r < n$, luăm $x_0 = q + \operatorname{sgn}(n)$ şi $y_0 = r - |n|$; avem evident că

$$nx_0 + y_0 = n\left(q + \operatorname{sgn}(n)\right) + r - |n| = nq + |n| + r - |n| = nq + r =$$

iar $|y_0| = |n| - r < |n| - \dfrac{|n|}{2} = \dfrac{|n|}{2}$.

Pentru demonstrarea unicităţii, fie încă (x_1, y_1) soluţie a ecuaţiei cu
atunci $n(x_0 - x_1) = y_0 - y_1$, de unde

$$|n| \cdot |x_0 - x_1| = |y_0 - y_1| \leq |y_0| + |y_1| < |n|$$

şi cum $|x_0 - x_1| \in \mathbb{N}$, în mod necesar trebuie să avem $|x_0 - x_1| = 0$, adică
apoi $y_1 = y_0$.

G57. *Un şeic a lăsat moştenire celor doi fii ai săi cinci cămile, cu
unul să primească jumătate, iar celălalt o treime. Moştenitorii nu şi-au pu
averea, aşa că au apelat la un înţelept care trecea pe acolo, călare pe o că
a procedat înţeleptul?*

*Câte probleme asemănătoare mai putem formula (în care moştenirea
cămile, iar fiii primesc a p-a şi a q-a parte)?*

Gabriel I

Soluţie. Problema este clasică, dar cu 3 fii şi 17 cămile. Totul se b
faptul că $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{6} \neq 1$. Înţeleptul aşează cămila sa lângă cele cinci lăsate
de şeic. Primul fiu ia $\dfrac{1}{2}$ din cele 6 cămile, adică 3; al doilea ia $\dfrac{1}{3}$, adică 2
înţeleptului îi rămâne cămila sa.

Pentru a formula alte asemenea probleme, trebuie să găsim trei num
p, q, n astfel încât p şi q să dividă $n+1$, iar $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{n}{n+1}$. Evident c
măcar unul cu inegalitate strictă; atunci $\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} \leq \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{6}$, c
Considerând cazurile posibile, obţinem că $(n, p, q) \in \{(5, 2, 3); (3, 2, 4)\}$,
în ipoteza $p \leq q$. Afară de problema dată, mai putem formula încă una.

Generalizare (**Petru Asaftei**, Iaşi)**.** Dacă înţeleptul are r cămile, r
formula o infinitate de probleme. Mai precis, *pentru $p, q \geq 2$ numere natu
$p + q \neq 4$, vom determina $n, r \in N^*$, $p \nmid n$, $q \nmid n$, astfel încât* $\left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}\right)$ (n

Dacă $(p,q)=1$, atunci $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)(n+r)=n \Leftrightarrow \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{n}{n+r} \Leftrightarrow \frac{pq}{}$
$\frac{n}{n+r}$. Deoarece $(pq-p-q,pq)=1$, avem $r=k(pq-p-q)$, $n+r=p$
$k(p+q)$, cu $k\in\mathbb{N}^*$, k nefiind multipli de p sau q. Dacă $(p,q)=d>$
$\frac{pq-p-q}{pq}=\frac{p_1q_1d^2-p_1d-q_1d}{p_1q_1d^2}=\frac{p_1q_1d-p_1-q_1}{p_1q_1d}$, cu $(p_1,q_1)=1$.
$(p_1q_1d-p_1-q_1,p_1q_1d)=1$, atunci $r=k(p_1q_1d-p_1-q_1)$, $n+r=$
$n=k(p_1+q_1)$, cu $k\in\mathbb{N}^*$, k nefiind multiplu de p sau q. Condi'tia $p+q\neq$
cazul $p=q=2$, care ar conduce la $n+r=n\Leftrightarrow r=0$.

G58. *Să se rezolve în* $\mathbb{N}^2$ *ecuaţia* $2^x+1=5^y$.

Irina Mustaţă, elevă, şi Valentina Blen

Soluţie. Dacă x, y sunt ambele pare, $x=2p$ şi $y=2q$, $p,q\in$
$2^x+1=4^p+1=(3+1)^p+1=\mathcal{M}3+2$, iar $5^y=25^q=(\mathcal{M}3+1)^q=\mathcal{M}$
$2^x+1\neq 5^y$. Dacă x, y sunt ambele impare $x=2p+1$, $y=2q+1$, $p,q\in$
$2^x+1=2\neq 5^y$ pentru $p=0$ şi $2^x+1=2\cdot 4^p+1=\mathcal{M}8+1$, $5^y=5\cdot 25^q$
deci $2^x+1\neq 5^y$ şi pentru $p\geq 1$. Dacă $x=2p+1$, $y=2q$, $p,q\in$
$2^x+1=2\cdot 4^p+1=2(\mathcal{M}3+1)+1=\mathcal{M}3$ iar $5^y=\mathcal{M}3+1$, deci $2^x+1\neq 5^y$.
pentru $x=2p, y=2q+1$, $p,q\in\mathbb{N}$, avem în cazul $p\geq 2$ că $2^x+1=4^p+1$
iar $5^y=\mathcal{M}8+5$, adică $2^x+1\neq 5^y$. Dacă $p\leq 1$, prin verificări obţinem un
a ecuaţiei $(2,1)$.

G59. *Fie* $A=\{n\in\mathbb{N}^*\mid s(2000n)+s(2002n)=2s(2001n)\}$, *unde pr*
notat suma cifrelor lui x. *Demonstraţi că orice număr natural nenul are u*
ce aparţine lui A.

Gabriel Dospinescu, student,

Soluţie. Notăm $N(k,p)=\underbrace{11\ldots1}_{p}\underbrace{00\ldots0}_{k}$; atunci pentru orice $p>$
$k\in\mathbb{N}$ avem că $2000\cdot N(k,p)=\underbrace{22\ldots2}_{p}\underbrace{00\ldots0}_{k+3}$, $2002\cdot N(k.p)=222\underbrace{44\ldots4}_{p-3}$
$2001\cdot N(k,p)=222\underbrace{33\ldots3}_{p-3}111\underbrace{00\ldots0}_{k}$, deci

$$s(2000\cdot N(k,p))+s(2002\cdot N(k,p))=2p+6+4(p-3)+6=6p=2s(2001$$

adică $N(k,p)\in A$. Fie acum $m\in\mathbb{N}^*$ oarecare; considerând numerele $1,1$
conform principiului cutiei rezultă că putem găsi $i<j$ astfel încât m
diferenţa $\underbrace{11\ldots1}_{j}-\underbrace{11\ldots1}_{i}$, deci $m\mid N(j-i,i)$ ceea ce încheie soluţia.

G60. *Să se demonstreze că pentru orice* $a,b,c\in(0,\infty)$ *are loc*

$$\frac{ab}{(a+b)^2}+\frac{bc}{(b+c)^2}+\frac{ca}{(c+a)^2}\leq\frac{1}{4}+\frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\,.$$

Gabriel Dospinescu, student,

Soluţie. Să observăm că

$$\frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{2\left[(a+b)(b+c)(c+a) - ab(a+b) - bc(b+c) - ca\right.}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$= 2 - \frac{\left(a^2+bc\right)(b+c) + \left(b^2+ac\right)(a+c) + \left(c^2+ab\right)(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)} =$$

$$= 2 - \left(\frac{a}{a+b}\frac{c}{b+c} + \frac{a}{a+b}\frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+c}\frac{b}{a+b} + \frac{b}{b+c}\frac{a}{a+c} + \frac{c}{c+a}\frac{c}{b+c} + \frac{c}{c+\right.$$

$$=2-\left[\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}\right)\left(\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}\right)-\frac{ab}{(a+b)^2}-\frac{bc}{(b+c)^2}\right.$$

Aplicăm inegalitatea mediilor numerelor $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}$ şi $\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+\ldots}$
a căror sumă este 3; obţinem că

$$\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}\right)\left(\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}\right) \le \frac{9}{4}.$$

Înlocuind în identitatea demonstrată, obţinem concluzia. Egalitatea e
atunci când două dintre numerele a, b, c sunt egale.

G61. *Să se demonstreze că pentru orice $a, b, c \in (0,\infty)$ are loc*

$$\left(\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\right)^3 \ge 54\sqrt{2}\frac{\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}}{abc} \ge 27\frac{(a+b)(b+\ldots}{abc}$$

Marian Tetiv

Soluţie. Prima inegalitate se scrie succesiv

$$[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)]^3 \ge 54\sqrt{2}\,a^2b^2c^2\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2\ldots}$$

$$\left[a\left(b^2+c^2\right)+b\left(a^2+c^2\right)+c\left(a^2+b^2\right)\right]^3 \ge 54\sqrt{2}\,a^2b^2c^2\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)\ldots}$$

Pentru a demonstra această inegalitate, vom intercala între cele două c
$27abc\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)$. Faptul că

$$\left[a\left(b^2+c^2\right)+b\left(a^2+c^2\right)+c\left(a^2+b^2\right)\right]^3 \ge 27abc\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)(c\ldots$$

rezultă din inegalitatea mediilor aplicată numerelor $a\left(b^2+c^2\right)$, $b\left(a^2+c^2\right)$ şi
Apoi, avem

$$27abc\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right) \ge 54\sqrt{2}\,a^2b^2c^2\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)(c^2\ldots}$$

$$\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right) \ge 8a^2b^2c^2,$$

fapt care rezultă prin înmulţirea membru cu membru a inegalităţilor a^2 -
$b^2+c^2 \ge 2bc$, $c^2+a^2 \ge 2ac$.

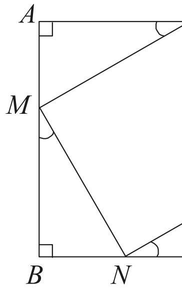
În ce priveşte a doua inegalitate, ce rezultă prin înmulţirea membru cu
inegalităţilor cunoscute $\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)} \ge a+b$, $\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)} \ge b+c$, $\sqrt{2\left(c^2+\ldots\right.}$
Egalitatea se atinge pentru $a=b=c$.

G62. *Fie $ABCD$ un patrulater convex în care se poate înscrie pătrat de centru O ($M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CD)$, $Q \in (AD)$). Să s $AB+BC+CD+DA \ge \sqrt{2}(AO+BO+CO+DO)$. Când are loc egal*

Lucian Tuţescu, Craiova şi Ioan Şerdean

Soluţie. Conform inegalităţii lui Ptolomeu aplicată în patrulaterul AM
$AQ \cdot MO + AM \cdot OQ \geq AO \cdot MQ$, adică $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}(AQ + AM) \geq a \cdot AO$, u
latura pătratului $MNPQ$; prin urmare, $AQ + AM \geq \sqrt{2} \cdot AO$. Scriin
trei inegalităţi analoage şi adunându-le, urmează concluzia. Egalitatea a
cele patru patrulatere în care s-a aplicat Ptolomeu sunt inscriptibile, fa
întâmplă dacă $ABCD$ este dreptunghi. Însă în $ABCD$ trebuie să se po
pătratul $MNPQ$, deci $ABCD$ este el însuşi pătrat.

Justificare: $ABCD$ - dreptunghi, $MNPQ$ - pătrat $\Rightarrow ABCD$ - pătrat.



$$\left.\begin{array}{r} m(\widehat{MNB}) + m(\widehat{CNP}) = 90^\circ \\ m(\widehat{MNB}) + m(\widehat{NMB}) = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{BMN} \equiv \widehat{CNP}$$

$$\left.\begin{array}{r} m(\widehat{BMN}) + m(\widehat{AMQ}) = 90^\circ \\ m(\widehat{AMQ}) + m(\widehat{AQM}) = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{BMN} \equiv \widehat{AQM}$$

Considerăm $\triangle NCP$, $\triangle MBN$ şi $\triangle QAM$
$(m(\widehat{A}) = m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = 90^\circ)$

$$\left.\begin{array}{c} [NP] \equiv [MN] \equiv [MQ] \\ \widehat{CNP} \equiv \widehat{BMN} \equiv \widehat{AQM} \end{array}\right\} \overset{IU}{\Rightarrow} \triangle NCP \equiv \triangle MBN \equiv \triangle QAM =$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{c} [BN] \equiv [AM] \\ [NC] \equiv [MB] \end{array}\right\} \Rightarrow [BC] \equiv [AB] \Rightarrow ABCD \text{ - pătrat.}$$

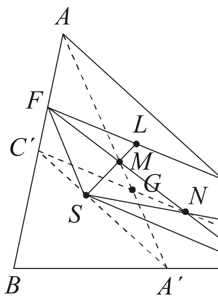
G63. *În $\triangle ABC$ cu $m(\widehat{A}) = 10^\circ$ şi $m(\widehat{B}) = 100^\circ$ construim M
$N \in (AC)$ astfel ca $m(\widehat{MCB}) = 40^\circ$ şi $m(\widehat{NBC}) = 75^\circ$. Să se afle $m(\widehat{A}$*

Octavian Bondo

Soluţie. Fie $P \in (AC)$ astfel încat $m(\widehat{PBC}) = 40^\circ$. Obţinem atunci $\triangle$
cel, deci $[BP] \equiv [BC]$, apoi $\triangle MBC$ isoscel cu $[BM] \equiv [BC]$, de unde $[B$
Însă $m(\widehat{MBP}) = 60^\circ$, deci $\triangle MBP$ este echilateral şi $[MP] \equiv [MB]$, iar $m(\widehat{B}$
Pe de altă parte, tot din congruenţe de unghiuri, $\triangle NPB$ este isoscel cu $[N$
prin urmare $[NP] \equiv [PM]$ şi cum $m(\widehat{NPM}) = 50^\circ$, găsim $m(\widehat{NMP}) = 6$
$m(\widehat{AMN}) = 180^\circ - 65^\circ - 60^\circ = 55^\circ$.

G64. *Prin punctul P al laturii (AC) a $\triangle ABC$ se duc paralele la medianele AA' şi CC', care intersectează laturile (BC) şi (AB) în E, respectiv F. Fie $\{M\} = EF \cap AA'$, $\{N\} = EF \cap CC'$, iar L şi Q mijloacele segmentelor $[FP]$, respectiv $[PE]$. Să se arate că dreptele ML, NQ şi $A'C'$ sunt concurente.*

Andrei Nedelcu, Iaşi



Soluţie. Fie G centrul de greutate al $\triangle ABC$ şi $\{T\} = PE \cap CC'$. Deoarece $TN \parallel PF$, avem $\dfrac{EN}{NF} = \dfrac{ET}{TP}$. Însă $\dfrac{ET}{TP} = \dfrac{GA'}{GA} = \dfrac{1}{2}$, de unde $2EN =$
$= NF$. Analog se arată că $2MF = ME$, prin urmare $FM = MN = NE$

$FS \parallel AA'$, $S \in A'C'$; atunci $\dfrac{FS}{AA'} = \dfrac{C'F}{C'A} = \dfrac{PC}{AC} = \dfrac{PE}{AA'}$, deci $FS =$

$FPES$ este paralelogram. În $\triangle FSP$, M se află pe mediana din F la $\dfrac{2}{3}$ d
M este centrul de greutate al $\triangle FSP$ şi atunci SM este mediană şi va tr
Analog, $Q \in SN$, de unde concluzia.

G65. *Fie $SABCD$ o piramidă cu baza $ABCD$ dreptunghi, M proie pe SB şi N proiecţia lui C pe SA, iar $\{P\} = AM \cap NB$. Ştiind că M $N \in (SA)$, să se arate că $NP \cdot SA \cdot MB = SM \cdot AN \cdot PB$.*

Daniel Ştefan Ninu,

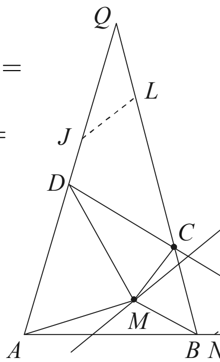
Soluţie. Fie $\{O\} = AC \cap BD$ şi $a = OA = OB = OC = O$ că $NO = MO = a$, ce mediane corespunzătoare ipotenuzelor în triung tunghice. Prin urmare, punctele A, B, M, N aparţin sferei de centru O Însă cele patru puncte sunt coplanare, iar un plan taie o sferă după un cer trulaterul $ABMN$ este inscriptibil. Atunci $\triangle NPA \sim \triangle MPB$ şi $\triangle NPM$ de unde $\dfrac{NP}{MP} = \dfrac{NA}{MB}$, respectiv $\dfrac{PM}{PB} = \dfrac{MN}{AB}$, prin urmare $\dfrac{NP}{MP} \cdot \dfrac{PM}{PB} =$ adică $\dfrac{MN}{AB} = \dfrac{MB \cdot NP}{PB \cdot NA}$. Pe de altă parte, $\triangle SMN \sim \triangle SAB$, deci $\dfrac{M}{A}$
Comparând ultimele două relaţii, rezultă concluzia.

B. Nivel liceal

L56. *Fie $ABCD$ patrulater convex şi $\{P\} = AB \cap CD$, $\{Q\} =$ Considerăm $J \in (AQ)$, $L \in (BQ)$, $K \in (DP)$, $N \in (AP)$ astfel încât $QL = CB$, $PK = DC$ şi $PN = AB$. Să se arate că $JL \parallel NK$.*

Carmen Nej

Soluţie. Fie $M \in \operatorname{Int} ABCD$, avem:



$$S_{MAD} + S_{MBC} = \frac{AD \cdot d(M, AD)}{2} + \frac{BC \cdot d(M, BC)}{2} =$$
$$= \frac{QJ \cdot d(M, QJ)}{2} + \frac{QL \cdot d(M, QL)}{2} =$$
$$= S_{MJQ} + S_{MQL} = S_{QJL} + S_{MJL}$$

şi cum S_{QJL} este constantă, locul geometric al punctelor M pentru care $S_{MAD} + S_{MBC} = k$ este o porţiune dintr-o dreaptă d paralelă cu JL. Analog se arată că locul geometric al punctelor M pentru care $S_{MAB} + S_{MCD} = k'$ este o porţiune dintr-o dreaptă d' paralelă cu NK. Luând $k = k' = \dfrac{1}{2} S_{ABCD}$ cele două locuri geometri prin urmare $JL \parallel NK$.

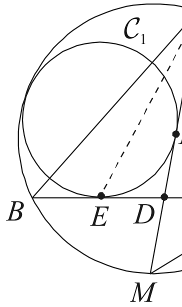
Notă. Soluţie corectă au dat următorii elevi: **Andrei-Codruţ Onofr** **Rotaru**, **Cosmin-Alexandru Spînu**.

L57. *Fie $\triangle ABC$ înscris în cercul $\mathcal{C}$ şi punctele $D \in (CB$, $D' \in (BC$ $\widehat{CAD} \equiv \widehat{ABC}$, $\widehat{BAD'} \equiv \widehat{ACB}$. Se mai consideră cercul $\mathcal{C}_1$ tangent la AD*

$\mathcal{C}$, cercul $\mathcal{C}_2$ tangent la AD', CD' şi la $\mathcal{C}$, iar $\{E\} = \mathcal{C}_1 \cap [BD]$, $\{F\} = \mathcal{C}_2 \cap$
se arate că cercul circumscris $\triangle AEF$ şi cercul înscris în $\triangle ABC$ sunt co

Neculai Roman, Mirc

Soluţie. Fie $\{N\} = AD \cap \mathcal{C}_1$, $\{M_1 A\} = AD \cap \mathcal{C}$. Avem că $\widehat{CAD} \equiv \widehat{ABC} \equiv \widehat{AMC}$, deci $[AC] \equiv [MC]$. Aplicăm teorema lui Casey cercurilor cele A, C, M (degenerate) şi $\mathcal{C}_1$, tangente interior cercului $\mathcal{C}$; obţinem succesiv:



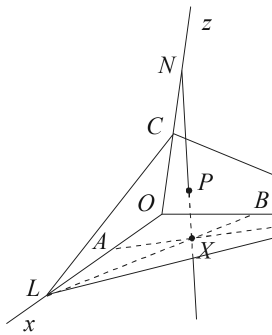
$$AC \cdot MN + AN \cdot MC = AM \cdot CE \Leftrightarrow$$
$$AC \cdot MN + AN \cdot AC = AM \cdot CE \Leftrightarrow$$
$$AC\,(MN + AN) = AM \cdot CE \Leftrightarrow AC = CE.$$

Rezultă că $\triangle ACE$ este isoscel, deci mediatoarea lui $[AE]$ este bisectoarea unghiului $\widehat{ACB}$. Analog se arată că mediatoarea lui $[AF]$ este bisectoarea lui $\widehat{ABC}$, de unde concluzia.

L58. *Pe muchiile $(Ox$, $(Oy$ şi $(Oz$ ale unui triedru oarecare se conside $A, L \in (Ox$, $B, M \in (Oy$ şi $C, N \in (Oz$ astfel încât $OA = OB = OC =$ $= OM = ON = b$ $(a < b)$. Notăm $\alpha = m(\widehat{Oy, Oz})$, $\beta = m(\widehat{Oz, Ox})$, $\gamma =$ şi $\{P\} = (AMN) \cap (BNL) \cap (CLM)$, $\{Q\} = (LBC) \cap (MCA) \cap (NA$ calculeze distanţa PQ în funcţie de a, b, α, β, γ.*

Temistocle Bî

Soluţie. Existenţa punctului P (ca şi a lui Q) se arată uşor; într-adevăr, $(AMN) \cap (BNL) = NX$, unde $\{X\} = AM \cap BL$, iar $NX \cap (CLM) = \{P\}$.



Notăm $\overrightarrow{OA} = \vec{r}_A$ etc. În planul (AMN) putem scrie

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AM} + \mu \overrightarrow{AN} \Leftrightarrow$$
$$\vec{r}_P - \vec{r}_A = \lambda\,(\vec{r}_M - \vec{r}_A) + \mu\,(\vec{r}_N - \vec{r}_A) \Leftrightarrow$$
$$\vec{r}_P = (1 - \lambda - \mu)\,\vec{r}_A + \lambda \vec{r}_M + \mu \vec{r}_N\ . \quad (1)$$

Procedând similar în planele (BNL) şi (CLM) obţinem şi relaţiile

$$\vec{r}_P = \left(1 - \lambda' - \mu'\right)\vec{r}_B + \lambda' \vec{r}_N + \mu' \vec{r}_L, \quad \vec{r}_P = \left(1 - \lambda'' - \mu''\right)\vec{r}_C + \lambda'' \vec{r}_L + $$

Notând cu $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ versorii pe $(Ox$, $(Oy$ şi $(Oz$, relaţiile (1) şi (2) se po

$$\vec{r}_P = (1 - \lambda - \mu)\,a\vec{u}_1 + \lambda b\vec{u}_2 + \mu b\vec{u}_3 = \left(1 - \lambda' - \mu'\right)a\vec{u}_2 + \lambda' b\vec{u}_3 + \mu'$$
$$= \left(1 - \lambda'' - \mu''\right)a\vec{u}_3 + \lambda'' b\vec{u}_1 + \mu'' b\vec{u}_2\ .$$

Motive de simetrie ne sugerează să considerăm $\lambda = \lambda' = \lambda''$ şi $\mu =$ şi să căutăm λ, μ pentru care au loc egalităţile precedente. Egalând co corespunzătoare versorilor $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$, obţinem sistemul

$$(1 - \lambda - \mu)\,a = \mu b = \lambda b, \quad \lambda b = (1 - \lambda - \mu)\,a = \mu b, \quad \mu b = \lambda b = (1 - $$

care are soluţia unică $\lambda = \mu = \dfrac{a}{2a+b}$. Ca urmare, relaţiile (3) devine

$$\vec{r}_P = \overrightarrow{OP} = \frac{ab}{2a+b}\left(\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3\right).$$

În mod analog, în privinţa punctului Q găsim

$$\vec{r}_Q = \overrightarrow{OQ} = \frac{ab}{a+2b}\left(\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3\right).$$

În sfârşit, avem următoarele

$$\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{ab}{a+2b} - \frac{ab}{2a+b}\right)\left(\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3\right),$$

$$PQ^2 = \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ} = \left(\frac{ab}{a+2b} - \frac{ab}{2a+b}\right)^2 \left(\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3\right)\left(\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}\right.$$

$$= \frac{a^2b^2\,(a-b)^2}{(a+2b)\,(2a+b)}\left(3 + 2\cos\alpha + 2\cos\beta + 2\cos\gamma\right),$$

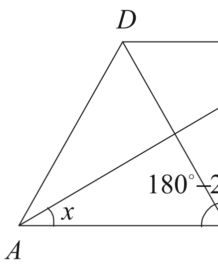
deci

$$PQ = \frac{ab\,(a-b)}{\sqrt{(a+2b)\,(2a+b)}}\sqrt{3 + 2\left(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma\right)}.$$

L59. *Care este probabilitatea ca latura şi diagonalele unui romb, lua*
plare, să fie laturile unui triunghi?

Petru M

Soluţie. Proprietatea de a putea construi un triunghi cu laturile
cu latura şi diagonalele unui romb este adevărată sau nu pentru toate
din plan dintr-o clasă de romburi asemenea. Este suficient să rezolvăm
pentru romburile a căror laturi au lungimea egală cu 1. Un asemenea
determinat de unghiul pe care îl formează diagonala cea mai lungă cu
laturile rombului; notăm măsura acestui unghi cu x. Mulţimea cazuril
este $D = \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.



Din triunghiul BCD, conform teoremei cosinusului, avem

$$d_1^2 = BD^2 = BC^2 + DC^2 - 2\,BC\,CD\,\cos 2x =$$
$$= 2 - 2\cos 2x = 4\sin^2 x \Rightarrow d_1 = 2\sin x.$$

Analog, din $\triangle ABC$, se obţine că $d_2 = AC = 2\cos x$.
Din $0 < x \le \dfrac{\pi}{4}$ rezultă că $d_1 = 2\sin x \le \sqrt{2}$ şi
$d_2 = 2\cos x \ge \sqrt{2}$. Dintre numerele $l = 1$, $d_1 = 2\sin x$, $d_2 = 2\sin x$ cel
este d_2. Putem construi un triunghi cu laturile având aceste lungimi, dac
dacă $l + d_1 > d_2 \Leftrightarrow 1 + 2\sin x > 2\cos x$. Notând $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$, avem

$$1 + \frac{4t}{1+t^2} > \frac{1-t^2}{1+t^2} \Leftrightarrow 3t^2 + 4t - 1 > 0 \Leftrightarrow x \in \left(2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{7}-2}{3}, \frac{\pi}{4}\right.$$

Domeniul valorilor posibile este $D_0 = \left(2\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{7}-2}{3}, \dfrac{\pi}{4}\right]$. Proprietatea

$$p = \frac{\operatorname{mes} D_0}{\operatorname{mes} D} = \frac{\dfrac{\pi}{4} - 2\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{7}-2}{3}}{\dfrac{\pi}{4}} = 1 - \frac{8\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{7}-2}{3}}{\pi}.$$

L60. *Fie $A_1A_2\dots A_n$ şi $B_1B_2\dots B_n$ $(n > 2)$ două poligoane înscrise cerc de centru O şi având centrele de greutate tot în O. Să se arate că p merota vârfurile poligonului $A_1A_2\dots A_n$ pentru a obţine un nou poligon A_i în care $A_{i_j} \neq B_j$ pentru $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.*

Gabriel Dospinescu, student,

Soluţie. Trebuie să arătăm că există o permutare $\sigma \in S_n$ astfel încât pentru $i \in M = \{1, 2, \dots, n\}$. Să definim matricea $T = (t_{ij})_{i,j\in M}$, t_{ij} Vom arăta că sumele elementelor de pe orice linie şi coloană în T sunt ega presupune că poligoanele sunt înscrise în cercul unitate (O fiind origine complex) şi fie a_i, b_i afixele punctelor A_i, B_i. Suma elementelor de pe matricea T este

$$\sum_{j=1}^{n} |a_i - b_j|^2 = \sum_{j=1}^{n} \left(|a_i| + |b_j|^2 - a_i\bar{b}_j - \bar{a}_i b_j\right) = 2n - a_i\overline{\sum_{j=1}^{n} b_j} - \bar{a}_i \sum_{j=1}^{n}$$

(am folosit faptul că centrul de greutate al poligonului $B_1B_2\dots B_n$ es $\sum_{j=1}^{n} b_j = 0$).

Analog, suma elementelor de pe coloana j a matricei T este $2n$. Să pres pentru orice permutare $\sigma \in S_n$ există i astfel încât $t_{i\sigma(i)} = 0$. Vom spune *R_i place linia S_j*" dacă elementul de la intersecţia liniei si coloanei est matricea T. Rezultă că nu putem asocia câte o linie distinctă fiecărei col încât coloanele respective să placă liniile asociate lor. Deci, din lema rezultă că există $k > 0$ şi k coloane ce plac cel mult $k-1$ linii. Prin pe linii şi coloane, putem presupune că aceste linii şi coloane sunt primele di T. Să facem suma elementelor dreptunghiului determinat de aceste k k coloane. În dreptunghiul determinat de primele k coloane şi ultimele linii avem numai zerouri (căci cele k coloane nu plac nici una dintre liniil $\dots$, n), deci suma elementelor din dreptunghi este egală cu suma elemen primele k coloane, adică $2nk$. Pe de altă parte, evident, suma este cel mul elementelor de pe primele $k-1$ linii, adică $2n(k-1)$. Deducem că $2n(k$ contradicţie.

L61. *Fie $n \geq 3$. Să se determine maximul expresiei*

$$E = x_1^3x_2^2 + x_2^3x_3^2 + \dots + x_n^3x_1^2 + (n-1)^{2(n-1)}\, x_1^3x_2^3\cdots x_n^3,$$

când numerele nenegative x_1, x_2, $\dots$, x_n au suma 1.

Gabriel Dospinescu, student,

Soluţie. Pentru $x_1 = \dfrac{3}{5}$, $x_2 = \dfrac{2}{5}$, $x_k = 0$, $\forall k \in \overline{3,n}$, obţinem pentru $\dfrac{108}{3125} = \dfrac{2^2\,3^3}{5^5}$, deci maximul cerut este cel puţin $\dfrac{108}{3125}$. Să demonstrăm c

lui E este cel mult $\frac{108}{3125}$. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$ cu suma 1, fixate. Permu
variabilele, putem presupune că $x_1 = \max x_k$. Conform inegalităţii mediil

$$1 = \frac{x_1}{3} + \frac{x_1}{3} + \frac{x_1}{3} + \frac{x_2 + \cdots + x_n}{2} + \frac{x_2 + \cdots + x_n}{2} \geq 5 \sqrt[5]{\frac{x_1^3 \left(x_2 + \cdots\right.}{3^3\, 2^2}}$$

deci este suficient să demonstrăm că

$$x_1^3 \left(x_2 + \cdots + x_n\right)^2 \geq x_1^3 x_2^2 + \cdots + x_n^3 x_1^2 + (n-1)^{2(n-1)}\, x_1^3 x_2^3 \cdots x$$

Însă

$$\begin{aligned} x_1^3 \left(x_2 + \cdots + x_n\right)^2 &\geq 2 \left(x_1^3 x_2 x_3 + \cdots + x_1^3 x_{n-1} x_n\right) + x_1^3 x_2^2 + x_1^3 x_n^2 \geq \\ &\geq \left(x_1^3 x_2 x_3 + \cdots + x_1^3 x_{n-1} x_n\right) + \left(x_2^3 x_3^2 + \cdots + x_{n-1}^3 x_n^2\right) + x_1^3 x_2^2 + \\ &\geq x_1^3 x_2 x_3 + x_1^3 x_2^2 + \left(x_2^3 x_3^2 + \cdots + x_{n-1}^3 x_n^2\right) + x_1^3 x_n^2 \geq \\ &\geq x_1^3 x_2 x_3 + x_1^3 x_2^2 + \left(x_2^3 x_3^2 + \cdots + x_{n-1}^3 x_n^2\right) + x_n^3 x_1^2, \end{aligned}$$

unde de fiecare dată am folosit faptul că $x_1 = \max x_k$. În aceste condiţi
demonstra (1) este suficient să arătăm că

$$x_1^3 x_2 x_3 \geq (n-1)^{2(n-1)}\, x_1^3 x_2^3 \cdots x_n^3\ .$$

Pentru $n = 3$, aceasta se scrie $x_2 x_3 \leq \frac{1}{4}$ şi rezultă din $x_2 x_3 \leq \left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right.$
pentru $n > 3$, (2) se scrie sub forma

$$x_2^2 x_3^2 x_4^3 \cdots x_n^3 \leq \frac{1}{(n-1)^{2(n-1)}}$$

şi rezultă din

$$x_2^2 x_3^2 x_4^3 \cdots x_n^3 \leq \left(x_2 x_3 \cdots x_n\right)^2 \leq \left(\frac{x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n-1}\right)^{2(n-1)} \leq \frac{1}{(n-1)}$$

Rezolvarea este astfel încheiată.

L62. *Rezolvaţi ecuaţia* $2x^2 = y\,(y+1)$*;* $x, y \in \mathbb{N}$.

Mircea Bî

Soluţia I. *Cazul* $y = 2h$, $h \in \mathbb{N}$. Ecuaţia dată devine $x^2 = h\,(2h+1)$
$(h, 2h+1) = 1$, urmează că h, $2h+1$ sunt pătrate perfecte, adică $\exists m,$
$h = n^2$ şi $2h + 1 = m^2$. De aici rezultă că m şi n trebuie să satisfacă ecua

$$m^2 - 2n^2 = 1,$$

iar soluţiile ecuaţiei iniţiale sunt date de

$$x = mn, \quad y = 2n^2.$$

Observăm că $(3, 2)$ este cea mai mică soluţie nebanală a ecuaţiei (1) şi,
este cunoscut, soluţiile ecuaţiei (1) în $\mathbb{N}$ sunt perechile $(m_k, n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ cu

$$m_k = \frac{1}{2}\left[\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^k + \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^k\right], \quad n_k = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^k - \left(3 - \right.\right.$$

În conformitate cu (2), soluţiile ecuaţiei date, în cazul y par, sunt perechile (
unde

$$x_k = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\left(3+2\sqrt{2}\right)^{2k} - \left(3-2\sqrt{2}\right)^{2k}\right], \quad y_k = \frac{1}{4}\left[\left(3+2\sqrt{2}\right)^{2k} + \left(3-2\sqrt{\right.\right.$$

Cazul $y = 2l-1$, $l \in \mathbb{N}^*$. Urmăm calea din cazul precedent. Ecuaţia di
scrie $x^2 = l(2l-1)$. Deoarece $(l, 2l-1) = 1$, aceste numere sunt de form
$2l-1 = \bar{n}^2$. Rezultă că $\bar{m}$ şi $\bar{n}$ verifică următoarea ecuaţie Pell conjugată ec

$$2\bar{m}^2 - \bar{n}^2 = 1,$$

iar pentru ecuaţia dată avem

$$x = \bar{m}\,\bar{n}, \quad y = 2\bar{m}^2 - 1.$$

Cum $(1,1)$ este cea mai mică soluţie nebanală a ecuaţiei (5), soluţiile aces
sunt perechile $(\bar{m}_k, \bar{n}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ cu

$$\bar{m}_k = m_k + n_k, \quad \bar{n}_k = m_k + 2n_k,$$

unde $(m_k, n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sunt soluţiile ecuaţiei (1) date de relaţiile (3) (**T. A**
D. Andrica - *Asupra rezolvării în numere naturale a ecuaţiei* $ax^2 - by^2$
4/1980, p. 146-148). Ţinând seama de (6), ecuaţia din enunţ are, în cazu
soluţiile $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ cu

$$\bar{x}_k = (m_k + n_k)(m_k + 2n_k), \quad \bar{y}_k = 2(m_k + n_k)^2 - 1,$$

unde m_k, n_k sunt date de (3).

În concluzie, mulţimea soluţiilor este formată din $(x_k, y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ şi $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$
y_k, $\bar{x}_k$, $\bar{y}_k$ date de (4), (7) şi (3).

Soluţia II. Observăm că ecuaţia dată admite soluţiile banale $x =$
$x = y = 1$. Căutăm soluţiile (x, y) cu $x, y \notin \{0, 1\}$.

Cazul $y = 2h$, $h \in \mathbb{N}^*$. Ca mai sus, $\exists m, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $h = n^2$ şi $2h$
deci m, n satisfac relaţia $2n^2 + 1 - m^2$. Rezultă că m este impar şi n
adică $m = 2k+1$, $n = 2l$ cu $k, l \in \mathbb{N}^*$. Înlocuind în relaţia precedenta
$2l^2 = k(k+1)$. Aşadar, dacă (x, y) este o soluţie nenulă a ecuaţiei date
atunci există o altă soluţie nenulă (l, k) astfel încât

$$x = 2l(2k+1), \quad y = 8l^2, \quad \text{şi} \quad x > l,\ y > k.$$

Cazul $y = 2h+1$, $h \in \mathbb{N}^*$. Procedând asemănător, dar după calcule
complicate, ajungem la concluzia că pentru orice soluţie nebanală (x, y)
date, cu y impar, există o soluţie nenulă (u, v) a acesteia astfel încât

$$x = (4u + 2v + 1)(2u + 2v + 1), \quad y = (4u + 2v + 1)^2 \quad \text{şi} \quad x > u,\ y$$

Rezultă că oricare ar fi o soluţie (x, y) a ecuaţiei date diferită de $(0,0$
după un număr finit de paşi în care se găsesc, recursiv, soluţii mai mici d
prin relaţii de tipul (1) sau (2), vom obţine soluţia $(1,1)$. Cu alte cuvinte
S a soluţiilor este dată de $S = \{(0,0)\} \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$, unde $S_0 = \{(1,1)\}$
$\left\{\left(2i(2j+1), 8i^2\right), \left((4i+2j+1)(2i+2j+1), (4i+2j+1)^2\right) \mid (i,j) \in S\right.$
Mai observăm că S_m şi S_n sunt disjuncte pentru $m \neq n$ şi $\operatorname{card}(S_n) = 2^n$

L63. *Fie $G \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ un grup netrivial în raport cu produsul uzual al*
Presupunem că există $X \in G$ astfel încât pe fiecare linie, respectiv coloa
existe cel mult un element nenul şi acesta egal cu 1. Să se demonstrez
$k \in \{1, 2, \ldots n\}$ astfel încât G este izomorf cu un subgrup al lui $GL_k(\mathbb{R})$
$GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$).

Ovidiu Muntean

Soluţie. Vom spune că o matrice A are proprietatea (P), dacă pe fi respectiv coloană a sa există cel mult un element nenul, şi acesta egal c produsul a două matrici cu proprietatea (P) are proprietatea (P) rezult X^3, X^4, ... au proprietatea (P). Dar, cum există un număr finit de ordin n cu elemente 0 sau 1 rezultă că mulţimea $\{X, X^2, X^3, \ldots\}$ este $\exists k, h \geq 1$, $k > h$, astfel încât $X^k = X^h$. Acum, simplificând în G, $X^{k-h} = E$, unde E este elementul neutru în G. Avem deci că E are p (P) şi $E^2 = E$. Fie $E = (e_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$; să presupunem că $\exists i, j$ astfel ca $e_{ij} =$ că $1 = \sum\limits_{k=\overline{1,n}} e_{ik}e_{kj}$, deci $\exists s$ astfel ca $e_{is} = e_{sj} = 1$. Dar, pe linia i a l află două elemente egale cu 1, deci $s = j$. Totodată, pe coloana j nu s elemente egale cu 1, deci $s = i$. Rezultă $i = j$, adică eventualele elemente lui E sunt pe diagonala principală. Evident $E \neq O_n$ deoarece G este net presupune acum că elementele nenule ale lui E sunt $e_{i_1 j_1} = 1, \ldots, e_{i_r j_r} =$

Fie $A \in G$ oarecare; $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$. Din $A = AE = EA$ $a_{ij} = \sum\limits_{k=\overline{1,n}} a_{ik}e_{kj} = \sum\limits_{k=\overline{1,n}} e_{ik}a_{kj}$. Folosind (1) va rezulta că singurele elem ale lui A pot fi din mulţimea $\{A_{i_s j_t}\}_{s,t=\overline{1,r}}$. Fie aplicaţia Φ care asocia A matricea $\widetilde{A} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, $\widetilde{A} = (a_{i_s j_t})_{s,t=\overline{1,r}}$. Evident, $\widetilde{E} = I_r$ şi $\Phi : G$ este morfism injectiv şi unitar de monoizi. Întrucât $(G, \cdot)$ este grup şi Φ e rezultă că $\Phi(G) \subset GL_r(\mathbb{R})$. Prin urmare, G este izomorf cu $\Phi(G)$, care es al lui $GL_r(\mathbb{R})$.

L64. *Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin: $x_1, x_2 \in \mathbb{N}^*$, $x_{n+2} = \dfrac{[x_{n+1}, x}{x_{n+1}}$*
Dacă $x_{2003} = 2004$, demonstraţi că şirul nu este convergent.

Iuliana Georgescu şi Paul Georg

Soluţie. Se observă că $x_n \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \geq 1$. În plus, $x_{n+2} \leq \dfrac{x_{n+1}x_n}{x_{n+1}}$ $(x_{2n})_{n\geq 1}$ şi $(x_{2n-1})_{n\geq 1}$ sunt monoton descrescătoare şi, cum sunt şiruri naturale, sunt constante de la un loc încolo, egale cu a, respectiv cu b. Ast n suficient de mare, $b = \dfrac{[a,b]}{a}$, deci $(a,b) = 1$. Să presupunem prin $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent; atunci $a = b = 1$. Fie i_0 indicele primului ter care este egal cu 1; avem că $i_0 > 1$ deoarece $x_1 \geq x_{2003} > 1$ şi fie x_{i_0-} Avem că $x_{i_0+1} = \dfrac{[1,a]}{1} = a$, $x_{i_0+2} = \dfrac{[a,1]}{a} = 1$ şi, prin inducţie, x_{i_0+} $x_{i_0+2k} = 1$, $\forall k \geq 0$. Acest fapt intră în contradicţie cu convergenţa şiru încheie rezolvarea.

L65. *Fie $n \in \mathbb{N}$ şi funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde $f(x) = x^{2n}\cos(1/x$*
$f(0) = 0$, $f(x) = x^{2n}\sin(1/x)$, $\forall x > 0$, iar $g(x) = x^{2n+1}\sin(1/x)$

$g(0) = 0$ şi $g(x) = x^{2n+1}\cos(1/x)$, $\forall x > 0$. Să se afle cel mai îna
derivabiliate al acestor funcţii şi să se studieze problema continuităţii acest
în origine.

Gheorghe Cost

Soluţie. Se arată că f şi g sunt derivabile de ordin n, $f^{(n)}$ este c
în origine şi $g^{(n)}$ este continuă în origine. Aceste afirmaţii decurg din
rezultat cunoscut (*American Mathematical Monthly*; 54(1947), p. 224 ş
p. 97): *funcţia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de $h(0) = 0$ şi $h(x) = x^k \sin\frac{1}{x}$, x*
derivabilă de m ori dacă $k = 2m$ sau $k = 2m+1$ şi $h^{(m)}$ este disco
continuă în $x = 0$ după cum $k = 2m$ sau $k = 2m+1$. Pentru demonstraţ
se stabileşte prin inducţie completă că

$$h^{(r)}(x) = P_r(x)\sin\frac{1}{x} + Q_r(x)\cos\frac{1}{x}, \quad x \neq 0,\ 0 \leq r \leq m,$$

unde P_r, Q_r sunt funcţii polinomiale cu proprietăţile:

1) sunt de grad $k - 2r$,
2) $f^{(r)}(0) = 0$, $0 \leq r \leq m$,
3) dacă $k = 2m$, atunci sau P_m sau Q_m are termen liber nenul,
4) dacă $k = 2m+1$, atunci P_m şi Q_m au termenii liberi nuli.

Recreaţii ... matematice

Truelul (răspuns la întrebarea pusă la p. 20)

Să examinăm posibilităţile lui X. Prima ar fi ca X să tragă asupra lu
Y este ucis, atunci următoarea lovitură revine lui Z. Dar Z nu mai ar
singur adversar şi, cum Z este trăgător prefect, X va fi un om mort.

O opţiune mai bună este să ţintească asupra lui Z. Dacă îl doboa
următoarea lovitură va reveni lui Y. Cum Y nimereşte ţinta de două o
există o şansă ca X să tragă la rândul lui asupra lui Y şi eventual să câşt

Exista însă o a treia opţiune pe care o poate adopta X, mai bună d
dentele: X poate să tragă în aer. Va urma Y, care va ţinti asupra lui Z,
este adversarul cel mai periculos. Dacă Z supravieţueşte, el va trage în
acesta este adversarul mai periculos. Ca urmare, trăgând în aer, X îi per
să-l elimine pe Z şi invers.

Aceasta este cea mai bună strategie a lui X: în cele din urmă Y sau Z
X va trage asupra supravieţuitorului, oricare ar fi el. X a manevrat astf
loc de prima lovitură într-un truel, să aibă prima lovitură într-un duel.

Probleme propuse[1]

Clasele primare

P.84. Aflaţi numărul m ştiind că 47 este mai mare decât $m - 14$ cu 2
(*Clasa I*) **Înv. Maria I**

P.85. Într-un coş sunt 6 mere, iar în altul sunt 5 pere. Cum pot pr
mere şi pere astfel încât nici un coş să nu rămână gol?
(*Clasa I*) **Veronica Corbu, e**

P.86. În urmă cu 4 ani, când tatăl avea 29 de ani, s-a născut fiul. So
avea atunci 2 ani, iar acum este de trei ori mai mare. Mama este de pat
mare decât aceasta. Câţi ani are acum fiul?
(*Clasa a II-a*) **Înv. Oana-Maria I**

P.87. Un acrobat cade pe o plasă elastică de la o anumită înălţime s
după ce atinge plasa la jumătatea distanţei dintre plasă şi locul de un
anterior. Ştiind că atinge de 3 ori plasa şi că ultima oară s-a ridicat la în
2 m, iar plasa este montată la 2 m deasupra solului, să se afle distanţa de
unde a căzut prima dată până la sol.
(*Clasa a II-a*) **Andrei Stativă,**

P.88. Trăiau odată o babă şi un moşneag; moşul avea 100 ani, ia
amândoi erau albi ca iarna şi trişti ca vremea cea rea pentru că erau s
spune că ar fi avut un copil pe când vârsta babei era jumătate din jun
acum a vârstei moşneagului şi că acesta ar fi plecat în lume când vârsta m
era de două ori cât vârsta aceea a babei. Fiul nu s-a mai întors. Ce vârst
când a plecat în lume?
(*Clasa a III-a*) **Înv. Ileana Ro**

P.89. La un concurs de biciclete, triciclete şi maşinuţe (cu patru roţi
Bogdan numără roţile vehiculelor şi observă că sunt 34. Câte vehicule
fiecare fel? Găsiţi toate posibilităţile, ştiind că numărul vehiculelor de fie
depăşeşte 5.
(*Clasa a III-a*) **Înv. Doiniţa Sp**

P.90. Lungimea laturii unui pătrat este de 17 m. O persoană pleac
vârf al pătratului şi, mergând în acelaşi sens pe laturile acestuia, parcurge
de 637 m. Din punctul în care a ajuns se întoarce şi parcurge 773 m. A
distanţă se va situa în final persoana faţă de punctul de plecare.
(*Clasa a III-a*) **Oxana Pascal, e**

P.91. Se împart două numere naturale. Dacă împărţitorul, câtul şi r
trei numere consecutive cu suma 30, să se afle deîmpărţitul.
(*Clasa a IV-a*) **Vasile Solcanu, Bogdăneşti**

P.92. Observă regula şi completează, apoi verifică rezultatele găsite: 2+
$2+4+6 = 4+4+4$; $2+4+6+8 = 5+5+5+5$; $2+4+6+\cdots$
$2+4+6+\cdots+14 = \square$; $\ldots$; $2+4+6+\cdots+(a+a) = \square$.
(*Clasa a IV-a*) **Valeria Gheorghiţă, e**

---

[1] Se primesc soluţii până la data de 31 decembrie 2005.

P.93. O foaie de hârtie dreptunghiulară se îndoaie de-a lungul de 6 ori, se 7 benzi egale şi suprapuse. Dreptunghiul obţinut se îndoaie de-a latu rezultând în final un pătrat cu perimetrul de 12 cm. Să se afle perim tunghiului iniţial.
(*Clasa a IV-a*) **Petru As**

Clasa a V-a

V.56. Se consideră numărul $A = 5 + 5^2 + 5^3 + \cdots + 5^{2005}$.
a) Să se arate că A nu este pătrat perfect.
b) Să se găsească 5 divizori mai mici decât 100 ai lui A.

Andrei Tofan,

V.57. Aflaţi restul împărţirii prin 47 a numărului $N = \overline{1268\underbrace{99\ldots9}_{2005\text{ cifre}}}$.

Alexandru Negrescu, elev,

V.58. Aflaţi numerele naturale x, y, z cu proprietatea că

$$2^{4x+1} + 2^{3y+1} + 2^{2z+1} = 9248.$$

Cristian - Cătălin Bud

V.59. Dacă $\overline{a_1a_2\ldots a_n}^2 - \overline{b_1b_2\ldots b_n}^2 = \overline{c_1c_2\ldots c_n}^2$, să se arate că

$$\overline{a_1a_2\ldots a_na_1a_2\ldots a_n}^2 - \overline{b_1b_2\ldots b_nb_1b_2\ldots b_n}^2 = \overline{c_1c_2\ldots c_nc_1c_2\ldots c}$$

Petru As

V.60. Să se determine ultimele două cifre ale numărului $7^{9^{9^9}}$.

Artur Bălăucă,

Clasa a VI-a

VI.56. Determinaţi, în funcţie de numărul întreg x, cel mai mare divi al numerelor $2005x + 2$ şi $2006x + 3$.

Tamara C

VI.57. Un vânzător de autoturisme scade procentul beneficiului său d 20% din valoarea vânzărilor. Datorită scăderii preţurilor, creşte valoarea Aflaţi procentul cu care a crescut valoarea vânzărilor, ştiind că beneficiu cu 10%.

Marius Fa

VI.58. Se aşează cifrele 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 într-o ordine oarecare ob număr A. Se aşează apoi aceleaşi cifre în altă ordine, obţinând numărul se arate că A nu se divide cu B.

Cristian - Cătălin Bud

VI.59. Fie $\triangle ABC$ cu $m(\widehat{B}) = 120°$. Dacă mediana $[BM]$ este perp pe BC, arătaţi că $AB = 2BC$.

Bogdan Posa, elev, Mot

VI.60. Fie $\triangle ABC$ şi punctele $E \in (AB)$, $F \in (AC)$ şi $M \in (BC)$ a $AE = EB$, iar între $\triangle AEF$ şi $\triangle EFM$ să existe o congruenţă. Să se arat
a) F este mijlocul lui $[AC]$;
b) $[AM]$ este mediană sau înălţime.

Ioan Săcălean

Clasa a VII-a

VII.56. Fie $x, y \in \mathbb{R}^*$ cu $x^2 - 2y = y^2 + xy = 4$. Să se arate că $x^2 -$

Gigel Buth, S

VII.57. Fie $x \in (0,1)$, iar $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Arătaţi că $nx^2 + 2^n > n + ($

Ion Vişan

VII.58. Fie $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât mediile aritmetică, geometrică şi ar lor să fie laturi ale unui triunghi dreptunghic. Aflaţi sinusul celui mai unghiurile triunghiului.

Romanţa Ghiţă şi Ioan Gh

VII.59. Fie $\triangle \mathbf{ABC}$ şi A' mijlocul lui $[BC]$. Dacă $D \in (AC)$, $BD \cap$ şi paralela prin F la BC taie AC în E, să se arate că $\frac{1}{DE} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{CE}$

Claudiu - Ştefan P

VII.60. În cercul $\mathcal{C}$ se consideră coardele $[AM]$ şi $[AN]$astfel încât A

1) Să se determine mulţimea punctelor $X \in \mathcal{C}$ ce îndeplinesc condi $AX \leq AN$.

2) În ce caz mulţimea găsită este un arc de cerc?

Temistocle Bî

Clasa a VIII-a

VIII.56. Să se determine $x, y, z \in \mathbb{R}^*$ pentru care $x^3 - y^3 + z^3 = 8$, $x -$

Andrei - Sorin Cozma,

VIII.57. Fie $a, b, c > 0$ astfel încât $a + b + c = 1$. Să se arate că

$$\frac{1}{\sqrt{(1-a)(1-b)}} + \frac{1}{\sqrt{(1-b)(1-c)}} + \frac{1}{\sqrt{(1-c)(1-a)}} \geq \frac{9}{2}.$$

Cristian Săvescu, elev

VIII.58. Fie $x, y, z \in (0, \infty)$ cu $x + y + z \geq 3$. Să se arate că $x^n + y^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Romeo Ili

VIII.59. Determinaţi $x, y, z \in \mathbb{R}$, ştiind că $x+y+z = 1$, iar $xy + (x+y)$

Gheorghe Molea, Curtea

VIII.60. Se consideră prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ cu şi $AA' = 3\sqrt{3}$. Să se arate că pentru fiecare număr $a \in \left(0, 3\sqrt{3}\right)$, există puncte M_a', M_a'' pe dreapta CC' astfel încât $d\left(B', \left(M_a' AB\right)\right) = d\left(B', (M_a''\right.$

Mirela M

Clasa a IX-a

IX.56. Determinaţi numerele reale pozitive x, y, z, t pentru care $x+y+$ iar $xy + xz + xt + yz + yt + zt + 475 = xyzt$.

Lucian Tuţescu şi Liviu Smarandache

IX.57. Să se determine toate funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea

$$f\left(f\left(f\left(x\right)+y\right)\cdot f\left(x-f\left(y\right)\right)\right)=x^{2}-y^{2},\quad\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Adrian Zahariuc, ele

IX.58. Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Determinaţi $a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},c\in\mathbb{R}$ pentru c

$$[x]+[x+a_1]+\cdots+[x+a_{n-1}]=[cx],\quad\forall x\in\mathbb{R}.$$

(*În legătură cu G.42 din RecMat 1/2003.*)

Iuliana Georgescu şi Paul Georg

IX.59. Fie $\mathcal{C}\left(I,r\right)$ cercul înscris în $\triangle ABC$. Să se arate că

$$IA\cdot IB+IB\cdot IC+IC\cdot IA\geq 12r^{2}.$$

D. M. Bătineţu - Giurgiu, I

IX.60. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic cu $a<b<c$. Cercul $\mathcal{C}\left(I\right.$ triunghiului este tangent dreptelor BC, CA şi AB în punctele D, E şi re Dreapta ID intersectează CA în D' şi AB în D'', IE intersectează AB în în E'', iar IF intersectează BC în F' şi CA în F''. Arătaţi că $E'E''=D'I$

Temistocle Bî

Clasa a X-a

X.56. Fie tetraedrul $ABCD$ şi M un punct în spaţiu. Dacă G, G_A G_D sunt centrele de greutate ale tetraedrelor $ABCD$, $MBCD$, $MACD$ respectiv $MABC$, să se arate că $\overrightarrow{AG_A}+\overrightarrow{BG_B}+\overrightarrow{CG_C}+\overrightarrow{DG_D}=\overrightarrow{0}$ dac dacă $M\equiv G$.

Marius Olteanu, Râmnic

X.57. Dacă $x,y,a\in(1,\infty)$, să se arate că

$$\left(x+y+\log_a x\right)\left(xy+\log_a x^{x+y}\right)+\left(x+y+\log_a y\right)\left(xy+\log_a y^{x+y}\right.$$
$$\geq\left(x+\sqrt{xy}+y\right)\log_a xy.$$

Mihail Bencz

X.58. Let $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$. Prove that

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}^{2}\ln\frac{k^{2}+n^{2}}{n^{2}}<\binom{2n-2}{n-1}.$$

José Luis Díaz - Barrero, Barcelo

X.59. Fie $f\in\mathbb{R}\left[X\right]$ un polinom de grad $n\geq 3$ ce admite n rădă pozitive şi subunitare. Dacă $\left|f\left(0\right)\right|=f\left(1\right)$, să se arate că produsul rădăc cel mult egal cu $\dfrac{1}{2^{n}}$.

Ioan Şerdear

X.60. Fie $k\in\mathbb{N}^{*}$ fixat. Alegem $n\in\{1,2,\ldots,k\}$ şi $a_1,a_2,\ldots,a_n$ nur mai mari decât 3. Dacă probabilitatea ca $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$ să se dividă cel puţin egală cu $\dfrac{1}{24}$, să se arate că 24 divide k.

Cristian Săvescu, elev

Clasa a XI-a

XI.56. Let n be a positive integer. For each positive integer k, let F_k

Fibonacci number ($F_1 = F_2 = 1$, $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ for all $k \geq 1$). Prove

$$\begin{vmatrix} F_n^2 & F_{n+1}^2 & 2F_nF_{n+1} - F_{n+2}^2 \\ F_{n+2}^2 & -2F_{n+1}F_{n+2} - F_n^2 & F_{n+1}^2 \\ -2F_nF_{n+2} - F_{n+1}^2 & F_{n+2}^2 & F_n^2 \end{vmatrix} = 0$$

José Luis Díaz - Barrero, Barcelo

XI.57. Fie pătratul $ABCD$ circumscris cercului $\mathcal{C}$. În pătrat se în gonul $EFGHIJKL$, circumscris cercului $\mathcal{C}$, astfel încât $E, F \in (AB)$, $G, H \in (BC)$, $G \in (BH)$, $I, J \in (CD)$, $I \in (CJ)$, $K, L \in (DA)$, $K \in$ $\{M\} = EL \cap AC$, $\{N\} = FG \cap BD$, $\{P\} = HI \cap AC$, $\{Q\} = JK \cap BD$. că suma

$$S = \frac{AE}{EB} + \frac{BF}{FA} + \frac{BG}{GC} + \frac{CH}{HC} + \frac{CI}{ID} + \frac{DJ}{JC} + \frac{DK}{KA} + \frac{AL}{LD} + \frac{AM}{MC} + \frac{BN}{ND} + \cdots$$

nu depinde de alegerea vârfurilor octogonului pe laturile pătratului.

Cătălin Cali

XI.58. Dacă n este un număr natural iar p un număr prim, a $(x_{n+1}(p) - x_n(p))_{n \geq 0}$ este divergent, unde $x_n(p)$ reprezintă exponent apare numărul p în descompunerea lui $n!$.

Sorin Puşpană

XI.59. Fie şirul de numere supraunitare $(a_n)_{n \geq 1}$, astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =$ studieze continuitatea funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \{xa_n\}$, unde $\{x\}$ partea fracţionară a numărului real x.

Dan Popescu

XI.60. Fie $a \in (0,1)$; să se demonstreze că pentru orice $x > -\dfrac{2}{\ln a}$ es inegalitatea $(1 - a^x)^{\frac{1}{x+1}} < \left(1 - a^{x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Angela Ţigăeru

Clasa a XII-a

XII.56. Fie S_n mulţimea permutărilor de ordin n, iar $\sigma \in S_n$. Se funcţia mărginită $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(f(\sigma(1)) + \frac{1}{2}f(\sigma(2)) + \cdots + \frac{1}{n}f(\sigma(n))\right).$$

(*O generalizare a problemei 24131, G. M. 5-6/1999.*)

Marius Olteanu, Râmnic

XII.57. Considerăm matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi mulţimea

$$G = \left\{ X_a \mid X_a = I_2 + aA, a \in \left(-\frac{1}{2}, \infty\right) \right\}.$$

Arătaţi că $(G, \cdot)$ este grup izomorf cu $(\mathbb{R}, +)$. Calculaţi $X_{\frac{1}{2}} \cdot X_{\frac{3}{2}} \cdots X_{\frac{2n-1}{2}}$

Gheorghe I

XII.58. Let $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ be a continuous function. Prove that

$$\sqrt{3}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-(f(x))^2}dx+\int_{-1}^{1}f(x)\,dx\leq 4.$$

Zdravko Starc, Vršac, Serbia and Mo

XII.59. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f derivabilă şi neconstantă pe nici un interva
Dacă

$$\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\geq f'(\sin x)\cos x+f'(\cos x)\sin x,\quad \forall x\in\mathbb{R},$$

demonstraţi că nu există $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$.

Paul Georgescu şi Gabriel P

XII.60. Fie $n>1$ şi $a_1,a_2,\ldots,a_n\in(0,1)$ astfel încât $a_1+a_2+\cdots+$
se determine funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dacă $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ şi $f(x)=f(a_1x)+$
$\cdots+f(a_nx)$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Gabriel Dospines

IMPORTANT

- În scopul unei legături rapide cu redacţia revistei, pot fi utiliza mătoarele adrese e-mail: **tbi@math.tuiasi.ro**, **vpgeo@lycos.c** **profgpopa@yahoo.co.uk**. Pe această cale colaboratorii pot pu redacţia un dialog privitor la materialele trimise acesteia, procu numerelor revistei etc.
- La *problemele de tip L* se primesc soluţii de la *orice iubitor de mate elementare* (indiferent de *preocupare profesională* sau *vârstă*). F dintre soluţiile acestor probleme - ce sunt publicate în revistă du an - va fi urmată de numele tuturor celor care au rezolvat-o.
- Lucrările originale ale elevilor vor fi publicate într-o rubrică sp dedicată acestora: **NOTA ELEVULUI**. Anual, se vor acorda el - autori două premii în bani, pentru cele mai bune note public revistă.
- **Adresăm cu insistenţă rugămintea ca materialele trimis vistei să nu fie (să nu fi fost) trimise şi altor publicaţii.**

Probleme pentru pregătirea concursurilor

A. Nivel gimnazial

G76. Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale sistemul $\begin{cases} x^2 - y = \\ y^2 - z = \\ z^2 - x = \end{cases}$

Adrian Zano

G77. *i)* Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ cu $a > b > c$; atunci $\dfrac{a^2}{a-b} + \dfrac{b^2}{b-c} > a + 2b +$

ii) Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ cu $a \geq b \geq c > 0$; atunci $\dfrac{a^2 - b^2}{c} + \dfrac{c^2 - b^2}{a} + \dfrac{a^2 - c^2}{b} \geq$

Ioan Şerdear

G78. Dacă $a, b, c, d \in (0, \infty)$, să se demonstreze inegalitatea

$$\frac{b\,(a+c)}{c\,(a+b)} + \frac{c\,(b+d)}{d\,(b+c)} + \frac{d\,(a+c)}{a\,(d+c)} + \frac{a\,(b+d)}{b\,(a+d)} \geq 4.$$

Artur Bălăucă,

G79. Dacă $x, y, z \in (0, \infty)$ sunt astfel încât $x + y + z = xyz$, atunci

$$xy + yz + zx \geq 3 + \sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} + \sqrt{z^2+1}.$$

Florina Cârlan şi Marian Tetiv

G80. Fie A mulţimea tuturor sumelor de tipul $\pm 1^2 \pm 3^2 \pm 5^2 \pm \cdots \pm$
$n \in \mathbb{N}$, unde semnele $\pm$ pot fi alese în orice combinaţie posibilă. Să se arate
(*În legătură cu teorema Erdös-Surányi.*)

Petru As

G81. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $k \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$. Să se arate că există o mulţ
cu n elemente care are exact k submulţimi cu suma elementelor strict po

Adrian Zahariuc, ele

G82. Un cal se află pe tabla de şah în câmpul $A1$ şi dorim să-l ducem
$H8$ într-un număr minim de sărituri. Aflaţi care este acest număr minim,
câte trasee de lungime minimă există.

Gheorghe Crăciun, Plopeni şi Gabriel I

G83. Fie $ABCD$ patrulater convex şi punctele $M, N \in (AB)$, $P, R \in ($
încât $AD \cap BC \cap MR \cap NP \neq \emptyset$. Să se arate că $\dfrac{BM}{MN} \cdot \dfrac{NA}{DP} \cdot \dfrac{PR}{RC} \cdot \dfrac{CD}{AB} =$

Andrei-Sorin Cozma,

G84. Fie $ABCD$ un trapez cu $AB \| CD$, $AB < CD$. Se consider
$E \in (AD)$ şi $F \in (BC)$ astfel încât $\dfrac{AE}{ED} = \dfrac{CF}{FB}$. Dreapta EF intersectează
în M, respectiv N. Să se arate că $\dfrac{MN}{EF} = \dfrac{DC - AB}{DC + AB}$.

Andrei Ned

[1] Se primesc soluţii până la data de 31 decembrie 2005.

G85. Fie A', B', C' picioarele bisectoarelor unghiurilor $\triangle ABC$. Pe la
considerăm punctele D şi E astfel încât $D \in (BE)$ şi cevienele AD ş
izogonale. Să se demonstreze că DB' şi EC' se intersectează pe AA'. (*În*
Propoziţia 1, p. 99, RecMat - 2/2004.)

Titu Zvonaru, C

B. Nivel liceal

L76. Fie cercurile $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ tangente interior unui cerc $\mathcal{C}$ în punctele di
respectiv N. Cercurile $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ sunt secante sau tangente exterior iar axa
cercurilor $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ taie cercul $\mathcal{C}$ în A şi B. Dreptele AM şi AN taie din no
$\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ în K, respectiv L. Arătaţi că $AB \geq 2KL$. În ce caz avem egalita

Neculai Roman, Mirc

L77. Fie punctele $P_1, P_2, \ldots, P_{13}$ în plan astfel încât oricare trei sunt
şi toate au coordonate întregi. Să se arate că există cel puţin un triung
astfel încât centrul său de greutate să aibă coordonate întregi.

Vasile Pravăţ şi Titu Zvonaru, Comăneşt

L78. Considerăm şirul de puncte $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pe cercul trigonometric a
$m(\widehat{P_n O P_{n+1}}) = \operatorname{arctg}\dfrac{5}{12}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $\widehat{P_n O P_{n+1}}$ fiind considera
orientat. Să se arate că pentru orice punct P pe cercul trigonometric ex
astfel încât $P_j \in \operatorname{Int}\mathcal{C}\left(P, \dfrac{1}{2005}\right)$.

Lucian - Georges Lăduncă şi Andrei Ned

L79. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ în aşa fel încât $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$ şi
$\max\{|a_i - a_j|\,; 1 \leq i < j \leq n\} \leq 1$. Demonstraţi că $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \leq \dfrac{1}{n}\Big[$
şi precizaţi în ce caz are loc egalitate.

Marius Pachiţariu,

L80. Fie un alfabet cu 4 litere a, b, c, d. În acest alfabet se pot for
după următoarele reguli: după a nu poate urma b, după b nu poate urma
nu poate urma d şi după d nu poate urma a. Câte cuvinte palindromice
n, $n \geq 2$, se pot forma conform acestor reguli? (Prin *cuvânt palindromic*
un cuvânt în care litera de pe poziţia k coincide cu litera de pe poziţia
pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.)

Irina Mustaţă, e

L81. Fie $n \geq 1$ un număr natural fixat. O tablă infinită de şah es
în alb şi negru în maniera obişnuită. O mulţime C de căsuţe ale tablei s
conexă dacă putem ajunge din fiecare căsuţă a lui C în fiecare altă căsu
printr-o succesiune de deplasări în C dintr-o căsuţă într-o căsuţă vecină (
comună). Fie S o mulţime conexă cu $4n$ căsuţe. Numim *raportul cromatic*
S raportul dintre numărul de căsuţe albe şi numărul de căsuţe negre di
afle cea mai mică şi cea mai mare valoare posibilă a raportului cromatic.

Adrian Zahariuc, ele

L82. Determinaţi $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ pentru care $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \{p(x)$ -
este periodică, unde $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt funcţiile polinomiale asociate lui

tiv Q.

Paul Georgescu şi Gabriel P

L83. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{3}}+\cdots+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}}-n\right].$$

Marius Olteanu, Râmnic

L84. Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$ şi

$$A=\Big\{x>0;\quad x=a_0+a_1\sqrt[n]{n}+\cdots+a_{n-1}\sqrt[n]{n^{n-1}};$$
$$a_0,a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{Z};\quad n-1\mid a_0+a_1+\cdots+a_n\Big\}$$

Determinaţi $\inf A$.

Paul Georgescu şi Gabriel P

L85. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie pentru care mulţimea punctelor în care f
finită la stânga este densă în $\mathbb{R}$. Să se arate că mulţimea punctelor în c
continuă este de asemenea densă în $\mathbb{R}$. (O mulţime $D\subset\mathbb{R}$ se numeşte d
dacă orice interval deschis al axei reale conţine măcar un element din D.)

Gabriel Dospinescu, Paris, şi Marian Tetiv

Training problems for mathematical conte

A. Junior high school level

G76. Solve the system $\begin{cases} x^2-y=u^2\\ y^2-z=v^2\\ z^2-x=t^2\end{cases}$ in the set of natural numbers

Adrian Zanc

G77. *i*) Prove that $\dfrac{a^2}{a-b}+\dfrac{b^2}{b-c}>a+2b+c$ for any $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a>$

ii) Prove that $\dfrac{a^2-b^2}{c}+\dfrac{c^2-b^2}{a}+\dfrac{a^2-c^2}{b}\geq 3a-4b+c$ for any a
$a\geq b\geq c>0$.

Ioan Şerdean

G78. Prove that

$$\frac{b(a+c)}{c(a+b)}+\frac{c(b+d)}{d(b+c)}+\frac{d(a+c)}{a(d+c)}+\frac{a(b+d)}{b(a+d)}\geq 4$$

for any $a,b,c,d\in(0,\infty)$.

Artur Bălăucă,

G79. Prove that

$$xy+yz+zx\geq 3+\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}+\sqrt{z^2+1}$$

for any $x,y,z\in(0,\infty)$ such that $x+y+z=xyz$.

Florina Cârlan and Marian Tetiv

G80. Let A be the set of all sums of type $\pm 1^2 \pm 3^2 \pm 5^2 \pm \cdots \pm (2n+$
for any combination of the signs. Prove that $A = \mathbb{Z}$. (*Regarding Erd*
theorem.)

Petru As

G81. Let $n \in \mathbb{N}^*$ and $k \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$. Prove that there exists a
with n elements which has precisely k subsets whose sum of elements
positive.

Adrian Zahariuc, high school stude

G82. Find minimal number of moves required to transfer a knight on a
from the square $A1$ to the square $H8$. For this minimal number, find the
distinct paths of minimal length.

Gheorghe Crăciun, Plopeni, and Gabriel

G83. Let $ABCD$ be a convex quadrilateral and let $M, N \in (AB)$, $P,$
such that $AD \cap BC \cap MR \cap NP \neq \emptyset$. Prove that $\frac{BM}{MN} \cdot \frac{NA}{DP} \cdot \frac{PR}{RC} \cdot \frac{CD}{AB}$

Andrei-Sorin Cozma, junior high school stu

G84. Let $ABCD$ be a trapezoid with $AB \| CD$, $AB < CD$. Consider
and $F \in (BC)$ such that $\frac{AE}{ED} = \frac{CF}{FB}$. The line EF meets BD and
respectively in N. Prove that $\frac{MN}{EF} = \frac{DC - AB}{DC + AB}$.

Andrei Ned

G85. Let ABC be a given triangle and let A', B', C' be the legs of its
Let D, E be points on the side (BC) such that $D \in (BE)$ and the cevia
AE are isogonal. Prove that DB' and EC' intersect each other in a poi
on AA'. (*Regarding Proposition 1, p. 99, RecMat - 2/2004.*)

Titu Zvonaru, C

B. High school level

L76. Let $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ be circles which are internally tangent to a given circ
respectively in $N, M \neq N$. Suppose that $\mathcal{C}_1$ and $\mathcal{C}_2$ are secant or externa
and that the radical axis of $\mathcal{C}_1$ and $\mathcal{C}_2$ meets $\mathcal{C}$ in A and B. Let us de
respectively by L, the points in which the lines AM, AN meet again $\mathcal{C}_1$, r
$\mathcal{C}_2$. Prove that $AB \geq 2KL$ and characterize the case of equality.

Neculai Roman, Mirc

L77. Let P_1, P_2, $\ldots$, P_{13} points with integer coordinates in a plane
any given three are not collinear. Prove that there exists at least a trian
such that its centroid has integer coordinates.

Vasile Pravăţ and Titu Zvonaru, Comăneşt

L78. Consider $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a sequence of points on the unit circle
$m(\widehat{P_n O P_{n+1}}) = \operatorname{arctg} \frac{5}{12}$ for all $n \in \mathbb{N}$, $\widehat{P_n O P_{n+1}}$ being considered as a
angle. Prove that for any point P on the unit circle there exists $j \in \mathbb{N}$

$P_j \in \operatorname{Int} \mathcal{C}\left(P, \dfrac{1}{2005}\right)$.

Lucian Lăduncă and Andrei Ned

L79. Let $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ be such that $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$ and $\max\{|a_i - a_j|; 1 \le i < j \le n\} \le 1$. Prove that $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \le \dfrac{1}{n}\Big[$
and characterize the case of equality.

Marius Pachiţariu, high school stu

L80. Consider an alphabet with four letters a, b, c, d. Using this alp can construct words according to the following rules: b cannot succeed succeed b, d cannot succeed c and a cannot succeed d. How many palyn length n, $n \ge 2$, can one construct in this manner? (By *palyndrome* we m in which the k-th letter coincides with the $n-k+1$-th letter for all $k \in \{1,$

Irina Mustaţă, high school stu

L81. Let $n \ge 1$ be a fixed natural number. An infinite chessboard is black and white in the usual manner. A set C of squares is then called *set* if one can reach any square in C starting from any given square in a succession of moves in C from a square to a neighboring square (with edge).

Let S be a connected set with $4n$ squares. One calls the *chromatic* the quotient between the number of white squares and the number of bla Find the maximal and the minimal value of the chromatic index.

Adrian Zahariuc, high school stude

L82. Find $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ such that $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \{p(x) + s$ periodic where $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are the polynomial functions associated to P, r to Q.

Paul Georgescu and Gabriel

L83. Find

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{3}} + \cdots + \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}} - n\right].$$

Marius Olteanu, Râmnic

L84. Let $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 3$ and

$$A = \Big\{x > 0;\quad x = a_0 + a_1\sqrt[n]{n} + \cdots + a_{n-1}\sqrt[n]{n^{n-1}};$$
$$a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z};\quad n-1 \mid a_0 + a_1 + \cdots + a_n\Big\}$$

Find $\inf A$.

Paul Georgescu and Gabriel

L85. Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a function such that the set of points in which left-sided limit is dense in $\mathbb{R}$. Prove that the set of continuity points of f is in $\mathbb{R}$. (A subset D of $\mathbb{R}$ is called *dense* in $\mathbb{R}$ if any open interval of $\mathbb{R}$ conta an element of D.)

Gabriel Dospinescu, Paris, and Marian Tetiv

Pagina rezolvitorilor

BRAŞOV

Liceul "M. Titulescu". **Clasa a IX-a.** BARDĂ Dan: VIII(52-54), BOIŞTEANU Claudia: VIII(52-54), IX(53,54); BUTNARIU Anda: V IX(52-55); CHIRA Roxana: VIII(52-54), IX(52-55); COSTA Larisa: V IX(52,53); ENĂŞOAE Emanuela: VIII(52-54), IX(53,54); GIRIGAN And (52-54), IX(53,54); MÂZGACIU Alexandra: VIII(52-54), IX(53,54); NĂN na: VIII(52-54), IX(53,54); NEGOESCU Anamaria: VIII(52,53), IX(52- Iulian: VIII(52-54), IX(52,53,55); NUŢU Cosmin: VIII(52-54), IX(52-55 CEA Dragoş: VIII(52-54), IX(52,55); POTEC Monica: VIII(52-54), SZÖCS Daniel: VIII(52-54), IX(52-54); ŞCHIOPU Iulian: VIII(52-54), ZBARCEA Adrian: VIII(52-54), IX(52,53).

CRAIOVA

Şcoala nr. 22 "M. Eliade". **Clasa a V-a.** STANCIU Ioan: P(74-76,78 V(51,52).

HÂRLĂU

Şcoala "P. Rareş". **Clasa a II-a** (înv. BUDACEA Maria). NEICU M 67,72,74-79).

Liceul "Ştefan cel Mare". **Clasa a VII-a.** CIOFU Alexandra: V(46- MANOLIE Ioan: V(46-49), VI.46; SAVA Cristina: V(46-49), VI.48; SC Gabriela: V(46-49), VII.48; SPIRIDON Florin: V(46-49), VII.48; ZAMFI Adela: V(46-49), VI.48. **Clasa a IX-a.** ONOFREI Andrei-Codruţ: V VIII.47, IX(46,47,49), L.56; ROTARU Lucian: VII(48-50), VIII.46, IX(46 SPÎNU Cosmin-Alexandru: VII(46-48), VIII.49, IX.47, L.56.

IAŞI

Şcoala nr. 4 "I. Teodoreanu". **Clasa a III-a** (înv. BUJOR Lorena) Dana: P(74-80,82,83).

Şcoala nr. 7 "N. Tonitza". **Clasa a III-a** (înv. TUDOSE Elena). A liana: P(74-79); LEONTE Anca: P(74-79); NECHITA Paula: P(74- TICĂ Simona-Alexandra: P(74-79); SAVIN Răzvan: P(74-79). **Clas** (înv. MELINTE Rodica). BOTOŞANU Bianca-Mihaela: P(74-76,78,79) Dănuţ-Vasilică: P(74-76,78, 79); CONSTANTINESCU Diana-Gabriela: 79); GUŞOVATE Diana-Ştefana: P(74-76,78,79); LEOGAN Larisa-Dia 76,78,79); SUCIUC Raluca: P(74-76,78,79).

Şcoala nr. 22 "B. P. Hasdeu". **Clasa a III-a** (înv. DOHOTARU Liliana Andrei-Daniel: P(74-79); CRUCEANU Evangeline Tamara: P(74-76,78,7 **a III-a** (înv. TÂRZIORU Iuliana). ADĂSCĂLIŢEI Victor: P(74-79,82,8 TOL Ana-Maria: P(74-78); EŞANU Georgiana: P(74-78); GREIEROS P(74-78); GÂNDU Alexandra-Livia: P(74-76,78,79); LĂMĂTIC Ioana: REBEGEA Andrada Elena: P(74-79); UNGUREANU Teofana: P(74 **Clasa a III-a** (înv. CHIRILĂ Laura). ANDRONICIUC Ana-Miruna: 79); BOARU Adrian: P(74-76;78,79); BURUIANĂ Sebastian-Andrei: P(7

BUHU Vlad: P(74-76,78,79); CEOBANU Andrei-Nicolae: P(74-76,78,80)
RĂU Alexandra-Elena: P(74-76,78,79); COSTĂCHESCU Ivona: P(74-76,
ACONESCU Matei: P(74-76,78,79); GHERAN Ana-Maria: P(74-76,78,7
Ioana: P(74-76,78,79); HATESCU Iustina: P(74-76,78,79,83); HORBOVA
Alexandra: P(74-76,78,79).

Şcoala nr. 26 "G. Coşbuc". **Clasa a III-a** (înv. BUCATARIU Rica). I
Ambra-Georgiana: P(64-68,74-76); IACOB Robert-Ionuţ: P(68,69,74
IVANCIUC Dumitru-Florin: P(68,71,75,76,78); HRISCU Alexandru: P
79); MOISA Adrian-Bogdan: P(68-70,76-79); MUSTEAŢĂ Alexandru: P
74-79); SANDU Ioana-Luiza: P(68,74-78); SCUTARU Ionela-Cristina: P
76,78,79); STOICA Diana-Maria: P(64,65,67,68,76); ZALINCĂ Georgiana
69,74,78,79). **Clasa a IV-a** (înv. RACU Maria). BULGARU Ionela-
P(74-79); BURLACU Ştefan-Claudiu: P(74-79); CĂLIN Andreea-Georgi
79,82,83); IFROSĂ Adriana: P(74-78); IOJĂ Petru-Alexandru: P(74-78
Bogdan-Gabriel: P(74-79,82,83); PINTILIE Răzvan-Florin: P(74-79);
Ionuţ: P(74-78). **Clasa a IV-a** (înv. GALIA Paraschiva). ALUPEI Andra
P(74-79); CIOABĂ Oana-Cătălina: P(74-79); GHERCĂ Marius-Cătălin:
HOMEA Liviu: P(74-79); HUIDEŞ Gina: P(74-79); MANOLIU Mădălina
MIHĂILESCU Laura: P(74-79); PISICĂ Alexandru: P(74-79); SCUT
stantin: P(74-79); SEGNEANU Elena: P(74-79); ZDREVIŢ Maria: P(74

Liceul "M. Eminescu". **Clasa a V-a.** DUCA Mădălina: P(71-73,82,83)
IACOB Ioana: P(71,73,81-83), V(46,51); POPA Alexandra: P(71,73,81-83
Clasa a VI-a. COHAL Călin: V(51,53-55), VI.51.

Liceul "G. Ibrăileanu". **Clasa a VIII-a.** UNGUREANU Dragoş:
VII(54,55), VIII.52.

Colegiul Naţional "C. Negruzzi". **Clasa a VI-a.** OLARIU Tudor:
V(46-50,52-55), VI(46,47), G.66; TIBA Marius: V.48, VI(46-48,50), VIII(

Colegiul Naţional "E. Racoviţă". **Clasa a V-a.** TUDORACHE
Gabriel: P(80-83), V(51-55).

Colegiul Naţional Iaşi. **Clasa a V-a.** BACUSCA Alberto: P(71,73,81
CĂPĂŢÂNĂ Roxana-Maria: P(71-73,80-83), V(46-49); CEUCĂ Răzvan
82,83), V(46,49); CHELARU Adrian: P(71, 72,80-82); V(46,47); CUR
P(71,72,81), V(46,47); MOCANU Dan: P(71-73,80-83), V(46,47,49,51);
Adina-Ioana: P(71-73,80-83), V(46,47,49,50); OROIAN Bianca: P(71,73
47,49). **Clasa a VI-a.** CADAR Alexandra: V(46-48,51-53), VI(51,55)
X-a. TIMOFTE Diana: VIII(46,47), IX(46,47,49,50), X(46,47).

Premii acordate rezolvitorilor

ASOCIAŢIA "RECREAŢII MATEMATICE" în colaborare c
revistei **RECREAŢII MATEMATICE** acordă câte o **diplomă** şi un **p**
cărţi pentru trei apariţii la rubrica *"Pagina rezolvitorilor"* elevilor urmă

Liceul "M. Eminescu"

AVRAM Mircea (cl. a IX-a): 1/2002 (7pb), 1/2003 (10pb), 2/2004 (5p

Şcoala nr. 7 "N. Tonitza"

SAVIN Răzvan (cl. a III-a): 1/2004 (5pb), 2/2004 (7pb), 1/2005 (6pb)

Şcoala nr. 22 "B. P. Hasdeu"

ANDRONICIUC Ana-Miruna (cl. a III-a): 1/2004 (6pb), 2/2004 (5p
(5pb);
APOSTOL Ana-Maria (cl. a III-a): 1/2004 (6pb), 2/2004 (7pb), 1/20
BURUIANĂ Sebastian-Andrei (cl. a III-a): 1/2004 (6pb), 2/2004 (6p
(5pb);
CEOBANU Andrei-Nicolae (cl. a III-a): 1/2004 (5pb), 2/2004 (5pb)
(5pb);
COSTĂCHESCU Ivona (cl. a III-a): 1/2004 (5pb), 2/2004 (6pb), 1/2
GÂNDU Alexandra-Livia (cl. a III-a): 1/2004 (6pb), 2/2004 (6pb), 1
(5pb);
GHERAN Ana-Maria (cl. a III-a): 1/2004 (5pb), 2/2004 (5pb), 1/200
HORBOVANU Bianca-Alexandra (cl. a III-a): 1/2004 (5pb), 2/200
1/2005 (5pb);
TURCU Andrei-Daniel (cl. a III-a): 1/2004 (6pb), 2/2004 (5pb), 1/2
UNGUREANU Teofana (cl. a III-a): 1/2004 (6pb), 2/2004 (5pb), 1/2

Şcoala nr. 26 "G. Coşbuc"

MANOLIU Mădălina (cl. a IV-a): 1/2004 (5pb), 2/2004 (5pb), 1/200

Revista semestrială **RECREAȚII MATEMATICE** este edit
ASOCIAȚIA "RECREAȚII MATEMATICE". Apare la datele de 1
şi 1 septembrie şi se adresează elevilor, profesorilor, studenților şi tuturo
pasionați de matematica elementară.

În atenția tuturor colaboratorilor

Materialele trimise redacției spre publicare (note şi articole, chesti
metodică, probleme propuse etc.) trebuie prezentate îngrijit, clar şi conc
trebuie să prezinte interes pentru un cerc cât mai larg de cititori. Se reco
ca textele să nu depăşească patru pagini. Evident, **ele trebuie să fie ori**
şi să nu fi apărut sau să fi fost trimise spre publicare altor reviste.

Problemele destinate rubricilor: **Probleme propuse** şi **Probleme p**
pregătirea concursurilor vor fi redactate pe foi separate cu en
demonstrație/rezolvare (câte una pe fiecare foaie) şi vor fi însoțite de n
autorului, şcoala şi localitatea unde lucrează/învață.

Redacția va decide asupra oportunității publicării materialelor prim

În atenția elevilor

Numele elevilor ce vor trimite redacției soluții corecte la problem
rubricile de **Probleme propuse** şi **Probleme pentru pregatirea concurs**
vor fi menționate în **Pagina rezolvitorilor**. Se va ține seama de regulile:

1. Pot trimite soluții la **minimum cinci probleme propuse în nu**
prezent şi cel anterior al revistei; pe o foaie va fi redactată soluți
singure probleme.

2. Elevii din clasele **VI-XII** au dreptul să trimită soluții la prob
propuse pentru clasa lor, pentru orice clasă mai mare, din două clase mai
imediat anterioare. Elevii din clasa a **V**-a pot trimite soluții la prob
propuse pentru clasele a IV-a, a V-a şi orice clasă mai mare, iar elevii c
I-IV pot trimite soluții la problemele propuse pentru oricare din clasele p
şi orice clasă mai mare. Orice elev poate trimite soluții la problem
concurs (de tip **G** şi **L**).

3. Vor fi menționate următoarele date personale: numele şi pren
clasa, şcoala şi localitatea.

4. Plicul cu probleme rezolvate se va trimite prin poştă (sau va
direct) la adresa Redacției:

Prof. dr. Temistocle Bîrsan
Str. Aurora, nr. 3, sc. D, ap. 6,
700 474, Iaşi
Jud. IAŞI
E-mail: tbi@math.tuiasi.ro

CUPRINS

ARTICOLE ŞI NOTE

NOTA ELEVULUI

CHESTIUNI METODICE

CORESPONDENŢE

CONCURSURI ŞI EXAMENE

PROBLEME ŞI SOLUŢII

Anul VIII, Nr. 1 Ianuarie – Iuni

RECREAȚII MATEMATIC

REVISTĂ DE MATEMATICĂ PENTRU ELEVI ŞI PROF

$$e^{i\pi} = -1$$

Editura "Recreații Matematic
IAŞI - 2006

Semnificația formulei de pe copertă:

Într-o formă concisă, formula $e^{i\pi} = -1$ leagă cele patru ramuri fu
ale matematicii:

ARITMETICA	reprezentată de 1
GEOMETRIA	reprezentată de π
ALGEBRA	reprezentată de i
ANALIZA MATEMATICĂ	reprezentată de e

Adresa redacției:

Catedra de Matematică – Universitatea Tehnică "Gh. Asachi" Iaşi
Bd. Carol I, nr.11, 700506, Iaşi
Tel. 032 – 213737 / int. 123
E-mail: recreatii.matematice@gmail.com
http://www.recreatiimatematice.uv.ro

TIPĂRITĂ LA SL&F IMPEX IAŞI
Bd. Carol I, nr. 3-5
Tel. 0788 498933
E-mail: simonaslf@yahoo.com

Anul VIII, Nr. 1 **Ianuarie – Iuni**

RECREAȚII MATEMATICE

REVISTĂ DE MATEMATICĂ PENTRU ELEVI ŞI PROF

$$e^{i\pi} = -1$$

Revistă cu apariție semestrială
publicată de

ASOCIAŢIA "RECREAŢII MATEMATIC

IAŞI - 2006

Elogiu adus revistei "Gazeta Matematică
la 110 ani de apariţie neîntreruptă

Cum podul de la Cernavodă îşi întinde braţele peste apele Dunării, aşa
Matematică îşi întinde existenţa, care are începutul în secolul al XIX
întreg secolul al XX-lea şi continuă să-şi aducă aportul la dezvoltarea învăţ
şi ştiinţelor matematice din ţara noastră şi în acest nou secol, al XXI-lea.

Gazeta Matematică, prin cele 110 tomuri durate în timp unul după
piramida Keops a publicisticii periodice româneşti, punctul de maxim
acesteia. Este a doua publicaţie de matematică din lume ce se adresează
şi prima de acest fel în privinţa apariţiei neîntrerupte şi longevităţii.

A avut o existenţă zbuciumată şi cu multe momente dramatice, existe
legată de soarta învăţământului din şcolile româneşti - cel matematic mai a
de cea a poporului român. A trecut prin două războaie mondiale, reforme r
ale învăţământului public, regimuri adverse poporului român etc. Să am
un singur episod din existenţa **Gazetei**. În primul război mondial, în urm
capitalei, Iaşul devine centrul politic şi administrativ al ţării; tot aici se r
Gazeta Matematică, care, datorită devotamentului şi strădaniilor lui *Traia*
Vasile Teodoreanu şi altor membri din redacţie, continuă să fie tipărită şi
ajungând chiar şi în mâinele abonaţilor aflaţi în primele linii ale frontului

Sub deviza *Entuziasm, armonie, muncă dezinteresată, sacrificii contin*
depăşite toate greutăţile materiale şi vicisitudinile vremurilor; oameni minu
în jurul şi pătrunşi de spiritul **Gazetei Matematice**, au asigurat prin mu
băţia lor mersul ei înainte. În prima jumătate de veac, la cârma destine
au fost *"cei 4 stâlpi ai Gazetei Matematice"*: *Ion Ionescu*, *Gheorghe Ţiţe*
Ioachimescu şi *Vasile Cristescu*. Merită elogiată, de asemenea, contribuţia
Teodorescu, care a condus cu multă competenţă, în ultimul sfert al secolu
activităţile la **Gazetă** şi cele legate de ea, devenite între timp mult mai d

Tinerii talentaţi din generaţii succesive au "frecventat" şcoala **Gazetei**
tice, unde şi-au format deprinderile şi tehnicile de lucru, şi-au şlefuit raţi
matematic sau şi-au văzut publicate primele încercări originale în paginil

Nume de viitori iluştri matematicieni români se găsesc menţionate
Gazetei Matematice printre rezolvitorii şi propunătorii de probleme,
unor concursuri sau ca autori de note originale interesante, iar unii dintre
du-şi responsabilităţi redacţionale. Lista lor fiind prea lungă, amintim doar
me: *Gh. Ţiţeica*, *C. Popovici*, *T. Lalescu*, *N. Abramescu*, *O. Mayer*, *Al. I*
Barbilian, *Fl. Vasilescu*, *N. Ciorănescu*, *T. Popoviciu*, *Gr. Moisil*, *N. Teod*

În aceşti 110 ani de existenţă, **Gazeta Matematică** a devenit o caria
turii româneşti, simbol al permanenţei şi continuităţii, componentă a învăţ
matematic din ţara noastră, pepinieră de talente matematice.

Ca o recunoaştere a meritelor sale, *Preşedintele României*, prin decretu
octombrie 2005, conferă **Gazetei Matematice** *Ordinul "Meritul Cultural*
de Ofiţer, categoria H "cercetare ştiinţifică", pentru contribuţia deoseb
movarea învăţământului şi cercetării aprofundate a ştiinţelor matematice

Prof. dr. Temistocle BÎRS

100 de ani de la naşterea matematicianul
Grigore C. Moisil

Multe capitole ale matematicii mi-
dragi. Matematica e una (**Gr. C**

În *Istoria matematicii în Românic* *Şt. Andonie* îl prezintă pe **Grigore C. M** *fericită întruchipare a dominantelor matem* *tre: dinamism, varietate, tendinţa spre unive* A fost unul dintre cei mai mari şi talentaţ ticieni români şi, indiscutabil, cel mai pro când cu succes aproape toate domeniile m pure şi aplicate s-a dovedit un creator în c noire. Jovial şi optimist, cu un umor plin d un povestitor fermecător.

Opera lui **Grigore C. Moisil** nu este d individuală a unui om deosebit de înzestr bazează pe tradiţia "dinastiei" Moisileştilo jinul permanent al familiei care a stimulat inteligenţa sa sclipitoare. S-a mândrit întot se trage dintr-o familie de grăniceri năsăudeni. Familia sa, originară din M a descins în comuna Şanţ, în imediata vecinătate a Năsăudului. Străbunicu ticianului, care purta numele de Grigore, a fost primul cărturar care s-a comuna Şanţ. A fost preot, profesor şi primul director al celui de al pat românesc înfiinţat în Austria, la Năsăud. Fiul acestuia, Constantin, a ob de doctor în ştiinţe filologice la Universitatea din Viena şi a funcţionat 3 profesor la Năsăud. Unul dintre fii acestuia, numit tot Constantin, tată ticianului, a urmat, cu sprijinul lui Al. Odobescu, şcoala Normală Supe Bucureşti; a funcţionat ca profesor la Focşani, Tulcea şi Bucureşti. Ulterio profesoratul consacrându-se arheologiei şi numismaticii, devenind un repu list în acest domeniu şi membru al Academiei Române. La Tulcea s-a c institutoarea Elena Nicolescu, care a devenit ulterior directoarea Şcolii Văcărescu" din Bucureşti. La Tulcea s-au născut primii trei copii ai famili (10 ianuarie 1906), Florica (cercetătoare la Biblioteca Academiei; căsători Emil Condurache) (1909) şi Ioan (1910); ultimul copil, Gheorghe, s-a năs la Vaslui (în timpul refugiului). Ambii fraţi au fost ingineri, profesori u Dotată cu o inteligenţă vie şi un umor sănătos, mama, Elena, a avut un în formarea lui Grigore, care i-a urmat cu sfinţenie sfaturile, în întreaga sa la ea a moştenit deviza: *"Nu crede tot ce ţi se spune, judecă tu singur".*

Grigore C. Moisil a urmat şcoala primară în Bucureşti şi liceul la "Mi niceanu" din Vaslui (1916 – 1918) şi "Spiru Haret" din Bucureşti (1918 – înscris apoi la secţia de matematică de la Facultatea de Ştiinţe a Unive Bucureşti, unde a a vut ca profesori pe *D. Pompeiu, Gh. Ţiteica, A.* *Tr. Lalescu.* Primul i-a fost mentor nu numai în matematică, ci şi în anu de viaţă. Într-un articol ("Viaţa studenţească", nr. 11, 1967) mărturise *marea generaţiei matematice din care fac parte coincide cu începuturile n abstracte româneşti. Generaţia mea a păşit cu dreptul. Ea a profitat de fi avut ca profesori oameni de ştiinţă şi ai căror profesori şi ei oameni* Ca student a participat şi la cursuri de istorie (N. Iorga), filozofie, soci hail Dragomirescu), istoria artelor. A urmat în paralel şi secţia de constr Institutul Politehnic Bucureşti la care a renunţat (în anul al IV-lea) când doctoratul şi a plecat în străinătate.

A luat doctoratul la 4 iunie 1929 în faţa unei comisii prezidată de *Gh. Ţi* care făceau parte *Dimitrie Pompeiu* şi *Anton Davidoglu.* În teza de doctora *Mecanica analitică a sistemelor continue* a studiat analitic mecanica sis un număr infinit de grade de libertate folosind metoda funcţională (n funcţională fusese introdusă cu puţin timp în urmă de *Vito Volterra).* În 1 cu o bursă a ministerului la Paris, unde ia contact cu *Jaques Hadamard, Henri Villat, Paul Montel şi Elie Cartan*, care apreciază elogios contribuţii din teza de doctorat.

La 1 iulie 1931 îşi trece docenţa în specialitatea analiză matematică, sitatea din Bucureşti. Se întoarce la Paris unde urmează cursul lui *Vit* În toamna anului 1932 se stabileşte la Iaşi fiind numit conferenţiar la Un "Al. I. Cuza". Matematicianul *Ion Creangă*, fost profesor şi rector al Univ aminteşte: *În acel timp eram student în anul al III-lea al secţiei de mat la Universitatea din Iaşi; în curând am aflat că la secţia noastră a încep de factură modernă predat de un tânăr matematician, deja cu renume for revoluţionează concepţia noastră despre algebră. Am fost atras de acest c ceput să-l audiez şi în curând am fost furat de noutăţile atât de atractive lecţiile cursului. Prelegerile lui Moisil ne-au deschis porţile spre fermecăt a structurilor algebrice, a laticelor, a împletirii strânse dintre procesele abstractizarea teoriei mulţimilor.* Perioada de 10 ani petrecuţi în Iaşi a fo importanţă pentru creaţia sa ştiinţifică şi pentru desăvârşirea personalită vârstă de 26 de ani, a găsit la Iaşi o atmosferă de înaltă cultură. Peste ani î *La Iaşi era o extraordinară densitate de oameni deştepţi pe metrul pătrat.* matematicieni de mare valoare ştiinţifică şi spirituală şi a rămas toată viaţa cei care îl primiseră cu simpatie la sosirea în Iaşi: *Alexandru* şi *Vera Myl Sanielovici*, *Octav Mayer*, *Mendel Haimovici*, *Ilie Popa*, *Adolf Haimovici* ş său din acea perioadă *Ion Creangă.* În Biblioteca Seminarului Matemati găsit cărţile care aveau să facă din el un matematician modern. Proaspăt ca profesor în 1935, în introducerea primului curs de algebră abstractă mo în România, afirmă: *La Iaşi am citit multe cărţi de algebră, dar cartea a fost cea a lui B. L. Van der Warden "Moderne Algebra". Era acolo u de a concepe matematica şi anume algebra, dar nu numai algebra; mate concepută nu ca o ştiinţă a cantităţii, ci ca o ştiinţă a structurii. Peste c apărut alte două cărţi care evidenţiau acelaşi mod de a privi matematica gia" lui Kuratowski şi cartea lui St. Banach asupra spaţiilor care îi poartă putea, cu aceste volume şi punând în fruntea lor "Teoria numerelor transf W. Sierpinski, organiza un curs de matematici în înţelesul de studiu al s Înţelegeam încet, încet că matematica se schimbase. Se schimbă. Se va s*

În Iaşi s-a simţit în largul său, a legat numeroase prietenii, participând
ranţa specifică tinereţii la viaţă acestui oraş pentru care a păstrat permane
une nedesminţită. S-au creat legende în legătură cu viaţa boemă a tână
făţat" al Iaşului. La restaurantul de lângă vechea clădire a Academiei Mi
păstrat într-un colţ discret, până la demolarea localului, o masă cunoscu
mele de "masa lui Moisil". Se spune că la restaurantul "Corso" din centr
îi plăcea să asculte orchestra interpretând un vals a cărui melodie şi v
compuse chiar de Moisil.

Tot la Iaşi s-a petrecut un eveniment care i-a marcat întreaga viaţă
O cunoaşte pe Viorica Constante cu care se va căsători. *Viorica Moi*
alături în permanenţă, l-a sprijinit şi stimulat, i-a asigurat calmul şi confort
creaţiei. După moartea savantului, pe baza scrisorilor şi altor documente
i-a dedicat o carte minunată scrisă cu talent, dragoste şi discreţie *"Un om*
altul. Grigore C. Moisil", apărută în 1979 în editura Albatros.

În anul 1942 s-a creat la Facultatea de Matematică a Universităţii din
catedra de analiză superioară şi logică la care este încadrat Grigore C. M
perioada 1946-1948 când a fost ambasador al României în Turcia, revine
sitatea Bucureşti unde a predat cursuri de elasticitate, algebră şi maşini
În 1948 devine mebru activ al Academiei Române şi şeful secţiei de alg
Institutul de Matematică al Academiei, nou înfiinţat. În 1948 este ales pr
Societăţii Române de Matematică, post pe care îl va ocupa toată viaţa.

După ce **Grigore C. Moisil** formează la Bucureşti o veritabilă şcoală d
solidelor deformabile, începând din 1949 ia naştere în jurul său *Şcoala de*
brică a mecanismelor automate. Alături de ruşii *V. I. Şestacov* şi *M. Gavri*
ricanul *Shannon* este fondatorul acestei teorii, care are la bază utilizarea
Boole în studiul automatelor. În această direcţie publică două tratate: *T*
brică a mecanismelor ordonate şi *Teoria algebrică a schemelor cu contac*

Începând din 1955 călătoreşte foarte mult, fiind invitat la congrese,
comunicări, cursuri sau conferinţe. Devine membru al *Academiei din Bo*
Institutului Internaţional de Filozofie din Paris.

Grigore C. Moisil are lucrări importante în analiza funcţională, me
retică, geometrie diferenţială şi algebră. Partea cea mai originală din c
constituie preocupările de logică matematică (începute în perioada de la I
ţinut şi primele cursuri de logică matematică din România), care l-au con
sideraţii filozofice asupra matematicii şi la teoria algebrică a mecanismelor
Aceste preocupări i-au asigurat un loc cu totul aparte în matematica rom

S-a stins din viaţă la 21 mai 1973, la Ottawa, în Canada, în timpul un
care a pus jaloanele colaborării între informaticienii candieni şi cei români
de la dispariţia sa, fostul său elev, Mircea Maliţa îl caracteriza: *Moisil a fo*
decât un savant, a fost mai mulţi savanţi întruniţi în sesiune permanentă s
şi locul unul altuia în cicluri succesive mari, reprezentate de temele funda
care le-a abordat. A fost până în ultimele zile deschizător de drumuri, în
această aventură spirituală nu a admis dilentatismul superficial.

Prof. dr. Petru MI

Asupra problemei 809 din Gazeta Matemat volumul VIII (1902–1903)

D. M. BĂTINEŢU - GIURGIU[1]

Cu ocazia aniversării a 110 ani
neîntreruptă a Gazetei Matema

În istoria matematicii din ţara noastră **Traian Lalescu** reprezintă de diversitate rară, un mare animator al generaţiei sale de matematicie dotat cu o mare putere de muncă şi inteligenţă scânteietoare, un profeso cu deosebit talent pedagogic.

Traian Lalescu s-a născut la 12/24 iulie 1882, în Bucureşti. Studiile p făcut la Bucureşti, primele două clase de gimnaziu la Craiova (1892-1894), a III-a şi a IV-a la Roman (1894-1896). Clasele a V-a şi a VI-a le-a făcu Internat din Iaşi (actualul Colegiu Naţional "C. Negruzzi") în perioada 1

În liceu, ca şi în gimnaziu, Lalescu a fost premiantul I al clasei şi a prin de onoare al şcolii (Lalescu se află trecut pe tabela de onoare a Liceului In Iaşi).

Chiar din clasa a VI-a a liceului (februarie 1898), Lalescu ajunge cores Gazeta Matematică. Profesorul său de mai târziu, inginerul **Ion Ionescu** despre **Traian Lalescu** că: "Intrarea lui în rândul corespondenţilor "Gaze atice" nu s-a făcut ca de obicei, în mod timid, lent, progresiv, ci deodată maximum posibil. A fost un caz unic de apariţiune la "Gazeta Mater activitate prodigioasă a unui tânăr licean!".

În v. VIII (1902-1903), la pagina 244, Traian Lalescu a propus *Proble* următorul enunţ:

$$\textit{Să se arate că: } \frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}\left(x^{2n}\cdot \operatorname{sh}\frac{1}{x}\right) = -\frac{\operatorname{ch}\dfrac{1}{x}}{x^{2n+2}}.$$

La pag. 283 din Gazeta Matematică, v. IX (1903-1904), este public dată de Traian Lalescu acestei probleme, urmată de o notă:

"Se ştie că:

$$\operatorname{sh} x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \quad \text{şi} \quad \operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)}$$

Vom avea deci:

$$\operatorname{sh}\frac{1}{x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{3!x^3} + \ldots \frac{1}{(2n+1)!x^{2n+1}} + \cdots$$

şi, prin urmare:

$$x^{2n}\operatorname{sh}\frac{1}{x} = P(x) + \frac{1}{(2n+1)!x} + \frac{1}{(2n+3)!x^3} + \cdots + \frac{1}{(2n+2p+1)!x^{2p+}}$$

$P(x)$ fiind un polinom întreg în x de gradul $2n$.

[1] Profesor, Colegiul Naţional "Matei Basarab", Bucureşti

Seria din membrul al II-lea, uniform convergentă în tot planul exceptân
e derivabilă termen cu termen şi rezultatele găsite sunt serii convergente
întindere, ale căror sume sunt date de derivatele de acelaşi ordin ale mem

Observând acum că:

$$\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}\left(P\left(x\right)\right)=0,\quad \frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}\left(\frac{1}{x^{2p+1}}\right)=-\frac{\left(2p+1\right)\left(2p+2\right)\cdots\left(2p+\right.}{x^{2n+2p+2}}$$

şi că, prin urmare

$$\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}\left(\frac{1}{(2p+2n+1)!x^{2p+1}}\right)=-\frac{1}{(2p)!x^{2p}}\cdot\frac{1}{x^{2n+2}},$$

obţinem

$$\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}\left(x^{2n}\operatorname{sh}\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x^{2n+2}}\left(1+\frac{1}{2!x^2}+\cdots+\frac{1}{(2p)!x^{2p}}+\cdots\right)=-$$

Notă. Această problemă a fost rezolvată de D-nii: N. Abramescu, Gr
G. Constantinescu, M. Radu, C. Gheorghiu şi I. G. Niculescu.

În acelaşi mod se pot demonstra şi formulele:

$$\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}\left(x^{2n}\sin\frac{1}{x}\right)=(-1)^{n+1}\frac{\cos\frac{1}{x}}{x^{2n+2}};\quad \frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}e^{1/x}\right)=(-1)^n\frac{e^{1/x}}{x^{n+1}}$$

Ca un omagiu adus marelui matematician român Traian Lalescu, vom
probleme o nouă soluţie, accesibilă elevilor actualului liceu.

Să considerăm funcţiile $f_n:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f_n\left(x\right)=x^{2n}\operatorname{sh}\frac{1}{x}$, unde $n\in$
stată imediat că f_n este indefinit derivabilă, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$. Ne pr
demonstrăm că

$$f_n^{(2n+1)}\left(x\right)=-\frac{1}{x^{2n+2}}\operatorname{ch}\frac{1}{x},\quad \forall n\in\mathbb{N}$$

prin metoda inducţiei matematice, folosind formula lui Leibniz de deri
dusului a două funcţii indefinit derivabile, adică

$$(uv)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)},\quad \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Avem $f_0'\left(x\right)=\left(\operatorname{sh}\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}\operatorname{ch}\frac{1}{x}$, deci pentru $n=0$ formula (1)
De asemenea avem:

$$f_1\left(x\right)=x^2\operatorname{sh}\frac{1}{x},\quad \text{deci}\quad f_1'\left(x\right)=2x\cdot\operatorname{sh}\frac{1}{x}-\operatorname{ch}\frac{1}{x};$$

$$f_1''\left(x\right)=2\operatorname{sh}\frac{1}{x}-\frac{2}{x}\operatorname{ch}\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\operatorname{ch}\frac{1}{x};$$

$$f_1'''\left(x\right)=-\frac{2}{x^2}\operatorname{ch}\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\operatorname{ch}\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}\operatorname{sh}\frac{1}{x}-\frac{1}{x^4}\operatorname{ch}\frac{1}{x}=-\frac{1}{x^4}\operatorname{ch}\frac{1}{x}$$

deci şi pentru $n=1$ formula (1) se verifică.

Presupunem că formula (1) este adevărată pentru $n\in\mathbb{N}^*$ adică are lo

$$f_n^{(2n+1)}(x) = -\frac{1}{x^{2n+2}} \operatorname{ch} \frac{1}{x},$$

şi demonstrăm că ea este adevărată şi pentru $n+1$, adică avem

$$f_{n+1}^{(2n+3)}(x) = -\frac{1}{x^{2n+4}} \operatorname{ch} \frac{1}{x}.$$

Să observăm că

$$f_{n+1}(x) = x^2 f_n(x), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

şi atunci, cu ajutorul formulei (2), avem:

$$f_{n+1}^{(2n+3)}(x) = \left(x^2 f_{n+1}(x)\right)^{(2n+3)} = \sum_{k=0}^{2n+3} C_{2n+3}^k f_n^{(2n+3-k)}(x) \cdot \left(x^2\right)^{(}$$

$$= C_{2n+3}^0 f_n^{(2n+3)}(x) \cdot x^2 + C_{2n+3}^1 f_n^{(2n+2)}(x) \cdot 2x + C_{2n+3}^2 f^{(2n+1)}(x) \cdot 2 =$$

$$= x^2 f_n^{(2n+3)}(x) + 2(2n+3)\, x f_n^{(2n+2)}(x) + (2n+3)(2n+2)\, f_n^{(2n+1)}(x),$$

Conform presupunerii relaţia (3) fiind adevărată, rezultă că:

$$f_n^{(2n+2)}(x) = \left(f_n^{(2n+1)}(x)\right)' = -\left(\frac{1}{x^{2n+2}} \operatorname{ch} \frac{1}{x}\right)' = \frac{2n+2}{x^{2n+3}} \operatorname{ch} \frac{1}{x} + \frac{1}{x^{2n+4}} \operatorname{sh} \frac{1}{x}$$

şi atunci

$$f_n^{(2n+3)}(x) = \left(f_n^{(2n+2)}(x)\right)' = \left(\frac{2n+2}{x^{2n+3}} \operatorname{ch} \frac{1}{x} + \frac{1}{x^{2n+4}} \operatorname{sh} \frac{1}{x}\right)' =$$

$$= -\frac{(2n+2)(2n+3)}{x^{2n+4}} \operatorname{ch} \frac{1}{x} - \frac{2n+2}{x^{2n+5}} \operatorname{sh} \frac{1}{x} - \frac{2n+4}{x^{2n+5}} \operatorname{sh} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^{2n}}$$

$$= -\frac{(2n+2)(2n+3)\, x^2 + 1}{x^{2n+6}} \operatorname{ch} \frac{1}{x} - \frac{4n+6}{x^{2n+5}} \operatorname{sh} \frac{1}{x}.$$

Dacă ţinem seama de relaţiile (3), (7) şi (8), relaţia (6) devine

$$f_{n+1}^{(2n+3)}(x) = -\frac{(2n+2)(2n+3)\, x^2 + 1}{x^{2n+4}} \operatorname{ch} \frac{1}{x} - \frac{4n+6}{x^{2n+5}} \operatorname{sh} \frac{1}{x} + \frac{2(2n+2)(2n+}{x^{2n+2}}$$

$$+ \frac{2(2n+3)}{x^{2n+3}} \operatorname{sh} \frac{1}{x} - \frac{(2n+2)(2n+3)}{x^{2n+2}} \operatorname{ch} \frac{1}{x} =$$

$$= \frac{1}{x^{2n+5}} \left(-\left((2n+2)(2n+3)\, x^2 + 1\right) \operatorname{ch} \frac{1}{x} + 2x^2 (2n+2)(2n+\right.$$

$$\left. - (2n+2)(2n+3)\, x^2 \operatorname{ch} \frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x^{2n+4}} \operatorname{ch} \frac{1}{x},$$

ceea ce demonstrează că relaţia (4) este adevărată.

Conform principiului inducţiei matematice, rezultă că

$$f_n^{(2n+1)}(x) = -\frac{1}{x^{2n+2}} \operatorname{ch} \frac{1}{x}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Bibliografie

1. **G. Şt. Andonie** - *Istoria matematicii în România*, v. 1, Ed. Şt., Buc.,

2. **M. D. Bătineţu-Giurgiu, M. Bătineţu-Giurgiu, I. Bîrchi-Damian, nescu** - *Analiză matematică. Probleme pentru clasa a XI-a*, Ed. Matrix 2003.

3. *Colecţia "Gazeta Matematică"*, 1895-2005.

Câteva proprietăţi ale subgrupurilor finit
din $GL_n(\mathbb{Z})$

Gabriel DOSPINESCU[1]

Cu ocazia aniversării a 110 ani
neîntreruptă a Gazetei Matema

1. Introducere: lema lui Serre. Ceea ce veţi citi în continuare es care timidă de a expune o colecţie de rezultate referitoare la subgrupuril $GL_n(\mathbb{Z})$. Se prea poate ca demonstraţiile care urmează să fie cunoscute; a găsit "aproape" singur şi crede că merită să fie prezentate. Articole (ma despre proprietăţile acestor subgrupuri s-au scris multe şi, cu siguranţă, scrie, căci problemele referitoare la ele sunt dificile şi multe dintre ele îşi a ani buni rezolvările. Îl invităm pe cititorul interesat de rezultate mai p citească articolele din bibliografie, mult mai tehnice şi mai specializate. Se [**3**] ar fi o descriere superbă a aceloraşi (sau chiar a mai multor) rezultate păcate, nu am avut acces la acest articol, aşa că nu putem decât să-l re "orbeşte" cititorilor interesaţi de asemenea aspecte.

Iată, mai întâi, ce rezultate vom demonstra (sau doar aminti). Vom de simplă a teoremei *Jordan-Zassenhaus* (cu ajutorul lemei lui Serre, de ca cunoştinţă din [**7**]) relativ la finitudinea claselor de izomorfism ale subgrupu ale lui $GL_n(\mathbb{Z})$, apoi vom demonstra că orice subgrup finit din $GL_n(\mathbb{Z})$ a $(2n)!$ elemente şi că există 9 clase de izomorfism pentru subgrupurile lui

Vom începe cu *lema lui Serre*, un rezultat de o frumuseţe deosebită, ca o primă majorare a ordinului subgrupurilor finite din $GL_n(\mathbb{Z})$; utilitatea permite să o numim "teoremă". Toate grupurile despre care va fi vorba în au cel puţin două elemente.

Teorema 1 (Lema lui Serre). *Fie $G \subset GL_n(\mathbb{Z})$ un grup finit şi $p > 2$ prim. Considerăm aplicaţia $\varphi : GL_n(\mathbb{Z}) \to GL_n(\mathbb{Z}_p)$ care asociază fiecă A matricea claselor de resturi modulo p ale elementelor din A. Atunc acestei aplicaţii la G este injectivă.*

Demonstraţie. Desigur, φ este bine definită şi este un morfism într $GL_n(\mathbb{Z})$ şi $GL_n(\mathbb{Z}_p)$ (aşa cum se verifică imediat). Să presupunem că rest caţiei φ la G nu este injectivă, deci există $A \in G$, $A \neq I_n$ astfel încât $\varphi($ Asta înseamnă că putem scrie $A = I_n + pB$, unde $B \in M_n(\mathbb{Z})$. Fie $\lambda_1, \lambda_2,$ orile proprii ale matricii B; se ştie atunci că A are valorile proprii $1 + p\lambda_i$, Acum să privim cu atenţie sumele $S_k = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \cdots + \lambda_n^k$ (pentru k numă toate vor fi numere întregi (cel mai simplu argument este teorema funda polinoamelor simetrice, căci toate aceste sume sunt polinoame cu coefici în sumele simetrice fundamentale ale numerelor $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, iar aceste s rice sunt - modulo un semn plus sau minus - coeficienţii polinomului cara matricii $B \in M_n(\mathbb{Z})$, deci întregi). Însă, G fiind finit, putem scrie $A^{|G|}$ trebuie să avem $(1 + p\lambda_i)^n = 1$, pentru fiecare $1 \leq i \leq n$, iar de aici obţine că $|\lambda_i| < 1, \forall 1 \leq i \leq n$. Or, aceasta înseamnă că şirul de numere întregi $(S$

[1] Student, École Normale Supérieure, Paris

la zero, deci trebuie ca toţi termenii săi să fie nuli (de la un rang încolo).
aplicare a formulelor lui *Newton* ne va duce la concluzia că e necesar, pent
toţi λ_i să fie egali cu 0; dar atunci toate valorile proprii ale matricii A sunt
deci (teorema *Cayley-Hamilton*) ea este "rădăcină" a polinomului $(X-1)^n$
văzut, mai este rădăcină şi pentru $X^{|G|}-1$, deci va fi rădăcină pentru cel
divizor comun al acestor polinoame, care este $X-1$: adică $A = I_n$ (alt ar
fi că identitatea este singura matrice unipotentă diagonalizabilă, iar matr
aceste două proprietăţi: este unipotentă - căci tocmai am arătat că toate v
proprii sunt egale cu 1 - şi diagonalizabilă, deoarece polinomul său minim
decât rădăcini simple, fiind un divizor al lui $X^{|G|}-1$) şi teorema 1 este de

Să examinăm puţin consecinţele acestei teoreme; obţinem imediat că $\varphi($
nea lui G prin morfismul φ) este un subgrup cu $|G|$ elemente din GL_n
$GL_n(\mathbb{Z}_p)$ are exact $(p^n-1)(p^n-p)\cdots(p^n-p^{n-1})$ elemente (lăsăm cit
exerciţiu demonstraţia acestui rezultat clasic). Rezultă atunci, din teore
grange, că $|G|$ divide pe $(p^n-1)(p^n-p)\cdots(p^n-p^{n-1})$, pentru orice su
$G \subset GL_n(\mathbb{Z})$ şi orice $p > 2$ prim. În particular, există un număr finit
posibile ale matricilor din $GL_n(\mathbb{Z})$ (participanţii la olimpiade - şi nu num
buie să-şi fi amintit celebra problemă: orice matrice din $GL_2(\mathbb{Z})$ are or
3, 4, sau 6; încercaţi să demonstraţi aceasta pentru $n = 3$!; mai mult, c
pot gândi la o variantă mult mai generală: mulţimile ordinelor posibile ale
din $GL_{2k}(\mathbb{Z})$ şi $GL_{2k+1}(\mathbb{Z})$ coincid, pentru orice $k \geq 1$ natural). De asem
rezultă (tot ca un caz particular) că ordinul oricărei matrici din $GL_n(\mathbb{Z})$
$(3^n-1)(3^n-3)\cdots(3^n-3^{n-1})$ (această problemă a fost propusă de aut
Mat, pe vremea când nu cunoştea lema lui *Serre*; de altfel, am reuşit să de
că ordinul oricărei matrici din $GL_n(\mathbb{Z})$ este mai mic decât $A^{\sqrt{n \ln n}}$, und
constantă pozitivă ce nu depinde de n, dar nu despre asta ne-am propus
aici). Tot din lema lui *Serre* mai putem deduce şi varianta simplă a te
Jordan-Zassenhaus, căci am obţinut că orice subgrup finit al lui $GL_n(\mathbb{Z})$ a
$(3^n-1)(3^n-3)\cdots(3^n-3^{n-1})$ elemente, deci, cu siguranţă, există un n
de clase de izomorfism în $GL_n(\mathbb{Z})$. Desigur, de aici şi până la demonstrare
lui *Jordan-Zassenhaus* (care afirmă finitudinea numărului claselor de co
subgrupurilor finite ale lui $GL_n(\mathbb{Z})$) mai e mult de muncă, şi, oricum, nu
asta aici; recomandăm excelentul articol [**7**].

2. Majorări pentru ordinele subgrupurilor finite ale lui $GL_n($
că ne apropiem de un punct sensibil al acestei note, anume de obţinerea un
bune pentru ordinul oricărui subgrup finit din $GL_n(\mathbb{Z})$; am obţinut deja
mare divizor comun al numerelor

$$(p^n-1)(p^n-p)\cdots(p^n-p^{n-1}), p > 2, \quad p \text{ prim}$$

este un astfel de majorant. *Minkowski* a demonstrat şi un rezultat asemănă
$p = 2$, anume că ordinul oricărui subgrup finit din $GL_n(\mathbb{Z})$ divide pe $2^{n^2}(2$
$2)\cdots(2^n-2^{n-1})$. Din păcate această majorare este oricum, dar nu uşo
departe de a fi cea mai bună. Vom încerca să dăm un rezultat mai "simplu"
că formula e mai simplă) care este, şi el, departe de valoarea optimală co

Teorema 2. *Orice subgrup din* $GL_n(\mathbb{Z})$ *are cel mult* $(2n)!$ *element* *ordinul oricărui subgrup din $GL_n(\mathbb{Z})$ divide pe* $(2n)!$.

Menţionăm că o majorare bună pentru ordinul maxim al subgrupurilor c
este, după câte ştim noi, o problemă deschisă şi foarte dificilă. Cititorul va
o minorare aproape evidentă: există subgrupuri cu $2^n \cdot n!$ elemente (gân
exemplu, la matricile ce au exact un 1 sau -1 pe fiecare linie şi pe fiecar
în rest zerouri!). Cel mai bun rezultat obţinut până în prezent pare să fie c
de forma $C^n \cdot (n!)^{1+\varepsilon}$, unde C este o constantă care depinde de ε, nu şi
aceasta necesită un efort considerabil, pe care nu-l vom face aici. Invităm
găsească mai multe detalii în [**5**], unde există chiar şi o menţiune referitoar
că $2^n \cdot n!$ este valoarea maximă a ordinului unui subgrup finit din GL_n
toţi $n \notin \{2, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$ (afirmaţie atribuită acolo lui *W. Feit*).

Să revenim acum la Teorema 2, a cărei origine nu o ştim - ştim doar că a
[**7**] fără menţiuni suplimentare şi fără... demonstraţie. Demonstraţia (ce
pe care am găsit-o noi) cere răbdare din partea cititorului, precum şi nişt
ajutătoare, pe care le vom numi tot teoreme, datorită frumuseţii şi utilită

Teorema 3. *Fie $G \subset GL_n(Z)$ un subgrup finit. Atunci, pentru ori
$|G|$ este un divizor al numărului*

$$\sum_{g \in G} (\mathrm{tr}(g))^k.$$

Demonstraţie. Înainte de toate, să spunem că nici măcar nu e nev
supunem că elementele matricilor sunt numere complexe; acestea pot fi di
comutativ oarecare a cărui caracteristică este număr prim cu $|G|$. Demon
întâi afirmaţia pentru $k = 1$. Să considerăm matricea

$$M = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g$$

pentru care, clar, avem

$$M^2 = \frac{1}{|G|^2} \sum_{g \in G} \sum_{h \in G} gh = M,$$

deoarece, pentru fiecare $g \in G$, avem (G fiind grup) $\{gh \mid h \in G\} = G$.
$M^2 = M$ implică faptul că toate valorile proprii ale matricii M sunt 0 s
$\mathrm{tr}(M)$ (care este urma matricii M, deci suma valorilor proprii) este un nu
or, folosind proprietăţile urmei, avem

$$\mathrm{tr}(M) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{tr}(g),$$

deci demonstraţia pentru $k = 1$ este încheiată (totodată am rezolvat şi c
mai veche de la concursul *Putnam*: dacă $\sum_{g \in G} \mathrm{tr}(g) = 0$, G fiind un grup finit
pătratice, atunci $\sum_{g \in G} g = 0$; într-adevăr, egalitatea $\sum_{g \in G} \mathrm{tr}(g) = 0$ implică
suma valorilor proprii ale matricii M - definită ca mai sus - este 0, deci to
proprii sunt 0; atunci M este idempotentă şi nilpotentă, deci este matrice

Acelaşi argument nu funcţionează însă pentru $k \geq 2$ (din păcate); şi
clipă de graţie în algebra liniară a permis introducerea noţiunii de *produ*
a două matrici. Astfel, dacă $A \in M_n(K)$ şi $B \in M_p(K)$, produsul lor ten
definit prin

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & \dots & a_{nn}B \end{pmatrix} \in M_{np}(K).$$

O proprietate fundamentală a produsului tensorial (uşor de verificat) este

$$(A \otimes B) \cdot (C \otimes D) = (AC) \otimes (BD), \quad \forall A, C \in M_n(K), \quad \forall B, D \in M$$

această egalitate ne permite să definim un subgrup $G' \subset GL_{n^2}(\mathbb{Z})$ prin G' $g \in G\}$ (relaţia de mai sus, precum şi faptul că $\det(A \otimes B) = (\det A)^p$ pentru A, B ca mai sus, folosesc ca să arătăm că G' este subgrup al lui Acest subgrup are, evident, tot $|G|$ elemente, deci îi putem aplica rezu demonstrat pentru a deduce că

$$|G| | \sum_{g \in G} \operatorname{tr}(g \otimes g) = \sum_{g \in G} (\operatorname{tr}(g))^2$$

(dacă mai folosim şi formula foarte simplă $\operatorname{tr}(A \otimes B) = \operatorname{tr}(A) \cdot \operatorname{tr}(B)$). înţeles acum modul în care va demonstra afirmaţia pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ spune doar că pentru $k = 3$ trebuie considerat $G'' = \{(g \otimes g) \otimes g \mid g \in G\}$

Acum putem începe să demonstrăm Teorema 2. Să notăm $x_1 > x_2$ elementele mulţimii $\{\operatorname{tr}(g) \mid g \in G\}$ şi să observăm că avem $q \geq 2$ şi $x_1 =$ evidente (dar interesante şi în sine) vom demonstra aceste proprietăţi. rând, am văzut că, dacă $A \in G$, atunci $A^{|G|} = I_n$, deci valorile propri sunt rădăcini ale unităţii, în particular ele au modulul 1. E clar atunc $|\operatorname{tr}(A)| \leq n$, pentru orice $A \in G$; cum $I_n \in G$, se cheamă că $x_1 = n$. D observăm, dacă $A \in G - \{I_n\}$ (şi existenţa unei asemenea matrici e as presupunerea făcută încă de la început), nu putem avea $\operatorname{tr}(A) = n$, căci a valorile proprii ale matricii A ar fi egale cu 1, ceea ce este imposibil (cit uitat argumentul final din demonstraţia teoremei 1); deci $q \geq 2$. În plus, d cu $a_1, a_2, \dots, a_q$ numărul apariţiilor numerelor $x_1, x_2, \dots, x_q$ respectiv în urmelor matricilor din G, teorema 3 afirmă că

$$|G| | a_1 x_1^k + a_2 x_2^k + \dots + a_q x_q^k, \quad \forall k \geq 1.$$

Desigur, mai avem şi $|G| = a_1 + a_2 + \dots + a_q$, precum şi $a_1 = 1$ (est să fi înţeles argumentele din acest paragraf pentru a ne convinge şi de a precum şi de faptul că, dacă $x_q = -n$, atunci şi $a_q = 1$; toate aceste obser dovedi esenţiale în studiul subgrupurilor finite ale lui $GL_2(\mathbb{Z})$). Iar avem un rezultat ajutător.

Teorema 4. *Fie $a_1, a_2, \dots, a_q, x_1, x_2, \dots, x_q$ şi m numere întregi ast*

$$m \mid a_1 x_1^k + a_2 x_2^k + \dots + a_q x_q^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Atunci avem şi

$$m \mid a_1(x_1 - x_2) \cdots (x_1 - x_q).$$

Demonstraţie. Să considerăm seria formală

$$f(z) = \frac{a_1}{1 - x_1 z} + \frac{a_2}{1 - x_2 z} + \dots + \frac{a_q}{1 - x_q z}$$

şi să observăm că

$$f(z) = \sum_{i=1}^{q} a_i + \left(\sum_{i=1}^{q} a_i x_i\right) z + \left(\sum_{i=1}^{q} a_i x_i^2\right) z^2 + \cdots,$$

deci, folosind ipoteza, rezultă existenţa unor numere întregi $b_0, b_1, b_2, \ldots$ a
$f(z) = m \cdot \sum\limits_{j \geq 0} b_j z^j$. Pe de altă parte, putem scrie şi

$$f(z) = \frac{\sum a_1(1 - x_2 z) \cdots (1 - x_q z)}{(1 - x_1 z)(1 - x_2 z) \cdots (1 - x_q z)}.$$

Asta ne arată că seria formală (de fapt, polinomul) de la numărător poat
forma

$$\sum a_1(1 - x_2 z) \cdots (1 - x_q z) = m(1 - x_1 z)(1 - x_2 z) \cdots (1 - x_q z) \sum_{j \geq 0}$$

deci are toţi coeficienţii divizibili cu m, de unde obţinem că $m \mid \sum\limits_{i=1}^{q} a_i S_t^{(i)}$
este a t-a sumă simetrică fundamentală în $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_q$, ceea
şi

$$m | x_1^{q-1} \sum_{i=1}^{q} a_i - x_1^{q-2} \sum_{i=1}^{q} a_i S_1^{(i)} + \cdots + (-1)^{q-1} \sum_{i=1}^{q} a_i S_{q-1}^{(i)}$$

sau

$$m | \sum_{i=1}^{q} a_i (x_1^{q-1} - x_1^{q-2} S_1^{(i)} + \cdots + (-1)^{q-1} S_{q-1}^{(i)}).$$

Cum, pentru $i > 1$, avem $(x_1 - x_1) \cdots (x_1 - x_{i-1})(x_1 - x_{i+1}) \cdots (x_1 - x_q)$

$$x_1^{q-1} - x_1^{q-2} S_1^{(i)} + \cdots + (-1)^{q-1} S_{q-1}^{(i)} = 0,$$

ne rămâne doar că

$$m \mid a_1(x_1^{q-1} - x_1^{q-2} S_1^{(1)} + \cdots + (-1)^{q-1} S_{q-1}^{(1)}) = a_1(x_1 - x_2) \cdots (x_1 -$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Iar asta încheie şi demonstraţia teoremei 2: din teoremele 3 şi 4 şi faptul
rezultă că $|G|$ divide $(x_1 - x_2) \cdots (x_1 - x_q)$, care este produsul a $q-1$ nume
diferite şi cel mult egale cu $2n$ (deoarece urma oricărei matrici din G este
întreg cuprins între $-n$ şi n), deci divide şi pe $(2n)!$.

Bibliografie

1. **G. P. Dresden** - *There are only nine finite groups of fractional linear with integer coefficients*, Mathematics Magazine, June 2004, 211-218.
2. **R. A. Horn, Ch. R. Johnson** - *Analiză matricială*, Fundaţia Theta, 2001.
3. **J. Kuzmanovich, A. Pavlichenkov** - *Finite groups of matrices whose integers*, American Mathematical Monthly, February 2002.
4. **T. J. Laffey** - *Lectures in integer matrices.*
5. **D. N. Rockmore, Ki-Seng Tan** - *A note on the order of finite su $GL_n(\mathbb{Z})$*, Commutative Algebra, 2/1999.
6. **Ken-Ichi Tahara** - *On the finite subgroups of $GL_3(\mathbb{Z})$*, Nagoya Math. J
7. **Nicolas Tossel** - *Reseaux et théorèmes de finitude*, Revue des mathèma ciales, 1-2/2005.

Ceviene şi triunghiuri triomologice

Temistocle BÎRSAN[1]

Cu ocazia aniversării a 110 ani
neîntreruptă a Gazetei Matema

În această Notă, pornind de la un triunghi oarecare, punem în evidenţă raţie de triunghiuri triomologice cu acelaşi centru de greutate ca şi triungh

Două triunghiuri, $\triangle ABC$ şi $\triangle XYZ$, se numesc *omologice* dacă dreptele CZ sunt concurente; punctul de concurenţă se numeşte *centru de omol* unghiurilor. Triunghiurile date sunt *triomologice* dacă admit trei centre de

1. Fie ABC un triunghi oarecare şi numerele $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ cu $\alpha\beta\gamma$

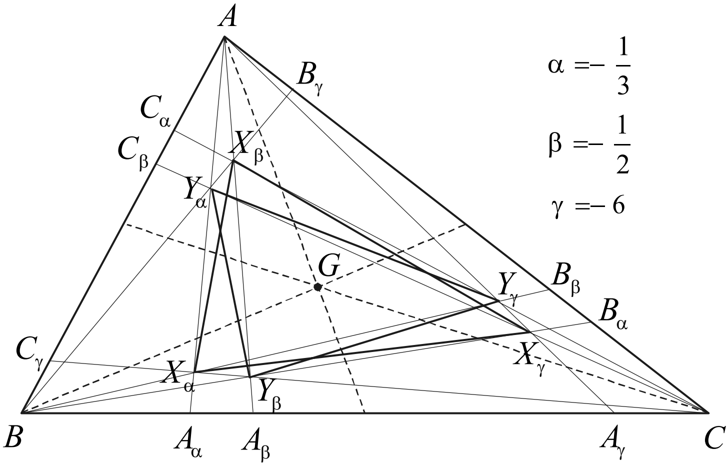
dreapta BC considerăm punctele A_α, A_β, A_γ determinate de rapoartele $\dfrac{\overline{A_\beta B}}{\overline{A_\beta C}} = \beta$ şi respectiv $\dfrac{\overline{A_\gamma B}}{\overline{A_\gamma C}} = \gamma$ (utilizăm segmentele orientate pentru c A_γ, A_β şi A_γ să poată fi situate în orice poziţie pe BC, exceptând vârfur ale $\triangle ABC$). Punctele $B_\alpha, B_\beta, B_\gamma \in CA$ şi $C_\alpha, C_\beta, C_\gamma \in AB$ se determi similar. Condiţia $\alpha\beta\gamma = -1$ asigură existenţa punctelor X_α, Y_α etc. defin

$$\{X_\alpha\} = AA_\alpha \cap BB_\beta \cap CC_\gamma, \qquad \{X_\beta\} = AA_\beta \cap BB_\gamma \cap CC_\alpha,$$
$$\{X_\gamma\} = AA_\gamma \cap BB_\alpha \cap CC_\beta, \qquad \{Y_\alpha\} = AA_\alpha \cap CC_\beta \cap BB_\gamma,$$
$$\{Y_\beta\} = AA_\beta \cap CC_\gamma \cap BB_\alpha, \qquad \{Y_\gamma\} = AA_\gamma \cap CC_\alpha \cap BB_\beta.$$

Atât pe figură cât şi schematic din

$$\begin{array}{c|ccc} & A & B & C \\ \hline X_\alpha & (\alpha & \beta & \gamma) \\ X_\beta & (\beta & \gamma & \alpha) \\ X_\gamma & (\gamma & \alpha & \beta) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|c} A & B & C & \\ \hline (\alpha & \gamma & \beta) & Y_\alpha \\ (\beta & \alpha & \gamma) & Y_\beta \\ (\gamma & \beta & \alpha) & Y_\gamma \end{array}$$

se poate urmări formarea acestor puncte şi a triunghiurilor $X_\alpha X_\beta X_\gamma$ şi Y



[1] Prof. dr., Catedra de matematică, Univ. Tehnică "Gh. Asachi", Iaşi

Se observă că $\triangle ABC$ şi $\triangle X_\alpha X_\beta X_\gamma$ sunt invers orientate, pe când
$\triangle Y_\alpha Y_\beta Y_\gamma$ sunt la fel orientate.

Propoziţia 1. *Triunghiurile $X_\alpha X_\beta X_\gamma$ şi $Y_\alpha Y_\beta Y_\gamma$ sunt triomologice,*
de omologie fiind vârfurile triunghiului ABC.

Demonstraţie. Vom arăta următoarele:

(i) $\triangle X_\alpha X_\beta X_\gamma$ şi $\triangle Y_\alpha Y_\beta Y_\gamma$ sunt omologice cu centrul A;

(ii) $\triangle X_\alpha X_\beta X_\gamma$ şi $\triangle Y_\beta Y_\gamma Y_\alpha$ sunt omologice cu centrul C;

(iii) $\triangle X_\alpha X_\beta X_\gamma$ şi $\triangle Y_\gamma Y_\alpha Y_\beta$ sunt omologice cu centrul B.

Aceste trei afirmaţii decurg din (1). Astfel, afirmaţia (1) revine la
dreptele $X_\alpha Y_\alpha$, $X_\beta Y_\beta$ şi $X_\gamma Y_\gamma$ sunt concurente în A. Cum din prima
egalitate din (1) rezultă că $X_\alpha, Y_\alpha \in AA_\alpha$, vom avea că $A \in X_\alpha Y_\alpha$. La f
relaţiile $A \in X_\beta Y_\beta$ şi $A \in X_\gamma Y_\gamma$. Aşadar (i) este adevărată. Pe acee
dovedesc (ii) şi (iii). Q.e.d.

Observaţie. În consecinţă, configuraţia conţine şi perechile de triur
omologice: $\triangle ABC$ şi $\triangle X_\alpha X_\beta X_\gamma$, $\triangle ABC$ şi $\triangle Y_\alpha Y_\beta Y_\gamma$; pentru prima per

$$\triangle ABC, \quad \triangle X_\alpha X_\beta X_\gamma; \quad Y_\alpha,$$
$$\triangle ABC, \quad \triangle X_\beta X_\gamma X_\alpha; \quad Y_\beta,$$
$$\triangle ABC, \quad \triangle X_\gamma X_\alpha X_\beta; \quad Y_\gamma,$$

iar pentru a doua avem:

$$\triangle ABC, \quad \triangle Y_\alpha Y_\gamma Y_\beta; \quad X_\alpha,$$
$$\triangle ABC, \quad \triangle Y_\beta Y_\alpha Y_\gamma; \quad X_\beta,$$
$$\triangle ABC, \quad \triangle Y_\gamma Y_\beta Y_\alpha; \quad X_\gamma,$$

(pe un rând sunt scrise două triunghiuri, pe baza schemei (2), şi cent
omologie).

2. În această secţiune vom stabili o altă proprietate a configuraţiei: c
unghiuri au acelaşi centru de greutate. Pentru aceasta, vom utiliza metoda
Avem nevoie de următoarea

Lemă. *Fie ABC un triunghi oarecare şi punctele $A' \in BC$, $B' \in$*
$\lambda = \dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$, $\mu = \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}$ *şi $\lambda\mu - \lambda + 1 \neq 1$, atunci cevienele AA' şi BB' au u*
intersecţie X şi avem

$$\overrightarrow{r}_X = \frac{1}{\lambda\mu - \lambda + 1}\left(\lambda\mu\overrightarrow{r}_A + \overrightarrow{r}_B - \lambda\overrightarrow{r}_C\right).$$

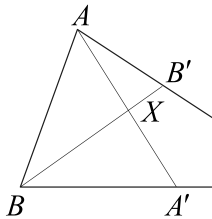
($\overrightarrow{r}_X$ notează vectorul de poziţie al punctului X faţă de o origine arbitrar

Demonstraţie. Cu teorema lui Thales se arată uşor că $\lambda\mu - \lambda +$
$AA' \parallel BB'$.

Din $\lambda = \dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$ şi $\mu = \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}$ urmează că

$$\overrightarrow{r}_{A'} = \frac{1}{1-\lambda}\overrightarrow{r}_B - \frac{\lambda}{1-\lambda}\overrightarrow{r}_C,$$

$$\overrightarrow{r}_{B'} = \frac{1}{1-\mu}\overrightarrow{r}_C - \frac{\mu}{1-\mu}\overrightarrow{r}_A.$$



Ţinând cont de aceste relaţii, ecuaţiile vectoriale ale cevienelor: $(AA')\ \overrightarrow{r}$ $u\,(\overrightarrow{r}_{A'} - \overrightarrow{r}_A)$, $(BB')\ \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}_B + v\,(\overrightarrow{r}_{B'} - \overrightarrow{r}_B)$ se scriu sub forma

$$(AA') \qquad \overrightarrow{r} = (1-u)\,\overrightarrow{r}_A + \frac{u}{1-\lambda}\overrightarrow{r}_B - \frac{\lambda u}{1-\lambda}\overrightarrow{r}_C,$$

$$(BB') \qquad \overrightarrow{r} = (1-v)\,\overrightarrow{r}_B + \frac{v}{1-\mu}\overrightarrow{r}_C - \frac{\mu v}{1-\mu}\overrightarrow{r}_A.$$

Vectorul $\overrightarrow{r}_X$ asociat punctului X de intersecţie se obţine din (4) sau (5 sau v luat dintr-o soluţie (u, v) a sistemului liniar de ecuaţii

$$1 - u = -\frac{\mu v}{1-\mu}, \quad \frac{u}{1-\lambda} = 1 - v, \quad -\frac{\lambda u}{1-\lambda} = \frac{v}{1-\mu}.$$

Găsim, cu uşurinţă, ca soluţie a sistemului (6) perechea (u, v) cu

$$u = \frac{1-\lambda}{\lambda\mu - \lambda + 1}, \quad v = \frac{\lambda\mu - \lambda}{\lambda\mu - \lambda + 1}.$$

După înlocuirea lui u sau v din (7) în (4) sau (5), obţinem pentru $\overrightarrow{r}_X$ rep (3), q.e.d.

Propoziţia 2. *Triunghiurile ABC, $X_\alpha X_\beta X_\gamma$ şi $Y_\alpha Y_\beta Y_\gamma$ au acelaş greutate.*

Demonstraţie. Vom arăta că $\triangle X_\alpha X_\beta X_\gamma$ şi $\triangle ABC$ au acelaşi centru (la fel se procedează cu perechea formată din $\triangle Y_\alpha Y_\beta Y_\gamma$ şi $\triangle ABC$). Este stabilim că

$$\overrightarrow{r}_{X_\alpha} + \overrightarrow{r}_{X_\beta} + \overrightarrow{r}_{X_\gamma} = \overrightarrow{r}_A + \overrightarrow{r}_B + \overrightarrow{r}_C.$$

Într-adevăr, utilizând Lema relativ la $\triangle ABC$ şi cevienele AA_α şi BB_β, o

$$\overrightarrow{r}_{X_\alpha} = \frac{1}{\alpha\beta - \alpha + 1}\,(\alpha\beta\overrightarrow{r}_A + \overrightarrow{r}_B - \alpha\overrightarrow{r}_C)\,;$$

similar obţinem şi relaţiile:

$$\overrightarrow{r}_{X_\beta} = \frac{1}{\alpha\beta - \alpha + 1}\,(\overrightarrow{r}_A - \alpha\overrightarrow{r}_B + \alpha\beta\overrightarrow{r}_C) \qquad (\triangle CAB \text{ şi } CC_\alpha,\ AA_\beta$$

$$\overrightarrow{r}_{X_\gamma} = \frac{1}{\alpha\beta - \alpha + 1}\,(-\alpha\overrightarrow{r}_A + \alpha\beta\overrightarrow{r}_B + \overrightarrow{r}_C) \qquad (\triangle BCA \text{ şi } BB_\alpha,\ CC$$

Ţinând seama de (9), (10) şi (11), avem

$$\begin{aligned}\overrightarrow{r}_{X_\alpha} + \overrightarrow{r}_{X_\beta} + \overrightarrow{r}_{X_\gamma} &= \frac{1}{\alpha\beta - \alpha + 1}\big[\,(\alpha\beta + 1 - \alpha)\,\overrightarrow{r}_A \\ &\qquad + (1 - \alpha + \alpha\beta)\,\overrightarrow{r}_B + (-\alpha + \alpha\beta + 1)\,\overrightarrow{r} \\ &= \overrightarrow{r}_A + \overrightarrow{r}_B + \overrightarrow{r}_C.\end{aligned}$$

adică are loc (8), q.e.d.

3. Să presupunem că triunghiul ABC este echilateral. Se constată uş elementară şi ca o consecinţă a relaţiilor (1), că triunghiurile $X_\alpha X_\beta X_\gamma$ sunt, la rândul lor, echilaterale. Conform Propoziţiei 2, aceste triunghiur centru ca şi triunghiul ABC. Este evidentă, în acest caz particular, înruc rezultat remarcabil, *teorema lui Barbilian*: *două triunghiuri echilaterale centru sunt triomologice.*

Construcţii aproximative cu rigla şi compasu
numărului π

Alexandru MOSCALIUC[1]

Notaţia $\boldsymbol{\pi}$ pentru raportul dintre lungimea unui cerc şi diametrul său s-a
în matematică datorită lui **L. Euler**, care a utilizat-o în tratatul său *Int*
analysis infinitorum (1748). Valori aproximative ale lui π au fost utiliza
antichitatea timpurie de multe popoare. Amintim doar că **Arhimede**,
Asupra măsurării cercului, a găsit că $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ prin aşa-numita acun
perimetrelor (cea cu poligoanele regulate înscrise şi circumscrise).

În strânsă legătură cu identitatea numărului π este problema *cuadratu*
– construcţia cu rigla şi compasul a unui pătrat de arie egală cu aria unu
problema revine la *rectificarea cercului* – construcţia cu aceleaşi instrume
segment de lungime egală cu lungimea unui cerc dat – ce se reduce la
construcţia cu rigla şi compasul a unui segment de lungime π.

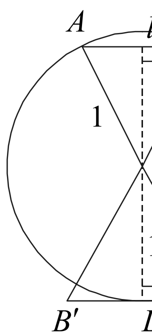
Această problemă celebră formulată de grecii antici şi-a găsit rezolva
1882, când **F. Lindemann** a dovedit că π este transcendent (adică n
algebric). Graţie acestui rezultat şi faptului că numerele ce se pot construi
compasul formează o parte a mulţimii numerelor algebrice, rezultă că este
cuadratura cercului.

Putem aproxima, însă, numărul π cu numere constructibile cu rigla şi
Scopul acestei lucrări este de a da o astfel de aproximare a lui π şi câtev
ilustrative, într-o prezentare accesibilă elevilor de cl. a IX-a.

Propoziţie. *Are loc următoarea inegalitate:*

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}-0,01 < \pi < \sqrt{2}+\sqrt{3},$$

i.e. $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ *aproximează numărul* π *prin adaos cu o eroare mai mică d*



Soluţie. Fie l, L lungimile laturilor poligoanelor regulate cu n laturi înscris şi respectiv circumscris unui cerc de rază egală cu 1. Între perimetrele acestor poligoane şi lungimea cercului avem relaţia

$$nl < 2\pi < nL. \qquad (2)$$

Deoarece $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{A'OB'}) = \dfrac{360^\circ}{n}$ şi $l = 2\sin\dfrac{180^\circ}{n}$, $L = 2\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}$, relaţia (2) se scrie

$$n\sin\frac{180^\circ}{n} < \pi < n\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}. \qquad (3)$$

Luând în (3) $n = 60$, obţinem

$$60\sin 3^\circ < \pi < 60\operatorname{tg} 3^\circ.$$

Ţinând seama că $3^\circ = 18^\circ - 15^\circ$, vom avea

$$\sin 3^\circ = \sin 18^\circ\cos 15^\circ - \sin 15^\circ\cos 18^\circ \quad \text{şi} \quad \operatorname{tg} 3^\circ = \frac{\operatorname{tg} 18^\circ - \operatorname{tg} 1}{1+\operatorname{tg} 18^\circ\operatorname{tg} 1}$$

[1] Profesor, Şcoala generală nr. 6, Botoşani

Cum

$$\sin 18^\circ = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5}-1\right), \quad \cos 18^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}, \quad \operatorname{tg} 18^\circ = \sqrt{1-\frac{2}{5} \ldots}$$

$$\sin 15^\circ = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right), \quad \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \quad \operatorname{tg} 15^\circ = 2-\sqrt{\ldots}$$

inegalităţile (4) se scriu:

$$\frac{60}{16}\left[\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)-\sqrt{10+2\sqrt{5}}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\right] < \pi < 60\frac{\sqrt{1-\frac{2}{5}\sqrt{5}} - \ldots}{1+\sqrt{1-\frac{2}{5}\sqrt{5}} \ldots}$$

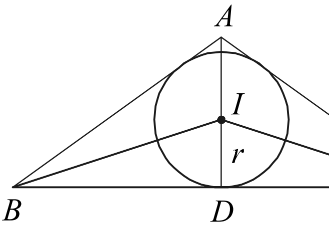
Printr-un calcul de rutină anevoios şi neplăcut se verifică faptul că mem
din (6) este mai mare ca $\sqrt{2}+\sqrt{3}-0,01$, pe când cel drept este mai mic c
În concluzie, inegalităţile (1) sunt adevărate.

Observaţie. Construcţia cu rigla şi compasul a unui segment de lungim
(în prezenţa unui segment unitate) este elementară. Ca urmare, Propozi
modalitate de a construi aproximativ numărul π cu rigla şi compasul.

În aplicaţiile următoare ale Propoziţiei se face *cuadratura/rectificarea u*
rigla şi compasul **în mod aproximativ**, adică se construieşte cu aceste in
un pătrat/segment având aria/lungimea aproximativ aria/lungimea cercu

Aplicaţia 1. *Fie ABC un triunghi isoscel cu $AB = AC = \sqrt{3}$,* ...
şi $\mathcal{C}(I,r)$ cercul înscris acestuia. Atunci lungimea cercului $\mathcal{C}(I,r)$ este a
egală cu BC, iar aria lui este aproximativ egală cu aria $\triangle BIC$; în amb
eroarea aproximării fiind mai mică ca $0,01$.

Soluţie. Avem: $AD^2 = AB^2 - BD^2 = 1$, deci $AD = 1$ şi



$$r = \frac{S}{p} = \frac{AD \cdot BC}{AB+BC+AC} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}.$$

Ţinând cont de faptul că $\pi \simeq \sqrt{2}+\sqrt{3}$, pentru cercul $\mathcal{C}(I,r)$ obţinem:

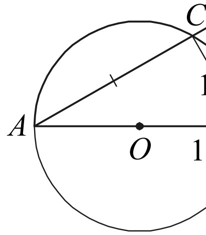
$$\mathcal{L} = 2\pi r \simeq 2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = 2\sqrt{2}, \quad \text{adică} \quad \mathcal{L} \simeq BC;$$

$$\mathcal{A} = \pi r^2 \simeq \left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}, \quad \text{adică} \quad \mathcal{A} \simeq \mathcal{A} \ldots$$

(într-adevăr, $\mathcal{A}_{BIC} = \frac{1}{2}BC \cdot ID = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$).

Să dovedim că, în formulele găsite, $\mathcal{L}$ şi $\mathcal{A}$ sunt aproximate cu o eroar
decât $0,01$. Într-adevăr, înmulţind inegalitatea $\sqrt{2}+\sqrt{3}-\pi < 0,01$
conform Propoziţiei!) cu $2r$, obţinem $2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right) - \mathcal{L} < 0,$
$BC - \mathcal{L} < 0,01 \cdot 2r$. Cum $2r = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} < 1$, urmează că $BC - \mathcal{L} < 0,$
dar înmulţind aceeaşi inegalitate cu r^2, obţinem $\mathcal{A}_{BIC} - \mathcal{A} < 0,01$.

Aplicaţia 2. *Fie cercul $\mathcal{C}(O,1)$ şi punctele A, B, C şi D ca în figura de mai jos: $BC = 1$, $BD = AC$. Arătaţi că lungimea semicercului $\overset{\frown}{AB}$ (aria semicercului) este aproximativ egală cu lungimea segmentului $[AD]$ (respectiv aria triunghiului ABD), eroarea fiind mai mică decât $0,01$.*

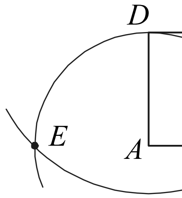


Soluţie. Deoarece $AB = 2$ şi $BC = 1$, rezultă că $AC = \sqrt{3}$; la fel, din $BC = 1$ şi $BD = AC = \sqrt{3}$, deducem că $CD = \sqrt{2}$. Atunci, $AD = AC + CD = \sqrt{2} + \sqrt{3} \simeq \pi$ şi $\mathcal{A}_{ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot BC = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right) \simeq \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\left(\pi \cdot 1^2\right)$ etc

Aplicaţia 3. *Dat un pătrat de latură 1, construiţi numai cu compa de lungime aproximativ egală cu perimetrul pătratului.*

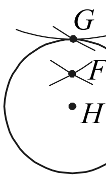
Soluţie. Mai întâi, să observăm că un cerc de lungime egală cu perime tului dat are raza $\frac{2}{\pi}$. Dar, ţinând cont de Propoziţie, $\frac{2}{\pi} \simeq \frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = 2\,($
Aşadar, urmează să construim cu compasul un cerc de rază $2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$.

Etapele unei posibile construcţii sunt:



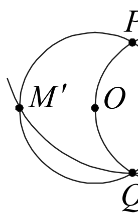
1. Construim simetricul E al punctului B faţă de A: $\{E\} = \mathcal{C}(A,1) \cap \mathcal{C}(D,DB)$.

2. Construim punctul F astfel încât $\triangle BEF$ să fie echilateral, iar F şi D să fie de o parte şi de alta a dreptei BE: $\{F\} = \mathcal{C}(B,BE) \cap \mathcal{C}(E,EB)$; evident, A, D, F sunt coliniare şi $AF = \sqrt{3}$ (înălţime în $\triangle BEF$ de latură 2).



3. Construim punctul G de partea dreptei BE în care se află F prin $\{G\} = \mathcal{C}(A,AC) \cap \mathcal{C}(B,AF)$. Deoarece $AB = 1$, $AG = \sqrt{2}$ şi $BG = \sqrt{3}$, rezultă că $\triangle AGB$ este dreptunghic în A şi, ca urmare, punctele A, F, G sunt coliniare, iar $FG = AF - AG = \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

4. Construm simetricul H al lui G faţă de F (construcţia, numai cu compasul, a simetricului M' al punctului M faţă de un punct O poate fi urmărită pe figura alăturată); evident $GH = 2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$.



5. Construim $\mathcal{C}(H,HG)$, care va fi cercul căutat: lungimea lui este $4\pi\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) \simeq 4\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) = 4$, cu o eroare de

$$4\pi\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) - 4 = 4\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left[\pi - \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\right] < 4\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$$

conform cu (1). Cum $\sqrt{3}-\sqrt{2} < \frac{1}{2}$, vom avea

$$4\pi\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) - 4 < 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,01 = 0,02\ ,$$

adică eroarea cu care lungimea cercului construit este aproximată de peri tratului este mai mică decât $0,02$.

Inegalităţi generatoare de noi inegalităţi

I. V. MAFTEI[1]

Pornind de la anumite inegalităţi cunoscute ne propunem să obţinem
lităţi.

Propoziţia 1. *Să se demonstreze că*

$$x_1 x_2 \cdots x_k \left(x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \cdots + x_k^{n-1}\right) \leq x_1^{n+k-1} + x_2^{n+k-1} + \cdots + x_k^{n-}$$

$$\forall x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall n, k \in \mathbb{N}, \quad n, k \geq 2.$$

Demonstraţie. Utilizând relaţia dintre mediile aritmetică şi geometric
numerelor $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}_+^*$, $n, k \in \mathbb{N}$, $n, k \geq 2$, obţinem succesiv:

$$\sqrt[n+k-1]{a_1^n a_2 \cdots a_k} \leq \frac{na_1 + a_2 + \cdots + a_k}{n+k-1},$$

$$\sqrt[n+k-1]{a_1 a_2^n \cdots a_k} \leq \frac{a_1 + na_2 + \cdots + a_k}{n+k-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sqrt[n+k-1]{a_1 a_2 \cdots a_k^n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + na_k}{n+k-1}.$$

Sumând inegalităţile (2), rezultă că

$$\sqrt[n+k-1]{a_1^n a_2 \cdots a_k} + \sqrt[n+k-1]{a_1 a_2^n \cdots a_k} + \cdots + \sqrt[n+k-1]{a_1 a_2 \cdots a_k^n} \leq a_1 + a_2$$

Dacă notăm $\sqrt[n+k-1]{a_i} = x_i$, $i = \overline{1, k}$, obţinem

$$x_1^n x_2 \cdots x_k + x_1 x_2^n \cdots x_k + \cdots + x_1 x_2 \cdots x_k^n \leq x_1^{n+k-1} + x_2^{n+k-1} + \cdots +$$

care este tocmai inegalitatea (1).

Pentru $k = 2$ şi $n = 2h$, $h \in \mathbb{N}^*$, inegalitatea (1) devine

$$x_1^{2h+1} + x_2^{2h+1} \geq x_1 x_2 \left(x_1^{2h-1} + x_2^{2h-1}\right).$$

Propoziţia 2. *Fie* $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ *şi* $k \in \mathbb{N}$. *Atunci, are loc inegalitatea*

$$\frac{(ab)^{k-1}}{a^{2k+1} + b^{2k+1} + (ab)^{k-1}} + \frac{(bc)^{k-1}}{b^{2k+1} + c^{2k+1} + (bc)^{k-1}} + \frac{(ac)^{k-1}}{a^{2k+1} + c^{2k+1} +}$$

$$\leq \frac{1}{ab(a+b)+1} + \frac{1}{bc(b+c)+1} + \frac{1}{ac(a+c)+1}$$

Demonstraţie. Aplicând inegalitatea (3) de k ori, obţinem

$$x_1^{2k+1} + x_2^{2k+1} \geq (x_1 x_2)^k (x_1 + x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Ţinând seama de (5), putem scrie

$$a^{2k+1} + b^{2k+1} \geq (ab)^k (a+b),$$

de unde

$$a^{2k+1} + b^{2k+1} + (ab)^{k-1} \geq (ab)^{k-1} [ab(a+b) + 1]$$

[1] Profesor, Colegiul Naţional "Sf. Sava", Bucureşti

sau

$$\frac{(ab)^{k-1}}{a^{2k+1}+b^{2k+1}+(ab)^{k-1}} \leq \frac{1}{ab\,(a+b)+1}.$$

Sumând această inegalitate cu analoagele ei, obţinem (4).

Observaţie. Dacă în (4) luăm $k = 2$ şi considerăm $abc = 1$, suntem inegalitatea

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca} \leq 1,$$

care a fost discutată la O. I. M. din anul 1996, India.

Propoziţia 3. *Fie numerele $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$. Să se demonstreze că*

$$\frac{a^{2n+1}}{b^n}+\frac{b^{2n+1}}{c^n}+\frac{c^{2n+1}}{a^n} \geq a^n b+b^n c+c^n a, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstraţie. Înmulţind inegalitatea (6), considerată pentru $k =$ iar analoagele ei cu $b^n a^n$ şi respectiv $b^n c^n$, vom obţine relaţiile

$$\begin{aligned}
a^{3n+1}c^n+b^{2n+1}a^n c^n &\geq a^{2n+1}b^n c^n+a^{2n}b^{n+1}c^n,\\
b^{3n+1}a^n+c^{2n+1}b^n c^n &\geq b^{2n+1}a^n c^n+b^{2n}c^{n+1}a^n,\\
c^{3n+1}b^n+a^{2n+1}c^n b^n &\geq c^{2n+1}b^n a^n+c^{2n}a^{n+1}b^n,
\end{aligned}$$

din care, prin adunare, deducem că

$$a^{3n+1}c^n+b^{3n+1}a^n+c^{3n+1}b^n \geq a^n b^n c^n\,(a^n b+b^n c+c^n a)\,,$$

adică (8).

Procedând ca în Propoziţia 3 se obţine

Propoziţia 4. *Pentru $\forall n \in \mathbb{N}$ şi $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ avem*

$$a\frac{b^{2n+2}}{c^n}+b\frac{c^{2n+2}}{a^n}+c\frac{a^{2n+2}}{b^n} \geq ab^{n+2}+bc^{n+2}+ca^{n+2}.$$

Propoziţia 5. Să se arate că $\forall n \in \mathbb{N}^*$ avem:

$$a)\quad 1^{2k+1}+2^{2k+1}+\cdots+n^{2k+1} \geq \frac{n\,(n+1)}{2}\sqrt[n]{(n!)^{2k}},$$

$$b)\quad 1^{2n+1}+2^{2n+1}+\cdots+n^{2n+1} \geq \frac{n\,(n+1)}{2}\,(n!)^2\,.$$

Demonstraţie. Pentru $n = 1$ avem egalitate. Considerăm $n \geq 2$ şi î inegalitatea (6) succesiv $a = 1$ şi $b = n$, $a = 2$ şi $b = n-1$, $\ldots$, $a =$ Sumând inegalităţile rezultate, vom obţine

$$2\left(1^{2k+1}+2^{2k+1}+\cdots+n^{2k+1}\right) \geq (n+1)\left[1^k n^k+2^k\,(n-1)^k+\cdots+\right.$$

Cum paranteza pătrată este $\geq n\sqrt[n]{\left(1^k \cdot 2^k \cdot \ \cdots \ \cdot n^k\right)^2} = n\sqrt[n]{(n!)^{2k}}$, avem

$$2\left(1^{2k+1}+2^{2k+1}+\cdots+n^{2k+1}\right) \geq n\,(n+1)\sqrt[n]{(n!)^{2k}},$$

adică (10). Luând în (10) $k = n$, obţinem inegalitatea (11).

Asupra unei probleme dată la ONM, Bistriţa

Claudiu-Ştefan POPA[1]

Cele ce urmează au ca punct de plecare o problemă dată la ONM, Bis
[**1**] aparţinând autorului acestei note şi pe care o vom nota în continuare

(P) *Fie $ABCD$ un trapez cu bazele AB şi CD, având diagonalele perp în O. Pe semidreptele $(OA$ şi $(OB$ se consideră punctele M şi respect încât unghiurile $\widehat{ANC}$ şi $\widehat{BMD}$ să fie drepte. Notăm cu E mijlocul s MN. Să se arate că:*

a) triunghiurile OMN şi OBA sunt asemenea;

b) dreapta OE este perpendiculară pe dreapta AB.

Rezolvarea acestei probleme poate fi găsită de asemenea în [**1**].

Considerăm configuraţia geometrică pusă în valoare de (P) îndeajuns de pentru a prezenta alte câteva rezultate legate de ea. Dăm întâi o cara trapezului ortodiagonal, interesantă şi în sine.

Propoziţia 1. *Fie $ABCD$ un patrulater convex şi $AB \parallel CD$. Dacă este intersecţia diagonalelor sale, patrulaterul este ortodiagonal dacă şi n $AB \cdot CD = AO \cdot CO + BO \cdot DO$.*

Demonstraţie. $AB \parallel CD \Rightarrow \triangle AOB \sim \triangle COD \Rightarrow$

$$\frac{AO}{CO} = \frac{BO}{DO} = \frac{AB}{CD} = \frac{AO \cdot CO}{CO^2} = \frac{BO \cdot DO}{DO^2} = \frac{AB \cdot CD}{CD^2} = \frac{AO \cdot CO + }{CO^2 + }$$

Acum $AO \cdot CO + BO \cdot DO = AB \cdot CD \Leftrightarrow CD^2 = CO^2 + DO^2 \Leftrightarrow AC \perp$

Adăugăm la ipoteza problemei (P): punctele K, L sunt mijloacele ba respectiv $[CD]$ iar punctul D' este simetricul punctului D faţă de punc aceste condiţii, pentru cele ce urmează presupunem cunoscute următoarele K, O şi L sunt coliniare, $\mathcal{A}_{AOD} = \mathcal{A}_{BOC}$, $\mathcal{A}^2_{AOD} = \mathcal{A}_{AOB}\mathcal{A}_{COD}$ ([**2**], p

Propoziţia 2. *În ipoteza problemei (P), au loc următoarele:*

i) $MN = \sqrt{AB \cdot CD}$ şi $MN < KL$;

ii) $MN \perp KL$;

iii) $\mathcal{A}_{OMN} = \sqrt{\mathcal{A}_{AOB} \cdot \mathcal{A}_{COD}}$;

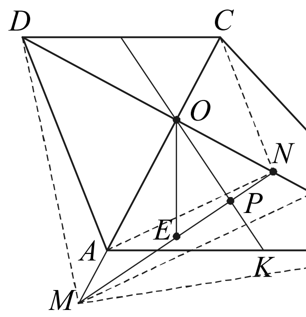
iv) $AN \parallel MD'$;

Demonstraţie. *i)* $\triangle ANC$ şi $\triangle BMD$ sunt dreptunghice în N, resp $NO \perp AC$, $MO \perp BD$. Aplicând teorema înălţimii obţinem $NO^2 =$ $MO^2 = BO \cdot DO$. Cum $m(\widehat{MON}) = 90°$, avem $MO^2 + NO^2 = MN^2$ $MN = \sqrt{AB \cdot CD}$. Deoarece $KL = KO + LO = \dfrac{AB}{2} + \dfrac{CD}{2} =$ $\sqrt{AB \cdot CD} < \dfrac{AB + CD}{2}$ ($ABCD$ trapez, deci $AB \neq CD$), rezultă că M

ii) Fie $R \in (OL$ astfel încât $L \in (OR)$ şi $(OL) \equiv (RL)$. Cum $(DL$ urmează că $OCRD$ este paralelogram. Dar $CO \perp DO$, deci $OCRD$ este dre

[1] Profesor, Şcoala "Alecu Russo", Iaşi

avem $\widehat{CDO} \equiv \widehat{CRO}$. Din (P), punctul a) avem $\widehat{CDO} \equiv \widehat{NMO}$; deci $\widehat{CRO}$
Aceasta şi $MO \perp CR$ conduc la $NM \perp RO \Leftrightarrow NM \perp KL$.



iii) $$\mathcal{A}_{MON} = \frac{ON \cdot OM}{2} = \frac{\sqrt{AO \cdot CO} \cdot \sqrt{BO \cdot DO}}{2} = \frac{\sqrt{AO \cdot CO \cdot BO \cdot DO}}{2}.$$

Cum $\triangle AOB \sim \triangle COD$, avem $AO \cdot DO = BO \cdot CO$, deci $\mathcal{A}_{MON} = \dfrac{AO \cdot DO}{2} = \mathcal{A}_{AOD}$. Dar $\mathcal{A}^2_{AOD} = \mathcal{A}_{AOB}\mathcal{A}_{COD}$, deci $\mathcal{A}_{OMN} = \sqrt{\mathcal{A}_{AOB}\mathcal{A}_{COD}}$.

iv) La fel ca la *iii*), $OM \cdot ON = OA \cdot OD$. Deci $\dfrac{ON}{OA} = \dfrac{OD}{OM}$ sau
adică $AN \parallel MD'$, q.e.d.

Observaţie. Dacă $MN \cap LK = \{P\}$, propunem cititorului să demo
$OE = \sqrt{LO \cdot KO}$ şi $OP = \sqrt{\text{dist}\,(O; AB) \cdot \text{dist}\,(O; CD)}$.

Bibliografie

1. G.M. seria B, nr. 7/2005, p.298 şi p. 301.

2. D. Mihalca, I. Chiţescu, M. Chiriţă - *Geometria patrulaterului*, Ed.
cureşti, 1998.

ERATA

Mai mulţti colaboratori aduc la cunoştinţă Redacţiei revistei următoar
în scrierea numelui marelui matematician *Leonhard Euler*: în loc de Le
scris Leonard atât în titlul materialului din nr. 2/2004, p. 129, cât şi în
2/2005, p. 119 (prin preluarea primului pe calculator).

COMENTARIU

D-l *D. Plăeşu* din Iaşi semnalează Redacţiei faptul că *Problema L.62*
Bîrsan, publicată în nr. 1/2004 este cunoscută – apare în cartea lui *W.*
intitulată *Ce ştim şi ce nu ştim despre numerele prime* (în l. rom. la E
inţifică, Bucureşti, 1966) la p. 104. Cele două soluţii date acestei probl
1/2005, pp. 67-68, diferă de soluţia prezentată în cartea menţionată.

NOTA ELE

Asupra criteriului de congruenţă LLU

Marius TIBA[1]

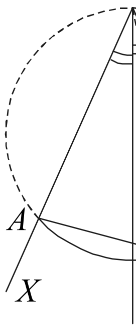
Aşa cum se arată în [**1**], următorul criteriu de congruenţă a triunghiuri numeroase capcane prin aplicarea sa incorectă. Redăm aici rezultatul di curge acest criteriu.

Propoziţie. *Dacă două laturi şi unghiul opus uneia dintre ele ale un sunt respectiv congruente cu două laturi şi unghiul opus uneia dintre e triunghi, iar $\widehat{\alpha}$ şi $\widehat{\beta}$ notează unghiurile opuse celorlalte laturi congruente,*

a) atunci $\widehat{\alpha}$ şi $\widehat{\beta}$ sunt sau congruiente sau suplementare;

b) (Criteriu LLU) dacă în plus $\widehat{\alpha}$ şi $\widehat{\beta}$ sunt de acelaşi tip (adică a ascuţite, obtuze sau drepte), atunci cele două triunghiuri sunt congruente

Problema 1. *Pe laturile $(OX$ şi $(OY$ ale unui unghi ascuţit $\widehat{X}$ punctele A şi B astfel încât $[OA] \equiv [OB]$. În interiorul unghiului se ia u supus condiţiei $\widehat{OMA} \equiv \widehat{OMB}$. Găsiţi locul geometric descris de M.*



Rezolvare. Vom arăta că locul căutat este format din bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{XOY}$ şi arcul cercului circumscris $\triangle AOB$ cuprins în interiorul unghiului, pe care-l notăm $\overset{\frown}{AB}$. Fie M un punct ce satisface condiţiile din enunţ. Ca urmare $\triangle OAM$ şi $\triangle OBM$ au unghiurile $\widehat{OAM}$ şi $\widehat{OBM}$ sau congruente sau suplimentare (conform punctului a) al Propoziţiei). În cazul în care $\widehat{OAM} \equiv \widehat{OBM}$, punctul M se află pe bisectoarea unghiului $\widehat{O}$. Dacă aceste unghiuri sunt suplimentare, atunci patrulaterul $OAMB$ este inscriptibil şi, ca urmare, $M \in \overset{\frown}{AB}$. Reciproca rezultă imediat.

Menţionăm că la faza judeţeană a O. M. din Vaslui, 2005, cl. a VI-a să se arate că locul geometric este doar bisectoarea interioară a unghiu Nerespectarea Propoziţiei conduce la erori ca aceasta (prezentă şi în bare din problema T12, [**2**, pag. 10].

Problema 1 ne sugerează

Problema 2. *Găsiţi locul geometric al punctelor M pentru care $\widehat{OAM}$ unde notaţiile sunt aceleaşi ca în Problema 1.*

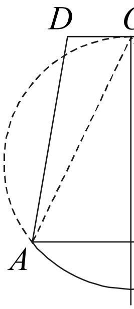
Rezolvare. Judecând analog ca la Problema 1, obţinem locul căutat bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{XOY}$ şi segmentul $[AB]$ (fără capete).

Ca o extindere a Problemei 1, dăm următoarea

Problema 3. *Fie $ABCD$ un trapez isoscel şi fie O mijlocul bazei Găsiţi locul geometric al punctelor M situate în interiorul liniei frânte f semidreptele $(DA$, $(CB$ şi segmentul $[CD]$, astfel încât $\widehat{OMA} \equiv \widehat{OMB}$.*

[1] Elev, cl. a VII-a, Colegiul Naţional "C. Negruzzi", Iaşi

Rezolvare. Această problemă se reduce la Problema 1, deoarece $[OA] \equiv [OB]$ ($\triangle OBC \equiv \triangle OAD$ (LUL)). Astfel, locul geometric cerut este format din punctele mediatoarei segmentului CD şi ale arcului cercului circumscris $\triangle OAB$, aflate în interiorul liniei frânte date.



Problema 3 ne sugerează următoarele două probleme, pe care le propunem cititorului spre rezolvare:

Problema 4. *Se modifică Problema 3 luând punctul O la intersecţia laturilor neparalele ale trapezului.*

Problema 5. *Modificăm Problema 3, luând condiţia $\widehat{AMD} \equiv \widehat{BMC}$.*

Bibliografie

1. **D. Miheţ** - *Criteriul de congruenţă LLU*, RMT an II (seria a 4-a), nr
pag. 3-7.
2. **I. Pătraşcu** - *Probleme de geometrie plană*, Editura Cardinal, Craiova, 1

IMPORTANT

- În scopul unei legături rapide cu redacţia revistei, pot fi utilizate urm adrese e-mail: **tbirsan@math.tuiasi.ro**, **profgpopa@yahoo.co** această cale colaboratorii pot purta cu redacţia un dialog privitor rialele trimise acesteia, procurarea numerelor revistei etc. Sugerăm ratorilor care trimit probleme originale pentru publicare să le nume să-şi reţină o copie xerox a lor pentru a putea purta cu uşurinţă o prin e-mail asupra acceptării/neacceptării acestora de către redacţia

- La *problemele de tip L* se primesc soluţii de la orice iubitor de ma elementare (indiferent de *preocupare profesională* sau *vârstă*). Fieca soluţiile acestor probleme - ce sunt publicate în revistă după un a urmată de numele tuturor celor care au rezolvat-o.

- **Adresăm cu insistenţă rugămintea ca materialele trimise să nu fie (să nu fi fost) trimise şi altor publicaţii.**

- Rugăm ca materialele tehnoredactate să fie trimise pe adresa reda soţite de fişierele lor (de preferinţă în LaTeX).

O generalizare a identităţii Botez - Catala

Ioana OLAN[1]

În 1872, **N. Şt. Botez** publică o lucrare originală în care apare ident

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n+1}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n\,(2n+1)}\right)$$

care, dacă ţinem seama de formula de descompunere

$$\frac{1}{2k\,(2k+1)}=\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+1},\quad k\in\mathbb{N}^*,$$

se aduce la forma

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n},\quad n\in$$

numită *identitatea Botez - Catalan*. Ne propunem să-i dăm o generalizare

Amintim o demonstraţie a formulei (1), generalizarea obţinându-se în

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}\right.$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}-2\cdot\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-2\cdot\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-2\cdot\frac{1}{2n}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+$$

Propoziţie. *Pentru $n\in\mathbb{N}^*$ şi $m\in\mathbb{N}$, are loc egalitatea*

$$1-\frac{2^m-1}{2^m}+\frac{1}{3^m}-\frac{2^m-1}{4^m}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^m}-\frac{2^m-1}{(2n)^m}=\frac{1}{(n+1)^m}+\cdots+$$

(Pentru $m=1$ se obţine identitatea (1).)

Demonstraţie. Într-adevăr, avem:

$$1-\frac{2^m-1}{2^m}+\frac{1}{3^m}-\frac{2^m-1}{4^m}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^m}-\frac{2^{m-1}}{(2n)^m}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2^m}-2^m\frac{1}{2^m}\right)+\left(\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}-2^m\frac{1}{4^m}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{(2n-1)^m}+\frac{1}{(2n)^m}-2^m\right.$$

$$=1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^m}+\frac{1}{(2n)^m}-2^m\left(\frac{1}{2^m}+\frac{1}{4^m}+\cdots\right.$$

$$=1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^m}+\frac{1}{(2n)^m}-\left(1+\frac{1}{2^m}+\cdots+\frac{1}{n^m}\right)=$$

$$=\frac{1}{(n+1)^m}+\frac{1}{(n+2)^m}+\cdots+\frac{1}{(2n)^m},\quad \text{q.e.d.}$$

Cazuri particulare. Pentru $m=2$ şi $m=n$, formula (2) devine:

$$1-\frac{3}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{3}{4^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}-\frac{3}{(2n)^2}=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots$$

$$1-\frac{2^n-1}{2^n}+\frac{1}{3^n}-\frac{2^n-1}{4^n}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^n}-\frac{2^n-1}{(2n)^n}=\frac{1}{(n+1)^n}+\frac{1}{(n+2)^n}+\cdots$$

[1] Elevă, cl. a VIII-a, Colegiul Naţional "C. Negruzzi", Iaşi

Acoperiri ale planului laticial cu figuri

Marius PACHIŢARIU[1]

Există numeroase probleme de concurs care implică acoperiri ale unor
ciale, de exemplu dreptunghiuri, cu un număr de copii ale unei alte figuri d
nouri, trominouri) sau cu alte copii scalate ale însuşi dreptunghiului.

Observând metodele si tehnicile acestor tipuri de probleme, putem
acoperiri ale întregului plan cu diferite figuri. Vom lucra în continuare doa
laticial. Pentru aceasta, să definim planul laticial şi să dăm coordonate p
care îl alcătuiesc. Introducem în continuare o serie de noţiuni.

Considerăm dreptele de ecuaţie $x = r$, $r \in \mathbb{Z}$, $y = q$, $q \in \mathbb{Z}$. Pătratele d
determinate de punctele lor de intersecţie vor constitui elementele *planu*
Vom atribui coordonate acestor pătrate în următorul mod: dacă un pătra
intersecţia benzilor determinate de $x = r$, $x = r + 1$ şi respectiv, $y = q$,
atunci vom spune că pătratul are coordonate r, q sau mai simplu vom num
$[r, q]$. Vom numi *vector* între două pătrate vectorul $a\overline{i} + b\overline{j}$, cu $\overline{i}$, $\overline{j}$ versor
a, b numărul de pătrăţele orizontale, respectiv verticale care separă cele do
considerate, cu semnul asociat corespunzător.

Numim *plantaţie* orice colecţie de pătrate ale planului laticial, conex
că din orice pătrat putem ajunge în oricare altul printr-o succesiune fi
plasări unitare (translaţii după una din cele 4 direcţii), astfel încât după
(translaţie) ne aflăm încă în unul dintre pătratele colecţiei. Numim *figur*
maximală de plantaţii cu proprietatea că fiecare plantaţie poate fi obţinu
care alta a figurii prin translaţii, rotaţii şi simetrii faţă de drepte parale
Cu alte cuvinte, figura reprezintă o clasă de echivalenţă.

Fie un set X de figuri. Numim *acoperire* a planului orice set Y de p
elemente aparţinând figurilor din X, astfel încât fiecare punct al planul
la cel puţin o plantaţie din Y. Numim *măsura* unei acoperiri $\sup n[i, j]$,
este numărul de plantaţii cărora îi aparţine patratul $[i, j]$. Numim n-
acoperire în care fiecare pătrat al planului aparţine aceluiaşi număr d
modulo n. Pentru 2-acoperiri vom considera acoperire impară cea în c
pătrat e acoperit de un număr impar de ori. 2-acoperirile pare nu ne i
întrucât considerând acceaşi plantaţie de două ori şi considerând oricât
perechi, vom obţine întotdeauna o 2-acoperire pară.

Observaţia 1. Reuniunea a două acoperiri este o acoperire şi măsur
a două acoperiri este cel mult suma măsurilor celor 2 acoperiri.

Putem acum să ne punem o serie de întrebări:

Întrebarea 1. Care sunt seturile X de cardinal 1 pentru care există a
măsura 1?

Un exemplu netrivial de figuri în spaţiu cu această proprietate îl oferă u

Problemă. Lipim câte un cub unitate pe fiecare faţă a unui cub unita
că putem umple spaţiul folosind copii ale solidului rezultat. (Austrian-Po

[1] Elev, Colegiul Naţional, Iaşi

Întrebarea 2. Care sunt seturile X de cardinal 2 pentru care există a
măsura 1?

Întrebarea 2'. Dati exemple de doua seturi Y şi Z de cardinal 1 pent
exista acoperire cu măsura 1 cu setul Y şi nu există acoperire cu măsura
Z, dar pentru care există acoperire cu măsura 1 cu setul $Y \bigcup Z$.

Vezi la pagina 74 exemplul 1. Demonstraţi că exemplul este într-adev

Întrebarea 2''. Daţi exemple de două seturi de figuri de cardinal 1:
care nu există acoperire cu măsura 1 şi Z, pentru care există o astfel de a
pentru care există acoperire cu setul $Y \bigcup Z$ cu măsura 1.

Vezi la pagina 74 exemplul 2. Demonstraţi că exemplul este într-adev

Întrebarea 3. Care sunt seturile X de figuri de cardinal n, $n \in \mathbb{N}$, p
există acoperiri cu măsura 1?

Întrebarea 3'. Daţi exemple de seturi de n seturi X_i, $i = \overline{1,n}$ de
cardinale 1, cu proprietatea că nici unul dintre ele nu poate genera o ac
măsura 1, dar reuniunea lor da.

Vezi la pagina 74 exemplul 3. Demonstraţi că exemplul este într-adev

Întrebarea 4. Orice figură poate genera o 2-acoperire impară a p
măsura finită? Dacă vom considera minimul măsurii peste toate acoperiri
putem găsi un maxim pentru acesta în funcţie de figura folosită?

Nu vom răspunde aici întrebărilor 1, 2, 3, fiind prea generale. Desigu
X care constituie răspunsurile primelor 2 sunt particularizări ale seturilor
întrebare. Caracterizări ale primului tip de seturi din anumite puncte de v
cu siguranţă posibile, pe când o caracterizare în cazul general pare impo
exemplele întrebărilor 2', 2'', 3').

Vom răspunde în schimb ultimei întrebări. Răspunsurile sunt DA şi DA
ile modulo 2 ne dau într-adevăr de ajunsă libertate. Pentru demonstraţiile
vom renunţa la condiţia de conexitate din definiţia plantaţiilor.

Demonstraţia 1. Vom numi cardinal al unei plantaţii (figuri) n
pătrăţele pe care le conţine. Pentru o figură de cardinal impar putem lua u
acoperire: Fie o plantaţie oarecare şi toate translaţiile ei care se păstreaz
Atunci plantaţiile rezultate şi cu cea iniţială reprezintă o 2-acoperire. Î
fiecare pătrat al planului laticial este acoperit de exact (cardinalul plan
deci pentru cardinalul impar avem o 2-acoperire. Mai mult, avem măsura
egală cu cardinalul figurii.

Din păcate această cale nu pare să furnizeze soluţie pentru figurile c
par.

Demonstraţia 2. Figura F fiind finită, o putem include într-un pătrat
pe latice, deci o putem include într-un pătrat cu latura putere a lui 2. Fi
celui mai mic astfel de pătrat. Să considerăm acoperirea de măsură 1 c
pătrate de latură 2^k (chiar o omotetie a planului laticial). Plasăm în fiecar
latură 2^k al acestei acoperiri figura F corespunzătoare. Asociem pătrăţele
ale pătratului de latură 2^k valoarea 1 dacă pătrăţelul este în F şi 0 altfe
cuvinte am făcut o primă acoperire a planului cu figuri F. Vom face o se

Primul pas: Considerăm acoperirea obţinută ca mai sus, dar înlocuin
cu simetrica ei faţă de $(Oy$, astfel încât această acoperire să suprapună
pătrate de latura 2^k peste cele considerate anterior. Fie F' noua figură ol
suprapunerea celor două acoperiri (reuniunea) şi considerarea modulo 2 (
are asociat 1 dacă este acoperit de un număr impar de plantaţii şi 0 altfel).
analog cu F' dar faţă de axa $(Ox$. Obţinem o nouă figură F'', care este s
faţă de orizontală şi faţă de verticală, încadrată în pătratul de latură 2^k. Să
că fiecare pătraţel a fost acoperit de cel mult 4 ori.

Realizăm acoperirile determinate de translaţii ale acoperirii de mai su
F'', de vectori $2^{k-1}\overline{i}$, $2^{k-1}\overline{j}$, $2^{k-1}\overline{i} + 2^{k-1}\overline{j}$.

Să considerăm reuniunea celor 4 acoperiri. Privind mai atent, observ
obţinut astfel o nouă acoperire cu pătrate de latură 2^{k-1}, cu o figură $F(2$
pătrat, simetrică orizontal şi vertical. Acest proces reprezintă de fapt e
primei părţi, întrucât acoperim figura din pătratul de latură 2^{k-1} cu s
faţă de axa verticală şi apoi cu simetricele faţă de axa orizontală a celor
obţinute. Fiecare pătrat a fost acoperit de cel mult $4+4+4+4 = 4 \cdot 4$ c

Putem continua acum cu următorii paşi analogi cu partea a doua a
(partea cu translaţiile) până ajungem la acoperirea cu pătratul de latura
în interiorul lui figura $F(k+1)$, care poate fi ori mulţimea vidă ori însuşi
caz în care am obţinut o 2-acoperire impară a planului cu F (şi o măsură
$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 4 = 4^k$).

Pentru a determina numărul la care ajungem (0 sau 1) în $F(k+1)$, vom
aceeaşi serie de paşi ca mai sus, urmărind în acelaşi timp cum evoluează su
valorilor asociate patrăţelelor interiorului pătratului de latură 2^k.

Să presupunem că am considerat pătratul de vârfuri $[1,1]$, $[1,2^k]$, $[2^k$
(ne referim aici la cele 4 pătrate unitare) şi fie $a_{i,j} = 1$ dacă pătratul [
figura F şi 0 altfel.

Vom da acum un exemplu de "paşi" făcuţi ca mai sus:

Exemplul 4.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&1&0&1\\\hline 1&0&1&0\\\hline 1&0&0&0\\\hline 0&1&0&0\\\hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0&1&1&0\\\hline 1&1&1&1\\\hline 1&0&0&1\\\hline 0&1&1&0\\\hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0&0&0&0\\\hline 0&1&1&0\\\hline 0&1&1&0\\\hline 0&0&0&0\\\hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline &&&\\ &&&\\\hline 1&1&&\\\hline 1&1&&\\\hline\end{array}$$

Să notăm $b_{i,j}$, $i = \overline{1, 2^{k-1}}$, $j = \overline{1, 2^{k-1}}$ valorile asociate acoperirii re
suma celor 4 acoperiri (fără a le reduce modulo 2; adunăm $a_{i,j}$-urile coresp
pentru a proba dacă $[i,j]$ este sau nu în $F(2)$). Acum este uşor să ob
$b_{i,j} = a_{i,j} + a_{i,2^k+1-j} + a_{2^k+1-i,j} + a_{2^k+1-i,2^k+1-j}$. Dar aceasta înseamn

$$\sum_{\substack{i \le 2^{k-1} \\ j \le 2^{k-1}}} b_{i,j} = \sum_{\substack{i \le 2^{k-1} \\ j \le 2^{k-1}}} \left(a_{i,j} + a_{i,2^k+1-j} + a_{2^k+1-i,j} + a_{2^k+1-i,2^k+1-j}\right) =$$

Am demonstrat prin aceasta că suma valorilor asociate rămâne aceea
cuvinte, valoarea din ultimul pătrat după ultimul pas este egală cu sum
iniţiale ale figurii F. Deci, dacă figura F are un număr impar de pătrăţ

figura $F(k+1)$ este constituită dintr-un pătrăţel, adică avem o acoperire

Dar nu am obţinut acelaşi lucru în demonstraţia 1 şi mult mai uşor?

Ba da, dar demonstraţia 1 nu ne perminte o rafinare pentru a o face să f
şi pe figuri de cardinal par, pe când aceasta da.

Dacă la sfârşit nu obţinem un pătrăţel, ci mulţimea vidă, rezultă că la u
dat, după o simetrizare, figura s-a anulat pe sine însăşi. Dar aceasta nu s
decât în cazul în care figura era deja simetrică faţă de axa faţă de care s-a
tria. Dar suprimând această etapă din pasul corespunzător putem continua
de simetrizare, întrucât figura e deja simetrică faţă de acea axă. Suprim
etapele în care am face o astfel de simetrie nedorită, ne păstrăm pe linia ra
tului anterior şi, mai mult, putem fi siguri că ajungem la o figură unitară
considerăm, de exemplu, ultimul pas, plecând de la cele 16 posibilităţi şi
acele simetrii care nu sunt favorabile.

Exemplul 5. $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline\end{array} \longrightarrow$ STOP

Exemplul 6. $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline\end{array} \longrightarrow$ STOP

Exemplul 7. $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline\end{array} \longrightarrow$ STOP

Exemplul 8. $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline\end{array} \longrightarrow$ STOP

Exemplul 9. $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline\end{array} \longrightarrow$ STOP

Nu este greu de observat că fără a suprima nici o simetrizare aven
plantaţii peste fiecare pătrăţel. Acest număr reprezintă toate pătrăţelele
$2^k \times 2^k$, deci ne furnizează o măsură mai mare decât cea furnizată de de
1 pentru figuri de cardinal impar. Pentru cardinal par în schimb, putem
această măsură ca un bun majorant pentru valoarea minimă posibilă a măs
mai mult, ţinând cont că am suprimat cel puţin o etapă, înseamnă că
dublat în momentul acela măsura, deci obţinem cel mult $2 \cdot 4^{k-1}$ care pentr
ajuns de compacte şi de bine încadrate în pătratul de latură 2^k corespunz
fi chiar mai mic decât cardinalul plantaţiei.

Problemă. Colorăm planul în alb şi negru ca tabla de şah. Fie
pentru care numărul de pătrăţele albe pe care le conţine, A, este impar
de pătrăţele negre pe care le conţine, B, este tot impar. Să se gasească o
planului cu figura reprezentată de această plantaţie cu măsura egală cu

Conjenctură. Putem acoperi modulo 2 planul cu translaţii ale une
plantaţii, oricare ar fi aceasta. Mai mult, măsura obţinută poate fi mai
cea dată de demonstraţia 2 şi chiar decât cardinalul plantaţiei.

Un început de demonstraţie pentru conjenctură este sugerat de prob
rioară.

Metoda normării

Marian TETIVA[1]

Introducere. În această notă vrem să dăm câteva exemple de utilizar
normării, pe care am preluat-o, cu tot cu acest nume, din excelenta ca
pornit de la faptul că acolo nu există prea multe aplicaţii şi, la începu
în glumă, am demonstrat pe această cale câteva inegalităţi (nu tocmai u
timpul s-au adunat din ce în ce mai multe asemenea inegalităţi (şi din c
grele). Metoda s-a dovedit extrem de eficientă pentru demonstrarea in
omogene dar şi pentru obţinerea unor identităţi altfel greu de găsit, iată de
o prezentăm aici; totuşi, trebuie s-o spunem, metoda normării nu este re
celor care au "alergie" la calcule: este pentru cei răbdători şi stăpâni
matematică (ne referim la calculul elementar). De asemenea, se aplică in
în care variabilele implicate sunt numere reale pozitive (sau nenegative).

Să începem cu o inegalitate foarte cunoscută (a se vedea şi [**3**], capito

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc;$$

se ştie că aceasta e valabilă pentru orice numere reale a, b, c, dar noi o vom
(complicat, veţi spune, dar e numai pentru a da un exemplu) doar pentru
(iată un dezavantaj; nu unul mare, pentru că majoritatea inegalităţil
urma prezintă interes pentru cazul variabilelor nenegative şi, uneori, se p
plecând de la acesta, la orice valori reale ale variabilelor). Datorită simet
presupune fără a particulariza, că $c=\min\{a,b,c\}$. Pentru $c=0$ inega
evidentă:

$$a^2+b^2 \geq ab \Leftrightarrow (a-b)^2+a^2+b^2 \geq 0.$$

Fie $c>0$ şi să notăm $\dfrac{a}{c}=1+x$, $\dfrac{b}{c}=1+y$. Conform presupunerilor fă
$x \geq 0$ şi $y \geq 0$, iar inegalitatea de demonstrat devine (după împărţirea
noile notaţii)

$$(1+x)^2+(1+y)^2+1 \geq (1+x)(1+y)+1+x+1+y \Leftrightarrow x^2+y^2$$

evidentă (ca mai sus) chiar pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$, nu doar pentru $x,y \geq$
uşor că egalitatea are loc doar pentru $x=y=0$, deci numai dacă $a=b$
mult, plecând de la

$$(1+x)^2+\left(1+y^2\right)+1-(1+x)(1+y)-1-x-1-y=x^2+y^2$$

şi revenind la a, b, c (cu $x=\dfrac{a-c}{c}$, $y=\dfrac{b-c}{c}$) găsim identitatea

$$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=(a-c)^2+(b-c)^2-(a-c)(b-c)$$

care permite demonstrarea inegalităţii pentru orice $a,b,c\in\mathbb{R}$ şi chiar obţ
rafinări:

$$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc \geq \frac{1}{2}\left((a-c)^2+(b-c)^2\right), \quad a,b,c\in$$

[1] Profesor, Colegiul Naţional "Gheorghe Roşca Codreanu", Bârlad

Desigur, toate acestea se puteau face şi altfel şi sunt cunoscute, dar ... n
demonstraţia obişnuită a acestei inegalităţi, nu-i aşa?

Mai departe să considerăm inegalitatea

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^3b + b^3c + c^3a, \quad a, b, c \geq 0,$$

căreia îi aplicăm acelaşi tratament. Simetria (de data asta, doar circulară) să presupunem, fără a restrânge generalitatea, că $c = \min\{a, b, c\}$; $c =$ inegalitatea în forma $a^4 + b^4 \geq a^3b$, pentru orice $a, b \geq 0$ (*exerciţiul 1:* d acest caz particular!). Mai departe fie $c > 0$ şi să facem aceleaşi notaţii c Împărţim cu c^4 şi inegalitatea devine

$$(1+x)^4 + (1+y)^4 + 1 \geq (1+x)^3(1+y) + (1+y)^3 + 1 + x,$$

de demonstrat pentru $x, y \geq 0$. Calcule simple (*exerciţiul 2:* verificaţi-le formă în

$$3\left(x^2 + y^2 - xy\right) + 3\left(x^3 + y^3 - x^2y\right) + x^4 + y^4 - x^3y \geq 0;$$

aceasta este adevărată, ba chiar se poate întări, ţinând cont de

$$x^2 + y^2 - xy \geq \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right),$$

de

$$x^3 + y^3 - x^2y \geq xy^2 \quad \left(\Leftrightarrow (x-y)^2(x+y) \geq 0\right)$$

şi de

$$x^4 + y^4 - x^3y \geq xy^3 \quad \left(\Leftrightarrow (x-y)^2\left(x^2 + xy + y^2\right) \geq 0\right).$$

Astfel am obţinut de fapt

$$(1+x)^4 + (1+y)^4 + 1 - (1+x)^3(1+y) - (1+y)^3 - 1 - x \geq$$

$$\geq \frac{3}{2}\left(x^2 + y^2\right) + 2xy^2 + xy^3, \quad x, y \geq 0;$$

aici să revenim la variabilele iniţiale a, b, c şi să înmulţim cu c^4. *Exerciţiul* că ajungem la inegalitatea

$$a^4 + b^4 + c^4 - \left(a^3b + b^3c + c^3a\right) \geq$$

$$\geq \frac{3}{2}c^2\left((a-c)^2 + (b-c)^2\right) + 3c(a-c)(b-c)^2 + (a-c)(b-c)^3$$

pentru orice numere nenegative a, b, c, c fiind cel mai mic dintre ele (este acest lucru?). Iar *exerciţiul 4* vă cere să demonstraţi identitatea

$$a^4 + b^4 + c^4 - \left(a^3b + b^3c + c^3a\right) = \frac{3}{2}\left((a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2\right.$$

$$+3c(a-b)^2(a+b-2c) + 3c(a-c)(b-c)^2 +$$

$$+(a-b)^2\left((a-c)^2 + (b-c)^2 + (a-c)(b-c)\right) + (a-c)(b-c)$$

(mai contează cum sunt numerele a, b, c?) şi să obţineţi şi alte întăriri ale considerate.

Acum, că aţi cam înţeles în ce constă metoda normării şi, în plus, a antrenament la calcule de acest tip, puteţi exersa chiar singuri şi ceva ma

Exercițiul 5. Arătați că, pentru orice numere reale nenegative a, b
$d = \min\{a, b, c, d\}$ are loc inegalitatea

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd - a^2b^2 - a^2c^2 - a^2d^2 - b^2c^2 - b^2d^2 - c^2d$$

$$\geq d^2(a-d)^2 + d^2(b-d)^2 + d^2(c-d)^2 + 2d(a-d)(b-d)(c-d$$

Deduceți *inegalitatea lui Turkevici*

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd \geq a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2$$

(pentru orice $a, b, c, d \geq 0$), identitate a cărei consecință este și, eventual, a
ale ei.

Metoda normării și o demonstrație a inegalității mediilor.
s-a văzut, metoda descrisă în această notă se aplică în cazul inegalităților
și omogene în $n+1$ variabile, să le spunem $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$. Simetria
să considerăm, nerestrictiv, că, de exemplu, a_{n+1} este cel mai mic di
numerele $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ (chiar și simetria circulară ne permite o asem
supunere). După ce verificăm inegalitatea pentru $a_{n+1} = 0$ (dacă e caz
substituțiile

$$\frac{a_1}{a_{n+1}} = 1 + x_i,\ \frac{a_2}{a_{n+1}} = 1 + x_2,\ \ldots\ ,\ \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + x_n,$$

unde, desigur, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt nenegative (ceea ce, de obicei, ajută în no
inegalității). Se poate alege și $a_{n+1} = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$, dar e doar
de gust, nu schimbă esențial calculele. Apoi, folosind transformările inver

$$x_1 = \frac{a_1 - a_{n+1}}{a_{n+1}},\ x_2 = \frac{a_2 - a_{n+1}}{a_{n+1}},\ \ldots\ ,\ x_n = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1}},$$

ne putem întoarce la inegalitatea noastră pentru a obține chiar întăriri a
de obicei, rămân în diferența dintre cei doi membri ai inegalității transfor
termeni nenegativi care pot fi utilizați în acest scop), sau identități intere
o implică). Cine a citit cu atenție descrierea metodei în [**3**] a observat deja
considerat o formă particulară a acesteia. Asta pentru că așa am lucrat
obținut destule rezultate interesante (chiar mai multe decât cele expuse
citiți [**3**] și veți afla și mai multe (chiar dacă în capitolul dedicat normării s
exemple)!

În această secțiune am ales pentru exemplificare demonstrația inegalit

$$a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n \geq n a_1 a_2 \cdots a_n, \quad a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0,$$

adică a *inegalității mediilor*, o demonstrație care s-ar putea să pară com
chiar este!) față de multe alte demonstrații cunoscute (căci, nu-i așa?
foarte multe demonstrații ale inegalității mediilor); totuși să o facem.

Cum verificarea în cazurile $n \in \{1, 2\}$ (sau chiar $n = 3$) nu mai consti
blemă trecem direct la pasul de inducție; pe care o facem după schema: p
că am demonstrat că, pentru fiecare $k \leq n$ inegalitatea

$$a_1^k + a_2^k + \cdots + a_k^k \geq k a_1 a_2 \cdots a_k$$

are loc (pentru *orice* $a_1, a_2, \ldots, a_k \geq 0$) și o dovedim pentru $k = n+1$. În i
de demonstrat

$$a_1^{n+1} + a_2^{n+1} + \cdots + a_n^{n+1} + a_{n+1}^{n+1} \geq (n+1)\, a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1}, \quad a_1, a_2, \ldots a_n$$

putem presupune, cum am spus, $a_{n+1} = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$. Cum a_{n+}
la o inegalitate absolut banală, putem considera $a_{n+1} > 0$, să împărţim
să facem substituţiile de mai sus; vom avea de demonstrat că

$$(1+x_1)^{n+1} + (1+x_2)^{n+1} + \cdots + (1+x_n)^{n+1} + 1 \geq (n+1)(1+x_1)(1+x_2)$$

pentru orice $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$.

Exerciţiul 6. Arătaţi că, după câteva calcule, ne rămâne inegalitatea

$$\sum_{k=2}^{n} \left(C_{n+1}^{k} \sum_{j=1}^{n} x_j^k - (n+1) \sum x_1 x_2 \cdots x_k \right) + \sum_{j=1}^{n} x_j^{n+1} \geq 0.$$

Prin $\sum x_1 x_2 \cdots x_k$ înţelegem suma tuturor celor C_n^k produse de câte k fac
dici distincţi) aleşi dintre $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (pentru $k = n$ suma conţine doar
produsul $x_1 x_2 \cdots x_n$).

Pentru a demonstra această inegalitate, să observăm întâi că, dacă folos
de inducţie, avem (pentru $2 \leq k \leq n$)

$$x_1^k + x_2^k + \cdots + x_k^k \geq k x_1 x_2 \cdots x_k$$

şi chiar putem scrie C_n^k inegalităţi de acest tip (câte una pentru fiecare
dintre numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n$); adunăm toate aceste inegalităţi şi avem

$$\sum \left(x_1^k + x_2^k + \cdots + x_k^k \right) \geq k \sum x_1 x_2 \cdots x_k.$$

Cum în membrul stâng fiecare x_j, $1 \leq j \leq n$, apare de C_{n-1}^{k-1} ori, de fapt

$$C_{n-1}^{k-1} \sum_{j=1}^{n} x_j^k \geq k \sum x_1 x_2 \cdots x_k \Leftrightarrow \frac{n+1}{n} C_{n-1}^{k-1} \sum_{j=1}^{n} x_j^k \geq (n+1) \sum x_1 x$$

pentru fiecare $k \in \{2, \ldots, n\}$. Prin urmare, membrul stâng al inegalităţii
strat se minorează astfel

$$\sum_{k=2}^{n} \left(C_{n+1}^{k} \sum_{j=1}^{n} x_j^k - (n+1) \sum x_1 x_2 \cdots x_k \right) + \sum_{j=1}^{n} x_j^{n+1} \geq$$

$$\geq \sum_{k=2}^{n} \left(\left(C_{n+1}^{k} - \frac{n+1}{k} C_{n-1}^{k-1} \right) \sum_{j=1}^{n} x_j^k \right) + \sum_{j=1}^{n} x_j^{n+1}.$$

Evident, mai avem să demonstrăm că expresia din membrul drept este
calcul simplu ne arată că

$$C_{n+1}^{k} - \frac{n+1}{n} C_{n-1}^{k-1} = \frac{n+1}{n} \left(C_n^{k-1} - C_{n-1}^{k-1} \right) = \frac{n+1}{k} C_{n-1}^{k-2} = \frac{k-1}{n}$$

deci, de fapt, ne-a mai rămas

$$\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{k-1}{n} C_{n+1}^{k} \sum_{j=1}^{n} x_j^k \right) + \sum_{j=1}^{n} x_j^{n+1} \geq 0,$$

care este evidentă, datorită faptului că $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt nenegative; de
prin inducţie este încheiată.

Exercițiul 7. Demonstrați identitatea

$$a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n - na_1a_2\cdots a_n =$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1} a_n^{n-k}\left(C_n^k \sum_{j=1}^{n-1}(a_j - a_n)^k - n\sum (a_1 - a_n)(a_2 - a_n)\cdots(a_k - a_n)\right) + \sum_{j=1}^{n-1}$$

pentru orice numere (chiar numere complexe) $a_1, a_2, \ldots, a_n$. (Cea de-a
din paranteza mare cuprinde toate cele C_{n-1}^k produse de k factori aleşi din
$a_2 - a_n, \ldots, a_{n-1} - a_n$.) De exemplu,

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 4abcd = 2d^2\big(3(a-d)^2 + 3(b-d)^2 + 3(c-d)^2 -$$
$$- 2(a-d)(b-d) - 2(a-d)(c-d) - 2(b-d)(c-d)\big) + 4d\big((a-d)$$
$$+ (b-d)^3 + (c-d)^3 - (a-d)(b-d)(c-d)\big) + (a-d)^4 + (b-d)^4$$

pentru orice numere (complexe) a, b, c, d. Şi atunci nu vă va fi greu cu

Exercițiul 8. Arătați că pentru orice numere reale nenegative a, b, c,
cel mai mic dintre ele, are loc inegalitatea

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 4abcd \geq 2d^2\big((a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 +$$
$$+ (b-c)^2 + (b-d)^2 + (c-d)^2\big).$$

(Puteți rezolva asta prin metoda normării?)

În încheiere vă mai propunem câteva exerciții (grele!). Primul dint
totuşi mai simplu şi vine în completarea celei de-a doua inegalități din in

Exercițiul 9. Demonstrați cea de a doua inegalitate din

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^3b + b^3c + c^3a \geq abc(a+b+c), \quad a, b, c \geq 0.$$

Nu uitați să căutați îmbunătățiri ale acestei inegalități, precum şi identita
consecință este!

Exercițiul 10. Demonstrați, folosind metoda normării, inegalitatea lui

$$(n-1)(a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n) + na_1a_2\cdots a_n \geq$$
$$\geq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\big(a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \cdots$$

şi obțineți întăriri ale ei.

Şi, în sfârşit, pentru ultimul exercițiu aveți nevoie şi de ceva inspirați
demonstra inegalitatea la care se ajunge după normare (nu întotdeauna ea
fără probleme!).

Exercițiul 11. Demonstrați că inegalitatea

$$a^2(a-b)(a-2b) + b^2(b-c)(b-2c) + c^2(c-a)(c-2a) \geq 0$$

are loc pentru orice numere reale a, b, c. Această inegalitate a fost pu
Vasile Cârtoaje în *Gazeta Matematică*, în urmă cu mai mulți ani [**1**].

Bibliografie

1. **V. Cârtoaje** - *Problema 22694*, Gazeta Matematică, seria B, 7-8/1992.
2. **G. Dospinescu** - *O teoremă uitată - inegalitatea lui Surányi*, RecMat - 1
3. **M. Onucu Drimbe** - *Inegalități - idei şi metode*, Editura Gil, Zalău, 20

Asupra unei recurenţe de ordin doi

Gheorghe IUREA[1]

În [**1**], la pag. 59, apare următoarea problemă (autor **Vasile Berinde**

Fie şirul de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *definit prin relaţiile:* $x_0 \in \mathbb{R}$, x_{n+}
$2x_n - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

a) Aflaţi numerele $M\in\mathbb{R}$ *cu proprietatea că, dacă* $x_0 \le M$, *atunci* $x_n \le$

b) Arătaţi că pentru $x_0 \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right]$ *şirul* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge şi calculaţi*

c) Determinaţi expresia lui x_n *în funcţie de* x_0 *şi* n.

Întrucât în rezolvarea acestei probleme dată în [**1**] sunt unele scăpări, ne
să ne ocupăm mai amănunţit cu acest şir interesant.

În privinţa punctului a), fie $M \in \mathbb{R}$ cu proprietatea cerută; fie $x_0 = M$
$t \ge 0$ şi trebuie să avem $x_1 \le M$. Dar $x_1 = 2t^2 - 2t(1+2M) + 2M^2 + 2M$
$\lim\limits_{t\to\infty} x_1 = \infty$, deducem că pentru t suficient de mare avem $x_1 > M$. Prin
există M cu proprietatea cerută.

Să observăm că recurenţa dată este echivalentă cu $x_{n+1} + \frac{1}{2} = 2\Big(x_n$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$. Notând $y_n = x_n + \frac{1}{2}$, obţinem $y_{n+1} = 2y_n^2 - 1$, $y_0 = x_0 + \frac{1}{2}$
studiul şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se reduce la studiul şirului $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Faptul că cerinţa de la punctul b) este greşită rezultă din următoarea

Propoziţie. *Fie* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un şir de numere reale, definit prin*

$$y_0 \in \mathbb{R}, \quad y_{n+1} = 2y_n^2 - 1,\ n \in \mathbb{N}.$$

a) Pentru $y_0 \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este divergent şi* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$

b) Pentru $y_0 \in [-1, 1]$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este convergent dacă şi numai dacă exi*
astfel încât şirul $(y_n)_{n\ge n_0}$ *este constant.*

c) $y_n = \cos(2^n t_0)$, $t_0 = \arccos y_0$ *pentru* $y_0 \in [-1, 1]$ *şi* $y_n = \frac{e^{2^n t_0}}{}$
$t_0 = \ln\left(|y_0| + \sqrt{y_0^2 - 1}\right)$, *pentru* $y_0 \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

d) Dacă $M = \{y_0 \in \mathbb{R};\ (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este convergent*$\}$ *atunci:*

1. M *este nevidă, finită.*
2. $M = A \cup B$, unde

$$A = \left\{\cos\frac{2k\pi}{2^{n_0}}; k = 0, 1, \ldots, 2^{n_0} - 1\right\}, \quad B = \left\{\cos\frac{\pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{2^{n_0'}}; k = 0, 1, \ldots,\right.$$

cu n_0, n_0' *numere naturale fixate.*

e) Şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este convergent dacă şi numai dacă* $y_0 \in A' \cup B'$, *un*

$$A' = \Bigg\{\pm\underbrace{\sqrt{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} \pm \cdots \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}}}}_{n_0 \text{ radicali}}\Bigg\}, \quad B' = \Bigg\{\pm\underbrace{\sqrt{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} \pm \cdots \pm \frac{1}{2}}}}_{n_0' \text{ radicali}}$$

[1] Profesor, Liceul Teoretic "Dimitrie Cantemir", Iaşi

semnele $\pm$ fiind alese în toate modurile posibile.

Demonstraţie. *a*) Dacă $y_0 \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$, atunci $y_0^2 >$ 1
tiv rezultă că $y_n > 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Cum $y_{n+1} - y_n = 2y_n^2 -$
$(2y_n+1)(y_n-1) > 0$, rezultă că (y_n) este strict crescător. Prin urm
$l = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$; dacă $l \in \mathbb{R}$, rezultă $l = 2l^2 - 1$, deci $l \in \left\{1, -\dfrac{1}{2}\right\}$, imposib
$y_n > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ şi (y_n) este strict crescător. Conchidem că $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$.

b) Fie (y_n) convergent. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = l$, rezultă $l = 2l^2 - 1$, deci $l \in$

Dacă $l = 1$, din relaţia de recurenţă rezultă $y_{n+1} - 1 = 2(y_n -$
deci $|y_{n+1} - 1| = 2|y_n - 1||y_n + 1|$. Presupunând că $y_n \neq 1$ pentru ori
avem că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|y_{n+1}-1|}{|y_n-1|} = \lim\limits_{n\to\infty} 2|y_n+1| = 4$ şi din criteriul raportu
$\lim\limits_{n\to\infty} |y_n - 1| = \infty$, absurd. Aşadar, există $n_0 \in \mathbb{N}$ cu $y_{n_0} = 1$ şi atunci $y_n =$

În cazul $l = -\dfrac{1}{2}$ scriem relaţia de recurenţă sub forma $2y_{n+1}+1 = (2y_n +$
şi continuăm ca mai sus.

Presupunem acum că există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $(y_n)_{n\geq n_0}$ este cons
relaţia de recurenţă deducem $y_{n_0} \in \left\{1, -\dfrac{1}{2}\right\}$. Cum $y_{n_0} = 1$ implică $y_n =$
rezultă că $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent cu limita egală cu 1. La fel, dacă
deducem $y_n = -\dfrac{1}{2}$, $n \geq n_0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\dfrac{1}{2}$.

c) Se demonstrează prin inducţie matematică.

d) 1. Cum $1 \in M$, rezultă că $M \neq \emptyset$. Folosind *a*) şi *b*), $y_0 \in M$ implic
unui n_0 astfel încât $(y_n)_{n\geq n_0}$ este constant (egal cu 1 sau $-\dfrac{1}{2}$). Dacă $y_n =$
din sistemul $y_{n_0} = 2y_{n_0-1}^2 - 1$, $y_{n_0-1} = 2y_{n_0-2}^2 - 1$, ... , $y_1 = 2y_0^2 - 1$, d
în aproape, găsim un număr finit de valori pentru y_0. La fel se analiz
$y_n = -\dfrac{1}{2}$, $n \geq n_0$.

2. $y_0 \in M$ implică faptul că $y_n = 1$, $n \geq n_0$ sau $y_n = -\dfrac{1}{2}$, $n \geq n_0'$ (n_0,
naturale arbitrare, dar fixate).

Folosind *c*) şi $y_0 \in M \subset [-1,1]$, deducem $\cos(2^n \arccos y_0) = 1$, de
$\left\{\cos \dfrac{2k\pi}{2^{n_0}}; k \in \mathbb{Z}\right\}$. Folosind periodicitatea funcţiei cosinus rezultă că $y_0 \in$
din $y_n = -\dfrac{1}{2}$, $n \geq n_0'$, deducem că $y_0 \in B$. În concluzie, $M = A \cup B$.

e) Folosind formula $\cos \dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos x}$, $x \in \mathbb{R}$, deducem că $A \subset$
mulţimile au fiecare câte 2^{n_0} elemente, rezultă că $A = A'$. La fel, $B = B'$

Bibliografie

1. **Gh. Eckstein et al.** - *Olimpiadele şi concursurile de matematică IX -*
tura Bîrchi, 2005.

Olimpiada Internaţională de Matematică "B. O. Zhautykov" Ediţia I, Alma-Ata, 2005

Enunţuri şi Soluţii – juniori

Prima zi – 13 ianuarie 2005

1. Pe o tablă 9×9 sunt marcate 40 celule. O linie orizontală sa formată din 9 celule se spune că este *bună*, dacă ea are mai multe celu decât nemarcate. Care este cel mai mare număr de linii bune (orizontale ş pe care-l poate avea tabla?

2. Arătaţi că numărul $2^{2n+2} + 2^{m+2} + 1$, unde $m, n \in \mathbb{Z}$ şi $0 \leq m$ pătrat perfect dacă şi numai dacă $m = n$.

3. Fie A o mulţime formată din $2n$ puncte dintr-un plan astfel în trei dintre acestea nu sunt coliniare. Arătaţi că pentru orice două punct $a, b \in A$ există o dreaptă ce împarte A în două submulţimi conţinând n pu şi astfel încât a şi b se află de părţi diferite în raport cu această dreaptă.

A doua zi – 14 ianuarie 2005

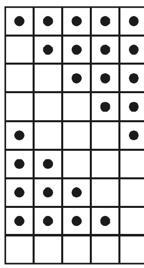
4. Pentru orice numere a, b, c reale şi pozitive, arătaţi inegalitatea

$$\frac{c}{a+2b} + \frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} \geq 1.$$

5. Cercul înscris triunghiului ABC este tangent laturii AB în punc M este mijlocul acestei laturi. Arătaţi că M, centrul cercului înscris segmentului $[CD]$ sunt coliniare.

6. Determinaţi numerele prime p, q mai mici ca 2005 şi astfel încât divide cu q, iar $q^2 + 4$ se divide cu p.

* *
*



1. Deoarece sunt marcate 40 celule şi o linie are cel puţin 5 celule marcate, rezultă că putem avea cel mult 8 linii orizontale bune şi cel mult 8 linii verticale bune. În total, putem avea cel mult 16 linii bune. Alăturat este dat un exemplu de tablă cu 16 linii bune. Deci 16 este numărul maxim de linii bune.

2. Dacă $m = n$, atunci $2^{2n+2} + 2^{m+2} + 1 = \left(2^{n+1} + 1\right)^2$. Dacă $m < n$, atunci avem $\left(2^{n+1}\right)^2 < 2^{2n+2} + 2^{m+2} + 1 < \left(2^{n+1} + 1\right)^2$ şi, deci, numărul examinat nu poate fi un pătrat perfect.

Fie acum $n < m \leq 2n$. Să presupunem că ar exista x natural astfel $2^{2n+2} + 2^{m+2} + 1$. Observăm că x este impar şi $x > 1$. Scriem relaţia pre forma

$$(x-1)(x+1) = 2^{m+2}\left(2^{2n-m} + 1\right).$$

Deoarece $(x-1,x+1)=2$, numărul 2^{m+1} divide una dintre parantezele
brul stâng, iar cealaltă nu va fi mai mică decât $2^{m+1}-2$. Cum $m \geq 2n$
$2^{2n-m+1} \geq 2$, urmează că

$$2^{m+1}-2 \geq 2^{2n-m+3}-2 = 4 \cdot 2^{2n-m+1}-2 > 2^{2n-m+1}+2.$$

În consecinţă, $(x-1)(x+1) \geq 2^{m+1}\left(2^{m+1}-2\right) > 2^{m+2}\left(2^{2n-m}+1\right)$, ce
trazice $(*)$. Aşadar, nici în acest caz numărul dat nu-i pătrat perfect.

3. Fie d_{ab} dreapta determinată de punctele a şi b. Pe segmentul de e
a şi b alegem un punct O astfel încât orice dreaptă ce trece prin O şi nu c
d_{ab} conţine cel puţin un punct din A; pentru că A este mulţime finită,
dreaptă există.

Notăm cu d_φ dreapta obţinută rotind d_{ab} cu unghiul φ (în sens contra
ceasornic, de exemplu); avem $d_0 = d_\pi = d_{ab}$. Dacă d_{ab} împarte $A \setminus \{a,$
submulţimi cu $n-1$ elemente fiecare, atunci rotind-o cu un unghi φ sufici
obţinem dreaptă căutată.

Presupunem că într-un semiplan determinat de d_φ împreună cu a se aflâ
din A, iar în celălalt împreună cu b se află $2n-m$ $(m \neq n)$. Dacă unghiul de
fi suficient de aproape de π, atunci situaţia se inversează: într-un semiplan
cu a se află $2n-m$ puncte din A, în celălalt împreună cu b sunt m punct

Deoarece trecerea de la perechea $(m, 2n-m)$ la $(2n-m, m)$ prin rota
lui O se face printr-o compunere de transformări de tipul $(x,y) \to (x \pm 1$
exista o valoare φ_0 pentru care corespunde perechea (n,n); d_{φ_0} este dreap

4. Fie $a+2b=x$, $b+2c=y$, $c+2a=z$. Rezolvând în raport cu a, b, c
$a = \frac{4}{9}z + \frac{1}{9}x - \frac{2}{9}y$, $b = \frac{4}{9}x + \frac{1}{9}y - \frac{2}{9}z$, $c = \frac{4}{9}y + \frac{1}{9}z - \frac{2}{9}x$. Inegalitatea dat

$$\frac{4}{9}\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\right)+\frac{1}{9}\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{y}+\frac{y}{z}\right)-3\cdot\frac{2}{9} \geq 1.$$

Cum sumele din paranteze sunt ≥ 3 (inegalitatea mediilor), deducem că
galitate este adevărată.

5. Dacă M coincide cu D, atunci se arată uşor că $BC = AC$, adică
este isoscel. În acest caz $[CD$ este bisectoarea unghiului C şi coliniaritate
puncte este evidentă.

Dacă $M \neq D$, fie E punctul diametral opus lui D pe cercul înscris
$CE \cap AB$. Se ştie că F este punctul de tangenţă cu latura AB a cer
scris corespunzător acestei laturi şi că M este mijlocul segmentului $[FD]$
demonstraţi!). Atunci MI este linie mijlocie în $\triangle DEF$ (I notează centr
înscris). Rezultă că $MI \parallel CF$ şi, în final, MI trece prin mijlocul segment

6. Dacă $p=q$, atunci aceste numere divid 4 şi, deci, $p=q=2$. În
obţinem soluţia $(p,q)=(2,2)$.

Să determinăm soluţiile (p,q) cu $p \neq q$. Vom spune că perechea (x,y)
naturale este *admisă*, dacă îndeplineşte condiţiile: (A) x, y sunt relati
$x \leq y$; (B) x^2+4 se divide cu y şi y^2+4 se divide cu x. Observăm că
admisă este formată din numere impare.

Arătăm mai întâi că, dacă (x, y) este o pereche admisă, atunci perechea
este de asemenea admisă. În acest scop, fie $z = \left(y^2 + 4\right)/x$. Deoarece
$y^2 + 4$, rezultă că $y < z$. Apoi, dacă d divide y şi z, atunci d divide y şi y
d divide 4, ceea ce conduce la $d = 1$. Aşadar, perechea (y, z) îndeplineş
(A). Evident, z divide $y^2 + 4$; pe de altă parte, $z^2 + 4 = \dfrac{y^2\left(y^2+8\right)+}{x^2}$
unde numărătorul se divide cu y, care este relativ prim cu x. În concluzie
(y, z) este admisă.

Să considerăm şirul $(a_i)_{i\geq 0}$ definit de $a_0 = a_1 = 1$ şi $a_{i+2} = \left(a_{i+1}^2 + 4\right)/$
Din ceea ce s-a stabilit mai sus, rezultă că perechile (a_i, a_{i+1}), $i \in \mathbb{N}$, sunt

Să arătăm acum că orice pereche admisă este de forma (a_i, a_{i+1}) pentru
$i \geq 0$. Să presupunem că există perechi admise ce nu-s de această formă
perechea de acest fel cu suma $x+y$ minimă. Cum $x^2+4 = ay$ şi $y^2+b = bx$
relativ prime (se arată ca mai sus!), obţinem $y^2 + 4 = \dfrac{x^2\left(x^2+8\right)+4}{a^2}$
bx şi $a^2 + 4$ se divide cu x. Dacă $a \leq x$, atunci (a, x) este pereche
datorită minimalităţii, avem $(a, x) = (a_i, a_{i+1})$. Rezultă că $(x, y) = (a_{i+}$
contradicţie cu presupunerea făcută. Dacă $a > x$, atunci $a \geq x + 2$ şi cum
avem şi $y \geq x + 2$, putem scrie $x^2 + 4 = ay \geq (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4,$
contradicţie.

În sfârşit, să scriem termenii şirului $(a_i)_{i\geq 0}$ ce nu depăşesc 2005; ac
$a_0 = a_1 = 1$, $a_2 = 5$, $a_3 = 29$, $a_4 = 169$ şi $a_5 = 985$. Sunt numere prime
29. Soluţiile problemei sunt perechile $(p, q) \in \{(2, 2), (5, 29), (29, 5)\}$.

Enunţuri şi Soluţii – seniori

Prima zi – 13 ianuarie 2005

1. Arătaţi că ecuaţia $x^5 + 31 = y^2$ nu are soluţii întregi.

2. Fie r un număr real astfel încât pentru orice şir $(a_n)_{n\geq 1}$ de nu
pozitive are loc inegalitatea

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{m+1} \leq r a_m\,,$$

oricare ar fi $m \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că $r \geq 4$.

3. Fie $SABC$ o piramidă triunghiulară regulată, i.e. $SA = SB = SC$
$BC = AC$. Determinaţi mulţimea punctelor D $(D \neq S)$ din spaţiu
condiţia

$$|\cos\delta_A - 2\cos\delta_B - 2\cos\delta_C| = 3,$$

unde $\delta_X = \measuredangle XSD$ pentru $X \in \{A, B, C\}$.

A doua zi – 14 ianuarie 2005

4. Pentru orice numere a, b, c, d reale şi pozitive, arătaţi inegalitatea

$$\frac{c}{a+2b} + \frac{d}{b+2c} + \frac{a}{c+2d} + \frac{b}{d+2a} \geq \frac{4}{3}.$$

5. Se spune că punctul X interior unui patrulater (convex) este *obs*
latura YZ dacă piciorul perpendicularei din X pe dreapta YZ aparţine se

$[YZ]$. Un punct interior patrulaterului se spune că este *k-punct* dacă este
din exact k laturi ale patrulaterului (de exemplu, orice punct din inte
pătrat este 4-punct). Arătaţi că, dacă în interiorul unui patrulater există u
atunci există şi un k-punct pentru $k \in \{2, 3, 4\}$.

6. Determinaţi numerele prime p, q mai mici ca 2005 şi astfel încât
divide cu q, iar $q^2 + 8$ se divide cu p.

* *
*

1. Dacă x este par, atunci $x^5 + 31 \equiv 3 \pmod 4$ şi nu poate fi pătr
Urmează că x este impar şi, deci, y este par. Mai mult, $x^5 \equiv 1$ (mod
$x \equiv 1 \pmod 4$. Să scriem ecuaţia dată în forma

$$x^5 + 2^5 = y^2 + 1.$$

Partea stângă se divide cu $x + 2$ şi $x + 2 \equiv 3 \pmod 4$ va avea un diviz
tipul $4l + 3$. Dar, conform lemei de mai jos, numărul impar $y^2 + 1$ are div
numai de tipul $4m+1$. În concluzie, în ipoteza că ecuaţia dată ar avea solu
ajungem la o contradicţie.

Lemă. *Dacă y^2+1 admite un divizor prim impar p, atunci p este de ti*

Într-adevăr, avem $y^2 \equiv -1 \pmod p$. În conformitate cu mica teo
Fermat, avem şi $y^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. Atunci

$$y^{p-1} \equiv \left(y^2\right)^{(p-1)/2} \equiv (-1)^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod p.$$

Ultima congruenţă spune că $(p-1)/2$ este par, adică $p \equiv 1 \pmod 4$.

2. Notăm $b_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$. Atunci, şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este strict c
verifică relaţia $b_{m+1} \leq r(b_m - b_{m-1})$, $m \in \mathbb{N}^*$. Pentru $c_m = b_m/(b_{m-1}\sqrt{}$
relaţie devine $c_{m+1}c_m + 1 \leq c_m\sqrt{r}$.Deci, pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$ avem

$$c_{m+1} + \frac{1}{c_m} \leq \sqrt{r}.$$

Utilizând inegalitatea $c + \dfrac{1}{c} \geq 2$ $(c > 0)$, obţinem

$$n\sqrt{r} \geq \left(c_{n+1} + \frac{1}{c_n}\right) + \left(c_n + \frac{1}{c_{n-1}}\right) + \cdots + \left(c_2 + \frac{1}{c_1}\right) \geq$$
$$\geq c_{n+1} + 2(n-1) + \frac{1}{c_1} \geq 2(n-1), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Deci $r \geq 4\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, şi rezultă că $r \geq 4$ (numărul $\dfrac{n-1}{n}$ poate
aproape dorim de 1).

3. Fie e_X versorul vectorului $\overrightarrow{SX}$, $X \in \{A, B, C, D\}$. Atunci, ţinân
$\cos\delta = (e_D, e_X)$ (produs scalar), $X \in \{A, B, C\}$, condiţia din enunţ se sc

$$\left|\frac{1}{3}(e_D, e_A) - \frac{2}{3}(e_D, e_B) - \frac{2}{3}(e_D, e_C)\right| = \left|\left(-e_D, \frac{1}{3}e_A - \frac{2}{3}e_B - \frac{2}{3}e_C\right)\right.$$

Notăm $f = \frac{2}{3}e_B + \frac{2}{3}e_C - \frac{1}{3}e_A$. Vectorul f este unitar, căci

$$|f|^2 = (f,f) = \frac{1}{9}\left(4e_B^2 + 4e_C^2 + e_A^2 + 8\,(e_B,e_C) - 4\,(e_A,e_B) - 4\,(e_A,e$$

$$= \frac{1}{9}\,(9 + 8\cos\alpha - 4\cos\alpha - 4\cos\alpha) = 1,$$

unde $\alpha = \measuredangle ASB$. Atunci, condiţia $|(-e_D,-f)| = 1$ este echivalentă cu vectorii e_D şi f sunt coliniari.

Fie SH înălţimea piramidei şi F simetricul punctului A în raport cu lalele următoare arată că vectorii $\overrightarrow{SF}$ şi f sunt coliniari:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}, \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}, \overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right);$$

$$\overrightarrow{AF} = 2\,\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} - 2\,\overrightarrow{SA}\right);$$

$$\overrightarrow{SF} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\left(2\,\overrightarrow{SB} + 2\,\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}\right).$$

Ca urmare, locul geometric căutat este dreapta d_{SF} din care se exclude p

4. Notăm

$$A = \frac{c}{a+2b} + \frac{d}{b+2c} + \frac{a}{c+2d} + \frac{b}{d+2a},$$

$$B = \frac{b+2c}{a+2b} + \frac{c+2d}{b+2c} + \frac{d+2a}{c+2d} + \frac{a+2b}{d+2a},$$

$$C = \frac{a+c}{a+2b} + \frac{b+d}{b+2c} + \frac{a+c}{c+2d} + \frac{b+d}{d+2a}.$$

Constatăm uşor că $2B + C = 5A + 4$. Conform inegalităţii mediilor, av
Ţinând seama de inegalitatea $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} \geq \frac{4}{u+v}$ $(u, v > 0)$, obţinem

$$C \geq (a+c)\,\frac{4}{a+2b+c+2d} + (b+d)\,\frac{4}{b+2c+d+2a} \geq \frac{8}{3}$$

(ultima inegalitate se obţine luând $x = a + c$ şi $y = b + d$ în $\frac{x}{x+2y} + \frac{}{y}$
iar această inegalitate se stabileşte astfel:

$$\frac{x}{x+2y} + \frac{y}{y+2x} = \frac{2x^2+2xy+2y^2}{2x^2+5xy+2y^2} = 1 - \frac{3xy}{2x^2+5xy+2y^2} \geq 1 - \frac{3xy}{9xy}$$

Aşadar, $5A + 4 \geq 8 + \frac{8}{3}$, deci $A \geq \frac{4}{3}$, q.e.d.

5. Să numim *zonă de observaţie* a laturii XY a patrulaterului convex s notată Z_{XY}, care este mărginită de segmentul $[XY]$, perpendicularele duse în extremităţi şi care este situată în acelaşi semiplan cu patrulateru un punct interior patrulaterului este observabil din latura XY dacă şi n aparţine Z_{XY}.

Să examinăm diferitele cazuri ce apar:

a) Dacă patrulaterul nu are unghiuri obtuze, atunci el este dreptun numai 4-puncte.

b) Presupunem că patrulaterul $ABCD$ are un singur unghi obtuz,
Atunci zonele de observare ale laturilor BC şi CD acoperă patrulater
1-puncte nu există.

c) Fie $ABCD$ cu exact două unghiuri obtuze şi vecine, anume $\widehat{B}$ şi
caz patrulaterul este situat în întregime în Z_{AD}, dar şi în $Z_{AB} \cup Z_{BC} \cup$
urmare, nu există 1-puncte.

d) Fie $ABCD$ cu exact două unghiuri obtuze şi opuse, anume $\widehat{B}$ şi
patrulaterul este situat atât în $Z_{AB} \cup Z_{BC}$ cât şi în $Z_{AD} \cup Z_{CD}$ şi nu va ave

e) Fie $ABCD$ cu trei unghiuri obtuze şi fie $\widehat{A}$ unghiul său ascuţit. At
secţia $Z_{BC} \cap Z_{CD}$ este situată în patrulater şi formează paralelogramul LM
în $ABCD$, vârfurile sunt notate în sensul acelor de ceasornic). Fie $\{E\} =$
şi $\{F\} = DM \cap AB$. Se constată uşor că $\triangle ABE \subset Z_{AB}$ şi $\triangle AFD \subset Z_A$
M este 4-punct, punctele segmentului deschis (MF) sunt 3-puncte, iar cel
patrulaterului $AFME$ sunt 2-puncte.

6. Procedăm ca şi în cazul problemei J_6 (problema 6 de la juniori,
mai sus).

Dacă $p = q$, atunci numerele p şi q divid 8 şi, deci, $p = q = 2$, adică
soluţie a problemei.

Să determinăm soluţiile (p, q) cu $p \neq q$. O pereche (x, y) de numere
numeşte *admisă* dacă: (A) x, y sunt relativ prime şi $x \leq y$; (B) $x^2 + 8$ s
y, iar $y^2 + 8$ se divide cu x. Mai întâi, observăm că o pereche admisă es
din numere impare. Apoi, ca şi în problema J_6 se demonstrează că, dacă
pereche admisă, atunci şi perechea $\left(y, \left(y^2+8\right)/x\right)$ este admisă. Acest r
următoarele consecinţe:

1) Dacă $(a_i)_{i \geq 0}$ este şirul dat de $a_0 = a_1 = 1$ şi $a_{i+2} = \left(a_{i+1}^2 + 8\right)/$
atunci orice pereche (a_i, a_{i+1}) este admisă;

2) Dacă $(b_i)_{i \geq 0}$ este şirul dat de $b_0 = 1$, $b_1 = 3$ şi $b_{i+2} = \left(b_{i+1}^2 + 8\right)/$
atunci orice pereche (b_i, b_{i+1}) este admisă.

Să arătăm acum că orice pereche admisă are forma (a_i, a_{i+1}) sau $(b_i, b_i$
un anumit indice $i \geq 0$. Presupunem că ar fi adevărată situaţia contrară
perechea minimală (în raport cu suma $x + y$) care nu-i de nici una dint
precedente. Cum $x^2 + 8 = ay$, $y^2 + 8 = bx$ şi a, x sunt relativ prim
$y^2 + 8 = \dfrac{x^2\left(x^2+16\right) + 8\left(a^2+8\right)}{a^2} = bx$ şi $a^2 + 8$ se divide cu x. Da
atunci (a, x) este pereche admisă şi, datorită minimalităţii, avem $(a, x) =$
sau $(a, x) = (b_i, b_{i+1})$; rezultă că $(x, y) = (a_{i+1}, a_{i+2})$ sau $(x, y) = (b_{i+}$
contradicţie cu presupunerea făcută. Dacă $a > x$, atunci $x^2 + 8 = ay \geq$
$a^2 + 4x + 4$, de unde $x = 1$, $a = y = 3$, din nou contradicţie.

Să scriem acum termenii şirurilor $(a_i)_{i \geq 0}$ şi $(b_i)_{i \geq 0}$ ce nu depăşesc 2
$a_1 = 1$, $a_2 = 9$, $a_3 = 89$, $a_4 = 881$; $b_0 = 1$, $b_1 = 3$, $b_2 = 17$, $b_3 = 99$, $b_4 = 5$
aceste numere sunt prime numai 3, 17, 89, 881 şi 577. Ca urmare, soluţiile
sunt perechile $(p, q) \in \{(2,2), (3,17), (17,3), (89,881), (881,89)\}$.

Soluţiile problemelor propuse în nr. 1 / 20

Clasele primare

P.84. *Aflaţi numărul m ştiind că 47 este mai mare decât $m - 14$ cu*
(*Clasa I*) **Înv. Maria I**

Soluţie. $m - 14 = 47 - 28$; $m - 14 = 19$; $m = 14 + 19$; $m = 33$.

P.85. *Într-un coş sunt 6 mere, iar în altul sunt 5 pere. Cum pot pri mere şi pere astfel încât nici un coş să nu rămână gol?*
(*Clasa I*) **Veronica Corbu, e**

Soluţie. Fiecare copil primeşte câte o pară, unul dintre ei va primi p Merele pot fi împărţite astfel: fiecare copil primeşte câte un măr şi un m în coş sau unul dintre copii primeşte două mere care trebuie să se afle în

P.86. *În urmă cu 4 ani, când tatăl avea 29 de ani, s-a născut fiul. So avea atunci 2 ani, iar acum este de trei ori mai mare. Mama este de pat mare decât aceasta. Câţi ani are acum fiul?*
(*Clasa a II-a*) **Înv. Oana-Maria I**

Soluţie. Deoarece fiul s-a născut în urmă cu 4 ani, acesta are acum v ani.

P.87. *Un acrobat cade pe o plasă elastică de la o anumită înălţime ş după ce atinge plasa la jumătatea distanţei dintre plasă şi locul de un anterior. Ştiind că atinge de 3 ori plasa şi că ultima oară s-a ridicat la în 2 m, iar plasa este montată la 2 m deasupra solului, să se afle distanţa de unde a căzut prima dată până la sol.*
(*Clasa a II-a*) **Andrei Stativă,**

Soluţie. A treia oară cade de la $2m + 2m = 4m$ faţă de plasă. A doua de la $4m + 4m = 8m$ faţă de plasă. Prima oară a căzut de la $8m + 8m =$ de plasă. Distanţa de la locul de unde a căzut până la sol este de $16m + 2$

P.88. *Trăiau odată o babă şi un moşneag; moşul avea 100 ani, ia amândoi erau albi ca iarna şi trişti ca vremea cea rea pentru că erau s spune că ar fi avut un copil pe când vârsta babei era jumătate din jumătate a vârstei moşneagului şi că acesta ar fi plecat în lume când vârsta moşn de două ori cât vârsta aceea a babei. Fiul nu s-a mai întors. Ce vârstă ave a plecat în lume?*
(*Clasa a III-a*) **Înv. Ileana Ro**

Soluţie. La naşterea fiului, baba avea: $100 : 2 : 2 = 25$ (ani). La naşt moşul avea: $25 + 10 = 35$ (ani). Fiul a plecat în lume la vârsta de $50 - 35$

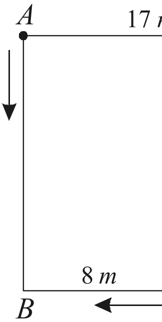
P.89. *La un concurs de biciclete, triciclete şi maşinuţe (cu patru roţ Bogdan numără roţile vehiculelor şi observă că sunt 34. Câte vehicule fiecare fel? Găsiţi toate posibilităţile, ştiind că numărul vehiculelor de fie depăşeşte 5.*
(*Clasa a III-a*) **Înv. Doiniţa Sp**

Soluţie. Nu putem avea un număr nepereche de triciclete deoarece nur de roţi este număr pereche. Putem avea două sau patru triciclete. Dacă

triciclete, înseamnă că numărul roţilor bicicletelor şi maşinuţelor este 3
$34 - 6 = 28$. În acest caz avem 4 biciclete şi 5 maşinuţe. Dacă avem 4
atunci numărul roţilor bicicletelor şi maşinuţilor este $34 - 4 \cdot 3 = 34 - 1$
acest caz putem avea: o bicicletă şi 5 maşinuţe sau 3 biciclete şi 4 maşi
biciclete şi 3 maşinuţe.

P.90. *Lungimea laturii unui pătrat este de 17 m. O persoană plea
vârf al pătratului şi, mergând în acelaşi sens pe laturile acestuia, parcurge
de 637 m. Din punctul în care a ajuns se întoarce şi parcurge 773 m.
distanţă se va situa în final persoana faţă de punctul de plecare.*
(*Clasa a III-a*) **Oxana Pascal, e**

Soluţie. Perimetrul pătratului este $4 \times 17m = 68m$. Considerăm primul sens de parcurs de la A către B. Avem $10 \cdot 68m = 680m = 637m + 43m$. Înseamnă că persoana a parcurs conturul în întregime de 9 ori, iar din al zecelea contur a parcurs $68m - 43m = 25m$, oprindu-se în punctul M. În punctul M se întoarce şi parcurge $773m$. Avem $773m = 680m + 68m + 25m$, ceea ce înseamnă că a parcurs conturul în întregime de 11 ori, iar din al doisprezecelea contur a parcurs $25m$, adică $MB + BA$. În final călătorul ajunge din nou în punctul de unde a plecat iniţial. Distanţa ceruta este de $0m$.



P.91. *Se împart două numere naturale. Dacă împărţitorul, câtul şi
trei numere consecutive cu suma 30, să se afle deîmpărţitul.*
(*Clasa a IV-a*) **Vasile Solcanu, Bogdăneşti**

Soluţie. Cele trei numere consecutive sunt 9, 10 şi 11. Formula îm
rest este $D = I \times C + R$, $R < I$. Se observă că 11 nu poate fi împărţi
$D = 10 \times 11 + 9 = 119$ sau $D = 9 \times 11 + 10 = 109$.

P.92. *Observă regula şi completează, apoi verifică rezultatele găsite:* 2
$2 + 4 + 6 = 4 + 4 + 4$*;* $2 + 4 + 6 + 8 = 5 + 5 + 5 + 5$*;* $2 + 4 + 6 + \cdots$
$2 + 4 + 6 + \cdots + 14 = \square$*;* $\ldots$ *;* $2 + 4 + 6 + \cdots + (a + a) = \square$.
(*Clasa a IV-a*) **Valeria Gheorghiţă, e**

Soluţie. $2 + 6 = 3 + 3$; $2 + 4 + 6 = (2 + 6) + 4 = 8 + 4 = 4 + 4 +$
$6 + 8 = (2 + 8) + (4 + 6) = 10 + 10 = 5 + 5 + 5 + 5$. Se observă că ter
se repetă în membrul drept este jumătatea sumei dintre primul termen
termen din membrul stâng. Acest termen se repetă de un număr de
numărul termenilor din membrul stâng. În suma $2 + 4 + 6 + \cdots + 12$ avem
iar $2 + 12 = 7 + 7$. Obţinem: $2 + 4 + 6 + \cdots + 12 = \underbrace{7 + 7 + \cdots + 7}_{6 \text{ ori}}$; $2 + 4 + 6 +$
$\underbrace{8 + 8 + \cdots + 8}_{7 \text{ ori}}$; $2 + 4 + 6 + \cdots + (a + a) = \underbrace{(a + 1) + (a + 1) + \cdots + (a +}_{a \text{ ori}}$

P.93. *O foaie de hârtie dreptunghiulară se îndoaie de-a lungul de 6 ori,
se 7 benzi egale şi suprapuse. Dreptunghiul obţinut se îndoaie de-a latu
rezultând în final un pătrat cu perimetrul de 12 cm. Să se afle perimetr*

ghiului iniţial.
(*Clasa a IV-a*) **Petru As**

Soluţie. După prima serie de îndoiri se obţine un dreptunghi care ar
egală cu lungimea dreptunghiului iniţial, iar lăţimea este egală cu latura
obţinut în final, a cărui latură are lungimea $12m : 4 = 3m$. Deoarece dr
iniţial a fost îndoit de-a lungul de 6 ori, înseamnă că lăţimea lui este 7×3
Ultimele 9 îndoiri sunt echivalente cu îndoirile de-a latul ale dreptunghi
de unde rezultă că lungimea dreptunghiului iniţial este $10 \times 3m = 30m$.
dreptunghiului iniţial este $2 \cdot (30m + 21m) = 2 \cdot 51m = 102m$.

Clasa a V-a

V.56. *Se consideră numărul* $A = 5 + 5^2 + 5^3 + \cdots + 5^{2005}$.

a) Să se arate că A *nu este pătrat perfect.*

b) Să se găsească 5 *divizori mai mici decât* 100 *ai lui* A.

Andrei Tofan,

Soluţie. *a*) Evident că $A \,\vdots\, 5$, însă $A \not\vdots\, 5^2$, prin urmare A nu poate fi pătr

b) Suma A are 2005 termeni, pe care îi vom grupa câte 5:

$$A = \left(5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^5\right) + \cdots + \left(5^{2001} + 5^{2002} + 5^{2003} + 5^{2004} + 5^{20\ldots}\right.$$
$$= \left(5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^5\right)\left(1 + 5^5 + \cdots + 5^{2000}\right) = 3905\left(1 + 5^5 + \cdots\right.$$

Cum $3905 = 5 \cdot 11 \cdot 71$, numărul A admite ca divizori pe 1, 5, 11, 55, 71.

V.57. *Aflaţi restul împărţirii prin* 47 *a numărului* $N = \overline{1268\underbrace{99\ldots9}_{2005 \text{ cifre}}}$.

Alexandru Negrescu, elev,

Soluţie. Observăm că $N + 1 = \overline{1269\underbrace{00\ldots0}_{2005 \text{ cifre}}} = 1269 \cdot 10^{2005} = 47 \cdot 27 \cdot 1$

$N + 1$ se divide cu 47. Atunci restul împărţirii lui N prin 47 este $47 - 1 =$

V.58. *Aflaţi numerele naturale* x, y, z *cu proprietatea că*

$$2^{4x+1} + 2^{3y+1} + 2^{2z+1} = 9248.$$

Cristian - Cătălin Bud

Soluţie. Deoarece $9248_{10} = 10010000100000_2$, egalitatea din enunţ
torită unicităţii scrierii unui număr în baza 2, la faptul că $(4x + 1, 3y + 1$
$\{(13, 10, 5), (13, 5, 10), (10, 13, 5), (10, 5, 13), (5, 10, 13), (5, 13, 10)\}$. Cerce
re caz în parte, obţinem soluţii numai în prima şi penultima situaţie, anume
$\{(1, 3, 6), (3, 3, 2)\}$.

V.59. *Dacă* $\overline{a_1a_2\ldots a_n}^2 - \overline{b_1b_2\ldots b_n}^2 = \overline{c_1c_2\ldots c_n}^2$, *să se arate că*

$$\overline{a_1a_2\ldots a_na_1a_2\ldots a_n}^2 - \overline{b_1b_2\ldots b_nb_1b_2\ldots b_n}^2 = \overline{c_1c_2\ldots c_nc_1c_2\ldots c}$$

Petru As

Soluţie. Notăm $A = \overline{a_1a_2\ldots a_n}$, $B = \overline{b_1b_2\ldots b_n}$, $C = \overline{c_1c_2\ldots c_n}$. Obs

$$\overline{a_1a_2\ldots a_na_1a_2\ldots a_n}^2 = \left(A \cdot 10^n + A\right)^2 = A^2\left(10^n + 1\right)^2$$

şi încă două relaţii similare. Astfel, egalitatea de demonstrat revine la

$$A^2\left(10^n + 1\right)^2 - B^2\left(10^n + 1\right)^2 = C^2\left(10^n + 1\right)^2,$$

care se obţine înmulţind ambii membri ai ipotezei cu $(10^n+1)^2$.

V.60. *Să se determine ultimele două cifre ale numărului* $7^{9^{9^9}}$.

Artur Bălăucă,

Soluţie. Urmărind ultimele două cifre ale numărului 7^n (pe care le
$U_2(7^n)$), observăm că $U_2(7^{4k})=01$, $U_2(7^{4k+1})=07$, $U_2(7^{4k+2})=49$, U_2
43. Pe de altă parte, cum $9=\mathcal{M}4+1$, atunci orice putere a lui 9 (deci
de forma $\mathcal{M}4+1$. Din aceste două observaţii, rezultă că $U_2\left(7^{9^{9^9}}\right)=07$.

Clasa a VI-a

VI.56. *Determinaţi, în funcţie de numărul întreg x, cel mai mare div*
al numerelor $2005x+2$ *şi* $2006x+3$.

Tamara C

Soluţie. Notăm $d=(2005x+2, 2006x+3)$. Vom aplica algoritmul
dacă $a=bq+r$, $a,b,q\in\mathbb{Z}$, $r<b$, atunci $(a,b)=(b,r)$. Observăm că

$$2006x+3=(2005x+2)\cdot 1+(x+1);$$
$$2005x+2=(x+1)\cdot 2005+(-2003),$$

prin urmare $(2005x+2, 2006x+3)=(2005x+2, x+1)=(x+1, 2003)$.
este număr prim, deci:

a) Dacă $x+1\,\vdots\,2003$, atunci $d=2003$;

b) Dacă $x+1\,\not\vdots\,2003$, atunci $d=1$.

VI.57. *Un vânzător de autoturisme scade procentul beneficiului său de*
20% *din valoarea vânzărilor. Datorită scăderii preţurilor, creşte valoarea*
Aflaţi procentul cu care a crescut valoarea vânzărilor, ştiind că beneficiu
cu 10%*.*

Marius Fa

Soluţie. Notăm cu x valoarea iniţială a vânzărilor şi cu p procentul
a valorii vânzărilor. Iniţial, beneficiul global era 25% din x, iar în final ace
20% din $((100+p)\,\%$ din $x)$. Conform ipotezei, putem scrie ecuaţia:

$$\frac{20}{100}\cdot\frac{100+p}{100}\cdot x=\frac{110}{100}\cdot\frac{25}{100}\cdot x\Leftrightarrow p=37,5\,.$$

Prin urmare, vânzările au crescut cu $37,5\%$.

VI.58. *Se aşează cifrele* 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 *într-o ordine oarecare o*
număr A. Se aşează apoi aceleaşi cifre în altă ordine, obţinând numărul
se arate că A nu se divide cu B.

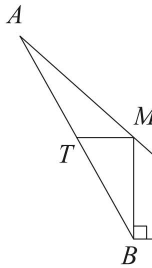
Cristian - Cătălin Bud

Soluţie. Ştim că un număr natural şi numărul dat de suma cifrelo
acelaşi rest la împărţirea prin 9. Cum suma cifrelor lui A, respectiv B, es
$4+5+6+8+9=37$, atunci $A=9a+1$, $B=9b+1$, cu $a,b\in\mathbb{N}$.

Presupunem prin absurd că $A\,\vdots\,B$, atunci $A>B$ şi $A=B\,c\Leftrightarrow 9a+1=$
cu $1<c<5$ (deoarece $A\leq 9865432$, iar $B\geq 2345689$). Obţinem
$9(a-bc)=c-1$, relaţie imposibilă deoarece $c\in\{2,3,4\}$ şi în mem
nu putem avea multiplu de 9. În concluzie A nu se poate divide cu B.

VI.59. *Fie $\triangle ABC$ cu $m(\widehat{B}) = 120^\circ$. Dacă mediana $[BM]$ este perp*
pe BC, arătaţi că $AB = 2BC$.

Bogdan Posa, elev, Motru (Gorj)



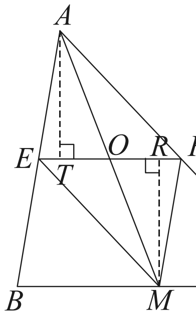
Soluţie. Fie T mijlocul lui $[AB]$. Cum $[MT]$ este linie mijlocie în $\triangle ABC$, rezultă că $MT = \dfrac{1}{2}BC$ şi $MT \parallel BC$. Însă $MB \perp BC$, deci $\triangle BMT$ va fi dreptunghic în M, cu $m(\widehat{MBT}) = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$. Prin urmare, $MT = \dfrac{1}{2}BT$, adică $BC = BT$, de unde concluzia.

VI.60. *Fie $\triangle ABC$ şi punctele $E \in (AB)$, $F \in (AC)$ şi $M \in (BC)$*
$AE = EB$, iar între $\triangle AEF$ şi $\triangle EFM$ să existe o congruenţă. Să se ar

a) F este mijlocul lui $[AC]$;

b) $[AM]$ este mediană sau înălţime.

Ioan Săcăleanu



Soluţie. *a)* Fie $\{O\} = AM \cap EF$, iar T, R proiecţiile pe EF ale punctelor A, respectiv M. Cum între $\triangle AEF$ şi $\triangle EFM$ există o congruenţă, cele două triunghiuri vor fi echivalente, deci

$$S_{AEF} = S_{MEF} \Leftrightarrow \frac{1}{2}EF \cdot AT = \frac{1}{2}EF \cdot MR \Leftrightarrow AT = MR.$$

Însă $AT \parallel MR$ şi rezultă că $ATMR$ este paralelogram. De aici, O este mijlocul lui $[AM]$, adică $[EO]$ este linie mijlocie în $\triangle ABM$ şi atunci $EO \parallel BC$. Cu reciproca teoremei liniei mijlocii în $\triangle ABC$, obţinem că F este mijlocul lui $[AC]$.

b) Deosebim trei situaţii:

i) $\widehat{AEF} \equiv \widehat{EFM}$; atunci $AE \parallel FM$ şi, cu reciproca teoremei liniei mijlo
că M este mijlocul lui $[BC]$, adică $[AM]$ este mediană.

ii) $\widehat{AEF} \equiv \widehat{FEM}$; atunci $\triangle AET \equiv \triangle MER$ (C.U.), deci $ET = ER$, p
$T = R$. Rezultă în acest caz că $[AM]$ este înălţime.

iii) $\widehat{AEF} \equiv \widehat{EMF}$; atunci, dacă $\widehat{AFE} \equiv \widehat{FEM}$ vom obţine ca la *i)* că
mediană, iar dacă $\widehat{AFE} \equiv \widehat{EFM}$, $[AM]$ va fi înălţime.

Clasa a VII-a

VII.56. *Fie $x, y \in R^*$ cu $x^2 - 2y = y^2 + xy = 4$. Să se arate că $x^2 -$*

Gigel Buth, S

Soluţie. Prin scăderea relaţiilor din enunţ obţinem că $x^2 - y^2 = y$
înlocuind $y = \dfrac{1}{2}\left(x^2 - 4\right)$, găsim că

$$x^2 - y^2 = \frac{1}{2}\left(x^3 + 2x^2 - 4x - 8\right).$$

Pe de altă parte, eliminând direct pe y între relaţiile date, obţinem

$$x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 4x.$$

Din (1) şi (2) rezultă că $x^2 - y^2 = \frac{1}{2} \cdot 4x$, adică $x^2 - 2x = y^2$.

VII.57. *Fie $x \in (0,1)$, iar $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Arătaţi că $nx^2 + 2^n > n +$*

Ion Vişan

Soluţie. Avem succesiv:

$$2^n - (1+x)^n = (2-1-x)\Big[2^{n-1} + 2^{n-2}(1+x) + \cdots + 2(1+x)^{n-2} + (1$$

$$> (1-x)\Big[(1+x)^{n-1} + (1+x)^{n-2}(1+x) + \cdots + (1+x)(1+x)^{n-2} + (1$$

$$= (1-x) \cdot n \cdot (1+x)^{n-1} \geq (1-x) \cdot n \cdot (1+x) = n\left(1 - x^2\right),$$

de unde concluzia problemei.

VII.58. *Fie $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât mediile aritmetică, geometrică ş ale lor să fie laturi ale unui triunghi dreptunghic. Aflaţi sinusul celui mai unghiurile triunghiului.*

Romanţa Ghiţă şi Ioan Gh

Soluţie. Cum $m_a \geq m_g \geq m_h$, ipotenuza va fi m_a, iar cel mai unghiuri va fi cel ce se opune lui m_h. Cum m_a, m_g, m_h sunt laturi ale un dreptunghic, în ipoteza nerestrictivă $a > b$ avem:

$$m_a^2 = m_g^2 + m_h^2 \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{ab}\right)^2 + \left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{(a+b)^2}{4} - ab =$$

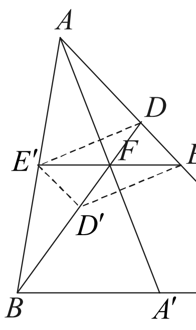
$$\frac{(a-b)^2}{4} = \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2} \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 4ab \Leftrightarrow a^2 - 4ab - b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b\Big(2$$

Evident, convine doar $a = b\left(2 + \sqrt{5}\right)$. Sinusul unghiului dorit este

$$\sin\alpha = \frac{m_h}{m_a} = \frac{4ab}{(a+b)^2} = \frac{4b^2\left(2+\sqrt{5}\right)}{b^2\left(3+\sqrt{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

VII.59. *Fie $\triangle ABC$ şi A' mijlocul lui $[BC]$. Dacă $D \in (AC)$, $BD \cap$ şi paralela prin F la BC taie AC în E, să se arate că $\frac{1}{DE} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{C}$*

Claudiu - Ştefan



Soluţia 1. Fie $\{E'\} = EF \cap AB$ şi $D' \in [BF]$ astfel încât $DF = D'F$. Cum $[AA']$ mediană în $\triangle ABC$ şi $EE' \parallel BC$, atunci $EF = E'F$. Rezultă că $DED'E'$ este paralelogram, deci $[D'E']$ este paralel şi congruent cu $[DE]$. De aici, $\triangle BE'D' \sim \triangle BAD$, adică $\frac{BE'}{BA} = \frac{E'D'}{AD}$. Însă $\frac{BE'}{BA} = \frac{CE}{CA}$, deci $\frac{E'D'}{AD} = \frac{CE}{CA}$, de unde $\frac{1}{AC} = \frac{E'D'}{AD \cdot CE} = \frac{ED}{AD \cdot CE}$. Obţinem succesiv:

$$\frac{AC}{AD \cdot CE} = \frac{1}{ED} \Leftrightarrow \frac{AD + DE + CE}{AD \cdot CE} = \frac{1}{ED} \Leftrightarrow$$

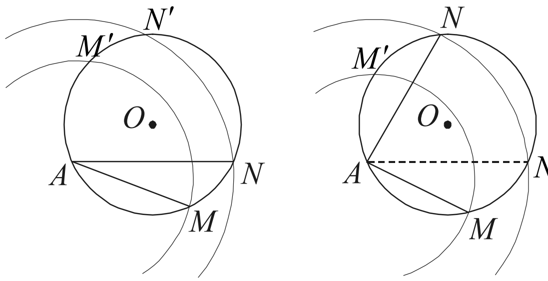
$$\frac{1}{ED} = \frac{1}{CE} + \frac{DE}{AD \cdot CE} + \frac{1}{AD} \Leftrightarrow \frac{1}{DE} = \frac{1}{CE} + \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}.$$

Soluţia 2. Fie $AC = b$ şi $\dfrac{AF}{AC} = k$, $k \in (0,1)$. Din teorema lu
în $\triangle AA'C$ cu transversala $B - F - D$, obţinem $\dfrac{BA'}{BC} \cdot \dfrac{CD}{DA} \cdot \dfrac{AF}{FA'} =$
$\dfrac{AF}{FA'} = \dfrac{2k}{1-k}$. Deoarece $\triangle AFE \sim \triangle AA'C$, atunci $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{2k}{1+k}$ şi $AE =$
Prin urmare, $DE = AE - AD = \dfrac{k(1-k)}{1+k} \cdot b$ şi $CE = AC - AE = \dfrac{1-k}{1+k}$
din enunţ este echivalentă cu $\dfrac{1+k}{k(1-k)} = \dfrac{1}{k} + \dfrac{1+k}{1-k} + 1$, care se verifică

VII.60. *În cercul $\mathcal{C}$ se consideră coardele $[AM]$ şi $[AN]$ astfel încât*
1) *Să se determine mulţimea punctelor $X \in \mathcal{C}$ ce îndeplinesc condi*
$AX \leq AN$.
2) *În ce caz mulţimea găsită este un arc de cerc?*

Temistocle Bî

Soluţie. 1) Considerăm cercurile de centru A şi raze $[AM]$ şi $[AN$
intersectează a doua oară cercul $\mathcal{C}$ în punctele M' şi respectiv N'. Pun
satisfac condiţia $AM \leq AX \leq AN$ se află în coroana determinată de ace
Punctele $X \in \mathcal{C}$ ce satisfac această condiţie se află pe arcele cercului $\mathcal{C}$ i
de coroană.



Dacă O, centrul cercului $\mathcal{C}$, este exterior unghiului $\widehat{MAN}$, atunci mu
tată este $\overset{\frown}{MN} \cup \overset{\frown}{M'N'}$. Dacă O este interior unghiului $\widehat{MAN}$, atunci aceas
este $\overset{\frown}{MN'} \cup \overset{\frown}{M'N}$ (acest caz se reduce la precedentul prin înlocuirea coard
$[AN'])$.
2) În ambele cazuri, obţinem un arc de cerc atunci când $[AN]$ este di

Clasa a VIII-a

VIII.56. *Să se determine $x, y, z \in \mathbb{R}^*$ pentru care $x^3 - y^3 + z^3 = 8$, x*

Andrei - Sorin Cozma,

Soluţie. Este cunoscută identitatea

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a), \quad a, b, c \in$$

Pentru $a = x$, $b = -y$, $c = z$, folosind şi ipoteza, obţinem că $8 = 8 + 3(x -$
$(x+z)$, deci $x - y = 0$, $z - y = 0$ sau $x + z = 0$. Înlocuind pe rând în a do
găsim soluţiile sistemului: $\{(2, \alpha, \alpha), (\beta, -2, -\beta), (\gamma, \gamma, 2) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^*\}$.

VIII.57. *Fie $a,b,c>0$ astfel încât $a+b+c=1$. Să se arate că*
$$\frac{1}{\sqrt{(1-a)(1-b)}}+\frac{1}{\sqrt{(1-b)(1-c)}}+\frac{1}{\sqrt{(1-c)(1-a)}}\geq\frac{9}{2}.$$

Cristian Săvescu, elev

Soluţie. Evident că a, b, c sunt subunitare, deci au sens radicalii. inegalitatea mediilor $MG\leq MA$, obţinem
$$\frac{1}{\sqrt{(1-a)(1-b)}}\geq\frac{1}{\frac{1-a+1-b}{2}}=\frac{1}{\frac{2-(1-c)}{2}}=\frac{2}{1+c}$$
şi încă două relaţii analoage. Folosind acum inegalitatea mediilor MH forma $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\geq n^2/\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$, deducem că
$$\sum\frac{1}{\sqrt{(1-a)(1-b)}}\geq2\left(\frac{1}{1+c}+\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}\right)\geq2\cdot\frac{9}{3+(a+b+$$

Notă. Mai general, dacă $a_1,a_2,\ldots,a_n>0$, a.î. $a_1+a_2+\cdots+a_n=$
$$\frac{1}{\sqrt{(k-a_1)(k-a_2)}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{(k-a_n)(k-a_1)}}\geq\frac{n^2}{(n-1)k}.$$

VIII.58. *Fie $x,y,z\in(0,\infty)$ cu $x+y+z\geq3$. Să se arate că x^n+y $\forall n\in\mathbb{N}$.*

Romeo Ili

Soluţiile. Pentru $n=0$, concluzia este evidentă; fie deci $n\geq1$. inegalităţii mediilor $MA\geq MG$, are loc:
$$x^n+(n-1)=x^n+\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n-1}\geq n\cdot\sqrt[n]{x^n\cdot1\cdot1\cdot\ldots\cdot1}=nx$$
pentru $x\in(0,\infty)$ şi $n\geq2$; pentru $n=1$, inegalitatea (1) se transformă în Aplicând de trei ori (1), obţinem că
$$x^n+y^n+z^n+3(n-1)\geq nx+ny+nz=n(x+y+z)\geq3n,$$
de unde rezultă concluzia.

VIII.59. *Determinaţi $x,y,z\in\mathbb{R}$, ştiind că $x+y+z=1$, iar $xy+(x+y$*

Gheorghe Molea, Curtea

Soluţia 1. Avem:
$$(x+y+z)^2=1\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)=1\Leftrightarrow$$
$$x^2+y^2+z^2+2\left(\frac{4}{3}-x-y\right)=1\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-2y=-$$
$$(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=\frac{1}{3}.$$

Pe de altă parte, din binecunoscuta inegaliate $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geq\frac{1}{3}(\alpha+\beta$ se reduce, după calcule, la $(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\geq0$), pentru

$\beta = y - 1$, $\gamma = z$, obţinem

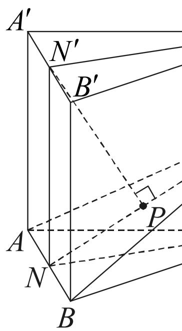
$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}\left[(x-1)+(y-1)+z\right]^2 = \frac{1}{3}\cdot(-1)^2 =$$

cu egalitate pentru $x - 1 = y - 1 = z$. Relaţia $(*)$ arată că se atinge ega
avem, într-adevăr, $x-1 = y-1 = z \Leftrightarrow x = z+1$, $y = z+1$. Înlocuind în x
obţinem că $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{2}{3}$, $z = -\frac{1}{3}$.

Soluţia 2. Eliminând pe z între cele două relaţii, obţinem $xy+(x+y)$ (
$\frac{4}{3}$ sau încă $3x^2+3y^2+3xy-6x-6y+4=0$. Considerând această relaţie
de gradul doi cu necunoescuta x, avem: $3x^2 + x(3y-6) + 3y^2 - 6y + 4$
$x \in \mathbb{R}$, atunci $\Delta_x \geq 0$; iar $\Delta_x = -3(3y-2)^2 \geq 0$ implică $y = \frac{2}{3}$. Pen
găsim $x = \frac{2}{3}$ şi $z = -\frac{1}{3}$.

VIII.60. *Se consideră prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ cu*
şi $AA' = 3\sqrt{3}$. Să se arate că pentru fiecare număr $a \in \left(0, 3\sqrt{3}\right)$, există
puncte M_a', M_a'' pe dreapta CC' astfel încât $d(B', (M_a'AB)) = d(B', (M_a''$

Mirela M



Soluţie. Fie $M \in CC'$ şi vom nota cu x lungimea segmentului CM, considerând $x \geq 0$ dacă $M \in [CC'$ şi $x < 0$ dacă $M \in CC' \setminus [CC'$. Deoarece $A'B' \parallel AB$ şi $AB \subset (MAB)$, atunci $A'B' \parallel (MAB)$, deci $d(B', (MAB)) = d(N', (MAB))$, unde N' este mijlocul lui $[A'B']$. Fie N mijlocul lui $[AB]$, iar P proiecţia lui N' pe MN. Cum $(NCC') \perp (ABN)$, atunci vom avea că $N'P \perp (ABM)$, adică $d(B', (MAB)) = N'P$.

Din asemănarea imediată $\triangle N'NP \sim \triangle NMC$, obţinem că $\frac{N'P}{NC} = \frac{NN'}{MN} \Leftrightarrow N'P = \frac{NC \cdot NN'}{MN} = \frac{2\cdot 3\sqrt{3}}{\sqrt{4+x^2}}$. (Am folosit egalităţile evidente $NC = 2$, $NN' = 3\sqrt{3}$
$\sqrt{NC^2 + MC^2} = \sqrt{4 + |x|^2} = \sqrt{4+x^2}$.)

Pentru fiecare valoare $a \in \left(0, 3\sqrt{3}\right)$, ecuaţia $N'P = a \Leftrightarrow \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{4+x^2}} =$
două soluţii, anume $x = \pm\frac{2\sqrt{27-a^2}}{a}$, de unde concluzia problemei.

Clasa a IX-a

IX.56. *Determinaţi numerele reale pozitive x, y, z, t pentru care $x+y+$*
iar $xy + xz + xt + yz + yt + zt + 475 = xyzt$.

Lucian Tuţescu şi Liviu Smarandache

Soluţie. Conform inegalităţii mediilor,

$$\left(\frac{x+y+z+t}{4}\right)^4 \geq xyzt \Leftrightarrow xyzt \leq 625.$$

Tot conform inegalităţii mediilor, obţinem

$$xyzt = xy + xz + xt + yz + yt + zt + 475 \geq 6\sqrt[6]{xy \cdot xz \cdot xt \cdot yz \cdot yt \cdot zt}$$
$$= 6\sqrt{xyzt} + 475.$$

Cu notaţia $a = \sqrt{xyzt}$, inegalitatea precedentă devine

$$a^2 \geq 6a + 475 \Leftrightarrow (a-25)(a+19) \geq 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty, -19] \cup [25, +$$

Însă evident că $a > 0$, prin urmare $a \in [25, +\infty)$, i.e. $xyzt \geq 625$. Re
atinge egalitatea în (1), fapt care are loc atunci când $x = y = z = t = 5$.

IX.57. *Să se determine toate funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea*

$$f(f(f(x)+y) \cdot f(x - f(y))) = x^2 - y^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Adrian Zahariuc, ele

Soluţie. Pentru $x = y = 0$, obţinem că $f(f(f(0)) \cdot f(-f(0))) =$
$a = f(f(0)) \cdot f(-f(0))$, deci $f(a) = 0$. Pentru $x = y = a$, găsim că

$$f(f(f(a)+a) \cdot f(a - f(a))) = 0,$$

adică $f(f(a) \cdot f(a)) = 0$, prin urmare $f(0) = 0$.

Luăm acum y oarecare şi $x = f(y)$ şi obţinem $f^2(y) - y^2 = 0$, deci f
$\forall x \in \mathbb{R}$. Considerăm mulţimile $A = \{x \in \mathbb{R}^* \mid f(x) = x\}$ şi $B = \{x \in \mathbb{R}^* \mid$
Dacă $A, B \neq \mathbb{R}^*$, există $x \in A$ şi $y \in B$ cu $x \neq \pm y$ şi, întorcându-ne în ecua

$$x^2 - y^2 = f(f(f(x)+y) \cdot f(x - f(y))) = \pm (x+y)^2 \Leftrightarrow x - y = \pm ($$

ceea ce contrazice $x \neq \pm y$.

Rezultă că $A = \mathbb{R}^*$ sau $B = \mathbb{R}^*$, adică $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ sau $f(x) = -$
Aceste două funcţii verifică ecuaţia, deci sunt soluţii.

IX.58. *Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Determinaţi $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, c \in \mathbb{R}$ pentru*

$$[x] + [x + a_1] + \cdots + [x + a_{n-1}] = [cx], \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(În legătură cu G.42 din RecMat 1/2003.)

Iuliana Georgescu şi Paul Georg

Soluţie. Notăm $k_i = [a_i]$, $b_i = \{a_i\}$, $i = \overline{0, n-1}$. Cum $b_i \in [0,1)$ pen
luând $x = 0$ în relaţia din ipoteză obţinem $k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-1} = 0$, de u

$$[x] + [x + b_1] + \cdots + [x + b_{n-1}] = [cx], \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Să presupunem, pentru fixarea ideilor, că $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_{n-1}$; în oric
raţionează analog. Luând, pe rând, $x = 1$, apoi $x = -1$ în (1), obţinem
respectiv $[-c] = -n$, prin urmare $c = n$.

Pentru $x = -b_1$ în (1), obţinem că $-1 = [-nb_1]$, deci $b_1 \leq \dfrac{1}{n}$. Ap
$x = -b_2$ în (1), obţinem că $-2 = [-nb_2]$, deci $b_2 \leq \dfrac{2}{n}$ şi, în continuar
$\forall i = \overline{1, n-1}$.

Luăm acum $x = \dfrac{1}{n}$ în (1) şi găsim că $\left[\dfrac{1}{n} + b_{n-1}\right] = 1$, deci $b_{n-1} \geq$

concluzie, $b_{n-1} = \dfrac{n-1}{n}$. Luând succesiv $x = \dfrac{2}{n}, \ldots, x = \dfrac{n-1}{n}$ în (1), c

$b_i = \dfrac{i}{n}, \forall i = \overline{1, n-1}$.

În concluzie, $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$ este o mulţime de forma $\left\{k_1 + \dfrac{1}{n}, k_2\right.$

$\left. k_{n-1} + \dfrac{n-1}{n}\right\}$, cu $k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-1} = 0$, $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1} \in \mathbb{Z}$, iar $c =$

IX.59. *Fie $\mathcal{C}(I, r)$ cercul înscris în $\triangle ABC$. Să se arate că*

$$IA \cdot IB + IB \cdot IC + IC \cdot IA \geq 12r^2.$$

D. M. Bătineţu - Giurgiu, I

Soluţia 1. Evident că $IA + r \geq AI_A \geq h_a$, unde $I_A = \mathrm{Pr}_{BC}\, I$, deci:

$IA + r \geq h_a \Leftrightarrow a\,IA + ar \geq ah_a = 2S = ar + br + cr \Leftrightarrow a\,IA \geq (b+c)\,r \Leftrightarrow \frac{I}{}$

şi încă două inegalităţi similare. Prin urmare,

$$\frac{IA \cdot IB}{r^2} \geq \frac{b+c}{a} \cdot \frac{c+a}{b} \geq \frac{4c\sqrt{ab}}{ab} = \frac{4c}{\sqrt{ab}}$$

şi analoagele. Prin urmare, obţinem

$$\frac{IA \cdot IB}{r^2} + \frac{IB \cdot IC}{r^2} + \frac{IC \cdot IA}{r^2} \geq 4 \sum \frac{a}{\sqrt{bc}} \geq 4 \cdot 3 \sqrt[3]{\frac{abc}{\sqrt{ab}\sqrt{bc}\sqrt{ca}}} =$$

$$IA \cdot IB + IB \cdot IC + IC \cdot IA \geq 12r^2,$$

cu egalitate în cazul triunghiului echilateral.

Soluţia 2 (Mihai Haivas). Cum $IA = \dfrac{r}{\sin \frac{A}{2}}$ şi analoagele, trebuie

străm că $\sum \dfrac{1}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}} \geq 12$. Conform inegalităţii mediilor şi bine

$8 \sin \dfrac{A}{2} \sin \dfrac{B}{2} \sin \dfrac{C}{2} \leq 1$, avem:

$$\sum \frac{1}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{1}{\sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2}}} \geq 3\sqrt[3]{8^2} = 12.$$

IX.60. *Fie ABC un triunghi ascuţitunghic cu $a < b < c$. Cercul $\mathcal{C}(I$ triunghiului este tangent dreptelor BC, CA şi AB în punctele D, E ş F. Dreapta ID intersectează CA în D' şi AB în D'', IE intersectează şi BC în E'', iar IF intersectează BC în F' şi CA în F''. Arătaţi c $D'D'' + F'F''$.*

Temistocle Bî

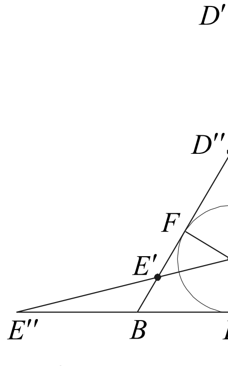
Soluţie. Notăm cu H_a, H_b, H_c picioarele înălţimilor din vârfurile A, B tiv C. Condiţia $a < b < c$ impune ordinile următoare: $B - D - H_a - C$, $C -$ şi $A - F - H_c - B$. De aici şi din faptul că $ID \parallel AH_a$, deducem că pun D'' au poziţiile indicate pe figură; la fel se procedează pentru precizarea punctelor E', E'' şi F', F''.

Vom utiliza următoarele relaţii cunoscute: $AE = AF = p - a$, $BD = B$

$CD = CE = p - c$ $(2p = a + b + c)$. Cu aceste pregătiri, avem:

$$D'D'' = DD' - DD'' = (p-c)\operatorname{tg} C - (p-b)\operatorname{tg} B,$$
$$E'E'' = EE'' - EE' = (p-c)\operatorname{tg} C - (p-a)\operatorname{tg} A,$$
$$F'F'' = FF' - FF'' = (p-b)\operatorname{tg} B - (p-a)\operatorname{tg} A$$

şi, ca urmare, stabilirea egalităţii $E'E'' = D'D'' + F'F''$ este imediată.



Notă. Prof. **Titu Zvonaru** observă că, dacă înlocuim cercul înscris cu cercul A-exînscris, concluzia problemei rămâne adevărată. Şi pentru celelalte cercuri exînscrise are loc concluzia, în sensul că cel mai mare dintre segmente celorlaltor două.

Clasa a X-a

X.56. *Fie tetraedrul $ABCD$ şi M un punct în spaţiu. Dacă G, G_A G_D sunt centrele de greutate ale tetraedrelor $ABCD$, $MBCD$, $MACD$ respectiv $MABC$, să se arate că $\overrightarrow{AG_A} + \overrightarrow{BG_B} + \overrightarrow{CG_C} + \overrightarrow{DG_D} = \overrightarrow{0}$ dac dacă $M \equiv G$.*

Marius Olteanu, Râmnic

Soluţie (Alexandru Negrescu, elev, Botoşani**).** Avem:

$$\sum \overrightarrow{AG_A} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \sum \left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG_A}\right) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \sum \overrightarrow{AG} + \sum \overrightarrow{GG_A} =$$
$$\sum \overrightarrow{GG_A} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \frac{1}{4}\sum \left(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}\right) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow$$
$$\overrightarrow{GM} + \frac{3}{4}\sum \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow G \equiv M.$$

X.57. *Dacă $x, y, a \in (1, \infty)$, să se arate că*

$$\left(x + y + \log_a x\right)\left(xy + \log_a x^{x+y}\right) + \left(x + y + \log_a y\right)\left(xy + \log_a y^{x+y}\right.$$
$$\geq \left(x + \sqrt{xy} + y\right)^2 \log_a xy.$$

Mihail Bencz

Soluţie. Observăm că

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 3 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{y}{z}\right)$$
$$\geq 3 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2\sqrt{\frac{x}{y}} + 2\sqrt{\frac{y}{x}} = \left(1 + \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2.$$

Considerând, pe rând, $z = \log_a x$, apoi $z = \log_a y$, obţinem:

$$\left(x + y + \log_a x\right)\left(xy + \log_a x^{x+y}\right) \geq \left(x + \sqrt{xy} + y\right)^2 \log_a x;$$
$$\left(x + y + \log_a y\right)\left(xy + \log_a y^{x+y}\right) \geq \left(x + \sqrt{xy} + y\right)^2 \log_a y.$$

Adunăm membru cu membru cele două inegalităţi şi rezultă concluzia.

X.58. *Let $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Prove that*

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}^2 \ln \frac{k^2 + n^2}{n^2} < \binom{2n-2}{n-1}.$$

José Luis Díaz - Barrero, Barcelo

Soluţie. Este cunoscută inegalitatea $\ln(1+x) < x$, $\forall x > 0$, de unde
că $\ln\frac{k^2+n^2}{n^2} < \frac{k^2}{n^2}$, $\forall k$, $1 \le k \le n$. Atunci

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}^2 \ln\frac{k^2+n^2}{n^2} < \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}^2 \frac{k^2}{n^2} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\binom{n}{k}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}^2 =$$

X.59. *Fie $f \in \mathbb{R}[X]$ un polinom de grad $n \ge 3$ ce admite n rădă pozitive şi subunitare. Dacă $|f(0)| = f(1)$, să se arate că produsul rădăc cel mult egal cu $\frac{1}{2^n}$.*

Ioan Şerdear

Soluţie. Putem presupune, fără a restrânge generalitatea că f are c dominant 1; fie $f(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$, cu rădăcinile $\forall i = \overline{1,n}$. Evident că $x_1x_2\cdots x_n \in (0,1)$. Folosind ipoteza, ultima relaţ descompunerea polinomului în factori, avem:

$$x_1x_2\cdots x_n = |f(0)| = f(1) = (1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n) \Rightarrow$$

$$(x_1x_2\cdots x_n)^2 = [x_1(1-x_1)]\cdot[x_2(1-x_2)]\cdot\ldots\cdot[x_n(1-x_n)] \le \frac{}{4}$$

conform inegalităţilor $0 \le x_i(1-x_i) \le \frac{1}{4}$, $i = \overline{1,n}$. Rezultă $x_1x_2\cdots x_n \le$

X.60. *Fie $k \in \mathbb{N}^*$ fixat. Alegem $n \in \{1,2,\ldots,k\}$ şi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nun mai mari decât 3. Dacă probabilitatea ca $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$ să se dividă cel puţin egală cu $\frac{1}{24}$, să se arate că 24 divide k.*

Cristian Săvescu, elev

Soluţie. Cum a_i sunt prime, atunci $a_i \equiv \pm 1 \pmod 3$, deci $a_i^2 \equiv$ adică $\sum a_i^2 \equiv n \pmod 3$. Analog, $a_i \equiv \pm 1 \pmod 8$ sau $a_i \equiv \pm 3 \pmod 8$; cazuri, $a_i^2 \equiv 1 \pmod 8$, deci $\sum a_i^2 \equiv n \pmod 8$. Rezultă că $\sum a_i^2 \equiv n$ şi atunci probabilitatea că 24 divide $\sum a_i^2$ este aceeaşi cu probabilitatea divide cu 24, care este $\left[\frac{k}{24}\right]\frac{1}{k} \le \frac{k}{24}\frac{1}{k} = \frac{1}{24}$. Cum se atinge egalitate ipotezei, obţinem că $\left[\frac{k}{24}\right] = \frac{k}{24}$, adică 24 divide k.

Clasa a XI-a

XI.56. *Let n be a positive integer. For each positive integer k, let F_k Fibonacci number ($F_1 = F_2 = 1$, $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ for all $k \ge 1$). Prove*

$$\begin{vmatrix} F_n^2 & F_{n+1}^2 & 2F_nF_{n+1} - F_{n+2}^2 \\ F_{n+2}^2 & -2F_{n+1}F_{n+2} - F_n^2 & F_{n+1}^2 \\ -2F_nF_{n+2} - F_{n+1}^2 & F_{n+2}^2 & F_n^2 \end{vmatrix} = 0$$

José Luis Díaz - Barrero, Barcelo

Soluţie. Notăm cu Δ_n determinantul din problemă; adunând prima coloană la cea de-a treia, obţinem că

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} F_n^2 & F_{n+1}^2 & (F_{n+1}+F_n)^2 - F_n^2 \\ F_{n+2}^2 & -2F_{n+1}F_{n+2} - F_n^2 & (F_{n+2}-F_{n+1})^2 - \\ -2F_nF_{n+2} - F_{n+1}^2 & F_{n+2}^2 & (F_{n+2}-F_n)^2 - F_n^2 \end{vmatrix}$$

Folosind relaţia de recurenţă, observăm că toţi termenii de pe a treia co nuli, prin urmare $\Delta_n = 0$.

XI.57. *Fie pătratul $ABCD$ circumscris cercului $\mathcal{C}$. În pătrat se în gonul $EFGHIJKL$, circumscris cercului $\mathcal{C}$, astfel încât $E, F \in (AB)$, $G, H \in (BC)$, $G \in (BH)$, $I, J \in (CD)$, $I \in (CJ)$, $K, L \in (DA)$, $K \in$ $\{M\} = EL \cap AC$, $\{N\} = FG \cap BD$, $\{P\} = HI \cap AC$, $\{Q\} = JK \cap BD$. că suma*

$$S = \frac{AE}{EB} + \frac{BF}{FA} + \frac{BG}{GC} + \frac{CH}{HB} + \frac{CI}{ID} + \frac{DJ}{JC} + \frac{DK}{KA} + \frac{AL}{LD} + \frac{AM}{MC} + \frac{BN}{ND} + $$

nu depinde de alegerea vârfurilor octogonului pe laturile pătratului.

Cătălin Cali

Soluţie. Vom demonstra că

$$\frac{DK}{KA} + \frac{DQ}{QB} + \frac{DJ}{JC} = 1.$$

Odată justificată relaţia (1), scriind încă trei egalităţi similare corespunz furilor A, B, C şi adunându-le, obţinem concluzia.

Vom demonstra (1) analitic: fixăm un reper cu originea în centru lui, astfel încât $A(-1,1)$, $B(-1,-1)$, $C(1,-1)$, $D(1,1)$. Ecuaţia ce $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 1$ şi fie $T(\cos t, \sin t)$, $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, punctul de contact c dreptei $KJ : x\cos t + y \sin t = 1$; obţinem că $J\left(1, \frac{1-\cos t}{\sin t}\right)$; $K\left(\frac{1}{}\right.$ $Q\left(\frac{1}{\sin t + \cos t}, \frac{1}{\sin t + \cos t}\right)$. Atunci $\frac{DJ}{JC} = \frac{\sin t + \cos t - 1}{\sin t - \cos t + 1}$; $\frac{DQ}{QB} = \frac{\sin t}{\sin t}$ $\frac{DK}{KA} = \frac{\sin t + \cos t - 1}{\cos t - \sin t + 1}$ şi, după calcule de rutină în care nu intervine dec fundamentală $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, rezultă că (1) este adevărată.

Notă. Dl **Cătălin Calistru**, autorul problemei, face cunoscut redacţ următoarea posibilă generalizare a relaţiei (1):

Fie $A_1A_2 \ldots A_n$ un poligon regulat, d o dreaptă tangentă cercului înscri lui şi $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ punctele determinate prin $\{P_i\} = d \cap A_1A_{i+1}$, i Arătaţi că

$$\frac{A_1P}{P_1A_2} + \frac{A_1P_2}{P_2A_3} + \cdots + \frac{A_1P_{n-1}}{P_{n-1}A_n} = 1.$$

XI.58. *Dacă n este un număr natural iar p un număr prim, a $(x_{n+1}(p) - x_n(p))_{n\geq 0}$ este divergent, unde $x_n(p)$ reprezintă exponentul cu numărul p în descompunerea lui $n!$.*

Sorin Puşpană

Soluţia 1. Notăm $y_n = x_{n+1}(p) - x_n(p)$, $n \in \mathbb{N}$. Conform teoremei lu $x_n(p) = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \ldots$. Obţinem că $x_{p^n}(p) = x_{p^n+1}(p) = \frac{p}{p}$

$y_{p^n} = 0$ şi $x_{p^n+p-1}(p) = \dfrac{p^n-1}{p-1}$; $x_{p^n+p} = \dfrac{p^n-1}{p-1}+1$, deci $y_{p^n+p-1} =$ $(y_{p^n})_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_{p^n+p-1})_{n\in\mathbb{N}}$ sunt subşiruri cu limite diferite ale şirului (y_n), p (y_n) este divergent.

Soluţia 2. Cazul $p=2$ se tratează ca mai sus. Să presupunem că ex astfel încât $(x_{n+1}(p) - x_n(p))_{n\geq 0}$ să fie convergent. Atunci, conform lem Stolz, şirul $\left(\dfrac{x_n(p)}{n}\right)_{n\geq 1}$ este convergent şi ultimele două şiruri au aceeaş

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n(p)}{n} = \dfrac{1}{p-1}$, obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} (x_{n+1}(p) - x_n(p)) = \dfrac{1}{p-1}$, c pentru $p\geq 3$, $\dfrac{1}{p-1}\notin\mathbb{N}$, iar $x_{n+1}(p)-x_n(p)\in\mathbb{N}$.

XI.59. *Fie şirul de numere supraunitare* $(a_n)_{n\geq 1}$, *astfel ca* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =$ *studieze continuitatea funcţiei* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\{xa_n\}$, *unde* $\{x\}$ *partea fracţionară a numărului real* x.

Dan Popescu

Soluţie. Se stabileşte cu uşurinţă că:

$a)$ pentru $x_0\notin\mathbb{Z}$, $\lim\limits_{x\to x_0}[x] = [x_0]$;

$b)$ pentru $x_0\in\mathbb{Z}$, $\lim\limits_{x\nearrow x_0}[x] = x_0-1$, $\lim\limits_{x\searrow x_0}[x] = x_0$.

Cum $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_nx - [a_nx]) = x - \lim\limits_{n\to\infty}[a_nx]$, obţinem:

1. pentru $x\notin\mathbb{Z}$, $f(x) = x-[x] = \{x\}$;

2. pentru $x\in\mathbb{Z}$, $f(x) = x-x = 0 = \{x\}$, $\forall x>0$ (deoarece $a_nx\to x$ şi $f(0)=0$, iar $f(x) = x-x+1 = 1$, $\forall x<0$ (deoarece $a_nx\to x$ şi $a_nx <$

Prin urmare, $f(x) = \begin{cases} 1,\ x\in\mathbb{Z},\ x<0 \\ \{x\},\ \text{în rest}\end{cases}$. Astfel, f este continuă pe $\mathbb{R}$

XI.60. *Fie* $a\in(0,1)$; *să se demonstreze că pentru orice* $x > -\dfrac{2}{\ln a}$ *es inegalitatea* $(1-a^x)^{\frac{1}{x+1}} < \left(1-a^{x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Angela Ţigăeru

Soluţie. Inegalitatea dată este echivalentă cu $(1-a^x)^x < \left(1-a^{x+1}\right.$ $-\dfrac{2}{\ln a}$. Logaritmând, aceasta este echivalentă cu $x\ln(1-a^x) < (x+1)\ln($ Arătăm că funcţia $f(x) = x\ln(1-a^x)$, $x > -\dfrac{2}{\ln a}$ este strict crescătoare.

$$f'(x) = \ln(1-a^x) - x\frac{a^x\ln a}{1-a^x} = \frac{(1-a^x)\ln(1-a^x) - a^x\ln a^x}{1-a^x}.$$

Cum $1-a^x > 0$ pentru $x > -\dfrac{2}{\ln a}$, $a\in(0,1)$, este suficient să demo $(1-a^x)\ln(1-a^x) - a^x\ln a^x > 0$ pentru $x > -\dfrac{2}{\ln a}$. Notăm $t = a^x$ şi cum $a\in(0,1)$, atunci $t\in\left(0,1/e^2\right)$. Prin urmare, trebuie să demonstrăm $(1-t)\ln(1-t) - t\ln t > 0$ pentru $t\in\left(0,1/e^2\right)$. Avem $g'(t) = -\ln(1-t$ Cum, pentru $t\in\left(0,1/e^2\right)$, $(1-t)t < \dfrac{1}{e^2}$, rezultă că $\ln((1-t)t) < -$

$-\ln t - \ln(1-t) - 2 > 0$, deci $g'(t) > 0$ pentru $t \in \left(0, 1/e^2\right)$, adică g
crescătoare pe $\left(0, 1/e^2\right)$. Cum $\lim\limits_{t \searrow 0} g(t) = 0$, deducem $g(t) > 0$, $t \in \left(0, 1/e\right.$
trebuia demonstrat.

Clasa a XII-a

XII.56. *Fie S_n mulţimea permutărilor de ordin n, iar $\sigma \in S_n$. Se*
funcţia mărginită $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(f(\sigma(1)) + \frac{1}{2}f(\sigma(2)) + \cdots + \frac{1}{n}f(\sigma(n))\right).$$

(O generalizare a problemei 24131, G. M. 5-6/1999.)

Marius Olteanu, Râmnic

Soluţie. Fie $a_n = \dfrac{1}{n}\left(f(\sigma(1)) + \dfrac{1}{2}f(\sigma(2)) + \cdots + \dfrac{1}{n}f(\sigma(n))\right)$. I
este mărginită există $m, M \in \mathbb{R}$ astfel încât $m \le f(x) \le M$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Prin

$$\frac{m}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \le a_n \le \frac{M}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$$

şi cum $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}\right) = 0$, deducem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

XII.57. *Considerăm matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi mulţimea*

$$G = \left\{X_a \mid X_a = I_2 + aA, a \in \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)\right\}.$$

Arătaţi că $(G, \cdot)$ este grup izomorf cu $(\mathbb{R}, +)$. Calculaţi $X_{\frac{1}{2}} \cdot X_{\frac{3}{2}} \cdots X_{\frac{2n-}{2}}$

Gheorghe I

Soluţie. Deoarece $A^2 = 2A$, deducem uşor că $X_a X_b = X_{a+b+2ab}$ şi cu
$2ab \in \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$ pentru $a, b \in \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$, înmulţirea matricelor este lege de
pe G. $(G, \cdot)$ este grup cu elementul neutru I_2, iar inversul fiecărui eleme
este $X_{-\frac{a}{1+2a}} \in G$. Funcţia $f : G \to \mathbb{R}$, $f(X_a) = \ln(2a+1)$ realizează izo
cerut. Fie $X_t = X_{\frac{1}{2}} X_{\frac{3}{2}} \cdot \ldots \cdot X_{\frac{2n-1}{2}}$, atunci:

$$f(X_t) = f\left(X_{\frac{1}{2}} \cdot X_{\frac{3}{2}} \cdot \ldots \cdot X_{\frac{2n-1}{2}}\right) = f\left(X_{\frac{1}{2}}\right) + f\left(X_{\frac{3}{2}}\right) + \cdots + f\left(X_{\frac{2}{}}\right.$$

$$\ln(1+2t) = \ln 2 + \ln 4 + \cdots + \ln 2n.$$

Deducem că $1 + 2t = 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n = 2^n \cdot n!$, deci $t = \dfrac{2^n n! - 1}{2}$.

XII.58. *Let $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ be a continuous function. Prove that*

$$\sqrt{3}\int_{-1}^{1}\sqrt{1 - (f(x))^2}\,dx + \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \le 4.$$

Zdravko Starc, Vršac, Serbia and Mo

Soluţie. Pentru orice $a \in [-1, 1]$ avem: $\sqrt{3(1-a^2)} + a \le 2$, cu egalit
$a = \dfrac{1}{2}$. Prin urmare $\sqrt{3(1 - f^2(x))} + f(x) \le 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$; integrând acea
între -1 şi 1 obţinem inegalitatea cerută. Egalitate avem pentru $f : \mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{2}$.

XII.59. *Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f derivabilă şi neconstantă pe nici un interv*
Dacă

$$\frac{f'(x)}{1+f^2(x)} \geq f'(\sin x)\cos x + f'(\cos x)\sin x, \quad \forall x\in\mathbb{R},$$

demonstraţi că nu există $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Paul Georgescu şi Gabriel I

Soluţie. Pentru orice $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_2 > x_1$, integrând membru cu memb
tatea din enunţ avem

$$\operatorname{arctg} f(x_2) - \operatorname{arctg} f(x_1) \geq f(\sin x_2) - f(\sin x_1) - f(\cos x_2) + f(\text{co}$$

prin urmare $g(x_2) \geq g(x_1)$, unde $g(x) = \operatorname{arctg} f(x) - f(\sin x) + f(\cos$
deci g este monoton crescătoare pe $\mathbb{R}$. Cum g este şi mărginită, deducem
$\lim\limits_{x\to\infty} g(x)\in\mathbb{R}$. Presupunem că există $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$; atunci există

$$\lim_{x\to\infty}(f(\sin x) - f(\cos x)) = \lim_{x\to\infty}(\operatorname{arctg} f(x) - g(x)) \in \mathbb{R}.$$

Deoarece $h(x) = f(\sin x) - f(\cos x)$ este periodică şi are limită la ∞, h
stantă; există deci $c\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(\sin x) - f(\cos x) = c$. Pentru $x =$
găsim $c = f(0) - f(1) = f(1) - f(0)$, deci $c = 0$, adică $f(\sin x) - f($
$x\in\mathbb{R}$.

Prin urmare $g(x) = \operatorname{arctg} f(x)$ şi cum g este monotonă, rezultă că f este
dar $f(0) = f(1)$ şi atunci $f(x) = f(0)$, $\forall x\in[0,1]$, contradicţie.

XII.60. *Fie $n > 1$ şi $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (0,1)$ astfel încât $a_1 + a_2 + \cdots +$*
se determine funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dacă $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 1$ şi $f(x) = f(a_1 x) +$
$\cdots + f(a_n x)$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Gabriel Dospines

Soluţie. Vom demonstra prin inducţie că

$$f(x) = \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_n\geq 0\\ k_1+k_2+\cdots+k_n=p}} \frac{p!}{k_1!k_2!\cdots k_n!} f\left(a_1^{k_1}a_2^{k_2}\cdots a_n^{k_n}x\right)$$

pentru orice x şi orice p.

Pentru $p = 1$ este chiar relaţia din enunţ. Presupunem că relaţia este
pentru p şi o demonstrăm pentru $p+1$.Înlocuim în relaţia $(*)$ pe rând pe
$\ldots$, $a_n x$ şi însumăm relaţiile obţinute, ţinând cont de relaţia din enunţ;

$$f(x) = \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_n\geq 0\\ k_1+k_2+\cdots+k_n=p}} \frac{p!}{k_1!\cdots k_n!} f\left(a_1^{k_1+1}\cdots a_n^{k_n}x\right) + \cdots +$$

$$+ \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_n\geq 0\\ k_1+k_2+\cdots+k_n=p}} \frac{p!}{k_1!\cdots k_n!} f\left(a_1^{k_1}\cdots a_n^{k_n+1}x\right) =$$

$$= \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_n\geq 0\\ k_1+k_2+\cdots+k_n=p}} \frac{p!\,(k_1+1)}{(k_1+1)!\cdots k_n!} f\left(a_1^{k_1+1}\cdots a_n^{k_n}x\right) + \cdots +$$

$$+\sum_{\substack{k_1,\ldots,k_n\geq 0\\ k_1+k_2+\cdots+k_n=p}} \frac{p!\,(k_n+1)}{k_1!\cdots k_{n-1}!\,(k_n+1)!} f\left(a_1^{k_1}\cdots a_n^{k_n+1}x\right).$$

Notând $k_1+1=k_1'$, $\ldots$, $k_n+1=k_n'$, obţinem:

$$f(x)=\sum_{k_1'+\cdots+k_n=p+1} \frac{p!k_1'}{k_1'!\cdots k_n!} f\left(a_1^{k_1'}\cdots a_n^{k_n}x\right)+\cdots+$$

$$+\sum_{k_1+\cdots+k_n'=p+1} \frac{p!k_n'}{k_1!\cdots k_n'!} f\left(a_1^{k_1}\cdots a_n^{k_n'}x\right).$$

Renotând indicii de sumare obţinem:

$$f(x)=\sum_{\substack{k_1,\ldots,k_n\geq 0\\ k_1+k_2+\cdots+k_n=p+1}} \frac{(k_1+k_2+\cdots+k_n)\,p!}{k_1!k_2!\cdots k_n!} f\left(a_1^{k_1}a_2^{k_2}\cdots a_n^{k_n}x\right)$$

$$=\sum_{\substack{k_1,\ldots,k_n\geq 0\\ k_1+k_2+\cdots+k_n=p+1}} \frac{(p+1)!}{k_1!k_2!\cdots k_n!} f\left(a_1^{k_1}a_2^{k_2}\cdots a_n^{k_n}x\right),$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Fie acum un $\varepsilon>0$, arbitrar şi un $a>0$ fixat. Cum $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=$ $\delta>0$ astfel încât dacă $x\in(0,\delta)$, atunci $1-\varepsilon<\dfrac{f(x)}{x}<1+\varepsilon$. $k_1+k_2+\cdots+k_n=p$, atunci $a_1^{k_1}a_2^{k_2}\cdots a_n^{k_n}<(\max(a_1,a_2,\ldots,a_n))^p$ $\max(a_1,a_2,\ldots,a_n)<1$, avem $\lim\limits_{p\to\infty}(\max(a_1,a_2,\ldots,a_n))^p=0$, deci exist încât $(\max(a_1,a_2,\ldots,a_n))^{p_0}<\dfrac{\delta}{a}$.

Deci pentru orice $x\in(0,a)$ şi orice $k_1,\ldots,k_n$ cu suma p_0, avem

$$1-\varepsilon<\frac{f\left(a_1^{k_1}\cdots a_n^{k_n}x\right)}{a_1^{k_1}\cdots a_n^{k_n}x}<1+\varepsilon.$$

Atunci

$$(1-\varepsilon)\sum_{k_1+\cdots+k_n=p_0}\frac{p_0!}{k_1!\cdots k_n!}xa_1^{k_1}\cdots a_n^{k_n}<\sum_{k_1+\cdots+k_n=p_0}\frac{p_0!}{k_1!\cdots k_n!}f\left(a_1^{k_1}\cdot\right.$$

$$<(1+\varepsilon)\sum_{k_1+\cdots+k_n=p_0}\frac{p_0!}{k_1!\cdots k_n!}xa_1^{k_1}\cdots a_n^{k_n}.$$

Însă $\sum\limits_{k_1+\cdots+k_n=p_0}\dfrac{p_0!}{k_1!\cdots k_n!}a_1^{k_1}\cdots a_n^{k_n}=(a_1+\cdots+a_n)^{p_0}=1$ şi atunci ($f(x)<(1+\varepsilon)x$ pentru orice $x\in(0,a)$ şi orice $\varepsilon>0$, ceea ce atrage pentru $x\in(0,a)$.

Cum a a fost ales arbitrar rezultă $f(x)=x$ pentru $x\geq 0$. Să ob acelaşi raţionament funcţionează şi pe $(-\infty,0)$, cu menţiunea că în aces inegalităţile îşi schimbă sensul, prin urmare $f(x)=x$ pentru $x<0$. P $f(x)=x$ pentru $x\in\mathbb{R}$.

Soluţiile problemelor pentru pregătirea concur
din nr. 1 / 2005

A. Nivel gimnazial

G76. *Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale sistemul* $\begin{cases} x^2 - y = \\ y^2 - z = \\ z^2 - x = \end{cases}$

Adrian Zanc

Soluţia 1. Dacă $x = 0$, atunci $-y = u^2$ şi apoi $y = 0$, $u = 0$, $z =$ $t = 0$. Obţinem astfel soluţia $(x, y, z, u, v, t) = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Dacă x $y \neq 0$ şi $z \neq 0$. Cum $x^2 - y$ este pătrat perfect mai mic decât x^2, $x^2 - y \leq (x-1)^2 \Rightarrow y \geq 2x - 1$. La fel $z \geq 2y - 1$ şi $x \geq 2z - 1$. Adunân trei relaţii, găsim $x + y + z \leq 3$ şi cum $x, y, z \in \mathbb{N}^*$, rezultă $x = y = z =$ soluţia $(x, y, z, u, v, t) = (1, 1, 1, 0, 0, 0)$.

Soluţia 2. Fie $x \neq 0$ (deci $y \neq 0$ şi $z \neq 0$); atunci

$$\left(x^2 - u^2\right)\left(y^2 - v^2\right)\left(z^2 - t^2\right) = xyz,$$

deci

$$(x-u)(y-v)(z-t)(x+u)(y+v)(z+t) = xyz.$$

Prin urmare $(x-u)(y-v)(z-t)$ este număr natural nenul, deci $(x -$ $\cdot (z-t) \geq 1$ şi cum $(x+u)(y+v)(z+t) \geq xyz$, egalitate în $(*)$ obţin $u = v = t = 0$ şi $x - u = y - v = z - t = 1$, deci $x = y = z = 1$. Ave $(x, y, z, u, v, t) \in \{(0, 0, 0, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 0, 0, 0)\}$.

G77. *i) Fie* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *cu* $a > b > c$*; atunci* $\dfrac{a^2}{a-b} + \dfrac{b^2}{b-c} > a + 2b +$

ii) Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ *cu* $a \geq b \geq c > 0$*; atunci* $\dfrac{a^2 - b^2}{c} + \dfrac{c^2 - b^2}{a} +$ $3a - 4b + c$.

Ioan Şerdean

Soluţie. *i)* Avem evident că $\dfrac{a^2}{a-b} \geq \dfrac{a^2 - b^2}{a-b} = a + b$, iar $\dfrac{b^2}{b-c} \geq \dfrac{b^2 -}{b-}$ (egalitate avem dacă $b = 0$, respectiv $c = 0$), de unde, prin adunare, $\dfrac{a^2}{a-b} + \dfrac{b^2}{b-c} > a + 2b + c$. Inegalitatea este strictă deoarece nu putem avea

ii) Majorăm pe rând cei trei termeni ai membrului stâng:

$$\frac{a^2 - b^2}{c} = \frac{(a-b)(a+b)}{c} \geq \frac{c+c}{c}(a-b) = 2(a-b);$$

$$\frac{c^2 - b^2}{a} = \frac{(c-b)(c+b)}{a} \geq \frac{a+a}{a}(c-b) = 2(c-b);$$

(am folosit faptul că $c - b \leq 0$, schimbând sensul inegalităţii!)

$$\frac{a^2 - c^2}{b} = \frac{(a-c)(a+c)}{b} = \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{b}\right)(a-c) \geq (1+0)(a-c) = a$$

Adunând membru cu membru relaţiile (1), (2) şi (3), obţinem concluzia.

G78. *Dacă* $a, b, c, d \in (0, \infty)$, *să se demonstreze inegalitatea*

$$\frac{b(a+c)}{c(a+b)} + \frac{c(b+d)}{d(b+c)} + \frac{d(a+c)}{a(d+c)} + \frac{a(b+d)}{b(a+d)} \geq 4.$$

Artur Bălăucă,

Soluţia 1. Prelucrăm fiecare raport din stânga astfel:

$$\frac{b(a+c)}{c(a+b)} = \frac{\dfrac{a+c}{c}}{\dfrac{a+b}{b}} = \frac{\dfrac{a+c}{ac}}{\dfrac{a+b}{ab}} = \frac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}.$$

În aceste condiţii, cu substituţiile $x = \dfrac{1}{a}$, $y = \dfrac{1}{b}$, $z = \dfrac{1}{c}$, $d = \dfrac{1}{t}$, ineg
demonstrat se scrie succesiv:

$$\frac{x+z}{x+y} + \frac{y+t}{y+z} + \frac{z+x}{z+t} + \frac{t+y}{t+x} \geq 4 \Leftrightarrow$$

$$(x+z)\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{z+t}\right) + (y+t)\left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{t+x}\right) \geq 4 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x+z)(x+y+z+t)}{(x+y)(z+t)} + \frac{(y+t)(x+y+z+t)}{(y+z)(t+x)} \geq 4.$$

Însă, conform inegalităţii mediilor,

$$(x+y)(z+t) \leq \frac{(x+y+z+t)^2}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{(x+y)(z+t)} \geq \frac{4}{(x+y+z+t}$$

$$\frac{(x+z)(x+y+z+t)}{(x+y)(z+t)} \geq \frac{4(x+z)(x+y+z+t)}{(x+y+z+t)^2} = \frac{4(x+z)}{x+y+z+}$$

Scriind încă o inegalitate similară şi adunându-le, obţinem $(*)$.

Soluţia 2. Cu substituţiile $x = \dfrac{1}{a}$; $y = \dfrac{1}{b}$; $z = \dfrac{1}{c}$; $d = \dfrac{1}{t}$ inegal
echivalentă cu:

$$\frac{x+z}{x+y} + \frac{y+t}{y+z} + \frac{z+x}{z+t} + \frac{t+y}{t+x} \geq 4, \quad x, y, z, t \in (0, \infty).$$

Dar
$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}, \quad \forall a_i, b_i \in (0, \infty)$$
şi atunci

$$\frac{x+z}{x+y} + \frac{y+t}{y+z} + \frac{z+x}{z+t} + \frac{t+y}{t+x} =$$

$$= \frac{(x+z)^2}{(x+y)(x+z)} + \frac{(y+t)^2}{(y+t)(y+z)} + \frac{(z+x)^2}{(z+t)(z+x)} + \frac{(t+y)^2}{(t+y)(t+}$$

$$\geq \frac{(z+x+y+t+z+x+t+y)^2}{(x+y)(x+z)+(y+t)(y+z)+(z+t)(z+x)+(t+y)(t+x)}$$

G79. *Dacă* $x, y, z \in (0, \infty)$ *sunt astfel încât* $x + y + z = xyz$, *atunci*

$$xy + yz + zx \geq 3 + \sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} + \sqrt{z^2+1}.$$

Florina Cârlan şi Marian Tetiv

Soluţia 1 (a autorilor). Plecând de la cunoscuta $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab$
avem:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \geq \frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{yz} = 1 \Leftrightarrow x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 \geq x^2y^2z$$

$$(xy + xz + yz)^2 \geq 2xyz\,(x + y + z) + x^2y^2z^2 = 3\,(x + y + z)^2 .$$

Mai departe,

$$(xy + xz + yz - 3)^2 = (xy + xz + yz)^2 - 6\,(xy + xz + yz) + 9 \geq$$

$$\geq 3\,(x + y + z)^2 - 6\,(xy + xz + yz) + 9 = 3\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + 9$$

şi

$$(xy + xz + yz)\,(x + y + z) \geq 9xyz \Rightarrow xy + xz + yz \geq 9 > 3,$$

prin urmare $xy + xz + yz \geq 3 + \sqrt{3\,(x^2 + y^2 + z^2) + 9}$.

Se arată însă uşor că

$$\sqrt{3\,(x^2 + y^2 + z^2) + 9} \geq \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} + \sqrt{z^2 + 1},$$

de unde concluzia rezultă prin intercalare.

Soluţia 2 (a autorilor). Avem

$$xyz = x + y + z \geq 2\sqrt{xy} + z \Rightarrow z\,(\sqrt{xy})^2 - 2\sqrt{xy} - z \geq 0.$$

Rădăcina pozitivă a trinomului $zt^2 - 2t - z$ fiind $\dfrac{1 + \sqrt{1 + z^2}}{z}$, obţinem c

$$\sqrt{xy} \geq \frac{1 + \sqrt{1 + z^2}}{z} \Leftrightarrow z\sqrt{xy} \geq 1 + \sqrt{1 + z^2}.$$

Scriind încă două inegalităţi analoage, prin sumare găsim:

$$xy + xz + yz \geq x\sqrt{yz} + y\sqrt{xz} + z\sqrt{xy} \geq 3 + \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} + \sqrt{}$$

Soluţia 3 (Gheorghe Iurea, Iaşi). Din ipoteză $xy - 1 = \dfrac{x + y}{z}$
$xy > 1$. Analog $yz > 1$, $zx > 1$. De asemeni,

$$(xy - 1)\,(yz - 1) = xy^2z - xy - yz + 1 = y\,(x + y + z) - xy - xz + 1 =$$

şi încă două relaţii analoage.

În inegalitatea $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$, adevărată pentru orice a, b
reale, punem $a = \sqrt{xy - 1}$, $b = \sqrt{yz - 1}$, $c = \sqrt{zx - 1}$ şi folosind relaţiile (
inegalitatea cerută.

Egalitate pentru $a = b = c$, deci $xy = yz = zx$ sau încă $x = y =$
ipoteza, găsim $x = y = z = \sqrt{3}$.

Soluţia 4 (Paul Georgescu, Iaşi). Deoarece $x, y, z \in (0, \infty)$ exis
$(0, \pi/2)$ astfel încât $x = \operatorname{tg} a$, $y = \operatorname{tg} b$, $z = \operatorname{tg} c$. Folosind relaţia din ipo
$\operatorname{tg}(a + b + c) = 0$ şi apoi $a + b + c = \pi$.

Inegalitatea de demonstrat este echivalentă cu:

$$\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c + \operatorname{tg} c \operatorname{tg} a \geq 3 + \frac{1}{\cos a} + \frac{1}{\cos b} + \frac{1}{\cos c}.$$

Cum $\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b - 1 = -\dfrac{\cos(a+b)}{coa \cos b} = \dfrac{\cos c}{\cos a \cos b}$, $(*)$ este echivalentă cu

$$\frac{\cos c}{\cos a \cos b} + \frac{\cos b}{\cos a \cos c} + \frac{\cos a}{\cos b \cos c} \geq \frac{1}{\cos a} + \frac{1}{\cos b} + \frac{1}{\cos c}$$

sau încă:

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c \geq \cos a \cos b + \cos b \cos c + \cos a \cos c,$$

adevărată pe baza inegalităţii $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

Egalitate dacă $\cos a = \cos b = \cos c$, deci $a = b = c = \dfrac{\pi}{3}$ şi apoi $x = y =$

G80. *Fie A mulţimea tuturor sumelor de tipul $\pm 1^2 \pm 3^2 \pm 5^2 \pm \cdots \pm$ $n \in \mathbb{N}$, unde semnele $\pm$ pot fi alese în orice combinaţie posibilă. Să s* $A = \mathbb{Z}$. *(În legătură cu teorema Erdös-Surányi.)*

Petru As

Soluţie. Să observăm că $(2k+1)^2 - (2k+3)^2 - (2k+5)^2 + (2k+$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Prin urmare, dacă un număr întreg n se scrie sub forma $n = \pm$ $\cdots \pm (2k-1)^2$ pentru o anumită alegere a semnelor $+, -$, numărul $n + 1$ el o sciere de aceeaşi formă:

$$n + 16 = \pm 1^2 \pm 3^2 \pm \cdots \pm (2k-1)^2 + (2k+1)^2 - (2k+3)^2 - (2k+5)^2 +$$

De asemeni, dacă n are o exprimare de forma dată, atunci şi $-n$ au o de aceeaşi formă (obţinută din exprimarea pe care o are n, prin schimbar semnelor).

Notăm cu $P(n)$, $n \in \mathbb{N}$, afirmaţia: "n are o exprimare de forma n $3^2 \pm \cdots \pm (2k-1)^2$, $k \in \mathbb{N}^*$ ". Cum $P(n) \Rightarrow P(n+16)$, conform unei inducţie matematică este suficient să verificăm $P(0)$, $P(1)$, $\ldots$, $P(15)$:

$$0 = 1^2 - 3^2 - 5^2 + 7^2 - \left(9^2 - 11^2 - 13^2 + 15^2\right),$$

$$1 = 1^2,$$

$$2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 - 7^2 + 9^2 - 11^2 - 13^2 + 15^2,$$

$$3 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 - 9^2,$$

$$4 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 - \sum_{k \in \{4,8,\ldots,20\}} \left[(2k+1)^2 - (2k+3)^2 - (2k+5)^2 + (2k\right.$$

$$5 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 - \sum_{k \in \{5,9,\ldots,41\}} \left[(2k+1)^2 - (2k+3)^2 - (2k+5)^2 + (2k\right.$$

$$6 = -1^2 - 3^2 + 5^2 - 7^2 - 9^2 + 11^2,$$

$$7 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + 13^2 - \sum_{k \in \{8,12,\ldots,116\}} \left[(2k+1)^2 - (2k+3)^2 - (2k+5)^2 + (\right.$$

$$8 = 1^2 - 3^2 + 5^2 - 7^2 - 9^2 + 11^2,$$

$$9 = -7 + 16 = -1^2 - 3^2 - \cdots - 13^2 +$$

$$+ \sum_{k \in \{8,12,\ldots,116\}} \left[(2k+1)^2 - (2k+3)^2 - (2k+5)^2 + (2k+7)^2\right] +$$

$$+\sum_{k=120}\left[(2k+1)^2-(2k+3)^2-(2k+5)^2+(2k+7)^2\right].$$
La fel procedăm şi cu numerele 10, 11, ... , 15.

Prin urmare, orice număr natural are o exprimare de forma cerută şi a
număr întreg are o exprimare de forma cerută. Rezultă $A=\mathbb{Z}$.

G81. *Fie $n\in\mathbb{N}^*$ şi $k\in\{0,1,\dots,2^n-1\}$. Să se arate că există o mulţ
cu n elemente care are exact k submulţimi cu suma elementelor strict po*

Adrian Zahariuc, ele

Soluţie. Fie $k=\overline{a_n a_{n-1}\dots a_1}$, $a_i\in\{0,1\}$, $\forall i=\overline{1,n}$, scrierea în ba
k (admitem ca primele cifre să poată fi 0, astfel încât scrierea să se facă
cifre). Pentru fiecare $i\in\{0,1,\dots,n-1\}$, fie $\varepsilon_i=-1$ dacă $a_{i+1}=0$ şi ε
$a_{i+1}=1$; construim mulţimea $A=\left\{\varepsilon_i 2^i \mid 0\le i\le n-1\right\}$ şi vom demon
verifică proprietatea dorită.

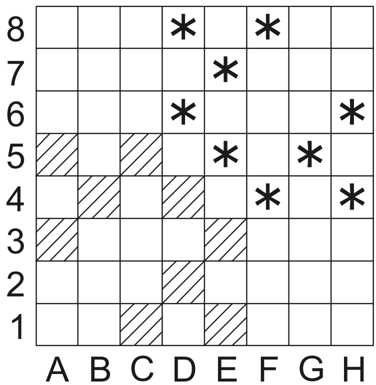
Pentru fiecare submulţime $B\subset A$, numim *indicele dominant* al lui B, ce
$i\in\{0,1,\dots,n-1\}$ pentru care $\varepsilon_i 2^i\in B$. Dacă $\varepsilon_i=1$, atunci suma elem
B este cel puţin $2^i-2^{i-1}-\dots-2^0=1>0$. Dacă $\varepsilon_i=-1$, atunci suma e
lui B este cel mult $-2^i+2^{i-1}+\dots+2^0=-1<0$. În concluzie, sem
elementelor lui B depinde numai de indicele dominat. Cum există 2^i subr
indicele dominant i, numărul submulţimilor cu suma elementelor strict po
$2^0a_1+2^1a_2+\dots+2^{n-1}a_n=k$ şi astfel problema este rezolvată.

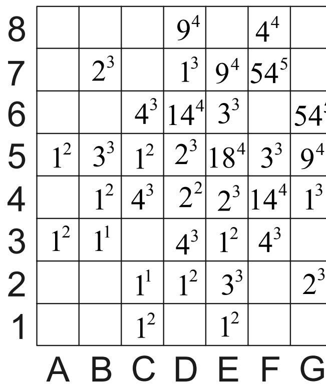
G82. *Un cal se află pe tabla de şah în câmpul $A1$ şi dorim să-l ducem
$H8$ într-un număr minim de sărituri. Aflaţi care este acest număr mini
şi câte trasee de lungime minimă există.*

Gheorghe Crăciun, Plopeni şi Gabriel I

Soluţie (Gheorghe Iurea, Iaşi). Pentru a ajunge din $A1$ în $H8$, ca
să câştige 7 coloane şi 7 linii, în total 14 poziţii. La fiecare săritură, el câşt
3 poziţii (două linii şi o coloană sau o linie şi două coloane); rezultă că sun
cel puţin 5 sărituri. Însă calul nu poate ajunge în cinci sărituri din $A1$ în H
de pe care pleacă şi cel pe care soseşte au culori diferite, ceea ce implică n
efectuării unui număr par de sărituri (la o săritură, calul merge de pe al
sau de pe negru pe alb).

Există trasee de 6 sărituri (de exemplu, $A1-B3-C5-E6-G5-$
prin urmare numărul minim de sărituri necesare este 6.





Numim *drum* un traseu format din 6 sărituri care pleacă din $A1$ şi
$H8$. După prima săritură putem ajunge în $B3$ sau în $C2$, iar la ultin
trebuie să ajungă în $F7$ sau $G6$. La a două săritură drumul ajunge în u
pătrăţelele haşurate pe figura 1, iar la a cincea drumul trebuie să treacă
dintre pătrăţelele marcate cu $*$. Săriturile 3 şi 4 ne duc dintr-un pătrăţel
unul marcat cu $*$.

În figura 2, am notat numărul săriturii cu cifră mică din dreapta sus.
căsuţelor am notat numărul de drumuri parţiale care duc din $A1$ până în a
Se observă că numărul de drumuri până într-un pătrat la săritura k este eg
numerelor pătratelor de la săritura $k-1$, aflate pe un pătrat de latură 5
în acel pătrat. Recurent, se obţin 108 drumuri de lungime minimă.

Notă. Faptul că numărul minim de sărituri este 6 este un rezultat c
de exemplu, L. Panaitopol, D. Şerbănescu - *Probleme de teoria numerelo
natorică pentru juniori*, GIL, Zalău, 2003. Problema numărului traseelor
nu ne este însă cunoscută.

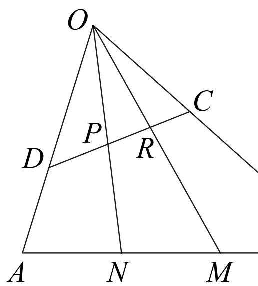
G83. *Fie $ABCD$ patrulater convex şi punctele $M, N \in (AB)$, $P,$*
astfel încât $AD \cap BC \cap MR \cap NP = \{O\}$. Să se arate că $\dfrac{BM}{MN} \cdot \dfrac{NA}{DP} \cdot \dfrac{PR}{RC}$

Andrei-Sorin Cozma,

Soluţie. Se demonstrează cu uşurinţă următoarele două proprietăţi:

1. Fiind dat triunghiul ABC şi $D \in (BC)$, atunci $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{S_{ABC}}{S_{ACD}}$ şi $\dfrac{BD}{BC}$

2. Fiind dat triunghiul ABC şi $D \in (AB)$, $E \in (AC)$, avem că
$\dfrac{AD \cdot AE}{AB \cdot AC}$.



Folosind aceste rezultate avem

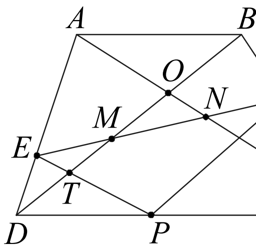
$$\frac{BM}{MN} \cdot \frac{NA}{DP} \cdot \frac{PR}{RC} \cdot \frac{CD}{AB} =$$
$$= \frac{BM}{MN} \cdot \frac{NA}{AB} \cdot \frac{PR}{RC} \cdot \frac{CD}{DP} =$$
$$= \frac{S_{OMB}}{S_{ONM}} \cdot \frac{S_{OAN}}{S_{OAB}} \cdot \frac{S_{OPR}}{S_{ORC}} \cdot \frac{S_{OCD}}{S_{ODP}} =$$

$$= \frac{S_{OMB}}{S_{ORC}} \cdot \frac{S_{OAN}}{S_{ODP}} \cdot \frac{S_{OPR}}{S_{ONM}} \cdot \frac{S_{OCD}}{S_{OAB}} = \frac{OM \cdot OB}{OR \cdot OC} \cdot \frac{OA \cdot ON}{OD \cdot OP} \cdot \frac{OP \cdot OR}{ON \cdot OM} \cdot \frac{OC}{OA}$$

G84. *Fie $ABCD$ un trapez cu $AB \| CD$, $AB < CD$. Se consider*
$E \in (AD)$ şi $F \in (BC)$ astfel încât $\dfrac{AE}{ED} = \dfrac{CF}{FB}$. Dreapta EF intersect
AC în M, respectiv N. Să se arate că $\dfrac{MN}{EF} = \dfrac{DC - AB}{DC + AB}$.

Andrei Ned

Soluţie. Notăm $k = \dfrac{AB}{CD} = \dfrac{AO}{OC} = \dfrac{BD}{OD}$, $k < 1$, iar cu P, T intersecţi paralelei prin E la AC cu CD, respectiv BD. Cum $\dfrac{AE}{ED}=\dfrac{CP}{PD}$ (teorema lui Thales) şi $\dfrac{AE}{ED}=\dfrac{CF}{FB}$, urmează că $\dfrac{CP}{PD}=\dfrac{CF}{FB}$, adică $PF \parallel BD$. Aplicând Thales în $\triangle EPF$ cu $TM \parallel PF$, obţinem că $\dfrac{ET}{TP}=\dfrac{EM}{MF}$; însă $\dfrac{ET}{TP}=\dfrac{AO}{OC}=k$, deci $\dfrac{EM}{MF}=k$, i.e. $EM=\dfrac{k}{k+1}EF$. Analog se arată că $NF=\dfrac{k}{k+1}EF$. Astfel,



$$MN = EF-(EM+NF)=EF-\frac{2k}{k+1}EF \Rightarrow \frac{MN}{EF}=\frac{1-k}{1+k}=\frac{CD}{CD}$$

G85. *Fie A', B', C' picioarele bisectoarelor unghiurilor $\triangle ABC$. Pe la considerăm punctele D şi E astfel încât $D \in (BE)$ şi cevienele AD ş izogonale. Să se demonstreze că DB' şi EC' se intersectează pe AA'. (I cu Propoziţia 1, p. 99, RecMat - 2/2004.)*

Titu Zvonaru, C

Soluţie. Notăm $m(\widehat{BAD})=m(\widehat{EAC})=\alpha$ şi $m(\widehat{DAA'})=m(\widehat{EAA'}$ $\{X\}=C'E\cap AD$ şi $\{Y\}=DB'\cap AE$. Folosind teorema lui Menelaus în transversala $C'XE$ obţinem:

$$\frac{ED}{EB}\cdot\frac{BC'}{C'A}\cdot\frac{AX}{XD}=1.$$

Dar

$$\frac{ED}{EB}=\frac{S_{DEA}}{S_{BEA}}=\frac{AD\cdot AE\cdot\sin 2\beta}{AB\cdot AE\cdot\sin(2\beta+\alpha)}=\frac{AD\sin 2\beta}{AB\sin(2\beta+\alpha)}$$

şi $\dfrac{BC'}{C'A}=\dfrac{BC}{AC}$ (din teorema bisectoarei).

Prin urmare:

$$\frac{AX}{XD}=\frac{AB\cdot AC\cdot\sin(2\beta+\alpha)}{AD\cdot BC\cdot\sin 2\beta}.$$

La fel

$$\frac{AY}{YE}=\frac{AB\cdot AC\cdot\sin(2\beta+\alpha)}{AE\cdot BC\cdot\sin 2\beta}.$$

Din teorema bisectoarei în triunghiul ADE,

$$\frac{DA'}{A'E}=\frac{AD}{AE}.$$

Folosind (1), (2), (3) deducem $\dfrac{AX}{XD}\cdot\dfrac{DA'}{A'E}\cdot\dfrac{YE}{AY}=1$ şi din teorema lui Ce că dreptele EX, DY, AA' sunt concurente.

Notă. Soluţia autorului, în esenţă aceeaşi, foloseşte explicit relaţia l Se poate arăta în aceeaşi manieră că rezultatul rămâne valabil şi dacă D

B. Nivel liceal

L76. *Fie cercurile $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ tangente interior unui cerc $\mathcal{C}$ în punctele di respectiv N. Cercurile $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ sunt secante sau tangente exterior iar axa* *cercurilor $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ taie cercul $\mathcal{C}$ în A şi B. Dreptele AM şi AN taie din no* *$\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ în K, respectiv L. Arătaţi că $AB \geq 2KL$. În ce caz avem egalit*

Neculai Roman, Mirc

Soluţie. Fie $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}(O_1, r_1)$, $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}(O_2, r_2)$, $\mathcal{C} = \mathcal{C}(O, r)$ şi $\{P, Q\}$ (fig. 1). Dacă cercurile $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ sunt tangente exterior (fig. 2) atunci $P =$

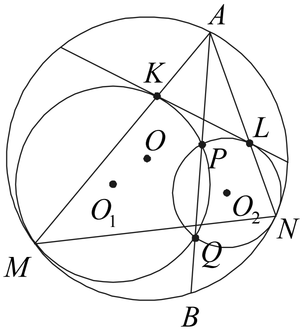


Fig. 1

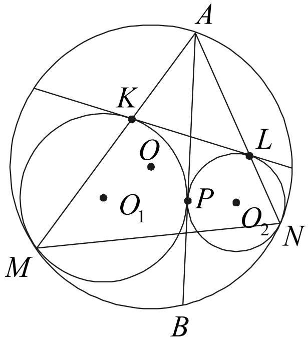


Fig. 2

Din AB axă radicală a cercurilor $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ rezultă că $AK \cdot AM = AL$ $\triangle AKL \sim \triangle ANM$, de unde obţinem $\widehat{AKL} \equiv \widehat{ANM}$, adică $m(\widehat{AKL}) = m$ $\frac{1}{2}m(\overset{\frown}{AM})$.

Pe de altă parte, din

$$m(\widehat{O_1KM}) = m(\widehat{O_1MK}) = m(\widehat{OMA}) = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\widehat{MOA}) = 90^\circ - \frac{1}{2}$$

obţinem $m(\widehat{O_1KL}) = 90^\circ$, deci KL este tangentă la $\mathcal{C}_1$. Din $O_1K \parallel$ rezultă $KL \perp O_2L$, de unde KL este o tangentă comună exterioară ce şi $\mathcal{C}_2$. Aplicăm teorema lui Casey pentru cercurile A, $\mathcal{C}_1$, B, $\mathcal{C}_2$ (A, B d tangente interior cercului $\mathcal{C}$ şi obţinem:

$$d_{AO_1} \cdot d_{BO_2} + d_{AO_2} \cdot d_{BO_1} = d_{AB} \cdot d_{O_1O_2} \Leftrightarrow$$

(am notat $d_{O_1O_2}$ lungimea tangentei comune exterioare cercurilor $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$

$$\sqrt{AP \cdot AQ} \cdot \sqrt{BP \cdot BQ} + \sqrt{AP \cdot AQ} \cdot \sqrt{BP \cdot BQ} = AB \cdot KL$$

$$AB \cdot KL = 2\sqrt{AP \cdot BP} \cdot \sqrt{AQ \cdot BQ} \Rightarrow AB \cdot KL \leq 2 \cdot \frac{AP + BP}{2} \cdot$$

$$AB \cdot KL \leq \frac{AB^2}{2} \Rightarrow AB \geq 2KL.$$

Dacă cercurile $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ sunt tangente exterior (fig. 2), atunci avem:

$$AB \cdot KL = 2AP \cdot BP \Rightarrow AB \cdot KL \leq 2\left(\frac{AP + BP}{2}\right)^2 \Rightarrow AB \cdot KL \leq \frac{AB^2}{2} \Rightarrow$$

(egalitate dacă $AP = BP$).

Egaliate avem dacă cercurile $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ sunt tangente exterior în mijloc tului $[AB]$.

L77. *Fie punctele $P_1, P_2, \ldots, P_{13}$ în plan astfel încât oricare trei sunt*

şi toate au coordonate întregi. Să se arate că există cel puţin un triunghi P_i
încât centrul său de greutate să aibă coordonate întregi.

Vasile Pravăţ şi Titu Zvonaru, Comăneşt

Soluţie (Daniel Văcaru). Există trei resturi modulo 3, aşa că cel puţi x_i dau acelaşi rest la împărţirea prin 3 (principiul cutiei!), ceea ce impune centrului de greutate este număr întreg, oricum am alege trei indici din A a celor 5 determinaţi mai sus. Considerăm M mulţimea resturilor mo numerelor $\{y_i \mid i \in A\}$. Dacă M are trei elemente, alegem $i, j, k \in A$ a $y_i + y_j + y_k \equiv 0 + 1 + 2 \pmod 3$ şi problema este rezolvată. Dacă M elemente, cel puţin 3 ordonate dau acelaşi rest la împărţirea prin 3 şi le ele. În sfârşit, dacă M are un singur element, concluzia este imediată.

Notă. Principial aceeaşi soluţie a dat **Vlad Emanuel**, elev, Sibiu.

L78. *Considerăm şirul de puncte $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pe cercul trigonometric* $m(\widehat{P_nOP_{n+1}}) = \operatorname{arctg}\dfrac{5}{12}$ *pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $\widehat{P_nOP_{n+1}}$ fiind considera orientat. Să se arate că pentru orice punct P pe cercul trigonometric ex astfel încât $P_j \in \operatorname{Int}\mathcal{C}\left(P, \dfrac{1}{2005}\right)$.*

Lucian - Georges Lăduncă şi Andrei Ned

Soluţie. Pentru ca mulţimea $\{P_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ să fie densă pe cercul trig de unde va rezulta imediat concluzia problemei folosind lema lui Kroneck demonstrat că $\dfrac{\operatorname{arctg}\frac{5}{12}}{\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Observăm mai întâi că $\operatorname{arctg}\dfrac{5}{12} =$

Presupunem prin reducere la absurd că $\arcsin\dfrac{5}{13} = \dfrac{p}{q}\pi$, $(p, q) = 1$, $p, q \in$

Fie $\alpha = \arcsin\dfrac{5}{13}$. Atunci $\sin q\alpha = 0$ şi $\cos q\alpha = (-1)^p$. Cum $(\cos\alpha +$ $(-1)^p$, obţinem că

$$\sin^q\alpha - C_q^2\sin^{q-2}\alpha\cos^2\alpha + C_q^4\sin^{q-4}\alpha\cos^4\alpha - \cdots = 0.$$

Dacă q este par, obţinem că polinomul cu coeficienţi întregi $x^q - C_q^2x^{q-2}$ $\ldots(-1)^{\left[\frac{q}{2}\right]}C_q^{2\left[\frac{q}{2}\right]}\left(1-x^2\right)^{\left[\frac{q}{2}\right]}$ are rădăcina raţională $\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$, ceea ce es deoarece coeficientul termenului dominant este 2^{q-1}, iar termenul liber es deci polinomul respectiv poate avea numai rădăcini de forma $\pm\dfrac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$ impar se tratează analog.

Nota. **Vlad Emanuel** demonstrează că, dacă $a \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}$ şi $\dfrac{\text{arc}}{}$ atunci $a \in \left\{0, \pm 1, \pm\dfrac{1}{2}\right\}$.

L79. *Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ în aşa fel încât $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$ şi* $\max\{|a_i - a_j|\,; 1 \le i < j \le n\} \le 1$. *Demonstraţi că $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \le \dfrac{1}{n}\Big[$ şi precizaţi în ce caz are loc egalitate.*

Marius Pachiţariu,

Soluţie. Deoarece inegalitatea este simetrică în $a_1, a_2, \ldots, a_n$, putem

că $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$. Conform identităţii lui Lagrange, obţinem ţinând
ipotezele problemei că

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)^2 \leq \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i),$$

deoarece $a_j - a_i$ este pozitiv subunitar pentru toţi $1 \leq i < j \leq n$. Rămâ
demonstrăm că $\sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \leq \left[\frac{n}{2}\right] \left[\frac{n+1}{2}\right]$.

Dacă n este par, $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$, atunci

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) = (2k-1)(a_{2k} - a_1) + (2k-3)(a_{2k-1} - a_2) + \cdots + (a_k$$

$$\leq (2k - 1 + 2k - 3 + \cdots + 1)(a_{2k} - a_1) = k^2 (a_{2k} - a_1)$$

În concluzie, $\sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \leq k^2 = \left[\frac{n}{2}\right] \left[\frac{n+1}{2}\right]$.

Dacă n este impar, $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}^*$, atunci

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) = 2k(a_{2k+1} - a_1) + (2k-2)(a_{2k} - a_2) + \cdots + 2(a_{n+2}$$

$$\leq k(k+1)(a_{2k+1} - a_1).$$

În concluzie, $\sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \leq k(k+1) = \left[\frac{n}{2}\right] \left[\frac{n+1}{2}\right]$.

Dacă n este par, $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$, egalitatea din enunţ are loc pentru
$\cdots = a_k = \alpha < 0$, $a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots = a_{2k} = \beta > 0$ şi $\beta - \alpha = 1$, $\beta + \alpha$
$\beta = \frac{1}{2}$, $\alpha = -\frac{1}{2}$.

Dacă n este impar, $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}^*$, egalitatea din enunţ are
$a_1 = a_2 = \cdots = a_{k+1} = \alpha < 0$, $a_{k+2} = a_{k+3} = \cdots = a_{2k+1} = \beta$
$a_1 = a_2 = \cdots = a_k = \alpha < 0$, $a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots = a_{2k+1} = \beta > 0$ şi β
$(k+1)\alpha + k\beta = 0$, respectiv $k\alpha + (k+1)\beta = 0$. Rezultă că $a_1 = a_2 = \cdots$
$-\frac{k}{2k+1}$, $a_{k+2} = \cdots = a_{2k+1} = \frac{k+1}{2k+1}$, respectiv $a_1 = a_2 = \cdots = a_k =$
$a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots = a_{2k+1} = \frac{k}{2k+1}$.

Notă. Soluţie corectă s-a primit de la **Vlad Emanuel**, elev, Sibiu.

L80. *Fie un alfabet cu 4 litere a, b, c, d. În acest alfabet se pot for*
după următoarele reguli: după a nu poate urma b, după b nu poate urma
nu poate urma d şi după d nu poate urma a. Câte cuvinte palindromice
n, $n \geq 2$, se pot forma conform acestor reguli? (Prin cuvânt palindromic
un cuvânt în care litera de pe poziţia k coincide cu litera de pe poziţia
pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.)

Irina Mustaţă, e

Soluţie. Să observăm că pentru a construi un cuvânt palindromic (
de lungime n este suficient să construim un cuvânt C de lungime $\left[\frac{n}{2}\right]$,
inversăm şi îl adăugăm la sfârşitul lui C, între acestea inserând încă o lit
este impar.

Ţinem seama că într-un palindrom, odată cu gruparea de două litere c
apare şi inversa sa. Atunci grupările interzise în C sunt ab, bc, cd, da, ad,

Notăm cu a_n, b_n, c_n, d_n numărul cuvintelor corecte de lungime n care
în a, respectiv în b, c, d. Deoarece orice cuvânt corect de lungime n care
în a este format dintr-un cuvânt corect de lungime $n-1$ care se termină în
care se adaugă un a final, deducem că $a_n = a_{n-1} + c_{n-1}$ şi analog $b_n = b_n$
$c_n = c_{n-1} + a_{n-1}$, $d_n = d_{n-1} + b_{n-1}$. Notând cu S_n numărul cuvinte
de lungime n, avem din cele de mai sus că $S_n = 2S_{n-1}$, iar cum $S_1 = 4$
$S_n = 2^{n+1}$. Notăm acum cu P_n numărul palindroamelor de lungime n. Pe
enunţ, distingem două cazuri.

1. n este par. Atunci $P_n = S_{\left[\frac{n}{2}\right]} = 2^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$.

2. n este impar. Între cuvântul de lungime $\left[\dfrac{n}{2}\right]$ şi inversul său se mai i
literă, care poate fi aleasă în două moduri. Atunci $P_n = 2S_{\left[\frac{n}{2}\right]} = 2^{\left[\frac{n}{2}\right]+2}$.

Notă. Soluţie corectă s-a primit de la **Vlad Emanuel**, elev, Sibiu.

L81. *Fie $n \geq 1$ un număr natural fixat. O tablă infinită de şah es*
în alb şi negru în maniera obişnuită. O mulţime C de căsuţe ale tablei s
conexă *dacă putem ajunge din fiecare căsuţă a lui C în fiecare altă că*
C printr-o succesiune de deplasări în C dintr-o căsuţă într-o căsuţă ve
latură comună). Fie S o mulţime conexă cu $4n$ căsuţe. Numim raportu
al mulţimii S raportul dintre numărul de căsuţe albe şi numărul de căsuţ
S. Să se afle cea mai mică şi cea mai mare valoare posibilă a raportului c

Adrian Zahariuc, ele

Soluţie. Fie w numărul de căsuţe albe, b numărul de căsuţe negre, iar
de perechi (ordonate) de căsuţe din S. Cum fiecare căsuţă albă are cel mu
negri în S, rezultă că fiecare căsuţă albă apare în cel mult 4 perechi, de
Analog, $N \leq 4b$.

Demonstrăm acum că $N \geq 4n-1$. În acest scop, mulţimii S i se asocia
în felul următor: fiecărei căsuţe îi corespunde un nod, iar nodurile acestu
unite prin muchii dacă acele căsuţe care le corespund sunt adiacente. G
obţinut este şi el conex, N reprezintă numărul său de muchii, iar $4n$ num
vârfuri.

Observăm că un graf conex cu v vârfuri are cel puţin $v-1$ muchii,
se poate demonstra astfel: eliminăm muchiile care aparţin unor cicluri
obţinem un arbore, despre care ştim că are exact $v-1$ muchii. Atunci co
de mai sus, $N \geq 4n-1$.

De aici, $4w \geq 4n-1$, deci $w \geq n$ şi analog $b \geq n$. Cum $b + w = 4n$,
$b \leq 3n$ şi $w \leq 3n$. De aici, $\dfrac{1}{3} \leq \dfrac{w}{b} \leq 3$. Rămâne acum să construim exem
raportul cromatic atinge valorile extreme.

Numim o figură formată dintr-o căsuţă şi vecinii săi de sus, stânga
un T-dreptunghi; acesta se va numi T-dreptunghi alb sau negru după c
din centru este albă sau neagră. Pentru a atinge valoarea $\dfrac{1}{3}$, construi
formată din n T-dreptunghiuri negre suprapuse, în timp ce pentru a atin

3 construim o figură formată din n T-dreptunghiuri albe suprapuse.

Notă. Soluţie corectă s-a primit de la **Vlad Emanuel**, elev, Sibiu.

L82. *Determinaţi* $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ *pentru care* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \{p(x)$ *este periodică, unde* $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sunt funcţiile polinomiale asociate lui tiv* Q.

Paul Georgescu şi Gabriel

Soluţie. Fie $T \in \mathbb{R}_+^*$ o perioadă a lui f. Atunci $\{p(x+T) + \sin q($ $\{p(x) + \sin q(x)\}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci $p(x+T) + \sin q(x+T) - p(x) - \sin$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Deoarece $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = p(x+T) + \sin q(x+T) - p(x) - \mathrm{si}$ continuă, rămâne că ea este identic constantă, deci există $k \in \mathbb{Z}$ astfel ca p $\sin q(x+T) - p(x) - \sin q(x) = k$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

De aici, $p(x+T) - p(x) - k = \sin q(x) - \sin q(x+T)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, de und că $p(x+nT) - p(x) - nk = \sin q(x) - \sin q(x+nT)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}$ pentru $x = 0$ conduce la $|p(nT) - p(0) - nk| \leq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. De aici re este un polinom de grad maxim 1, deci $P = aX + b$, iar $k = aT$.

În concluzie, $a(x+T) + b + \sin q(x+T) - ax - b - \sin q(x) = aT$, $\forall$ $\sin q(x+T) - \sin q(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Aceasta implică faptul că

$$2 \sin \frac{q(x+T) - q(x)}{2} \cos \frac{q(x+T) + q(x)}{2} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dacă $\dfrac{q(x+T) - q(x)}{2}$ şi $\dfrac{q(x+T) + q(x)}{2}$ nu sunt identic constante, atunc stâng poate avea cel mult o mulţime numărabilă de zerouri, contradicţie. aici că $q(x+T) - q(x) = 2k_1\pi$, $\forall x \in \mathbb{R}$, cu $k_1 \in \mathbb{Z}$, sau $q(x+T) + q($ $\forall x \in \mathbb{R}$, cu $k_2 \in \mathbb{Z}$.

În primul caz obţinem că Q este un polinom de grad cel mult 1, $Q =$ $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$, cu $a_1 T = 2k_1\pi$. În al doilea caz rezultă imediat că $Q \equiv c$, inclus în primul.

În concluzie, $P = aX + b$, $Q = a_1 X + b_1$, unde a şi a_1 au proprietate $T \in \mathbb{R}_+^*$ astfel ca $aT, \dfrac{a_1 T}{2\pi} \in \mathbb{Z}$. Se observă imediat că în acest caz f periodică.

Notă. Soluţie corectă s-a primit de la **Vlad Emanuel**, elev, Sibiu.

L83. *Să se calculeze*

$$\lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{3}} + \cdots + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}} - n \right].$$

Marius Olteanu, Râmnic

Soluţie. Mai întâi, se observă că

$$\sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{k}{k+1}} - n \leq n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}} - n.$$

De asemenea,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{k}{k+1}}=\frac{1+\dfrac{1}{n}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{k+1}}}\geq\frac{1+\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{1}{k+1}\cdot\dfrac{1}{n}},$$

conform inegalităţii lui Bernoulli. Rezultă de aici că

$$\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{k}{k+1}}-n\geq\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(n+1)(k+1)}{n(k+1)+1}-1\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n(k+1)+}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1+\dfrac{1}{n}}{n(k+1)+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n(k+1)+}$$

În concluzie,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{k}{k+1}}\geq 1-\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}.$$

Avem în plus că

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}}-1}{\frac{1}{n}}=1,$$

limita din urmă putându-se calcula cu ajutorul regulii lui l'Hospital, iar

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}=0$$

conform lemei Cesarò-Stolz. Din (1) şi (2) rezultă conform criteriului c
limita din enunţ este egală cu 1.

Notă. Soluţie corectă s-a primit de la **Vlad Emanuel**, elev, Sibiu.

L84. *Fie* $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$ *şi*

$$A=\Big\{x>0;\quad x=a_0+a_1\sqrt[n]{n}+\cdots+a_{n-1}\sqrt[n]{n^{n-1}};$$

$$a_0,a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{Z};\quad n-1\mid a_0+a_1+\cdots+a_n\Big\}$$

Determinaţi $\inf A$.

Paul Georgescu şi Gabriel P

Soluţie. Fie $(x_k)_{k\geq1}$ definit de $x_k=(\sqrt[n]{n}-1)^k$; evident, $x_1\in A$.

Fie $k\geq 1$. Presupunem că $x_k=A_0^k+A_1^k\sqrt[n]{n}+\cdots+A_{n-1}^k\sqrt[n]{n^{n-1}}\in A$
străm că $x_{k+1}\in A$. Avem că

$$x_{k+1}=\left(\sqrt[n]{n}-1\right)x_k=\left(nA_{n-1}^k-A_0^k\right)+\left(A_0^k-A_1^k\right)\sqrt[n]{n}+\cdots+\left(A_{n-2}^k-A_{n-1}^k\right.$$
$$=A_0^{k+1}+A_1^{k+1}\sqrt[n]{n}+\cdots+A_{n-1}^{k+1}\sqrt[n]{n^{n-1}}$$

şi $A_0^{k+1}+A_1^{k+1}+\cdots+A_{n-1}^{k+1}=(n-1)A_{n-1}^k\,\vdots\,n-1$ pentru $k\geq 1$. Cu
pentru $k\to\infty$ obţinem că $\inf A=0$.

Notă. Soluţie corectă s-a primit de la **Daniel Văcaru**.

L85. *Fie* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *o funcţie pentru care mulţimea punctelor în care f*
finită la stânga este densă în $\mathbb{R}$. *Să se arate că mulţimea punctelor în c*

continuă este de asemenea densă în $\mathbb{R}$. (*O mulţime* $D \subset \mathbb{R}$ *se numeşte*
dacă orice interval deschis al axei reale conţine măcar un element din D

Gabriel Dospinescu, Paris, şi Marian Tetiv

Soluţie. Vom folosi următoarea lemă, demonstrabilă uşor cu ajutorul zării cu $\varepsilon - \delta$ a limitei (finite) a unei funcţii într-un punct $t_0 \in \mathbb{R}$:

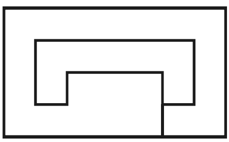
Dacă funcţia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *are limită finită la stânga în* $t_0 \in \mathbb{R}$, *atunci p* $\varepsilon > 0$ *există un interval compact nedegenerat* J, *situat la stânga lui* t_0, $|h(x) - h(y)| < \varepsilon$ *pentru orice* $x, y \in J$.

Fie acum I un interval deschis; trebuie să arătăm că acesta conţine ce punct în care f este continuă. Conform ipotezei, există $x_0 \in I$ în care f finită la stânga şi, aplicând lema de mai sus, există I_0 interval compact n situat la stânga lui x_0 astfel ca $|f(x) - f(y)| < 1$ pentru orice $x, y \in I_0$; presupus suficient de mic, astfel ca $I_0 \subset I$.

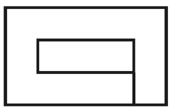
Fie $I_0 = [a_0, b_0]$; există atunci $x_1 \in (a_0, b_0)$ în care f are limită finită în x_1 şi de asemenea există un interval compact nedegenerat $I_1 \subset (a_0, b_0$ stânga lui x_1 astfel ca $|f(x) - f(y)| < \dfrac{1}{2}$ pentru orice $x, y \in I_1$.

Continuând iterativ, obţinem şirul de intervale compacte $(I \supsetneq) I_0 \supsetneq I_1$ astfel ca $|f(x) - f(y)| < \dfrac{1}{2^i}$, $\forall x, y \in I_i$. Conform lemei intervalelor înch există $a \in \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} I_n$ $(\subset I)$. Atunci $|f(a) - f(x)| < \dfrac{1}{2^i}$, $\forall x \in I_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$, de u că f este continuă în $a \in I$, ceea ce trebuia demonstrat.

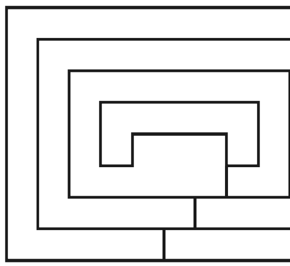
Exemplele anunţate la pag. 27.



Ex. 1



Ex. 2



Ex. 3

Premiu special
acordat de FUNDAŢIA CULTURALĂ "PO

Fundaţia Culturală "Poiana" (director d-l **Dan Tiba**) acordă elevu **EMANUEL**, *cl. a XI-a, Colegiul Naţional "Gh. Lazăr", Sibiu*, un premiu de **100 lei** (1 000 000 lei vechi).

Premiul este oferit la recomandarea Redacţiei revistei pentru abilitat niozitatea dovedite în rezolvarea unui număr mare de probleme din rubrica pentru pregătirea concursurilor": L(67-69,77-83).

Probleme propuse[1]

Clasele primare

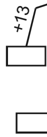
P.104. Suma dintre predecesorul unui număr şi succesorul numărulu
lui este 29. Care este acest număr?
(*Clasa I*) **Irina Luca, e**

P.105. Alăturat se află roboţelul "MATE".

a) Completaţi casetele goale;

b) Aflaţi suma numerelor pe care le ţine în mâini;

c) Aflaţi diferenţa numerelor scrise în tălpile picioarelor.



(*Clasa I*) **Andrei Stativă, elev, Iaşi**

P.106. Pentru desemnarea campioanei, echipele de hochei pe gheaţă A şi B dispută un număr de partide până ce una dintre ele câ
ori. Care este numărul maxim de partide care se pot juca, ştiind că nu a
rezultate de egalitate?
(*Clasa a II-a*) **Înv. Constanţa Cristea şi Inst. Iulian Cri**

P107. Un grup de turişti a consumat 17 prăjituri şi 31 îngheţate. Ş
turişti au consumat câte o îngheţată şi câte o prăjitură, 5 turişti au consu
câte două îngheţate, iar 4 turişti nu au consumat nimic, să se afle câţi tur
grup.
(*Clasa a II-a*) **Aliona Loghin, e**

P108. Prin împărţirea a două numere naturale rezultă câtul 3 şi restu
că împărţitorul este un număr mai mic decât 10, aflaţi cele două numere.
(*Clasa a III-a*) **Înv. Rica Bucăt**

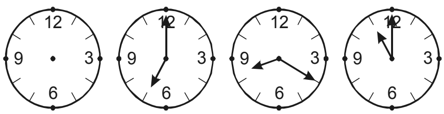
P.109. Figura alăturată este formată din beţişoare.

a) Îndepărtează un singur beţişor pentru a obţine tot atâtea triunghiuri ca şi pătrate;

b) Mută două beţişoare pentru a obţine de două ori mai multe dreptunghiuri decât pătrate.

(*Clasa a III-a*) **Adina Voinescu, elevă, Iaşi**

P.110. Ce oră indică primul ceas, ştiind că acesta respectă regula i
celelalte trei?



(*Clasa a III-a*) **Veronica Corbu, e**

P.111. Fie numărul $N = \overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba}$.

a) Care este cea mai mică şi cea mai mare valoare a lui N?

b) Câte valori diferite poate avea numărul N?

(*Clasa a IV-a*) **Oxana Pascal, e**

P.112. În urma desfăşurării unui joc didactic matematic, învăţător
ca recompensă 44 baloane. Câte 4 baloane au primit un număr de part

[1] Se primesc soluţii până la data de 31 decembrie 2006.

reprezintă a şasea parte din totalul lor, câte două au primit a treia parte
participanţilor au primit câte un balon. Aflaţi numărul participanţilor la j
aritmetică!).

(*Clasa a IV-a*) **Alexandra Nistor, e**

P.113. Dan şi-a pus timbrele în clasor, câte 10 pe unele pagini, câte
pagini şi au rămas de 4 ori mai multe pagini goale decât folosite. Dacă ar p
timbre pe fiecare pagină, toate paginile ar fi folosite. Câte pagini poate ave
ştiind că nu depăşeşte 60 (soluţie aritmetică!)?

(*Clasa a IV-a*) **Petru As**

Clasa a V-a

V.66. Să se arate că, oricare ar fi cifra nenulă a, numărul $x = 21^{\overline{31a}}+32$
se divide cu 10.

Otilia Nemeş, Ocna Mur

V.67. a) Să se arate că, scăzând din suma a 2006 numere pare consec
numerelor situate între acestea, nu se poate obţine rezultatul 2006^2.

b) Să se afle 2006 numere pare consecutive astfel încât, scăzând din sum
numerelor situate între ele, să se obţină 2005^2.

Marian Panţ

V.68. Arătaţi că nu există $n \in \mathbb{N}$ pentru care $A_n = 5^n + 89$ să fie pătr

Iulia Pleşca, e

V.69. Să se rezolve în $\mathbb{N}^2$ ecuaţia $8^n + 15^m = 6 + 6^2 + \cdots + 6^{2006}$.

Alexandru Gabriel Tudorache,

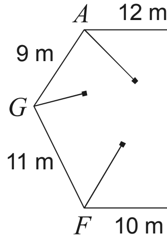
V.70. Determinaţi $a \in \mathbb{N}$ pentru care numerele a, $a+2$, $a+6$, $a+$
$a+20$, $a+26$, $a+30$, $a+32$, $a+36$, $a+60$ sunt simultan prime.

Lucian Tuţescu

Clasa a VI-a

VI.66. Alăturat este desenată o grădină având forma unui poligon cu 7 laturi. În fiecare vârf se află câte o poartă mobilă astfel încât, în oricare două vârfuri vecine, porţile să închidă perfect latura pe care acestea o determină. Să se afle lungimile porţilor.

Roxana Căpăţână, elevă, Iaşi



VI.67. În patrulaterul $ABCD$ construim $AP \perp BD$, $CQ \perp BD$, I
şi fie M mijlocul lui (AC). Dacă punctele M, P, Q sunt distincte două
demonstraţi că $\triangle MPQ$ este isoscel.

Marius Fa

VI.68. Fie punctele A, C, M cu $m(\widehat{AMC}) \neq 90°$ şi $AC = 2\,AM$. Să
M este mijlocul lui $[AC]$ dacă şi numai dacă $2\mathrm{m}(\widehat{ACM}) = m(\widehat{MAC})$.

Ioan Săcălean

VI.69. Să se arate că pentru orice alegere a semnelor în expresia $\pm 1^2$
2006^2, rezultatul nu se divide cu 2006.

Mihail Bencz

VI.70. Determinaţi $m, n \in \mathbb{Z}$ pentru care $a = \dfrac{3m+1}{2m+1} + \dfrac{n+2}{3n+5} \in \mathbb{Z}$.

Gheorghe I

Clasa a VII-a

VII.66. Să se rezolve în $\mathbb{R}^4$ ecuaţia

$$30\sqrt{x-y+901} + 25\sqrt{y-z+626} + 20\sqrt{z-x+401} + 9\sqrt{t-x+78}$$

Ioana Olan, e

VII.67. Aflaţi $a, b \in \mathbb{N}$ dacă $a+b=18$ şi $10^{a+1} - 9b + 71 \,\vdots\, 81$.

Andrei-Sorin Cozma,

VII.68. Fie $\triangle ABC$ dreptunghic, cu ipotenuza de lungime a, catetele aria S. Dacă $x, y \in (0, \infty)$, să se arate că $\dfrac{a^2}{S} = \dfrac{2\left(x^2+y^2\right)}{xy}$ dacă şi numa c sunt direct sau invers proporţionale cu x şi y.

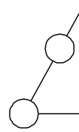
Veronica Plăeşu şi Dan Pl

VII.69. Fie $\triangle MNP$ cu $m(\widehat{NMP}) = 90°$; se consideră punctele $S, T,$ $M \in (PT)$, astfel încât $NS = 3\,MS$, $PT = 3\,MT$. Dacă $\{Q\} = PS \cap NT$
a) $QM = NP$; *b*) $QN^2 + QP^2 = 5\,NP^2$.

Dorel Luc

VII.70. Triunghiul alăturat este considerat fix. În câte moduri putem aşeza numerele 1, 2, 3, 4, 5, 6 în cerculeţe, astfel încât suma numerelor de pe fiecare latură a triunghiului să fie aceeaşi?

Petru Asaftei, Iaşi



Clasa a VIII-a

VIII.66. Să se demonstreze că

$$\frac{1}{2^4+2^2+1} + \frac{1}{3^4+3^2+1} + \cdots + \frac{1}{n^4+n^2+1} < \frac{n-1}{3n}.$$

Carmen Daniela Tama

VIII.67. Fie $0 < a < b < c < d < e$ şi propoziţiile:

$$p_1:\ b = \frac{2ac}{a+c};\quad p_2:\ c = \frac{b+d}{2};\quad p_3:\ c = \sqrt{ae};\quad p_4:\ d = \frac{2ce}{c+}$$

Să se arate că dacă oricare trei dintre propoziţii sunt adevărate, atunci este şi cea de-a patra.

Claudiu-Ştefan I

VIII.68. Fie $A_n = 2006^n + 2005^n - 1992^n - 1991^n$, $n \in \mathbb{N}$. Să se d pentru care $A_n \,\vdots\, 28$.

Ionel Necl

VIII.69. Fie $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. Determina mică şi cea mai mare valoare a expresiei

$$E(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1.$$

Ion Vişan şi Lucian Tuţescu

VIII.70. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ şi fie M, N mijloacele
$[AB]$, respectiv $[BC]$, iar $\{S\} = AN \cap CD$, $\{T\} = DM \cap BC$. Să se a
unghiului format de $D'N$ şi ST.

Gabriel I

Clasa a IX-a

IX.66. Pentru $x, y \in \mathbb{R}$, fie $a = y + xy - x$, $b = x^2 + x - xy$.

a) Dacă $a, b \in (-\infty, 0)$, să se compare numerele x şi y.

b) Arătaţi că există o infinitate de numere raţionale x, y pentru care a, b

Ionuţ Onofrei, ele

IX.67. Fie $n \geq 2$ şi $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$ astfel încât

$$(a_2 a_3 \cdots a_n)^2 + (a_1 a_3 a_4 \cdots a_n)^2 + \cdots + (a_1 a_2 \cdots a_{n-1})^2 = 1.$$

Să se arate că

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_2 a_3 \cdots a_n + a_1 a_3 \cdots a_n + \cdots + a_1 a_2 \cdots a_{n-1}$$

Adrian Zahariuc, ele

IX.68. În $\triangle ABC$ se consideră cevienele $[AM]$, $[BN]$, $[CP]$ concurent
se arate că $\dfrac{TA}{TM} = \dfrac{TB}{TN} = \dfrac{TC}{TP}$ dacă şi numai dacă T este centrul de
$\triangle ABC$.

Ovidiu Pop, S

IX.69. Fie $\triangle ABC$ nedreptunghic. Paralela prin B la AC şi simetr
AC în raport cu BC se intersectează în A_1; analog se obţin punctele B_1 ş
AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente, să se arate că $\triangle ABC$ este echilateral.

Temistocle Bî

IX.70. Să se arate că $\operatorname{tg} 15° + \operatorname{tg} 25° + \operatorname{tg} 35° + \operatorname{tg} 85° > 4$.

D. M. Bătineţu-Giurgiu, I

Clasa a X-a

X.66. Notăm cu $\mathcal{D}$ mulţimea punctelor $P(x, y)$ din planul xOy situa
riorul sau pe laturile $\triangle ABC$. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 \neq 0$; definim funcţia
$f(P) = ax + by + c$. Să se arate că pentru orice $P \in \mathcal{D}$, avem

$$\min\{f(A), f(B), f(C)\} \leq f(P) \leq \max\{f(A), f(B), f(C)\}$$

Adrian Cordun

X.67. Fie $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Să se determine funcţiile
$f : \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \to (0, \infty)$ pentru care $f(x + y) = f(x) f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

Dan-Ştefan Marinescu şi Viorel Cornea, H

X.68. Pe cercul trigonometric se consideră punctele A, B, C de afi
unde $\varepsilon = \cos \dfrac{2\pi}{3} + i \sin \dfrac{2\pi}{3}$. Fie $M(z)$ un punct al cercului situat pe arcu
conţine A. Să se arate că $\left|z^2 + z + 1\right| = -\dfrac{z^2 + z + 1}{z}$.

Marian Tetiv

X.69. Dacă $a, b, c > 1$, să se demonstreze inegalitatea

$$a^{\sqrt[3]{\log_a b} + \sqrt[3]{\log_a c}} + b^{\sqrt[3]{\log_b a} + \sqrt[3]{\log_b c}} + c^{\sqrt[3]{\log_c a} + \sqrt[3]{\log_c b}} \leq \frac{(a + b + c}{3}$$

Titu Zvonaru, C

X.70. Fie pătratul $ABCD$. Să se determine mulţimea

$$\Delta = \{P \in \operatorname{Int} ABCD \mid PA^2, 2PB \cdot PD, PC^2 \text{ sunt laturile unui triun}$$

Cătălin Cali

Clasa a XI-a

XI.66. Fie x_n, $n \in \mathbb{N}^*$, cel mai mic număr natural cu proprietatea că e $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}_{(10)}$ cu toate cifrele nenule, astfel încât $M = (n+1)\ \sqrt[n+1]{a_n a}$ $9x_n$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{10^n}$.

Valeriu Braşovean

XI.67. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 \in \left(-\dfrac{\pi}{4}, 0\right)$, $x_{n+1} = 2x_n - \operatorname{tg} x$ Să se studieze existenţa limitelor $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{-x_n}$.

Dan Popescu

XI.68. Fie $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ interval, o funcţie de două ori de $f''(x) \geq f'(x)$, $\forall x \in I$. Să se arate că $f(x) - f(a) \geq (e^{x-a} - 1) f'(a)$ Pentru $f(x) = e^{\alpha x}$, $\alpha \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$, să se deducă inegalitatea lui I

Dumitru Mihalach

XI.69. Fie $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $\det(AX + B) \geq 0$, $\forall X \in \mathcal{M}_3$ arate că există $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A = BC$.

Gheorghe Iu

XI.70. Fie a, b, c laturile unui triunghi ale cărui unghiuri au măsurile A, B, C şi care are raza cercului înscris r. Să se arate că distanţa de $M(A, B, C)$ la planul $\mathcal{P} : ax + by + cz + r = 0$ este mai mare decât $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{3}$

Sorin Puşpană

Clasa a XII-a

XII.66. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $0 \leq a < b$ şi fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie d derivabilă pe $[a, b]$, cu f'' continuă. Dacă

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{a^2}{2} f'(a) - \frac{b^2}{2} f'(b) + bf(b) - af(a),$$

să se arate că există $\theta \in (a, b)$ astfel încât $f''(\theta) = 0$.

Mihai Ha

XII.67. Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea că există $L \geq 0$ a $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$, $\forall x, y \in [0, 1]$. Să se arate că pentru orice prin lui f şi pentru orice $x_1, x_2, \ldots x_n \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, are loc

$$\left| F\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots x_n}{n}\right) - \frac{F(x_1) + F(x_2) + \cdots + F(x_n)}{n} \right| \leq \frac{L}{2n^2} \sum_{1\leq i<j\leq n} ($$

Dan-Ştefan Marinescu, H

XII.68. Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{P(x)}$, $g(x) = e^{Q(x)}$, unde P, Q sunt de grad $m \geq 1$, având coeficienţii dominanţi a, respectiv b, $a, b \in (0, \infty)$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \left(f(n) \int_0^n g(x)\,dx\right) / \left(g(n) \int_0^n f(x)\,dx\right)$.

b) Să se studieze buna definire a şirurilor $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$, unde
$\frac{1}{n}\int_0^n f(x)\,dx$, $g(b_n) = \frac{1}{n}\int_0^n g(x)\,dx$ şi apoi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$.

Marius Ap

XII.69. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$ polinom reciproc de grad $4n+2$, $n \in \mathbb{N}^*$, având
distincte, complexe şi nereale. Să se arate că f are cel puţin o rădăcină d

Cătălin Ţigăeru

XII.70. Fie G un grup de ordin $n \geq 4$ cu proprietatea că există m
$m < n$, astfel încât G conţine exact C_{n-1}^{m-1} subgrupuri de ordin m. Arătaţ
abelian.

Marius Tărnăuc

Probleme pentru pregătirea concursurilo

A. Nivel gimnazial

G96. Fie $a = x^{12m} + x^{12n}$, unde $m, n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că num
divizibil cu 13, dacă şi numai dacă x este divizibil cu 13.

Artur Bălăucă,

G97. Determinaţi $a, b \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, $a \neq 0$, astfel încât numărul A

$n > 2$, să fie pătrat perfect.

Gheorghe I

G98. Să se determine $m, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{m}{n} + \frac{n+1}{m^2} \in \mathbb{N}^*$.

Gabriel Dospinescu, stud

G99. Fie m, n două numere naturale nenule astfel încât m divide n
numerele naturale între 1 şi n se aşează la întâmplare pe un cerc. Se calcu
oricărui grup de m numere vecine. Să se demonstreze că printre aceste s
două pentru care diferenţa dintre ele este strict mai mare decât $m-1$.

Titu Zvonaru, C

G100. În câte moduri putem colora cu 5 culori un pătrat 3×3, ast
fiecare pătrat 2×2 să existe patru culori diferite?

Gabriel

G101. Să se demonstreze inegalitatea

$$4\left(\frac{1}{a(1+bc)^2} + \frac{1}{b(1+ca)^2} + \frac{1}{c(1+ab)^2}\right) \leq 1 + \frac{16}{(1+bc)(1+ca)(1}$$

$\forall a, b, c \in (0, \infty)$ în condiţia $abc = 1$. Când are loc egalitatea?

Gabriel Mîrşanu şi Andrei Ned

G102. Să se determine valoarea maximă a parametrului $m \in \mathbb{R}_+^*$ astf

$$\frac{b^2+c^2}{a} + \frac{c^2+a^2}{b} + \frac{a^2+b^2}{c} \geq m\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$$

Dorel Băiţan şi I. V. Maftei,

G103. Pentru $a, b, c \in (0,1)$ cu $a+b+c=2$, să se arate că
$$abc \geq 8\,(1-a)\,(1-b)\,(1-c)\,.$$

Alexandru Negrescu, elev,

G104. Triunghiul ABC are $m(\widehat{BAC}) = 120°$. Fie $O \in (BC)$ astfel
este bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$. Pe $[AO$ se ia punctul D astfel încât
bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{ABD}$. Să se arate că $AD + BD = A$
$AB + AC \geq 4\,AO$.

Petru Rădu

G105. Se consideră trapezul $ABCD$ cu bazele AB, CD $(AB > C$
intersecţia diagonalelor trapezului. Se duce linia mijlocie MN a trapezului
PQ prin O la bazele trapezului $(M, P \in (AB),\ N, Q \in (BC)\ )$. Să se de
că trapezele $ABMN$ şi $PQCD$ au diagonalele respectiv paralele.

Claudiu-Ştefan

B. Nivel liceal

L96. Fie cercurile $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}$ astfel încât $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ sunt tangente ext
şi fiecare dintre ele este tangent interior lui $\mathcal{C}$ în B, respectiv C. Tangen
interioară cercurilor $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ taie cercul $\mathcal{C}$ în A şi A_1. Dreapta AB taie cerc
iar dreapta AC taie cercul $\mathcal{C}_2$ în L. Din punctul M de pe cercul $\mathcal{C}$ se duc
MT_1 şi MT_2 la cercurile $\mathcal{C}_1$, respectiv $\mathcal{C}_2$ $(T_1 \in \mathcal{C}_1,\ T_2 \in \mathcal{C}_2)$. Dacă M
arătaţi că $MT_1 + MT_2 = \dfrac{A_1M}{A_1D} \cdot KL$ şi $|MT_1 - MT_2| = \dfrac{AM}{AD} \cdot KL$.

Neculai Roman, Mirc

L97. Să se demonstreze că în orice triunghi are loc inegalitatea
$$\frac{1}{m_a^2\,(m_b+m_c-m_a)} + \frac{1}{m_b^2\,(m_c+m_a-m_b)^2} + \frac{1}{m_c^2\,(m_a+m_b-m_c)^2}$$

I. V. Maftei şi Dorel Băiţan,

L98. Se consideră un triunghi oarecare ABC. Demonstraţi că

1) $\sin^4 A + \sin^4 B + \sin^4 C \geq \dfrac{27}{2}\left(\dfrac{r}{R}\right)^3$;

2) $\cos^4 A + \cos^4 B + \cos^4 C \geq \dfrac{3}{8}\left(\dfrac{r}{R}\right)^4 \left(5 - \dfrac{r_a}{r}\right)\left(5 - \dfrac{r_b}{r}\right)\left(5 - \dfrac{r_c}{r}\right)$,

unde R este raza cercului circumscris, r este raza cercului înscris, iar r_a,
razele cercurilor exînscrise.

Oleg Faynshteyn, Leipzig,

L99. $a)$ Care este numărul minim de puncte din plan de coordonate în
încât, oricum ar fi alese, să existe trei puncte cu centrul de greutate de
întregi.

$b)$ Să se arate că într-un spaţiu n-dimensional există 2^{n+1} puncte de
întregi astfel încât oricare trei dintre acestea au centrul de greutate cu
coodonată care nu este un întreg.

Irina Mustaţă, studentă, Bremen,

L100. Fie $x \in (0,1)$; arătaţi că există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\{nx\} \in \left[\dfrac{1}{3}, \right.$

Ciprian Baghiu şi Gheorghe

L101. Fie $a,n\geq 2$ două numere întregi. Să se arate că $\prod\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{a^n-a^k}{n-k}\in$

Adrian Zahariuc, ele

L102. Fie $p=2k+1$ un număr prim. Atunci

$$S_1=\sum_{i=k+1}^{2k}C_{p+i-1}^{i}\equiv 2^p-2\left(\bmod p^2\right),\quad S_2=\sum_{i=1}^{k}C_{p+i-1}^{i}\equiv 2-2^p\ (\mathrm{m}$$

Marius Pachiţariu,

L103. Fie a, b, c, d reale astfel încât $\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)\left(1+\right.$
Arătaţi că

$$-3\leq ab+bc+cd+da+ac+bd-abcd\leq 5.$$

Mai mult, avem egalitate în cel puţin una din inegalităţile de mai sus dac
dacă $a+b+c+d=abc+bcd+cda+dab$.

Gabriel Dospinescu, stude

L104. Fie $x_0>0$ şi $x_n=x_{\left[\frac{n}{2}\right]}+x_{\left[\frac{n}{3}\right]}+\dfrac{n}{6}$, pentru orice $n>0$.

$a)$ Să se arate că şirul $\left(\dfrac{x_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ este convergent la 1.

$b)$ Să se arate că dacă $\alpha>\log_3\dfrac{5}{2}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-n}{n^\alpha}=0$.

Gabriel Dospinescu, stude

L105. Să se determine toate funcţiile continue $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, ca
ecuaţia funcţională

$$nx^{n-1}f\left(x^n\right)=(x+1)\,f\left(x\right),\quad \forall x\in(0,\infty),$$

unde $n\in\mathbb{N}^*$, n fixat.

Marian Tetiva şi Dumitru Mihalach

Training problems for mathematical conte

A. Junior highschool level

G96. Let $a=x^{12m}+x^{12n}$, with $m,n\in\mathbb{N}^*$. Prove that a is divisible b
only if x is divisible by 13.

Artur Bălăucă,

G97. Find $a,b\in\{0,1,2,\ldots,9\}$, $a\neq 0$, such that $A=\overline{a\underbrace{bb\ldots b}_{n\text{ times}}}$, $n>2$ i
square.

Gheorghe I

G98. Find $m,n\in\mathbb{N}^*$ such that $\dfrac{m}{n}+\dfrac{n+1}{m^2}\in\mathbb{N}^*$.

Gabriel Dospinescu, stude

G99. Let m, n two positive integer such that m divides $n-1$. A
integers between 1 and n are put on a circle in an arbitrary way. One co
sum of any set of m neighbors numbers. Prove that among all these sums
two of them for which their difference is strictly grater than $m-1$.

Titu Zvonaru, C

G100. In how many ways could one colour a square 3×3 such that i
square 2×2 to be four different colours?

Gabriel I

G101. Prove the following inequality

$$4\left(\frac{1}{a(1+bc)^2}+\frac{1}{b(1+ca)^2}+\frac{1}{c(1+ab)^2}\right) \leq 1+\frac{16}{(1+bc)(1+ca)(1}$$

$\forall a, b, c \in (0, \infty)$ under the condition $abc = 1$. When does the equality hol

Gabriel Mîrşanu and Andrei Ned

G102. Find the maximal value of the parameter $m \in \mathbb{R}_+^*$ such that

$$\frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b}+\frac{a^2+b^2}{c} \geq m\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$$

Dorel Băiţan and I. V. Maftei, I

G103. For $a, b, c \in (0, 1)$ and $a + b + c = 2$, show that

$$abc \geq 8(1-a)(1-b)(1-c).$$

Alexandru Negrescu, highschool student,

G104. The triangle ABC has $m(\widehat{BAC}) = 120°$. Let $O \in (BC)$ such t
the angle bisector of $\widehat{BAC}$. Let D be a point on $[AO$ such that $[BC$ to
angle bisector of $\widehat{ABD}$. Prove that $AD + BD = AB + AC$ and $AB + AC$

Petru Răduc

G105. Let $ABCD$ be a trapezium with AB, CD $(AB > CD)$ as the
consider that the diagonals of the trapezium intersect in O. We construct
the mean line of the trapezium and the parallel PQ, through O, to the b
trapezium $(M, P \in (AB),\ N, Q \in (BC)$). Prove that the trapeziums A
$PQCD$ have the diagonal respectively parallel.

Claudiu-Ştefan I

B. Highschool level

L96. Let $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}$ such that $\mathcal{C}_1$ and $\mathcal{C}_2$ touch each other externally
each of them is interior tangent to $\mathcal{C}$ in B and C, respectively. The comm
tangent to the circles $\mathcal{C}_1$ and $\mathcal{C}_2$ cuts the circle $\mathcal{C}$ in A and A_1. The line A
circle $\mathcal{C}_1$ in K and the line AC cuts the circle $\mathcal{C}_2$ in L. From the point M
the circle $\mathcal{C}$ we construct the tangent lines MT_1 and MT_2 to the circles
respectively $(T_1 \in \mathcal{C}_1, T_2 \in \mathcal{C}_2)$. If $MA < MA_1$ prove that $MT_1 + MT_2 =$
and $|MT_1 - MT_2| = \dfrac{AM}{AD} \cdot KL$.

Neculai Roman, Mirc

L97. Prove that, in any triangle, the following inequality holds

$$\frac{1}{m_a^2(m_b+m_c-m_a)}+\frac{1}{m_b^2(m_c+m_a-m_b)^2}+\frac{1}{m_c^2(m_a+m_b-m_c)^2}$$

I. V. Maftei and Dorel Băiţan, I

L98. Let ABC be an arbitrary triangle. Prove that

1) $\sin^4 A + \sin^4 B + \sin^4 C \geq \frac{27}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^3$;

2) $\cos^4 A + \cos^4 B + \cos^4 C \geq \frac{3}{8}\left(\frac{r}{R}\right)^4\left(5-\frac{r_a}{r}\right)\left(5-\frac{r_b}{r}\right)\left(5-\frac{r_c}{r}\right)$,

where R is the radius of the circumcircle circle, r is the radius of the inscr and r_a, r_b, r_c are the radius of the exinscribed circles.

Oleg Faynshteyn, Leipzig,

L99. *a*) Which is the minimal number of points of integer coordinates in a plane, such that no mater how they are chosen, there exist three of their centre of gravity expressed by integer coordinates.

b) Prove that, in an n-dimensional space exist 2^{n+1} points of integer c such that any 3 of them have the center of gravity with at least one coor an integer.

Irina Mustaţă, student, Bremen,

L100. Let $x \in (0,1)$; prove that there exist $n \in \mathbb{N}^*$ such that $\{nx\}$

(By $\{\cdot\}$ we denoted the fractional part.)

Ciprian Baghiu and Gheorghe I

L101. Let $a, n \geq 2$ two integers. Prove that $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a^n - a^k}{n-k} \in \mathbb{Z}$.

Adrian Zahariuc, highschool studen

L102. Let $p = 2k+1$ be a prime number. Then

$$S_1 = \sum_{i=k+1}^{2k} C_{p+i-1}^{i} \equiv 2^p - 2 \left(\operatorname{mod} p^2\right), \quad S_2 = \sum_{i=1}^{k} C_{p+i-1}^{i} \equiv 2 - 2^p \ (\text{m}$$

Marius Pachiţariu, highschool stu

L103. Let a, b, c, d some real numbers such that

$$\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)\left(1+d^2\right) = 16.$$

Prove that

$$-3 \leq ab + bc + cd + da + ac + bd - abcd \leq 5.$$

Moreover, at least one from the above inequalities becomes an equality if $a + b + c + d = abc + bcd + cda + dab$.

Gabriel Dospinescu, stude

L104. Let $x_0 > 0$ and $x_n = x_{\left[\frac{n}{2}\right]} + x_{\left[\frac{n}{3}\right]} + \frac{n}{6}$, for any $n > 0$.

a) Prove that the sequence $\left(\frac{x_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ is convergent to 1.

b) Prove that if $\alpha > \log_3 \frac{5}{2}$, then $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - n}{n^\alpha} = 0$.

Gabriel Dospinescu, stude

L105. Find all continuous functions $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, which verify the equation

$$nx^{n-1} f\left(x^n\right) = (x+1) f(x), \quad \forall x \in (0,\infty),$$

where $n \in \mathbb{N}^*$, n is fixed.

Marian Tetiva and Dumitru Mihalach

Pagina rezolvitorilor

BRAŞOV

Liceul "N. Titulescu". **Clasa a X-a.** CHIRA Roxana: VIII(56,58,61-
61); COSTA Larisa: VIII(57,58,61-63), IX(56,61); LUCACI Adina: V
IX(61,63); MOCANU Vlad: VIII(61-63), IX(61,63,65); NEGOESCU Anan
(56,57,61,62), IX(56,61,63,65); NILĂ Iulian: VIII (61-63), IX(61,63,65); N
min: VIII(61-63), IX(61,63,65); OBANCEA Dragoş: VIII(61-63), IX
ŞCHIOPU Iulian: VIII(56,61-63), IX(56,61); ZBARCEA Adrian: VIII(56
IX(56,61). **Clasa a XI-a.** BOTH Alexandru: IX(61,63,65), X.62, XI.61; B
Andreea: IX(61,63,65), X.62, XI.61; CAIA Claudiu: IX(61,63,65), X.
DELAST-VOINEA Alexandru: IX(61,63,65), X(58,62), XI.61; DIACONE
an: IX(61,63,65), X.62, XI.61; DUCA Răzvan: IX(61,63, 65), X.62, X
MITRU Silviu: IX(61,63,65), X.62, XI.61; ENACHE Florin: IX(61,63
XI.61; FLOREA Luminiţa: IX(57,61,63,65), X.62, XI.61; GIURGIU Benia
63,65), X.62, XI.61; GONŢEA Paul: IX(61,63,65), X.62, XI.61; GUL
IX(61,63,65), X.62, XI.61; IVAŞCU Andreea: IX(61,63,65), X.62, XI.61;
Raluca: IX(61,63,65), X.62, XI.61; MARDALE Mihai: IX(61,63,65), X
MATIŞ Gheorghe: IX(61,63,65), X.62, XI.61; MÂRZESCU Andreea: IX
X.62, XI.61; NAFRADI Jenö: IX(61,63,65), X.62, XI.61; NAN Maria: IX
X.62, XI.61; PANAIT Mihail: IX(61,63,65), X.62, XI.61; POPA Cătălina
65), X.62, XI.61; RĂCEAN Bogdan: IX(61,63,65), X.62, XI.61; SAV
IX(61,63,65), X.62, XI.61; TĂBUŞCĂ Florin: IX(61,63,65), X.62, XI.61;
Ana-Maria: IX(61,63,65), X.62, XI.61.

CRAIOVA

Colegiul Naţional "Carol I". **Clasa a VI-a.** STANCIU Ioan: V(61-6
63), VIII.61, G.90.

HÂRLĂU

Şcoala "Petru Rareş". **Clasa a III-a** (înv. BUDACEA Maria). NE
P(89,95-97,99). **Clasa a IV-a.** (înv. CREŢU Maria). BOUTIUC Mădălin
101); BUZILĂ Andreea: P(94-101); PINTILII Alina: P(94-101).

Liceul "Ştefan cel Mare". **Clasa a VII-a.** APACHIŢEI Ana-Maria:
VI(59,60); ATÎRGOVIŢOAE Anca-Elena: V(56-58), VI(59,60); COJOC
V(56-58), VI(59,60); CURCĂ Ioana: V(56-58), VI(59,60); LENŢER So
58), VI(59,60); PINTILII Anda: V(56-58), VI(59,60).

IAŞI

Şcoala nr. 3 "Al. Vlahuţă". **Clasa a III-a** (inst. MAXIM Gabrie
MARE Raluca-Iuliana: P(94-96,98,99); NEAGU Ramona-Mihaela: P(94
POPOVICI Ionuţ: P(94-96,98,99); RUSU Ioana-Andreea: P(94-96,98,9
Mădălina: P(94-96,98,99); SAVA Vlad: P(94-96,98,99). **Clasa a III-a** (în
UŢĂ Valentina). CULEA Alina: P(94-96,98,99); POPA Iulian: P(94
PROCA Ancuţa-Ioana: P(94-96,98,99). **Clasa a VII-a.** DODU Cori
63), VI.61, VII.63; IRIMIA Andreea: V(61-63), VI.61, VII.63; RUSU La
V(61-63), VI.61, VII.63; UNGURU Claudiu: V(61-63), VI.61, VII.63.

Şcoala nr. 4 "I. Teodoreanu". **Clasa a IV-a** (înv. BUJOR Lorena) Dana: P(98-100,102,103).

Şcoala nr. 13 "Alexandru cel Bun". **Clasa II-a** (inst. COJOCARIU A FIŢEI Elena-Roxana: P(94-97,99); CARAMALĂU Andra: P(94-97,99 Andreea-Claudia: P(94-97,99); COJOCARIU Andreea: P(94-97,99); D Luisa-Ştefania: P(94-97,99); LELEU Alexandrina-Ştefana: P(94-97,99); Diana-Maria: P(94-97,99); MANOLACHE Mădălina-Andreea: P(94-9 HĂILĂ Narcisa-Lorena: P(94-97,99); PASCU Gabriela: P(94-97,99); PĂ Tiberiu-Ştefan: P(94-97,99); RĂDUCEA Marin-Andrei: P(94-97,99); SA na-Simona: P(94-97,99); ŞTEFAN Bogdan-Vasile: P(94-97,99); ŞTIUBE Ionuţ: P(94-97,99). **Clasa a III-a** (înv. OBREJA Rodica): APETRII P(94-97,99); EŞANU Mihai: P(94-97,99); VATAVU Iulian: P(94-97,99).

Şcoala nr. 22 "B. P. Hasdeu". **Clasa a IV-a** (înv. CHIRILĂ Laur Vlad: P(94-100,102,103); CHICHIRĂU Alexandra-Elena: P(94-100). **Cl a** (înv. TÂRZIORU Iuliana). APOSTOL Ana-Maria: P(94-97,99,100) Andrei: P(94-99); GÎNDU Alexandra: P(94-100); GRIEROSU Claudiu: LĂMĂTIC Ioana: P(94-102); REBEGEA Andrada Elena: P(94-100); U NU Teofana: P(94-100).

Şcoala nr. 26 "G. Coşbuc". **Clasa a IV-a** (înv. BUCATARIU Rica). George-Ciprian: P(94-97,100); DUMITRU Ambra-Georgiana: P(94-97,99, DAN Alexandru-Iulian: P(94-100); HRISCU Alexandra: P(94-100); IACO Ionuţ: P(94-100); MOISA Adrian-Bogdan: P(94-100); MUSTEAŢĂ P(94-98); SCUTARU Ionela-Cristina: P(94-100); TUDOSĂ Mădălina: ZĂLINCĂ Georgiana: P(94-98).

Colegiul Naţional. **Clasa a VI-a.** BACUŞCĂ Albert: V(56-60); BA dan: V(56-60); BOŢU Alexandru: P.101, V(61-63), VI.61; CEUCĂ Răz 60); MOCANU Dan Mihai: P.103, V(61,63,65), VI.61; PRISTOPAN Co 60); TIBA Bianca Mădălina: V(59-63,65), VI.63; **Clasa a VII-a.** CADA dra: V(61-65), VI(61,62); HUMELNICU Roxana: V(61-64), VI(61-65).

Colegiul Naţional "Emil Racoviţă". **Clasa a VI-a.** TUDORACHE Gabriel: P(101-103), V(61-65), VI(61,63,64).

Colegiul Naţional "C. Negruzzi". **Clasa a VII-a.** TIBA Marius: VII VIII(61,62), G(89,95); **Clasa a VIII-a.** OLAN Ioana: VI(61,64), VII(63 95).

SIBIU

Colegiul Naţional "Gh. Lazăr". **Clasa a XI-a.** VLAD Emanuel: L(7

SUCEAVA

Şcoala nr. 3. **Clasa a II-a** (inst. NECHITA Daniela). FECHET Mirce 87-89,94-97,99).

Premii acordate rezolvitorilor

ASOCIAŢIA "RECREAŢII MATEMATICE" în colaborare c
revistei **RECREAŢII MATEMATICE** acordă câte o **diplomă** şi un **p**
cărţi pentru trei apariţii la rubrica *"Pagina rezolvitorilor"* elevilor urmă

Liceul "N. Titulescu", **Botoşani**

NILĂ Iulian (cl. a X-a): 1/2005(6pb); 2/2005(8pb); 1/2006(6pb);

NUŢU Cosmin (cl. a X-a): 1/2005(7pb); 2/2005(6pb); 1/2006(6pb);

OBANCEA Dragoş (cl. a X-a): 1/2005(5pb); 2/2005(8pb); 1/2006(6p

Colegiul Nţional "Carol I", **Craiova**

STANCIU Ioan (cl. a VI-a): 1/2005(10pb); 2/2005(7pb); 1/2006(10pb

Şcoala "P. Rareş", **Hârlău**

NEICU Mara (cl. a III-a): 1/2005(11pb); 2/2005(5pb); 1/2006(5pb).

Şcoala nr. 3 "Al. Vlahuţă", **Iaşi**

DODU Corina (cl. a VII-a): 2/2004(5pb); 2/2005(6pb); 1/2006(5pb);

IRIMIA Andreea (cl. a VII-a): 2/2004(5pb); 2/2005(5pb); 1/2006(5pb

UNGURU Claudiu (cl. a VII-a): 2/2004(5pb); 2/2005(5pb); 1/2006(5

Şcoala nr. 4 "I. Teodoreanu", **Iaşi**

LUPAN Dana (cl. a IV-a): 1/2005(9pb); 2/2005(6pb); 1/2006(5pb).

Şcoala nr. 22 "B. P. Hasdeu", **Iaşi**

BUHU Vlad (cl. a IV-a): 1/2005(5pb); 2/2005(7pb); 1/2006(9pb);

CHICHIRĂU Alexandra-Elena (cl. a IV-a): 1/2005(5pb); 2/2005(5p
1/2006(7pb);

LĂMĂTIC Ioana (cl. a IV-a): 1/2005(8pb); 2/2005(10pb); 1/2006(9pb

REBEGEA Andrada Elena (cl. a IV-a): 1/2005(6pb); 2/2005(7pb); 1/

Şcoala nr. 26 "G. Coşbuc", **Iaşi**

DUMITRU Ambra-Georgiana (cl. a IV-a): 1/2005(8pb); 2/2005(5pb
1/2006(6pb);

HRISCU Alexandra (cl. a IV-a): 1/2005(6pb); 2/2005(7pb); 1/2006(7

MUSTEAŢĂ Alexandra (cl. a IV-a): 1/2005(6pb); 2/2005(6pb); 1/20

ZĂLINCĂ Georgiana (cl. a IV-a): 1/2005(6pb); 2/2005(5pb); 1/2006

Colegiul Naţional, **Iaşi**

CADAR Alexandra (cl. a VII-a): 1/2005(8pb); 2/2005(9pb); 1/2006(7

Colegiul Naţional "Emil Racoviţă", **Iaşi**

TUDORACHE Alexandru-Gabriel (cl. a VI-a): 1/2005(9pb); 2/200
1/2006(12pb).

ASOCIAŢIA "RECREAŢII MATEMATIC

La data de 14.02.2005 a luat fiinţă **ASOCIAŢIA "RECREAŢI MATICE"**, cu sediul în Iaşi (str. Aurora, nr. 3, sc. D, ap. 6), având ca *jinirea activităţilor de matematică specifice învăţământului preuniversit zarea şi desfăşurarea de activităţi care să contribuie la dezvoltarea gust matematică în rândurile elevilor, profesorilor şi iubitorilor de matematic larea preocupărilor şi cercetătorilor originale.*

Obiectivele majore pentru atingerea scopului propus sunt:

1. editarea unei reviste destinată elevilor şi profesorilor – **revista " Matematice"**;

2. fondarea unei biblioteci de matematică elementară – **biblioteca " Matematice"**;

3. alcătuirea unei colecţii de cărţi de matematică elementară, cărţi d şi aflate la prima apariţie – **Colecţia "Recreaţii Matematice"**.

Poate deveni membru al Asociaţiei, printr-o simplă completare a une orice perosană care aderă la obiectivele acesteia şi sprijină realizarea lor.

Membri de onoare, academicienii: **Constantin Corduneanu**, **Radu Miron**

Continuarea listei membrilor din RecMat - 2/2005:

	Numele şi prenumele	*Locul de muncă*	*Data*
21	Dumitru Neagu	Lic. "G. Ibrăileanu", Iaşi	1
22	Tudorache Rodica	Univ. Tehn. "Gh. Asachi", Iaşi	14
23	Tiba I. Dan	Inst. de Mat. al Acad. Rom., Bucureşti	2
24	Popovici Mihaela	S. C. Selgros Cash&Carry, Braşov	2
25	Popovici Florin	Lic. "N. Titulescu", Braşov	2
26	Negrescu Alexandru	C. N. "A.T. Laurian", Botoşani (elev)	2
27	Şerdean Ioan	C. N. "Aurel Vlaicu", Orăştie	2
28	Marinescu Dan-Ştefan	C. N. "Iancu de Hunedoara", Huned.	2
29	Popa Vasile	C. N. "V. Alecsandri", Galaţi	2
30	Marin Mirela	Şc. "Al. Vlahuţă", Iaşi	1
31	Maxim Gabriela	Şc. "Al. Vlahuţă", Iaşi	14
32	Bejan Cornelia - Livia	Univ. Tehn. "Gh. Asachi", Iaşi	2
33	Brînzei Dan	Univ. "Al. I. Cuza", Iaşi	2
34	Teodoru Georgeta	Univ. Tehn. "Gh. Asachi", Iaşi	0
35	Roman Neculai	Şc. "V. Alecsandri", Mirceşti (Iaşi)	1
36	Borş Dan Mircea	Univ. Tehn. "Gh. Asachi", Iaşi	1
37	Haivas Mihai	Inst. Cerc. Ec. "Gh. Zane", Iaşi	1
38	Popa Claudiu - Ştefan	Şc. "Alecu Russo", Iaşi	2
39	Minuţ Petru	Univ. "D. Cantemir", Tg. Mureş	3

Revista semestrială **RECREAȚII MATEMATICE** este e
ASOCIAȚIA "RECREAȚII MATEMATICE". Apare la datele de 1
1 septembrie şi se adresează elevilor, profesorilor, studenților şi tutu
pasionați de matematica elementară.

În atenția tuturor colaboratorilor

Materialele trimise redacției spre publicare (note şi articole, che
metodică, probleme propuse etc.) trebuie prezentate îngrijit, clar şi c
trebuie să prezinte interes pentru un cerc cât mai larg de cititori. Se reco
textele să nu depăşească patru pagini. Evident, **ele trebuie să fie origi
nu fi apărut sau să fi fost trimise spre publicare altor reviste.** Rugăm
rialele tehnoredactate să fie însoțite de fişierele lor.

Problemele destinate rubricilor: **Probleme propuse** şi **Problem
pregătirea concursurilor** vor fi redactate pe foi separate cu enunț şi d
ție/rezolvare (câte una pe fiecare foaie) şi vor fi însoțite de numele autoru
la şi localitatea unde lucrează/învață.

Redacția va decide asupra oportunității publicării materialelor prim

În atenția elevilor

Numele elevilor ce vor trimite redacției soluții corecte la proble
rubricile de **Probleme propuse** şi **Probleme pentru pregatirea conc
vor fi menționate în **Pagina rezolvitorilor**. Se va ține seama de regulile:

1. Pot trimite soluții la **minimum cinci probleme propuse în
prezent şi cel anterior al revistei**; pe o foaie va fi redactată soluția un
probleme.

2. Elevii din clasele **VI-XII** au dreptul să trimită soluții la p
propuse pentru clasa lor, pentru orice clasă mai mare, din două clase m
imediat anterioare. Elevii din clasa a **V**-a pot trimite soluții la problemel
pentru clasele a IV-a, a V-a şi orice clasă mai mare, iar elevii claselor
trimite soluții la problemele propuse pentru oricare din clasele primare şi
să mai mare. Orice elev poate trimite soluții la problemele de concurs (ti

3. Vor fi menționate următoarele date personale: numele şi p
clasa, şcoala şi localitatea.

4. Plicul cu probleme rezolvate se va trimite prin poştă (sau v
direct) la adresa Redacției:

Prof. dr. Temistocle Bîrsan
Str. Aurora, nr. 3, sc. D, ap. 6,
700 474, Iaşi
Jud. IAŞI
E-mail: tbirsan@math.tuiasi.ro

CUPRINS

ARTICOLE ŞI NOTE

NOTA ELEVULUI

CHESTIUNI METODICE

CORESPONDENȚE

PROBLEME ŞI SOLUȚII

Anul IX, Nr. 1 Ianuarie – Iuni

RECREAȚII MATEMATIC

REVISTĂ DE MATEMATICĂ PENTRU ELEVI ŞI PROF

$$e^{i\pi} = -1$$

Asociația "Recreații Matemati

IAŞI - 2007

Semnificaţia formulei de pe copertă:

Într-o formă concisă, formula $e^{i\pi} = -1$ leagă cele patru ramuri fu
ale matematicii:

ARITMETICA	reprezentată de 1
GEOMETRIA	reprezentată de π
ALGEBRA	reprezentată de i
ANALIZA MATEMATICĂ	reprezentată de e

Adresa redacţiei:

Catedra de Matematică – Universitatea Tehnică "Gh. Asachi" Iaşi
Bd. Carol I, nr.11, 700506, Iaşi
Tel. 032 – 213737 / int. 123
E-mail: recreatii.matematice@gmail.com
http://www.recreatiimatematice.uv.ro

TIPĂRITĂ LA SL&F IMPEX IAŞI
Bd. Carol I, nr. 3-5
Tel. 0788 498933
E-mail: simonaslf@yahoo.com

Anul IX, Nr. 1 Ianuarie – Iuni

RECREAȚII MATEMATICE

REVISTĂ DE MATEMATICĂ PENTRU ELEVI ŞI PROF

$$e^{i\pi} = -1$$

Revistă cu apariție semestrială
publicată de

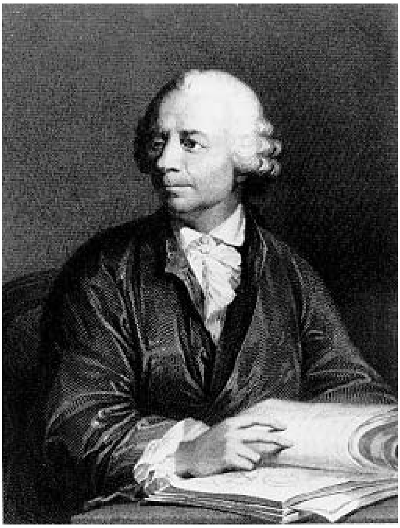
ASOCIAŢIA "RECREAŢII MATEMATIC

IAŞI - 2007

300 de ani
de la naşterea lui
Leonhard Euler (1707 – 1783)

Citiţi pe Euler! Citiţi p
este Maestrul nostru, al t
P. S. La

El este geniul care a pus
geniile succesorilor săi.
J. Ber



Matematician, astronom, fizician
Leonhard Euler a fost fără îndoia
prolific şi unul dintre cei mai mari
cieni ai tuturor timpurilor, dominând
tate matematica secolului XVIII (apr
ca valoare de *Lagrange*).

Euler, ca savant, a reunit
formidabilă cu o imaginaţie creatoare
ală, o memorie inegalabilă, abilităţi d
traordinare şi o putere de muncă fant

A debutat în activitatea de c
vârsta de 16 ani cu o expunere privi
lui *Newton* şi *Descartes*. În pofida
la 28 de ani pierde vederea la ochi
la 54 de ani rămâne complet orb, a c
asiduitate această muncă până la vârs
ani, când, aşa cum afirmă *Condorcet*
de odată cu a calcula şi de a trăi". A redactat anual, în medie, în jur de
text ştiinţific publicând peste 900 de articole şi 90 de volume (din care 62 d
tică, mecanică şi astronomie). După ce a orbit complet, a dictat secretar
de memorii (dintre care multe sunt volume întregi).

Leonhard Euler s-a născut la 15 aprilie 1707 la Basel, în Elveţia,
unui preot sărac. Tatăl său, *Paul Euler*, era pasionat de matematică şi
tinereţe cu *Jean* şi *Iacob Bernoulli*. Paul îşi iniţiază fiul în matematic
ca acesta să-i continue cariera de preot îl trimite să studieze filozofia şi
Universitatea din Basel. Aici are ca profesor pe *Jean Bernoulli* care rema
său matematic de excepţie. **Leonhard Euler** devine prieten şi colabor
profesorului, matematicienii *Nicolas* (1687–1759) şi *Daniel Bernoulli* (1
La propunerea acestora în 1727 devine *membru al Academiei de Ştiinţe*
Petersburg, înfiinţată de ţarina Ecaterina I-a a Rusiei. În 1730 obţine
matematică la această academie. În acelaşi an se căsătoreşte cu fiica unu
cu care a avut 13 copii, dintre care numai 5 i-au supravieţuit. În 1740 reg
al II-lea (cel mare) al Prusiei reorganizează *Academia din Berlin*, unde
numit director al secţiei de matematică. Postul de preşedinte al acestei

fost atribuit lui *Voltaire*, ceea ce îl nemulţumeşte pe *Euler*. În 1866, la
ţarinei Ecaterina a II-a şi în urma unui conflict cu regele Frederic, se
Sankt Petersburg împreună cu fiii săi Johan Albrecht (1734–1800), mat
Carol (1740–1790), medic şi Cristoph (1743–1812), ofiţer în armata prusa
apoi a murit ca general în armata rusă. *Euler* este numit *director al Ac
Ştiinţe din Sankt Petersburg* şi i se oferă o locuinţă confortabilă. Din ne
scurt timp orbeşte complet, iar casa îi este distrusă de un incendiu în ca
Euler a fost salvată cu dificultate. Cu această ocazie şi-a pierdut şi o
dintre manuscrise. La vârsta de 64 de ani îi moare soţia şi se recăsătoreşt
vitregă a primei sale soţii. La 18 septembrie 1783, după ce rezolvase
dificilă privind mişcarea baloanelor (inventate de curând de *Mongolfier*)
ceai împreună cu nepoţii săi le spune acestora "eu mor". Acestea au fo
cuvinte ale acestui savant între savanţi, supranumit de contemporanii săi
matematicii sau *Analiza încarnată*. Apropiaţii săi au fost unanimi în al
un om blând şi binevoitor, de o modestie copleşitoare.

Extraordinara vitalitate a lui **L. Euler**, până în ultima clipă a vieţii,
prin constituţia sa robustă şi sănătoasă, viaţa organizată, munca sa co
siunea pentru matematică, precum şi prin credinţa sa. A fost de o r
profundă (o justificare a existenţei lui Dumnezeu, bazată pe noţiunea de
păstrat în unele manuale de teologie până în zilele noastre).

Opera lui **L. Euler** a impulsionat profund întreaga dezvoltare a matem
asimilat în mod critic matematica marilor săi predecesori (*Fermat*, *Pascal*,
Newton, *Leibniz* ş.a.), a îmbogăţit conţinutul matematicii, a introdus met
cercetare, a introdus simboluri adecvate, a promovat utilizarea aparatului
în domenii nematematice şi a insistat pentru expunerea clară, logică şi înt
accesibil unui cerc cât mai larg de cititori a problemelor de matematică. E
de dificil să se prezinte în câteva rânduri uriaşa contribuţie a lui Euler în m

În teoria numerelor **L. Euler** este primul care a studiat sistematic pro
tribuţiei numerelor prime introducând pentru prima oară aşa numita *fun*
lui *Riemann* (în cazul argumentului real), a dat noi demonstraţii *teoreme*
(care afirmă că există o infinitate de numere prime), a arătat necesitate
suficiente date de Euclid pentru ca un număr natural par să fie perfect.
funcţia indicatoare care îi poartă numele şi cu ajutorul căreia a generaliza
strat *mica teoremă a lui Fermat*, a dat primul enunţ al *teoremei lui Dirich*
numerele prime din progresii aritmetice, a generalizat *algoritmul lui Eu*
ducând *parantezele lui Euler*), a perfecţionat aparatul fracţiilor continu
teoria resturilor pătratice şi a demonstrat teorema privind reprezentarea
întregi prin forme pătratice. Abilităţile sale de calcul l-au ajutat să găseas
care ne uimesc şi astăzi: a dat exemple de numere perfecte mergând până
lui 10^{10}, a dat 65 de exemple de perechi de numere prietene (amiabile),
numere prime gemene şi a construit contraexemple care dovedeau că unele
obţinute de predecesori ai săi, prin inducţie incompletă, nu sunt adevărat

În Geometrie, **L. Euler** a studiat transformările de coordonate în spa
ian, a stabilit reprezentările analitice ale unor figuri din acest spaţiu (cilin
suprafeţe de rotaţie), a făcut un studiu analitic al conicelor, a studiat

spaţiul euclidian, a introdus noţiunile de *linie geodezică* şi *curbură norm* *suprafeţe*, a studiat suprafeţele de arie minimă care includ o curbă închis În geometria elementară numele său este legat de *cercul celor nouă punc* pe care se află centrul de greutate, ortocentrul şi centrul cercului circum triunghi (*dreapta lui Euler*) etc.

El este iniţiatorul cercetărilor de *topologie algebrică*, stabilind în 17 $v - m + f = 2$ (v = numărul vârfurilor, m = numărul muchiilor şi feţelor unui poliedru convex), rezolvând problema celor şapte poduri din K etc.

În Algebră a încercat să demonstreze teorema fundamentală a algebrei teorema funcţiilor simetrice şi a dezvoltat teoria determinanţilor.

A obţinut rezultate numeroase şi fundamentale în diverse domenii: *ca renţial şi integral* (a publicat două tratate renumite de analiză matemati *ecuaţiilor diferenţiale ordinare şi cu derivate parţiale*, *teoria integralelor e*

A introdus *integrala multiplă*, *funcţiile gamma şi beta*, a definit *nu* *logaritmul natural*, a definit funcţiile trigonometrice ca funcţii circulare, a $e^{\pi i} = -1$ şi, mai general, $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ etc.

De la el moştenim multe din notaţiile folosite astăzi: $f(x)$, e, π, (*constanta lui Euler*) ş.a.

Euler a adus contribuţii în *mecanica punctului* şi *mecanica corpului soli* noţiuni ca: *centru de masă*, *centru de inerţie*, *moment de inerţie*. În 1755 un tratat de hidrodinamică cu numeroase aplicaţii practice. A fost preoc *optică* şi *tehnică* (construcţia navelor).

Se spune că în ultimii ani de viaţă **L. Euler** avea în memorie fiecare an creaţia sa uriaşă. Dar Euler nu a fost numai un mare matematician. El era vastă cultură generală având cunoştinţe bogate de teologie, filozofie, botani istorie, medicină, literatură şi muzică (a scris şi o teorie matematică a muzic din memorie în întregime "Eneida" şi ştia cu ce vers începe şi se termină fiec din cartea lui Virgiliu.

Aşa cum afirma J. Bertrand, *nici un alt mare savant nu a lucrat cu zel, mai multă râvnă şi cu mult folos pentru progresul unei ştiinţe, ca* **Eu** *matematică.*

Prof. dr. Petru M

Profesorul Dumitru Ion Mangeron (1906 – 1
– In Memoriam –

Printre profesorii de seamă, născuţi în u
secol, se numără şi regretatul **D. I. Mangero**
cută personalitate a vieţii universitare şi
ieşene, D. I. Mangeron s-a născut la 15/28
1906 în oraşul Chişinău. După absolvirea
oraşul său natal s-a înscris în anul 1926 la
matematică a Facultăţii de ştiinţe din Iaşi,
atunci existau secţii pentru toate ştiinţele ex

A absolvit în mod strălucit studiile univ
anul 1930, având profesori de mare valoare, d
să-l amintim decât pe *Alexandru Myller*, care
toratul la vestitul matematician *David Hilb*
cu înfiinţarea în 1910 de către A. Myller a S
matematic, care astăzi îi poartă numele, la Ia
cu adevărat o activitate propriu-zisă de cercet
şi-a adus aportul şi fostul student D. I. Mange
de doi ani (1930 - 1932), pregăteşte sub îndrumarea renumitului profe
Picone teza de doctorat, intitulată *Sopra un problema al contorno per u*
differenziale alle derivati parziali di quatro ordine con le caratteristiche r
Întors în ţară, a funcţionat la Universitatea ieşeană mai întâi ca asistent, f
în 1936 conferenţiar la disciplina de analiză matematică. Începând cu an
tar 1938/1939, a fost numit conferenţiar la disciplina de matematici gene
înfiinţata *Şcoala Politehnică din Iaşi*, unde, în anul 1941, devine profesor
de mecanică. Începând cu acest an, a predat cursuri de matematică şi d
teoretică la facultăţile de mecanică şi de electrotehnică. Preocupările s
fice au fost strâns legate şi de cerinţele unui învăţământ tehnic superio
ţinută, publicând aum, pe lângă lucrările din *teoria ecuaţiilor cu deriva*
şi numeroase lucrări de *mecanică analitică*, *teoria mecanismelor*, *teoria*
teoria acceleraţiilor reduse şi a acceleraţiilor de ordin superior. A pub
crări de *istoria matematicii*. A fost membru activ la mai multe societăţ
de matematică, mecanică teoretică şi aplicată, astronomie, om de ştiinţ
României, redactor responsabil la *Buletinul Institutului Politehnic din*
bru în consiliul de conducere al revistelor *Revue Roumaine des Sciences*
(Série de Mécanique Appliquée) şi *Studii şi Cercetări de Mecanică Aplicat*
tor de doctorate în mecanică tehnică (30 de ingineri au obţinut titlul de
îndrumarea sa).

Studiul ecuaţiilor cu derivate parţiale a devenit principalul său domeni
tare în care, singur sau cu unii dintre elevii şi colaboratorii săi, a public
lucrări în diverse reviste de specialitate din ţara noastră sau din ţări cu ma
ştiinţific, ceea ce face ca acum în matematică să se vorbească despre *ecuaţii*
Mangeron, operatori interpolanţi Mangeron, teoreme Mangeron, ecuaţiile

Profesorul **D. I. Mangeron** a fost un om plin de entuziasm, energi

iniţiativă, colegialitate desăvârşită, un om care încuraja tineretul studios
capabil de prietenia cea mai sinceră. Dovadă stau scrisorile pline de ater
cateţe către bunul său prieten de o viaţă, *Al. C. Climescu*, trimise de la Un
din Edmonton (Canada), unde în mai multe rânduri a fost *visiting prof*
ieşirea sa la pensie. Cu altă ocazie, despre Al. C. Climescu a scris: *A j*
atunci (la începutul războiului) mobilizat în arma antiaeriană şi astfel au
de zile, până în 1945. Între timp, am reuşit să se formeze comisia de conc
încadrarea sa ca profesor. Comunicându-i că el se va întoarce pe noua sc
profesor titular, am primit cu emoţie telegrama în care El afirma că nu va
dată acest rezultat al eforturilor făcute în lipsa lui. Al. C. Climescu a avu
se revanşeze atunci când, aşa cum scrie Profesorul, *în acele vremuri s-a făc*
rasa *din tot ce am lucrat şi realizat eu.* În 1954, Al. C. Climescu desco
vista *Memorial des Sciences Mathématiques* un articol intitulat *Calcul S*
în care exista fraza: *On leur doit – à Mauro Picone et à D. Mangeron – d*
principaux. Această recunoaştere internaţională a făcut ca, în cele din urm
la care era supus Profesorul să înceteze, să i se recunoască meritele de cer
valoare şi, partea oarecum comică, să i se acorde o nouă diplomă de docto
fizico-matematice pentru că, chipurile, cea din Italia nu ar fi fost bună. Î
cu aceasta, Profesorul a spus: *Am trăit astfel, în cadrul greutăţilor pe care*
ani de zile, o reuşită faptică şi morală, graţie atenţiei şi preocupărilor c
cercetător al iubitului nostru Prieten dispărut.

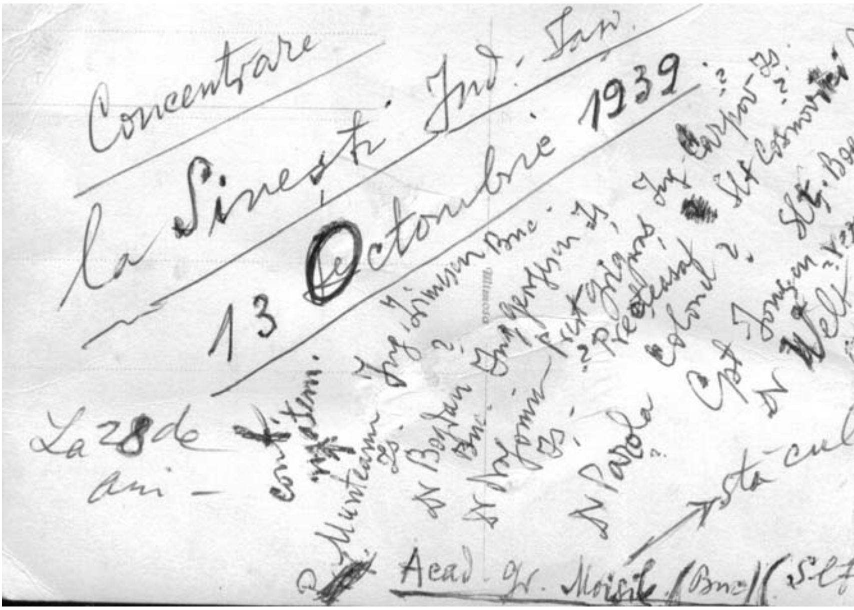
Un aspect foarte important al activităţii Profesorului **D. I. Mangeron**
de înfiinţarea revistei *Buletinul Institutului Politehnic din Iaşi* (1946), p
a trebuit să învingă greutăţile ivite după terminarea războiului şi obtuzit
factori de decizie. A contribuit din plin la afirmarea pe plan internaţi
numai naţional a acestei reviste, împreună cu alţi profesori ai Politehnicii
de ştiinţă din alte ţări, printre care şi câţiva laureaţi ai premiului Nobel.

Profesorul **D. I. Mangeron** a rămas activ şi optimist până la inevitab
deşi a locuit într-un apartament modest, lipsit de confort. Când, în cele di
rector al Politehnicii, devenită acum Universitatea Tehnică "Gh. Asachi",
obţină pentru Profesor o repartiţie într-o nouă locuinţă, acesta a spus: "D
este prea târziu". Prea târziu, a sosit şi ştirea alegerii sale ca *membru co*
al Academiei Române. Se afla în spital, unde a decedat la 26 februarie 19

Ne-am despărţit de stimatul nostru Profesor în ziua de 1 martie 1991, d
la care au asistat mulţi dintre colaboratorii şi elevii săi, colegi, foşti c
ingineri şi profesori, ţinută la biserica Sfântul Nicolae din dealul Copoului.
către cimitirul Podgoria, o ninsoare liniştită a adus împăcarea în sufletele
ne-am gândit că, cel care a iubit atât de mult şcoala, oamenii şi natura a pl
noi la fel de frumos cum a trăit, lăsând o amintire şi o operă pe măsură,
spiritele cu adevărat alese.

Astăzi, la mormântul Profesorului **D. I. Mangeron** se află un monum
de foştii săi admiratori, iar Bulevardul pe care se află facultăţile şi celel
ale Universităţii Tehnice poartă numele "Bulevardul D. Mangeron".

Prof. dr. Adrian Cordune



Grigore Moisil concentrat în 1939, Sineşti, cu grad de subloco
(persoana culcată)

Fotografia-document (recto-verso) a fost oferită pentru publicare red
de către conf. dr. Gh. Costovici.

Similitudini în plan şi puncte Torricelli asoc

Cătălin ŢIGĂERU[1]

Subiectul lucrării îl reprezintă operaţia de compunere a similitudinilor a configuraţii geometrice: un triunghi ABC şi două puncte arbitrare $M, N \notin$ la care vom ataşa punctul P, care este centrul similitudinii $S_3 = S_2 \circ S_1$, u similitudinea centrată în C, care îl transportă pe M în A, iar S_2 este cen transportându-l pe A în N. Două aspecte vom lămuri, legate de subiectu În primul rând, vom arăta cum rolul pe care îl joacă punctul P poate fi p punctele M şi N. Mai mult, vom demonstra că putem inversa rolurile tri ABC şi MNP. Al doilea aspect al lucrării se referă la identificarea a d Torricelli generalizate, pe care le numim asociate compunerii celor două s În final vom lămuri şi o situaţie interesantă, credem, cu caracter de noutat coincidenţa acestor puncte. În expunere se foloseşte formalismul comple permite atacarea unor probleme grele, pentru care soluţia sintetică se do în primă fază, greu de văzut. Interpretările geometrice însoţesc, în limit rezultatele teoretice. Mai precizăm că unele rezultate sunt demonstrate î

1. Compunerea similitudinilor şi teorema fundamentală. Mulţi lor planului P se identifică, prin fixarea unui reper, cu mulţimea numerelo

Definiţie. Similitudinea de centru $M_0 \in P$, de raport $k \in [0, \infty)$ $\varphi \in (-\pi, \pi]$ este funcţia $S_{M_0}(k, \varphi) : P \to P$, definită astfel: dacă $M \in$ $S_{M_0}(k, \varphi)(M)$, avem

(a) dacă $M \neq M_0$, atunci $k = \dfrac{|M_0M'|}{|M_0M|}$, $\varphi = m(\widehat{MM_0M'})$;

(b) dacă $M = M_0$, atunci $M' = M_0$.

Reamintim că similitudinile sunt bijecţii, anume $(S_{M_0}(k, \varphi))^{-1} = S_{M_0}$ Dacă z_0 este afixul lui M_0 şi z afixul lui M, atunci expresia analitică a s este descrisă de funcţia

$$s_{z_0}(k, \varphi)(z) = z_0 + (z - z_0) ke^{i\varphi}.$$

Să notăm că, dacă z' este afixul lui M', atunci

$$ke^{i\varphi} = \frac{z' - z_0}{z - z_0}.$$

Propoziţia 1. *Considerăm similitudinile* $S_{M_1}(k_1, \varphi_1), S_{M_2}(k_2, \varphi_2)$, *af lor M_1 şi M_2 fiind respectiv z_1 şi z_2. Dacă* $k_1k_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \neq 1$, *atunci exi X, de afix x, astfel încât* $S_{M_2}(k_2, \varphi_2) \circ S_{M_1}(k_1, \varphi_1) = S_X(k_1k_2, \varphi_1 +$ *afixul lui X este determinat de relaţia*

$$x = z_1 + (z_2 - z_1) \frac{1 - k_2e^{i\varphi_2}}{1 - k_1e^{i\varphi_1} \cdot k_2e^{i\varphi 2}} = z_1 + (z_2 - z_1) \frac{1 - k_2e^{i\varphi_2}}{1 - k_1k_2e^{i(\varphi_1+}}$$

Demonstraţia acestui rezultat clasic se găseşte în [**4**]. Să notăm că rel $k_1k_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = 1$ este echivalentă cu relaţiile $k_1k_2 = 1$ şi $\varphi_1 + \varphi_2 = 0$ (m

[1] Lect. dr., Univ."Ştefan cel Mare", Suceava

În cele ce urmează, fixăm cadrul în care se va desfăşura analiza noast
se consideră triunghiul ABC, cu afixele respectiv a, b, c şi fie M, N două
plan, fixate, diferite de A, B şi C, de afixe m şi n. Luăm în considerare sir
de centre C şi B, care transferă pe M în A, respectiv pe A în N şi vom
punctul P, care va fi centrul compunerii celor două similitudini. Ţinând c
şi de (2), dacă punem $k_1 e^{i\varphi_1} = \dfrac{a-c}{m-c}$, $k_2 e^{i\varphi_2} = \dfrac{n-b}{a-b}$, atunci punctul
$S_B(k_2, \varphi_2) \circ S_C(k_1, \varphi_1) = S_P(k_1 k_2, \varphi_1 + \varphi_2)$, afixul său, notat cu p, fiind

$$p = c + (b-c)\,\frac{\frac{n-a}{b-a}}{1 - \frac{a-c}{m-c}\cdot\frac{n-b}{a-b}}.$$

Pentru început câteva observaţii, legate de aspectele geometrice foarte
ale formulei de mai sus, pe care cititorul le poate verifica prin calcul dire

– cazul particular $k_1 k_2 \neq 1$ şi $\varphi_1 = \varphi_2 = 0 \pmod{\pi}$ este echivalent
lui Menelaos;

– dacă $\varphi_1 + \varphi_2 = 0 \pmod{\pi}$, atunci punctele M, N, P sunt colinia
$k_1 k_2 = 1$ şi $\varphi_1 + \varphi_2 = \pi$, punctul P fiind mijlocul segmentului MN;

– o analiză a formulei arată că, dacă $M, N \notin \{A, B, C\}$, atunci şi P
există situaţii pentru care $P \equiv A$, cum se verifică în: $a = 0$, $b = 1$, $c =$
$n = i$; conform (3), $p = a = 0$.

Următorul rezultat lămureşte prima problemă asociată tripletelor$\{$
$\{P, M, N\}$, descrisă în introducere.

Teorema 1. *Dacă P are afixul p, determinat de formula* (3)*, atunci*

(*a*) *dacă punem* $k_3 e^{i\varphi_3} = \dfrac{c-b}{p-b}$, $k_4 e^{i\varphi_4} = \dfrac{m-a}{c-a}$, $k_5 e^{i\varphi_5} = \dfrac{b-a}{n-a}$, $k_6 e^{i}$
va rezulta $S_A(k_4, \varphi_4) \circ S_B(k_3, \varphi_3) = S_N(k_3 k_4, \varphi_3 + \varphi_4)$, $S_C(k_6, \varphi_6) \circ S_A$
$S_M(k_5 k_6, \varphi_5 + \varphi_6)$;

(*b*) *dacă punem* $q_1 e^{i\psi_1} = \dfrac{n-m}{a-m}$, $q_2 e^{i\psi_2} = \dfrac{b-p}{n-p}$, $q_3 e^{i\psi_3} = \dfrac{p-n}{b-n}$, $q_4 e^{i}$
$q_5 e^{i\psi_5} = \dfrac{m-p}{c-p}$, $q_6 e^{i\psi_6} = \dfrac{a-n}{m-n}$, *atunci* $S_P(q_2, \psi_2) \circ S_M(q_1, \psi_1) = S_C(q_1 q$
$S_M(q_4, \psi_4) \circ S_N(q_3, \psi_3) = S_A(q_3 q_4, \psi_3 + \psi_4)$, $S_N(q_6, \psi_6) \circ S_P(q_5, \psi_5) = S_B(q_5$

Demonstraţie. Începem prin a demonstra o formă echivalentă a for

Lemă. *Afixul punctului P, notat cu p, care este centrul compuner
dinilor* $S_B(k_2, \varphi_2) \circ S_C(k_1, \varphi_1)$*, verifică relaţia*

$$\frac{n-p}{m-p} = \frac{a-c}{m-c}\cdot\frac{n-b}{a-b}$$

şi reciproc, dacă afixul p verifică (#)*, atunci verifică şi* (3)*.*

Demonstraţie. Din ipoteză rezultă că $S_P(k_1 k_2, \varphi_1 + \varphi_2)(M) = N$
conform formulei (1′), rezultă (#). Să presupunem că afixul punctului P v
Dacă notăm cu $w = k_1 k_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = \dfrac{a-c}{m-c}\cdot\dfrac{n-b}{a-b}$, atunci putem scrie (
$n - wm$, de unde $(p-c)(1-w) = n - wm - (1-w)c = n - c - \dfrac{a-c}{a-b}$

$$\frac{-bn-ac+ab+cn}{a-b}=(b-c)\,\frac{n-a}{b-a}, \text{ de unde (3).}$$

Revenim la demonstraţia teoremei. Pentru punctul (a), trebuie dem
dacă p satisface (3), atunci m şi n verifică formulele analoge, ceea ce,
lemei, revine la demonstrarea formulelor

$$\frac{m-n}{p-n}=\frac{m-a}{c-a}\cdot\frac{c-b}{p-b} \quad \text{şi}$$
$$\frac{p-m}{n-m}=\frac{b-a}{n-a}\cdot\frac{p-c}{b-c}.$$

Din (3) se obţine $\frac{p-b}{c-b}=\frac{\frac{n-b}{a-b}\cdot\frac{m-a}{m-c}}{1-w}$ şi din (#) deducem $\frac{m-n}{p-n}=$ 1
departe avem $\frac{p-b}{c-b}\cdot\frac{m-n}{p-n}=\frac{n-b}{a-b}\cdot\frac{m-a}{m-c}\cdot\frac{m-c}{c-a}\cdot\frac{a-b}{n-b}=\frac{m-a}{c-a}$, de u
(#′). Analog se demonstrează şi (#″). Pentru punctul (b), trebuie dem

dacă p satisface (3), atunci a, b, şi c satisfac relaţiile $a=n+(m-n)$ 1 −

şi celelalte, ceea ce este echivalent cu a demonstra relaţiile $\frac{c-a}{b-a}=\frac{p-n}{b-n}$
celelalte, care nu sunt altceva decât rescrieri ale relaţiilor (#), (#′) şi (#″

2. Punctele Torricelli asociate compunerii a două similit
continuare, procedăm după cum urmează: considerăm punctele A', B'
afixe a', b' şi respectiv c', definite de $A'=S_C(k_1,\varphi_1)(P)$, $B'=S_A(k$
$C'=S_B(k_3,\varphi_3)(N)$.

Din Teorema 1 deducem şi că $A'=S_B(1/k_2,-\varphi_2)(P)$, $B'=S_C(1/k_6,$
$C'=S_A(1/k_4,-\varphi_4)(P)$. Trecând la nivelul afixelor, relaţiile de mai su
în formulele

$$\begin{cases} a'=c+(p-c)\,\dfrac{a-c}{m-c}=b+(p-b)\,\dfrac{a-b}{n-b},\\ b'=a+(m-a)\,\dfrac{b-a}{n-a}=c+(m-c)\,\dfrac{b-c}{p-c},\\ c'=b+(n-b)\,\dfrac{c-b}{p-b}=a+(n-a)\,\dfrac{c-a}{m-a}.\end{cases}$$

Dacă inversăm rolurile tripletelor $\{A,B,C\}$ şi $\{P,M,N\}$ (Teorema 1
acest lucru), putem considera analogele punctelor A', B' şi C', anume
N', de afixe p', m' şi respectiv n', unde $P'=S_N(q_3,\psi_3)(A)$, $N'=S_M($
$M'=S_P(q_5,\psi_5)(B)$, analogele formulelor (4) fiind

$$\begin{cases} p'=n+(a-n)\,\dfrac{p-n}{b-n}=m+(a-m)\,\dfrac{p-m}{c-m},\\ m'=p+(b-p)\,\dfrac{m-p}{c-p}=n+(b-n)\,\dfrac{m-n}{a-n},\\ n'=m+(c-m)\,\dfrac{n-m}{a-m}=p+(c-p)\,\dfrac{n-p}{b-p}.\end{cases}$$

Propoziţia 2. *$PP'AA'$, $MM'BB'$, $NN'CC'$ sunt paralelograme, e*
generate.

Demonstraţie. Demonstrăm relaţiile importante:

$$a - a' = -(p - p'), \quad b - b' = -(m - m'), \quad c - c' = -(n - n'$$

Raţionamentul se urmăreşte uşor în cele ce urmează: din (5) se obţin $\dfrac{(n-p)(b-a)}{b-n}$ şi din (4) se obţine $a' - a = \dfrac{(b-a)(n-p)}{n-b}$; de aici $a - a' = -(p - p')$; celelalte relaţii se deduc în acelaşi fel. Conchidem perechile de segmente $\{[AA'], [PP']\}$, $\{[BB'], [MM']\}$ şi $\{[CC'], [NN']$ pectiv congruente, paralele sau confundate, ceea ce încheie demonstraţia.

Propoziţia 3. *Sunt adevărate următoarele relaţii:*

$$\frac{c'-b}{a-b} = \frac{c-b}{a'-b} = \frac{c-b'}{a-b'},$$

$$\frac{p'-n}{m-n} = \frac{p-n'}{m-n'} = \frac{p-n}{m'-n};$$

$$\frac{n-p'}{m-p'} = \frac{c-a'}{b-a'}, \quad \frac{m-n'}{p-n'} = \frac{b-c'}{a-c'}, \quad \frac{p-m'}{n-m'} = \frac{a-b'}{c-b'}.$$

Demonstraţie. Relaţiile (4) se mai scriu şi

$$\frac{c'-a}{c-a} = \frac{n-a}{m-a} = \frac{b-a}{b'-a}; \quad \frac{a'-b}{a-b} = \frac{p-b}{n-b} = \frac{c-b}{c'-b}; \quad \frac{b'-c}{b-c} = \frac{m-c}{p-c} = \frac{a}{a'}$$

Din a doua relaţie se obţine $\dfrac{c'-b}{a-b} = \dfrac{c-b}{a'-b}$. Analog se obţine şi egalitatea raport din (7). Inversând rolurile triunghiurilor ABC şi MNP, rezultă marcăm şi relaţiile

$$\frac{p'-n}{p-n} = \frac{a-n}{b-n} = \frac{m-n}{m'-n}, \quad \frac{m'-p}{m-p} = \frac{b-p}{c-p} = \frac{n-p}{n'-p}, \quad \frac{n'-m}{n-m} = \frac{c-m}{a-m} = \frac{p}{p}$$

care sunt echivalentele relaţiilor (4'). Relaţiile (9) se deduc astfel: din (5), coroborat cu (#), obţinem $\dfrac{a'-c}{a'-b} = \dfrac{(p-c)(a-c)(n-b)}{(p-b)(a-b)(m-c)}$, respectiv $\dfrac{(a-c)(a-n)}{(a-b)(a-m)}$. Înmulţind (#), (#') şi (#''), rezultă că $\dfrac{(p-c)(n-b)}{(p-b)(m-c)}$ ceea ce, după înlocuire, încheie demonstraţia.

Teorema 2. *Considerăm punctele A', B', C', de afixe a', b' şi re definite de relaţiile* (4) *şi punctele P', M', N', de afixe p', m' şi respect satisfac relaţiile* (5).

(*a*) *Dacă* $\dfrac{b-a}{n-a} \cdot \dfrac{m-a}{c-a} \in \mathbb{R}$, *atunci tripletele* $\{AA', BB', CC'\}$ *şi* $\{MM'$ *sunt formate din drepte paralele.*

(*b*) *Dacă* $\dfrac{b-a}{n-a} \cdot \dfrac{m-a}{c-a} \notin \mathbb{R}$, *atunci tripletele* $\{AA', BB', CC'\}$ *şi* $\{MM'$, *sunt concurente.*

Demonstraţie. În virtutea Teoremei 1, sunt suficiente demonstraţiil ilor referitoare la tripletul $\{AA', BB', CC'\}$. Demonstrăm că $AA' \parallel BB'$ (4) se obţine $\dfrac{c'-a}{b-a} = \dfrac{n-a}{b-a} \cdot \dfrac{c-a}{m-a} \in \mathbb{R}$, adică $C' \in AB$. Din (7) deducem $\dfrac{c-a}{b'-a} = \dfrac{c'-a}{b-a} \in \mathbb{R}$, adică $A' \in BC$ şi $B' \in CA$. Pe de altă parte, din (

că $\dfrac{b-b'}{c-c'} = \dfrac{a-b'}{c-a} = \dfrac{b-a}{a-c'} \in \mathbb{R}$, deci $\dfrac{\bar{b}-\overline{b'}}{b-b'} = \dfrac{\bar{c}-\overline{c'}}{c-c'}$, ceea ce înseamnă c
BB' şi CC' sau sunt paralele sau confundate. Dacă $BB' \equiv CC'$, atun
$AC \cap CC' = \{C\}$, ceea ce, în virtutea lui (4), ar conduce la $M \equiv C$ sau B
ce este fals. Deci $BB' \parallel CC'$, la fel demonstrâdu-se şi celălalt paralelism.

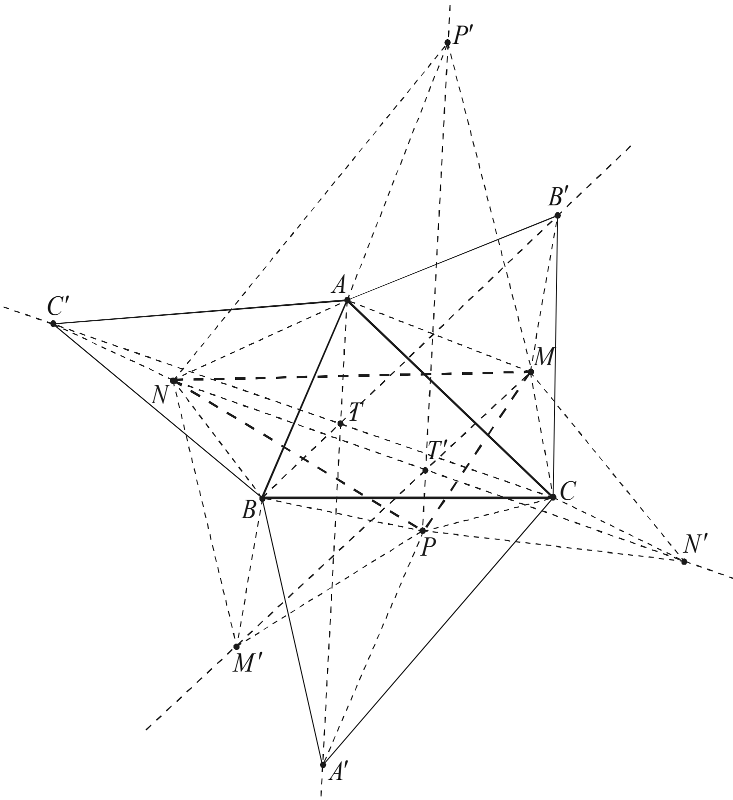


Figura 1

Demonstrăm punctul (b); dacă $\dfrac{b-a}{n-a}\cdot\dfrac{m-a}{c-a} \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, rezultă că dreptele
şi CC' se intersectează cel puţin două câte două. Fie $\{T\} = BB' \cap CC'$ şi
său. Va rezulta că există $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ astfel încât $b-b' = \lambda\,(b'-t)$, $c-c' = \mu$
ţinând cont şi de $\dfrac{b'-a}{c-a} = \dfrac{b-b'}{c'-c}$, dedusă din (4'), ajungem la $\dfrac{b'-a}{c-a} :$ $\dfrac{b'-}{c-}$
$\mathbb{R}$; cum $\{C', A, B\}$ nu sunt coliniare, rezultă că patrulaterul $B'CTA$ este i
Analog dovedim că $BC'AT$ este inscriptibil. Din (7) rezultă că $\dfrac{a'-c}{a'-b}$
deoarece $B'CTA$ este inscriptibil şi deoarece $T \in BB'$, rezultă că $\dfrac{b'-a}{c-a}\cdot\dfrac{c}{b'}$
$\dfrac{b'-t}{t-b} \in \mathbb{R}$, deci $\dfrac{a'-c}{a'-b} : \dfrac{t-c}{t-b} \in \mathbb{R}$, adică şi $BA'CT$ este inscriptibil. Demo
$T \in AA'$; condiţiile de inscriptibilitate ale patrulaterelor se pot scrie şi $\dfrac{t-}{t-}$

$\mathbb{R}$, $\dfrac{t-c}{t-a}\cdot\dfrac{b'-a}{b'-c}\in\mathbb{R}$ şi ţinând cont de $\dfrac{b-c}{b-a'}=\dfrac{b'-c}{b'-a}$, dedusă din (7),
$\dfrac{t-a'}{t-c}\cdot\dfrac{b-c}{b-a'}\cdot\dfrac{b'-a}{b'-c}\cdot\dfrac{t-c}{t-a}\in\mathbb{R}$, adică $\dfrac{t-a}{t-a'}\in\mathbb{R}$. Rezultă că AA', BB' ş
concurente. Inversând rolurile tripletelor $\{AA', BB', CC'\}$ şi $\{MM', N$
obţinem şi concurenţa dreptelor PP', MM' şi CC'. Demonstraţia este în

Observaţia 1. La punctul (a) nu obţinem $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel PP' \parallel M$
cum s-ar părea că rezultă din Propoziţia 2, deoarece în exemplul $a=0$, b
$m=-1$, $n=i$, $p=0$, unde $a'=\dfrac{1}{2}(1+i)$, $b'=n=i$, $c'=m=-1$, $p'=$
avem $AA'\equiv PP'$, $BB'\equiv MM'$, $CC'\equiv NN'$.

Observaţia 2. Geometric, condiţia $\dfrac{b-a}{n-a}\cdot\dfrac{m-a}{c-a}\in\mathbb{R}$, care se refer
poziţia punctelor din ipoteză, se traduce prin $m(\widehat{NAB})+m(\widehat{CAM})\in\{0$
unghiurile $\widehat{NAB}$ şi $\widehat{CAM}$ sunt sau opuse ca orientare şi egale în valoare ab
suplementare.

Observaţia 3. Cele spuse se urmăresc uşor pe figura 1, corespunzăto
$\varphi_1>0$, $\varphi_2>0$. Se remarcă paralelogramele din Propoziţia 2 şi următoare
triunghiuri direct asemenea, în ordinea în care sunt scrise, care se deduc
pretările geometrice ale formulelor (7), (8) şi (9): $\triangle C'BC\sim\triangle NBP\sim$
$\triangle NAP'$, $\triangle A'CA\sim\triangle PCM\sim\triangle BCB'\sim\triangle P'AM$, $\triangle B'AB\sim\triangle MAN$
$\sim\triangle MCN'$ şi $\triangle C'BA\sim\triangle CBA'\sim\triangle CB'A\sim\triangle N'MP\sim\triangle NMP'\sim$
Tot de aici se deduce faptul că, dacă, de exemplu, M este un punct im
$\triangle ACB'$, atunci şi N şi P sunt acelaşi tip de punct în triunghiurile analo

Observaţia 4. Punctele T şi T', obţinute la punctul (b), sunt *puncte*
generalizate asociate tripletelor $\{A,B,C\}$ şi $\{P,M,N\}$. În adevăr, dacă
exemplu, $\alpha=|b-c|$, $\beta=|c-a'|$, $\gamma=|a'-b|$ (sau orice numere pro
cu ele), atunci punctul T este punctul în care suma $\alpha\,|XA|+\beta\,|XB|+$
atinge minimul, unde X este un punct oarecare din plan. Analog, punc
punctul în care suma $\alpha\,|XP|+\beta\,|XM|+\gamma\,|XN|$ îşi atinge minimul. Pen
recomandăm cititorului paragraful 1.49 din [**3**], unde demonstraţiile sunt
pe larg şi unde sunt expuse şi alte proprietăţi ale punctelor Torricelli.

În continuare, ne plasăm în condiţiile punctului (b) din Teorema 2.

Teorema 3. *$T\equiv T'$ dacă şi numai dacă punctele A, B, C, M,*
conciclice.

Demonstraţie. Dacă $T\equiv T'$, atunci relaţia (6) asigură coincidenţa
$AA'\equiv PP'$, respectiv $BB'\equiv MM'$ şi $CC'\equiv NN'$, adică $\{C', N$
$\{P', A, T, P, A'\}$, $\{M', B, T, M, B'\}$ sunt puncte coliniare, deci există λ,μ
ca $c'-t=\lambda\,(c'-n)$, $a-t=\mu\,(a-p)$.

Deoarece patrulaterul $AC'BT$ este inscriptibil, rezultă că $\dfrac{a-t}{a-b}\cdot\dfrac{c'-}{c'-}$
unde, după înlocuire, se obţine $\dfrac{a-p}{a-b}\cdot\dfrac{c'-b}{c'-n}\in\mathbb{R}$. Ţinând cont de relaţia

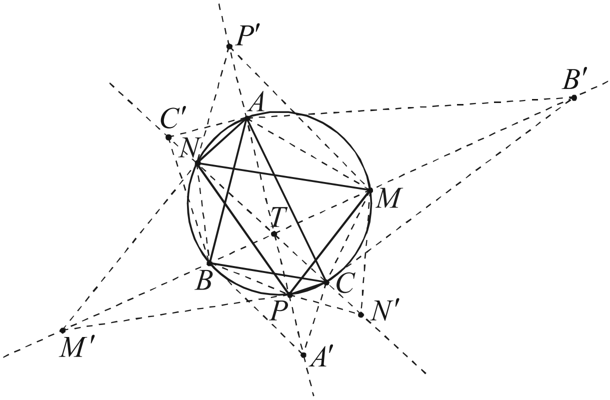


Figura 2

din (4), putem scrie $\dfrac{c'-b}{c'-n}=\dfrac{c-b}{c-p}$, care conduce la $\dfrac{a-p}{a-b}\cdot\dfrac{c-b}{c-p}\in\mathbb{R}$, c
laterul $ABPC$ este inscriptibil. Analog se demonstrează şi că M, N aparţ
circumscris triunghiului ABC. Reciproc, să presupunem că punctele A,
N, sunt conciclice şi demonstrăm că $T\equiv T'$ şi că punctul P aparţine ce
cumscris triunghiului ABC. Din (4) deducem că $\dfrac{b'-b}{n-m}=\dfrac{a-b}{n-a}$; după
cu $\dfrac{a-b}{n-a}\cdot\dfrac{m-n}{m-b}\in\mathbb{R}$, asigurată de patrulaterul inscriptibil $ANBM$,
$\dfrac{b'-b}{n-m}\cdot\dfrac{m-n}{m-b}\in\mathbb{R}$, deci $\dfrac{b'-b}{m-b}\in\mathbb{R}$, adică $M\in BB'$; folosind celălalt pat
scriptibil, se arată şi că $N\in CC'$; de aici $BB'\equiv MM'$, $CC'\equiv NN'$, de un
că $T\equiv T'$. Deoarece $P\in AA'$, rezultă că $\dfrac{a'-a}{p-a}\in\mathbb{R}$, adică $\dfrac{a'-a}{p-m}\cdot\dfrac{p-m}{p-a}$
ce, coroborat cu $\dfrac{a'-a}{p-m}=\dfrac{c-a}{c-m}$, dedusă din (4), conduce la $\dfrac{c-a}{c-m}\cdot\dfrac{p}{p}$
deci patrulaterul $AMCP$ este inscriptibil. Q. e. d.

De interes credem că este o interpretare fizică a teoremelor 2 şi 3 (v. [**3**]

Bibliografie

1. **C.Ionescu-Bujor** - *Elemente de transformări geometrice*, vol. I-IV Bibl
Matematice a R.S.R., Ed. Tehnică, Bucureşti, 1958.
2. **N. Mihăileanu** - *Utilizarea numerelor complexe în geometrie*, Bibl. Soc. Ş
atice a R.S.R., Ed. Tehnică, Bucureşti, 1968.
3. **L. Nicolaescu, V. Boskoff** - *Probleme practice de geometrie*, Seria "C
matematică şi fizică", Ed. Tehnică, Bucureşti, 1990.
4. **D. Smaranda, N. Soare** - *Transformări geometrice*, Bibl. profesorului
atică, Ed. Acad. R.S.R., 1988.
5. **C. Ţigăeru** - *Asupra unei clase de transformări geometrice*, Matematic
suceveană, nr. 8/1990, 1-7.

Ordinul elementelor grupului $GL_n(\mathbb{Z})$

Adrian REISNER[1]

În *RecMat 2/2005*, **Gabriel Dospinescu** a propus problema

L94. *Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice cu elemente întregi, inversabilă şi a mulţimea $\{A^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ este finită. Să se demonstreze că această mulţime a 3^{n^2} elemente. Rămâne rezultatul adevărat dacă suprimăm condiţia ca matricei să fie întregi?*

Soluţia autorului a fost publicată în numărul 2/2006 al revistei. Pr continuare o abordare oarecum diferită a problemei, care permite o mai bu asupra laticei subgrupurilor lui $GL_n(\mathbb{Z})$.

Notăm cu $GL_n(\mathbb{Z})$ mulţimea matricelor inversabile cu elemente între care inversa are tot elemente întregi. Evident că $M \in GL_n(\mathbb{Z})$ dacă şi n $M \in \mathcal{M}_n(Z)$ şi $\det M = \pm 1$. Dacă G este un subgrup finit al grupului G $p \geq 3$ este prim, considerăm aplicaţia $\varphi : G \to GL_n(\mathbb{Z})$, care asociază un $M \in G$ acea matrice care are ca elemente redusele modulo p ale elemente

Propoziţie. *Aplicaţia φ este un monomorfism de grupuri.*

Demonstraţie. Se observă uşor că φ este bine definită, în sensul că matrice inversabilă în $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_p)$, precum şi faptul că φ este morfism de gru arăta că φ este injectivă demonstrând că nucleul său $\operatorname{Ker}\varphi$ este $\{I_n\}$. Fie M deci $M \equiv I_n \pmod{p}$; există atunci o matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ astfel încât M Grupul G fiind finit, rezultă că M este de ordin finit $m \geq 1$: $M^m = I_n$. D egalitate deducem că polinomul $P = (1 + pX)^m - 1$ este polinom anula matricea N. Dacă $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_{m-1}$ sunt rădăcinile de ordin m ale unităţii, lui P vor fi $\lambda_j = \dfrac{1}{p}(\zeta_j - 1)$, $j = \overline{0, m-1}$ şi acestea sunt numere distinc că N este diagonalizabilă. În plus, cum $p \geq 3$, avem că $|\lambda_j| < 1$, pr $\lim\limits_{k\to\infty} N^k = O_n$. Matricea N fiind cu elemente întregi, există k suficien pentru care $N^k = O_n$, deci N este nilpotentă. O matrice diagonalizabilă şi este nulă şi deducem că $M = I_n + pO_n = I_n$, ceea ce încheie demonstraţi

Consecinţa 1. *Ordinul oricărui subgrup finit al grupului $GL_n(\mathbb{Z})$ es de 3^{n^2}, iar $GL_n(\mathbb{Z})$ conţine un număr finit de subgrupuri finite neizomo*

Demonstraţie. Cardinalul unui subgrup G este majorat, conform precedente, de cardinalul lui $GL_n(\mathbb{Z}_3)$, care este 3^{n^2} (deoarece aplicaţia jectivă). A doua afirmaţie rezultă imediat, deoarece $GL_n(\mathbb{Z}_3)$ are un num subgrupuri neizomorfe, fiind el însuşi grup finit.

Consecinţa 2. *Ordinul oricărui element al grupului $GL_n(\mathbb{Z})$ este s sau majorat de 3^{n^2}.*

[1] Cercetător, Centrul de Calcul E.N.S.T., Paris

Demonstraţie. Concluzia rezultă din faptul că ordinul oricărui elem grupului divide ordinul grupului.

Din Consecinţa 2 urmează imediat prima parte a problemei **L94**.

Proprietatea nu mai are loc dacă A nu are elemente întregi. De ex subgrup $G \in GL_2(\mathbb{R})$ care este *de torsiune* ($\forall x \in G$, $\exists q \in \mathbb{N}^*$ cu $x^q = I_2$ fie infinit; acest fapt aduce o îmbunătăţire soluţiei problemei **L94** dată în r unde se consideră un contraexemplu bazat pe o matrice cu elemente comple

Fie G subgrupul lui $GL_2(\mathbb{R})$ format din matricele de forma

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \{2r\pi \mid r \in \mathbb{Q}\}.$$

Dacă $\theta = \dfrac{p}{q}$, cu $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \geq 1$, evident că

$$[R(\theta)]^q = \begin{pmatrix} \cos 2p\pi & -\sin 2p\pi \\ \sin 2p\pi & \cos 2p\pi \end{pmatrix} = I_2,$$

deci G este grup de torsiune. Pe de altă parte, G este de ordin infinit, grupul $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$; izomorfismul asociază matricei $R(\theta)$, cu $\theta = 2r\pi$, clasa părţii fracţionare a lui r (verificările se fac uşor).

Recreații ... matematice

Puncte coliniare

Ora de matematică la o clasă cu profil sportiv. Un elev de cl. a I rezolvat la tablă o problemă simplă de *coliniaritate*, dar ...

– Ce sunt punctele coliniare? intervine profesorul, decis să-l ajute.

– !?!??

– Bine! S-o luăm altfel ... Tu eşti fotbalist. Ce înseamnă *coechiper*?

– Din aceeaşi echipă, de ce râdeţi de mine d-le profesor?

– Atunci, ce-ar putea să însemne *coliniar*?

– Din echipa adversă!...

Vreţi să vă ghicesc numărul ales?

Alegeţi un număr de două cifre pe care-l doriţi. Înmulţiţi prima cifră cu 3, dublaţi rezultatul, adăugaţi a doua cifră şi spuneţi-mi rezultatul. Vă vo loc numărul ales.

(*Explicaţii găsiţi la pagina 28.*)

Variaţiuni pe tema dreptei lui Euler şi cercului celor nouă puncte

Temistocle BÎRSAN[1]

Două dintre cele mai cunoscute "vedete" ale geometrie triunghiului su *lui Euler* şi *cercul celor nouă puncte* (*cercul lui Euler*) (fig. 1). Vom adopt uzuale. Fie $\triangle ABC$, dreapta lui Euler (determinată de H şi O) şi $\mathcal{E}$ c nouă puncte (determinat de mijloacele laturilor A', B', C'). Sunt bin următoarele proprietăţi ale acestei configuraţii:

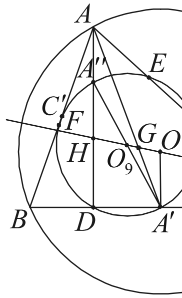


Fig.

1° G, O_9 (centrul cercului $\mathcal{E}$) sunt pe $\triangle$;

2° $\mathcal{E}$ conţine picioarele înălţimilor D, E, F şi mijloacele segmentelor $[AH]$, $[BH]$, $[CH]$, adică punctele A'', B'', C'';

3° $HO_9 = OO_9$, $HG = 2\,OG$;

4° punctele A' şi A'' sunt diametrul opuse în $\mathcal{E}$ şi $A'O = AA'' = A''H$;

5° $AO \parallel A'A''$ şi $AO = A'A''$;

6° cercurile $\mathcal{C}$ (circumscris $\triangle ABC$) şi $\mathcal{E}$ sunt omotetice prin omotetiile $h_H^{1/2}$ şi $h_G^{-1/2}$ [**1**]; dacă $\mathcal{C}$ are raza R, atunci $\mathcal{E}$ are raza

Următorul rezultat, sugerat de configuraţia de mai sus, reprezintă o g a proprietăţii 4° (în loc de H considerăm un punct oarecare):

Propoziţia 1. *Fie $\triangle ABC$ şi P un punct oarecare. Arătaţi că drepte mijloacele A'', B'' şi C'' ale segmentelor ceviene $[AP]$, $[BP]$ şi respect mijloacele A', B', C' ale laturilor opuse sunt concurente (fig. 2).*

Demonstraţie. Patrulaterul $B'C'B''C''$ este paralelogram, căci $B'C'$ şi $B''C''$ sunt paralele cu BC şi egale cu $\dfrac{BC}{2}$. Ca urmare, $[B'B'']$ şi $[C'C'']$ se intersectează în P' aflat la jumătatea fiecăruia. La fel se arată că $A'A''$ şi una dintre $B'B''$, $C'C''$ se intersectează în P'.

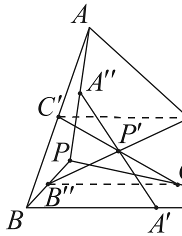


Fig. 2

Observaţii. 1) Pentru a obţine punctul P' este suficient să luăm o singură ceviană; dacă aceasta este AP, atunci P' este mijlocul segmentului $[A'A'']$.

2) Distingem trei cercuri cu centrul în punctul P' şi de raze $P'A'$, $P'B'$, $P'C'$ ce apar în locul cercului celor nouă puncte.

---

[1] Prof. dr., Catedra de matematică, Univ. Tehnică "Gh. Asachi", Iaşi

Propoziţia 2. *Dacă P este pe Δ, atunci P', obţinut din P ca în Pr*
este de asemenea pe Δ (fig. 3).

Demonstraţie. Fie A'' mijlocul segmentului eulerian $[AH]$ şi A''' mijlocul segmentului cevian $[AP]$; deci $A''A''' \parallel \Delta$. Notăm cu Q intersecţia paralelei prin A' la ceviana AP. Din acest fapt şi din proprietăţile $A'O \parallel AA''$ şi $A'O = AA''$, rezultă că $\triangle A'OQ$, $\triangle AA''A'''$ sunt congruente (ULU), deci $A'Q = AA''' = A'''P$. Patrulaterul $PA'QA'''$ este paralelogram şi P' este mijlocul segmentului $[PQ]$. Cum $P, Q \in \Delta$, urmează că $P' \in \Delta$.

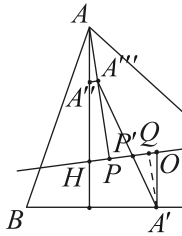


Fig. 3

Revenind la Propoziţia 1, vom impune punctului P condiţii suplimentare, care să-l apropie de H.

Propoziţia 3. *Fie P un punct în planul $\triangle ABC$. Punctele B', C*
(fig.2) sunt conciclice dacă şi numai dacă $P \in AH$.

Demonstraţie. Am observat deja că $B'C'B''C''$ este paralelogram.
C', B'', C'' sunt conciclice, atunci $B'C'B''C''$ va fi dreptunghi, deci B''
Dar $B''C' \parallel AP$ (în $\triangle PAB$). Deci $AP \perp BC$, adică $P \in AH$. Implicaţia
se dovedeşte pe cale inversă.

Propoziţia 4. *Fie P în planul $\triangle ABC$. Dacă punctele B', C', B''*
(sau A'') (fig.2) sunt conciclice, atunci P coincide cu H.

Demonstraţie. Cercul pe care se află punctele are centrul în P'
punctele A' şi A'' vor fi pe cerc, căci $P'A' = P'A''$ şi unul din ele, pr
este pe cerc. Conform Propoziţiei 3, aplicată de trei ori, avem $P \in AH$,
$P \in CH$, adică P şi H coincid.

Propoziţia 5. *Dacă punctul P verifică condiţia $AP \perp BC$ şi punct*
C', A'' (fig.2) sunt conciclice, atunci P este ortocentrul H al $\triangle ABC$.

Demonstraţie. Punctul A_1 definit prin $\{A_1\} = AP \perp BC$ este picior
duse din A. Ca urmare, $A_1 \in \mathcal{E}$ şi $\triangle A_1A'A''$ dreptunghic în A_1 este înscris
$A'A''$ este un diametru în $\mathcal{E}$. În consecinţă, mijlocul lui $A'A''$, care este es
centrul cercului $\mathcal{E}$. Din faptul că $B', C' \in \mathcal{E}$, rezultă că punctele diametra
vor fi pe acest cerc, adică $B'', C'' \in \mathcal{E}$. Se poate aplica Propoziţia 4, conf
P este punctul H.

Propoziţia 6. *Dacă punctul P verifică condiţia $AP \perp BC$ şi puncte*
C'', A' (fig.2) sunt conciclice, atunci P este ortocentrul H.

Demonstraţie. Simetricele punctelor A'', B'', C'' şi A' faţă de
asemenea conciclice; aşadar, A', B', C' şi A'' sunt conciclice. Ipotezele Pr
fiind îndeplinite, rezultă că P coincide cu H.

Observaţii. 1) Propoziţiile 4, 5 şi 6 pot fi privite ca reciproce ale bine
afirmaţii: *dacă H este ortocentrul unui triunghi, atunci mijloacele lat*
mijloacele segmentelor euleriene şi picioarele înălţimilor sunt conciclice
Euler).

2) Remarcăm că în enunţul Propoziţiei 4 este absentă condiţia $AP \perp B$
este doar aparent, căci în ipotezele acesteia, rezultă că menţionata condi
(conform Propoziţiei 3).

Revenind din nou la Propoziţia 1, să examinăm rezultatul acesteia din
de vedere. Notăm cu τ transformarea geometrică (a planului $\triangle ABC$)
punctul P în corespondenţă cu P', punct construit ca în Propoziţia 1 (a
Observaţia ce-i urmează, punct 1)); deci $P \xrightarrow{\tau} P'$ sau $\tau(P) = P'$.

Vom indica câteva proprietăţi ale transformatei τ şi o vom compara cu
$h_H^{1/2}$ şi $h_G^{-1/2}$.

Iată câteva proprietăţi ale lui τ, care decurg direct din definiţiile lui τ
stabilite mai sus:

1° $G \xrightarrow{\tau} G$, $H \xrightarrow{\tau} O_9$;

2° $\tau(A) =$ mijlocul medianei $[AA']$ (analog, $\tau(B)$, $\tau(C)$);

3° $\tau(\triangle) = \triangle$, adică dreapta lui Euler este transformată în ea însăş
Propoziţiei 2).

Propoziţia 7. *Sunt adevărate afirmaţiile:*

a) $\tau(O) = U$, *unde* U *este mijlocul segmentului* $[O_9O]$*;*

b) $\tau(O_9) = V$, *unde* V *este mijlocul segmentului* $[O_9U]$*, adică* $O_9V =$

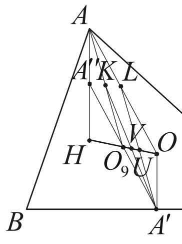


Fig.

Demonstraţie. *a)* Afirmaţia rezultă din faptul că patrulaterul $OA'O_9L$ (fig.4) este paralelogram (O_9L ca linie mijlocie în $\triangle AHO$ este paralelă cu AH şi egală cu $\dfrac{AH}{2}$, iar OA', după cum am amintit la început, are de asemenea aceste două prprietăţi).

b) Argument similar: $O_9A'UK$ este paralelogram ($A'O_9$ şi UK sunt paralele cu OA şi egale cu $\dfrac{OA}{2}$).

Propoziţia 8. *Are loc egalitatea* $\tau = h_G^{1/4}$*, adică* τ *este omotetia de c*
raport $\dfrac{1}{4}$.

Demonstraţie. Faptul că imaginea P' a punctului P se obţine cons
întâi mijlocul A'' al segmentului $[AP]$ şi apoi P' ca mijloc al segmentulu
scrie: $\tau = h_{A'}^{1/2} \circ h_A^{1/2}$ (într-adevăr, $h_{A'}^{1/2} \circ h_A^{1/2}(P) = h_{A'}^{1/2}\left(h_A^{1/2}(P)\right) = h$
P'). Ca produs de două omotetii, τ va fi tot o omotetie, cu centrul
centrele omotetiilor factor şi de raport $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2}$ ([**1**, p.81], [**4**, p.85]). Să n
centrul omotetiei τ, $T \in AA'$. Poziţia punctului T pe AA' poate fi aflată
unor formule prezente în locurile citate mai înainte; preferăm să o determin
Avem:

$$\begin{aligned} \tau(T) &= T \Rightarrow h_{A'}^{1/2} \circ h_A^{1/2}(T) = T \Rightarrow h_{A'}^{1/2}(S) = T, \text{ unde } S = h_A^{1/2}(\\ \overrightarrow{A'T} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{A'S} \text{ şi } \overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AT} \Rightarrow \overrightarrow{AT} = 2\overrightarrow{AS} = 2(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'S}) = \end{aligned}$$

$= 2(\overrightarrow{AA'} + 2\overrightarrow{A'T}) = 2(\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{A'T}) \Rightarrow -\overrightarrow{AT} = 2\overrightarrow{A'T} \Rightarrow T$ coincide cu
ceea ce încheie demonstraţia.

Speculând faptul că omotetiile transformă dreptele ce trec prin centru î
şi cercurile în cercuri ([**1**], [**4**]), putem completa lista proprietăţilor lui τ c

4° dreptele suport ale medianelor $\triangle ABC$ sunt invariante la τ;

5° *dreapta lui Nagel* IN (N este *punctul lui Nagel*) este invariantă, că
avem $\tau(I) = I'$, cu $I' \in IN$, $4GI' = GI$ şi $\tau(N) = S$, unde S este p
Spiecker – centrul cercului înscris în triunghiul median $\triangle A'B'C'$ [**2**, pp.9

Observaţie. Propoziţia 2, căreia i-am dat o demonstraţie directă, dec
faptul că $\triangle$ trece prin G şi τ este omotetie.

Încheiem cu o problemă care poate părea dificilă, dar care este uşor c
în contextul nostru.

Problemă. *Cercul determinat de mijloacele medianelor* $\triangle ABC$ *are*
dreapta lui Euler în mijlocul segmentului $[OO_9]$ *şi raza* $\dfrac{R}{4}$.

Soluţie. Observăm că acest cerc este imaginea prin τ a cercului c
$\triangle ABC$ (proprietatea 2)) şi apoi utilizăm Propoziţia 7, a).

Bibliografie

1. **D. Brânzei, S. Aniţa, C. Cocea** - *Planul şi spaţiul euclidian*, Biblio
sorului de matematică, Ed. Academiei, Bucureşti, 1986.
2. **D. Brânzei, S. Aniţa, M. Chirciu** - *Geometrie. Clasa a IX-a*, Colecţia I
ed. a III-a, Paralela 45, Piteşti, 1998.
3. **T. Lalescu** - *Geometria triunghiului*, Ed. Tineretului, Bucureşti, 1958.
4. **D. Smaranda, N. Soare** - *Transformări geometrice*, Biblioteca profe
matematică, Ed. Academiei, Bucureşti, 1988.

New Proof for an Old Inequality

Marian TETIVA[1]

The inequality

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 8R^2 + 4r^2$$

is well-known to be the sharpest from all the inequalities of the form (see

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq kR^2 + hr^2;$$

also it's a known fact (and it is easy to obtain) that it can be stated in the form

$$(1 - \cos A)(1 - \cos B)(1 - \cos C) \geq \cos A \cos B \cos C.$$

Many beautiful proofs for this remarkable inequality are available ([**1**], intention is to present in the sequel a new proof of this trigonometric f inequality ("new" as far as we know it) and also to derive some related in

Of course, the case of the right-angled or of the obtuse-angled triangl diately obtained, as long as the left-hand side is always positive and the side is less than (or equal to) zero in those cases. Therefore we may ass out mistaking, the triangle to be acute-angled, hence the cosines of its a positive; then we can also put the inequality as

$$\left(\frac{1}{\cos A} - 1\right)\left(\frac{1}{\cos B} - 1\right)\left(\frac{1}{\cos C} - 1\right) \geq 1.$$

Let us denote $x = \cos A$, $y = \cos B$, $z = \cos C$ and the above parentheses w

$$u = \frac{1}{x} - 1, \quad v = \frac{1}{y} - 1, \quad w = \frac{1}{z} - 1 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1}{u+1}, \quad y = \frac{1}{v+1}, \quad z =$$

Now observe that

$$\cos A = -\cos(B + C) = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + yz = \sqrt{(1 - y^2)(1 - z^2)},$$

whence squaring yields

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1,$$

or, with the u, v, w - notations

$$\frac{1}{(u+1)^2} + \frac{1}{(v+1)^2} + \frac{1}{(w+1)^2} + \frac{2}{(u+1)(v+1)(w+1)} = 1.$$

Thus we are left with the algebraic inequality $uvw \geq 1$, for positive u, v, u the previous condition, or

$$\sum (u+1)^2(v+1)^2 + 2\prod (u+1) = \prod (u+1)^2$$

(the sum and the products are cyclic). Further we introduce the notation

$$S = u + v + w, \quad Q = uv + uw + vw, \quad P = uvw;$$

some simple (but boring) calculations transform the above condition in

$$S^2 + 4S + 4 = P^2 + 2PQ + 4PS + 6P$$

and we want to get from here the inequality $P \geq 1$.

---

[1] Professor, National College "Gheorghe Roşca Codreanu", Bârlad

Indeed, suppose that it is not so, hence $P < 1$; one gets

$$S^2 + 4S + 4 < 1 + 2Q + 4S + 6 \Rightarrow S^2 < 2Q + 3.$$

But $Q \leq S^2/3$ is a classic inequality which, together with the previous o $S < 3$ and this is not possible, because using $(*)$ and the inequalities $P \leq$ $Q \leq S^2/3$, we infer

$$t^6 + 6t^5 + 12t^4 + 6t^3 - 9t^2 - 12t - 4 \geq 0,$$

for $t = S/3$. This last inequality may be rewritten as

$$(t-1)(t^5 + 7t^4 + 19t^3 + 25t^2 + 16t + 4) \geq 0,$$

and it shows that $t \geq 1 \Leftrightarrow S \geq 3$. Thus the inequality $S < 3$ obtaine supposition that $P < 1$ is contradictory, hence $P \geq 1$ and the proof is do

How to obtain new inequalities? For example, with the AM-GM ine have $S \geq 3\sqrt[3]{P}$ and $Q \geq 3\sqrt[3]{P^2}$; by $P \geq 1$ these yield $S \geq 3$ and $Q \geq 3$, t

$$S^2 + 4S + 4 = P^2 + 2PQ + 4PS + 6P \geq P^2 + 6P + 12P + 6P = P^2$$

Again by $P \geq 1$ one gets

$$S^2 + 4S + 4 \geq 25P \Rightarrow (S+2)^2 \geq 25P \Rightarrow S \geq 5\sqrt{P} - 2;$$

now remember who S and P are and transform this into

$$\sum \frac{1}{\cos A} \geq 5\sqrt{\prod \left(\frac{1}{\cos A} - 1\right)} + 1,$$

which we think that is not an easy to get inequality.

A slight modification of the above calculations leads us to another between S and P, namely

$$S \geq P + 2 \Leftrightarrow \sum \left(\frac{1}{\cos A} - 1\right) \geq \prod \left(\frac{1}{\cos A} - 1\right) + 2;$$

a short computation transforms this into another (known, we believe) involving the cosines of an acute-angled triangle:

$$\sum \cos A \geq 1 + 4\prod \cos A.$$

We suggest to the reader to proceed for improving this last inequalit get $S \geq 2P + 1$ and $S \geq 3P$, inequalities that can also be put in the form

$$2\sum \cos A \geq 2 + \sum \cos A \cos B + 2\prod \cos A,$$

respectively

$$3\sum \cos A \geq 3 + 2\sum \cos A \cos B.$$

Or, and we are very sure of it, the reader may find his/hers own way t (beautiful and hard enough, we think) inequalities with this method.

Bibliografie

1. **D. Grinberg, M. Lascu, M. Pachiţariu, M. Tetiva** - *Din nou despre geometrice*, G. M. 6/2006.
2. **L. Panaitopol** - *O inegalitate geometrică*, G. M. 4/1982.

Asupra calculării unor limite de şiruri

D. M. BĂTINEŢU-GIURGIU[1]

Oricărui şir $(a_n)_{n\geq 1}$ de numere reale strict pozitive îi vom asocia şiruri
şi $\left(\sqrt[n]{a_n!}\right)_{n\geq 1}$, unde $a_1! = a_1$, $\sqrt[1]{a_1!} = a_1$, $a_{n+1}! = a_n! \cdot a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. P
şir $(x_n)_{n\geq 1}$ de numere reale, vom nota $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vom considera mulţimile de şiruri:

$$\mathcal{S}\left(\mathbb{R}_+^*\right) = \left\{(x_n)_{n\geq 1} \mid x_n \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}^*\right\},$$

$$\mathcal{D}\left(\mathbb{R}_+^*\right) = \left\{(x_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}_+^*\right) \mid \exists \lim_{n\to\infty} \Delta x_n = x \in \mathbb{R}_+^*\right\},$$

$$\mathcal{B}\left(\mathbb{R}_+^*\right) = \left\{(x_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}_+^*\right) \mid \exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = x \in \mathbb{R}_+^*\right\},$$

pentru care evidenţiem câteva proprietăţi.

P$_1$. *Oricare ar fi $(x_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}_+^*\right)$, atunci $(x_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}_+^*\right)$.*

Demonstraţie. Fie $(x_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}_+^*\right)$, deci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \Delta x_n = x \in \mathbb{R}_+^*$. C
$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1} - x_n}{(n+1) - n} = x$. Deci $\mathcal{D}\left(\mathbb{R}_+^*\right) \subset \mathcal{B}\left(\mathbb{R}_+^*\right)$.

Această incluziune este strictă: şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ dat de $x_n = n + \dfrac{(-1}{3}$
$\mathcal{B}\left(\mathbb{R}_+^*\right)$, dar nu şi în $\mathcal{D}\left(\mathbb{R}_+^*\right)$.

P$_2$. *Oricare ar fi $(x_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}_+^*\right)$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1$.*

Demonstraţie. Într-adevăr, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{x_{n+1}}{n+1} \cdot \dfrac{n}{x_n} \cdot \dfrac{n+1}{n}\right) =$

P$_3$. *Oricare ar fi $(x_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}_+^*\right)$, atunci $\left(\sqrt[n]{x_n!}\right)_{n\geq 1} \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}_+^*\right)$.*

Demonstraţie. Conform criteriului Cauchy-d' Alembert, avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{x_n!}}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{x_n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_{n+1}!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{x_n!}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_{n+1}}{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right) = \frac{x}{e} \in \mathbb{R}_+^*.$$

P$_4$. Oricare ar fi $(x_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}_+^*\right)$, atunci $\left(\sqrt[n]{x_n!}\right)_{n\geq 1} \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}_+^*\right)$.

Demonstraţie. În P$_3$ am arătat că, dacă $(x_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}_+^*\right)$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}$
ca urmare,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n+1]{x_{n+1}!}}{\sqrt[n]{x_n!}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n+1]{x_{n+1}!}}{n+1} \cdot \frac{n}{\sqrt[n]{x_n!}} \cdot \frac{n+1}{n}\right) = \frac{x}{e} \cdot$$

[1] Profesor, Colegiul Naţional "Matei Basarab", Bucureşti

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n-1}{\ln u_n}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}(u_n)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n+1]{x_{n+1}!}}{\sqrt[n]{x_n!}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n+1}{\sqrt[n+1]{x_{n+1}!}}\right)=x\cdot$$

Rezultă atunci că

$$\lim_{n\to\infty}\Delta\left(\sqrt[n]{x_n!}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{x_{n+1}!}-\sqrt[n]{x_n!}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{x_n!}}{n}\cdot\frac{u_n-1}{\ln u_n}\cdot\ln(u_n$$

q.e.d.

Aplicaţii (ale proprietăţii P$_4$).

1. Dacă $x_n=n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, atunci $(x_n)_{n\geq 1}\in\mathcal{B}\left(\mathbb{R}_+^*\right)$, cu $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n}=1$
cu P$_4$, rezultă că $\left(\sqrt[n]{n!}\right)_{n\geq 1}\in\mathcal{D}\left(\mathbb{R}_+^*\right)$ şi

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right)=\lim_{n\to\infty}L_n=\frac{1}{e},$$

unde $(L_n)_{ns>1}$ este *şirul lui Lalescu* (*Problema 579*, G.M., vol VI (1900-190

2. Dacă $x_n=2n-1$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, atunci $(x_n)_{n\geq 1}\in\mathcal{B}\left(\mathbb{R}_+^*\right)$ cu $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n}=$
că $\left(\sqrt[n]{(2n-1)!!}\right)_{n\geq 1}\in\mathcal{D}\left(\mathbb{R}_+^*\right)$ şi

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(2n+1)!!}-\sqrt[n]{(2n-1)!!}\right)=\frac{2}{e};$$

am obţinut limita *Problemei C:904*, G.M. - 5/1989, p.187.

Propoziţia 1. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}\in\mathcal{B}\left(\mathbb{R}_+^*\right)$*; atunci* $(x_n)_{n\geq 1}\in\mathcal{D}\left(\mathbb{R}_+^*\right)$ *dac*
dacă există $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n=a\in\mathbb{R}_+^*$.

Demonstraţie. Conform ipotezei $\exists\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n}=x\in\mathbb{R}_+^*$ şi deci (din P$_2$) li
Avem relaţia următoare:

$$\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n=\left[\left(1+\frac{\Delta x_n}{x_n}\right)^{\frac{x_n}{\Delta x_n}}\right]^{\frac{n}{x_n}\cdot\Delta x_n},\quad\forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Dacă $\exists a=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n\in\mathbb{R}_+^*$, atunci trecând la limită în această rela
$n\to\infty$, obţinem $a=e^{1/x\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\Delta x_n}$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty}\Delta x_n=x\ln a$.

Reciproc, dacă $\exists b=\lim\limits_{n\to\infty}\Delta x_n\in\mathbb{R}_+^*$, trecând la limită în aceeaşi rela
că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n=e^{b/x}$, adică $a=e^{b/x}$.

Propoziţia 2. *Dacă şirurile* $(x_n)_{n\geq 1},(y_n)_{n\geq 1},(z_n)_{n\geq 1}\in\mathcal{D}\left(\mathbb{R}_+^*\right)$, *a*
$(u_n)_{n\geq 1}\in\mathcal{D}\left(\mathbb{R}_+^*\right)$, *unde* $u_n=\dfrac{x_ny_n}{z_n}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, *şi b)* $\lim\limits_{n\to\infty}\Delta u_n=\dfrac{xy}{z}$.

Demonstraţie. Conform enunţului, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \Delta x_n = x$, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \Delta y_n = y$ şi $\exists$
cu $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$. Cum, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, avem

$$\Delta u_n = \frac{x_{n+1}y_{n+1}}{z_{n+1}} - \frac{x_n y_n}{z_n} = \frac{x_{n+1}y_{n+1}}{z_{n+1}} - \frac{x_n y_{n+1}}{z_{n+1}} + \frac{x_n y_{n+1}}{z_{n+1}} - \frac{x_n y}{z_n}$$

$$= \frac{y_{n+1}}{z_{n+1}}\Delta x_n + \frac{x_n}{z_n z_{n+1}}\left(y_{n+1}z_n - y_n z_{n+1}\right) =$$

$$= \frac{y_{n+1}}{z_{n+1}}\Delta x_n + \frac{x_n}{z_n z_{n+1}}\left(y_{n+1}z_n - y_n z_n + y_n z_n - y_n z_{n+1}\right) =$$

$$= \frac{y_{n+1}}{z_{n+1}}\Delta x_n + \frac{x_n}{z_{n+1}}\Delta y_n - \frac{x_n y_n}{z_n z_{n+1}}\Delta z_n,$$

trecând la limită cu $n \to \infty$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta u_n = \frac{y}{z}x + \frac{x}{z}y - \frac{xy}{z^2}$
demonstraţia se încheie.

Aplicaţii (ale propoziţiei 2).

1. Dacă $x_n = y_n = n$, $z_n = \sqrt[n]{n!}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} -\right.$
(*Problema C:890*, G.M. - 4/1988).

2. Dacă $x_n = \sqrt[n]{n!}$, $y_n = \sqrt[n]{(2n-1)!!}$, $z_n = n$, atunci

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!\,(2n+1)!!}}{n+1} - \frac{\sqrt[n]{n!\,(2n-1)!!}}{n}\right) = \frac{2}{e^2},$$

iar dacă $x_n = y_n = \sqrt[n]{n!}$, $z_n = n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, atunci

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(\sqrt[n+1]{(2n+1)!!}\right)^2}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} - \frac{\left(\sqrt[n]{(2n-1)!!}\right)^2}{\sqrt[n]{n}}\right) = \frac{4}{e},$$

etc.

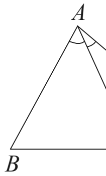
3. Tot ca aplicaţie a Propoziţiei 2 se obţin limitele problemelor
C:2869, *C:2878*, *C:2987*, *C:3010* din G.M., *L.192* din Revista matematic
stanţa şi *PP.2312*, *PP.2759*, *PP.3680*, *PP.5219*, *PP.5220*, *PP.5224*, *P*
Octogon Mathematical Magazine.

Bibliografie

1. **D. M. Bătineţu** - *Şiruri*, Editura Albatros, Bucureşti, 1979.
2. **D. M. Bătineţu-Giurgiu** - *O abordare a unor limite*, G.M. - 5/2006, 2
3. **M. Ţena** - *O altă soluţie a problemei 579 (G.M.)*, Revista "Licăriri"
"Nicolae Bălcescu", Craiova, 1978, 13-14.

O generalizare a teoremei lui Van Aube

Silviu BOGA[1]



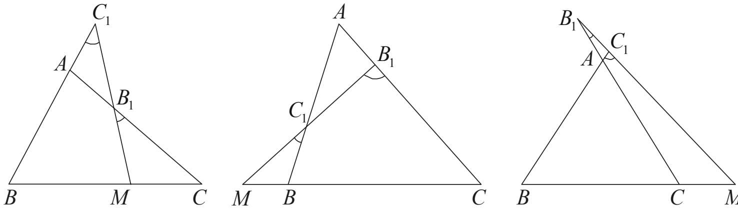
Considerând o ceviană oarecare în locul bisectoarei unui triunghi se obţine următoarea generalizare a *teoremei bisectoarei*:

$$\frac{MB}{MC}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{\sin\widehat{BAM}}{\sin\widehat{CAM}}\qquad(1)$$

(se stabileşte aplicând teorema sinusurilor în $\triangle ABM$ şi $\triangle ACM$ pentru a exprima MB şi MC).

Acest rezultat cunoscut a fost utilizat ca instrument de lucru în [**1**], [**3**

La rândul ei, relaţia (1) poate fi generalizată la cazul în care ceviana înlocuită cu o transversală B_1C_1M ce nu-i paralelă cu AB, AC (câteva acesteia sunt prezente în figurile de mai jos):

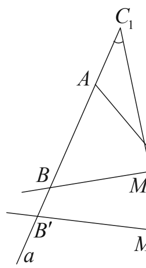


$$\frac{MB}{MC}=\frac{BC_1}{CB_1}\cdot\frac{\sin\widehat{C_1}}{\sin\widehat{B_1}};$$

evident, pentru $A\equiv B_1\equiv C_1$ relaţia (2) devine (1).

Pentru a dovedi această relaţie, procedăm ca şi în cazul relaţiei (1): c sinusurilor aplicată în $\triangle C_1BM$ şi $\triangle B_1CM$ obţinem $MB=\dfrac{BC_1}{\sin\widehat{M}}\sin C_1$ $\dfrac{CB_1}{\sin\widehat{M}}\sin B_1$, care, prin împărţire, dau (2).

În unele aplicaţii este utilă o consecinţă directă a rezultatului dat d secinţă prin care sunt eliminate în fapt unghiurile.



Fie trei drepte a, b, c concurente două câte două şi transversalele t şi t'. Adoptăm notaţiile prezente pe figura alăturată şi convenim ca $(a;b)$ să însemne masură unuia dintre unghiurile determinate de dreptele a şi b.

Propoziţie. *În condiţiile specificate mai înainte, are loc formula*

$$\frac{MB}{MC}\cdot\frac{CB_1}{BC_1}=\frac{M'B'}{M'C'}\cdot\frac{C'B_1}{B'C_1}.\qquad(3)$$

Demonstraţie. Într-adevăr, conform cu (2), aplicată triunghiurilor $\triangle AB'C'$ şi transversalei B_1C_1, avem:

$$\frac{MB}{MC}=\frac{BC_1}{CB_1}\cdot\frac{\sin(a;c)}{\sin(b;c)},\qquad\frac{M'B'}{M'C'}=\frac{B'C_1}{C'B_1}\cdot\frac{\sin(a;c)}{\sin(b;c)}.$$

[1] Profesor, Colegiul Naţional, Iaşi

De aici, rezultă că $\dfrac{MB}{MC}\cdot\dfrac{CB_1}{BC_1}=\dfrac{M'B'}{M'C'}\cdot\dfrac{C'B_1}{B'C_1}=\dfrac{\sin(a;c)}{\sin(b;c)}$, q.e.d.

Observaţii 1. Egalitatea (3) şi demonstraţia ei nu suferă modificări p
poziţii ale dreptelor a, b, c (concurente două câte două) şi transversalelor

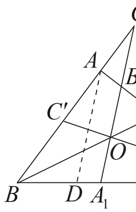
2. Dacă dreptele a, b, c sunt concurente în A, adică B_1 şi C_1 coincid cu
(3) se scrie în forma

$$\frac{MB}{MC}\cdot\frac{AC}{AB}=\frac{M'B'}{M'C'}\cdot\frac{AC'}{AB'}.$$

Menţionăm că ($3'$) poate fi stabilită uşor cu ajutorul relaţiei (1).

Teorema 1. (generalizarea *teoremei Van Aubel*). *Fie $\triangle ABC$ şi pun*
(AC), $C'\in(AB)$ cu $BB'\cap CC'=\{O\}$. Dacă prin O trece o dreaptă care
în A_1, $(BA$ în C_1 şi $(CA$ în B_1, atunci are loc relaţia

$$\frac{C'A}{C'B}\cdot\frac{OA_1}{OB_1}+\frac{B'A}{B'C}\cdot\frac{OA_1}{OC_1}=1.$$



Demonstraţie. Aplicăm (3) mai întâi la dreptele CA, CB, CC' şi transversalele AB şi A_1B_1 şi apoi la dreptele BA, BC, BB' şi transversalele AC şi A_1C_1:

$$\frac{C'A}{C'B}\cdot\frac{CB}{CA}=\frac{OB_1}{OA_1}\cdot\frac{CA_1}{CB_1},\qquad \frac{B'A}{B'C}\cdot\frac{BC}{BA}=\frac{OC_1}{OA_1}\cdot\frac{BA_1}{BC_1}.$$

De aici obţinem

$$\frac{C'A}{C'B}\cdot\frac{OA_1}{OB_1}+\frac{B'A}{B'C}\cdot\frac{OA_1}{OC_1}=\frac{CA}{CB}\cdot\frac{CA_1}{CB_1}+\frac{BA}{BC}\cdot\frac{BA_1}{BC_1}.$$

Construim $AD\parallel B_1A_1$ şi observăm că $\dfrac{CA_1}{CB_1}=\dfrac{CD}{CA}$ şi $\dfrac{BA_1}{BC_1}=\dfrac{BD}{BA}$. Atun
membrul drept al relaţiei (5) revine la

$$\frac{CA}{CB}\cdot\frac{CD}{CA}+\frac{BA}{BC}\cdot\frac{BD}{BA}=1$$

şi, în consecinţă, (4) este dovedită.

Observaţii. 1. Dacă $A\equiv B_1\equiv C_1$, se obţine relaţia Van Aubel.

2. Particularizând $O\equiv G$ (centrul de greutate al triunghiului), relaţia

$$\frac{1}{GB_1}+\frac{1}{GC_1}=\frac{1}{GA_1}\quad(\textbf{S. Boga},\ [\textbf{1},\ \text{p.}43]).$$

3. Particularizând $O\equiv I$ (centrul cercului înscris triunghiului), obţine

$$\frac{AC}{IB_1}+\frac{AB}{IC_1}=\frac{BC}{IA_1}.$$

Bibliografie

1. S. Boga - *O proprietate remarcabilă de fascicul.* Matematica în şcoala
6/1989, 3-8.

2. D. Brânzei, S. Aniţa, M. Chirchiu - *Geometrie. Clasa a IX-a* (Colec
2000"), ed. a III-a, Editura Paralela 45, Piteşti, 1998.

3. C. Artenie, C. Constanda - *Generalizarea problemei bisectoarei glisate*
Matematice, 1/2001, 32-33.

O propoziţie echivalentă cu conjectura lui Gol

Bogdan CIACOI[1]

Punctul de plecare al acestei Note este celebra şi aparent simpla co lui Goldbach. Această problemă, care a impulsionat considerabil dezvolta numerelor, se află pe lista problemelor de matematică nerezolvate încă. originea în corespondenţa dintre Christian Goldbach şi Leonhard Euler – – şi se formulează astfel:

(CG) *Orice număr natural par, mai mare ca* 2, *este suma a două num*

O formă mai tare a acesteia este:

(CG') *Orice număr natural par, mai mare ca* 6, *este suma a două nun diferite.*

După cum se poate vedea în [**2**], (CG') este echivalentă cu afirmaţia u

Orice număr natural mai mare ca 17 *este suma a trei numere prime*

Să notăm cu $P_{[n]}$ mulţimea tuturor perechilor de numere prime egal de n şi cu $P'_{[n]}$ mulţimea tuturor perechilor de numere prime diferite şi egal de n. Exemple:

$$
\begin{array}{ll}
P_{[2]} = \{(2,2)\}, & P'_{[2]} = \emptyset, \\
P_{[3]} = \{(3,3)\}, & P'_{[3]} = \emptyset, \\
P_{[4]} = \{(3,5)\}, & P'_{[4]} = \{(3,5)\}, \\
P_{[5]} = \{(3,7)\}, & P'_{[5]} = \{(3,7)\}, \\
P_{[6]} = \{(5,7)\}, & P'_{[6]} = \{(5,7)\}, \\
P_{[7]} = \{(3,11),(7,7)\}, & P'_{[7]} = \{(3,11)\}, \\
P_{[8]} = \{(3,13),(5,11)\}, & P'_{[8]} = \{(3,13),(5,11)\}, \\
P_{[9]} = \{(5,13),(7,11)\}, & P'_{[9]} = \{(5,13),(7,11)\}, \\
P_{[10]} = \{(3,17),(7,13)\}, & P'_{[9]} = \{(5,13),(7,11)\}, \\
P_{[11]} = \{(3,19),(5,17),(11,11)\} \text{ etc.} & P'_{[11]} = \{(3,19),(5,17)\}
\end{array}
$$

Evident, au loc: $P'_{[n]} \subset P_{[n]}$, $n \geq 2$ si $P'_{[n]} = P_{[n]}$ dacă n nu este numă

Observaţii. 1. Postulatul lui Bertrand (pentru orice $n \geq 2$ există un număr prim între n şi $2n$) dă o şansă existenţei unei perechi de num echidistante faţă de n, dar nu o garantează.

2. Dacă $n \geq 3$, atunci, din considerente de paritate, se constată că nu 2 nu poate intra în perechile din $P_{[n]}$ şi $P'_{[n]}$.

3. Din modul cum au fost introduse mulţimile $P_{[n]}$ şi $P'_{[n]}$ rezultă că a

(i) $(p,q) \in P_{[n]}, n \geq 2 \Leftrightarrow \exists k \in \{0,1,\ldots,n-2\}$ astfel încât numerele p $q = n + k$ sunt prime.

(ii) $(p,q) \in P'_{[n]}, n \geq 4 \Leftrightarrow \exists k \in \{1,2,\ldots,n-3\}$ astfel încât numerele p $q = n + k$ sunt prime.

[1] Elev, cl. a XII-a, Liceul Teoretic "Ana Ipătescu", Gherla

4. Dacă fixăm $n+k$ ca şi număr prim între n şi $2n$, se poate arăta
calcul că $n-k$ este de forma $6m \pm 1$, forma necesară a unui număr prim;
aceasta nu garantează că $n-k$ este prim.

Formulăm următoarele două conjecturi:

(CCE) *Pentru orice număr natural* $n \geq 2$ *există cel puţin o pereche*
prime egal depărtate de el.

(CCE') *Pentru orice număr natural* $n \geq 4$ *există cel puţin o pereche*
prime diferite şi egal depărtate de el.

Aceste pregătiri permit să enunţăm următoarea

Propoziţie. *Sunt adevărate următoarele afirmaţii:*
a) (CCE) *este echivalentă cu* (CG)*;*
b) (CCE') *este echivalentă cu* (CG')*.*

Demonstraţie. Întrucât *a)* şi *b)* se dovedesc în mod similar, vom
numai punctul *b)*.

$\underline{(CCE') \Rightarrow (CG')}$ Fie n par şi mai mare ca 6. Atunci $\frac{n}{2} \in \mathbb{N}$, $\frac{n}{2} \geq 4$
ipotezei, $\exists k \in \{1, 2, \ldots, n-3\}$ astfel încât $\frac{n}{2} - k$ şi $\frac{n}{2} + k$ sunt prim
$n = \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = (\frac{n}{2} - k) + (\frac{n}{2} + k)$, adică n este suma a două numere prime

$\underline{(CG') \Rightarrow (CCE')}$ Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$. Atunci $2n$ este mai mare ca 6
fiind presupusă adevarată, există două numere prime distincte p şi q a
$2n = p + q$. Dacă $p < q$ (analog procedăm în cazul $q < p$), din egalitatea
rezultă că $n - p = q - n \in \mathbb{N}^*$; notăm $k = n - p = q - n$ şi constatăm
$k \in \{1, 2, \ldots, n-3\}$. Cum $(p, q) \equiv (n-k, n+k)$ este o pereche de num
echidistante de n, implicaţia este dovedită.

Este posibil ca această formă echivalentă cu conjectura lui Goldbach
un anumit interes şi în privinţa distribuţiei numerelor prime.

Bibliografie

1. **I. Creangă, C. Cazacu, P. Minuţ, Gh. Opaiţ, C. Reicher** - *Intr*
teoria numerelor, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1965.
2. **P. Minuţ** - *Asupra ipotezei lui Goldbach*, Recreaţii Matematice, 4(2002),
3. **W. Sierpiński** - *Ce ştim şi ce nu ştim despre numerele prime*, Editura
Bucureşti, 1966.

Recreaţii ... matematice

Soluţie (procedeul găsirii numărului ales - v. pag. 15). Scad 6 din n
mi l-aţi comunicat şi obţin tocmai numărul ales. Justificarea este dată de

$$(a \cdot 5 + 3)\,2 + b = \overline{ab} + 6.$$

Observaţie. Dar dacă numărul ales ar avea trei cifre? Am proceda
baza egalităţii

$$(a \cdot 5 + 3)\,20 + (b \cdot 5 + 3)\,2 + c = \overline{abc} + 66.$$

Cum se poate obţine o inegalitate

Lucian TUŢESCU[1]

Prezentăm în cele ce urmează modul în care s-a obţinut inegalitatea
jos, pe care o considerăm a fi interesantă şi susceptibilă de generalizări.
socotim că maniera de lucru urmată poate fi pentru elevi un model în ob
rezultate proprii sugerate de probleme ce apar în paginile diverselor revis

Dacă x, y sunt numere reale cu acelaşi semn, atunci

$$x^{2n}+y^{2n}-x^ny^n \geq \left(x^2+y^2-xy\right)^n, \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Deşi inegalitatea (1) este una algebrică, povestea ei începe odată cu o
de geometrie propusă la *Concursul de matematică* de la *Kazanlîk, Bulga*
2003.

Fie G centrul de greutate al $\triangle ABC$ având $m(\widehat{AGB})=2m(\widehat{ACB})$. A
a) $AB^4=AC^4+BC^4-AC^2\cdot BC^2$; *b)* $m(\widehat{ACB})\geq 60°$.

Soluţie. *a)* Notăm $\alpha=m(\widehat{ACB})$. Folosind teorema cosinusului, teor
anei şi relaţii uzuale privind aria triunghiului, obţinem:

$$\cos 2\alpha=\frac{AG^2+BG^2-AB^2}{2\,AG\cdot BG}\Leftrightarrow \operatorname{ctg}2\alpha=\frac{a^2+b^2-5c^2}{9\cdot 4S_{ABG}}\Leftrightarrow$$

$$\frac{2\cos^2\alpha-1}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{a^2+b^2-5c^2}{12S_{ABC}}\Leftrightarrow\frac{a^2+b^2-5c^2}{3ab}=2\cos\alpha-\frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\frac{a^2+b^2-5c^2}{3ab}-\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}=\frac{-2ab}{a^2+b^2-c^2}\Leftrightarrow\frac{a^2+b^2+c^2}{3ab}=\frac{ab}{a^2+b^2}$$

$$\left(a^2+b^2\right)^2-c^4=3a^2b^2\Leftrightarrow c^4=a^4+b^4-a^2b^2.$$

b) Este suficient să arătăm că $\cos\alpha\leq\frac{1}{2}$, adică $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha\geq$
astfel spus $c^4\geq\left(a^2+b^2-ab\right)^2$. Apare deci firesc să dovedim inegalitatea

$$a^4+b^4-a^2b^2\geq\left(a^2+b^2-ab\right)^2,$$

care este tocmai (1) pentru $n=2$. Relaţia (2) se justifică uşor:

$$(2)\Leftrightarrow a^4+b^4-a^2b^2\geq\left(a^2+b^2\right)^2+a^2b^2-2ab\left(a^2+b^2\right)\Leftrightarrow$$

$$2ab\left(a^2+b^2\right)\geq 4a^2b^2\Leftrightarrow 2ab\left(a-b\right)^2\geq 0,$$

cu egalitate pentru $a=b$.

Un prim pas în trecerea de la (2) la (1) este dat de:

Dacă x, y sunt numere reale nenule de acelaşi semn, atunci

$$x^{2^{k+1}}+y^{2^{k+1}}-x^{2^k}y^{2^k}\geq\left(x^2+y^2-xy\right)^{2^k}, \quad \forall k\in\mathbb{N}.$$

[1] Profesor, Colegiul Naţional "Fraţii Buzeşti", Craiova

Justificarea acestui rezultat se obţine cu uşurinţă din (2), prin indu
matică. Tot inducţia ne ajută să facem trecerea la cazul general (1); pre
continuare calculele complete.

Verificarea lui (1) pentru $n = 0, 1, 2$ este imediată. Presupunem c
adevărată pentru $n = k$ şi vom demonstra că este adevărată pentru $n = k$
suficient să arătăm că

$$x^{2k+2} + y^{2k+2} - x^{k+1}y^{k+1} \geq \left(x^2 + y^2 - xy\right)\left(x^{2k} + y^{2k} - x^ky^k\right)$$

de unde va urma uşor concluzia inductivă. Inegalitatea $(*)$ devine succesi

$$x^{2k+2} + y^{2k+2} - x^{k+1}y^{k+1} \geq x^{2k+2} + x^2y^{2k} - x^{k+2}y^k + y^2x^{2k} + y^{2k}$$

$$-x^ky^{k+2} - x^{2k+1}y - xy^{2k+1} + x^{k+1}y^{k+1} \Leftrightarrow$$

$$x^{k+2}y^k - x^ky^{k+2} + x^{2k+1}y + xy^{2k+1} - x^2y^{2k} - y^2x^{2k} - 2x^{k+1}y^{k+1} \geq$$

$$xy\left(x^k - y^k\right)^2 + x^2y^k\left(x^k - y^k\right) - x^ky^2\left(x^k - y^k\right) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$xy\left(x^k - y^k\right)\left(x^k - y^k + xy^{k-1} - yx^{k-1}\right) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$xy\left(x^k - y^k\right)(x - y)\left(x^{k-1} + y^{k-1}\right) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$xy(x - y)^2\left(x^{k-1} + x^{k-2}y + \cdots + y^{k-1}\right)\left(x^{k-1} + y^{k-1}\right) \geq 0,$$

relaţie evident adevărată. Egaliate se obţine când $x = y$.

Să notăm că (1) nu este, în general, adevărată atunci când x şi y
contrare. De exemplu, pentru $n = 4$, $x = 1$, $y = -1$ obţinem contradicţia

Două generalizări naturale ale lui (1) ar putea fi inegalităţile:

$$x^{4n} - x^{3n}y^n + x^{2n}y^{2n} - x^ny^{3n} + y^{4n} \geq \left(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4\right.$$

$$x^{2n} + y^{2n} + z^{2n} - x^ny^n - y^nz^n - z^nx^n \geq \left(x^2 + y^2 + y^2 - xy - xz - y\right.$$

unde $n \in \mathbb{N}$, iar x, y, z sunt numere reale de acelaşi semn.

Nu cunoaştem până la data publicării acestui articol demonstraţii pe
(5) în cazul general, însă am justificat cele două inegalităţi în cazul $n = 2$.
calculele numai pentru (4):

$$x^8 - x^6y^2 + x^4y^4 - x^2y^6 + y^8 \geq \left(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$x^8 - x^6y^2 + x^4y^4 - x^2y^6 + y^8 \geq x^8 + x^6y^2 + x^4y^4 + x^2y^6 + y^8 - 2x^7y +$$

$$-2x^5y^3 + 2x^4y^4 - 2x^5y^3 + 2x^4y^4 - 2x^3y^5 - 2x^3y^5 + 2x^2y^6 - 2xy^7$$

$$-4x^2y^6 - 4x^6y^2 - 4x^4y^4 + 2x^7y + 4x^5y^3 + 4x^3y^5 + 2xy^7 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$2xy\left[\left(x^3 - y^3\right)^2 + 2xy^2\left(x^3 - y^3\right) - 2x^2y\left(x^3 - y^3\right)\right] \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$2xy\left(x^3 - y^3\right)(x - y)\left(x^2 + xy + y^2 - 2xy\right) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$2xy(x - y)^2\left(x^2 - xy + y^2\right)^2 \geq 0,$$

ceea ce este adevărat.

Lăsăm deschisă problema demonstrării inegalităţilor (4) şi (5).

Soluţiile problemelor propuse în nr. 1 / 20

Clasele primare

P.104. *Suma dintre predecesorul unui număr şi succesorul numărul lui este* 29. *Care este acest număr?*

(*Clasa I*) **Irina Luca, e**

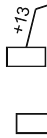
Soluţie. Suma dintre numărul căutat şi succesorul lui este $29 = 14$ -
Deducem că numărul căutat este 14.

P.105. *Alăturat se află roboţelul "MATE".*

a) *Completaţi casetele goale;*

b) *Aflaţi suma numerelor pe care le ţine în mâini;*

c) *Aflaţi diferenţa numerelor scrise în tălpile picioarelor.*



(*Clasa I*) **Andrei Stativă, elev, Iaşi**

Soluţie. *a*) Pe umeri se află numărul a astfel încât $a - 13 = 32$, de unde $a = 32 + 13 = 45$.

b) În mâna stângă are $45 - 3 = 42$, iar în dreapta are numărul cu 1 decât 45, adică 32. Suma numerelor pe care le ţine în mâini este $42 + 32$

c) La baza bustului are numărul $67 + 2 = 69$, iar pe talpa dreaptă ţin $69 + 1 = 70$. Diferenţa este $70 - 67 = 3$.

P.106. *Pentru desemnarea campioanei, echipele de hochei pe ghea dispută un număr de partide până ce una dintre ele câştigă de* 4 *ori. numărul maxim de partide care se pot juca, ştiind că nu au fost rezultate de*

(*Clasa a II-a*) **Înv. Constanţa Cristea şi Inst. Iulian Cri**

Soluţie. Numărul maxim de partide care se pot juca este 7. Într-ac posibil să se realizeze scorul $4 - 3$.

P107. *Un grup de turişti a consumat* 17 *prăjituri şi* 31 *îngheţate. turişti au consumat câte o îngheţată şi câte o prăjitură,* 5 *turişti au consu câte două îngheţate, iar* 4 *turişti nu au consumat nimic, iar restul câte produs (îngheţată sau prăjitură), să se afle câţi turişti sunt în grup.*

(*Clasa a II-a*) **Aliona Loghin, e**

Soluţie. Numărul turiştilor care au consumat câte o prăjitură este 17
Numărul turiştilor care au consumat câte o îngheţată este $31 - 7 - 5 -$
cofetărie au intrat $7 + 10 + 5 + 14 + 4 = 40$ turişti.

P108. *Prin împărţirea a două numere naturale rezultă câtul* 3 *şi restu că împărţitorul este un număr mai mic decât* 10, *aflaţi cele două numere*

(*Clasa a III-a*) **Înv. Rica Bucăt**

Soluţie. Punând condiţia $r < î$, putem avea: $7 \times 3 + 6 = 27$, 8×3
$9 \times 3 + 6 = 33$.

P.109. *Figura alăturată este formată din beţişoare.*

a) *Îndepărtează un singur beţişor pentru a obţine tot atâtea triunghiu trate;*

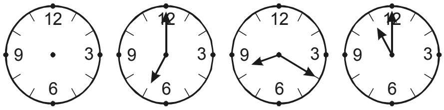
b) *Mută două beţişoare pentru a obţine de două ori mai multe dreptunghiuri decât pătrate.*

(*Clasa a III-a*) **Adina Voinescu, elevă, Iaşi** *F*

Soluţie. *a*) Îndepărtând unul din beţişoarele DE sau EG sau GI obţinem două triunghiuri şi două pătrate.

b) Mutăm beţişoarele ID şi JC astfel încât să formăm un dreptunghi de lăţime AB şi lungime BF. În acest caz vom avea un pătr dreptunghiuri.

P.110. *Ce oră indică primul ceas, ştiind că acesta respectă regula celelalte trei?*



(*Clasa a III-a*) **Veronica Corbu, e**

Soluţie. De la al doilea ceas la al treilea ceas avem o creştere de $1h$ la al treilea ceas la al patrulea ceas avem o creştere de $2h\ 40'$. Regula dublarea creşterii. Cum $1h\ 20'$ este dublul lui $40'$, primul ceas arată $6h$ 2

P.111. *Fie numărul* $N = \overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba}$.

a) *Care este cea mai mică şi cea mai mare valoare a lui* N*?*

b) *Câte valori diferite poate avea numărul* N*?*

(*Clasa a IV-a*) **Oxana Pascal, e**

Soluţie. Avem $N = 222 \cdot (a + b + c)$.

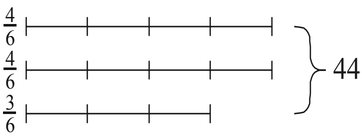
a) Cea mai mică valoare a ui N este $222 \cdot 3 = 666$.

Cea mai mare valoare a lui N este $222 \cdot 27 = 5994$.

b) Valorile sumei $a+b+c$ sunt de la 3 la 27. Numărul N poate lua $27 -$ valori diferite.

P.112. *În urma desfăşurării unui joc didactic matematic, învăţător ca recompensă 44 baloane. Câte 4 baloane au primit un număr de part reprezintă a şasea parte din totalul lor, câte două au primit a treia parte participanţilor au primit câte un balon. Aflaţi numărul participanţilor la aritmetică!).*

(*Clasa a IV-a*) **Alexandra Nistor, e**



Soluţie. Presupunem că mai adău elevi, în mod convenabil, astfel încât fiec primească câte un singur balon din cele 44 se transformă în $\frac{4}{6}$, $\frac{1}{3}$ se transformă în $\frac{4}{6}$

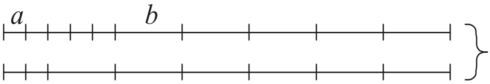
$\frac{1}{2}$ se transformă în $\frac{3}{6}$ Să figurăm noua situaţie.

O şesime din numărul elevilor participanţi la concurs primeşte $44 : 11 =$ Numărul elevilor participanţi la concurs este $4 \times 6 = 24$.

P.113. *Dan şi-a pus timbrele în clasor, câte* 10 *pe unele pagini, câte pagini şi au rămas de* 4 *ori mai multe pagini goale decât folosite. Dac câte* 5 *timbre pe fiecare pagină, toate paginile ar fi folosite. Câte pagini*

clasorul, ştiind că nu depăşeşte 60 *(soluţie aritmetică!)?*
(*Clasa a IV-a*) **Petru As**

Soluţie. Notăm cu a numărul de pagini cu câte 10 timbre şi cu
de pagini cu câte 30 timbre. Din prima informaţie deducem că număru
clasorului este $5(a+b)$. Din a doua informaţie rezultă că numărul paginilor
este $2a+6b$. Să figurăm această situaţie.


Constatăm că $b = 3$

Distingem cazurile:

$a = 1 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow 5(1+3) = 5 \cdot 4 = 20$ (pagini);

$a = 2 \Rightarrow b = 3 \cdot 2 \Rightarrow b = 6 \Rightarrow 5(2+6) = 5 \cdot 8 = 40$ (pagini);

$a = 3 \Rightarrow b = 3 \cdot 3 \Rightarrow b = 9 \Rightarrow 5(3+9) = 60$ (pagini).

Clasa a V-a

V.66. *Să se arate că, oricare ar fi cifra nenulă a, numărul $x = 21^{\overline{31a}}$
$43^{\overline{a31}}$ se divide cu* 10.

Otilia Nemeş, Ocna Mur

Soluţie. Deoarece $\overline{a13} = M4+1$, iar $\overline{a31} = M4+3$, atunci $U(2$
$U(32^{\overline{a13}}) = 2$, iar $U(43^{\overline{a31}}) = 7$. Deducem că $U(x) = 0$, deci $x \vdots 10$.

V.67. *a) Să se arate că, scăzând din suma a* 2006 *numere pare consec
numerelor situate între acestea, nu se poate obţine rezultatul* 2006^2.

b) Să se afle 2006 *numere pare consecutive astfel încât, scăzând din
suma numerelor situate între ele, să se obţină* 2005^2.

Marian Panţ

Soluţie. a) Între 2006 numere pare consecutive se află 2005 numere
suma număr impar; deducem că şi diferenţa este tot impară.

b) Fie a numărul cel mai mic; atunci

$$[a+(a+2)+\cdots+(a+4010)] - [(a+1)+(a+3)+\cdots+(a+4009)] =$$

$$\Leftrightarrow a + 2005 = 2005^2 \Leftrightarrow a = 2004 \cdot 2005.$$

V.68. *Arătaţi că nu există $n \in \mathbb{N}$ pentru care $A_n = 5^n + 89$ să fie păt*

Iulia Pleşca, e

Soluţie. Avem că $A_0 = 90$, $A_1 = 94$ nu sunt pătrate perfecte. Pen
ultimele două cifre ale lui 5^n sunt 25, deci A_n se termină în 14. Deducem
dar $A_n \not\vdots 4$, prin urmare A_n nu poate fi pătrat perfect.

V.69. *Să se rezolve în $\mathbb{N}^2$ ecuaţia $8^n + 15^m = 6 + 6^2 + \cdots + 6^{2006}$.*

Alexandru Gabriel Tudorache,

Soluţie (Cezara Maria Enea, elevă, Iaşi**).** Din 15^m - număr im
$6^2 + \cdots + 6^{2006}$ - număr par, rezultă că 8^n este număr impar, deci $n =$
$1 + 15^n \neq M3$, iar $6 + 6^2 + \cdots + 6^{2006} = M3$, contradicţie, deci ecuaţia nu

V.70. *Determinaţi $a \in \mathbb{N}$ pentru care numerele a, $a+2$, $a+6$, $a+$
$a+20$, $a+26$, $a+30$, $a+32$, $a+36$, $a+60$ sunt simultan prime.*

Lucian Tuţescu

Soluţie. Cum numerele 0, 2, 6, 12, 18, 20, 26, 30, 32, 36, 60 gener
resturile posibile la împărţirea prin 11, acelaşi lucru se întâmplă şi pent
numere date. Deducem că cel puţin unul din ele se divide cu 11 şi, cum
sunt prime, măcar unul este egal cu 11. Avem de studiat trei cazuri:

i) Dacă $a = 11$, numere sunt 11, 13, 17, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 71, to

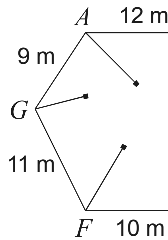
ii) Dacă $a + 2 = 11$, atunci $a = 9$ nu este prim.

iii) Dacă $a + 6 = 11$, atunci $a = 5$, însă $a + 20 = 25$ nu este prim.

Valoarea căutată a lui a este 11.

Clasa a VI-a

VI.66. *Alăturat este desenată o grădină având forma unui poligon cu 7 laturi. În fiecare vârf se află câte o poartă mobilă astfel încât, în oricare două vârfuri vecine, porţile să închidă perfect latura pe care acestea o determină. Să se afle lungimile porţilor.*



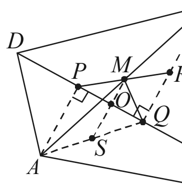
Roxana Căpăţână, elevă, Iaşi

Soluţie. Fie x lungimea porţii din A. Atunci porţile
din B, C, D, E, F, G au respectiv lungimele:$12-x$; $6-(12-x) = x-6$; 7-
$13 - x$; $6 - (13 - x) = x - 7$, $10 - (x - 7) = 17 - x$; $11 - (17 - x) = x -$
condiţia de închidere a porţilor pe latura $[AG]$: $x+(x-6) = 9 \Leftrightarrow x = 7,5$.
celor 7 porţi vor fi $7,5$m; $4,5$m; $1,5$m; $5,5$m; $0,5$m; $9,5$m, respectiv $1,5$m

VI.67. *În patrulaterul $ABCD$ construim $AP \perp BD$, $CQ \perp BD$,
şi fie M mijlocullui (AC). Dacă punctele M, P, Q sunt distincte două
demonstraţi că $\triangle MPQ$ este isoscel.*

Marius Fa

Soluţia 1 (a autorului). Fie $\{R\} = PM \cap CQ$. Avem că $\widehat{PAM} \equiv \widehat{RCM}$ (alterne interne), $\widehat{AMP} \equiv \widehat{CMR}$ (opuse la vârf) şi $AM = MC$, prin urmare $\triangle AMP \equiv \triangle CMR$ (U.L.U). Deducem că $PM = MR$ şi atunci QM este mediană în $\triangle PQR$ dreptunghic în Q, de unde rezultă că $QM = \dfrac{1}{2}PR = PM$, adică $\triangle MPQ$ este isoscel.



Soluţia 2 (Gabriel Popa). Fie S mijlocul lui $[AQ]$, iar $\{O\} = MS \cap B$
MS este linie mijlocie în $\triangle ACQ$, prin urmare $MS \parallel CQ$. Rezultă că O
cum S este mijlocul lui $[AQ]$, avem că OS este linie mijlocie în $\triangle OAP$.
este mijlocul lui $[PQ]$ şi $MO \perp PQ$, deci $\triangle MPQ$ este isoscel.

Soluţia 3 (Alexandra Cadar, elevă, Iaşi**).** Aplicăm teorema media
rema lui Pitagora:

$$PM^2 = \frac{2\left(PA^2 + PC^2\right) - AC^2}{4} = \frac{2\left(PA^2 + PQ^2 + QC^2\right) - AC^2}{4}$$

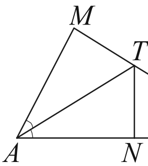
$$= \frac{2\left(AQ^2 + QC^2\right) - AC^2}{4} = MQ^2.$$

VI.68. *Fie punctele A, C, M cu $m(\widehat{AMC}) \neq 90°$ şi $AC = 2\,AM$.*

că M este mijlocul lui $[AC]$ dacă şi numai dacă $2m(\widehat{ACM}) = m(\widehat{MAC})$

Ioan Săcăleanu

Soluţie. Dacă M este mijlocul lui $[AC]$, atunci $m(\widehat{ACM}) = m(\widehat{MAC}) = 0°$, de unde $2m(\widehat{ACM}) = m(\widehat{MAC})$. Reciproc, să presupunem că $2m(\widehat{ACM}) = m(\widehat{MAC})$. Dacă A, M, C nu ar fi coliniare, fie N mijlocul lui $[AC]$ şi $[AT$ bisectoarea lui $\widehat{MAC}$, $T \in MC$. Atunci $\triangle TAC$ este isoscel şi TN este mediană, prin urmare $TN \perp AC$. Pe de



$\triangle MAT \equiv \triangle NAT$ (L.U.L.), deci $m(\widehat{AMC}) = m(\widehat{ANT}) = 90°$, ceea ce
ipotezei. Rămâne că punctele A, M, C sunt coliniare. În plus, nu putem
tul M pe prelungirile segmentului $[AC]$, altfel $m(\widehat{MAC}) = 180° \neq 0° = 2$
Deducem că M este mijlocul lui $[AC]$, ceea ce încheie rezolvarea.

VI.69. *Să se arate că pentru orice alegere a semnelor în expresia* $\pm$
$\cdots \pm 2006^2$, *rezultatul nu se divide cu* 2006.

Mihail Bencz

Soluţie. Dacă ar exista o alegere a semnelor pentru care rezultatul s
cu 2006, în mod necesar ar trebui ca $\pm 1 \pm 2 \pm \cdots \pm 2006$ şi 2006 să a
paritate (o putere are aceeaşi paritate cu baza sa). Cum suma şi diferenţa
paritate, ar rezulta că $1 + 2 + \cdots + 2006$ este număr par, deci $1003 \cdot 200$
absurd. Astfel, rămâne adevărată concluzia.

VI.70. *Determinaţi* $m, n \in \mathbb{Z}$ *pentru care* $a = \dfrac{3m+1}{2m+1} + \dfrac{n+2}{3n+5} \in \mathbb{Z}$.

Gheorghe I

Soluţie. Cele două fracţii din expresia lui a sunt ireductibile. Într-ad

$$d \mid 3m+1,\ d \mid 2m+1 \Rightarrow d \mid 3(2m+1) - 2(3m+1) \Rightarrow d \mid 1$$

şi analog pentru a doua. Cum $(3m+1, 2m+1) = 1$, $(3n+5, n+2) = 1$,

$$(3n+5)\,a = (3n+5)\,\frac{3m+1}{2m+1} + n + 2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2m+1 \mid 3n+5;$$

$$(2m+1)\,a = 3m+1 + (2m+1)\,\frac{n+2}{3n+5} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3n+5 \mid 2m+1$$

prin urmare $|3n+5| = |2m+1|$.

i) Dacă $3n+5 = 2m+1$, atunci $3n = 2(m-2)$, deci $m - 2 = 3k$
$k \in \mathbb{Z}$, iar $a = \dfrac{11k+9}{6k+5} \in \mathbb{Z}$. Obţinem că $6k+5 \mid 11k+9$, de und
$6(11k+9) - 11(6k+5)$, adică $6k+5 \mid -1$. Deducem că $6k+5 \in \{-$
$k = -1$ şi astfel $(m, n) = (-1, -2)$.

ii) Dacă $3n+5 = -2m-1$, atunci $3n = -2(m+3)$, de unde $m+3 = 3k$
$k \in \mathbb{Z}$, iar $a = \dfrac{11k-10}{6k-5} \in \mathbb{Z}$. Ca mai sus, găsim soluţiile $(m, n) \in \{(-3, 0)$

Clasa a VII-a

VII.66. *Să se rezolve în* $\mathbb{R}^4$ *ecuaţia*

$$30\sqrt{x-y+901} + 25\sqrt{y-z+626} + 20\sqrt{z-x+401} + 9\sqrt{t-x+78}$$

Ioana Olan, e

Soluţia 1. În condiţiile de existenţă a radicalilor, folosind inegalitate
avem:

$$30\sqrt{x-y+901}+25\sqrt{y-z+626}+20\sqrt{z-t+401}+9\sqrt{t-x+7}$$
$$=\sqrt{900\,(x-y+901)}+\sqrt{625\,(y-z+626)}+\sqrt{400\,(z-t+401)}+\sqrt{81\,(t-}$$
$$\leq \frac{900+x-y+901}{2}+\frac{625+y-z+626}{2}+\frac{400+z-t+401}{2}+\frac{81+t-x+78}{2}$$

Cum se atinge egalitatea, în mod necesar vom avea că $x-y+901$, $y-z+$
$z-t+401=400$ şi $t-x+78=81$. Sistemul obţinut este nedeterminat,
$\{(\alpha,\alpha+1,\alpha+2,\alpha+3)\mid \alpha\in\mathbb{R}\}$.

Soluţia 2. Egalitatea din ipoteză se poate scrie sub forma

$$\left(30-\sqrt{x-y+901}\right)^2+\left(25-\sqrt{y-z+626}\right)^2+$$
$$+\left(20-\sqrt{z-t+401}\right)^2+\left(9-\sqrt{t-x+78}\right)^2=0.$$

Fiecare termen al sumei trebuie să se anuleze etc.

VII.67. *Aflaţi $a,b\in\mathbb{N}$ dacă $a+b=18$ şi $10^{a+1}-9b+71\,\vdots\,81$.*

Andrei-Sorin Cozma,

Soluţie. Avem:

$$10^{a+1}-9b+71=\left(10^{a+1}-1\right)-9\,(b+1)+81=\underbrace{\overline{99\ldots9}}_{a+1\text{ cifre}}-9\,(b+1)$$
$$=9\Big(\underbrace{\overline{11\ldots1}}_{a+1\text{ cifre}}-b-1\Big)+81=9\Big(\underbrace{\overline{11\ldots10}}_{a\text{ de }1}-b\Big)+81,$$

deci $10^{a+1}-9b+71\,\vdots\,81\Leftrightarrow \underbrace{\overline{11\ldots10}}_{a\text{ de }1}-b\,\vdots\,9$. Restul împărţirii lui $\underbrace{\overline{11\ldots10}}_{a\text{ de }1}$

acelaşi cu restul împărţirii lui $\underbrace{1+1+\cdots+1+0}_{a\text{ de }1}$ prin 9, deci $\underbrace{\overline{11\ldots10}}_{a\text{ de }1}-b\,\vdots\,9$

Cum $a+b=18$, obţinem soluţiile $(a,b)\in\{(0,18);(9,9);(18,0)\}$.

VII.68. *Fie $\triangle ABC$ dreptunghic, cu ipotenuza de lungime a, catetele aria S. Dacă $x,y\in(0,\infty)$, să se arate că $\dfrac{a^2}{S}=\dfrac{2\left(x^2+y^2\right)}{xy}$ dacă şi num şi c sunt direct sau invers proporţionale cu x şi y.*

Veronica Plăeşu şi Dan Pl

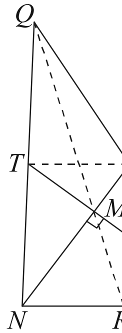
Soluţie. Avem succesiv:

$$\frac{a^2}{S}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)}{xy}\Leftrightarrow\frac{2\left(b^2+c^2\right)}{bc}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)}{xy}\Leftrightarrow xy\left(b^2+c^2\right)=bc\left(x^2\right.$$
$$\Leftrightarrow bx\,(by-cx)-cy\,(by-cx)=0\Leftrightarrow(by-cx)\,(bx-cy)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow by-cx=0 \text{ sau } bx-cy=0\Leftrightarrow\frac{b}{x}=\frac{c}{y}\text{ sau }\frac{b}{\frac{1}{x}}=\frac{c}{\frac{1}{y}}.$$

VII.69. *Fie $\triangle MNP$ cu $m(\widehat{NMP}) = 90^\circ$; se consideră punctele*
(NS), $M \in (PT)$, astfel încât $NS = 3\,MS$, $PT = 3\,MT$. Dacă $\{Q\} =$
atunci:

a) $QM = NP$; *b)* $QN^2 + QP^2 = 5\,NP^2$.

Dorel Luc



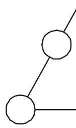
Soluţie. *a)* Fie $\{R\} = QM \cap NP$. Cum $\dfrac{MS}{MN} = \dfrac{MT}{MP} = \dfrac{1}{2}$, din reciproca teoremei lui Thales rezultă că $TS \parallel NP$. Atunci $\triangle MTS \sim \triangle MPN$, de unde $\dfrac{TS}{NP} = \dfrac{1}{2}$, iar $\triangle QTS \sim \triangle QNP$, prin urmare $\dfrac{QS}{QP} = \dfrac{QT}{QN} = \dfrac{TS}{NP} = \dfrac{1}{2}$. Astfel, NS şi PT sunt mediane în $\triangle QNP$, deci M va fi centrul de greutate al $\triangle QNP$. Rezultă că R este mijlocul lui $[NP]$, iar $QM = 2MR$. Pe de altă parte, MR este mediană în $\triangle MNP$ dreptunghic, deci $NP = 2MR$. Deducem că $QM = NP$.

b) Aplicăm în mod repetat teorema lui Pitagora:

$$QN^2 + QP^2 = (2TN)^2 + (2SP)^2 = 4\left(MT^2 + MN^2\right) + 4\left(MS^2 + MP\right.$$
$$= 4\left(MN^2 + MP^2\right) + 4\left(MT^2 + MS^2\right) = 4NP^2 + 4TS^2 =$$

VII.70. *Triunghiul alăturat este considerat fix. În câte moduri putem aşeza numerele 1, 2, 3, 4, 5, 6 în cerculeţe, astfel încât suma numerelor de pe fiecare latură a triunghiului să fie aceeaşi?*

Petru Asaftei, Iaşi



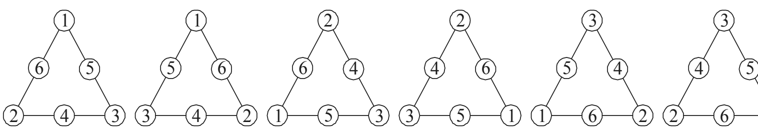
Soluţie. Fie i, j, k cele trei numere din vârfuri; cum fiecare vârf aparţine la câte două laturi, suma numerelor de pe fiecare latură va

$$S = \frac{1}{3}\left[(1 + 2 + \cdots + 6) + (i + j + k)\right] = 7 + \frac{i + j + k}{3}.$$

Acest număr trebuie să fie natural, deci $i + j + k \,\vdots\, 3$. Valoarea minimă pent
este $1 + 2 + 3 = 6$, iar cea maximă este $4 + 5 + 6 = 15$, prin urmare i
$\{6, 9, 12, 15\}$. Deducem că

$\{i, j, k\} \in \{\{1,2,3\}; \{1,2,6\}; \{1,3,5\}; \{2,3,4\}; \{1,5,6\}; \{2,4,6\}; \{3,4,5$

Odată fixată mulţimea $\{i, j, k\}$, cele trei numere pot fi permutate pe cele tr
din vârfuri în 6 moduri, iar apoi numerele din mijloacele laturilor, dacă e
bine determinate. Spre exemplu, dacă $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, avem că $S = 9$
completările:



Se constată uşor că nu avem posibilitatea completării triunghiului dacă
$\{\{1,2,6\}; \{2,3,4\}; \{1,5,6\}, \{3,4,5\}\}$. Obţinem astfel că numărul de
posibile este $4 \cdot 6 = 24$.

Clasa a VIII-a

VIII.66. *Să se demonstreze că*

$$\frac{1}{2^4+2^2+1}+\frac{1}{3^4+3^2+1}+\cdots+\frac{1}{n^4+n^2+1}<\frac{n-1}{3n}.$$

Carmen Daniela Tama

Soluţie. Are loc inegalitatea $\frac{1}{k^4+k^2+1} \le \frac{1}{3k^2}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, deoare revine la $\left(k^2-1\right)^2 \ge 0$. Egalitatea se atinge numai pentru $k=1$. Atunci

$$\frac{1}{2^4+2^2+1}+\frac{1}{3^4+3^2+1}+\cdots+\frac{1}{n^4+n^2+1}<$$

$$<\frac{1}{3\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 3^2}+\cdots+\frac{1}{3\cdot n^2}<\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\,n}\right.$$

$$=\frac{1}{3}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right]=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)=$$

Notă. Elevul **Florian Păliţă**, Petroşani, demonstrează inegalitatea pr matematică.

VIII.67. *Fie* $0<a<b<c<d<e$ *şi propoziţiile:*

$$p_1:\ b=\frac{2ac}{a+c};\quad p_2:\ c=\frac{b+d}{2};\quad p_3:\ c=\sqrt{ae};\quad p_4:\ d=\frac{2ce}{c+}$$

Să se arate că dacă oricare trei dintre propoziţii sunt adevărate, atunci este şi cea de-a patra.

Claudiu-Ştefan P

Soluţie. Considerăm întâi că p_1, p_4 sunt adevărate şi să arătăm c Avem:

$$c=\frac{b+d}{2}\Leftrightarrow 2c=\frac{2ac}{a+c}+\frac{2ce}{c+e}\Leftrightarrow 1=\frac{a}{a+c}+\frac{e}{c+e}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a\,(c+e)+e\,(a+c)=(a+c)\,(c+e)\Leftrightarrow c^2=ae\Leftrightarrow c=\sqrt{ae}$$

Demonstrăm acum că $p_1\wedge p_2\wedge p_3 \Rightarrow p_4$. Din p_3 obţinem că $\frac{a}{c}=\frac{c}{e}$, deci $\frac{a}{a+}$
Atunci, folosind p_2 şi apoi p_1, avem:

$$d=2c-b=2c-\frac{2ac}{a+c}=2c\Big(1-\frac{a}{a+c}\Big)=\frac{2c^2}{a+c}=\frac{2ae}{a+c}=\frac{2ce}{c+}$$

deci p_4 este adevărată. La fel se arată că $p_2\wedge p_3\wedge p_4 \Rightarrow p_1$.

VIII.68. *Fie* $A_n=2006^n+2005^n-1992^n-1991^n$, $n\in\mathbb{N}$. *Să se de pentru care* $A_n \vdots 28$.

Ionel Nech

Soluţie. Folosind faptul că $a^n-b^n \vdots a-b$, $\forall n\in\mathbb{N}$, deducem că 2006^n $2005^n-1991^n \vdots 7$, deci $A_n \vdots 7$. Să vedem când $A_n \vdots 4$. Avem că $A_0=0 \vdots 4$, Dacă $n\ge 2$, atunci $2006^n=(M4+2)^n=M4+2^n \vdots 4$ şi este evident c $(M4)^n \vdots 4$. Astfel, $A_n \vdots 4 \Leftrightarrow 2005^n-1991^n \vdots 4 \Leftrightarrow (M4+1)^n-(M4-$ $M4+1-(-1)^n \vdots 1-(-1)^n=0 \Leftrightarrow n$ par. În concluzie, $A_n \vdots 28$ p $\{1\}\cup\{2k \mid k\in\mathbb{N}\}$.

VIII.69. *Fie* $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$ *astfel încât* $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$. *Determin mică şi cea mai mare valoare a expresiei*

$$E(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2 + x_3 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1.$$

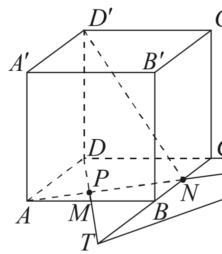
Ion Vişan şi Lucian Tuţescu

Soluţie. Expresia se scrie sub forma $E = \dfrac{(x_1+x_2+x_3+1)^2 - 2}{2}$
$E_{\min} = -1$, iar această valoare se atinge, de exemplu, pentru $x_1 = x_2 = 0$
Din inegalitatea $MA \leq MP$, avem că $\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3} \leq \sqrt{\dfrac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{3}}$
egalitate când $x_1 = x_2 = x_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Astfel, $E_{\max} = \dfrac{\left(3 \cdot 1/\sqrt{3}+1\right)^2 - 2}{2}$
iar această valoare se atinge pentru $x_1 = x_2 = x_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

VIII.70. *Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ şi fie M, N mijloacele* $[AB]$*, respectiv* $[BC]$*, iar* $\{S\} = AN \cap CD$*,* $\{T\} = DM \cap BC$*. Să se a* *unghiului format de $D'N$ şi ST.*

Gabriel P

Soluţie. Fie $\{P\} = AN \cap DM$. Din $\triangle AMD \equiv \triangle BNA$ (C.C) rezultă că $\widehat{ADP} \equiv \widehat{PAM}$. Însă $m(\widehat{PAM}) + m(\widehat{DAP}) = 90°$,deci $m(\widehat{ADP}) + m(\widehat{DAP}) = 90°$ şi atunci $m(\widehat{APD}) = 90°$, adică $AN \perp DM$. Deducem că SP şi TC sunt înălţimi în $\triangle DST$, prin urmare N va fi ortocentrul acestui triunghi, iar DN este tot înălţime: $DN \perp TS$. Din $DD' \perp (ABC)$ urmează că $DD' \perp TS$, deci $TS \perp (DD'N)$, de unde $D'N \perp ST$.



Clasa a IX-a

IX.66. *Pentru $x, y \in \mathbb{R}$, fie $a = y + xy - x$, $b = x^2 + x - xy$.*

a) Dacă $a, b \in (-\infty, 0)$, să se compare numerele x şi y.

b) Arătaţi că există o infinitate de numere raţionale x, y pentru care a, b

Ionuţ Onofrei, ele

Soluţie. *a*) Din $a + b < 0$, obţinem că $x^2 + y < 0$, deci $y < -x^2$
presupunem prin absurd că $x \geq 0$; din $b = x(x+1-y) < 0$ rezultă că $x +$
deci $x < -1 + y$. Dar $-1 + y < 0$ şi am ajuns la o contradicţie. Cum
deducem că $xy > 0$, prin urmare $y - x = a - xy < 0$. În concluzie, $y < x$.

b) De exemplu, putem considera $x = -\dfrac{1}{n}$, $y = -\dfrac{n+1}{n}$, cu $n \in$
$a = \dfrac{-n^2+n+1}{n^2}$ şi $b = -\dfrac{2}{n}$ sunt ambele negative.

IX.67. *Fie $n \geq 2$ şi $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$ astfel încât*

$$(a_2a_3\cdots a_n)^2 + (a_1a_3a_4\cdots a_n)^2 + \cdots + (a_1a_2\cdots a_{n-1})^2 = 1.$$

Să se arate că $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_2a_3\cdots a_n + a_1a_3\cdots a_n + \cdots + a_1a_2\cdot\cdot$

Adrian Zahariuc, ele

Soluţie. În dezvoltarea produsului $\prod_{i=1}^{n}\left(a_i + \prod_{j\neq i} a_j\right)$ apar toţi terme

$\Big(\prod_{j\neq i} a_j\Big)^2$, $i=\overline{1,n}$, deci $\prod_{i=1}^{n}\Big(a_i+\prod_{j\neq i} a_j\Big) \geq \sum_{i=1}^{n}\Big(\prod_{j\neq i} a_j\Big)^2 = 1$. Din inegalit

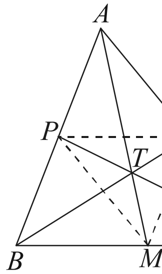
ilor avem că $n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\Big(a_i+\prod_{j\neq i} a_j\Big)} \leq \sum_{i=1}^{n}\Big(a_i+\prod_{j\neq i} a_j\Big)$, de unde concluzia

Egalitatea se atinge când $n-1$ numere sunt egale cu 1, iar cel rămas este

IX.68. *În $\triangle ABC$ se consideră cevienele $[AM]$, $[BN]$, $[CP]$ concur Să se arate că $\frac{TA}{TM}=\frac{TB}{TN}=\frac{TC}{TP}$ dacă şi numai dacă T este centrul de $\triangle ABC$.*

Ovidiu Pop, S

Soluţie. Cum $\frac{TB}{TN}=\frac{TC}{TP}$ şi $\widehat{BTC}\equiv\widehat{NTP}$ (opuse la vârf), rezultă că $\triangle BTC\sim\triangle NTP$, de unde $\widehat{TBC}\equiv\widehat{TNP}$, prin urmare $PN\parallel BC$. Analog se arată că $MN\parallel AB$, $PM\parallel AC$. Fie $k=\frac{AP}{AB}$; atunci $\frac{PB}{AB}=1-k$, $\frac{AN}{AC}=\frac{AP}{AB}=k$, $\frac{BM}{BC}=\frac{AN}{AC}=k$, $\frac{BM}{BC}=\frac{BP}{AB}=1-k$. Din ultimele două relaţii obţinem $k=\frac{1}{2}$, deci P este mijlocul lui $[AB]$, apoi M, N sunt mijloace pentru $[BC]$, respectiv $[AC]$. În T este centrul de greutate al $\triangle ABC$. Reciproca este imediată.



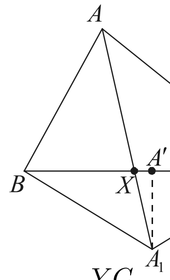
IX.69. *Fie $\triangle ABC$ nedreptunghic. Paralela prin B la AC şi simetr AC în raport cu BC se intersectează în A_1; analog se obţin punctele B_1 ş AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente, să se arate că $\triangle ABC$ este echilateral.*

Temistocle Bî

Soluţie. Pentru început, fie $\triangle ABC$ ascuţitunghic. Se vede uşor că $\triangle BCA_1$ este isoscel, deci A_1 se află pe mediatoarea lui $[BC]$. Fie $\{X\}=AA_1\cap BC$; evident că $X\in(BC)$. Din $\triangle BXA_1\sim\triangle CXA$ obţinem

$$\frac{XB}{XC}=\frac{BA_1}{CA}\Rightarrow\frac{XB}{XC}=\frac{a}{2b\cos C}$$

(căci în $\triangle A'BA_1$ dreptunghic avem $\cos C=\frac{BA'}{BA_1}=\frac{a}{2BA_1}$). Analog caracterizăm $Y\in(CA)$ şi $Z\in(AB)$ prin $\frac{YC}{YA}=$ $\frac{ZA}{ZB}=\frac{c}{2a\cos B}$. Concurenţa dreptelor AA_1, BB_1, CC_1 conduce la



$$\frac{a}{2b\cos C}\cdot\frac{b}{2c\cos A}\cdot\frac{c}{2a\cos B}=1\Leftrightarrow\cos A\cos B\cos C=\frac{1}{8}.$$

În binecunoscuta inegalitate $\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C\leq\frac{1}{8}$, egalitatea se ati $A=B=C$, deci $\triangle ABC$ este echilateral.

Dacă $\triangle ABC$ ar fi obtuzunghic, două dintre punctele X, Y, Z sunt laturi, iar al treilea pe prelungirea laturii corespunzătoare. În acest ca AA_1, BB_1, CC_1 nu vor putea fi concurente.

IX.70. *Să se arate că* $\operatorname{tg} 15^\circ + \operatorname{tg} 25^\circ + \operatorname{tg} 35^\circ + \operatorname{tg} 85^\circ > 4$.

D. M. Bătineţu-Giurgiu, I

Notă. Cu ajutorul unui tabel care dă valorile tangentei, se constată c
11, 43, valoare deja mai mare decât 4.

Clasa a X-a

X.66. *Notăm cu $\mathcal{D}$ mulţimea punctelor $P(x,y)$ din planul xOy situa riorul sau pe laturile $\triangle ABC$. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 \neq 0$; definim funcţia $f(P) = ax + by + c$. Să se arate că pentru orice $P \in \mathcal{D}$, avem*

$$\min\{f(A), f(B), f(C)\} \leq f(P) \leq \max\{f(A), f(B), f(C)\}$$

Adrian Cordune

Soluţie. Fie $M(\alpha_1, \beta_1)$, $N(\alpha_1, \beta_1)$; arătăm că valorile minimă şi max $f(P)$, când P parcurge $[MN]$, se ating în capetele segmentului. Dacă P există $t \in [0,1]$ astfel încât $x_P = \alpha_1 + t(\alpha_2 - \alpha_1)$, $y_P = \beta_1 + t(\beta_2 - \beta_1)$.

$$f(P) = (a\alpha_1 + b\beta_1 + c) + t[a(\alpha_2 - \alpha_1) + b(\beta_2 - \beta_1)] = f(M) + t[f(N) -$$

Dacă $f(N) - f(M) > 0$, atunci $f(M) \leq f(P) \leq f(N)$, $\forall P \in [M$ $f(N) - f(M) < 0$, atunci $f(N) \leq f(P) \leq f(M)$, $\forall P \in [MN]$. În sf $f(N) - f(M) = 0$, atunci $f(P) = f(M)$, $\forall P \in [MN]$.

Revenim la problema iniţială. Fără a micşora generalitatea, presu $f(A) \leq f(B) \leq f(C)$. Fie $P \in \mathcal{D}$ oarecare, iar $\{Q\} = AP \cap BC$. $f(B) \leq f(Q) \leq f(C)$, avem $f(A) \leq f(P) \leq f(C)$ şi demonstraţia este înc

X.67. *Fie $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\right\}$. Să se determine funcţiile $f : \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] \to (0, \infty)$ pentru care $f(x+y) = f(x) f(y)$, $\forall x, y \in Q\left[\sqrt{2}\right]$.*

Dan-Ştefan Marinescu şi Viorel Cornea, H

Soluţie. Fie $g : \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \lg f(x)$; atunci $g(x+y) = g($ $\forall x, y \in \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$. Fie $k = g(1)$; cu metoda obişnuită de rezolvare a funcţionale de tip Cauchy, se arată că $g(x) = kx$, $\forall x \in \mathbb{Q}$ şi $g\left(x\sqrt{2}\right) =$ $\forall x \in \mathbb{Q}$. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ arbitrar, avem:

$$\left[n\sqrt{2}\right] \leq n\sqrt{2} < \left[n\sqrt{2}\right] + 1 \Rightarrow g\left(\left[n\sqrt{2}\right]\right) \leq n\, g\left(\sqrt{2}\right) \leq g\left(\left[n\sqrt{2}\right] +\right.$$

$$\Rightarrow k\left[n\sqrt{2}\right] \leq n\, g\left(\sqrt{2}\right) \leq \left(\left[n\sqrt{2}\right] + 1\right) k \Rightarrow \frac{k}{n}\left[n\sqrt{2}\right] \leq g\left(\sqrt{2}\right) \leq \frac{\left[n\sqrt{2}\right.}{n}$$

deci $\left|g\left(\sqrt{2}\right) - k\sqrt{2}\right| \leq \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$. Astfel, rezultă că $g\left(\sqrt{2}\right) = k \cdot \sqrt{2}$, de un

$$g\left(m + n\sqrt{2}\right) = g(m) + g\left(n\sqrt{2}\right) = km + kn\sqrt{2} = k\left(m + n\sqrt{2}\right),$$

adică $g(x) = kx$, $\forall x \in \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$, unde $k \in (0, +\infty)$. Notând $a = 10^k \geq 1$, c $f(x) = 10^{g(x)} = \left(10^k\right)^x = a^x$, cu $a \geq 1$. Pentru orice $a \in [1, +\infty)$, funcţia verifică ipoteza problemei, deci funcţiile căutate sunt cele exponenţiale cu

X.68. *Pe cercul trigonometric se consideră punctele A, B, C de afix unde $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}$. Fie $M(z)$ un punct al cercului situat pe arcul conţine A. Să se arate că* $\left|z^2 + z + 1\right| = -\dfrac{z^2 + z + 1}{z}$.

Marian Tetiv

Soluţie. Fie $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$, cu $\alpha \in [2\pi/3, 4\pi/3]$. Avem:

$$\left|z^2+z+1\right|^2 = (\cos 2\alpha + \cos\alpha + 1)^2 + (\sin 2\alpha + \sin\alpha)^2 =$$
$$= \left(\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha\right) + \left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) + 1 +$$
$$+2\left(\cos 2\alpha\cos\alpha + \sin 2\alpha\sin\alpha\right) + 2\cos 2\alpha + 2\cos\alpha =$$
$$= 3 + 2\cos\alpha + 2\left(2\cos^2\alpha - 1\right) + 2\cos\alpha = 4\cos^2\alpha + 4\cos\alpha + 1 = (2\cos$$

Cum $\alpha \in [2\pi/3, 4\pi/3]$, atunci $2\cos\alpha + 1 \le 0$, deci $\left|z^2+z+1\right| = |2\cos$
$-2\cos\alpha - 1$. Evident că $\dfrac{z^2+z+1}{z} = 2\cos\alpha + 1$, de unde concluzia.

X.69. *Dacă $a, b, c > 1$, să se demonstreze inegalitatea*

$$a^{\sqrt[3]{\log_a b} + \sqrt[3]{\log_a c}} + b^{\sqrt[3]{\log_b a} + \sqrt[3]{\log_b c}} + c^{\sqrt[3]{\log_c a} + \sqrt[3]{\log_c b}} \le \frac{(a+b+c}{3}$$

Titu Zvonaru, C

Soluţie. Deoarece $a, b, c > 1$, atunci $\log_a b > 0$, $\log_a c > 0$ etc. Folosi
tatea mediilor, obţinem:

$$\sqrt[3]{\log_a b} + \sqrt[3]{\log_a c} = \sqrt[3]{1\cdot 1\cdot \log_a b} + \sqrt[3]{1\cdot 1\cdot \log_a c} \le$$
$$\le \frac{1}{3}\left(1+1+\log_a b\right) + \frac{1}{3}\left(1+1+\log_a c\right) = \frac{1}{3}\left(\log_a a^2 b + \log_a a^2 c\right) = \log$$

Cum $a > 1$, $b > 1$, $c > 1$, avem:

$$a^{\sqrt[3]{\log_a b} + \sqrt[3]{\log_a c}} + b^{\sqrt[3]{\log_b a} + \sqrt[3]{\log_b c}} + c^{\sqrt[3]{\log_c a} + \sqrt[3]{\log_c b}} \le$$
$$\le a^{\log_a a\sqrt[3]{abc}} + b^{\log_b b\sqrt[3]{abc}} + c^{\log_c c\sqrt[3]{abc}} =$$
$$= a\sqrt[3]{abc} + b\sqrt[3]{abc} + c\sqrt[3]{abc} = (a+b+c)\cdot\sqrt[3]{abc} \le \frac{(a+b+c)^2}{3}.$$

Egalitatea se obţine pentru $a = b = c$.

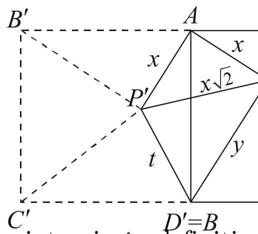
X.70. *Fie pătratul $ABCD$. Să se determine mulţimea*

$$\Delta = \left\{P \in \operatorname{Int} ABCD \mid PA^2, 2PB\cdot PD, PC^2 \text{ sunt laturile unui triun}\right.$$

Cătălin Cali

Soluţie. Notăm $PA = x$, $PB = y$, $PC = z$, $PD = t$; atunci

$$\triangle = \left\{P \in \operatorname{Int} ABCD \mid x^2 + 2yt > z^2,\right.$$
$$\left. x^2 + z^2 > 2yt,\ z^2 + 2yt > x^2\right\}.$$



Aplicând teorema medianei în $\triangle PAC$ şi $\triangle PBD$, cum $AC = BD$, obţinem că $x^2+z^2 = y^2+t^2$. Astfel, $x^2+z^2 > 2yt \Leftrightarrow y^2+t^2 > 2yt \Leftrightarrow (y-t)^2 > 0$ $\Leftrightarrow y \ne t \Leftrightarrow P \notin AC$. Celelalte două inegalităţi care intervin în definiţia
satisfăcute de către orice punct $P \in \operatorname{Int} ABCD$, prin urmare $\Delta = \operatorname{Int} AB$

Să demonstrăm că $x^2 + 2yt > x^2$, $\forall P \in \operatorname{Int} ABCD$, pentru prima
procedându-se analog. Aplicăm pătratului o rotaţie de unghi $\dfrac{\pi}{2}$ în juru

conservă astfel lungimile segmentelor x, y, z, t,deci $\triangle APP^{'}$ este dreptung
cu $PP^{'} = x\sqrt{2}$. Din $\triangle PP^{'}B$, obţinem:

$$y + t > x\sqrt{2} \Rightarrow y^2 + t^2 + 2yt > 2x^2 \Rightarrow x^2 + z^2 + 2yt > 2x^2 \Rightarrow z^2 + 2y$$

Clasa a XI-a

XI.66. *Fie x_n, $n \in \mathbb{N}^*$, cel mai mic număr natural cu proprietatea că e* $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}_{(10)}$ *cu toate cifrele nenule, astfel încât* $M = (n+1)\sqrt[n+1]{a_n a_{\ldots}}$ $9x_n$. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{10^n}$.

Valeriu Braşovean

Soluţie. $x_n = \dfrac{1}{9}\left[M - (n+1)\sqrt[n+1]{a_n a_{n-i} \cdots a_0}\right] \geq \dfrac{1}{9}[M - (a_n + a_{n-1} +$
cu egalitate pentru $a_n = a_{n-1} = a_{n-1} = \cdots = a_0 = k$. Condiţia de mi
impusă lui x_n conduce la

$$x_n = \frac{1}{9}\left[\underbrace{\overline{kk\ldots k}}_{n+1 \text{ cifre}} - \underbrace{k + k + \cdots + k}_{n+1 \text{ termeni}}\right] = \frac{k}{9}\left[\overline{11\ldots 1} - (n+1)\right].$$

Din aceeaşi condiţie de minimalitate deducem $k = 1$, deci $x_n = \dfrac{10^{n+}}{}$

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{10^n} = \dfrac{10}{81}$.

XI.67. *Fie şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *definit prin* $x_1 \in \left(-\dfrac{\pi}{4}, 0\right)$, $x_{n+1} = 2x_n - \operatorname{tg} x$
Să se studieze existenţa limitelor $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{-x_n}$.

Dan Popescu

Soluţie. Dacă presupunem că $x_n \in \left(-\dfrac{\pi}{4}, 0\right)$, atunci $x_{n+1} = f(x_n)$
$\left[-\dfrac{\pi}{4}, 0\right] \to \mathbb{R}$, $f(t) = 2t - \operatorname{tg} t$ este funcţie strict crescătoare. Obţinem că
$-\dfrac{\pi}{2} + 1 < x_{n+1} = f(x_n) < f(0) = 0$ şi deoarece $\left(-\dfrac{\pi}{2} + 1, 0\right) \subset \left(-\dfrac{\pi}{4}, 0\right)$,
şirul $(x_n)_{n>1}$ este corect definit, strict crescător şi mărginit. Pentru $x \in$
avem că $\operatorname{tg} x = x \Leftrightarrow x = 0$; folosind acest fapt, prin trecere la limită în
recurenţă rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Apoi, $(-x_n)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln(-x_n)}{n}}$, $\forall n \geq 1$, iar $\ln(-x_{n+1}) - \ln(-x_n) =$
$\ln \dfrac{2\operatorname{tg} x_n - x_n}{x_n}$, $\forall n \geq 1$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2\operatorname{tg} x_n - x_n}{x_n} = 1$, cu criteriul lui Stolz
deduce că $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{-x_n} = e^0 = 1$.

XI.68. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ interval, o funcţie de două ori de*
$f''(x) \geq f'(x)$, $\forall x \in I$. *Să se arate că* $f(x) - f(a) \geq (e^{x-a} - 1) f'(a)$
Pentru $f(x) = e^{\alpha x}$, $\alpha \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$, *să se deducă inegalitatea lui*

Dumitru Mihalach

Soluţie. Considerăm funcţia $g : I \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - f(a) - (e^{x-a}$
Avem că $g(a) = 0$, iar $g'(x) = e^x \left(\dfrac{f'(x)}{e^x} - \dfrac{f'(a)}{e^a}\right)$. Funcţia $h : I \to \mathbb{R}$, $h(x$
are derivata pozitivă pe I: $h'(x) = \dfrac{f''(x) \cdot e^x - f'(x) \cdot e^x}{e^{2x}} = \dfrac{f''x - f}{e^x}$

$\forall x \in I$, deci h este monoton crescătoare. Deducem că $g'(x) \geq 0$ pentr
$g'(x) \leq 0$ pentru $x < a$, adică a este punct de minim pentru g. Cum
obţinem că $g(x) \geq 0$, $\forall x \in I$, de unde inegalitatea dorită.

Pentru $f(x) = e^{\alpha x}$, condiţia $f''(x) \geq f'(x)$ revine la $\alpha^2 \geq \alpha$, deci este
pentru $\alpha \in (\infty, 0] \cup [1, \infty)$. Deci are loc concluzia problemei, ce se mai scrie

$$e^{x}\left(e^{(\alpha-1)x} - \alpha e^{(\alpha-1)a}\right) \geq (1-\alpha)\, e^{\alpha a}.$$

Trecem $x \to \ln x$, $a \to \ln a$ şi obţinem

$$x\left(x^{\alpha-1} - \alpha a^{\alpha-1}\right) \geq (1-\alpha)\, a^{\alpha} \Leftrightarrow x^{\alpha} > (1-\alpha)\, a^{\alpha} + \alpha x a^{\alpha-1},$$

pentru orice $x, a > 0$ şi orice $\alpha \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$. Pentru $a = 1$,
$x^{\alpha} \geq 1 + \alpha(x-1)$, $\forall \alpha \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$, ceea ce constituie o uşoară îm
a inegalităţii lui Bernoulli.

XI.69. *Fie* $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *astfel încât* $\det(AX + B) \geq 0$, $\forall X \in \mathcal{M}_3$
arate că există $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *pentru care* $A = BC$.

Gheorghe I

Soluţie. Pentru $X = O_3$, obţinem că $\det B \geq 0$. Dacă $\det B \neq$
există B^{-1}; fie $D = B^{-1}A$. Avem că $\det B\,(DX + I_3) \geq 0$, $\forall X \in \mathcal{M}_3$
$\det B > 0$, deducem că $\det(DX + I_3) \geq 0$, $\forall X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Dacă $D = \begin{pmatrix} a \\ \alpha \\ u \end{pmatrix}$
pentru $X = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ obţinem că $DX + I_3 = \begin{pmatrix} ax+1 & 0 & 0 \\ \alpha x & 1 & 0 \\ ux & 0 & 1 \end{pmatrix}$, cu $x \in$
Atunci $\det(DX + I_3) = ax + 1 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, de unde $a = 0$. Conside
$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$, găsim că $bx + 1 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci $b = 0$ etc.
$D = O_3$, adică $B^{-1}A = O_3$, de unde $A = O_3$. Luand $C = O_3$, are loc con

Dacă $\det B = 0$, să presupunem prin absurd că există X_0 cu $\det(AX$
Cum $\det(AX + (AX_0 + B)) = \det(A(X + X_0) + B) \geq 0$, $\forall X \in \mathcal{M}_3$ (
cele demonstrate anterior rezultă că $A = O_3$ şi atunci $\det B > 0$, fals.
$\det(AX + B) = 0$, $\forall X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Pe de altă parte, din $\det B = 0$ re
inversabile astfel încât $B = PSQ$, unde S este una dintre matricele
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sau $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Obţinem

$$\det(AX + PSQ) = 0, \forall X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \det P\left(P^{-1}AX + S\right)Q = 0, \forall X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \det(A_1 X + S) = 0, \forall X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \text{ unde } A_1 = P^{-1}A.$$

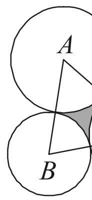
În cazul în care $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, luând $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, apoi $X =$

găsim că $A_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = SM$, unde $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Atunci A
$PSM = PSQQ^{-1}M = BC$, cu $C = Q^{-1}M$. La fel se procedează
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sau $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

XI.70. *Fie a, b, c laturile unui triunghi ale cărui unghiuri au măsurile A, B, C şi care are raza cercului înscris r. Să se arate că distanţa de $M(A,B,C)$ la planul $\mathcal{P} : ax + by + cz + r = 0$ este mai mare decât* $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$

Sorin Puşpană

Soluţie. Să arătăm întâi că în $\triangle ABC$ are loc inegalitatea



$$S > \frac{A}{2}(p-a)^2 + \frac{B}{2}(p-b)^2 + \frac{C}{2}. \qquad (*)$$

Pentru demonstraţie, observăm că există trei cercuri tangente două câte două, cu centrele în vârfurile triunghiului; razele lor sunt $p-a$, $p-b$, respectiv $p-c$. Evaluând aria zonei haşurate, obţinem imediat $(*)$.

Cum $A + B + C = \pi$ şi $S = rp$, relaţia $(*)$ se scrie echivalent

$$\pi p^2 - 2(aA + bB + cC + r)p + \left(a^2A + b^2B + c^2C\right) < 0.$$

Dacă $\Delta \leq 0$, expresia de gradul II în p din stânga păstrează semn constant
este $+$. Rezultă că $\Delta > 0$, deci

$$aA + bB + cC + r > \sqrt{\pi\left(a^2A + b^2B + c^2C\right)} \Leftrightarrow$$

$$\left|\frac{aA + bB + cC + r}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right| > \sqrt{\pi \cdot \frac{a^2A + b^2B + c^2C}{a^2+b^2+c^2}} \geq \frac{\pi\sqrt{3}}{3},$$

la ultima inegalitate folosind inegalitatea lui Cebîşev.

Clasa a XII-a

XII.66. *Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $0 \leq a < b$ şi fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie d derivabilă pe $[a,b]$, cu f'' continuă. Dacă*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{a^2}{2}f'(a) - \frac{b^2}{2}f'(b) + bf(b) - af(a),$$

să se arate că există $\theta \in (a,b)$ astfel încât $f''(\theta) = 0$.

Mihai Ha

Soluţie. Avem:

$$\int_a^b f(x)\,dx = xf(x)\Big|_a^b - \int_a^b xf'(x)\,dx =$$

$$= bf(b) - af(a) - \left[\frac{x^2}{2}f'(x)\Big|_a^b - \int_a^b \frac{x^2}{2}f''(x)\,dx\right] =$$

$$= bf(b) - af(a) + \frac{a^2}{2}f'(a) - \frac{b^2}{2}f'(b) + \frac{1}{2}\int_a^b x^2 f''(x)$$

Din ipoteză rezultă că $\int_a^b x^2 f''(x)\,dx = 0$. Conform teoremei de medie, (a,b) astfel încat $\int_a^b x^2 f''(x)\,dx = \theta^2 f''(\theta)(b-a)$ şi cum $\theta \neq 0$, atunci f'

XII.67. *Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea că există $L \geq 0$ $|f(x)-f(y)| \leq L|x-y|$, $\forall x,y \in [0,1]$. Să se arate că pentru orice pri lui f şi pentru orice $x_1, x_2, \ldots x_n \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, are loc*

$$\left|F\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) - \frac{F(x_1)+F(x_2)+\cdots+F(x_n)}{n}\right| \leq \frac{L}{2n^2}\sum_{1\leq i<j\leq r}$$

Dan-Ştefan Marinescu, H

Soluţie. Cum f este lipschitziană, ea este continuă şi în consecinţă adr tive. Fie $x, y \in [0,1]$, $x > y$; atunci $-L(x-y) \leq f(x) - f(y) \leq L(x$ funcţia $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - Lx$ este descrescătoare, iar funcţia $h:$ $h(x) = f(x) + Lx$ este crescătoare. Deducem că funcţia $G:[0,1]\to\mathbb{I}$ $F(x) - \frac{L}{2}x^2$ este concavă, iar $H:[0,1]\to\mathbb{R}$, $H(x) = F(x) + \frac{L}{2}x^2$ est Aplicând inegalitatea lui Jensen, obţinem:

$$F\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) - \frac{L}{2}\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)^2 \geq \frac{F(x_1)+\cdots+F(x_n)}{n} - \frac{L}{2}\frac{x_1^2+}{}$$

$$F\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) + \frac{L}{2}\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)^2 \leq \frac{F(x_1)+\cdots+F(x_n)}{n} + \frac{L}{2}\frac{x_1^2+}{}$$

Folosind aceste relaţii şi identitatea evidentă

$$\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n} - \left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{1\leq i<j\leq n}(x_i - x_j)^2,$$

obţinem concluzia.

XII.68. *Fie $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = e^{P(x)}$, $g(x) = e^{Q(x)}$, unde P, Q sunt de grad $m \geq 1$, având coeficienţii dominanţi a, respectiv b, $a, b \in (0,\infty)$.*

a) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(n)\int_0^n g(x)\,dx\right) / \left(g(n)\int_0^n f(x)\,dx\right)$.

b) Să se studieze buna definire a şirurilor $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$, unde $\frac{1}{n}\int_0^n f(x)\,dx$, $g(b_n) = \frac{1}{n}\int_0^n g(x)\,dx$ şi apoi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$.

Marius Ap

Soluţie. *a*) Evident că f şi g sunt strict crescătoare. În ipoteza ne $a \geq b$, folosind regula lui l'Hospital pentru nedeterminări de tipul $\frac{\infty}{\infty}$, obţ

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)\int_0^x g(t)\,dt}{g(x)\int_0^x f(t)\,dt} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{P(x)-Q(x)}\int_0^x e^{Q(t)}dt}{\int_0^x e^{P(t)}dt} =$$

$$= 1 + \lim_{x\to\infty}\frac{[P'(x)-Q'(x)]\int_0^x e^{Q(t)}dt}{e^{Q(x)}} = 1 + \lim_{x\to\infty}\frac{P'(x)-Q'(x)}{x^{m-1}}\cdot\frac{x^{m-1}\int_0^x}{e^{Q}}$$

$$= 1 + m(a-b)\lim_{x\to\infty}\frac{e^{Q(x)}}{(1-m)x^{-m}e^{Q(x)} + x^{1-m}Q'(x)e^{Q(x)}} =$$

$$= 1 + m(a-b)\frac{1}{mb} = \frac{a}{b}.$$

b) Deoarece f şi g sunt strict monotone, din teorema de medie re

tenţa şi unicitatea funcţiilor ξ şi η definite prin $f(\xi(x)) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$,

$\frac{1}{x}\int_0^x g(t)\,dt$, deci $\xi(x) = f^{-1}\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)$, $\eta(x) = g^{-1}\left(\frac{1}{x}\int_0^x g(t)\right.$

teorema de derivare a inversei, funcţiile ξ şi η sunt derivabile, iar li

$\lim\limits_{x\to\infty} \eta(x) = +\infty$. Avem:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\xi(x)}{\eta(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\xi'(x)}{\eta'(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{g'(\eta(x))}{f'(\xi(x))}\cdot\frac{\frac{f(x)}{x}-\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)\,dt}{\frac{g(x)}{x}-\frac{1}{x^2}\int_0^x g(t)\,dt} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{Q'(\eta(x))\,g(\eta(x))}{P'(\xi(x))\,f(\xi(x))}\cdot\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{1-\frac{1}{f(x)}\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,d\right.}{1-\frac{1}{g(x)}\left(\frac{1}{x}\int_0^x g(t)\,d\right.}$$

$$= \frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\eta(x)}{\xi(x)}\right)^{m-1}\frac{f(x)\int_0^x g(t)\,dt}{g(x)\int_0^x f(t)\,dt} = \frac{b}{a}\frac{a}{b}\left[\lim_{x\to\infty}\frac{\eta(x)}{\xi(x)}\right]$$

de unde $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\xi(x)}{\eta(x)} = 1$. Am folosit pe parcurs faptul că

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt}{f(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{xf(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{f(x)+xP'(x)\,f(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{}{1+}$$

XII.69. *Fie $f\in\mathbb{R}[X]$ polinom reciproc de grad $4n+2$, $n\in\mathbb{N}^*$, având distincte, complexe şi nereale. Să se arate că f are cel puţin o rădăcină d*

Cătălin Ţigăeru

Soluţie. Cum f are coeficienţi reali şi este reciproc, dacă $a\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ est a lui f cu modulul diferit de 1, atunci a, $\frac{1}{a}$, $\overline{a}$, $\frac{1}{\overline{a}}$ sunt patru rădăcini di module diferite de 1, ale lui f. Cum polinomul are $4n+2$ rădăcini, con imediată.

XII.70. *Fie G un grup de ordin $n\geq 4$ cu proprietatea că există $m\in\mathbb{N}$, 1 astfel încât G conţine exact C_{n-1}^{m-1} subgrupuri de ordin m. Arătaţi că G e*

Marius Tărnăuc

Soluţie. Considerăm submulţimile lui G care conţin elementul neutru şi încă $m-1$ elemente din $G\setminus\{e\}$. Numărul acestor submulţimi este C_{n-1}^{m-1} aceste submulţimi sunt subgrupuri ale lui G. Dacă $m>2$, alegem $x,y\in$ $x\neq y$. Cum $n-3\geq m-2\geq 1$, putem alege $m-2$ elemente din $G\setminus\{e,x,y\}$, $a_1,a_2,\ldots,a_{m-2}$. Notăm $H_1=\{e,x,a_1,\ldots,a_{m-2}\}$, $H_2=\{e,y,a_1,\ldots,a_m$ H_1 şi H_2 sunt subgrupuri ale lui G, $xa_1\in H_1$ (deoarece H_1 subgrup), xa_1 $x=a_1^{-1}\in H_2$), $xa_1\neq x$ (în caz contrar $a_1=e$) şi $xa_1\neq a_i$, $i=\overline{1,m}$ $x=a_ia_1^{-1}\in H_2$). Contradicţia la care am ajuns arată că $m=2$ şi $a^2=$ deci G este grup abelian.

Soluţiile problemelor pentru pregătirea concur
din nr. 1 / 2006

A. Nivel gimnazial

G96. *Fie* $a = x^{12m} + x^{12n}$, *unde* $m, n \in \mathbb{N}^*$. *Să se arate că num*
divizibil cu 13, *dacă şi numai dacă* x *este divizibil cu* 13.

Artur Bălăucă,

Soluţie. Dacă 13 divide x atunci 13 divide $x^{12m} + x^{12n} = a$. Recipro
că 13 divide a. Presupunem că $n \leq m$, adică $m - n = p$, $p \in \mathbb{N}$. Dacă 1
x, din faptul că 13 divide $a = x^{12m} + x^{12n} = x^{12n}\left(x^{12p} + 1\right)$ rezultă c
numărul natural $x^{12p} + 1$. Conform teoremei lui Fermat, orice $x \in \mathbb{N}^*$
divide cu 13 are proprietatea că x^{12} dă restul 1 la împărţirea cu 13 şi atu
dă la împărţirea cu 13 restul 2, ceea ce contrazice faptul că 13 divide a.
divide cu 13.

G97. *Determinaţi* $a, b \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, $a \neq 0$, *astfel încât num*
$\overline{a\underbrace{bb\ldots b}_{n \text{ ori}}}$, $n \geq 2$, *să fie pătrat perfect.*

Gheorghe I

Soluţie. Dacă $b = 0$, atunci A este pătrat perfect dacă şi numai dacă a
iar n este par. Fie acum $b \neq 0$; cum b este ultima cifră a unui pătrat pe
că $b \in \{1, 4, 5, 6, 9\}$. Pentru $b \in \{1, 9\}$, rezultă că $A = \mathcal{M}4 + 3$, care nu
perfect. Dacă $b = 5$, atunci $A = \overline{\ldots 55} = \mathcal{M}25 + 5$, care iarăşi nu este pătr
Când $b = 6$, obţinem situaţia nefavorabilă $A = \mathcal{M}4 + 2$.

Rămâne de studiat cazul $b = 4$. Avem:

$$A = \overline{a44\ldots 4} = a \cdot 10^n + 4 \cdot \overline{11\ldots 1} = 4t^2, \text{ cu } t^2 = a \cdot 10^{n-2} \cdot 25 + \overline{11}$$

Pentru $n \geq 3$, numărul t^2 este impar, deci $t = 2k + 1$; deducem că $a \cdot 1$
$\overline{\underbrace{11\ldots 1}_{n-1 \text{ de } 1}0} = 4k(k+1)$. Nu putem avea $n \geq 4$, pentru că ar rezulta că $\overline{11}$
multiplu de 4. Dacă $n = 3$, atunci

$$A = \overline{a444} \in \{32^2, 38^2, 42^2, 48^2, 52^2, 58^2, 62^2, 68^2, 72^2, 78^2, 82^2, 88^2, 92^2$$

După calcule, reţinem $A = 38^2 = 1444$. În sfârşit, pentru $n = 2$, avem

$$A = \overline{a44} \in \left\{12^2, 18^2, 22^2, 28^2\right\}$$

şi reţinem $A = 12^2 = 144$.

G98. *Să se determine* $m, n \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât* $\dfrac{m}{n} + \dfrac{n+1}{m^2} \in \mathbb{N}^*$.

Gabriel Dospinescu, stud

Soluţie. Dacă m, n verifică enunţul, atunci există $p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$m^3 + n^2 + n = pm^2n.$$

Este evident că n divide m^3, adică există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $m^3 = k$
deducem că $n + 1 + k = p\sqrt[3]{k^2n^2} \Rightarrow (k + n + 1)^3 = p^3n^2k^2$. Este evident c
şi deoarece $n \cdot k$ este cub perfect rezultă că n şi k sunt cuburi. Fie u,
$u^3 = k$, $v^3 = n$. Atunci $m = uv$ şi $u^3 + u^3 + 1 = pu^2v^2$. Dacă $u =$
$u = v = 1$, deci $m = n = 1$. Fie acum $u > v$. Este evident că $(u$

$u^2v^2 \leq pu^2v^2 = u^3 + v^3 + 1 < 2u^3 + 1$. Deci, $u \geq \dfrac{v^2}{2}$. Pe de altă part
divide $v^3 + 1$ şi atunci $v^3 + 1 \geq u^2 \geq \dfrac{v^4}{4}$. De aici rezultă că $v \leq 4$.
se divide cu u^2, deci nu este liber de pătrate. Rezultă că $v = 2$ şi $u = 3$
simetriei rezultă şi soluţia $v = 3$, $u = 2$. Corespunzător acestor două soluţ
$(m, n) \in \{(1;1), (6;8), (6;27)\}$.

G99. *Fie m, n două numere naturale nenule astfel încât m divide n numerele naturale între 1 şi n se aşează la întâmplare pe un cerc. Se calcu oricărui grup de m numere vecine. Să se demonstreze că printre aceste s două pentru care diferenţa dintre ele este strict mai mare decât $m - 1$.*

Titu Zvonaru, C

Soluţie. Deoarece $n - 1$ se divide cu m rezultă că $n = km + 1$.
inăm numărul 1, suma numerelor rămase este $\sum\limits_{i=2}^{n} i = \dfrac{(n-1)(n+2)}{2}$. C
sumele din cele k grupuri de câte m numere vecine, rezultă că media ac
$\dfrac{(n+2)km}{2k} = \dfrac{(n+2)m}{2}$ şi deci cel puţin una din sumele calculate, s
aceasta este a, este mai mare sau egală ca media lor, adică $\dfrac{(n+2)m}{2} \leq a$.
acum numărul n obţinem suma numerelor rămase $\sum\limits_{i=1}^{n-1} i = \dfrac{(n-1)n}{2}$. Ra
mai sus rezultă existenţa unei sume, să zicem b, astfel încât $\dfrac{nm}{2} \geq b$.
$a - b \geq \dfrac{(n-2)m}{2} - \dfrac{nm}{2} = m$, deci există două sume (de exemplu a şi b) p
diferenţa lor este strict mai mare decât $m - 1$.

G100. *În câte moduri putem colora cu 5 culori un pătrat 3×3, ast fiecare pătrat 2×2 să existe patru culori diferite?*

Gabriel I

Soluţie. Pătratul 2×2 din stânga poate fi colorat în $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ moduri; fie A, B, C, D culorile folosite într-un anumit caz, ca în figură.

Dacă în pătrăţelul $(1, 3)$ (adică linia 1, coloana 3, i.e. pătrăţelul din dreapta sus) folosim culoarea C, în pătrăţelul $(2, 3)$ poate fi folosită una dintre culorile A sau E. Dacă în pătrăţelul $(3, 1)$ folosim culoarea din (2
atât $(3, 2)$ cât şi $(3, 3)$ pot fi colorate în câte două moduri; dacă nu, în (3
folosi 2 culori, în $(3, 2)$ culoarea este fixată, iar în $(3, 3)$ putem folosi 2 culori
$1 \cdot 2\,(1 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 2) = 2^4$ modalităţi de colorare ale conturului exterior

Dacă în $(1, 3)$ nu folosim culoarea C, putem folosi una dintre culoril
(neavând importanţă, să zicem că aceasta este A).

• dacă în $(2, 3)$ folosim C, în $(3, 1)$ putem utiliza A, B sau E, pentru (3
2 culori şi la fel pentru $(3, 3)$.

• dacă în $(2, 3)$ nu folosim C, atunci acest pătrăţel va fi colorat cu E
$(3, 1)$ utilizăm E, avem câte două modalităţi de colorare pentru $(3, 2)$ şi (3
în $(3, 1)$ folosim A sau B, culoarea din $(3, 2)$ este fixată, iar pentru $(3, 3)$
posibilităţi.

Obţinem astfel $2\left(1\cdot3\cdot2\cdot2+1\cdot1\cdot2\cdot2+1\cdot2\cdot1\cdot2\right)=2^3\cdot5$ modali lorare ale conturului exterior.

În concluzie, pătratul 3×3 se poate colora în $5\cdot4\cdot3\cdot2\left(2^4+2^3\cdot5\right)=2^6\cdot3\cdot$ moduri.

G101. *Să se demonstreze inegalitatea*

$$4\left(\frac{1}{a\left(1+bc\right)^2}+\frac{1}{b\left(1+ca\right)^2}+\frac{1}{c\left(1+ab\right)^2}\right)\leq1+\frac{16}{\left(1+bc\right)\left(1+ca\right)\left(1\right.}$$

$\forall a,b,c\in\left(0,\infty\right)$ *astfel încât* $abc=1$.

Gabriel Mîrşanu şi Andrei Ned

Soluţie. Avem: $\dfrac{1}{a\left(1+bc\right)^2}=\dfrac{1}{a\left(1+\frac{1}{a}\right)^2}=\dfrac{a}{\left(1+a\right)^2}$ şi analoagele. nea,

$$\frac{1}{\left(1+bc\right)\left(1+ca\right)\left(1+ab\right)}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)}=\frac{1}{\left(1+a\right)\left(1+b\right)}$$

şi atunci inegalitatea enunţului devine

$$4\left(\frac{a}{\left(1+a\right)^2}+\frac{b}{\left(1+b\right)^2}+\frac{c}{\left(1+c\right)^2}\right)\leq1+\frac{16}{\left(1+a\right)\left(1+b\right)\left(1+c\right)}$$

Adunând în ambii termeni ai relaţiei (1) pe $4\left(\dfrac{1}{\left(1+a\right)^2}+\dfrac{1}{\left(1+b\right)^2}+\right.$ obţinem inegalitatea echivalentă

$$4\left(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\right)\leq1+\frac{16}{\left(1+a\right)\left(1+b\right)\left(1+c\right)}+4\left(\frac{1}{\left(1+a\right)^2}+\frac{1}{\left(1+b\right)^2}+\right.$$

Dacă vom considera $x=\dfrac{2}{1+a}$, $y=\dfrac{2}{1+b}$, $z=\dfrac{2}{1+c}$ inegalitatea (2) dev

$$2\left(x+y+z\right)\leq1+2xyz+x^2+y^2+z^2.$$

Condiţia $abc=1$ devine:

$$\left(\frac{2}{x}-1\right)\left(\frac{2}{y}-1\right)\left(\frac{2}{z}-1\right)=1\Leftrightarrow8+2\left(xy+yz+zx\right)-4\left(x+y+z\right)=$$

Conform cu (4), inegalitatea (3) devine:

$$2\left(x+y+z\right)\leq1+8+2\left(xy+yz+zx\right)-4\left(x+y+z\right)+x^2+y^2+z$$

$$\Leftrightarrow\left(x+y+z\right)^2-6\left(x+y+z\right)+9\geq0\Leftrightarrow\left(x+y+z-3\right.$$

ceea ce este evident.

G102. *Să se determine valoarea maximă a parametrului* $m\in\mathbb{R}_+^*$ *astf*

$$\frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b}+\frac{a^2+b^2}{c}\geq m\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)},\quad\forall a,b,c\in\mathbb{R}$$

Dorel Băiţan şi I. V. Maftei, I

Soluţie. Vom demonstra că $\sum\dfrac{b^2+c^2}{a}\geq2\sqrt{3}\sqrt{\sum a^2}$, egalitatea f pentru $a=b=c$. Este evident că $\sum\dfrac{b^2+c^2}{a}\geq2\sum\dfrac{bc}{a}=\dfrac{2}{abc}\sum b^2c^2$.

demonstra că
$\frac{1}{abc}\sum b^2c^2 \geq \sqrt{3}\sqrt{\sum a^2}$, atunci problema este rezolvată. Avem:

$$\sum b^2c^2 \geq \sqrt{3}abc\sqrt{\sum a^2} \Leftrightarrow \left(\sum b^2c^2\right)^2 \geq 3a^2b^2c^2\sum a^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum b^4c^4 + 2a^2b^2c^2\sum a^2 \geq 3a^2b^2c^2\sum a^2 \Leftrightarrow \sum b^4c^4 \geq a^2b^2c^2 \sum$$

Dacă în inegalitatea $\sum x^2 \geq \sum xy$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ înlocuim $x = b^2c^2$,
$z = a^2b^2$, obţinem inegalitatea (1). Răspunsul la cerinţa problemei este d

G103. *Pentru $a, b, c \in (0,1)$ cu $a+b+c=2$, să se arate că*

$$abc \geq 8(1-a)(1-b)(1-c).$$

Alexandru Negrescu, elev,

Soluţia 1 (a autorului). Este evident că $a < 1 \Leftrightarrow a+b+c < 1+b$
$1+b+c \Leftrightarrow 1 < b+c$ şi deci $a < 1 < b+c$, adică $a < b+c$ şi analoagele. Rezu
c pot fi lungimile laturilor unui triunghi ABC de semiperimetru $p = 1$. I
enunţului este echivalentă cu:

$$abc \geq 8(p-a)(p-b)(p-c) \Leftrightarrow abcp \geq 8p(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$\Leftrightarrow 4RSp \geq 8S^2 \Leftrightarrow Rp \geq 2S \Leftrightarrow Rp \geq 2rp \Leftrightarrow R \geq 2r$$

ceea ce este evident.

Soluţia 2 (Florian Păliţă, elev, Petroşani**).** Cum $1-a > 0$, 1
$1-c > 0$, se aplică inegalitatea mediilor $2\sqrt{(1-a)(1-b)} \leq 2-a-b$
două analoage. Prin înmulţire membru cu membru, rezultă concluzia.

Soluţia 3 (Marius Tiba, elev, Iaşi**).** Notând $x = 1-a$, $y = 1-b$,
obţinem $x+y+z = 1$. Înlocuind, inegalitatea devine $(1-x)(1-y)(1-$
apoi

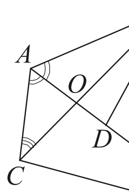
$$1 - xyz + xy + xz + yz - x - y - z \geq 8xyz \Leftrightarrow 1 + xy + xz + yz - 1 \geq$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 9 \Leftrightarrow (x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9,$$

inegalitate binecunoscută.

G104. *Triunghiul ABC are $m(\widehat{BAC}) = 120°$. Fie $O \in (BC)$ astfel
este bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$. Pe $[AO$ se ia punctul D astfel încât
bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{ABD}$. Să se arate că $AD + BD = A$
$AB + AC \geq 4\,AO$.*

Petru Răduc



Soluţie. Fie $E \in AD$ astfel încât BE este paralelă cu AC. Deoarece $\widehat{EAC} \equiv \widehat{AEB}$ şi $m(\widehat{EAC}) \equiv m(\widehat{EAB}) = 60°$ rezultă că triunghiul ABE este echilateral, adică $AB = BE = AE$.

Prelungim $[AE]$ cu $EF = AC$. Deoarece $(BE) \equiv (AB)$, $(EF) \equiv (AC)$ şi $m(\widehat{BEF}) = m(\widehat{BAC}) = 120°$ rezultă că tringhiurile BEF şi BAC sunt congruente de unde obţinem că $\widehat{BCA} \equiv \widehat{BFE}$ şi $\widehat{EBF} \equiv \widehat{ABC}$, deci $\widehat{CBD} \equiv \widehat{FBE}$ şi

$BF = BC$. Din paralelismul dreptelor AC şi BE rezultă $\widehat{ACB} \equiv \widehat{C}$
construcţie $\widehat{CBD} \equiv \widehat{ABC}$ şi atunci $\widehat{CBD} \equiv \widehat{EBF}$, deci $m(\widehat{CBD}) + m$
$m(\widehat{EFB}) + m(\widehat{DBE}) = m(\widehat{BCA}) = m(\widehat{BFE})$. Prin urmare triunghiul
isoscel cu $BD = DF$. Rezultă că $AD + BD = AD + DF = AF = A$
$AB + AC$.

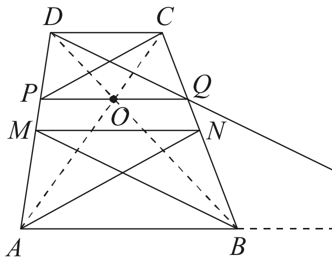
Observăm că $m(\widehat{CBF}) = 60°$ şi din $BF = BC$ rezultă că triunghiul
echilateral şi deci $m(\widehat{BCF}) = 60°$. Triunghiurile AOB şi ACF fiind aseme
că $\dfrac{AO}{AC} = \dfrac{AB}{AF}$, deci $AO = \dfrac{AB \cdot AC}{AB + AC}$, de unde

$$2 \cdot AO = \frac{2AB \cdot AC}{AB + AC} \leq \frac{AB + AC}{2},$$

adică $4AO \leq AB + AC$. În (1) avem egalitate între media aritmetic
armonică dacă şi numai dacă $AB = AC$.

G105. *Se consideră trapezul $ABCD$ cu bazele AB, CD ($AB > C$
intersecţia diagonalelor trapezului. Se duce linia mijlocie MN a trapezului
PQ prin O la bazele trapezului ($M, P \in (AB)$, $N, Q \in (BC)$). Să se d
că trapezele $ABMN$ şi $PQCD$ au diagonalele respectiv paralele.*

Claudiu-Ştefan P



Soluţia 1 (a autorului). Fie E intersecţia dreptelor DQ şi AB. Din asemănări imediate obţinem că $\dfrac{CD}{BE} = \dfrac{CQ}{QB}$, $\dfrac{CQ}{QB} = \dfrac{DO}{OB}$, $\dfrac{OD}{OB} = \dfrac{CD}{AB}$. Rezultă că $\dfrac{CD}{BE} = \dfrac{CD}{AB}$, de unde deducem că $BE = AB$.

Deoarece M este mijlocul segmentului $[AD]$ iar B este mijlocul segmentului $[AE]$,
rezultă că $[MB]$ este linie mijlocie în triunghiul ADE, atunci MB este
DQ. Analog demonstrăm că AN este paralelă cu PC.

Soluţia 2 (Marius Tiba, elev, Iaşi**).** Fie $x = AB$, $y = CD$; atunci P

$MN = \dfrac{x+y}{2}$, iar $\dfrac{DP}{MA} = \dfrac{2DP}{AD} = \dfrac{2DP}{DP + PA} = \dfrac{2DO}{DO + OB} = \dfrac{2y}{x+y}$.
că $\dfrac{DP}{MA} = \dfrac{DC}{MN} = \dfrac{CQ}{NB} = \dfrac{PQ}{AB}$ $\left(= \dfrac{2y}{x+y} \right)$ şi, cum congruenţa unghi
imediată, patrulaterele $DCQP$ şi $MNBA$ vor fi asemenea. Urmează c
$\widehat{AMB}$ şi $\widehat{PCQ} \equiv \widehat{ANB}$, deci $DQ \parallel MB$ şi $PC \parallel AN$.

<u>B. Nivel liceal</u>

L96. *Fie cercurile $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}$ astfel încât $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ sunt tangente exter
fiecare dintre ele este tangent interior lui $\mathcal{C}$ în B, respectiv C. Tange
interioară cercurilor $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ taie cercul $\mathcal{C}$ în A şi A_1. Dreapta AB tai
în K, iar dreapta AC taie cercul $\mathcal{C}_2$ în L. Din punctul M de pe cerc
tangentele MT_1 şi MT_2 la cercurile $\mathcal{C}_1$, respectiv $\mathcal{C}_2$ ($T_1 \in \mathcal{C}_1$, $T_2 \in$*

$M \in \overset{\frown}{BAC}$, *arătaţi că* $MT_1 + MT_2 = \dfrac{A_1M}{A_1D} \cdot KL$ *şi* $|MT_1 - MT_2| = \dfrac{AM}{AD}$

Neculai Roman, Mirce

Soluţie. Domnul **Titu Zvonaru**, Comăneşti, remarcă faptul că ace lemă este îndeaproape înrudită cu problema **L76**, publicată de acelaşi au *Mat 1/2005*. Considerăm totuşi utilă elevilor includerea unei soluţii detal

În rezolvarea acestei probleme vom folosi *teorema lui Casey*, pe care o în continuare (fără demonstraţie).

Teorema lui Casey. *Dacă cercurile* $\mathcal{C}_1$*,* $\mathcal{C}_2$*,* $\mathcal{C}_3$*,* $\mathcal{C}_4$ *sunt tangente terior sau toate exterior) la cercul* $\mathcal{C}$*, ordinea punctelor de tangenţă fi numerotarea acestor cercuri, atunci are loc relaţia*

$$d_{12} \cdot d_{34} + d_{23} \cdot d_{41} = d_{13} \cdot d_{24},$$

unde d_{ij} *este lungimea tangentei comune exterioare a cercurilor* $\mathcal{C}_i$ *şi numeşte* distanţa tangenţială *a celor două cercuri). Rezultatul rămâne dacă cercurile* $\mathcal{C}_i$ *(toate sau o parte dintre ele) degenerează în puncte sau* $\mathcal{C}$ *devine o dreaptă.*

Să revenim acum la problema considerată.

Fie $\{E\} = BC \cap \mathcal{C}_1$, $\{F\} = BC \cap \mathcal{C}_2$, d tangenta comună a cercurilor $\mathcal{C}$, astfel încât $m(\widehat{TBC}) = m(\overset{\frown}{BA_1C})/2$. Deoarece $m(\widehat{EKB}) = m(\widehat{EBT}) = $ $m(\widehat{BAC})$, rezultă că $AC \parallel KE$. Analog, obţinem $AB \parallel LF$.

Cum AD este axa radicală a cercurilor $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$, rezultă că $AK \cdot AB =$ ceea ce înseamnă că patrulaterul $BCLK$ este inscriptibil, deci $\widehat{ABC} \equiv$ aici, ţinând seama de relaţiile $\widehat{ALK} \equiv \widehat{LKE}$ (pentru că $AC \parallel KE$) şi $\widehat{ABC}$ rezultă că $\widehat{LKE} \equiv \widehat{KBE}$, deci LK este tangentă cercului $\mathcal{C}_1$. Analog de că LK este tangentă şi cercului $\mathcal{C}_2$.

Aplicăm teorema lui Casey pentru cercurile M, $\mathcal{C}_1(O_1)$, A_1, $\mathcal{C}_2(O_2)$ degenerate) tangente interior cercului $\mathcal{C}$ şi obţinem

$$d_{MO_1} \cdot d_{O_2A_1} + d_{MO_2} \cdot d_{A_1O_1} = d_{MA_1} \cdot d_{O_1O_2} \Leftrightarrow$$

$$MT_1 \cdot A_1D + MT_2 \cdot A_1D = A_1M \cdot KL \Leftrightarrow MT_1 + MT_2 = \frac{A_1M}{A_1D} K$$

Pentru a demonstra a doua relaţie, aplică teorema lui Casey cercurilor M, şi $\mathcal{C}_1(O_1)$:

$$d_{MA} \cdot d_{O_1O_2} + d_{MO_1} \cdot d_{AO_2} = d_{MO_2} \cdot d_{AO_1} \Leftrightarrow MA \cdot KL + MT_1 \cdot AD = M$$

de unde concluzia.

L97. *Să se demonstreze că în orice triunghi are loc inegalitatea*

$$\frac{1}{m_a^2\left(m_b + m_c - m_a\right)} + \frac{1}{m_b^2\left(m_c + m_a - m_b\right)^2} + \frac{1}{m_c^2\left(m_a + m_b - m_c\right)^2}$$

I. V. Maftei şi Dorel Băiţan, I

Notă. Concomitent cu publicarea în revista noastră, problema a numărul 25449 în G.M. nr. 12/2005. Soluţia sa poate fi găsită în G.M

În fapt, inegalitatea se reduce la $\sum \dfrac{S^2}{a^2\left(p-a\right)^2} \geq \dfrac{9}{4}$.

Vlad Emanuel, elev, Sibiu, notează $x = p - a$, $y = p - b$, $z =$
inegalitatea precedentă (demonstrată trigonometric de către autorii probler
la $\sum \dfrac{(x+y+z)\,xyz}{x^2\,(y+z)^2} \geq \dfrac{9}{4}$. Dacă $m = xy$, $n = xz$, $p = yz$, avem de
$\sum \dfrac{mn+mp+np}{(m+n)^2} \geq \dfrac{9}{4}$, $m, n, p > 0$, care este chiar inegalitatea **114** din
Old and New Inequalities, autori T. Andreescu, G. Dospinescu, V. Cîrtoaje
apărută în 2004 la Editura GIL.

L98. *Se consideră un triunghi oarecare ABC. Demonstraţi că*

1) $\sin^4 A + \sin^4 B + \sin^4 C \geq \dfrac{27}{2}\left(\dfrac{r}{R}\right)^3$;

2) $\cos^4 A + \cos^4 B + \cos^4 C \geq \dfrac{3}{8}\left(\dfrac{r}{R}\right)^4\left(5 - \dfrac{r_a}{r}\right)\left(5 - \dfrac{r_b}{r}\right)\left(5 - \dfrac{r_c}{r}\right)$,

unde R este raza cercului circumscris, r este raza cercului înscris, iar r_a,
razele cercurilor exînscrise.

Oleg Faynshteyn, Leipzig, G

Soluţie. 1) Având în vedere inegalitatea $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ (
şi relaţiile $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{z}{\sin C} = 2R$, $R = \dfrac{abc}{4S}$, $r = \dfrac{S}{p}$ şi $p \geq 3\sqrt{3}r$, de

$$\sin^4 A + \sin^4 B + \sin^4 C \geq (\sin A \sin B)^2 + (\sin B \sin C)^2 + (\sin C \sin$$

$$\geq \sin A \sin B \sin C\,(\sin A + \sin B + \sin C) = \frac{abc}{8R^3} \cdot \frac{a+b+c}{2R} =$$

$$= \frac{S}{2R^2} \cdot \frac{p}{R} = \frac{rp^2}{2R^3} \geq \frac{r}{2R^3}\left(3\sqrt{3}r\right)^2 = \frac{27}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^3.$$

2) Utilizând iarăşi inegalitatea $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$, obţinem

$$\cos^4 A + \cos^4 B + \cos^4 C \geq \cos A \cos B \cos C\,(\cos A + \cos B + \cos C$$

Vom exprima acum termenul din dreapta al inegalităţii (1) în funcţie c
r_b, r_c. În acest scop utilizăm faptul că în orice triunghi are loc relaţia $\cos A$
$\cos C = \dfrac{R+r}{R}$, precum şi $\cos A = \dfrac{2R+r-r_a}{2R}$, $\cos B = \dfrac{2R+r-r_b}{2R}$
$\dfrac{2R+r-r_c}{2R}$ (într-adevăr, $\cos A = \dfrac{2R+r-r_a}{2R} \Leftrightarrow 1 - \cos A = \dfrac{r_a - r}{2R} \Leftrightarrow$
$\dfrac{1}{2R}\left(\dfrac{S}{p-a} - \dfrac{S}{p}\right) \Leftrightarrow 2 \cdot \dfrac{(p-b)(p-c)}{bc} = \dfrac{aS}{2Rp\,(p-a)} \Leftrightarrow p\,(p-a)\,(p-b$
$\dfrac{abc}{4R} \cdot S \Leftrightarrow S^2 = S \cdot S$).

Ţinând seama de acestea şi de inegalitatea $R \geq 2r$, rezultă că:

$$\cos^4 A + \cos^4 B + \cos^4 C \geq \frac{R+r}{R} \cdot \frac{2R+r-r_a}{2R} \cdot \frac{2R+r-r_b}{2R} \cdot \frac{2R+r}{2R}$$

$$\geq \frac{3r}{R} \cdot \frac{5r-r_a}{2R} \cdot \frac{5r-r_b}{2R} \cdot \frac{5r-r_c}{2R} = \frac{3}{8}\left(\frac{r}{R}\right)^4\left(5 - \frac{r_a}{r}\right)\left(5 - \frac{r_b}{r}\right)\left(5 -\right.$$

adică tocmai ceea ce trebuia demonstrat.

Notă. Am primit de la **Neculai Roman**, Mirceşti (Iaşi), o interesan a inegalităţii de la b), anume

$$\cos^4 A+\cos^4 B+\cos^4 C\geq\frac{3}{16}\geq\frac{3}{8}\left(\frac{r}{R}\right)^4\left(5-\frac{r_a}{r}\right)\left(5-\frac{r_b}{r}\right)\left(5-\right.$$

Pentru demonstraţia primei părţi, folosim cunoscuta $\sin^2 A+\sin^2 B+$
şi inegalitatea CBS; obţinem

$$\cos^4 A+\cos^4 B+\cos^4 C\geq\frac{1}{3}\left(\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C\right)^2=$$

$$=\frac{1}{3}\left[3-\left(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\right)\right]^2\geq\frac{1}{3}\left(3-\frac{9}{4}\right)^2=\frac{3}{16}.$$

Pentru partea a doua, folosim $r_a+r_b+r_c=4R+r$; $r_ar_b+r_ar_c+$
$r_ar_br_c=p^2r$; $a^2+b^2+c^2=2p^2-2r^2-8Rr$. Avem că $a^2+b^2+c^2\leq 9R$
$2p^2\leq 2r^2+8Rr+9R^2$, apoi

$$\frac{3}{8}\left(\frac{r}{R}\right)^4\left(5-\frac{r_a}{r}\right)\left(5-\frac{r_b}{r}\right)\left(5-\frac{r_c}{r}\right)=\frac{3}{8}\left(\frac{r}{R}\right)^4\left[5^3-\frac{r_a+r_b+r_c}{r}\right.$$

$$+\frac{r_ar_b+r_ar_c+r_br_c}{r^2}\cdot 5-\frac{r_ar_br_c}{r^3}\Big]=\frac{3}{8}\left(\frac{r}{R}\right)^4\left(100-100\frac{R}{r}+4\frac{p^2}{r^2}\right)$$

$$\leq\frac{3}{8}\left(\frac{r}{R}\right)^4\left[100-100\frac{R}{r}+\frac{2}{r^2}\left(2r^2+8Rr+9R^2\right)\right]=39\left(\frac{r}{R}\right)^4-\frac{63}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^3+$$

Dacă $x=\dfrac{r}{R}\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$, funcţia $f(x)=39x^4-\dfrac{63}{2}x^3+\dfrac{27}{4}x^2$ are un max
$\dfrac{3}{16}$, adică pentru $x=\dfrac{1}{2}$, de unde concluzia anunţată.

L99. *a) Care este numărul minim de puncte din plan de coordonate în*
încât, oricum ar fi alese, să existe trei puncte cu centrul de greutate de
întregi.

b) Să se arate că într-un spaţiu n-dimensional există 2^{n+1} puncte de
întregi astfel încât oricare trei dintre acestea au centrul de greutate cu
coodonată care nu este un întreg.

Irina Mustaţă, studentă, Bremen, G

Soluţie (Eugenia Roşu, elevă, şi **Adrian Zanoschi**, profesor, Iaşi**).**
de greutate al triunghiului cu vârfurile în (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) are co
$\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$; aceste coordonate sunt întregi dacă şi n
$x_1+x_2+x_3$ şi $y_1+y_2+y_3$ sunt multipli de 3. Pentru a simplifica rezol
siderăm, mai departe, în locul coordonatelor punctelor, resturile acestora

Pentru 8 numere, rezultatul nu este valabil. Într-adevăr dacă alegem s

x	1	1	1	1	0	0	0	0
y	0	0	1	1	0	0	1	1

observăm că suma $x_1+x_2+x_3$ este multiplu de 3 dacă şi numai dacă cele t
sunt egale. Dar, în acest caz, cea de-a doua sumă $y_1+y_2+y_3$ este 1 s
ce înseamnă că, pentru orice trei dintre aceste puncte, centrul de greut
ambele coordonate întregi.

Să analizăm, în continuare, cazul a 9 numere. Reamintim că două c
congruente modulo 3 sunt considerate egale.

Dacă există 5 punte care au una dintre coordonate identică, atunci p
de-a doua coordonată avem unul din următoarele cazuri: apar toate cele
posibile la împărţirea cu 3 sau, conform principiului cutiei, unul dintre re
de trei ori. În ambele situaţii putem găsi trei coordonate cu suma multiplu
există trei puncte cu centrul de greutate de coordonate întregi.

Presupumen acum că nu este îndeplinită condiţia precedentă. Atunci
că fiecare din numerele 0, 1, 2 apare cel puţin o dată şi cel mult de pat
printre abscise cât şi printre ordonate. Dacă două dintre aceste numere ar
cel mult două ori, atunci cel puţin cinci coordonate ar fi egale cu al trei
ceea ce contrazice presupunerea făcută. Deci, două dintre numerele 0, 1,
cel puţin 3 ori la o coordonată. Notăm aceste numere cu m şi n.

Considerăm, pentru fiecare dintre cele două grupuri cu prima coor
respectiv n, că cea de-a doua coordonată ia cel puţin două valori distin
există trei puncte identice şi centrul lor de greutate are coordonatele într
avem toate cele trei valori (0, 1, 2) la ordonate, atunci suma lor este 3 şi
greutate respectiv are coordonatele întregi. Cazul cel mai nefavorabil ar
cel în care în ambele grupuri, ordonatele iau două valori a şi b pentru prin
c şi d pentru celălalt grup ($a \neq b$, $c \neq d$).

Întrucât $a, b, c, d \in \{0, 1, 2\}$, conform principiului cutiei, rezultă că e
numere egale. Cum $a \neq b$ şi $c \neq d$, înseamnă că unul dintre numerele a,
cu c sau d. Putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că $a = c$.

Să arătăm că sumele $a + c$, $a + d$, $b + c$, $b + d$ iau cele trei valori posib
Avem relaţiile $a \neq b \Rightarrow a + c \neq b + c$, $c \neq d \Rightarrow b + c \neq b + d$, $b \neq a \Rightarrow b +$
Astfel, dacă cele patru sume ar lua doar două valori din cele trei, atunci a
şi $b + c = a + d$, ceea ce implică $c = d$. Contradicţia la care am ajuns do
fiecare dintre numerele 0, 1, 2 se află printre cele patru sume.

Acum, să revenim la cel de-al treilea grup - al punctelor care au ca prin
nată un număr diferit de m şi n (există cel puţin un punct de acest fel).
unui astfel de punct adunată cu una din sumele $a + c$, $a + d$, $b + c$, $b +$
multiplu de 3, pentru că printre aceste sume se află toate numerele 0, 1,

Evident, punctele din primele două grupuri cu ordonatele din suma
sus şi cu punctul ales din grupa a treia formează un triplet a cărui centru d
are coordonate întregi. Cu aceasta, demonstraţia este încheiată.

b) Vom demonstra propoziţia prin inducţie după n. În cazul $n = 2$, a
punctul *a*) un exemplu de 2^3 puncte care satisfac condiţia din enunţ.

Presupunem propoziţia adevărată pentru un număr natural $n \geq 2$.
că propoziţia este adevărată pentru $n + 1$. Conform ipotezei de induc
2^{n+1} puncte în spaţiul n - dimensional astfel încât centrul de greutate
trei dintre ele să nu aibă toate coordonatele întregi. Celor 2^{n+1} punc
sus le mai adăugăm la sfârşit încă o coordonată egală cu 0 şi apoi, din n
punctelor, încă o coordonată egală cu 1. Astfel obţinem 2^{n+2} puncte din sp
dimensional (jumătate dintre ele se termină cu 0, iar cealaltă jumătate
cu 1). Se observă uşor că, oricum am alege trei dintre aceste 2^{n+2} punc

lor de greutate nu are toate coordonatele întregi.

Notă. Soluţie corectă s-a primit de la **Vlad Emanuel**, elev, Sibiu.

L100. *Fie* $x \in (0,1)$; *arătaţi că există* $n \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât* $\{nx\} \in \left[\frac{1}{3}\right.$

Ciprian Baghiu şi Gheorghe I

Soluţia 1(a autorilor). Dacă $x \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$, cum $\frac{2}{3x} - \frac{1}{3x} = \frac{1}{3x} >$
$n \in \mathbb{N}^*$ cu $n \in \left(\frac{1}{3x}, \frac{2}{3x}\right)$, deci $nx \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, adică $\{nx\} \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$
$x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ putem alege $n = 1$, iar pentru $x = \frac{2}{3}$ luăm $n = 2$.

Rămâne de analizat situaţia $x \in \left(\frac{2}{3}, 1\right)$. Cum $\left(\frac{2}{3}, 1\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right) \cup \left[\frac{3}{4}\right.$
$\left[\frac{k}{k+1}, \frac{k+1}{k+2}\right) \cup \ldots$, există $k \geq 2$ astfel încât $x \in \left[\frac{k}{k+1}, \frac{k+1}{k+2}\right)$. Cân
$p \in \mathbb{N}^*$, obţinem că $x \in \left[\frac{3p}{3p+1}, \frac{3p+1}{3p+2}\right)$, deci $(p+1)\,x \in \left[p + \frac{2p}{3p+1}, p\right.$
adică $\{(p+1)\,x\} \in \left[\frac{2p}{3p+1}, \frac{2p+1}{3p+2}\right) \subset \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Când $k = 3p+1$, $p \in \mathbb{N}^*$
că $(p+1)\,x \in \left[p + \frac{2p+1}{3p+2}, p + \frac{2}{3}\right)$, deci $\{(p+1)\,x\} \in \left[\frac{2p+1}{3p+2}, \frac{2}{3}\right) \subset$
sfârşit, dacă $k = 3p+2$, $p \in \mathbb{N}$, atunci $(p+2)\,x \in \left[p + 1 + \frac{2p+1}{3p+3}, p + 1\right.$
deci $\{(p+2)\,x\} \in \left[\frac{2p+1}{3p+3}, \frac{2p+2}{3p+4}\right) \subset \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Soluţia 2 (Vlad Emanuel, elev, Sibiu**).** Dacă $x \in \mathbb{R}^* \setminus \mathbb{Q}$, mulţimea $\{\{n$
este densă în $[0,1]$ (Lema lui Kronecker) şi atunci concluzia este imedi
$x \in \mathbb{Q}^*$, fie $x = \frac{p}{q}$, cu $p, q \in \mathbb{N}^*$, $(p,q) = 1$; observăm că ip, $i = \overline{1,q}$, parc
resturile modulo q. Notăm $r_i = ip \pmod{q}$; atunci $\left\{\frac{ip}{q}\right\} = \frac{r_i}{q}$, deci expre
$i = \overline{1,q}$, va lua toate valorile din mulţimea $\left\{0, \frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \ldots, \frac{q-q}{q}\right\}$. Pentru
problema, ar fi suficient să găsim $m \in \{1, 2, \ldots, q-1\}$ astfel încât $\frac{1}{3} \leq$
adică $\frac{q}{3} \leq m < \frac{2q}{3}$. Cum $x \in (0,1)$, atunci $q \geq 2$. Pentru $q \in \{2,3\}$, lu
Pentru $q \geq 4$, $\frac{2q}{3} - \frac{q}{3} > 1$ şi astfel există cel puţin un întreg în $\left[\frac{q}{3}, \frac{2q}{3}\right]$.
nu este chiar $\frac{2q}{3}$; dacă $q \in \{4,5\}$, atunci $\frac{2q}{3} \notin \mathbb{N}$, iar dacă $q \geq 6$, există ce
întregi în intervalul respectiv.

L101. *Fie* $a, n \geq 2$ *două numere întregi. Să se arate că* $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a^n - a^k}{n-k}$

Adrian Zahariuc, ele

Soluţie. Să facem mai întâi câteva notaţii. Fie $A = \prod\limits_{k=0}^{n-1} \left(a^n - a\right.$

$\prod\limits_{k=1}^{n} \left(a^k - 1\right)$. În acest caz, avem $A = a \cdot a^2 \cdot \ldots \cdot a^{n-1} \cdot E$. Dacă p este un di al numărului $m \in \mathbb{N}^*$, atunci notăm cu $\exp_p m$ exponentul lui p din desc în factori primi a lui m.

Pentru a demonstra că $\dfrac{A}{n!} = \prod\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{a^n - a^k}{n-k} \in \mathbb{Z}$ este suficient să arătăm orice număr prim p, $p \leq n$, are loc inegalitatea

$$\exp_p n! \leq \exp_p A.$$

Se verifică uşor că

$$\exp_p n! = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^k}\right], \text{ oricare ar fi numărul prim } p.$$

Fie p un număr prim mai mic sau egal ca n.

I. Dacă $p \mid a$, atunci $p^2 \mid a^2$, $p^3 \mid a^3$, $p^n \mid a^n$ şi $p^{\frac{n(n-1)}{2}} \mid a \cdot a^2 \cdot \ldots \cdot a$ Notând cu l cel mai mare număr natural cu proprietatea $p^2 \leq n$, avem

$$\exp_p n! \leq \sum_{k=1}^{l} \frac{n}{p^l} = \frac{n}{p-1}\left(1 - \frac{1}{p^l}\right) \leq \frac{n(n-1)}{2} \leq \exp_p A,$$

deci, relaţia (1) este adevărată.

II. Presupunem, în continuare, că $(a,p) = 1$. Deoarece $a^{\varphi\left(p^k\right)} \equiv$ (teorema lui Euler) şi $\varphi\left(p^k\right) = p^k - p^{k-1}$, rezultă că $p^k \mid a^{p^k - p^{k-1}} - 1$ $a^{m\left(p^k - p^{k-1}\right)} - 1$, oricare ar fi $m \in \mathbb{N}^*$.

Să demonstrăm că are loc inegalitatea

$$\exp_p E \geq \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^k - p^{k-1}}\right].$$

Pentru fiecare $k \in \mathbb{N}^*$, considerăm mulţimile $A_k = \left\{m\left(p^k - p^{k-1}\right)\right.$ şi $B_k = A_k \cap \{1, 2, \ldots, n\}$. Se observă că $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \cdots \supseteq B_k \supseteq \cdots$ $\left[\dfrac{n}{p^k - p^{k-1}}\right]$. După cum am văzut, $p^k \mid a^{m\left(p^k - p^{k-1}\right)} - 1$, deci fiecare ele B_k contribuie cu cel puţin k la $\exp_p E$. Fie $C_k = B_k - B_{k+1}$ Întrucât mu sunt disjuncte două câte două, putem scrie:

$$\exp_p E \geq \sum_{k=1}^{\infty} k\left|C_k\right| = \sum_{k=1}^{\infty} k\left(\left|B_k\right| - \left|B_{k+1}\right|\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left|B_k\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{n}{p^k - p\right.}$$

ceea ce înseamnă că inegalitatea (3) este adevărată.

În sfârşit, din relaţiile (2) şi (3), rezultă că

$$\exp_p n! = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^k}\right] \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^k - p^{k-1}}\right] \leq \exp_p E \leq \exp_p A,$$

deci inegalitatea (1) este adevărată.

Notă. Aceeaşi soluţie a dat **Vlad Emanuel**, elev, Sibiu.

L102. *Fie* $p = 2k + 1$ *un număr prim. Atunci*

$$S_1 = \sum_{i=k+1}^{2k} C_{p+i-1}^{i} \equiv 2^p - 2 \left(\bmod p^2\right), \quad S_2 = \sum_{i=1}^{k} C_{p+i-1}^{i} \equiv 2 - 2^p \left(\text{m}\right.$$

Marius Pachiţariu,

Soluţie. Considerăm inelul $\left(\mathbb{Z}_{p^2}, +, \cdot\right)$. Dacă $i \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$, at un element inversabil al inelului. Notăm cu $\frac{p}{i}$ reprezentantul canonic al cl Cu acest sens dat scrierii $\frac{p}{i}$, avem $\frac{p}{i} \in \mathbb{N}$. Astfel, putem scrie

$$C_p^i = \frac{p(p-1)\ldots(p-i+1)}{i!} = \frac{\mathcal{M}_{p^2} + (-1)^{i-1} p (i-1)!}{i!} =$$

$$\frac{\mathcal{M}_{p^2}}{i!} + (-1)^{i-1} \frac{p}{i} \equiv (-1)^{i-1} \cdot \frac{p}{i} \left(\bmod p^2\right),$$

unde $i \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$. Analog, obţinem relaţia $C_{p+i-1}^{i} \equiv \frac{p}{i} \left(\bmod p\right.$ orice $i \in \{1, 2, \ldots, 2k\}$. Avem

$$\sum_{i=1}^{p-1} C_p^i \equiv p \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{p-1}\right) \equiv$$

$$\equiv p \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-1} - \frac{2}{2} - \frac{2}{4} - \cdots - \frac{2}{p-1}\right) \equiv$$

$$\equiv p \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{2k}\right) \equiv \sum_{i=k+1}^{2k} C_{p+i-1}^{i} \left(\bmod p^2\right.$$

Deoarece $\sum\limits_{i=1}^{p-1} C_p^i = 2^p - 2$, rezultă că $\sum\limits_{i=k+1}^{2k} C_{p+i-1}^{i} \equiv 2^p - 2 \left(\bmod p^2\right)$.

Pentru a demonstra a doua cerinţă, observăm că $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-1} \equiv$ întrucât termenii sumei dau resturi distincte la împărţirea cu p şi suma aces este $1 + 2 + \cdots + (p-1) = \frac{p(p-1)}{2} \equiv 0 \,(\bmod p)$. Prin urmare

$$\sum_{i=1}^{p-1} C_p^i = 2^p - 2 \equiv p \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-1} - \frac{2}{2} - \frac{2}{4} - \cdots - \frac{2}{p-\right.$$

$$\equiv p \left(-1 - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{k}\right) = -\sum_{i=1}^{k} C_{p+i-1}^{i} \left(\bmod p^2\right),$$

ceea ce înseamnă că $S_2 \equiv 2 - 2^p \left(\bmod p^2\right)$.

Notă. Soluţie asemănătoare a dat **Vlad Emanuel**, elev, Sibiu.

L103. *Fie* a, b, c, d *reale astfel încât* $\left(1 + a^2\right)\left(1 + b^2\right)\left(1 + c^2\right)\left(1 + \right.$ *Arătaţi că*

$$-3 \leq ab + bc + cd + da + ac + bd - abcd \leq 5.$$

Mai mult, avem egalitate în cel puţin una din inegalităţile de mai sus dac
dacă $a+b+c+d=abc+bcd+cda+dab$.

Gabriel Dospinescu, stud

Soluţie. Egalitatea din ipoteză este echivalentă cu

$$\prod(i+a)\cdot\prod(i-a)=16\Leftrightarrow$$

$$\left(1-i\sum a-\sum ab+i\sum abc+abcd\right)\left(1+i\sum a-\sum ab-i\sum abc+\right.$$

Deoarece ultima egalitate se poate scrie în forma

$$\left(1-\sum ab+abcd\right)^2+\left(\sum a-\sum abc\right)^2=16,$$

rezultă că $|1-\sum ab+abcd|\leq 4$, de unde obţinem $-3\leq ab+bc+cd+$
$bd+abcd\leq 5$. Se observă că, în relaţia precedentă, putem avea o egalit
numai dacă $|1-\sum ab+abcd|=4$, ceea ce, în virtutea identităţii $(*)$, este
cu $\sum a=\sum abc$.

Notă. Vlad Emanuel, elev, Sibiu, remarcă faptul că problema apar
and New Inequalities (citată la soluţia problemei **L97**), semnată de acela

L104. *Fie* $x_0>0$ *şi* $x_n=x_{\left[\frac{n}{2}\right]}+x_{\left[\frac{n}{3}\right]}+\dfrac{n}{6}$, *pentru orice* $n>0$.

a) *Să se arate că şirul* $\left(\dfrac{x_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ *este convergent la* 1.

b) *Să se arate că dacă* $\alpha>\log_3\dfrac{5}{2}$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-n}{n^\alpha}=0$.

Gabriel Dospinescu, stud

Soluţie. *a*) Fie $M=\max\left\{1,x_1,\dfrac{x_2}{2}\right\}$. Vom demonstra prin inducţie că
oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$. Datorită modului în care a fost ales numărul M,
propoziţia este adevărată pentru $n=1$ şi $n=2$. Dacă inegalitatea este
pentru orice $k\leq n-1\,(n\geq 3)$, atunci din $x_{\left[\frac{n}{2}\right]}\leq\left[\dfrac{n}{2}\right]M$ şi $x_{\left[\frac{n}{3}\right]}\leq\left[\dfrac{n}{3}\right]M$
$x_n\leq\left[\dfrac{n}{2}\right]M+\left[\dfrac{n}{3}\right]M+\dfrac{n}{6}\leq\left(\dfrac{n}{2}+\dfrac{n}{3}+\dfrac{n}{6}\right)M=nM$. Drept urmare, avem
oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$, ceea ce înseamnă că şirul $\left(\dfrac{x_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ este mărginit.
din enunţ poate fi scrisă în forma

$$\frac{x}{n}=\frac{x_{\left[\frac{n}{2}\right]}}{\left[\frac{n}{2}\right]}\cdot\frac{\left[\frac{n}{2}\right]}{n}+\frac{x_{\left[\frac{n}{3}\right]}}{\left[\frac{n}{3}\right]}\cdot\frac{\left[\frac{n}{3}\right]}{n}+\frac{1}{6}.$$

De aici, ţinând seama de relaţiile $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left[\frac{n}{2}\right]}{n}=\dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left[\frac{n}{3}\right]}{n}=\dfrac{1}{3}$ şi $\varlimsup\limits_{n\to\infty}($
$\varlimsup\limits_{n\to\infty}a_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty}b_n$, deducem că

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}\leq\frac{\varlimsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n}}{2}+\frac{\varlimsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n}}{3}+\frac{1}{6},$$

de unde obţinem $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n}\leq 1$. Analog, demonstrăm că $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n\geq 1$. D
$\varliminf\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n}\leq\varlimsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n}$ şi $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n}\leq 1\leq\varliminf\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n}$ rezultă că cele două limi

sunt egale cu 1, deci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = 1$.

b) Considerăm, din nou, $M = \max\left\{1, x_1, \frac{x_2}{2}\right\}$ şi $a_k = 1 + (M-1)\left(\frac{5}{6}\right.$

Să demonstrăm, prin inducţie după k, inegalitatea $x_n \le na_k$, oricare ar fi
Pentru $k = 0$, am dovedit că propoziţia este adevărată la punctul a). Pres
relaţia este adevărată pentru k. Fie $n > 2\cdot 3^{k+1}$. Atunci, $\left[\frac{n}{2}\right] \ge 2\cdot 3^k$ şi
Conform ipotezei de inducţie, rezultă că

$$x_n \le \left[\frac{n}{2}\right] a_k + \left[\frac{n}{3}\right] a_k + \frac{n}{6} \le n \cdot \frac{5a_k + 1}{6} = na_{k+1},$$

ceea ce încheie inducţia.

Fie $n > 1$ şi $k = \left[\log_3 \frac{n}{2}\right]$. Cum

$$\frac{x_n}{n} \le 1 + (M-1)\left(\frac{5}{6}\right)^k \le 1 + (M-1)\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{\log_3 \frac{n}{2} - 1} =$$

$$= 1 + \frac{6(M-1)}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{\log_3 \frac{n}{2}} = 1 + \frac{6(M-1)}{5}\left(\frac{n}{2}\right)^{\log_3 \frac{5}{6}},$$

înseamnă că există o constantă $a \ge 0$ astfel încât

$$\frac{x_n}{n} \le 1 + an^{\log_3 \frac{5}{6}}, \text{ oricare ar fi } n > 1.$$

Considerăm şirurile $c_k = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{k+1}$ şi $d_k = 2^{k+1} - 2$. Vom arăta, pri
că $x_n > nc_k - d_k$, oricare ar fi $n \ge 2\cdot 3^k$. Pentru $k = 0$, inegalitatea devi
$n \ge 2$, care este adevărată. Presupunem propoziţia adevărată pentru k.
număr $n \ge 2\cdot 3^{k+1}$ şi atunci, conform ipotezei de inducţie, avem

$$x_n > \left[\frac{n}{2}\right] c_k - d_k + \left[\frac{n}{3}\right] c_k - d_k + \frac{n}{6} > \left(\frac{5n}{6} - 2\right) c_k - 2d_k + \frac{n}{6}$$

$$= \frac{5c_k + 1}{6} n - 2c_k - 2d_k > c_{k+1}\cdot n - 2 - 2d_k = c_{k+1}n - d_{k+1}$$

Cu aceasta, demonstraţia prin inducţie s-a terminat.

Acum, luăm din nou $k = \left[\log_3 \frac{n}{2}\right]$. Deoarece

$$\frac{x_n}{n} > c_k - \frac{d_k}{n} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{k+1} - \frac{2\cdot 2^k}{n} + \frac{2}{n} > 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{\log_3 \frac{n}{2}} - \frac{2\cdot 2^{\log}}{n}$$

rezultă că

$$\left(\frac{x_n}{n} - 1\right) n^{\log_3 \frac{6}{5}} > \left(-\frac{1}{2}\right)^{\log_3 \frac{5}{6}} - \frac{2}{n}\left(\frac{n}{2}\right)^{\log_3 2} n^{\log_3 \frac{6}{5}} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{\log_3 \frac{5}{6}} - 2^{1-\log}$$

De aici, având în vedere şi relaţia (1), deducem că şirul $\left(\frac{x_n}{n} - 1\right) n^{\log_3 \frac{6}{5}}$ est

deci şirul $\left(\frac{x_n - n}{n^{\log_3 \frac{5}{2}}}\right)_{n\ge 1}$ este mărginit. Prin urmare, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - n}{n^x} = 0$.

L105. *Să se determine toate funcţiile continue* $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, *ca*
ecuaţia funcţională

$$nx^{n-1} f\left(x^n\right) = (x+1) f(x), \quad \forall x \in (0, \infty),$$

unde $n \in \mathbb{N}^*$, n *fixat.*

Marian Tetiva şi Dumitru Mihalach

Soluţie. Pentru $n = 1$, ecuaţia considerată devine $f(x) = (x+1) f($
Soluţia ei, în acest caz, este $f(x) = 0$, $x > 0$.

Presupunem, în continuare, că $n \geq 2$. Ecuaţia dată este echivalentă cu

$$f\left(x^n\right) = \frac{x+1}{nx^{n-1}} f(x), \quad x > 0,$$

de unde, înlocuind succesiv pe x cu $\sqrt[n]{x}$, obţinem:

$$f(x) = \frac{\sqrt[n]{x}+1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} f\left(\sqrt[n]{x}\right), \quad f\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{\sqrt[n^2]{x}+1}{nx^{\frac{n-1}{n^2}}} f\left(\sqrt[n^2]{x}\right), \ldots,$$

$$f\left(\sqrt[n^{n-1}]{x}\right) = \frac{\sqrt[n^k]{x}+1}{nx^{\frac{n-1}{n^k}}} f\left(\sqrt[n^k]{x}\right).$$

De aici, deducem că

$$f\left(x^n\right) = \frac{\left(\sqrt[n]{x}+1\right)\left(\sqrt[n^2]{x}+1\right)\cdots\left(\sqrt[n^k]{x}+1\right)}{n^k \cdot x^{\frac{n-1}{n}+\frac{n-1}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^k}}} f\left(\sqrt[n^k]{x}\right), \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Deoarece $\dfrac{n-1}{n} + \dfrac{n-1}{n^2} + \cdots + \dfrac{n-1}{n^k} = \dfrac{n-1}{n} \cdot \left(1 - \dfrac{1}{n^k}\right) : \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$
rezultă că

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt[n]{x}+1\right)\left(\sqrt[n^2]{x}+1\right)\cdots\left(\sqrt[n^k]{x}+1\right)}{n^k \cdot x^{1-\frac{1}{n^k}}} f\left(\sqrt[n^k]{x}\right), \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Avem $\lim\limits_{k\to\infty} x^{1-\frac{1}{n^k}} = x$ şi $\lim\limits_{k\to\infty} \left(\sqrt[n^k]{x}\right) = f\left(\lim\limits_{k\to\infty} x^{1/n^k}\right) = f(1)$. Să calcul

$$L = \lim_{k\to\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{x}+1\right)\left(\sqrt[n^2]{x}+1\right)\cdots\left(\sqrt[n^k]{x}+1\right)}{n^k}.$$

a) Dacă $n = 2$, atunci putem restrânge produsul $P = \left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt[2^2]{x}+1\right)\cdot$

$$P\left(\sqrt[2^k]{x}-1\right) = \left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt[2^2]{x}+1\right)\cdots\left(\sqrt[2^k]{x}+1\right)\left(\sqrt[2^k]{x}-1\right) =$$
$$= \left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt[2^2]{x}+1\right)\cdots\left(\sqrt[2^{k-1}]{x}+1\right)\left(\sqrt[2^{k-1}]{x}-1\right) =$$
$$= \left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right) = x - 1,$$

deci $P = \dfrac{x-1}{\sqrt[2^k]{x}-1}$, pentru $x \neq 1$. Drept urmare,

$$L = \lim_{k\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt[2^2]{x}+1\right)\ldots\left(\sqrt[2^k]{x}+1\right)}{2^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{x-1}{\frac{x^{1/2^k}-1}{1/2^k}} = \frac{x-1}{\ln x},$$

În acest caz, trecând la limită în relaţia (1), pentru $k \to \infty$, obţinem:

$$f(x) = \frac{x-1}{x \ln x} f(1), \quad \forall x \neq 1.$$

Notăm pe $f(1)$ cu c $(c \in \mathbb{R})$. Cum $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x-1}{x\ln x}c\right) = c$, în
soluţia ecuaţiei considerate este:

$$f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x\ln x}c, & x\neq 1\\ c, & u\neq 1\end{cases},\ \text{unde } c\in\mathbb{R}\ .$$

b) Să vedem ce se întâmplă dacă $n > 2$. Există $l \in \mathbb{N}^*$, astfel încât n
$\dfrac{1}{n^i} < \dfrac{1}{2^{li}}$, $i=\overline{1,k}$. Dacă $x>1$, atunci

$$\left(\sqrt[n]{x}+1\right)\left(\sqrt[n^2]{x}+1\right)\cdots\left(\sqrt[n^k]{x}+1\right) < \left(\sqrt[2^l]{x}+1\right)\left(\sqrt[2^{2l}]{x}+1\right)\cdots\left(\sqrt[2^{lk}]{x}+\right.$$
$$<\left(\sqrt[2]{x}+1\right)\left(\sqrt[2^2]{x}+1\right)\left(\sqrt[2^3]{x}+1\right)\cdots\left(\sqrt[2^{lk}]{x}+1\right).$$

Astfel, avem

$$0\le\frac{\left(\sqrt[n]{x}+1\right)\left(\sqrt[n^2]{x}+1\right)\cdots\left(\sqrt[n^k]{x}+1\right)}{n^k}<$$
$$<\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt[2^2]{x}+1\right)\left(\sqrt[2^3]{x}+1\right)\cdots\left(\sqrt[2^{lk}]{x}+1\right)}{n^k}=$$
$$=\frac{x-1}{\sqrt[2^{kl}]{x}-1}\cdot\frac{1}{n^k}=\frac{x-1}{\frac{x^{1/2^{kl}}-1}{1/2^{kl}}\left(\frac{n}{2^l}\right)^k}.$$

De aici, ţinând cont că $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{x^{1/2^{kl}}-1}{1/2^{kl}}=\ln x$ şi $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\dfrac{n}{2^l}\right)^k=\infty$, deducem
$L=0$, unde $x>1$, deci $f(x)=0$, $x>1$.

Dacă $x\in(0,1)$, notăm pe $\dfrac{1}{x}$ cu y şi atunci $y>1$. Se observă că

$$\left(\sqrt[n]{x}+1\right)\left(\sqrt[n^2]{x}+1\right)\cdots\left(\sqrt[n^k]{x}+1\right)=\left(\frac{1}{\sqrt[n]{y}}+1\right)\left(\frac{1}{\sqrt[n^2]{y}}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{\sqrt[n^k]{y}}\right.$$
$$=\frac{\left(\sqrt[n]{y}+1\right)\left(\sqrt[n^2]{y}+1\right)\cdots\left(\sqrt[n^k]{y}+1\right)}{y^{\frac{1}{n}}y^{\frac{1}{n^2}}\cdots y^{\frac{1}{n^k}}}=\frac{\left(\sqrt[n]{y}+1\right)\left(\sqrt[n^2]{y}+1\right)\cdots\left(\sqrt[n^k]{y}+\right.}{y^{\frac{1}{n}\cdot\frac{1-1/n^k}{1-1/n}}}$$
$$=\frac{\left(\sqrt[n]{y}+1\right)\left(\sqrt[n^2]{y}+1\right)\cdots\left(\sqrt[n^k]{y}+1\right)}{y^{\frac{1-1/n^k}{n-1}}}.$$

Aşadar, avem

$$L=\lim_{k\to\infty}\frac{\left(\sqrt[n]{y}+1\right)\left(\sqrt[n^2]{y}+1\right)\cdots\left(\sqrt[n^k]{y}+1\right)}{n^k\,y^{\frac{1-1/n^k}{n-1}}}=0\cdot\frac{1}{y^{\frac{1}{n-1}}}=0,$$

de unde, rezultă că $f(x)=0$, oricare ar fi $x\in(0,1)$.

Deoarece f este continuă în $x=1$, conchidem că soluţia problemei, în
este

$$f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=0.$$

Probleme propuse[1]

Clasele primare

P.124. Schimbă locul unui singur beţişor pentru a obţine o egalitate.
(*Clasa I*) **Mariana Nastasia, e**

P.125. Într-o clasă cu 24 elevi sunt 3 perechi de gemeni. La şedinţa
este prezent câte un singur părinte din fiecare familie. Câţi părinţi p
şedinţă?
(*Clasa I*) **Mihaela Gâlcă, e**

P.126. Pentru a fierbe un ou sunt necesare 4 minute. Mama vrea s
ouă în trei tranşe. Câte minute sunt necesare?
(*Clasa a II-a*) **Ionela Bărăgan,**

P.127. Mircea are cu 35 timbre mai mult decât fratele său, Marius.
diferenţa, dacă Mircea ar mai primi 10 timbre, iar Marius ar da unui prieten
(*Clasa a II-a*) **Inst. Maria**

P.128. Câte numere de forma $\overline{RMAT}$ îndeplinesc condiţia $\overline{RAM} = \overline{M}$
(*Clasa a III-a*) **Dragoş Covrig,**

P.129. Scrieţi toate adunările de forma
$$\begin{array}{r} \text{MARI} + \\ \text{ARI} \\ \text{RI} \\ \text{I} \\ \hline 7676 \end{array}.$$
(*Clasa a III-a*) **Dana Bârsan, e**

P.130. Dacă a, b, c sunt cifre, câte egalităţi de tipul $a \times c = b : c$ se
Justificaţi răspunsul.
(*Clasa a III-a*) **Adina Voinescu, e**

P.131. Verificaţi dacă afirmaţia "A se împarte exact la 5, unde A
$2\,(1 + 2 + 3 + \cdots + 1999) + 1999 + 1997$" este adevărată sau falsă.
(*Clasa a IV-a*) **Prof. Nicolae Ivăşchescu**

P.132. Mama Oanei a împlinit 17532 zile pe data de 1 ianuarie 2007
lună şi zi a avut o vârstă de 3 ori mai mică?
(*Clasa a IV-a*) **Înv. Geta Creţ**

P.133. Doi elevi spun pe rând câte un număr natural, cel puţin egal
mult egal cu 7. Fiecare nou număr spus se adună la celelalte. Să se arate
elev poate să indice în aşa fel numerele încât să ajungă primul la suma 9
(*Clasa a IV-a*) **Prof. Petru As**

Clasa a V-a

V.76. Dacă a, b, x sunt cifre în baza 10, să se rezolve ecuaţia cu necu
$\overline{bxa} + \overline{baa} + \overline{xb} + \overline{ab} = \overline{abb} + \overline{aab}$.

Marius Fa

---

[1] Se primesc soluţii până la data de 31 decembrie 2007.

V.77. Să se determine câte numere de trei cifre distincte $\overline{abc}$ au prop
$(\overline{abc} - \overline{cba}) : 11$ este pătrat perfect.

Otilia Nemeş, Ocna Mur

V.78. Arătaţi că nu există trei numere prime a, b, c astfel încât $a\,(b +$

Nicolae Ivăşchescu

V.79. Arătaţi că numărul $13^{1000} - 9^{1000}$ se divide cu 1000.

Damian Marinescu, T

V.80. Dacă restul împărţirii unui număr natural la 10 este mai ma
spunem că acel număr este *favorabil*. Aflaţi numerele favorabile $\overline{ab}$ cu p
că nici $\overline{ab}$, nici $\overline{ba}$ nu pot fi scrise ca sumă de două numere favorabile.

Ioan Săcălean

Clasa a VI-a

VI.76. Determinaţi $a, b, c \in \mathbb{Z}$ dacă $\dfrac{a}{3} = \dfrac{b}{4} = \dfrac{3c+5}{2c+1}$.

Gheorghe I

VI.77. Să se arate că între oricare două puteri naturale consecutive
află cel puţin o putere a lui 2. Există două puteri consecutive ale lui 3 în
putem găsi trei puteri ale lui 2?

Marius Damia

VI. 78. Fie $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât mulţimile $\{a + b, a + 2b, \ldots, a +$
$\{1, 2, \ldots, 2007\}$ coincid. Să se arate că există $k \in \mathbb{N}^*$ pentru care $a + kb =$

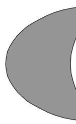
Dan Nedeianu, Drobeta-Tr

VI.79. Se consideră $\triangle ABC$ ascuţitunghic, iar M un punct în planul
lela prin M la AB taie AC şi BC în P, respectiv N. Demonstraţi că
dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate, atunci este adevărată şi a tr

(i) BM bisectoare pentru $\widehat{ABC}$; (ii) $MC \perp MB$; (iii) $[NP]$ linie
$\triangle ABC$.

Carmen-Daniela Tama

VI.80. Să se demonstreze că porţiunea haşurată din figura alăturată poate fi scrisă ca reuniune de segmente închise, două câte două disjuncte.



Marius Tiba, elev, Iaşi

Clasa a VII-a

VII.76. Aflaţi numerele naturale a, b, c pentru care $11\,(a - b - 9) >$
$11\,(b - c - 9) > a\,(a - 20)$ şi $11\,(c - a - 9) > b\,(b - 20)$.

Veronica Plăeşu şi Dan Pl

VII.77. Fie x, y numere reale pozitive, ambele subunitare sau ambe
nitare; să se arate că $xy + \dfrac{1}{xy} + 2 \geq x + \dfrac{1}{x} + y + \dfrac{1}{y}$. Dacă unul dintre n
mai mic, iar celălalt mai mare ca 1, inegalitatea îşi schimbă sensul.

Marian Tetiv

VII.78. Să se rezolve în numere naturale ecuaţia $6^a - 5^b = 1$.

Tudor Pădurariu, ele

VII.79. Fie $ABCD$ un patrulater convex, iar E şi F intersecţiile bi
unghiurilor $\widehat{D}$, respectiv $\widehat{B}$, cu diagonala $[AC]$. Să se arate că punctele E ş
dacă şi numai dacă $AB \cdot CD = AD \cdot BC$.

Claudiu-Ştfean I

VII.80. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat înscris într-un cerc, iar P
pe arcul mic $\overset{\frown}{BC}$. Să se arate că $PE + PF = PA + PB + PC + PD$.

Dan Radu, I

Clasa a VIII-a

VIII.76. Fie $ABCD$ un trapez cu $AB \parallel CD$, $M \in (AD)$ şi $N \in$
$MN \parallel AB$, iar $E \in (AB)$, $F \in (CD)$ oarecare. Fie $\{O\} = EF \cap M$
$[NT]$ perpendiculare de aceeaşi parte pe planul trapezului, G centrul de
$\triangle PEF$, $\{Q\} = MG \cap (TBC)$. Să se arate că MN este linie mijlocie în t
şi numai dacă $Q \in TN$.

Bogdan Raiţă,

VIII.77. Pentru $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, să se demonstreze inegalitatea

$$x^6 + y^6 - x^2y^2\left(x^2 + y^2\right) \geq \left(x^3 + y^3 - xy\left(x + y\right)\right)^2.$$

Lucian Tuţescu, Craiova şi Gheorghe Nedele

VIII.78. Pentru $a, b, c \in \mathbb{R}$, să se demonstreze inegalitatea

$$\sqrt{a^2 + b^2 - ab} + \sqrt{b^2 + c^2 - bc} + \sqrt{c^2 + a^2 - ca} \geq a + b + c.$$

Claudiu-Ştfean I

VIII.79. Să se rezolve în numere naturale ecuaţia $x\left(x + 1\right) = y^{2007}$.

Alexandru Negrescu, elev,

VIII.80. Ştiind că 1 ianuarie 2007 este într-o zi de luni, să se arate
anul 2100 există trei ani bisecţi în care luna februarie are trei duminici
zile impare.

Petru As

Clasa a IX-a

IX.76. Fie d_1, d_2, $\ldots$, d_k divizorii numărului $5^3 \cdot 7^2$, iar $S_n = d_1^n + d_2^n$
$n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că $S_{2n} = \dfrac{\left(5^{4n} + 1\right)\left(7^{3n} + 1\right)}{\left(5^n + 1\right)\left(7^n + 1\right)} \cdot S_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Generali

Petru As

IX.77. Să se arate că $a^3 + b^3 \geq ab\sqrt{2\left(a^2 + b^2\right)}$, $\forall a, b \geq 0$.

Ovidiu Pop, S

IX.78. Fie a, b, c laturile $\triangle ABC$, iar G centrul său de greutate. No
E, F punctele de contact ale cercului înscris cu laturile BC, CA, respect
se arate că $a\overrightarrow{GD} + b\overrightarrow{GE} + c\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{0}$ dacă şi numai dacă $\triangle ABC$ este ech

Marian Ursărescu

IX.79. Fie $\triangle ABC$ echilateral şi P un punct în interiorul său. C
$A_1 \in AB$, $B_1 \in BC$, $C_1 \in CA$ astfel încât $PA = PA_1$, $PB = PB_1$ şi P
Să se arate că P este centrul de greutate al $\triangle A_1B_1C_1$.

Iulia Pleşca, e

IX.80. Fie α, β, γ, δ patru numere pozitive cu suma π. Să se afle max
$S = \sin\alpha\sin\beta + \sin\gamma\sin\delta$ şi să se determine situaţia în care acest maxim

Adrian Cordun

Clasa a X-a

X.76. Fie $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Să se rezolve în $\mathcal{C}^2$ ecuaţia $z_1 z_2 = z_1$

Gabriel Popa şi Paul Georg

X.77. Fie $a, b \in \mathbb{C}$ şi z_1, z_2 soluţiile ecuaţiei $z^2 - az + b = 0$. Să s
următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) $|z_1| < 1$ şi $|z_2| < 1$; $\qquad (ii)$ $|a|^2 + \left|a^2 - 4b\right| < 2\left(|b|^2 + 1\right) < 4$.

Marian Tetiv

X.78. Determinaţi triunghiurile în care tangentele unghiurilor se ex
numere naturale, exact două dintre ele având aceeaşi paritate.

Cătălin Cali

X.79. Să se arate că în orice triunghi are loc inegalitatea $(p - r - 2R$
$\cdot (p - r_b)(p - r_c) \geq 0$. Când se atinge egalitatea?

I. V. Maftei şi Dorel Băiţan,

X.80. Arătaţi că există o infinitate de valori $n \in \mathbb{N}$ pentru care nume
şi $3n + 1$ sunt pătrate perfecte.

Gheorghe I

Clasa a XI-a

XI.76. Dacă $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, să se arate că $\det\left(A + {}^tA \cdot i\right) = \det($
Generalizare.

Dan Popescu

XI.77. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie de două ori derivabilă pe $[a,$
bele derivate strict pozitive. Pentru $\lambda \in [a, b]$, considerăm punctele
$B(b, f(b))$, $C(\lambda, y_C) \in G_f$ şi $D(\lambda, y_D) \in AB$. Demonstraţi că există
$\lambda_0 \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right)$ astfel încât $f(b) - y_D = y_C - f(a)$.

Cătălin Ţigăeru

XI.78. Pentru $x \in \mathbb{R}_+^*$, să se demonstreze inegalităţile:

$a)$ $\ln x + \dfrac{1}{x^a} \geq \dfrac{1}{a}(1 + \ln a)$, unde $a > 0$;

$b)$ $a^x > (1 + \varepsilon x)^k$, unde $a > e^k$, $k \in \mathbb{N}^*$, iar $\varepsilon \in \{\pm 1\}$.

Gheorghe Coste

XI.79. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir convergent, a cărui limită o notăm $L(x_n)$. D
că există $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{L(x_n)}\right)^n = a \in \mathbb{R}_+^*$ dacă şi numai dacă există $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + x_n -$
$b \in \mathbb{R}_+^*$. Ce legătură este între a şi b?

D. M. Bătineţu-Giurgiu,

XI.80. Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe $[0, 1]$, derivabilă pe
$f(0) = 0$. Presupunem că există $M > 0$ astfel încât $\left|f'(x) - \frac{1-x}{x} f(x)\right|$
$\forall x \in (0, 1)$. Să se arate că f este derivabilă în origine.

Mihai Crăciun

Clasa a XII-a

XII.76. Fie funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că există $c \in$ (
încât
$$\int_a^b \left(f(x) + f(a) + f(b)\right) dx = \frac{f(c) + f(a) + f(b)}{(c-a)^{n-1}} \cdot \frac{(b-a)^n}{n}.$$

Dumitru Mihalach

XII.77. Fie $k \in \mathbb{N}^*$ fixat. Considerăm şirurile $a_n = \int_{1/(n+1)^k}^{1/n^k}$ arcsi
$\forall n \geq 1$ şi $b_n = \int_{1/(n+1)^k}^{1/n^k} \operatorname{arctg}\left(n^k x\right) dx$, $\forall n \geq 1$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$.

Liviu Smarandache şi Lucian Tuţescu

XII.78. Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă şi fără puncte fixe,
că nici funcţiile $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ ori}}$, $n \in \mathbb{N}^*$, nu au puncte fixe.

Dorin Mărghidanu

XII.79. Fie V spaţiu vectorial de dimensiune n peste corpul K, iar u
morfism nilpotent al lui V (i.e., există $p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $u^p = \underbrace{u \circ u \circ \cdots}_{n \text{ ori}}$
Să se arate că $u^n = 0$.

Adrian Reis

XII.80. Fie A un inel în care $x^4 - y^4 = (x-y)(x+y)\left(x^2+y^2\right)$, $\forall x$,
a) Dacă inelul are unitate, să se arate că A este comutativ.
b) Rămâne valabil rezultatul de la *a*) dacă inelul A nu este unitar?

Gabriel Dospinescu, Paris şi Marian Tetiv

Probleme pentru pregătirea concursurilo

A. Nivel gimnazial

G116. Aflaţi toate numerele naturale N de patru cifre nenule distin
prietatea că diferenţa dintre cel mai mare număr obţinut prin permutarea
N şi cel mai mic asemenea număr este tocmai N.

Maria Miheţ, T

G117. Fie mulţimea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 98\}$. Arătaţi că oricum am a
elemente ale lui A, există două printre ele având suma cub perfect.

Titu Zvonaru, C

G118. În interiorul unui paralelogram având unghiul ascuţit de $30°$ ş
laturilor 17 cm şi 59 cm, se consideră 2007 puncte. Să se arate că putem
dintre aceste puncte astfel încât aria triunghiului determinat de ele să f
egală cu $\frac{1}{4}$ cm^2.

Mihai Ha

G119. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $A = \left\{\varepsilon_0 \cdot 2^0 + \cdots + \varepsilon_n \cdot 2^n \mid \varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in\right.$
$B = \left\{m \mid m \in 2\,\mathbb{Z} + 1, |m| \leq 2^{n+1} - 1\right\}$. Să se arate că $A = B$.

Dorel Miheţ, T

G120. Rezolvaţi în $\mathbb{N}$ ecuaţia $x!\,(y!)^{2005} = (z!)^{2007}$.

Anca Ştefania Tuţescu, elevă

G121. Dacă $a, b \in (0, 3/2)$, să se demonstreze inegalitatea
$$\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a+b+3}}+\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \leq \frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}.$$

Andrei Laurenţiu Ciupan, elev, I

G122. Fie G centrul de greutate al $\triangle ABC$ şi G' proiecţia sa pe dreap
se arate că $G' \notin [BC]$ dacă şi numai dacă $3a^2 < \left|b^2 - c^2\right|$.

Temistocle Bî

G123. Fie ABC un triunghi echilateral. Să se arate că orice punct M
cu proprietatea că $MB = MA + MC$ poate fi determinat folosind doar ec
echer poate fi folosit pentru a trasa drepte şi unghiuri drepte.)

Nicolae Ivăşchescu

G124. Fie $\triangle ABC$, A' mijlocul lui $[BC]$, iar P şi Q proiecţiile lui
respectiv AC. Să se arate că $4PQ \leq AB + BC + CA$.

Adrian Zahariuc, ele

G125. Fie $ABCD$ un pătrat, $M \in (AB)$, $\{O\} = AC \cap BD$, $\{S\} =$
iar $\{E\} = SO \cap MD$. Considerăm $AA' \perp (ABC)$, $AA' = AB$, I mijlocul
iar $\{H\} = MI \cap A'E$. Să se arate că:

$a)$ $MD \perp (A'AE)$; $\quad b)$ $\dfrac{V_{A'ADH}}{V_{MADH}} = \left(\dfrac{AB}{AM}\right)^2$.

Petru Rădu

B. Nivel liceal

L116. Cercul înscris în $\triangle ABC$ este tangent laturii BC în punctul D_1
A-exînscris este tangent aceleeaşi laturi în punctul D_2. Dreapta AD_2 in
cercul înscris în punctele S şi T. Să se arate că $\triangle STD_1$ este dreptunghic

Titu Zvonaru, C

L117. Fie $\triangle ABC$, $D \in (BC)$, iar $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ cercurile exînscrise triunghiur
şi ADC, tangente la BC. Arătaţi că o tangentă comună interioară cercu
$\mathcal{C}_2$ trece prin punctul de contact cu BC al cercului A-exînscris.

Neculai Roman, Mir

L118. Fie M un punct al elipsei $\mathcal{E}$, de focare F şi F'. Dreptele M
intersectează elipsa în A, respectiv A'. Să se arate că, atunci când M pa
dreapta AA' este mereu tangentă unei curbe fixe, care se cere a fi determ

Adrian Reis

L119. Fie $n \in \mathbb{N}$ şi $a.b, c \in \mathbb{R}_+^*$ cu $ab + bc + ca = 3$. Să se arate că a^{n+}
$c^{n+3} + 2abc\,(a^n + b^n + c^n) \geq 9$.

Titu Zvonaru, Comăneşti şi Bogdan Ioniţă, I

L120. Pentru $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reale pozitive, să se demonstreze inegalit
$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{(n-1)^2}+\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^{(n-1)^2}+\cdots+\left(\frac{a_n}{a_1}\right)^{(n-1)^2} \geq \frac{a_1 a_2^{2n-1}+a_2 a_3^{2n-1}+\cdots}{a_1^2 a_2^2 \cdots a_n^2}$$

Marian Tetiv

L121. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ dat. Să se arate că există câţiva termeni ai şirului $\Big($
a căror sumă este mai mare decât $\dfrac{1}{(n+1)(2n+1)}$.

Dumitru Mihalache şi Marian Tetiv

L122. La un campionat de fotbal participă 2^n echipe, astfel încât
care două se poate dinainte indica echipa mai bună. În prima etapă,
împart aleator în perechi şi dispută câte un meci, echipa mai bună trecân
următoare. Procedeul se repetă până la finală.

a) Care este probabilitatea ca a doua echipă ca valoare să iasă vicecar

b) Dacă se dispută şi o finală mică, ce probabilitate este ca, în plus, cea
echipă ca valoare să se claseze pe locul 3?

Irina Mustaţă, studentă

L123. Pe o tablă 8×9 se aşează dreptunghiuri 3×1 şi "figuri"
de forma unui dreptunghi 1×3 căruia îi lipseşte pătratul median (ca
în desenul alăturat). "Figurile" şi dreptunghiurile nu se pot roti şi nu
au puncte interioare comune. Să se arate că există o mulţime S de 18
pătrate 1×1 astfel încât, dacă pe tablă rămân 2 pătrate neacoperite de
dreptunghiuri sau "figuri", atunci cele două pătrate sunt obligatoriu din

Gabriel Dospinescu, stud

L124. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ fixat.Determinaţi matricele $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pentru care
I_n, iar $A^{2007} + A + I_n = O_n$ (cu $\bar{\cdot}$ am notat operaţia de conjugare).

Vlad Emanuel, e

L125. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie periodică şi lipschitziană (există L
care $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$), iae $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir strict cr
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$. Să se arate că mulţimea punct
ale şirului $(f(x_n))_{n\geq 1}$ coincide cu $\operatorname{Im} f$.

Paul Georgescu şi Gabriel

Training problems for mathematical conte

A. Junior highschool level

G116. Find all the natural numbers N of four distinct nonzero digit
property that the diferrence between the largest number obtained by per
four digitis of N and the smallest number obtained in the same manner equ

Maria Miheţ,

G117. Let us consider the set $A = \{1, 2, 3, \ldots, 98\}$. Show that two ele
among any 50 elements arbitrarily chosen from A such that their sum i
cube.

Titu Zvonaru, C

G118. 2007 points are considered in the interior of a parallelogram wit
angle equal to $30°$ and the lengths of its sides of 17 cm and 59 cm. Show
among these points can be selected so that the area of the triangle dete

them be at most equal to $\frac{1}{4}\,\mathrm{cm}^2$.

Mihai Ha

G119. Let $n \in \mathbb{N}^*$ and $A = \{\varepsilon_0 2^0 + \cdots + \varepsilon_n 2^n \mid \varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{-$
$B = \{m \mid m \in 2\mathbb{Z}+1, |m| \leq 2^{n+1}-1\}$. Show that $A = B$.

Dorel Miheţ, T

G120. Solve in $\mathbb{N}$ the equation $x!(y!)^{2005} = (z!)^{2007}$.

Anca Ştefania Tuţescu, high-school student

G121. For $0 < a, b < 3/2$, prove that the inequality

$$\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a+b+3}}+\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \leq \frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}.$$

holds.

Andrei Laurenţiu Ciupan, high-school student, I

G122. Let G be the gravity center of $\Delta\, ABC$ and G' its projection
BC. Show that $G' \notin [BC]$ if and only if $3a^2 < \left|b^2 - c^2\right|$.

Temistocle Bî

G123. Let ΔABC be an equilateral triangle. Show that any point
plane with the property that $MB = MA + MC$ can be determined usin
square only. (A tracing square can be used for tracing straight lines and rig

Nicolae Ivăşchescu

G124. Let ABC be a triangle with the midpoint of $[BC]$ denoted A'
the projections of A' on AB and respectively AC. Prove that $4PQ \leq AB+$

Adrian Zahariuc, high-school studen

G125. Let $ABCD$ be a square, $M \in (AB)$, $\{O\} = AC \cap BD$, $\{S\} =$
and $\{E\} = SO \cap MD$. We consider $AA' \perp (ABC)$, $AA' = AB$, I the
$[A'D]$ and $\{H\} = MI \cap A'E$. Show that:

$a)$ $MD \perp (A'AE)$; $\quad b)$ $\dfrac{V_{A'ADH}}{V_{MADH}} = \left(\dfrac{AB}{AM}\right)^2$.

Petru Rădu

B. Highschool level

L116. The circle inscribed in ΔABC is tangent to the side BC at the
and the $A-$ exinscribed circle is tangent to the same side at point D_2. T
line AD_2 intersects the inscribed circle at the points S and T. Show that
a right-angled triangle.

Titu Zvonaru, C

L117. Let us consider ΔABC, $D \in (BC)$, and $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ the exinscribe
the triangles ADB and ADC that are tangent to BC. Show that a comm
that passes between the circles $\mathcal{C}_1$ and $\mathcal{C}_2$ also passes through the contact
BC of the $A-$ exinscribed circle to ΔABC.

Neculai Roman, Mir

L118. Let M be a point of the ellipse $\mathcal{E}$ whose foci are F, F'. The st
MF and MF' intersect the ellipse at points A, respectively A'. Show
the point M runs over $\mathcal{E}$, the line AA' is ceaselessly tangent to a fixed cu
required to be determined.

Adrian Reis

L119. Let $n \in \mathbb{N}$ and $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ with $ab + bc + ca = 3$. Show that

$$a^{n+3} + b^{n+3} + c^{n+3} + 2abc(a^n + b^n + c^n) \geq 9.$$

Titu Zvonaru, Comăneşti and Bogdan Ioniţă,

L120. Let $a_1, a_2, \ldots, a_n$ be positive real numbers. Prove the inequal

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{(n-1)^2} + \left(\frac{a_2}{a_3}\right)^{(n-1)^2} + \cdots + \left(\frac{a_n}{a_1}\right)^{(n-1)^2} \geq \frac{a_1 a_2^{2n-1} + a_2 a_3^{2n-1} + \cdots +}{a_1^2 a_2^2 \cdots a_n^2}$$

Marian Tetiv

L121. Let $n \in \mathbb{N}^*$ be given. Show that a couple of terms of th $\left(\frac{1}{m^3}\right)_{m \geq n-1}$ exist whose sum is greater than $\frac{1}{(n+1)(2n+1)}$.

Dumitru Mihalache and Marian Tetiv

L122. A football championship is attended by 2^n teams such that the among each pair of teams can be predicted. In the first stage, the teams are grouped in pairs and play by one match each pair so that the better team the next stage. The procedure is repeated until the final match has to be

a) Which is the probability for the second team as to its value to be c vice-champion?

b) If a small final match is also disputed, which is the probability fo team as to its value to get classified on the third position?

Irina Mustaţă, student

L123. On a table of size 8×9, rectangles of size 3×1 are placed together with "figures" with the shape of a 1×3 rectangle with the middle square missing (as in the drawing aside). The "figures" and the rectagles cannot be rotated and they have no common interior points. Show that there exists a set S of 18 squares 1×1 such that, if only two squares remain on the table that are not covered by rectangles or "figures two squares are necessarily in S.

Gabriel Dospinescu, stude

L124. Let $n \in \mathbb{N}^*$ be fixed. Determine the matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ such $A = I_n$, and $A^{2007} + A + I_n = O_n$ ($\bar{\cdot}$ denotes the conjugate of the element bar).

Vlad Emanuel, high-school stude

L125. Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a periodical and lipschitzian function (i.e., t $L > 0$ such that $|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$), and let $(x_n)_{n \geq 1}$ b increasing sequence with $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \infty$ and $\lim\limits_{n \to \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$. Show t of limit points of the sequence $(f(x_n))_{n \geq 1}$ is $\operatorname{Im} f$.

Paul Georgescu and Gabriel

Pagina rezolvitorilor

BRAŞOV

Colegiul Naţional de Informatică "Gr. Moisil". **Clasa a IX-a.** ALDE
VII(71,73), VIII(71-74); ANGHEL Cătălin: VII(71,73), VIII(71-74); A
Sebastian: VII(71,72), VIII(72-74), IX.73; BAUM Bianca: VII(71-73), V
BERCEA Laura: VII(71-73), VIII(71-74); BONTAŞ Marcel: VII(71-73
74); COROESCU Alexandra: VII(71,73), VIII(72-74); DIEA Ionuţ: VII(7
(71-74); DINU Cristian: VII(71-73), VIII(73,74); DRAGOMIR Dragoş:
VIII(72-74); DRAGU Bianca: VII(71,73), VIII(72-74), IX.73; FARSC
VII(71-73), VIII(71-74); FOTIN Alexandra: VII(71,73), VIII(71,73-75);
ŞAN Andreea: VII(71,73), VIII(72-74); HERMENEANU Horia: VII(71-73
75); HÎNCU Ramona: VII(71-73), VIII(71-74); IONESCU Marius: VII(7
(72-74), IX.73; IVAN Iulia: VII(71,73), VIII(71-74); LEVIŢCHI Alexand
73), VIII(71-73); MAN Andrada: VII(71,73), VIII(71-74); MARIN Ionuţ:
VIII(72-74); MATHE Emil: VII(71,73), VIII(72-74); MIEREA Ciprian:
VIII(71-74); MOLDOVAI Adelina: VII(71-73), VIII(71-75), IX(72,73); MU
Oana: VII(71,73), VIII(72-74); NEGUŢ Bogdan: VII(71,73), VIII(72-7
Alexandru: VII(71,73), VIII(71-74); PAGU Roxana: VII(71,73), V
PETRUŞCA Alin: VII(71,73), VIII(72-74); POPA Alexandra: VII(71,73
74); POPESCU Dănuţ: VII(71,73), VIII(71-74); POTEC Ionela: VII(71-7
75); PUZDREA George: VII(71,73), VIII(72-74); RĂDUCU Gabriela:
VIII(72,75), IX.73; ROMAN Radu: VII(71,73), VIII(71-74), IX.72; SA
Livia: VII(71,73), VIII(71-74); SCORŢEA Liliana: VII(71-73), V
ŞERBAN Cătălina: VII(71-73), VIII(72-75); TAUS Alina: VII(71-73), V
ŢENEA Codruţa: VII(71,73), VIII(71-74); ŢICA Doris: VII(71-73), V
IX.73; VĂSII Cristian: VII(71,73), VIII(72-74); VLADU Ioana: VII(71,73
74); ZSILINSZKY Laura: VII(71-73), VIII(72-75).

CRAIOVA

Colegiul Naţional "Fraţii Buzeşti". **Clasa a VII-a.** DAN Ana-Vero
75). **Clasa a IX-a.** TUŢESCU Anca: IX(72,73), IX(71-73).

Colegiul Naţional "Carol I". **Clasa a VII-a.** STANCIU Ioan: VI(71-7
73,75), G(106-108,112).

HÂRLĂU

Şcoala "Petru Rareş". **Clasa a III-a** (înv. NICULESCU Carmen). SĂ
Emilian: P(104-106,108-110). **Clasa a IV-a** (înv. PÂRÂIALĂ Olga
Mara: P(111,112,118,119,123). **Clasa a IV-a** (înv. CREŢU Maria).
Alina: P(104-106,108,110,112,113).

Liceul Teoretic "Ştefan cel Mare". **Clasa a V-a.** BUZILĂ Andreea:
108,110-113), V(66,67,69); IVĂNUŢĂ Andreea: P(111,112), V(66,67,7
Mădălina: P.113, V(66-70). **Clasa a XI-a.** BURICAN Bogdan Alexan
68,70), X.68.

IAŞI

Şcoala nr. 3 "Al. Vlăhuţă". **Clasa a IV-a** (înv. MĂRIUŢĂ Valent

LĂDEANU Andrei: P(114,118,119,121,123); CULEA Alina: P(114,118,11
DIACONIŢA Theodor: P(104,114,118,119,121,123); HADARAG Ana-Ma
118,119,121,123); NĂSTASE Cosmin: P(114,118,119,121,123); POPA Iuli
118,119,121,123); PROCA Ancuţa-Ioana: P(114,118,119,121,123); TÂNC
dra-Ioana: P(114,118,119,121,123). **Clasa a IV-a** (inst. MAXIM Gabriel
Ionela-Lavinia: P(104,105,108,114,118,121); CELMARE Raluca-Iuliana:
108,114,118,121); GHEMU Laura: P(104,105,108,114,118,121); HURCH
P(104,105,108,114,118,121); NEAGU Ramona-Mihaela: P(104,105,108,11
POPOVICI Ionuţ: P(104,105,108,114,118,121); RUSU Ioana-Andreea:
108,114,118,121); RUSU Mădălina-Andreea: P(104,105,108,114,118,121);
P(104,105,108,114,118,121); VECHIU Mădălina: P(104,105,108,114,118,1
CHI Georgiana-Alexandra: P(104,105,108,114,118,121). **Clasa a VI-a.**
Magdalena: V(71,73,74), VI(71,74); DĂSCĂLIŢA Georgiana: V(71,73,
74); TEODORESCU Oana: V(71,73,74), VI(71,74).

Şcoala nr. 13 "Alexandru cel Bun". **Clasa a III-a** (inst. COJOCA
AGAFIŢEI Elena-Roxana: P(114-117,119); CARAMALĂU Andra: P(11
CĂLIN Andreea-Claudia: P(114-117,119); COJOCARIU Andreea: P(11
DUDUMAN Luisa-Ştefania: P(114-117,119); LELEU Alexandrina-Ştefa
117,119); LUPAŞCU Diana-Maria: P(114-117,119); MANOLACHE Mădă
ea: P(114-117,119); MIHĂILĂ Narcisa-Lorena: P(114-117,119); PASCU
P(114-117,119); PĂDURARU Tiberiu-Ştefan: P(114-117,119); RĂDUC
Andrei: P(114-117,119); SAVIN Cristina-Simona: P(114-117,119); ŞTEFA
Vasile: P(114-117,119); ŞTIUBEI Cosmin-Ionuţ: P(114-117,119).

Şcoala nr. 26 "Gh. Coşbuc". **Clasa a II-a** (inst. RACU Maria). Apac
Georgiana: P(104,114-117); BURA Emma-Andreea: P(104,114-117);
Alexandra: P(104,114-117); CRĂCIUN Ioana-Daniela: P(104,114-117); F
Ştefania: P(104,114-117); GRĂDINARIU Georgiana: P(104,114-117);
Ovidiu Constantin: P(104,114-117); HUZA Mădălina: P(104,114-117);
Dragoş-Claudiu: P(104,114-117); MAXIM Alexandra-Camelia: P(104,114
CĂ Cosmin: P(104,114-117); VASILE Bogdan-Andrei: P(104,114-117).

Şcoala Normală "V. Lupu". **Clasa a VI-a.** NASTASIA Mariana:
V(66-75).

Lieul Teoretic "M. Eminescu". **Clasa a V-a.** BÎRNOSCHI Leti
123), V.71, VI.71; EŢCU Magda: P.123, V(71,73,74), VI.71; FILIMON
P(121-123), V(71-73).

Colegiul Naţional "Emil Racoviţă", locaţia "Gh. Asachi". **Clasa a III-**
LINESCU Rodica). BĂJENARU Brădiţa: P(114-120); CHIVULESCU
P(114,116-120); PETREA Mădălina: P(114-120); UNGUREANU Geor
120). **Clasa a VII-a.** TUDORACHE Alexandru Gabriel: VI(71-75),
G(106,108,110).

Colegiul Naţional "C. Negruzzi". **Clasa a VI-a.** PĂVĂLOI Alexan
V(66,67,69,70). **Clasa a VIII-a.** TIBA Marius: G(107,108,110-112).

Colegiul Naţional. **Clasa a VII-a.** MOCANU Dan Mihai: V(71,72,75)
VII.75; OROIAN Bianca: V(66,67,69,70), VI.69, VII.70; PETRESCU

V(71,73,75), VI.71, VII.71.

ONEŞTI (Bacău)

Şcoala "Ghiţă Mocanu". **Clasa a VII-a.** PĂDURARIU Tudor: V
VIII(66,67,69), IX(68,70), G(96-98,101-105).

SIBIU

Colegiul Naţional "Gh. Lazăr". **Clasa a XII-a.** VLAD Emanuel: L(9

SUCEAVA

Şcoala generală nr. 3. **Clasa a II-a** (înv. TABARCEA Silvestru).
Ştefan: P(104,105,107-109). **Clasa a III-a** (inst. NECHITA Daniela).
Mircea: P(104-106,108-110).

Premii acordate rezolvitorilor

ASOCIAŢIA "RECREAŢII MATEMATICE" în colaborare c
revistei **RECREAŢII MATEMATICE** acordă câte o **diplomă** şi un **p**
cărţi, pentru trei apariţii la rubrica *Pagina rezolvitorilor*, elevilor următo

Şcoala "Petru Rareş", **Hârlău**

PINTILII Alina (cl. a IV-a): 2/2005(8pb), 1/2006(8pb), 1/2007(7pb).

Liceul Teoretic "Ştefan cel Mare", **Hârlău**

BUZILĂ Andreea (cl. a V-a): 2/2005(8pb), 1/2006(8pb), 1/2007(11pb

BURICAN Bogdan Alexandru (cl. a XI-a): 1/2003(5pb), 1/2004(7pb)

Şcoala nr. 3 "Al. Vlăhuţă", **Iaşi**

CELMARE Raluca-Iuliana (cl. a IV-a): 1/2006(5pb), 2/2006(8pb), 1/

CULEA Alina (cl. a IV-a): 1/2006(5pb), 2/2006(6pb), 1/2007(5pb);

NEAGU Ramona-Mihaela (cl. a IV-a): 1/2006(5pb), 2/2006(8pb), 1/

POPOVICI Ionuţ (cl. a IV-a): 1/2006(5pb), 2/2006(8pb), 1/2007(6pb)

POPA Iulian (cl. a IV-a): 1/2006(5pb), 2/2006(6pb), 1/2007(5pb);

PROCA Ancuţa-Ioana (cl. a IV-a): 1/2006(5pb), 2/2006(6pb), 1/2007

RUSU Ioana-Andreea (cl. a IV-a): 1/2006(5pb), 2/2006(8pb), 1/2007(

VECHIU Mădălina (cl. a IV-a): 1/2006(6pb), 2/2006(8pb), 1/2007(6p

Şcoala nr. 13 "Alexandru cel Bun", **Iaşi**

MIHĂILĂ Narcisa-Lorena (cl. a III-a): 1/2006(5pb), 2/2006(5pb), 1/

Colegiul Naţional "C. Negruzzi", **Iaşi**

TIBA Marius (cl. a VIII-a): 1/2006(7pb), 2/2006(8pb), 1/2007(5pb).

Colegiul Naţional, **Iaşi**

MOCANU Dan Mihai (cl. a VII-a): 1/2005(11pb), 1/2006(5pb), 1/20

IMPORTANT

- În scopul unei legături rapide cu redacţia revistei, pot fi utilizate urm
adrese e-mail: **tbirsan@math.tuiasi.ro** sau **t_birsan@yahoo**
profgpopa@yahoo.co.uk . Pe această cale colaboratorii pot purta d
ţia un dialog privitor la materialele trimise acesteia, procurarea nu
revistei etc. Sugerăm colaboratorilor care trimit probleme originale
publicare să le numeroteze şi să-şi reţină o copie xerox a lor pentru
purta cu uşurinţă o discuţie prin e-mail asupra acceptării/neacceptă
tora de către redacţia revistei.

- La *problemele de tip L* se primesc soluţii de la orice iubitor de ma
elementare (indiferent de *preocupare profesională* sau *vârstă*). Fieca
soluţiile acestor probleme - ce sunt publicate în revistă după un a
urmată de numele tuturor celor care au rezolvat-o.

- **Adresăm cu insistenţă rugămintea ca materialele trimise**
să nu fie (să nu fi fost) trimise şi altor publicaţii.

- Rugăm ca materialele tehnoredactate să fie trimise pe adresa reda
soţite de fişierele lor (de preferinţă în LaTeX).

ASOCIAŢIA "RECREAŢII MATEMATIC

La data de 14.02.2005 a luat fiinţă **ASOCIAŢIA "RECREAŢI**
MATICE", cu sediul în Iaşi (str. Aurora, nr. 3, sc. D, ap. 6), având ca
jinirea activităţilor de matematică specifice învăţământului preuniversit
zarea şi desfăşurarea de activităţi care să contribuie la dezvoltarea gust
matematică în rândurile elevilor, profesorilor şi iubitorilor de matematic
larea preocupărilor şi cercetărilor originale.

Obiectivele majore pentru atingerea scopului propus sunt:

1. editarea unei reviste destinată elevilor şi profesorilor – **revista "**
Matematice";

2. fondarea unei biblioteci de matematică elementară – **biblioteca "**
Matematice";

3. alcătuirea unei colecţii de cărţi de matematică elementară, cărţi d
şi aflate la prima apariţie – **Colecţia "Recreaţii Matematice"**.

Poate deveni membru al Asociaţiei, printr-o simplă completare a une
orice perosană care aderă la obiectivele acesteia şi sprijină realizarea lor.

Membri de onoare ai Asociaţiei, academicienii: **Constantin Cor**
Radu Miron

Revista semestrială **RECREAȚII MATEMATICE** este e
ASOCIAȚIA "RECREAȚII MATEMATICE". Apare la datele de 1
1 septembrie şi se adresează elevilor, profesorilor, studenților şi tutu
pasionați de matematica elementară.

În atenția tuturor colaboratorilor

Materialele trimise redacției spre publicare (note şi articole, che
metodică, probleme propuse etc.) trebuie prezentate îngrijit, clar şi co
trebuie să prezinte interes pentru un cerc cât mai larg de cititori. Se reco
textele să nu depăşească patru pagini. Evident, **ele trebuie să fie origi
nu fi apărut sau să fi fost trimise spre publicare altor reviste.** Rugăm
rialele tehnoredactate să fie însoțite de fişierele lor.

Problemele destinate rubricilor: **Probleme propuse** şi **Problem
pregătirea concursurilor** vor fi redactate pe foi separate cu enunț şi de
ție/rezolvare (câte una pe fiecare foaie) şi vor fi însoțite de numele autoru
la şi localitatea unde lucrează/învață.

Redacția va decide asupra oportunității publicării materialelor prim

În atenția elevilor

Numele elevilor ce vor trimite redacției soluții corecte la proble
rubricile de **Probleme propuse** şi **Probleme pentru pregatirea conc
vor fi menționate în **Pagina rezolvitorilor**. Se va ține seama de regulile:

1. Pot trimite soluții la **minimum cinci probleme propuse în
prezent şi cel anterior al revistei**; pe o foaie va fi redactată soluția un
probleme.

2. Elevii din clasele **VI-XII** au dreptul să trimită soluții la p
propuse pentru clasa lor, pentru orice clasă mai mare, din două clase m
imediat anterioare. Elevii din clasa a **V**-a pot trimite soluții la problemel
pentru clasele a IV-a, a V-a şi orice clasă mai mare, iar elevii claselor
trimite soluții la problemele propuse pentru oricare din clasele primare şi
să mai mare. Orice elev poate trimite soluții la problemele de concurs (ti

3. Vor fi menționate următoarele date personale: numele şi p
clasa, şcoala şi localitatea.

4. Plicul cu probleme rezolvate se va trimite prin poştă (sau v
direct) la adresa Redacției:

Prof. dr. Temistocle Bîrsan
Str. Aurora, nr. 3, sc. D, ap. 6,
700 474, Iaşi
Jud. IAŞI
E-mail: tbirsan@math.tuiasi.ro sau t_birsan@yahoo.

CUPRINS

ARTICOLE ŞI NOTE

NOTA ELEVULUI

CHESTIUNI METODICE

PROBLEME ŞI SOLUȚII

Anul X, Nr. 1 **Ianuarie – Iuni**

RECREAȚII MATEMATIC

REVISTĂ DE MATEMATICĂ PENTRU ELEVI ŞI PROF

125 de ani de la apariţi revistei "Recreaţii Ştiinţific (1883 – 1888)

$$e^{i\pi} = -1$$

Asociația "Recreații Matemati

IAŞI - 2008

Semnificația formulei de pe copertă:

Într-o formă concisă, formula $e^{i\pi} = -1$ leagă cele patru ramuri fu
ale matematicii:

ARITMETICA	reprezentată de 1
GEOMETRIA	reprezentată de π
ALGEBRA	reprezentată de i
ANALIZA MATEMATICĂ	reprezentată de e

Adresa redacției:

Catedra de Matematică – Universitatea Tehnică “Gh. Asachi” Iași
Bd. Carol I, nr.11, 700506, Iași
Tel. 032 – 213737 / int. 123
E-mail: recreatii.matematice@gmail.com
http://www.recreatiimatematice.uv.ro

TIPĂRITĂ LA SL&F IMPEX IAȘI
Bd. Carol I, nr. 3-5
Tel. 0788 498933
E-mail: simonaslf@yahoo.com

ISSN 1582 - 1765

Anul X, Nr. 1 **Ianuarie – Iuni**

RECREAŢII MATEMATICE

REVISTĂ DE MATEMATICĂ PENTRU ELEVI ŞI PROF

$$e^{i\pi} = -1$$

Revistă cu apariţie semestrială

EDITURA "RECREAŢII MATEMATICE

IAŞI - 2008

Recreaţii Ştiinţifice – 125 de ani de la apar

La 15 ianuarie 1883, la Iaşi (în tipo-litografia "Buciumului Român
primul număr al revistei *Recreaţii Ştiinţifice*, publicaţie ştiinţifică adresat
audienţe, o premieră în peisajul cultural românesc de la acea dată. Colect
tuziaşti care au pus piatra de temelie a acestei întreprinderi cu profunde r
în viaţa academică română era format din *N. Culianu, C. Climescu, I.*
la Facultatea de Ştiinţe din Iaşi), *G.I. Lucescu, V. Paladi, G.I. Roşiu, I*
G. Zarifopol, I.V. Praja şi *I.M. Dospinescu* (profesori la diferite licee ş
Iaşi). Colaboratori regulaţi au fost şi *M. Tzony, V.C. Buţureanu, A. Sc*
Universitatea din Iaşi.

Noua publicaţie a avut ca model reviste de prestigiu ce apăreau în ţările
îndelungată din Europa, din care s-au preluat, în timp, articole şi problem
lui Gergonne (Franţa), Mathesis (Gand, Belgia - a nu se confunda cu
italiană cu acelaşi nume fondată la Torino în 1895), Journal de mathéma
mentaires (Paris), Revue Scientifique etc.

Revista a apărut lunar, fără întrerupere, timp de şase ani. Iniţial, fie
avea 32 de pagini, cuprinzând articole cu subiecte variate: *aritmetică, algeb*
trie, geometrie analitică, trigonometrie, calcul diferenţial şi integral, istori
ticii, mecanică, topografie, cosmografie, astronomie, chimie, geografie s
Ulterior, s-au publicat şi numere de 24 de pagini sau numere comasate (
mere de vacanţă) de 48 sau 40 de pagini.

Revista a cunoscut o bună răspândire în Regatul României (în întind
atunci), primind colaborări sub forma de note, scrisori, etc. din Iaşi,
Bacău, Botoşani, dar şi din Năsăud, Paris şi a constituit un model pe
prinderi similare ulterioare, cum ar fi cunoscuta Gazeta Matematică.

Ca "profesie de credinţă" a inimosului colectiv de editori, apare scri
adresare *Cătră Cetitori* în prima pagină a nr.1 din 1883, în care se afirmă
noua publicaţie să remedieze din lacunele existente în învăţământul nost
ospitalitate profesorilor sau institutorilor care *"tratează o chestiune de şti*
metoadă proprie lui", să încurajeze tinerimea studioasă. Cu modestie şi o
se adaugă:

"Nu pretindem că vom produce lucrări originale. În starea în care s
noastră, lucrări originale, pe terenul ştiinţific, sînt foarte greu de intreprin
nu este vinovat pentru aceasta; trebue să ne facem stagiul cuvenit."

Într-adevăr, câteva date sunt edificatoare în privinţa situaţiei existent
ţara noastră. Imediat după Unirea Principatelor s-a înlăturat, oficial, scri
fabetul chirilic (în anul 1860 în Ţara Românească şi 1863 în Moldova), iar
cu caractere latine s-a adoptat sistemul etimologic cu utilizarea semnelor
În perioada de pînă la 1880, limba româna literară (modernă) şi-a încheia
de unificare şi de stabilizare în forma pe care o are astăzi. Învăţământul
mari prefaceri şi frământări: înfiinţarea universităţilor din Iaşi şi Bucu
învăţământului din 1864, numeroasele regulamente menite să organizeze

şcoli şi să stabilească programele acestora, lipsa de manuale şi cursuri în lim
etc. Aceste dificultăţi, greutăţile materiale, cât şi lipsa unui public forn
receptarea unei reviste ştiinţifice de acest gen fac ca actul publicării R
Ştiinţifice să fie unul temerar şi pornit dintr-o înaltă responsabilitate,
deplinirea căruia au fost necesare multă dăruire şi multe sacrificii. In vo
se subliniază concepţia umanistă a colectivului de redacţie, abordarea co
actului ştiinţific şi a procesului de învăţământ de la noi:

*"Credem că noi am tras cea întăi brazdă care conduce cătră lucrări
Brazda'i mică şi îngustă, dar există !* [...] *Noi de la început am avu
că o să trebuiască să facem sacrificiu de timp şi bani. Am făcut şi vom
sacrificiu."*

In numărul 7 din anul IV este amintit rolul deosebit jucat de *Ioan P*
care "*venit din Transilvania în anul 1858 a predat cel întăiu în mod si
complect ştiinţele matematice în cursul superior al Liceului din Iaşi.* [...
*excelent profesor. A ştiut să inspire gustul ştiinţilor matematice la o m
elevii lui* [...]."; printre aceştia sunt amintiţi Gh. Roşiu, M. Tzony, C.
V. Palade ş.a.

Răsfoind numerele Recreaţiilor Ştiinţifice, cititorul de azi va aprecia
limbă folosită acum peste o sută de ani, calitatea înaltă a materialelor i
va constata şi existenţa multor lacune în terminologia de specialitate, ma
în matematică.

Aproape în fiecare număr erau prezente rubricile de Probleme Propuse ş
Rezolvate (soluţii primite de la cititori). Terminologia vremii era Probleme
iar rezolvitorii erau de la diferite licee şi şcoli din Iaşi (în primele luni) ca, m
apară rezolvitori din toată Moldova (Bacău, Bârlad, Dorohoi, Focşani, G
de la Bucureşti (Liceul Sf. Sava, Şcoala de Poduri şi Şosele, Şcoala Milita
Normală Superioară), Craiova, Alexandria sau chiar de la Paris, unde îşi
studiile mulţi tineri români (Institutul Duvignau, Institutul Jauffret, Coll
Barbe, Liceul St. Louis). Cel mai activ rezolvitor a fost *Vasile Cristescu*
la Liceul din Iaşi, apoi student la Şcoala de Poduri şi Şosele din Bucureşti,
care a publicat şi câteva Note; ulterior, a fost membru fondator al renum
Matematică - înfiinţată în anul 1895, cu apariţie neîntreruptă până astăzi -
cei patru "stâlpi" ai acesteia. În ultimul an de apariţie a Recreaţiilor Ştiin
printre rezolvitori este de remarcat prezenţa lui *Dimitrie Pompeiu* (1
marele matematician de mai târziu, pe atunci în vârstă de 15 ani, elev în
la gimnaziul din Dorohoi. Sunt numeroşi rezovitorii care au devenit apo
prestigiu: *Ermil Pangrati* (profesor de geometrie descriptivă la universităţ
şi Bucureşti, rector al celei din urmă, organizatorul Şcolii de arhitectur
ministru, senator), *Anastasie Obregia* (profesor de chimie organică, Univer
Iaşi), *Grigore G. Stratilescu*, *Petru N. Culianu*, *Vasile Teodoreanu* ş. a.

Unele materiale publicate sunt menite să suplinească lipsa de cărţi şi
îndemâna studenţilor şi profesorilor. *Constantin Climescu* expune, într-u

nouă articole intitulat *Câteva curbe celebre şi importante* (opt apărute în
şi unul în nr.1 din 1885), principalele curbe plane clasice: cisoida lui Di
coide, cicloide, spirale etc. Începând cu nr.4 din 1885 şi continuând numă
(cu puţine excepţii) până la dispariţia revistei, *Miltiade Tzony* publică
probleme, ce cuprinde 98 de probleme de mecanică raţională (anume, sta
sunt complet rezolvate şi însoţite de figuri (v. [**8**], pp. 138-140, pentru un s
nunţit). O expunere a determinanţilor şi utilizării lor a fost făcută de *Io*
în nr.11 şi 12 din 1883 şi nr.1 din 1884; o altă prezentare a acestora (după
ce apare în vol.V (pp. 150 şi 190), este semnată cu pseudonimul *Candi*
notele de subsol de la pp. 239 şi 256, se aduc argumente pentru identifica
pseudonim cu *Victor Costin*, pe atunci student, mai târziu profesor la un
din Iaşi. Un membru fondator şi constant colaborator, publicând chesti
de matematică elementară, este *I.V. Praja*.

Din bogatul conţinut al Recreaţiilor Ştiinţifice, punem în evidenţă
direcţii dezvoltate în paginile sale. *G.I. Lucescu* publică un studiu ampl
mentat despre calendar. *Vasile C. Buţureanu* semnează două lungi cicluri
în domeniul mineralogiei. *August Scriban* publică o serie de articole d
Asiei centrale. *Iacob Solomon* tratează, într-o serie de şase note din vol.V
de istoria matematicii în antichitate utilizând surse la zi (de exemplu, *Ges*
Mathematik (Istoria matematicii) a lui Moritz Cantor, 1880).

Revista *Recreaţii Ştiinţifice* a găzduit şi traduceri (parţiale) ale unc
referinţă. *G.I. Roşiu* traduce în româneşte (după o ediţie italiană a lui
F. Brioschi, Florenţa,1868) şi publică în vol. II şi III ale revistei prima
Elementele lui Euclid. (Precizăm că traducerea completă a Elementelor a
mult mai târziu de Victor Marian şi publicată în Biblioteca Gazetei Mat
trei volume, 1939-1941.) Sub acelaşi pseudonim *Candide* sunt prezentate
(nr.4-6 şi 8-11) şi vol. V (nr. 2 şi 3) traduceri din *Geometrie der Lage* (Ge
poziţie) a lui Staudt.

Rubrica *Diverse*, cu scop de informare, are un conţinut bogat şi variat
toate domeniile ştiinţei. În nr.1 din 15 ianuarie 1883, la p.21, se preia art
tografia Mişcării" (ce anticipează cinematografia) după Revue Scientific
dec. 1882 - o adevărată dovadă de promptitudine şi de capacitate de selec
din 1883, la p.47, apare o scurtă notiţă despre înfiinţarea la Stockholm,
faimoasei *Acta Mathematica*, sub auspiciile regelui Suedo-Norvegiei şi sub
lui G. Mittag-Lefler; printre colaboratori se numărau şi Appell, Goursat
(din Franţa) care, mai târziu (în 1905), vor alcătui comisia care a exami
teză de doctorat a lui Dimitrie Pompeiu, la Sorbona [**5**], [**6**]. In nr.9 di
articol întreg este dedicat erupţiei vulcanului Krakatoa, catastrofă care a
globul (relatare oculară). În vol.III (1885), nr.5 şi 6, două articole su
marelui matematician belgian *Eugène-Charles Catalan* (1814 -1894), me
se inclusiv celebra sa conjectură din 1844 (numerele 8 şi 9 sunt singure
naturale consecutive care sunt puteri exacte) rezolvată mult mai târziu, în

de matematicianul român *Preda Mihăilescu* [**12**]. Vol. IV din 1885, p.20
toarele, prezintă fenomenul natural numit *mascaret* sau *pororoca*, iar la
cititorul este informat asupra unor date tehnice privind proiectul *turnulu*
şi asupra unor controverse contemporane generate de această construcţie.

Sunt cultivate dezbateri în jurul unor probleme din actualitatea ştii
din realitatea învăţământului românesc. Astfel, articolul "Sf. Gheorghe
din nr. 5, anul VI, semnat de *Paul Tanco* (din Năsăud), primul român
matematici, este comentat de *Constantin Gogu*, ilustru profesor de la Un
din Bucureşti, care mai publică, apoi, cinci scrisori asupra regulelor înt
pentru găsirea zilei Paştilor. Menţionăm polemicile susţinute cu publi
Contemporanul pe teme de chimie sau astronomie (p. 139, p. 142, p. 180
nr. 6 din 1883 etc.). Cu deosebită putere de pătrundere, *G. Zarifopol* scr
adeseori ipoteze gratuite, emise de un învăţat străin sunt luate de redacţ
Contemporanul ca ultimele adevăruri ale ştiinţei". Este interesantă ana
şi riguroasă făcută de *G. Lucescu* în vol.VI unui manual manuscris de
destinată cl. I şi a II-a primară şi urmată de avizul negativ dat acestuia. Se
pentru corectitudinea redacţiei este faptul că sunt publicate alăturat a
adusă de un referent lucrării lui I.V. Praja "Curs de aritmetică raţion
1885, 359 pagini, cât şi replica acestui autor (vol.VI, pp.238-247).

Să remarcăm şi faptul că, dintre membrii fondatori, numai N. Culianu ş
nu apar în paginile revistei cu nici un fel de contribuţie, iar I.M. Zamfires
doar un rezumat al unui articol din *Revue Scientifique* asupra filoxerei.

Alte trăsături foarte interesante sunt rigurozitatea deosebită a activităţ
tice, bazată pe standarde care sunt valabile şi astăzi cât şi conectarea e
viaţa ştiinţifică mondială. Se manifestă o bună înţelegere a fenomenulu
ştiinţifice şi a evenimentelor care frământau lumea în penultimul deceniu a
al XIX-lea.

Redacţia acorda maximă importanţă relaţiilor directe cu cititorii, do
publicarea de scrisori, note, a unor soluţii diferite pentru aceeaşi problem
statistici amănunţite referitoare la rezolvitori.

Pentru toate articolele şi notele publicate se indică sursele folosite. C
traordinar este aparatul bibliografic folosit de către autori, la toate discipl
obiectul publicaţiei. Se citează cărţi şi reviste de specialitate străine con
(an de apariţie chiar şi 1888), dar şi "Aritmetica" lui Amfilohie Hotiniul
Iaşi, sau *Memoriile Academiei din Paris*, începînd cu 1699.

Semnalăm cititorilor şi prezenţa unor erori specifice epocii de pionera
naţie, de numerotare a problemelor, de tipărire etc.), corectate în parte
erate de către redacţia revistei şi care nu afectează în mod esenţial lectur

Fără nici o îndoială, revista *Recreaţii Ştiinţifice* a fost dedicată în p
chestiunilor de matematică. O statistică care ia în considerare numărul
arată că în aproximativ 90% din spaţiul revistei sunt tratate subiecte d
tică, mecanică şi astronomie. Numărul total al problemelor propuse,

în cei şase ani de apariţie, este de 298 (cu 284 fiind numerotate două pro
dicţionarele de periodice româneşti revista este menţionată ca o publicaţi
tribuţie importantă la educaţia matematică a tineretului [**3**, **7**].

În istoria matematicii româneşti, perioada 1860-1898 este marcată d
făcute în scopul organizării şi modernizării învăţământului şi punerii bazelo
ştiinţifice originale. Contribuţia *Recreaţiilor Ştiinţifice* la realizarea acestu
a fost recunoscută şi apreciată de generaţiile care i-au urmat. În *Introducer*
an I (1895), redactorii Gazetei Matematice spun: *"Mai mulţi dintre noi dat*
gust [pentru matematică - n. *n.*] *revistei "Recreaţii Ştiinţifice" ce a apăr*
de 6 ani la Iaşi şi pe care noi încercăm a o continua" [**17**]. Mai târziu, în
această revistă sărbătorea 40 ani de existenţă, *I. Ionescu*, *Gh. Ţiţeica* şi
aminteau rolul avut de *Recreaţiile Ştiinţifice* [**9**, **16**]. *Gh. Ţiţeica* spunea: "
încercare de a ieşi din acest impas, de a rupe cu inerţia, de a determina u
preocupare ştiinţifică şi de a crea astfel un început de atmosferă prielnică
ştiinţei matematice, a fost făcută la Iaşi prin publicarea "Recreaţiilor
" [**16**, p. 69]. Alte aprecieri ale unor distinşi matematicieni români p
în [**18**]. *I. Popa* face în 1955 [**14**], un studiu aprofundat asupra con
aportului Recreaţiilor Ştiinţifice - numind-o *precursoare a Gazetei Mate*
prilejul sărbătoririi a 60 de ani de apariţie a Gazetei Matematice; studiul
şi în volumul omagial dedicat centenarului Universităţii din Iaşi [**15**]. M
[**1**], [**11**], dar şi articolele [**2**], [**4**], [**13**] dau cititorului noi surse de informa

Constantin Climescu a fost, prin bogăţia şi varietatea subiectelor p
sacrificiile materiale făcute, susţinătorul principal şi sufletul *Recreaţiilor*
Pe coperta interioară a revistei din al VI-lea an de apariţie este scris: "
Administraţia la Dl. C. Climescu, Profesor la Facultatea de Ştiinţe, Strada
Aceeaşi adresă apare şi în casetele ce urmează titlul în fiecare număr din a
an.

Apariţia revistei *Recreaţii Ştiinţifice*, învingând dificultăţi de tot felul,
un act de curaj, dăruire, înţelepciune şi clarviziune. Revista a reuşit ca,
ani de existenţă, să contribuie la ridicarea nivelului învăţământului din ţa
în special al celui matematic.

Bibliografie

1. **G. Şt. Andonie** - *Istoria matematicii în România*, vol. I, Ed. ştiinţifică,
1965 (pp. 236-240).

2. **Gh. Bantaş** - *O pagină din istoria matematicii româneşti: centena*
"Recreaţii Ştiinţifice", Probleme de istoria şi filozofia ştiinţei, vol. X, 19
Iaşi a Academiei Române, 15-30.

3. **Şt. Bârsănescu**, **F. Bârsănescu** - *Educaţia, învăţământul, gândirea ped*
România. Dicţionar cronologic, Ed. ştiinţifică şi enciclopedică, Bucureşti

4. **T. Bîrsan** - *Recreaţii Ştiinţifice - "cea întâi brazdă"*, Recreaţii Matematic
nr. 1, 1-5.

5. **T. Bîrsan**, **D. Tiba** - *O suta de ani de la publicarea tezei de doctorat a lu
Pompeiu*, Recreaţii Matematice VII(2005), nr.2, 85-89.

6. **T. Bîrsan**, **D. Tiba** - *One hundred years since the introduction of the s
by Dimitrie Pompeiu*, in IFIP, vol.199, "System modeling and optimizatio
agioli, A. Dontchev, H. Furuta, K. Marti, L. Pandolfi eds., Springer, Bos
35-39.

7. **M. Bordeianu**, **P. Vladcovschi** - *Învăţământul românesc în date*, Jun
1979.

8. **Gh. Gheorghiev**, **D. Ieşan** - *Miltiade Tzony – primul profesor de m
Universitatea din Iaşi*, Probleme de istoria şi filozofia ştiinţei, vol. X, 19
Iaşi a Academiei Române, 125-146. Apărută, într-o formă prescurtată, şi în
Miltiade Tzony – the first professor in Mechanics at the University of Ia
Travaux du Comité Roumain d'Histoire et de Philosophie des Sciences,
55-60.

9. **I. Ionescu** - *Constituirea, administrarea şi redactarea "Gazetei Matemati*
în volumul jubiliar *Gazeta Matematică, 1895-1935. Istoric-învăţăminte*,
"Gazetei Matematice", vol. XI, Bucureşti, 1935 .

10. **G. Ivănescu** - *Istoria limbii române*, Junimea, Iaşi, 2000.

11. **N. Mihăileanu** - *Reviste de matematici elementare din România (pân*
Ed. Gil, Zalău, 1995.

12. **P. Mihăilescu** - *Primary cyclotomic units and a proof of Catalan's*
J.Reine Angew. Math. 572 (2004), 167-196.

13. **R. Miron** - *Centenarul revistei "Recreaţii Ştiinţifice"*, Probleme de ist
zofia ştiinţei, vol. X, 1984, Filiala Iaşi a Academiei Române, 17-19.

14. **I. Popa** - *"Recreaţii Ştiinţifice"- precursoare a "Gazetei Matematic*
Matematică şi Fizică, seria A, nr. 9, 1955, 492-493.

15. **I. Popa** - *Dezvoltatrea matematicii*, apărut în *Contribuţii la istoria
Universităţii din Iaşi*, vol. II, pp. 7-39, Bucureşti, 1960.

16. **G. Ţiţeica** - *Rolul "Gazetei Matematice" în dezvoltarea ştiinţei mat
România*, apărut în volumul jubiliar *Gazeta Matematică, 1895-1935. Isto
minte*, Biblioteca "Gazetei Matematice", vol. XI, Bucureşti, 1935, 67-75.

17. ******* - *Introducere*, Gazeta Matematică, an I, nr. 1, septembrie 1895.

18. ******* - *"Recreaţii Ştiinţifice"- prezenţă în conştiinţa posterităţii*, Recreaţi
tice, 5(2003), nr.1, p.5.

***Temistocle BÎRSAN**, Iaşi* ***Dan TIBA**, Bucure*

125 ani de la apariţie

Proiect de reeditare

În anul 1999, la Iaşi, a apărut revista *Recreaţii Matematice*, iar ulterio
a fost înfiinţată o asociaţie cu acelaşi nume, *Asociaţia "Recreaţii Mater*
membri în toată ţara. Continuarea tradiţiei revistei *Recreaţii Ştiinţific*
revistă ştiinţifică (predominant matematică) adresată tineretului – este u
important al noii asociaţii: încă mai sunt valabile unele din observaţiile c
cuvântul *"Către Cetitori"* din ianuarie 1883.

Dar peisajul publicaţiilor matematice româneşti adresate tineretului s
mult mai bogat acum ca în epoca de început: *Gazeta Matematică* apa
serii, A şi B, apar *Revista Matematică din Timişoara*, *Arhimede* (Bucureşt
(Braşov), *Foaie Matematică* (Chişinău) şi multe alte publicaţii locale. Se
meroase concursuri de matematică, la nivel local, regional, naţional şi int

Chiar şi astăzi, în aceste condiţii de exigenţă sporită, vechea revist
Ştiinţifice prezintă interes, prospeţime şi utilitate.

Asociaţia "Recreaţii Matematice" a considerat o datorie de onoare ree
tegrală a colecţiei revistei *Recreaţii Ştiinţifice* în forma originară, nemodi
utilizarea tehnicilor moderne de reproducere a textelor şi şi-a fixat ca ter
de realizare a acestui proiect data de 15 ianuarie 2008.

La ora actuală, există doar puţine exemplare complete ale colecţiei revis
ţii Ştiinţifice şi care se află într-o stare destul de precară. La Seminarul
"Al. Myller" din Iaşi există două colecţii complete ale *Recreaţiilor Ştiin*
donată acestei biblioteci de *C. Climescu*, fondator şi principalul animator
şi o a doua donată de *V. I. Praja*, redactor fondator şi colaborator al ei.
Academiei Române are, de asemenea, colecţia completă a Recreaţiilor Şti

Redarea în circuitul public a acestui monument de început al culturi
româneşti, este de un real folos tinerimii studioase şi unor cercuri largi de

Realizarea acestui proiect n-ar fi fost posibilă fără sprijinul entuziast şi
onat al doamnei *Marinela Ghigea* şi al firmelor *Kepler Systèmes d'Info*
Dazoot din Bucureşti. Exprimăm pe această cale mulţumirile noastre cele
pentru înţelegerea şi efortul depus pe parcursul a aproape doi ani de mun

Reeditarea cuprinde cele şase volume originale ale revistei şi o broşură c
o introducere, o notă asupra ediţiei, erată, index de autori, de rezolvitori,
şi de surse (parţial) şi o galerie de portrete. În varianta electronică, aceste in
sunt interactive.

Republicarea actuală, inclusiv în format electronic, are ca scop preînt
riscului dispariţiei acestei opere şi, pe de altă parte, să o facă accesibilă
CD (sau on-line la adresa `http://www.recreatiistiintifice.ro` , de
putea prelua gratuit). Sperăm că această acţiune, **dedicată aniversării**
ani de la apariţia revistei, va stimula specialiştii să reanalizeze fenomen
în fascinantul secol XIX, veac de ctitorie în ştiinţa românească modernă.

Asociaţia "Recreaţii Matema

ARTICOLE ŞI NOTE

Polinoame Fibonacci, polinoame ciclotomi

Loredana STRUGARIU, Ciprian STRUGARIU

Deoarece şirul lui Fibonacci este cunoscut elevilor încă din cl. a IX-a, iar de ordinul n ale unităţii şi polinoamele ciclotomice sunt în materia pr cl. a X-a pentru olimpiada de matematică, considerăm că abordarea unui subiect este utilă atât elevilor cât şi profesorilor. Vom prezenta câteva privind polinoamele Fibonacci şi cele ciclotomice şi legătura dintre ele.

1. Polinoame Fibonacci - definire, legătura cu triunghiul lu Polinoamele Fibonacci sunt definite prin relaţia de recurenţă

$$F_{n+1}(x) = xF_n(x) + F_{n-1}(x), \quad \text{cu} \quad F_1(x) = 1 \quad \text{şi} \quad F_2(x) =$$

sau prin următoarea formulă explicită

$$F_n(x) = \sum_{j=0}^{[(n-1)/2]} \binom{n-j-1}{j} x^{n-2j-1},$$

unde $[x]$ este partea întreagă a lui x, iar $\binom{n-j-1}{j} \equiv C^j_{n-j-1}$. Se $F_0 = 0$.

Observaţie. Polinoamele Fibonacci pot fi definite prin relaţia de recu

$$F_n(x) = xF_{n-1}(x) + F_{n-2}(x), \quad \text{cu} \quad F_0(x) = 0 \quad \text{şi} \quad F_1(x) =$$

Exemple: $F_1(x) = 1$, $F_2(x) = x$, $F_3(x) = x^2+1$, $F_4(x) = x^3+2x$, $F_5(x) =$ etc. Luând $x = 1$ în (2), obţinem $F_n(1) = F_n$, unde F_n este *şirul lui Fibo*

Lema 1 (*proprietatea de divizibilitate*)**.** *Dacă m este divizor al lui F_m este divizor al lui F_n. Dacă p este un număr prim, atunci $F_p(x)$ es ireductibil.*

Teorema 1. *Fie F_0, F_1, F_2, ... polinoamele Fibonacci peste câmpu dimensiune 2. Atunci, avem:*

1) *F_{2n+1} sunt singurii termeni de grad par şi nu sunt divizibili cu x singurii termeni de grad impar, $n \geq 0$;*
2) *$F_{n-t} + F_{n+t} = xF_nF_t$, pentru $0 \leq t \leq n$;*
3) *$F_{2n} = xF_n^2$, pentru $n \geq 0$;*
4) *$F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2$, pentru $n \geq 0$;*
5) *$F_{mn}(x) = F_m(x)\, F_n(xF_m(x))$, pentru pentru $m, n \geq 0$;*
6) *$F_{2mn-p} = xF_{mn}F_{mn-p} + F_p$, pentru $0 \leq p \leq mn$;*
7) *$F_{2mn+p} = xF_{mn}F_{mn+p} + F_p$.*

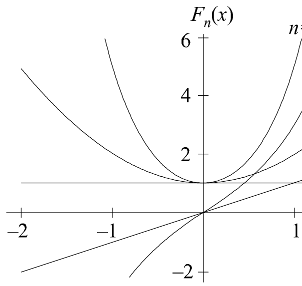
Rădăcinile polinomului $F_n(x)$ sunt de forma $x_k = 2i\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, p $1, \ldots, n-1$. Pentru p număr *prim*, aceste rădăcini sunt de $2i$ ori part

---

[1] Profesori, Colegiul Naţional "Eudoxiu Hurmuzachi", Rădăuţi (Suceava)

rădăcinilor polinomului ciclotomic de ordinul p. Analizând coeficienţii pri
noame Fibonacci se observă legătura dintre triunghiul lui Pascal şi aceste

$F_1(x) = \mathbf{1}x^0$
$F_2(x) = \mathbf{1}x^1$
$F_3(x) = \mathbf{1}x^2 + \mathbf{1}x^0$
$F_4(x) = \mathbf{1}x^3 + \mathbf{2}x$
$F_5(x) = \mathbf{1}x^4 + \mathbf{3}x^2 + \mathbf{1}x^0$
$F_6\,(x) = \mathbf{1}x^5 + \mathbf{4}x^3 + \mathbf{3}x^1$
$F_7\,(x) = \mathbf{1}x^6 + \mathbf{5}x^4 + \mathbf{6}x^2 + \mathbf{1}x^0$
$F_8\,(x) = \mathbf{1}x^7 + \mathbf{6}x^5 + \mathbf{10}x^3 + \mathbf{4}x^1$
$F_9\,(x) = \mathbf{1}x^8 + \mathbf{7}x^6 + \mathbf{15}x^4 + \mathbf{10}x^2 + \mathbf{1}x^0$
$F_{10}\,(x) = \mathbf{1}x^9 + \mathbf{8}x^7 + \mathbf{21}x^5 + \mathbf{20}x^2 + \mathbf{5}x^1.$



A. N. Philippou şi asociaţii săi [**4**] au studiat polinoamele Fibonacci
k, $k \geq 2$, pe care le-au definite astfel:

$$F_0^{(k)}(x) = 0,\ F_1^{(k)}(x) = 1$$
$$F_n^{(k)}\,(x) = \sum_{j=1}^{n} x^{k-j} F_{n-j}^{(k)}\,(x)\,, \quad n = 2, 3, \ldots, k;$$
$$F_n^{(k)}\,(x) = \sum_{j=1}^{k} x^{k-j} F_{n-j}^{(k)}\,(x)\,, \quad n = k+1, k+2, \ldots$$

Observaţie. Pentru $k = 2$ acestea se reduc la $F_n(x)$, iar pentru $k =$
la şirul lui Fibonacci $F_n^{(k)}$ de ordinul k.

2. Polinoame ciclotomice - definire, proprietăţi. Pentru fiec
natural $n \geq 1$ rădăcinile complexe ale ecuaţiei $x^n = 1$ se numesc *rădăcini*
n ale unităţii. Acestea sunt numere complexe de forma

$$x_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Mulţimea acestor rădăcini se notează cu

$$U_n = \{x \in \mathbb{C} \mid x^n = 1\}\,.$$

Teorema 2. *Mulţimea U_n este un grup ciclic faţă de înmulţirea nume*
plexe, numit grupul rădăcinilor de ordinul n ale unităţii.

Propoziţie. *Fie $U_n = \left\{x_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n};\ k = 1, 2, \ldots, n-1.\right\}$*

$$\langle x_k \rangle = U_n \quad \Leftrightarrow \quad (k, n) = 1.$$

Grupul ciclic U_n are $\varphi\,(n)$ generatori, unde $\varphi\,(n)$ este numărul numerel
mai mici ca n, relativ prime cu n (*indicatorul lui Euler*). Cele $\varphi\,(n)$
ordinul n ale unităţii care generează grupul U_n, adică numerele complexe

$$x_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n},\ k = 1, 2, \ldots, n-1,\ (k, n) = 1.$$

se numesc *rădăcinile primitive de ordinul n ale unităţii.* Notăm cu P_n
rădăcinilor primitive de ordinul n ale unităţii şi cu ζ o rădăcină primitivă
de ordinul n a unităţii.

Teorema 3.
$$P_n = \left\{ \zeta^k \mid 0 \le k \le n-1,\ (k,n) = 1 \right\}.$$

Observaţie. Dacă $n = p =$ număr prim, atunci $P_p = U_p \setminus \{1\}$.

Teorema 4. 1) $\bigcup\limits_{d|n} P_d = U_n$,

2) $P_{d_1} \bigcap P_{d_2} = \emptyset$, d_1, d_2 *divizori naturali ai lui* n, $d_1 \neq d_2$.

Polinomul monic ale cărui rădăcini sunt rădăcinile primitive de ord
unităţii, se numeste *al n-lea polinom ciclotomic* şi are forma
$$\Phi_n(X) = \prod_{\zeta \in P_n} (X - \zeta), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$
Gradul polinomului ciclotomic $\Phi_n(X)$ este egal cu cardinalul mulţimii
$\varphi(n)$.

Teorema 5 (*relaţia lui Dedekind*)**.**
$$X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X)$$
unde produsul se face după toţi divizorii naturali ai lui n.

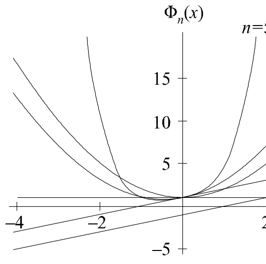
Demonstraţie. Folosind descompunerea în factori a polinomului X^n
rema 4, avem
$$X^n - 1 = \prod_{\zeta \in U_n} (X - \zeta) = \prod_{\zeta \in \bigcup\limits_{d|n} P_d} (X - \zeta) = \prod_{d|n} \left(\prod_{\zeta \in P_d} (X - \zeta) \right) = \prod_{d|n}$$

Teorema 6. *Pentru $p > 0$, număr prim, avem:*
$$\Phi_p(X) = X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + X + 1.$$

Observaţie. $\Phi_{p^k}(X) = \Phi_p\left(X^{p^{k-1}}\right)$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, p număr prim, $p > 0$.

Exemple. Primele 10 polinoame ciclotomice:

$\Phi_1(X) = X - 1$
$\Phi_2(X) = X + 1$
$\Phi_3(X) = X^2 + X + 1$
$\Phi_4(X) = X^2 + 1$
$\Phi_5(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$
$\Phi_6(X) = X^2 - X + 1$
$\Phi_7(X) = X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$
$\Phi_8(X) = X^4 + 1$
$\Phi_9(X) = X^6 + X^3 + 1$
$\Phi_{10}(X) = X^4 - X^3 + X^2 - X + 1.$



Teorema 7 (*relaţia lui Möbius-Dedekind*)**.** *Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există*
$$\Phi_n(X) = \prod_{d|n} \left(X^d - 1\right)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)},$$

unde $\mu : \mathbb{N}^* \to \{-1, 0, 1\}$ *este funcţia lui Möbius,* dată prin

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } n = 1, \\ (-1)^k, \text{ dacă } n = p_1 p_2 \cdots p_k \ \ (p_1, p_2, \ldots, p_k \text{ prime distinct} \\ 0, \text{ dacă } n \text{ se divide prin patratul unui numar prim.} \end{cases}$$

Alte proprietăţi ale polinoamelor ciclotomice:

1) $\Phi_n(X) \in \mathbb{Z}[X]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

2) $\Phi_n(X)$ este ireductibil în inelul $\mathbb{Z}[X]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

3) $\Phi_n(X)$ este un polinom reciproc, $\forall n \geq 2$,

4) Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ şi $p > 0$ un număr prim avem:

i) dacă p divide n, $\Phi_{np}(X) = \Phi_n(X^p)$,

ii) dacă p nu divide n, $\Phi_{np}(X) = \dfrac{\Phi_n(X^p)}{\Phi_n(X)}$,

5) $\Phi_{2n}(X) = \Phi_n(-X)$, pentru $n > 1$, număr natural impar.

3. Legătura dintre polinoamele Fibonacci şi polinoamele cic
Această legătură a fost expusă de **K. Kuwano** în *The Design of Mathem* *shop* (în japoneză), Scientist, 2004 şi apoi preluată de **K. Motose** în [**3**].

Considerând două variabile x şi y şi notând cu $X = x + y$ şi $Y = xy$, polinoamele simetrice $F_n(X, Y)$ prin

$$F_n(X, Y) = \frac{x^n - y^n}{x - y},$$

numite *polinoame Fibonacci de două variabile.*

Exemple. $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = x + y = X$, $F_3 = x^2 + y^2 + xy = X^2$

Lema 2. *i*) $F_{m+n} = F_m F_{n+1} - Y F_{m-1} F_n$, *pentru* $n \geq 0$ *şi* $m \geq 1$*; în p*

$$F_{n+2} = X F_{n+1} - Y F_n.$$

ii) *Dacă* m *este divizor al lui* n*, atunci* F_m *este divizor al lui* F_n*.*

Demonstraţie. *i*) direct prin înlocuire în formula (12).

ii) Deoarece $x^m - y^m$ este divizor al lui $x^n - y^n$, rezultă afirmaţia.

Observaţie. Dacă considerăm în formula (13) $X = 1$ şi $Y = -$ şirul lui Fibonacci, fapt pentru care polinoamele $F_n(X, Y)$ au fost numite Fibonacci. O altă formă a polinoamelor Fibonacci de două variabile este:

$$F_n(x, y) = \sum_{j=0}^{[(n-1)/2]} \binom{n-j-1}{j} x^{n-2j-1} y^j, \quad n \geq 1.$$

În mod inductiv, vom defini *polinoamele ciclotomice de două variabile*

$$\Phi_1(x, y) = x - y, \quad x^n - y^n = \prod_{d|n} \Phi_d(x, y).$$

Lema 3. *i*) $\Phi_n(x, y) = \prod_{d|n} \left(x^d - y^d\right)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)}$.

ii) $\Phi_n(x) = \Phi_n(x, 1)$.

iii) $\Phi_n(x, y) = \Phi_n(y, x)$, *pentru* $n \geq 2$.

Demonstraţie. *i*) rezultă din formula de inversiune a lui Möbius, iar
definiţia lui $\Phi_n(x)$. *iii*) decurge din punctul *i*) şi formula $\sum\limits_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) = 0$ pe

Deoarece polinoamele $\Phi_n(x,y)$ sunt simetrice pentru $n \geq 2$, putem
noamele $P_n(X,Y)$ unde $X = x+y$, $Y = xy$ astfel încât $\Phi_n(x,y) = P_n$
exemplu, $P_6 = x^2 + y^2 - xy = X^2 - 3Y$.

Teorema 8. *Vom conveni ca* $P_1 = 1$. *Atunci, avem:*

1) P_n *este ireductibil în* $\mathbb{Z}[X,Y]$*;*

2) $F_n = \prod\limits_{d|n} P_d$*;*

3) $P_n = \prod\limits_{d|n} F_d^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)}$*;*

4) $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$, *unde* $(\ ,\ )$ *reprezintă c.m.m.d.c.; în particular* $(F_n$,

Demonstraţie. 1) $P_n \in \mathbb{Z}[X,Y]$ din definiţie. Dacă $P_n = ST$, cu S, T
polinoame neconstante, atunci $\Phi(x) = \Phi(x,1) = P(x+1,x) = S(x+1,x)$
pentru polinoamele neconstante $S(x+1,x), T(x+1,x) \in \mathbb{Q}[x]$, contrar
lităţii peste $\mathbb{Q}$.

2) Rezultă din următoarea ecuaţie:

$$F_n(X,Y) = \frac{x^n - y^n}{x - y} = \prod_{1 \prec d|n} \Phi_d(x,y) = \prod_{d|n} P_d(x,y).$$

3) Rezultă din formula de inversiune a lui Möbius.

4) Dacă mai întâi considerăm $P_d = P_{d'}$ atunci avem:

$$\Phi_d(x) = \Phi_d(x,1) = P_d(x+1,x) = P_{d'}(x+1,x) = \Phi_{d'}(x)$$

şi astfel $d = d'$. Din Lema 2, *ii*), ştim că $F_{(m,n)}$ este divizor comun al lui

Dacă P_d este divizor comun al lui F_m şi F_n, atunci d este divizor comu
şi n şi deci d este divizor al lui (m,n). Astfel P_d este divizor al lui $F_{(m,n)}$.
D este divizor comun al lui F_m şi F_n, atunci D este divizor al lui $F_{(m,n)}$,
este un produs al polinoamelor ireductibile distincte P_d, ceea ce implică a

Bibliografie

1. **T. M. Apostol** - *Resultants of Cyclotomic Polynomials.* Proc. Amer. M
24(1970), 457-462.
2. **T. Koshy** - *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications.* New Yo
2001.
3. **K. Motose** - *On values of cyclotomic polynomials.* VII, Math J. Okaya
2004.
4. **A. N. Philippou, C. Georghiou, G. N. Philippou** - *Fibonacci poly
order k, multinomial expansions and probability*, Internat. J. Math. M
6(1983), 545-550.
5. **M. Ţena** - *Rădăcinile unităţii*, Soc. Şt. Mat., Bucureşti, 2005.
6. **W. A. Webb, E. A. Parberry** - *Divizibility Properties of Fibonacci P*
Fibonacci Quarterly 7.5 (1969), 457-463.
7. http://mathworld.wolfram.com

Submulţimi ale unei mulţimi finite şi matrici b

Adrian REISNER[1]

Fie dată o mulţime X de cardinal $|X|$ finit. Considerăm familia $\mathcal{F}$ de s
ale lui X având anumite proprietăţi. Utilizând *matricele binare* (adică a
ca elemente 0 sau 1), vom demonstra câteva rezultate privind familia $\mathcal{F}$.

I Familii cu proprietatea $\mathcal{P}$. Fie $\mathcal{F}$ o familie de submulţimi X_1, X
ale mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$. Spunem că familia $\mathcal{F}$ verifică proprietatea $\mathcal{P}$
îndeplineşte condiţiile următoare:

a) $|X_i| = \alpha + \beta$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$;

b) $|X_i \cap X_j| = \beta$, $\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$.

Spunem că familia $\mathcal{F}$ verifică *proprietatea duală* $\mathcal{P}'$ a proprietăţii $\mathcal{P}$
deplineşte condiţiile:

a') $\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ aparţine la exact $\alpha + \beta$ submulţimi X_i ale lui $\mathcal{F}$;

b') $\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ şi distincte aparţin la exact β submulţimi ale lu

Numim *matrice asociată* familiei $\mathcal{F}$, matricea binară $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n$ (
prin $a_{ij} = 1$ dacă $i \in X_j$ şi $a_{ij} = 0$ în caz contrar. De asemenea, dată
binară A, se poate face trecerea "inversă" la o familie de submulţimi ale lu
mod evident.

Pentru familiile cu proprietatea $\mathcal{P}$, ne propunem să găsim o relaţie în
şi să demonstrăm proprietatea duală $\mathcal{P}'$.

Propoziţia 1. *Sunt adevărate afirmaţiile:*

1. $\mathcal{F}$ *are proprietatea* $\mathcal{P} \Leftrightarrow {}^tAA = \alpha I + \beta J \quad (1)$;

2. $\mathcal{F}$ *are proprietatea* $\mathcal{P}' \Leftrightarrow A\,{}^tA = \alpha I + \beta J \quad (1')$,

unde I este matricea unitate şi J este matricea cu toate elementele 1.

Demonstraţie. Calculând produsul ${}^tAA$, ţinând seama de condiţii
obţinem matricea având elementele de pe diagonala principală egale c
celelalte egale cu β, adică matricea $\alpha I + \beta J$; formula (1) este astfel stabi

Invers, dacă (1) are loc, avem $|X_i| = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ki} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ki} a_{ki} =$ elemetul
de pe diagonala matricei $A\,{}^tA \overset{(1)}{=} \alpha + \beta$, adică proprietatea *a*). La fel, $|$
$\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} = \beta$, adică proprietatea *b*).

Afirmaţia $1'$ se dovedeşte cu argumente similare.

Propoziţia 2. *Dacă $\mathcal{F}$ are proprietatea $\mathcal{P}$, atunci $A \in GL_n(\mathbb{R})$ şi* $\sqrt{(\alpha$
$\in \mathbb{Z}^n$.

Demonstraţie. Să dovedim că A este inversabilă, i.e. $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

$$\det(\alpha I + \beta J) = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \beta & \ldots & \beta \\ \beta & \alpha+\beta & \ldots & \beta \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta & \beta & \ldots & \alpha+\beta \end{vmatrix} = (\alpha + n\beta) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots \\ \beta & \alpha+\beta & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta & \beta & \ldots \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha + n\beta)\,\alpha^{n-1}.$$

[1] Cercetător, Centrul de calcul E.N.S.T., Paris

(ultima egalitate se obţine în urma scăderii primei coloane din celelal
$(\det A)^2 = \det({}^tAA) = \det(\alpha I+\beta J) = (\alpha+n\beta)\,\alpha^{n-1}$ şi $\det A = \varepsilon\sqrt{(\alpha+n\beta}$
unde $\varepsilon = \pm 1$. Demonstraţia se încheie, deoarece pentru orice matrice bina
$\det A \in \mathbb{Z}$.

Propoziţia 3. *Dacă familia $\mathcal{F}$ are proprietatea $\mathcal{P}$, atunci $\alpha + n\beta =$*

Demonstraţie. Prin calcul direct, obţinem că $JA = (\alpha+\beta)\,J \quad (3)$
$J = (\alpha+\beta)\,JA^{-1}$ (A fiind inversabilă) sau $JA^{-1} = \dfrac{1}{\alpha+\beta}J \quad (4)$.

Din (1) deducem că $J\,{}^tAA = \alpha J + \beta J^2 = (\alpha+n\beta)\,J$, de unde, ţinând
(4), $J\,{}^tA = (\alpha+n\beta)\,JA^{-1} = \dfrac{\alpha+n\beta}{\alpha+\beta}J$. Ca urmare, $AJ = {}^t(J\,{}^tA) = \dfrac{\alpha+}{\alpha-}$
şi $JAJ = \dfrac{\alpha+n\beta}{\alpha+\beta}J^2 = n\dfrac{\alpha+n\beta}{\alpha+\beta}J$. Pe de altă parte, datorită relaţiei (
$(\alpha+\beta)\,J^2 = n\,(\alpha+\beta)\,J$. În consecinţă, $n\dfrac{\alpha+n\beta}{\alpha+\beta} = n\,(\alpha+\beta)$ şi rezultă
adevărată.

Propoziţia 4. *$\mathcal{F}$ având proprietatea $\mathcal{P}$, au loc relaţiile:*
1° $AJ = JA$,
2° ${}^tAA = A\,{}^tA$ (i.e. A este matrice normală).

Demonstraţie. 1° $AJ \overset{(5)}{=} \dfrac{\alpha+n\beta}{\alpha+\beta}J \overset{(2)}{=} (\alpha+\beta)\,J \overset{(3)}{=} JA$.

2° ${}^tAA \overset{(1)}{=} \alpha I + \beta J = \alpha I + \beta\left[{}^t\left(A^{-1}\right){}^tA\right]J = \alpha I + \beta\,{}^t\left(A^{-1}\right)\left({}^tAJ\right) \overset{1}{=}$

$= \alpha I + \beta\,{}^t\left(A^{-1}\right)J\,{}^tA = {}^t\left(A^{-1}\right)(\alpha I+\beta J)\,{}^tA \overset{(1)}{=} {}^t\left(A^{-1}\right)\left({}^tAA\right){}^tA =$

Propoziţia 5. *Dacă familia de submulţimi $\mathcal{F}$ are proprietatea $\mathcal{P}$, at*
şi proprietatea duală $\mathcal{P}'$.

Demonstraţie. Conform Propoziţiilor 1 şi 4, avem ${}^tAA = \alpha I + \beta J$
$A\,{}^tA$. Deci $A\,{}^tA = \alpha I + \beta J$ şi, conform punctului $1'$ al Propoziţiei 1, ded
are proprietatea $\mathcal{P}'$.

Caz particular şi exemplu. Pentru $\beta = 1$, relaţiile (1) şi (2) se sc
$\alpha I + J$ şi $n = \alpha^2 + \alpha + 1 = \alpha\,(\alpha+1) + 1$ (deci n este impar!). Atun
$\varepsilon\sqrt{(\alpha+n)\,\alpha^{n-1}} = \varepsilon\,(\alpha+1)\,\alpha^{\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}} \in \mathbb{Z}^*$. De exemplu, matricea binară

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

verifică ${}^tAA = A\,{}^tA = 2I + J$. Avem $\alpha = 2$ şi $\det A = -24$.

II Familii cu proprietatea $\mathcal{R}$. Fie X o mulţime de cardinal
$\{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$ o familie de submulţimi strict incluse în X. Spunem

familie verifică *proprietatea* $\mathcal{R}$ dacă pentru orice pereche $(i,j) \in X^2$ ex
unică o mulţime X_k din familie astfel încât $\{i,j\} \subset X_k$.

Asociem matricea binară $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ luând $b_{ij} = 1$ dacă
$b_{ij} = 0$ în caz contrar. Ţinând seama de proprietatea $\mathcal{R}$ şi utilizând notaţ
pentru elementele unei matrice relativ la matricea $B^{\,t}B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avem:

(*i*) $(B^{\,t}B)_{ij} = 1$ dacă $i \neq j$, căci elementul $(B^{\,t}B)_{ij}$ corespunde l
submulţimilor conţinând $\{i,j\}$;

(*ii*) $(B^{\,t}B)_{ii} = d_i$, unde d_i este numărul submulţimilor ce conţin eleme

Aşadar,

$$B^{\,t}B = \begin{pmatrix} d_1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & d_2 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots & d_n \end{pmatrix}.$$

Fie X_k o submulţime ce conţine elementul i. Deoarece $X_k \neq X$, exist
$j \notin X_k$. Ca urmare, există cel puţin o submulţime X_l diferită de X_k conţ
Rezultă că $d_i > 1$, adică $d_i = 1 + a_i$, iar $a_i > 0$.

Propoziţia 6. *Dacă familia* $\{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$ *are proprietatea* $\mathcal{R}$*,*
tricea $B^{\,t}B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *este inversabilă, i.e.* $B^{\,t}B \in GL_n(\mathbb{R})$.

Demonstraţie. Considerăm

$$f(x) = \begin{vmatrix} x + a_1 & x & \ldots & x \\ x & x + a_2 & \ldots & x \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x & x & \ldots & x + a_n \end{vmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Observăm că f este o funcţie polinomială şi $f(1) = \det(B^{\,t}B)$. Deriva
o sumă de n determinanţi având o coloană (coloana derivată!) cu toate
egale cu 1:

$$f'(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & \ldots & x \\ 1 & x + a_2 & \ldots & x \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x & \ldots & x + a_n \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} x + a_1 & x & \ldots \\ x & x + a_2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x & x & \ldots \end{vmatrix}$$

Derivata f'' va fi o sumă de determinanţi având două coloane cu elemente
1; deci $f''(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ca urmare, $f(x) = ax + b$ şi, din $f(0) = b$ şi $f'(0) = a$, găsim

$$b = \prod_{i=1}^{n} a_i, \quad a = \prod_{i \neq 1} a_i + \cdots + \prod_{i \neq n} a_i.$$

În sfârşit,

$$\det\left(B^{\,t}B\right) = f(1) = a + b = \prod_{i=1}^{n} a_i + \prod_{i \neq 1} a_i + \cdots + \prod_{i \neq n} a_i \neq 0,$$

adică $B^{\,t}B \in GL_n(\mathbb{R})$.

Observaţie. În ipotezele Propoziţiei 6, avem $\operatorname{rang}(B^{\,t}B) = n \leq m$
$\operatorname{rang}(B^{\,t}B) = n \leq \operatorname{rang} B \leq m$).

O generalizare a teoremelor Stolz-Cesaro

Sorin PUŞPANĂ[1]

1. Rezultate clasice. Vom prezenta în această primă parte bine-c teoreme Stolz-Cesaro şi o reciprocă a lor, omiţând demonstraţiile (pentru consultate [**2**] şi [**3**]).

Teorema 1. *Dacă* $(a_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(b_n)_{n\geq 1}$ *sunt două şiruri de numere încât: i) şirul* $(b_n)_{n\geq 1}$ *este strict crescător şi nemărginit, ii)* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ $l \in \overline{\mathbb{R}}$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

Teorema 2. *Dacă* $(a_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(b_n)_{n\geq 1}$ *sunt două şiruri de numere încât: i)* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, *ii)* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, *iii) şir este strict descrescător, atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

Teorema 3. *Dacă* $(a_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(b_n)_{n\geq 1}$ *sunt două şiruri de numere încât: i)* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, *ii)* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$

2. Generalizări. Teorema 1 admite următoarea generalizarea (cu cazului limitei infinite):

Teorema 4. *Dacă* $(a_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(b_n)_{n\geq 1}$ *sunt două şiruri de numere fel încât: i)* $\lim\limits_{n\to\infty} |b_n| = \infty$, *ii) şirul* $\left(\frac{1}{|b_n|}\sum\limits_{i=1}^{n-1}|b_{i+1}-b_i|\right)_{n\geq 1}$ *este măr* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l \in \mathbb{R}$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

Demonstraţie. Dacă $\varepsilon > 0$ şi M este un majorant pentru şirul de la există $m \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq m$ să avem

$$\left|\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} - l\right| < \frac{\varepsilon}{2M} \Leftrightarrow |a_{n+1}-a_n-l\,(b_{n+1}-b_n)| < \frac{\varepsilon}{2M}\,|b_{n+1}-$$

$$|a_n - a_m - l\,(b_n-b_m)| < \frac{\varepsilon}{2M}\sum_{i=m}^{n-1}|b_{i+1}-b_i| \leq \frac{\varepsilon}{2}\,|b_n|\,, \quad \forall n \geq m$$

Obţinem astfel

$$\left|\frac{a_n-a_m}{b_n-b_m} - l\right| < \frac{\varepsilon}{2}\frac{|b_n|}{|b_n-b_m|}, \quad \forall n > m.$$

Dar

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - l\right| = \left|\frac{a_m - lb_m}{b_n} + \left(\frac{a_n-a_m}{b_n-b_m} - l\right)\frac{b_n-b_m}{b_n}\right| <$$

$$< \frac{|a_m-lb_m|}{|b_n|} + \left|\frac{a_n-a_m}{b_n-b_m} - l\right|\frac{|b_n-b_m|}{|b_n|} < \frac{|a_m-lb_m|}{|b_n|} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

---

[1] Profesor, Craiova

Corolarul 1. *Dacă* $(a_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(b_n)_{n\geq 1}$ *sunt două şiruri de numere*

încât: $i)$ *şirul* $(|b_n|)_{n\geq 1}$ *este strict crescător şi nemărginit,* $ii)$ *şirul*

este mărginit, $iii)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l \in \mathbb{R}$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l$.

Într-adevar, ipotezele $i)$ şi $ii)$ implică primele două ipoteze ale Teorem

Teorema 2 admite următoarea generalizare (cu pierderea cazului limit

Teorema 5. *Dacă* $(a_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(b_n)_{n\geq 1}$ *sunt două şiruri de numere*

încât: $i)$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, $ii)$ *şirul* $\left(\dfrac{1}{|b_n|}\sum\limits_{i=1}^{n-1}|b_{i+1}-b_i|\right)_{n\geq 1}$ *est*

$iii)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l \in \mathbb{R}$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l$.

Demonstraţie. Dacă $\varepsilon > 0$ şi M este un majorant pentru şirul de la
există $m \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq m$ să avem

$$\left|\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} - l\right| < \frac{\varepsilon}{M} \Leftrightarrow |a_{n+1}-a_n - l(b_{n+1}-b_n)| < \frac{\varepsilon}{M}|b_{n+1}-b$$

$$|a_{n+p}-a_n - l(b_{n+p}-b_n)| < \frac{\varepsilon}{M}\sum_{i=1}^{n+p-1}|b_{i+1}-b_i| < \varepsilon|b_{n+p}|, \quad \forall n \geq m$$

Însă, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, există un şir crescător de numere naturale $(p(k)$
încât $\left|b_{n+p(k)}\right| \leq |b_n|$, $\forall k \geq 1$, deci putem presupune că $|b_{n+p}| \leq |b_n|$,
$p \geq 1$. Obţinem astfel $|a_{n+p}-a_n - l(b_{n+p}-b_n)| < \varepsilon|b_n|$, $\forall n \geq m$, $p \geq$
la limită, după $p \to \infty$, obţinem $|a_n - lb_n| < \varepsilon|b_n| \Leftrightarrow \left|\dfrac{a_n}{b_n} - l\right| < \varepsilon$, $\forall n$
$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l$.

Corolarul 2. *Dacă* $(a_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(b_n)_{n\geq 1}$ *sunt şiruri de numere reale a*
$i)$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, $ii)$ *şirul* $(|b_n|)_{n\geq 1}$ *este strict descrescător,*
$\left(\dfrac{|b_{n+1}-b_n|}{|b_{n+1}|-|b_n|}\right)_{n\geq 1}$ *este mărginit,* $iv)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l \in \mathbb{R}$, *atunci*

Observaţii. $i)$ Dacă în cele două teoreme şi corolare înlocuim $(a_n)_{n\geq 1}$
cu $((-1)^n a_n)_{n\geq 1}$ şi, respectiv, $((-1)^n b_n)_{n\geq 1}$ obţinem că, pe lângă celelal
din mărginirea şirului $\left(\dfrac{1}{|b_n|}\sum\limits_{i=1}^{n-1}|b_{i+1}+b_i|\right)_{n\geq 1}$ respectiv $\left(\dfrac{|b_{n+1}+b_n|}{|b_{n+1}|-|b_n|}\right.$
$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}+a_n}{b_{n+1}+b_n} = l \in \mathbb{R}$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l$.

$ii)$ Teorema reciprocă 3 poate fi îmbunătăţită cerând în locul ipotezei
$\left(\dfrac{|b_{n+1}|+|b_n|}{|b_{n+1}-b_n|}\right)_{n\geq 1}$ să fie mărginit. Într-adevar pentru $\varepsilon > 0$ avem $\left|\dfrac{a_{n+1}-}{b_{n+1}-}\right.$
$\varepsilon\dfrac{|b_{n+1}|+|b_n|}{|b_{n+1}-b_n|}$, $\forall n \geq m$.

iii) Din demonstraţiile date, şi din enunţurile teoremelor şi corolarelo dent că ele rămân valabile şi în ipoteza că $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ sunt şiruri complexe. De fapt rezultatele pot fi extinse şi în cadru mult mai larg al normate cu unitate; enunţurile rezultatelor de mai sus se adaptează cu u demonstraţiile se fac cu aceleaşi argumente.

3. Aplicaţii.

Problema 1. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(u_n)_{n\geq 1}$ *două şiruri de numere reale* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u \in (1,\infty)$. *Atunci şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *are limită dacă şi numai* $(u_n x_{n+1} - x_n)_{n\geq 1}$ *are limită, caz în care avem* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{u-1} \lim\limits_{n\to\infty} (u_n x$

Indicaţie. Se aplică Teoremele 1 şi 3 şirurilor $a_n = u_1 u_2 \cdots u_{n-1}$ $u_1 u_2 \cdots u_{n-1}$.

Folosind Corolarul 1 putem extinde acest rezultat şi pentru valori nega u, pierzând însă cazul limitelor infinite, ca mai jos:

Problema 2. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(u_n)_{n\geq 1}$ *două şiruri de numere reale* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$, $|u| > 1$. *Atunci şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *este convergnt dacă şi numai* $(u_n x_{n+1} - x_n)_{n\geq 1}$ *este convergent, caz în care avem* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{u-1} \lim\limits_{n\to\infty} (u$

Observaţie. Rezultatul ramâne valabil dacă şirurile ce intervin în şiruri de numere complexe. Următoarea problemă ne prezintă în ce condiţi anterior rămâne valabil în cazul $|u| < 1$.

Problema 3. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(u_n)_{n\geq 1}$ *două şiruri de numere reale* $(x_n)_{n\geq 1}$ *să fie mărginit iar* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$, $|u| < 1$. *Atunci şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *e gent dacă şi numai dacă şirul* $(u_n x_{n+1} - x_n)_{n\geq 1}$ *este convergent, caz în* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{u-1} \lim\limits_{n\to\infty} (u_n x_{n+1} - x_n)$.

Indicaţie. Se aplică Corolarul 2 şirurilor $a_n = u_1 u_2 \cdots u_{n-1} x_n$ şi $b_n = u$

Din nou facem observaţia că rezultatul rămâne valabil şi pentru şiruri complexe. Este evident că ţinând seama de observaţia *i*) rezultatele anteri valabile dacă înlocuim $u_n x_{n+1} - x_n$ cu $u_n x_{n+1} + x_n$ şi $u - 1$ cu $u + 1$.

Toate acestea pot fi restrânse în

Problema 4. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *un şir mărginit de numere complexe, i şi* $(v_n)_{n\geq 1}$ *două şiruri convergente de numere complexe astfel încât* $\Big|$ $\left|\lim\limits_{n\to\infty} v_n\right|$. *Atunci şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *este convergent dacă şi numai* $(u_n x_{n+1} + v_n x_n)_{n\geq 1}$ *este convergent, caz în care avem*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} (u_n x_{n+1} + v_n x_n)}{\lim\limits_{n\to\infty} u_n + \lim\limits_{n\to\infty} v_n}.$$

Problema următoare este demonstrată în [**4**] şi generalizează Problem

Problema 5. *Fie $a_0, a_1, ..., a_k \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$ şi $(x_n)_{n\geq k}$ un şir de nume proprietatea că şirul $(y_n)_{n\geq k}$, $y_n = a_0x_n + a_1x_{n-1} + \cdots + a_kx_{n-k}$, este c Dacă polinomul $a_0x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_k$ are toate rădăcinile de modul atunci şirul $(x_n)_{n\geq k}$ este convergent.*

Indicaţie. Demonstraţia se face prin inducţie după k, primul pas a reducându-se la: $|\lambda| < 1$ şi $(x_{n+1} - \lambda x_n)_{n\geq k}$ convergent $\Rightarrow$ $(x_n)_{n\geq k}$ c adică un caz particular al Problemei 2.

Am văzut însă că dacă cerem mărginirea lui $(x_n)_{n\geq k}$, atunci afirmaţia rămâne adevărată pentru $|\lambda| \neq 1$ şi, prin urmare, teorema rămâne val rădăcinile polinomului sunt în modul diferite de unitate. Obţinem astfel u generalizare:

Problema 6. *Fie $\left(a_n^{(0)}\right)_{n\geq 1}$, $\left(a_n^{(1)}\right)_{n\geq 1}$, ..., $\left(a_n^{(k)}\right)_{n\geq 1}$, $k+1$ şiruri complexe, convergente respectiv către $a^{(0)}$, $a^{(1)}$, ..., $a^{(k)}$, şi astfel încât polinomului $a^{(0)}x^k + a^{(1)}x^{k-1} + \cdots + a^{(k)}$ să fie în modul diferite de unita un şir mărginit $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent dacă şi numai dacă şirul $\left(a_n^{(0)}x_n + a_n^{(1)}x_{n-1} + \cdots + a_n^{(k)}x_{n-k}\right)_{n\geq k+1}$ este convergent, caz în care a*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n^{(0)}x_n + a_n^{(1)}x_{n-1} + \cdots + a_n^{(k)}x_{n-k}\right)}{a^{(0)} + a^{(1)} + \cdots + a^{(k)}}.$$

Demonstraţie. Dacă $y_n = a_n^{(0)}x_n + a_n^{(1)}x_{n-1} + \cdots + a_n^{(k)}x_{n-k}$ şi z_n = $a^{(1)}x_{n-1} + \cdots + a^{(k)}x_{n-k}$ atunci, cum $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}$ (Cum însă $(y_n)_{n\geq 1}$ este convergent rezultă că $(z_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi co blemei precedente (care este valabilă şi pentru şiruri de numere complexe vaţiei făcute, rezultă că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent iar relaţia finală este

Problema 7. (**Jensen**) *Fie şirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ astfel încât: s este convergentă, şirul $\left(\dfrac{|y_1| + \cdots + |y_n|}{|y_1 + \cdots + y_n|}\right)_{n\geq 1}$ este mărginit şi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$ = $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{y_1 + \cdots + y_n} = l.$*

Bibliografie

1. **R. Cristescu** - *Analiză functională*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucure
2. **D.M. Batineţu** - *Şiruri*, Ed. Albatros, Bucureşti, 1979.
3. **D.M. Bătineţu, I.V. Maftei, I.M. Stancu-Minasian** - *Exerciţii şi p analiză matematică*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucuresti, 1981.
4. **O. Mayer** - *Teoria funcţiilor de o variabilă complexă*, Ed. Academiei, 19
5. **D. Miheţ** - *Despre calculul unor limite de şiruri*, R.M.T. nr. 2/1990.
6. **D.-Şt. Marinescu , V. Cornea** - *In legatură cu o problemă din G.M.A* nr. 3/2005.
7. **D. Miheţ, M. Piticari** - *O problemă de convergenţă*, G.M.-A nr. 1/199

O problemă de combinatorică destul de gr

Marian TETIVA[1]

În această notă ne ocupăm de următoarea

Problemă. *Din oricare* $2n+1$ *numere întregi (distincte) ale căror depăşesc pe* $2n-1$*, se pot alege trei (tot distincte) care au suma zero.*

Este o problemă de olimpiadă (cu regret, nu ştiu unde am întâlnit-o decât pare la prima vedere. Pentru rezolvare, însă, nu avem nevoie dec numitul *"principiu al cutiei"* (*"principiul lui Dirichlet"*, mai este numit în matematică românească; *"the pigeonhole principle"*, în cea engleză şi a *dacă vrem să repartizăm* $n+1$ *obiecte în* n *cutii, atunci trebuie ca într-o mai mult de un obiect.* De asemenea, nu e nevoie, în esenţă, de alt tip de ra decât cel din problema lui **Erdös** [**1**] (una din rarele probleme "foarte simpl de Erdös). Această problemă cere

să se arate că pentru $k > [(n+1)/2]$ *şi* $a_1, \ldots, a_k$ *numere întregi* $1 \le a_1 < \cdots < a_k \le n$ *există două printre ele a căror sumă este tot unul numere.*

Soluţia [**2**] este destul de simplă: să observăm că $a_1, \ldots, a_k$ pe de o parte $\ldots, a_k - a_1$ pe de alta, sunt $2k-1$ numere din mulţimea $\{1, \ldots, n\}$. Cum două dintre acestea sunt egale (conform principiului cutiei!) şi, pentru c din prima grupă sunt diferite două câte două (ceea ce e valabil şi pentru din a doua grupă), ajungem la o egalitate de forma $a_i = a_j - a_1 \Leftrightarrow a_i + a_j$ rezolvă problema. Mai mult, pentru $k = [(n+1)/2]$, se pot găsi k num primele n numere întregi pozitive astfel încât suma oricăror două *nu* este e al treilea dintre ele; de exemplu, numerele $[n/2]+1$, $[n/2]+2$, $\ldots$, n (tot citată).

În cele ce urmează vom arăta cum se rezolvă problema de la car nit folosind aceeaşi idee (de mai multe ori vom utiliza acest tip de raţ considerând-o folositoare pentru cei care se pregătesc pentru olimpiade, sa ral, pentru o activitate matematică susţinută.

Soluţia problemei. Avem de considerat câteva cazuri.

Primul (şi cel mai simplu) dintre ele este acela în care 0 este unul dintr $a_1, \ldots, a_{2n+1}$. Într-adevăr, $2n$ numere din cele $2n+1$ sunt nenule, deci m aparţin mulţimii $\{1, 2, \ldots, 2n-1\}$; atunci (conform principiului cutiei) d module trebuie să fie egale, iar o asemenea egalitate furnizează două nume suma 0. Aceste două numere şi 0 sunt, desigur, cele trei numere căutat suma 0).

Considerăm acum că 0 nu este printre cele $2n+1$ numere, pe care le r

$$-(2n-1) \le a_1 < \cdots < a_i < 0 < a_{i+1} < \cdots < a_{2n+1} \le 2n-1.$$

Se poate uşor observa că există cel puţin două numere negative şi cel p numere pozitive.

---

[1] Profesor, Colegiul Naţional "Gheorghe Roşca Codreanu", Bârlad

Al doilea caz este acela în care $|a_i| \neq a_{i+1}$; să presupunem, de ex $|a_i| < a_{i+1}$. Avem

$$1 \leq a_i + a_{i+1} < \cdots < a_i + a_{2n+1} \leq 2n - 1$$

şi

$$1 \leq -a_{i-1} < \cdots < -a_1 \leq 2n - 1,$$

adică din nou două grupe conţinând un total de $2n$ numere din mulţimea {1 în fiecare grupă numerele fiind distincte; prin urmare există un $j \in \{i+1, .$ şi un $k \in \{1, \ldots, i-1\}$ astfel încât $a_i + a_j = -a_k \Leftrightarrow a_i + a_j + a_k = 0$, c de demonstrat (evident, i, j, k sunt diferite două câte două). Cazul $|a_i| >$ absolut analog, suntem deci siguri că nu va reprezenta o problemă pentr interesat.

Cazul al treilea este şi cel mai greu. Ne aflăm acum în situaţia în care şi observăm (aşa cum cititorul trebuie să fi observat deja) că demonstra sus nu mai este valabilă pentru că $a_i + a_{i+1} = 0$ face să crească numărul "c care trebuie aşezate obiectele (făcând principiul inaplicabil!). Din fericire, nu este insurmontabil. Observăm mai întâi că acum avem, de fapt,

$$1 \leq a_i + a_{i+2} < \cdots < a_i + a_{2n+1} \leq 2n - 2$$

şi, pentru $a_1 > -(2n-1)$,

$$1 \leq -a_{i-1} < \cdots < -a_1 \leq 2n - 2;$$

astfel că demonstraţia din al doilea caz se poate utiliza şi acum. Similar cazul $a_{2n+1} < 2n - 1$, deci putem presupune în continuare că $a_1 = -($ $a_{2n+1} = 2n - 1$. Şi iar considerăm două posibilităţi: $i \leq n$ sau $i \geq n + 1$.

Dacă $i \leq n$ avem numerele $a_{i+1}, \ldots, a_{2n}$ şi $2n - 1 - a_{i+1}, \ldots, 2n - 1$ sunt toate din mulţimea $\{1, \ldots, 2n-1\}$ şi sunt în număr de $2(2n - i) \geq$ că există $j, k \in \{i+1, \ldots, 2n\}$ aşa încât $a_j = 2n - 1 - a_k$. Avem $j \neq$ $2n - 1$ este impar şi egalitatea se mai scrie $a_1 + a_j + a_k = 0$.

În cazul $i \geq n + 1$ procedăm la fel cu numerele $-a_2, \ldots, -a_i$ şi $2n - 1$ $2n - 1 + a_i$, ceea ce încheie demonstraţia.

Observaţii. 1) Cititorul atent trebuie să fi observat deja că 0, 1, . sunt $2n$ numere din intervalul $[-(2n-1), 2n-1]$ printre care nu exis suma 0; sau, analog, se pot alege 0, -1, ..., $-(2n-1)$ cu aceeaşi propri $2n+1$ este cel mai mic număr k astfel încât oricum am alege k numere din $\{-(2n-1), \ldots, 2n-1\}$ există printre ele trei cu suma 0.

2) O întrebare se pune în mod natural în legătură cu această prob observaţia anterioară: care sunt toate posibilităţile de a alege $2n$ numere din $\{-(2n-1), \ldots, 2n-1\}$ astfel încât printre ele să nu existe trei a căror s 0? Lăsăm în seama cititorului rezolvarea acestei probleme.

Bibliografie

1. **P. Erdös** - *Problema E736*, The American Mathematical Monthly, 53(19

2. **L. Moser** - *Soluţia problemei E736*, The American Mathematical Monthly 229-230.

Tehnici de stabilire a unor inegalităţi geome

I. M. MAFTEI[1]***, Mihai HAIVAS***[2]

Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi T. În diverse moduri pute
la T la un triunghi *derivat* T', lungimile laturilor acestuia din urmă fii
în a, b, c (rezultate într-un mod indicat). Dacă aplicăm triunghiului T'
geometrice valabile în orice triunghi (de exemplu, $R \geq 2r$, $3\sqrt{3}r \leq p$
$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$, $1 < \cos A + \cos B + \cos C \leq \dfrac{3}{2}$ etc.), vom obţine, c
şansă, noi inegalităţi interesante. Ne propunem să ilustrăm mai jos acest

Câteva triunghiuri derivate ale lui T sunt date de următoarea

Lemă. *Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi, atunci*

1) *pentru orice $x \geq 0$, numerele $l_1 = ax + b$, $l_2 = bx + c$, $l_3 = cx +$
asemenea, lungimile laturilor unui triunghi;*

2) *pentru orice $\alpha \in [0, 1]$, numerele $L_1 = a^\alpha$, $L_2 = b^\alpha$, $L_3 = c^\alpha$ sun
laturilor unui triunghi;*

c) *pentru orice $x \geq 0$ şi $\alpha \in [0, 1]$, $(ax + b)^\alpha$, $(bx + c)^\alpha$ şi $(cx + a)^\alpha$ sun
laturilor unui trinughi.*

Demonstraţie. 1) Să arătăm, de exemplu, că $l_1 + l_2 > l_3$. Avem
$(bx + c) > (cx + a) \Leftrightarrow (a + b - c)\,x + (b + c - a) > 0$, ceea ce are loc $\forall x \geq$

2) Considerând $c = \max\{a, b, c\}$, avem de arătat că $L_1 + L_2 > L_3$,
$b^\alpha > c^\alpha$. Funcţia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(\alpha) = \left(\dfrac{a}{c}\right)^\alpha + \left(\dfrac{b}{c}\right)^\alpha$ este descrescă
$f(\alpha) \geq f(1)$, $\forall \in [0, 1]$. Dar $f(1) = \dfrac{a+b}{c} > 1$. Deci $f(\alpha) > 1$, $\forall \alpha \in [$
$a^\alpha + b^\alpha > c^\alpha$, $\forall \alpha \in [0, 1]$.

3) Rezultă combinând punctele precedente.

Propoziţie. *Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi. Să se ar
avem următoarele inegalităţi:*

$$(a+b+c)^3\,(x+1)^3 \geq 27\,[(a-b)\,(1-x) + c\,(1+x)]\,[(b-c)\,(1-x) + a\,(1$$
$$\cdot\,[(c-a)\,(1-x) + b\,(1+x)]\,,$$

$$\frac{(a+b-c)\,x + b+c-a}{\sqrt{(ax+b)\,(bx+c)}} + \frac{(b+c-a)\,x + c+a-b}{\sqrt{(bx+c)\,(cx+a)}} + \frac{(c+a-b)\,x + a+b-c}{\sqrt{(cx+a)\,(ax+b)}}$$

$$\frac{(b+c)\,x + a + c}{\sqrt{ax+b}} + \frac{(c+a)\,x + b + a}{\sqrt{bx+c}} + \frac{(a+b)\,x + c + b}{\sqrt{cx+a}} \geq$$
$$\geq 2\left(\sqrt{ax+b} + \sqrt{bx+c} + \sqrt{cx+a}\right),$$

Demonstraţie. 1) Fie T_1 triunghiul cu lungimile laturilor $l_1 = ax+b$,
şi $l_3 = cx + a$ $(x \geq 0)$. Considerăm subînţelese notaţiile: p_1, r_1, R_1, S_1 re

[1] Profesor, Colegiul Naţional "Sf. Sava", Bucureşti
[2] Cercetător, Academia Română, Inst. Cerc. Economice "Gh. Zane", Iaşi

Inegalitatea (1) se obţine aplicând triunghiului T_1 inegalitatea $p \geq 3$

adevăr, $p_1 = \frac{1}{2}(l_1 + l_2 + l_3) = \frac{1}{2}(a+b+c)(x+1)$, iar, cu formula lui He

arie,

$$r_1^2 = \frac{S_1^2}{p_1^2} = \frac{(a+b+c)(x+1)}{4(a+b+c)^2(x+1)^2}\cdot$$

$$\cdot\left[(b+c-a)x+c+a-b\right]\left[(c+a-b)x+a+b-c\right]\left[(a+b-c)x+b+\right.$$

$$= \frac{\left[(a-b)(1-x)+c(1+x)\right]\left[(b-c)(1-x)+a(1+x)\right]\left[(c-a)(1-x)+\right.}{4(a+b+c)(x+1)}$$

Introducând în $p_1^2 \geq 27r_1^2$, vom obţine inegalitatea (1).

2) Considerăm triunghiul T_2 având lungimile laturilor $u = \sqrt{ax+b}$, $v =$

$w = \sqrt{cx+a}$, $x \geq 0$ (Lema, punctul 3) cu $\alpha = \frac{1}{2}$). Atunci

$$\cos A_2 = \frac{v^2+w^2-u^2}{2vw} = \frac{(b+c-a)x+c+a-b}{2\sqrt{(bx+c)(cx+a)}},$$

$$\cos B_2 = \frac{(c+a-b)x+a+b-c}{2\sqrt{(cx+a)(ax+b)}}, \quad \cos C_2 = \frac{(a+b-c)x+b+c}{2\sqrt{(ax+b)(bx+c}}$$

Cum $\cos A_2 + \cos B_2 + \cos C_2 \leq 3$, obţinem imediat (2).

3) Pentru medianele m_u, m_v, m_w ale triunghiului T_2 avem:

$$m_u^2 = \frac{2\left(v^2+w^2\right)-u^2}{4} = \frac{(2b+2c-a)x+2c+2a-b}{4},$$

$$m_v^2 = \frac{(2c+2a-b)x+2a+2b-c}{4}, \quad m_w^2 = \frac{(2a+2b-c)x+2b+2}{4}$$

Ţinând seama de acestea şi utilizând cunoscuta inegaliate $\sum \frac{m_a^2}{a} \geq \frac{3}{4}(a$

triunghiul T_2, obţinem (3).

Observaţie. Avem egalitate în (1), (2), (3) doar pentru triunghiul ec

Cazuri particulare. Dacă luăm $x = 0$ sau $x = 1$ în (1), (2), (3

inegalităţile (mereu în ipoteza că a, b, c sunt lungimile laturilor unui triu

$$(a+b+c)^3 \geq 27(a-b+c)(b-c+a)(c-a+b),$$

$$(a+b+c)^3 \geq 27abc,$$

$$\sqrt{a}(b+c-a) + \sqrt{b}(c+a-b) + \sqrt{c}(a+b-c) \leq 3\sqrt{abc},$$

$$a\sqrt{b+c} + b\sqrt{c+a} + c\sqrt{a+b} \leq \frac{3}{2}\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)},$$

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq 2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right),$$

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}} + \frac{b}{\sqrt{c+a}} + \frac{c}{\sqrt{a+b}} \geq \frac{1}{2}\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\right).$$

Observaţie. Se pot obţine cu acest procedeu şi alte inegalităţi interesa

răm cititorului să aplice procedeul triunghiului cu laturile $\left(ax^2\right.$ -

$\left(bx^2+cx+a\right)^\alpha$, $\left(cx^2+ax+b\right)^\alpha$, $x \geq 0$ şi $\alpha \in [0,1]$.

Asupra unei probleme de concurs

Angela ŢIGĂERU[1]

În nota de faţă ne propunem determinarea unei condiţii suficiente care
convergenţa integralelor de forma

$$\int_a^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx, \quad a > 0.$$

Vom demonstra că uniforma mărginire a expresiei $xf(x)$ este suficientă p
vergenţa acestui tip de integrale, extinzând astfel rezultatul cuprins în *P*
cl. a XII-a, dată la O.N.M. din anul 2000, propusă de **Mihai Piticari** şi **S**
dulescu, condiţia folosită acolo fiind doar existenţa şi finitudinea limitei
(problema citată, cu rezolvarea autorilor, poate fi consultată în [**1**]).

Pentru început, vom prezenta câteva definiţii şi rezultate de bază. Fie f
$\mathbb{R}$ o funcţie integrabilă Riemann pe orice interval compact inclus în $[a, \infty$

Definiţie. Spunem că funcţia f este *integrabilă pe intervalul* $[a, \infty)$ d
şi este finită limita $\lim\limits_{x\to\infty} \int\limits_a^x f(t)\,dt$. Dacă f este integrablă pe $[a, \infty)$, vom

$$\int_a^{\infty} f(t)\,dt = \lim_{x\to\infty} \int_a^x f(t)\,dt.$$

Dacă condiţia (1) este îndeplinită, se mai foloseşte formularea: *integral*
este covergentă. O condiţie necesară, nu şi suficientă, îndeplinită de o fu
grabilă pe intervalul $[a, \infty)$ este ca $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Un rezultat teoretic fundamental, pe care îl folosim în demonstraţie es

Criteriul lui Cauchy. *Funcţia* $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ *este integrabilă pe* $[a,$
numai dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$*, există numărul real* $A(\varepsilon) > 0$*, astfel în*
orice $x > A(\varepsilon)$ *şi pentru orice* $y > 0$*, este valabilă relaţia*

$$\left| \int_x^{x+y} f(t)\,dt \right| < \varepsilon.$$

Există o literatură vastă care are ca subiect determinarea unor criter
de convergenţă a integralelor de tipul (1) sau de calcul efectiv, cititorul i
mai multe detalii putând consulta [**3**].

Rezultatul notei de faţă este

Propoziţia 1. *Se consideră funcţia* $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$*,* $a > 0$*, integrab*
compact inclus în $[a, \infty)$*. Dacă există* $M > 0$ *astfel încât*

$$|xf(x)| \leq M, \quad \forall x \in [a, \infty),$$

atunci $\int\limits_a^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ *este convergentă.*

---

[1] Profesor, Colegiul Naţional "Petru Rareş", Suceava

Demonstraţie. În adevăr, pentru un $\varepsilon > 0$, considerăm $A(\varepsilon) =$
$x > A(\varepsilon)$, atunci, pentru orice $y > 0$, avem

$$\left|\int_x^{x+y} \frac{f(t)}{t} dt\right| \leq \int_x^{x+y} |tf(t)| \frac{1}{t^2} dt \leq M \int_x^{x+y} \frac{1}{t^2} dt = \frac{M}{x} \frac{y}{x+y}$$

Cum $\frac{y}{x+y} < 1$ şi deoarece $x > A(\varepsilon) = \frac{M}{\varepsilon}$, rezultă că $\frac{M}{x}\frac{y}{x+y}$
$\left|\int\limits_x^{x+y} \frac{f(t)}{t} dt\right| < \varepsilon$, adică, urmare a criteriului Cauchy, integrala $\int\limits_a^{\infty} \frac{f(t)}{t} d$
vergentă.

O consecinţă a rezultatului demonstrat mai sus este

Propoziţia 2. *Se consideră funcţia $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, care satisfac* *Propoziţiei 1. Atunci, pentru orice $a > 1$, este valabilă relaţia*

$$\lim_{x\to\infty} x \int_1^a f(t^x)\, dt = \int_1^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt.$$

Demonstraţie. Cu schimbarea de variabilă $u = t^x$ se obţine egalitate

$$x \int_1^a f(t^x)\ dt = \int_1^{a^x} \frac{f(u)}{u} u^{\frac{1}{x}} du.$$

Avem succesiv:

$$\left|\int_1^{a^x} \frac{f(u)}{u} u^{\frac{1}{x}} du - \int_1^{a^x} \frac{f(u)}{u} du\right| \leq \int_1^{a^x} |uf(u)| \frac{u^{\frac{1}{x}} - 1}{u^2} du \leq M \int\limits_1^{a^x} \Big(u^{\frac{1}{x}-2} -$$

$$= M\left(\frac{x}{1-x}\left(a^{1-x} - 1\right) + a^{-x} - 1\right);$$

trecând la limită şi ţinând cont de $a > 1$, deducem $\lim\limits_{x\to\infty} \left|\int\limits_1^{a^x} \frac{f(u)}{u} u^{\frac{1}{x}} du - \int\limits_1^{a^x} f\right.$

deci $\lim\limits_{x\to\infty} \int\limits_1^{a^x} \frac{f(u)}{u} u^{\frac{1}{x}} du = \lim\limits_{x\to\infty} \int\limits_1^{a^x} \frac{f(u)}{u} du = \int\limits_1^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt$, q.e.d.

Următorul exemplu poate forma o imagine asupra ariei de aplicabilita tatelor de mai sus.

Exemplul 1. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} n \int\limits_1^a \frac{\{x^n\}}{x^n} dx = 1 - c$, unde $\{x\}$ reprez fracţionară a lui x, $a > 1$ şi c este *constanta lui Euler.*

Rezolvare. Considerăm funcţia $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{\{x\}}{x}$, car condiţiile din propoziţia 2, deci $\lim\limits_{n\to\infty} n \int\limits_1^a \frac{\{x^n\}}{x^n} dx = \lim\limits_{x\to\infty} x \int\limits_1^a \frac{\{t^x\}}{t^x} dt =$
Pentru calculul ultimei integrale procedăm astfel:

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^2} dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_1^n \frac{\{x\}}{x^2} dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_k^{k+1} \frac{\{x\}}{x^2} dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_k^{k+1} \frac{x -}{x^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{x}\Big|_k^{k+1} + \ln x\Big|_k^{k+1} \right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(k \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right) + (\ln(k+1)\right.$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(-\frac{1}{k+1} + (\ln(k+1) - \ln k) \right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{n} - \ln \right.\right.$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} n \int\limits_1^a \frac{\{x^n\}}{x^n} dx = 1 - c.$

Propoziţia 1 stă şi la baza următorului rezultat

Propoziţia 3. *Se consideră funcţia* $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, $a > 0$, *continuă care satisface condiţia* (3). *Atunci* $\int\limits_a^\infty \frac{F(x)}{x} dx$ *este convergentă, unde* $F : [$ *este o primitivă a funcţiei* f *şi, mai mult, este adevărată relaţia*

$$\int_a^\infty \frac{F(x)}{x^2} dt = \frac{F(a)}{a} + \int_a^\infty \frac{f(x)}{x} dx.$$

Demonstraţie. Pentru $x > a$ avem

$$\int_a^x \frac{f(t)}{t} dt = \int_a^x \frac{F'(t)}{t} dt = \frac{F(t)}{t}\Big|_a^x + \int_a^x \frac{F(t)}{t^2} dt = \frac{F(x)}{x} - \frac{F(a)}{a} + \int_a^x \frac{F}{}$$

Tot din condiţia (3), se obţine că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, de unde, conform L [**2**], se deduce că $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$, demonstraţia nefiind imediată, deoare (3) nu asigură aplicarea directă a lemei lui l'Hospital. Trecând la limită (∗), se obţine (5) şi demonstraţia se încheie.

Exemplul 2. Se consideră $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$, prelu continuitate în $x = 0$. Dacă F este o primitivă a lui f, atunci $\int\limits_a^\infty \frac{F(}{x}$ convergentă pentru orice $a > 0$ şi $\int\limits_a^\infty \frac{F(x)}{x^2} dt = \frac{F(a)}{a} + \int\limits_a^\infty \frac{|\sin x|}{x^2} dx.$

Încheiem, propunându-i cititorului exerciţiul următor:

Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} n \int_1^a \frac{d(x^n)}{x^n} dx = \lim_{n\to\infty} \ln \frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot \ \cdots \ \cdot (2n-1)^2}{4^{2n} \cdot n!\,(n-1)!} \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$$

unde $d(x) = \inf\{x - n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Bibliografie

1. *Gazeta Matematică*, 7-8/2000, p.265 şi p.275.

2. **D. T. Onofrei** - *Asupra comportării la limită a unor primitive,* Recreaţii m II(2000), nr. 2, 28-29.

3. **A. Precupanu** - *Bazele analizei matematice*, Editura Polirom, Iaşi, 1998

O clasă de inegalităţi

Mihai DICU, Lucian TUŢESCU [1]

Propoziţia 1. *Fie numerele $k, m \in \mathbb{N}^*$.*

1a) *Dacă $x, y, z \in \mathbb{R}$, atunci are loc inegalitatea*

$$x^{2m+2k} + y^{2m+2k} + z^{2m+2k} \geq x^k y^k z^k (x^{2m-k} + y^{2m-k} + z^{2m-k})$$

1b) *Dacă $x, y, z \in \mathbb{R}_+$, atunci are loc inegalitatea*

$$x^{2m+2k+1} + y^{2m+2k+1} + z^{2m+2k+1} \geq x^k y^k z^k (x^{2m-k+1} + y^{2m-k+1} + z^{2}$$

1c) *Dacă $x, y, z \in \mathbb{R}_+$, atunci are loc inegalitatea*

$$x^{2m+2k} + y^{2m+2k} + z^{2m+2k} \geq x^k y^k z^k (x^{2m-k-1}\sqrt{yz} + y^{2m-k-1}\sqrt{xz} + z^{2m}$$

Demonstraţie. 1a) Avem

$$(x^{2m} - y^{2m})(x^{2k} - y^{2k}) \geq 0, \quad (y^{2m} - z^{2m})(y^{2k} - z^{2k}) \geq 0,$$
$$(z^{2m} - x^{2m})(z^{2k} - x^{2k}) \geq 0$$

şi apoi

$$x^{2m+2k} + y^{2m+2k} \geq x^{2k} y^{2m} + x^{2m} y^{2k}$$
$$y^{2m+2k} + z^{2m+2k} \geq y^{2k} z^{2m} + y^{2m} z^{2k}$$
$$z^{2m+2k} + x^{2m+2k} \geq x^{2k} z^{2m} + x^{2m} z^{2k}$$

Adunând (1), (2), (3), punem sub forma

$$2(x^{2m+2k} + y^{2m+2k} + z^{2m+2k}) \geq (x^{2m} y^{2k} + x^{2m} z^{2k}) + (x^{2k} y^{2m} + y^{2m} z^{2k}) + (x^{2k} z^{2}$$
$$\geq 2\left|x^{2m} y^k z^k\right| + 2\left|x^k y^{2m} z^k\right| + 2\left|x^k y^k z^{2m}\right| \geq 2x^k y^k z^k (x^{2m-k} + y^{2m-k}$$

după aplicarea inegalităţii mediilor pentru fiecare paranteză în parte.

1b) La fel ca la punctul a) pentru $x, y, z \geq 0$ se pleacă de la inegalităţi

$$(x^{2m+1} - y^{2m+1})(x^{2k} - y^{2k}) \geq 0, \quad (y^{2m+1} - z^{2m+1})(y^{2k} - z^{2k}) \geq 0$$
$$(z^{2m+1} - x^{2m+1})(z^{2k} - x^{2k}) \geq 0.$$

După adunare, grupăm sub forma

$$2(x^{2m+2k+1} + y^{2m+2k+1} + z^{2m+2k+1}) \geq$$
$$\geq (x^{2m+1} y^{2k} + x^{2m+1} z^{2k}) + (x^{2k} y^{2m+1} + y^{2m+1} z^{2k}) + (x^{2k} z^{2m+1} + y^{2k}$$

După aplicarea inegalităţii mediilor, pentru fiecare paranteză, se găse
tatea 1b).

1c) Pentru $x, y, z \geq 0$ se folosesc inegalităţile:

$$(x^{2m-1} - y^{2m-1})(x^{2k+1} - y^{2k+1}) \geq 0, \quad (y^{2m-1} - z^{2m-1})(y^{2k+1} - z^{2k+1}$$
$$(z^{2m-1} - x^{2m-1})(z^{2k+1} - x^{2k+1}) \geq 0$$

şi se parcurg aceleaşi etape ca la punctul a) şi b), grupând corespunzător.

Observaţia 1. Se vede uşor că fiecare dintre inegalităţile (1a), (1b)
mai tare decât inegalitatea mediilor.

---

[1] Profesori, C.N. "Fraţii Buzeşti" Craiova

Cazuri particulare

$1a_1$) Dacă luăm $k \in \mathbb{N}^*$ şi notăm $2m-k = n \in \mathbb{N}$, atunci cu $k+n$ par şi
avem

$$x^{3k+n} + y^{3k+n} + z^{3k+n} \geq x^k y^k z^k (x^n + y^n + z^n).$$

$1a_2$) Dacă în aceasta particularizăm $k = 1$, se obţine

$$x^{n+3} + y^{n+3} + z^{n+3} \geq xyz(x^n + y^n + z^n),$$

cu n număr natural impar şi x, y, z numere reale oarecare.

Concursul "Gheorghe Dumitre

$1a_3$) Să remarcăm câteva cazuri particulare ale ultimei inegalităţi:

$1a_{31}$) $$x^4 + y^4 + z^4 \geq xyz(x+y+z), \quad x, y, z \in \mathbb{R};$$

$1a_{32}$) $$x^6 + y^6 + z^6 \geq xyz(x^3+y^3+z^3), \quad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Concursul revistei "Arhim

$1b_1$) Dacă luăm $k \in \mathbb{N}^*$ şi notăm $2m-k+1 = n \in \mathbb{N}$, atunci cu $k +$
$x, y, z \in \mathbb{R}_+$ avem

$$x^{3k+n} + y^{3k+n} + z^{3k+n} \geq x^k y^k z^k (x^n + y^n + z^n).$$

$1b_2$) Dacă în aceasta particularizăm $k = 1$, se obţine

$$x^{n+3} + y^{n+3} + z^{n+3} \geq xyz(x^n + y^n + z^n),$$

cu n număr natural par şi x, y, z numere reale pozitive oarecare.

Concursul "Gheorghe Dumitre

$1b_{21}$) pentru $n = 0$ şi x, y, z numere reale pozitive oarecare se obţin

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz,$$

adică inegalitatea mediilor pentru trei numere.

$1b_{22}$) pentru $n = 2$ şi x, y, z numere reale pozitive, se obţine

$$x^5 + y^5 + z^5 \geq xyz(x^2 + y^2 + z^2).$$

$1c_1$) Dacă luăm $k \in \mathbb{N}^*$ şi notăm $2m-k-1 = n \in \mathbb{N}$, atunci, cu $k +$
$x, y, z \in \mathbb{R}_+$, avem

$$x^{3k+n+1} + y^{3k+n+1} + z^{3k+n+1} \geq x^k y^k z^k (x^n\sqrt{yz} + y^n\sqrt{xz} + z^n\sqrt{x$$

Propoziţia 2. *Fie numerele $k, m \in \mathbb{N}^*$.*

$2a$) *Dacă $x, y, z \in \mathbb{R}$, atunci are loc inegalitatea*

$$x^{2m+2k} + y^{2m+2k} + z^{2m+2k} \geq x^k y^k z^k (x^{2m-k} + y^m z^{m-k} + z^m y^{m-$$

$2b$) *Dacă $x, y, z \in \mathbb{R}_+$, atunci are loc inegalitatea*

$$x^{2m+2k+1} + y^{2m+2k+1} + z^{2m+2k+1} \geq x^k y^k z^k \left(x^{2m-k+1} + y^m z^{m-k}\sqrt{yz} + y^m\right.$$

$2c$) *Dacă $x, y, z \in \mathbb{R}_+$, atunci are loc inegalitatea*

$$x^{2m+2k} + y^{2m+2k} + z^{2m+2k} \geq x^k y^k z^k \left(x^{2m-k-1}\sqrt{yz} + y^m z^{m-k}\sqrt{\frac{x}{z}} + y^{m-\right.$$

Demonstraţie. $2a$) Adunăm (1), (2), (3) şi grupăm termenii din mem
sub forma

$$2(x^{2m+2k} + y^{2m+2k} + z^{2m+2k}) \geq (x^{2m}y^{2k} + x^{2m}z^{2k}) + (x^{2k}y^{2m} + y^{2k}z^{2m}) + (x^{2k}z^{2r}$$

Aplicând inegalitatea mediilor pentru fiecare paranteză, obţinem:

$$2(x^{2m+2k}+y^{2m+2k}+z^{2m+2k}) \geq 2\left|x^{2m}y^kz^k\right|+2\left|x^ky^{m+k}z^m\right|+2\left|x^ky^m\right.$$

$$\geq 2\left|x^{2m}y^kz^k\right|+2\left|x^ky^{m+k}z^m\right|+2\left|x^ky^mz^{m+k}\right| \geq$$

$$\geq 2x^ky^kz^k(x^{2m-k}+y^mz^{m-k}+z^my^{m-k}).$$

2b) Plecând de la (1b), după adunare, grupăm astfel:

$$2(x^{2m+2k+1}+y^{2m+2k+1}+z^{2m+2k+1}) \geq$$

$$\geq (x^{2m+1}y^{2k}+x^{2m+1}z^{2k})+(x^{2k}y^{2m+1}+y^{2k}z^{2m+1})+(x^{2k}z^{2m+1}+z^{2k}$$

$$\geq 2(x^{2m+1}y^kz^k+x^ky^{m+k}z^m\sqrt{yz}+x^ky^mz^{m+k}\sqrt{yz})=$$

$$=2x^ky^kz^k(x^{2m-k+1}+y^mz^{m-k}\sqrt{yz}+y^{m-k}z^m\sqrt{yz}).$$

2c) Folosind (1c), după adunare, termenii se grupează astfel:

$$2(x^{2m+2k}+y^{2m+2k}+z^{2m+2k}) \geq$$

$$\geq (x^{2m-1}y^{2k+1}+x^{2m-1}z^{2k+1})+(x^{2k+1}y^{2m-1}+y^{2k+1}z^{2m-1})+(x^{2k+1}z^{2m-1}+y^{2}$$

$$\geq 2\left(x^{2m-1}y^kz^k\sqrt{yz}+x^ky^{m+k}z^m\sqrt{\frac{x}{z}}+x^ky^mz^{m+k}\sqrt{\frac{x}{y}}\right)=$$

$$=2x^ky^kz^k\left(x^{2m-k-1}\sqrt{yz}+y^mz^{m-k}\sqrt{\frac{x}{z}}+y^{m-k}z^m\sqrt{\frac{x}{y}}\right).$$

Observaţia 2. Se vede uşor că fiecare dintre inegalităţile 2a), 2b), 2
tare decât inegalitatea mediilor.

Observaţia 3. În cazul în care $x,y,z \in \mathbb{R}_+$ inegalitatea 1a) este mai
2a) pentru $m>k$, respectiv, mai slabă în caz contrar, pentru că
$x^{2m-k}+y^{2m-k}+z^{2m-k} \geq x^{2m-k}+y^mz^{m-k}+z^my^{m-k} \Leftrightarrow (y^m-z^m)(y^{m-k}-$

Cazuri particulare

2a_1) Pentru $m=2k$ şi $x,y,z \in \mathbb{R}$, avem

$$x^{6k}+y^{6k}+z^{6k} \geq x^ky^kz^k(x^{3k}+y^{2k}z^k+z^ky^{2k}).$$

2a_2) Pentru $k=2m$ şi $x,y,z \in \mathbb{R}$, avem

$$x^{6m}+y^{6m}+z^{6m} \geq x^{2m}y^{2m}z^{2m}\left(1+\left(\frac{y}{z}\right)^m+\left(\frac{z}{y}\right)^m\right).$$

2b_1) Pentru $m=2k$ şi $x,y,z \in \mathbb{R}_+$, avem

$$x^{6k+1}+y^{6k+1}+z^{6k+1} \geq x^ky^kz^k(x^{3k+1}+y^{2k}z^k\sqrt{yz}+y^kz^k\sqrt{yz}$$

2b_2) Pentru $k=2m$ şi $x,y,z \in \mathbb{R}_+$, avem

$$x^{6m+1}+y^{6m+1}+z^{6m+1} \geq x^{2m}y^{2m}z^{2m}(x+y^mz^{-m}\sqrt{yz}+y^{-m}z^m$$

2c_1) Pentru $m=2k$ şi $x,y,z \in \mathbb{R}_+$, avem

$$x^{6k}+y^{6k}+z^{6k} \geq x^ky^kz^k\left(x^{3k-1}\sqrt{yz}+y^{2k}z^k\sqrt{\frac{x}{z}}+y^kz^{2k}\sqrt{\frac{x}{y}}\right)$$

2c_2) Pentru $k=2m$ şi $x,y,z \in \mathbb{R}_+$, avem

$$x^{6m}+y^{6m}+z^{6m} \geq x^{2m}y^{2m}z^{2m}\left(x^{-1}\sqrt{yz}+y^mz^{-m}\sqrt{\frac{x}{z}}+y^{-m}z^m\right.$$

Inegalităţi omogene şi puţină analiză...

Titu ZVONARU[1]

Vom stabili printr-o metodă unitară câteva inegalităţi în trei variabile îndeplinesc condiţia $a + b + c = 1$. Să remarcăm că, pentru inegalităţi această condiţie poate fi oricând adăugată, fără pierderea generalităţii.

Exemplul 1 (*Inegalitea lui Nesbitt*). $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} \geq \dfrac{3}{2}$, $\forall a,$

Soluţie. Inegalitatea fiind omogenă, putem presupune $a + b + c =$ $\dfrac{x}{1-x} \geq \dfrac{9x-1}{4}$, $\forall x \in (0,1)$ (inegalitate echivalentă cu $(3x-1)^2 \geq 0$). Ca

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} \geq \frac{9a-1}{4} + \frac{9b-1}{4} + \frac{9c}{}$$

(egalităţile care apar sunt justificate de faptul că $a + b + c = 1$) şi inegal demonstrată.

Această soluţie este de tip "iepuraşul scos din joben" şi cititorul se î unde a apărut inegalitatea ajutătoare. Răspundem acestei întrebări, ară dată şi ideea călăuzitoare a notei noastre.

Considerăm funcţia $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ dată prin $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$. Tangenta ei în punctul de abscisă $\dfrac{1}{3}$ are ecuaţia

$$y - f\left(\frac{1}{3}\right) = f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow y = \frac{9x-1}{4}.$$

Deoarece funcţia este convexă, pe tot domeniul său de definiţie, grafi situat "deasupra" tangentei, fapt care se traduce prin inegalitatea uti sus. Alegerea punctului de abscisă $\dfrac{1}{3}$ este, desigur, motivată de cazul d $a = b = c = \dfrac{1}{3}$.

Exemplul 2 (*Polonia, 1996*). *Pentru orice* $a, b, c \geq -\dfrac{3}{4}$ *cu* $a + b + c =$

$$\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} + \frac{c}{c^2+1} \leq \frac{9}{10}.$$

Soluţie. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$; tangenta la graficul funcţiei de abscisă $\dfrac{1}{3}$ are ecuaţia $y = \dfrac{36x+3}{50}$, iar acest punct este situat într-u de concavitate a funcţiei f. Inegalitatea $\dfrac{x}{x^2+1} \leq \dfrac{36x+3}{50}$ (de altfel e cu $(3x-1)^2(4x+3) \geq 0$), este valabilă pentru orice $x \geq -\dfrac{3}{4}$ şi se po numerelor a, b, c. Inegalitatea cerută rezultă prin sumarea inegalităţilor d scrise pentru a, b, c şi din faptul că $a + b + c = 1$:

$$\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} + \frac{c}{c^2+1} \leq \frac{36a+3}{50} + \frac{36b+3}{50} + \frac{36c+3}{50} = \frac{9}{10}$$

[1] Comăneşti, e-mail: tzvonaru@hotmail.com

(Până la urmă, metoda aceasta este o metodă de spargere a inegalităţilor

Exemplul 3 (*USAMO, 2003*)**.** Pentru orice a, b, c pozitive are loc

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\le 8.$$

Indicaţie. Putem presupune fără a restrânge generalitatea că $a+b$
Are loc inegalitatea $\dfrac{4x+1}{3x^2-2x+1}\le\dfrac{12x+3}{2}$, $\forall x>0$, (care este echi
$(4x+1)(3x-1)^2\ge 0$) şi apoi o folosim ca în exemplele anterioare.

Exemplul 4 (*OIM, 1995 şi C:1952 din GM 7-8/1997*)**.** *Pentru* $\forall a,b,c$

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{a+b+c}{2}.$$

Indicaţie. Inegalitatea care trebuie folosită în acest exemplu este $\dfrac{x^2}{1-x}$
$x\in(0,1)$.

Exemplul 5 (*E:10888 din GM 2/1995*)**.** *Fie* a, b, c *lungimile lat*
triunghi. Atunci

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\ge 3.$$

Indicaţie. Are loc inegalitatea $\dfrac{x}{1-2x}\ge 9x-2$, pentru orice $x\in\Big(0,\dfrac{1}{2}$

Exemplul 6 (*Japonia, 1997*)**.** *Pentru orice* $a,b,c>0$ *are loc inegalit*

$$\frac{(b+c-a)^2}{a^2+(b+c)^2}+\frac{(c+a-b)^2}{b^2+(c+a)^2}+\frac{(a+b-c)^2}{c^2+(a+b)^2}\ge\frac{3}{5}.$$

Indicaţie. Se va utiliza $\dfrac{1}{2x^2-2x+1}\le\dfrac{54x+27}{25}$, $\forall x>0$.

Exemplul 7. $\dfrac{a}{ma+b+c}+\dfrac{b}{a+mb+c}+\dfrac{c}{a+b+mc}\le\dfrac{3}{m+2}$, $\forall a,b,c\in\mathbb{I}$
(o generalizare a problemei *C:1079, GM 1/1991*).

Indicaţie. Folosiţi inegalitatea $\dfrac{x}{1+(m-1)x}\le\dfrac{9x+m-1}{(m+2)^2}$! Încercaţi
stituţiile $ma+b+c=u$, $a+mb+c=v$, $a+b+mc=w$!

Exemplul 8 (*USAMO, SummerProgram, 2002*)**.** *Pentru orice* a,b,c

$$\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{2b}{c+a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{2c}{a+b}\right)^{\frac{2}{3}}\ge 3.$$

*Indicaţie***.** Avem $\left(\dfrac{2x}{1-x}\right)^{\frac{2}{3}}\ge 3x\Leftrightarrow(3x-1)^2(3x-4)\le 0$ pentru orice

Propunem cititorului următoarele exerciţii:

Exerciţiul 1 (*Gigel Buth* şi *Liviu Vlaicu, RMT 2/1998*)**.** *Pentru* $a,$
$n\ge m>0$ *are loc*

$$\frac{a}{ma+nb+nc}+\frac{b}{mb+nc+na}+\frac{c}{mc+na+nb}\ge\frac{3}{m+2n}.$$

Exercițiul 2 (*Ungaria, 1996*). *Pentru a și b mai mari ca -1 cu $a+b$*

$$\frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+1}\geq\frac{1}{3}.$$

Exercițiul 3. *Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, $\alpha>\frac{1}{n^2}$ și $a_1,\ldots,a_n\geq-\frac{2n\alpha}{n^2\alpha-1}$ $a_1+\cdots+a_n=1$. Să se demonstreze inegalitatea*

$$\frac{a_1}{a_1^2+\alpha}+\cdots+\frac{a_n}{a_n^2+\alpha}\leq\frac{n^2}{n^2\alpha+1}.$$

Exercițiul 4 (*India,1995*). *Pentru orice $a_1,\ldots,a_n$ pozitive și cu sum inegalitatea*

$$\frac{a_1}{1-a_1}+\cdots+\frac{a_n}{1-a_n}\geq\frac{n}{n-1}.$$

Exercițiul 5. *Pentru $a,b,c>0$ cu $a+b+c=1$ avem*

$$\frac{a}{a^3+1}+\frac{b}{b^3+1}+\frac{c}{c^3+1}\leq\frac{27}{28}.$$

Exercițiul 6 (*Sefket Arslanagic, 2787, Crux Mathematicorum*). *Fie astfel încât $a+b+c=1$. Atunci*

$$\frac{1}{1-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}+\frac{1}{1-\left(\frac{b+c}{2}\right)^2}+\frac{1}{1-\left(\frac{c+a}{2}\right)^2}\geq\frac{27}{8}.$$

Exercițiul 7 (*Sefket Arslanagic, 2739, Crux Mathematicorum*). *P $a,b,c>0$ are loc inegalitatea*

$$\frac{\sqrt{a+b+c}+\sqrt{a}}{b+c}+\frac{\sqrt{a+b+c}+\sqrt{b}}{c+a}+\frac{\sqrt{a+b+c}+\sqrt{c}}{a+b}\geq\frac{9+3\sqrt{}}{2\sqrt{a+b}}$$

Exercițiul 8. *Pentru $a,b,c>0$ și având suma 1, este adevărată ineg*

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2\geq\frac{100}{9}.$$

Exercițiul 9 (*Sefket Arslanagic, 2738, Crux Mathematicorum*). *Fie astfel încât $a^2+b^2+c^2=1$. Atunci avem*

$$\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}\geq\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Exercițiul 10 (*Panos E. Tsaoussoglou, 2946, Crux Mathematicor $a,b,c>0$ și $a^2+b^2+c^2=1$. Avem*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-a-b-c\geq 2\sqrt{3}\quad\text{și}\quad\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+a+b+c\geq 4\sqrt{}$$

Exercițiul 11. *Pentru $a,b,c\leq 1$ cu $a+b+c=1$ are loc*

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}\leq\frac{27}{10}.$$

Despre numerele reale algebrice

Silviu BOGA[1]

În cele ce urmează, cadrul de studiu este inelul polinoamelor cu coeficien
în care s-au definit conceptul de divizibilitate, cel mai mare divizor com
polinoame, număr real algebric şi polinom minimal asociat unui număr re
Rezultată imediat din algoritmul lui Euclid şi deosebit de utilă în raţiona
vor urma este proprietatea: $\forall f, g \in \mathbb{Q}[X]$ $\exists u, v \in \mathbb{Q}[X]$ încât $u \cdot f + v \cdot g =$

Propoziţia 1. *Dacă două polinoame $f, g \in \mathbb{Q}[X]$ au o rădăcină comu
atunci $(f; g) \neq 1$.*

Demonstraţie. Presupunând prin absurd că $(f; g) = 1$, conform p
anterior enunţată, $\exists u, v \in \mathbb{Q}[X]$ încât $u \cdot f + v \cdot g = 1$. În acest caz, cu
$g(\alpha) = 0$, vom obţine că $(u \cdot f + v \cdot g)(\alpha) = 1$, deci $0 = 1$, contradicţie.

Propoziţia 2. *Dacă două polinoame $f, g \in \mathbb{Q}[X]$ au o rădăcină com
şi $h = (f; g)$, atunci $h(\alpha) = 0$.*

Demonstraţie. Fie $f = \tilde{f} \cdot h$, $g = \tilde{g} \cdot h$ şi atunci, cum $(\tilde{f}; \tilde{g}) = 1$, $\exists u$
încât $u \cdot \tilde{f} + v \cdot \tilde{g} = 1$ şi astfel $(u \cdot \tilde{f} + v \cdot \tilde{g}) \cdot h = h \Rightarrow u \cdot f + v \cdot g = h \Rightarrow (u \cdot f +$
$h(\alpha) \Rightarrow h(\alpha) = 0$.

Propoziţia 3. *Fie $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^p + a_1 X^{p-1} + a_2 X^{p-2} + \cdots + a_p$
pentru care*

(i) f este de grad impar;

(ii) f este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$;

(iii) f are o rădăcină $\alpha \in \mathbb{R}$ de semn contrar cu termenul liber $a_p \neq 0$

(iv) $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{p-1}^2 \neq 0$.

În condiţiile (i) – (iv), pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, α^n este număr real iraţional

Demonstraţie. Vom presupune, fără a restrânge generalitatea, că term
este pozitiv. Din cele menţionate, evident că $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. În acest caz, d
un anume $n \in \mathbb{N}^*$ ar avea loc $\alpha^n = a \in \mathbb{Q}$, polinomul $g = X^n - a \in \mathbb{Q}$
o rădăcină comună cu polinomul f nu va fi prim cu f şi, cum f este ired
rezulta $g \,\vdots\, f$. Dar rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ ale polinomului g au $|x_1$
$\cdots = |x_n| = \sqrt[n]{|a|}$ şi astfel, din $g \,\vdots\, f$, ar rezulta că şi rădăcinile polinomu
toate de acelaşi modul, implicit $|\alpha| = \sqrt[p]{|a_p|}$ şi, din condiţia (iii), $\alpha =$
această situaţie, din exprimarea $f = (X^p + a_p) + X\left(a_1 X^{p-2} + a_2 X^{p-3} + \cdot\right.$
se va deduce că polinoamele $v = X^p + a_p$ şi $w = a_1 X^{p-2} + a_2 X^{p-3} + \cdots$
rădăcină comună α. Dar $w = a_1 X^{p-2} + a_2 X^{p-3} + \cdots + a_{p-1}$ este neconsta
cu (i) şi (iv) şi, datorită rădăcinii comune, v şi w nu ar fi prime între ele,
face ca f să nu fie ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$, în contradicţie cu (ii). Rămâne că c

Observaţie. Chestiuni de genul: Dacă $x \in \mathbb{R}$ verifică $x^3 + 2x + 2$
arate că $x^{2006} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, imediat justificate de Propoziţia 3, apar în mai mu
printre subiectele de bacalaureat, sesiunile 2006 şi 2007 (a se vedea [**1**]).

Urmând pas cu pas demonstraţia Propoziţiei 3 (adaptările necesare sunt
vom obţine imediat

---

[1] Profesor, Liceul "V. Alecsandri", Iaşi

Propoziţia 4. *Fie* $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^p + a_1X^{p-1} + a_2X^{p-2} + \cdots + a_p$
pentru care

(*i*) f *este de grad par;*

(*ii*) f *este ireductibil în* $\mathbb{Q}[X]$*;*

(*iii*) f *are o rădăcină* $\alpha \in \mathbb{R}$ *şi* $a_p < 0$*;*

(*iv*) $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{p-1}^2 \neq 0$.

În condiţiile (*i*) – (*iv*), *pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$, α^n *este număr real iraţional*

Observaţie. Analog cu prima observaţie, prin Propoziţia 4 se der
imediat afirmaţii de genul: Dacă $x \in \mathbb{R}$ verifică $x^4 + x^3 + x^2 + x = 2007$,
că $x^n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Propoziţia 5. *Dacă* $\alpha \in \mathbb{R}$ *este un număr real algebric şi există* n
$\alpha^n \in \mathbb{Q}$ *atunci* $n \vdots p$, *unde* $p =$ grad f_α, f_α *fiind polinomul minimal as*
(adică polinomul din $\mathbb{Q}[X]$ de grad minim şi care admite ca rădăcină α).

Demonstraţie. Fie $\alpha^n = a \in \mathbb{Q}$; atunci $g = X^n - a$ are rădăcină com
deci $(g; f_\alpha) = h \neq 1$. Dar f_α fiind polinom minimal, este ireductibil şi a
de unde $n \vdots$ grad f_α.

Propoziţia 6. *Dacă* $\alpha \in \mathbb{R}$ *este un număr real algebric şi există* n
$\alpha^n \in \mathbb{Q}$, *atunci polinomul minimal asociat lui* α *este de forma* $f_\alpha = X^p$
$p = \min\{n \mid \alpha^n \in \mathbb{Q}\}$.

Demonstraţie. În cazul $\alpha \in \mathbb{Q}$ se observă că $f_\alpha = X - \alpha$. În cazul
evident $\{n \mid \alpha^n \in \mathbb{Q}\} \neq \emptyset$ şi fie $f_\alpha = X^p + a_1X^{p-1} + a_2X^{p-2} + \cdots + a$
polinomul minimal al lui α. Cum $\alpha^n \in \mathbb{Q}$, conform propoziţiei anterio
totodată $\alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{p-1} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, deoarece în caz contrar f_α nu ar mai fi mi
în acest caz $n \geq p$ şi analog cu raţionamentul din propoziţiile anterioare $|\alpha$
deci $|\alpha|^p = |a_p| \in \mathbb{Q}$. Astfel $\alpha^p \in \mathbb{Q}$ şi considerând $g = a_1X^{p-1} + a_2X^p$
$a_{p-1}X + (a_p + \alpha^p)$, deducem că $g(\alpha) = f_\alpha(\alpha) = 0$ şi cum f_α este minim
$g = 0$, prin urmare $f_\alpha = X^p - \alpha^p$.

Observaţie. Conform ultimei propoziţii, orice rădăcină reală iraţional
polinom $f \in \mathbb{Q}[X]$ ireductibil şi care nu este de forma $f = X^p - a$, are p
$\alpha^n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Concluzie. Oricare ar fi $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ rădăcină a unui polinom ireductibil
$f = X^p + a_1X^{p-1} + a_2X^{p-2} + \cdots + a_{p-1}X + a_p$, are loc exact una din si

a) $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{p-1}^2 \neq 0$ şi în acest caz $\alpha^n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

b) $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{p-1}^2 = 0$ şi în acest caz $\alpha^n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Leftrightarrow n \in \mathbb{N}^*$ este
prin p.

Bibliografie

1. http://www.subiecte2007.edu.ro – bacalaureat, subiecte M11, variantele 4

2. **C. Năstăsescu, C. Niţă** - *Teoria calitativă a ecuaţiilor algebrice*, Ed
Bucureşti, 1982.

Asupra unei note din revista "Recreaţii maten

Maria BĂTINEŢU-GIURGIU[1]***,***

D. M. BĂTINEŢU-GIURGIU[2]

În "Recreaţii Matematice", an. V, nr. 2/2003 este publicată o Notă n interesantă [**5**], pentru care eleva **Oana Cârjă** a primit premiul *Fundaţie* pe anul 2003. Ne propunem să întărim şi să extindem rezultatele acestei

Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale strict pozitive astfel încât $\exists \lim\limits_{n\to\infty} (x_{n-}$ $= x \in \mathbb{R}_+^*$. Atunci, există şi limitele:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{(n+1) - n} = x \quad \text{şi} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{x_n} \cdot \frac{n}{}$$

Dacă, însă, $(x_n)_{n\geq 1}$ are proprietatea că există $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n} = t \in \mathbb{R}_+^*$, nu există $\lim\limits_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n)$, după cum arată şirul $x_n = n + (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Teorema 1. *Fie şirul de numere reale strict pozitive* $(x_n)_{n\geq 1}$ *a* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{x} = x \in \mathbb{R}_+^*$. *Atunci,* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} (x_{n-1} - x_n) \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n$ *şi*

$$\lim_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) = x \cdot \ln \left(\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n \right).$$

Demonstraţia I (D. M. Bătineţu-Giurgiu). Notând $u_n = \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ avem

$$x_{n+1} - x_n = x_n (u_n - 1) = \frac{x_n}{n} \cdot \frac{u_n - 1}{\ln u_n} \cdot \ln (u_n)^n, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Dar $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$ şi, deci, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n - 1}{\ln u_n} = 1$. Dacă $\exists y = \lim\limits_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n)$, limită în (2), obţinem: $y = x \cdot \ln \left(\lim\limits_{n\to\infty} (u_n)^n\right)$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n)^n = e^{y/x}$. dacă $\exists z = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n$, utilizând din nou (2), obţinem: $\lim\limits_{n\to\infty} (x_{n+}$ $x \cdot \ln z$.

Demonstraţia a II-a (M. Ţena). Se procedează la fel, în locul folosind formula

$$\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n}\right)^{\frac{x_n}{x_{n+1} - x_n}}\right]^{\frac{n}{x_n}(x_{n+1} - x_n)}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Fie şirurile de numere reale strict pozitive $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$, $(x_n)_{n\geq 1}$ cu proprietăţile: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_{n+1}}{b_n} = a \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = b \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n} = x \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_{n+1}}{n} = y \in \mathbb{R}_+^*$. Vom numi *şir Lalescu* definit c

[1] Prof., dr., Academia Tehnică Militară, Bucureşti

[2] Prof., Colegiul Naţional "Matei Basarab", Bucureşti

şi ponderat cu $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ şirul $(L_n)_{n\geq 2}$ dat de

$$L_n = x_{n+1}\sqrt[n+1]{a_{n+1}y_{n+1}} - x_n\sqrt[n]{b_n y_n}, \quad n \geq 2.$$

Teorema 2. *Şirul Lalescu $(L_n)_{n\geq 2}$ definit prin (4) este convergent dac*
dacă şirul $\left(\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n\right)_{n\geq 1}$ este convergent.

Demonstraţie. Notând $v_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}\cdot\frac{\sqrt[n+1]{a_{n+1}y_{n+1}}}{\sqrt[n]{b_n y_n}}$, $n \geq 2$, vom avea

$$L_n = x_n\sqrt[n]{b_n y_n}\,(v_n - 1) = \frac{x_n}{n}\sqrt[n]{b_n y_n}\frac{v_n - 1}{\ln v_n}\ln(v_n)^n, \quad n \geq 2.$$

În ipotezele noastre, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n} = a$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty}$
avem şi $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{y_n} = 1$. Ca urmare, $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 1$. Din faptul că

$$(v_n)^n = \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n \frac{a_{n+1}}{a_n}\frac{a_n}{b_n}\frac{y_{n+1}}{y_n}\frac{1}{\sqrt[n+1]{a_{n+1}}\sqrt[n+1]{y_{n+1}}}, \quad n \geq 2,$$

rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n)^n = b\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n$.

Dacă $\exists z = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n$, trecând la limită în (5), obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} L_n =$
Reciproc, dacă $\exists c = \lim\limits_{n\to\infty} L_n$, din (5) rezultă că avem $c = ax\ln\Big(\lim\limits_{n\to\infty}(v$
$\lim\limits_{n\to\infty}(v_n)^n = e^{\frac{c}{ax}}$ şi, în final, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n = \frac{1}{b}e^{\frac{c}{ax}}$.

Aplicaţii ale Teoremei 1. 1) Luăm $x_n = \sqrt[n]{n!}$, $\forall n \geq 2$ .Cum $\lim\limits_{n\to\infty}$
şi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}\frac{1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} =$
conform Teoremei 1, că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}\right) = \frac{1}{e}$ (*limita şirului*
Lalescu).

2) Luând $x_n = n\sqrt[n]{n}$, $\forall n \geq 2$, avem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n} = 1 \quad \text{şi} \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\Bigg(\frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt[n+1]{n+1}}\Bigg)$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty}\left((n+1)\sqrt[n+1]{n+1} - n\sqrt[n]{n}\right) = 1$ (*limita şirului lui Romeo T. Ia*

3) Dacă $x_n = \sqrt[n]{(2n-1)!!}$, $\forall n \geq 2$, atunci, după calcule de rutină, avem
$\frac{2}{e}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n = e$. Ca urmare, $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\sqrt[n+1]{(2n+1)!!} - \sqrt[n]{(2n-}$
(*D.M. Bătineţu-Giurgiu, C:905,* G.M.-5/1989).

4) Fie $x_n = \sqrt[n]{d_1 d_3\cdots d_{2n-1}}$, $\forall n \geq 2$, unde $d_n \in \mathbb{R}_+^*$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}(d_{n+1} -$
$\mathbb{R}_+^*$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{d_1d_3\cdots d_{2n-1}}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{d_1\cdots d_{2n+1}}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{d_1\cdots d_{2n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{d_{2n+1}}{2n+1}\frac{2n+1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{2d}{e},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{d_1d_3\cdots d_{2n+1}}{d_1d_3\cdots d_{2n-1}}\frac{1}{\sqrt[n+1]{d_1d_3\cdots d_{2n+1}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{d_{2n+1}}{n+1}\frac{n+1}{\sqrt[n+1]{d_1d_3\cdots d_{2n+1}}}=2d\frac{e}{2d}=e.$$

Ca urmare, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=\frac{2d}{e}\ln e=\frac{2d}{e}$ (*D.M. Bătineţu-Giurgiu, C:*
- 2-3/1992).

Aplicaţii ale Teoremei 2. 1) Date $c_n\in\mathbb{R}_+^*$, $\forall n\geq 1$, să notăm
$c_{n+1}!=c_{n+1}\cdot c_n!$, $\forall n\geq 1$. În Teorema 2 considerăm $y_n=1$, $\forall n\geq 1$ şi x
$\forall n\geq 2$, unde $\lim\limits_{n\to\infty}(c_{n+1}-c_n)=c\in\mathbb{R}_+^*$. Ca mai sus, avem $\lim\limits_{n\to\infty}$
$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n=e$. În consecinţă, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{c_{n+1}!a_{n+1}}-\sqrt[n]{c_n!b_n}\right)=$
(*Teorema 3* din [**6**]).

2) Fie $c_n\in\mathbb{R}_+^*$, $\forall n\geq 1$, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}(c_{n+1}-c_n)=c\in\mathbb{R}_+^*$.
rând $x_n=y_n=c_n$, $\forall n\geq 1$, obţinem că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_{n+1}\sqrt[n+1]{a_{n+1}x_{n+1}}-x_n\right.$
$=ac\ln(be)$ (*Teorema 4* din [**6**]).

3) Pentru $\forall n\in\mathbb{N}^*$, să considerăm $x_n=n$, $y_n=1$, $a_n=b_n=$
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=e$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}$
şi, deci, obţinem $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}-\frac{n^2}{\sqrt[n]{n!}}\right)=e$ (*D.M. Bătineţu-Giur*
G.M.-4/1989).

Bibliografie

1. **D. M. Bătineţu** - *Şiruri*, Editura Albatros, 1979.
2. **D. M. Bătineţu-Giurgiu** - *Şiruri Lalescu*, R.M.T., 1-2/1989, 33-36.
3. **D. M. Bătineţu-Giurgiu** - *Ponderarea unor şiruri*, G.M., 2-3/1992, 46-
4. **D. M. Bătineţu-Giurgiu** - *Asupra calculării unor limite de şiruri*, RecM 22-24.
5. **O. Cârjă** - *Un procedeu de calcul al limitelor unor şirui de forma* $(a_{n+1}$ RecMat-2/2003, 23-24.
6. **A. Stroe** - *Asupra unei clase de şiruri*, G.M., seria A, 3/2007, 217-227.
7. **M. Ţena** - *O altă soluţie a Problemei 579 din G.M.*, Revista "Licăriri" "N. Bălcescu" din Craiova, 1978, 13-14.

Limita unor şiruri de numere reale

Gheorghe COSTOVICI[1]

Prezentăm mai jos o generalizare directă a Propoziţiei din [**1**] şi câteva

Propoziţie. *Fie* $f\colon(0,\infty)\to\mathbb{R}$ *continuă, descrescătoare şi cu* $\lim\limits_{n\to\infty} f($
primitivă a lui f *pe* $(0,\infty)$ *şi numerele* $p,q\in\mathbb{N}^*$, $p<q$. *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty}[F(qn)$
$= l \in \overline{\mathbb{R}}$, *atunci avem şi*

$$\lim_{n\to\infty}\left[f\left(pn+1\right)+f\left(pn+2\right)+\cdots+f\left(qn\right)\right]=l.$$

Demonstraţie. Să considerăm şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ dat de $x_n = f(1) + f$
$+f(n)-F(n)$. Procedând ca în [**1**], arătăm că $(x_n)_{n\geq 1}$ este descrescător ş

Într-adevăr, cu teorema de medie a lui Lagrange, avem

$x_{n+1}-x_n = f(n+1)-[F(n+1)-F(n)] = f(n+1)-F'(c_n) = f(n+1)$
(unde $n<c_n<n+1$). Deci, $x_{n+1}\leq x_n$, $\forall n\geq 1$.

Pe de altă parte, cu aceeaşi teoremă de medie, avem $F(k+1)-F(k)$
$\leq f(k)$ $(k<c_k<k+1)$ şi, sumând pentru $k=\overline{1,n}$, obţinem

$F(n+1)-F(1)\leq f(1)+f(2)+\cdots+f(n)\,,\ n\geq 2 \Leftrightarrow x_{n+1}\geq f(n+1)-F$

De aici şi din faptul că şirul $(f(n))_{n\geq 1}$ este mărginit (consecinţă a condiţiei
$=0$), rezultă că $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit inferior. Aşadar, şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este c

Se constată uşor că

$f(pn+1)+f(pn+2)+\cdots+f(qn) = x_{qn}-x_{pn}+[F(qn)-F(pn)]$
care, pentru $n\to\infty$, conduce la (1).

Observaţie. Propoziţia din [**1**] se obţine pentru $p=1$ şi $q=2$.

Calculul limitelor următoare devine simplu prin aplicarea acestei Propo
în seama cititorului verificarea condiţiilor de aplicare).

Exemple. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{pn+1}+\dfrac{1}{pn+2}+\cdots+\dfrac{1}{qn}\right)=\ln\dfrac{q}{p}\quad (f(x)=$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{(q-p)n}\dfrac{1}{1+(pn+k)^2}=0\quad \left(f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}\right).$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{(q-p)n}\dfrac{1}{\sqrt{pn+k}+1}=\infty.$

4) $\sum\limits_{k=1}^{(q-p)n}\operatorname{arctg}(pn+k)=\ln\dfrac{q}{p}\quad (\ f(x)=\operatorname{arctg}x).$

5) $\sum\limits_{k=1}^{(q-p)n}\dfrac{1}{(pn+k)\sqrt{(pn+k)^2+1}}=0\quad \left(f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\right).$

Bibliografie

1. **C. Chiser** - *O metodă elegantă de calcul al unor limite de şiruri*, R.M.
9-10.

[1] Conf. dr., Catedra de matematică, Univ. Tehnică "Gh. Asachi"

O rafinare a inegalităţii dintre media aritme
şi cea logaritmică

Mihail BENCZE[1]

Fie $0 < a < b$. Vom nota cu

$$A(a,b) = \frac{a+b}{2} \qquad \text{şi} \qquad L(a,b) = \frac{b-a}{\ln b - \ln a}$$

media aritmetică şi, respectiv, media logaritmică. Se ştie [**1**] că

$$L(a,b) < A(a,b).$$

În această notă vom da o rafinare a acestei inegalităţi.

Teoremă. *Dacă* $0 < a < b$ *atunci avem inegalităţile*

$$L(a,b) < L\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) < \left[A\left(\sqrt{a}, \sqrt{b}\right)\right]^2 < A(a,b).$$

Demonstraţie. Inegalitatea din dreapta rezultă imediat:

$$A(a,b) > \left[A\left(\sqrt{a}, \sqrt{b}\right)\right]^2 \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} > \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$$

Pe de altă parte, $\left[A\left(\sqrt{a}, \sqrt{b}\right)\right]^2 = A\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right)$ şi aplicând (2
$A\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) > L\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right)$, adică inegalitatea din mijloc.

Mai rămâne de demonstrat inegalitatea din stânga, care, cu notaţia t
se scrie

$$\frac{\frac{t+1}{2} - \sqrt{t}}{\ln\left(\frac{t+1}{2}\right) - \ln\sqrt{t}} > \frac{t-1}{\ln t} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{t}-1}{2\ln\left(\frac{t+1}{2}\right) - \ln t} > \frac{\sqrt{t}+1}{\ln t} \Leftrightarrow \sqrt{t}\ln t > \left(\sqrt{t}+\right.$$

Pentru a demonstra această nouă inegalitate folosim notaţiile $t = x^2$
$2x\ln x - (x+1)\ln\left(\frac{x^2+1}{2}\right)$. Atunci

$$f'(x) = 2\ln x - \left(\frac{x^2+1}{2}\right) - \frac{2(x-1)}{x^2+1} \quad \text{şi} \quad f''(x) = \frac{2(x-1)^2(x+1}{x(x^2+1)^2}$$

deci $f'(x) > f'(1) = 0$ şi $f(x) > f(1) = 0$ şi astfel am demonstrat i
$\sqrt{t}\ln t > \left(\sqrt{t}+1\right)\ln\frac{t+1}{2}$, adică $L(a,b) < L\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right)$.

Bibliografie

1. **F. Burk** - *The Geometric, Logaritmic and Aritmetic Mean Inequality*, An
Monthly 94(1987), 527-528.
2. **M. Bencze** - *New Means, new Inequalities and Refinement*, Octogon Ma
Magazine, Vol. 9, Nr. 1/2001, 46-105.

---
[1] Profesor, Braşov

NOTA ELEVULUI

Estimări de sume

Tudor PĂDURARIU[1]

În ultimii ani, la diverse concursuri, naţionale sau internaţionale, au fo probleme în care se cere să se găsească sau să se demonstreze o anumită a pentru o sumă (numerică, vectorială etc). Metodele de rezolvare a unor probleme sunt variate şi presupun raţionamente care folosesc reducerea principiul cutiei, principiul extremal, inducţia matematică ş. a.

Prezentăm în continuare câteva exemple; cititorul interesat poate ex cile dobândite rezolvând problemele propuse în finalul notei, precum şi probleme din articolul lui **Gabriel Carroll** - *Estimating Sums*, care po pe internet la adresa [**1**] şi care a constituit punctul de plecare al demersu

Problema 1. *Fie x_1, $x_2,\ldots$, x_n numere reale cu proprietatea că x_1^2+ $x_n^2=1$. Demonstraţi că pentru orice $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 2$, există întregii e_1, $e_2,$ toţi nuli, cu $|e_i|<k-1$, $\forall i=\overline{1,k}$, pentru care $|e_1x_1+\cdots+e_nx_n|\leq$ (I.M.O., 1987)*

Soluţie. Folosind inegalitatea Cauchy-Schwarz, obţinem că $|x_1|+|$ $|x_n|\geq\sqrt{n(x_1^2+\cdots+x_n^2)}=\sqrt{n}$. În total există k^n sume de tipul e_1x_1+ cu $0\leq x_i\leq k-1$, iar toate aceste sume se află în interiorul unui interval $(k-1)\sqrt{n}$. Aceste interval poate fi acoperit cu k^n-1 subintervale $\dfrac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}$ (concluzia problemei sugerează acest lucru!). Din principiul cu două sume care se găsesc în acelaşi subinterval, iar diferenţa lor satisface

Problema 2. *Fie x_1, $x_2,\ldots$, x_n numere reale cu $|x_i|\leq\dfrac{n+1}{2}$, iar $|x_1+x_2+\cdots+x_n|=1$. Demonstraţi că există o permutare y_1, y_2 numerelor x_1, $x_2,\ldots$, x_n astfel încât $|y_1+2y_2+\cdots+ny_n|\leq\dfrac{n+1}{2}$. (I.M*

Soluţie. Presupunem prin absurd că pentru orice permutare y_1, y_2 numerelor x_1, $x_2,\ldots$, x_n am avea $|y_1+2y_2+\cdots+ny_n|>\dfrac{n+1}{2}$. Ob $|(x_1+\cdots+nx_n)+(x_n+2x_{n-1}+\cdots+nx_1)|=(n+1)\,|x_1+x_2+\cdots+x$ şi, dacă numerele $S_1=x_1+2x_2+\cdots+nx_n$ şi $S_2=x_n+2x_{n-1}+\cdots+n$ acelaşi semn, modulul sumei ar fi egal cu suma modulelor, contradicţie. S_1 şi S_2 au semne contrare; să zicem că $S_1>0$, $S_2<0$.

Putem realiza trecerea de la S_1 la S_2 schimbând în mod repetat înt două numere consecutive x_k şi x_{k+1}. La un anumit pas, de exemplu câ de la suma $S_3=z_1+\cdots+jz_j+(j+1)\,z_{j+1}+\cdots+nz_n$ la suma $S_4=$ $jz_{j+1}+(j+1)\,z_j+\cdots+nz_n$, semnul sumei S se va schimba: $S_3>0$, i Cum $|S_3|>\dfrac{n+1}{2}$, $|S_4|>\dfrac{n+1}{2}$, vom avea că $S_3>\dfrac{n+1}{2}$, iar $S_4<-$ $S_3-S_4>n+1$. Pe de altă parte, $S_3-S_4=j\,(z_j-z_{j+1})+(j+1)\,(z_j$

---

[1] Elev, Colegiul Naţional "Gr. Moisil", Oneşti

$z_{j+1} - z_j$ şi $S_3 - S_4 = |S_3 - S_4| = |z_{j+1} - z_j| \leq |z_{j+1}| + |z_j| \leq 2 \cdot \frac{n+1}{2}$
Contradicţia la care am ajuns arată că presupunerea iniţială este falsă.

Problema 3. *Fie $n \geq 2$ un număr întreg. Colorăm fiecare dintr numere întregi consecutive în roşu sau albastru. Demonstraţi că există o s monocoloră $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ astfel încât $1 \leq a_2 - a_1 \leq a_3 - a_2 \leq \cdots \leq$ (Concursul "Al. Myller", 2007)*

Soluţie. Putem considera că numerele sunt 1, 2,..., $\frac{n^3+5n}{6}$, culorile s şi fie $d_n = \frac{n(n-1)}{2} + 1$. Vom demonstra prin inducţie că pentru orice n submulţimea monocoloră $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ pentru care $1 \leq a_2 - a_1 \leq \cdots \leq$ d_n. Proprietatea este imediată pentru $n = 2$; o presupunem adevărată p să o verificăm pentru $n+1$. Conform ipotezei inductive, printre primel numere există submulţimea monocoloră $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, colorată cu A, $1 \leq a_2 - a_1 \leq \cdots \leq a_n - a_{n-1} \leq d_n$. Considerăm numerele $a_n + d_n$, $a_n +$ $a_n + d_n + n$, în număr de $n+1$. Dacă toate au culoarea R, proprietatea este pentru $n+1$. Dacă unul dintre ele, fie acesta a_{n+1}, are culoarea A, atunci a $d_n + n = d_{n+1}$, iar $a_{n+1} \leq \frac{n^3+5n}{6} + d_n + n = \frac{(n+1)^3 + 5(n+1)}{6}$, dec $\{a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$ îndeplineşte condiţia dorită.

Problema 4. *Fiind date n numere reale, demonstraţi că există ce perechi (a_i, a_j) cu proprietatea că $1 < |a_i - a_j| < 2$.*

Soluţie. Cerinţa problemei sugerează metoda de rezolvare: un graf cu ale cărui muchii nu formează triunghiuri, are cel mult $\frac{n^2}{4}$ muchii (rez Mantel, caz particular al teoremei lui Turan). Construim un graf astfel: vâ numerele date, iar două vârfuri a_i, a_j se unesc printr-o muchie când $1 <$ 2. Dacă, prin absurd, ar exista trei vârfuri unite prin muchii, am ave $1 < |a_i - a_j| < 2$, $1 < |a_j - a_k| < 2$ şi $1 < |a_i - a_k| < 2$. Putem pre $a_i > a_j > a_k$ şi relaţiile precedente devin $1 + a_j < a_i < 2 + a_j$ şi $1 + a_k < a$ de unde $1 + a_j < 2 + a_k$, adică $a_j - a_k < 1$, imposibil. Astfel, am dem graful nu are triunghiuri şi aplicarea rezultatului menţionat iniţial încheie

Încheiem prin a propune spre rezolvare celor interesaţi câteva problem

Problema 5. *Fie O un punct pe o dreaptă d, iar $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$,..., O cu extremităţile într-un acelaşi semiplan determinat de d. Dacă n este in arate că $\left|\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \cdots + \overrightarrow{OP_n}\right| \geq 1$ (I.M.O., 1973).*

Problema 6. *Într-o secvenţă de numere reale, suma oricăror 7 te secutivi este negativă, iar suma oricăror 11 termeni consecutivi este pozi determine numărul maxim de termeni ai unei asemenea secvenţe. (I.M.C*

Bibliografie

1. http://web.mit.edu/rwbarton/public/mop

2. http://www.mathlinks.ro

CHESTIUNI METODICE

Acurateţea limbajului matematic în combinat

Laurenţiu MODAN[1]

Combinatorica, ramură distinctă a Matematicii, a apărut ca o consecin cării de rezolvare a problemelor de numărare. Mai puţin analitice decât în pline matematice, raţionamentele sale, făcute aproape în mod primordial, de aceea ce astăzi se numeşte *metalogică*.

Cum arătam şi în [**2**], o gândire matematică riguroasă şi educată ar înceapă cu învăţarea *Combinatoricii enumerative* şi să continue cu *Pr combinatoriale*, strict legate de cotidian, aşa cum actualmente se întân număr important de naţiuni cultivate ştiinţific. Nu trebuie să uităm că a binatorica, prin noile sale ramuri: *teoria grafurilor*, *teoria matroizilor*, *teori* etc., este cel mai dinamic domeniu al matematicii, având numărul cel mai de conjecturi enunţate şi rezolvate anual.

În România zilelor noastre, *Matematica discretă*, prin urmare şi Com sunt efectiv neglijate! Iar educaţia precară a tinerilor, în acest domeniu doar la mânuirea unor simple relaţii algebrice, deseori numite "formule", f ei să poată discerne când trebuie să folosească *permutări*, *aranjamente* sau *simple* sau *cu repetiţie*, respectiv când trebuie să folosească *numărul fu* acţionează de la o mulţime de cardinal n, la o alta de cardinal m.

Vom reaminti (v. [**3**]) că, pentru mulţimea $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de ca

i) *permutările* sale diferă unele de altele doar prin ordinea elementelor număr de $n!$;

ii) *aranjamentele* grupelor de câte m elemente diferă prin ordinea şi tipu şi sunt A_n^m;

iii) *combinările* ca număr al submulţimilor cu m elemente diferă doar obiectelor şi sunt $\binom{n}{m} = C_n^m$.

Numărul funcţiilor $f : M \to \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$, egal cu m^n, a fost detali

Menţionăm că este regretabil faptul că tinerii elevi şi studenţi nu sunt înţeleagă rolul esenţial al cuvintelor şi exprimărilor folosite în Combinatori constatăm cu surprindere, că în culegerea *Exerciţii şi probleme de algebră* [în numeroase reeditări, timp de peste un sfert de veac, apar erori perpet elementele de Combinatorică. În acest sens, la *Problema 25* din cap. X, aceeaşi eroare ca şi în ediţia din 1981, tipărită de Editura Didactică şi Pe

(1) *Pentru un joc, 3 băieţi şi 5 fete trebuie să formeze două echipe de câte moduri se pot forma echipele? Dar dacă în fiecare echipă trebuie să f un singur băiat?*

Observăm că alcătuirea celor două echipe, de câte 4 persoane, revine submulţimilor de câte 4 elemente, prin folosirea combinărilor. Prima ec

[1] Prof. dr., Departamentul de matematică, Facultatea de informatică, A.S.E., Bucur

forma în C_8^4 moduri, în timp ce a doua se realizează din cele 4 persoane
C_4^4 moduri. Prin urmare, alcătuirea celor două echipe se face în $C_8^4 \cdot C_4^4 =$

Vom constata apoi, că partea a doua a problemei este fără sens! Într-ad
în fiecare echipă s-ar afla un singur băiat, atunci pentru prima ar trebui
băiat şi 3 fete, iar pentru a doua ar mai trebui să existe o fată în plus.

Într-un limbaj combinatoric corect, partea a doua a problemei (1) ar
formulată în maniera următoare:

(2) *În câte moduri se pot alcătui cele două echipe de câte 4 persoan
fiecare intră cel puţin un băiat?*

Pentru rezolvare, prima echipă, constituită dintr-un băiat şi 3 fete, poa
în $C_3^1 \cdot C_5^3 = 3C_5^2 = 30$ moduri, în timp ce a doua echipă, formată din 2
fete, se alege în $C_2^2 \cdot C_2^2 = 1$ mod. Cumulând situaţiile anterioare, decidem
de 4 persoane, ce conţin cel puţin un băiat fiecare, se constituie în $30 \cdot 1 =$

Problema anterioară admite următoarea generalizare:

(3) *În câte moduri $2n-1$ băieţi şi $2n+1$ fete pot forma două echipe
persoane? Dar dacă în fiecare din cele două grupe trebuie să intre cel puţin*

Lăsăm cititorului plăcerea de a constata că, în cazul general, cele d
se constituie în $\dfrac{(4n)!}{[(2n)!]^2}$ moduri, în timp ce pentru situaţia suplimentară,
formează în $4n^3 - n + 1$ moduri. Când $n = 2$, regăsim situaţia discutată
punct de plecare al prezentei note.

Pentru exersarea noţiunilor din Combinatorică, propunem cititorului
rezolvarea următoarei probleme:

(4) *Fie* $A = \left\{3n \mid n = \overline{0,33}\right\}$ şi B *submulţimea numerelor din* A *diviz*

i) În câte moduri se pot scrie pe 17 *cartoane de culori diferite element*

ii) Câte numere de 4 *cifre se pot forma cu elementele de câte* 2 *cifre, co*

iii) Câte numere de 4 *cifre, ordonate crescător, se pot forma cu ele
câte două cifre, conţinute în* B*?*

Ca mijloc de verificare pentru cititor, dăm răspunsurile la (4), ce au c
plecare mulţimea $B = \{0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90,$

i) 17! moduri de scriere;

ii) 15+210=225 numere de 4 cifre, formate cu elementele de câte două c

iii) 105 numere de 4 cifre, ordonate crescător şi formate cu element
două cifre, din B.

Bibliografie

1. **M. Brandiburu, D. Joiţa, C. Năstăsescu, I. Niţă** - *Exerciţii şi p
Algebră*, Ed. Rotech Pro, 2004, Bucureşti.
2. **L. Modan** - *Some Remarks Counting Functions*, Octogon Mathematica
Braşov, 15(2007), no.1, 262-265.
3. **E. Rogai** - *Tabele şi formule matematice*, Ed. Tehnică, 1984, Bucureşti.

Asupra unei identităţi clasice privind partea în

Florin POPOVICI[1]

Prezentăm câteva consideraţiuni de ordin metodic asupra unei identi
privind partea întreagă a numerelor reale, pentru care dăm două demostr
cunoscute precum şi o a treia, simplă şi elegantă, despre care credem că e

Problema 1 ([**1**], p. 20). Să se arate că

$$\left[\frac{[x]}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right], \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Soluţie. *Metoda I* ([**2**], p. 122). Conform teoremei împărţirii cu rest î
$q, r \in \mathbb{Z}$, unice, astfel încât $[x] = nq + r$, $0 \le r \le n-1$. Urmează că $\left[\frac{x}{n}\right.$
Rezultă că

$$\left[\frac{[x]}{n}\right] = q.$$

Deoarece $\frac{x}{n} = \frac{[x]+\{x\}}{n} = q + \frac{r+\{x\}}{n}$ şi $0 \le \frac{r+\{x\}}{n} < \frac{n-1+1}{n} = 1$ r

$$\left[\frac{x}{n}\right] = q.$$

Din (2) şi (3) rezultă că are loc (1).

Metoda II ([**1**], pb. 11, p. 21 şi 206). Evident, avem

$$\left[\frac{[x]}{n}\right] \le \left[\frac{x}{n}\right].$$

Din definiţia părţii întregi a unui număr real rezultă că $[x]+[y] \le [x+$
$\mathbb{R}$. Prin inducţie deducem că $n[x] \le [nx]$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Renotând
obţinem $\frac{[x]}{n} \ge \left[\frac{x}{n}\right]$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Urmează că

$$\left[\frac{[x]}{n}\right] \ge \left[\frac{x}{n}\right].$$

Din (4) şi (5) rezultă (1).

Metoda III. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definită p
$\left[\frac{[x]}{n}\right] - \left[\frac{x}{n}\right]$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Avem

$$f(x+n) = \left[\frac{[x+n]}{n}\right] - \left[\frac{x+n}{n}\right] = \left[\frac{[x]+n}{n}\right] - \left[\frac{x+n}{n}\right] = \left[\frac{[x]}{n}\right] + 1 - \left[\frac{x}{n}\right.$$

deci funcţia f este periodică de perioadă n. Pentru orice $x \in [0,n]$ avem 0
şi $0 \le \frac{x}{n} < 1$. Urmează că $f(x) = 0$, $\forall x \in [0,n]$. Rezultă că $f(x) = 0$, $\forall$
are loc (1).

---

[1] Prof. dr., Colegiul Naţional "Gr. Moisil", Braşov

Observaţia 1. Metoda III este inspirată de una dintre metodele clasice
demonstrarea celebrei identităţi a lui Hermite:

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx], \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ n$$

Bibliografie

1. **L. Niculescu, I. Pătraşcu, A. Seclăman, M. Gălăţeanu** - *Exerciţii* *de matematică. Clasa a IX-a*, Editura Cardinal, Craiova, 2004.
2. **I. M. Vinogradov -** *Bazele teoriei numerelor*, Editura Academiei, Bucu

---

Recreaţii ... matematice

Profesorul (către elevul de la tablă): *Preţul unui produs se măreş* *după care se micşorează cu 10%. Compară preţul iniţial cu cel final!*

Elevul: $xy + 10\% - 10\% = xy$.

Profesorul: Bine, greşeala cu 10% din "nu se ştie ce" e veche, dar de

Elevul: Păi, nu aţi spus *produs*?

(**Bogdan**

Scăderea de mai jos scrisă cu cifre romane este corectă:

$$XI - X = I.$$

Rotiţi pagina cu 180° *şi veţi constata că relaţia rămâne adevărată (verifi* *găsiţi şi o altă scădere de acest fel cu aceeaşi proprietate!*

(Titu

Răspuns. Deoarece pot fi folosite doar numerele

$$I,\ II,\ III,\ IX,\ X,\ XI,\ XIX,\ XX,\ XXX,$$

prin încercări se obţin toate scăderile de acest fel:

$$X - IX = I$$
$$XI - X = I$$
$$XI - IX = II.$$

O abordare analitică a unor probleme de geor

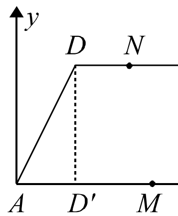
Gabriel POPA[1], *Ioan ŞERDEAN*[2]

Cu prilejul elaborării lucrării [**1**], am constatat că o serie de probleme
trie propuse juniorilor la O.B.M.J. admit rezolvări analitico-trigonometric
simple decât cele "oficiale". Întrucât o parte dintre elevii din cl. a IX-a
eligibili pentru lotul juniorilor, iar elevii buni şi pasionaţi de matematic
materia în avans, considerăm utilă prezentarea în această manieră a câto
ale unor probleme care, abordate sintetic (vezi [**1**]), sunt dificile.

Problema 1. *Fie $ABCD$ un trapez cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$*
$m(\widehat{B}) = 90°$. *Să se arate că distanţa dintre mijloacele laturilor paralele es semidiferenţa bazelor.*

(*Problema 132*, Lista scurtă O.B.M

Soluţie. Raportăm planul la un reper cartezian cu originea în A, ca în figură. Fie D', C' proiecţiile punctelor D, respectiv C pe AB; notăm $t = m(\widehat{DAB})$, $a = AD'$, $b = D'C'$, $c = C'B$. Avem că $m(\widehat{CBA}) = 90° - t$ şi atunci $DD' = AD' \cdot \operatorname{tg} t = a \operatorname{tg} t$, iar $CC' = C'B \cdot \operatorname{tg}(90° - t) = \dfrac{c}{\operatorname{tg} t}$. Deci, $a \operatorname{tg} t = \dfrac{c}{\operatorname{tg} t}$, prin urmare $c = a \operatorname{tg}^2 t$. Vârfurile trapezului vor avea coordonatele



$A(0,0)$; $B\left(a\left(1+\operatorname{tg}^2 t\right)+b, 0\right)$; $C(a+b, a\operatorname{tg} t)$; $D(a, a\operatorname{tg} t)$, iar mijloac
$[AB]$ şi $[CD]$ au coordonatele $M\left(\dfrac{a\left(1+\operatorname{tg}^2 t\right)+b}{2}, 0\right)$, respectiv $N\Big(\dfrac{2a\,-}{2}$
Lungimea segmentului MN este

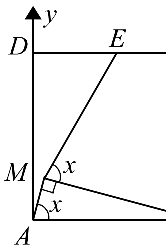
$$MN = \sqrt{\frac{a^2\left(\operatorname{tg}^2 t - 1\right)^2}{4} + a^2 \operatorname{tg}^2 t} = \sqrt{\frac{a^2\left(\operatorname{tg}^2 t + 1\right)^2}{4}} = \frac{a\left(\operatorname{tg}^2 t +\right.}{2}$$

Pe de altă parte, $\dfrac{AB - CD}{2} = \dfrac{a+c}{2} = \dfrac{a\left(\operatorname{tg}^2 t + 1\right)}{2}$, de unde concluzia.

Problema 2. *Fie $ABCD$ pătrat, E mijlocul lui $[CD]$, iar M un pur pătratului astfel încât $m(\widehat{MAB}) = m(\widehat{MBC}) = m(\widehat{BME}) = x$. Să se afl*

(*Problema 203*, Baraj O.B.M

Soluţie. Raportăm planul la un reper cu originea în A, ca în figură; considerăm unitatea egală cu latura pătratului şi atunci $A(0,0)$; $B(1,0)$; $C(1,1)$; $D(0,1)$; $E(1/2, 1)$. Notăm $m = \operatorname{tg} x$, $m \in (0,1) \cup (1,\infty)$; panta dreptei AM este m, iar panta dreptei BM este $\operatorname{tg}(90° + x) = -\dfrac{1}{\operatorname{tg} x} = -\dfrac{1}{m}$. Astfel, $AM : y = mx$ şi $BM : y = -\dfrac{1}{m}(x-1)$, iar prin intersectarea celor două



---

[1] Profesor, Colegiul Naţional, Iaşi

[2] Profesor, Liceul Teoretic "Aurel Vlaicu", Orăştie

drepte obţinem coordonatele lui M : $x_M = \dfrac{1}{1+m^2}$, $y_M = \dfrac{m}{1+m^2}$. Pa

ME este $\dfrac{y_E - y_M}{x_E - x_M} = \dfrac{2m^2-2m+2}{m^2-1}$, prin urmare

$$\operatorname{tg}\widehat{BME} = \left|\frac{m_{BM}-m_{ME}}{1+m_{BM}\cdot m_{ME}}\right| = \left|\frac{2m^3-m^2+2m-1}{m^3-2m^2+m-2}\right| = \left|\frac{2m-}{m-2}\right.$$

Cum $\operatorname{tg}\widehat{BME} = \operatorname{tg} x = m$, obţinem ecuaţia $\left|\dfrac{2m-1}{m-2}\right| = m$, cu solu

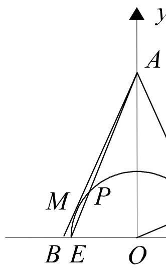
$\{1, 2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}\}$. Am văzut că $m \neq 1$ şi atunci rămâne că $m \in \{2-\sqrt{}$

adică $x \in \{15°, 75°\}$. Prima soluţie nu convine: dacă $m(\widehat{MAB}) = m(\widehat{M}$

atunci $\widehat{BME}$ este unghi obtuz. În concluzie, $x = 75°$.

Problema 3. *Se consideră triunghiul ABC cu $AB = AC$. Un s diametru $[EF]$, cu $E, F \in [BC]$, este tangent laturilor AB şi AC în M N, iar AE retaie semicercul în P. Să se arate că dreapta PF trece pr coardei $[MN]$.*

(*Problema 94*, Lista scurtă O.B.



Soluţie. Raportăm planul la un reper cartezian cu originea în mijlocul O al segmentului $[BC]$, având dreapta BC drept axă a absciselor şi înălţimea din A drept axă a ordonatelor. Considerăm că $F(1,0)$, $E(-1,0)$, $C(b,0)$, $B(-b,0)$ şi fie $t = m(\widehat{CON})$; atunci $N(\cos t, \sin t)$, $M(-\cos t, \sin t)$. Cum $m(\widehat{ACO}) = 90° - t$, avem că $\dfrac{AO}{OC} = \operatorname{tg}(\widehat{ACO}) = \operatorname{ctg} t$, deci $AO = b\operatorname{ctg} t = \dfrac{1}{\sin t}$, căci $b\cos t = ON = 1$ (din triunghiul dreptunghic ONC) şi astfel $A\left(0, \dfrac{1}{\sin t}\right)$. Ecuaţia dreptei AE va fi $y = \dfrac{1}{\sin t}(x+1)$ şi, intersectâ dreaptă cu cercul $x^2+y^2=1$, obţinem ecuaţia în x:

$$\left(1+\sin^2 t\right)x^2 + 2x + \left(1-\sin^2 t\right) = 0 \Leftrightarrow (x+1)\left[\left(1+\sin^2 t\right)x - \left(\sin^2 t\right.\right.$$

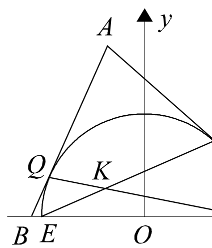
Ca urmare, $x_1 = -1$ şi $x_2 = \dfrac{\sin^2 t - 1}{\sin^2 t + 1}$, cărora le corespund punctele E, r

Cum $y_2 = \dfrac{1}{\sin t}(x_2+1) = \dfrac{2\sin t}{\sin^2 t + 1}$, avem $P\left(\dfrac{\sin^2 t - 1}{\sin^2 t + 1}, \dfrac{2\sin t}{\sin^2 t + 1}\right)$.

Dacă R este mijlocul segmentului $[MN]$, atunci $R(0, \sin t)$; scriem imed dreptei $RF : y = (1-x)\sin t$. Coordonatele (x_2, y_2) ale punctului P verif ecuaţie şi de aici rezultă concluzia problemei.

Problema 4. *Un semicerc având diametrul $[EF]$ inclus în latura $[BC]$ a triunghiului ABC este tangent laturilor AB şi AC în Q, repsectiv P. Notăm $\{K\} = EP \cap FQ$. Să se arate că AK este înălţime în triunghiul ABC.*

(*Problema 15*, O.B.M.J., 2000)



Soluţie. Raportăm planul la un reper cartezian cu originea în O – mijlocul segmentului $[EF]$, având

pe BC ca axă Ox şi perpendiculara în O pe BC ca axă Oy. Considerăm
$E\,(-1,0)$, $P\,(\cos a, \sin a)$, $Q\,(\cos b, \sin b)$. Panta lui OP este $m = \operatorname{tg} a$ şi at
lui AC va fi $-\dfrac{1}{m} = -\operatorname{ctg} a$; obţinem ecuaţia lui $AC : x\cos a + y \sin a =$
$AB : x\cos b + y\sin b = 1$ şi, intersectând cele două drepte, vom obţine pen
punctului A

$$x_A = \frac{\sin a - \sin b}{\sin(a-b)} = \frac{2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}}{2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a-b}{2}} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{a-b}{2}}.$$

Înălţimea din A fiind paralelă cu Oy, va avea ecuaţia $x = x_A$, adică $x =$

Pentru a afla coordonatele punctului K, vom intersecta dreptele EP :
$\dfrac{x+1}{\cos a + 1} = \dfrac{y}{\sin a}$ şi $FQ : \dfrac{x-1}{\cos b - 1} = \dfrac{y}{\sin b}$. Eliminând pe y, găsim că

$$x_K = \frac{\sin a\cos b + \cos a \sin b - \sin a + \sin b}{\sin b \cos a - \sin a \cos b + \sin a + \sin b} = \frac{\sin(a+b) - (\sin a - \sin}{-\sin(a-b) + (\sin a + \mathrm{s}}$$

$$= \frac{2\cos\frac{a+b}{2}\left(\sin\frac{a+b}{2} - \sin\frac{a-b}{2}\right)}{2\cos\frac{a-b}{2}\left(\sin\frac{a+b}{2} - \sin\frac{a-b}{2}\right)} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{a-b}{2}}.$$

Rezultă astfel că punctul K aparţine înălţimii din A, de unde concluzia p

Rezolvând problemele de geometrie din [**1**], am remarcat că un procent
tiv dintre ele (aproape 20%) admit soluţii calculatorii, în maniera celor pr
această notă. Încheiem prin a propune ca temă trei astfel de probleme.

Problema 5. *Fie ABC un triunghi echilateral de centru O, iar $M \in$
K, L proiecţiile lui M pe AB, respectiv AC. Să se arate că OM trece pr
segmentului $[KL]$.*

(*Problema 135*, Lista scurtă O.B.M

Problema 6. *Punctele M şi N se găsesc pe laturile (AD) şi $(BC$
bului $ABCD$. Dreapta MC intersectează segmentul $[BD]$ în T, iar dr
intersectează $[BD]$ în U. Dreapta CU intersectează dreapta AB în Q,
tersectează latura $[CD]$ în P. Arătaţi că triunghiurile QCP şi MCN au a*

(*Problema 232*, Baraj O.B.M

Problema 7. *Fie ABC un triunghi dreptunghic în C şi punctele
laturile $[BC]$, respectiv $[CA]$, astfel încât $\dfrac{BD}{AC} = \dfrac{AE}{CD} = k$. Dreptele BE
intersectează în O. Să se arate că $m(\widehat{BOD}) = 60^\circ$ dacă şi numai dacă k*

(*Problema 246*, Baraj O.B.M

Bibliografie

1. **D. Brânzei, D. Şerbănescu, G. Popa, I. Şerdean** - *10 ani de Olim
canice ale Juniorilor*, Paralela 45, Piteşti, 2007.

A study of a new geometric inequality

Chang Jian ZHAO[1]

Abstract. In this paper, we find a new geometric inequality. Then we
and strengthen the inequality and get several quite wider results.

1. Introduction. Recently, we have found a new inequality in a tri
result can be stated as follows

Proposition. *In the triangle ABC, point P is on side AC or its ext
and Q is on the side AB or its extension line. Points D and E are both
BC and $BD = DE = EC$. Line AD intersects line PQ at F and AE
line PQ at G. Then*

$$\triangle AFG \le \frac{1}{3}\triangle AQP$$

and equality holds if and only if the line PQ and BC are parallel to each

In this paper, we shall generalize and strengthen this inequality. To si
notation, let $\triangle AFG$ denote the directed area of the triangle AFG, etc.

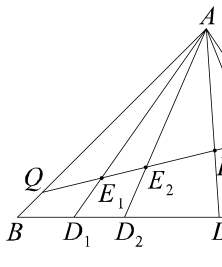
2. Extension of the inequality. Our main result is given by the
theorem.

Theorem 2.1. *In the triangle ABC, point Q is on the side AB or it
line and P is on the side AC or its extension line. Points D_i are on th
and lines AD_i intersect line QP at E_i, where $i = 1, 2, \dots, n-1$, and E
$D_1D_2 = m_2$, $\dots$, $D_{n-2}D_{n-1} = m_{n-1}$, $D_{n-1}C = m_n$. Then*

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \sum_{j=2}^{n-1} m_j \cdot \triangle AQP^{n-1} \ge m_1 m_n n^n \cdot \triangle AE_1E_{n-1} \prod_{i=2}^{n-1} \triangle AE_{i-1}E_i$$

and equality holds if and only if $QE_1 = E_1E_2 = \cdots = E_{n-2}E_{n-1} = E_{n-1}$

Proof. Let $B = D_0$, $C = D_n$, $Q = E_0$ and
$P = E_n$, then



$$\frac{\triangle AQP}{\triangle AD_0D_1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\triangle AE_{i-1}E_i}{\triangle AD_0D_1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{m_1} \frac{\triangle AE_{i-1}E_i}{\triangle AD_{i-1}D_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i AE_{i-1} \cdot AE_i}{m_1 AD_{i-1} \cdot AD_i}$$

$$\ge n \sqrt[n]{\frac{\prod_{i=1}^{n} m_i \prod_{i=1}^{n} \frac{AE_{i-1} \cdot AE_i}{AD_{i-1} \cdot AD_i}}{m_1^n}} \qquad (2.2)$$

[1] Department of Mathematics, Binzhou Teachers College, Shandong 256604, China

and equality holds if and only if all $\triangle AE_{i-1}E_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ are equa
suppose that

$$M=\prod_{i=1}^{n}\frac{AE_{i-1}\cdot AE_i}{AD_{i-1}\cdot AD_i}.$$

Then

$$M=\frac{AE_0\cdot AE_n}{AD_0\cdot AD_n}\cdot\frac{AE_1\cdot AE_{n-1}}{AD_1\cdot AD_{n-1}}\cdot\prod_{i=2}^{n-1}\frac{AE_{i-1}\cdot AE_i}{AD_{i-1}\cdot AD_i}=$$

$$=\frac{\triangle AQP}{\triangle ABC}\cdot\frac{\triangle AE_1E_{n-1}}{\triangle AD_1D_{n-1}}\cdot\prod_{i=2}^{n-1}\frac{\triangle AE_{i-1}E_i}{\triangle AD_{i-1}D_i}.$$

On the other hand,

$$\frac{\triangle AQP}{\triangle ABC}=\frac{m_1}{\sum_{i=1}^{n}m_i}\frac{\triangle AQP}{\triangle AD_0D_1},$$

$$\frac{\triangle AE_1E_{n-1}}{\triangle AD_1D_{n-1}}=\frac{m_1}{\sum_{j=2}^{n-1}m_j}\frac{\triangle AE_1E_{n-1}}{\triangle AD_0D_1},$$

and

$$\prod_{i=2}^{n-1}\frac{\triangle AE_{i-1}E_i}{\triangle AD_{i-1}D_i}=\prod_{i=2}^{n-1}\frac{\triangle AE_{i-1}E_i}{\frac{m_i}{m_1}\triangle AD_0D_1}=\frac{m_1^{n-2}}{\prod_{i=2}^{n-1}m_i}\frac{\prod_{i=2}^{n-1}\triangle AE_{i-1}E_i}{\triangle AD_0D_1^{n-2}}.$$

Therefore, by (2.3), (2.4), (2.5), and (2.6) we have

$$M=\frac{m_1^n}{\sum_{i=1}^{n}m_i\sum_{j=2}^{n-1}m_j\prod_{i=2}^{n-1}m_i}\frac{\triangle AQP\cdot\triangle AE_1E_{n-1}}{\triangle AD_0D_1^n}\prod_{i=2}^{n-1}\triangle AE_{i-1}E$$

Moreover, (2.2) and (2.7) yield that

$$\frac{\triangle AQP}{\triangle AD_0D_1}\geq n\sqrt[n]{\frac{m_1m_n\triangle AQP\cdot\triangle AE_1E_{n-1}}{\sum_{i=1}^{n}m_i\sum_{j=2}^{n-1}m_j\cdot\triangle AD_0D_1^n}\prod_{i=2}^{n-1}\triangle AE_{i-1}E_i}$$

Consequently,

$$\frac{\triangle AQP^n}{\triangle AD_0D_1^n}\geq\frac{m_1m_nn^n}{\sum_{i=1}^{n}m_i\sum_{j=2}^{n-1}m_j}\frac{\triangle AQP\cdot\triangle AE_1E_{n-1}}{\triangle AD_0D_1^n}\prod_{i=2}^{n-1}\triangle AE_{i-1}$$

q.e.d.

According to Theorem 1, we shall get the following

Corollary 2.1. *If the hypotheses of Theorem 1 are fulfilled, then*

$$PQ^{n-1}\sum_{i=1}^{n}m_i\sum_{j=2}^{n-1}m_j\geq m_1m_nn^n\cdot E_1E_{n-1}\cdot\prod_{i=2}^{n-1}E_{i-1}E_i$$

and equality holds if and only if the $QE_1=E_1E_2=\cdots=E_{n-2}E_{n-1}=E$

Moreover, if we take $m_1=m_2=\cdots=m_n$ in Theorem 1, then we hav

Corollary 2.2. *Under the hypotheses of Theorem 1 and* $m_1 = m_2 =$ *we have*

$$(n-2)\,\triangle AQP^{n-1} \geq n^{n-1}\triangle AE_1E_{n-1}\prod_{i=2}^{n-1}\triangle AE_{i-1}E_i$$

and equality holds if and only if the line PQ and BC are parallel to each

Similarly, we can find easily also the following

Corollary 2.3. *If the hypotheses of Corollary 2.2 are fulfilled, then*

$$(n-2)\,PQ^{n-1} \geq n^{n-1}E_1E_{n-1}\prod_{i=2}^{n-1}E_{i-1}E_i$$

and equality holds if and only if the line PQ and BC are parallel to each

Corollary 2.4. *Under the hypotheses of Theorem 1, if the point Q coincident, then*

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \sum_{j=2}^{n-1} m_i \cdot \triangle ABP^{n-1} \geq m_1 m_n n^n \cdot \triangle AE_1E_{n-1}\prod_{i=2}^{n-1}\triangle AE_{i-1}$$

3. Strengthener of the inequality. Our first result is the following

Theorem 3.1. *If the hypotheses of Theorem 1 are fulfilled, then*

$$\left(\frac{3}{4}\sqrt{3}\right)^{n-1}\sum_{i=1}^{n} m_i \sum_{j=2}^{n-1} m_j \cdot R^{2(n-1)} \geq \sum_{i=1}^{n} m_i \sum_{j=2}^{n-1} m_j \cdot \triangle AQP^{n-1}$$

$$\geq m_1 m_n n^n \cdot \triangle AE_1E_{n-1}\prod_{i=2}^{n-1}\triangle AE_{i-1}E_i$$

and the first inequality in (3.1) *becomes an equality if and only if AQP triangle.*

In fact, it is well known that $\triangle \leq \frac{\sqrt{3}}{4}(abc)^{2/3}$ where a, b, c are the arbitrary triangle and $\triangle$ is the area. Hence the left side hand side of (3. proved.

Finally, we can again give a very well result.

Theorem 3.2. *Under the hypotheses of Theorem 1 and letting* $\triangle AE$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$*, then*

$$\triangle AQP \leq \sum HS + \sum_{i=3}^{n-2}(H_{i-1} + H_i + H_{i+1})\,S_i,$$

where

$$H_i = \sqrt{\frac{m_i\,(m_{i-1} + m_i + m_{i+1})}{27 m_{i-1} m_{i+1}}}, \quad i = 2, 3, \ldots, n-1,$$

and

$$\sum HS = (H_2 + 1)\,S_1 + (H_{n-1} + 1)\,S_n + (H_2 + H_3)\,S_2 + (H_{n-2} + H_{n-}$$

and equality holds if and only if $QE_1 = E_1E_2 = \cdots = E_{n-2}E_{n-1} = E_{n-1}$

Proof. If we take $n = 3$ in Theorem 2.1, then the inequality (2.1) red following inequality

$$\triangle AE_1E_2 \leq \sqrt{\frac{m_2\left(m_1+m_2+m_3\right)}{27m_1m_3}}\triangle AE_0E_3,$$

and equality holds if and only if the line PQ and BC are parallel to each

$$\triangle AE_1E_2 \leq H_2\left(\triangle AE_0E_1 + \triangle AE_1E_2 + \triangle AE_2E_3\right),$$

that is, $S_2 \leq H_2\left(S_1+S_2+S_3\right)$. Consequently, we have $S_i \leq H_i\left(S_{i-1}+\right.$ where $i = 2, 3, \ldots, n-1$. Hence, by summation

$$\sum_{i=2}^{n-1} S_i \leq \sum_{i=2}^{n-1} H_i\left(S_{i-1}+S_i+S_{i+1}\right).$$

On the other hand,

$$\sum_{i=2}^{n-1} H_i\left(S_{i-1}+S_i+S_{i+1}\right) = \sum_{i=3}^{n-2}\left(H_{i-1}+H_i+H_{i+1}\right)S_i + \sum HS - S_1 -$$

Therefore, by (3.4) and (3.5), we get the inequality (3.2), q.e.d.

Acknowledgment. I wish to express my gratitude to professor Li W his valuable help in writing this paper.

References

1. **D. S. Mitrinovic** - *Analytic inequalities*, Springer-Verlag, 1970.
2. **B. G. Pachpate** - *On Some New Inequality Similar to Hilbert's Inequalit* Anal. Appl. 226(1998), 166-179.
3. **Ch. J. Zhao** - *The further research of Yang Le inequality*, Journal o Teachers College, 12(1996), 32-34.
4. **L. Carlitz, F. Leuenberger** - *Problem E1454*, Amer. Math. Monthly 177 and 68 (1961), 805-806.
5. **P. Finsler and H. Hadwiger** - *Einige Relationen in Dreieck*, Comment. M 10(1937/38), 316-326.

Concursul "Recreaţii Matematice"
Ediţia a V-a, Muncel (Iaşi), 31 august 20

Clasa a V-a

1. Fie $a, b \in \mathbb{N}$. Să se arate că dacă ultima cifră a numărului $a^2 + b^2$ est ultima cifră a numărului $(a+b)^2$ este tot 9. Reciproca este adevărată?

2. Să se determine numerele naturale nenule n, a, b, c, d, e, f ştiind c $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot 11^e \cdot 13^f$.

3. Să se determine numerele naturale distincte m, n şi p astfel încât relaţia $653 < 5^m + 5^n + 5^p < 809$.

Clasa a VI-a

1. Fie $A = 3^m \cdot 5^n$, unde $m, n \in \mathbb{N}$. Notăm cu a, b, c numărul divizorilor A, $3A$ şi, respectiv, $5A$. Ştiind că numerele a şi b sunt direct proporţional iar numerele b şi c sunt invers proporţionale cu 15 şi 16, să se determine

2. Să se afle numerele prime p, q şi r ştiind că numărul $p^q + p^r$ este pătr

3. Fie paralelogramul $ABCD$ în care $AB = 2AD$, iar punctele M mijloacele laturilor $[AB]$ şi, respectiv, $[CD]$. Dacă $[EM] \equiv [AB]$, A $DE \cap NB = \{F\}$, să se arate că dreptele AN şi DM se intersectează în greutate al triunghiului FBE.

Clasa a VII-a

1. Să se rezolve în mulţimea numerelor naturale ecuaţia $6^a - 5^b = 1$.

2. Aflaţi aria triunghiului ABC ştiind că $AC = 4$ cm şi $m(\widehat{ACB}) = m$ $45°$, unde punctul M este mijlocul laturii (AC).

3. Fie triunghiul ABC cu $m(\widehat{A}) = 105°$ şi $M(\widehat{B}) = 30°$. Se con mediatoarea segmentului $[BC]$, $D \in BC$, $E \in AB$, $[CF$ bisectoarea unghi $F \in AB$, iar $\{I\} = CF \cap DE$, $\{G\} = CE \cap AI$. Să se arate că

a) triunghiul DFG este echilateral;

b) $AS \perp SB$, unde $\{S\} = BI \cap EC$;

c) $d\,(S, AB) = \dfrac{1}{4} AB$.

Vizitaţi pe Internet revista "Recreaţii Matematice" la

http://www.recreatiimatematice.uv.ro

South Eastern European Mathematical Olym
for University Students (SEEMOUS)
Agros, Cyprus, 7-12 March, 2007

Problems

1. *Given* $a \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$ *let* $a = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ *be its decimal representati*

$$f_a(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, \quad x \in (0,1).$$

Prove that f_a *is a rational function of the form* $f_a(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, *where* P
polynomials with integer coefficients.

Conversely, if $a_k \in \{0,1,2,\ldots,9\}$ *for all* $k \in \mathbb{N}$, *and* $f_a(x) = \sum$
$x \in (0,1)$ *is a rational function of the form* $f_a(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, *where* P *and*
nomials with integer coefficients, prove that the number $a = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$

2. *Let* $f(x) = \max_i |x_i|$ *for* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ *and let* A *be*
matrix such that $f(Ax) = f(x)$ *for all* $x \in R^n$. *Prove that exists a posit*
m *such that* A^m *is the identity matrix* I_n.

3. *Let* F *be a field and let* $P : F \times F \to F$ *be a function such tha*
$x_0 \in F$ *the function* $P(x_0, y)$ *is a polynomial in* y *and for every* $y_0 \in F$ *th*
$P(x, y_0)$ *is a polynomial in* x.

It is true that P *is necessarily a polynomial in* x *and* y, *when*

a) $F = \mathbb{Q}$, *the field of rational numbers?*

b) F *is a finite field?*

Prove your claims.

4. *For* $x \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$ *and* $n \in \mathbb{Z}$ *denote by* $w_n(x,y) \in [0,\pi)$ *the angle*
with which the segment joining the point $(n, 0)$ *to the point* $(n+y, 0)$ *is*
the point $(x, 1) \in \mathbb{R}^2$.

a) Show that for every $x \in \mathbb{R}$ *and* $y \geq 0$, *the series* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} w_n(x,y)$ *co*
we now set $w(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_n(x,y)$, *show that* $w(x,y) \leq ([y]+1)\pi$.
integer part of y.*)*

b) Prove that for every $\varepsilon > 0$ *there exists* $\delta > 0$ *such that for ev*
$0 < y < \delta$ *and every* $x \in \mathbb{R}$ *we have* $w(x,y) < \varepsilon$.

c) Prove that the function $w : \mathbb{R} \times [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *defined in a) is*

Solutions

1. As the expansion of a is periodic, there is a n_0 such that $a_n = a_{n+p}$
Now, for $n = n_0 + mp$, we have

$$a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots =$$

$$= a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n_0} x^{n_0} + x^{n_0+1} R(x) + x^{n_0+p+1} R(x) + \cdots + x^{n_0+(m-1)p+}$$

where $R(x) = a_{n_0+1} + a_{n_0+2}x + \cdots + a_{n_0+p}x^{p-1}$. Hence this series is a
polynomial $S(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots +$
an infinite geometric series with first element $x^{n_0+1}R(x)$ and a factor x^p.
the above series is equal to $S(x) + \dfrac{x^{n_0+1}R(x)}{1-x^p}$. So the conclusion easily

For the converse, evaluate the expression for $x = \dfrac{1}{10}$.

2. Let $A = (a_{ij})$. Taking $x = (1,0,\ldots,0)^T$ we get $\max\limits_i |a_{i1}| = 1$. Simil
$x = (0,1,\ldots,0)^T, \ \ldots \ , x = (0,0,\ldots,1)^T$ we get $\max\limits_i |a_{ij}| = 1$ for $j = 1, 2$

Take $x = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})^T$; note that $f(x) \leq 1$. We have $Ax = (y_1$
where $y_i = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}^2 \leq 1$.

Calculating $S = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2$ by columns and by rows leads us to ineq
$S \leq n$. Hence $S = n$ and each sum $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2$ equals to n. This means tha
column of A there exists exactly one nonzero element $\left|a_{i\pi(i)}\right| = 1$, and
a permutation of $\{1,2,\ldots,n\}$. Therefore we have $A^{n!} = \operatorname{diag}(b_1, b_2, \ldots$
diagonal matrix with $|b_1| = |b_2| = \cdots = |b_n| = 1$. Finally, $A^{2n!} = I_n$.

3. *a*) If $F = \mathbb{Q}$ or any other countable field, the assertion is false.

Let (q_n) be an enumeration of F. For consider the function $P : F \times F$
as follows: if $y \in \mathbb{Q}$, so that $y = q_n$ for some $n \in \mathbb{N}$, set

$$P(x,y) = \sum_{k=1}^{n} (x-q_1)(x-q_2)\cdots(x-q_k)(q_n-q_1)(q_n-q_2)\cdots(q_n -$$

similarly, for $x \in \mathbb{Q}$, $x = q_m$ for some $m \in \mathbb{N}$, set

$$P(q_m,y) = \sum_{k=1}^{m} (q_m-q_1)(q_m-q_2)\cdots(q_m-q_k)(y-q_1)(y-q_2)\cdots(y$$

The two expression give the same values for $x = q_m$, $y = q_n$.

It is clear that it cannot be a polynomial in x and y. For instance, if
degree N in x then the coefficient of x^{N+1} is zero, yet the above has coeffic
values at $y = q_{N+2}$ is nonzero number $(q_{N+2} - q_1)(q_{N+2} - q_2)\cdots(q_{N+2} -$

b) If F is a finite field then thee answer is yes, because every functio
$F \to F$ is a polynomial. Namely a linear combination of polynomials o
$\prod\limits_{k\neq m} \dfrac{x-a_k}{a_m-a_k} \prod\limits_{k\neq n} \dfrac{y-a_k}{a_n-a_k}$ which take the value 1 for $x = a_m$, $y = a_n$ an
other cases.

4. *a*) If $y = 0$ the result is clear. If $0 < y < 1$ the angle are disjoint so t
less than the angle with which $\mathbb{R}$ is seen from $(x,1)$, that is π. This is geo
clear, but can also be seen analytically by observing that

$$w_n(x,y) = \arctan(n-x+y) - \arctan(n-x) = \int_{n-x}^{n-x+y} \frac{ds}{1+s^2} \leq \int_{-\infty}^{\infty}$$

In general, $y = [y] + r$ with $0 \leq r < 1$ and

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} w_n(x, [y] + r) = \sum_{j=0}^{[y]-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_{n+j}(x, 1) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_{n+[y]}(x, r)$$

$$= [y]\pi + \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_n(x - [y], r) < ([y] + 1)\pi.$$

b) Let $x \in \mathbb{R}$ be fixed and let positive $\varepsilon < 1$ be given. Define A to b positive integer such that the segment $[-A, A]$ is seen from $(x, 1)$ by an ang and set $S = \mathbb{Z} \setminus \{-A, -A+1, \ldots, A-1, A\}$. For $0 < y < 1$ we have

$$\sum_{n \in S} w_n(x, y) < \varepsilon.$$

For n in $\{-A, -A+1, \ldots, A-1, A\}$ (a finite set), using the fact that

$$\lim_{y \to 0+} w_n(x, y) = \lim_{y \to 0+} \int_{n-x}^{n-x+y} \frac{ds}{1+s^2} = 0,$$

it follows that there is a $\delta > 0$ such that $\sum\limits_{n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{S}} w_n(x, y) < \varepsilon$ for every y with

Combining with (1), the required result follows.

To show that the limit is uniform note that, by the first part of b),

$$\sum_{n \geq [x]+1} w_n(x, y) \leq \sum_{n \geq [x]+1} w_n([x] + 1, y) \leq \sum_{n=0}^{\infty} w_n(0, y) \overset{y \to 0+}{\longrightarrow} 0$$

Also (for $0 < y < 1$), again by the first part of b),

$$\sum_{n \leq [x]-1} w_n(x, y) = \sum_{n \leq -1} w_n(0, y) \leq \sum_{n=0}^{\infty} w_n(0, y) \overset{y \to 0+}{\longrightarrow} 0.$$

Hence $0 \leq w(x, y) \leq 2 \sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n(0, y) + w_0(0, y)$, which does not depend and converges to 0 as $y \to 0+$. The conclusion now follows.

c) Let $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ and $y_1, y_2 \in (0, \infty)$.

$$|w(x_1, y_1) - w(x_2, y_2)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{n-x_1}^{n-x_1+y_1} \frac{ds}{1+s^2} - \int_{n-x_2}^{n-x_2+y_2} \frac{ds}{1+ \right.\right.$$

$$\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \int_{n-x_1}^{n-x_2} \frac{ds}{1+s^2} \right| + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \int_{n-x_2+y_2}^{n-x_1+y_1} \frac{ds}{1+s^2} \right| \leq$$

$$\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|x_2 - x_1|}{1+s_n^2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|x_2 - x_1| + |t_2 - t_1|}{1+u_n^2}$$

where s_n is between $n - x_1$ and $n - x_2$, and u_n is between $n - x_1 + y_1$ and n

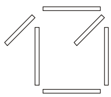
Since the two series are convergent, the result follows on $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$. the uniform convergence of part b) completes the proof.

PROBLEME ŞI SO

Soluţiile problemelor propuse în nr. 1/200

Clasele primare

P.124. *Schimbă locul unui singur beţişor pentru a obţine o egalitate.*
(*Clasa I*) **Mariana Nastasia, e**

Soluţie. 

P.125. *Într-o clasă cu 24 elevi sunt 3 perechi de gemeni. La şedinţa este prezent câte un singur părinte din fiecare familie. Câţi părinţi p şedinţă?*
(*Clasa I*) **Mihaela Gâlcă, e**

Soluţie. La şedinţă participă $24 - 3 = 21$ părinţi.

P.126. *Pentru a fierbe un ou sunt necesare* 4 *minute. Mama vrea s ouă în trei tranşe. Câte minute sunt necesare?*
(*Clasa a II-a*) **Ionela Bărăgan,**

Soluţie. 4 min $+4$ min $+4$ min $= 12$ min.

P.127. *Mircea are cu* 35 *timbre mai mult decât fratele său, Marius. diferenţa, dacă Mircea ar mai primi* 10 *timbre, iar Marius ar da unu timbre?*
(*Clasa a II-a*) **Inst. Maria**

Soluţie. Diferenţa se măreşte atunci când descăzutul se măreşte sau se micşorează. Diferenţa devine $35 + 10 + 5 = 50$.

P.128. *Câte numere de forma* $\overline{RMAT}$ *îndeplinesc condiţia* $\overline{RAM} =$
(*Clasa a III-a*) **Dragoş Covrig,**

Soluţie. $R = M = T$ (9 valori); A (10 valori); $9 \times 10 = 90$ (numere).

P.129. *Scrieţi toate adunările de forma* $\begin{array}{r} \mathrm{MARI} + \\ \mathrm{ARI} \\ \mathrm{RI} \\ \mathrm{I} \\ \hline 7676 \end{array}$.

(*Clasa a III-a*) **Dana Bârsan, e**

Soluţie. $\begin{array}{r} 7324 + \\ 324 \\ 24 \\ 4 \\ \hline 7676 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7289 + \\ 289 \\ 89 \\ 9 \\ \hline 7676 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6789 + \\ 789 \\ 89 \\ 9 \\ \hline 7676 \end{array}$

P.130. *Dacă a, b, c sunt cifre, câte egalităţi de tipul* $a \times c = b : c$ *se Justificaţi răspunsul.*
(*Clasa a III-a*) **Adina Voinescu, e**

$c = 1 \Rightarrow a \times 1 = b : 1 \Rightarrow a = b = 0, 1, \ldots, 9$ (10 c

Soluţie. $c = 2 \Rightarrow$ $a = 1$ şi $b = 4$, $a = 2$ şi $b = 8$ (2 ca

$c = 3 \Rightarrow$ $a = 1$ şi $b = 9$ (1 ca

$10 + 2 + 1 = 13$ egalităţi.

P.131. *Verificaţi dacă afirmaţia "A se împarte exact la* 5*, unde A*
$2(1 + 2 + 3 + \cdots + 1999) + 1999 + 1997$*" este adevărată sau falsă.*

(*Clasa a IV-a*) **Prof. Nicolae Ivăşchescu**

Soluţie. $A = 2000 + 2000 \cdot 1999 + 3996$. Deoarece 3996 nu se împarte
aceeaşi proprietate o are şi A. Deci, afirmaţia din enunţ este falsă.

P.132. *Mama Oanei a împlinit* 17532 *zile pe data de 1 ianuarie 2007*
lună şi zi a avut o vârstă de 3 *ori mai mică?*

(*Clasa a IV-a*) **Înv. Geta Creţ**

Soluţie. Din $17532 = 48 \times 365 + 12$ se deduce că anul naşterii este 2
$= 1959$, pe 1 ianuarie. Restul 12 justifică că de la 1.01.1959 până la 1.01
12 ani bisecţi. Din $17532 = 2 \times 5844$ şi $5844 = 16 \times 365 + 4$, rezultă că
ori mai mică a avut-o pe 1 ianuarie 1975.

P.133. *Doi elevi spun pe rând câte un număr natural, cel puţin egal*
mult egal cu 7*. Fiecare nou număr spus se adună la celelalte. Să se arate*
elev poate să indice în aşa fel numerele încât să ajungă primul la suma 9

(*Clasa a IV-a*) **Prof. Petru As**

Soluţie. Avem $99 = 8 \cdot 12 + 3$. Primul elev va spune, prima dată,
Al doilea elev trebuie să spună un număr n, $1 \leq n \leq 7$. În continuare,
dată când îi vine rândul, primul elev va spune un număr de forma $8 -$
fel primul elev va completa o sumă de tipul $8 \cdot k + 3$, k fiind număr nat
Pentru $k = 12$ se obţine suma 99.

Clasa a V-a

V.76. *Dacă a, b, x sunt cifre în baza* 10*, să se rezolve ecuaţia cu n*
x*:* $\overline{bxa} + \overline{baa} + \overline{xb} + \overline{ab} = \overline{abb} + \overline{aab}$*.*

Marius Fa

Soluţie. Efectuând descompunerea în baza 10, după reduceri de terme
egalitatea $20x + 190b = 188a$. Atunci $188a \,\vdots\, 10$ şi, cum $a \neq 0$, trebuie să a
După înlocuire, găsim că $2x + 19b = 94$, deci b va fi o cifră pară. Încercă
$b \in \{2, 4, 6, 8\}$ şi obţinem valoare naturală pentru x doar când $b = 4$. În
ecuaţia nu are soluţie dacă $(a, b) \neq (5, 4)$, iar în cazul în care $(a, b) =$
soluţia $x = 9$.

Observaţie. Încercările pot fi evitate observând că $76 \leq 19b \leq 9$
$b = 4$.

V.77. *Să se determine câte numere de trei cifre distincte* $\overline{abc}$ *au prop*
$\left(\overline{abc} - \overline{cba}\right) : 11$ *este pătrat perfect.*

Otilia Nemeş, Ocna Mur

Soluţie. Din ipoteză deducem că $9(a - c)$ este pătrat perfect şi, cum
cifre distincte, atunci $a - c \in \{1, 4\}$. Dacă $a - c = 1$, cifrele a, c fiind nenul
că $(a, c) \in \{(9, 8); (8, 7); \ldots; (2, 1)\}$. În fiecare caz, există câte 8 valo
diferite de a şi c şi astfel găsim 64 de numere $\overline{abc}$. Dacă $a - c = 4$, vo

perechi (a, c), deci $5 \cdot 8 = 40$ de numere $\overline{abc}$. În total există $64 + 40 = 104$
proprietăţile dorite.

V.78. *Arătaţi că nu există trei numere prime a, b, c astfel încât* $a\,(b$

Nicolae Ivăşchescu

Soluţie. Să presupunem prin absurd că ar exista trei numere prime
etatea dată. Distingem trei cazuri:

i) b, c impare; atunci $a\,(b+c)$ este par, bc este impar, imposibil.

ii) b, c pare; atunci $b = c = 2$, deci $a\,(2+2) = 2 \cdot 2$, adică $a = 1$, fals.

iii) b par, c impar (sau invers); atunci $b = 2$, deci $a\,(2+c) = 2c$, cu 2
Deducem că a este par, adică $a = 2$ şi se ajunge la contradicţia $2 + c = c$.

V.79. *Arătaţi că numărul* $13^{1000} - 9^{1000}$ *se divide cu* 1000.

Damian Marinescu, T

Soluţie. Deoarece $13^4 = 28561$, iar $9^4 = 6561$, avem:

$$13^{100} - 9^{1000} = \left(13^4\right)^{250} - \left(9^4\right)^{250} = (M_{1000} + 561)^{250} - (M_{1000} + 561)^{25}$$

V.80. *Dacă restul împărţirii unui număr natural la* 10 *este mai ma*
spunem că acel număr este favorabil. *Aflaţi numerele favorabile* $\overline{ab}$ *cu p*
că nici $\overline{ab}$, *nici* $\overline{ba}$ *nu pot fi scrise ca sumă de două numere favorabile.*

Ioan Săcălean

Soluţie. Numerele favorabile sunt cele care se temină în 6, 7, 8 sau 9.
că un număr natural se scrie ca sumă de două numere favorabile dacă el
în 2, 3, 4, 5, 6, 7 sau 8, iar această scriere nu este posibilă atunci când el
în 1 sau 9. Cum $\overline{ab}$ şi $\overline{ba}$ sunt ambele favorabile, obţinem că $a = b = 9$.

Clasa a VI-a

VI.76. *Determinaţi* $a, b, c \in \mathbb{Z}$ *dacă* $\dfrac{a}{3} = \dfrac{b}{4} = \dfrac{3c+5}{2c+1}$.

Gheorghe I

Soluţie. Cum $a = 3 \cdot \dfrac{b}{4}$ şi $a, b \in \mathbb{Z}$, atunci $b \vdots 4$. Rezultă că $\dfrac{3c+5}{2c+1}$
$2c+1 \mid 2\,(3c+5) - 3\,(2c+1)$, adică $2c+1 \mid 7$. Obţinem că $c \in \{-4, -$
soluţiile problemei vor fi: $(3, 4, -4)$, $(-6, -8, -1)$, $(15, 20, 0)$, $(6, 8, 3)$.

VI.77. *Să se arate că între oricare două puteri naturale consecutive*
află cel puţin o putere a lui 2. *Există două puteri consecutive ale lui* 3 *în*
putem găsi trei puteri ale lui 2*?*

Marius Damia

Notă. Anterior publicării în revista noastră, problema a apărut
2/2006, cu numărul O.VI.146, semnată de acelaşi autor. Soluţia poate
R.M.T. 3/2006.

VI. 78. *Fie* $a, b \in \mathbb{Z}$ *astfel încât mulţimile* $\{a+b, a+2b, \ldots, a+$
$\{1, 2, \ldots, 2007\}$ *coincid. Să se arate că există* $k \in \mathbb{N}^*$ *pentru care* $a + kb$

Dan Nedeianu, Drobeta-Tr

Soluţie (Mădălina-Vasilica Solcanu). Din ipoteză deducem că

$$a + b + a + 2b + \cdots + a + 2007b = 1 + 2 + \cdots + 2007,$$

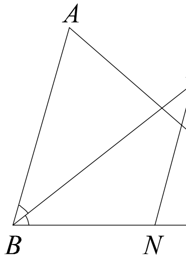
prin urmare $2007a + 2007 \cdot 1004b = 2007 \cdot 1004$, deci $a + 1004b = 1004$. As
$k = 1004 \in \mathbb{N}^*$ pentru care $a + kb = k$.

VI.79. *Se consideră $\triangle ABC$ ascuţitunghic, iar M un punct în planul*
lela prin M la AB taie AC şi BC în P, respectiv N. Demonstraţi că
dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate, atunci este adevărată şi a tr

(i) BM bisectoare pentru $\widehat{ABC}$; (ii) $MC \perp MB$; (iii) $[NP]$ linie
$\triangle ABC$.

Carmen-Daniela Tama

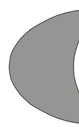
Soluţie. $\underline{(i)+(ii) \Rightarrow (iii)}$ Cum $\widehat{NBM} \equiv \widehat{MBA} \equiv \widehat{BMN}$, rezultă că $\triangle NMB$ este isoscel cu $NB = NM$. Apoi, $\widehat{NMC} \equiv \widehat{NCM}$, ambele având acelaşi complement, deci $\triangle NMC$ este isoscel cu $NM = NC$. Deducem că N este mijlocul lui $[BC]$ şi cum $PN \parallel AB$, atunci $[NP]$ va fi linie mijlocie în $\triangle ABC$.



$\underline{(ii)+(iii) \Rightarrow (i)}$ Mediana $[MN]$ din $\triangle MBC$ dreptunghic este egală cu $[BN]$, deci $\triangle NBM$ este isoscel, cu $\widehat{NBM} \equiv \widehat{NMB}$. Însă $\widehat{NMB} \equiv \widehat{MBA}$ (alterne interne), pr
$\widehat{ABM} \equiv \widehat{MBC}$.

$\underline{(iii)+(i) \Rightarrow (ii)}$ Ca la prima implicaţie obţinem că $BN = NM$. Cu
mijlocul lui $[BC]$, $[MN]$ va fi mediană în $\triangle MBC$, egală cu jumătate din
Deducem că $\triangle BMC$ este dreptunghic, cu $m(\widehat{BMC}) = 90°$.

VI.80. *Să se demonstreze că porţiunea haşurată din figura alăturată poate fi scrisă ca reuniune de segmente închise, două câte două disjuncte.*



Marius Tiba, elev, Iaşi

Soluţie. Notăm cu $\mathcal{C}_1$ conturul exterior şi cu $\mathcal{C}_2$ pe cel interior. Dacă
punct fixatîn interiorul lui $\mathcal{C}_2$, M este un punct care parcurge $\mathcal{C}_1$, iar $\{N\}$ =
atunci mulţimea tuturor segmentelor de forma $[MN]$, $M \in \mathcal{C}_1$, verific
problemei.

Clasa a VII-a

VII.76. *Aflaţi numerele naturale a, b, c pentru care $11\,(a-b-9) >$*
$11\,(b-c-9) > a\,(a-20)$ şi $11\,(c-a-9) > b\,(b-20)$.

Veronica Plăeşu şi Dan Pl

Soluţie. Dacă $m, n \in \mathbb{Z}$ şi $m < n$, atunci $m + 1 \leq n$. Astfel,

$$c\,(c-20) < 11\,(a-b-9) \Rightarrow c^2 - 20c \leq 11a - 11b - 100.$$

Analog obţinem încă două relaţii şi, prin adunare, deducem că

$$a^2 + b^2 + c^2 - 20\,(a+b+c) \leq -300 \Leftrightarrow (a-10)^2 + (b-10)^2 + (c-10$$

prin urmare $a = b = c = 10$.

VII.77. *Fie x, y numere reale pozitive, ambele subunitare sau ambe*
nitare; să se arate că $xy + \dfrac{1}{xy} + 2 \geq x + \dfrac{1}{x} + y + \dfrac{1}{y}$. Dacă unul dintre n
mai mic, iar celălalt mai mare ca 1, inegalitatea îşi schimbă sensul.

Marian Tetiv

Soluţie. Avem voie să eliminăm numitorii şi obţinem succesiv

$$x^2y^2 + 1 + 2xy \geq x^2y + y + xy^2 + x \Leftrightarrow (xy+1)^2 - (x+y)\,(xy+1)$$

adică $(xy+1)(x-1)(y-1) \geq 0$, evident adevărat. Cu aceleaşi calcule
strează şi partea a doua. Egalitatea se realizeză dacă şi numai dacă măcar
numere este 1.

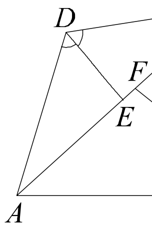
VII.78. *Să se rezolve în numere naturale ecuaţia $6^a - 5^b = 1$.*

Tudor Pădurariu, ele

Soluţie. Dacă $a, b \geq 2$, atunci 5^b se termină în 25, iar 6^a se termină
x cifră impară; evident că diferenţa lor nu va fi niciodată 1. Cercetân
rămase, obţinem că $(1,1)$ este unica soluţie a ecuaţiei.

VII.79. *Fie $ABCD$ un patrulater convex, iar E şi F intersecţiile bi
unghiurilor $\widehat{D}$, respectiv $\widehat{B}$, cu diagonala $[AC]$. Să se arate că puncte
coincid dacă şi numai dacă $AB \cdot CD = AD \cdot BC$.*

Claudiu-Ştefan



Soluţie. Din teorema bisectoarei obţinem că $\dfrac{AD}{CD} = \dfrac{AE}{CE}$ şi $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AF}{CF}$, de unde $AE = \dfrac{AD \cdot AC}{AD + CD}$, iar $AF = \dfrac{AB \cdot AC}{AB + BC}$. Cum punctele E şi F sunt interioare patrulaterului, atunci

$$E = F \Leftrightarrow AE = AF \Leftrightarrow \frac{AD \cdot AC}{AD + CD} = \frac{AB \cdot AC}{AB + BC} \Leftrightarrow$$

$AD(AB + BC) = AB(AD + CD) \Leftrightarrow AD \cdot BC = AB \cdot CD$.

VII.80. *Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat înscris într-un cerc, iar
pe arcul mic $\overset{\frown}{BC}$. Să se arate că $PE + PF = PA + PB + PC + PD$.*

Dan Radu,

Soluţie. Teorema lui Ptolemeu aplicată în patrulaterele inscriptibile
$PBFD$ dă $PA \cdot CE + PC \cdot AE = AC \cdot PE$ şi $PB \cdot FD + PD \cdot BF = PF \cdot$
$CE = AE = AC$ şi $FD = BF = BD$, rezultă că $PA + PC = PE$ şi $PB +$
$(*)$ de unde, prin sumare obţinem concluzia.

Observaţii. 1) Aplicând teorema lui Van Schooten (care poate fi sta
teorema lui Ptolemeu!) punctului P şi $\triangle ACE$, $\triangle BDF$ echilaterale, ob
lităţile $(*)$ şi continuăm ca mai sus.

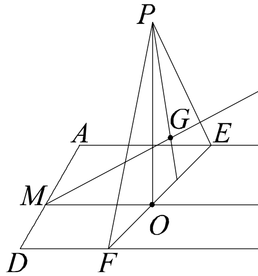
2) **Alexandru Tudorache**, elev, Iaşi, propune o soluţie trigonometr
pe teorema sinusurilor. Dacă $\alpha = m(\overset{\frown}{PC})$ şi R este raza cercului c
obţinem: $PE = 2R\sin\left(60^\circ + \dfrac{\alpha}{2}\right)$, $PF = 2R\cos\dfrac{\alpha}{2}$, $PA = 2R\sin\Big(60^\circ -$
$2R\sin\left(30^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right)$, $PC = 2R\sin\dfrac{\alpha}{2}$ şi $PD = 2R\sin\left(30^\circ + \dfrac{\alpha}{2}\right)$. Relaţia est
astfel cu uşurinţă.

Clasa a VIII-a

VIII.76. *Fie $ABCD$ un trapez cu $AB \parallel CD$, $M \in (AD)$ şi N
$MN \parallel AB$, iar $E \in (AB)$, $F \in (CD)$ oarecare. Fie $\{O\} = EF \cap MN$, $[O$
perpendiculare de aceeaşi parte pe planul trapezului, G centrul de greutate
$\{Q\} = MG \cap (TBC)$. Să se arate că MN este linie mijlocie în trapez dac
dacă $Q \in TN$.*

Bogdan Raiţă,

Soluţie. Avem: $Q \in TN \Leftrightarrow QN \perp (ABC) \Leftrightarrow (MQN) \perp (ABC) \Leftrightarrow (MGO) \perp (ABC) \Leftrightarrow GO \perp (ABC) \Leftrightarrow G \in PO \Leftrightarrow PO$ este mediană în $\triangle PEF \Leftrightarrow \dfrac{EO}{OF} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{AM}{MD} = 1 \Leftrightarrow MN$ este linie mijlocie a trapezului.



VIII.77. *Pentru $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, să se demonstreze inegalitatea*

$$x^6+y^6-x^2y^2\left(x^2+y^2\right) \geq \left(x^3+y^3-xy\left(x+y\right)\right)^2.$$

Lucian Tuţescu, Craiova, şi Gheorghe Nedele

Soluţie. Inegalitatea devine succesiv:

$$x^6+y^6-x^4y^2-x^2y^4 \geq \left(x^3+y^3\right)^2-2xy\left(x+y\right)\left(x^3+y^3\right)+x^2y^2\left(x\right.$$

$$-x^4y-xy^4 \geq 2x^3y^3-2xy\left(x^4+xy^3+x^3y+y^4\right)+x^4y^2+2x^3y^3+x$$

$$-4x^3y^3+2x^5y+2xy^5 \geq 0 \Leftrightarrow 2xy\left(x^2-y^2\right)^2 \geq 0,$$

evident adevărat. Egalitatea se atinge când $x = y$.

VIII.78. *Pentru $a, b, c \in \mathbb{R}$, să se demonstreze inegalitatea*

$$\sqrt{a^2+b^2-ab}+\sqrt{b^2+c^2-bc}+\sqrt{c^2+a^2-ca} \geq a+b+c.$$

Claudiu-Ştefan I

Soluţie. Are loc inegalitatea $\sqrt{a^2+b^2-ab} \geq \dfrac{a+b}{2}$; acest fapt este $a+b<0$, iar pentru $a+b \geq 0$ ea revine, după calcule, la $(a-b)^2 \geq 0$. S două relaţii analoage şi sumându-le, obţinem concluzia. Egalitatea se ati $a=b=c \geq 0$.

VIII.79. *Să se rezolve în numere naturale ecuaţia $x\left(x+1\right)=y^{2007}$.*

Alexandru Negrescu, elev,

Soluţie. Pentru $x=0$, obţinem $y=0$. Fie acum $x \neq 0$; cum $(x, x$ numerele x şi $x+1$ trebuie să fie puteri de exponent 2007: $x=a^{2007}$, $x+$ cu $b>a>0$. Atunci

$$x+1=b^{2007} \geq (a+1)^{2007} > (a+1)\,a^{2006} = a^{2007}+a^{2006} \geq a^{2007}+1$$

contradicţie. Rezultă că unica soluţie a ecuaţiei este $(0,0)$.

VIII.80. *Ştiind că 1 ianuarie 2007 este într-o zi de luni, să se arate anul 2100 există trei ani bisecţi în care luna februarie are trei duminici zile impare.*

Petru As

Soluţie. Trei duminici ale unei luni februarie dintr-un an bisect cad în atunci când 1 februarie este într-o duminică. Considerând o axă a timpu ziua întâi este 1 ianuarie 2007, fiecare duminică va avea ca număr de multiplu de 7. Ziua de 31 ianuarie 2008 are numărul de ordine 396, iar patru ani de tipul 1 februarie 2008 – 31 ianuarie 2012 are 1461 de zile. P

zi de 1 februarie a unui an bisect să cadă duminică, trebuie ca $396+14$ deci $1461k=M_7+2$. Deducem că $(7 \cdot 208+5)\,k=M_7+2$, adică $5k=M$

mai mici valori ale lui k având această proprietate sunt 6, 13, 20, iar lor le
anii bisecţi 2032, 2060, 2088.

Clasa a IX-a

IX.76. *Fie d_1, d_2, $\ldots$, d_k divizorii numărului $5^3 \cdot 7^2$, iar $S_n = d_1^n + d_2^n$*
$n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că $S_{2n} = \dfrac{\left(5^{4n}+1\right)\left(7^{3n}+1\right)}{\left(5^n+1\right)\left(7^n+1\right)} \cdot S_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Generali

Petru As

Soluţie. Numărul $5^3 \cdot 7^2$ are $4 \cdot 3 = 12$ divizori, anume 1, 5, 5^2, 5^3,
$7 \cdot 5^2$, $7 \cdot 5^3$, $7^2 \cdot 1$, $7^2 \cdot 5$, $7^2 \cdot 5^2$, $7^2 \cdot 5^3$. Se constată uşor că

$$S_n = \left(1 + 5^n + 5^{2n} + 5^{3n}\right)\left(1 + 7^n + 7^{2n}\right) = \frac{5^{4n}-1}{5^n-1} \cdot \frac{7^{3n}-1}{7^n-1};$$

$$S_{2n} = \left(1 + 5^{2n} + 5^{4n} + 5^{6n}\right)\left(1 + 7^{2n} + 7^{4n}\right) = \frac{5^{8n}-1}{5^{2n}-1} \cdot \frac{7^{6n}-1}{7^{2n}-1} =$$

$$= \frac{\left(5^{4n}-1\right)\left(5^{4n}+1\right)}{\left(5^n-1\right)\left(5^n+1\right)} \cdot \frac{\left(7^{3n}-1\right)\left(7^{3n}+1\right)}{\left(7^n-1\right)\left(7^n+1\right)} = \frac{\left(5^{4n}+1\right)\left(7^{3n}+1\right)}{\left(5^n+1\right)\left(7^n+1\right)}$$

Generalizarea este imediată: dacă p_1, p_2, $\ldots$, p_m sunt prime, iar d_1,
sunt divizorii lui $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}$, atunci

$$S_{2n} = \frac{\left(p_1^{(\alpha_1+1)n}+1\right) \cdots \left(p_m^{(\alpha_m+1)n}+1\right)}{\left(p_1^n+1\right) \cdots \left(p_m^n+1\right)} \cdot S_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

IX.77. *Să se arate că $a^3 + b^3 \geq ab\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}$, $\forall a, b \geq 0$.*

Ovidiu Pop, S

Soluţie. Dacă $a = 0$ sau $b = 0$, inegalitatea este evidentă. Fie a,
notaţiile $x = \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}$, inegalitatea se scrie succesiv

$$a^6 + 2a^3b^3 + b^6 \geq 2a^2b^2\left(a^2+b^2\right) \Leftrightarrow \frac{a^3}{b^3} + 2 + \frac{b^3}{a^3} \geq 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 5x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)\left(x^2+2x-1\right) \geq 0.$$

Cum $x \geq 2$, iar $x^2 + 2x - 1 = (x+1)^2 - 2$, această din urmă inega
adevărată şi de aici rezultă cerinţa problemei. Egalitatea se atinge când
pentru $a = b$.

IX.78. *Fie a, b, c laturile $\triangle ABC$, iar G centrul său de greutate. No*
E, F punctele de contact ale cercului înscris cu laturile BC, CA, respect
se arate că $a\overrightarrow{GD} + b\overrightarrow{GE} + c\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{0}$ dacă şi numai dacă $\triangle ABC$ este ec

Marian Ursărescu

Soluţie. Implicaţia inversă este imediată. Fie deci $a\overrightarrow{GD} + b\overrightarrow{GE} + c\overrightarrow{G}$
arătăm că $a = b = c$. Pentru $k = \dfrac{DB}{DC} = \dfrac{p-b}{p-c}$, obţinem că

$$\overrightarrow{GD} = \frac{\overrightarrow{GB} + k\overrightarrow{GC}}{1+k} = \frac{(p-c)\overrightarrow{GB} + (p-b)\overrightarrow{GC}}{a},$$

deci $a\overrightarrow{GD} = (p-c)\,\overrightarrow{GB} + (p-b)\,\overrightarrow{GC}$. Scriem încă două relaţii similare şi
rezultă că $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$. Însă $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$, deci

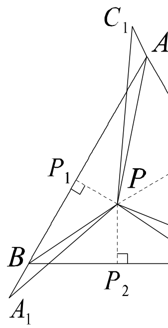
$$a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}-c\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}\right) = \overrightarrow{0} \Rightarrow (a-c)\,\overrightarrow{GA}+(b-c)\,\overrightarrow{GB} = 0 \Rightarrow a-c =$$

(am folosit faptul că $\left\{\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}\right\}$ constituie o bază). Deducem că $a = b =$

IX.79. *Fie $\triangle ABC$ echilateral şi P un punct în interiorul său. C*
$A_1 \in AB$, $B_1 \in BC$, $C_1 \in CA$ astfel încât $PA = PA_1$, $PB = PB_1$ şi P
Să se arate că P este centrul de greutate al $\triangle A_1B_1C_1$.

Iulia Pleşca, e

Soluţie. Fie P_1, P_2, P_3 proiecţiile lui P pe AB, BC, respectiv CA. Dacă O este centrul $\triangle ABC$, atunci



$$\begin{aligned}\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{PP_2} + \overrightarrow{PP_3} &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PA_1}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PB_1}\right) + \\ &+ \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PC_1}\right) = \\ &= \frac{3}{2}\overrightarrow{PO} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PA_1} + \overrightarrow{PB_1} + \overrightarrow{PC_1}\right).\end{aligned}$$

Pe de altă parte, $\overrightarrow{PP_1}+\overrightarrow{PP_2}+\overrightarrow{PP_3} = \frac{3}{2}\overrightarrow{PO}$ $\quad(*)\quad$ şi astfel deducem că $\overrightarrow{PA_1} + \overrightarrow{PB_1} + \overrightarrow{PC_1} = \overrightarrow{0}$, prin urmare P este centrul de greutate al $\triangle A_1B_1C_1$.

Relaţia $(*)$ este relativ uzuală şi se justifică astfel: ducem prin P s
$UV \parallel AB$, $XY \parallel BC$, $ST \parallel AC$, cu $X, S \in AB$, $U, T \in BC$, $V, Y \in AC$.
urile PUT, PYV şi PXS sunt echilaterale şi obţinem că $\overrightarrow{PP_1} = \frac{1}{2}\Big($
$\overrightarrow{PP_2} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PU} + \overrightarrow{PT}\right)$, $\overrightarrow{PP_3} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PV} + \overrightarrow{PY}\right)$. Din regula paralelogramul
$\overrightarrow{PX} + \overrightarrow{PU} = \overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PT} + \overrightarrow{PY} = \overrightarrow{PC}$ şi $\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{PV} = \overrightarrow{PA}$. Atunci

$$\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{PP_2} + \overrightarrow{PP_3} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}\right) = \frac{3}{2}\overrightarrow{PO}.$$

IX.80. *Fie α, β, γ, δ patru numere pozitive cu suma π. Să se af*
sumei $S = \sin\alpha\sin\beta + \sin\gamma\sin\delta$ şi să se determine situaţia în care acest
atins.

Adrian Cordun

Soluţie. Considerăm un cerc de centru O şi rază R, în care înscriem p
$ABCD$ cu $m(\widehat{ADB}) = 2\alpha$, $m(\widehat{BOC}) = 2\gamma$, $m(\widehat{COD}) = 2\beta$ şi $m(\widehat{DOA}) =$
$AB = 2R\sin\alpha$, $BC = 2R\sin\gamma$, $CD = 2R\sin\beta$, $AD = 2R\sin\delta$, iar
$BD \leq 2R$. Ţinând seama de teorema lui Ptolemeu,

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD \Rightarrow 4R^2\sin\alpha\sin\beta + 4R^2\sin\gamma\sin\delta \leq$$

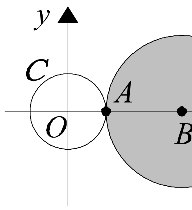
deci $S \leq 1$. Această valoare maximă este atinsă când $AC = BD = 2R$,
$ABCD$ este dreptunghi; rezultă că S este maximă când $\alpha = \beta$, $\gamma = \delta =$
$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

Clasa a X-a

X.76. *Fie $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Să se rezolve în $\mathcal{C}^2$ ecuaţia $z_1 z_2 = z$*

Gabriel Popa şi Paul Georg

Soluţia 1 (a autorilor). Dacă $z_1, z_2 \in \mathcal{C}$, atunci $z_1 z_2 \in \mathcal{C}$, iar $z_1 + z_2 + 3$ este un număr complex cu imaginea pe discul $\mathcal{D}$ de centru $B\,(3,0)$ şi rază 2. Evident că $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \{A\}$, cu $A\,(1,0)$, prin urmare $z_1 z_2 = z_1 + z_2 + 3 = 1$. Atunci $z_2 = -z_1 - 2$ şi obţinem că $z_1\,(-z_1 - 2) = 1 \Leftrightarrow z_1^2 + 2z_1 + 1 = 0 \Leftrightarrow z_1 = -1$, apoi $z_2 = -1$.



Soluţia 2 (Mihai Haivas). Fie $z_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $z_2 = \cos\beta + i\sin$ dată devine

$$\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) = (\cos\alpha + \cos\beta + 3) + i\,(\sin\alpha + \sin\beta$$

Egalând părţile imaginare, găsim că $\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} = \sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha}{}$

$\alpha + \beta = 2k\pi$ (deci $\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2} = 0$), obţinem că $1 = \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha +$ de unde $\cos\alpha + \cos\beta = -2$, deci $\cos\alpha = \cos\beta = -1$ şi atunci $z_1 = z_2 =$ $\alpha + \beta \neq 2k\pi$, deducem că $\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} = \cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$, de unde $\dfrac{\alpha+\beta}{2} = \pm\dfrac{\alpha}{}$ Ambele situaţii conduc imediat la contradicţii.

X.77. *Fie $a, b \in \mathbb{C}$ şi z_1, z_2 soluţiile ecuaţiei $z^2 - az + b = 0$. Să următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) $|z_1| < 1$ *şi* $|z_2| < 1$; *(ii)* $|a|^2 + \left|a^2 - 4b\right| < 2\left(|b|^2 + 1\right) < 4.$

Marian Tetiv

Soluţie. $(i) \Rightarrow (ii)$ Fie $r_1 = |z_1|$, $r_2 = |z_2|$; condiţia $r_1 < 1$, r_2 echivalentă cu $(r_1 - 1) + (r_2 - 1) < 0$ şi $(r_1 - 1)(r_2 - 1) > 0$, deci cu r_1 $r_1 + r_2 < r_1 r_2 + 1$. Din a doua relaţie, prin ridicare la pătrat, obţinem

$$r_1^2 + r_2^2 < r_1^2 r_2^2 + 1 \Rightarrow |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 < 2\left(|z_1 z_2|^2 + 1\right).$$

Cum $z_1 + z_2 = a$ şi $z_1 z_2 = b$, avem prima condiţie din (ii). În plus, $|b| =$ de unde a doua parte a lui (ii).

$(ii) \Rightarrow (i)$ Facem un raţionament invers celui de mai sus.

X.78. *Determinaţi triunghiurile în care tangentele unghiurilor se ex numere naturale, exact două dintre ele având aceeaşi paritate.*

Cătălin Cali

Soluţie. Se ştie că $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C$. Distingem

a) $\operatorname{tg} A = 2p$, $\operatorname{tg} B = 2q$, $\operatorname{tg} C = 2r+1$, cu $p, q \in \mathbb{N}^*$, $r \in \mathbb{N}$. Atunci $2p+2$ $4pq\,(2r+1)$, egalitate imposibilă întrucât membrul stâng este impar, iar cel par.

b) $\operatorname{tg} A = 2p+1$, $\operatorname{tg} B = 2q+1$, $\operatorname{tg} C = 2r$, cu $p, q \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}^*$; avem

$$2\,(p+q+1) + 2r = (2p+1)(2q+1)\cdot 2r \Leftrightarrow p+q+1 = (4pq+2p+$$

şi dacă $p + q > 1$, atunci $r\,(4pq + 2p + 2q) \geq 4pq + 2p + 2q > p + q + 1$ că $p + q \leq 1$ şi, cum nu putem avea $p = q = 0$, deducem că $p + q =$

$r = 1$. Triunghiurile care satisfac cerinţa sunt asemenea, având unghiurile
şi $\operatorname{arctg} 3$.

X.79. *Să se arate că în orice triunghi are loc inegalitatea*

$$(p - r - 2R)(p - r_a)(p - r_b)(p - r_c) \geq 0.$$

Când se atinge egalitatea?

I. V. Maftei şi Dorel Băiţan,

Soluţie. Are loc identitatea $\prod (p - r_a) = p^3 \prod \left(1 - \operatorname{tg} \frac{A}{2}\right)$, prin u
dusul $\prod (p - r_a)$ este pozitiv, nul sau negativ după cum $\triangle ABC$ este asc
dreptunghic sau obtuzunghic. Pe de altă parte, avem:

$$\prod \cos A = \frac{1}{2}\left(1 - \sum \cos^2 A\right) = \frac{1}{2}\left(\sum \sin^2 A - 2\right) = \frac{1}{8R^2}\left(a^2 + b^2 + c^2\right.$$

$$= \frac{1}{8R^2}\left[2\left(p^2 - r^2 - 4Rr\right) - 8R^2\right] = \frac{1}{4R^2}\left[p^2 - (2R + r)^2\right] \Rightarrow$$

$$p - r - 2R = \frac{4R^2}{p + r + 2R} \cdot \prod \cos A.$$

Deducem de aici că $p - r - 2R$ este pozitiv, nul sau negativ, după cum $\triangle$
ascuţitunghic, dreptunghic sau obtuzunghic, ceea ce încheie justificarea i
Egalitatea se atinge în cazul triunghiului dreptunghic.

X.80. *Arătaţi că există o infinitate de valori $n \in \mathbb{N}$ pentru care nume
şi $3n + 1$ sunt pătrate perfecte.*

Gheorghe I

Soluţie. Observăm că

$$\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^{2k+1} = \sum_{i=0}^{2k+1} C_{2k+1}^{i} \left(\sqrt{3}\right)^{2k+1-i} \left(\sqrt{2}\right)^{i} = A_k\sqrt{3} + B_k\sqrt{2}, \quad \text{cu} \quad A$$

deoarece $2k + 1 - i$ şi i au parităţi diferite, iar $\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^{2k+1} = A_k\sqrt{}$
Rezultă că

$$3A_k^2 - 2B_k^2 = \left(A_k\sqrt{3} + B_k\sqrt{2}\right)\left(A_k\sqrt{3} - B_k\sqrt{2}\right) = \left[\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\right.$$

Considerând $n_k = B_k^2 - A_k^2$ obţinem că $2n_k + 1 = A_k^2$, iar $3n_k + 1 =$
urmare numerele $2n + 1$ şi $3n + 1$ sunt pătrate perfecte pentru o infinitat
ale lui n.

Clasa a XI-a

XI.76. *Dacă $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, să se arate că* $\det\left(A + {}^tA \cdot i\right) = \det($
Generalizare.

Dan Popescu

Soluţie. Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, atunci

$$\det\left(A - {}^tA\, i\right) = (-i)^n \det\left({}^tA - \frac{1}{i}A\right) = (-i)^n \det\left({}^tA + i\, A\right) =$$

$$= (-i)^n \det\left({}^t\left({}^tA + i\, A\right)\right) = (-i)^n \det\left(A + {}^tA\, i\right)$$

prin urmare $\det\left(A + {}^tA\, i\right) = \det\left(A - {}^tA\, i\right)$ dacă şi numai dacă n este pa
cular, egalitatea are loc pentru $n = 4$.

XI.77. *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie de două ori derivabilă pe $[a,$ ... *bele derivate strict pozitive. Pentru $\lambda \in [a,b]$, considerăm punctele* ... *$B(b, f(b))$, $C(\lambda, y_C) \in G_f$ şi $D(\lambda, y_D) \in AB$. Demonstraţi că există* ... *$\lambda_0 \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right)$ astfel încât $f(b) - y_D = y_C - f(a)$.*

Cătălin Ţigăeru

Soluţie. Obţinem imediat că $y_C = f(\lambda)$, iar $y_D = \dfrac{b-\lambda}{b-a} \cdot f(a) + \dfrac{\lambda}{b}$ ...

Considerăm $g : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$g(\lambda) = f(b) g(b) - y_D - (y_C - f(a)) = \frac{b-\lambda}{b-a} \cdot f(b) + \frac{\lambda - a}{b-a} \cdot f(a) - \ldots$$

Funcţia g este de două ori derivabilă pe $[a,b]$. Cum $g'(\lambda) = -\dfrac{f(b)}{b}$ ... $f'(\lambda) < 0$, $\forall \lambda \in [a,b]$, rezultă că g este strict descrescătoare; în plus, $g($ ... $-(f(b) - f(a))^2 < 0$. Urmează că există şi este unic $\lambda_0 \in (a,b)$ pentru ca ... 0. Faptul că $\lambda_0 \in \left(\dfrac{a+b}{2}, b\right)$ rezultă din aceea că $g\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = \dfrac{1}{2}[f(a)$ ... $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) > 0$, întrucât f este strict convexă, iar $g(b) = f(a) - f(b) < 0,$ ... este strict crescătoare.

XI.78. *Pentru $x \in \mathbb{R}_+^*$, să se demonstreze inegalităţile:*

a) $\ln x + \dfrac{1}{x^a} \geq \dfrac{1}{a}(1 + \ln a)$, *unde $a > 0$;*

b) $a^x > (1 + \varepsilon x)^k$, *unde $a > e^k$, $k \in N^*$, iar $\varepsilon \in \{\pm 1\}$.*

Gheorghe Cost ...

Soluţie. *a)* Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x + \dfrac{1}{x^a} - \dfrac{1}{a}(1 + \ln a)$; atun ... $\dfrac{1}{x} - \dfrac{a}{x^{a+1}} = \dfrac{1}{x^{a+1}}(x^a - a)$. Avem $f'(x) < 0$ pentru $x \in \left(0, a^{1/a}\right)$ şi ... pentru $x \in \left(a^{1/a}, +\infty\right)$, prin urmare f are un minim în $x_0 = a^{1/a}$, egal cu ... Deducem că $f(x) \geq 0$, cu egalitate când $x = a^{1/a}$.

b) Fie $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = a^x - (1 + \varepsilon x)^k$. Dezvoltăm funcţia g în s ... într-o vecinătate a originii:

$$g(x) = g(0) + \frac{x}{1!} g'(0) + \frac{x^2}{2!} g''(0) + \cdots + \frac{x^k}{k!} g^{(k)}(0) + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} g^{(k+1)} \ldots$$

unde $0 < \theta_k < 1$. Avem $g(0) = 0$, $g^{(k+1)}(x\theta_k) = a^{x\theta_k} (\ln a)^{k+1} > 0$, căc ... iar $g^{(p)}(0) = (\ln a)^p - \varepsilon^p k(k-1)(k-2)\cdots(k-(k-p+1))$, $p = \overline{1,k}$. C ... obţinem că $(\ln a)^p > k^p$, prin urmare $g^{(p)}(0) > 0$, $p = \overline{1,k}$ şi astfel se obţin ... $\forall x \in (0, \infty)$.

XI.79. *Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un şir convergent, a cărui limită o notăm $L(x_n)$. D* ... *că există $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{x_n}{L(x_n)}\right)^n = a \in \mathbb{R}_+^*$ dacă şi numai dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + x_n -$* ... *$b \in \mathbb{R}_+^*$. Ce legătură este între a şi b?*

D. M. Bătineţu-Giurgiu, ...

Soluţie. Sunt imediate egalităţile:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{L(x_n)}\right)^n = e^{\frac{1}{L(x_n)} \lim\limits_{n\to\infty} n(x_n - L(x_n))}; \quad \lim_{n\to\infty} (1 + x_n - L(x_n))^n = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \ldots}$$

Atunci există $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{L(x_n)}\right)^n \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} n\left(x_n - L(x_n)\right) \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + x_n\right.$
Se deduce uşor că $b = a^{L(x_n)}$.

XI.80. *Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă pe $[0,1]$, derivabilă pe* $f(0)=0$. *Presupunem că există $M>0$ astfel încât* $\left|f'(x) - \frac{1-x}{x}f(x)\right|$ $\forall x\in(0,1)$. *Să se arate că f este derivabilă în origine.*

Mihai Crăciun

Soluţie. Condiţia din enunţ se scrie echivalent

$$\left|\frac{xe^x f(x) + xe^x f'(x) - e^x f(x)}{x^2}\right| < M \Leftrightarrow |h'(x)| < M,\ \forall x\in(0,1$$

unde $h:(0,1)\to\mathbb{R}$ este definită prin $h(x) = \dfrac{e^x f(x)}{x}$. Din teorema lui obţinem că $|h(x)-h(y)| < M|x-y|$, $\forall x,y\in(0,1)$, $x\neq y$. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ şir convergent la zero; avem că $|h(x_n)-h(x_m)| \leq M|x_n - x_m|$, $\forall m,n\in\mathbb{N}$ $(h(x_n))_{n\geq 0}$ este şir Cauchy. Deducem că $(h(x_n))_{n\geq 0}$ este convergent şi fie Dacă $(y_n)_{n\geq 0}$ este un alt şir convergent la zero, cum $|h(x_n)-h(y_n)| \leq M$ $\forall n\in\mathbb{N}$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} h(y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} h(x_n) = l$, prin urmare există $\lim\limits_{x\to}$
Urmărind definiţia lui h, obţinem existenţa lui $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = l$, derivabilă în origine.

Clasa a XII-a

XII.76. *Fie funcţia continuă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ şi $n\in\mathbb{N}^*$. Arătaţi că exist astfel încât*

$$\int_a^b (f(x)+f(a)+f(b))\,dx = \frac{f(c)+f(a)+f(b)}{(c-a)^{n-1}}\cdot\frac{(b-a)^n}{n}.$$

Dumitru Mihalach

Soluţie. Vom considera funcţia $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = \int_a^x (f(t)+f(a)+f(b))\,dt - k\frac{(x-a)^n}{n},$$

unde k este o constantă ce urmează a fi determinată din condiţia $\varphi(a$ Cum $\varphi(a) = 0$ rezultă $\varphi(b) = 0$, adică $k = \int_a^b (f(t)+f(a)+f(b))\,dt$
Aplicând teorema lui Rolle funcţiei φ, există $c\in(a,b)$ astfel încât $\varphi'($ $f(c)+f(a)+f(b) - k(c-a)^{n-1} = 0$. Obţinem $k = \dfrac{f(c)+f(a)+f(b}{(c-a)^{n-1}}$ cele două expresii ale lui k, rezultă concluzia .

Notă. Pentru $n=1$ obţinem că $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$, prin urmare constituie o generalizare pentru *teorema de medie.*

XII.77. *Fie $k\in\mathbb{N}^*$, fixat. Considerăm şirurile* $a_n = \int_{1/(n+1)^k}^{1/n^k}$ arcsin $\forall n\geq 1$ *şi* $b_n = \int_{1/(n+1)^k}^{1/n^k} \operatorname{arctg}\left(n^k x\right)dx$, $\forall n\geq 1$. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$

Liviu Smarandache şi Lucian Tuţescu

Soluţie. Conform teoremei de medie, pentru orice $n \geq 1$, există
$\left(\frac{1}{(n+1)^k}, \frac{1}{n^k}\right)$ astfel încât

$$a_n = \left(\frac{1}{n^k} - \frac{1}{(n+1)^k}\right) \arcsin\left(n^k c_n\right) \quad \text{şi} \quad b_n = \left(\frac{1}{n^k} - \frac{1}{(n+1)^k}\right) \operatorname{arctg}$$

Astfel, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\arcsin\left(n^k c_n\right)}{\operatorname{arctg}\left(n^k d_n\right)}$. Cu teorema cleştelui obţinem că $\lim\limits_{n\to}$
$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k d_n\right) = 1$. Prin urmare, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\arcsin 1}{\operatorname{arctg} 1} = 2$.

XII.78. *Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă şi fără puncte fixe, că nici funcţiile $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n\ ori}$, $n \in \mathbb{N}^*$, nu au puncte fixe.*

Dorin Mărghidanu

Soluţie. Considerăm funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x$, care tinuă şi nu se anulează pe $\mathbb{R}$; deducem că g păstrează semn constant pe $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ ori}}$, rezultă că pentru orice $x \in \mathbb{R}$, numerele $g(x)$, $g($
$g\left(f^{n-1}(n)\right)$ sunt simultan sau pozitive, sau negative. Cum

$$f^n(x) - x = g\left(f^{n-1}(x)\right) + g\left(f^{n-2}(x)\right) + \cdots + g(f(x)) + g(x), \quad \forall$$

urmează afirmaţia problemei.

XII.79. *Fie V spaţiu vectorial de dimensiune n peste corpul K, iar morfism nilpotent al lui V (i.e., există $p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $u^p = \underbrace{u \circ u \circ \cdots}_{n \text{ ori}}$ Să se arate că $u^n = 0$.*

Adrian Reis

Soluţie. Presupunem prin absurd că $u^n \neq 0$; atunci polinomul mini domorfismului u este X^p, cu $p > n$. Acest fapt este imposibil, întrucât minimal al lui u divide polinomul caracteristic al lui u (teorema Hamilto iar polinomul caracteristic este de grad n.

Notă. În fapt, autorul a propus spre publicare următorul rezultat, m a cărui demonstrare depăşeşte însă nivelul unui absolvent de liceu:

Fie V spaţiu vectorial de dimensiune n peste corpul K, iar u_1, u endomorfisme nilpotente, care comută două câte două; atunci $u_1 \circ u_2 \circ \cdot$

XII.80. *Fie A un inel în care $x^4 - y^4 = (x-y)(x+y)\left(x^2+y^2\right)$, $\forall x$*

a) Dacă inelul are unitate, să se arate că A este comutativ.

b) Rămâne valabil rezultatul de la a) dacă inelul A nu este unitar?

Gabriel Dospinescu, Paris şi Marian Tetiv

Soluţie. Conform ipotezei, avem că

$$f(x,y) = (x-y)(x+y)\left(x^2+y^2\right) - \left(x^4 - y^4\right) =$$
$$= x^2y^2 + xyx^2 + xy^3 - yx^3 - yxy^2 - y^2x^2 = 0, \quad \forall x, y \in$$

După calcule simple, obţinem apoi:

$$g(x,y) = f(x+1,y) - f(x,y) = 2xy^2 + 2xyx + xy - 2y^2x - 2yx^2$$
$$f(x+2,y) - 2f(x+1,y) + f(x,y) = g(x+1,y) - g(x,y) = 2(xy$$

pentru orice $x, y \in A$ (unde $2 = 1 + 1$, iar 1 este unitatea inelului). Cum
calculate sunt identic nule datorită ipotezei, obţinem că $g(x, y) = 0$ şi $2\,($
0, $\forall x, y \in A$. Atunci

$$g(x,y) = 2\left(xy^2 - y^2x\right) + 2(xy - yx)x + xy - yx = 0, \quad \forall x, y \in A$$

$$\Rightarrow 0 + 0 + xy - yx = 0, \quad \forall x, y \in A \Rightarrow xy = yx, \quad \forall x, y \in A.$$

Absenţa elementului unitate anulează valabilitatea concluziei, după
exemplul inelului matricelor de forma $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $a, b, c \in \mathbb{R}$. Cum
oricăror trei matrice de acest tip este matricea nulă, e clar că egalitatea
este valabilă în acest inel, însă inelul nu este comutativ.

IMPORTANT

- În scopul unei legături rapide cu redacţia revistei, pot fi utilizate urm
adrese e-mail: **t_birsan@yahoo.com** şi **profgpopa@yahoo.co**
această cale colaboratorii pot purta cu redacţia un dialog privitor
rialele trimise acesteia, procurarea numerelor revistei etc. Sugerăm
ratorilor care trimit probleme originale pentru publicare să le nume
să-şi reţină o copie xerox a lor pentru a putea purta cu uşurinţă o
prin e-mail asupra acceptării/neacceptării acestora de către redacţia

- La *problemele de tip L* se primesc soluţii de la orice iubitor de ma
elementare (indiferent de *preocupare profesională* sau *vârstă*). Fieca
soluţiile acestor probleme - ce sunt publicate în revistă după un a
urmată de numele tuturor celor care au rezolvat-o.

- **Adresăm cu insistenţă rugămintea ca materialele trimise
să nu fie (să nu fi fost) trimise şi altor publicaţii.**

- Rugăm ca materialele tehnoredactate să fie trimise pe adresa reda
soţite de fişierele lor (de preferinţă în LaTeX).

- Pentru a facilita comunicarea redacţiei cu colaboratorii ei, autorii
alelor sunt rugaţi să indice adresa e-mail.

Soluţiile problemelor pentru pregătirea concur
propuse în nr. 1/2007

A. Nivel gimnazial

G116. *Aflaţi toate numerele naturale N de patru cifre nenule distin prietatea că diferenţa dintre cel mai mare număr obţinut prin permutarea N şi cel mai mic asemenea număr este tocmai N.*

Maria Miheţ, T

Notă. A se vedea articolul d-lui Titu Zvonaru – *O problemă cu c număr*, apărut în RecMat 1/2007.

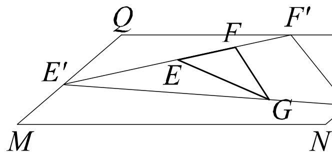
G117. *Fie mulţimea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 98\}$. Arătaţi că oricum am a elemente ale lui A, există două printre ele având suma cub perfect.*

Titu Zvonaru, C

Soluţie. Considerăm mulţimile $A_i = \{i, 27 - i\}$, $i = 1, 2, \ldots, 13$, A_j $112 - j\}$, $j = 14, 15, \ldots, 49$, cu proprietatea că suma elementelor din fieca este cub perfect, iar $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{49}$. La alegerea a 50 de elemente, două din aceeaşi mulţime A_i, conform principiului cutiei, şi de aici rezultă

G118. *În interiorul unui paralelogram având unghiul ascuţit de $30°$ ş laturilor 17 cm şi 59 cm, se consideră 2007 puncte. Să se arate că puten dintre aceste puncte astfel încât aria triunghiului determinat de ele să f egală cu $\frac{1}{4}$ cm^2.*

Mihai Ha



Soluţie. Descompunem paralelogramul în $17 \cdot 59 = 1003$ romburi de latură 1, aria fiecăruia fiind $1 \cdot 1 \cdot \sin 30° = \dfrac{1}{2}$ cm^2. Conform principiului cutiei, există un romb care să conţină (în interior sau pe laturi) măcar 3 dintre cele 2007 puncte. Dacă E, F, G sunt aces aparţinând rombului $MNPQ$, fie E' şi F' intersecţiile lui EF cu două c rombului, iar $\{G\} = E'G \cap NP$ (notaţiile sunt cele din figură). Evident $A_{EFG} \le A_{E'F'G'} \le \dfrac{1}{2} A_{MNPQ} = \dfrac{1}{4}$ cm^2.

G119. *Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $A = \{\varepsilon_0 \cdot 2^0 + \cdots + \varepsilon_n \cdot 2^n \mid \varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{$ $B = \{m \mid m \in 2\,\mathbb{Z} + 1, |m| \le 2^{n+1} - 1\}$. Să se arate că $A = B$.*

Dorel Miheţ, T

Soluţie. Mulţimea B are $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ elemente. Să remarcăm că toat din A sunt impare, A are cel mult 2^{n+1} elemente (sunt 2^{n+1} posibilităţi ale numerelor ε_i), cel mai mare element din A este $1 + 2 + \cdots + 2^n = 2^n$ cel mai mic este $-\left(2^{n+1} - 1\right)$. Dacă arătăm că la combinaţii diferite de ε_i numere diferite, va rezulta că A are exact 2^{n+1} elemente, deci $A = B$.

Fie $\varepsilon_0 \cdot 2^0 + \cdots + \varepsilon_n \cdot 2^n = \sigma_0 \cdot 2^0 + \cdots + \sigma_n \cdot 2^n$, cu $\varepsilon_i, \sigma_i \in \{-1, 1\}$; rămâne că $\varepsilon_i = \sigma_i$, $\forall i = \overline{1, n}$. Observăm că semnul lui $\varepsilon_0 \cdot 2^0 + \cdots + \varepsilon_n \cdot 2^n$ este dat lui ε_n (se demonstrează imediat, ţinând seama de faptul că $2^n > 2^{n-1} + \cdot$ aceste condiţii, din $\varepsilon_0 \cdot 2^0 + \cdots + \varepsilon_n \cdot 2^n = \sigma_0 \cdot 2^0 + \cdots + \sigma_n \cdot 2^n$, rezultă c

Reducând termenii cu 2^n, obţinem o egalitate similară cu ε_{n-1} şi σ_{n-1} în
şi σ_n, deci $\varepsilon_{n-1} = \sigma_{n-1}$ etc.

O altă soluţie se poate da folosind unicitatea scrierii unui număr în ba

G120. *Rezolvaţi în* $\mathbb{N}$ *ecuaţia* $x!\,(y!)^{2005} = (z!)^{2007}$.

Anca Ştefania Tuţescu, elevă

Soluţie. Vom arăta că, dacă (x, y, z) este soluţie, atunci $x, y, z \in \{$
supunem prin absurd că $z \geq 2$ şi fie p cel mai mare număr prim $\leq$
$p^{2007} \mid (z!)^{2007}$, de unde $p^{2007} \mid x! \cdot (y!)^{2005}$. Dacă p^2 nu divide $x!$,
$p^{2006} \mid (y!)^{2005}$, de unde $p^2 \mid y!$; prin urmare, cel puţin unul dintre n
sau $y!$ se divide cu p^2 şi, să zicem că $x!$ are această proprietate. Deducem
dusul $x!$ apar factorii p şi $2p$ şi este cunoscut faptul că între p şi $2p$ mai
măcar un număr prim q (Postulatul lui Bertrand). Evident că $q!z!$ şi deci
ceea ce contrazice maximalitatea lui p.

Ecuaţia admite 8 soluţii (x, y, z), cu $x, y, z \in \{0, 1\}$.

G121. *Dacă* $a, b \in (0, 3/2)$, *să se demonstreze inegalitatea*

$$\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a+b+3}} + \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \leq \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}.$$

Andrei Laurenţiu Ciupan, elev,

Soluţie. Din $a, b \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$, rezultă că $\sqrt{ab} \leq \frac{3}{2}$ şi atunci $a + b + 3$
$2\sqrt{ab} = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2$. Este cunoscută (sau se poate demonstra uşor)
$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{(x+y)^2} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{x+y}\right)^2$; obţinem:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a+b+3} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2} = \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{}}\right.$$

De aici, inegalitatea din enunţ este imediată.

G122. *Fie* G *centrul de greutate al* $\triangle ABC$ *şi* G' *proiecţia sa pe dr*
Să se arate că $G' \notin [BC]$ *dacă şi numai dacă* $3a^2 < \left|b^2 - c^2\right|$.

Temistocle Bî

Soluţie. Condiţia $G' \notin [BC]$ este echivalentă cu faptul că $\triangle GB$
tuzunghic, având unghiul obtuz $\widehat{GBC}$ sau $\widehat{GCB}$, după cum $c < b$ sau $b <$

$$\widehat{GBC} \text{ obtuz} \Leftrightarrow \cos\widehat{GBC} < 0 \Leftrightarrow \frac{BC^2 + GB^2 - GC^2}{2\,BC \cdot GB} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 + \left(\frac{2}{3}m_b\right)^2 - \left(\frac{2}{3}m_c\right)^2 < 0 \Leftrightarrow 9a^2 + 4m_b^2 - 4m_c^2 < 0 \Leftrightarrow$$

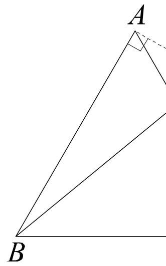
$$\Leftrightarrow 9a^2 + 2\left(a^2 + c^2\right) - b^2 - 2\left(a^2 + b^2\right) + c^2 < 0 \Leftrightarrow 3a^2 < b^2 - c^2$$

Analog, $\widehat{GCB}$ este obtuz $\Leftrightarrow 3a^2 < c^2 - b^2$ şi urmează concluzia.

G123. *Fie* ABC *un triunghi echilateral. Să se arate că orice punct*
cu proprietatea că $MB = MA + MC$ *poate fi determinat folosind doar e*

echer poate fi folosit pentru a trasa drepte şi unghiuri drepte.)

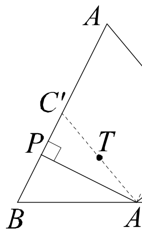
Nicolae Ivăşchescu



Soluţie. Folosind teorema lui Ptolemeu, se arată că punctele M cu proprietatea din enunţ sunt cele de pe arcul mic $\overset{\frown}{AC}$ al cercului circumscris triunghiului (a se vedea şi soluţia problemei $VII.80$). Mijlocul acestui arc se află intersectând perpendiculara în A pe AB cu perpendiculara în C pe BC. Celelalte puncte ale arcului se construiesc proiectând mijlocul arcului $\overset{\frown}{AC}$ pe semidrepte cu originea în B, interioare unghiului $\widehat{ABC}$.

G124. *Fie $\triangle ABC$, A' mijlocul lui $[BC]$, iar P şi Q proiecţiile lui respectiv AC. Să se arate că $4PQ \leq AB + BC + CA$.*

Adrian Zahariuc, ele



Soluţie. Notăm cu B' şi C' mijloacele laturilor $[AC]$ şi $[AB]$, iar cu T şi S mijloacele segmentelor $[A'C']$, respectiv $[A'B']$. Atunci

$$PQ \leq PT + TS + SQ =$$
$$= \frac{A'C'}{2} + \frac{B'C'}{2} + \frac{A'B'}{2} = \frac{AC}{4} + \frac{BC}{4} + \frac{AB}{4},$$

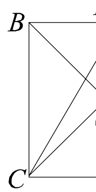
de unde $4PQ \leq AB + BC + CA$.

Nota autorului. După calcule laborioase, se poate demonstra că pro echivalentă cu inegalitatea $\dfrac{m_a}{h_a} \leq \dfrac{R}{2r}$.

G125. *Fie $ABCD$ un pătrat, $M \in (AB)$, $\{O\} = AC \cap BD$, $\{S\} =$ iar $\{E\} = SO \cap MD$. Considerăm $AA' \perp (ABC)$, $AA' = AB$, I mijlocul iar $\{H\} = MI \cap A'E$. Să se arate că:*

a) $MD \perp (A'AE)$; *b)* $\dfrac{V_{A'ADH}}{V_{MADH}} = \left(\dfrac{AB}{AM}\right)^2$.

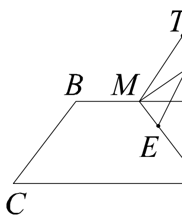
Petru Răducanu, Iaşi



Soluţie. *a)* Fie $\{L\} = SO \cap AB$. Aplicând teorema lui Menelaus în $\triangle AMD$ cu transversala $E - L - S$ şi în $\triangle AMC$ cu transversala $O - L - S$, obţinem

$$\frac{EM}{ED} \cdot \frac{SD}{SA} \cdot \frac{LA}{LM} = 1; \quad \frac{LA}{LM} \cdot \frac{SM}{SC} \cdot \frac{OC}{OA} = 1.$$

Însă $\dfrac{SC}{SM} = \dfrac{SD}{SA} = \dfrac{CD}{MA}$ şi deducem că $\dfrac{EM}{ED} = \dfrac{AM^2}{AD^2}$, prin urmare $AE \perp MD$. Avem şi că $AA' \perp MD$ şi astfel $MD \perp (A'AE)$.



b) De la *a)* obţinem că $A'E \perp MD$. În plus, se observă că $MD = MA'$ şi, cum MI este mediană în $\triangle MDA'$ isoscel, atunci $MI \perp A'D$. Rezultă că H este ortocentru în $\triangle MDA'$, deci $DH \perp A'M$. Avem şi

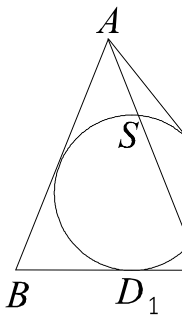
$A'M \perp DA$ (deoarece $DA \perp (AMA')$), prin urmare $A'M \perp (ADH)$. Ded

$$\frac{V_{A'ADH}}{V_{MADH}} = \frac{\frac{1}{3}A_{ADH} \cdot A'T}{\frac{1}{3}A_{ADH} \cdot MT} = \frac{A'T}{MT} = \left(\frac{A'A}{AM}\right)^2 = \left(\frac{AB}{AM}\right)^2.$$

<u>B. Nivel liceal</u>

L116. *Cercul înscris în $\triangle ABC$ este tangent laturii BC în punctul D_1 A-exînscris este tangent aceleeaşi laturi în punctul D_2. Dreapta AD_2 in cercul înscris în punctele S şi T. Să se arate că $\triangle STD_1$ este dreptunghi*

Titu Zvonaru, C



Soluţie. Fie E_1, E_2 punctele de tangenţă ale cercului înscris, respectiv A-exînscris cu latura AC. Cu notaţiile uzuale, avem: $BD_2 = p - c$, $CD_2 = p - b$, $AE_1 = p - a$, $AE_2 = p$, $D_1D_2 = |b - c|$. Dacă $\alpha = AD_2$, cu relaţia lui Stewart obţinem:

$$a\alpha^2 = c^2(p-b) + b^2(p-c) - a(p-b)(p-c) =$$
$$= p(b-c)^2 + ap(p-a).$$

Mai notăm $x = AS$, $y = TD_2$, $z = ST$. Folosind puterea punctului faţă de cerc avem $AS \cdot AT = AE_1^2$ şi $D_2S \cdot D_2T = D_1D_2^2$, prin urmare

$$x^2 + xz = (p-a)^2, \quad y^2 + yz = (b-c)^2, \quad x + y + z = \alpha.$$

Înlocuim $z = \alpha - x - y$ în primele două ecuaţii:

$$\alpha x - xy = (p-a)^2, \quad \alpha y - xy = (p-c)^2.$$

Acum substituim $y = \dfrac{(b-c)^2}{\alpha - x}$ şi prima ecuaţie devine

$$\alpha x + \frac{(b-c)^2 x}{x - \alpha} = (pa)^2 \Leftrightarrow a\alpha x^2 - x(p-a)\left[(b-c)^2 + a(b+c)\right] + a\alpha(p$$

Soluţiile acestei ecuaţii sunt $x_1 = \dfrac{(p-a)\alpha}{p}$ şi $x_2 = \dfrac{p(p-a)}{\alpha}$ şi cor

obţinem $y_1 = \dfrac{p(b-c)^2}{a\alpha}$, $y_2 = \dfrac{a\alpha}{p}$. Observăm că

$$x_2 + y_2 > \alpha \Leftrightarrow p^2(p-\alpha) + a\alpha^2 > \alpha^2 p \Leftrightarrow p^2(p-a) > \alpha^2(p-a)$$
$$\Leftrightarrow ap^2 > p(b-c)^2 + ap(p-a) \Leftrightarrow (b-c)^2 < a(p-p+\alpha) \Leftrightarrow (b-c)^2$$

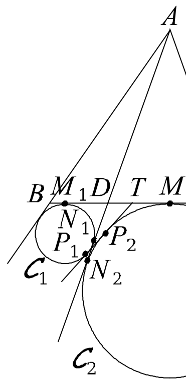
adevărat. Atunci valorile x_2, y_2 nu convin şi rămâne că $\dfrac{AS}{AD_2} = \dfrac{p-a}{p}$.

Dacă I, I_a sunt centrele cercurilor înscris, respectiv A-exînscris, atun $\dfrac{AE_1}{AE_2} = \dfrac{p-a}{p}$, prin urmare $\dfrac{AI}{AI_a} = \dfrac{AS}{AD_2}$, de unde $IS \parallel I_aD_2$. Însă I_a şi deducem că $IS \perp BC$. Avem că $ID_1 \perp BC$; rezultă că punctele S, coliniare, adică $[SD_1]$ este diametru şi astfel $\triangle STD_1$ este dreptunghic.

L117. *Fie $\triangle ABC$, $D \in (BC)$, iar $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ cercurile exînscrise tri*
ADB şi ADC, tangente la BC. Arătaţi că o tangentă comună interioar
$\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ trece prin punctul de contact cu BC al cercului A-exînscris.

Neculai Roman, Mir

Soluţie. Dacă D este punctul de contact cu BC al cercului A-exînscris $\triangle ABC$, atunci AD este tangenta comună interioară căutată. Mai mult, în acest caz se poate arăta că $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ sunt tangente exterior.



Considerăm că D nu este punctul de contact cu BC al cercului A-exînscris $\triangle ABC$ şi notăm $\{M_1\} = \mathcal{C}_1 \cap BC$, $\{M_2\} = \mathcal{C}_2 \cap BC$, $\{N_1\} = AD \cap \mathcal{C}_1$, $\{N_2\} = AD \cap \mathcal{C}_2$, P_1 şi P_2 sunt punctele de contact cu $\mathcal{C}_1$, respectiv $\mathcal{C}_2$, ale tangentei comune interioare cercurilor $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ (diferită de AD), iar $\{T\} = P_1P_2 \cap BC$. Avem că $DM_1 = \dfrac{1}{2}(AB + BD - AD)$, $DM_2 = \dfrac{1}{2}(AC + CD - AD)$. Distingem două cazuri:

I. $T \in (CD)$; avem că $TB = BD + TD$, $TD = TM_1 - DM_1$, TM_1
$TP_2 + P_1P_2 = TM_2 + N_1N_2 = TM_2 + DN_2 - DN_1 = TM_2 + DM_2 - D$
altă parte, $TM_1 = DM_1 + DM_2 - TM_2$, prin urmare $DM_2 = TM_1$. Apo

$$TD = TM_1 - DM_1 = DM_2 - DM_1 = \frac{AC - AB + DC - DB}{2} =$$

$$TB = BD + \frac{AC - AB + DC - DB}{2} = \frac{AC + BC - AB}{2},$$

ceea ce trebuie demonstrat.

II. $T \in (BD)$; se efectează un calcul asemănător.

Notă. **Vlad Emanuel**, student, Bucureşti, a soluţionat problema c
unor calcule elaborate, etalând tehnici diverse şi de mare fineţe.

L118. *Fie M un punct al elipsei $\mathcal{E}$, de focare F şi F'. Dreptele M*
intersectează elipsa în A, respectiv A'. Să se arate că, atunci când M p
dreapta AA' este mereu tangentă unei curbe fixe, care se cere a fi determ

Adrian Reis

Soluţie. Considerăm elipsa $\mathcal{E}$ raportată la axele sale de simetrie; ecua
metrice ale elipsei vor fi $x = \dfrac{a\left(1 - t^2\right)}{1 + t^2}$, $y = \dfrac{2bt}{1 + t^2}$, $t \in \mathbb{R}$. Fie M corespun
rii t_0 a parametrului; vom calcula valorile t_1 şi t_1' ce corespund punctelor A
A'. Ecuaţia dreptei MA este $\dfrac{x}{a}(1 - t_0t_1) + \dfrac{y}{b}(t_0 + t_1) - (1 + t_0t_1) = 0$ şi,
faptul că MA trece prin punctul $F(c, 0)$, obţinem că $\dfrac{c}{a}(1 - t_0t_1) - (1 + t_0$
unde se deduce că $t_1 = \dfrac{c - a}{(c + a)\, t_0}$. Analog găsim $t_1' = \dfrac{c + a}{(c - a)\, t_0}$, deci ecua
AA' este

$$AA' : \frac{x}{a}\left(t_0^2 - 1\right) - \frac{2\left(a^2 + c^2\right) t_0}{b^3} y - \left(t_0^2 + 1\right) = 0.$$

Scriem această ecuaţie sub forma $\left(\frac{x}{a}-1\right)t_0^2-\frac{2\left(a^2+c^2\right)y}{b^3}t_0-\left(\frac{x}{a}+\right.$
impunem ca ea să admită soluţie dublă în t_0, adică $\Delta=0$. După calcul
elipsa $\mathcal{E}'$: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{\left(a^2+c^2\right)^2y^2}{b^6}-1=0$ şi aceasta va fi curba fixă căutată;
numele de *curbă înfăşurătoare* a familiei de drepte AA'.

L119. *Fie $n\in\mathbb{N}$ şi $a.b,c\in\mathbb{R}_+^*$ cu $ab+bc+ca=3$. Să se arate că a^{n+}
$c^{n+3}+2abc\left(a^n+b^n+c^n\right)\geq 9$.*

Titu Zvonaru, Comăneşti şi Bogdan Ioniţă,

Soluţie. Inegalitatea lui Schur

$$a^{n+1}\left(a-b\right)\left(a-c\right)+b^{n+1}\left(b-c\right)\left(b-a\right)+c^{n+1}\left(c-a\right)\left(c-b\right)\geq$$

devine, ţinând seama şi de ipoteză,

$$a^{n+3}+b^{n+3}+c^{n+3}+2abc\left(a^n+b^n+c^n\right)\geq\left(ab+bc+ca\right)\left(a^{n+1}+b^{n+1}\right.$$

$$a^{n+3}+b^{n+3}+c^{n+3}+2abc\left(a^n+b^n+c^n\right)\geq 3\left(a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1}\right).$$

Problema este rezolvată dacă dovedim că, în ipoteza $ab+bc+ca=3$, aven
$c^p\geq 3$, $\forall p\in\mathbb{N}$. Cu inegalitatea $MA\geq MG$, obţinem

$$a^p+b^p+\underbrace{1+\cdots+1}_{p-2}\geq pab,\ b^p+c^p+\underbrace{1+\cdots+1}_{p-2}\geq pbc,\ c^p+a^p+\underbrace{1+\cdots}_{p-2}$$

Prin adunare, rezultă că $2\left(a^p+b^p+c^p\right)+3p-6\geq p\left(ab+bc+ca\right)$, adică
$c^p\geq 3$.

L120. *Pentru a_1, a_2, $\ldots$, a_n reale pozitive, să se demonstreze inegali*

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{(n-1)^2}+\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^{(n-1)^2}+\cdots+\left(\frac{a_n}{a_1}\right)^{(n-1)^2}\geq\frac{a_1a_2^{2n-1}+a_2a_3^{2n-1}+\cdots}{a_1^2a_2^2\cdots a_n^2}$$

Marian Tetiv

Soluţie. Folosind inegalitatea $MA\geq MG$ pentru $(n-1)^2$ numere, ob

$$(2n-3)\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{(n-1)^2}+(2n-5)\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^{(n-1)^2}+\cdots+3\left(\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}\right)^{(n-1)^2}+\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right.$$

$$\geq(n-1)^2\sqrt[(n-1)^2]{\left[\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{2n-3}\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^{2n-5}\cdots\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)\right]^{(n-1)^2}}=(n-1)^2\,\frac{a}{a^2}$$

Scriem încă $n-1$ inegalităţi de acelaşi tip (obţinute prin permutări ci
sumăm şi rezultă inegalitatea dorită.

L121. *Fie $n\in\mathbb{N}^*$ dat. Să se arate că există câţiva termeni ai şirului $\Big($
a căror sumă este mai mare decât $\frac{1}{(n+1)(2n+1)}$.*

Dumitru Mihalache şi Marian Tetiv

Soluţie. Notăm $S_n=1+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{n^3}$ suma parţială a seriei armonice d
3, deci supraunitar. Rezultă că şirul $\left(S_n\right)_{n\geq 1}$ este convergent; fie S limita
a rezolva problema, ar trebui să dovedim că $\lim\limits_{k\to\infty}\left(S_{n+k}-S_n\right)>\frac{}{(n+1}$

deci că $S > S_n + \dfrac{1}{(n+1)(2n+1)}$, $\forall n \geq 1$. Evident, pentru asta ar fi s

dovedim că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = S_n + \dfrac{1}{(n+1)(2n+1)}$, $\forall n \geq 1$ (a cărui

tot S) este strict crescător, fapt care rezultă după un calcul simplu:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+2)(2n+3)} - \frac{1}{(n+1)(2n+1)} =$$

$$= \frac{3n^2+5n+1}{(n+1)^3(n+2)(2n+1)(2n+3)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Notă. Principial, aceeaşi soluţie a dat **Vlad Emanuel**, student, Buc

L122. *La un campionat de fotbal participă* 2^n *echipe, astfel încât din două se poate dinainte indica echipa mai bună. În prima etapă, echipele aleator în perechi şi dispută câte un meci, echipa mai bună trecând în etapa Procedeul se repetă până la finală.*

a) Care este probabilitatea ca a doua echipă ca valoare să iasă vicecam

b) Dacă se dispută şi o finală mică, ce probabilitate este ca, în plus, cea echipă ca valoare să se claseze pe locul 3*?*

Irina Mustaţă, studentă

Soluţie. Numerotăm echipele de la 1 la 2^n, 1 fiind cea mai bună numărul modalităţilor distincte (ignorând permutările) de a împărţi $2n$ e perechi. Din $2n$ numere, o pereche se poate alege în C_{2n}^2 moduri, următoar în C_{2n-2}^2 moduri, etc. Îgnorând permutările implicate, obţinem că

$$P_{2n} = \frac{1}{n!} C_{2n}^2 C_{2n-2}^2 \cdots C_2^2 = \frac{(2n)!}{2^n n!} = (2n-1)!!$$

a) În prima etapă, numărul cazurilor posibile este P_{2^n}. Cazurile n sunt cele în care este selectată perechea $(1,2)$, în număr de P_{2^n-2}; număru favorabile va fi $P_{2^n} - P_{2^n-2}$. Continuând raţionamentul, probabilitatea eve cerut este

$$P = \frac{\prod\limits_{i=2}^{n} (P_{2^i} - P_{2^i-2})}{\prod\limits_{i=1}^{n} P_{2^i}} = \frac{\prod\limits_{i=2}^{n} (2^i-3)!! \cdot 2 \cdot \left(2^{i-1}-1\right)}{\prod\limits_{i=2}^{n} (2^i-1)!!} = \frac{2^{n-1}}{2^n-1}$$

b) În semifinale avem permise doar împerecherile $(1,3)$, $(2,4)$ sau (1 iar într-o etapă anterioară sunt interzise meciurile $(1,2)$, $(1,3)$ şi $(2,3)$. N repartizări convenabile într-o etapă cu 2^i echipe este $P_{2^i} - 3P_{2^i-2}$ şi atunc itatea cerută va fi

$$P' = \frac{2\prod\limits_{i=3}^{n} (P_{2^i} - 3P_{2^i-2})}{\prod\limits_{i=2}^{n} P_{2^i}} = \frac{2\prod\limits_{i=3}^{n} (2^i-3)!! \cdot 4 \cdot \left(2^{i-2}-1\right)}{\prod\limits_{i=2}^{n} (2^i-1)!!} = \frac{2^{2n-}}{(2^n-1)(2}$$

Notă. Principial, aceeaşi soluţie a dat **Vlad Emanuel**, student, Buc

L123. *Pe o tablă 8×9 se aşează dreptunghiuri 3×1 şi "figuri" de forma unui dreptunghi 1×3 căruia îi lipseşte pătratul median (ca în desenul alăturat). "Figurile" şi dreptunghiurile nu se pot roti şi nu au puncte interioare comune. Să se arate că există o mulţime S de 18 pătrate 1×1 astfel încât, dacă pe tablă rămân 2 pătrate neacoperite de dreptunghiuri sau "figuri", atunci cele două pătrate sunt obligatoriu din S*

Gabriel Dospinescu, stude

Soluţie. Numerotăm pătratele tablei cu $(1,1)$, $(1,2)$, $\ldots$, $(8,9)$ şi pătratul (k,j) numărul $\varepsilon^k i^j$, unde ε şi i sunt rădăcinile primitive de ordin 3 4 ale unităţii. Cum $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$ şi $i^2=-1$, suma numerelor din orice sau "figură" va fi 0. Suma tuturor numerelor de pe tablă este $\sum\limits_{1\leq k\leq 8,1\leq}$

$\left(\sum\limits_{k=1}^{8}\varepsilon^k\right)\left(\sum\limits_{j=1}^{8}i^j\right)=-i$. Să presupunem că au rămas pătratele (a_1,b_1)

scriind în două moduri suma numerelor de pe tablă, obţinem că $\varepsilon^{a_1}i^{b_1}+\varepsilon$
Notăm $z_1=\varepsilon^{a_1}i^{b_1-1}$, $z_2=\varepsilon^{a_2}i^{b_2-1}$ şi vom avea că $|z_1|=|z_2|=1$, iar z_1
Deducem că $\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}=-1$ şi de aici $z_1^3=z_2^3=1$. Astfel, $i^{3(b_1-1)}=i^3$
adică $b_1\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4)$ şi $b_2\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4)$. Cum $\varepsilon^{a_1}+\varepsilon^{a_2}=-1$, rezultă că a
resturile 1 şi 2 la împărţirea cu 3. Vom considera S ca mulţimea pătra
intersecţiile liniilor 1, 2, 4, 5, 7, 8 cu coloanele 1, 5, 9 şi rezolvarea este în

L124. *Fie $n\in\mathbb{N}^*$ fixat. Determinaţi matricele $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ p ${}^t\left(\overline{A}\right)\cdot A=I_n$, iar $A^{2007}+A+I_n=O_n$ (cu $\bar{\cdot}$ am notat operaţia de conju*

Vlad Emanuel, e

Soluţie. Demonstrăm întâi două rezultate ajutătoare:

Lema 1. *Dacă ${}^t\left(\overline{A}\right)\cdot A=I_n$, atunci toate valorile proprii ale matri de modul 1.*

Demonstraţie. Pentru $X=(x_i)_{n\times 1}$, $Y=(y_i)_{n\times 1}$ definim un pro complex prin $\langle X,Y\rangle=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\cdot\overline{y_i}$ (proprietăţile produsului scalar se verific
Dacă $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, avem

$$\langle AX,Y\rangle=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)\overline{y_i}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_j\overline{y_i}=\sum_{j=1}^{n}x_j\sum_{i=1}^{n}\overline{\overline{a_{ij}}y_i}=\left\langle X,{}^t(\right.$$

Fie λ valoare proprie a lui A, deci $AX=\lambda X$, cu $X\neq O_{n,1}$. Atunci

$$\langle AX,AX\rangle=\left\langle X,{}^t\left(\overline{A}\right)AX\right\rangle=\langle X,X\rangle\Rightarrow\langle\lambda X,\lambda X\rangle=\langle X,X\rangle\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\lambda\overline{\lambda}\langle X,X\rangle=\langle X,X\rangle\Rightarrow\lambda\overline{\lambda}=1\Rightarrow|\lambda|=1.$$

Lema 2. *Fie $x\in\mathbb{C}$ cu $|x|=1$ şi $x^n+x+1=0$; atunci $n-2\,\vdots\,3$.*

Demonstraţie. Fie $x=a+bi$, cu $a,b\in\mathbb{R}$, $a^2+b^2=1$. Avem:

$$|1+x|=|-x^n|=|x^n|=1\Rightarrow(a+1)^2+b^2=1\Rightarrow a^2=(a+1)^2\Rightarrow a$$

şi apoi găsim că $b=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. În ambele cazuri $x^3=1$, iar $1+x+x^2=0$, p

$x^n - x^2 = 0$, de unde $x^{n-2} = 1$, adică $n - 2 \vdots 3$.

Revenim la problemă. Fie λ o valoare proprie pentru A; atunci matrice
va avea ca valoare proprie pe $\lambda^{2007} + \lambda$. Însă $\det\left(A^{2007} + A - (-1)\, I_n\right) =$
deci -1 este valoare proprie pentru $A^{2007} + A$, prin urmare există $\lambda \in \mathbb{C}$
$\lambda^{2007} + \lambda = -1$. Din Lema 1 deducem că $|\lambda| = 1$, iar din Lema 2 rezu
$2007 - 2 = 2005 \vdots 3$, fals. În concluzie, nu există matrice A cu proprietăţil

L125. *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie periodică şi lipschitziană (există L care $|f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$), iar $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir strict cr $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$. Să se arate că mulţimea punc ale şirului $(f(x_n))_{n\geq 1}$ coincide cu* $\operatorname{Im} f$.

Paul Georgescu şi Gabriel

Soluţie. Fie $\alpha \in \operatorname{Im} f$; din periodicitatea funcţiei, există $\beta > 0$ $\alpha = f(\beta)$. Fie $T > 0$ o perioadă a lui f. Notăm $\varepsilon_n = x_n - x_{n-1}$, $\forall n$ $(\varepsilon_n)_{n\geq 2}$ are limita 0. Pentru $k \in \mathbb{N}^*$ oarecare, notăm cu n_k primul indic care $x_n \geq \beta + kT$; existenţa şi unicitatea lui n_k sunt asigurate de faptul este strict crescător, cu limita $+\infty$. Cum n_k este primul indice cu proprieta atunci $x_{n_k} \leq \beta + kT + \varepsilon_{n_k}$. Astfel, $x_{n_k} \in I_k$, unde $I_k = [\beta + kT, \beta + kT$ interval de lungime ε_{n_k}.

Din lipschitzianitatea funcţiei, deducem că $f(x_{n_k})$ aparţine unui int $[u_k, v_k]$: f este continuă, deci transportă compactul I_k în compactul J_k, $\inf\{f(x) \mid x \in I_k\}$, iar $v_k = \sup\{f(x) \mid x \in I_k\}$. În plus, lungimea lui păşeşte $L \cdot \varepsilon_{n_k}$, iar J_k conţine $\alpha = f(\beta)$. Pentru $k \to \infty$, aplicând criteriu obţinem că $f(x_{n_k}) \to \alpha$, ceea ce trebuia demonstrat.

Notă. Soluţie corectă a dat **Vlad Emanuel**, student, Bucureşti.

Diplomă de excelenţă

acordată de către Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Tineretulu

MARIUS TIBA

Pentru rezultatele deosebite obţinute la olimpiadele internaţionale des anul şcolar 2006 - 2007, elevul **Marius Tiba**, acum în cl. a IX-a, C. N. "C din Iaşi, a fost distins cu o ***diplomă de excelenţă*** de către M. E. C. T.

Principalele rezultate obţinute în perioada menţionată sunt: **medalia** la *Balcaniada de Matematică - juniori* (Sofia, iunie 2007), **medalia** *Olimpiada Naţională de Matematică* (aprilie 2007), **medalia de aur** *tip O.I.M.* (Vâlcea, aprilie 2007), **diploma "Marele merit"** pentru punc obţinut la *Concursul "Cristian Calude"* (Galaţi, noiembrie 2006), **premiu** *cursul "Fl. T. Câmpan"*, etapa judeţeană (Iaşi, februarie 2007), *diplomă pe deosebite în colaborarea cu revista "Recreaţii Matematice"*.

Să mai spunem că, la sfârşitul anului şcolar 2006-2007, ca elev în cl. primit **premiul I** pentru rezultate la învăţătură şi purtare.

Redacţia revistei "Recreaţii Matematice" felicită călduros pe tale **Marius Tiba** *şi îi adresează pe acestă cale urări de sănătate deplină şi în egală măsură, în anii ce urmează.*

Probleme propuse[1]

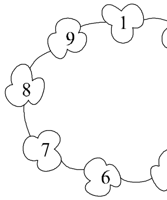
Clasele primare

P.144. Elevii clasei I intră în clasă în rând câte unul. Câţi elevi sunt în
Matei este al 12-lea când se numără începând din faţă şi al 16-lea când
începând din spate.

(*Clasa I-a*) **Înv. Eleva P**

P.145. Un fluture zboară din floarea 1 în floarea 3, apoi din aceasta în floarea 5 şi aşa mai departe (figura 1). După câte zboruri ajunge în floarea de pe care a plecat?

(*Clasa I-a*) **Evelina Zaporojanu, elevă, Iaşi**



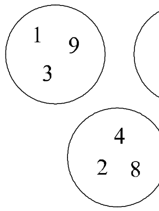
Figura

P.146. După ce fratele meu mi-a dat un sfert din merele sale, le-am amestecat cu cele 6 ale mele şi pe acestea le-am aşezat pe două farfurii cu câte 5 mere fiecare. Câte mere are fratele meu?

(*Clasa a II-a*) **Inst. Elena Nuţă, Iaşi**

P.147. Dacă numerele ar fi puse corect în cele trei cercuri, atunci am avea aceeaşi sumă a celor aflate în fiecare dintre cercuri (figura 2). În câte moduri pot fi aşezate corect aceste numere?

(*Clasa a II-a*) **Cătălina Istrate, elevă, Iaşi**



Figura

P.148. Aflaţi valoarea a ştiind că $100-99:99-98:98-97:97-\cdots-$

(*Clasa a III-a*) **Mariana Nastasia, e**

P.149. Irina îi spune Mioarei:

– Dă-mi 2 lei ca să am şi eu cât tine!

Mioara îi răspunde:

– Dă-mi tu 2 lei ca eu să am o sumă de 2 ori mai mare decât suma ce
ţie!

Ce sumă a avut la început fiecare fată?

(*Clasa a III-a*) **Inst. Maria**

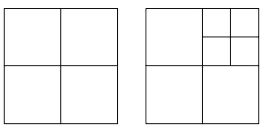
P.150. Romanul Harry Potter are 7 volume. Ştiind că fiecare volum, în
al doilea, are cu 144 pagini mai puţin decât dublul numărului de pagini al
precedent, iar al treilea volum are 176 de pagini, aflaţi câte pagini are între

(*Clasa a III-a*) **Robert Vicol,**

P.151. Descoperiţi regula de formare a şirului 1, 3, 6, 10, 15, 21, . .
numărul de pe locul 2008.

(*Clasa a IV-a*) **Petru As**

P.152. În şirul de pătrate egale, fiecare pătrat este împărţit în pătrate mai mici, după o anumită regulă.



a) Arătaţi că nu există în acest şir un pătrat împărţit în 23 pătrate mai mici;

[1] Se primesc soluţii până la data de 31 decembrie 2008.

b) Arătaţi că există în şir un pătrat împărţit în 2008 pătrate mai mici

(*Clasa a IV-a*) **Ana Tăbăcaru, e**

P.153. O veveriţă transportă nişte alune la scorbura sa în 6 ore, ia
acelaşi lucru în 3 ore. În câte ore cele două veveriţe ar transporta alunele

(*Clasa a IV-a*) **Alexandru-Dumitru Chiriac,**

Clasa a V-a

V.88. O secvenţă de numere este formată din multipli consecutivi ai
încât suma dintre primul şi ultimul număr este 280, iar suma ultimelor do
este 508. Arătaţi că media aritmetică a tuturor numerelor este termen a
considerate.

Mirela M

V.89. Determinaţi cifrele x, y, z pentru care $\overline{xy}^2 + \overline{xz}^2 = \overline{168x}$.

Ioan Săcălean

V.90. Fie $E(n) = 3^n + 5^n$, $n \in \mathbb{N}$. Aflaţi ultimele două cifre ale numer
şi $E(2008)$.

Mihaela Bucă

V.91. Să se arate că 61^n, $n \in \mathbb{N}^*$, se poate scrie atât ca sumă, cât şi c
de două pătrate perfecte nenule.

Alexandru Negrescu, stu

V.92. Demonstraţi că $\frac{2^2}{1} + \frac{3^2}{2} + \frac{4^2}{3} + \cdots + \frac{17^2}{16} > 171$.

Petru As

V.93. Fie $A = \{2, 3, 4, \ldots, 50, 52, 53, 100\}$. Folosind fiecare element al
o singură dată, fie ca numărător, fie ca numitor, se scriu 49 de fracţii. D
că măcar una dintre aceste fracţii este reductibilă.

Gabriel

V.94. Fie A mulţimea acelor numere naturale cel mult egale cu 2008, ca
cu 2, dar nu se divid cu 6. Dacă scriem elementele lui A în ordine desc
care este al 322-lea număr?

Enache Pătraşcu

Clasa a VI-a

VI.88. Fie a, b, c, d numere raţionale pozitive astfel încât $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
$\frac{c+1}{d+1}$. Să se arate că $\frac{a+x}{b+x} = \frac{c+x}{d+x}$, $\forall x \in \mathbb{Q}_+$.

Claudiu-Ştefan

VI.89. Arătaţi că numărul $N = 1^{2007} + 2^{2007} + \cdots + 2008^{2007}$ se divid

Cătălin Cal

VI.90. Să se determine numerele naturale cu proprietatea că atât
răsturnatele lor se scriu ca produs de doi factori primi, fiecare factor a
cifre şi fiind răsturnatul celuilalt.

Temistocle Bî

VI.91. Considerăm numerele scrise în baza 8: $a_1 = 0,0(4)_{(8)}$; $a_2 =$

$\ldots;\ a_n = 0,0(\underbrace{00\ldots0}_{n-1}4)_{(8)}$. Să se arate că numărul $N = \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots$
divizibil cu $14_{(10)}$.

Vasile Chiri

VI.92. De o parte şi de alta a unei drepte AB se consideră puncte astfel încât $\triangle ABM \equiv \triangle ABN$, $m(\widehat{MAN})+m(\widehat{MBN}) = 180°$, iar $[AB]\cap$ Să se arate că B este ortocentrul $\triangle AMN$.

Petru As

VI.93. Fie $ABCD$ un patrulater convex cu $m(\widehat{A}) = m(\widehat{B}) = 80°$ şi A DA şi astfel încât există $F \in (BC)$ pentru care $m(\widehat{BAF}) = 20°$.

a) Demonstraţi că $\triangle AFD$ este echilateral.

b) Determinaţi măsurile unghiurilor $\widehat{C}$ şi $\widehat{D}$.

Cristian L

VI.94. Un joc are trei beculeţe. Primul se aprinde la fiecare două se doilea se aprinde prima dată la o secundă după aprinderea primului, apo trei secunde. Al treilea se aprinde prima dată la a două aprindere a primu fiecare 5 secunde. În primele 10 minute de funcţionare, de câte ori cele tr sunt aprinse simultan?

Gabriel I

Clasa a VII-a

VII.88. Fie x, y, z numere reale distincte, iar $a = (x-y)(y-z)$, $b = (y$ $c = (z-x)(x-y)$. Să se arate că exact două dintre numerele a, b, c sun iar al treilea este pozitiv.

Ovidiu Pop, S

VII.89. Determinaţi cifrele x, y, z pentru care $\sqrt{\overline{14xyzx5}} \in \mathbb{Q}$.

Damian Marinescu, T

VII.90. Rezolvaţi în numere întregi ecuaţia $4^x = 5y + 4$.

Ion Vişan

VII.91. Fie $a \in \mathbb{N}^*$, $a \leq 98$, iar $n = \dfrac{1}{a\,(a+1)} + \dfrac{1}{(a+1)\,(a+2)} + \cdots$
Demonstraţi că n nu poate fi pătratul unui număr raţional.

Gheorghe I

VII.92. În trapezul $ABCD$ cu baza mare $[CD]$, diagonala BD este b unghiului $\widehat{ABC}$. Perpendiculara în B pe diagonala BD intersectează drea E. Să se arate că dreapta CE trece prin mijlocul laturii $[AB]$.

Dan Nedeianu, Dr. Tr

VII.93. Pe latura $[AB]$ a triunghiului ABC se consideră punctul M $m = AM$, $n = BM$. Paralela prin M la AC taie BC în N, iar paralela pri taie AC în P. Fie $S_1 = \mathcal{A}_{BMN}$, $S_2 = \mathcal{A}_{CNP}$, $S = \mathcal{A}_{ABC}$, iar $x = \dfrac{m}{n}$. Să raportul $\dfrac{S_1 + S_2}{S}$ în funcţie de x şi să se afle x pentru care acest raport e

Adrian Cordun

VII.94. Determinaţi poligoanele regulate care au proprietatea că c vârfuri ale lor determină un triunghi isoscel.

Gheorghe I

Clasa a VIII-a

VIII.88. Fie $A = \{1, 3, 5, \ldots, 2n-1\}$, iar S_1 şi S_2 reprezintă suma e lui A, respectiv suma pătratelor elementelor lui A. Să se determine $n \in$ care $S_2 - 3 \cdot |A| \geq S_1$.

Laurenţiu Modan,

VIII.89. Demonstraţi că $\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+2} + \cdots + \sqrt{n^2+2n} < \frac{4n^2}{}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Lucian Tuţescu

VIII.90. Demonstraţi că mulţimea $A = \{x \mid x = 27^{6n+2} + 3^{12n+5} +$ nu conţine numere prime.

Damian Marinescu, T

VIII.91. Se consideră funcţia $f : \{1, 2, \ldots, 2008\} \to \mathbb{N}$ care asociază un n al domeniului, numărul divizorilor săi naturali.

a) Determinaţi n pentru care $f(n) = 7$.

b) Aflaţi valoarea maximă a funcţiei.

c) Dacă $f(n) + f(m) + f(p) = 33$, arătaţi că măcar unul dintre num sau p este pătrat perfect.

Monica Ned

VIII.92. Să se arate că pentru orice număr întreg impar n, există naturale a şi b astfel încât $a(a+2n) = b(b+2n)$.

Constantin Apostol, R

VIII.93. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped oarecare şi O, O' p intersecţie a diagonalelor bazelor. Se notează cu G_A şi $G_{A'}$ centrele de g $\triangle BCD$ şi, respectiv, $\triangle B'C'D'$ şi cu A_1 mijlocul segmentului $[G_A G_{A'}]$. G_B, $G_{B'}$ şi B_1 etc. se introduc în mod similar. Arătaţi că dreptele AA_1, DD_1 sunt concurente într-un punct P situat pe OO' şi precizaţi poziţi $[OO']$.

Temistocle Bî

VIII.94. Fie $VA_1A_2\ldots A_n$ o piramidă regulată; notăm cu $\mathcal{P}$ poligonul şi fie $U = \left\{ m(VM, \widehat{(A_1A_2A_3)}) \mid M \in \mathcal{P} \right\}$. Demonstraţi că $\max U < 2\,\mathrm{mi}$

Claudiu-Ştefan

Clasa a IX-a

IX.86. Fie O mijlocul ipotenuzei $[BC]$ a triunghiului dreptunghic A cercului înscris, iar R_1 şi R_2 razele cercurilor cirscumscise triunghiurilor spectiv AOC. Să se demonstreze că $\sqrt{R_1 R_2} \geq \dfrac{a^2}{2a+4r}$.

D. M. Bătineţu-Giurgiu,

IX.87. Demonstraţi că într-un triunghi ascuţitunghic, cu notaţiile loc inegalitatea

$$\frac{a}{b^4+c^4}+\frac{b}{c^4+a^4}+\frac{c}{a^4+b^4}<\frac{3}{4Rrp}.$$

Gheorghe Molea, Curtea

IX.88. Demonstraţi că $15\cdot 25^n+32\cdot n^2+120n-15\,\vdots\,128$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Lucian Tuţescu

IX.89. Să se arate că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ are loc inegalitatea

$$1+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(3n-1)^2}\right)>\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{}{3n}$$

Titu Zvonaru, C

IX.90. Să se determine toate şirurile de numere reale $(a_n)_{n\geq 0}$ cu prop $a_{n+m}+a_{n-m}=a_{3n}+n$, $\forall n,m\in\mathbb{N}$.

I. V. Maftei, Bucureşti şi Mihai Ha

Clasa a X-a

X.86. Aflaţi $x,y\in\mathbb{R}_+^*$ pentru care $\lg^2\dfrac{x}{y}=3\lg\dfrac{x}{3}\lg\dfrac{3}{y}$.

A. V. Mihai,

X.87. Fie $A\subset\mathbb{N}$ şi $f:A\to A$ o funcţie injectivă; notăm $f_n=\underbrace{f\circ$

Determinaţi f, ştiind că există $p,q\in\mathbb{N}^*$ numere prime între ele astfel înc $f_q(x)=2x$, $\forall x\in A$.

Romeo Ili

X.88. Fie $ABCD$ un paralelogram, iar M şi N mijloacele laturilor $(B$ tiv (CD). Dacă $AM=BN$ şi $AM\perp BN$, arătaţi că $ABCD$ este pătrat.

Gheorghe I

X.89. În planul complex se consideră punctele $A(3i)$, $B(4)$, iar M est variabil de modul 1.

a) Determinaţi locul geometric al punctului N cu proprietatea că tr AOB şi AMN sunt asemenea şi la fel orientate.

b) Găsiţi punctele N_1, N_2 ale locului ce se plasează pe segmentele $[BA$ $[BO]$, precum şi punctelor M_1, M_2 din care provin.

Dan Brâ

X.90. Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variabile aleatoare independente, fiecare luând valorile -1 şi 1 cu probabilităţile p, respectiv q. Considerăm $Y=$ $\cdots+X_n$.

a) Să se calculeze media şi dispersia lui Y.

b) Să se precizeze care este valoarea luată de Y cu probabilitate maxi

Petru M

Clasa a XI-a

XI.86. Fie $n\in 2\mathbb{N}^*$ şi $A\in\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$; arătaţi că numerele $\det\left(A^{n+}\right.$ $\det(A-I_m)$ au acelaşi semn.

Romanţa Ghiţă şi Ioan Gh

XI.87. Studiaţi convergenţa şirurilor $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$, unde

$$a_n = \frac{2008+\cos\sqrt{n}}{2008+\cos\sqrt{n+1}}, \quad b_n = \frac{2009+\cos\sqrt{n}}{2008+\cos\sqrt{n+1}}, \quad \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Liviu Smarandache

XI.88. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin: $x_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $x_{n+1} = 2\,\mathrm{tg}\, x$
$\forall n\in\mathbb{N}^*$. Studiaţi existenţa limitelor $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$.

Dan Popescu

XI.89. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1^2\sin 1}+\frac{1}{2^2\sin\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{1}{n^2\sin\frac{1}{n}}\right)$.

Silviu

XI.90. Există funcţii polinomiale $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care să aibă exact n
distincte $a_1, a_2, \ldots, a_n\in\mathbb{R}$ şi astfel încât pentru fiecare $1\leq j\leq n$, ecuaţia
să aibă soluţie reală unică?

Marian Tetiv

Clasa a XII-a

XII.86. Fie $c\in\mathbb{R}^*$, iar $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}_+^*$ funcţii continue astfel încât $f($
$g(x)$, $\forall x\in[a,b]$. Să se determine $y\in[a,b]$ pentru care

$$\int_a^b \frac{[f(x)]^{g(x)}}{[f(x)]^{g(x)}+[g(x)]^{f(x)}}dx = c\int_y^{a+b-y}\frac{[g(x)]^{f(x)}}{[f(x)]^{g(x)}+[g(x)]^{f(x)}}d$$

D. M. Bătineţu-Giurgiu,

XII.87. *a*) Fie $f:[0,a]\to\mathbb{R}$ derivabilă cu derivata continuă, astfel în
0. Să se arate că $\left(\int\limits_0^a f(t)\,dt\right)^2 \leq \frac{a^3}{3}\int\limits_0^a [f'(t)]^2\,dt$. Pentru ce funcţii se
egalitatea?

b) Fie $f:[0,a]\to\mathbb{R}$ de două ori derivabilă cu f'' continuă, astfel înc
$f'(a)=0$. Să se arate că $\left(\int\limits_0^a f(t)\,dt\right)^2 \leq \frac{a^5}{20}\int\limits_0^a (f''(t))^2\,dt$. Pentru ce
realizează egalitatea?

Adrian Corduneanu

XII.88. Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi să se afle limit
$a_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2-n^2}{n^2}\ln\frac{k+n}{k}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Laurenţiu Modan,

XII.89. Să se arate că polinomul $f = 200X^5+196X^4-49X^3+35X^2$
este reductibil peste $\mathbb{Q}$.

Mihai Ha

XII.90. Fie $\mathbb{H}$ corpul cuaternionilor, iar i, j, k unităţile cuaternionice
$k^2=-1$, $ij=-ji=k$, $jk=-kj=i$, $ki=-ik=j$). Definim

$$\mathbb{K} = \left\{a+\frac{b+c\sqrt{3}}{2}i+\frac{b\sqrt{3}-c+2d\sqrt{3}}{4}j+\frac{3b-c\sqrt{3}-2d}{4}k \mid a,b,c,d\right.$$

pe care considerăm operaţiile uzuale între cuaternioni. Să se arate că în
obţinem un corp necomutativ, izomorf cu corpul cuaternionilor.

Dumitru Mihalach

Probleme pentru pregătirea concursurilo

A. Nivel gimnazial

G136. Determinaţi numerele reale x, y, z, pentru care

$$2^{-x}+3\cdot 2^{-y}+2^{-z}=2^{x}+3\cdot 2^{y+2}+2^{z+2}=9.$$

Andrei Ned

G137. Fie $a, b, c \in \mathbb{Q}_{+}^{*}$ şi $\lambda=\dfrac{2\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$. Să se exprime în func
c şi λ numărul real $\mu=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}}{2\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$.

I. V. Maftei, Bucureşti şi Mihai Ha

G138. *a*) Numerele reale pozitive a, b, c sunt astfel încât $4abc = a +$
Să se arate că $\dfrac{b^2+c^2}{a}+\dfrac{c^2+a^2}{b}+\dfrac{b^2+a^2}{c}\geq 2\,(ab+bc+ca)$.

b) Numerele reale pozitive a, b, c sunt astfel încât $\dfrac{b^2+c^2}{a}+\dfrac{c^2+a^2}{b}+$
$2\,(ab+bc+ca)$. Să se arate că $a+b+c+1\leq 4abc$.

Andrei Laurenţiu Ciupan, elev, I

G139. Denisa sccrie pe tablă numerele 1, 2, 3, . . . , 2008. Ea alege dou
le şterge de pe tablă şi scrie în loc modulul diferenţei lor, repetând aceas
până când pe tablă rămâne un singur număr. Poate proceda Denisa în a
numărul rămas să fie 2007? Dar 2008?

Julieta Grig

G140. Un poligon cu n laturi este împărţit în $n-2$ triunghiuri cu ajut
diagonale ale sale care nu se intersectează în puncte interioare (o astfel de
se numeşte *triangulaţie* a poligonului). Notăm cu T_0 numărul triunghiuril
laturi sunt toate diagonale ale poligonului şi cu T_2 numărul triunghiuril
câte două laturi care sunt laturi şi pentru poligon, iar a treia latură d
poligonului. Să se arate că $T_2 = T_0 + 2$.

Marian Tetiv

G141. Se consideră o reţea de drepte care formează prin intersec
congruente. Marcăm $2n+1$ vârfuri ale unor astfel de pătrate, $n\geq 2$, a
orice dreaptă din reţea să conţină cel mult un punct marcat. Să se arat
măcar două puncte marcate care sunt separate atât pe orizontală, cât şi pe
de câte un număr impar de drepte ale reţelei.

Petru As

G142. Spunem că vârful A al triunghiului ABC are proprietatea (P) d
BC, $\forall X \in (BC)$. Să se arate că dacă fiecare vârf al $\triangle ABC$ are proprie

atunci triunghiul este echilateral.

Doru B

G143. Considerăm triunghiul ABC, iar D, D' sunt puncte pe dreapta încât $\widehat{CAD} \equiv \widehat{ABC}$, iar $\widehat{BAD'} \equiv \widehat{ACB}$. Bisectoarele interioare ale unghiu şi $\widehat{CAD'}$ taie dreapta BC în E, respectiv F. Să se arate că cercul circumsc şi cercul înscris în $\triangle ABC$ sunt concentrice.

Neculai Roman, Mirc

G144. Fie $ABCD$ un patrulater cu $AB = BC$. Să se arate că m $m(\widehat{BCD}) = 90°$ dacă şi numai dacă $AB^2 \cdot CD^2 + AD^2 \cdot BC^2 = AC^2 \cdot BI$

Ioan Săcălean

G145. Se consideră triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC$, iar pe ar $\overset{\frown}{BC}$ care nu-l conţine pe A al cercului circumscris triunghiului se ia un pu se arate că

$$\sqrt{MB \cdot MC} < MA < \sqrt{MB \cdot MC} + \frac{AB \cdot AC}{\sqrt{MB \cdot MC}}.$$

Gheorghe Cost

B. Nivel liceal

L136. Fie A, B, C trei puncte pe sfera $\mathcal{S}$ de centru O, iar M_1 ş puncte exterioare sferei astfel încât OM_1 şi OM_2 să intersecteze planul două puncte interioare $\triangle ABC$. Dacă $M_1A \geq M_2A$, $M_1B \geq M_2B$ şi M_1 să se arate că $M_1O \geq M_2O$.

Cătălin Ţigăeru

L137. Considerăm $\triangle ABC$ înscris în cercul $\mathcal{C}$ şi fie $\mathcal{C}_1$ cercul de centru C la AB, BC şi la cercul $\mathcal{C}$ în M, K, respectiv L. Paralela prin B la MK in dreptele LM şi LK în R, respectiv S. Să se arate că unghiul $\widehat{RO_1S}$ este

Neculai Roman, Mirc

L138. Fie ABC un triunghi cu $AB \neq AC$, $m(\widehat{A}) < 90°$, unghiul $\widehat{A}$ fii mare al triunghiului. Notăm cu M mijlocul lui $[BC]$ şi T punctul de in simedianei din A cu mediatoarea lui $[BC]$. Să se arate că $2AM < AT$.

Titu Zvonaru, Comăneşti şi Cristian Pr

L139. Fie $A_1A_2 \cdots A_n$ un poligon regulat, iar M un punct variabil în sau pe laturile poligonului. Să se determine maximul produsului $f(M)$ $MA_2 \cdot \cdots \cdot MA_n$, precum şi punctele M care realizează acest maxim, în cazurile: $a)$ $n = 3$; $b)$ $n = 6$.

Dumitru Mihalache şi Marian Tetiv

L140. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât $(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2 + (a+b)(b+c$ Să se arate că $\dfrac{a}{bc} + \dfrac{b}{ca} + \dfrac{c}{ab} \geq \dfrac{a+b}{c} + \dfrac{b+c}{a} + \dfrac{c+a}{b}$.

Andrei Vrăjitoarea, elev

L141. Dacă x, y, z sunt numere reale pozitive cu $x^3 + y^3 + z^3 = 3$, at

$$\frac{x+2}{2x^2+1}+\frac{y+2}{2y^2+1}+\frac{z+2}{2z^2+1}\geq 3.$$

Titu Zvonaru, Comăneşti şi Nela Cice

L142. Considerăm $n \in \mathbb{N}^*$, numerele reale strict pozitive $a_1 < a_2$
şi A mulţimea tuturor sumelor $\pm a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n$, unde semnele se ale
modurile posibile. Arătaţi că $|A| > \dfrac{n^2+n+2}{2}$ şi determinaţi numerele
care se atinge egalitatea.

Gheorghe I

L143. Să se arate că pentru p număr natural prim şi $m, n \in \{0, 1,$
$m > n$, avem $\binom{2p+m}{2p+n} \equiv 2\binom{p+m}{p+n} - \binom{m}{n} \pmod{p^2}$.

Marian Tetiv

L144. Fie $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$; definim şirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ prin: $x_1 =$
$x_{n+1} = \sqrt{p(p-1)+x_n}$, $y_n = \left\{2^n p^{n-1} x_n\right\}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, unde $\{\cdot\}$ desemne
fracţionară. Să se arate că şirul (y_n) este strict monoton.

Sorin Puşpană

L145. Fie $0 < \alpha < \beta$; definim şirurile $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$ prin $x_0 =$
$x_{n+1} = \int\limits_{x_n}^{y_n} e^{-\frac{\alpha^2}{t^2}}dt$, $y_{n+1} = \int\limits_{y_n}^{x_n} e^{-\frac{\beta^2}{t^2}}dt$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Arătaţi că cele două
convergente şi aflaţi limitele lor.

Marius Ap

Training problems for mathematical conte

A. Junior highschool level

G136. Determine the real numbers x, y, z satisfying the equation

$$2^{-x} + 3\cdot 2^{-y} + 2^{-z} = 2^x + 3\cdot 2^{y+2} + 2^{z+2} = 9.$$

Andrei Ned

G137. Let us consider $a, b, c \in \mathbb{Q}_+^*$ and $\lambda = \dfrac{2\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$. It is
express, in terms of a, b, c and λ, the real number $\mu = \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}}{2\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$.

I. V. Maftei, Bucureşti and Mihai Ha

G138. *a*) The positive real numbers a, b, c satisfy the equation $4abc =$
Prove that $\dfrac{b^2+c^2}{a}+\dfrac{c^2+a^2}{b}+\dfrac{b^2+a^2}{c} \geq 2(ab+bc+ca)$.

b) The positive real numbers a, b, c satisfy the inequality $\dfrac{b^2+c^2}{a} +$
$\dfrac{b^2+a^2}{c} \leq 2(ab+bc+ca)$. Show that $a+b+c+1 \leq 4abc$.

Andrei Laurenţiu Ciupan, highschool student,

G139. Denise writes down on the blackboard the numbers 1, 2, 3, ..., chooses two numbers, deletes them from the blackboard and replaces th modulus of their difference, repeating this operation until a single numb on the blackboard. Can Denise proceed in such a way that the remaining 2007? What about 2008?

Julieta Grig

G140. A polygon with n sides is divided into $n-2$ triangles by means its diagonals that do not cut each other(s) at interior points (such a part called a *triangulation* of the polygon). Let us denote by T_0 the number whose sides are all diagonals of the polygon, and by T_2 the number of tria two of their sides being sides of the polygon as well, the third side being of the polygon. Prove that $T_2 = T_0 + 2$.

Marian Tetiv

G141. It is considered a network of straight lines that form congrue by intersecting themselves. We mark $2n+1$ corners of such squares, $n \geq$ any line in the network pass through at most one marked vertex point. at least two marked points exist such that they are separated, both along and vertical directions, by an odd number of lines in the network.

Petru As

G142. We say that the vertex A of the triangle ABC has the prop $AX < BC$, $\forall X \in (BC)$. Show that if each vertex of $\triangle ABC$ enjoys the pr then the triangle is equilateral.

Doru B

G143. We consider the triangle ABC with D, D' two points on the lin that $\widehat{CAD} \equiv \widehat{ABC}$, iar $\widehat{BAD'} \equiv \widehat{ACB}$. The interior bisectrices of the an and $\widehat{CAD'}$ cut the line BC at E, respectively F. Show that the circle circ to $\triangle AEF$ and the circle inscribed in $\triangle ABC$ are concentric.

Neculai Roman, Mirc

G144. Let $ABCD$ be a quadrilateral with $AB = BC$. Show that m $m(\widehat{BCD}) = 90°$ if and only if $AB^2 \cdot CD^2 + AD^2 \cdot BC^2 = AC^2 \cdot BD^2$.

Ioan Săcăleanu

G145. It is considered the isosceles triangle ABC with $AB = AC$ a M is taken on the open arc $\overset{\frown}{BC}$, which does not contain the corner A, o circumscribed to the triangle. Show that

$$\sqrt{MB \cdot MC} < MA < \sqrt{MB \cdot MC} + \frac{AB \cdot AC}{\sqrt{MB \cdot MC}}.$$

Gheorghe Cost

B. Highschool level

L136. Let A, B, C be three points on the sphere $\mathcal{S}$ of center O, whi M_2 are two exterior points with respect to the sphere S such that OM_1 intersect the plane (ABC) at two points that are interior to $\triangle ABC$. If M_1 $M_1B \geq M_2B$ and $M_1C \geq M_2C$, show that $M_1O \geq M_2O$.

Cătălin Ţigăeru

L137. We consider $\triangle ABC$ inscribed in the circle $\mathcal{C}$ and let $\mathcal{C}_1$ be th
center O_1, which is tangent to AB, BC and to the circle $\mathcal{C}$ at M, K, and re
L. The parallel line through B to MK intersects the lines LM and
respectively S. Show that the angle $\widehat{RO_1S}$ is acute.

Neculai Roman, Mirce

L138. Let ABC be a triangle with $AB \neq AC$, $m(\widehat{A}) < 90°$, the ang
the largest angle of this triangle. We denote by M the midpoint of $[BC]$
the intersection point of the simedian from A with the mid-perpendicula
Show that $2\,AM < AT$.

Titu Zvonaru, Comăneşti and Cristian Pr

L139. Fie $A_1A_2\cdots A_n$ be a regular polygon, and M a variable p
the polygon or on its sides. Determine the highest value of the product
$MA_1 \cdot MA_2 \cdot \cdots \cdot MA_n$, as well as the points M at which this maximum
in each of the cases: *a)* $n = 3$; *b)* $n = 6$.

Dumitru Mihalache and Marian Tetiv

L140. Let $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ be numbers such that $(a+b)^2 + (b+c)^2 +$
$(a+b)(b+c)(c+a) = 4$. Prove that $\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} \geq \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c}{}$

Andrei Vrăjitoarea, highschool student

L141. If x, y, z are real reale positive numbers with $x^3 + y^3 + z^3 = 3$

$$\frac{x+2}{2x^2+1} + \frac{y+2}{2y^2+1} + \frac{z+2}{2z^2+1} \geq 3.$$

Titu Zvonaru, Comăneşti and Nela Cice

L142. We consider $n \in \mathbb{N}^*$, the strictly positive real numbers $a_1 < a_2$
and $A =$ the set of all the sums $\pm a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n$, where the signs are ch
possible ways. Show that $|A| > \frac{n^2+n+2}{2}$ and determine the numbers a_n
the equality is achieved.

Gheorghe I

L143. Show that, for a prime natural number p and $m, n \in \{0, 1, .$
$m > n$, we have $\binom{2p+m}{2p+n} \equiv 2\binom{p+m}{p+n} - \binom{m}{n} \pmod{p^2}$.

Marian Tetiv

L144. Let $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$; we define the sequences $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$
$\sqrt{p(p-1)}$, $x_{n+1} = \sqrt{p(p-1) + x_n}$, $y_n = \{2^n p^{n-1} x_n\}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, where $\{$
the decimal (or fractional) part. Show that the sequence (y_n) is strictly n

Sorin Puşpană

L145. Let $0 < \alpha < \beta$; we define the sequences $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$ b
$y_0 = 0$, $x_{n+1} = \int\limits_{x_n}^{y_n} e^{-\frac{\alpha^2}{t^2}}\,dt$, $y_{n+1} = \int\limits_{y_n}^{x_n} e^{-\frac{\beta^2}{t^2}}\,dt$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Show that the two
are convergent and find their limits.

Marius Apo

Pagina rezolvitorilor

CRAIOVA

Colegiul Naţional "Carol I". **Clasa a VII-a** (prof. STANCA Monica). Ioan: VII(76-80), VIII(77-80), G(116-123).

Notă. În nr. 2/2007 a fost omisă localitatea **Craiova** la care fig STANCIU Ioan cu 11 probleme rezolvate corect. Ne cerem scuze pentru dent.

HÂRLĂU

Liceul "Ştefan cel Mare". **Clasa a V-a** (prof. SĂCĂLEANU Ioan). Carla: P(131,132), V(78,80), VI.78; CĂLINESCU Ana Maria: P(131,132) VI.78; HUŢANU Mădălina-Georgiana: P(131,132), V(76,78,80), VI.78; Bianca: P.131, V(76,78,80), VI.78; MITITELU Melisa: P(131,132), V(77, NEICU Mara: P.131, V(76-78), VI.78; SAVA Diana Alexandra: P(131,1 78), VI.78. **Clasa a VI-a** (prof. SĂCĂLEANU Ioan). BARĂU Larisa-Ion V(76-78), VI.76; BUZILĂ Andreea: P.131, V(76,77,80), VI.76; CEUC P.131, V(76,77), VI(76,78); IVĂNUŢĂ Andreea Simona: P.131, V(76,78), JITARIU Adina-Diana: P.131, V(76,77), VI(76,78); PINTILII Alina: P.13 VI(76,78); PLETAN Denisa Elena: P.131, V(76-78), VI.78.

IAŞI

Şcoala nr. 11 "Otilia Cazimir". **Clasa a III-a** (inst. HUZUM Lina) Laura: P(134,136-139); HUZUM Andrei: P(135-139); MĂRIUŢA Şimina: 139); STOIAN Ioana: P(135-139).

Şcoala nr. 13 "Alexandru cel Bun". **Clasa a IV-a** (inst. COJOCA AGAFIŢEI Elena-Roxana: P(134-136,138,139); CARAMALĂU Andra: 138,139); CĂLIN Andreea-Claudia: P(134-136,138,139); COJOCARIU P(134-136,138,139); DUDUMAN Luisa-Ştefania: P(134-136,138,139); L xandrina-Ştefana: P(134-136,138,139); LUPAŞCU Diana-Maria: P(134-13 MANOLACHE Mădălina-Andreea: P(134-136,138,139); MIHĂILĂ Narc P(134-136,138,139); PASCU Gabriela: P(134-136,138,139); PĂDURAR Ştefan: P(134-136,138,139); RĂDUCEA Marin-Andrei: P(134-136,138,13 Cristina-Simona: P(134-136,138,139); ŞTEFAN Bogdan-Vasile: P(134-13 ŞTIUBEI Cosmin-Ionuţ: P(134-136,138,139).

Şcoala nr. 14 "Gh. Mârzescu". **Clasa a III-a** (inst. NUŢĂ Elena). E dor: P(134-139); CHIRILUŢĂ George-Ştefan: P(134-139); POSTUDOR Mădălina: P(134-139); STOICA Adriana: P(134-139).

Şcoala nr. 26 "G. Coşbuc". **Clasa a III-a** (inst. RACU Maria). A Aura Georgiana: P(134-139); BURA Emma-Andreea: P(134-139); CIO xandra: P(134-139); CRĂCIUN Ioana-Daniela: P(134-139); FILIP Ingri P(134-139); GHEORGHIŢĂ Narcis-Eugen: P(134-139); HRISCU Ovidiu- P(134-139); HUZA Mădălina: P(134-139); MARICIUC Dragoş-Claudi 139); MAXIM Alexandra-Camelia: P(134-139); TUDOSE Ema-Alina: F ŢUCĂ Cosmin: P(134-139); VASILE Bogdan-Andrei: P(134-139). **Clas** (înv. HRIMIUC Valeria). BRUMĂ Andrei-Alexandru: P(134-139); DU

Bianca: P(134-139); HARAPCIUC Eduard-Gabriel: P(134-139); MANTA Adrian: P(134-139); NEAMŢU Alexandru: P(134-139); OLARU Alexand 139); SANDU Beatrice-Gabriela: P(134-139); VORNICU Sorin: P(134-13

Colegiul Naţional - locaţia Şcoala "Gh. Asachi". **Clasa a IV-a** (inst. CĂ Rodica). BĂJENARU Brădiţa: P(134-141,143); BERECHET Alexandr 141,143); CHIVULESCU Alexandru: P(134-141,143); PETREA Mădălin 136,138,139); UNGUREANU George: P(134-141,143).

Colegiul Naţional. **Clasa a V-a** (prof. POPA Gabriel). AMARAN P.141, V(81-84); CERNAT Radu: P.143, V(81-84); MANGALAGIU Io V(81-84); PURICE Ioana: P(141,142), V(81,82,84); STOLERU Georg P(141-143), V(81-84); ŞTREANGĂ Iulia Mădălina: P(141,143), V(81-84) **VII-a** (prof. POPA Gabriel). IONIŢĂ Norbert-Traian: V(81-86), VI(82-8

Colegiul Naţional "C. Negruzzi". **Clasa a VII-a** (prof. IONESEI PĂVĂLOI Alexandru: VI(76,79), VII(76,78,79); **Clasa a X-a** (prof. Z Adrian). VLAD Ilinca: VIII(76,77,80), IX(77,78,80), X(76,77).

Colegiul Naţional "E. Racoviţă". **Clasa a VIII-a** (prof. PIŢU Leon RACHE Alexandru: VIII(81-84,86,87), G131.

SFÂNTU GHEORGHE

Şcoala "Avram Iancu". **Clasa a VII-a** (prof. LÁZÁR Emese). FURTU V(76-78,80), VI(77-80), VII(76,78,79).

SIBIU

Colegiul Naţional "Gh. Lazăr". **Clasa a XII-a.** VLAD Emanuel: L(116-122,125).

SUCEAVA

Şcoala cu clasele I-VIII, nr. 3. **Clasa a III-a** (înv. TABARCEA FECHET Ştefan: P(127-130,132); **Clasa a IV-a** (inst. NECHITA Dan CHET Mircea: P(125-131).

TÂRGU NEAMŢ

Colegiul Naţional "Ştefan cel Mare". **Clasa a III-a** (înv.). CEBE P(125-127,129,134-136,139).

Premii acordate rezolvitorilor

Şcoala nr. 13 "Alexandru cel Bun", **Iaşi**

AGAFIŢEI Elena-Roxana (cl. a IV-a): 1/2007(5pb), 2/2007(5pb), 1/2

CARAMALĂU Andra (cl. a IV-a): 1/2007(5pb), 2/2007(5pb), 1/2008

CĂLIN Andreea-Claudia (cl. a IV-a): 1/2007(5pb), 2/2007(5pb), 1/20

COJOCARIU Andreea (cl. a IV-a): 1/2007(5pb), 2/2007(5pb), 1/2008

DUDUMAN Luisa-Ştefania (cl. a IV-a): 1/2007(5pb), 2/2007(5pb), 1/

LELEU Alexandrina-Ştefana (cl. a IV-a): 1/2007(5pb), 2/2007(5pb), 1

LUPAŞCU Diana-Maria (cl. a IV-a): 1/2007(5pb), 2/2007(5pb), 1/20

MANOLACHE Mădălina-Andreea (cl. a IV-a): 1/2007(5pb), 2/2007
1/

PASCU Gabriela (cl. a IV-a): 1/2007(5pb), 2/2007(5pb), 1/2008(5pb);

PĂDURARU Tiberiu-Ştefan (cl. a IV-a): 1/2007(5pb), 2/2007(5pb), 1

RĂDUCEA Marin-Andrei (cl. a IV-a): 1/2007(5pb), 2/2007(5pb), 1/

SAVIN Cristina-Simona (cl. a IV-a): 1/2007(5pb), 2/2007(5pb), 1/200

ŞTEFAN Bogdan-Vasile (cl. a IV-a): 1/2007(5pb), 2/2007(5pb), 1/200

ŞTIUBEI Cosmin-Ionuţ (cl. a IV-a): 1/2007(5pb), 2/2007(5pb), 1/200

Colegiul Naţional - locaţia Şcoala "Gh. Asachi", **Iaşi**

BĂJENARU Brădiţa (cl. a IV-a): 1/2007(7pb), 2/2007(5pb), 1/2008(

CHIVULESCU Alexandru (cl. a IV-a): 1/2007(6pb), 2/2007(5pb), 1/

Şcoala nr. 26 "G. Coşbuc", **Iaşi**

CIORNEI Alexandra (cl. a III-a): 1/2007(5pb), 2/2007(5pb), 1/2008(

CRĂCIUN Ioana-Daniela (cl. a III-a): 1/2007(5pb), 2/2007(5pb), 1/2

MARICIUC Dragoş-Claudiu (cl. a III-a): 1/2007(5pb), 2/2007(5pb), 1

ŢUCĂ Cosmin (cl. a III-a): 1/2007(5pb), 2/2007(5pb), 1/2008(6pb);

Colegiul Naţional "Carol I", **Craiova**

STANCIU Ioan (cl. a VII-a): 2/2006(13pb), 1/2007(12pb), 2/2007(14p

Liceul "Ştefan cel Mare", **HÂRLĂU**

NEICU Mara (cl. a V-a): 2/2006(5pb), 1/2007(5pb), 1/2008(5pb);

IVĂNUŢA Andreea Simona (cl. a VI-a): 1/2007(5pb), 2/2007(5pb), 1/

Revista semestrială **RECREAȚII MATEMATICE** este e
ASOCIAȚIA "RECREAȚII MATEMATICE". Apare la datele de 1
1 septembrie şi se adresează elevilor, profesorilor, studenților şi tutu
pasionați de matematica elementară.

În atenția tuturor colaboratorilor

Materialele trimise redacției spre publicare (note şi articole, ch
metodică, probleme propuse etc.) trebuie prezentate îngrijit, clar şi c
trebuie să prezinte interes pentru un cerc cât mai larg de cititori. Se reco
textele să nu depăşească patru pagini. Evident, **ele trebuie să fie origi
nu fi apărut sau să fi fost trimise spre publicare altor reviste.** Rugăm
rialele tehnoredactate să fie însoțite de fişierele lor.

Problemele destinate rubricilor: **Probleme propuse** şi **Problem
pregătirea concursurilor** vor fi redactate pe foi separate cu enunț şi d
ție/rezolvare (câte una pe fiecare foaie) şi vor fi însoțite de numele autoru
la şi localitatea unde lucrează/învață.

Redacția va decide asupra oportunității publicării materialelor prim

În atenția elevilor

Numele elevilor ce vor trimite redacției soluții corecte la proble
rubricile de **Probleme propuse** şi **Probleme pentru pregatirea conc
vor fi menționate în **Pagina rezolvitorilor**. Se va ține seama de regulile:

1. Pot trimite soluții la **minimum cinci probleme propuse în
prezent şi cel anterior al revistei**; pe o foaie va fi redactată soluția un
probleme.

2. Elevii din clasele **VI-XII** au dreptul să trimită soluții la p
propuse pentru clasa lor, pentru orice clasă mai mare, din două clase m
imediat anterioare. Elevii din clasa a **V**-a pot trimite soluții la problemel
pentru clasele a IV-a, a V-a şi orice clasă mai mare, iar elevii claselor
trimite soluții la problemele propuse pentru oricare din clasele primare şi
să mai mare. Orice elev poate trimite soluții la problemele de concurs (ti

3. Vor fi menționate următoarele date personale: numele şi p
clasa, şcoala şi localitatea.

4. Plicul cu probleme rezolvate se va trimite prin poştă (sau v
direct) la adresa Redacției:

Prof. dr. Temistocle Bîrsan
Str. Aurora, nr. 3, sc. D, ap. 6,
700 474, Iaşi
Jud. IAŞI
E-mail: t_birsan@yahoo.com

CUPRINS

ISSN 1582 – 1765

Prof. Constantin Corduneanu la a 75-a anivers

La 26 iulie a. c., prof. **C. Corduneanu** împlineşte vârsta de 75 ani. Nă
26 iulie 1928 la Iaşi, domnia sa a urmat şcoala primară în satul Potângen
Movileni, jud. Iaşi, unde părinţii săi erau învăţători. Studiile liceale le-a f
Liceul Militar (Iaşi şi Predeal) în perioada 1940–1947. Cităm dintr-un inte
d-sale, acordat ziarului *"Curierul Românesc"*: *"Am avut şansa de a studia
şcoală de elită, unde profesorul de istorie era doctor la Oxford, cel de chimie
asemenea doctor în chimie şi inginer chimist, cel de geografie era simultan şi
universitar, cel de franceză era doctor în filologie, cu stagiu de specializare în
devenind apoi şeful catedrei de limbă franceză la Universitatea din Iaşi. Pro
de matematică fusese şi cadru universitar (conferenţiar suplinitor). Când a
pragul universităţii ieşene, opţiunile mele de viitor erau deja clare."* În clasa
de liceu (1947), a luat premiul I pe ţară la concursul anual, pe care îl organiza
Gazeta matematică.

După trecerea bacalaureatului în 1947, se înscrie la secţia de matematică
de Ştiinţe din Iaşi, promovând primii doi ani de studii într-un singur an, astf
1950 este declarat absolvent. Fiind un student eminent, în ultimul an de facu
fost numit preparator, regulamentul în vigoare la acea vreme permiţând aces

Despre perioada studenţiei şi despre profesorii săi, precum şi despre acti
din cadrul Seminarului Matematic "Al. Myller", spunea: *"A fost o altă ş
vieţii mele să am posibilitatea să mă formez ca specialist într-o atmosferă d
ţinută ştiinţifică şi să fiu sprijinit, în momente critice ale vieţii, de către pr
mei"* (citat din acelaşi interviu). Dintr-o scrisoare redactată în urma plecă
din ţară, cităm: *"Rămânem şi noi, cei dinafară, datori foştilor profesori, car
pregătit atât de solid pentru viaţă. Toată activitatea noastră este pătrunsă de
respectabilităţii faţă de bunul nume pe care matematica românească l-a dob
continuă, credem, să-l păstreze. Este tributul pe care-l datorăm memoriei profe
noştri, singurii cu adevărat făuritori ai viitorului nostru, în condiţii care nu
tocmai prielnice"*.

A urcat cu rapiditate treptele ierarhiei universitare, în 1965 fiind profesor
Între anii 1954–1968, a fost, în paralel, cercetător principal şi apoi şef de se
Institutul de Matematică al Academiei, filiala Iaşi. În 1961 este distins cu *p
Ministerului Educaţiei şi Învăţământului*, iar în 1964 primeşte *premiul "Gh.
al Academiei*.

A fost rector al Institutului Pedagogic din Suceava (1964–1967), decan al
Matematică din Iaşi (1968–1972) şi prorector al Univ. "Al. I. Cuza" (1972–19
1974, a fost ales *membru corespondent al Academiei Române* (secţia matema

Desfiinţarea Institutului de Matematică şi deteriorarea continuă a climatul
tic, social şi cultural din ţara noastră l-au determinat să emigreze în stră
(1977). După un an petrecut la *Univ. din Kingston* (Rhode Island) şi altul l
din Knoxville (Tennessee), se stabileşte definitiv la *Univ. of Texas at Arlingto*
a funcţionat până la pensionare. Îi place să spună că a avut 4000 studenţi în R
şi aproximativ 3000 în America, perioada activităţii sale universitare fiind de

Activitatea ştiinţifică a prof. **C. Corduneanu** s-a desfăşurat fără între fiind continuată şi în prezent. Este autorul a peste 150 de articole, publi reviste de mare prestigiu din ţară şi din străinătate. La Iaşi, a înfiinţat Ser special de teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale şi integrale, d-sa fiind iniţ acestei direcţii de cercetare la Iaşi. Mulţi tineri s-au format în ambianţa Seminar, fiindu-i recunoscători profesorului lor.

Domeniul de cercetare a prof. **C. Corduneanu** este teoria ecuaţiilor difer integrale şi integro-diferenţiale, în care a abordat probleme de existenţă, com asimptotică, periodicitate, aproape-periodicitate şi stabilitate a soluţiilor u fel de ecuaţii. Merită subliniată introducerea "metodei comparaţiei" în teo bilităţii, studiul sistematic al teoriei admisibilităţii operatorilor integrali, frecvenţială în studiul stabilităţii ecuaţiilor integrale Volterra etc. Pentru a o idee despre opera matematică a d-sale, amintim doar monografiile pe ca publicat până în prezent:

1. *Funcţii aproape periodice*, Ed. Academiei, Bucureşti, 1961;

2. *Almost Periodic Functions*, Interscience Publ., New-York, 1968; Chelse Company, New-York, 1989;

3. *Principles of Differential Equations and Integral Equations*, Allyn and Boston, 1971; Chelsea Publ. Company, New-York, 1977; 1988;

4. *Integral Equations and Stability of Feedback Systems*, Academic Press York, 1973;

5. *Integral Equations and Applications*, Cambridge Univ. Press, 1991;

6. *Functional Equations with Causal Operators*, Taylor and Francis, Londo

Monografia *"Funcţii aproape periodice"* a fost prima pe plan mondial con acestui important subiect. Cele două ediţii în limba engleză ale ei au fost com şi dezvoltate cu noi capitole; la cea de a doua ediţie engleză şi-au adus cont şi renumiţii profesori ieşeni *N. Gheorghiu* şi *V. Barbu*. Se cuvine a adăuga **C. Corduneanu** a fost primul matematician din Iaşi, ale cărui cărţi au fost pu la edituri din străinătate dacă avem în vedere perioada postbelică. Mulţi ma cieni din ţară şi de peste hotare citează şi folosesc contribuţiile originale ale d lucrările lor de specialitate. Dintre cei din ultima categorie amintim pe *L. R. Conti, J. Massera, J. J. Schäffer, N. Rouche, W. Coppel* şi *Ph. Hartman*

Prof. **C. Corduneanu** a fost şi este membru în comitetul de redacţie importante reviste de matematică din ţara noastră şi din alte ţări. Este ed revistei *Libertas Mathematica* fondată în anul 1981 şi ajunsă anul acesta la al lea număr. Este membru al Academiei Româno-Americane de Ştiinţe şi Arte fiind chiar preşedintele acestei instituţii, în perioada 1995–1998. Este *Doctor Causa al universităţilor din Iaşi, Constanţa şi Braşov.* Are o prezenţă activă l manifestări ştiinţifice din ţară şi din America. Este invitat de numeroase univ pentru a ţine conferinţe şi a prezenta comunicări.

A încurajat revista *Recreaţii matematice*, susţinând necesitatea unei a publicaţii, ori de câte ori venea la Iaşi.

La a 75-a aniversare, revista Recreaţii matematice urează acad. prof. **C duneanu** *"La mulţi ani şi multe succese în activitatea sa viitoare!"*.

Redacţia revistei

A. N. Kolmogorov - 100 de ani de la naştere

Andrei Nicolaevici Kolmogorov este unul dintre cei mai mari matem ai secolului al XX-lea şi unul dintre cei mai fertili matematicieni ai tutur purilor. În peste 300 de lucrări ştiinţifice, manuale şi monografii, Kolmogorov a aproape toate domeniile matematicii, exceptând teoria numerelor. În lucrăr atacă numai subiecte fundamentale şi care deschid noi domenii de investigaţie. neexhaustivă a direcţiilor cercetărilor sale cuprinde: *teoria seriilor trigonom teoria mulţimilor, teoria măsurii, teoria integrării, logica constructivă (intuiţi topologia, teoria aproximării, teoria probabilităţilor, teoria proceselor stochasti ria informaţiei, statistică matematică, sisteme dinamice, teoria automatelor algoritmilor, lingvistică matematică, mecanică cerească, teoria turbulenţelor, diferenţiale, problema a 13-a a lui Hilbert, balistică, aplicaţii ale matematici ologie, geologie şi cristalizarea metalelor.*

S-a născut la 25 aprilie 1903 în oraşul Tambov (Rusia). Rămâne orfan de încă de la naştere. Era de origine aristocrată prin mama sa; tatăl său, agronom, avea o vastă cultură generală. În 1920 a intrat la Universitatea din M urmând şi absolvind cursurile facultăţii de matematică - mecanică. În forma A. N. Kolmogorov un rol important a avut seminarul condus de *V. V. S* consacrat seriilor trigonometrice şi şcoala de analiză matematică creată la M de *N. N. Luzin*. În 1931 devine profesor al acestei universităţi. S-a stins di la Moscova la 20 octombrie 1982 după o bogată activitate ştiinţifică şi didac aproape şapte decenii.

În lucrările sale, **A. N. Kolmogorov** prezintă într-o unitate surprin chestiuni din domenii aparent deosebite ale matematicii. Încă din studenţie a rezultatele care au produs o puternică impresie în lumea matematicienilor. În construit un exemplu de serie Fourier - Lebesgue divergentă aproape peste to altul de serie divergentă în fiecare punct. Sub influenţa lucrărilor lui *M. S. S* *N. N. Luzin*, în acelaşi an, face un studiu asupra operaţiilor cu mulţimi intro o clasă foarte largă de operaţii.

Începând din 1924 interesul lui **A. N. Kolmogorov** se îndreaptă spre probabilităţilor, domeniu în care va deveni o autoritate de necontestat. F metode noi, în particular aşa numita *inegalitate a lui Kolmogorov*, stabileşte necesare şi suficiente pentru *legea numerelor mari* şi demonstrează *legea mului iterat*. Încă din 1909, *E. Borel* a înţeles importanţa teoriei măsurii construcţia fundamentelor teoriei probabilităţilor. Ideile sale au fost dezvol *A. Lomnicki* într-un articol din 1923 şi au devenit obiectul cercetărilor l mogorov în 1929 care, în lucrarea *"Teoria generală a măsurii şi calculul p lităţilor"*, propune primul sistem axiomatic al teoriei probabilităţilor funda pe teoria măsurii şi teoria funcţiilor de variabilă reală. Această axiomatizare forma finală, acceptată astăzi unanim, în monografia *"Noţiunile fundamen teoriei probabilităţilor"* apărută în 1933, editura Springer. Referindu-se la l *"Metode analitice în teoria probabilitiţălor"* (1931), unul dintre elevii străluci Kolmogorov, *B. V. Gnedenko*, afirmă: *"Teoria actuală a proceselor aleatoare sau, aşa cum le numşte Kolmogorov, proceselor fără postacţiune, a fost fundam* *de Kolmogorov în această lucrare. A apărut un domeniu al matematicii cu apl fizică, biologie, chimie, activitatea inginerească. Gândirea lui Kolmogorov a o în diverse domenii în care a pus probleme noi şi a dat răspunsuri unor ch principiale".*

Pentru preocupările sale de teoria informaţiei unii matematicieni l-au nu **A. N. Kolmogorov** *"Newton al secolului XX"*. În teoria algoritmică a info a introdus noţiunea de ε-*entropie* a unei mulţimi dintr-un spaţiu metric, c aplicaţii în probleme privind superpoziţiile (compunerile) de funcţii şi i-a pe revină asupra *problemei a* 13-*a a lui Hilbert: "O funcţie continuă de trei v poate fi reprezentată ca o superpoziţie de funcţii continue de două variabil* 1956 Kolmogorov a demonstrat că orice funcţie continuă de mai multe varia reprezintă ca o superpoziţie de funcţii continue de trei variabile. În 1957, *V. I.* probabil cel mai renumit dintre elevii lui Kolmogorov, a demonstrat că orice continuă de trei variabile se reprezintă ca o superpoziţie de funţii continue d variabile. În acelaşi an, Kolmogorov arată că o funcţie continuă de un număr o de variabile se reprezintă ca o superpoziţie de funcţii continue de o variabilă care se adaugă operaţia de adunare (funcţie continuă de două variabile). Cre teoriei algoritmice a informaţiei, Kolmogorov a introdus noţiunea centrală a teorii, aceea de *complexitate* a unui obiect matematic (numită astăzi *comp Kolmogorov*).

În 1925 **A. N. Kolmogorov** a publicat un articol despre *legea terţului* Acest articol a intrat în fondul de aur al logicii matematice fiind prima luc plan mondial a logicii matematice. În 1932 dezvoltă semantica logicii intuiţio lui *A. Heyting* dând acesteia aspectul de *logică constructivă*. În 1952 a dat de cele mai generale ale noţiunilor de *obiect constructiv* şi *algoritm*. În anii 60 a să atragă un număr mare de cercetătorii în studiul limbii şi literaturii prin matematice.

A. N. Kolmogorov a creat puternice şcoli de cercetare matematică d s-au ridicat un număr impresionant de matematicieni de mare valoare, dar în timp a acordat o atenţie deosebită şi învăţământului preuniversitar. Din in sa a fost înfiinţată la Moscova şcoala internat numărul 18 (cunoscută sub de *"şcoala Kolmogorov"*), un liceu de matematică unde erau selectaţi copiii ta la matematică, care se remarcau la olimpiade, de pe teritoriul întregii foste Sovietice.

A fost *membru al Academiei de Ştiinţe din ţara sa* (1939), *al academi Olanda, Anglia, Franţa, SUA, Germania, Polonia, India, România* (1956 *doctor honoris causa* al multor universităţi din întreaga lume, *membru de on* unor societăţi prestigioase. A fost *laureat al premiului de stat* şi de şapte ori *al premiului Lenin*, cel mai prestigios premiu din fosta Uniune Sovietică.

În 1963 a primit cea mai înaltă distincţie internaţională care se acordă m ticienilor, *premiul Bolzano*.

Prof. dr. Petru MINU

Inegalităţi pentru mediane, bimediane, bisectoa

Dan Ştefan MARINESCU şi Viorel CORNEA[1]

Vom demonstra pentru început următoarea

Lemă. *Fie ABC un triunghi şi $M \in (BC)$ astfel încât* $\dfrac{BM}{BC} = k \in (0,1)$*. Atunci* $AM < k\,AC + (1-k)\,AB$.

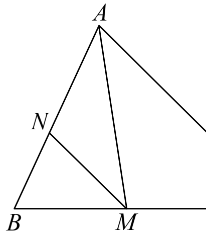


Fig. 1

Demonstraţie. Fie $N \in (AB)$ astfel încât $MN \parallel AC$ (fig. 1). Din teorema fundamentală a asemănării obţinem $MN = k\,AC$ şi $AN = (1-k)\,AB$. Aplicând în triunghiul AMN inegalitatea triunghiului avem $AM < MN + AN$ sau, conform celor de mai sus, $AM < k\,AC + (1-k)\,AB$.

Propoziţia 1. *Fie $ABCD$ un tetraedru, $M \in \mathrm{int}\,(BCD)$, $N \in (CM \cap$* *$P \in (DM \cap BC$. Dacă $\dfrac{BN}{ND} = u$ şi $\dfrac{BP}{PC} = v$, atunci*

$$AM < \frac{1}{u+v+1}\,AB + \frac{v}{u+v+1}\,AC + \frac{u}{u+v+1}\,AD.$$

Demonstraţie. Fie $Q \in (BM \cap CD$ (fig. 2). În baza teoremei lui van Au

$$\frac{BM}{MQ} = \frac{BN}{ND} + \frac{BP}{PC} = u + v, \quad \text{de unde} \quad \frac{BM}{BQ} = \frac{u+v}{u+v+1}.$$

Ţinând seama de (1) şi de Lemă, în $\triangle ABQ$ avem

$$AM < \frac{1}{u+v+1}\,AB + \frac{u+v}{u+v+1}\,AQ.$$

Din teorema lui Ceva, aplicată în $\triangle BCD$, obţinem $\dfrac{CQ}{QD} = \dfrac{u}{v}$, adică $\dfrac{CQ}{CD} = \dfrac{u}{u+v}$. Aplicând iarăşi Lema în $\triangle ACD$ vom avea

$$AQ < \frac{v}{u+v}\,AC + \frac{u}{u+v}\,AD. \qquad (3)$$

Relaţiile (2) şi (3) conduc la

$$AM < \frac{1}{u+v+1}\,AB + \frac{v}{u+v+1}\,AC + \frac{u}{u+v+1}\,AD,$$

ceea ce încheie demonstraţia acestei propoziţii.

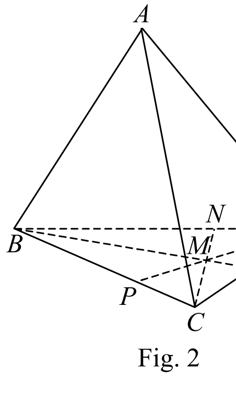


Fig. 2

Câteva cazuri particulare ale acestui rezultat prezintă interes în sine.

Corolarul 1 (Inegalitatea medianei). *Fie $ABCD$ un tetraedru şi G_A cen* *greutate al feţei BCD; atunci $AG_A < \dfrac{1}{3}\,(AB + AC + AD)$.*

[1] Profesori, Liceul Teoretic "Iancu de Hunedoara", Hunedoara

Demonstraţie. Evident, în acest caz $u = v = 1$ şi aplicând Propoziţia 1 o
inegalitatea cerută.

Corolarul 2. *Medianele unui tetraedru pot fi lungimile laturilor unui pat*

Demonstraţie. Fie G_A, G_B, G_C, G_D centrele de greutate ale feţelor ACD, ABD, ABC în tetraedrul $ABCD$ şi G centrul său de greutate. Aplic
tetraedrul $GBCD$ inegalitatea din Corolarul 1, avem $GG_A < \frac{1}{3}(GB + GC$
Conform unui rezultat cunoscut

$$BG = \frac{3}{4} BG_B\ , \quad CG = \frac{3}{4} CG_C\ , \quad DG = \frac{3}{4} DG_D\ .$$

Ca urmare, $GG_A < \frac{1}{4}(BG_B + CG_C + DG_D)$. Cum $GG_A = \frac{1}{4} AG_A$, gă
$AG_A < BG_B + CG_C + DG_D$.

Procedând la fel găsim şi inegalităţi similare, ceea ce asigură faptul că me
tetraedrului pot fi laturile unui patrulater.

Corolarul 3 (Inegalitatea bisectoarei). *Fie $ABCD$ un tetraedru, AE bise
triedrului cu vârful în A, $E \in \operatorname{int}(BCD)$; atunci*

$$AE < \frac{S_B}{S_B + S_C + S_D} AB + \frac{S_C}{S_B + S_C + S_D} AC + \frac{S_D}{S_B + S_C + S_D} AD.$$

Demonstraţie. Din teorema planului bisector (AE este intersecţia plan
sectoare ale diedrelor ce compun triedrul cu vârful în A), avem (fig. 2, cu M
$u = \frac{BN}{ND} = \frac{S_D}{S_B}$ şi $v = \frac{BP}{PC} = \frac{S_C}{S_B}$. Aplicând Propoziţia 1, vom obţine:

$$AE < \frac{S_B}{S_B + S_C + S_D} AB + \frac{S_C}{S_B + S_C + S_D} AC + \frac{S_D}{S_B + S_C + S_D} AD,$$

adică inegalitatea din enunţ.

Corolarul 4. *Fie $ABCD$ un tetraedru şi I_A centrul cercului înscris în tri
BCD; atunci:*

$$AI_A < \frac{CD}{BC + CD + BD} AB + \frac{BD}{BC + CD + BD} AC + \frac{BC}{BC + CD + BD}$$

Demonstraţie. În fig. 2 considerăm $M \equiv I_A$; din teorema bisectoarei
$u = \frac{BN}{ND} = \frac{BC}{CD}$ şi $v = \frac{BP}{PC} = \frac{BD}{CD}$. Se aplică Propoziţia 1.

Observaţie. Propoziţia 1 se poate demonstra şi cu ajutorul relaţiei lui S
care permite determinarea lui AM în funcţie de AB, AC, AD şi u, v.

Propoziţia 2. *Fie $ABCD$ un tetraedru, $M \in (AB)$ astfel încât $\frac{AM}{AB}$
$N \in (CD)$ astfel încât $\frac{CN}{CD} = 1 - u$; atunci au loc*

$$|u\,BC - (1-u)\,AD| < MN < u\,BC + (1-u)\,AD,$$

$$|u\,BD - (1-u)\,AC| < MN < u\,BD + (1-u)\,AC.$$

Demonstraţie. Fie $P \in (AC)$ astfel încât $MP \parallel BC$ (fig. 3). Din t
fundamentală a asemănării avem $MP = u\,BC$ şi $\frac{PC}{AC} = 1 - u$. Cum $\frac{CN}{CD} =$

vom obţine că $PN \parallel AD$ şi în consecinţă, în baza teoremei pomenite mai sus, vom avea $PN = (1-u)\,AD$. Deoarece punctele M, P, N nu pot fi coliniare, din inegalităţile triunghiului obţinem

$$|MP - PN| < MN < MP + PN$$

sau, după înlocuiri, avem

$$|u\,BC - (1-u)\,AD| < MN < u\,BC + (1-u)\,AD.$$

Procedând la fel obţinem şi al doilea grup de inegalităţi.

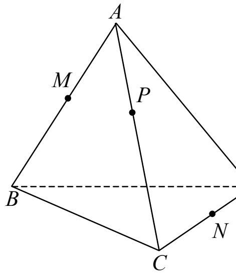


Fig. 3

Corolarul 5 (Inegalităţile bimedianei). *Fie $ABCD$ un tetraedru, M mijl* *$[AB]$ şi N mijlocul lui $[CD]$; atunci*

$$|BC - AD| < 2MN < BC + AD, \quad |BD - AC| < 2MN < BD + AC$$

Demonstraţie. Luând $u = \dfrac{1}{2}$ în Propoziţia 2, găsim inegalităţile enunţa

Pentru inegalităţile care urmează avem nevoie de următoarea

Lemă. *Fie $ABCD$ un tetraedru. Cu convenţiile din Propoziţia 1* (fig. 2), *egalitatea:*

$$AM^2 = \frac{1}{1+u+v}\,AB^2 + \frac{v}{1+u+v}\,AC^2 + \frac{u}{1+u+v}\,AD^2 - \\ - \frac{v}{(1+u+v)^2}\,BC^2 - \frac{u}{(1+u+v)^2}\,BD^2 - \frac{uv}{(1+u+v)^2}\,CD^2.$$

Demonstraţie. Ca în Propoziţia 1, obţinem $\dfrac{BM}{BQ} = \dfrac{u+v}{1+u+v}$ şi $\dfrac{CQ}{CD} =$
Aplicând relaţia lui Stewart în triunghiul ABQ, avem:

$$AM^2 = \frac{1}{1+u+v}\,AB^2 + \frac{u+v}{1+u+v}\,AQ^2 - \frac{u+v}{(1+u+v)^2}\,BQ^2.$$

Aceeaşi relaţie aplicată în triunghiurile BCD şi ACD conduce la

$$BQ^2 = \frac{v}{u+v}\,BC^2 + \frac{u}{u+v}\,BD^2 - \frac{uv}{(u+v)^2}\,CD^2,$$

$$AQ^2 = \frac{v}{u+v}\,AC^2 + \frac{u}{u+v}\,AD^2 - \frac{uv}{(u+v)^2}\,CD^2.$$

Din (1), (2) şi (3) obţinem egalitatea din enunţ.

Propoziţia 3. *Fie $ABCD$ un tetraedru. Are loc inegalitatea*

$$AM \geq \frac{1}{2R}\left(\frac{1}{1+u+v}\,AB^2 + \frac{v}{1+u+v}\,AC^2 + \frac{u}{1+u+v}\,AD^2\right),$$

unde R este raza sferei circumscrise tetraedrului.

Demonstraţie. Fie A' punctul în care $(AM$ intersectează a doua oar circumscrisă tetraedrului. Avem evident

$$2R \cdot AM \geq AA' \cdot AM = (AM + A'M)\,AM = AM^2 + A'M \cdot AM.$$

Puterea punctului M faţă de sferă este egală cu

$$A'M \cdot AM = R^2 - OM^2,$$

unde O este centrul sferei. Din lemă, vom avea:

$$AM^2 = \frac{1}{1+u+v} AB^2 + \frac{v}{1+u+v} AC^2 + \frac{u}{1+u+v} AD^2 -$$
$$- \frac{v}{(1+u+v)^2} BC^2 - \frac{u}{(1+u+v)^2} BD^2 - \frac{uv}{(1+u+v)^2} CD^2,$$
$$OM^2 = \frac{1}{1+u+v} OB^2 + \frac{v}{1+u+v} OC^2 + \frac{u}{1+u+v} OD^2 -$$
$$- \frac{v}{(1+u+v)^2} BC^2 - \frac{u}{(1+u+v)^2} BD^2 - \frac{uv}{(1+u+v)^2} CD^2.$$

Cum $OB = OC = OD = R$, ultima egalitate devine:

$$OM^2 = R^2 - \frac{v}{(1+u+v)^2} BC^2 - \frac{u}{(1+u+v)^2} BD^2 - \frac{uv}{(1+u+v)^2} CD^2$$

Din (1), (2), (3) şi (4) obţinem inegalitatea din enunţ.

Corolarul 6. *Fie $ABCD$ un tetraedru şi G_A centrul de greutate al feţei atunci*

$$AG_A \geq \frac{1}{6R}\left(AB^2 + AC^2 + AD^2\right).$$

Demonstraţie. În Propoziţia 3 considerăm $M \equiv G_A$ $(u = v = 1)$.

În cele ce urmează, dacă $ABCD$ este un tetraedru, vom nota cu m_X, mediana, înălţimea, bisectoarea din vârful X $(X \in \{A, B, C, D\})$.

Corolarul 7. *În orice tetraedru $ABCD$ avem*

$$3R\left(m_A + m_B + m_C + m_D\right) \geq a^2 + b^2 + c^2 + l^2 + m^2 + n^2,$$

unde $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $l = DA$, $m = DB$, $n = DC$, iar $m_A = AG$

Demonstraţie. Din Corolarul 6 avem $6Rm_A \geq c^2+b^2+l^2$, $6Rm_B \geq c^2+$ $6Rm_C \geq a^2 + b^2 + n^2$, $6Rm_D \geq l^2 + m^2 + n^2$, de unde, prin sumare, o inegalitatea cerută.

Corolarul 8. *Fie $ABCD$ un tetraedru şi I_A punctul în care bisectoarea tetraedrului intersectează faţa BCD; atunci*

$$2R \cdot AI_A \geq \frac{S_B}{S_B + S_C + S_D} AB^2 + \frac{S_C}{S_B + S_C + S_D} AC^2 + \frac{S_D}{S_B + S_C + S_D} A$$

Demonstraţie. În Propoziţia 3 se pune $u = \dfrac{S_D}{S_B}$ şi $v = \dfrac{S_C}{S_B}$.

Observaţie. Ca şi în Corolarul 7 se pot obţine inegalităţi pentru suma toarelor şi suma înălţimilor.

Bibliografie

1. **D. Brânzei, S. Aniţa, C. Cocea** - *Planul şi spaţiul euclidian*, Editura Aca Bucureşti, 1986.
2. **D. Şt. Marinescu** - *Inegalităţi pentru ceviene*, R.M.C. 1–2, 1995–1996, 5–7
3. **N. Pavelescu, M. Lascu** - *Inegalităţi în triunghiuri şi tetraedre*, G.M. 1 362–366.

Proprietăţi de coliniaritate în patrulatere

Temistocle BÎRSAN[1]

În scopul stabilirii proprietăţilor de mai jos vom utiliza următoarele trei l

Lema 1. *Fie ABC un triunghi, $X \in (BC)$, $Y \in (CA)$ şi $\{Z\} = AX \cap BY$. Are loc relaţia*

$$\frac{BZ}{ZY} = \frac{BX}{XC} \cdot \frac{AC}{AY} \; . \qquad (1)$$

Demonstraţie. Conform Teoremei lui Menelaus, aplicată triunghiului BCY şi transversalei XZ, avem $\frac{BX}{XC} \cdot \frac{AC}{AY} \cdot \frac{ZY}{BZ} = 1$, de unde deducem (1).

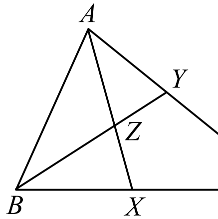


Fig. 1

Lema 2 [**1**, p. 65]**.** *Fie $ABCD$ un patrulater convex şi $\{I\} = AC \cap BD$*

siderăm punctele $E \in (AB)$ şi $F \in (CD)$ cu poziţiile date de rapoartele $p =$

respectiv $q = \frac{FD}{FC}$. Atunci

$$I \in EF \Leftrightarrow IA \cdot ID = pq \cdot IB \cdot IC.$$

Demonstraţie. Presupunem că AB şi CD se intersectează în S. Notând $\{I'\} = EF \cap AC$ şi $\{I''\} = EF \cap BD$, obţinem relaţiile:

$$\frac{ES}{EA} \cdot \frac{I'A}{I'C} \cdot \frac{FC}{FS} = 1 \quad (\triangle SAC \text{ şi transversala } EF),$$

$$\frac{ES}{EB} \cdot \frac{I''B}{I''D} \cdot \frac{FD}{FS} = 1 \quad (\triangle SBD \text{ şi transversala } EF),$$

de unde, prin egalare,

$$I'A \cdot I''D = pq \cdot I''B \cdot I'C. \qquad (*)$$

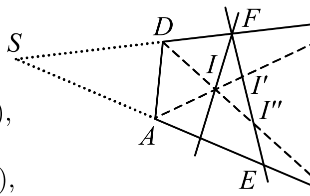


Fig. 2

Atunci, avem $I \in EF \Rightarrow I' = I'' = I \overset{(*)}{\Rightarrow} IA \cdot ID = pq \cdot IB \cdot IC$. Reciproc,

$$IA \cdot ID = pq \cdot IB \cdot IC \overset{(*)}{\Rightarrow} \frac{IA}{IC} \cdot \frac{ID}{IB} = \frac{I'A}{I'C} \cdot \frac{I''D}{I''B} \Rightarrow I' = I'' = I$$

(într-adevăr, dacă $I' \neq I$, atunci şi $I'' \neq I$ şi am avea, în poziţia din figură EF, că $\frac{IA}{IC} < \frac{I'A}{I'C}, \frac{ID}{IB} < \frac{I''D}{I''B}$).

Menţionăm că egalitatea $(*)$ se obţine prin asemănare de triunghiuri, dac CD, restul demonstraţiei rămânând acelaşi.

Lema 3. *În condiţiile Lemei 2 au loc relaţiile*

$$\frac{IE}{IF} = p\,\frac{q+1}{p+1} \cdot \frac{IB}{ID} = \frac{1}{q} \cdot \frac{q+1}{p+1} \cdot \frac{IA}{IC} \; . \qquad (3)$$

Demonstraţie. În $\triangle ECD$ scriem relaţia lui van Aubel:

$$\frac{IE}{IF} = \frac{JE}{JD} + \frac{KE}{KC} \; ,$$

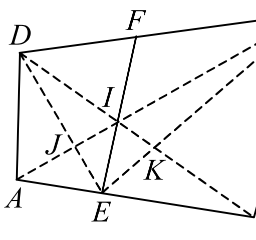


Fig. 3

[1] Prof. dr., Catedra de Matematică, Univ. Tehnică "Gh. Asachi", Iaşi

unde $\{J\} = ED \cap AC$ şi $\{K\} = EC \cap BD$. Conform Lemei 1, avem

$$\frac{DJ}{JE} = \frac{ID}{IB} \cdot \frac{AB}{AE} \quad (\triangle ABD) \quad \text{şi} \quad \frac{CK}{KE} = \frac{IC}{IA} \cdot \frac{AB}{BE} \quad (\triangle BCA).$$

Ca urmare, obţinem:

$$\frac{IE}{IF} = \frac{IB \cdot AE}{ID \cdot AB} + \frac{IA \cdot BE}{IC \cdot AB} = \frac{p}{p+1} \cdot \frac{IB}{ID} + \frac{1}{p+1} \cdot \frac{IA}{IC} =$$

$$= \frac{1}{p+1} \cdot \frac{p \cdot IB \cdot IC + IA \cdot ID}{IC \cdot ID}.$$

Deoarece $IA \cdot ID = pq \cdot IB \cdot IC$ (Lema 2), rezultă că $\dfrac{IE}{IF} = \dfrac{p\,(q+1)}{p+1} \cdot \dfrac{IB}{ID}$. egalitate rezultă din prima şi relaţia $IA \cdot ID = pq \cdot IB \cdot IC$.

Fie $ABCD$ un patrulater convex şi $\{I\} = AC \cap BD$. Considerăm un punct $M \in (AI)$ şi adoptăm notaţiile: $\{X\} = BM \cap AD$, $\{Y\} = DM \cap AB$, apoi $\{N\} = CY \cap BD$, $\{Q\} = CX \cap BD$ şi, în sfârşit $\{U\} = AN \cap BC$, $\{V\} = AQ \cap CD$ (fig. 4).

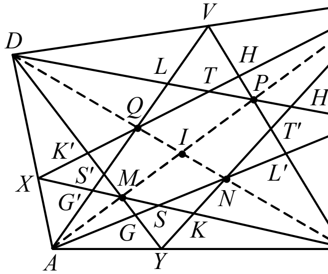


Fig. 4

Considerăm poziţia punctului M pe diagonala AC dată de raportul

$$\alpha = \frac{AM}{MI}. \qquad (4)$$

Cu uşurinţă putem preciza poziţiile punctelor X, Y, N, Q, U şi V funcţ şi elementele patrulaterului. Într-adevăr, aplicăm Lema 1 de două ori în tri $\triangle ABD$ şi obţinem relaţiile: $\dfrac{AM}{MI} = \dfrac{AX}{XD} \cdot \dfrac{BD}{BI}$ şi $\dfrac{AM}{MI} = \dfrac{AY}{YB} \cdot \dfrac{DB}{DI}$, adică

$$\frac{AX}{XD} = \alpha\,\frac{IB}{BD} \quad \text{şi} \quad \frac{AY}{YB} = \alpha\,\frac{ID}{BD}.$$

Pentru determinarea poziţiilor punctelor N şi Q aplicăm Lema 1 în $\triangle CAB$ şi $\triangle$ obţinem $\dfrac{BN}{NI} = \dfrac{BY}{YA} \cdot \dfrac{CA}{CI}$ şi $\dfrac{DQ}{QI} = \dfrac{DX}{XA} \cdot \dfrac{CA}{CI}$ şi, ţinând seama de (5), vom

$$\frac{BN}{NI} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{AC \cdot BD}{IC \cdot ID}, \quad \frac{DQ}{QI} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{AC \cdot BD}{IB \cdot IC}.$$

Pentru punctele U şi V aplicăm Lema 1 în $\triangle ABC$ şi $\triangle ADC$: $\dfrac{BN}{NI} = \dfrac{BU}{UC}$ $\dfrac{DQ}{QI} = \dfrac{DV}{VC} \cdot \dfrac{AC}{AI}$. Din aceste relaţii şi (6) rezultă că

$$\frac{BU}{UC} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{BD \cdot IA}{IC \cdot ID}, \quad \frac{DV}{VC} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{BD \cdot IA}{IB \cdot IC}.$$

Punem acum în evidenţă câteva proprietăţi de coliniaritate ale configuraţiei

Propoziţia 1. *Punctul P definit de $\{P\} = BV \cap DU$ se află pe diagona*

Demonstraţie. A arăta că $P \in AC$ revine la a arăta că în $\triangle BCD$ ce DU, BV şi CI sunt concurente. Datorită relaţiilor (7), avem

$$\frac{BU}{UC} \cdot \frac{CV}{VD} \cdot \frac{DI}{IB} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{BD \cdot IA}{IC \cdot ID} \cdot \alpha \cdot \frac{IB \cdot IC}{BD \cdot IA} \cdot \frac{ID}{IB} = 1$$

şi aplicăm reciproca teoremei lui Ceva.

Observaţie. Octogonul stelat $AYBUCVDX$, generat pornind de la p M, este înscris în patrulaterul convex dat având patru din vârfurile sale vârfurile patrulaterului, iar celelalte patru vârfuri, ce alternează cu acestea situate pe laturile patrulaterului. Propoziţia precedentă şi cele care vor urma evidenţă faptul că punctul I (de intersecţie a diagonalelor patrulaterului) jo rol important pentru acest octogon stelat.

Propoziţia 2. *Punctele din fiecare dintre tripletele X, I, U şi Y, I, coliniare.*

Demonstraţie. Conform Lemei 2, pentru ca punctele X, I, U să fie co este suficient ca egalitatea următoare să fie îndeplinită:

$$ID \cdot IC = \frac{XD}{XA} \cdot \frac{UC}{UB} \cdot IA \cdot IB.$$

Dar, ţinând sema de (5) şi (7), egalitatea devine

$$ID \cdot IC = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{BD}{IB} \cdot \alpha \cdot \frac{IC \cdot ID}{BD \cdot IA} \cdot IA \cdot IB \Leftrightarrow 1 = 1.$$

La fel se arată că Y, I, V sunt coliniare.

Observaţie. Triunghiurile XBC şi UDA sunt omologice şi punctul I este lor de omologie. Conform teoremei lui Desargue, perechile de drepte $(BC$ (XB, UD) şi (XC, UA) au puncte de intersecţie coliniare. Observaţie similară la triunghiurile YCD şi VAB.

Introducerea punctelor G, G', H, H', K, K', L, L', S, S', T, T' rezultă di

Propoziţia 3. *Punctele G, I, H sunt coliniare. Aceeaşi proprietate punctele G', I, H'.*

Demonstraţie. Conform Lemei 2, aplicată patrulaterului $YBVD$ şi pu G şi H, pentru coliniaritatea punctelor G, I, H este suficient să arătăm că

$$ID \cdot IV = \frac{GD}{GY} \cdot \frac{HV}{HB} \cdot IY \cdot IB.$$

Cu Lema 3, aplicată relativ la patrulaterul $ABCD$ şi punctele Y şi V, avem

$$\frac{IY}{IV} = p \cdot \frac{q+1}{p+1} \cdot \frac{IB}{ID}\ , \ \text{ unde } \ p = \frac{AY}{YB} \ \text{ şi } \ q = \frac{DV}{VC}\ .$$

Din (5) şi (7), avem că $p = \alpha \dfrac{ID}{BD}$, $q = \dfrac{1}{\alpha} \cdot \dfrac{BD \cdot IA}{IB \cdot IC}$ şi, după calcule, urmeaz

$$\frac{IY}{IV} = \frac{\alpha\, IB \cdot IC + IA \cdot BD}{IC\,(\alpha\, ID + BD)}\ .$$

Pe de altă parte, utilizând Lema 1 în $\triangle ADB$ şi $\triangle CBD$, obţinem

$$\frac{GD}{GY} = \frac{ND}{NB} \cdot \frac{AB}{AY} \quad \text{şi} \quad \frac{HB}{HV} = \frac{QB}{QD} \cdot \frac{CD}{CV}\ .$$

Din nou apelând la relaţiile (5) şi (7), găsim

$$\frac{AB}{AY} = \frac{\alpha\, ID + BD}{\alpha\, ID}\ , \quad \frac{CD}{CV} = \frac{\alpha\, IB \cdot IC + IA \cdot BD}{\alpha\, IB \cdot IC}\ .$$

Pentru a exprima rapoartele $\frac{ND}{NB}$ şi $\frac{QB}{QD}$ prin elementele patrulaterului dat, le
mai întâi sub forma $\frac{ND}{NB} = \frac{NI}{NB} + \frac{ID}{NB}$, $\frac{QB}{QD} = \frac{QI}{QD} + \frac{IB}{QD}$ şi apoi folosim r
(6); se obţine

$$\frac{ND}{NB} = \frac{ID\,(\alpha IC + AC)}{IB \cdot AC} \quad \text{şi} \quad \frac{QB}{QD} = \frac{IB\,(\alpha IC + AC)}{ID \cdot AC} \,.$$

Înlocuind factorii prezenţi în (8) cu expresiile lor date de (9) – (12) se aju
egalitatea $1 = 1$. În concluzie, punctele G, I, H sunt coliniare. Similar se ob
şi punctele G', I, H' sunt coliniare.

În aceeaşi manieră, adică folosind lemele şi formulele (4) – (7), se dove
rezultatele următoare.

Propoziţia 4. *Punctele K, I, L sunt coliniare. Sunt coliniare de asem
punctele K', I, L'.*

Propoziţia 5. *Punctele S, I, T şi punctele S', I, T' sunt triplete de
coliniare.*

Observaţie. Întrucât proprietăţile precedente sunt de natură proiectivă
lipsită de interes stabilirea acestora cu mijloacele geometriei proiective.

Pentru configuraţia în discuţie pot fi puse în evidenţă şi proprietăţi de altă

Propoziţia 6. *Dacă patrulaterul $ABCD$ dat este paralelogram, atunci
laterul $XYUV$ este un paralelogram cu laturile paralele cu diagonalele ce
Afirmaţia reciprocă este de asemenea adevărată (fig. 4).*

Demonstraţie. Faptul că $ABCD$ este paralelogram este echivalent cu

$$IA = IC \quad \text{şi} \quad IB = ID.$$

Din (13) şi (5) deducem că $\frac{AX}{XD} = \frac{AY}{YB}$, adică $XY \parallel BD$; din (13) şi (7)
că $\frac{BU}{UC} = \frac{DV}{VC}$, adică $UV \parallel BD$. La fel deducem că $\frac{AX}{XD} = \frac{CV}{VD}$ ((13), (5)
şi $\frac{AY}{YB} = \frac{CU}{UB}$ ((13), (5) şi (7)); ca urmare, $XV \parallel AC$ şi $YU \parallel AC$. În co
$XYUV$ este paralelogram. Afirmaţia reciprocă se dovedeşte pe cale inversă.

Corolar. *Dându-se un paralelogram $ABCD$ şi un punct $M \in (AD)$
construiască numai cu rigla (negradată) un paralelogram înscris în acesta ş
punctul X ca unul dintre vârfurile sale.*

Soluţie. Cu rigla construim punctul M ca intersecţie a dreptelor BX
Pornind de la M construim cu rigla punctele Y, U, V aşa cum s-a proc
începutul acestei note. Conform Propoziţiei 6, $XYUV$ îndeplineşte condiţiile

Bibliografie

1. **D. Mihalca, I. Chiţescu, M. Chiriţă** - *Geometria patrulaterului*, Teora, 1

O construcţie geometrică a unor medii

Claudiu Ştefan POPA[1]

Se ştie că în orice trapez, lungimea liniei mijlocii este media aritmetică a lun bazelor, iar lungimea segmentului care se sprijină pe laturile neparalele, tre intersecţia diagonalelor şi este paralel cu bazele, este media armonică a lun bazelor. De asemenea, o paralelă la baze ce împarte o latură neparalelă în ra $\frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$, determină în interiorul trapezului un segment a cărui lungi media ponderată a bazelor cu ponderile m şi n (toate aceste rezultate pot fi spre exemplu, în [**2**]).

În lucrarea [**1**] se demonstrează că un segment paralel cu bazele şi av lungime media geometrică a acestora este situat "între" linia mijlocie şi seg paralel cu bazele ce trece prin intersecţia diagonalelor. Ne propunem în con să dăm o construcţie efectivă a segmentului paralel cu bazele, de lungime me ometrică a acestora, bazându-ne pe un rezultat interesant în sine şi pe care nu l-a mai întâlnit în literatura de specialitate.

Propoziţie. *Fie $ABCD$ un trapez, $AB \parallel CD$, $\{O\} = AC \cap BD$ şi fie $S \in$ $R \in (CD)$ astfel încât $RS \parallel AD$. Atunci $O \in RS$ dacă şi numai dacă AS este geometrică a lungimilor segmentelor $[CR]$ şi $[BS]$.*

Demonstraţie. Să presupunem că $O \in RS$ şi fie $P \in (AD)$, $Q \in (BC)$ astfel ca $PQ \parallel AB$, $O \in (PQ)$. Se ştie că $PO = OQ$ şi atunci $OQRD$ şi $OQSA$ sunt paralelograme ($OQ \parallel DR \parallel AS$, $OQ = DR = AS$). Urmează că $RQ \parallel BD$, $SQ \parallel AC$. Aplicând teorema lui Thales în $\triangle CDB$ şi $\triangle BAC$, obţinem că $\frac{DR}{RC} = \frac{BQ}{QC} = \frac{BS}{SA}$ şi, cum $DR = SA$, rezultă că $SA^2 = CR \cdot BS$.

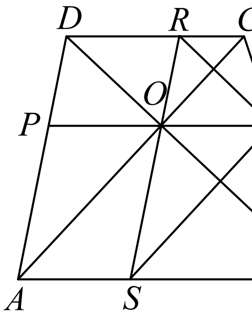


Fig. 1

Reciproc, presupunem că $RD = SA = \sqrt{SB \cdot RC}$. Notăm $SB = a$, $RC = b$ şi atunci $AB = a + \sqrt{ab}$, $CD = b + \sqrt{ab}$. Deoarece lungimea segmentului paralel cu bazele ce trece prin intersecţia diagonalelor este media armonică a lun bazelor, avem că

$$PQ = 2\,\frac{AB \cdot CD}{AB + CD} = 2\,\frac{\left(a + \sqrt{ab}\right)\left(b + \sqrt{ab}\right)}{a + b + 2\sqrt{ab}} = 2\,\frac{\sqrt{a}\sqrt{b}\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2}{\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2} = 2$$

prin urmare $PO = OQ = AS = DR$, adică $PORD$ şi $POSA$ sunt paralelo De aici, $OR \parallel AD$, $OS \parallel AD$, deci $O \in RS$.

Drept consecinţă a acestui rezultat obţinem un procedeu de *construcţie a geometrice şi a mediei pătratice ale bazelor unui trapez, ca segmente ce se spr laturile neparalele şi sunt paralele cu bazele.*

---

[1] Profesor, Şcoala "Alecu Russo", Iaşi

Fie, ca în figură, $[PQ]$ şi $[MN]$ segmentele ce reprezintă media armonică, respectiv media aritmetică ale bazelor trapezului $ABCD$. Obţinem un segment având ca lungime media geometrică a bazelor, folosind unul dintre procedeele cunoscute ([**2**]). Aşezăm acest segment în prelungirea uneia dintre bazele trapezului; punctul D' astfel obţinut îl unim cu B şi fie $\{E\} = BD' \cap AD$. Paralela prin E la baze determină segmentul $[EF]$ căutat.

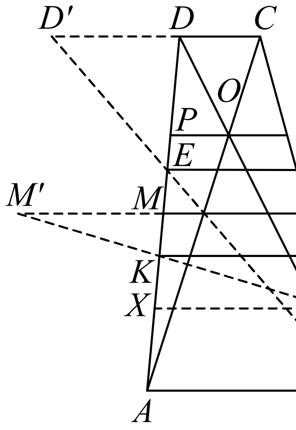


Fig. 2

Fie XY simetrica dreptei PQ faţă de MN, cu $X \in AD$, $Y \in BC$. Atunci

$$XY = 2\,MN - PQ = AB + CD - \frac{2\,AB \cdot CD}{AB + CD} =$$

$$= \frac{(AB+CD)^2 - 2\,AB \cdot CD}{AB+CD} = \frac{AB^2 + CD^2}{AB+CD} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{AB^2+CD^2}{2}} = \sqrt{\frac{AB^2+CD^2}{AB+CD} \cdot \frac{AB+CD}{2}} = \sqrt{XY \cdot MN}.$$

Prin urmare, construcţia cu rigorile impuse iniţial a segmentului de lungime pătratică a bazelor trapezului $ABCD$ se reduce la construcţia segmentulu având ca lungime media geometrică a bazelor trapezului $XYMN$ (fig. 2).

Propunem spre rezolvare următoarele probleme:

1. Fie $ABCD$ trapez cu $[AB]$ baza mare şi $A' \in (AB)$, $D' \in (DC$ astf $C \in (DD')$ şi $AA' = DD' = \sqrt{AB \cdot CD}$. Să se demonstreze că:

$i)$ $A'C$, BD' şi AD sunt drepte concurente;

$ii)$ dacă E este punctul de concurenţă de la $i)$ şi $EF \parallel AB$, $F \in BC$, $EF = \sqrt{AB \cdot CD}$.

2. Fie $ABCD$ un trapez, $AB \parallel CD$ şi punctele $E \in (AD)$ şi $F \in BC$ încât $EF \parallel AB$. Trapezele $ABFE$ şi $EFCD$ au diagonalele respectiv parale şi numai dacă $EF = \sqrt{AB \cdot CD}$.

3. Fie trapezul $ABCD$ cu baza mare AB, $AC \cap BD = \{O\}$, $\{M, E, P\} \subset$ $\{N, F, Q\} \subset (BC)$ astfel încât $[MN]$ este linia mijlocie a trapezului, $EF \parallel$ $EF^2 = AB \cdot CD$, iar $PQ \parallel AB$, $O \in PQ$. Dacă notăm $R_{XY} = \dfrac{\mathcal{A}_{ABYX}}{\mathcal{A}_{CDXY}}$, $R_{EF}^2 = R_{MN} \cdot R_{PQ}$.

Bibliografie.

1. **L. Constantinescu** - *O interpretare geometrică a inegalităţii mediilor*, R. M 1/1982.
2. **J. Hadamard** - *Geometrie plană*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1960.

Irelevanţa primitivabilităţii pentru ecuaţii funcţionale de forma $f(x+y)=g(f(x),f(y))$

Dan Ştefan MARINESCU şi Viorel CORNEA[1]

În [1] este demonstrat următorul rezultat:

"Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ admite primitive şi $f(x+y)=f(x)+f(y)$ pentr
$x,y\in\mathbb{R}$, atunci f este continuă".

De remarcat că demonstraţia se bazează pregnant pe primitivabilitatea f
f.

În cele ce urmează vom dovedi următoarea

Propoziţie. *Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie arbitrară şi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o func*
admite primitive. Dacă

$$f(x+y)=g(f(x),f(x)),\quad \forall x,y\in\mathbb{R},$$

atunci f este continuă.

Demonstraţie. Dacă f este injectivă, împreună cu faptul că f are propr
lui Darboux, suntem conduşi la monotonia funcţiei f pe $\mathbb{R}$. Se deduce imedi
tinuitatea funcţiei f, ceea ce încheie demonstraţia.

Dacă f nu este injectivă, vom dovedi că f este constantă pe $\mathbb{R}$ şi, în cons
f este continuă. Din faptul că f nu este injectivă există $a,b\in\mathbb{R}$ cu a
$f(a)=f(b)$. Arătăm că

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists t_1,t_2\in\mathbb{R}\quad\text{cu}\quad 0<t_2-t_1<\varepsilon\quad\text{şi}\quad f(t_1)=f(t_2).$$

Pentru aceasta fie $n\in\mathbb{N}^*$ încât $\dfrac{b-a}{n}<1$ şi funcţia

$$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad h(x)=f\left(x+\frac{b-a}{n}\right)-f(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Evident, h are proprietatea lui Darboux: $h=G'$, unde $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, G
$F\left(x+\dfrac{b-a}{n}\right)-F(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, cu F o primitivă a lui f.

Dacă h nu se anulează pe $\mathbb{R}$, cum h are proprietatea lui Darboux, avem $h($
sau $h(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Fie $h(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$; atunci

$$h(a)>0,\ h\left(a+\frac{b-a}{n}\right)>0,\ h\left(a+2\,\frac{b-a}{n}\right)>0,\dots,\ h\left(a+(n-1)\,\frac{b-a}{n}\right.$$

de unde

$$f\left(a+\frac{b-a}{n}\right)-f(a)>0,$$

$$f\left(a+2\,\frac{b-a}{n}\right)-f\left(a+\frac{b-a}{n}\right)>0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

[1] Profesori, Liceul Teoretic "Iancu de Hunedoara", Hunedoara

$$f\left(a+n\,\frac{b-a}{n}\right)-f\left(a+(n-1)\,\frac{b-a}{n}\right)>0,$$

relaţii care adunate conduc la $f\left(b\right)>f\left(a\right)$, ceea ce este fals.

În consecinţă, există $c\in\mathbb{R}$ astfel ca $h\left(0\right)=0$, adică $f\left(c+\dfrac{b-a}{n}\right)=f\left(c\right)$

$t_1=c$, $t_2=c+\dfrac{b-a}{n}$ avem $f\left(t_1\right)=f\left(t_2\right)$ cu $0<t_2-t_1=\dfrac{b-a}{n}<\varepsilon$, adică (

dovedită.

Arătăm în continuare că t_2-t_1 este perioadă a funcţiei f. În adevăr,

$$f\left(x+t_2-t_1\right)=f\left(x-t_1+t_2\right)=g\left(f\left(x-t_1\right),f\left(t_2\right)\right)=$$
$$=g\left(f\left(x-t_1\right),f\left(t_1\right)\right)=f\left(x-t_1+t_1\right)=f\left(x\right).$$

Din aceasta şi (1) deducem că există un şir $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de numere reale cu a

$a_n\rightarrow 0$ şi

$$f\left(x+a_n\right)=f\left(x\right),\quad \forall x\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Fie F o primitivă a funcţiei f şi $n\in\mathbb{N}$. Definim funcţia

$$F_n:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R},\quad F_n\left(x\right)=\frac{F\left(x+a_n\right)-F\left(x\right)}{a_n},\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Evident F_n este derivabilă şi $F_n'\left(x\right)=0$ (în conformitate cu (2)), adică I

constantă pe $\mathbb{R}$; deci $F_n\left(x\right)=F_n\left(0\right)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, adică

$$\frac{F\left(x+a_n\right)-F\left(x\right)}{a_n}=\frac{F\left(a_n\right)-F\left(0\right)}{a_n},\quad \forall x\in\mathbb{R},$$

de unde, prin trecere la limită pentru n tinzând la $+\infty$, găsim $f\left(x\right)=f\left(0\right)$, $\forall$

Aşadar, f este constantă pe R. Cu aceasta demonstraţia este încheiată.

Corolar. *Fie* $g:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ *o funcţie,* $\mathcal{P}\left(\mathbb{R}\right)=\{f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}\mid f$ admite prin

$\mathcal{C}\left(\mathbb{R}\right)=\{f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}\mid f$ continuă$\}$ *şi ecuaţia funcţională*

$$f\left(x+y\right)=g\left(f\left(x\right),f\left(y\right)\right),\quad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Atunci ecuaţia (3) *are soluţie în* $\mathcal{P}\left(\mathbb{R}\right)$ *dacă şi numai dacă are soluţie în* $\mathcal{C}$ (

Demonstraţie. Dacă (3) are soluţie în $\mathcal{C}\left(\mathbb{R}\right)$, atunci, evident, are sol

$\mathcal{P}\left(\mathbb{R}\right)$. Reciproc, dacă (3) are soluţie în $\mathcal{P}\left(\mathbb{R}\right)$, atunci conform Propoziţiei are

în $\mathcal{C}\left(\mathbb{R}\right)$.

Bibliografie

1. **S. Rădulescu, P. Alexandrescu, M. Chiriţă** - *Olimpiada locală*, Bucureşt

Asupra problemei XII.32 din RecMat - 2/200

Marian TETIVA[1]

În numărul 2/2002 al **Recreaţiilor Matematice** a fost publicată proble

XII.32. *Fie* $(G, \cdot)$ *grup, iar* $a \in G \backslash \{e\}$ *fixat. Arătaţi că numărul morf surjective de la* G *la* $(\mathbb{Z}_3, +)$ *cu proprietatea că* $f(x) = \widehat{2} \Leftrightarrow x = a$ *este numărul subgrupurilor* H *ale lui* G *care nu-l conţin pe* a *şi care au propriet* $x^3 \in H$, $\forall x \in G$.

Dana Stan, elev

Ideea autoarei era stabilirea unei corespondenţe bijective între mulţimile

$$A = \left\{ f : G \to \mathbb{Z}_3 \mid f \text{ morfism surjectiv cu } f(x) = \widehat{2} \Leftrightarrow x = a \right\};$$

$$B = \left\{ H \leq G \mid a \notin H \text{ şi } x^3 \in H, \forall x \in G \right\}.$$

Pentru aceasta, se defineşte funcţia $F : A \to B$ prin $F(f) = f^{-1}(\widehat{0})$. A $f^{-1}(\widehat{0}) = \operatorname{Ker} f$ este subgrup în G, $a \notin f^{-1}(\widehat{0})$, iar $f\left(x^3\right) = 3f(x) =$ $x^3 \in f^{-1}(\widehat{0})$, $\forall x \in G$; prin urmare, F este bine definită. Dacă $F(f) = F(g)$, $f^{-1}(\widehat{0}) = g^{-1}(\widehat{0})$. În plus, $f^{-1}(\widehat{2}) = g^{-1}(\widehat{2})$, iar $f^{-1}(\widehat{1}) = g^{-1}(\widehat{1})$ din surjecti funcţiilor f şi g; în concluzie, F este injectivă.

Rămâne să dovedim că F este surjectivă. Fie $H \in B$; este normal să cons $f_H : G \to \mathbb{Z}_3$ dată prin $f_H(x) = \widehat{0}$, $\forall x \in H$, $f_H(a) = \widehat{2}$, iar $f_H(x) = \widehat{1}$ $G \setminus (H \cup \{a\})$. Avem că $F(f_H) = H$, f_H este surjectivă, iar $f_H(x) = \widehat{2} \Leftrightarrow$ Este însă aplicaţia f_H astfel definită morfism de grupuri? Dovedirea acest impune studierea modului în care condiţia din ipoteză influenţează structura g G. Acest studiu va releva că ipoteza poate fi slăbită, concluzia poate fi îmbun şi va permite obţinerea unei generalizări interesante a problemei în discuţie.

Fie deci $f : G \to \mathbb{Z}_3$ morfism de grupuri astfel încât există $a \in G \setminus$ proprietatea

$$f(x) = \widehat{2} \Leftrightarrow x = a$$

Avem atunci $f(a) = \widehat{2}$, apoi $f\left(a^2\right) = \widehat{2} + \widehat{2} = \widehat{1}$ şi $f\left(a^3\right) = \widehat{0}$; prin urmare, c de surjectivitate impusă lui f este superfluă. În continuare, $f\left(a^4\right) = \widehat{2}$ şi obţinem că $a^4 = a$, adică $a^3 = e$. Pe de altă parte, fie $b \in G$ astfel încât $f($ avem succesiv:

$$f(ab) = f(a) + f(b) = \widehat{2} + \widehat{0} = \widehat{2} \Rightarrow ab = a \Rightarrow b = e.$$

Iar dacă se consideră $c \in G$ cu $f(\widehat{c}) = \widehat{1}$, atunci

$$f\left(c^2\right) = f\left(c^5\right) = \widehat{2} \Rightarrow c^2 = c^5 = a \Rightarrow c^2 = a \text{ şi } c^3 = e \Rightarrow ac = e \Rightarrow c = a$$

În concluzie, $G = \left\{e, a, a^2\right\}$, cu a element de ordin 3, deci există un singur m ca în enunţ ($f(e) = \widehat{0}$, $f(a) = \widehat{2}$, $f\left(a^2\right) = \widehat{1}$) şi un singur subgrup H cu propr cerute, $H = \{e\}$ (oricum, şi morfisme şi subgrupuri sunt câte două de toate!)

Iată acum generalizarea anunţată:

---

[1] Profesor, Colegiul Naţional "Gh. Roşca Codreanu", Bârlad

Propoziţie. *Fie* $(C, \cdot)$ *un grup ciclic şi* $g \in C$ *un generator al său. Fie* (
alt grup (notăm la fel operaţiile celor două grupuri, pentru simplitate). Presu
că există un morfism $f : G \to C$ *şi un element* $a \in G$, $a \neq e$, *astfel încât* $f(x)$
$\Leftrightarrow x = a$. *Atunci* G *este izomorf cu* C.

Demonstraţie. În primul rând, $f(a) = g \Rightarrow f\left(a^k\right) = g^k, \forall k \in \mathbb{Z}$.
fie $x \in G$ un element oarecare. Trebuie să avem $f(x) = g^k$, pentru un
$k \in \mathbb{Z}$. Rezultă (f fiind morfism) că $f\left(a^{1-k}x\right) = f(a)^{1-k} f(x) = g^{1-k}g$
Dar singurul element din G pentru care f ia valoarea g este a, deci în mod
avem $a^{1-k}x = a \Rightarrow x = a^k$. Aşadar orice element al lui G este o putere
$G \subseteq \left\{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

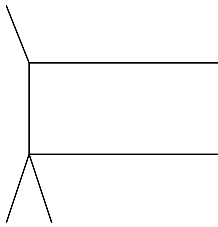
Din $f\left(a^k\right) = g^k, \forall k \in \mathbb{Z}$, rezultă că f este o aplicaţie surjectivă. În cazul în
este finit şi are n elemente avem $g^n = e$ şi $f\left(a^{n+1}\right) = g^{n+1} = g \Rightarrow a^{n+1} = a \Rightarrow$
(e fiind elementul neutru din C), deci $G \subseteq \left\{a^k \mid k = 0, 1, \ldots, n-1\right\}$ şi cum
o surjecţie de la G la C, obligatoriu G are tot n elemente şi, evident, este i
cu C.

Dacă C este infinit nu putem avea $a^k = a^m$ pentru exponenţii întregi distin
m, deoarece asta ar însemna şi $g^k = f\left(a^k\right) = f\left(a^m\right) = g^m$, ceea ce este impo
fiind acum de ordin infinit. Deci şi în acest caz G este izomorf cu C, fiind acu
ciclic infinit (generat tot de a, dar acesta nu mai are acum ordin finit). Demon
este încheiată.

Recreaţii ... matematice

1. Patru oameni a, b, c şi d vor să traverseze într-o noapte un pod, veni
din aceeaşi direcţie. Pentru a ajunge toţi de cealaltă parte, au la dispoziţie 17
şi doar o lanternă. Podul susţine cel mult 2 oameni odată şi orice echipă car
podul, de unul sau doi oameni, trebuie să aibă lanterna cu ei. Lanterna
să fie transportată înainte şi înapoi, deci, ea nu poate fi aruncată etc. Se
a traversează podul într-un minut, b în două minute, c în cinci minute, d
minute, iar o echipă traversează podul cu viteza celui mai lent dintre compon
Cum procedează cei patru pentru a trece podul în timpul stabilit?

2. Dacă vă puteţi imagina că desenul alăturat reprezintă un taur care se uită spre est, schimbaţi poziţia a două segmente astfel încât acesta să se uite spre vest.



Notă. Soluţiile problemelor **1** şi **2** se pot găsi la pagina 43.

Combinatorică ... algebrică

Gabriel DOSPINESCU[1]

Expansiunea combinatoricii în concursurile de matematică de orice nivel i cunoaşterea unor procedee şi metode cât mai variate de abordare a problem acest fel. Scopul acestei note este prezentarea, pe un număr de exemple, a m cum pot fi utilizate unele mijloace algebrice: numere complexe, polinoame rezolvarea problemelor de combinatorică.

Cardinalul unei mulţimi A va fi notat $|A|$. Dacă A este o mulţime de naturale, atunci suma elementelor acesteia se notează $m(A)$ şi se numeşte *lui* A (prin convenţie, $m(\emptyset) = 0$). Mulţimea A se numeşte pară / impară dacă este număr par / impar ($\emptyset$ este pară).

Vom utiliza în mod frecvent următoarea

Lemă. *Fie* $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$. *Are loc egalitatea*

$$a_0 + a_1\varepsilon + \ldots + a_{n-1}\varepsilon^{n-1} = 0, \quad a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R},$$

dacă şi numai dacă $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-1}$.

Demonstraţie. Definim polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$ prin $f = a_0 + a_1X$ $+a_{n-1}X^{n-1}$ şi $g = 1 + X + \ldots + X^{n-1}$. Dacă f, g au rădăcini comune, atunc divide g. Deoarece g este ireductibil în $\mathbb{R}[X]$, rezultă $(f, g) = g$, adică $g \mid f$, $g = kf$, $k \in \mathbb{R}$. În consecinţă, avem $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-1}$. Reciproca este evi

1. *Câte numere de* n *cifre* 2, 3, 7 *sau* 9 *se divid cu* 3*?* **(Concursul "' Lalescu", 2003)**

Soluţie. Fie x_n, y_n şi z_n numărul numerelor cu n cifre 2, 3, 7 sau 9 con cu 0, 1 şi respectiv 2 modulo 3. Se cere să se afle x_n. Fie $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i$ Evident, $x_n + y_n + z_n = 4^n$ şi $x_n + \varepsilon y_n + \varepsilon^2 z_n = \displaystyle\sum_{a_1,\ldots,a_n\in\{2,3,7,9\}} \varepsilon^{a_1+\ldots}$ $= \left(\varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^7 + \varepsilon^9\right)^n = 1$. Deci $x_n - 1 + \varepsilon y_n + \varepsilon^2 z_n = 0$, de unde rez $x_n - 1 = y_n = z_n = k$. Atunci $3k = x_n + y_n + z_n - 1 = 4^n - 1$, de unde $k = \dfrac{1}{3}$ (4 Ca urmare, $x_n = \dfrac{1}{3}(4^n + 2)$.

2. *Fie* $S_n = \{1, 2, \ldots, 2n\}$ *şi* $\mathcal{A}_n$ ($\mathcal{B}_n$) *familia submulţimilor pare (impa mulţimii* S_n*, având* n *elemente. Să se determine* $|\mathcal{A}_n| - |\mathcal{B}_n|$. **(Polonia, 20**

Soluţie. Ideea esenţială este că avem $|\mathcal{A}_n| - |\mathcal{B}_n| = \displaystyle\sum_{A\subset S_n,\ |A|=n} (-1)^{m(A}$ ultima expresie este coeficientul lui X^n în dezvoltarea $\displaystyle\prod_{i=1}^{2n}\left[1 + (-1)^i X\right]$. Cu

[1] Elev, Liceul "Dimitrie Cantemir", Oneşti

produs este egal cu $(1+X)^n(1-X)^n = \left(1-X^2\right)^n$, deducem că $|\mathcal{A}_n|-|\mathcal{B}_n|$ es

ficientul lui X^n în dezvoltarea $\left(1-X^2\right)^n$, adică este 0 pentru n impar şi $(-1)^{n/}$

pentru n par.

3. *Fie p un număr prim impar, numerele naturale m şi n divizibile cu p impar. Pentru fiecare m -uplă $(c_1,\ldots,c_m)$, unde $c_i \in \{1,2,\ldots,n\}$, cu prop că $p \mid \sum_{i=1}^{m} c_i$, considerăm produsul $c_1\cdot\ldots\cdot c_m$. Să se demonstreze că suma produse este divizibilă cu $\left(\dfrac{n}{p}\right)^m$.* (**Gabriel Dospinescu**)

Soluţie. Pentru orice $k \in \{0,1,\ldots,p-1\}$, fie $x_k = \sum c_1\cdot\ldots\cdot c_m$ luându-se după toate m-uplele $(c_1,\ldots,c_m)$ pentru care $\sum_{i=1}^{m} c_i \equiv k \pmod p$.

$\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{p} + i\sin\dfrac{2\pi}{p}$, avem

$$\left(\varepsilon + 2\varepsilon^2 + \ldots + n\varepsilon^n\right)^m = \sum_{c_1,\ldots,c_m\in\{1,2,\ldots,n\}} c_1\cdot\ldots\cdot c_m\varepsilon^{c_1+\ldots+c_m} = \sum_{k=0}^{p-1} x_k\varepsilon$$

Cum, printr-un calcul simplu, se obţine

$$\varepsilon + 2\varepsilon^2 + \ldots + n\varepsilon^n = \frac{n\varepsilon^{n+2} - (n+1)\varepsilon^{n+1} + \varepsilon}{(\varepsilon-1)^2} = \frac{n\varepsilon}{\varepsilon - 1},$$

rezultă că

$$\frac{n^m}{(\varepsilon-1)^m} = \sum_{k=0}^{p-1} x_k\varepsilon^k.$$

Pe de altă parte, din $\varepsilon^{p-1} + \ldots + \varepsilon + 1 = 0$ deducem că

$$\frac{1}{\varepsilon-1} = -\frac{1}{p}\left(\varepsilon^{p-2} + 2\varepsilon^{p-3} + \ldots + (p-2)\varepsilon + p - 1\right)$$

şi obţinem

$$\frac{n^m}{(\varepsilon-1)^m} = \left(-\frac{n}{p}\right)^m \left(\varepsilon^{p-2} + 2\varepsilon^{p-3} + \ldots + (p-2)\varepsilon + p - 1\right)^m.$$

Scriind

$$\left(X^{p-2} + 2X^{p-3} + \ldots + (p-2)X + (p-1)\right)^m = b_0 + b_1X + \ldots + b_{m(p-2)}X$$

deducem că

$$\frac{n^m}{(\varepsilon-1)^m} = \left(-\frac{n}{p}\right)^m \left(y_0 + y_1\varepsilon + \ldots + y_{p-1}\varepsilon^{p-1}\right),$$

unde $y_j = \sum_{k\equiv j \pmod p} b_k$.

Din (1) şi (2), obţinem relaţia

$$x_0 - ry_0 + (x_1 - ry_1)\varepsilon + (x_2 - ry_2)\varepsilon^2 + \ldots + (x_{p-1} - ry_{p-1})\varepsilon^{p-1} = 0$$

unde $r = \left(-\frac{n}{p}\right)^m$. Din aceasta rezultă că $x_0 - ry_0 = \ldots = x_{p-1} - ry_{p-}$
Rămâne să arătăm că $r \mid x_0$. Este suficient să arătăm că $r \mid k$. Dar

$$\begin{aligned}pk &= x_0 + \ldots + x_{p-1} - r\left(y_0 + \ldots + y_{p-1}\right) = \\ &= (1+2+\ldots+n)^m - r\left(b_0 + \ldots + b_{m(p-2)}\right) = \\ &= (1+2+\ldots+n)^m - r\left(1+2+\ldots+(p-1)\right)^m.\end{aligned}$$

Deci $pk = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^m - r\left(\frac{p(p-1)}{2}\right)^m$ şi, cum membrul drept se divide
rezultă că $r \mid k$.

4. *Fie $n, a_1, a_2, \ldots, a_m \in N^*$ şi $f(k)$ numărul m-uplelor $(c_1, \ldots, c_m)$ pent* $1 \le c_i \le a_i$ *şi* $\sum_{i=1}^{m} c_i \equiv k \pmod n$. *Să se arate că* $f(0) = f(1) = \ldots = f$ *dacă şi numai dacă există un indice i astfel încât $n \mid a_i$.* **(Rookie Contest,**

Soluţie. Să observăm că au loc relaţiile

$$\prod_{i=1}^{m}\left(X + X^2 + \ldots X^{a_i}\right) = \sum_{1\le c_i\le a_i} X^{c_1+c_2+\ldots+c_m} \quad \text{şi}$$

$$f(0) + f(1)\varepsilon + \ldots + f(n-1)\varepsilon^{n-1} = \sum_{1\le c_i\le a_i} \varepsilon^{c_1+\ldots+c_m} = \prod_{i=1}^{m}\left(\varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots \right.$$

unde am notat în mod firesc $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$. Atunci $f(0) = f(1) =$
$= f(n-1)$ este echivalent cu $f(0) + f(1)\varepsilon + \ldots + f(n-1)\varepsilon^{n-1} = 0$,
$\prod_{i=1}^{m}\left(\varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^{a_i}\right) = 0$. Ultima realţie are loc dacă şi numai dacă ex
indice i astfel încât $\varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^{a_i} = 0$ şi, ca urmare, $\varepsilon^{a_i} = 1$, adică $n \mid a_i$.

5. *Fie p un număr prim şi $A = \{1, 2, \ldots, 2p\}$. Să se determine număru milor $B \subset A$ cu p elemente şi având proprietatea că $p \mid m(B)$.* **(OIM - Polonia)**

Soluţie. Cazul $p = 2$ fiind banal, vom considera $p \ge 3$. Fie $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{p} + $
şi x_j numărul mulţimilor $B \subset A$ cu p elemente şi pentru care $m(B) \equiv j$ (
Atunci

$$\sum_{j=0}^{p-1} x_j\varepsilon^j = \sum_{B\subset A,\ |B|=p} \varepsilon^{m(B)} = \sum_{1\le c_1\le\ldots\le c_p\le 2p} \varepsilon^{c_1+\ldots+c_p},$$

ultima sumă fiind coeficientul lui X^p în dezvoltarea $(X+\varepsilon)\left(X+\varepsilon^2\right)\ldots\left(X\right.$
Cum $X^p - 1 = (X-1)(X-\varepsilon)\ldots\left(X-\varepsilon^{p-1}\right)$, deducem că $(X+\varepsilon)\left(X+\varepsilon^2\right.$
$\cdot\left(X+\varepsilon^{2p}\right) = \left(X^p+1\right)^2$ şi, deci, coeficientul lui X^p este 2. Aşadar, $\sum_{j=0}^{p-1} x_j\varepsilon^j =$

$x_0 - 2 + x_1\varepsilon + \ldots + x_{p-1}\varepsilon^{p-1} = 0$, de unde rezultă că $x_0 - 2 = x_1 = \ldots = x_{p}$
Urmează că $pk = x_0 + \ldots + x_{p-1} - 2 = \binom{2p}{p} - 2$. În concluzie, $x_0 = 2 + \frac{1}{p}\left(\binom{2p}{p}\right.$

6. *Fie A o mulţime de numere naturale ce conţine cel puţin două numere Să se arate că pentru $k \in \{0, 1, 2\}$ are loc relaţia* $\sum_{B \subset A} (-1)^{m(B)} m^k(B) = 0$ *(fi $\emptyset$ sau A).* **(Gabriel Dospinescu)**

Soluţie. Pornim de la observaţia că

$$\prod_{a \in A} (1 + X^a) = \sum_{B \subset A} X^{m(B)}.$$

În (1) facem $x = -1$ şi deducem că $\sum_{B \subset A} (-1)^{m(B)} = \prod_{a \in A} (1 + (-1)^a) = 0$. D relaţia (1) şi obţinem (notând $A = \{a_1, ..., a_p\}$)

$$\sum a_1 X^{a_1}(1 + X^{a_2}) \ldots (1 + X^{a_p}) = \sum_{B \subset A} m(B) X^{m(B)}.$$

În (2) facem $x = -1$ şi deducem (ţinând cont că din ipoteză fiecare termen a din membrul stâng este 0) că $\sum_{B \subset A} m(B)(-1)^{m(B)} = 0$. Derivăm apoi (2) şi o analog că $\sum_{B \subset A} (-1)^{m(B)} m^2(B) = 0$.

În final propunem spre rezolvare pe aceeaşi cale problemele următoare. a realiza că această metodă merită să fie cunoscută, sugerăm ca atât prol anterioare cât şi cele următoare să fie rezolvate şi "clasic".

7. *Fie a_n numărul submulţimilor $B \subset \{1, 2, ..., 6n\}$ pentru care $m(B) \equiv 5$ (şi b_n numărul submulţimilor $C \subset \{1, 2, ..., 7n\}$ pentru care $\prod_{x \in C} x \equiv 5 \pmod 7$ determine $\frac{a_n}{b_n}$.* **(Polonia)**

8. *Să se calculeze suma elementelor submulţimilor lui $\{1, 2, ..., 3n\}$ care au multiplu de 3.* **(Gabriel Dospinescu)**

9. *Fie $A = \{1, 2, .., n\}$. a) Să se arate că familiile submulţimilor pare şi ale lui A au acelaşi număr de elemente şi aceeaşi sumă a măsurilor element*

b) Să se afle suma măsurilor submulţimilor pare ale lui A. **(Test de se 1994)**

Un procedeu de calcul al limitelor unor şirur de forma $(a_{n+1} - a_n)_{n\geq 1}$

Oana CÂRJĂ[1]

1. Scopul acestei note este prezentarea unei scheme de calcul al limitelo şiruri de forma $(a_{n+1} - a_n)_{n\geq 1}$, schemă desprinsă din soluţia dată de *M. Ţena* la *şirul lui Lalescu* [**1**, p. 443].

Baza teoretică a acestei scheme este dată de următoarea

Propoziţie. *Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere strict pozitive ce verifică con*

$$(i)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1; \quad (ii)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \alpha \in (0,\infty); \quad (iii)\quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n =$$

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = \alpha \ln \beta$.

Demonstraţie. Avem:

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n}\right)^{\frac{a_n}{a_{n+1} - a_n}}\right]^{\frac{n}{a_n}(a_{n+1} - a_n)}, \ n \geq 1,$$

de unde, prin logaritmare, obţinem:

$$(a_{n+1} - a_n) \ln \left(1 + \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n}\right)^{\frac{a_n}{a_{n+1} - a_n}} = \frac{a_n}{n} \ln \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n, \ n \geq 1.$$

Din (i) rezultă imediat că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{a_n} = 0$ şi, deci,

$$\lim_{n\to\infty} \ln \left(1 + \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n}\right)^{\frac{a_n}{a_{n+1} - a_n}} = 1.$$

Relaţiile (1), (2), (ii) şi (iii) arată că există $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n)$, finită sau nu, trecere la limită în (1), obţinem că această limită este $\alpha \ln \beta$, q.e.d.

Observaţie. Menţionăm faptul că pentru calculul limitei de la punct (unde apare o nedeterminare de tipul 1^∞) nu putem utiliza limita fundam corespunzătoare, anume $\lim\limits_{k\to\infty} (1+x)^{1/x} = e$, ci trebuie procedat în alt mod.

2. Aplicaţie la şiruri remarcabile. Avem în vedere următoarele trei ş

1° *Şirul lui T. Lalescu* $L_n = \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}$, $n \geq 2$.

Notăm $a_n = \sqrt[n]{n!}$, $n \geq 2$ şi obţinem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e};$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{e} \cdot e \cdot 1$$

[1] Elevă, cl. a XI-a, Colegiul Naţional "C. Negruzzi", Iaşi

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}\right)^{n/(n+1)} = e.$$

Conform Propoziţiei, $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = \frac{1}{e}\cdot\ln e = \frac{1}{e}$.

2° *Şirul lui R. T. Ianculescu* $I_n = (n+1)\sqrt[n+1]{n+1} - n\sqrt[n]{n}$, $n \geq 2$ [**1**, p.

Fie $a_n = n\sqrt[n]{n}$, $n \geq 2$. Se obţine imediat că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = 1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)\sqrt[n+1]{n+1}}{n\sqrt[n]{n}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt[n+1]{n-}}$$

şi, deci, $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 1\cdot\ln e = 1$.

3° *Şirul lui M. Ghermănescu* $G_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}} - \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-2}}$, $n \geq 2$ [**1**, p

Luăm $a_n = n^{n-1}/(n-1)^{n-2}$, $n \geq 2$. Prin calcul, găsim $\alpha = \beta = e$ (cu notaţ
Propoziţie). Ca urmare, $\lim\limits_{n\to\infty} G_n = e$.

3. Probleme de concurs. Cu Propoziţia de mai pot fi calculate multe
limitele ce sunt date la concursurile şcolare.

1° *Calculaţi* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(e^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n+1}} - e^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}\right)$. **(Olimpiada locală, 20**

Luăm $a_n = e^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}$ şi constatăm că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n+1}} = 1$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{n}{n+1}} = e$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n} = e^{C}$
$C = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$ este *constanta lui Euler*. Deci, limita est

2° *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(y_n)_{n\geq 1}$ *două şiruri de numere reale strict pozitive astf*
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = a \in R_+^*$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{n} = b \in R_+^*$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty}(y_{n+1} - y_n) = c \in R$. *Dem*
că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(y_{n+1}\sqrt[n+1]{x_{n+1}} - y_n\sqrt[n]{x_n}\right) = ac$. (**D. M. Bătineţu-Giurgiu, M. Şc**
C:844, G. M.-11/1988)

Observăm că $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}-y_n}{y_n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}}{y_n} = 1$ şi

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{y_{n+1}}{y_n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{y_{n+1}-y_n}{y_n}\right)^n = \ldots = e^{c/b} \text{ (calcul de rutină).}$$

Fie $a_n = y_n\sqrt[n]{x_n}$; obţinem: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}}{y_n}\cdot\frac{\sqrt[n+1]{x_{n+1}}}{\sqrt[n]{x_n}} = 1\cdot$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{n}\sqrt[n]{x_n} = ba$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{y_{n+1}}{y_n}\right)^n\cdot\frac{x_{n+1}}{x_n}\cdot\frac{1}{\sqrt[n+1]{x}}$
$= e^{c/b}$. Conform Propoziţiei, limita cerută este egală cu $(ba)\ln e^{c/b}$, adică est

Propunem spre rezolvare următoarele probleme selectate din G. M.:
(7-8/1998), 24628 (1/2002) şi 24708 (5-6/2002).

Bibliografie

1. **D. M. Bătineţu** - *Şiruri*, Ed. "Albatros", Bucureşti, 1979.

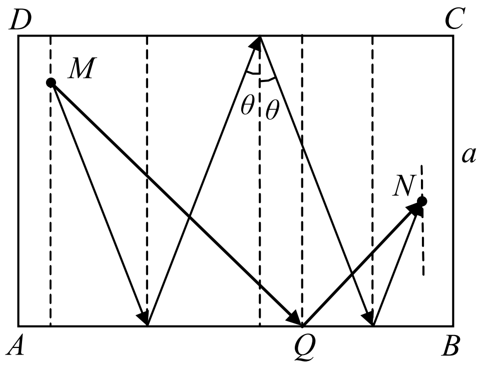
Asupra unei probleme propuse la Concursul "Florica T. Câmpan", martie 200

Horia-Nicolai TEODORESCU[1]

La etapa judeţeană a concursului amintit, s-a dat şi următoarea problemă dusă aici sumar):

"Pe un biliard dreptunghiular $ABCD$, o bilă porneşte din M către AB şi lo altă bilă în N. Unde loveşte prima bilă latura AB? Se cunosc coordonatele pu M şi N". (Autor necunoscut)

Baremul afişat pe uşa şcolii unde s-a desfăşurat concursul preciza drept unică un punct de coordonate corespunzătoare datelor problemei, $(0,2)$. Aceas însă numai o soluţie particulară (este drept, singura care putea fi determinat din datele problemei). Din figura alăturată se poate constata că există o in de soluţii, obţinute prin ciocniri multiple fie şi numai după laturile AB şi re CD (semi-biliardul – biliardul semi-infinit – creat de dreptele AB şi CD, fără AD şi BC).



Deoarece la ciocnire traiectoria face unghiuri egale cu normala la supra ciocnire, din egalităţile de unghiuri, obţinem, cu notaţiile $M\,(x_M, y_M)$, $N\,(x_N$

$$x_N - x_M = y_M \operatorname{tg}\theta + y_N \operatorname{tg}\theta + 2pa \operatorname{tg}\theta,$$

unde p este numărul de ciocniri cu latura CD, iar a este distanţa dintre latur şi CD. Deci,

$$x_N - x_M = (y_M + y_N + 2pa) \operatorname{tg}\theta,$$

de unde

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{x_N - x_M}{y_M + y_N + 2pa}\ , \quad \theta = \theta\,(p)\,,\ p = 0, 1, \ldots$$

In textul problemei, nu se dă valoarea a, dar aceasta nu face să dispară infi de soluţii posibile după relaţia de mai sus. Corespunzător fiecărei valori de un determină punctele de lovire a dreptei AB, iar pentru $p = 0$, se obţine soluţia i în timpul concursului. Desigur, există şi alte familii de soluţii, prin ciocniri

[1] Prof. dr., Fac. de Electronică şi Telecomunicaţii, Univ. Tehnică "Gh. Asachi", Iaşi

cu pereţii AD şi BC (strict similare cu cele discutate) sau obţinute prin cioc
toţi cei patru pereţi – soluţii pe care nu le analizăm aici.

O anumită ambiguitate a textului se pare că a produs încurcături unor can
Printre exprimările mai puţin fericite se numără "se îndreaptă spre AB". In
ar trebui interpretată această afirmaţie? Orice traiectorie "în jos" se îndreap
AB, căci se apropie de AB – distanţa dintre punctul de pe traiectorie şi AB
Ar fi trebuit spus "traiectoria punctului este iniţial după o dreaptă, care interse
segmentul AB". Sau, mai simplu, "bila se ciocneşte întâi de AB". Dacă se ma
şi precizarea "se ciocneşte o singură dată cu AB şi nici o dată de alte marg
biliardului, înainte de a lovi bila din N", atunci problema ar fi fost nu num
mai clară, dar ar fi avut ca unică soluţie chiar soluţia indicată participan
concurs.

Unii candidaţi au fost înclinaţi să considere că bila ce porneşte din M se
întâi de bila din N şi abia apoi de marginea AB. Interpretarea nu era greşi
textul problemei nu contrazice această interpretare. Din nefericire, aceasta co
problema, căci două puncte materiale se mişcă după ciocnire pe dreapta du
s-au mişcat iniţial, dar în sens opus, deci bila din M urma să se întoarcă înt
CD (sau AD, CD – funcţie de dimensiunile biliardului) şi apoi spre AB!
bilele se presupun nepunctuale, problema este nedeterminată (este necesar să
precizeze unghiul de contact al bilelor la prima ciocnire); cu precizarea unghi
ciocnire, problema devine rezolvabilă, dar depăşeşte nivelul de cunoştinţe de f
clasa a VIII-a.

In concluzie, problema discutată avea prea multe neclarităţi şi imprecizii
a fi inclusă ca atare într-un concurs de nivel judeţean, iar acordarea de note
această problemă probabil a lăsat pe unii elevi cu falsa impresie că au înţeles
rezolvat corect (şi complet) problema dacă au dat soluţia indicată în ziua concu

In final, cred că este meritoriu pentru Comisia concursului amintit că a dat
unei probleme de tip biliard, dat fiind că domeniul biliardelor formale (în par
teoria biliardelor hiperbolice) este dintre cele mai profunde şi fertile astăzi în
sistemelor ergodice şi a sistemelor cu dinamică neliniară [**1**], [**2**]. Biliardele
onale şi eliptice în plan şi cele cubice şi tetraedrice sunt de altfel probleme
în geometrie (vezi *problema lui Alhazen*, datând din antichitate şi intens stud
evul mediu, sau *porismul lui Poncelet*), cu multiple şi importante aplicaţii în
prea puţin reflectate în literatura de specialitate pentru elevi de la noi din ţa
aşteptăm deci şi alte probleme despre biliarde în culegeri şi în concursuri şco

Bibliografie

1. **Lai-Sang Young** - *Developments in Chaotic Dynamics*, Notices of AMS, 19
45, nr. 10, pp. 1318–1328.
2. **M. Hasewinkel** - *Encyclopedia of Mathematics*, Vol. 1, pp. 406–411 (Pessin T
Kluwer Academic, 1997.

O problemă ... şi opt soluţii

Adrian ZANOSCHI[1]

La prima ediţie a **Concursului de matematică "Alexandru Myller"**
avut loc la Iaşi, în perioada 4 - 6 aprilie 2003, a fost propusă elevilor de clas
următoarea problemă [**1**]:

*Fie ABC şi ADE două triunghiuri dreptunghice cu $\widehat{B} = \widehat{D} = 90°$ şi AB
Fie F proiecţia lui B pe AC şi G proiecţia lui D pe AE. Să se arate că p
B, F, E sunt coliniare dacă şi numai dacă punctele D, G, C sunt coliniare.*

Problema, rezolvată corect de aproximativ 60% dintre concurenţi, a prileju
tora etalarea unor variate tehnici şi metode de geometrie sintetică, analitică ş
rială. Vă prezentăm în continuare opt dintre rezolvările care au fost date în c
şi în afara lui, lăsându-vă pe dumneavoastră să decideţi care este cea mai fru

Soluţia I (sintetică). Aplicând teorema catetei în triunghiurile ABC şi ADE, obţinem:

$$AF \cdot AC = AB^2 = AD^2 = AG \cdot AE,$$

de unde rezultă că $AF \cdot AC = AG \cdot AE$, adică punctele F, C, E şi G sunt conciclice. De aici, deducem că $\widehat{CFE} = 90°$ dacă şi numai dacă $\widehat{EGC} = 90°$, ceea ce înseamnă că punctele B, F, E sunt coliniare dacă şi numai dacă punctele D, G, C sunt coliniare. (**Andrei Ştefănescu**, elev, *Colegiul Naţional de informatică "Tudor Vianu", Bucureşti*)

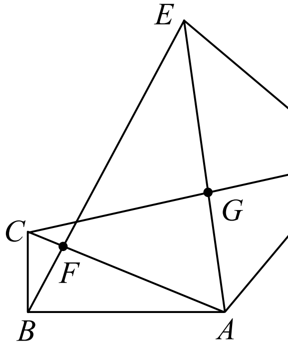


Fig. 1

Soluţia a II-a (sintetică). Vom demonstra mai întâi următoarea

Lemă. *Fie un triunghi ABC şi un punct $M \in (BC)$. În aceste condiţ
este perpendiculară pe BC dacă şi numai dacă:*

$$AB^2 - BM^2 = AC^2 - CM^2.$$

Demonstraţie. I Dacă $AM \perp BC$, atunci din egalităţile $AB^2 - BM^2 = AM^2$ şi $AC^2 - CM^2 = AM^2$, rezultă relaţia căutată.

II Să presupunem că are loc relaţia (1). Notând cu α unghiul $\widehat{AMB}$, avem

$$AB^2 = AM^2 + BM^2 - 2\,AM \cdot BM \cos\alpha,$$
$$AC^2 = AM^2 + CM^2 + 2\,AM \cdot CM \cos\alpha,$$

de unde, folosind egalitatea (1), deducem $-AM \cdot BM \cos\alpha = AM \cdot CM \cos\alpha$ sau $AM \cdot BC \cos\alpha = 0$, deci $\alpha = 90°$.

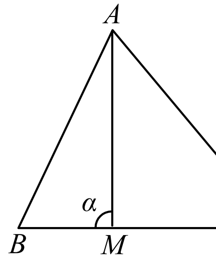


Fig. 2

[1] Profesor, Colegiul Naţional "C. Negruzzi", Iaşi

Revenind la problema noastră, să presupunem că B, F, E sunt coliniare. A
Lema în triunghiurile ABC, ADE şi ACE, obţinem

$$AB^2 - AF^2 = CB^2 - CF^2,$$

$$AD^2 - AG^2 = DE^2 - EG^2,$$

$$CE^2 - CF^2 = EA^2 - FA^2.$$

Cum $AB = AD$, din (2) şi (3) rezultă că:

$$CB^2 - CF^2 + AF^2 = DE^2 - EG^2 + AG^2,$$

de unde, având în vedere relaţia (4), găsim:

$$CB^2 + EA^2 - CE^2 = DE^2 - EG^2 + AG^2,$$

sau

$$CB^2 + \left(EA^2 - DE^2\right) - AG^2 = CE^2 - EG^2,$$

$$\left(CB^2 + AD^2\right) - AG^2 = CE^2 - EG^2,$$

$$CA^2 - AG^2 = CE^2 - EG^2,$$

ceea ce înseamnă, conform Lemei, că $CG \perp AE$. Prin urmare, punctele D
sunt coliniare. Reciproca se demonstrează în mod analog. (**Adrian Zanos**

Soluţia a III-a (sintetică). Presupunem că punctele B, F, E sunt co
Fie G' proiecţia punctului C pe AE. Din faptul că $\triangle AG'C \sim \triangle AFE$ rez
$\dfrac{AG'}{AF} = \dfrac{AC}{AE}$ sau $AG' = \dfrac{AC \cdot AF}{AE} = \dfrac{AB^2}{AE}$ (teorema catetei în $\triangle ABC$). Ca u
$AG' = \dfrac{AD^2}{AE} = AG$ (teorema catetei în $\triangle ADE$), adică G' coincide cu G ş
punctele D, G, C sunt coliniare. Implicaţia inversă se demonstrează la fel. (
Asaftei, prof., *Şcoala Normală "V. Lupu", Iaşi*)

Soluţia a IV-a (sintetică). Vom utiliza rezultatul următor: *Un pa*
$MNPQ$ (convex sau concav) este ortodiagonal dacă şi numai dacă este înd
relaţia $MN^2 + PQ^2 = MQ^2 + NP^2$.

Dacă punctele B, F, E sunt coliniare, atunci patrulaterul $ABCE$ est
diagonal şi are loc relaţia $AB^2 + CE^2 = AE^2 + BC^2$. Deoarece AB =
$AE^2 = AD^2 + ED^2$, $BC^2 = AC^2 - AB^2 = AC^2 - AD^2$, relaţia se scrie $AD^2 +$
$= AC^2 + ED^2$, adică patrulaterul $ADEC$ este ortodiagonal. Deci D, G, C su
niare. Menţionăm faptul că în condiţiile $E \in BF$ şi $E \notin [BF)$ patrulaterul
este concav şi că $E \in [BF]$ nu poate avea loc. Se arată la fel implicaţia i
(**Temistocle Bîrsan**)

Soluţia a V-a (vectorială). Să presupunem că punctele B, F şi E sunt co
În acest caz, avem $BE \perp AC$, deci $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$. Să arătăm că $CG \perp AE$:

$$\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{AE} = \left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}\right) =$$

$$= \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} =$$

$$= \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} =$$

$$= \left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}\right) \cdot \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AG} \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}\right) =$$

$$= \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AE} = -AB^2 + AG \cdot AE = -AD^2 + AG \cdot AE =$$

De aici, având în vedere că $DG \perp AE$, rezultă că punctele D, G şi C su niare. Cealaltă implicaţie se demonstrează în mod analog. (**Cristina Gutue** *Colegiul Naţional "I. C. Brătianu", Piteşti* şi **Bianca Milatinovici**, elevă, *L Informatică "Gr. C. Moisil", Iaşi*)

Soluţia a VI-a (vectorială). Fie xOy un sistem ortogonal de coordonat încât Ox să fie mediatoarea lui BD. Vom nota cu $\overrightarrow{r}_M$ vectorul de poziţie punct oarecare M (faţă de polul O). Punctele B, F şi E sunt coliniare dacă şi dacă $BE \perp AC$, adică $(\overrightarrow{r}_E - \overrightarrow{r}_B) \cdot (\overrightarrow{r}_C - \overrightarrow{r}_A) = 0$ sau

$$\overrightarrow{r}_B \cdot \overrightarrow{r}_C + \overrightarrow{r}_E \cdot \overrightarrow{r}_A = \overrightarrow{r}_E \cdot \overrightarrow{r}_C + \overrightarrow{r}_A \cdot \overrightarrow{r}_B \,.$$

Punctele D, G şi C sunt coliniare dacă şi numai dacă $(\overrightarrow{r}_C - \overrightarrow{r}_D) \cdot (\overrightarrow{r}_E - \overrightarrow{r}$ sau

$$\overrightarrow{r}_D \cdot \overrightarrow{r}_E + \overrightarrow{r}_C \cdot \overrightarrow{r}_A = \overrightarrow{r}_E \cdot \overrightarrow{r}_C + \overrightarrow{r}_A \cdot \overrightarrow{r}_D \,.$$

Deoarece $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$, rezultă că $(\overrightarrow{r}_B - \overrightarrow{r}_A) \cdot (\overrightarrow{r}_C - \overrightarrow{r}_B) = 0$ şi $(\overrightarrow{r}_D -$ $\cdot (\overrightarrow{r}_E - \overrightarrow{r}_D) = 0$, deci

$$\overrightarrow{r}_B \cdot \overrightarrow{r}_C + \overrightarrow{r}_A \cdot \overrightarrow{r}_B = \overrightarrow{r}_C \cdot \overrightarrow{r}_A + \overrightarrow{r}_B^2$$

şi

$$\overrightarrow{r}_D \cdot \overrightarrow{r}_E + \overrightarrow{r}_A \cdot \overrightarrow{r}_D = \overrightarrow{r}_E \cdot \overrightarrow{r}_A + \overrightarrow{r}_D^2 \,.$$

Datorită modului de alegere a sistemului de coordonate avem $\overrightarrow{r}_B^2 =$ $\overrightarrow{r}_A \cdot \overrightarrow{r}_B = \overrightarrow{r}_A \cdot \overrightarrow{r}_D$ şi astfel, din (3) şi (4), obţinem

$$\overrightarrow{r}_B \cdot \overrightarrow{r}_C + \overrightarrow{r}_E \cdot \overrightarrow{r}_A = \overrightarrow{r}_D \cdot \overrightarrow{r}_E + \overrightarrow{r}_C \cdot \overrightarrow{r}_A \,.$$

Prin urmare, având în vedere relaţia (5) şi egalitatea $\overrightarrow{r}_A \cdot \overrightarrow{r}_B = \overrightarrow{r}_A \cdot \overrightarrow{r}_D$, că relaţiile (1) şi (2) sunt echivalente, adică ceea ce trebuia demonstrat. (**A Zanoschi**)

Soluţia a VII-a (cu numere complexe). Deoarece relaţiile $F \in BE$ şi G sunt echivalente cu $BE \perp AC$ şi respectiv cu $DC \perp AE$, problema noastră re a arăta echivalenţa $BE \perp AC \Leftrightarrow DC \perp AE$.

Considerăm un reper ortogonal în plan cu originea în A şi notăm cu b, c afixele punctelor B, C, D şi E. Cum $AB = AD$, rezultă că $|b| = |d|$. Dacă cu $x \cdot y$ $(x, y \in \mathbb{C})$ produsul real al numerelor complexe x şi y, avem:

$$BE \perp AC \Leftrightarrow (e-b) \cdot c = 0 \Leftrightarrow (e-b)\,\overline{c} + \left(\overline{e} - \overline{b}\right) c = 0 \Leftrightarrow b\overline{c} + \overline{b}c = \overline{c}e + c\overline{e}$$

$$DC \perp AE \Leftrightarrow (c-d) \cdot e = 0 \Leftrightarrow (d-c)\,\overline{e} + \left(\overline{d} - \overline{c}\right) e = 0 \Leftrightarrow d\overline{e} + \overline{d}e = \overline{c}e + c$$

$$BC \perp AB \Leftrightarrow (c-b) \cdot b = 0 \Leftrightarrow (c-b)\,\overline{b} + \left(\overline{c} - \overline{b}\right) b = 0 \Leftrightarrow b\overline{c} + \overline{b}c = 2b\overline{b},$$

$$DE \perp AD \Leftrightarrow (e-d) \cdot d = 0 \Leftrightarrow (e-d)\,\overline{d} + \left(\overline{e} - \overline{d}\right) d = 0 \Leftrightarrow d\overline{e} + \overline{d}e = 2d\overline{d}.$$

Cum $b\overline{b} = |b|^2 = |d|^2 = d\overline{d}$, din relaţiile (3) şi (4) rezultă că $b\overline{c} + \overline{b}c = d\overline{e} + \overline{d}e$, d deducem că relaţiile (1) şi (2) sunt echivalente, deci $BE \perp AC$, dacă şi num $DC \perp AE$. (**Cezar Chirilă**, elev, *Colegiul Naţional "M. Eminescu", Botoş*

Soluţia a VIII-a (analitică). Fie xOy un sistem ortogonal de coordonate cu originea în A şi $(Ox = (AC$. În acest caz, punctele din problemă vor avea coordonatele: $A(0,0)$, $B(b,b')$, $C(c,0)$, $D(d,d')$, $E(e,e')$, $F(b,0)$, $G(g,g')$. Să presupunem că B, F, E sunt coliniare şi să arătăm că D, G, C sunt coliniare (reciproca se poate demonstra în mod analog, alegând sistemul de coordonate astfel încât triunghiul ADE să joace rolul triunghiului ABC). În acest caz $e = b$.

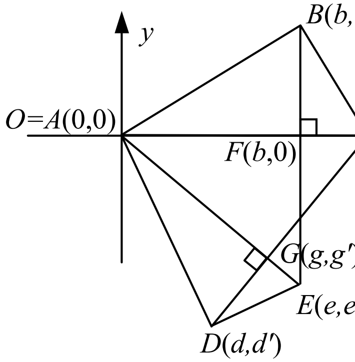


Fig. 3

Din $\widehat{B} = \widehat{D} = 90°$, rezultă că

$$m_{AB} \cdot m_{BC} = m_{AD} \cdot m_{DE} = -1$$

sau

$$\frac{b'}{b} \cdot \frac{b'}{b-c} = \frac{d'}{d} \cdot \frac{e'-d'}{e-d} = -1,$$

de unde obţinem $b^2 + (b')^2 = bc$ şi $ed + e'd' = d^2 + (d')^2$. De aici, având în că $AB = AD$, deci $b^2 + (b')^2 = d^2 + (d')^2$, deducem că:

$$ed + e'd' = bc.$$

Cum $DG \perp AE$, rezultă că $m_{DG} \cdot m_{AE} = -1$, sau

$$\frac{g'-d'}{g-d} = -\frac{e}{e'}.$$

În sfârşit, ţinând cont de (1) şi (2), putem scrie:

$$m_{DG} = m_{DC} \Leftrightarrow \frac{g'-d'}{g-d} = \frac{d'}{d-c} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} -\frac{e}{e'} = \frac{d'}{d-c} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ed + e'd' = ec \overset{(1)}{\Leftrightarrow} bc = ec \Leftrightarrow b = e,$$

care este adevărată, conform ipotezei. (**Evelina Slătineanu**, elevă, *"D. Cantemir", Iaşi*)

Bibliografie

1. **Concursul de matematică "Al. Myller"**, ediţia I, 2003, *Problema X.3* creaţii matematice, suplimentul nr. 1 (2003) sau în prezentul număr, p. 33).
2. **Liviu Nicolescu, Vladimir Boskoff** - *Probleme practice de geometrie*, Ed. T Bucureşti, 1990.

Asupra unor sume cu radicali

Dan POPESCU[1]

Scopul acestei note este prezentarea unor proprietăţi ale radicalilor accesib
vului de gimnaziu şi utile în abordarea unitară a unor tipuri de probleme.

Propoziţia 1. *Dacă $n \in \mathbb{N}$ este astfel încât $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$, atunci $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$.*

Demonstraţie. Fie $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$, cu $p, q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$, $(p, q) = 1$. Atunci $n =$
$q^2 \mid p^2$, de unde $q \mid p$, adică $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$.

Propoziţia 2. *Fie $a, b \in \mathbb{Q}_+^*$ astfel încât $\sqrt{a}, \sqrt{b} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Atunci $\sqrt{ab} \in$
şi numai dacă $\sqrt{\frac{a}{b}} \in \mathbb{Q}$.*

Demonstraţie. Imediat, din faptul că $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{1}{b}\sqrt{ab}$.

Propoziţia 3. *Fie $a, b \in \mathbb{Q}_+^*$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}^*$ astfel încât $\alpha\sqrt{a} + \beta\sqrt{b} \in \mathbb{Q}^*$;
$\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$ şi $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$.*

Demonstraţie. Observăm că $\alpha\sqrt{a} - \beta\sqrt{b} = \dfrac{\alpha^2 a - \beta^2 b}{\alpha\sqrt{a} + \beta\sqrt{b}} \in \mathbb{Q}$ şi
$\sqrt{a} = \dfrac{1}{2\alpha}\left[\left(\alpha\sqrt{a} + \beta\sqrt{b}\right) + \left(\alpha\sqrt{a} - \beta\sqrt{b}\right)\right] \in \mathbb{Q}$; analog pentru $\sqrt{b}$.

Propoziţia 4. *Fie $a \in \mathbb{Q}^*$, iar $b \in \mathbb{Q}^*$ astfel încât $\sqrt{b} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;
$a \pm \sqrt{b} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ şi $a\sqrt{b} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.*

Demonstraţie. Dacă, prin absurd, $a + \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$, atunci $\sqrt{b} = \left(a + \sqrt{b}\right) -$
contradicţie. La fel, dacă $a\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$, atunci $\sqrt{b} = \frac{1}{a}\left(a\sqrt{b}\right) \in \mathbb{Q}$, fals.

Consecinţă. Deoarece un număr iraţional este nenul, iar inversul oricărui
iraţional este tot număr iraţional, în condiţiile $\mathbf{P_4}$ avem şi că $\dfrac{a}{\sqrt{b}} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $\dfrac{1}{a \pm \sqrt{}}$

Propoziţia 5. *Fie $a, b \in \mathbb{Q}_+^*$ astfel încât $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{ab} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, iar $m,$
Atunci $m\sqrt{a} + n\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$ dacă şi numai dacă $m^2 + n^2 = 0$.*

Demonstraţie. Dacă $m = n = 0$, atunci $m\sqrt{a} + n\sqrt{b} = 0 \in \mathbb{Q}$. Inv
presupunem că $m\sqrt{a} + n\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$. Pătratul acestui număr este tot raţional şi
$mn\sqrt{ab} \in \mathbb{Q}$. Însă $\sqrt{ab} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, deci $mn = 0$. În cazul în care $m = 0$, a
$n\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$, adică $n = 0$. Analog, pentru $n = 0$ obţinem că şi $m = 0$. În co
$m^2 + n^2 = 0$.

Observaţie. Ţinând seama de $\mathbf{P_2}$, ipoteza $\sqrt{ab} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ poate fi înloc
$\sqrt{\frac{a}{b}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Prezentăm în continuare câteva aplicaţii ale acestor rezultate, iar în încheie
propuse alte exerciţii care pot fi rezolvate asemănător.

[1] Profesor, Colegiul Naţional "Ştefan cel Mare", Suceava

Problema 1. *Să se rezolve în* $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ *ecuaţiile*

a) $\frac{2}{3}\sqrt{a}+\frac{3}{4}\sqrt{b}=5$;   *b*) $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{18}$.

Soluţie. *a*) Aplicând $\mathbf{P_3}$, obţinem că $\sqrt{a},\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$ şi atunci $\sqrt{a},\sqrt{b}\in\mathbb{N}$, c

$\mathbf{P_1}$. În plus, deoarece $(3,4)=1$, avem că $\sqrt{a}\vdots 3$, $\sqrt{b}\vdots 4$ şi cercetând posib
existente, găsim unica soluţie $(9,16)$.

b) Ecuaţia se scrie echivalent $\sqrt{2a}+\sqrt{2b}=6$ şi aplicând din nou $\mathbf{P_3}$ şi $\mathbf{P_1}$, o
că $\sqrt{2a},\sqrt{2b}\in\mathbb{N}$, deci $a=2x^2$, $b=2y^2$ cu $x,y\in\mathbb{N}$. Înlocuind, găsim că $x+$
de unde $(a,b)\in\{(0,18),(18,0),(2,8),(8,2)\}$.

Problema 2. *Să se arate că* $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Soluţie. Să observăm mai întâi că n şi $n+1$ nu pot fi simultan pătrate p
pentru $n\in\mathbb{N}^*$. Dacă exact unul dintre ele este pătrat perfect, concluzia urme
$\mathbf{P_4}$. Dacă nici unul nu este pătrat perfect, atunci se poate aplica $\mathbf{P_5}$, dat fiind
că $\sqrt{n(n+1)}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ (numărul $n(n+1)$ este cuprins strict între pătratele p
consecutive n^2 şi $(n+1)^2$).

Problema 3. *Să se rezolve în* $\mathbb{N}^3$ *ecuaţia*

$$\left(m^2-3m+2\right)\sqrt{n^2+n}+\left(p^2-4\right)\sqrt{n^2+5n+6}=0.$$

Soluţie. Singura valoare a lui $n\in\mathbb{N}$ pentru care unul dintre radicali
este $n=0$; în acest caz, ecuaţia devine $p^2-4=0$, iar mulţimea soluţiil
$\{(a,0,2)\mid a\in\mathbb{N}\}$. Dacă $n\neq 0$, suntem în ipotezele $\mathbf{P_5}$:

$$n^2<n^2+n<(n+1)^2;\quad (n+2)^2<n^2+5n+6<(n+3)^2;$$

$$\left(n^2+3n\right)^2<\left(n^2+n\right)\left(n^2+5n+6\right)=\left(n^2+3n\right)\left(n^2+3n+2\right)<\left(n^2+3n\right.$$

prin urmare $m^2-3m+2=0$ şi $p^2-4=0$, deci mulţimea soluţiilor ecuaţ
$S=\{(1,a,2)\mid a\in\mathbb{N}^*\}\cup\{(2,b,2)\mid b\in\mathbb{N}^*\}$.

Probleme propuse.

1. Să se rezolve în $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ecuaţiile:

a) $2\sqrt{x}+3\sqrt{y}=12$;   *b*) $\sqrt{m}+\sqrt{n}=\sqrt{10}$.

2. Să se arate că ecuaţia $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{p}$, unde $p\in\mathbb{N}$ este prim, are o in
de soluţii în $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

3. Să se arate că $\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+3n+2}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

4. Să se arate că:

a) $\frac{1}{\sqrt{5n+7}-\sqrt{11}}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $\forall n\in\mathbb{N}$;   *b*) $\frac{1}{\sqrt{5n+2}+\sqrt{5n+1}}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $\forall$

5. Să se rezolve în $\mathbb{Q}$ ecuaţia $\left(2x^2+5x+3\right)\sqrt{11}-\left(2x^2+3x\right)\sqrt{21}=0$.

6. Fie $A=\left\{\sqrt{a}+\sqrt{b}\mid a,b\in\mathbb{N}^*,\ a,b\leq 100\right\}$. Să se afle cardinalul m
$A\cap\mathbb{Q}$.

Concursul "Alexandru Myller"
Ediţia I, Iaşi, 4 - 6 aprilie 2003

Alexandru Myller (1879 - 1965) s-a născut în Bucureşti dintr-o fan intelectuali. A absolvit Facultatea de Ştiinţe – secţia matematică din Bucureşt anii 1902 - 1906 se află în Germania pentru a continua studiile. În 1906, la Gö susţine teza de doctorat sub conducerea lui *David Hilbert*. Tot aici îl cuno *Felix Klein*, fondatorul faimosului *"Program de la Erlangen"*. Reîntors în ţa titularizat în 1910 ca profesor de geometrie analitică la Univ. "Al. I. Cuza" d

În 1910 pune bazele unei *biblioteci*, *Seminarul Matematic*, care se va d treptat, şi a unei *şcoli de geometrie* ce va fi renumită în întreaga lume. Este torul unei colecţii de modele geometrice şi se preocupă de problemele învăţăm secundar. A adus contribuţii de valoare în *geometria diferenţială, ecuaţii dife şi integrale* şi *istoria matematicii*.

A fost *rector al universităţii ieşene* în perioada 1945 - 46. Din 1949 este r *al Academiei Române*. În 1960 universitatea Humbold din Berlin i-a conferi de *doctor honoris causa*.

Notă. Concursul "Al. Myller" se adresează *elevilor din clasele VII - XII care au premii şi menţiuni la fazele superioare ale olimpiadelor şcolare din anul în curs anterior*. Prima ediţie a acestui concurs a fost sprijinită de către *Univ. "Al. I. C Filiala din Iaşi a SSMR*. Sarcina organizării şi desfăşurării acesteia au avut-o *I. S. J* următoarele licee: *Colegiul Naţional* şi *Liceul de Informatică "Gr. Moisil"*. Această Concursului "Al. Myller" a fost un succes deplin sub aspect calitativ şi organizatori

Clasa a VII-a

1. Determinaţi numerele întregi a, b, c, d care verifică relaţiile $a^2 + b^2 = 2$ şi $c^2 + d^2 = 2(a + b)$.

Gheorghe Iure

2. Fie $ABCD$ un pătrat fix şi punctele variabile $M \in (BC)$, $N \in (CD$ încât $MN = BM + DN$. Demonstraţi că măsura unghiului $\measuredangle NAM$ este con

Gheorghe Iure

3. Se consideră un triunghi ABC, un punct $M \in (AC)$ şi punctul $N \in BC$ încât $MN \perp BC$. Perpendiculara din C pe AN şi perpendiculara dusă în B se intersectează în P, iar dreptele MP şi AN se intersectează în Q. Demons $AP \perp CQ$ dacă şi numai dacă $AB \perp AC$.

Petru Răducan

4. Fie a, b, c numere reale astfel încât $0 \leq a \leq 1$, $0 \leq b \leq 1$, $0 \leq c$ $ab + bc + ca = 1$. Demonstraţi că $a^2 + b^2 + c^2 \leq 2$.

Mircea Becheanu, Buc

Clasa a VIII-a

1. Determinaţi numerele x, y, z care verifică relaţiile $x+y \geq 2z$ şi x^2+y^2-2

Adrian Zanosch

2. Un tetraedru regulat cu muchiile de lungime 1 se proiectează pe un pl Demonstraţi că aria figurii obţinute este cel mult $1/2$.

3. Fie tetraedrul $ABCD$ în care $AB = CD = a$, $AC = BD = b$, $AD = BC$
G_A, G_B, G_C, G_D centrele de greutate ale feţelor BCD, ACD, ABD respectiv
Determinaţi lungimea minimă a unui drum care este situat pe feţele tetraed
trece prin G_A, G_B, G_C, G_D.

4. Fie $n \geq 3$ un număr întreg. Demonstraţi că este posibil ca, eliminând c
două dintre elementele mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$, să obţinem o mulţime care ar
elementelor pătrat perfect.

Mihai Bălună, Buc

Clasa a IX-a

**1. Fie $ABCD$ un patrulater convex şi O un punct în interiorul ac
Notăm cu a, b, c, d, e, f respectiv ariile triunghiurilor formate de
AB, BC, CD, DA, AC şi BD. Să se arate că $|ac - bd| = ef$.**

Alexandru I

2. *a*) Arătaţi că există funcţii $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, astf
$f(f(k)) = k$, $\forall k \in \{1, 2, 3\}$.

b) Arătaţi că, dacă f este o funcţie ca la *a*), atunci numerele a, b, c nu sun
întregi.

Gheorghe Iure

3. Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = 1$. Să se a
$\frac{3}{2} \leq \frac{ab-1}{ab+1} + \frac{bc-1}{bc+1} + \frac{ca-1}{ca+1} < 2$.

Mircea Becheanu, Buc

4. Fie $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0\}$ primul cadran şi $T : S \to S$, $T($
$= \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$ o transformare a lui S. Numim "S - dreaptă" intersecţia dintre
dreaptă din plan.

a) Arătaţi că orice S - dreaptă fixă a lui T conţine punctele fixe ale lui T

b) Determinaţi S - dreptele fixe ale lui T.

($M \subset S$ se numeşte submulţime fixă a lui T dacă $T(M) = M$).

Gabriel Pop

Clasa a X-a

1. Fie $A_1 A_2 \ldots A_n$ un poligon regulat înscris în cercul $\mathcal{C}(O, R)$ şi M un p
planul acestuia. Să se arate că $nR \leq MA_1 + MA_2 + \cdots + MA_n \leq n(R + O$

Gheorghe Iure

2. Fie polinomul $f(X) = X^n + 2X^{n-1} + 3X^{n-2} + \cdots + nX + n$
$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n+2} + i\sin\frac{2\pi}{n+2}$. Să se arate că $f(\varepsilon) \cdot f(\varepsilon^2) \cdot \ldots \cdot f(\varepsilon^{n+1}) = (n +$

Mihai Piticari, C-lung Moldov

3. Fie ABC şi ADE două triunghiuri dreptunghice cu $m(\measuredangle B) = m(\measuredangle D$
şi $AB = AD$. Fie F proiecţia lui B pe AC şi G proiecţia lui D pe AE. Să se a
punctele B, F, E sunt coliniare dacă şi numai dacă punctele D, G, C sunt co

4. La un concurs se dau cinci probe, cu rezultatul admis - respins. Ca
numărul minim de participanţi la concurs pentru care, orice rezultate ar obţin
tia, să existe doi concurenţi A şi B astfel încât A să fie admis la toate probele
a fost admis şi B?

Clasa a XI-a

1. Considerăm $\mathcal{A}_n = \left\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A^{n+1} = 2003^n A\right\}$, unde n este un
natural nenul fixat.

a) Arătaţi că $\mathcal{A}_n$ conţine o infinitate de elemente.

b) Determinaţi $\mathcal{A}_3 \cap \mathcal{A}_{2003}$.

Gheorghe Iure

2. Fie $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ două matrice cu proprietatea că, oricare ar fi o m
$X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pentru care $AX = O_{3,1}$, avem că $BX = O_{3,1}$. Să se arate că e
matrice $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $B = CA$.

Mircea Becheanu, Buc

3. Să se arate că pentru orice număr natural $n \geq 0$ există numerele ra
strict pozitive $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ cu următoarele proprietăţi:

a) $\dfrac{a_0}{0!} + \dfrac{a_1}{1!} + \ldots + \dfrac{a_n}{n!} = \dfrac{1}{n!}$;

b) $a_0 + a_1 + \ldots + a_n < \dfrac{3}{2^n}$.

Dorin Andrica, Cluj - N

4. Să se determine funcţiile derivabile $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile:

a) $f(0) = 0$.

b) $f'(x) = \dfrac{1}{3} f'\left(\dfrac{x}{3}\right) + \dfrac{2}{3} f'\left(\dfrac{2x}{3}\right)$, $\forall x \in [0, \infty)$.

Mihai Piticari, C-lung Moldov

Clasa a XII-a

1. Fie f şi g două polinoame cu coeficienţi raţionali, ireductibile în $\mathbb{Q}$
$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ astfel încât $f(\alpha) = g(\beta) = 0$. Să se arate că, dacă $\alpha + \beta \in \mathbb{Q}$, atunc
au acelaşi grad.

Bogdan Enescu,

2. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos t \cos^2(2t) \cos^3(3t) \ldots \cos^{2002}(2002t)\, dt$.

Dorin Andrica, Cluj - N

3. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel necomutativ, unitar şi $a, b, c \in A$ astfel încât $ab +$
Dacă există $x \in A$ astfel încât $a + cx$ este inversabil, atunci există $y \in A$ astfe
$b + yc$ este inversabil.

Andrei Nedelcu şi Lucian Lăduncă

4. *a*) Să se arate că există $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{\sin x}{x^n}\, dx$ şi aceasta este finită, unde
fixat.

b) Dacă se notează cu $l_n = \displaystyle\lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{\sin x}{x^n}\, dx$, să se calculeze $\displaystyle\lim_{n\to\infty} l_n$.

Mihai Piticari, C-lung Moldov

Concursul "Florica T. Câmpan", ediţia a III-a

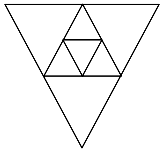
Faza judeţeană, 1 martie 2003

Clasa a IV-a

1. Care este cel mai mare număr care împărţit la 10 dă câtul 9?

2. Să se ordoneze numerele din şirul următor în ordinea crescătoare a
cifrelor lor: 132, 456, 199, 897, 1124,9191.

3. Câte triunghiuri sunt în figură?



4. Să se taie 7 cifre din şirul 123123123123, astfel încât numărul rămas să
mai mare posibil. Care este numărul?

5. Pe o farfurie sunt 19 fructe: prune, caise, piersici. Numărul piersicilor
9 ori mai mare decât cel al prunelor. Câte caise sunt?

6. O coloană de militari, lungă de 100 metri, trece pe un pod lung de 10
cu viteza de 100 metri pe minut. Cât timp durează până ce coloana parcurge

7. Când tu veneai pe lume, eu aveam cu 1 an mai mult decât de 4 ori vâ
de acum. Aş putea să ajung la 99 ani dacă voi mai trăi cu 2 ani mai mult d
trăit tu până acum. Câţi ani am eu acum?

Clasa a V-a

1. Suma cifrelor unui număr natural este 23, iar câtul împărţirii sale prin
96. Să se afle numărul.

2. În câte zerouri se termină numărul

$$N = 1^{2^{3^{4^{5^{6}}}}} \cdot 2^{3^{4^{5^{6^{1}}}}} \cdot 3^{4^{5^{6^{1^{2}}}}} \cdot 4^{5^{6^{1^{2^{3}}}}} \cdot 5^{6^{1^{2^{3^{4}}}}} \cdot 6^{1^{2^{3^{4^{5}}}}} \ ?$$

Monica N

3. Numerele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sunt aşezate într-un tablou triunghiula

$$\begin{array}{ccccccc} & & & a & & & \\ & & b & & i & & \\ & c & & & & h & \\ d & & e & & f & & g \end{array}$$

Dacă suma numerelor de pe fiecare latură a triunghiului este 20, să se a
numărul 5 este unul dintre vârfuri.

Andrei N

4. Un colier este format din bile pe care sunt înscrise numere naturale
astfel încât pe bilele vecine uneia este înscris un divizor sau multiplu al num
înscris pe acea bilă, fără ca un acelaşi număr să apară pe mai multe bile. Ca

[1] **Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 1.5 ore - cl. IV şi 2 ore - cl. V

cel mai lung colier care poate fi format cu numerele naturale mai mici sau e
100? Descrieţi toate soluţiile cu număr maxim de bile!

Mihaela C

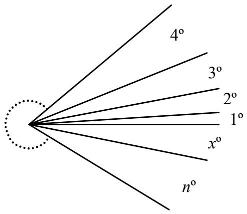
Clasa a VI-a

1. Fie $S = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{2003}$. Calculaţi $S + 2$.

2. Determinaţi toate numerele de forma $\overline{abcd}$ ştiind că

$$\frac{a+b+c}{5} = \frac{b+c+d}{2} = \frac{c+d+a}{3}.$$

3. În jurul unui punct O considerăm unghiurile cu măsurile din figură.
$x = 9^\circ$, calculaţi n°.



4. Într-un triunghi laturile sunt numere naturale pare. O latură este egal
Arătaţi că triunghiul este isoscel.

Clasa a VII-a

1. Fiecare celulă a unui tabel 2003×2003 este colorată la întâmplare cu u
2002 culori. La un pas se permite recolorarea cu o aceeaşi culoare a unei li
a unei coloane, dacă pe această linie (coloană) se află măcar două celule de a
culoare. Prezentaţi un algoritm cu un numar minim de paşi care permite c
tabel sa devină monocolor.

2. Fie $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{2003}$ o rearanjare a numerelor întregi 1,2,3,...,2003
demonstreze că produsul $P = (r_1 - 1)(r_2 - 2)\ldots(r_{2003} - 2003)$ este număr p

3. Fie $\triangle ABC$ şi $M \in (BC)$. Notăm cu M', C', A', B' simetricele punct
M', C', A' respectiv faţă de M, C, A, B. Să se arate că punctele M' şi B'
dacă şi numai dacă M este mijlocul lui (BC).

Gabriel

4. Se consideră $\triangle ABC$ cu $m(\widehat{A}) = 80^\circ$, $m(\widehat{C}) = 60^\circ$ şi $AC = 1$. Să se d
streze că BC este medie proporţională (geometrică) între AC şi $(AB + 1)$.

Clasa a VIII-a

1. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se găsească partea întreagă a numărului $\sqrt{n^2 + 3n}$.

2. Fie $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2003\}$ şi fie $f : A \to A$ o funcţie liniară necon
Arătaţi că $f(1002) = 1002$.

Gheorghe

3. Două furnici merg cu viteză constantă pe paralelipipedul drept
$ABCDA'B'C'D'$, cu $AB = 10$ cm, $BC = 15$ cm, $AA' = 12$ cm. Prima
pleacă din A şi ajunge în A' traversând, în ordine, muchiile $[BB']$, $[CC']$ şi

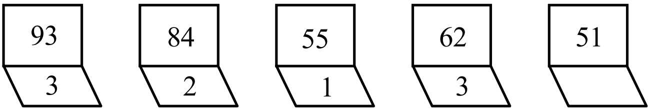
(pe drumul cel mai scurt). A doua furnică pleacă din B' şi ajunge în B trav
în ordine, muchiile $[CC']$, $[DD']$ şi $[AA']$ (pe drumul cel mai scurt). Cunosc
furnicile pornesc în acelaşi timp şi că ele se întâlnesc, aflaţi raportul vitezelor

4. Fie o masă de biliard dreptunghiulară $ABCD$ la care s-au ales drept
coordonate laturile AB şi AD (AB e axa absciselor). Se dau 2 bile situate în p
$M(5,6)$ şi $N(1,2)$. Bila din M pleacă liniar către AB astfel încât să loveas
din N. Să se găsească punctul în care bila loveşte latura AB.

Faza interjudeţeană, 24 mai 2003

Clasa a IV-a

1. Pe fiecare dintre cele cinci cărţi, numărul de jos este într-o aceeaşi le
ascunsă cu numărul de sus. Care este al doilea număr scris pe a cincea carte



2. Un elev trebuie să înveţe pentru a doua zi la istorie, matematică şi engl
câte moduri îşi poate stabili ordinea disciplinelor la care învaţă? Precizaţi-le!

3. Dacă un pahar şi o sticlă cântăresc cât o cană, sticla respectivă cân
cât paharul şi o farfurie, iar două căni cântăresc cât trei farfurii, atunci câte
cântăresc cât o sticlă?

4. Am vizitat grădina zoologică. Am văzut urşii, leii, lupii şi maimuţele,
în această ordine. În prima cuşcă animalele dormeau şi erau urşi sau maimuţ
doua cuşcă nu erau lupi şi nici lei. În a treia cuşcă animalele se uitau în altă
nu la mine. În a patra cuşcă nu erau maimuţe şi nici urşi. Maimuţele nu do
Lupii se uitau la mine. În ce ordine am vizitat animalele?

Clasa a V-a

1. Determinaţi cel mai mic număr scris în baza 10 numai cu cifrele 0 şi 1, d
cu 225.

2. Arătaţi că numerele $1, 2, 3 \ldots, 16$ nu pot fi aranjate pe o circumferinţ
încât suma oricăror două numere vecine să fie pătrat perfect. Este posibilă
de aranjare pe o linie? Justificaţi.

3. Fie fracţia $\dfrac{56}{2^{2003}}$.

a) Justificaţi că fracţia este zecimală finită;

b) Care sunt ultimele două zecimale nenule? Dar ultimele trei?

4. Un grup de prieteni hotărăsc să facă o călătorie la Viena. Fiecare
ei prezintă la vamă acelaşi număr de bancnote, unele de 100 €, altele de
Organizatorul grupului deţine un sfert din bancnotele de 100 € şi o şesime d
de 100 \$. Câte persoane sunt în grup şi care e minimul numărului total de ba
ştiind că fiecare trebuie să aibă cel puţin 5 astfel de bancnote?

Mihaela C

Clasa a VI-a

1. Pe şase recipiente avem scrise capacităţile lor: 8 l, 13 l, 15 l, 17 l,

respectiv 31 l. Recipientele sunt umplute cu ulei sau oţet. Un client cump
840000 lei oţet şi tot de 840000 lei ulei, golind cinci din cele şase recipiente şi
unul singur neatins. Care recipient a fost neatins? Care este preţul unui litru
ştiind că preţul uleiului este de două ori mai mare decât preţul oţetului?

Nicu

2. Fie numerele naturale nenule $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6$. Spu
mulţimea $\{a_1, a_2, \ldots, a_6\}$ are proprietatea $\mathcal{P}$ dacă $\forall k \in \{3, 4, 5, 6\}$, $\exists i, j \in \{1, 2,$
$i \neq j$ astfel încât $a_k = a_i + a_j$. Să se afle câte mulţimi cu proprietatea $\mathcal{P}$ s
forma $\{1, 2, a, b, c, d\}$.

Petru A

3. Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A. Dacă $AB = 2AC$, ară
măsura unghiului $\widehat{C}$ este mai mică decât $67°30'$.

Petru A

4. Şase drepte se află în acelaşi plan. Arătaţi că cel puţin două dintre
drepte fac între ele un unghi cu măsura mai mică decât $31°$.

Clasa a VII-a

1. Să se rezolve ecuaţia $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+11}} = \dfrac{7}{12}$.

2. Să se arate că toate dreptele care împart un dreptunghi în două părţi
egale sunt concurente.

3. Un cerc este împărţit în n părţi egale. Plecând din fiecare punct de di
se numără m puncte consecutive şi se uneşte punctul iniţial cu cel obţinut (p
unite nu sunt diametral opuse). Să se demonstreze că nu există trei drepte
fie concurente în interiorul cercului.

4. Alice şi Bob au un săculeţ cu 2003 bile. Alice scoate între una şi trei b
săculeţ după care Bob are dreptul să scoată şi el între una şi trei bile. Proce
repetă până la extragerea tuturor bilelor din săculeţ. Arătaţi că Alice poate p
în aşa fel încât să extragă ea ultima bilă, indiferent de felul în care acţioneaz

Clasa a VIII-a

1. *a*) Demonstraţi că $(n+3)^2 - (n+2)^2 - (n+1)^2 + n^2 = 4$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) Arătaţi că putem alege semnele astfel încât $\forall n \in \mathbb{N}$ să aibă loc egalitat

$(n+7)^2 \pm (n+6)^2 \pm (n+5)^2 \pm (n+4)^2 \pm (n+3)^2 \pm (n+2)^2 \pm (n+1)^2 \pm$

c) Fie $A = \{2003, 2004, \ldots, 20042\}$. Arătaţi că există mulţimile B şi C di
astfel încât $B \cup C = A$, suma elementelor lui B este egală cu suma elementelo
şi suma pătratelor elementelor lui B este egală cu suma pătratelor elementelo

2. La o balanţă braţele în care se pun greutăţile şi marfa trebuie să fie în ec
Un cumpărator a sesizat faptul că balanţa este defectă, deoarece punând m
un taler şi greutăţile pe celălalt taler şi apoi invers, balanţa nu este în ec
Cumpărătorul, care vrea să achiziţioneze 2 kg, a cerut să i se cântărească 1
marfă într-un mod şi 1 kg de marfă în celălalt mod. A ieşit în pierdere sau în

3. Folosind două butoaie cilindrice, unul de 50 l, altul de 60 l şi având or
multă apă la dispoziţie, prin mai multe măsurători să se obţină 55 l de apă.

Cătălin Bu

4. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată cu toate muchiile ega

a) Determinaţi poziţia punctului M pe segmentul $[BB']$ astfel încât $\mathcal{A}_{\triangle A}$ fie minimă.

b) Dacă M este mijlocul segmentului $[BB']$, să se determine unghiul dintre (ABC) şi (AMC').

Notă de cititor

Mulţi dintre învăţătorii ieşeni au fost probabil contrariaţi în primele mom fel ca şi mine, când au aflat de organizarea unui concurs de matematică, la I–VIII având pe generic numele **"Florica T. Câmpan"**.

După ce surpriza a trecut, curiozitatea şi-a făcut loc printre gânduri de t şi m-a îndemnat să aflu ce zvâcnire de spirit se ascunde în spatele acestui nun chip încă pentru mine, dar care a determinat o mobilizare considerabilă de fo

Aveam să constat în scurt timp că bibliotecile aveau suficiente materiale mă ajute să găsesc răspunsuri convingătoare.

Din paginile cărţilor răsfoite sau citite cu aviditate, se contura personalitat om de cultură, profesor de prestigiu şi dătător *"de cărţi atractive şi lămur* (*D. Brânzei*) ale geometriei, ale şirurilor de numere şi ale pătratelor mag istoriei matematicii.

Nu mi-am propus în această notă o incursiune în bibliografia acestei **D a matematicii**. Au făcut-o alţii cu mai multă râvnă şi pricepere înainte M-am gândit doar că sfârşitul toamnei poate constitui pentru ieşeni (şi nu un prilej de aducere aminte a faptului că pe 26 noiembrie 1906 la Iaşi, pe t matematicii o **"aleasă a Domnului"** se ivea să-şi împlinească harul. Căci **profesor doctor-docent Florica T. Câmpan** matematica nu este o simplă Ea reprezintă, ca şi credinţa, o cale prin care poţi să fii mai aproape de div Rândurile mele se doresc a fi mai mult un prilej de a scrie despre ceva dr redescoperirea prin lectură a universului matematicii.

Şi poate atunci când iarna îşi va intra în drepturi, veţi găsi o clipă de răgaz despre *"Istoria numărului π"*, despre *"Probleme celebre din istoria matemati* trăiţi *"Aventura geometriilor neuclidiene"*, să aflaţi cine sunt *"Licuricii din ad* şi să simţiţi că *"Dumnezeu şi matematica"* au aceeaşi esenţă.

Supleţea şi persuasiunea discursului matematic, profunzimea discursului fi savoarea dialogului te fac să uiţi ariditatea "terenului" pe care te afli, îţi adu matica măcar mai aproape de suflet, dacă nu de minte.

Chiar dacă, personal, nu am excelat în domeniu şi nici timp s-o fac nu m-am aflat prin intermediul d-nei **Florica T. Câmpan** într-un dialog cu mate dincolo de catalog, dincolo de folosirea ei măruntă şi leneşă, la interferenţa din şi divin.

A venit apoi firesc întrebarea: un învăţător aproape neştiut poate aduce c în lumea matematicii? Răspunsul a venit prompt. Da, poate veni cu put de pătrundere, cu puţină lumină în mintea copiilor, iar dacă nu are nimic di acestea, poate veni cu sufletul... Pentru că ea, MATEMATICA, este prete VREA TOTUL!

Înv. Luminiţa Murariu, Şcoala "Elena Cuza", Ia

Concursul "Adolf Haimovici", ediţia a VII-a[1]

pentru liceele economice, industriale şi agricole

Faza judeţeană, 22 februarie 2003

Clasa a IX-a

1. Să se demonstreze că există o singură funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 +$
unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, astfel încât a, Δ, P şi S să fie numere întregi consecu
această ordine.

2. Să se arate că dacă $a, b, c \in [0, +\infty)$ şi $a + b + c = 1$, atunci

$$abc\,(a+b)\,(b+c)\,(c+a) \leq \frac{8}{729}.$$

3. Să se scrie ecuaţiile laturilor unui triunghi ABC dacă se cunosc $A($
ecuaţiile a două mediane: $x - 2y + 1 = 0$ şi $y - 1 = 0$.

Clasa a X-a

1. *a*) Se consideră numerele reale strict pozitive a_1, a_2, a_3 cu produsul $p =$
diferit de 1. Dacă $m = \log_p a_1$, $n = \log_p a_2$, să se exprime în funcţie de m şi n n
$\log_p a_3^q$, unde $q \in \mathbb{R}$.

b) Dacă $m = \log_{70} 2$, $n = \log_{70} 5$, calculaţi $\log_{70} 49$.

c) Rezolvaţi ecuaţia $3^{|x+1|} - 2\,|3^x - 1| = 3^x + 2$.

2. *a*) Arătaţi că $\dfrac{1}{(a+1)^2} < \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{a+1} < \dfrac{1}{a^2}$, $a \in (0, \infty)$.

b) Demonstraţi că $\dfrac{1}{101^2} + \dfrac{1}{102^2} + \cdots + \dfrac{1}{2002^2} + \dfrac{1}{2003^2} < 10^{-2}$.

3. Fie O mijlocul laturii BC a triunghiului ABC, M un punct pe perpend
în O pe planul (ABC). Fie D proiecţia pe BC a lui A, E proiecţia pe MB a
F proiecţia pe MC a lui A. Arătaţi că dacă $MO = \dfrac{1}{2}BC$, atunci $(ADE) \perp ($

Clasa a XI-a

I. 1. Să se rezolve ecuaţia în x: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & b & c \\ x^2 & a^2 & b^2 & c^2 \\ x^3 & a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = 0$, unde $a, b, c \in \mathbb{C}$. D

2. Valorile parametrului real a pentru care matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & x \\ x & -1 \\ 3 & x+2 \end{pmatrix}$
este inversabilă pentru orice $x \in \mathbb{R}$ sunt:

a) $\left(\dfrac{1}{2}, 2\right)$; *b*) $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right) \cup (2, \infty)$; *c*) $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$; *d*) $\emptyset$; *e*) $\mathbb{R}$.

II. 1. Să se studieze convergenţa şirului $a_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$, $n \geq 1$.

2. Fie $a_n = \dfrac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \ldots \cdot \cos nx}{x^2}$.

[1] **Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 2 ore.

$a)$ Să se determine $\lim\limits_{x\to 0} a_1$.

$b)$ Să se demonstreze că $a_n = a_{n-1}\cos nx + \dfrac{1-\cos nx}{x^2}$.

$c)$ Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} a_n$.

III. 1. Studiaţi continuitatea funcţiei $f(x) = \begin{cases} (x+e^x)^{1/x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ în x

2. Valorile $a, b, c \in \mathbb{R}$ aşa încât $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(ax - \sqrt{cx^2+bx-2}\right) = 1$ sunt:

$a)$ $a = c = 1$, $b = 0$; $b)$ $a = 0$, $b = 1$, $c < 0$; $c)$ $a > 0$, $c < 0$, $b = 0$; $d)$ $\nexists$
$e)$ $a = b = c = 0$.

Clasa a XII-a

I. Fie mulţimea $A = (0,\infty) - \{1\}$, $a \in A$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Definim pe A le
compoziţie $x * y = x^{\alpha \log_a y}$. Notăm cu $G_{a,\alpha} = (A, *)$. Demonstraţi că $G_{a,\alpha}$ es
abelian.

II. Arătaţi că dacă $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ şi $\dfrac{1+z+z^2}{1-z+z^2} \in \mathbb{R}$, atunci $|z| = 1$.

III. 1. Să se determine $k \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$f(x) = \begin{cases} \ln\left(x^2+1\right), & x > 0 \\ xe^{2x} + k, & x \leq 0 \end{cases}$ să admită primitive şi să se găsească o primitiv

2. Determinaţi primitivele funcţiei $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2 - 2x^2\cos 2\alpha + 1}$
α este oarecare din intervalul $(0, \pi/4)$, iar $D \subseteq \mathbb{R}$.

Faza interjudeţeană, Iaşi, 9 - 11 mai, 2003

Clasa a IX-a

1. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $-7 < \dfrac{x^2+(m+1)x-5}{x^2-x+1} < 3$, $x \in$

2. Fie $a \in \mathbb{R}$ fixat. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{a^3 - x} = a$.

3. $a)$ Să se demonstreze identitatea $\sin 10^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ = \dfrac{1}{8}$.

$b)$ Se dă paralelogramul $ABCD$. Fie $M \in [DC]$ astfel încât $\dfrac{DM}{DC} = k$ şi $N \in$
astfel încât $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{NA}$. Să se arate că $D - N - B$ coliniare.

Clasa a X-a

1. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică. Dacă $3a_4^2 + a_6^2 + 6(a_4 + a_6 + 2) = 0$
$a)$ a_1, r; $b)$ a_8, S_8.

2. Fie numerele $a, b, c \in (1, 2]$. Să se demonstreze egalitatea:

$$\log_a(3b-2) + \log_b(3c-2) + \log_c(3a-2) \geq 6.$$

3. $a)$ Dacă $a, b \in \mathbb{R}^*$, în dezvoltarea $(a+b)^n$ nu există trei termeni cons
egali;

$b)$ Să se arate că partea întreagă a numărului $\left(3+2\sqrt{2}\right)^n$ este un număr
impar, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Clasa a XI-a

1. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ distincte şi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{(x-a)^2 (x-b)}$.

$a)$ Să se determine mulţimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid f$ are derivată în $x\}$;

$b)$ Să se arate că funcţia f are două puncte de extrem local x_1, x_2, iar dac
atunci $x_1, x_2 \in [a, b)$.

2. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^p + 2^p\sqrt{2!} + 3^p\sqrt[3]{3!} + \cdots + n^p\sqrt[n]{n!}}{n^{p+2}}$.

3. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a & 0 & \ldots & 0 & b \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -b & 0 & \ldots & 0 & a \end{pmatrix}$, $0 \le a^2 + b^2 < 1$
arate că $A^m \ne O_n$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$, dar $\lim\limits_{m\to\infty} A^m = O_n$.

Clasa a XII-a

1. Fie $G = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ şi operaţia $x * y = x^{\log_a y}$, $\forall x, y \in G$, $a > 0$, $a \ne 1$
arate că $(G, *)$ este grup abelian şi $(G, *) \cong (\mathbb{R}^*, *)$.

2. Să se calculeze $\displaystyle\int \frac{\sin x}{3\sin x + 4\cos x}\, dx$.

3. Fie $G = \left\{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ a^2 - 5b^2 = 1\right\}$.

$a)$ Să se arate că $(G, *)$ este grup abelian;

$b)$ Să se arate că G are cel puţin 2003 elemente.

Recreaţii ... matematice

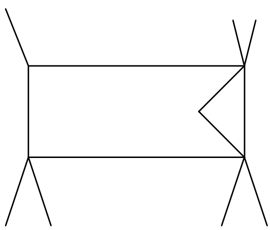
Soluţiile problemelor enunţate la pagina 18.

1. Cei patru oameni procedează astfel:

– a şi b trec podul (2 minute);
– a se întoarce (1 minut);
– c şi d trec podul (10 minute);
– b se întoarce (2 minute);
– a şi b trec podul (2 minute).

În acea noapte, după 17 minute, a, b, c şi d trec astfel podul.

2. Modificarea necesară se vede pe figură.



Concursul “Traian Lalescu”, ediţia a IV-a[1]
mai 2003, Iaşi

1. Să se calculeze: $1 - (6 + 12 : 3) : 10$.

2. Suma a două numere este 60. Dacă unul dintre ele este de 3 ori ma
decât celălalt, să se afle diferenţa lor.

3. Să se afle x din egalitatea: $33 + 3 \cdot [(3 + 99 : x) \cdot 9 - 33] = 96$.

4. Să se afle restul împărţiri numărului $a = 1903 + 1904 + 1905 + \ldots +$
2003.

5. Să se calculeze: $(900 - 1 - 2 - \ldots - 40) \cdot 80 - 80 \cdot 80$.

6. Să se determine numerele naturale nenule a, b, c ştiind că: $a \cdot [7 + 4 \cdot (3b +$
$= 35$.

7. Să se determine câte numere de trei cifre $\overline{abc}$ au proprietatea: $\overline{abc} = \overline{cl}$

8. Elevii unei clase, în număr de 30, au participat la un concurs de r
probleme. Ştiind că 25 elevi au rezolvat bine prima problemă, 24 pe a doua,
treia şi 22 pe a patra, să se determine numărul minim de elevi care au rezolv
toate problemele.

9. Într-o sală de spectacole scaunele sunt aşezate câte 25 pe rând. Dacă
ocupă locul 630 pe rândul din mijloc, ce loc ocupă Cristina, care este pe ultim
în dreptul Ioanei?

10. Ana şi Maria au împreună 63 de ani. Ana are în prezent de două ori ma
ani decât a avut Maria atunci când Ana avea cât are Maria acum. Să se det
ce vârstă are acum Ana şi ce vârstă are Maria.

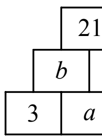
11. Într-o clasă fiecare băiat este prieten cu trei fete şi fiecare fată este p
cu doi băieţi. Dacă în clasă sunt 19 bănci (de câte două locuri) şi 31 de ele
pasionaţi de matematică, câţi elevi sunt în clasă?

12. Elevii prezenţi la Concursul de matematică "Traian Lalescu" au fost
tizaţi în mod egal în 18 săli de clasă, astfel încât în fiecare sală numărul elev
fie mai mare decât 11 şi mai mic decât 17. Dacă numărul băieţilor este de pa
mai mic decât numărul fetelor, să se afle numărul concurenţilor.

13. În pătratul alăturat suma numerelor de pe fiecare linie, de pe fiecare coloană şi de pe fiecare din cele două diagonale este aceeaşi. Să se determine numerele a, b, c, d, e.

a	b
5	c
22	e

14. Fiecare număr înscris într-un pătrat din figura alăturată este egal cu suma numerelor din pătratele pe care se sprijină. Să se determine numerele a, b, c.



[1] **Notă.** Fiecare subiect va fi notat cu cinci puncte. Timp de lucru: 2 ore.

Olimpiada de matematică – cl. a V-a şi a VI-
Etapa judeţeană, 10 mai 2003

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 2 ore.

Clasa a V-a

I. 1. Suma a k numere naturale consecutive poate fi o putere a lui 2 (k

2. Să se găsească restul împărţirii numărului $n = 1000^{1000}$ la 27.

Aurel

II. 1. Determinaţi cel mai mic număr $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât 9^3 divide $\underbrace{999\ldots}_{k \text{ ci}}$

Petru

2. Avem la dispoziţie un număr nelimitat de jetoane pe care sun numerele naturale 5, 7 sau 11. Spunem că "am obţinut numărul n" dacă pute jetoane cu suma numerelor de pe ele egală cu n. Arătaţi că 13 este cel ma număr care nu poate fi obţinut.

Valerica

III. La un stadion cu capacitatea de 10000 locuri, vin spectatorii. În minut vine un spectator, în al doilea minut vin trei spectatori, în al treilea mi cinci spectatori şi aşa mai departe. Să se afle după câte minute se umple sta

Clasa a VI-a

I. Arătaţi că dacă $x+y$, $y+z$, $z+x$ sunt direct properţionale cu numerel $a+2$ şi $a+3$, $a \in \mathbb{N}^*$, atunci $\dfrac{x}{y} + \dfrac{z}{x} \leq 4\dfrac{2}{3}$.

II. Fie $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{Z}^*$. Demonstraţi că numerele: $a_2b_3c_1$, $a_3b_1c_2$, $-a_1b_3c_2$, $-a_2b_1c_3$, $-a_3b_2c_1$ nu pot fi simultan pozitive.

III. 1. În triunghiul ABC, bisectoarea unghiului B intersectează înălţime $M \in (BC)$, în punctul O. Construim $OP \perp AB$, $P \in (AB)$.

a) Dacă P este mijlocul lui $[AB]$, demonstraţi că măsura unghiului $\angle BA$ $30°$.

b) Dacă O este centrul de greutate al triunghiului, arătaţi că triunghiul AE echilateral.

Marius

2. Se consideră triunghiul ABC şi punctele $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ astf $[BM] \equiv [AN]$. Să se calculeze măsura unghiului $\widehat{CPN}$, unde $BN \cap CM = \{$

ERRATA

1. În finalul soluţiei problemei **XII.26** (RecMat 1/2003, p. 64) au fost rândurile: "*... în cazul $A = R$. Dacă $A = Q$, atunci $(M, \cdot) \cong (\mathbb{Q}, +)$, însă gr $(\mathbb{Q}, +)$ şi $\left(\mathbb{Q}_+^*, \cdot\right)$ nu sunt izomorfe. În sfârşit $\left(\mathbb{Z}_+^*, \cdot\right)$ nu este grup.*".

2. În enunţul problemei **V.40** (RecMat 1/2003, p. 80) în loc de "$2n +$ *mulţimi*" se va citi "$4n + 3$ *submulţimi*".

Olimpiada Balcanică de Matematică pentru Jun
Ediţia a VII-a, Izmir (Turcia), 20 - 25 iunie 2003

A. Problemele de concurs - enunţuri şi soluţii

1. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Numărul A este format din $2n$ cifre de 4, iar numărul
format din n cifre de 8. Să se arate că $A + 2B + 4$ este pătrat perfect.

S. Grkovska, Mac

2. Fie n puncte în plan, oricare trei necoliniare, cu propietatea (P):
am numerota aceste puncte $A_1, A_2, \ldots, A_n$, linia frântă $A_1A_2\ldots A_n$ nu se
tersectează. Găsiţi valoarea maximă a lui n.

D. Şerbănescu, Ro

3. Pe cercul circumscris $\triangle ABC$, arcele $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$ se consideră astf
$C \notin \overset{\frown}{AB}$, $A \notin \overset{\frown}{BC}$, $B \notin \overset{\frown}{CA}$ şi fie F, D, respectiv E mijloacele acestor arce. No
G, H punctele de intersecţie ale lui DE cu CB, respectiv CA şi cu I, J punc
intersecţie ale lui DF cu BC, respectiv BA. Fie M, N mijloacele lui $[GH]$, re
$[IJ]$.

a) Găsiţi unghiurile $\triangle DMN$ funcţie de unghiurile $\triangle ABC$.

b) Dacă O este centrul cercului circumscris $\triangle DMN$ şi $\{P\} = AD \cap EF$,
că O, P, M şi N sunt conciclice.

Ch. Lozanov, Bu

4. Fie $x, y, z \in (-1, \infty)$. Să se arate că $\dfrac{1+x^2}{1+y+z^2} + \dfrac{1+y^2}{1+z+x^2} + \dfrac{1+z^2}{1+x+}$

L. Panaitopol, Ro

1. Soluţia redacţiei. Se constată uşor că

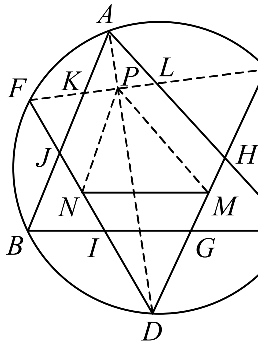
$$A + 2B + 4 = 4 \cdot \underbrace{\overline{11\ldots1}}_{2n} + 16 \cdot \underbrace{\overline{11\ldots1}}_{n} + 4 = 4 \cdot \frac{10^{2n}-1}{9} + 16 \cdot \frac{10^n - 1}{9} +$$

$$= \frac{4 \cdot 10^{2n} + 16 \cdot 10^n + 16}{9} = \left(\frac{2 \cdot 10^n + 4}{3}\right)^2 = \underbrace{\overline{66\ldots68}}_{n}{}^2.$$

2. Există mulţimi de 4 puncte cu proprietatea (P), de exemplu mulţim
furilor unui patrulater concav. Vom arăta că nu există mulţimi cu $n \geq 5$
satisfăcând (P). Să observăm că dacă printre cele n puncte există patru A
D astfel ca $ABCD$ să fie patrulater convex, cu renotarea $A_1 = A$, $A_2 = C$, A
$A_4 = D$ am avea $[A_1A_2] \cap [A_3A_4] \neq \emptyset$, deci (P) nu ar avea loc. Arătăm că
$n \geq 5$, putem selecta 4 puncte care să fie vârfurile unui patrulater convex.
arbitrar 5 puncte din mulţime şi considerăm închiderea lor convexă. Dacă ace
este triunghi, problema este rezolvată. Dacă este triunghi, dreapta determi
cele două puncte din interiorul lui taie exact două laturi ale triunghiului; fie A
comun al acestor două laturi. Cele patru puncte rămase determină un pat
convex, ceea ce încheie soluţia.

3. *a*) Notăm $m(\widehat{A}) = m(\overset{\frown}{BD}) = m(\overset{\frown}{DC}) = \alpha$, $m(\widehat{B}) = m(\overset{\frown}{AE}) = m(\overset{\frown}{EC}$
$m(\widehat{C}) = m(\overset{\frown}{AF}) = m(\overset{\frown}{FB}) = \gamma$. Atunci $m(\widehat{D}) = \dfrac{1}{2}(\beta + \gamma) = \dfrac{1}{2}(180^\circ - \alpha) = 9$

Analog, $m(\widehat{DEF}) = 90^\circ - \dfrac{\beta}{2}$, iar $m(\widehat{DFE}) = 90^\circ - \dfrac{\gamma}{2}$. Pe de altă parte, $m(\widehat{E}$



$= \frac{1}{2}\left[m(\overset{\frown}{AE}) + m(\overset{\frown}{CD})\right] = \frac{1}{2}\left[m(\overset{\frown}{CE}) + m(\overset{\frown}{BD})\right] =$ $= m(\widehat{CGE})$, deci $\widehat{CHG} \equiv \widehat{CGH}$, adică $\triangle CGH$ este isoscel. Cum CF este bisectoare, ea va fi mediană şi înălţime, prin urmare $M \in CF$ şi $m(\widehat{EMF}) = 90°$. Analog se arată că $m(\widehat{FNE}) = 90°$, deci patrulaterul $EMNF$ este inscriptibil şi atunci $m(\widehat{DMN}) =$ $= m(\widehat{DEF}) = 90° - \frac{\beta}{2}$, iar $m(\widehat{DMN}) = m(\widehat{DFE}) =$ $90° - \frac{\gamma}{2}$.

b) Fie $\{K\} = AB \cap EF$, $\{L\} = AC \cap EF$; ca la punctul *a*) se arată că AP $m(\widehat{FPN}) = m(\widehat{EPM}) = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Însă $m(\widehat{AKP}) = m(\widehat{ALP}) = 90° -$ $AB \parallel PN$ şi $AC \parallel PM$, de unde $m(\widehat{MPN}) = m(\widehat{BAC}) = \alpha$. Avem că $\triangle DM$ ascuţitunghic (i. e. O este punct interior lui), iar $m(\widehat{MDN}) = 90° - \frac{\alpha}{2}$ şi $m(\widehat{MON}) = 180° - \alpha$. Urmează că $m(\widehat{MON}) + m(\widehat{MPN}) = 180°$, adică p O, P, M, N sunt conciclice.

4. Deoarece $y \leq \frac{1+y^2}{2}$ (cu egalitate pentru $y = 1$), avem că $\frac{1+}{1+y}$ $\geq \frac{2\left(1+x^2\right)}{2\left(1+z^2\right)+\left(1+y^2\right)}$. Scriind analoagele şi adunându-le, cu notaţiile $a =$ $b = 1 + y^2$, $c = 1 + z^2$, inegalitatea de demonstrat devine

$$\frac{a}{2c+b} + \frac{b}{2a+c} + \frac{c}{2b+a} \geq 1, \quad \forall a, b, c > 0.$$

Pentru a demonstra (∗), folosind Cauchy-Schwarz şi binecunoscuta $a^2 + b^2$ $\geq ab + bc + ac$, avem

$$\frac{a}{2c+b} + \frac{b}{2a+c} + \frac{c}{2b+a} = \frac{a^2}{2ac+ab} + \frac{b^2}{2ab+bc} + \frac{c^2}{2bc+ac} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3\,(ab+bc+a}$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $a = b = c$. Egalitatea în inegalitatea iniţială se pentru $x = y = z = 1$.

Altfel, (∗) se poate demonstra renotând numitorii $A = 2c + b$, $B =$ $C = 2b + a$; după calcule, se obţine

$$\frac{C}{A} + \frac{A}{B} + \frac{B}{C} + 4\left(\frac{B}{A} + \frac{C}{B} + \frac{A}{C}\right) \geq 15, \quad A, B, C > 0.$$

Este însă clar că $\frac{C}{A} + \frac{A}{B} + \frac{B}{C} \geq 3\sqrt[3]{\frac{C}{A} \cdot \frac{A}{B} \cdot \frac{B}{C}} = 3$ şi analoaga.

B. Probleme aflate în atenţia juriului - enunţuri

1. Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi, $p = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$, iar $q = \frac{a}{c} +$ Să se arate că $|p - q| < 1$.

2. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ cu $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Să se arate că $ab + bc + ca - 2\,(a + b + c)$

3. Fie $a, b, c \in \mathbb{Q}$ cu $\dfrac{1}{a+bc} + \dfrac{1}{b+ac} = \dfrac{1}{a+b}$. Arătaţi că $\sqrt{\dfrac{c-3}{c+1}} \in \mathbb{Q}$.

4. Fie $a, b, c \in \mathbb{N}$ lungimile laturilor unui triunghi neisoscel. Demonst $\left|ab^2 + bc^2 + ca^2 - a^2b - b^2a - c^2a\right| \geq 2$.

5. Fie $a, b, c \in (0, \infty)$ cu $ab + bc + ca = 3$. Arătaţi că $a + b + c \geq abc + 2$.

6. Demonstraţi că există mulţimi disjuncte $A = \{x, y, z\}$ şi $B = \{m, r$ numere naturale mai mari ca 2003 astfel încât $x + y + z = m + n + p$ şi $x^2 + y^2$ $= m^2 + n^2 + p^2$.

7. Numerele $1, 2, 3, \ldots, 2003$ sunt renotate $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2003}$. Definim b $b_2 = 2a_2$, $b_3 = 3a_3$, $\ldots$, $b_{2003} = 2003a_{2003}$ şi fie B cel mai mare dintre b_k, $k =$

a) Dacă $a_1 = 2003$, $a_2 = 2002$, $\ldots$, $a_{2003} = 1$, găsiţi valoarea lui B.

b) Demonstraţi că $B \geq 1002^2$.

8. Fie $M = \{1, 2, 3, 4\}$. Fiecare punct al planului este colorat în roşu sau al Arătaţi că există cel puţin un triunghi echilateral de latură $m \in M$ cu vârfu aceeaşi culoare.

9. Există un patrulater convex pe care diagonalele să-l împartă în patru ghiuri cu ariile numere prime distincte?

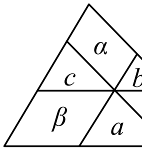
10. Există un triunghi cu aria 12 cm^2 şi perimetrul 12 cm?

11. Fie G centrul de greutate al $\triangle ABC$, iar A' simetricul lui A faţă de C arate că G, B, C, A' sunt conciclice dacă şi numai dacă $GA \perp GC$.

12. Trei cercuri egale au în comun un punct M şi se intersectează câte A, B, C. Demonstraţi că M este ortocentrul $\triangle ABC$[1].

13. Fie $\triangle ABC$ cu $AB = AC$. Un semicerc de diametru $[EF]$, cu $E, F \in$ este tangent laturilor AB şi AC în M, respectiv N, iar AE retaie semicercu Demonstraţi că dreapta PF trece prin mijlocul coardei $[MN]$.

14. Paralelele la laturile unui triunghi duse printr-un punct interior împart interiorul triunghiului în 6 părţi cu ariile notate ca în figură. Demonstraţi că $\dfrac{a}{\alpha} + \dfrac{b}{\beta} + \dfrac{c}{\gamma} \geq \dfrac{3}{2}$.



Echipa României a fost condusă de prof. **Dan Brânzei**, asistat de prof **Şerbănescu**. În clasamentul neoficial pe naţiuni, România a ocupat primul 205 puncte din 240 posibile, urmată de Bulgaria (182 puncte) şi Turcia (124 p în continuare, s-au situat R. Moldova, Serbia, Macedonia, Grecia şi Ciprul. C nenţii echipei României au obţinut următoarele punctaje şi medalii (cu mer că primii doi sunt singurii elevi care au realizat punctajul maxim!):

Dragoş Michnea (Baia Mare)	– 40 p	– Aur
Adrian Zahariuc (Bacău)	– 40 p	– Aur
Lucian Ţurea (Bucureşti)	– 38 p	– Aur
Cristian Tălău (Craiova)	– 37 p	– Aur
Sebastian Dumitrescu (Bucureşti)	– 29 p	– Argint
Beniamin Bogoşel (Arad)	– 21 p	– Bronz.

[1] Identificată drept problema piesei de 5 lei a lui Ţiţeica.

Un nou concurs internaţional de matematic

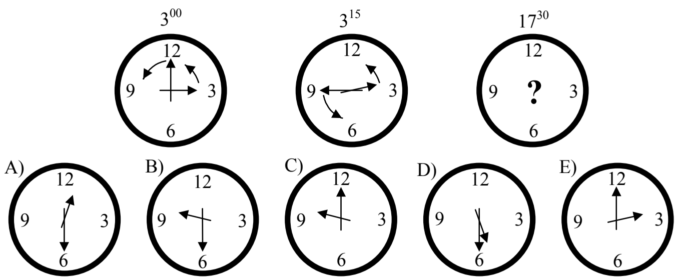
În primăvara anului 2001, România a lansat prin **"Fundaţia pentru Int Europeană Sigma"**, un nou concurs internaţional de matematică. Competi tulată **"MCM - Multiple Choice Contest in Mathematics"**, este prevăzu desfăşura pe echipe de câte 4-6 elevi ce aparţin la patru categorii de vârstă: 11- 13-14 ani, 15-16 ani şi 17-18 ani. În fiecare echipă pot intra cel mult două p din aceeaşi grupă de vârstă şi este posibilă colaborarea între membrii ei. Fieca ticipant primeşte câte 20 probleme-grilă gradate pe trei nivele de dificultate, de lucru fiind de 90 minute. Oricare dintre probleme are 5 variante de răspu singură fiind corectă. Un răspuns bun aduce 4 puncte, unul incorect scade 2 în timp ce cazurile netratate aduc diminuări de câte 1 punct. Clasamentul este dat de media aritmetică a punctelor obţinute de componenţii ei.

Jocul-concurs **"MCM"** s-a dorit a fi faza finală internaţională a câştig naţionali ai jocului-concurs **"Cangurul"**, adus din Australia în Europa pri mediul asociaţiei pariziene **"Kangourou sans Frontières"** (în România competiţie s-a introdus începând cu anul 1994). Competiţia a avut loc pe 2001 la Poiana Pinului (Buzău) şi au participat următoarele ţări: *Austria, B Bulgaria, Franţa, Georgia, Italia, Lituania, R. Moldova, România, Spania,* şi *Ungaria.* Pe primele trei locuri s-au situat: 1. *România*, 2. *Franţa*, 3. *B* Echipa României a fost formată din elevii: **Eduard Dogaru** (12 ani), **R Leonte** (12 ani), **Gabriel Kreindler** (14 ani), **Bogdan Bucşă** (16 ani), **T Pristavu** (16 ani) şi **Bogdan Stan** (18 ani).

Vom prezenta mai jos 12 probleme, câte 3 pentru fiecare categorie de vâr

Grupa 1 (11-12 ani)

1.

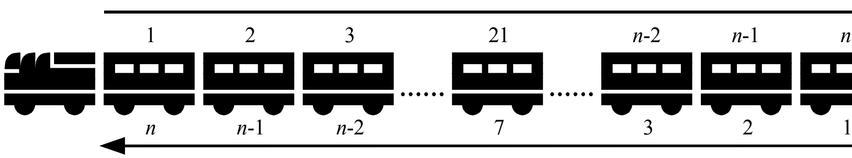


2. $a, b, c \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ $\quad \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} = ?$

A) 132 B) 48 C) 72 D) 51 E) 37

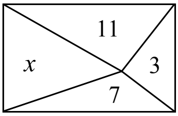
Laurenţiu M

3. $n = ?$



A) 28 B) 25 C) 27 D) 29 E) 31

Grupa 2 (13-14 ani)

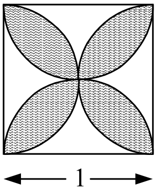
4. 

$x=?$

A) 15 B) 20 C) 18 D) 16 E) 25

5. $E=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{2001}+\sqrt{2002}}$

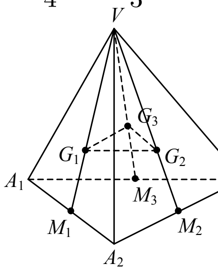
A) $E<1$ B) $2001<E<2002$ C) $43<E<44$ D) $33<E<34$ E) $E\geq$

6. 

$S=?$

A) $2+\dfrac{\pi}{2}$ B) $\dfrac{\pi}{2}-1$ C) $\dfrac{\pi}{2}+1$ D) $3+\dfrac{\pi}{4}$ E) $\dfrac{\pi}{3}-1$

Grupa 3 (15-16 ani)



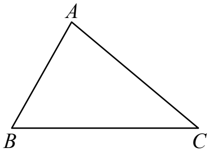
7. $M_1A_1=M_1A_2,\ M_2A_2=M_2A_3,\ M_3A_1=M_3A_3,$ $\dfrac{G_1M_1}{G_1V}=\dfrac{G_2M_2}{G_2V}=\dfrac{G_3M_3}{G_3V}=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{S_{G_1G_2G_3}}{S_{A_1A_2A_3}}=?$

A) $\dfrac{1}{9}$ B) $\dfrac{1}{3}$ C) $\dfrac{2}{3}$ D) $\dfrac{4}{9}$ E) $\dfrac{1}{4}$

8) $\left(a^2-1\right)x^4+\left(a^2-3\right)x^3-\left(3a^2+1\right)x^2+\left(5a^2+3\right)x-2\left(a^2-1\right)=0,\ a\in\mathbb{R}$ $x_1=x_2=x_3=1.\ a=?$

A) $a=0$ B) $a\in\left\{\pm\sqrt{2}\right\}$ C) $a\in\emptyset$ D) $a=2$ E) $a=1/2$

Laurenţiu Modan şi Dinu Teod

9. 

$BC=2\,AB,\ \widehat{A}=3\,\widehat{C},\ \widehat{B}=?$

A) $\widehat{B}=60^\circ$ B) $\widehat{B}=30^\circ$ C) $\widehat{B}=50^\circ$ D) $\widehat{B}=90^\circ$
E) $\widehat{B}=40^\circ$

Grupa 4 (17-18 ani)

10. $(3x+1)^{3n+2}+x+2=\left(x^2+3x+3\right)C(x)+R(x),\ n\in\mathbb{N},\ 0\leq \operatorname{grad} R(x$

A) $R(x)=x^2-1$ B) $R(x)=2x+3$ C) $R(x)=0$ D) $R(x)=1$ E) $R(x)=$

Traian L

11. $C_{2001}^0+C_{2001}^1+\ldots+C_{2001}^{2001}=\overline{a_1\ldots a_n},\ a_i\in\{0,\ldots,9\},\ i=\overline{1,n}.$

A) $a_n=2$ B) $a_n=4$ C) $a_n=8$ D) $a_n=1$ E) $a_n=6$

Laurenţiu M

12. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f'(\ln x)=\begin{cases}1, & x\in(0,1)\\ x, & x\in[1,\infty)\end{cases},\ f(0)=1,\ s=f(-1)+f(1)$

A) $s<0$ B) $s=e$ C) $s=2$ D) $s=e-2$ E) $s=(e+1)/2$

Laurenţiu Modan şi Dinu Teod

Răspunsuri: 1 A; **2** A; **3** C; **4** A; **5** C; **6** B; **7** A; **8** C; **9** A; **10** C; **11** A; **12**

Conf. dr. **Laurenţiu Modan**
Fac. de Cibernetică şi Informatică Ecoc
A. S. E., Bucureşti

Soluţiile problemelor propuse în nr. 2 / 2002

Clasele primare

P.33. *Care este cel mai mare număr pe care îl spunem atunci când nu* *crescător din doi în doi, din trei în trei sau din cinci în cinci, pornind de la* 1 *să depăşim* 100*?*

(*Clasa I*) **Raluca Popa, elev**

Soluţie. Sunt spuse şirurile de numere $(1, 3, 5, \ldots, 97, 99)$, $(1, 4, 7, \ldots, 97,$ $(1, 6, 11, \ldots, 91, 96)$. Numărul 100 îndeplineşte cerinţa problemei.

P.34. *Numărul merelor de pe o farfurie este cu* 3 *mai mare decât cel m* *număr natural scris cu o cifră. Numărul perelor de pe aceeaşi farfurie nu de* *numărul merelor, dar este mai mare decât jumătate din numărul acestora. C* *pot fi pe farfurie?*

(*Clasa I*) **Înv. Maria Rac**

Soluţie. Numărul merelor este $9 + 3 = 12$. Jumătatea lui 12 este 6. Pe pot fi: 7, 8, 9, 10, 11 sau 12 pere.

P.35. *Care dintre numerele* 3132*,* 8182*,* 3435*,* 3932*,* 2021*,* 5960 *este intr*

(*Clasa a II-a*) **Matei Luca, ele**

Soluţie. Toate numerele, cu excepţia lui 3932, sunt formate cu cifrele numere consecutive. Intrusul este 3932.

P.36. *Cum putem realiza egalităţile*

$$4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 = 28 \quad \text{şi} \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 = 28$$

înserând între cifrele 4 *de mai sus semnele grafice* $+$, $-$, $\times$, $:$, $(\ )$*?*

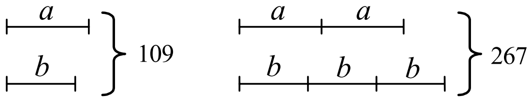
(*Clasa a II-a*) **Alexandru-Gabriel Tudorache, ele**

Soluţie. Pentru prima egalitate avem $(4 + 4) \times 4 - 4 = 28$. Pentru egalitate avem $(4 + 4) \times 4 - 4 : (4 : 4) = 28$ sau $(4 + 4) \times 4 - 4 + 4 - 4 =$

P.37. *Suma a două numere naturale este* 109*. Dacă îl dublăm pe prim* *triplăm pe al doilea, suma devine* 267*. Care sunt numerele?*

(*Clasa a II-a*) **Înv. Galia Paraschiv**

Soluţie.



Dublul sumei numerelor a şi b este $109 \times 2 = 218$. Al doilea număr este $267-21$ iar primul număr este $109 - 49 = 60$.

P.38. *Câte înmulţiri de tipul* $\overline{abc} \times 9 = \overline{8d1e}$ *sunt posibile?*

(*Clasa a III-a*) **Sergiu Diaconu, ele**

Soluţie. Avem $\overline{abc} = \overline{8d1e} : 9 = \left(8010 + \overline{d0e}\right) : 9 = 890 + \overline{d0e} : 9$. Dis cazurile: $d = 1$, $e = 8$; $d = 2$, $e = 7$; $\ldots$; $d = 8$, $e = 1$; $d = 9$, $e = 0, 9$; în to cazuri. Adăugând şi cazul $d = 0$, $e = 0, 9$, obţinem 12 înmulţiri posibile.

P.39. *Scrieţi cel mai mic număr natural de şase cifre care îndeplineşte, în* *timp, condiţiile: a) nu are cifre care se repetă; b) suma cifrelor sale este* 30*;*

mai mare decât 900000.

(*Clasa a III-a*) **Înv. Maria Rac**

Soluţie. Cel mai mare număr natural scris cu şase cifre distincte este care are suma cifrelor 39. Numărul căutat este 987510.

P.40. *Emilia are de rezolvat un număr de probleme. A hotărât să rezolve probleme pe zi. Ea lucrează însă mai mult cu* 2 *probleme pe zi şi termină de cu* 5 *zile mai devreme. Câte probleme a avut de rezolvat şi în câte zile le-a ter*

(*Clasa a III-a*) **Înv. Doiniţa Spân**

Soluţie. Emilia rezolvă câte $4+2=6$ probleme pe zi. În ultimele 5 zile tre rezolve $5\times 4=20$ probleme. Emilia a terminat de rezolvat problemele în 20 : zile şi a rezolvat $10\times 6=60$ probleme.

P.41. *Ştiind că data de* 1 *Decembrie din anul* 2001 *a fost într-o zi de să să se afle care va fi următorul an în care ziua de* 1 *Decembrie se va sărbător zi de duminică.*

(*Clasa a IV-a*) **Înv. Rodica Rotaru, I**

Soluţie. De la 1.12.2001 până la 30.11.2002 sunt 365 zile. Deoarece $=7\times 52+1$, ziua de 30.11.2002 este într-o sâmbătă. Ziua de 1.12.2002 se va să într-o zi de duminică.

P.42. *Dănilă Prepeleac i-a propus dracului să se întreacă la trântă, dar a-l pune la încercare i-a spus că are un unchi, moş Ursilă, bătrân de* 999 *ar săptămâni, şi de-l va putea trânti pe dânsul, se vor întrece apoi amândoi .*

din vârsta lui moş Ursilă depăşeşte cu 220 *ani* $\frac{5}{8}$ *din vârsta nepotului, ce vâr Dănilă?*

(*Clasa a IV-a*) **Înv. Valerica Beldima**

Soluţie. Vârsta lui moş Ursilă este 999 ani +52 săptămâni = 1000 ani. O p din vârsta lui moş Ursilă este $1000:4=250$ ani. Cinci optimi din vârsta ne reprezintă $250-220=30$ ani. Vârsta nepotului este $30:5\times 8=6\times 8=48$

P.43. *Primele douăsprezece numere dintr-un şir de numere sunt:* 1, 2, 1, 5, 6, 2, 7, 8, 0.

a) *Scrieţi următoarele* 6 *numere din şir;*

b) *Calculaţi suma primelor* 111 *numere din şir.*

(*Clasa a IV-a*) **Alina Stan, elev**

Soluţie. *a*) Observăm că: $(1+2):3=1$ (rest 0); $(3+4):3=2$ (rest 1); ($:3=3$ (rest 2). După fiecare grupă de două numere naturale consecutive a f restul împărţirii sumei lor la 3. Următoarele şase numere sunt: $9, 10, 1, 11, 12$

b) Avem $111:3=37$ grupe de câte trei numere în care intră primele 74 naturale cu suma $S_1=(1+74)\times 74:2=2775$. În trei grupe consecutiv resturile 0, 1, 2 care au suma 3. Cum $37=3\times 12+1$, înseamnă că suma re $S_2=12\times 3=36$. Suma celor 111 numere este $S=S_1+S_2=2775+36=2$

Clasa a V-a

V.31. *Să se arate că* $\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\ldots+\frac{1}{200}>\frac{7}{12}$.

Petru Asafte

Soluţie. Grupând termenii din sumă obţinem

$$\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\ldots+\frac{1}{200}=\left(\frac{1}{101}+\ldots+\frac{1}{150}\right)+\left(\frac{1}{151}+\ldots+\frac{1}{200}\right)>$$
$$>\frac{50}{150}+\frac{50}{200}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}.$$

V.32. *Determinaţi numerele prime a, b, c pentru care $5a+4b+7c=107$*

Mihai Crăciun, P

Soluţie. Deoarece $5a+7c$ trebuie să fie impar, a şi c au parităţi diferit prime, unul dintre ele este egal cu 2. Dacă $a=2$, atunci $4b+7c=97$, cu s $b=19$, $c=3$ şi $b=5$, $c=11$. Dacă $c=2$, atunci $5a+4b=93$, cu soluţiile $b=17$; $a=13$, $b=7$ şi $a=17$, $b=2$.

V.33. *Un număr natural scris în baza* 10 *are suma cifrelor* 603. *Este po succesorul său să aibă suma cifrelor* 1*? Dar ca acesta să aibă suma cifrelor*

Matei Luca, ele

Soluţie. Numărul $\underbrace{99\ldots9}_{67 \text{ cifre}}$ are suma cifrelor 603, iar succesorul său este cu suma cifrelor 1. La a doua întrebare, răspunsul este negativ, deoarece posibil ca atât numărul cât şi succesorul său să fie multipli de 3.

V.34. *Aflaţi numărul $\overline{abc}$, ştiind că $\overline{abc}=2^n\cdot\overline{ab}+3^n\cdot\overline{bc}+5^n\cdot\overline{ca}$, unde*

Nicolae Stănică,

Soluţie. În mod evident, $a, b, c\geq 1$. Pentru $n=0$, obţinem că $89a=b+$ cum $b+10c\leq 99$, rezultă că $a=1$. De aici, $b+10c=89$ şi deci $b=9$, $c=8$

Pentru $n=1$ obţinem că $75a=22b+52c$, de unde $25\mid 25\,(b+2c)+(2$ şi deci $25\mid 2c-3b$. Cum $2c-3b<25$ şi $2c-3b\geq -25$, obţinem $2c-3b=$ $2c-3b=-25$. Dacă $2c=3b$, atunci $3\mid c$. Cum $3\mid 75a$ şi $3\mid 52c$, rezultă că deci $3\mid b$ şi de fapt c este multiplu de 9. Obţinem deci $c=9$, $b=6$, $a=8$ $2c-3b=-25$, atunci $c=1$, $b=9$ şi atunci $75a=250$, deci a nu este întreg.

Pentru $n=2$ obţinem că $25a=84b+258c$. Cum $25a\leq 225$ şi $84b+$ ≥ 342, ecuaţia nu are soluţie în acest caz.

Pentru $n\geq 3$, $2^n\overline{ab}+3^n\overline{bc}+5^n\overline{ca}\geq 11\left(2^n+3^n+5^n\right)\geq 1760$, deci ecuaţia soluţie. În final, $\overline{abc}\in\{198, 869\}$.

V.35. *Se dă numărul $N=\overline{77\ldots7}$ cu* 2002 *cifre. Cercetaţi dacă N se poa ca suma a două sau trei pătrate perfecte impare.*

Tamara Cula

Soluţie. $N=a\cdot 100+77$, deci $N=M_4+1$. Dacă $N=x^2+y^2+z^2$, cu x, y impare, atunci $N=(2k+1)^2+(2l+1)^2+(2n+1)^2=M_4+3$, contradicţie $N=x^2+y^2$, cu $x, y\in\mathbb{N}$ impare, se obţine în mod analog că $N=M_4+2$, contr

Clasa a VI-a

VI.31. *Fie $S=\underbrace{\overline{a_1a_1\ldots a_1}}_{k_1 \text{ cifre}}+\underbrace{\overline{a_2a_2\ldots a_2}}_{k_2 \text{ cifre}}+\ldots+\underbrace{\overline{a_na_n\ldots a_n}}_{k_n \text{ cifre}}$, unde k_1, $k_n\geq 2$. Arătaţi că S se divide cu* 4 *dacă şi numai dacă $a_1+a_2+\ldots+a_n$ s cu* 4.

Dumitru Gherman, P

Soluţie. Deoarece $\underbrace{\overline{a_1a_1\ldots a_1}}_{k_1 \text{ cifre}} = a_1 \cdot \underbrace{\overline{11\ldots 1}}_{k_1 \text{ cifre}} = a_1\left(\overline{11\ldots 100}+12-1\right) = M$

şi analoagele, obţinem că $S = M_4 - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$, de unde concluzia.

VI.32. *Aflaţi* $\overline{ab}$ *ştiind că* $\overline{ab} = (a-b)! \cdot \left(\overline{ba} - 3\right)$ (*unde* $0! = 1$, *ia*
$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, $\forall n \geq 1$).

Nicolae Stănică,

Soluţie. Pentru $a-b=0$ sau $a-b=1$ obţinem $\overline{ab} = \overline{ba} - 3$, deci $9a =$
contradicţie. Pentru $a-b=2$ obţinem $\overline{ab} = 2\overline{ba}-6$, deci $8a = 19b-6$. Cum a-
rezultă, că $a=4$, $b=2$. Pentru $a-b=3$, avem $\overline{ab} = 6\overline{ba}-18$, adică $55b = 30$,
Pentru $a-b \geq 4$ obţinem că $(a-b)!\left(\overline{ba}-3\right) \geq 24\left(\overline{ba}-3\right) \geq 24\,(10b+b+$
deci $(a-b)!\left(\overline{ba}-3\right) \geq 264b \geq 264$, contradicţie. În final $\overline{ab} = 42$.

VI.33. *Într-o urnă sunt bile albe, roşii, negre şi albastre. Numărul bile*
este $\frac{3}{5}$ *din numărul celorlaltor bile; bilele roşii reprezintă jumătate din celela*
iar bilele negre a treia parte din numărul celorlaltor bile. Dacă extragem
calculaţi probabilitatea ca aceasta să fie roşie sau albastră.

Marcel Rotaru, I

Soluţie. Notăm numărul total de bile cu n. Cu ajutorul proporţiilor d
obţinem că numărul bilelor roşii este $\frac{n}{3}$, al bilelor albe este $\frac{3n}{8}$, iar al bilelo
este $\frac{3n}{4}$. De aici rezultă că numărul bilelor albastre este $\frac{n}{24}$. Probabilitatea
este atunci $p = \frac{n/3 + n/24}{n} = \frac{3}{8}$.

VI.34. *În* $\triangle ABC$, *fie* M *mijlocul laturii* $[BC]$. *Dacă* $d\,(M, AC) = \frac{AB}{2}$,
că $m(\widehat{A}) = 90°$.

N. N. Hârţa

Soluţie. Fie $MN \perp AC$ şi $BA' \perp AC$, $M, A' \in AC$. Atunci $MN = d\,(M,$
MN este linie mijlocie în $\triangle BA'C$, deci $MN = \frac{BA'}{2}$. Rezultă de aici că BA
şi deoarece $BA' \perp AC$, rezultă că $m(\widehat{A}) = 90°$.

VI.35. *În* $\triangle ABC$, $m(\widehat{A}) = 60°$ *şi* $m(\widehat{C}) = 45°$. *Bisectoarea* $[AD$ *şi în*
$[BE]$ *se intersectează în* M (*cu* $D \in [BC]$, $E \in [AC]$). *Să se arate că* $\frac{AM}{EC}$ =

Romeo Cerna

Soluţie. În $\triangle ABC$, $m(\widehat{EBC}) = 180° - 90° - 45° = 45°$, deci $\triangle EB$
isoscel cu $EC = BE$. Deoarece $m(\widehat{ABM}) = 75° - 45° = 30° = m(\widehat{BAM})$, $\triangle$
este isoscel cu $AM = BM$. În $\triangle AEM$, $m(\widehat{AEM}) = 90°$ şi $m(\widehat{EAM}) = 30$
$ME = \frac{AM}{2}$. De aici, $\frac{AM}{EC} = \frac{AM}{EB} = \frac{AM}{BM+ME} = \frac{AM}{AM + AM/2} = \frac{2}{3}$.

Clasa a VII-a

VII.31. *Să se rezolve ecuaţia* $1 + a^{2x} + b^{2x} = a^x + b^x + a^x b^x$, *cu* $a, b \in \mathbb{R}^*$

Dumitru Neag

Soluţie. Înmulţind egalitatea cu 2 obţinem, după gruparea convenabilă a nilor, $(a^x-1)^2-(b^x-1)^2+(a^x-b^x)^2=0$, de unde $a^x=b^x=1$, deci $x=0$

VII.32. *Fie a şi b,c lungimile ipotenuzei şi respectiv catetelor unui t dreptunghic. Să se arate că* $\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right)\geq 10.$

Claudiu - Ştefan Pop

Soluţie. Deoarece $a^2=b^2+c^2$, obţinem că

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\geq 10\Leftrightarrow 2\left(b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{b^2+c^2}{b^2c^2}\right)\geq$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(b^2+c^2\right)^2}{b^2c^2}\geq 4\Leftrightarrow\left(b^2-c^2\right)^2\geq 0,$$

ultima inegalitate fiind evidentă.

VII.33. *Triunghiul ABC are unghiul A obtuz şi semiperimetrul p. Cerc diametre $[AB]$ şi $[AC]$ delimitează o suprafaţă comună S. Aflaţi valoarea de a propoziţiei: "Există $P\in S$ astfel încât $d_1+d_2+d_3=p$", unde d_i sunt dis de la P la laturile triunghiului ABC.*

Cătălin Calistr

Soluţie. Este cunoscut că într-un triunghi dreptunghic mediana ce plea vârful unghiului drept este jumătate din ipotenuză, în timp ce într-un triun tuzunghic mediana ce pleacă din vârful unghiului obtuz este mai mică stric jumătate din latura ce se opune unghiului obtuz.

Fie $P\in S$ şi A_1,B_1,C_1 mijloacele laturilor $[BC],[CA],[AB]$. Atunci d_1+d $\leq PA_1+PB_1+PC_1$. Cum $m(\widehat{APB})\geq 90^\circ$, $m(\widehat{APC})\geq 90^\circ$, $m(\widehat{BPC})\geq 90^\circ$ puţin una din inegalităţi este strictă, prin aplicarea rezultatului menţionat a obţinem că $d_1+d_2+d_3<\dfrac{c}{2}+\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{2}$, deci $d_1+d_2+d_3<p$ şi propoziţia din este falsă.

VII.34. *Fie ABC un triunghi, iar I un punct interior lui. Dacă c înscrise în triunghiurile AIB, BIC şi CIA sunt congruente şi tangente do două, atunci $\triangle ABC$ este echilateral.*

Ioan Săcăleanu, I

Soluţie. Fie $\mathcal{C}_1(O_1,r)$, $\mathcal{C}_2(O_2,r)$, $\mathcal{C}_3(O_3,r)$ cercurile înscrise în $\triangle BIC$, $\triangle AIB$ şi notăm $T_1=\mathcal{C}_2\cap\mathcal{C}_3$, $T_2=\mathcal{C}_1\cap\mathcal{C}_3$, $T_3=\mathcal{C}_1\cap\mathcal{C}_2$; evident, $T_1\in AI$, T $T_3\in CI$. Atunci $O_1O_2=O_1T_3+T_3O_2=2r$ şi analog $O_1O_3=O_2O_3=2$ $\triangle O_1O_2O_3$ este echilateral. În patrulaterul $IT_1O_3T_2$,

$$m(\widehat{T_1IT_2})=360^\circ-90^\circ-90^\circ-60^\circ=120^\circ,$$

adică $m(\widehat{AIB})=120^\circ$ şi analog demonstrăm că $m(\widehat{BIC})=m(\widehat{CIA})=1$ $\triangle AIB$,

$$m(\widehat{AIB})=180^\circ-m(\widehat{IAB})-m(\widehat{IBA})=180^\circ-\frac{m(\widehat{A})+m(\widehat{B})}{2}=90^\circ+\frac{m}{}$$

de unde $m(\widehat{C})=60^\circ$ şi analog $m(\widehat{A})=m(\widehat{B})=60^\circ$, de unde obţinem că este echilateral.

VII.35. *Fie $ABCD$ un paralelogram, O centrul cercului circumscris $\triangle A$ H ortocentrul $\triangle BCD$. Să se arate că punctele A,O,H sunt coliniare.*

Constantin Cocea şi Dumitru Neag

Soluţie. Deoarece $BH \perp CD$ şi $AB \parallel CD$, $BH \perp AB$ şi deci $m(\widehat{ABH})$
analog obţinem că $m(\widehat{HDA}) = 90°$. De aici rezultă că $ABHD$ este inscriptibil
$m(\widehat{ABH}) = 90°$, $[AH]$ este diametru pentru cercul circumscris triunghiului
deci îl conţine pe O.

Clasa a VIII-a

VIII.31. *Să se determine mulţimea* $A = \left\{(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid \frac{4n-1}{mn+1} \in \mathbb{N}\right.$

A. V. Mihai, Buc

Soluţie. Deoarece $\frac{4n-1}{mn+1} \in \mathbb{N}$, rezultă că $4n-1 \geq mn+1$. De aici, $n(4-m)$
şi deci $m < 4$, adică $m \in \{1,2,3\}$. Pentru $m = 1$ obţinem că $\frac{4n-1}{mn+1} = 4 - \frac{5}{n+}$
ceea ce implică $n = 4$. Pentru $m = 2$, avem că $\frac{4n-1}{mn+1} = 2 - \frac{3}{2n+1} \in \mathbb{N}$, deci
Pentru $m = 3$ obţinem că $\frac{4n-1}{mn+1} = 1 + \frac{n-2}{3n+1}$. Cum $3n+1 > n-2$, este
ca $n - 2 = 0$, deci $n = 2$. În final, $A = \{(1,4), (2,1), (3,2)\}$.

VIII.32. *Să se rezolve ecuaţia*

$$\frac{1}{x^2-x+1} + \frac{2}{x^2-x+2} + \ldots + \frac{2002}{x^2-x+2002} = 2002.$$

Mihaela Predescu, I

Soluţie.

$$\frac{1}{x^2-x+1} + \frac{2}{x^2-x+2} + \ldots + \frac{2002}{x^2-x+2002} = 2002 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x^2-x+1} - 1\right) + \left(\frac{2}{x^2-x+2} - 1\right) + \ldots + \left(\frac{2002}{x^2-x+2002} - 1\right) =$$

$$\Leftrightarrow \left(x - x^2\right)\left(\frac{1}{x^2-x+1} + \frac{1}{x^2-x+2} + \ldots + \frac{1}{x^2-x+2002}\right) = 0.$$

Cum $x^2-x+1, x^2-x+2, \ldots, x^2-x+2002 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, rezultă că $x \in \{0$

VIII.33. *Determinaţi funcţiile* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *pentru care*

$$1 + f(x+y) \leq f(x) + f(y) \leq x + y + 2, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Gheorghe Iure

Soluţie. Pentru $x = y = 0$ obţinem $1 + f(0) \leq 2f(0) \leq 2$, de unde $f($
Fiindcă $f(x) + f(y) \leq x + y + 2$, pentru $y = 0$ găsim că $f(x) \leq x + 1$, $\forall$
Deoarece $f(x) + f(y) \geq 1 + f(x+y)$, pentru $y = -x$ obţinem că $f(x) \geq 2 -$
Dar $f(-x) \leq -x + 1$, de unde $f(x) \geq 1 + x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, ceea ce implică $f(x) =$

VIII.34. *Fie* AB *dreapta soluţiilor ecuaţiei* $x - y = 5$ *şi* CD *dreapta so*
ecuaţiei $x + y = 3$, *cu* $A, C \in Ox$, $B, D \in Oy$. *a) Arătaţi că* $AB \perp C$
Calculaţi aria şi perimetrul triunghiului BCD; *c) Arătaţi că* $AD \perp BC$.

Vasile Solcanu, Bogdăneşti (Su

Soluţie. *a)* Printr-un calcul imediat se deduce că $A(5,0)$, $B(0,-5)$, C
$D(0,3)$. Fie $AB \cap CD = \{E\}$ şi $EF \perp BD$, $F \in Oy$. Atunci $E(4,-1)$, F

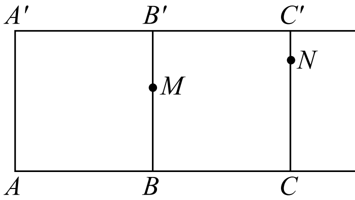
Deoarece $EF = BF = FD = 4$ şi $EF \perp BD$, $\triangle BEF$ şi $\triangle FED$ sunt dreptu
isoscele şi $m(\widehat{BEF}) = m(\widehat{FED}) = 45°$, de unde $m(\widehat{BED}) = 90°$ şi deci AB ⊥

b) $S_{BCD} = 12$, $P_{BCD} = \sqrt{34} + 3\sqrt{2} + 8$.

c) Deoarece AO şi DE sunt înălţimi în $\triangle BAD$ şi $AO \cap DE = \{C\}$,
ortocentrul $\triangle BAD$ şi deci BC este de asemenea înălţime în $\triangle BAD$.

VIII.35. *Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub de muchie a. Determinaţi poziţiile p*
lor $M \in (BB')$ şi $N \in (CC')$ pentru care perimetrul patrulaterului strâmb A
este minim; aflaţi această valoare minimă.

Mihaela Bucătar



Soluţie. $P_{AMND'} = AM + MN + ND' + AD'$ este minim $\Leftrightarrow AM + MN + ND'$ este minimă. Desfăşurând suprafaţa laterală a cubului ca în figură, $S = AM + MN + ND'$ este minimă $\Leftrightarrow A, M, N, D'$ sunt coliniare. Atunci $S_{\min} = AD' = a\sqrt{10}$, iar valoarea minimă a $P_{AMND'}$ este $AD' + S_{\min} = a\sqrt{2} + a\sqrt{10}$.

Clasa a IX-a

IX.31. *Fie mulţimile $A = \{x^2 + x \mid x \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x^3 + x \mid x \in \mathbb{Z}\}$, $C =$*
$+x^3 + x^2 + x \mid x \in \mathbb{Z}\}$, $D = \{2x^4 \mid x \in \mathbb{Z}\}$. Determinaţi $A \cap C$, $B \cap D$, $A \cap D$,

Andrei Nedelc

Soluţie. Fie $u = n^2 + n = m^4 + m^3 + m^2 + m \in A \cap C$; $m, n \in \mathbb{Z}$.
$(2n+1)^2 = 4m^4 + 4m^3 + 4n^2 + 4m + 1$, şi grupând în două moduri terme
membrul drept obţinem

$$(2n+1)^2 = \left(2m^2 + m\right)^2 + \left(3m^2 + 4m + 1\right),$$

respectiv

$$(2n+1)^2 = \left(2m^2 + m + 1\right)^2 + 2m - m^2.$$

Folosind semnul funcţiei de gradul al doilea, obţinem

$$(1) \Rightarrow (2n+1)^2 > \left(2m^2 + m\right)^2 \quad \forall m \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\},$$

$$(2) \Rightarrow (2n+1)^2 < \left(2m^2 + m + 1\right)^2 \quad \forall m \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, 2\}.$$

Urmează că dacă $m \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1, 2\}$, atunci $(2n+1)^2$ se află între pătratele
numere întregi consecutive, ceea ce este imposibil.

Pentru $m = -1$, obţinem $n = 0$ sau $n = -1$ şi $u = 0$. Pentru $m = 0$ obţin
nou $n = 0$ sau $n = -1$ şi $u = 0$. Pentru $m = 1$ nu există n cu proprietatea c
iar pentru $m = 2$ obţinem $n = 5$ sau $n = -6$ şi $u = 30$. În concluzie, $A \cap C =$

Fie acum $u = n^3 + n = 2m^4 \in B \cap D$; $m, n \in \mathbb{Z}$. Atunci $(n+1)^4 - (n-1)^4 =$
ecuaţie care nu are soluţii nebanale, conform teoremei lui Fermat. Atunci $n -$
deci $m = 1$ sau $m = -1$, de unde $u = 2$, sau $2m = 0$, deci $n = 0$, de unde u
concluzie, $B \cap D = \{0, 2\}$.

Analog se tratează $A \cap D$ şi $A \cap B$.

IX.32. *Fie $f_i, g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, funcţii care păstrează*
variabilei. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x_1 + f_1(x_1) + g_1(x_1) = x_2 \\ x_2 + f_2(x_2) + g_2(x_1 + x_2) = x_3 \\ \ldots \\ x_n + f_n(x_n) + g_n(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = x_1. \end{cases}$$

Obţineţi sisteme diverse prin particularizarea funcţiilor!

Iuliana Georgescu şi Paul Georgesc

Soluţie. Pentru $x_1 > 0$, deducem din prima ecuaţie că $x_2 > x_1 > 0$. Î
asemănător, $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_1$, contradicţie. Pentru $x_1 < 0$, o
analog că $0 > x_1 > x_2 > \ldots > x_n > x_1$. De aici, $x_1 = 0$ şi analog $x_2 = \ldots =$
Exemple de funcţii care păstrează semnul variabilei: $f(x) = x^{2n+1}$, $f(x) =$ ar
$f(x) = x\sqrt{1+x^2}$, $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ etc.

IX.33. *Rezolvaţi în* $\mathbb{N}$ *ecuaţia* $n - \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{12}\right] + \left[\frac{n}{18}\right] = 11 \cdot \left[\frac{n}{36}\right]$

Gheorghe Iure

Soluţie. Fie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = n - \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{12}\right] + \left[\frac{n}{18}\right] - 1$
Avem că $f(n+36) = f(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, deci f periodică de perioadă 36. De ase
$f(0) = 0$, iar pentru $n = 1, 2, \ldots, 35$, $\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] \leq \frac{n}{2} + \frac{n}{3} = \frac{5n}{6} < n$, iar
deci $1, 2, \ldots, 35$ nu sunt soluţii ale ecuaţiei. În concluzie, mulţimea soluţiilor e
este $S = \{36k;\ k \in \mathbb{N}\}$.

IX.34. *Fie* $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. *Să se determine* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ *ştiind că*

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + \frac{n+1}{2} = 2\left(x_1 \sin\frac{\pi}{n+1} + x_2 \sin\frac{2\pi}{n+1} + \ldots + x_n \sin\frac{n}{n}\right.$$

Vladimir Martinu

Soluţie. Egalitatea din enunţ revine la

$$\sum_{k=1}^{n}\left(x_k - \sin\frac{k\pi}{n+1}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n}\sin^2\frac{k\pi}{n+1} - \frac{n+1}{2}.$$

Ţinând seama de formulele $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$ şi $\sum\limits_{k=1}^{n}\cos ka = \frac{\sin\frac{na}{2}\cos\frac{(n}{}}{\sin\frac{a}{2}}$

obţinem că $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(x_k - \sin\frac{k\pi}{n+1}\right)^2 = 0$, de unde $x_k = \sin\frac{k\pi}{n+1}$, $k = \overline{1,n}$.

IX.35. *Arătaţi că* $\sin(\cos x) + \sin(\cos y) < 2\cos\frac{x+y}{2}$, $\forall x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Dan Popescu, Su

Soluţie. Ţinând seama că $\sin x < x$ şi $0 < \cos x < 1$, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, obţine

$$\sin(\cos x) + \sin(\cos y) < \cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \leq 2\cos\frac{x+}{2}$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Clasa a X-a

X.31. *Considerăm şirurile* $(F_n)_{n\geq 0}$, $(L_n)_{n\geq 0}$ *definite prin* $F_0 = 0$, F
$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $\forall n \geq 0$, *respectiv* $L_0 = 2$, $L_1 = 1$, $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$, $\forall$
Să se arate că $\sqrt{\sum_{k=1}^{n} L_k^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} F_{k-1}^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} F_{k+1}^2}$.

Mihail Bencze, B

Soluţie. Se arată (prin inducţie) că $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. C
inegalităţii lui Minkowski, urmează concluzia.

X.32. *Fie* $(a_n)_{n\geq 0}$ *un şir de numere reale şi pozitive. Pentru orice* n
notează cu P_n *graficul funcţiei* $f_n(x) = a_n x^2 + a_{n+1}x + a_{n+2}$. *Determinaţi l*
definire a şirului ştiind că parabolele P_n *au vârfurile pe axa* Ox.

Temistocle Bîrsa

Soluţie. Condiţia ca parabolele să fie cu vârfurile pe Ox revine la $\Delta_n =$
$-4a_n a_{n+2} = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Prin logaritmare, obţinem $2\ln a_{n+1} = \ln a_n + \ln a_{n+}$
$\forall n \in \mathbb{N}$, sau $t_{n+1} = t_n - \ln 4$, $\forall n \in \mathbb{N}$, unde $t_n = \ln a_{n+1} - \ln a_n$. Aşa
este o progresie aritmetică cu raţia $r = -\ln 4$, şi deci $t_n = t_0 + nr$, ceea
plică $a_{n+1} = e^{t_0+nr}a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Rezultă că $a_n = e^{n\ln\frac{a_1}{a_0} - n(n-1)\ln 2}a_0$, d
$a_n = \dfrac{a_0}{2^{n(n-1)}}\left(\dfrac{a_1}{a_0}\right)^n$.

X.33. *Fie funcţiile* $f, g : \mathbb{R} \to (0,\infty)$, $f(x) = a^x$, $g(x) = b^x$, *unde* $a \in$
$b \in (0,1)$, $ab \neq 1$. *Să se arate că există o infinitate de paralelograme cu vârf*
reuniunea graficelor celor două funcţii.

Petru Asafte

Soluţie. Fie $x_1 > 0$ şi $B(x_1, g(x_1))$. Deoarece $f((-\infty,0)) = (0,1)$, $\exists x_2 <$
fel încât $f(x_2) = g(x_1)$ şi atunci şi $f(-x_2) = g(-x_1)$. Construim $A(x_2,$
$A'(-x_2, f(-x_2))$, $B'(-x_1, g(-x_1))$. Deoarece $ab \neq 1$ rezultă că $x_2 \neq$
$ABA'B'$ este nedegenerat. Segmentele AA' şi BB' au mijloacele $M\left(0, \dfrac{f(x_2)+}{2}\right.$
respectiv $N\left(0, \dfrac{g(x_1) + g(-x_1)}{2}\right)$, deci $M \equiv N$ şi $ABA'B'$ este paralelogram
x_1 a fost arbitrar, problema este rezolvată.

X.34. *Să se arate că ecuaţiile* $4 \cdot 9^x + (4x - 45) \cdot 3^x + 11 - x = 0$ *şi* 4
$-3 \cdot 6^x - 128 \cdot 3^x + 2^x + 32 = 0$ *sunt echivalente.*

Marcel Chiriţă, Buc

Soluţie. Din prima ecuaţie obţinem că $\left(3^x - \dfrac{1}{4}\right)(3^x - 11 + x) = 0$, deci 3
cu soluţia $x_1 = -2\log_3 2$, sau $3^x = 11 - x$, cu soluţia $x_2 = 2$, unică deoarece f
$\to (0,\infty)$, $f_1(x) = 3^x$ este strict crescătoare, iar $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = 11 - x$ est
descrescătoare. Din cea de-a doua ecuaţie obţinem că $(4 \cdot 3^x - 1)(6^x - 2^x - 3$
deci $3^x = \dfrac{1}{4}$, cu soluţia $x_3 = -2\log_3 2$ sau $6^x = 2^x + 32$, echivalentă cu $3^x =$
Cum $f_3 : \mathbb{R} \to (0,\infty)$, $f_3(x) = 3^x$ este strict crescătoare iar $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_4(x) =$
este strict descrescătoare, ecuaţia $f_3(x) = f_4(x)$ are o singură soluţie, anume

X.35. *Fie* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ *şi* $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}^*$ *de module egale astf*
$\dfrac{z_k}{z_t} \in \mathbb{C}\setminus\{\pm 1, \pm i\}$ $\forall\, 1 \leq k \neq t \leq n$. *Notăm* $a_j = \dfrac{1}{z_j}\prod_{k\neq j} z_k + z_j^2$, $\forall j = \overline{1,n}$.
că dacă două dintre numerele a_j *sunt reale, atunci toate sunt reale. În plu*
$n \neq 4$, *atunci* $\prod_{k=1}^{n} z_k = 1$ *(în legătură cu problema X.86 din R.M.T. nr. 3-4/2*

Daniel Jinga, I

Soluţie. Fie $P=\prod\limits_{k=1}^{n} z_k$ şi $r=|z_k|$, $k=\overline{1,n}$. Atunci $a_j=z_j^2+\dfrac{P}{z_j^2}$, $\forall j$

Fie $p,q\in\overline{1,n}$ astfel încât a_p, $a_q\in\mathbb{R}$ şi notăm $b_p=\dfrac{P}{z_p^2}-\overline{z_p}^2$, $b_q=\dfrac{P^2}{z_q^2}-\overline{z}_q^2$.
$a_p=z_p^2+\overline{z_p}^2+b_p$ şi cum $z_p^2+\overline{z_p}^2\in\mathbb{R}$, avem că $b_p\in\mathbb{R}$. Analog obţinem că
Din definiţiile lui b_p şi b_q obţinem că

$$b_pz_p^2=b_qz_q^2=P-r^4,$$

de unde, prin trecere la module, deducem că $|b_p|=|b_q|$.

Dacă $b_p\neq 0$, atunci $b_p=\pm b_q$ şi conform (1) obţinem că $z_p^2=\pm z_q^2$, d
$\left(\dfrac{z_p}{z_q}\right)^4=1$. De aici, $\dfrac{z_p}{z_q}\in\{\pm1,\pm i\}$, contradicţie. Atunci $b_p=0$ şi din (1) de
că $P=r^4$, de unde $\forall j=\overline{1,n}$, $a_j=z_j^2+\dfrac{|z_j|^4}{z_j^2}=z_j^2+\overline{z_j}^2\in\mathbb{R}$. Fie acum
Deoarece $P=r^4$, prin trecere la module obţinem că $r^n=r^4$, deci $r=1$ şi
$P=1$.

Clasa a XI-a

XI.31. *Fie $A,B\in M_n(\mathbb{Q})$. Dacă $\det A\neq\det B$, demonstraţi că $\det(A+$*
$\neq\det(B+\pi A)$.

Paul Georgescu şi Gabriel Pop

Soluţie. Fie $P(\lambda)=\det(A+\lambda B)-\det(B+\lambda A)$. Evident, $P\in\mathbb{Q}[\lambda$
supunem prin reducere la absurd că $\det(A+\pi B)=\det(B+\pi A)$. Atunci P
şi cum π nu este algebric, $P\equiv 0$. De aici, $\det(A+\lambda B)=\det(B+\lambda A)$, $\forall$
Pentru $\lambda=0$ obţinem $\det A=\det B$, contradicţie.

XI.32. *Fie $s_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\left(k^2+k+1\right)\sum_{p=0}^{k}(-1)^p C_k^p (k-p)^k\right]$. Calculaţi*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{1+s_n}-\sqrt[n]{1+s_{n-1}}\right).$$

Ştefan Alexe,

Soluţie. Suma $\alpha_k=\sum\limits_{p=0}^{k}(-1)^p C_k^p (k-p)^k$ reprezintă numărul funcţiilor
tive $f:A\to A$, unde A are k elemente. Cum orice asemenea funcţie este şi in
rezultă că $\alpha_k=k!$ şi deci

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\left(k^2+k+1\right)k!=\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^2-k\right]k!=\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+1)!-\sum_{k=1}^{n}$$

De aici, $s_n=(n+1)(n+1)!-1$. Notăm $u_n=\sqrt[n+1]{1+s_n}-\sqrt[n]{1+s_{n-1}}$. Atu

$$u_n=\sqrt[n+1]{(n+1)(n+1)!}-\sqrt[n]{n\cdot n!}=$$

$$=\sqrt[n+1]{n+1}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right)+\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\left((n+1)\sqrt[n+1]{n+1}-n\sqrt[n]{n}\right)-\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\sqrt[n+1]{}$$

Este cunoscut că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right)=\dfrac{1}{e}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\dfrac{1}{e}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}$
De asemenea se poate demonstra uşor că $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(n+1)\sqrt[n+1]{n+1}-n\sqrt[n]{n}\right]=$
exemplu, aplicând teorema lui Lagrange funcţiei $f:(0,\infty)\to(1,\infty)$, $f(x)=$

pe intervalul $[n, n+1]$ şi estimând cantităţile obţinute). De aici, limita din
este egală cu $\frac{1}{e}$.

XI.33. *Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale pozitive cu proprietatea c*
$p \in N^*$ şi numerele $a_1, a_2, \ldots, a_p > 0$ cu $a_1 + a_2 + \ldots + a_p > 1$ astfel încâ
$= a_1 x_{n+1} + a_2 x_{n+2} + \ldots + a_p x_{n+p}$, $\forall n \geq 1$. Să se arate că $\inf\{x_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$

Marian Tetiva, I

Soluţie. Deoarece $x_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, există $m = \inf\{x_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ şi $m \geq$
ipoteză şi din faptul că $x_n \geq m$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, deducem că $x_n \geq a_1 m + a_2 m$
$+a_p m = am$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, unde am notat $a = a_1 + a_2 + \ldots + a_p > 1$. În cont
$x_n \geq a_1 am + a_2 am + \ldots + a_p am = a^2 m$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ şi prin inducţie urmează
că $x_n \geq a^k m$, $\forall n, k \in \mathbb{N}^*$. Dacă am presupune prin absurd că $m > 0$, am ob
$x_n \geq \lim\limits_{k\to\infty} ma^k = +\infty$, contradicţie. Rămâne că $m = 0$, ceea ce trebuia demo

XI.34. *Fie $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$ şi b un număr între $-\sqrt{2}\ln a$ şi $\sqrt{2}\ln a$.*
semnul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}\left(a^x + a^{-x}\right) - bx$.

Gheorghe Costovic

Soluţie. Arătăm mai întâi că

$$\frac{a^x + a^{-x}}{2} \geq \frac{x^2 (\ln a)^2}{2} + 1.$$

Deoarece $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$ şi $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = \frac{x^2 (\ln a)^2}{2} +$
funcţii pare, este suficient să demonstrăm (1) doar pentru $x \in [0, \infty)$. Atunci

$$(1) \Leftrightarrow \left(a^{x/2} - a^{-x/2}\right)^2 \geq (x \ln a)^2, \ \forall x \geq 0 \Leftrightarrow a^{x/2} - a^{-x/2} \geq x \ln a, \ \forall x \geq$$

Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = a^{x/2} - a^{-x/2} - x \ln a$. Atunci $g'(x) = a^{x/2}\frac{\ln a}{2} + a^{-x/}$
$-\ln a \geq 0$, $\forall x \geq 0$, deci g este crescătoare şi $g(x) \geq g(0) = 0$, $\forall x \geq 0$.

De asemenea, $\frac{x^2 (\ln a)^2}{2} + 1 - bx = \frac{x^2}{4}\left[2(\ln a)^2 - b^2\right] + \left(\frac{b}{2}x - 1\right)^2$, deci

$$\frac{x^2 (\ln a)^2}{2} + 1 - bx > 0, \quad \forall x \geq 0.$$

Din (1) şi (2) obţinem că $\frac{a^x + a^{-x}}{2} > bx$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci f este strict pozitivă.

XI.35. *Fie $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă, iar $(a_k)_{k=1}^n$, $(b_k)_{k=1}^n$ progre*
metrice astfel încât $a_k < b_k$, $\forall k = \overline{1,n}$. Dacă $f(a_1 a_2 \cdots a_n) < 1$ şi $f(b_1 b_2 \cdots b$
arătaţi că există $(c_k)_{k=1}^n$ progresie geometrică, $c_k \in (a_k, b_k)$ astfel încât $f(c_1 c_2 \cdot$

Doru - Dumitru Buza

Soluţie. Notăm $p_a = a_1 a_2 \ldots a_n$, $p_b = b_1 b_2 \ldots b_n$. Considerăm $g : [0,1$
$g(t) = f\left(p_a^t p_b^{1-t}\right)$; observăm că $g(0) = f(p_b) > 1$, iar $g(1) = f(p_a) < 1$. D
g este continuă, $\exists t_0 \in (0,1)$ astfel că $g(t_0) = 1$.

Fie $(c_k)_{k=1}^n$ definit prin $c_k = a_k^{t_0} b_k^{1-t_0}$. Se observă că $(c_k)_{k=1}^n$ este de as
progresie geometrică şi $a_k < c_k < b_k$, $\forall k = \overline{1,n}$. În plus, deoarece $g(t_0) = 1$,
că $f(c_1 c_2 \ldots c_n) = 1$, ceea ce trebuia demonstrat.

Clasa a XII-a

XII.31. *Fie* $M = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid A^2 = I_2\}$. *Determinaţi toate subgrupu* $(\mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \cdot)$ *conţinute în* M.

Angela Ţigăeru şi Cătălin Ţigăeru, S

Soluţie. Prin calcul direct observăm că $M = M_1 \cup M_2$, cu $M_1 = \{I_2,$ $M_2 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \mid a^2 + bc = 1,\ a, b, c \in \mathbb{C}\right\}$. În plus, $M_1 \cap M_2 = \emptyset$. Demo acum următorul rezultat auxiliar:

Lemă. *a*) Dacă $A_1, A_2 \in M$ astfel încât $A_1A_2 \in M$, atunci $A_1A_2 = A_2A$

b) Dacă $A_1, A_2 \in M_2$ astfel încât $A_1A_2 \in M$, atunci $A_1 = A_2$ sau $A_1 = -$

Demonstraţie. *a*) Fie $A_1, A_2 \in M$ astfel ca $A_1A_2 \in M$. Atunci $A_1^2 = A_2^2$ de asemenea $A_1A_2A_1A_2 = I_2$. Înmulţind ultima relaţie la stânga cu A_1 şi la cu A_2 obţinem egalitatea cerută.

b) Fie $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & -a_2 \end{pmatrix} \in M_2$. Deoarece $A_1A_2 \in$ $A_1A_2 = A_2A_1$, obţinem că $b_1c_2 = b_2c_1$, $a_1b_2 = a_2b_1$, $a_1c_2 = a_2c_1$, de unde $= (a_1a_2 + b_1c_2)\, I_2$. Cum $A_1A_2 \in M$ şi $(a_1a_2 + b_1c_2)\, I_2 \notin M_2$, obţinem că A_1A deci $A_1A_2 = \pm I_2$, de unde *b*).

Singurele subgrupuri H conţinute în M_1 sunt $H_1 = I_2$, $H_2 = \{I_2, -I_2\}$. Fi H un subgrup al lui M, $H \cap M_2 \neq \emptyset$. Există atunci $A_1 \in H \cap M_2$; pentru matrice $A_2 \subset H \cap M_2$ obţinem că $A_1A_2 \in H \subset M$ deci, conform *b*), $A_1 =$ $A_1 = -A_2$. Obţinem de aici că, alături de H_1 şi H_2, singurele subgrupuri $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ conţinute în M sunt cele de tipurile $H_3 = \{I_2, A\}$ şi $H_4 = \{I_2, -I_2,$ cu $A \in M_2$.

XII.32. *Fie* $(G, \cdot)$ *grup, iar* $a \in G \backslash \{e\}$ *fixat. Arătaţi că numărul morf surjective de la* G *la* $(\mathbb{Z}_3, +)$ *cu proprietatea că* $f(x) = \widehat{2} \Leftrightarrow x = a$ *este numărul subgrupurilor* H *ale lui* G *care nu-l conţin pe* a *şi care au propriet* $x^3 \in H$, $\forall x \in G$.

Dana Stan, elev

Soluţie. A se vedea **Nota** de la p. 17 din acest număr al revistei.

XII.33. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *o funcţie monotonă al cărei grafic are un ce simetrie ce nu aparţine graficului. Arătaţi că* f *nu admite primitive.*

Oana Marangoci, elevă, P

Soluţie. Deoarece $A(x_0, y_0)$ este centrul de simetrie al graficului lui f, egalitatea $f(2x_0 - x) = 2y_0 - f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Presupunem prin reducere la că f este continuă în x_0. Trecând la limită în egalitatea de mai sus obţi $\lim\limits_{x \to x_0} f(2x_0 - x) = \lim\limits_{x \to x_0} (2y_0 - f(x))$, deci $f(x_0) = y_0$, contradicţie. De aic este continuă în x_0 şi, deoarece f este monotonă, x_0 este punct de discontinui speţa întâi. De aici rezultă că f nu admite primitive.

XII.34. *Fie* $f : [0, 1] \to (0, \infty)$ *o funcţie care admite primitive şi fie* F *o pr a sa cu* $F(1) = 0$. *Arătaţi că există* $c \in (0, 1)$ *astfel încât* $F(c) > -\dfrac{c}{2} e^{c^2} f(c$

Rodica Luca Tudorach

Soluţie. Fie $G : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $G(x) = \left(1 - e^{-x^2}\right) F(x)$. Se observă că continuă pe $[0, 1]$, derivabilă pe $(0, 1)$, iar $G(0) = G(1) = 0$. Conform teore

Rolle, există $c \in (0,1)$ astfel încât $G'(c) = 0$, ceea ce înseamnă că $-2ce^{-c^2}$
$+\left(e^{-c^2} - 1\right) f(c) = 0$. Deoarece $e^{-x^2} - 1 > -x^2$, $\forall x \in (0,1)$, obţinem i
inegalitatea din enunţ.

XII.35. *Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde f este o funcţie injectivă şi $g(x) = \sum_{k=0}^{n}$
$\times [f(x)]^{2k+1} + \sin f(x)$, cu $a_1 \in [1, \infty)$ şi $a_{2k+1} \in (0, \infty)$, $\forall k = \overline{1,n}$. Arăta
admite primitive dacă şi numai dacă g admite primitive.*

Lucian Georges Lădunc

Soluţie. Fie $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = a_1 x + a_3 x^3 + \ldots + a_{2n+1} x^{2n+1} + \sin x$.
$h'(x) = a_1 + 3a_2 x^2 + \ldots + (2n+1) a_{2n+1} x^{2n} + \cos x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, prin urmare
strict crescătoare şi deci injectivă. Cum $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} = +\infty$ şi
continuă, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$, deci h este surjectivă şi în final bijectivă.

Atunci $g = h \circ f$, deci g este injectivă. Cum o funcţie injectivă admite pr
dacă şi numai dacă este continuă, cu această observaţie cerinţa problemei se
sub forma "f este continuă $\Leftrightarrow$ g este continuă". Dar acest lucru este imediat,
seama că $h = g \circ f$, cu h continuă şi bijectivă.

IMPORTANT

- În scopul unei legături rapide cu redacţia revistei, pot fi utilizate urm
toarele adrese e-mail: **tbi@math.tuiasi.ro**, **popagabriel@go.con**
Pe această cale colaboratorii pot purta cu redacţia un dialog privitor
materialele trimise acesteia, procurarea numerelor revistei etc.

- La *problemele de tip L* se primesc soluţii de la orice iubitor de matemat
elementare (indiferent de *preocupare profesională* sau *vârstă*). Fieca
dintre soluţiile acestor probleme - ce sunt publicate în revistă după
an - va fi urmată de numele tuturor celor care au rezolvat-o.

- **Adresăm cu insistenţă rugămintea ca materialele trimise r
vistei să nu fie (să nu fi fost) trimise şi altor publicaţii.**

Soluţiile problemelor pentru pregătirea concursu
din nr. 2 / 2002

A. Nivel gimnazial

G21. *Să se afle restul împărţirii prin* 43 *a numărului* 6^{2002^n}, $n \in \mathbb{N}$.

Cătălin - Cristian Budean

Soluţie. Avem că $2002^n = (2001+1)^n = 3k+1$, cu $k \in \mathbb{N}^*$. Atunci 6^{2}
$= 6 \cdot 6^{3k} = 6 \cdot (5 \cdot 43 + 1)^k$, de unde restul împărţirii lui 6^{2002^n} la 43 este 6.

G22. *Să se arate că între n şi n! există cel puţin un număr prim, orica*
$n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$.

Soluţie. Fie p un divizor prim al numărului $n!-1$ (care evident există, e
fiind $n!-1$). Dacă $p \leq n$, atunci $p \mid n!$, şi cum $p \mid n!-1$ rezultă că $p \mid 1$, abs
concluzie $p > n$.

G23. *Să se rezolve în* $\mathbb{Z}^2$ *ecuaţia* $x^2 + 10x + y! = 2002$.

Adrian Zanosch

Soluţia I (a autorului). Evident, trebuie impusă condiţia $y \geq 0$. D
$x(x+1)$ nu poate fi decât de forma $3k$ sau $3k+2$, $k \in \mathbb{Z}$, de asemenea $x^2 +$
$= x(x+1) + 9x$ este de una din aceste forme. Dacă $y \geq 3$, atunci $3 \mid y!$ şi $x^2 +$
este tot de forma $3k$ sau $3k+2$, dar $2002 = 3 \cdot 667 + 1$, absurd. În co
$y \in \{0,1,2\}$. Dacă $y = 0$ sau $y = 1$, obţinem că $x^2 + 10x = 2001$, ecuaţie care
soluţii în $\mathbb{Z}$. Dacă $y = 2$, atunci $x^2 + 10x = 2000$, cu soluţiile $x_1 = 40$ şi x_2
În concluzie, $(x,y) \in \{(40,2), (-50,2)\}$.

Soluţia a II-a (dată de Alexandru Bejinariu, elev, Iaşi). Pentru
u. c. $(y!) = 0$. În plus, u. c. $\left(x^2 + 10x\right) =$ u. c. $\left(x^2\right) \in \{0,1,4,5,6,9\}$, de
$\left(x^2 + 10x + y!\right)$ nu ar fi 2. Rămâne că $y < 5$ şi considerând pe rând cele cinci
obţinem soluţiile de mai sus.

Soluţia a III-a. Deoarece $7! = 5040 > 2002$, avem că $y < 7$; problema se
la rezolvarea a şapte ecuaţii de grad II.

G24. *Aflaţi câte numere de* 4 *cifre au proprietatea că cifrele citite de la*
spre dreapta sunt invers proporţionale cu cifrele citite de la dreapta spre
Aceeaşi problemă pentru numerele de 3, *respectiv* 5 *cifre.*

Gabriel Pop

Soluţie. Pentru a putea vorbi despre inversa proporţionalitate, este nec
fiecare caz ca toate cifrele să fie nenule.

(i) Dacă $\overline{abcd}$ este un număr cu proprietatea din enunţ, atunci $\dfrac{a}{1/d} =$
$= \dfrac{c}{1/b} = \dfrac{d}{1/a}$, deci $ad = bc$. Dacă $\{a,d\} = \{b,c\}$ iar $a = d$, obţinem 9 n
Dacă $\{a,d\} = \{b,c\}$ iar $a \neq d$, obţinem $4 \cdot 36 = 144$ numere (36 este n
perechilor de cifre nenule (a,d) cu $a < d$, iar corespunzător fiecărei perechi
obţine 4 numere $\overline{abcd}$ distincte prin diverse permutări). Dacă $\{a,d\} \neq \{b,c\}$,
$\{\{a,d\},\{b,c\}\} \in \underline{\{\{1,4\},\{2,2\}\}}$, $\{\{1,6\},\{2,3\}\}$, $\{\{1,8\},\{4,2\}\}$, $\{\{2,6\},$
$\underline{\{\{2,8\},\{4,4\}\}}$, $\{\{2,9\},\{3,6\}\}$, $\{\{3,8\},\{4,6\}\}$, $\underline{\{\{4,9\},\{6,6\}\}}$. Obţinem
$+5 \cdot 8 = 52$ numere (pentru fiecare element subliniat obţinem 4 numere $\overline{abc}$

celelalte cazuri câte 8). În total obţinem $9+144+52=205$ numere.

(ii) Dacă $\overline{abc}$ este un număr cu proprietatea din enunţ, deducem că ac
Dacă $a=c$, obţinem 9 numere. Dacă $a\neq c$, atunci $b=2$, $\{a,c\}=\{1,4\}$;
$\{a,c\}=\{1,9\}$; $b=4$, $\{a,c\}=\{2,8\}$; $b=6$, $\{a,c\}=\{4,9\}$. Obţinem 4
numere. În total obţinem $9+8=17$ numere.

(iii) Dacă $\overline{abcde}$ este un număr cu proprietatea din enunţ, deducem că $ae=$
Dacă $a=b=c=d=e$, obţinem 9 numere. În caz contrar,

$$\begin{aligned}
c&=2, \quad \{\{a,e\},\{b,d\}\}\in\{\{\{1,4\},\{2,2\}\},\{\{1,4\},\{1,4\}\}\};\\
c&=3, \quad \{\{a,e\},\{b,d\}\}\in\{\{\{1,9\},\{3,3\}\},\{\{1,9\},\{1,9\}\}\};\\
c&=4, \quad \{\{a,e\},\{b,d\}\}\in\{\{\{2,8\},\{4,4\}\},\{\{2,8\},\{2,8\}\}\};\\
c&=6, \quad \{\{a,e\},\{b,d\}\}\in\{\{\{4,9\},\{6,6\}\},\{\{4,9\},\{4,9\}\}\}.
\end{aligned}$$

Obţinem $4(4+4)=32$ numere. În total, obţinem $9+32=41$ numere.

G25. *Să se arate că pentru orice $x,y,x\in\mathbb{R}$, există $a,b,c\in\mathbb{Z}$ astf*
$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\leq\frac{3}{4}$. *Generalizare.*

Vladimir Martinu

Soluţie. Dacă $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$, $\varphi(x)=\left[x+\frac{1}{2}\right]$, este funcţia de rotunjire,
$|\varphi(x)-x|\leq\frac{1}{2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Pentru $a=\varphi(x)$, $b=\varphi(y)$, $c=\varphi(z)$, obţinem co
problemei. Cu acelaşi raţionament obţinem că dacă $n\in\mathbb{N}^*$ şi $x_1,x_2,\ldots,x$
atunci există $a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{Z}$ astfel ca $(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\cdots+(x_n-a_n)$

G26. *Dacă suma, produsul şi câtul a două numere iraţionale sunt numer*
nale, calculaţi suma cuburilor celor două numere.

Claudiu - Ştefan Pop

Soluţie. Dacă $\frac{a}{b}+1\neq 0$, atunci $a+b=b\left(\frac{a}{b}+1\right)\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, deoarece $b\in$
Rămâne că $\frac{a}{b}+1=0$, deci $a=-b$ şi $a^3+b^3=0$.

Observaţie. Ipoteza "$ab\in\mathbb{Q}$" nu este necesară.

G27. *Determinaţi $n\in\mathbb{N}^*$ minim pentru care 2^n-1 este divizibil cu 125*

Gheorghe Iure

Soluţie. Fie $n=4q+r$, $q,r\in\mathbb{N}$, $0\leq r<4$. Atunci $2^n-1=2^r\cdot 2^{4q}$
$=2^r\cdot 16^q-1$. Cum ultima cifră a lui 16^q este 6 ($q=0$ nu convine), ca 2^n-
dividă cu 5 e necesar $r=0$, în caz contrar ultima cifră a lui 2^n-1 fiind 1, 3

Atunci $2^n-1=2^{4q}-1=15\left(16^{q-1}+16^{q-2}+\cdots+1\right)$ şi deci ca 2^n
se dividă cu 125 este necesar şi suficient ca $25\mid 16^{q-1}+16^{q-2}+\cdots+1$
$16^p=(15+1)^p=M_5+1$ pentru $p\geq 0$, ca suma să se dividă cu 5 este ne
suficient ca numărul termenilor să se dividă cu 5, deci $q=5k$, $k\in\mathbb{N}^*$. Atunc

$$2^n-1=2^{20k}-1=1024^{2k}-1=1048576^k-1=1048575\left(1048576^{k-1}+\cdots\right.$$

Cum 1048575 este divizibil cu 25, dar nu şi cu 125, este necesar şi suficient
dividă al doilea factor. Deoarece $1048576^p=M_5+1$ pentru $p\geq 0$, este ne
suficient ca numărul termenilor să se dividă cu 5, deci $k=5m$, $m\in\mathbb{N}^*$ şi $n=$
$m\in\mathbb{N}^*$. Numărul n minim este 100.

G28. *Să se arate că ecuaţia*

$$x^4-(a+b)x^3+(a+b+ab-2)x^2-\left(a^2+b^2-a-b\right)x+(a-1)(b-1)$$

are cel puţin două soluţii reale pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.

Marian Teler, Costeşti (

Soluţie. Ecuaţia dată se descompune în $\left(x^2-ax+b-1\right)\left(x^2-bx+a-\right.$
Se obţin ecuaţiile $x^2-bx+a-1=0$ şi $x^2-ax+b-1=0$. Atunci

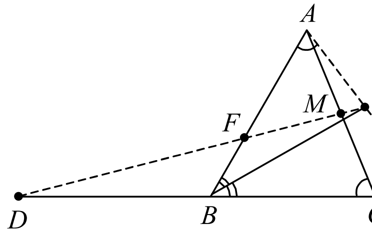
$$\Delta_1+\Delta_2=b^2-4a+4+a^2-4b+4=(a-2)^2+(b-2)^2\geq 0,$$

deci $\Delta_1\geq 0$ sau $\Delta_2\geq 0$ şi cel puţin una dintre cele două ecuaţii are soluţii r

G29. *Fie triunghiul ABC cu $m(\widehat{A})<m(\widehat{C})$. Pe bisectoarea interioară a lui $\widehat{B}$ luăm un punct E astfel încât $\widehat{EAB}\equiv\widehat{ACB}$. Se prelungeşte latura [segmentul $[BD]\equiv[AB]$, B între C şi D. Să se arate că mijlocul M al segm $[AC]$ se află pe dreapta DE.*

Constantin Chiril

Soluţia I (a autorului). Construim prin E o dreaptă paralelă cu A intersectează AD şi CD în P şi Q. În $\triangle EBA$ şi EQB, $\widehat{EBA}\equiv\widehat{EBQ}$ şi $\widehat{E}$ $\equiv\widehat{EQB}$ $(\equiv\widehat{ACB})$. Cum $[EB]\equiv[EB]$, $\triangle AEB\equiv\triangle BEQ$ (ULU), deci $[EA]\equiv$ Deoarece $\triangle ABD$ este isoscel, $\widehat{BAD}\equiv\widehat{BDA}$. Cum $\widehat{EAB}\equiv\widehat{ACB}$, obţi $\widehat{EAP}\equiv\widehat{CAD}$, şi deoarece $\widehat{CAD}\equiv\widehat{EPA}$, $\triangle EAP$ este isoscel, deci $[EA]\equiv$ Urmează că $[EP]\equiv[EQ]$, adică $[DE]$ este mediană în $\triangle DPQ$ şi atunci drea înjumătăţeşte segmentul $[AC]$ paralel cu "baza" PQ.



Soluţia a II-a. Fie $\{A'\}=BC\cap AE$ şi $\{F\}=AB\cap DE$. Deoarece $\triangle ABC\sim$ $\sim\triangle A'BA$, putem scrie: $\dfrac{c}{A'B}=\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{A'A}$, de unde $A'A=\dfrac{bc}{a}$ şi $A'B=\dfrac{c^2}{a}$. Conform teoremei lui Menelaus, avem: $\dfrac{DB}{DA'}\cdot\dfrac{EA'}{EA}=$ $=\dfrac{FB}{FA}$ $(\triangle ABA'$ şi $DE)$. Cum $\dfrac{DB}{DA'}=\dfrac{c}{c+c^2/a}$ şi $\dfrac{EA'}{EA}=\dfrac{BA'}{BA}=\dfrac{c}{a}$ (t bisectoarei), rezultă că $\dfrac{FB}{FA}=\dfrac{c}{a+c}$. Pentru a dovedi că $M\in DE$, ară punctele D, M, E sunt coliniare utilizând reciproca teoremei lui Menelaus re $\triangle ABC$; într-adevăr, avem $\dfrac{DB}{DC}\cdot\dfrac{MC}{MA}\cdot\dfrac{FA}{FB}=\dfrac{c}{c+a}\cdot 1\cdot\dfrac{a+c}{c}=1$.

G30. *Fie triunghiul AB_0B_1 dreptunghic în B_0 şi triunghiurile AB_iB $B_iB_{i+1}\perp AB_i$, $\forall i\in N^*$, iar $m(\widehat{B_iAB_{i+1}})=30^\circ$, $\forall i\in N$.*

a) Demonstraţi că punctele A, B_q şi B_r sunt coliniare, unde $q=2\left(n^3-\right.$ $r=3^{2002}-3^{2000}+3^{1998}-3^{1996}+\ldots+3^2-3^0$.

b) Aflaţi aria triunghiului $AB_{2001}B_{2002}$ funcţie de $a=B_0B_1$.

Romanţa Ghiţă şi Ioan Ghiţ

Soluţie. $a)$ Observăm mai întâi că dacă $i\in\mathbb{N}$, $i=12q_1+r_1$, q_1, r $0\leq r_1<12$, atunci $B_{r_1}\in[AB_i]$. Deoarece $q=2n(n+1)(n-1)+2$, $q=M_1$ $B_2\in[AB_q]$. În plus, $r=8\left(3^{2000}+3^{1996}+\cdots+3^0\right)=M_{12}+8$ şi $B_8\in[AB_r$ B_2, A, B_8 sunt coliniare, B_r, A şi B_q sunt de asemenea coliniare.

b) Observăm că $\triangle AB_iB_{i+1} \sim \triangle AB_{i+1}B_{i+2}$, $\forall i \in \mathbb{N}$, raportul de asemăna
$\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Atunci $S_{AB_{2001}B_{2002}} = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^{2\cdot 2001} \cdot S_{AB_0B_1} = \frac{2^{4001}}{3^{2001}}\, a^2\sqrt{3}$.

G31. *Se consideră un triunghi isoscel ABC cu baza $BC = 2\sqrt{2}$ cm. Fie p variabile $M \in (AB)$ şi $N \in (AC)$ astfel încât $[AM] \equiv [CN]$. Fie O m segmentului $[MN]$ şi P intersecţia dreptelor AO şi BC. Aflaţi perimetrul ştiind că aria minimă a reuniunii suprafeţelor triunghiulare $[MBP]$ şi $[NC$ $\sqrt{3}$ cm^2.*

Adriana Maxiniuc, Bo

Soluţie. Fie $NQ \parallel AB$, $Q \in (BC)$. Atunci $\widehat{NQC} \equiv \widehat{ABC}$ şi cum $\widehat{ABC} \equiv$ $\triangle NQC$ este isoscel, deci $[NC] \equiv [NQ]$. Deoarece $[NC] \equiv [AM]$, rezultă că $[NQ$ şi cum $NQ \parallel AM$, $ANQM$ este paralelogram. Notăm $AQ \cap MN = \{O'\}$. At înjumătăţeşte $[MN]$, deci $O' \equiv O$ şi atunci $P \equiv Q$, deci $AMPN$ este paralel

Deoarece $S_{MBP}+S_{NCP}+S_{AMNP}=S_{ABC}=$constant, aria din enunţ este când S_{AMNP} este maximă. Cum $S_{AMNP} = AM\cdot AN \sin\widehat{BAC} = AM\,(AC -$ $\times \sin\widehat{BAC}$, iar $AM\,(AC - AM)$ este maxim când $AM = \frac{AC}{2}$, rezultă că este maximă atunci când M şi N sunt mijloacele segmentelor $[AB]$, respecti cu valoarea $\frac{S_{ABC}}{2}$. Atunci minimul ariei din enunţ este de asemenea $\frac{S_{AB}}{2}$ lungimea înălţimii din A este $\sqrt{6}$ cm. Rezultă $AB = 2\sqrt{2}$ cm, iar $P_{ABC} = 6$

G32. *Fie patrulaterul convex $ABCD$ cu $m(\widehat{A}) = m(\widehat{D}) = 90°$, M un p dreapta AD, iar $N \in BC$ astfel încât $MN \perp BC$. Arătaţi că $S_{CMB} \geq S_{AN}$*

Neculai Roman, Mirceşti

Soluţie (Constantin Tonu, elev, Iaşi). Patrulaterul $ABCD$ este drep sau trapez dreptunghic. Fie N' proiecţia lui N pe AD; atunci $S_{CMB} = \frac{1}{2}\,M$
$S_{AND} = \frac{1}{2}\,NN' \cdot AD$. Însă $MN \geq NN'$, iar $BC \geq AD$, de unde concluzia.

G33. *În triunghiul ABC cu $m(\widehat{A}) = 2\alpha$, fie $D \in (BC)$ piciorul bis unghiului $\widehat{A}$, iar M, N puncte pe (AB) respectiv (AC). Dacă $\{P\} = AD$ demonstraţi că $\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = \frac{2\cos\alpha}{AP}$ (în legătură cu C:2402 din G.M. 5-6/2*

Mihaela Bucătar

Soluţie. Relaţia se scrie $AP = \frac{2\,AM \cdot AN}{AM + AN} \cos\frac{A}{2}$, egalitate adevărată, d $[AP]$ este bisectoare în triunghiul AMN.

G34. *În triunghiul ABC având $m(\widehat{BAC}) = 135°$ se înscrie pătratul MN $M, N \in (BC)$, $P \in (CA)$ şi $Q \in (AB)$. Arătaţi că:*

$1°\quad \frac{AM}{AN} = \frac{b + c\sqrt{2}}{c + b\sqrt{2}}$; $\qquad 2°\quad \frac{BM}{CN} = \frac{c}{b} \cdot \frac{AM}{AN}$.

Temistocle Bîrsa

Soluţie. Deoarece $m(\widehat{BAC}) = 135°$, A este pe cercul circumscris păt Observăm de aici că $m(\widehat{BAM}) = m(\widehat{MAN}) = m(\widehat{NAC}) = 45°$. Notăm $l =$

1° Deoarece $APMQ$ este inscriptibil, $AM \cdot PQ = AP \cdot MQ + AQ \cdot M$

$AM = l\left(\dfrac{AP}{PQ} + \sqrt{2}\dfrac{AQ}{PQ}\right)$. Deoarece $\triangle AQP \sim \triangle APC$, $\dfrac{AP}{PQ} = \dfrac{b}{a}$ şi $\dfrac{AQ}{PQ}$
Atunci $AM = \dfrac{l}{a}\left(b + \sqrt{2}\,c\right)$. Analog obţinem că $AN = \dfrac{l}{a}\left(\sqrt{2}\,b + c\right)$, de unde
concluzia.

2° Utilizând teorema sinusurilor în $\triangle ABM$ şi $\triangle ACN$, $\dfrac{BM}{\sin 45°} = \dfrac{AM}{\sin B}$ şi
$= \dfrac{AN}{\sin C}$. Atunci $\dfrac{BM}{CN} = \dfrac{AM}{AN} \cdot \dfrac{\sin C}{\sin B} = \dfrac{c}{b} \cdot \dfrac{AM}{AN}$.

G35. *Fie $[ABCD]$ un tetraedru. În planele (ABC), (ADC), (ADB) cons tangentele în A la cercurile circumscrise triunghiurilor ABC, ADC respectiv care intersectează dreptele BC, CD, DB în M, N respectiv P. Notăm $x =$ $y = \dfrac{NC}{ND}$, $z = \dfrac{PD}{PA}$. Să se arate că $\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1+y} + \dfrac{1}{1+z} \geq 1$.*

Marian Ionescu,

Soluţie. În planul (ABC), observăm că $\triangle AMB \sim \triangle CMA$, deci $\dfrac{MB}{MA} = \dfrac{A}{A}$
Atunci $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{MB}{MA} \cdot \dfrac{MA}{MC} = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2$, deci $x = \dfrac{AB^2}{AC^2}$ şi analog deducem că $y =$
$z = \dfrac{AD^2}{AB^2}$, prin urmare $xyz = 1$. Observăm că $\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1+yz} = 1$, deci inega
de demonstrat se reduce la $\dfrac{1}{1+y} + \dfrac{1}{1+z} \geq \dfrac{1}{1+yz}$, care se obţine prin calcul

B. Nivel liceal

L21. *Rezolvaţi în $\mathbb{N}^2$ ecuaţia $a^2 + 3b^2 = 2^n$, unde $n \in \mathbb{N}$ este fixat.*

Gheorghe Iure

Soluţie (dată de Andrei Nedelcu, Iaşi). Dacă a şi b au parităţi atunci $n = 0$ şi avem soluţia $a = 1$, $b = 0$. Dacă $n > 0$, atunci a, b au paritate şi atunci fie $a + b = 2x$, $x \in \mathbb{N}^*$ şi $a - b = 2y$, $y \in \mathbb{Z}$. Înlocuind, o $4\left(x^2 - xy + y^2\right) = 2^n$, de unde $n \geq 2$. Fie $d = (x, y)$; avem că $d = 2^s$, $2s \leq n$ $x = 2^s x_1$, $y = 2^s y_1$, cu $(x_1, y_1) = 1$. Înlocuind din nou, găsim $x_1^2 - x_1 y_1 + y_1^2 = 2$ şi cum membrul stâng este impar, $n = 2(s+1)$ este număr par, iar $x_1^2 - x_1 y_1 +$ Fiindcă $x_1, y_1 \in \mathbb{N}$, cu $x_1 \neq 0$, obţinem că $x_1 = y_1 = 1$ sau $x_1 = 1$, $y_1 = 0$, cu s corespunzătoare $a = 2^{n/2}$, $b = 0$, respectiv $a = b = 2^{\frac{n-2}{2}}$.

Cu această tehnică putem aborda rezolvarea ecuaţiei în $\mathbb{Q}^2$. Să observă întâi că este suficient să găsim soluţiile $(a, b) \in \mathbb{Q}_+^2$, celelalte soluţii fiind de $(-a, b)$, $(a, -b)$, $(-a, -b)$. Fie $a = \dfrac{x}{z}$, $b = \dfrac{y}{w}$, cu $x, y, z, w \in \mathbb{N}$, $(x, z) = (y,$ Se observă uşor că $z = w$ şi ecuaţia devine $x^2 + 3y^2 = 2^n \cdot z^2 \quad (*)$. Pentru putem scrie $x^2 - y^2 = z^2 - 4y^2$, i. e. $(x - y)(x + y) = (z - 2y)(z + 2y)$. Dacă atunci $z = 2y$, deci $a = b = \dfrac{1}{2}$. Dacă $x \neq y$, atunci $\dfrac{x-y}{z-2y} = \dfrac{z+2y}{x+y} = \dfrac{m}{n}$, $x = k\left(m^2 - 4mn + n^2\right)$, $y = k\left(m^2 - n^2\right)$, $z = 2k\left(m^2 - mn + n^2\right)$, cu k, m astfel încât $x, y, z \geq 0$.

Fie $n \neq 0$; atunci x, y au aceeaşi paritate şi fie $x + y = 2\alpha$, $x - y = 2$ înlocuire în $(*)$, obţinem $4\left(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2\right) = 2^n z^2$. Dacă n impar, această

nu are soluţii, deoarece în membrul stâng şi în z^2 factorul 2 apare numai
teri pare. Dacă n este par, fie $(\alpha, \beta) = 2^s$, $z = 2^r z_1$ cu z_1 impar şi atu
$2^{2s}\left(\alpha_1^2 - \alpha_1\beta_1 + \beta_1^2\right) = 2^n \cdot 2^{2r} z_1^2$, deci $2s + 2 = n + 2r$, iar $\alpha_1^2 - \alpha_1\beta_1 + \beta$
cu soluţia $z_1 = k\left(m^2 - mn + n^2\right)$, iar $(\alpha_1, \beta_1) = \left(k\left(m^2 - n^2\right), k\left(2mn - n\right.\right.$
invers etc.

Notă. Soluţie corectă s-a primit de la *Alin Iacob*, elev, Iaşi.

L22. *Fie $n \in \mathbb{N}$ un număr scris în baza 10. Acestui număr îi adăugăm la 147, numărului obţinut îi adăugăm din nou la sfârşit 147 şi aşa mai departe. că printre numerele astfel obţinute există numere compuse.*

Adrian Zanosch

Soluţie. Avem $n_1 = 1000n + 147 = 37(27n + 4) + n - 1$, de unde o că $n_1 \equiv n - 1 \pmod{37}$. Apoi $n_2 = 1000n_1 + 147 = 37(27n_1 + 4) +$ deci $n_2 \equiv n_1 - 1 \pmod{37} \equiv n - 2 \pmod{37}$ şi aşa mai departe. Astfel obţi numerele din şirul construit sunt congruente, modulo 37, cu $n-1, n-2, \ldots$, $\ldots$, deci există printre ele numere divizibile cu 37, adică numere compuse.

L23. *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie periodică de perioadă principală T astfel î $[0, T]$ f se anulează de un număr finit de ori şi fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de nume nenule. Arătaţi că există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(\alpha x_n) \cdot f(\alpha + x_n) \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$*

Paul Georgescu şi Iuliana Georgesc

Soluţie. Fie $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ mulţimea pe care f se anulează în $[0, T]$ şi fi

$$A = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(\frac{a_i}{x_n} + \frac{T}{x_n}\mathbb{Z}\right)\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{k}(a_i - x_n + T\mathbb{Z})\right).$$

Însă $\dfrac{a_i}{x_n} + \dfrac{T}{x_n}\mathbb{Z}$ şi $a_i - x_n + T\mathbb{Z}$ sunt mulţimi numărabile, $\forall i \in \overline{1,k}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, A este numărabilă. Cum $\mathbb{R}$ este nenumărabilă, $\mathbb{R} \setminus A \neq \emptyset$.

Fie $\alpha \in \mathbb{R} \setminus A$. Atunci $\alpha \notin \dfrac{a_i}{x_n} + \dfrac{T}{x_n}\mathbb{Z}$, $\forall i \in \overline{1,k}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, deci $\alpha x_n \notin a$ $\forall i \in \overline{1,k}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ceea ce înseamnă că $f(\alpha x_n) \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Analog dedu $f(\alpha + x_n) \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, de unde rezultă concluzia problemei.

L24. *Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrice nesingulare cu $\det A + \det B = 0$. Există astfel încât $A^2B - B^2A = \alpha A$?*

Cătălin Calistr

Soluţie. Presupunem prin reducere la absurd că există $\alpha > 0$ astfel ca $-B^2A = \alpha A$. Înmulţind la dreapta cu A^{-1}, obţinem că $A^2BA^{-1} = B^2 + \alpha I_n$

$$\det\left(B^2 + \alpha I_n\right) = \det\left(B + i\sqrt{\alpha}I_n\right)\det\left(B - i\sqrt{\alpha}I_n\right) = \left|\det\left(B + i\sqrt{\alpha}I_n\right)\right.$$

iar $\det\left(A^2BA^{-1}\right) = \det A \det B = -(\det A)^2 < 0$, contradicţie.

L25. *Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice cu proprietatea că există $m \in \mathbb{N}$, şi $\alpha \in \mathbb{R}$, $|\alpha| \leq 1$, astfel încât $A^{m+1} - \alpha A^m - \alpha A + I_n = O_n$. Să se a $|\det A| = 1$.*

Lucian Georges Lădunc

Soluţie. Fie $P_A(X) = \det(XI - A) = (X - x_1)^{k_1}(X - x_2)^{k_2} \ldots (X$ polinomul caracteristic al matricei A. Cum $x_1, x_2, \ldots, x_l$ sunt rădăcini şi m_A, polinomul minimal al matricei A peste $\mathbb{C}$, iar m_A divide $X^{m+1} - \alpha X^m -$ rezultă că $x_1, x_2, \ldots, x_l$ au modulele egale cu 1, deoarce ultimul polinom ar rădăcinile de modul 1. Dar $P_A(0) = \det(-A) = (-1)^{\sum_{i=1}^{l} k_i} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_l^{k_l}$. $\det(-A) = (-1)^n \det A = (-1)^{\sum_{i=1}^{l} k_i} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_l^{k_l}$, de unde $|\det A| = 1$.

L26. *Fie $f : S_n \to S_n$ endomorfism astfel încât există $\tau \in S_n$ pent* *$(f \circ f)(\sigma) = \tau\sigma\tau^{-1}$, $\forall \sigma \in S_n$. Arătaţi că f are un punct fix (i.e. $\exists \omega$* *$f(\omega) = \omega$).*

Ovidiu Munteanu, I

Soluţie. Fie $\tau \in S_n$ cu proprietatea din enunţ. Este uşor de observat că $\varphi : S_n \to S_n$, $\varphi(\sigma) = \tau\sigma\tau^{-1}$ este bijectivă. Relaţia din enunţ se scrie sub $f \circ f = \varphi$, de unde rezultă că f este bijectivă.

Pentru $\sigma \in S_n$, $(f \circ f \circ f)(\sigma) = f(\varphi(\sigma)) = f\left(\tau\sigma\tau^{-1}\right) = f(\tau) f(\sigma)$ şi, de asemenea, $(f \circ f \circ f)(\sigma) = \varphi(f(\sigma)) = \tau f(\sigma)\tau^{-1}$. Rezultă de $f(\tau) f(\sigma) f\left(\tau^{-1}\right) = \tau f(\sigma)\tau^{-1}$, $\forall \sigma \in S_n$ şi, deoarece f este sur $f(\tau)\rho f\left(\tau^{-1}\right) = \tau\rho\tau^{-1}$, $\forall \rho \in S_n$. Deci $\left[\tau^{-1} f(\tau)\right]\rho = \rho\left[\tau^{-1} f(\tau)\right]$, $\forall \rho \in S_n$ $\tau^{-1} f(\tau)$ comută cu toate elementele lui S_n, $\tau^{-1} f(\tau) = e$. Obţinem că $f(\tau)$

L27. *Fie $(A, +, \cdot)$ un inel cu unitate şi $n, k \in \mathbb{N}^*$, k impar, astfel încât x^{n+}* *$\forall x \in A$. Să se arate că $x^{k+1} = x$, $\forall x \in A$ (în legătură cu C: 1896 din G.M. nr.1*

Dragoş Deliu şi Marian Tetiva, I

Soluţie. Dacă $n = 1$, nu avem nimic de demonstrat. Fie acum $n \geq 2$. D $(-1)^{n+k} = (-1)^n$, iar n şi $n+k$ au parităţi diferite, avem că $-1 = 1$, deci 1 şi în concluzie $2a = a + a = 0$, $\forall a \in A$.

Demonstrăm acum că în inelul A este valabilă implicaţia $x^2 = 0 \Rightarrow x =$ adevăr, fie $x \in A$ astfel ca $x^2 = 0$. Atunci $x^s = 0$, $\forall s \in \mathbb{N}$, $s \geq 2$ şi aplicând f binomială rezultă că $(1+x)^p = 1 + px$, $\forall p \in \mathbb{N}$. Cum $(1+x)^{n+k} = (1+$ ipoteză, obţinem că $1 + (n-k)x = 1 + nx$, de unde $kx = 0$. Deoarece k este şi $2x = 0$, rezultă imediat că $x = 0$, deci implicaţia este dovedită.

Din ipoteză, $x^{n+k} = x^n$, $\forall x \in A$, deci şi $x^{m+k} = x^m$, $\forall x \in A$, pentru Vom avea atunci

$$\left(x^{n+k-1} - x^{n-1}\right)^2 = \left(x^{2n+k-2+k} - x^{2n+k-2}\right) - \left(x^{2n-2+k} - x^{2n-2}\right) = 0$$

ceea ce implică $x^{n+k-1} - x^{n-1} = 0$. Am obţinut că $x^{n+k-1} = x^{n-1}$; re raţionamentul obţinem că $x^{n+k-2} = x^{n-2}$, $\dots$, $x^{k+1} = x$, q.e.d.

L28. *Fie ABC şi $A'B'C'$ două triunghiuri ascuţitunghice. Dacă*

$$\left(\frac{a}{a'}\right)^2 \geq \left(\frac{b}{b'}\right)^2 \geq \left(\frac{c}{c'}\right)^2 \geq \frac{S}{S'},$$

arătaţi că triunghiurile sunt asemenea.

Ioan Săcăleanu, I

Soluţie. Notăm cu $x = \dfrac{\sin A}{\sin A'}$, $y = \dfrac{\sin B}{\sin B'}$, $z = \dfrac{\sin C}{\sin C'}$. Folosind t sinusurilor şi formula $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$, obţinem că $x^2 \geq y^2 \geq z^2 \geq x$ aici, $x \geq y \geq z$ şi $xy \leq z$. Atunci şi $xy \leq y$, de unde $x \leq 1$ şi deci $z \leq y \leq$ Deoarece $\triangle ABC$ şi $\triangle A'B'C'$ sunt ascuţitunghice, iar funcţia sinus este cres pe $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, din $x \leq 1$, $y \leq 1$, $z \leq 1$ obţinem că $m(\widehat{A}) \leq m(\widehat{A'})$, $m(\widehat{B}) \leq$ $m(\widehat{C}) \leq m(\widehat{C'})$. Cum $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = m(\widehat{A'}) + m(\widehat{B'}) + m(\widehat{C'}) =$ rezultă că $m(\widehat{A}) = m(\widehat{A'})$, $m(\widehat{B}) = m(\widehat{B'})$, $m(\widehat{C}) = m(\widehat{C'})$, deci cele două triu sunt asemenea.

Notă. Soluţie corectă s-a primit de la *Alin Iacob*, elev, Iaşi.

L29. *Fie ABC un triunghi, iar $\mathcal{C}$ un cerc tangent laturilor $[AB]$ şi $[AC$ respectiv E şi care intersectează latura $[BC]$ în M şi N. Fie X un punct triunghiului astfel încât există un cerc $\mathcal{C}_1$ tangent laturilor $[XB]$ şi $[XC]$ în spectiv Y şi care taie $[BC]$ tot în M şi N. Demonstraţi că patrulaterul EFZ inscriptibil.*

Neculai Roman, Mirceşti,

Soluţie. Dacă $[AB] \equiv [AC]$, punctul X va fi în mod necesar pe axa triun ABC (altfel $\mathcal{C}_1$ n-ar exista). Ca urmare, patrulaterul $EFZY$ este trapez isosc este inscriptibil. Fie acum $[AB] \not\equiv [AC]$ şi fie $\{K\} = FE \cap BC$, $\{K'\} = ZY$ (K' există deoarce triunghiul XBC nu va fi nici el isoscel). Aplicând teore Menelaus pentru $\triangle ABC$ cu transversala KFE obţinem $\frac{KB}{KC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} =$ $\frac{KB}{KC} = \frac{FB}{EC}$. Aplicând teorema lui Menelaus pentru $\triangle XBC$ cu transversala obţinem $\frac{K'B}{K'C} \cdot \frac{YC}{YX} \cdot \frac{ZX}{ZB} = 1$, deci $\frac{K'B}{K'C} = \frac{ZB}{YC}$. Dar $FB = ZB$ şi YC (deoarece B şi C aparţin axei radicale a cercurilor $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}$), prin urmare $\frac{KB}{KC} =$ de unde $K = K'$. Deoarece K se află pe axa radicală a cercurilor $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}$ $KE \cdot KF = KY \cdot KZ$, deci punctele E, F, Y, Z sunt conciclice.

Notă. Soluţie corectă s-a primit de la *Alin Iacob*, elev, Iaşi.

L30. *Fie ABC un triunghi echilateral, iar P un punct în planul triunghiul tăm cu A_1, B_1, C_1 simetricele lui P faţă de BC, CA şi respectiv AB. Să s că se poate forma un triunghi având lungimile laturilor egale cu AA_1, BB_1,*

Constantin Coce

Soluţie. Fie $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $P(p)$ şi fie $O(0)$ centrul cercului circu $\triangle ABC$. Putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că $a = 1$, $b = \omega$, Avem $\lambda_{BC} = \frac{b-c}{\overline{b}-\overline{c}} = \frac{b-c}{1/b-1/c} = -bc$, de unde $\lambda_{PA_1} = bc$, deoarece PA_1 Fie $\{A'\} = PA_1 \cap BC$. Ecuaţia dreptei BC este $z-b = -bc\left(\overline{z}-\overline{b}\right)$ şi poate fi sub forma $z + bc\overline{z} = b + c$. Ecuaţia dreptei PA_1 este $z - p = bc(\overline{z}-\overline{p})$. obţinem că afixul a' al punctului A' este dat de egalitatea $a' = \frac{1}{2}(b+c+p$ Cum $a' = \frac{p+a_1}{2}$, unde a_1 este afixul punctului A_1, urmează că $a_1 = b + c$ în mod similar, $b_1 = c + a - ca\overline{p}$, $c_1 = a + b - ab\overline{p}$.

De aici, $(a-a_1)+(b-b_1)+(c-c_1) = 0$ şi se obţine că $|a-a_1|+|b-b_1| \geq |$ de unde $AA_1+BB_1 \geq CC_1$. Analog obţinem că $AA_1+CC_1 \geq BB_1$ şi BB_1+CC_1 ceea ce trebuia demonstrat.

L31. *Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale astfel încât $a_1 = a > 1$, $= a_n + \sqrt[p]{a_n^{p-1}} - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, unde $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}$ legătură cu C:1463 din G.M. nr.11/1993).*

Viorel Cornea şi Dan Ştefan Marinescu, Hune

Soluţie. Deoarece $a > 1$, putem demonstra prin inducţie că $a_n > 1$, $\forall$ de unde, ţinând seama că $a_{n+1} - a_n = \sqrt[p]{a_n^{p-1}} - 1$, obţinem că şirul $(a_n)_n$ strict crescător. Dacă $(a_n)_{n\geq 1}$ ar fi mărginit superior, atunci ar avea o limit

l. Trecând la limită în relaţia de recurenţă s-ar obţine că $l = l + \sqrt[p]{l^{p-1}} -$
$l = 1$, contradicţie. În concluzie, $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Împărţind acum în relaţia de recurenţă prin a_1 obţinem că $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \sqrt[p]{\frac{1}{a}}$
de unde $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. Calculăm acum limita $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[p]{a_n}}{n}$ cu ajutorul le
Cesaro - Stolz. Observăm că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[p]{a_{n+1}} - \sqrt[p]{a_n}}{n+1-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{\sqrt[p]{a_{n+1}^{p-1}} + \sqrt[p]{a_{n+1}^{p-2} a_n} + \ldots + \sqrt[p]{a_n^{p-1}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \sqrt[p]{\frac{1}{a_n^{p-1}}}}{\sqrt[p]{\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{p-1}} + \sqrt[p]{\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{p-2}} + \ldots + 1} = \frac{1}{p}.$$

De aici, $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[p]{a_n}}{n} = \frac{1}{p}$, deci $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^p} = \frac{1}{p^p}$.

L32. *Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere naturale care satisface condiţia* $\left[\frac{x_{n+1}}{x_n}\right.$
$\forall n \geq 1$, *iar $x_1 = 2$. Să se arate că există $\alpha > 1$ pentru care* $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\alpha^{2^n}} = 1$.

Cristinel Mortici, Târg

Soluţie. Avem că $x_n \leq \frac{x_{n+1}}{x_n} < x_n + 1$, deci $x_n^2 \leq x_{n+1} < x_n^2 + x_n$; în par
putem deduce prin inducţie că $x_n \geq 2^{2^{n-1}}$, $\forall n \geq 1$. Notăm $y_n = \frac{\ln x_n}{2^n}$.
$y_{n+1} - y_n = \frac{\ln\left(x_{n+1}/x_n^2\right)}{2^{n+1}}$, deci $0 \leq y_{n+1} - y_n < \frac{\ln(1 + 1/x_n)}{2^{n+1}} < \frac{1}{x_n\, 2^{n+1}}$.

Se obţine că $(y_n)_{n\geq 1}$, este monoton crescător şi, în plus,

$$y_{n+1} = y_1 + \sum_{k=1}^{n} (y_{k+1} - y_k) \leq y_1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k+1}},$$

de unde $y_{n+1} < y_1 + 1/2$, adică $(y_n)_{n\geq 1}$ este mărginit superior. Deducem că (
este convergent şi fie $\ln\alpha$ limita sa, $\alpha > 1$. Deoarece

$$y_{n+p} - y_n = \sum_{k=0}^{p-1} (y_{n+k+1} - y_{n+k}) < \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{x_{n+k} 2^{n+k+1}},$$

obţinem că $y_{n+p} - y_n < \frac{1}{x_n\, 2^n}$. Cum $(y_n)_{n\geq 1}$ este monoton crescător, pentru
obţinem că $0 \leq \ln\alpha - y_n \leq \frac{1}{x_n\, 2^n}$. De aici, $0 \leq \ln\alpha - \frac{\ln x_n}{2^n} \leq \frac{1}{x_n\, 2}$
$0 \leq \ln \frac{\alpha^{2^n}}{x_n} \leq \frac{1}{x_n}$. Pentru $n \to \infty$ obţinem că $\lim_{n\to\infty} \ln \frac{\alpha^{2^n}}{x_n} = 0$, deci $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\alpha^{2^n}}$

L33. *Fie $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ fixat. Arătaţi că soluţiile continue ale*
funcţionale

$$f\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right) + \sum_{1\leq i<j\leq m} f(x_i - x_j) = m\left(\sum_{i=1}^{m} f(x_i)\right), \ \forall x_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1,m}$$

sunt funcţiile de forma $f(x) = cx^2$, cu $c \in \mathbb{R}$.

Adrian Cordunean

Soluţie. Pentru $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0$, obţinem că $f(0) + C_m^2 f(0) = m$ deci $f(0) = 0$. Pentru $x_1 = x_2 = \ldots = x_{m-1} = 0$ şi $x_m = x$, obţi $f(x) + (m-1) f(-x) = mf(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ şi funcţie pară. Este deci suficient să determinăm f pe $(0, \infty)$.

Notăm $f(1) = c$. Pentru $x_1 = x_2 = 1$ şi $x_3 = \ldots = x_m = 0$, obţi $f(2) + (m-2) f(1) = 2mf(1)$, deci $f(2) = 4c = c \cdot 2^2$. Pentru $x_1 = n$, x_2 $x_3 = \ldots = x_m = 0$, obţinem că $f(n+1) + (m-2) f(n) + f(n-1) + (m-2)$ $= m(f(n) + f(1))$ şi deci $f(n+1) = 2f(n) - f(n-1) + 2f(1)$. De aici se strează uşor prin inducţie că $f(n) = cn^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Pentru $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = x \in \mathbb{R}_+^*$ obţinem că $f(mx) = m^2 f(x)$. $f\left(\frac{x}{m}\right) = \frac{f(x)}{m^2}$ şi, prin inducţie, $f\left(\frac{x}{m^k}\right) = \frac{f(x)}{m^{2k}}$, de unde $f\left(\frac{n}{m^k}\right) = c\Big($ $\forall n \in \mathbb{N}$. Notăm $M = \left\{\frac{n}{m^k};\ n, k \in \mathbb{N}\right\}$. Din cele demonstrate mai sus, $f(x)$ $\forall x \in M$. Demonstrăm că $\forall x > 0$ şi $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_\varepsilon \in M$ astfel ca $|x - x_\varepsilon| <$ $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca $\frac{1}{m^{k_\varepsilon}} < \min\{x, \varepsilon\}$. Conform axiomei lui Arhimede, există astfel ca $\frac{n_\varepsilon}{m^{k_\varepsilon}} \leq x < \frac{n_\varepsilon + 1}{m^{k_\varepsilon}}$, deci $0 \leq x - \frac{n_\varepsilon}{m^{k_\varepsilon}} < \frac{1}{m^{k_\varepsilon}} < \varepsilon$, de unde $\Big|x - \frac{n_\varepsilon}{m^k}$ Rezultă că putem alege $x_\varepsilon = \frac{n_\varepsilon}{m^{k_\varepsilon}}$. Pentru $\varepsilon = \frac{1}{l}$, $l \in \mathbb{N}$, obţinem că $\exists (x_l)_{l\geq}$ astfel ca $|x - x_l| < \frac{1}{l}$, $\forall l \geq 1$, deci $x_l \to x$ pentru $l \to \infty$. Cum $f(x_l) = cx$ este continuă, obţinem că $f(x) = cx^2$. În concluzie, $f(x) = cx^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

L34. *Se consideră şirul de funcţii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : [-2, \infty) \to \mathbb{R}$ definit prin f $= x$, $f_n(x) = \sqrt{2 + f_{n-1}(x)}$, $\forall n \geq 1$. Notăm*

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{f_n(x)}{2}\right)^{4^n}, & \text{dacă } x \in [-2, 2] \\ \lim\limits_{n\to\infty} [3 - f_n(x)]^{4^n}, & \text{dacă } x \in (2, \infty) \end{cases}.$$

Arătaţi că $f(x)$ defineşte o funcţie pe $[-2, \infty)$ şi cercetaţi dacă această funcţie primitive.

Ştefan Alexe, I

Soluţie. Fie mai întâi $x \in [-2, 2]$. Se observă că funcţia $g : [0, \pi] \to$ $g(x) = \cos x$ este bijectivă. În concluzie, există un unic $t = t(x) \in [0, \pi]$, $t = $ ar astfel încât $\cos t = \frac{x}{2}$, deci $f_0(x) = 2\cos t$. Atunci $f_1(x) = \sqrt{2 + 2\cos t} = 2$ c se demonstrează prin inducţie că $f_n(x) = 2\cos \frac{t}{2^n}$.

Fie acum $x \in (2, +\infty)$. Se observă că funcţia $h : (0, \infty) \to (1, \infty)$, h $= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$ este bijectivă. În concluzie, există un unic $t = t(x) \in$ $t = \ln\left(\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2}\right)$ astfel încât $\operatorname{ch} t = \frac{x}{2}$. Atunci $f_1(x) = \sqrt{2 + 2}$ $= \sqrt{2 + e^t + e^{-t}}$, deci $f_1(x) = e^{t/2} + e^{-t/2} = 2\operatorname{ch}\frac{t}{2}$ şi se demonstrează p ducţie că $f_n(x) = 2\operatorname{ch}\dfrac{t}{2^n}$.

Găsirea expresiei funcţiei f se reduce la calculul unor limite elementare. Se
că $f(x) = 1 + e^{-\frac{1}{2}\arccos^2\frac{x}{2}}$, dacă $x \in [-2, 2]$, respectiv $f(x) = e^{-\ln^2\frac{x+\sqrt{x^2-}}{2}}$
$x \in (2, +\infty)$. Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = 2$, iar $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = 1$, $x = 2$ este punct de disco
tate de speţa întâi pentru f, deci f nu admite primitive pe $[-2, +\infty)$.

L35. *Să se arate că există şi este unic $\alpha > 1$ astfel încât*

$$\int_0^{\pi/4} \frac{e^x}{e^x + \alpha\sin x}\,dx \cdot \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{e^x + \alpha\sin x}\,dx = \frac{\pi^2}{64\alpha}$$

(se ştie că $0,45 < e^{-\pi/4} < 0,46$).

Gabriel Popa şi Paul Georgesc

Soluţie. Notăm $I = I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{e^x}{e^x + \alpha\sin x}\,dx$, $J = J(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{e^x + \alpha \mathrm{s}}$
se deduce imediat că $I + \alpha J = \dfrac{\pi}{4}$, $\forall \alpha > 0$. Observăm că

$$IJ = \frac{\pi^2}{64\alpha} \Leftrightarrow I \cdot \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\pi}{4} - I\right) = \frac{\pi^2}{64}\alpha \Leftrightarrow I = \frac{\pi}{8}.$$

Rămâne să demonstrăm că există un unic $\alpha > 1$ astfel ca $I(\alpha) = \dfrac{\pi}{8}$. Fie 0
$< \alpha_2 < \infty$. Deoarece

$$I(\alpha_1) - I(\alpha_2) = (\alpha_2 - \alpha_1)\int_0^{\pi/4} \frac{e^x \sin x}{(e^x + \alpha_1 \sin x)(e^x + \alpha_2\sin x)}\,dx,$$

obţinem că $I(\alpha_1) > I(\alpha_2)$ şi $|I(\alpha_1) - I(\alpha_2)| \le \dfrac{\pi}{4}(\alpha_2 - \alpha_1)$, deci $\alpha \to I(\alpha)$
funcţie continuă strict descrescătoare pe $(0, \infty)$.

Fie $\alpha > 0$ şi $f_\alpha : \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}$, $f_\alpha(x) = \dfrac{e^x}{e^x + \alpha\sin x}$. Atunci

$$f'_\alpha(x) = \frac{\alpha\sqrt{2}e^x \sin(x - \pi/4)}{(e^x + \alpha\sin x)^2} < 0, \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right),$$

deci f_α este strict descrescătoare pe $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$. Aplicând teorema de medie in
$I(1)$, obţinem că există $c \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$ astfel ca

$$I(1) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{e^c}{e^c + \sin c} > \frac{\pi}{4} \cdot \frac{e^{\pi/4}}{e^{\pi/4} + \frac{\sqrt{2}}{2}} > \frac{\pi}{7}\ .$$

Fie acum $\delta \in \left[0, \dfrac{\pi}{8}\right]$. Atunci

$$I(\alpha) = \int_0^{\delta} \frac{e^x}{e^x + \alpha\sin x}\,dx + \int_\delta^{\pi/4} \frac{e^x}{e^x + \alpha\sin x}\,dx \le \delta + \left(\frac{\pi}{4} - \delta\right)\frac{e^\delta}{e^\delta + \alpha \mathrm{s}}$$

Pentru $\alpha \to \infty$ obţinem că $\lim\limits_{\alpha\to\infty} I(\alpha) \le \delta < \dfrac{\pi}{8}$. Ţinând seama de (1), de co
tatea lui $I(\alpha)$ şi de stricta sa monotonie, obţinem că există un unic $\alpha > 1$ a
$I(\alpha) = \dfrac{\pi}{8}$, de unde obţinem concluzia problemei.

Probleme propuse

Clasele primare

P.54. Calculaţi a şi b dacă $46 - a = 36 + a$ şi $b - 3 = 17 - b$.
(*Clasa I*) **Înv. Doiniţa Spân**

P.55. În câte moduri pot fi aranjate în linie dreaptă 9 mingi roşii şi una ga
(*Clasa I*) **Georgiana Ciobanu, elev**

P56. Cu cinci ani în urmă, suma vârstelor a trei copii era de 11 ani. Ca suma vârstelor aceloraşi copii peste 6 ani?
(*Clasa a II-a*) **Înv. Rodica Rotaru, I**

P.57. În câte moduri pot fi împărţiţi 8 băieţi în două echipe de câte 4 ju dacă Petru vrea să fie în echipă cu Mihai şi Dan, dar nu vrea să fie cu Avrar
(*Clasa a II-a*) **Adina Dohotaru, elev**

P. 58. Să se arate că suma $1 + 4 + 7 + \ldots + 100$ împărţită la 3 dă restul
(*Clasa a III-a*) **Alexandru - Gabriel Tudorache, ele**

P.59. Fie a şi b două numere consecutive. Suma acestor numere împre numerele obţinute mărind cu 12 fiecare dintre vecinii lor este 939. Care su două numere?
(*Clasa a III-a*) **Înv. Maria Rac**

P.60. Din 16 bile, una este mai grea decât celelalte 15, care au mase egal este cel mai mic număr de cântăriri prin care se poate stabili bila mai grea?
(*Clasa a III-a*) **Carmen Ciolacu, elev**

P.61. Suma a două numere este un număr de două cifre al căror produs Diferenţa dintre cele două numere este 7. Care sunt cele două numere?
(*Clasa a IV-a*) **Înv. Maria Rac**

P.62. Două ceasuri au început să funcţioneze la aceeaşi oră. Se constat fiecare 30 minute (faţă de ora exactă) unul rămâne în urmă cu un minut iar avansează cu un minut. La un moment dat orele indicate de aceste ceasuri s h 36 min şi 19 h 24 min. La ce oră au început să funcţioneze?
(*Clasa a IV-a*) **Felicia Amihăiesei, elev**

P.63. Alege un număr format din trei cifre. Scrie la dreapta lui un număr din două cifre. Scoate din numărul format de 99 ori numărul format din tr Din rezultat scoate diferenţa dintre numărul de trei cifre şi numărul de două scrie rezultatul. Eu îţi ghicesc numărul format din două cifre. Cum se explic lucru?
(*Clasa a IV-a*) **Prof. Petru Asaft**

Clasa a V-a

V.41. Fie a număr natural compus astfel încât dacă $p \mid a$, cu p prim, $p+1 \mid a$. Să se arate că $12 \mid a$ şi să se afle cel mai mare număr a de trei cifre

Ciprian Baghi

V.42. Se dau numerele $\overline{xy}$, $\overline{ab}$ scrise în baza 10 astfel încât $\overline{xy}$ divide $\overline{ab}$ arate că $x = y$ dacă şi numai dacă $a = b$.

Ioan Săcăleanu, I

V.43. Să se afle cifrele a şi b ştiind că $a \cdot b = \overline{cd}$ şi $a^b = \overline{dc}$.

Romanţa Ghiţă şi Ioan Ghiţă

V.44. Să se afle $x, y, z \in \mathbb{Q}_+^*$ pentru care $x^n = yz$, $y^n = xz$, $z^n = xy$, cu n

N. N. Hârţa

V.45. Se dau şase urne, unele conţinând bile. Fie operaţia: se aleg trei se pune câte o bilă în fiecare dintre ele.

a) Compoziţia urnelor fiind $0, 0, 4, 6, 6, 8$, să se indice o succesiune de ope urma cărora toate urnele să conţină acelaşi număr de bile.

b) Compoziţia urnelor fiind $0, 1, 2, 3, 4, 4$, să se arate că nu există o succes operaţii în urma cărora toate urnele să conţină acelaşi număr de bile.

Gheorghe Iure

Clasa a VI-a

VI.41. Pe opt cartonaşe sunt înscrise câte unul din numerele 1, 2, 2^2, 3^2, 3^3, 3^4. Dacă $P(k)$ este probabilitatea ca, extrăgând două cartonaşe, nu obţinute să aibă în total k divizori distincţi, să se rezolve inecuaţia $P(k) \geq 1$

Dumitru Dominic Bucesc

VI.42. Fie $x, y, z \in \mathbb{N}$ pentru care $84x + 91y + 98z = 2002$. Să se afle v maximă a sumei $x + y + z$.

Adrian Zanosch

VI.43. Fie $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{Z}^*$ pentru care $\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\exists i, j \in \{1, 2,$ $i \neq j$, astfel încât $a_k = a_i + a_j$. Să se arate că $n \geq 6$.

Petru Asafte

VI.44. Fie $ABCD$ un paralelogram şi MAB, NAD triunghiuri echilatera struite în exteriorul acestuia. Demonstraţi că $[MN] \equiv [BD]$ dacă şi numa $ND \parallel MB$.

Ciprian Baghi

VI.45. Fie E, F picioarele înălţimilor din B şi C ale triunghiului ascuţit ABC. Dacă P, N sunt mijloacele laturilor $[AB]$, respectiv $[AC]$, iar $\{Q\} = PE$ să se arate că $m(\widehat{PQF}) = \left|180^\circ - 3 \cdot m(\widehat{A})\right|$. (*În legătură cu Q1086 din* ***Pa*** *nr. 3/2000*)

Titu Zvonaru, Buc

Clasa a VII-a

VII.41. Rezolvaţi în $\mathbb{N}^2$ ecuaţia $\dfrac{a}{b+1} + \dfrac{b}{a+1} = 1$.

Alexandru Negrescu, elev, Bo

VII.42. Să se arate că $\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right) \geq (|a|+|b|)(|b|+|c|)(|c|$ $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

Dorin Mărghidanu, C

VII.43. Pentru $n \in \mathbb{N}$, notăm cu $s(n)$ numărul de reprezentări distin lui n ca sumă de două numere naturale ($n = a + b$ şi $n = b + a$ constituie reprezentare). Să se arate că:

a) $s(m+n) = s(m) + s(n) - \dfrac{1}{2}\left[1 + (-1)^{mn}\right]$; *b*) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} s(k) = \left[\frac{n}{2}\right] \cdot \left[\frac{n+}{2}\right.$

Petru Minu

VII.44. Fie $[AB]$ diametru al cercului $\mathcal{C}$ de centru $O, N, M \in \mathcal{C}$ astfe
$m(\widehat{AON}) = 36°$, iar $[OM$ este bisectoare pentru $\widehat{NOB}$. Dacă T este simetr
O faţă de MN, să se arate că proiecţia lui T pe AB este mijlocul lui $[AO]$.

Valentina Blende

VII.45. Fie $\triangle ABC$ echilateral, iar $P \in (BC)$. Notăm cu D, E simetricel
faţă de AC, respectiv AB. Să se arate că dreptele AP, BD şi CE sunt conc

Constantin Cocea şi Julieta Grigora

Clasa a VIII-a

VIII.41. Fie f_1, f_2, f_3 funcţii liniare ale căror grafice sunt drepte con
două câte două. Cele trei drepte sunt concurente dacă şi numai dacă exis
$\beta \in \mathbb{R}$ şi există $u \neq v \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$\frac{f_1(u)-\beta}{f_1(v)-\beta} = \frac{f_2(u)-\beta}{f_2(v)-\beta} = \frac{f_3(u)-\beta}{f_3(v)-\beta}, \quad \text{cu} \quad f_i(v) \neq \beta, i \in \{1,2,3\}.$$

Claudiu Ştefan Pop

VIII.42. Fie $x, y, z \in (0, \infty)$. Să se arate că

$$\frac{\sqrt{yz}+\sqrt{zx}}{\sqrt{yz}+\sqrt{zx}+\sqrt{x^2+y^2+z^2-yz-zx}} + \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{xz}}{\sqrt{xy}+\sqrt{xz}+\sqrt{x^2+y^2+z^2-xy}}$$

$$+\frac{\sqrt{xy}+\sqrt{yz}}{\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{x^2+y^2+z^2-xy-yz}} \leq 2.$$

Lucian Tuţescu, C

VIII.43. Dacă un triunghi dreptunghic are laturile numere naturale, ia
catetelor este pătrat perfect, atunci suma cuburilor catetelor este sumă d
pătrate.

Andrei Nedelc

VIII.44. Pe laturile $[AB]$, $[CD]$, $[BC]$, $[AD]$, $[AC]$ şi $[BD]$ ale tet
lui $ABCD$ se iau respectiv punctele M, N, P, Q, R, S astfel ca $\frac{BP}{BC}$ =
$\frac{AM}{AB} = \frac{DN}{DC}$, $\frac{AR}{AC} = \frac{DS}{BD}$. Notăm cu V_1, V_2, V_3, V_4, V respectiv volumele tetra
$AMRQ$, $BPMS$, $CPNR$, $DNQS$ şi $ABCD$. Să se arate că $2^{12}V_1V_2V_3V_4 \leq$

Viorel Cornea şi Dan Ştefan Marinescu, Hune

VIII.45. Fie $A_1, A_2, \ldots, A_k$ puncte pe un cerc $\mathcal{C}$. Să se determine o c
necesară şi suficientă pentru a putea înscrie în $\mathcal{C}$ un poligon regulat cu n la
admite punctele date ca vârfuri (nu neapărat consecutive).

Irina Mustaţă, elev

Clasa a IX-a

IX.41. Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 10$, notăm cu $u_2(n)$ numărul format din ultime
cifre ale lui n. Să se arate că:

a) $u_2\left(a^{20k+p}\right) = u_2(a^p)$, $p \in \{4, 5, \ldots, 23\}$, $k \in \mathbb{N}$, $a \in \{2, 3, 8\}$;
b) $u_2\left(a^{10k+p}\right) = u_2(a^p)$, $p \in \{2, 3, \ldots, 11\}$, $k \in \mathbb{N}$, $a \in \{4, 9\}$;
c) $u_2(5^n) = 25$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
d) $u_2\left(6^{5k+p}\right) = u_2(6^p)$, $p \in \{2, 3, \ldots, 6\}$, $k \in \mathbb{N}$;

$e)$ $u_2\left(7^{4k+p}\right) = u_2\left(7^p\right)$, $p \in \{2,3,4,5\}$, $k \in \mathbb{N}$.

Ovidiu Pop, Satu

IX.42. Fie $a,b,c \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $a+b+c = \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$.

$a)$ Dacă $|abc| > 1$, să se arate că unul dintre numere este mai mare în m
1, iar altul mai mic în modul ca 1.

$b)$ Să se afle numerele dacă $|abc| = 1$.

Marius Pachiţariu, ele

IX.43. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, iar $a \in (1,\infty)$. Ştiind că

$$f\left(x^2+ax-a\right) \geq f^2\left(\frac{1}{x}\right) - f\left(\frac{1}{x}\right) + 1, \quad \forall x \in (-\infty,0),$$

să se arate că f nu este injectivă.

Titu Zvonaru, Buc

IX.44. Dacă $\triangle ABC$ este ascuţitunghic, să se găsească maximul e
$E = \sin A \cdot \sqrt{\cos A} + \sin B \cdot \sqrt{\cos B} + \sin C \cdot \sqrt{\cos C}$.

Cezar Lupu, elev, şi Tudorel Lupu, Con

IX.45. Demonstraţi că $\triangle ABC$ în care are loc egalitatea

$$\sum \frac{h_a h_b m_c}{m_a m_b m_c + h_a h_b m_c + m_a m_b i_c} = 1,$$

suma fiind obţinută prin permutări circulare, iar notaţiile fiind cele uzua
echilateral.

Iuliana Georgescu şi Paul Georgesc

Clasa a X-a

X.41. Prove the inequality $\dfrac{F_{2n}^2}{F_{n-1} \cdot F_n} \leq \dbinom{2n}{n}$, where the Fibonacci numb
are defined by $F_0 = F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $n \geq 1$.

Zdravko Starc, Vršac, Serbia and Munte

X.42. Să se rezolve ecuaţia $2^{[x]} + 6^{[x]} + 7^{[x]} = 3^{[x]} + 4^{[x]} + 8^{[x]}$.

Daniel Jinga, I

X.43. Fie f o funcţie reală nenulă cu proprietatea că

$$f(x+y-xy) = f(x+y) - f(x)f(y), \quad \forall x,y \in \mathbb{R}.$$

Să se calculeze $f\left(\dfrac{2003}{2002}\right)$.

Adrian Zanosch

X.44. Urnele $U_1, U_2, \ldots, U_n$ conţin fiecare câte a bile albe şi b bile negr
fiecare urnă se extrage câte o bilă care se depune într-o altă urnă U. Din ur
scoate o bilă şi se constată că este albă. Care este compoziţia cea mai prob
urnei U?

Petru Minu

X.45. Se consideră triunghiul ascuţitunghic ABC. Să se arate că ex
triunghi $A'B'C'$ astfel încât $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$, $C' \in (AB)$, iar $m(\widehat{AC}$
$= m(\widehat{BA'C'}) = m(\widehat{CB'A'}) = \alpha \in (0,90]$. Dacă în plus $\triangle ABC$ este echilatera
calculeze lungimile laturilor $\triangle A'B'C'$ în funcţie de $a = BC$ şi α. (*În legătu
problemă propusă la* ***O. N. M.****, 2002*)

Dan Popescu, S

Clasa a XI-a

XI.41. Fie $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ astfel încât $\sum\limits_{\sigma \in S_k} A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} \ldots A_{\sigma(k}$
unde S_k este mulţimea permutărilor de ordin k. Să se arate că $n \,\vdots\, k!$.

Vladimir Martinu

XI.42. Prin punctele M_1 şi M_2 ale unei elipse se duc normalele la elips intersectează una din axele de simetrie ale acesteia în M_1', respectiv M_2'. arate că mediatoarea segmentului $[M_1M_2]$ trece prin mijlocul lui $[M_1'M_2']$. F proprietatea adevărată pentru hiperbolă sau pentru parabolă?

Gheorghe Costovi

XI.43. Considerăm şirul de funcţii $f_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = nx + \ln x -$ şi fie x_n soluţia unică a ecuaţiei $f_n(x) = 0$. Să se calculeze limitele şirurilor (şi $((x_n)^n)_{n \geq 1}$.

Angela Ţigăeru, S

XI.44. Să se determine funcţiile continue $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ pentru care $= f\left(\sqrt{2x^2 - 2x + 1}\right)$, $\forall x > 0$.

Marian Ursărescu, F

XI.45. Fie $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ şi numerele reale pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $b_1, b_2, \ldots$ $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$. Definim $x_n = \sqrt[n]{b_1 a_1^n + b_2 a_2^n + \ldots + b_k a_k^n}$.

a) Să se demonstreze că $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a_k$;

b) Să se arate că $\lim\limits_{n \to \infty} n(x_n - a_k) = a_k \ln b_k$;

c) Dacă $b_k = 1$, are loc $\lim\limits_{n \to \infty} n \left(\dfrac{a_k}{a_{k-1}}\right)^n (x_n - a_k) = a_k b_{k-1}$.

Marian Tetiva, I

Clasa a XII-a

XII.41. Să se calculeze $\displaystyle\int \frac{(1+x)\left(1+x^2\right)\ldots\left(1+x^{2^{n-1}}\right)}{x^{2^n}} dx$, unde $x \in$ $n \in \mathbb{N}^*$.

Oana Marangoci, student

XII.42. Fie $f : \left[\pi, \dfrac{5\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pentru care $\displaystyle\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} f(x) \sin 2x\, d$
Să se arate că există $c \in \left(\pi, \dfrac{5\pi}{4}\right)$ astfel încât $f(c) \in (1, 2)$.

Mihai Haiva

XII.43. Să se arate că

$$1 - \frac{\ln a}{3} \leq \int_0^1 a^{-x^2} dx \leq \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{\ln a}}{\sqrt{\ln a}}, \quad \forall a > 1.$$

Petru Răducan

XII.44. Să se afle numărul rădăcinilor reale ale polinomului $P \in \mathbb{Z}[X]$ c minim, care admite rădăcina $\alpha^2 + \alpha$, unde α verifică ecuaţia $x^3 - x + 1 = 0$.

Laurenţiu Modan, Buc

XII.45. Fie $\sigma \in S_5$. Să se arate că σ^2 are puncte fixe dacă şi numai dacă puncte fixe.

Paul Georgescu şi Gabriel Pop

Probleme pentru pregătirea concursurilor

A. Nivel gimnazial

G46. Determinaţi ultimele cinci cifre ale numărului
$$A = 7^{2000} + 7^{2001} + 7^{2002} + 7^{2003}.$$

Viorel Cornea şi Dan Ştefan Marinescu, Hune

G47. Determinaţi valorile parametrilor $a, b \in \mathbb{Z}$ pentru care soluţiile siste
$$x = a\,\frac{y}{y+1}\ ;\quad y = b\,\frac{x}{x+1}$$
sunt în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Temistocle Bîrsa

G48. Fie $A \subset (0, \infty)$ o mulţime care conţine $\dfrac{2002}{2003}$ şi având proprietatea c $\dfrac{a}{b} \in A$ $(a, b \in \mathbb{N}^*)$, atunci $\dfrac{a+1}{b} \in A$ şi $\dfrac{a}{2b} \in A$. Să se arate că $A \supseteq \mathbb{Q}_+^*$.

Gheorghe Iure

G49. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât $x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1} \leq (n+2$ $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n+1}^2 \leq \dfrac{n+4}{4} M^2$, unde $m = \min x_i$, $M = \max x_i$. Să se a exact n dintre numerele date sunt egale.

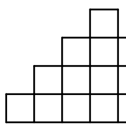
Eugen Jeca

G50. Fie $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 3$. Să se arate că
$$\left[\sqrt{an+1}\right] = \left[\sqrt{an+2}\right] = \ldots = \left[\sqrt{an+a-1}\right],\ \forall n \in \mathbb{N} \ \Leftrightarrow\ a \in \{3, 4$$

Ovidiu Pop, Satu

G51. Fie $a, b, c \in \left[\dfrac{3}{10}, \infty\right)$ cu $a + b + c = 1$. Să se arate că
$$\frac{2}{3} \leq a\sqrt{a+bc} + b\sqrt{b+ca} + c\sqrt{c+ab} < \frac{3}{4}\ .$$

Gabriel Dospinescu, elev,



G52. Se consideră o piramidă formată din pătrate 1×1, având n trepte, pe treapta k existând $2k-1$ pătrate (în figură, $n = 4$). Aflaţi numărul minim de dreptunghiuri, fiecare alcătuit numai din căsuţe întregi, în care poate fi împărţită tabla.

Adrian Zahariuc, elev,

G53. Fie $ABCD$ un pătrat de latură 70. Să se arate că există o mulţ pătrate $\mathcal{P}_k = \left\{A_iB_iC_iD_i \mid A_iB_i = i,\ i = \overline{1,k}\right\}$ care să aibă suma ariilor egală pătratului dat. Putem acoperi pătratul $ABCD$ cu elementele mulţimii $\mathcal{P}_k$?

Petru Asaft

G54. Să se arate că nu putem alege nici un punct în interiorul triun echilateral ABC de latură $l \leq 10$, care să aibă distanţele la vârfuri numere distincte.

Doru Buza

G55. Printr-un punct situat în interiorul unui tetraedru se duc planele para feţele tatraedrului. Dacă V_1, V_2, V_3, V_4 sunt volumele tetraedrelor unic deter de aceste plane, iar V este volumul tetraedrului dat, să se arate că

$$V \leq 16\left(V_1+V_2+V_3+V_4\right).$$

Neculai Roman, Mirceşti

B. Nivel liceal

L46. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil. Bisectoarele unghiurilor $\widehat{A}$ intersectează într-un punct situat pe latura $[CD]$. Să se arate că $CD = AD$

Mircea Becheanu, Buc

L47. Dacă un triunghi are pătratele laturilor în progresie aritmetică, simetricul centrului de greutate faţă de latura mijlocie se află pe cercul circu triunghiului.

Gabriel Popa şi Paul Georgesc

L48. Fie R, r, R_1 raza cercului circumscris $\triangle ABC$, raza cercului înscris $\triangle$ respectiv raza cercului circumscris $\triangle DEF$ determinat de picioarele bisect interioare ale $\triangle ABC$. Să se arate că $R/2 \geq R_1 \geq r$.

Marian Tetiva, B

L49. Într-un pătrat 10×10 se înscriu numerele $1, 2, 3, \ldots, 100$ în aşa fe oricare două numere consecutive să se afle în căsuţe vecine. Demonstraţi că e linie sau o coloană ce conţine măcar două pătrate perfecte.

Adrian Zahariuc, elev,

L50. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică având $a_1 = 5$, $r = 2002$. Pen element b al progresiei, să se arate că b^m aparţine progresiei dacă şi numa $60 \mid m-1$.

Mihai Piticari, C-lung Moldo

L51. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ două matrice care comută şi pentru care $\det\left(A^2 +\right.$ $< (\det A + \det B)^2$. Să se arate că $xA + yB$ este matrice nesingulară, $\forall x, y \in$

Cătălin Calistr

L52. Fie $Q \in \mathbb{C}[X]$ un polinom de grad m având rădăcinile distincte. determine cardinalul mulţimii

$$E = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid \exists A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ a. î. } Q(A) = O_n \text{ şi } P(X) = \det(XI_n -$$

Ovidiu Munteanu, B

L53. Fie $n \geq 2$ şi $(A, +, \cdot)$ un inel comutativ cu n^2 elemente, care are c $n-2$ divizori ai lui zero. Să se arate că A este corp.

Gabriel Dospinescu, elev,

L54. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie cu derivata continuă pentru care $f(x) \neq 0$, Să se determine funcţiile continue $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care satisfac identitatea

$$f(x)\left[\int_0^y \varphi(t)\,dt - \frac{1}{a}\varphi(y)\right] = f(y)\left[\int_0^x \varphi(t)\,dt - \frac{1}{a}\varphi(x)\right], \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

unde $a \neq 0$ este o constantă dată.

Adrian Cordunean

L55. Fie $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$. Definim şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ prin $x_0 = \dfrac{a-1}{\ln a}$; $x_n =$ $-\dfrac{n}{\ln a}x_{n-1}$, $\forall n \geq 1$. Arătaţi că şirul este convergent şi calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ şi $\lim\limits_{n\to}$

Gheorghe Iure

Premii acordate de FUNDAŢIA POIANA

Fundaţia Poiana, prin d-l **Dan Tiba**, pune la dispoziţia revistei *"R matematice"* suma de 100 € care se constituie ca fond de premii acordate el colaboratori care se disting prin calitatea *articolelor*, *notelor* şi *problemelor o* apărute în paginile revistei.

Redacţia revistei decide premierea cu câte **1 000 000 lei** a următorilor el

1. DOSPINESCU Gabriel (*Liceul "D. Cantemir", Oneşti*)
– Combinatorică ... algebrică (RecMat 2/2003, 19–22),
– probleme propuse: G.51, L.53;

2. PACHIŢARIU Marius (*Colegiul Naţional, Iaşi*)
– Câteva aplicaţii ale teoremei lui Casey (RecMat 1/2003, 30–3
– probleme propuse: IX.37, IX.42;

3. CÂRJĂ OANA (*Colegiul Naţional "C. Negruzzi", Iaşi*)
– Aplicaţii ale rotaţiei planului complex (RecMat 2/2002, 21–2
– Un procedeu de calcul al limitelor unor şiruri de forma $(a_{n+1} -$
(RecMat 2/2003, 23–2

Premiile se pot ridica direct de la redacţie sau pot fi trimise prin mandat

---

Premii acordate rezolvitorilor

Pentru apariţia de trei ori la rubrica *"Pagina rezolvitorilor"* redacţia *"Recreaţii matematice"* acordă o **diplomă** şi un **premiu** în cărţi elevei

SOFICU Crina Maria (*Şcoala nr.3 "Al. Vlahuţă", clasa a IV-a, Iaşi*):
– RecMat 1/2002 (6 pb), 2/2002 (6 pb), 1/2003 (5 pb).

Cărţile au fost oferite de către

Editura *PARALELA 45*

Pagina rezolvitorilor

BOTOŞANI

Şcoala nr. 7 "Octav Băncilă". **Clasa a VIII-a.** NEGRESCU Alexandru: 37), VII(31,36,38), VIII(31,33,37), IX.31, G(23,26,27,33,38-41).

CRAIOVA

Colegiul Naţional "Fraţii Buzeşti". **Clasa a V-a.** AL KHATIB Anne P(51,53), V(36,37,39); BAZĂ-VERDE Daniela: P(50-53), V.36; DECA Ale Maria: P(51-53), V(37,40); PĂTRAŞCU Andrada: P(50-53), V.37. **Clasa a** POPESCU Mihnea: V.37, VI(37-40). **Clasa a VII-a.** VASILE Teodor: VI(VII(39,40).

Şcoala nr. 22 "M. Eliade". **Clasa a III-a** (înv. STAICU Angela). ST Ioan: P(44-50,52,53).

IAŞI

Colegiul Naţional. **Clasa a VII-a.** COŞBUC Mircea: VI(36-40), VII(VIII.37; IANUŞ Andrada: VI(36-39), VII.40; PRELIPCEAN Cristina: VI(37 VII(36-40), G.40. **Clasa a VIII-a.** ANDRIEŞ Delia: VI(36-39), VII.36 APETROAEI Georgiana: VII(36,39,40), VIII(39,40); BALAN Doru: VI(VII.38, VIII.40, G.40; BALANIUC Dragoş: VI(36-38,40), VII.39; BĂTRÂNU lina: VI(36-40), VII(36,39), VIII.37; BELCESCU Cosmin Cezar: VI(37,38), 38,40); CHELSĂU Ariel: VI(37,38), VII(36,38,39); CHIRUŢA Marta: VI(VII(36,38-40), VIII.37; CHITIC Ionuţ: VI(36,38,40); VII(36-39); VIII.37; STANTIN Diana: VII.39, VIII(37-40); CROITORU Cosmina: VI(36-39), 38), VIII.36, G(37,40,42); DOBRILĂ Tudor: VI(36,38,40), VII(38,40), VIII.3 DEA Andreea: VI.40, VII(38,40), VIII.36, G.40; FĂLTICEANU Paul: VI(VII.40; FLORESCU Darian: VI(37-40), VII(36,38,40); GRĂDINARIU Ioana dra: VII(36,39,40), VIII(37,38); GRĂDINARU Andrei: VI(36,37,39,40), 40); ILIESCU Alca-Iolanda: VI(36,38,39), VII.39, VIII.37; LUCA Paul: VI(VII(38-40); MACUC Andra: VI(36-39), VII.39; MATEI Silvia: VII(36-40), MARARI Cezarina: VI(36-38), VII(36,37,39); MARTINUŞ Luciana: VII(G.40; SAVENCU Ramona-Irina: VI(36-38), VII.39, VIII.37; TOMESCU Seb VI(36,38-40), VII.36; TUCALIUC Vlad: VI(36,38,40), VII(38-40); ŢURCAN xana: V.37, VI(36,38), VII(38,40); VÂNTU Călin: VII(36-40), VIII.40; ZAN Delia: VI(36,39, 40), VIII(36,38); ZANOSCHI Iulia: VI(36,38), VII.38, VIII(**Clasa a IX-a.** PACHIŢARIU Marius: VIII(36-40), IX(36-40), X(37-40), G 41,42), L(36,39). **Clasa a X-a.** MUSTAŢĂ Irina: VIII(36-38,40), IX(36-40) 38), XII.36.

Colegiul Naţional "C.Negruzzi". **Clasa a V-a.** HARAGA Anca-Elena: 52), V(37,38), VI(37,38). **Clasa a VII-a.** DICU Ciprian-Dinu: VI(38,39), 38). **Clasa a X-a.** BEJINARIU Alexandru: VIII(31-35), IX(32-35), X(G(23,25,26,28,30,32,33).

Liceul "Garabet Ibrăileanu". **Clasa a IV-a** (înv. LISNIC Sebastian). TIB ius P(47-53). **Clasa a VI-a.** BUDEANU Ştefana: P(52,53), V(37,39), VI.38; Matei: P(52,53), V(37,39), VI.38; PLACINSCHI Oana: P(41,42,50), V(31,33) **a VIII-a.** TĂNASE Ioana: VI(37-40), VII.40, VIII.40.

Liceul Teoretic "M.Eminescu". **Clasa a V-a.** CIURARU Ionela: P(42,43, V(31,33,37-39); MAŞTALERU Alexandra: P(50,52), V(36,37,39).

Şcoala nr. 17 "I. Creangă". **Clasa a VII-a.** IFTODE Andreea: VI(VII.32, IX.31; PAULIN Ana Maria: VI(33-35), VII(31,32,34); SOFRONEA G VI(33-35), VII(31,32); TANANA Irina-Eliza: VI(33-35), VII(31,32).

Şcoala "G.Coşbuc". **Clasa a II-a** (înv. GALIA Paraschiva). ALUPEI P(37,44-47); CIOABĂ Oana-Cătălina: P(37,44-47); GHERCĂ Cătălin: P 47); HOMEA Liviu: P(37,44-47); HUIDEŞ Gina: P(37,44-47); IGNAT P(37,44-47); MIHĂILESCU Laura: P(37,44-47); PISICĂ Alexandru: P(37, SCUTARU Constantin: P(37,44-47). **Clasa a II-a** (înv. RACU Maria). BULĂ Ioana: P(37, 44-47); BULGARU Ionela: P(37, 44-47); CALOIAN P(37, 44-47); CĂLIN Georgiana: P(37, 44-47); CRĂCIUN Mădălina: P(37, IFROSĂ Adriana: P(37, 44-47); IOJĂ Petru-Alexandru: P(34,44-47); LE Crina-Alexandra: P(37, 44-47); MOISA Bogdan: P(37, 44-47); PINTILIE P(37, 44-47); RUSU Flavia: P(37, 44-47).

Şcoala "Alexandru cel Bun". **Clasa a II-a** (înv. SPÂNU Doiniţa). BUF Ionuţ-Mihai: P(44-47,53); DAMIAN Daniel: P(44-47,53); FLOREA Roxana- P(44-47,53); FURTUNĂ Marta: P(44-47,53); IFTENIE Ioana-Cătălina: P(44- RUSU Alexandru: P(44-47,53); URSU Gina-Ioana: P(44-47,53).

Şcoala "N.Tonitza". **Clasa I** (înv. TUDOSE Elena). ANCHIDIN Alex P(33,34,44-46); CÂRNU Alina: P(33,34,44-46); DOBRIN Diana: P(33,34, LEONTE Anca: P(33,34,44-46); POSTICĂ Simona: P(33,34,44-46); RO Larisa-Maria: P(33,34,44-46). **Clasa I** (înv. MELINTE Rodica). BACIU C P(33,34,44-46); BÂRZU Constantin: P(33,34,44-46); BOTOŞANU Bianca-M P(33,34,44-46); BUZDUGAN Petru-Cătălin: P(33,34,44-46); CEUCĂ Dănuţ- P(33,34,44-46); CONSTANTINESCU Diana-Gabriela: P(33,34,44-46); CUC NU Paul-Cătălin: P(33,34,44-46); GUŞOVATE Diana-Ştefana: P(33,34,44-46) GAN Larisa-Diana: P(33,34,44-46); MIRON Vlad-Ştefan: P(33,34,44-46); M Geanina-Diana: P(33,34,44-46); ROTARIU Marian: P(33,34,44-46); SUCIUC P(33,34,44-46); TEIU-COSTIN Andra: P(33,34,44-46). **Clasa a III-a** (înv. M Monica). BUTNARU Valentin: P(44-49); ONUŢĂ Alin: P(44-49).

Şcoala "B.P.Haşdeu". **Clasa I** (înv. TÂRZIORU Iuliana). ADĂSCĂLIŢ tor: P(33,34,44-46); BALAN Andrei: P(33,34,44-46); CUBERSCHI PAUL 35,44-46); EŞANU Georgiana: P(33,34,44-46); GREIEROSU Claudiu: P(33 46); LĂMĂTIC Ioana: P(33-35,44-46); REBEGEA Andrada: P(33,34,44-46) **sa I** (înv. TUTU Laura). BUHU Vlad: P(33,34,44-46); BUZĂ Eduard- P(33,34,44-46); CHICHIRĂU Alexandra-Elena: P(33,34,44-46); GURĂU Claudia: P(33,34,44-46); HATESCU Iustina: P(33,34,44-46); NĂSTASE P(33,34,44-46); SIMIRAD Andrei: P(33,34,44-48). **Clasa a IV-a** (înv. ŞT Liviu). PINTILIE Liviu: P(44-53); PINTILIE Nicoleta: P(44-53); ŞTERBU Daniel: P(44-53).

Şcoala "T.Maiorescu". **Clasa a III-a** (înv. CHIRILĂ Beatrice). TUDOR Alexandru-Gabriel: P(44-53).

Anul VI, Nr. 2 Iulie – Decembrie

RECREAŢII MATEMATIC

REVISTĂ DE MATEMATICĂ PENTRU ELEVI ŞI PROFES

$$e^{i\pi} = -1$$

Editura "Crenguţa Gâldău"
IAŞI, 2004

Semnificația formulei de pe copertă:

Într-o formă concisă, formula $e^{i\pi} = -1$ leagă cele patru ramuri fun
tale ale matematicii:

ARITMETICA	reprezentată de 1
GEOMETRIA	reprezentată de π
ALGEBRA	reprezentată de i
ANALIZA MATEMATICĂ	reprezentată de e

Adresa redacției:

Catedra de Matematică – Universitatea Tehnică "Gh. Asachi" Iaşi
Bd. Carol I, nr.11, 700506, Iaşi
Tel. 032 – 213737 / int. 123
E-mail: acord@math.tuiasi.ro

ISSN 1582 - 1765
Bd. N. Iorga, Bl. K2, ap. 4, IAŞI
Tel. / Fax: 032 - 230598

Anul VI, Nr. 2 Iulie – Decembrie 2

RECREAȚII MATEMATICE

REVISTĂ DE MATEMATICĂ PENTRU ELEVI ŞI PROFES

$$e^{i\pi} = -1$$

Apare cu sprijinul

FILIALEI IAŞI a SOCIETĂŢII de ŞTIINŢE MATEMATIC
şi INSPECTORATULUI ŞCOLAR al JUDEŢULUI IAŞI

IAŞI, 2004

Către cititori
după cinci ani de apariţie a revistei

Fugit irreparabil

Revista *"Recreaţii matematice"*, cu două apariţii pe an (exceptând prim
în care a fost publicat un singur număr), a intrat în al şaselea an al existe

Numele ei derivă din cel al revistei *"Recreaţii ştiinţifice"*, care a apăru
perioada 1883-1888 şi care este prima publicaţie din ţara noastră destinat
lui studios. Revista "Recreaţii ştiinţifice" a publicat materiale din toate
ştiinţei, dar cu precădere articole, note şi probleme de matematică. Este c
faptul de a ne lega numele de această veche şi prestigioasă revistă şi este
răspundere încercarea noastră de a o continua prin asumarea obiectivel
(v. RecMat - 1/2003, pp. 1-5), rămase actuale şi acum, la mai mult de o s

Membrii fondatori ai revistei "Recreaţii Matematice" sunt cei prezenţi
primului număr: *Temistocle Bîrsan*, *Cătălin Calistru*, *Alexandru Căr*
stantin Cocea, *Adrian Corduneanu* şi *Gheorghe Iurea*. Redacţia revistei
ficat şi s-a lărgit cu timpul; actuala redacţie (prezentă pe copertă, interio
mată din profesori, învăţători şi elevi, care fac din entuziasm şi cu pasiun
necompensată de vreo răsplată materială. Nu-l vom uita pe *Alin Spum*
de abnegaţie, pasiune şi competenţă.

În aceşti primi ani de existenţă, eforturile redacţiei s-au dirijat spre c
unei identităţi a revistei şi dobândirea unui impact favorabil al acesteia
interesat de matematica elementară. Într-adevăr, revista are în prezen
grafică de prezentare definitivată şi un conţinut structurat pe un număr
bine conturat. Pe de altă parte, punctele de distribuţie a revistei sunt răs
o arie întinsă, iar colaboratorii cu note şi probleme originale provin din t

Aceste preocupări sunt în legătură strânsă cu atingerea obiectivelor re
constituie în fapt raţiunea apariţiei sale.

Revista se adresează elevilor – de la cei mici, din clasele primare, pân
venţii liceelor – studenţilor preocupaţi de viitoarea lor muncă la catedră, p
şi tuturor celor ce îndrăgesc matematica elementară.

Prima parte a fiecărui număr – ce ocupă aproape jumătate din spaţiu
destinată articolelor de informare, studiilor şi notelor originale, chestiunilo
şi din istoria matematicii. A fost publicat în aceşti cinci ani un număr de a
o sută de articole de acest fel, care a oferit cititorilor un material variat, p
nivelurile de pregătire, în bună parte accesibil şi elevilor. Credem că existe
spaţiu larg de publicare a stimulat posibilităţile creative ale cititorilor no

În scopul cultivării gustului pentru matematică, au fost publicate un
portrete de matematicieni iluştri (**Fermat**, **Abel**, **Kolmogorov** etc.) s
prezentate unele probleme celebre (*postulatul V al lui Euclid*, *marea teo*
Fermat, *problema celor patru culori*, *trisecţia unghiului* etc.). Au fost evo
nalităţi remarcabile ale matematicii româneşti (**Spiru Haret**, **Gh. Vrănc**
reviste cu un aport major în cultura ştiinţifică a ţării (*Recreaţii ştiinţifice*,
inţifică "V. Adamachi"), instituţii cu un rol important în învăţământul şi
românească (*Seminarul matematic "Al. Myller"*, *Observatorul astronomic*

momente de vârf ale matematicii din ţara noastră (*Al V-leaCongres inter*
matematicienilor români), cât şi multe figuri de matematicieni ieşeni, dis
în viaţă (**I. Creangă**, **Gh. Gheorghiev**, **R. Miron**, **C. Corduneanu** e
de prestigiu ale învăţământului liceal (**N. Colibaba**).

Menţionăm în mod special rubrica *"Nota elevului"*, care a devenit p
începând cu nr. 1/2001 al revistei şi care a găzduit deja 11 articole. Ele
buni au în această rubrică un spaţiu destinat încercărilor lor pe un anume s
pe o idee propice. La recomandarea redacţiei revistei, *Fundaţia cultural*
(director d-l **Dan Tiba**) oferă anual premii în bani tinerilor autori ai celo
astfel de note. Până în prezent au fost premiaţi un număr de cinci elevi.

Partea a doua – cea mai dinamică parte a revistei – este destinată con
problemelor propuse şi soluţiilor acestora şi se încheie cu o listă a rez
Sunt publicate cu regularitate subiectele date la următoarele concursuri
organizate de ieşeni: *Concursul "Al. Myller"* (concurs naţional, cl. VII-
cursul "F. T. Câmpan" (concurs interjudeţean, cl. IV-VIII), *Concursul*
matematice" (concurs în cadrul Taberei naţionale de matematică, cl. VII
cursul "A. Haimovici" (concurs interjudeţean pentru liceele economice,
şi agricole, cl. IX-XII). Tot cu scopul informării elevilor competitivi, sunt
şi concursuri organizate în alte centre: *Concursul "R. Miron"* (Vaslui),
"Unirea" (Focşani), *Concursul "O. Onicescu"* (Botoşani) – toate fiind inte

Pentru elevii din gimnaziu talentaţi au fost publicate enunţurile şi solu
lemelor date la *OBM (juniori)*, cât şi problemele aflate în atenţia juriului

Subiectele date la examenul de admitere în câteva facultăţi din un
ieşene oferă o orientare candidaţilor care optează pentru facultăţile respe

Desigur, în centrul demersului nostru se află rubricile *"Probleme p*
"Soluţiile problemelor propuse" prin care se urmăreşte atragerea elevi
studiul matematicii şi o bună pregătire a celor care reuşesc să devină
constanţi şi pasionaţi. În aceşti cinci ani de apariţie, s-au publicat 73 prob
tru clasele primare şi câte 50 probleme pentru fiecare clasă de gimnaziu sa
Sunt rezolvate toate problemele propuse după un an de la publicarea lor,
multe soluţii (atunci când acestea apar) şi se menţionează autorii acestor

Rubrica *"Probleme pentru pregătirea concursurilor"*, deschisă în nr.
revistei şi împărţită în două nivele (gimnazial şi liceal), pune la dispoziţia
înclinaţii speciale probleme cu un grad de dificultate sporit.

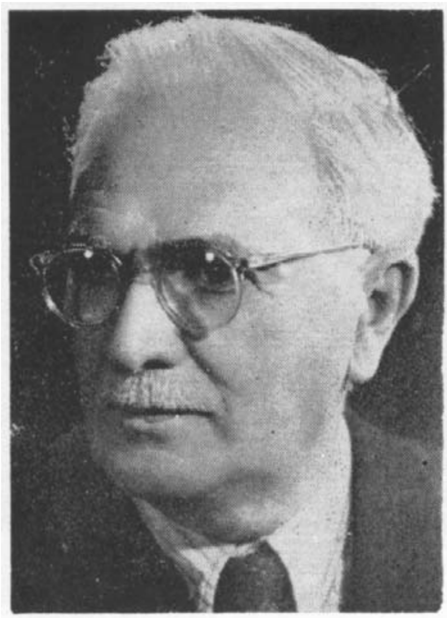
Revista se încheie cu *"Pagina rezolvitorilor"*, o listă a elevilor rezolvit
bleme menită să-i încurajeze şi să-i ambiţioneze. Orice elev menţionat de
această rubrică primeşte din partea redacţiei o diplomă şi un premiu în c

Printre note şi probleme au fost presărate şi un număr de *"Recreaţii*
matice" pentru a dovedi că matematica poate lumina feţele celor pasiona
cu idei inspirate, ci şi cu zâmbete.

După aceşti cinci ani de apariţie, desprindem o concluzie: să continuăm
pasiune pentru a îndrepta ceea ce am greşit, a completa ceea ce am făcut r
şi a tinde spre perfecţiune în acele direcţii în care am reuşit să facem ceva

Redacţia revistei "Recreaţii matema

Alexandru Myller, ctitorul şcolii matematice
(3 decembrie 1879 - 4 iulie 1965)



La 3 decembrie a. c. se împl
sferturi de veac de la naşterea lu
dru Myller, *savant de reput*
naţională şi eminent profesor
sităţii din Iaşi.

S-a născut în Bucureşti, und
şcoala primară, liceul (1896) şi
de Ştiinţe (1900), având ca p
iluştrii matematicieni români *S.*
Pangrati, *N. Coculescu* şi *D. E*

După un scurt stagiu ca
Liceul "V. Alecsandri" din Gal
în 1902, la studii la Göttingen, u
ca profesori pe celebrii matemat
Klein şi *David Hilbert.* Preluâ
noua teorie a lui Hilbert asupra
integrale, Myller publică un ciclu
printre care şi teza de doctorat
borată sub îndrumarea lui Hilbe

Lucrările lui Myller în domen
matematice, elaborate la Göttin
tinuate la Bucureşti, au marcat,
metodele şi rezultatele obţinute, un moment important în dezvoltarea ş
matematicii româneşti pe plan naţional şi internaţional. Acestea, precum
elev al lui Hilbert, l-au consacrat ca matematician de primă mărime. La I
îşi schimbă direcţia cercetărilor matematice, trecând la geometrie, domen
fascinat încă din tinereţe.

A obţinut numeroase rezultate în domeniul **teoriei ecuaţiilor difer**
integrale prin: *extinderea unor rezultate ale lui Hilbert la cazul unor ecua*
ţiale de ordin arbitrar; ecuaţii integrale cu nucleu antisimetric; probleme
limită şi de periodicitate pentru ecuaţii diferenţiale ordinare şi cu deriva
utilizarea metodelor funcţionale în rezolvarea unor probleme de fizică ma

În domeniul **geometriei diferenţiale** contribuţiile sale se referă la:
algebrică şi geometrie riglată; definirea noţiunii de concurenţă a vectori
varianţi ca o generalizare a paralelismului Levi Civita; paralelismul într
de plane, care a condus la noţiunea de configuraţie Myller; dezvoltarea, în
O. Mayer a geometriei diferenţiale centroafine. Aceste cercetări au fost de
impulsionate de apariţia teoriei relativităţii generale, unde se folosea în m
tent teoria conexiunilor afine şi alte noţiuni geometrice legate de conexiu
preocupări au marcat momentul intrării şcolii de matematică de la Iaş
mondială a cercetării ştiinţifice.

În domeniul **istoriei matematicii** a reuşit să repună în valoare co
originale ale unor precursori precum *D. Asachi*, *Şt. Botez*, *E. Bacaloglu* e

Numit în 1910 profesor titular la catedra de geometrie analitică a Unive
Iaşi, **Alexandru Myller** *pune bazele învăţământului matematic modern
instituţie de învăţământ* prin: *fondarea vestitei biblioteci de specialitate (18
ca fundament al cercetărilor originale; încadrarea unui corp profesoral d
loare; atragerea unor tineri cu care creează prima şcoală românească de m
cunoscută sub numele de* ***Seminarul Matematic din Iaşi****; iniţierea în
la Iaşi a unor studii de istoria matematicii româneşti şi universale; in
unor cursuri libere de specialitate şi a lucrărilor de licenţă; aporturi o
geometria diferenţială, care au lansat şcoala ieşeană în competiţie inte*
Aceste evenimente s-au petrecut, prima oară în 1922 când au fost publica
legate de paralelismul lui Levi Civita, a doua oară, în 1933, când a apărut
de geometrie diferenţială centroafină elaborat în colaborare cu *O. Mayer*.

Ca profesor, **Al. Myller** a fost *un maestru în arta comunicării cu st*
aplicat, pentru prima oară în ţara noastră, metoda euristică în predarea m
la nivel universitar. Lecţiile sale erau adevărate momente de creaţie în care
ghida pe studenţi să descopere, împreună, adevărurile ştiinţei predate. A
cu dragoste şi generozitate fiecărei generaţii de studenţi tot ce a acumulat
de vedere ştiinţific şi metodic.

Sub îndrumarea sa, a fost obţinut în 1920 primul doctorat în matematic
universitate românească, de către *Octav Mayer*, iar în 1925 a fost obţinut
în matematici de către *Silvia Creangă*, care devine prima femeie doctor în m
la o universitate românească.

După război, a funcţionat ca rector în dificila perioadă 1944-1945,
deschidă cursurile universitare în mai 1945, după refugiul în Transilvan
preocupat de reconstrucţia clădirii, de revenirea la Iaşi a laboratoarelor
cilor, precum şi a profesorilor şi studenţilor.

În 1947 iese la pensie, dar rămâne legat de activitatea Seminarului M
unde continuă cercetările ştiinţifice, se preocupă de instruirea tinerilor
şi de bunul mers al bibliotecii urmărind cu asiduitate obţinerea unor pub
greu de procurat.

A mai desfăşurat variate activităţi şi la Institutul de Matematică de la
a Academiei Române. A continuat să lucreze până la stingerea sa din viaţă
la 4 iulie 1965.

Pentru meritele sale de excepţie, **Academia Română l-a ales me
tular** în 1938. În 1959 **Universitatea Humbold din Berlin i-a decer
de Doctor Honoris Causa** *pentru străduinţi deosebite de a creea o m
românească de sine stătătoare.* A primit numeroase *distincţii* şi *decoraţii*
statului român.

La împlinirea a 125 ani de la naşterea **savantului Alexandru Myll**
elevii elevilor săi îl omagiază în semn de adâncă preţuire pentru opera sa
dezvoltării ştiinţei şi învăţământului modern în ţara noastră.

Prof. dr. Gheorghe BANT
Prof. dr. Vasile OPROIU

Henri Poincaré
– la 150 de ani de la naşterea sa –

La pensée n'est qu'un éclair,
au milieu d'une longue nuit,
mais c'est cet éclair qui est tout.
H. P.

Este anevoie pentru un o să compare coloşii; adâncin ite tulbură vederea detaliilor nu reuşeşte să completeze de înţeles. *Există consensul* **Poincaré** *a fost ultimul ma universal şi s-a dovedit geni a întreprins.* Acum, la 150 d naşterea sa, zăbovim un pic el.

Henri Poincaré s-a Nancy, pe 29 aprilie 1854, într familie de intelectuali. Amb miop, a suferit de o slabă c musculară. Din şcoala elemen celat în compoziţii scrise. În înscris la Liceul din Nancy 11 ani s-a dovedit aici un e cit la toate materiile. Profeso matematică îl considera un „ matematicii". La concursurile generale ale liceelor din Franţa a câştigat p tâi. În 1873 este admis la École Polytechnique pe care o absolvă în 1875, şi clar colegii în domeniile matematicii. Citea mult şi variat, realizând neaşteptate şi dovedind o memorie vizuală excelentă. Îşi completează cu m studiile la École des Mines şi profesează ca inginer în timp ce îşi elaborea de doctorat, sub conducerea ştiinţifică a lui *Charles Hermite*, în domeniu diferenţiale. Devine doctor în matematică în 1879, convingând dar şi uimin

Predă analiză matematică 2 ani la Caen, din 1881 primeşte catedră tatea de Ştiinţe din Paris, din 1886 trece la Sorbona pe Catedra de ecua matematice şi probabilităţi, predă şi la École Polytechnique. Lecţiile sa domenii variate, mereu în schimbare, dar nu sunt uşor de urmărit de căt din cauza abundenţei de idei. *Este ales în Academia de Ştiinţe în 1887 este ales în fiecare din cele cinci secţii*; în 1906 devine secretar permanent *În 1908 este ales în Academia Franceză* al cărei secretar permanent dev prematurului său deces, la 17 iulie 1912.

Activitatea sa de creaţie ştiinţifică se desfăşura cu precizie: între 10 şi 12 între 5 şi 7 după amiază. După ora 7 se informa. Pornea câte o lucra

plan prestabilit, fără calcule preliminare; după primii paşi urmau natural
Aborda şi abandona subiecte din unghiuri de vedere diferite dar subconş
continua studiile, întregind imaginea. Dificultatea de a opri cercetarea îl
să nu întreprindă lucrări importante după ora 7 seara, spre a nu-şi tulbur

A dezvoltat *studiul funcţiilor automorfe* după o idee ce susţine că i-a
nici o pregătire prealabilă în momentul când urca într-un autobuz; folosea
complet diferit transformările din geometria neeuclidiană. Prin lucrare
situs, publicată în 1895, *întemeiază domeniul topologiei algebrice* în care
conjectură este încă actuală. Este considerat *fondatorul teoriei funcţiilo*
de mai multe variabile complexe. A adus *contribuţii esenţiale în geom*
brică, dezvoltând metode ce au permis deduceri directe ale unor rezultat
ce se bazau pe o idee de demonstraţie greşită. În 1901 a rezolvat o prol
cială de teoria numerelor: căutarea punctelor de coordonate raţionale p
algebrică $f(x, y, z) = 0$ cu coeficienţi raţionali. Geometria hiperbolică,
către *Lobacevski* şi *Bolyai*, a devenit de înţeles pe *modelul de univers i*
către Poincaré. Este considerat alături de *Einstein* (şi *Lorentz*) *fondato*
relativităţii.

Reţinem atenţia cu câteva detalii referitoare la *problema celor 3 c*
presupun date la un moment iniţial 3 corpuri date prin trei puncte de mase
prin poziţia lor, viteze şi acceleraţii. Se presupune că asupra lor nu int
o forţă exterioară, dar că ele evoluează respectând legea atracţiei univ
cere să se evalueze comportarea lor în timp. Problema abordată de cătr
în 1889 era cât pe ce să fie compromisă de o eroare comisă de editorul
Mathematica. Un intens schimb de scrisori cu *Mittag-Leffler* a lămurit
şi un memoriu al lui Poincaré a apărut în 1890, fiind considerat act de
teoriei haosului. Motivul este că această *problemă a celor 3 corpuri* re
sistem de ecuaţii diferenţiale (cu necunoscutele cele 9 funcţii ce dau co
punctelor) care nu este *stabil.* Aceasta înseamnă că modificări infinite
datelor problemei conduc la modificări substanţiale ale traiectoriilor.

H. Poincaré a adus contribuţii esenţiale în numeroase domenii ale
cilor aplicate: *mecanică cerească*, *cosmologie*, *mecanică cuantică*, *optică*
tate, *hidrodinamică*, *telegrafie*, *termodinamică*, *teoria elasticităţii*, *electro*
capilaritate.

În special, modul diferit de a concepe matematica la *Poincaré* şi *Hilbe*
la filosofii distincte ale matematicii. În opoziţie cu punctul de vedere
formalist, **H. Poincaré** a susţinut un punct de vedere *intuiţionist*: *„*
demonstrăm, dar prin intuiţie creem”, „logica rămâne sterilă fără a fi fe
intuiţie”.

H. Poincaré este un maestru al popularizării ştiinţei; cărţile sale:
ipoteză (1902), *Valoarea ştiinţei* (1905), *Ştiinţă şi metodă* (1908), *Ultime*
(1908, postum) sunt disponibile şi în limba română.

La funeraliile sale s-a spus: **„ ... a fost matematician, geometr**
scriitor, poet al infinitului, bard al ştiinţelor”.

Prof. dr. Dan BRÂ

Trecerea planetei Venus prin faţa Soarelu

Planeta Venus, a doua planetă după Mercur ca depărtare de Soare, cu
sub numele de Luceafărul de dimineaţă sau de seară, trece din când în cân
Soarelui (se spune că în acel moment planeta se află în *conjuncţie inferioa*
"din când în când" reprezintă un interval de timp de cel puţin 100 de an
de **8 iunie** a acestui an fenomenul se va desfăşura din nou, iar noi con
fenomenului vom avea prilejul să-l vedem, dacă cerul va fi favorabil obser

Trecerea lui Venus – zeiţa frumuseţii şi dragostei la romani, numit
Afrodita, ca fiica lui Zeus şi Dionei – a prezentat o importanţă deosebit
astronomiei şi de ce nu şi în istoria civilizaţiei. Omul, această creaţie extra
legilor lumii materiale, prin existenţa şi natura sa, s-a întrebat de multă vr
apărut; s-a născut aici pe Pământ, a venit de undeva, a fost creat de cineva
locul său în lumea Universului observabil? Iată întrebări, devenite fascin
de secole, la care astronomia, deşi a răspuns doar parţial, totuşi a dat răsp
mult sau mai puţin convingătoare.

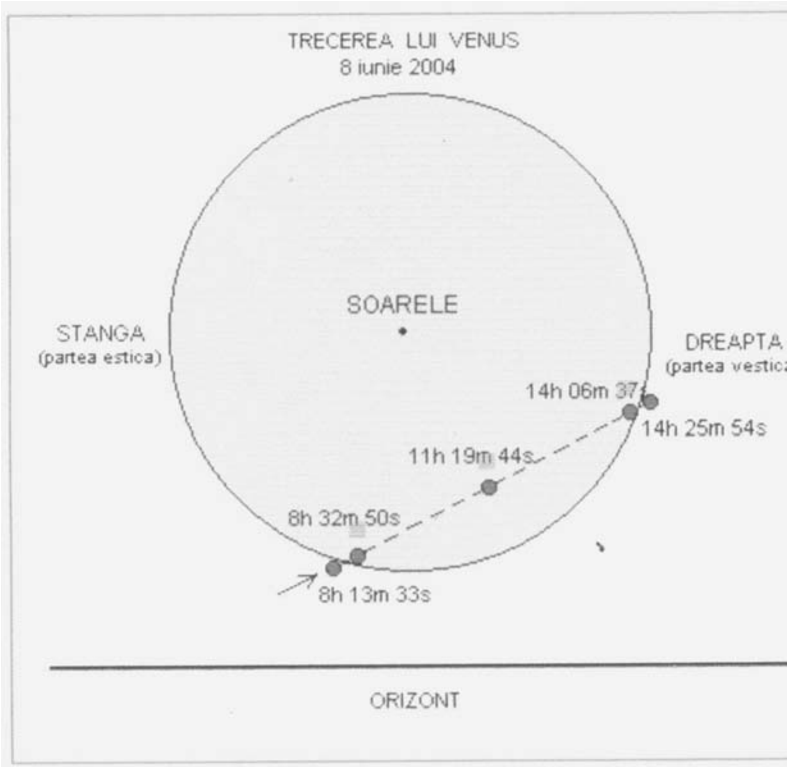
Poziţia Pământului în Univers poate fi determinată dacă se cunoaşt
Pamânt - Soare. Această distanţă, măsurată prin procedee astronomic
149 597 870 km. Ei bine, această distanţă a fost ameliorată treptat prin
timp de câteva secole *şi* atunci când Venus trecea prin faţa discului sol
există metode ce permit determinarea distanţei Pământ - Soare cu precizi
zeci de kilometri, însă pentru acele vremuri *metoda trecerii* a reprezentat
remarcabil de la trecere la trecere.

Nici acum observarea fenomenului nu este lipsită de interes dacă obs
fac cu suficientă precizie (precizia în timp în determinarea fenomenului,
fie de cel puţin o sutime de secundă; important este să se cunoască la fe
poziţia locului din care se fac observaţiile).

Trecerea planetei Venus prin faţa Soarelui are loc o dată la 115 ani
urmează o altă trecere după 8 ani. Următoarea trecere urmând să aibă lo
de ani, urmată de o altă după încă 8 ani. Aşa se succed aceste treceri. D
traiectoriei lui Venus ar fi acelaşi cu planul orbitei terestre, atunci trecerea
ar avea loc după fiecare 584 de zile şi 22 de ore. Acest interval de timp
perioada sinodică a lui Venus (intervalul dintre două poziţii asemănătoare a
în raport cu Soarele şi Pământul).

Într-o viaţă de om, trăirea acestui eveniment nu poate fi decât de o
singură dată sau deloc, cu excepţia celor ce au o longevitate mai mare
sau 122 de ani. *Penultima trecere vizibilă la noi a avut loc în anul 187*
urmărit de profesorul **Neculai Culianu**, fost decan al Facultăţii de Ştii
rector între anii 1888 - 1898 al prestigioasei universităţi ieşene. *Ultima tr*
putut fi observată după 8 ani (1882).

Fenomenul se încadrează în categoria eclipselor de Soare când Luna, I
Venus şi Pământul sunt în linie dreaptă. Spre deosebire de eclipsele de S
Luna interpunându-se între Pamânt şi Soare poate să-l acopere complet, t



Venus nu are această calitate. Venus fiind mult depărtată de Pământ (în ac
depărtarea va fi de 43 228 162 km) şi mică în raport cu Soarele, va lăsa o
un mic disc întunecat reprezentând a 33-a parte din diametrul Soarelui.

Intrarea peste discul solar (primul contact exterior) va avea loc la ora
47 s ca după *19 m şi 27 s* Venus să intre complet peste discul solar la ora
14 s (primul contact interior). Următoarele etape vor fi: ultimul contact
ora *14 h 03 m 39 s*, iar ultimul contact exterior va avea loc la ora *14 h*
Momentele caracteristice menţionate mai sus au fost calculate de către
de Mecanică Cerească şi Calculul Efemeridelor din *Franţa*, pentru Buc
teritoriul ţării noastre aceste momente vor diferi de la localitate la localit
mai mult de câteva secunde.

NASA a făcut calcule şi pentru *Iaşi* şi iată momentele caracteristice:
34 s – primul contact exterior, *8 h 39 m 11 s* – primul contact interior,
15 s – ultimul contact interior şi *14 h 22 m 37 s* – ultimul contact exterio

Începutul intrării lui Venus va avea loc prin partea stânga (partea
vecinătatea marginii inferioare a discului solar aşa cum se poate vedea în d
turat. Tot în desen se arată traiectoria umbrei şi momentele caracteristice r
mai sus. Durata fenomenului, de la primul contact interior la ultimul conta

va fi de *5 h 24 m 25 s*.

Pentru observarea fenomenului trebuiesc luate măsuri de protecţie a o
comandăm ca atunci când se îndreaptă privirea spre Soare să se foloseas
afumată sau o sticlă ce se utilizează la ochelarii pentru sudură electrică.
îndemână ar fi folosirea foliei metalizate utilizată drept ambalaj de către vâ
de flori. Această ultimă protecţie trebuie confecţionată din cel puţin do
folii suprapuse, funcţie de sensibilitatea ochilor celor ce vor să observe fe

Observaţii se pot face şi cu o lunetă dotată cu un ocular prin care să se
Soarele pe un ecran situat la o distanţă convenabilă. Imaginea Soarelu
ajunge la dimensiunile unui cerc cu raza 10 - 15 cm şi chiar mai mult. Evid
trebuie instalată pe un trepied pentru a-i asigura stablitate şi urmărire
Soarelui. O urmărire asemănătoare a fenomenului poate fi făcută proiectân
Soarelui ca mai sus, folosind un binoclu.

Amatorii care vor să aducă contribuţii la observarea trecerii, având în
unele observatoare specializate pot să nu aibă vreme favorabilă observaţiilo
să ţină seama de următoarele: 1) să posede un ceas cu cronometru şi pus l
un post de radio naţional, 2) să urmărească momentul primului contact
să-l cronometreze şi la fel să procedeze pentru celelalte trei momente ca
(primul contact interior, al doilea contact interior şi al doilea contact ex
plus faţă de aceste recomandări, trebuie să apeleze la o cunoştinţă ce
aparat numit GPS cu ajutorul căruia să se determine coordonatele locu
făcut observaţiile (longitudinea şi latitudinea geografică). Dacă măsurăt
făcute cu o eroare în timp de plus sau minus 0,1 secunde, iar coordonatele
fi determinate cu o eroare de maximum 8 metri în jurul punctului unde
măsurătorile, atunci observaţiile pot fi luate în consideraţie.

Observaţiile pot fi transmise în scris la *Observatorul Astronomic din*
Sadoveanu nr. 5, textul urmând să conţină: mijloacele cu care s-au făcut o
momentele caracteristice măsurate şi coordonatele locului.

Operaţia, pe plan mondial, este coordonată de către *Observatorul E*
Sud cu sediul în Garching (Germania) iar calculele centralizate vor fi fă
stitutul de Mecanică Cerească şi Calculul Efemeridelor cu sediul la *Paris*

Urmărirea fenomenului nu este lipsită de interes dacă avem în veder
lui, importanţa ştiinţifică, încrederea şi seriozitatea ce se poate acorda
astronomice, spre deosebire de ideile avansate de prezicători şi astrologi
interpretări apocaliptice unor astfel de fenomene. Din anul 3000 î. H.
prezent, au avut loc 64 de treceri şi alte evenimente astronomice deosebite,
constatat, în afara unor fenomene naturale izolate, uneori devastatoare (
inundaţii, războaie provocate de om etc.), să se fi produs acel eveniment
mult proferat de prezicători.

Iulian BREAHNĂ

Membru al Uniunii Astronomice Interna
ex-director al Observatorului Astronomi

ARTICOLE ŞI NOTE

Câteva noi aplicaţii ale unei idei consacra

Gabriel DOSPINESCU[1]

Nu credem că exagerăm spunând că 99% din inegalităţile care sunt probleme de concurs pot fi demonstrate direct, aplicând alte inegalităţi sacrate. Există însă o categorie aparte de probleme foarte greu de rezolv mod. Aceste probleme au soluţii frumoase, bazate pe raţionamente ind extrem de eficiente.

Vom prezenta în continuare ideea comună aflată în spatele tuturor aces Să presupunem că avem de demonstrat o inegalitate de forma $g(x_1)$ $+\cdots+g(x_n)\geq 1$ în ipoteza că variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ verifică o relaţ $f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)=1$.

Presupunem prin reducere la absurd că $g(x_1)+g(x_2)+\cdots+g(x_n)<$ $S=g(x_1)+g(x_2)+\cdots+g(x_n)$, obţinem că $S=\dfrac{1}{k}$ pentru un anun Punem $kg(x_i)=a_i$, $i=\overline{1,n}$, rezolvăm ecuaţiile în x_i şi introducem ac ca funcţii de a_i în relaţia $f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)=1$. Găsim că var $i=\overline{1,n}$ satisfac de asemenea o relaţie de forma $h(x_1)+h(x_2)+\cdots+$ precum şi $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$. Problema se reduce acum la a dovedi că $h(x_1)+h(x_2)+\cdots+h(x_n)=0$ este imposibilă, lucru care se realizea demonstrând că $h(x_1)+h(x_2)+\cdots+h(x_n)>0$ (sau <0) pentru orice $a_2, \ldots, a_n$ cu sumă 1.

Credem că noua problemă este adesea mai uşoară decât cea iniţială exemplifica acest lucru vom rezolva câteva probleme de concurs utilizân de mai sus.

Prima dintre ele, *Problema 3, OM China 2003*, este faimoasă datorită sale, fiind de asemenea înrudită cu o altă binecunoscută problemă care va f în cele ce urmează, *Problema 2, OIM 2001.*

Exemplul 1. *Fie* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0, \pi/2)$ *astfel ca* $\operatorname{tg} x_1 \cdot \operatorname{tg} x_2 \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg}$ *Determinaţi cel mai mic* k_n *pentru care inegalitatea* $\cos x_1+\cos x_2+\cdots+\mathrm{c}$ *este întotdeauna adevărată.*

Soluţie. Substituind $\operatorname{tg}^2 x_i=2a_i$, problema revine la a determina su expresiei $\dfrac{1}{\sqrt{1+2a_1}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+2a_2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{1+2a_n}}$ pentru $a_1, a_2, \ldots, a_n$ produsul egal cu 1.

Nu vom discuta cazul $n=1$, acesta fiind trivial. Pentru $n=2$, rămâ valoarea maximă a lui $\dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}$, $x>0$. Studiind ceea ce se întâm $x=1$, $x\to\infty$ şi $x\to 0$, deducem că valoarea căutată este $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Pentru a d lucru, este suficient să se studieze monotonia funcţiei $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}$

[1] Student, Facultatea de Matematică şi Informatică, Bucureşti

$x > 0$, cu ajutorul derivatei.

Să studiem ce se întâmplă pentru $n > 2$. Dacă toţi a_i, $\overline{i = 1, n}$, sunt valoarea expresiei de mai sus este $\frac{n}{\sqrt{3}}$. Acum, dacă încercăm să "apropie mulţi a_i de 0, observăm că putem "apropia" de 0 cel mult $n-1$ dintre ei, valoarea expresiei va tinde la $n-1$. Deoarece $n - 1 > \frac{n}{\sqrt{3}}$, este clar că v dovedim că $\frac{1}{\sqrt{1+2a_1}} + \frac{1}{\sqrt{1+2a_2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1+2a_n}} \leq n-1$.

Este uşor de văzut că raţionând ca în problema precedentă ajungem r un impas. Observăm însă că este suficient să demonstrăm inegalitatea doar pentru $n = 3$. De ce acest lucru? Dacă $n > 3$ şi $a_1a_2\cdots a_n = 1$, atu alege a_i, a_j, a_k al căror produs este cel puţin 1. Atunci

$$\frac{1}{\sqrt{1+2a_1}} + \frac{1}{\sqrt{1+2a_2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1+2a_n}} < n-3 + \frac{1}{\sqrt{1+2a_i}} + \frac{1}{\sqrt{1+2a_j}} +$$

Dar

$$\frac{1}{\sqrt{1+2a_i}} + \frac{1}{\sqrt{1+2a_j}} + \frac{1}{\sqrt{1+2a_k}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+2a_i}} + \frac{1}{\sqrt{1+2a_j}} + \frac{1}{\sqrt{1+2\ldots}}$$

presupunând că inegalitatea este adevărată pentru $n = 3$, iar din relaţia rezultă că ea este adevărată şi pentru n oarecare.

Să dovedim deci inegalitatea pentru $n = 3$. Presupunem că ea nu este pentru o tripletă a_1, a_2, a_3. Atunci $\frac{1}{\sqrt{1+2a_1}} + \frac{1}{\sqrt{1+2a_2}} + \frac{1}{\sqrt{1+2a_3}} = \frac{2}{p}$

Notând $x_i = \frac{p}{2\sqrt{1+2a_i}}$, obţinem că $1 = \prod_{k=1}^{3}\left(\frac{p^2}{8x_k^2} - \frac{1}{2}\right) < \prod_{k=1}^{3}\left(\frac{1}{8x_k^2} - \right.$

deci suficient să demonstrăm că pentru orice $0 < x, y, z < \frac{1}{2}$ cu $x + y + z$ că $\left(\frac{1}{8x^2} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{8y^2} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{8z^2} - \frac{1}{2}\right) \leq 1$, inegalitate echivalentă cu

$$(1-2x)(1-2y)(1-2z)(1+2x)(1+2y)(1+2z) \leq 8^3x^2y^2z^2.$$

O altă schimbare de variabilă este acum necesară. Desigur, aceasta este $1 - 2y = b$, $1 - 2z = c$. Rămâne deci să demonstrăm că, pentru orice a, suma 1, avem

$$8(1-a)^2(1-b)^2(1-c)^2 \geq abc(2-a)(2-b)(2-c).$$

Avem însă că

$$8(1-a)^2(1-b)^2(1-c)^2 = 8(b+c)^2(c+a)^2(a+b)^2 \geq 8\left(\frac{8}{9}(a+b+c)(ab+\right.$$

$$= \frac{512}{81}(ab+bc+ca)^2 \geq \frac{512}{27}abc(a+b+c) = \frac{512}{27}abc.$$

Este suficient, deci, să demonstrăm că $(2-a)(2-b)(2-c) < \frac{512}{27}$, ceea ce e deoarece $(2-a)(2-b)(2-c) < 8$, iar problema este acum rezolvată.

A fost menţionată anterior, în trecere, frumoasa *Problemă 2, OIM 200*
de **Hojoo Lee**. Problema în cauză fiind atât de mult discutată şi po
s-ar putea crede că nu mai este nimic nou de spus despre ea. Totuşi,
următoarea demonstraţie a unei generalizări a problemei este nouă.

Exemplul 2. *Demonstraţi că dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt numere reale tive astfel încât $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$, iar $k > 1$ este un număr natural, atunci*

$$\frac{1}{\sqrt[k]{1+(n^k-1)\,a_1}}+\frac{1}{\sqrt[k]{1+(n^k-1)\,a_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[k]{1+(n^k-1)\,a_n}} \geq$$

Vasile

Soluţie. Presupunem că

$$\frac{1}{\sqrt[k]{1+(n^k-1)\,a_1}}+\frac{1}{\sqrt[k]{1+(n^k-1)\,a_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[k]{1+(n^k-1)\,a_n}} =$$

pentru un anumit $p > 1$. Notăm $\dfrac{p}{\sqrt[k]{1+(n^k-1)\,a_i}} = x_i$, $i = \overline{1,n}$ şi c

$\left(n^k-1\right)^n = \prod\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{p^k}{x_i^k}-1\right) > \prod\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{1}{x_i^k}-1\right)$, iar $x_1+x_2+\cdots+x_n = 1$.

Pentru a ajunge la o contradicţie, vom dovedi că $\prod\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{1}{x_i^k}-1\right) \geq$
pentru orice $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ astfel încât $x_1+x_2+\cdots+x_n = 1$. Pentru der
acestei inegalităţi, să observăm că

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i^k}-1\right)=\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\left(1+x_i+\cdots+x_i^{k-1}\right)\prod\limits_{i=1}^{n}\left(x_1+\cdots+x_{i-1}+x_{i+1}+\cdots\right.}{\left(x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n\right)^k}$$

şi, din inegalitatea mediilor,

$$\prod_{i=1}^{n}\left(x_1+x_2+\cdots+x_{i-1}+x_{i+1}+\cdots+x_n\right) \geq (n-1)^n\, x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot$$

Desigur, pentru minorarea celuilalt produs din formula (1), aplicarea dir
galităţii mediilor nu mai este la fel de eficientă. Conform inegalităţii med

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^i}{1+x_j+\cdots+x_j^{k-1}} \geq \frac{n\sqrt[n]{\left(x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n\right)^i}}{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n}\left(1+x_j+\cdots+x_j^{k-1}\right)}}, \quad i=\overline{0,k}$$

Sumând inegalităţile de mai sus, obţinem

$$\prod_{j=1}^{n}\left(1+x_j+\cdots+x_j^{k-1}\right) \geq \left(1+G+G^2+\cdots+G^{k-1}\right)^n,$$

unde $G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \dfrac{1}{n}$. Din (1), (2) şi (3) deducem că

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i^k}-1\right) \geq \frac{(n-1)^n\, G^n \left(1+G+G^2+\cdots+G^{k-1}\right)^n}{G^{nk}},$$

iar pentru a finaliza soluţia problemei este suficient să demon
$\dfrac{1+G+G^2+\cdots+G^{k-1}}{G^{k-1}} \geq 1+n+\cdots+n^{k-1}$, ceea ce este trivial, deoare

Este acum momentul să discutăm o altă problemă deosebită, propusă la *anual al Gazetei Matematice* de către **Vasile Cârtoaje**. Soluţia autorului pe aplicarea succesivă a câtorva identităţi, fiind aproape imposibil de gă independent. Credem că soluţia ce urmează este mai naturală din aces vedere.

Exemplul 3. *Demonstraţi că pentru orice* $a, b, c, d > 0$ *astfel ca* a^2+b^2+ *este satisfăcută inegalitatea* $(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) \geq abcd$.

Soluţie. Să presupunem că $\dfrac{(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)}{abcd} = p^4$, cu p
$\dfrac{1-a}{pa} = x$, $\dfrac{1-b}{pb} = y$, $\dfrac{1-c}{pc} = z$, $\dfrac{1-d}{pd} = t$. Atunci $1 = \sum \dfrac{1}{(1+px)^2} > \sum$
iar $xyzt = 1$. Problema se reduce, deci, la a demonstra că

$$\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{1}{(1+t)^2} \geq 1$$

pentru orice $x, y, z, t > 0$ verificând $xyzt = 1$.

Profitând de faptul că enunţul problemei utilizează 4 numere, vom merele în 2 grupe şi demonstra că

$$\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} \geq \frac{1}{1+xy} \quad \text{şi} \quad \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{1}{(1+t)^2} \geq \frac{1}{1+z}$$

Prima inegalitate se reduce la $xy(x-y)^2 + (1-xy)^2 \geq 0$, care es evident adevărată, pentru a doua raţionându-se în mod analog. Prin sum două inegalităţi şi ţinând seama de faptul că $xyzt = 1$, rezultă concluzia.

În încheierea acestui articol vom discuta alte două probleme deosebite, pot da soluţii rapide utilizând ideile de mai sus. Prima dintre ele a fost p revista *"American Mathematical Monthly"*, fiind propusă de către **Vasile**

Exemplul 4. *Fie* $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ *astfel încât* $x_1 + x_2 + \cdots + x_n =$
$+\cdots+\dfrac{1}{x_n}$. *Demonstraţi că* $\dfrac{1}{n-1+x_1} + \dfrac{1}{n-1+x_2} + \cdots + \dfrac{1}{n-1+x_n}$

Soluţie. Presupunem că $\dfrac{1}{n-1+x_1} + \dfrac{1}{n-1+x_2} + \cdots + \dfrac{1}{n-1+}$
$p < 1$. Notăm $a_i = \dfrac{p}{n-1+x_i}$, $i = \overline{1,n}$ şi deducem că $a_i < \dfrac{1}{n-1}$, i
$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$. Condiţia din enunţ se transcrie sub forma

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{p}{a_k} - n + 1 \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{p}{a_k} - n + 1}.$$

Deoarece $p < 1$, putem scrie

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{a_k} - n + 1 \right) > \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{p}{a_k} - n + 1 \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{p}{a_k} - n + 1} > \sum_{k=1}^{n} \frac{}{\frac{1}{a_k} -}$$

Rămâne, deci, să demonstrăm că pentru orice $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ cu $a_1 + a_2 +$
are loc inegalitatea $\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{a_k} - n + 1 \right) \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{1}{a_k} - n + 1}$, care este echi
$\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1-(n-1)\,a_k} \geq \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1-(n-1)\,a_k}{a_k}$.

O altă substituţie este acum necesară, anume $1-(n-1)a_k = b_k$, k
observă că avem de asemenea $b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 1$ şi rămâne deci s
că $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1-b_k}{b_k} \geq (n-1)^2 \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{b_k}{1-b_k}$, rezultat care se poate obţine prin su
inegalităţi de forma $\frac{b_k}{1-b_k} = \frac{b_k}{\sum_{i \neq k} b_i} \leq \frac{1}{(n-1)^2} \sum\limits_{i \neq k} \frac{b_k}{b_i}$.

În final vom discuta o altă frumoasă problemă de concurs, propusă la
selecţie a lotului României pentru OIM, 1999, de către **Gheorghe Eckst**

Exemplul 5. *Demonstraţi că dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ satisfac $x_1 x_2 \cdot$*
atunci $\frac{1}{n-1+x_1} + \frac{1}{n-1+x_2} + \cdots + \frac{1}{n-1+x_n} \leq 1$.

Soluţie. Ca mai sus, problema se reduce la a demonstra că pentru orice
$x_n < \frac{1}{n-1}$ astfel încât $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$ are loc inegalitatea $\prod\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{x_i} - \right.$
Cu substituţia $b_i = 1-(n-1)\,x_i$ problema de demonstrat se reduce la

$$(1-b_1)(1-b_2) \cdot \ldots \cdot (1-b_n) \geq (n-1)^n\, b_1 b_2 \cdot \ldots \cdot b_n.$$

Conform inegalităţii mediilor,

$$\prod_{i=1}^{n} (1-b_i) = \prod_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j \neq i} b_j \Big) \geq \prod_{i=1}^{n} \Big[(n-1) \sqrt[n-1]{\prod_{j \neq i} b_j} \Big] = (n-1)^n\, b_1 b_2 \cdot$$

ceea ce trebuia demonstrat.

În încheiere, ţin să mulţumesc prof. Marian Tetiva pentru lectura ace
şi observaţiile preţioase făcute, care au contribuit la îmbunătăţirea forme

---

E R R A T A

În articolul *"Combinatorică ... algebrică"* de **Gabriel Dospinescu**,
nr. 2/2003 al revistei, forma corectă a Lemei de la pag. 19 este:

Fie n număr natural prim şi $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n}$. Are loc egalitatea

$$a_0 + a_1 \varepsilon + \cdots + a_{n-1} \varepsilon^{n-1} = 0, \quad a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{Q},$$

dacă şi numai dacă $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1}$.

Diferenţele ce apar ne-au fost semnalate de prof. **Sergiu Romaşcu**, V
tea nu afectează cu nimic restul articolului. De această neglijenţă se fac
redacţia şi nu autorul articolului.

Câteva proprietăţi ale medianelor

Temistocle BÎRSAN[1]

1. Ne propunem să indicăm un număr de proprietăţi ale medianelor de înţelegere al unui elev bun de gimnaziu. Instrumentele principale de l *teorema lui Thales* şi *teorema lui Menelaus*.

Pentru o exprimare scurtă, vom folosi noţiunile de *puncte izotomice conjugate armonic*. Fie A, B, X, Y patru puncte coliniare. Punctele X *izotomice* în raport cu A şi B dacă sunt simetrice faţă de mijlocul segmen (evident, X şi Y sunt fie interioare, fie exterioare acestui segment); aceas revine la egalitatea $AX = BY$. Punctele X şi Y sunt *conjugate armoni* cu A şi B dacă împart segmentul $[AB]$ în rapoarte egale: $\dfrac{XA}{XB} = \dfrac{YA}{YB}$ (este interior segmentului şi Y exterior sau invers).

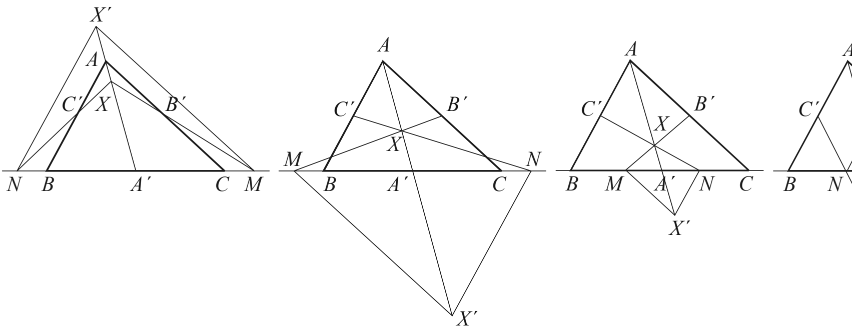
Propoziţia 1. *Fie ABC un triunghi oarecare, A', B', C' mijloace $[BC]$, $[CA]$, respectiv $[AB]$ şi $M, N \in BC$ două puncte izotomice în rap furile B şi C, cu M diferit de mijlocul segmentului $[A'C]$. Atunci, sun afirmaţiile:*

1° *dreptele $B'M$ şi $C'N$ se intersectează într-un punct $X \in AA'$;*

2° *paralela prin M la AC şi paralela prin N la AB se intersectează înt $X' \in AA'$;*

3° *punctele X şi X' sunt conjugate armonic în raport cu A şi A'.*

Demonstraţie. Avem patru situaţii distincte ilustrate în figurile d demonstraţia este însă aceeaşi.



Deoarece M nu-i mijlocul lui $[A'C]$ rezultă că N nu-i mijlocul lu ca urmare, dreptele $B'M$ şi $C'N$ intersectează AA'. Fie $\{X\} = AA'$ $\{X_1\} = AA' \cap C'N$. Conform teoremei lui Menelaus, aplicată la $\triangle AA'C$ ş sala $B'M$ şi la $\triangle AA'B$ şi $C'N$, avem

$$\frac{XA}{XA'} \cdot \frac{MA'}{MC} \cdot \frac{B'C}{B'A} = 1 \quad \text{şi} \quad \frac{X_1A}{X_1A'} \cdot \frac{NA'}{NB} \cdot \frac{C'B}{C'A} = 1,$$

[1] Prof. dr., Catedra de matematică, Univ. Tehnică "Gh. Asachi", Iaşi

de unde $\dfrac{XA}{XA'} = \dfrac{MC}{MA'}$ şi $\dfrac{X_1A}{X_1A'} = \dfrac{NB}{NA'}$. Punctele M, N fiind izotomice în

B şi C, avem $MA' = NA'$ şi $MC = NB$. Rezultă că $\dfrac{XA}{XA'} = \dfrac{X_1A}{X_1A'}$, de

X_1 coincide cu X. Afirmaţia 1° este dovedită.

Fie X', X_1' intersecţiile dreptei AA' cu paralela prin M la AC, respect

prin N la AB. Conform teoremei lui Thales, au loc relaţiile: $\dfrac{X'A}{X'A'}$ =

$\dfrac{X_1'A}{X_1'A'} = \dfrac{NB}{NA'}$. Din acestea şi din izotomia punctelor M şi N faţă d

deducem egalitatea rapoartelor din membrii din stânga. Ca urmare, X_1' c
X', deci 2° este demonstrată.

Mai sus s-a arătat că $\dfrac{XA}{XA'} = \dfrac{MC}{MA'}$ şi $\dfrac{X'A}{X'A'} = \dfrac{MC}{MA'}$, deci X şi X' îm
în acelaşi raport, adică X, X' sunt conjugate armonic faţă de A, A'. Afi
deci şi propoziţia, este demonstrată.

Observaţie. Să urmărim deplasarea punctului X pe AA', atunci câ
curge BC. Notăm cu G centrul de greutate al triunghiului ABC şi cu A
medianei $[AA']$. Dacă M este în C, atunci X coincide cu A. Dacă M se în
de C, la "dreapta" acestuia, atunci $X \in (AA^*)$. Dacă M se apropie
"stânga" acestuia, atunci $X \in (A^*G)$. Pentru M situat în B, X coincide c
$M \in (BA']$, atunci $X \in (GA']$; punctul M în poziţia A' coincide cu X.
între A' şi mijlocul segmentului $[A'C]$, X parcurge semidreapta de origin
conţine A. În sfârşit, dacă M este între mijlocul lui $[A'C]$ şi C, atunci
este situat pe semidreapta de origine A ce nu conţine A' şi se apropie de

O poziţie particulară interesantă a punctului M este semnalată în urm

Corolar. *Dacă sunt îndeplinite condiţiile din Propoziţia 1 şi în pl*
$= NB = \dfrac{a}{2}$, *atunci X este izotomicul punctului G în raport cu A şi A',*
simetricul lui A' faţă de A.

Demonstraţie. Avem $X \in [AA']$ şi $\dfrac{XA}{XA'} = \dfrac{MC}{MA'} = \dfrac{a/2}{a/2 + a/2}$ =

$XA' = 2XA$ sau $XA = \dfrac{1}{3}AA'$. Cum avem şi $GA' = \dfrac{1}{3}AA'$, rezultă XA

prima afirmaţie este dovedită. Pe de altă parte, $X' \in [AA']$ şi $\dfrac{X'A}{X'A'}$ =
deci $2X'A = X'A'$, de unde $X'A = AA'$. Aşadar X' şi A' sunt simetrice

2. Aplicaţii. Fie D, D_a, D_b, D_c punctele de tangenţă a cercurilor
exînscris, B-exînscris respectiv C-exînscris triunghiului ABC cu dreapta B
tim că au loc egalităţile [**1**], p.30:

$$DB = D_aC = p - b \quad \text{şi} \quad D_bC = D_cB = p - a \quad (2p = a + b + c)$$

primele spun că punctele D şi D_a sunt izotomice faţă de B şi C, iar u
această proprietate o au şi punctele D_b şi D_c. Putem presupune că A
pentru a evita cazul trivial în care $\triangle ABC$ ar fi isoscel cu vârful A.

Propoziţia 2. *Relativ la punctele D_b, D_c, sunt adevărate afirmaţiile*

1° $B'D_b$ *şi* $C'D_c$ *se intersectează într-un punct* $X \in (AA^*)$;

2° $B'D_c$ *şi* $C'D_b$ *se intersectează într-un punct* $Y \in (A^*G)$;

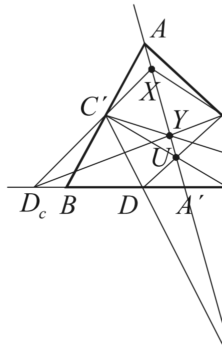
3° $\dfrac{XA}{XA'} + \dfrac{YA}{YA'} = 2$;

4° X *este izotomicul lui* G *în raport cu* A *şi* A' *dacă şi numai dacă* 2

Demonstraţie. 1° şi 2° decurg direct din Propoziţia 1 şi observaţia d
De asemenea, avem

$$\frac{XA}{XA'} + \frac{YA}{YA'} = \frac{D_bC}{D_bA'} + \frac{D_cC}{D_cA'} = \frac{p-a}{(p-a)+a/2} + \frac{p}{p-a/2} = \frac{2p-a}{p-a/2}$$

adică are loc 3°. În sfârşit, având în vedere Corolarul, X este izotomicul
şi numai dacă $D_bC = \dfrac{a}{2}$, adică $p - a = \dfrac{a}{2}$ sau $2a = b + c$.



Observaţie. Triunghiurile ce satisfac condiţia $2a = b + c$ (o latură este media aritmetică a celorlaltor două) sunt speciale, cu multe proprietăţi cunoscute (în [**2**], p. 242, sunt date opt proprietăţi). Afirmaţia 4° indică o nouă proprietate caracteristică lor.

Un rezultat similar se obţine dacă luăm punctele izotomice D, D_a în locul punctelor D_b, D_c.

Propoziţia 3. *Dacă* $\triangle ABC$ *satisface condiţia* $|b - c| \neq \dfrac{a}{2}$, *atunci relativ la punctele* D, D_a *avem:*

1° $B'D$ *şi* $C'D_a$ *se intersectează în* $U \in AA'$;

2° $B'D_a$ *şi* $C'D$ *se intersectează în* $V \in AA'$;

3° $\dfrac{UA}{UA'} - \dfrac{VA}{VA'} = \pm 2$ (+ *în cazul* $b > c$ *şi* − *în cazul* $b < c$).

Omitem demonstraţia, ce urmează pe cea din Propoziţia 2, dar men
prin condiţia $|b - c| \neq \dfrac{a}{2}$ se evită ca D sau D_a să fie mijlocul segmentului

Observaţie. Punctele X', Y', U', V' – conjugatele armonic ale punct
U, V în raport cu A şi A' – sunt alte patru puncte pe dreapta AA' care po
conexiune cu punctele de tangenţă D, D_a, D_b, D_c, aşa cum se indică în Pr
Rămâne în seama cititorului examinarea lor.

Bibliografie

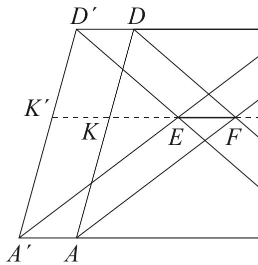
1. **T. Lalescu** - *Geometria triunghiului*, Ed. Tineretului, Bucureşti, 1958.
2. **V. Gh. Vodă** - *Vraja geometriei demodate*, Ed. Albatros, Bucureşti, 198

O construcţie geometrică a mediilor (II)

Claudiu - Ştefan POPA [1]

În [**2**] am prezentat o construcţie geometrică a mediilor armonică, g
aritmetică, pătratică şi ponderată a lungimilor bazelor unui trapez, ca se
capetele pe laturile neparalele ale trapezului şi paralele cu bazele lui. Ne
în continuare dezvoltarea acestor idei, fapt ce va conduce la o serie de c
cu interesante aplicaţii geometrice.

Propoziţie. *Fie $ABCD$ un trapez cu $AB \parallel CD$ şi punctele A', B', C
încât $A \in (A'B)$, $B \in (AB')$, $C \in (C'D)$, $D \in (CD')$, iar $AA' = BB' = C$
Notăm $\{E\} = A'C \cap BD'$, $\{F\} = AC' \cap B'D$, $\{K\} = EF \cap AD$, $\{L\} =$
În aceste condiţii, $EF \parallel AB$, $EF = AA'$, iar $KE = FL$.*



Demonstraţie. Deoarece $AA' \parallel CC'$ şi $AA' = CC'$, rezultă că $AC'CA'$ este paralelogram, deci $AC' \parallel A'C$, $AC' = A'C$. Analog, $BD' \parallel B'D$, $AD \parallel A'D'$ şi $BC \parallel B'C'$, cu egalităţile de segmente corespunzătoare. Unghiurile $\widehat{D'A'E}$ şi $\widehat{DAF}$ au laturile respectiv paralele şi vor fi congruente; la fel, $\widehat{A'D'E} \equiv \widehat{ADF}$. Avem încă $A'D' = AD$, prin urmare $\triangle A'D'E \equiv \triangle ADF$, deci $A'E = AF$. Însă $AE' \parallel AF$ şi atunci $AFEA'$
este paralelogram. Rezultă că $EF \parallel AA'$ şi $EF = AA'$, primele două af
concluziei.

Fie $\{K'\} = EF \cap A'D'$. Deoarece $A'C$ şi BD' sunt diagonale în trapezu
iar $K'L$ este paralelă la baze prin punctul de intersecţie a diagonalelor
urmează că $EL = EK'$. Însă $KK' = AA' + EF$, deci $EL - EF = EK' -$
$FL = KE$, ceea ce încheie demonstraţia.

Observaţie. Concluzia se păstrează, cu demonstraţie asemănătoare,
care punctele A', B', C', D' se află pe semidreptele $[AB$, $[BA$, $[CD$, resp

În cele ce urmează vom folosi notaţiile: $AB = a$, $CD = b$, $AA' = x$. St
blema variaţiei lungimii segmentului $[KL]$ funcţie de x; vom gândi lungim
tului $[AA']$ ca fiind pozitivă în cazul în care $A \in (A'B)$ şi negativă pentru

Pentru $x = 0$, avem $KL = \dfrac{2ab}{a+b}$ $(= m_h)$, iar pentru $x = \sqrt{ab}$ $(=$
$KL = m_g$, după cum s-a demonstrat în [**2**]. Desenând figurile pentru câ
ale lui $x > 0$, observăm că segmentul $[KL]$ "coboară" pe măsură ce x cre
"atinge" însă linia mijlocie a trapezului. În momentul în care vom demons
acest lucru, vom avea o (probabil) nouă demonstraţie pentru inegalitatea
două numere reale pozitive.

În trapezul $A'BCD'$, segmentul $[K'L]$ are ca lungime media armonică
$A'B = a + x$ şi $CD' = b + x$, deci $K'L = \dfrac{2\,(a+x)\,(b+x)}{a+b+2x}$.

---

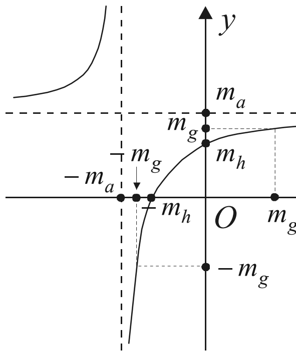
[1] Profesor, Şcoala "Alecu Russo", Iaşi

Atunci, avem

$$KL = K'L - KK' = \frac{2(a+x)(b+x)}{a+b+ax} - x = \frac{x(a+b)+2ab}{2x+(a+b)} = \frac{m_a x + m_g^2}{x+m_a} =$$

Suntem astfel conduşi la studiul funcţiei

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-m_a\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = m_a \cdot \frac{x+m_h}{x+m_a}.$$



Aceasta este o funcţie omografică, strict crescătoare pe $(-\infty, -m_a)$ şi pe $(-m_a, +\infty)$, al cărei grafic este o hiperbolă de asimptote $y = m_a$ şi $x = -m_a$. Prin calcul, stabilim că valorile $x = \pm m_g$ sunt puncte fixe ale funcţiei. Deoarece $f([0,\infty)) = [m_h, m_a)$, iar restricţia lui f la $[0,\infty)$ este strict crescătoare, justificarea afirmaţiilor anterioare este completă.

Consideraţiile precedente conduc la următoarele interpretări geometrice:

1. Faptul că $f(-m_h) = 0$ arată că, dacă $ABCD$ este trapez cu A
$A' \in [AB$, $D' \in [DC$ sunt astfel încât $AA' = DD' = m_h$, iar $\{E\} = A$
atunci paralela prin E la bazele trapezului dat trece prin punctul de con
prelungirilor laturilor neparalele ale acestuia.

2. Faptul că $f(-m_g) = -m_g$ se interpretează geometric astfel: dacă A
un trapez cu $AB \parallel CD$, iar $A' \in [AB$, $D' \in [DC$ sunt astfel încât $AA' =$
atunci $A'C$, BD' şi AD sunt concurente într-un punct E, iar paralela prin
intersectează BC în F astfel încât EF este media geometrică a lungimilo

3. În sfârşit, să observăm că pentru $x = -\dfrac{a+kb}{1+k}$, obţinem $f(x)$
(calculul se efectuează cu uşurinţă). Prin urmare, considerând segmentu
lungime egală cu media ponderată a bazelor cu ponderile 1 şi k, segment
reprezenta media ponderată a bazelor, cu ponderile 1 şi $-k$. Acest fapt
să construim cu rigla şi compasul conjugatul armonic al unui punct; citit
dezvolta singur ideile.

Bibliografie

1. **L. Constantinescu -** *O interpretare geometrică a inegalităţii mediilor*
1/1982, 30.
2. **C.-Şt. Popa -** *O construcţie geometrică a unor medii*, Rec. Mat. - 2/20

O generalizare a teoremelor de bază ale calculului diferenţial

Florin POPOVICI[1]

Nota de faţă îşi propune să extindă teoremele de bază ale calculului difer
impunerea condiţiei de derivabilitate bilaterală în locul condiţiei clasice
bilitate. Rezultatele obţinute se exprimă sub forma unor condiţii de ap
care pot fi, însă, interpretate geometric.

Teorema 1 (*Teorema lui Fermat generalizată*). *Fie* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *o fu*
Dacă $c \in (a, b)$ *este un punct de extrem local al funcţiei* f *şi aceasta este*
bilateral (la stânga şi la dreapta) în punctul c*, atunci*

$$0 \in \left[\min\left\{f'_-(c), f'_+(c)\right\}, \max\left\{f'_-(c), f'_+(c)\right\}\right].$$

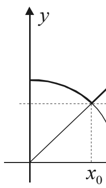
Demonstraţie. Fie c punct de maxim local. Aşadar, $\exists\delta > 0$ astfel în

$$x \in (c - \delta, c) \cap [a, b] \Rightarrow f(x) \leq f(c) \Rightarrow \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \Rightarrow f'_-(c)$$

$$x \in (c, c + \delta) \cap [a, b] \Rightarrow f(x) \leq f(c) \Rightarrow \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \Rightarrow f'_+(c)$$

şi, ca urmare, $0 \in \left[f'_+(c), f'_-(c)\right]$, adică are loc (1).

Exemplu. Funcţia $f(x) = \max\left\{x, 1 - x^2\right\}$, $x \geq 0$, este derivabilă cu excepţia punctului $x_0 = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$, pentru care $f'_-(x_0) = 1 - \sqrt{5}$ şi $f'_+(x_0) = 1$. Relaţia (1) revine la $0 \in \left(1 - \sqrt{5}, 1\right)$, adică semitangentele la grafic în $M_0(x_0, x_0)$ sunt de părţi diferite faţă de paralela prin acest punct la axa Ox.



Teorema 2 (*Teorema lui Rolle generalizată*). *Dacă* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *est*
continuă pe $[a, b]$*, derivabilă bilateral pe* (a, b) *şi* $f(a) = f(b)$*, atunci exist*
$c \in (a, b)$ *astfel încât are loc relaţia* (1).

Demonstraţie. Conform teoremei lui Weierstrass, funcţia f este măr
atinge marginile, adică $\exists c_1, c_2 \in [a, b]$ astfel încât $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$,

Dacă $\{c_1, c_2\} \subset \{a, b\}$, atunci rezultă că f este funcţie constantă şi
pentru orice $c \in (a, b)$. Dacă $\{c_1, c_2\} \not\subset \{a, b\}$, fie $c \in \{c_1, c_2\} \setminus \{a, b$
Teoremei 1 pentru acest punct c are loc (1).

Teorema 3 (*Teorema lui Lagrange generalizată*). *Dacă* $f : [a, b]$
o funcţie continuă pe $[a, b]$ *şi derivabilă bilateral pe* (a, b)*, atunci exist*
$c \in (a, b)$ *astfel încât*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \in \left[\min\left\{f'_-(c), f'_+(c)\right\}, \max\left\{f'_-(c), f'_+(c)\right\}\right].$$

Demonstraţie. Se aplică Teorema 2 funcţiei auxiliare $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ d
$g(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} x$, $x \in [a, b]$.

Corolarul 1 (*Teorema lui Lagrange pentru funcţii convexe*). *Fie* f :
interval deschis) o funcţie convexă. Atunci, pentru orice puncte $a, b \in$
există $c \in (a, b)$ *astfel încât*

---

[1] Profesor, Liceul Teoretic "N. Titulescu", Braşov

$$f'_-(c) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'_+(c).$$

Demonstraţie. Deoarece f este convexă pe I (deschis), rezultă că f est
pe I, derivabilă bilateral pe I şi $f'_-(x) \leq f'_+(x)$, $\forall x \in I$. Prin aplicarea
pe intervalul $[a,b]$, obţinem rezultatul cerut.

Corolarul 2. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$ (I interval deschis) o funcţie continuă bilă bilateral pe I. Atunci funcţia f este crescătoare pe I dacă şi numa satisfăcută condiţia*

$$\min\left\{f'_-(x), f'_+(x)\right\} \geq 0, \quad \forall x \in I.$$

Demonstraţie. Necesitatea condiţiei este uşor de dovedit. Pentru suf
$x_1, x_2 \in I$ cu $x_1 < x_2$. Conform Teoremei 3, aplicată restricţiei funcţiei f

$$\exists c \in (x_1, x_2) \quad \text{astfel încât} \quad \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geq \min\left\{f'_-(c), f'_+(c)\right.$$

De aici şi din (3), deducem că $f(x_1) \leq f(x_2)$; ca urmare, funcţia f este c

Teorema 4 (*Teorema lui Cauchy generalizată*). *Dacă $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funcţii continue pe $[a,b]$, derivabile bilateral pe (a,b) şi*

$$0 \notin \left[\min\left\{g'_-(x), g'_+(x)\right\}, \max\left\{g'_-(x), g'_+(x)\right\}\right], \quad \forall x \in (a,b)$$

atunci $g(a) \neq g(b)$ şi există un punct $c \in (a,b)$ astfel încât

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \in \left[\min\left\{\frac{f'_-(c)}{g'_-(c)}, \frac{f'_+(c)}{g'_+(c)}\right\}, \max\left\{\frac{f'_-(c)}{g'_-(c)}, \frac{f'_+(c)}{g'_+(c)}\right\}\right]$$

Demonstraţie. Dacă am avea $g(a) = g(b)$, atunci, conform Teoremei
un punct $c \in (a,b)$ astfel încât $0 \in \left[\min\left\{g'_-(c), g'_+(c)\right\}, \max\left\{g'_-(c), g'_+\right.\right.$
ce contrazice (4). Deci are loc $g(a) \neq g(b)$.

Considerăm acum funcţia $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ definită prin

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x), \quad x \in [a,b].$$

Observăm că h este continuă pe $[a,b]$, derivabilă bilateral pe $(a,b$
$h(a) = \dfrac{f(a)g(b)-f(b)g(a)}{g(b)-g(a)} = h(b)$. Conform Teoremei 2, există $c \in ($
încât $0 \in \left[\min\left\{h'_-(x), h'_+(x)\right\}, \max\left\{h'_-(x), h'_+(x)\right\}\right]$, adică avem

$$f'_-(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'_-(c) \leq 0 \leq f'_+(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'_+(c)$$

sau

$$f'_+(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'_+(c) \leq 0 \leq f'_-(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'_-(c).$$

Presupunem că are loc (6) (se procedează analog, dacă ar avea loc (7)
ipotezei (4), putem scrie

$$\min\left\{g'_-(c), g'_+(c)\right\} > 0 \quad (8) \qquad \text{sau} \qquad \max\left\{g'_-(c), g'_+(c)\right\} < 0$$

Dacă are loc (8), atunci (6) ia forma

$$\frac{f'_-(c)}{g'_-(c)} \leq \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \leq \frac{f'_+(c)}{g'_+(c)},$$

deci (5) este adevărată. Dacă are loc (9), atunci (6) se scrie

$$\frac{f'_+(c)}{g'_+(c)} \leq \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \leq \frac{f'_-(c)}{g'_-(c)},$$

deci (5) este adevărată şi în acest caz. Demonstraţia este completă.

NOTA ELEVULUI

Asupra unei inegalităţi

Alexandru NEGRESCU[1]

La a V-a ediţie a *Concursului interjudeţean de matematică "Radu Miro*
brie 2003, elevilor clasei a IX-a li s-a propus următoarea problemă:

Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (2, +\infty)$ *astfel încât* $\dfrac{1}{x_1 - 1} + \dfrac{1}{x_2 - 1} + \cdots + \dfrac{}{x_}$
Demonstraţi că $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \geq (n+1)^n$.

Vom da 5 demonstraţii acestei inegalităţi.

Soluţia I. Notăm $x_i - 1 = a_i$, $i = \overline{1,n}$; deci $a_i > 1$. Aplicăm inega
Huygens:

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geq (1 + \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n})^n, \quad \forall a_1, a_2, \ldots, a$$

Obţinem

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \geq \left(1 + \sqrt[n]{(x_1 - 1)(x_2 - 1) \cdots (x_n - 1)}\right)^n.$$

Dar, conform cu inegalitatea dintre mediile armonică şi geometrică, avem

$$\frac{n}{\dfrac{1}{x_1 - 1} + \dfrac{1}{x_2 - 1} + \cdots + \dfrac{1}{x_n - 1}} \leq \sqrt[n]{(x_1 - 1)(x_2 - 1) \cdots (x_n -}$$

sau, ţinând seama de condiţia din enunţ,

$$n \leq \sqrt[n]{(x_1 - 1)(x_2 - 1) \cdots (x_n - 1)}.$$

Din (1) şi (2) rezultă că $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \geq (1+n)^n$, q.e.d.

Soluţia II. Scriem

$$x_i = 1 + (x_i - 1) = 1 + \frac{x_i - 1}{n} + \frac{x_i - 1}{n} + \cdots + \frac{x_i - 1}{n} \geq (n+1) \sqrt[n+1]{\Bigl(}$$

Ca urmare,

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \geq (n+1)^n \sqrt[n+1]{\frac{(x_1 - 1)^n (x_2 - 1)^n \cdots (x_n - 1)^n}{n^{n^2}}}$$

Din (2), avem $(x_1 - 1)(x_2 - 1) \cdots (x_n - 1) \geq n^n$, deci

$$\sqrt[n+1]{\frac{(x_1 - 1)^n (x_2 - 1)^n \cdots (x_n - 1)^n}{n^{n^2}}} \geq 1.$$

Combinând (3) şi (4), obţinem inegalitatea cerută.

Soluţia III. Notăm $\dfrac{1}{x_i - 1} = y_i$, $i = \overline{1,n}$; deci $y_i \in (0,1)$ şi $y_1 + y_2 + \cdot$
Rezultă că $x_i = \dfrac{y_i + 1}{y_i}$, $\overline{1,n}$ şi avem:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = \frac{y_1 + 1}{y_1} \cdot \frac{y_2 + 1}{y_2} \cdot \ldots \cdot \frac{y_n + 1}{y_n} =$$

[1] Elev, cl. a IX-a, Colegiul Naţional "A. T. Laurian", Botoşani

$$= \frac{2y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{y_1} \cdot \frac{y_1 + 2y_2 + \cdots + y_n}{y_2} \cdot \ldots \cdot \frac{y_1 + y_2 + \cdots + 2y}{y_n}$$
$$\geq \frac{(n+1)^n \sqrt[n+1]{(y_1 y_2 \cdots y_n)^{n+1}}}{y_1 y_2 \cdots y_n} = (n+1)^n .$$

Soluţia IV. Apelăm la *metoda lui Sturm.* Deoarece $x_i = \left(1 + \frac{1}{x_i - 1}\right.$

$i = \overline{1,n}$, inegalitatea de demonstrat se scrie

$$\left[\prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{x_i - 1}\right)\right] \Big/ \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i - 1} \geq (n+1)^n .$$

Să analizăm comportarea produsului $\frac{1+a}{a} \cdot \frac{1+b}{b}$, cu $a, b > 0$ şi $a +$ stantă subunitară, atunci când a şi b "se apropie". Presupunem $a < b$ numerele a şi b cu $a + t$ şi respectiv $b - t$, unde $0 < t < b - a$. Atunci

$$\frac{1+a+t}{a+t} \cdot \frac{1+b-t}{b-t} - \frac{1+a}{a} \cdot \frac{1+b}{b} = \frac{t(1+a+b)(a-b+t)}{ab(a+t)(b-t)} <$$

ceea ce arată că apropiind numerele a şi b produsul $\frac{1+a}{a} \cdot \frac{1+b}{b}$ descreşt

Dacă printre numerele $\frac{1}{x_1 - 1}, \frac{1}{x_2 - 1}, \ldots, \frac{1}{x_n - 1}$ există două ineg unul este strict mai mic ca $\frac{1}{n}$ şi celălalt este strict mai mare ca $\frac{1}{n}$; fie şi $\frac{1}{x_2 - 1} > \frac{1}{n}$. Înlocuim $\frac{1}{x_1 - 1}$ şi $\frac{1}{x_2 - 1}$ prin $\frac{1}{n}$ şi respectiv $\frac{1}{x_1 - 1} +$ Suma numerelor $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{x_1 - 1} + \frac{1}{x_2 - 1} - \frac{1}{n}$, $\frac{1}{x_3 - 1}, \ldots, \frac{1}{x_n - 1}$ rămâ dar membrul stâng în (5), obţinut prin această înlocuire, este mai mic. de numere avem unul egal cu $\frac{1}{n}$, iar, dacă printre celelalte există două procedează la fel până când se obţine un set de numere egale cu $\frac{1}{n}$. În membrul stâng are valoare minimă, anume,

$$\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) \Big/ \frac{1}{n}\right]^n = (n+1)^n .$$

Soluţia V. Vom dovedi mai întâi rezultatul următor:
Lemă. *Dacă* $a_i, b_i > 0$, $i = \overline{1,n}$, *atunci*

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} (a_i + b_i)} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} + \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} b_i} .$$

Demonstraţie. Inegalitatea se poate scrie astfel:

$$1 \geq \sqrt[n]{\frac{a_1}{a_1 + b_1} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{a_n + b_n}} + \sqrt[n]{\frac{b_1}{a_1 + b_1} \cdot \ldots \cdot \frac{b_n}{a_n + b_n}}$$

şi rezultă aplicând inegalitatea mediilor:

$$1=\frac{1}{n}\left[\left(\frac{a_1}{a_1+b_1}+\cdots+\frac{a_n}{a_n+b_n}\right)+\left(\frac{b_1}{a_1+b_1}+\cdots+\frac{b_n}{a_n+b_n}\right)\right]$$

$$\geq\sqrt[n]{\frac{a_1}{a_1+b_1}\cdot\ldots\cdot\frac{a_n}{a_n+b_n}}+\sqrt[n]{\frac{b_1}{a_1+b_1}\cdot\ldots\cdot\frac{b_n}{a_n+b_n}}.$$

Luând în (6) $a_i=x_i-1$ şi $b_i=1$, $i=\overline{1,n}$, obţinem

$$\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}\geq\sqrt[n]{(x_1-1)(x_2-2)\cdots(x_n-1)}+1\overset{(2)}{\geq}n+1$$

de unde rezultă inegalitatea dorită.

Observaţie. Această problemă poate fi uşor generalizată astfel:

Fie $x_1,x_2,\ldots,x_n\in(2,+\infty)$ *astfel încât* $\frac{1}{x_1-1}+\frac{1}{x_2-1}+\cdots+\frac{1}{x_n-1}$

Demonstraţi că $x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n\geq\left(\frac{k+n}{k}\right)^n$.

Bibliografie

1. **Gh. Andrei şi colab.** - *Exerciţii şi probleme de algebră pentru concursuri ... piade şcolare*, Partea I, Constanţa, 1990.
2. **M. Ganga** - *Manual pentru clasa a IX-a, Profil M1,M2*, Ed. Mathpres... 2003.
3. **M. Ganga** - *Probleme elementare de matematică*, v. II, Ed. Mathpres... 2003.
4. **D. Şt. Marinescu, V. Cornea** - *Două inegalităţi şi unele aplicaţii al...* Gazeta Matematică, CVI (2001), nr. 3, 102-104.
5. **I. Nedelcu** - *Probleme de matematică pentru liceu*, Ed. Mathpress, Ploie...
6. **L. Panaitopol, M. Lascu, V. Băndilă** - *Inegalităţi*, Ed. GIL, Zalău, 1...

Recreaţii ... matematice

1 (Problema de cântărire a lui Bachet). Care este cel mai mic ... greutăţi care pot fi folosite pentru a cântări cu o balanţă ori număr întreg de ... de la 1 la 40?

2. Găsiţi două numere care se scriu în baza 10 numai cu ajutorul cifr... au suma egală cu produsul lor.

3. Un urs pleacă din bârlogul său 1 km spre sud, se întoarce şi parc... spre est, apoi 1 km spre nord, revenind astfel în punctul de plecare. Ce ... ursul?

Notă. Răspunsurile la aceste probleme se găsesc la p. 110 şi la p. 123

Asupra problemei VII.41 din RecMat - 2/2

În nr. 2/2003 al revistei *Recreaţii matematice* este publicată următoarea
propusă de elevul **Alexandru Negrescu** din Botoşani:

VII.41. *Rezolvaţi în* $\mathbb{N}^2$ *ecuaţia* $\dfrac{a}{b+1}+\dfrac{b}{a+1}=1.$

Această problemă a fost apoi propusă elevilor de cl. a VII-a în cadrul *C*
"Recreaţii matematice", ediţia a III-a, 2003, Iaşi.

Aceste împrejurări, cât şi accesibilitatea problemei, au făcut ca ace
bucure de atenţia elevilor. Ca rezultat, au fost date mai multe soluţi
sau variante ale lor. Nota de faţă colectează aceste soluţii. Cititorul
entuziasmul şi pasiunea cu care elevii au atacat problema VII.41.

Soluţia I (**Alexandra Ciofu**, elevă, Hârlău). Dacă perechea (a, b) e
a ecuaţiei, atunci $\dfrac{a}{b+1} \leq 1$ şi $\dfrac{b}{a+1} \leq 1$, de unde $a \leq b+1$ şi $b \leq a+1$.

I Dacă $a \geq b$, rezultă că $0 \leq a-b \leq 1$, deci $a-b \in \{0, 1\}$. În cazul
urmează $a = b$ şi, deoarece (a, b) este soluţie, $\dfrac{2a}{a+1} = 1$. De aici, obţi
şi, deci, perechea $(1, 1)$ va fi soluţie a ecuaţiei date. În cazul $a-b = 1$, în
ecuaţia dată pe a cu $b+1$ obţinem $1+\dfrac{b}{b+2} = 1$, deci $b = 0$. Aşadar, în
obţinem soluţia $(1, 0)$.

II Dacă $a \leq b$, rolurile numerelor a şi b se schimbă şi (a, b) va fi $(1, 1)$

Rezumând, mulţimea soluţiilor ecuaţiei date este $\{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$

Soluţia II (**Maria Crăciun**, elevă, Hunedoara). Ecuaţia dată este e
cu $a(a+1)+b(b+1) = (a+1)(b+1)$, deci cu $a^2-ab+b^2 = 1$. Aceast
poate fi scrisă sub forma $a(a-b)-b(a-b) = 1-ab$ sau $(a-b)^2 = 1-a$
numărul $1-ab$ este un pătrat perfect cel mult egal cu 1, dacă perechea
soluţie a ecuaţiei. Ca urmare, $1-ab \in \{0, 1\}$, adică $ab \in \{0, 1\}$.

Dacă $ab = 1$, atunci perechea (a, b) va fi $(1, 1)$ şi aceasta verifică ecuaţ

Dacă $ab = 0$, atunci $a = 0$ sau $b = 0$. Dacă $a = 0$, înlocuind în ecuaţ
$b = 1$; perechea $(0, 1)$ verifică ecuaţia din enunţ. Dacă $b = 0$, obţine
asemănător soluţia $(1, 0)$. Dacă $a = 0$ şi $b = 0$, verificăm că perechea
soluţie.

În concluzie, mulţimea soluţiilor ecuaţiei este $\{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$.

Soluţia III (**Bogdan-Alexandru Burican**, elev, Hârlău). Ecuaţia e
lentă cu $a^2-ab+b^2 = 1$ şi apoi cu $a^2+b^2+(a-b)^2 = 2$. Rezultă că a
$a \in \{0, 1\}$.

Dacă $a = 0$, din ecuaţia dată obţinem $b = 1$.

Dacă $a = 1$, din relaţia $a^2-ab+b^2 = 1$ obţinem $b^2-b = 0$, de unde
$b = 1$.

Prin urmare, perechile $(0, 1)$, $(1, 0)$ şi $(1, 1)$ sunt soluţiile ecuaţiei date

Soluţia IV (**Diana Prodan**, elevă, Iaşi). Ecuaţia $a^2-ab+b^2 = 1$, e

cu ecuaţia din enunţul problemei, se pune în forma $3a^2 + (a - 2b)^2 =$ 4
avem $3a^2 \leq 4$, deci $a \in \{0, 1\}$. Se continuă ca în Soluţia III.

Soluţia V (**Adrian Hamciuc**, elev, Iaşi). Ca mai sus, obţine
$a^2 - ab + b^2 = 1$. Cum $a^2 + b^2 \geq 2ab$, rezultă că $ab \leq 1$, adică $ab \in$
încheie ca în Soluţia II.

Soluţia VI (**Diana Timofte**, elevă, Iaşi). Fie (a, b) o soluţie a ecuaţie
şi a ecuaţiei $a^2 - ab + b^2 = 1$. Ca urmare, ecuaţia $b^2 - ab - \left(a^2 - 1\right) = 0$, c
în b, are soluţii reale şi atunci $\Delta = a^2 - 4\left(a^2 - 1\right) \geq 0$. Rezultă că $3a^2$
$a \in \{0, 1\}$. Se continuă ca în Soluţia III.

Soluţia VII (**Alexandru Negrescu**, elev, Botoşani). Conform
Cauchy-Buniakovski-Schwarz, avem

$$[(b+1) + (a+1)]\left(\frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1}\right) \geq \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2,$$

de unde $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 \leq (b+1) + (a+1)$, adică $a + b + 2\sqrt{ab} \leq a + b + 2$ sa
De aici $ab \in \{0, 1\}$ etc.

Observaţie. Soluţiile prezentate mai sus au comun faptul că în prim
obţine, cu tehnici diverse de calcul, una dintre relaţiile $a \in \{0, 1\}$, $a -$
$ab \in \{0, 1\}$. În partea a doua sunt utilizate aceste relaţii (una dintre e
determinarea mulţimii soluţiilor ecuaţiei.

Recreaţii ... matematice

Soluţia *Problemei de cântărire a lui Bachet* (p. 108)

Dacă greutăţile se pun pe un singur taler, sunt necesare şase greutăţi:
4 kg, 8 kg, 16 kg, 32 kg. Într-adevăr, orice greutate de la 1 la 40 poat
astfel:

$$\begin{array}{ll} 1 = 1, & 6 = 4 + 2, \\ 2 = 2, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 3 = 2 + 1, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 4 = 4, & 39 = 32 + 4 + 2 + 1, \\ 5 = 4 + 1, & 40 = 32 + 8. \end{array}$$

Dacă greutăţile pot fi puse pe ambele talere, sunt necesare numai patr
1 kg, 3 kg, 9 kg, 27 kg. Într-adevăr, avem:

$$\begin{array}{ll} 1 = 1, & 6 = 9 - 3, \\ 2 = 3 - 1, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 3 = 3, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 4 = 3 + 1, & 39 = 27 + 9 + 3, \\ 5 = 9 - 3 - 1, & 40 = 27 + 9 + 3 + 1. \end{array}$$

Asupra unei probleme de concurs

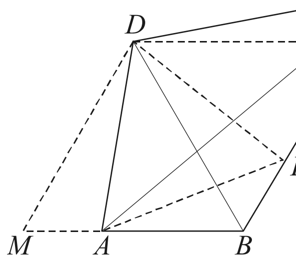
Dumitru MIHALACHE, Marian TETIVA[1]

În această notă ne propunem să prezentăm două modalităţi de abord
probleme de geometrie şi să obţinem o "generalizare" a sa (rostul ghilime
vedea la vremea potrivită). Problema a fost propusă de **C. Apostol** la
Naţional de Matematică "Laurenţiu Duican" (ajuns, iată, la cea de a X
felicitări şi succes în continuare!) şi enunţul ei poate fi citit în [**1**]; iată a
(modificat pentru a reţine doar esenţialul):

Problema 1. *În patrulaterul convex $ABCD$ avem $m(\widehat{A}) = 80°$, $m(\widehat{B}$
$m(\widehat{C}) = 50°$, $m(\widehat{D}) = 110°$. Să se arate că, dacă $(BD$ este bisectoarea un
atunci $(AC$ este bisectoarea unghiului $\widehat{A}$.*

Într-o primă fază, negăsind nici o altă idee, am încercat o rezolvare a
bazată pe calcule trigonometrice. Rezultatul acestei căutări este

Metoda I de rezolvare a problemei. Din ipoteză rezultă că $m(\widehat{DBA}) = m(\widehat{DBC}) = 60°$ şi, apoi, că $m(\widehat{ADB}) = 40°$, iar $m(\widehat{BDC}) = 70°$. Să considerăm punctele $M \in AB$ ($A \in (MB)$) şi $N \in (BC)$ astfel încât triunghiurile MBD şi BND să fie echilaterale (prin urmare $m(\widehat{MDA}) = 20°$ şi $m(\widehat{NDC}) = 10°$). Fie a lungimea laturilor acestor triunghiuri. Cu teorema sinusurilor în triunghiul MAD obţinem



$$\frac{MA}{\sin 20°} = \frac{a}{\sin 100°} \quad \Rightarrow \quad MA = \frac{a\sin 20°}{\sin 100°} = \frac{a\sin 20°}{\sin 80°},$$

iar din triunghiul NCD,

$$\frac{NC}{\sin 10°} = \frac{a}{\sin 50°} \quad \Rightarrow \quad NC = \frac{a\sin 10°}{\sin 50°}.$$

Atunci

$$AB = MB - MA = a\,\frac{\sin 80° - \sin 20°}{\sin 80°} = a\,\frac{2\sin 30° \cos 50°}{\sin 80°} = a\,\frac{\cos}{\sin}$$

şi

$$BC = BN + NC = a\,\frac{\sin 50° + \sin 10°}{\sin 50°} = a\,\frac{\cos 20°}{\sin 50°},$$

prin urmare

$$\frac{BC}{AB} = \frac{\cos 20° \sin 80°}{\sin 50° \cos 50°} = \frac{2\cos 20° \sin 80°}{\sin 100°} = 2\cos 20° = \frac{\sin 40°}{\sin 20°}$$

(este evident că am "aranjat" acest raport, ştiind unde vrem să ajungem)

[1] Profesori, Colegiul Naţional "Gh. Roşca Codreanu", Bârlad

Acum, fie $x = m(\widehat{BAC})$, deci $m(\widehat{BCA}) = 60° - x$; tot cu teorema
(acum în triunghiul ABC) şi ţinând seama de calculul anterior, avem

$$\frac{\sin x}{\sin(60° - x)} = \frac{\sin 40°}{\sin 20°} \quad \Rightarrow \quad \sin x \sin 20° = \sin(60° - x) \sin 40°$$

transformăm produsele în sume şi avem

$$\cos(x - 20°) - \cos(x + 20°) = \cos(20° - x) - \cos(100° - x),$$

deci

$$\cos(100° - x) - \cos(x + 20°) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin 60° \sin(40° - x) = 0$$

Cum, evident, $0° < x < 80°$, de aici rezultă $x = 40°$ şi problema este rezo

Desigur, asemenea calcule nu sunt pentru cl. VII-a (iar problema a fo
elevilor acestei clase); să vedem aşadar şi o soluţie a problemei la acest ni

Metoda a II-a se bazează pe observaţia următoare: dacă $P \in (BC)$ es
pentru care $m(\widehat{PDC}) = 50°$, atunci triunghiul PDC este isoscel cu
(evident), iar triunghiul ADP este echilateral. Într-adevăr, unghiul $\widehat{BP}$
imediat, are măsura de $100°$, de aceea patrulaterul $ABPD$ este inscripti
două unghiuri opuse suplementare). Atunci $m(\widehat{APD}) = m(\widehat{DBA}) = 60°$,
altă parte, $m(\widehat{ADP}) = m(\widehat{ADC}) - m(\widehat{PDC}) = 110° - 50° = 60°$, deci
ADP are două unghiuri de măsură $60°$.

Rezultă că avem $AP = DP = PC$ şi triunghiul PAC este tot isoscel; p

$$m(\widehat{PAC}) = m(\widehat{PCA}) = \frac{180° - m(\widehat{APC})}{2} = 20°,$$

de unde rezultă imediat $m(\widehat{BAC}) = 40°$ şi demonstraţia se încheie.

Fără îndoială, această a doua variantă de soluţionare a problemei este
simplă decât prima; totuşi, ideea de a alege punctul P nu vine prea uşor.
rolul său în problemă este fundamental; de fapt, noi credem că proble
construită pornind de la cele două triunghiuri isoscele "lipite", ADP şi
triunghiul ADP este chiar echilateral nu este esenţial şi de asta vă pute
rezolvând următoarea "generalizare" a primei probleme.

Problema 1′. *Fie $ABCD$ un patrulater în care $m(\widehat{A}) = \beta + \gamma$, $m(\widehat{B})$
$m(\widehat{C}) = \alpha$, $m(\widehat{D}) = \alpha + \beta$, $m(\widehat{DBC}) = \beta$, unde $\alpha, \beta, \gamma > 0°$ şi $2\alpha + \beta +$
Atunci:*

a) $90° > \beta > \gamma$.

b) *$(AC$ este bisectoarea unghiului $\widehat{A}$.*

Soluţie. *a*) Deoarece $m(\widehat{B}) > m(\widehat{DBC})$, avem $2\alpha + \gamma > \beta$ şi $2\beta < 2\alpha +$
$\Rightarrow \beta < 90°$. Apoi, $m(\widehat{ABD}) = 2\alpha + \gamma - \beta$ şi $m(\widehat{ADB}) = 180° - (2\alpha + \gamma - \beta$
$= \beta - \gamma$, deci $\beta > \gamma$.

b) Alegem un punct $P \in (BC)$ astfel încât

$$m(\widehat{PDC}) = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad m(\widehat{PDB}) = \gamma.$$

Acest punct există pe segmentul (BC), deoarece $m(\widehat{BDC}) = \alpha + \gamma$. M
demonstraţia decurge ca mai sus: observaţi că triunghiul PCD este isosc

$ABPD$ este patrulater inscriptibil şi că triunghiul PAD este isoscel (cu m
$= m(\widehat{PDA}) = \beta$). Rezultă triunghiul PAC isoscel, de unde se va put
măsura lui $\widehat{PAC}$ şi apoi se ajunge la $m(\widehat{BAC}) = \dfrac{\beta+\gamma}{2}$, ceea ce încheie r

Nu e o generalizare efectivă, totul se bazează pe aceeaşi idee (Prob regăseşte pentru $\alpha = 50°$, $\beta = 60°$ şi $\gamma = 20°$): iată de ce am pus cuv ghilimele.

Iar pentru a încheia lăsăm ca "temă" o problemă înrudită cu cele c (eventual încercaţi şi o generalizare a ei).

Problema 2. *Fie ABC un triunghi cu $m(\widehat{B}) = 110°$ şi $m(\widehat{C}) = 50°$ răm punctele $M \in (AC)$ şi $N \in (AB)$ astfel încât $m(\widehat{MBC}) = 70°$ şi $m(\widehat{N}$ Să se calculeze $m(\widehat{AMN})$.* (Răspuns: $60°$.)

Bibliografie

1. **F. Diac** - *A XI-a ediţie a Concursului Naţional de Matematică "Laurenţi* Braşov, 2003, G. M. 11/2003.

LISTA MEMBRILOR FILIALEI IAŞI a S. S

continuare din nr. 1/2000, 1/2001, 1/2002, 1/2003 şi 1/2004

126. DIMITRIU Gabriel	I. M. F., Iaşi
127. RĂDUCANU Petru	Liceul "D. Cantemir", Iaşi
128. IUREA Gheorghe	Liceul "D. Cantemir", Iaşi
129. LAZĂR Cristian	Colegiul Naţional, Iaşi
130. PETCU Alina Emilia	Liceul Energetic, Iaşi
131. POPA Gabriel	Colegiul Naţional, Iaşi
132. VĂTĂMĂNUŢĂ Laura	Şcoala Waldorf, Iaşi
133. NEDELCU Andrei	Liceul "Gr. Moisil", Iaşi
134. CĂRĂUŞU Alexandru	Univ. Tehnică "Gh. Asachi", I
135. ROMAN Neculai	Şcoala "V. Alecsandri", Mirceş
136. CĂLIN Ionela	Liceul "D. Mangeron", Iaşi
137. GOLĂEŞ Angelica	Gr. şc. ind. uşoară "Victoria",
138. BEJAN Tinuţa	Şcoala "Al. Vlahuţă", Iaşi
139. BUZAC Gabriela - Tamara	Liceul Economic nr. 1, Iaşi
140. PĂDURARU Adriana	Şcoala "B. P. Hasdeu", Iaşi
141. LUCHIAN Dorel	Liceul "M. Costin", Iaşi
142. COZLAC Magda	Liceul ind. nr. 7, Iaşi
143. LUCA TUDORACHE Rodica	Univ. Tehnică "Gh. Asachi", I
144. POPA Antoaneta	Şcoala Mânzăteşti (Iaşi)
145. ARBONE Dorina	Şcoala "Mircea cel Bătrân", Ia
146. IONESCU Mihaela	Şcoala "I. Ghica", Iaşi
147. SAVA Radu	Colegiul "C. Negruzzi", Iaşi

(continuare la p

Exponentul numărului natural a în produsu

Mihai CRĂCIUN[1]

În cele ce urmează, date fiind $a, n \in \mathbb{N}^*$, vom indica o formulă de calc nentului lui a în $n!$, notat $\exp_{n!}(a)$, împreună cu câteva aplicaţii.

Teorema 1. *Dacă p este prim, atunci* $\exp_{n!}(p) = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right.$

Demonstraţie. Mai întâi, se observă că suma din enunţ este finită şi s până când termenul curent are partea întreagă egală cu 0.

Dintre factorii produsului $n!$, un număr de $\left[\frac{n}{p}\right]$ vor fi multipli de p. Di număr de $\left[\frac{n}{p^2}\right]$ vor fi multipli de p^2, iar dintre aceştia din urmă, un numă vor fi multipli ai lui p^3 etc. Suma numerelor indicate va fi exponentul ceru fiecare factor al produsului $n!$ care este multiplu al lui p^m fără a fi şi mul p^{m+1} se socoteşte în modul indicat de m ori, ca multiplu al lui $p, p^2, \ldots,$

Exemplul 1. $\exp_{50!}(3) = \left[\frac{50}{3}\right] + \left[\frac{50}{9}\right] + \left[\frac{50}{27}\right] + \left[\frac{50}{81}\right] = 16 + 5 + 1$

Teorema 2. *Dacă p este prim iar $\alpha \in \mathbb{N}^*$, atunci* $\exp_{n!}(p^\alpha) = \left[\frac{\exp}{\alpha}\right.$

Demonstraţia este evidentă.

Exemplul 2. $\exp_{50!}\left(3^7\right) = \left[\frac{\exp_{50!} 3}{7}\right] = \left[\frac{22}{7}\right] = 3.$

Teorema 3 (Legendre). *Dacă $a \in \mathbb{N}^*$ este descompus în factor primi* $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, *atunci* $\exp_{n!}(a) = \min\left\{\exp_{n!}(p_1^{\alpha_1}), \exp_{n!}(p_2^{\alpha_2}), \ldots, \right.$ ex

Demonstraţia este imediată.

Exemplul 3.

$$\exp_{253!}(108) = \min\left\{\exp_{253!}\left(2^2\right), \exp_{253!}\left(3^3\right)\right\} = \min\left\{\left[\frac{\exp_{253!} 2}{2}\right], \left[\exp\right.\right.$$

Deoarece $\exp_{253!} 2 = 246$ şi $\exp_{253!} 3 = 125$, urmează că $\exp_{253!}(108) = 41$

Problema 1. *Determinaţi cu câte zerouri se termină* 1958!

Soluţie. Numărul de zerouri este dat de $\exp_{1958!}(10)$. Se observă că

$$\exp_{1958!}(10) = \min\left\{\exp_{1958!} 2, \exp_{1958!} 5\right\} = \exp_{1958!}(5).$$

Atunci

$$\exp_{1958!}(5) = \left[\frac{1958}{5}\right] + \left[\frac{1958}{5^2}\right] + \left[\frac{1958}{5^3}\right] + \left[\frac{1958}{5^4}\right] + \left[\frac{1958}{5^5}\right] = 4$$

deci 1958! se termină cu 467 zerouri.

Problema 2. *Demonstraţi că $n!$ nu se divide cu 2^n, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Soluţie. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi fie $k \in \mathbb{N}$ astfel ca $2^k \leq n < 2^{k+1}$. Atunci

$$\exp_{n!}(2) = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{2^2}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{2^{k+1}}\right] \leq \frac{n}{2} + \frac{n}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^{k+1}} = n\left(1 - \frac{}{2^k}\right.$$

[1] Profesor, Liceul "M. Sadoveanu", Paşcani

deci $\exp_{n!}(2) < n$ şi $n!$ nu se divide cu 2^n.

Problema 3. Determinaţi cu câte zerouri se termină $\left(\frac{5^n-1}{4}\right)!$, unc

Soluţie. Să notăm $N = \frac{5^n-1}{4}$. Ca mai sus, numărul de zerouri e

$\exp_{N!} 5$. În plus

$$\exp_{N!} 5 = \left[\frac{5^n-1}{4\cdot 5}\right] + \left[\frac{5^n-1}{4\cdot 5^2}\right] + \cdots + \left[\frac{5^n-1}{4\cdot 5^k}\right] + \cdots =$$

$$= \left[\frac{5^n-5+5-1}{4\cdot 5}\right] + \left[\frac{5^n-5^2+5^2-1}{4\cdot 5^2}\right] + \cdots + \left[\frac{5^n-5^k+5^k}{4\cdot 5^k}\right.$$

$$= \frac{5^{n-1}-1}{4} + \frac{5^{n-2}-1}{4} + \cdots + \frac{5^{n-n}-1}{4} = \frac{5^n-4n-1}{16},$$

deoarece $\frac{5^k-1}{4} \in \mathbb{N}$ pentru $k \in \mathbb{N}^*$, iar $\frac{5^k-1}{4\cdot 5^k} \in [0,1)$. De aici, $N!$ se t

$\frac{5^n-4n-1}{16}$ zerouri.

Problema 4. *Factorialul căror numere se termină exact în* 1000 *zer*

Soluţie. Fie $n \in \mathbb{N}$ un număr al cărui factorial se termină exact în 10

şi fie $k \in \mathbb{N}$ astfel ca $5^k \le n < 5^{k+1}$. Atunci $\left[\frac{n}{5}\right] + \left[\frac{n}{5^2}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{5^{k+1}}\right] =$

$\frac{n}{5} + \frac{n}{5^2} + \cdots + \frac{n}{5^k} = \frac{n}{4}\left(1 - \frac{1}{5^k}\right) > 1000$ şi $n > 1000$. În plus, $\left[\frac{n}{5}\right] <$

$n < 5005$, ceea ce implică $k = 5$. Se observă că pentru $n \le 4004$, $n!$ se ter

mult $\left[\frac{4004}{5}\right] + \left[\frac{4004}{5^2}\right] + \left[\frac{4004}{5^3}\right] + \left[\frac{4004}{5^4}\right] + \left[\frac{4004}{5^5}\right] = 999$ zerouri, în vrem

$n \ge 4010$, $n!$ se termină în cel puţin $\left[\frac{4010}{5}\right] + \left[\frac{4010}{5^2}\right] + \left[\frac{4010}{5^3}\right] + \left[\frac{4010}{5^4}\right] + \left[\frac{4}{}\right.$

zerouri. Numerele cerute sunt 4005, 4006, 4007, 4008, 4009.

Problema 5. *Demonstraţi că* $\frac{(2m)!\,(2n)!}{m!n!\,(m+n)!} \in \mathbb{N}$, *unde* $m, n \in \mathbb{N}$.

Soluţie. Mai întâi, se poate demonstra inegalitatea

$$[x] + [y] + [x+y] \le [2x] + [2y], \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Exponentul unui factor prim p din descompunerea canonică a numărăt

$s_1 = \sum_k \left\{ \left[\frac{n}{p^k}\right] + \left[\frac{m}{p^k}\right] + \left[\frac{m+n}{p^k}\right] \right\}$, în vreme ce exponentul lui p di

punerea canonică a numărătorului este $s_2 = \sum_k \left\{ \left[\frac{2m}{p^k}\right] + \left[\frac{2n}{p^k}\right] \right\}$. Fo

obţinem că $s_1 \le s_2$ şi deci $\frac{(2m)!\,(2n)!}{m!n!\,(m+n)!} \in \mathbb{N}$.

Probleme propuse.

1. Cu câte zerouri se termină numărul $\frac{101001!}{2004!}$?

2. Să se demonstreze că numerele $A = 111! \cdot 222! \cdot 333! \cdot 444!$ şi $B = 5$
$777! \cdot 888!$ sunt divizibile cu 10^{268}, respectiv 10^{715}.

3. Factorialul căror numere se termină cu exact 2004 zerouri?

4. Aflaţi exponentul lui k în $\left(1 + k + k^2 + \cdots + k^n\right)!$, unde $k, n \in \mathbb{N}^*$,

CONCURSURI ŞI EXAMENE

Concursul de matematică "Al. Myller"

Ediţia a II-a, Iaşi, martie 2004

Notă (*pentru clasele IV-VI*). Toate subiectele sunt obligatorii. Timp efect
90 min. Se acordă din oficiu 30 puncte, câte 6 puncte pentru problemele 1-5, câ
pentru problemele 6-10 şi câte 10 puncte pentru problemele 11-15.

Clasa a IV-a

1. Un elev rezolvă fiecare dintre primele 5 probleme ale acestui tes
minute, iar pe fiecare dintre următoarele 5 în câte 5 minute. Câte minut
pentru a rezolva una dintre ultimele 5 probleme, presupunând că fiecar
solicită acelaşi timp? (timpul total de lucru este 1h 30 min.)

2. Calculează $(100-99)+(98-97)+(96-95)+\cdots+(2-1)$.

3. Calculează $(5+55+555+5555+55555):(1+1+111+1111+1$

4. Cei 41 de elevi ai unei clase urcă în şir pe munte. Mircea observă
lui sunt un sfert dintre colegii săi. Al câtălea în şir este Mircea?

5. Delia calculează suma cifrelor pe care le afişează ceasul ei digital (d
la ora 14:28 ea obţine $1+4+2+8=15$). Care este suma maximă pe ca
obţine?

6. Care sunt ultimele trei cifre ale numărului $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot\ldots\cdot2004$ -

7. Aflaţi suma dintre deîmpărţit, împărţitor, cât şi rest, ştiind că res
18 mai mic decât câtul, câtul este 25, deîmpărţitul este impar, iar împărţi
singură cifră.

8. Un număr se împarte la 3 şi dă restul 2. Câtul se împarte din
obţinând restul 2. Noul cât se împarte iar la 3 şi găsim câtul 2 şi restul
fost numărul iniţial?

9. La un magazin se aduc 301 kg de mere în lăzi de 25 kg şi 21 kg. C
folosesc în total?

10. 58 de elevi sunt aşezaţi pe 4 rânduri, fiecare rând având cu 3 elevi
decât rândul din faţa sa. Câţi elevi sunt pe ultimul rând?

11. Dan vrea să cumpere mingi. Dacă ar cumpăra 5, i-ar mai rămâne
iar dacă ar dori să cumpere 7, ar mai avea nevoie de 220 000 lei. Cât cost

12. Marinarii de pe un vapor au hrană pentru 60 de zile. Ei găsesc p
30 de naufragiaţi şi astfel hrana le va ajunge tuturor doar 50 de zile. Câ
erau pe vapor?

13. 12 băeţi şi 8 fete sunt membri ai cercului de matematică. În fiecare s
încă 2 fete şi 1 băiat sunt acceptaţi ca membri ai cercului. Câţi membri va
de matematică atunci când numărul băieţilor va fi egal cu numărul fetelo

14. Câte numere naturale de patru cifre au ultima cifră 3?

15. Pe o insulă locuiesc numai arici, şerpi şi vulpi. Fiecare animal
dată pe zi, astfel încât orice arici mănâncă la micul dejun câte un şarpe,
mănâncă la prânz câte un arici, iar orice şarpe mănâncă la cină câte o
sfârşitul zilei de miercuri, pe insulă a rămas un singur animal. Câte anim
pe insulă luni, înainte de micul dejun?

Clasa a V-a

1. Să se calculeze suma $4+8+12+\cdots+2000$.

2. Determinaţi numerele naturale x astfel încât mulţimile $A=\{2x;6x+$
şi $B=\{2x-1;2x+1;5x+6\}$ să aibă un singur element comun.

3. Care sunt numerele prime a, b, c pentru care $a+10\cdot b+12\cdot c=8$

4. Aflaţi suma cifrelor numărului $A=10^{2004}-1$.

5. Să se determine perechile de numere naturale (x,y) pentru c
$\frac{15}{(x+1)(y-4)}$ este echiunitară.

6. Să se determine $x\in\mathbb{N}$ astfel încât numărul $a=5^x+5^{x+1}+5^{x+2}$
aibă exact 48 divizori.

7. Să se calculeze suma $S=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\cdots+\frac{1}{360}$.

8. Aflaţi numerele $a\in\mathbb{N}$ pentru care $\frac{3a+16}{2a-5}\in\mathbb{N}$.

9. Care este suma ultimelor trei cifre ale produsului $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot25$?

10. Să se afle cel mai mic număr natural de 2 cifre pentru care suma dint
şi cubul lui este pătrat perfect.

11. Aşezaţi în ordine crescătoare numerele $a=2^{50}$, $b=2^{47}+2^{24}$, $c=$
$+2^{23}+2^{22}$, $d=2^{48}+2^{23}$.

12. În peşteră erau dragoni roşii şi dragoni verzi. Fiecare dragon r
capete, 8 picioare şi 2 cozi. Fiecare dragon verde avea 8 capete, 6 picioar
În total dragonii aveau 44 cozi. Sunt, de asemenea, cu 6 picioare verzi
decât capete roşii. Câţi dragoni roşii sunt în peşteră?

13. Dan spală o maşină în 40 de minute, iar Ionuţ spală o maşină în 2
timp vor spăla împreună 3 maşini?

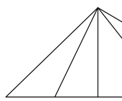
14. Dintre cei 101 de dalmaţieni, 56 au o pată neagră pe urechea stâ
pată neagră pe urechea dreaptă, iar 29 au ambele urechi albe. Câţi dal
pete negre pe ambele urechi?

15. Fie $a=2^{214}+3^{143}$ şi $b=31^{43}$. Care dintre numere este mai mare?

Clasa a VI-a

1. Dacă $\frac{7a-2b}{5a+4b}=\frac{2}{15}$, atunci $\frac{b}{a}$ este ....

2. Numărul triunghiurilor din figură este ....



3. Diferenţa dintre măsurile suplementului şi complementului aceluiaşi unghi este ....

4. Rezultatul calculului $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots+\frac{1}{2003\cdot2005}$ este ....

5. Două unghiuri complementare au raportul măsurilor lor egal cu $\frac{0,2}{0,4}$
măsura unghiului mai mare este ....

6. Rezultatul calculului $\left(\overline{ab0}-\overline{ba}\right):99$ este ....

7. În câte moduri putem aşeza patru persoane într-un rând?

8. Ultima cifră a numărului $2^{2004}+3^{2004}+\cdots+9^{2004}$ este ....

9. Avem la dispoziţie timbre de 4000 lei şi de 9000 lei. Pentru a
scrisoare sunt necesare timbre în valoare de 35000 lei. Numărul total

este ....

10. Suplementul unui unghi şi complementul său au măsurile invers pro
cu 2 şi 5. Suma măsurilor lor este ....

11. Numărul maxim de unghiuri în jurul unui punct cu măsuri numer
diferite este ....

12. Un produs se scumpeşte cu 10% şi apoi cu 20%. Acelaşi produs se
cu 20% şi apoi cu 10%. În ce caz preţul final este mai mare?

13. Soluţia ecuaţiei $\overline{1,(1x)}+\overline{2,(2x)}+\cdots+\overline{9,(9x)}=50$ este ....

14. Câte cifre de 0 are la sfârşit numărul $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2004$?

15. Pe o tablă de şah 4×4 se trage o linie dreaptă. Cel mai mare
pătrăţelele 1×1 care pot fi tăiate în două părţi este ....

Notă (*pentru clasele VII-XII*). Toate subiectele sunt obligatorii. Timp efec
3 ore. Pentru fiecare subiect se acordă 7 puncte.

Clasa a VII-a

1. *a*) Demonstraţi că dacă m şi n sunt numere naturale, atunci 25^n
divizibil cu 3.

b) Determinaţi cel mai mic număr de forma $|25^n-7^m-3^m|$, unde n
numere naturale nenule.

Marius Ghergu

2. Fie a, b două numere reale având modulele cel puţin 2. Demo
$(a^2+1)(b^2+1)\geq(a+b)(ab+1)+5$. Când are loc egalitatea?

Marius D

3. În triunghiul ABC se consideră înălţimea $[CM]$, $M\in AB$, iar N
tricul punctului M faţă de BC. Paralela prin punctul N la CM interse
în P şi AC în Q.

a) Demonstraţi că $MQ\perp AP$ dacă şi numai dacă $[AB]\equiv[AC]$.

b) Arătaţi cum pot fi obţinute poziţiile punctelor A, B, C atunci când
doar poziţiile punctelor M, N, P.

Petru Răduc

4. Se consideră un triunghi ABC, n puncte distincte $A_1, A_2, \ldots, A_n$
(BC), n puncte distincte $B_1, B_2, \ldots, B_n$ pe latura (AC) şi n puncte di
$C_2, \ldots, C_n$ pe latura (AB). Fie M mulţimea punctelor care se obţin la
a cel puţin două din segmentele (AA_i), (BB_j), (CC_k). Determinaţi numă
şi numărul maxim de elemente pe care le poate avea mulţimea M.

Dan Brâ

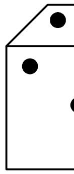
Clasa a VIII-a

1. Determinaţi numerele întregi a, b pentru care, oricare ar fi x real,

$$(2a-a^2)x^4+(2a+2b-4)x^3+(3b-3)x^2+(-2b^2-2b)x+b+2$$

Gheorghe I

2. Un zar este un cub de latură 1, pe feţele căruia sunt imprimate puncte ca în figură, astfel încât suma numerelor de puncte de pe feţele opuse să fie 7. Din opt zaruri alcătuim un cub de latură 2.



a) Ce valori poate avea numărul punctelor care sunt „vizibile" pe feţele cubului de latură 2?

b) Este posibil să aşezăm zarurile astfel încât oricare două feţe care sunt
să aibă un număr egal de puncte?

3. Fie $ABCD$ o piramidă în care $AC = BC = 1$ şi $AB = AD = BD =$
Determinaţi distanţa de la punctul A la planul (BCD).

4. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ de latură a şi puncte $M \in (AB)$, N
$P \in (D'A')$, astfel ca $AM = CN = D'P = x$.

a) Calculaţi MP.

b) Arătaţi că triunghiul MNP are centrul de greutate pe segmentul [

Da

Clasa a IX-a

1. Fie n un număr natural şi numerele reale a, b, c astfel încât a^n
$b^n = b + c$ şi $c^n = c + a$. Să se arate că $a = b = c$.

Gheorghe I

2. Pe laturile $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ ale unui patrulater convex
consideră punctele M, N, P, respectiv Q astfel încât $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{NB}{NC} = \dfrac{PD}{PC} =$
unde $k \neq 1$. Să se arate că $S_{[ABCD]} = 2S_{[MNPQ]}$ dacă şi numai dacă
$= S_{[BCD]}$.

Petre As

3. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A şi D un punct aparţin
$[BC]$. Bisectoarele unghiurilor $\angle ADB$ şi $\angle ADC$ intersectează laturile A
punctele M şi N. Să se arate că unghiul dintre dreptele BC şi MN a
$\dfrac{1}{2}\left|m(\widehat{B}) - m(\widehat{C})\right|$ dacă şi numai dacă D este piciorul perpendicularei din

Bogdan Enesc

4. Să se determine numerele reale x, $x > 1$ pentru care $\sqrt[n]{[x^n]}$este într
ar fi $n \geq 2$. (Se notează cu $[a]$ partea întreagă a numărului real a).

Mihai Piticari, C-lung Moldovenesc, Dan Popescu

Clasa a X-a

1. Fie $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Să se determine numărul funcţiilor f :
proprietatea că nu există numere distincte $a, b, c \in A$ astfel încât $f(a) = f$

Adrian Zan

2. Se consideră tetraedrul $ABCD$ în care medianele din A în triunghi
ABD şi ACD sunt perpendiculare două câte două. Să se arate că muc
sunt egale.

Dinu Şerbănescu,

3. Se consideră numerele reale x, y, z cu proprietatea că $\cos x + \cos y +$

$\cos 3x + \cos 3y + \cos 3z = 0$. Să se demonstreze inegalitatea $\cos 2x \cdot \cos 2y \cdot$

Bogdan Enesc

4. Fie $a \geq 2$ un număr natural. Considerăm mulţimea $A = \{\sqrt{a}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[4]{}$

a) Să se arate că A nu conţine o progresie geometrică infinită neconst

b) Să se arate că pentru orice $n \geq 3$, există n elemente din A care sunt î geometrică.

Bogdan Enesc

Clasa a XI-a

1. a) Fie (x_n) un şir de numere reale, cu proprietatea $|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{}{2}$ Arătaţi că şirul (x_n) este convergent.

b) Să se construiască un şir de numere reale (y_n), care să aibă simult etăţile:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} (y_{n+1} - y_n) = 0$; (ii) (y_n) este mărginit; (iii) (y_n) este di

Eugen I

2. Se dă paralelogramul $ABCD$, cu laturi inegale. Vârful B se p pe AC în punctul E. Perpendiculara în E pe BD intersectează drep AB în punctele F, respectiv G. Să se arate că $EF = EG$ dacă şi n $m(\widehat{ABC}) = 90°$.

Mircea Becheanu, I

3. Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ astfel încât $AB = BA$ şi $\det B = 1$. S că dacă $\det(A^3 + B^3) = 1$, atunci $A^2 = O$.

Mircea Becheanu, I

4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea lui Darboux. Să se arate este crescătoare pe $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci f este continuă.

Mihai Piticari, C-lung Mo

Clasa a XII-a

1. Fie p un număr prim, $p > 3$. Să se arate că ecuaţia $(x + y)^{-1} = x^{-}$ soluţii în corpul $\mathbb{Z}_p$ dacă şi numai dacă 3 divide $p - 1$.

Mihai Piticari, C-lung Mo

2. Să se calculeze limita

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{1\leq i<j\leq n} \frac{\ln\left(1 + \frac{i}{n}\right)\ln\left(1 + \frac{j}{n}\right)}{\sqrt{n^4 + i^2 + j^2}}.$$

Gabriel Mîrşanu şi Andrei Ned

3. Fie $n \geq 3$ un număr impar şi A un inel comutativ cu $3n$ elemente. S că numărul elementelor nilpotente ale lui A este cel mult n. (Elementu numeşte nilpotent dacă $a^n = 0$, pentru $n > 0$ convenabil).

4. Să se arate că, pentru orice număr natural p,

$$\lim_{n\to\infty} n^{p+1} \int_0^1 e^{-nx} \ln(1 + x^p)\, dx = p!.$$

Gheorghe I

Concursul de matematică “Florica T. Câmp

Etapa interjudeţeană, 8 mai 2004

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: cl. a IV-a – 90
cl. V-VIII – 2 ore.

Clasa a IV-a

1. Precizează regula de formare a numerelor următoare şi identifică
lipsesc în ultimul număr: 2798, 5783, 3574, 7862, $\overline{54**}$.

2. Într-o urnă sunt bile albe, galbene şi roşii. Dacă împărţim numărul
la numărul bilelor galbene obţinem câtul 2 şi restul 2. Împărţind numărul
la suma celorlalte obţinem câtul 3 şi restul 3. Aflaţi câte bile sunt în urn
diferenţa dintre numărul bilelor roşii şi dublul sumei celorlalte este 17.

3. În timpul unui campionat de şah, doi participanţi care jucaseră ace
de partide s-au îmbolnăvit şi s-au retras, iar ceilalţi au continuat turne
sfârşit. Este adevărat că cei doi participanţi au ajuns să joace între ei, dac
în total s-au jucat 23 de partide? (Turneul s-a jucat în sistemul "fiecare
câte o singură partidă.) Justificaţi răspunsul.

Clasa a V-a

1. Aflaţi vârstele tatălui, fiului şi nepotului, ştiind că sunt exprimate p
mere prime, iar peste cinci ani vârstele lor vor fi exprimate prin trei nume
pătrate perfecte.

2. Determinaţi toate numerele de forma $\overline{abbc}$, cifrele a, b, c fiind disti
că sunt îndeplinite condiţiile:
a) $\overline{ba}$ se divide cu 13; b) $\overline{ab}$ este număr prim; c) c este pătratul unui num
Câte soluţii are problema?

3. Pe trei jetoane aşezate cu faţa în jos sunt scrise trei numere natu
şi distincte a căror sumă este 13. Jetoanele sunt aşezate în ordine cres
la stânga la dreapta. Ana ridică, prima, jetonul din stânga, apoi Dan
dreapta, iar ultimul, Ştefan, pe cel din mijloc, declarând fiecare, în acea
că nu are suficiente informaţii pentru a descoperi celelalte numere. Dar
poţi spune ce număr a văzut Ştefan?

Mihaela Ci

Clasa a VI-a

1. Se consideră mulţimea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2004\}$. Determinaţi:

a) probabilitatea ca, alegând la întâmplare un element din A, acesta să
cu 167.

b) probabilitatea ca, alegând la întâmplare o submulţime $B \neq \emptyset$ a lui A
tuturor elementelor mulţimii B să fie egal cu produsul tuturor elementel
$A \setminus B$.

Ioan Lung

2. Se consideră triunghiul ABC cu $[AB] \equiv [AC]$, $m(\widehat{BAC}) \geq 90$. Fie
astfel încât $m(\widehat{ADC}) = 60°$ şi fie punctul E astfel încât $D \in (AE)$ şi $[A$
Să se determine $m(\widehat{EBD})$.

Mihai Gavrilu

3. Un pilot de avion parcurge o anumită distanţă cu avionul şi efectue
torul calcul: adună numerele naturale nenule ce reprezintă distanţa (în km
(în km/h) şi cu timpul (în h) şi obţine 6008. Determinaţi cât timp a dura

Cristian L

Clasa a VII-a

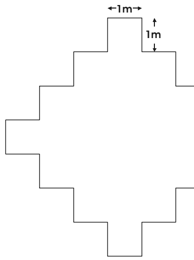
1. Să se arate că oricum am alege 51 de numere naturale distincte de
printre ele există două numere naturale distincte a şi b astfel încât $a \mid b$.

2. Un casier de bancă distrat, plătindu-i un cec lui Lucian Georges,
euro cu cenţii (1 Euro = 100 cenţi), dându-i acestuia euro în loc de cenţi
loc de euro. După ce şi-a cumpărat o acadea de 5 cenţi, Lucian Georges a
că i-a mai rămas exact o sumă reprezentând dublul sumei iniţiale de pe
este suma scrisă pe cec?

Cătălin Bud

3. 26 de pisici sunt închise într-un labirint care are forma din figura alăturată (fiecare latură are lungimea de 1 m). Dacă două pisici se află la distanţă mai mică de $1,5$ m se vor zgâria! Arătaţi că oricum am aşeza cele 26 de pisici în labirint, măcar două se vor zgâria.

Monica Nedelcu, Iaşi



Clasa a VIII-a

1. Fie tetraedrul $ABCD$. Vârfului A îi asociem numărul natural n, ia
B, C, D le asociem numărul 0. Numim "mutare" alegerea a două vârfuri
mărirea numerelor asociate lor cu câte o unitate. Să se arate că după un
de "mutări" putem face ca fiecărui vârf să-i fie asociat acelaşi număr, dac
dacă n este număr par.

Gheorghe I

2. Pentru $a \in \mathbb{R}$ considerăm funcţia $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = ax + 2 - a$,
fie M_a simetricul originii faţă de graficul funcţiei f_a.

$a)$ Arătaţi că graficele funcţiilor f_a trec printr-un punct fix, oricare ar

$b)$ Să se arate că, oricare ar fi a şi $b \in \mathbb{R}$, lungimea segmentului M_aM
mică sau egală cu $2\sqrt{5}$.

Gabriel

3. Un corp gol în formă de tetraedru regulat este aşezat cu o faţă pe
suferă două răsturnări instantanee, consecutive, pe alte două feţe ale sale.
lastică, aflată iniţial în vârful ce nu atinge pământul, se mişcă sub acţiun
pământului înaintea primei răsturnări şi până după ultima răsturnare, im
fiecare răsturnare plecând spre altă faţă din punctul în care a ajuns.

$a)$ Arătaţi că bila cade de fiecare dată (nu se rostogoleşte pe feţe).

$b)$ Calculaţi lungimea parcursului bilei, dacă latura tetraedrului are lu
$\dfrac{9\sqrt{6}}{32}$ m.

Claudiu-Ştefan

Concursul "Traian Lalescu"

Ediţia a V-a, Iaşi, 2004

Notă. Fiecare subiect va fi notat cu cinci puncte. Timp de lucru: 2 ore.

1. Calculaţi: $[62 + 8 \cdot (24 - 24 : 4 \cdot 3)] : 5$.

2. Aflaţi valoarea lui x din egalitatea: $1500 - [(409 - 307) \cdot 4 + 315 : 1$
$= 1322$.

3. Determinaţi cel mai mic număr natural n astfel încât: $n{+}3{\cdot}n{+}5{\cdot}n{+}$
> 2004.

4. Câte numere de trei cifre au suma cifrelor mai mare sau egală cu 2

5. Pe tablă s-a scris de douăzeci şi trei de ori numărul 13 şi de t
ori numărul 23. Câte numere trebuie şterse de pe tablă pentru ca suma
rămase să fie 464?

6. Găsiţi cel mai mic număr natural care are suma cifrelor 102.

7. Mulţimea numerelor naturale diferite de zero se împarte în grupe
$(2,3)$, $(4,5,6)$, $(7,8,9,10)$, $\ldots$. Cu ce număr începe grupa cu numărul 5

8. Suma anilor de naştere ai Ralucăi şi Elenei este 3961. Ştiind că la
mai 1998 Raluca era de şase ori mai mare decât Elena, câţi ani are astăzi

9. De-a lungul unui gard sunt opt tufe de zmeură. Numărul fructelor
tufe vecine diferă cu 1. Numărul fructelor de pe toate tufele poate fi:
a) 101; *b*) 213; *c*) 225; *d*) 229; *e*) alt număr.

10. Într-o clasă, elevii politicoşi sunt de două ori mai mulţi decât cei n
Numărul fetelor politicoase şi al băieţilor nepoliticoşi este de două ori mai
cel al băieţilor politicoşi şi al fetelor nepoliticoase, iar numărul fetelor polit
egal cu numărul tuturor băieţilor. Câţi băieţi sunt în clasă, dacă aceasta a
şi 30 de elevi?

11. Împăratul Roşu lasă moştenire celor patru fii herghelia de cai astf
mare ia o treime din herghelie, al doilea ia trei optimi din rest, al treilea t
din noul rest, iar mezinul a primit cei 10 cai rămaşi. Câţi cai are hergheli

12. Pe distanţa de 124 de metri s-au instalat 18 conducte de apă. Ş
depozit se găseau 15 conducte de 6 m şi 10 conducte de 8 m, determinaţi
măsoară împreună conductele care au mai rămas în depozit.

Recreaţii ... matematice

Soluţiile problemelor enunţate la p. 108.

1. Numerele căutate sunt 11 şi $1,1$, căci $11 + 1,1 = 11 \cdot 1,1$.

2. Ursul se află la Polul Nord. El are culoarea albă.

Concursul “Adolf Haimovici”, ediţia a VII

pentru liceele economice, industriale şi agricole

Faza interjudeţeană, Iaşi, 8 - 9 mai, 2004

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 2 ore.

Clasa a IX-a

1. *a*) Se dă graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + ax + a$, din fig
este a?

b) În figura 2 sunt reprezentate graficele a trei trinoame de gradul al d
să fie acestea următoarele trinoame: $ax^2 + bx + c$, $cx^2 + ax + b$, $bx^2 + cx +$
întrebare pentru figura 3.

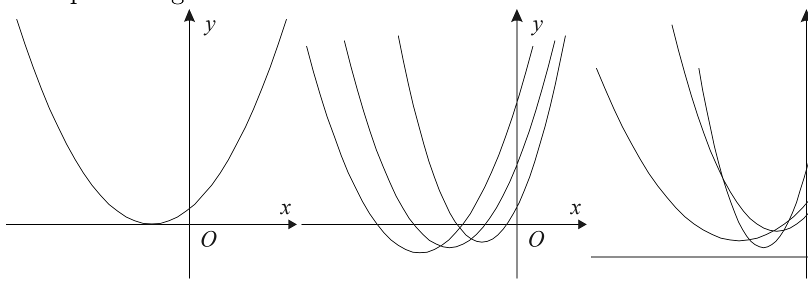


Figura 1. Figura 2. Figura 3.

c) Se consideră trinoamele de gradul al doilea de forma $x^2 + px + q$,
$p + q = 30$. Care dintre ele au rădăcini întregi?

2. Se dă triunghiul ABC în care $AB = 3$, $AC = 4$ şi $BC = 5$.

a) Să se calculeze aria triunghiului ABC.

b) Să se afle raza cercului înscris şi raza cercului circumscris triunghiu

c) Să se calculeze $\sin B$, $\cos B$, $\sin 2B$, $\cos 2B$.

d) Să se arate că $\cos nB \in \mathbb{Q}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

e) Argumentaţi că $\cos nB \neq 0$ şi că există o infinitate de numere nat
proprietatea că $\cos nB > 0$.

3. *a*) Să se arate că $(n+1)^2 - (n+2)^2 - (n+3)^2 + (n+4)^2 = 4$, $\forall n$

b) Să se arate că pentru orice $k \in \mathbb{Z}$, există $n \in \mathbb{N}$ şi o alegere con
semnelor + şi − astfel încât $k = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm ... \pm n^2$.

Clasa a X-a

1. Fie z_1, z_2, z_3 numere complexe astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3|$
$|z_1 + z_2 + z_3| = 2004$. Atunci $(z_1 + z_2)(z_1 + z_3)(z_2 + z_3) = 0$.

2. Codul Morse, care a fost mult utilizat în comunicaţii telegrafice,
punctele şi liniile pentru a codifica anumite caractere. De exemplu E
printr-un punct, T printr-o linie, zero prin 5 linii etc. Câte caractere se p
prin cel mult 5 semnale Morse (puncte sau linii)?

3. Se consideră polinoamele $f = 8X^3 - 6X - 1$, $g = 4X^3 - 3X$.

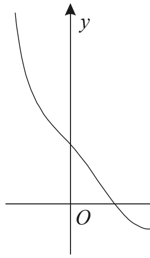
a) Să se arate că f nu are rădăcini raţionale.

b) Să se afle câtul şi restul împărţirii lui f la g.

$c)$ Arătaţi că $f\left(\cos\dfrac{\pi}{9}\right) = 0.$

$d)$ Este $\cos\dfrac{\pi}{9}$ iraţional? Argumentaţi.

$e)$ Dacă $h \in \mathbb{Q}[X]$ şi $h\left(\cos\dfrac{\pi}{9}\right) = 0$, să se arate că $h \,\vdots\, f$.



Clasa a XI-a

1. Se dă graficul funcţiei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = ax^4 - x^2 + bx + c.$$

Să se afle semnele numerelor a, b şi c.

2. Fie dreptele d_1 şi d_2 perpendiculare în A. Un punct F aşezat în inter
din unghiurile formate de cele două drepte, este situat la distanţele 1 şi
faţă de acestea. Să se determine lungimea minimă a unui segment $[BC$
$C \in d_2)$ care trece prin punctul F.

3. Fie mulţimile $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{N} \right\}$ şi
$\mathcal{K} = \{ n \in \mathbb{N} \mid n = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc;\ a, b, c \in \mathbb{N} \}$.

$a)$ Să se arate că dacă $A, B \in \mathcal{M}$, atunci $AB \in \mathcal{M}$.

$b)$ Pentru orice $m, n \in \mathcal{K}$, avem $mn \in \mathcal{K}$.

$c)$ Există o matrice $E \in \mathcal{M}$ cu proprietatea că $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} = aI_3 +$
$\forall a, b, c \in \mathbb{N}$?

$d)$ Fie $A \in \mathcal{M}$, nesingulară, cu $d = \det A$. Să se arate că

$$\det \underbrace{\left(\left(\ldots\left(\left(A^*\right)^*\right)^*\ldots\right)^*\right)}_{2004} = d^{2^{2004}} \quad \text{şi} \quad \underbrace{\left(\ldots\left(\left(A^*\right)^*\right)^*\ldots\right)^*}_{2004} = d^{\frac{2^{2004}}{3}}$$

Clasa a XII-a

1. Pe mulţimea $G = \{a, b, c, d, e\}$ operaţia $*$ defineşte o structură de grup. Completaţi tabla grupului G.

$*$	a	b	c
a		d	
b			
c	e		
d			b
e			

2. Fie polinoamele $f = 8X^3 - 6X - 1$ şi $g = 4X^3 - 3X$.

$a)$ Să se arate că f nu are rădăcini raţionale.

$b)$ Să se calculeze câtul şi restul împărţirii lui f la g.

$c)$ Arătaţi că $f\left(\cos\dfrac{\pi}{9}\right) = 0.$

$d)$ Este iraţional numărul $\cos\dfrac{\pi}{9}$?

$e)$ Dacă $h \in \mathbb{Q}[X]$ şi $h\left(\cos\dfrac{\pi}{9}\right) = 0$, să se arate că $h \,\vdots\, f$.

3. $a)$ Calculaţi aria subgraficului funcţiei $f : [1, e] \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln x$.

$b)$ Dacă a, b, c sunt numere reale oarecare din intervalul $[1, e]$ astfel încât
atunci $(b - a)\ln a + (c - a)\ln b + (c - b)\ln c < 2$.

Olimpiada Balcanică de Matematică (juniori)
Ediţia a VIII-a, Novi Sad (Serbia şi Muntenegru

A. Problemele de concurs - enunţuri şi soluţii

1. Pentru $x, y \in \mathbb{R}$, nu simultan nule, să se demonstreze inegalitatea

$$\frac{x+y}{x^2-xy+y^2} \leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

2. Fie $\triangle ABC$ isoscel $(AC = BC)$, M mijlocul segmentului $[AC]$ înălţimea din C. Cercul ce trece prin B, C şi M intersectează a doua oa CH în Q. Să se afle raza cercului circumscris $\triangle ABC$ funcţie de $m = CQ$

3. Fie $x, y \in \mathbb{N}$ astfel încât $3x + 4y$ şi $4x + 3y$ să fie ambele pătrate p se arate că numerele x şi y sunt multipli de 7.

4. Se consideră un poligon convex cu $n \geq 4$ vârfuri. Descompune poligonul în triunghiuri ale căror vârfuri sunt printre cele ale poligonului, oricare două triunghiuri să nu aibă puncte interioare comune. Colorăm triunghiurile ce au două laturi care sunt şi laturi ale poligonului, cu roşu tr ce au exact o latură care este şi latură a poligonului, celelalte triunghiuri albe. Să se demonstreze că numărul triunghiurilor negre este cu 2 mai numărul triunghiurilor albe.

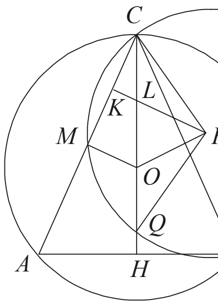
1. Observăm că cei doi numitori sunt întotdeauna pozitivi. Dacă x inegalitatea este evidentă (şi strictă). Dacă $x + y > 0$, se demonstrează in

$$x + y \leq \sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}, \quad x^2 - xy + y^2 \geq \frac{x^2+y^2}{2},$$

prin urmare

$$\frac{x+y}{x^2-xy+y^2} \leq \frac{\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}}{\frac{x^2+y^2}{2}} \Leftrightarrow \frac{x+y}{x^2-xy+y^2} \leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Egalitate se atinge pentru $x = y > 0$.



2. Fie P şi O centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor BCM, respectiv ABC, K mijlocul lui $[CM]$, iar $\{L\} = CH \cap PK$. Evident că $O \in CH$ şi cum OM şi PK sunt perpendiculare pe AC, rezultă că $OM \parallel PK$. Urmează că LK este linie mijlocie în $\triangle CMO$, deci $CL = LO$.

Deoarece $OP \perp BC$, avem că $m(\widehat{LOP}) = 90^\circ - m(\widehat{OCB})$. Apoi, $m(\widehat{OLP}) = m(\widehat{CLK}) = 90^\circ - m(\widehat{OCA})$. Însă $\widehat{OCB} \equiv \widehat{OCA}$, deoarece înălţimea CH este bisectoare în $\triangle ABC$ isoscel, deci $\widehat{POL} \equiv \widehat{PLO}$ şi $PL = PO$. Ob $\triangle PCQ$ este isoscel cu $PC = PQ$, prin urmare va rezulta că $CL = OQ$.

În concluzie, $CL = LO = OQ$, deci $R = OC = \dfrac{2}{3}CQ = \dfrac{2}{3}m$.

3. Fie $m^2 = 3x + 4y$, $n^2 = 4x + 3y$; atunci $m^2 + n^2 = 7(x + y)$, deci
Un pătrat perfect dă la împărţirea prin 7 unul din resturile 0, 1, 2, 4 şi atu
ca o sumă de pătrate perfecte să se dividă cu 7, trebuie ca fiecare în parte s
cu 7. Însă, dacă $m^2 \vdots 7$, atunci $m^2 \vdots 7^2$ şi analog $n^2 \vdots 7^2$, adică $7(x + y) = m$
deci $x + y \vdots 7$. Urmează că $x = (4x + 3y) - 3(x + y) \vdots 7$, $y = (3x + 4y) - 3$

4. Notăm cu x, y, z numărul triunghiurilor colorate în negru, roşu, res
atunci $x + y + z = n - 2$, acesta fiind numărul triunghiurilor din desc
poligonului. Deoarece fiecare latură a poligonului este latură a exact un
din descompunere, avem că $2x + y = n$. Combinând cele două relaţii,
$x - z = 2$, ceea ce trebuia să demonstrăm.

B. Probleme aflate în atenţia juriului - enunţuri

1. Fie $a, b, p, q \in \mathbb{N}^*$ cu $p, q \geq 3$, iar a, b relativ prime şi de parităţi
se arate că numărul $N = 2a^p b - 2ab^q$ nu poate fi pătrat perfect.

2. Găsiţi toate numerele naturale A care se scriu cu patru cifre în b
proprietatea că $\frac{1}{3}A + 2000 = \frac{2}{3}\overline{A}$. (Cu $\overline{A}$ am notat răsturnatul lui A).

3. Găsiţi toate numerele naturale $n \geq 3$ cu proprietatea că n divide

4. Pentru $a, b, c \in [1, +\infty)$, demonstraţi inegalitatea

$$(1 + abc)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 3 + a + b + c.$$

5. Pentru $x, y, z \in \mathbb{R}$, demonstraţi inegalitatea

$$\frac{x^2 - y^2}{2x^2 + 1} + \frac{y^2 - z^2}{2y^2 + 1} + \frac{z^2 - x^2}{2z^2 + 1} \leq (x + y + z)^2.$$

6. Dacă $0 < \frac{a}{b} < b < 2a$, să se arate că

$$\frac{2ab - a^2}{7ab - 3b^2 - 2a^2} + \frac{2ab - b^2}{7ab - 3a^2 - 2b^2} \geq 1 + \frac{1}{4}\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^2.$$

7. Două cercuri $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ sunt secante în A şi B. Un cerc $\mathcal{C}$ cu centru
$\mathcal{C}_1$ în M şi P, iar pe $\mathcal{C}_2$ în N şi Q, astfel încât N şi Q sunt situate de o
alta a dreptei MP, iar $AB > AM$. Să se demonstreze că $\widehat{MBQ} \equiv \widehat{NBP}$.

8. Fie E, F două puncte distincte în interiorul paralelogramului ABC
minaţi numărul maxim posibil de triunghiuri având aceeaşi arie, cu vârfu
dintre punctele A, B, C, D, E, F.

9. Fie $\triangle ABC$ înscris în cercul $\mathcal{C}$. Cercurile $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ sunt tange
cercului $\mathcal{C}$ în punctele A_1, B_1, respectiv C_1 şi tangente laturilor $[BC]$, $[C$
punctele A_2, B_2, respectiv C_2, astfel încât A, A_1 sunt de o parte şi de alt
etc. Dreptele A_1A_2, B_1B_2 şi C_1C_2 intersectează a doua oară cercul $\mathcal{C}$ în p
B', respectiv C'. Dacă $\{M\} = BB' \cap CC'$, demonstraţi că $m(\widehat{MAA'}) =$

10. Fie $\triangle ABC$ cu $m(\widehat{C}) = 90°$ şi punctele $D \in [AC]$, $E \in [BC]$. Spre
triunghiului construim semicercurile $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_4$ de diametre $[AC]$, $[$

respectiv $[CE]$ şi fie $\{C, K\} = \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$, $\{C, M\} = \mathcal{C}_3 \cap \mathcal{C}_4$, $\{C, L\} = \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3$
$\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_4$. Arătaţi că punctele K, L, M, N sunt conciclice.

11. Pe o tablă dreptunghiulară cu m linii şi n coloane, în fiecare căs
scris semnul "$-$". Putem efectua următoarele operaţii:

(i) schimbarea tuturor semnelor de pe o linie (din "$+$" în "$-$", iar din "

(ii) schimbarea tuturor semnelor de pe o coloană.

$a)$ Dacă $m = n = 100$, arătaţi că nu putem obţine 2004 semne "$+$" u
un număr finit de ori operaţiile descrise;

$b)$ Dacă $m = 100$, găsiţi cea mai mică valoare a lui $n > 100$ pentru c
obţine 2004 semne "$+$".

(continuarea tabelului din p. 113)

148. PRECUPANU Codrin	Colegiul "C. Negruzzi", Iaşi
149. DUREA Magdalena	Şcoala "T. Maiorescu", Iaşi
150. BURGHELEA Diana	Şcoala "T. Maiorescu", Iaşi
151. FARCAŞ Marius	Şcoala "T. Maiorescu", Iaşi
152. BAGHIU Ciprian	Liceul "D. Cantemir", Iaşi
153. ION Elena	Liceul "G. Ibrăileanu", Iaşi
154. BUCESCU Dominic	Şcoala "I. Creangă", Iaşi
155. PAŞA Narcisa	Liceul de artă, Iaşi
156. SUFIŢCHI Viorica	Şcoala gen. nr. 26, Iaşi
157. POPA Gabriela	Şcoala gen. nr. 43, Iaşi
158. RUSU Virginia	Liceul "M. Costin", Iaşi
159. DĂSCĂLESCU Diana	Liceul "M. Eminescu", Iaşi
160. GHERGHELAŞ Liliana	Gr. şc. "Victoria", Iaşi
161. FERENŢ Olimpia	Gr. şc. "Victoria", Iaşi
162. LEONTIEŞ Rodica	Liceul "Al. I. Cuza", Iaşi
163. PANAINTE Ecaterina Bronia	Şcoala "Gh. I. Brătianu", Iaşi
164. POPA Dumitru	Şcoala "Şt. Bârsănescu", Iaşi
165. CĂRBUNE Ioan	Liceul "I. Neculce", Tg. Frumo
166. BREŞUG Constantin	Liceul "I. Neculce", Tg. Frumo
167. CĂILEANU Sorin	Liceul "I. Neculce", Tg. Frumo
168. DOCA Laurenţia	Liceul "I. Neculce", Tg. Frumo
169. BRÂNZILĂ Cristina	Liceul "D. Cantemir", Iaşi
170. PLĂEŞU Dan	Şcoala normală "V. Lupu", Iaş
171. CONŢU Valentin	Şcoala "I. Cantacuzino", Paşca
172. OLENIUC Mariana	Gr. şc. "D. Mangeron", Iaşi
173. ROMILĂ Amalia - Patricia	Şcoala normală "V. Lupu", Iaş
174. GRĂDINARU Daniela	Gr. şc. "A. Saligny", Iaşi
175. ARBONE Ion	informatician
176. NECHITA Remus	Liceul "M. Costin", Iaşi
177. BUJOR Lorena	Şcoala "I. Teodoreanu", Iaşi

(continuare la p

Cercul de matematică “Leonard Euler” organizat la Universitatea Humboldt, Ber

Probleme pentru clasa a VIII-a

Holger STEPHAN[1]

Notă. Rubrica "Corespondenţe" are ca scop informarea elevilor şi prof ţara noastră cu privire la activitatea de performanţă din alte colţuri ale lun orice "corespondenţă", soluţiile problemelor vor fi publicate în numărul următo Materialul de faţă a fost obţinut prin strădania d-lui **Dan Tiba**, cercetător Institutul de Matematică al Academiei Române.

1. Patru numere adunate două câte două dau sumele 4, 7, 9, 14, 16 sunt cele patru numere?

2. Demonstraţi că prin "rotirea către dreapta" a unui număr de 8 cif cu 73, se obţine tot un număr divizibil cu 73. (Se spune că un număr n "rotit către dreapta", dacă ultima cifră este mutată în faţa primei cifre $1234 \rightarrow 4123$.)

3. Aflaţi cifrele necunoscute x, y, z din egalitatea

$$20\,058\,473 \cdot 11! = \overline{x00yz0055046400}.$$

4. Un număr x format din cinci cifre diferite şi nenule este divizibil cu că suma tuturor numerelor de cinci cifre distincte ce se pot forma cu acest (inclusiv x) este divizibilă cu 2399976.

5. Găsiţi toate perechile de numere întregi x şi y care sunt soluţii a diofantice $2x^2 + 7xy + 3y^2 = 228$.

6. Găsiţi toate perechile de numere întregi x şi y care sunt soluţii a diofantice $2x^2 + 3y^2 = 77$.

7. Considerăm numărul natural n, $1000 \leq n < 5000$. Formăm numă sau 13 cifre) obţinut scriind în ordine cifrele lui $3n$, $2n$ şi respectiv n. acest număr este divizibil cu $2^8 + 1$.

8. Şase numere prime $7 < p_1 < p_2 < p_3 < p_4 < p_5 < p_6$ formează de numere prime", dacă p_2, p_3 şi p_4, p_5 sunt numere prime gemene (adică $= p_5 - p_4 = 2$), iar $p_2 - p_1 = p_4 - p_3 = p_6 - p_5 = 4$. Demonstraţi că su divizibilă cu 630.

9. Este posibil ca suma a şapte pătrate perfecte succesive să fie un pătr

[1] Cercetător dr., Institutul Weierstrass, Berlin (e-mail: `stephan@wias-berlin.de`)

PROBLEME ŞI SOLUŢII

Soluţiile problemelor propuse în nr. 2 / 20

Clasele primare

P.54. *Calculaţi* a *şi* b *dacă* $46 - a = 36 + a$ *şi* $b - 3 = 17 - b$.

(*Clasa I*) **Înv. Doiniţa Sp**

Soluţie. $46 - a = 36 + a$ se scrie $36 + 10 - a = 36 + a$, de unde 10
$a + a = 10$, deci $a = 5$. Analog, $b - 3 = 17 - b$ se scrie $b = 3 + 17 -$
$b + b = 20$, deci $b = 10$.

P.55. *În câte moduri pot fi aranjate în linie dreaptă* 9 *mingi roşii şi un*

(*Clasa I*) **Georgiana Ciobanu, e**

Soluţie. Toate mingile ocupă 10 locuri. Mingea galbenă poate ocupa
din cele 10. Sunt 10 moduri.

P56. *Cu cinci ani în urmă, suma vârstelor a trei copii era de* 11 *ani.*
suma vârstelor aceloraşi copii peste 6 *ani?*

(*Clasa a II-a*) **Înv. Rodica Rotar**

Soluţie. In prezent suma vârstelor copiilor este $11 + 3 \cdot 5 = 26$ ani,
ani aceasta va fi $26 + 3 \cdot 6 = 44$ ani.

P.57. *În câte moduri pot fi împărţiţi* 8 *băieţi în două echipe de câte*
dacă Petru vrea să fie în echipă cu Mihai şi Dan, dar nu vrea să fie cu A

(*Clasa a II-a*) **Adina Dohotaru, e**

Soluţie. În gruparea Petru, Mihai, Dan mai trebuie un singur băia
poate fi luat din restul băieţilor, cu excepţia lui Avram. Al patrulea elev
poate fi ales în patru moduri.

P. 58. *Să se arate că suma* $1 + 4 + 7 + \ldots + 100$ *împărţită la* 3 *dă re*

(*Clasa a III-a*) **Alexandru - Gabriel Tudorache,**

Soluţie. Suma se scrie $1 + (3 \cdot 1 + 1) + (3 \cdot 2 + 1) + \ldots + (3 \cdot 33 +$
împărţirii la 3 este acelaşi cu restul împărţirii sumei $\underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{34 \text{ ori}}$
este 1.

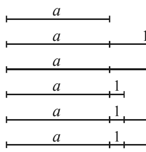
P.59. *Fie* a *şi* b *două numere consecutive. Suma acestor numere în*
numerele obţinute mărind cu 12 *fiecare dintre vecinii lor este* 939. *Car*
două numere?

(*Clasa a III-a*) **Înv. Maria I**

Soluţie. Considerăm $b = a + 1$. Folosim metoda figurativă. Primul număr este

$$[939 - (11 + 13 + 1 + 1 + 11 + 1 + 13)] : 6 = 888 : 6 = 148.$$

Al doilea număr este $148 + 1 = 149$.



P.60. *Din* 16 *bile, una este mai grea decât celelalte* 15, *care au mase e*
este cel mai mic număr de cântăriri prin care se poate stabili bila mai gr

(*Clasa a III-a*) **Carmen Ciolacu, e**

Soluţie. Aşezăm câte 8 bile pe fiecare taler. După prima cântărire se
grupul de 8 bile care conţine bila mai grea. Din acestea aşezăm câte 3
taler. Dacă balanţa este în echilibru, atunci bila mai grea se află în perech

Printr-o nouă cântărire se află bila mai grea. Dacă balanţa nu este în
atunci bila mai grea se află într-o grupare de 3 bile. Aşezând câte o bilă
taler se determină bila mai grea. Numărul minim de cântăriri este 3.

P.61. *Suma a două numere este un număr de două cifre al căror pro*
Diferenţa dintre cele două numere este 7. *Care sunt cele două numere?*
(*Clasa a IV-a*) **Înv. Maria I**

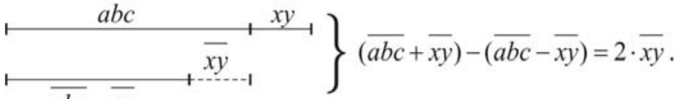
Soluţie. Suma celor două numere poate fi 13 sau 31. Cum diferenţa
este 7, în primul caz numerele sunt 3 şi 10, iar în al doilea numerele sunt

P.62. *Două ceasuri au început să funcţioneze la aceeaşi oră. Se con*
fiecare 30 *minute (faţă de ora exactă) unul rămâne în urmă cu un minut*
avansează cu un minut. La un moment dat orele indicate de aceste ceasu
h 36 *min şi* 19 *h* 24 *min. La ce oră au început să funcţioneze?*
(*Clasa a IV-a*) **Felicia Amihăiesei, e**

Soluţie. Cele două ceasuri se abat cu acelaşi număr de minute faţă de
unul prin lipsă iar celălalt prin adaos. În momentul citirii abaterea este (1
– 18 h 36 min) : 2 = 48 min : 2 = 24 min. Ceasurile au fost citite la ora 1
– 24 min = 19 h. Numărul de ore în care ceasurile au funcţionat este 2
Ceasurile au început să funcţioneze la ora $19 - 12 = 7$.

P.63. *Alege un număr format din trei cifre. Scrie la dreapta lui un num*
din două cifre. Scoate din numărul format de 99 *ori numărul format din*
Din rezultat scoate diferenţa dintre numărul de trei cifre şi numărul de do
scrie rezultatul. Eu îţi ghicesc numărul format din două cifre. Cum se ex
lucru?
(*Clasa a IV-a*) **Prof. Petru As**

Soluţie. Fie $\overline{abc}$ numărul de trei cifre şi $\overline{xy}$ numărul de două cifre. Ave
$= \overline{abc00} + \overline{xy} = 100 \cdot \overline{abc} + \overline{xy}$, $100 \cdot \overline{abc} + \overline{xy} - 99 \cdot \overline{abc} = \overline{abc} + \overline{xy}$. În
folosim metoda figurativă.



În urma efectuării operaţiilor indicate în problemă se obţine dublul num
două cifre.

Clasa a V-a

V.41. *Fie a număr natural compus astfel încât dacă* $p \mid a$, *cu p pr*
$p + 1 \mid a$. *Să se arate că* $12 \mid a$ *şi să se afle cel mai mare număr a de tre*
Ciprian Ba

Soluţie. Fie p un divizor prim al lui a, conform enunţului. Atunci $p +$
$p\,(p+1) \mid a$ şi, cum $p\,(p+1)$ este număr par, deducem că $2 \mid a$. Din 2
$3 \mid a$ şi apoi $4 \mid a$; prin urmare $12 \mid a$.

Cel mai mare număr de trei cifre divizibil cu 12 este $996 = 2^2 \cdot 3 \cdot 83$; cu
deducem că 996 nu este soluţie. La fel 984 nu este soluţie. Numărul 97
verifică cerinţele problemei.

V.42. *Se dau numerele* $\overline{xy}$, $\overline{ab}$ *scrise în baza* 10 *astfel încât* $\overline{xy}$ *divide* *arate că $x = y$ dacă şi numai dacă $a = b$.*

Ioan Săcălean

Soluţie. Fie $x = y$. Atunci din $\overline{xx} = 11x \mid \overline{ab}$ rezultă că $11 \mid \overline{ab}$, deci $\overline{a}$
$33, \ldots, 99\}$, adică $a = b$.

Fie $a = b$. Atunci $\overline{xy} \mid 11a$ şi, cum a este cifră nenulă, deducem că $\overline{xy}$
11. Ca mai sus, avem $x = y$.

V.43. *Să se afle cifrele a şi b ştiind că $a \cdot b = \overline{cd}$ şi $a^b = \overline{dc}$.*

Romanţa Ghiţă şi Ioan G

Soluţie. Evident, $a \in \{2, 3, \ldots, 9\}$. Dacă $a = 2$, atunci $b \geq 5$ şi cum 2
$2^5 = 32$, $2 \cdot 6 = 12$ şi $2^6 = 64$, iar $2^7 > 100$ rezultă că nu avem soluţii. D
urmează $b \geq 4$ şi din $3 \cdot 4 = 12$ şi $3^4 = 81$, iar $3^5 > 100$ deducem că nici în
nu avem soluţii. Considerând şi verificând toate posibilităţile, obţinem so
şi $b = 2$.

V.44. *Să se afle $x, y, z \in \mathbb{Q}_+^*$ pentru care $x^n = yz$, $y^n = xz$, $z^n = xy$,*

N. N. Hâ

Soluţie. Avem $x^{n+1} = y^{n+1} = z^{n+1} = xyz$, deci, în mod necesar,
Condiţiile iniţiale se reduc la $x^n = x^2$, prin urmare, $x = y = z = 1$ dacă
şi $x = y = z \in \mathbb{Q}_+^*$ dacă $n = 2$.

V.45. *Se dau şase urne, unele conţinând bile. Fie operaţia: se aleg*
se pune câte o bilă în fiecare dintre ele.

a) Compoziţia urnelor fiind $0, 0, 4, 6, 6, 8$, să se indice o succesiune de
urma cărora toate urnele să conţină acelaşi număr de bile.

b) Compoziţia urnelor fiind $0, 1, 2, 3, 4, 4$, să se arate că nu există o su
operaţii în urma cărora toate urnele să conţină acelaşi număr de bile.

Gheorghe I

Soluţie. a) O succesiune de operaţii ce atinge scopul este $(0, 0, 4$
$(1, 1, 5, 6, 6, 8) \to (2, 2, 6, 6, 6, 8) \to (3, 3, 7, 6, 6, 8) \to (4, 4, 8, 6, 6, 8) \to (5,$
$\to (6, 6, 8, 8, 6, 8) \to (7, 7, 8, 8, 7, 8) \to (8, 8, 8, 8, 8, 8)$.

b) Presupunem că după n operaţii urnele conţin acelaşi număr m de b
că numărul total de bile din urne este $6m = 3n + 14$, imposibil.

Clasa a VI-a

VI.41. *Pe opt cartonaşe sunt înscrise câte unul din numerele* 1, 2,
3^2, 3^3, 3^4. *Dacă $P(k)$ este probabilitatea ca, extrăgând două cartonaşe*
obţinute să aibă în total k divizori distincţi, să se rezolve inecuaţia $P(k)$

Dumitru Dominic Buc

Soluţie. Considerând cele 28 de posibilitaţi de extragere a cartonaşelo
rând divizorii distincţi ai numerelor extrase, obţinem: $P(1) = 0$; P
$P(3) = \frac{5}{28}$; $P(4) = \frac{8}{28}$; $P(5) = \frac{7}{28}$; $P(6) = \frac{3}{28}$; $P(7) = \frac{2}{28}$; $P(8) = \frac{1}{28}$ şi
$k \geq 9$. Prin urmare, mulţimea soluţiilor inecuaţiei $P(k) \geq \frac{1}{7}$ este $S = \{3,$

VI.42. *Fie $x, y, z \in \mathbb{N}$ pentru care $84x + 91y + 98z = 2002$. Să se a*
maximă a sumei $x + y + z$.

Adrian Zan

Soluţie. Relaţia din enunţ este echivalentă cu $12x + 13y + 14z$ = $12\,(x + y + z) = 286 - (y + 2z)$. De aici, rezultă că $x + y + z$ este m $y + 2z$ este minim şi 12 divide pe $286 - (y + 2z)$. Obţinem $x + y +$ pentru $y + 2z = 10$. Valoarea maximă a expresiei este 23 şi se obţ $(x, y, z) \in \{(18, 0, 5)\,; (17, 2, 4)\,; (16, 4, 3)\,; (15, 6, 2)\,; (14, 8, 1)\,; (13, 10, 0)\}$.

Notă. D-l **Titu Zvonaru**, Comăneşti (Bacău), stabileşte valoarea sumei $x + y + z$. Într-adevăr, dacă $x + y + z \le 19$, atunci $y + 2z \le 57$ $12\,(x + y + z) + y + 2z \le 12 \cdot 19 + 57 = 285$; prin urmare, $x + y + z \ge$ $x + y + z = 20$, atunci $y + 2z = 46$. Pentru $y < 15$, $z < 15$, avem $y + 2z <$ $16 \le y \le 20$, avem că $z \le 4$, deci $y + 2z \le 28$. Pentru $16 \le z \le 20$, avem $y + 2z \le 44$. Rezultă că valoarea minimă a sumei $x + y + z$ este 21, care de exemplu, pentru $x = 2$, $y = 4$, $z = 15$.

VI.43. *Fie* $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{Z}^*$ *pentru care* $\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\exists i, j \in \{$ $i \neq j$, *astfel încât* $a_k = a_i + a_j$. *Să se arate că* $n \ge 6$.

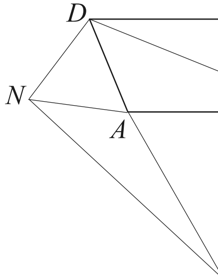
Petru As

Soluţie. Putem presupune că $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Considerând nu există $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$, astfel ca $a_n = a_i + a_j$. Dacă $a_i < 0$, $a_j <$ $a_n < a_i$, imposibil. La fel, $a_i < 0$, $a_j > 0$ implică $a_n < a_j$, imposibil. D sunt pozitive şi atunci mulţimea conţine cel puţin trei numere pozitive. C numărul a_1 deducem că mulţimea conţine cel puţin trei numere negative, p $n \ge 6$.

Un exemplu de mulţime cu 6 elemente este $\{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ iar un elemente este $\{-3, -2, -1, 1, 2, 3, \ldots, n - 3\}$.

VI.44. *Fie* $ABCD$ *un paralelogram şi* MAB, NAD *triunghiuri echila struite în exteriorul acestuia. Demonstraţi că* $[MN] \equiv [BD]$ *dacă şi n* $ND \parallel MB$.

Ciprian Ba

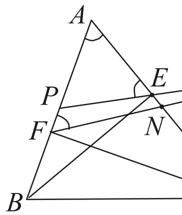


Soluţie. Presupunem $[MN] \equiv [BD]$. Din congruenţa triunghiurilor BAD şi MAN deducem că $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{MAN}) = \dfrac{360^\circ - 120^\circ}{2} = 120^\circ$, deci $m(\widehat{BAN}) = 180^\circ$, adică punctele B, A, N sunt coliniare. Cum $\widehat{MBN} \equiv \widehat{DNB}$, rezultă $MB \parallel ND$.

Presupunem $MB \parallel ND$. Ca urmare, $m(\widehat{ABD}) + m(\widehat{ADB}) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$, deci $m(\widehat{BAD}) = 120^\circ$; totodată $m(\widehat{MAN}) = 120^\circ$ şi atunci triunghiurile MAN şi BAD sunt congruente, de unde rezultă că $[BD] \equiv [M$

VI.45. *Fie* E, F *picioarele înălţimilor din* B *şi* C *ale triunghiu tunghic* ABC. *Dacă* P, N *sunt mijloacele laturilor* $[AB]$, *respectiv* $[AC]$, $= PE \cap FN$, *să se arate că* $m(\widehat{PQF}) = \left|180^\circ - 3 \cdot m(\widehat{A})\right|$. *(În legătură din* ***Parabola****, nr. 3/2000)*

Titu Zvonaru,



Soluţie. Fie Q exterior triunghiului ABC. Din $\triangle AEB$ dreptunghic în E, cu (EP) mediană, deducem că triunghiul AEP este isoscel cu $\widehat{AEP} \equiv \widehat{PAE}$; deci $m(\widehat{QPF}) = 2m(\widehat{A})$. La fel, din triunghiul dreptunghic AFC cu mediana (FN) deducem $\widehat{NFA} \equiv \widehat{FAN}$. Din $\triangle PQF$ rezultă că $m(\widehat{PQF}) = 180° - 3m(\widehat{A})$. Să remarcăm că punctul Q este exterior dacă $m(\widehat{A}) < 60°$. Cazul în care Q este interior triunghiului ABC, ce corespunde situaţiei $m(\widehat{A})$ tratează folosind aceleaşi argumente. Dacă $m(\widehat{A}) = 60°$, dreptele PE ş paralele şi putem considera că $m(\widehat{PQF}) = 0°$.

Clasa a VII-a

VII.41. *Rezolvaţi în* $\mathbb{N}^2$ *ecuaţia* $\dfrac{a}{b+1} + \dfrac{b}{a+1} = 1.$

Alexandru Negrescu, elev,

Notă. Mai multe soluţii ale acestei probleme sunt date în articolul acest număr la p. 109.

VII.42. *Să se arate că* $\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right) \geq (|a|+|b|)(|b|+|c|)$ $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

Dorin Mărghidanu

Soluţie. Notând $|a| = x$, $|b| = y$, $|c| = z$, $x, y, z \in \mathbb{R}_+$, inegalitatea e lentă cu $\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)\left(z^2+1\right) \geq (x+y)(y+z)(z+x)$, $x, y, z \in$ $\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right) = x^2y^2+x^2+y^2+1 \geq x^2+y^2+2xy = (x+y)^2$, deci $\sqrt{(x^2+1}$ $\geq x+y$. La fel, au loc: $\sqrt{(x^2+1)(z^2+1)} \geq x+z$ şi $\sqrt{(y^2+1)(z^2+1}$ Prin înmulţirea ultimelor trei relaţii se obţine inegalitatea dorită.

Egalitate se obţine pentru $xy = 1$, $yz = 1$, $zx = 1$, deci pentru $x = y =$ $|a| = |b| = |c| = 1$.

VII.43. *Pentru* $n \in \mathbb{N}$, *notăm cu* $s(n)$ *numărul de reprezentări d lui* n *ca sumă de două numere naturale* ($n = a+b$ *şi* $n = b+a$ *constit reprezentare*). *Să se arate că:*

a) $s(m+n) = s(m) + s(n) - \dfrac{1}{2}\left[1+(-1)^{mn}\right]$; *b*) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} s(k) = \left[\frac{n}{2}\right] \cdot \Big[$

Petru M

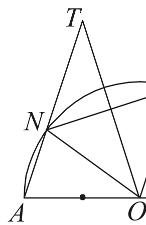
Soluţie. Arătăm că $s(n) = \left[\dfrac{n}{2}\right] + 1$. Într-adevăr, pentru n par, $n =$ $n = 0+n = 1+(n-1) = \ldots = k+k$, deci $s(n) = k+1 = \left[\dfrac{n}{2}\right] +$ n impar, $n = 2k+1$, avem: $n = 0+n = 1+(n-1) = \ldots = k+(k$ $s(n) = k+1 = \left[\dfrac{n}{2}\right] + 1$.

a) Relaţia se demonstrează analizând paritatea numerelor m şi n.

b) Dacă $n = 2k+1$, avem: $s(0)+s(1)+\ldots+s(n) = 1+1+2+$ $+k+k = k(k+1) = \left[\dfrac{n}{2}\right] \cdot \left[\dfrac{n+1}{2}\right]$. Dacă $n = 2k$, avem $s(0)+s(1)+\ldots$ $= 2(1+2+\ldots+(k-1)) + k = k^2 = \left[\dfrac{n}{2}\right] \cdot \left[\dfrac{n+1}{2}\right]$.

VII.44. *Fie $[AB]$ diametru al cercului $\mathcal{C}$ de centru O; $N, M \in \mathcal{C}$*
$m(\widehat{AON}) = 36°$, iar $[OM$ este bisectoare pentru $\widehat{NOB}$. Dacă T este sin
O faţă de MN, să se arate că proiecţia lui T pe AB este mijlocul lui $[A$

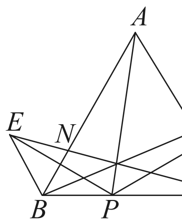
Valentina Ble



Soluţie. În triunghiul TNO isoscel, $m(\widehat{TNO}) = 180° - 2m(\widehat{NOT}) = 180° - \frac{1}{2}m(\widehat{NOB}) = 108°$. În triunghiul isoscel OAN, $m(\widehat{ANO}) = \frac{1}{2}(180° - 36°) = 72°$, deci $m(\widehat{TNO}) + m(\widehat{ANO}) = 180°$, prin urmare T, N, A sunt coliniare. Cum $m(\widehat{TAO}) = m(\widehat{TOA}) = 72°$, triunghiul TAO este isoscel şi concluzia este imediată.

VII.45. *Fie $\triangle ABC$ echilateral, iar $P \in (BC)$. Notăm cu D, E simet*
faţă de AC, respectiv AB. Să se arate că dreptele AP, BD şi CE sunt

Constantin Cocea şi Julieta Grig



Soluţie. Fie $\{M\} = BD \cap AC$, $\{N\} = CE \cap AB$; $AB = a$, $BP = x$, $PC = a - x$. Din asemănarea triunghiurilor DMC şi BMA găsim $\frac{CM}{MA} = \frac{CD}{AB} = \frac{a-x}{a}$, iar din asemănarea triunghiurilor BEN şi ACN găsim $\frac{BE}{AC} = \frac{BN}{AN} = \frac{x}{a}$.

În triunghiul ABC avem $\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$; conform reciprocei te
Ceva, dreptele AP, BM, CN sunt concurente.

Clasa a VIII-a

VIII.41. *Fie f_1, f_2, f_3 funcţii liniare ale căror grafice sunt drepte*
două câte două. Cele trei drepte sunt concurente dacă şi numai dacă
$\beta \in \mathbb{R}$ şi există $u \neq v \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$\frac{f_1(u) - \beta}{f_1(v) - \beta} = \frac{f_2(u) - \beta}{f_2(v) - \beta} = \frac{f_3(u) - \beta}{f_3(v) - \beta}, \quad \text{cu} \quad f_i(v) \neq \beta, i \in \{1, 2, 3$$

Claudiu-Ştefan

Soluţie. Fie $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_i(x) = a_i x + b_i$, $i = \overline{1,3}$. Graficele fun
concurente două câte două dacă şi numai dacă a_1, a_2, a_3 sunt distincte.

Prin proporţii derivate relaţia din enunţ este echivalentă cu $\frac{b_1 - \beta}{a_1} =$
$= \frac{b_3 - \beta}{a_3}$, cu convenţia că, dacă unul dintre numerele a_i este zero, atun
este zero.

Graficele funcţiilor f_i sunt concurente dacă şi numai dacă există $(\alpha,$
astfel încât $f_i(\alpha) = \beta$, $i = \overline{1,3}$, adică $a_1\alpha + b_1 = a_2\alpha + b_2 = a_3\alpha + b_3 =$
$-\alpha = \frac{b_1 - \beta}{a_1} = \frac{b_2 - \beta}{a_2} = \frac{b_3 - \beta}{a_3}$, ceea ce încheie rezolvarea problemei.

VIII.42. *Fie $x, y, z \in (0, \infty)$. Să se arate că*

$$\frac{\sqrt{yz}+\sqrt{zx}}{\sqrt{yz}+\sqrt{zx}+\sqrt{x^2+y^2+z^2-yz-zx}}+\frac{\sqrt{xy}+\sqrt{xz}}{\sqrt{xy}+\sqrt{xz}+\sqrt{x^2+y^2+z^2-}}$$

$$+\frac{\sqrt{xy}+\sqrt{yz}}{\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{x^2+y^2+z^2-xy-yz}}\le 2.$$

Lucian Tuţescu

Soluţie. Avem $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\ge 0$ deci $x^2+y^2+z^2-yz$

şi atunci $\frac{\sqrt{yz}+\sqrt{zx}}{\sqrt{yz}+\sqrt{zx}+\sqrt{x^2+y^2+z^2-yz-zx}}\le\frac{\sqrt{yz}+\sqrt{zx}}{\sqrt{yz}+\sqrt{zx}+\sqrt{xy}}$

aceasta cu încă două inegalităţi asemănătoare, obţinem concluzia problem

VIII.43. *Dacă un triunghi dreptunghic are laturile numere naturale catetelor este pătrat perfect, atunci suma cuburilor catetelor este sumă d trate perfecte.*

Andrei Ned

Soluţie. Fie (a,b,c) un triplet de numere naturale nenule care satis $a^2+b^2=c^2$. Urmează că toate trei sunt pare sau numai unul este $\frac{c-b+a}{2},\frac{c+b-a}{2}\in\mathbb{N}^*$.

Avem $a^2+b^2-ab=\left[\frac{1}{2}(c-b+a)\right]^2+\left[\frac{1}{2}(c+b-a)\right]^2$. Deoarece a

$a^3+b^3=(a+b)\big(a^2+b^2-ab\big)$, rezultă că $a^3+b^3=\left[\frac{p}{2}(c-b+a)\right]^2+\left[\frac{p}{2}(c\right.$

VIII.44. *Pe laturile $[AB]$, $[CD]$, $[BC]$, $[AD]$, $[AC]$ şi $[BD]$ ale lui $ABCD$ se iau respectiv punctele M, N, P, Q, R, S astfel ca $\frac{BI}{BC}$ $\frac{AM}{AB}=\frac{DN}{DC}$, $\frac{AR}{AC}=\frac{DS}{BD}$. Notăm cu V_1, V_2, V_3, V_4, V respectiv volumele t $AMRQ$, $BPMS$, $CPNR$, $DNQS$ şi $ABCD$. Să se arate că $2^{12}V_1V_2V_3$*

Viorel Cornea şi Dan Ştefan Marinescu, H

Soluţie. Notând cele trei rapoarte cu α, β, γ, avem: $\frac{V_1}{V}=\alpha\beta\gamma$, $\frac{V_2}{V}=$ $\cdot(1-\gamma)$, $\frac{V_3}{V}=(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$, $\frac{V_4}{V}=(1-\alpha)\beta\gamma$. Atunci

$$\frac{V_1V_2V_3V_4}{V^4}=\alpha^2(1-\alpha)^2\beta^2(1-\beta)^2\gamma^2(1-\gamma)^2\le\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

unde am folosit inegalitatea $x(1-x)\le\frac{1}{4}$, $x\in[0,1]$.

VIII.45. *Fie $A_1,A_2,\ldots,A_k$ puncte pe un cerc $\mathcal{C}$. Să se determine necesară şi suficientă pentru a putea înscrie în $\mathcal{C}$ un poligon regulat ce admi date ca vârfuri (nu neapărat consecutive).*

Irina Mustaţă, e

Soluţie. Presupunem că P este un poligon regulat cu n laturi ce ar A_1, A_2, $\ldots$, A_k ca vârfuri. Dacă între A_i şi A_{i+1} sunt m_i laturi ale l unghiul la centru dintre două vârfuri consecutive ale lui P este $\frac{2\pi}{n}$, d

$m(\widehat{A_iOA_{i+1}}) = m_i \cdot \dfrac{2\pi}{n}$, deci $\dfrac{m(\widehat{A_iOA_{i+1}})}{2\pi} \in \mathbb{Q}$, $i = \overline{1,k}$ (cu convenţia A_k

Să arătăm că această condiţie este şi suficientă. Fie $\dfrac{m(\widehat{A_iOA_{i+1}})}{2\pi} = \dfrac{m_i}{n_i}$, $i = \overline{1,k}$. Alegând n multiplu comun al numerelor n_1, n_2, $\ldots$, n_k $A_1B_2\ldots B_n$ este poligon regulat care conţine vârfurile A_1, A_2, $\ldots$, A_k în această situaţie $m(\widehat{A_1OA_2}) = \dfrac{m_1}{n_1} \cdot 2\pi = \dfrac{nm_1}{n_1} \cdot \dfrac{2\pi}{n}$ şi $\dfrac{nm_1}{n_1} \in \mathbb{N}$, deci A_2

Clasa a IX-a

IX.41. *Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 10$, notăm cu $u_2(n)$ numărul format d două cifre ale lui n. Să se arate că:*

a) $u_2\left(a^{20k+p}\right) = u_2(a^p)$, $p \in \{4, 5, \ldots, 23\}$, $k \in \mathbb{N}$, $a \in \{2, 3, 8\}$;

b) $u_2\left(a^{10k+p}\right) = u_2(a^p)$, $p \in \{2, 3, \ldots, 11\}$, $k \in \mathbb{N}$, $a \in \{4, 9\}$;

c) $u_2(5^n) = 25$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

d) $u_2\left(6^{5k+p}\right) = u_2(6^p)$, $p \in \{2, 3, \ldots, 6\}$, $k \in \mathbb{N}$;

e) $u_2\left(7^{4k+p}\right) = u_2(7^p)$, $p \in \{2, 3, 4, 5\}$, $k \in \mathbb{N}$.

Ovidiu Pop, S

Soluţie. În rezolvarea problemei vom folosi faptul că $u_2(a) = u_2($ numai dacă $a - b$ se divide cu 100.

a) $2^{20k+p} = \left(2^{10}\right)^{2k} \cdot 2^p = 1024^{2k} \cdot 2^p = (1025-1)^{2k} \cdot 2^p = (\mathcal{M}25$ $= \mathcal{M}100 + 2^p$;

$3^{20k+p} = 9^{10k} \cdot 3^p = \left(81^5\right)^k \cdot 3^p = \overline{\cdots 01}^{\,k} \cdot 3^p = (\mathcal{M}100+1) \cdot 3^p = \mathcal{M}1$

$8^{20k+p} = 2^{60k+3p} = 1024^{6k} \cdot 2^{3p} = (\mathcal{M}25-1)^{6k} \cdot 8^p = (\mathcal{M}25+1) \cdot 8^p =$

Egalităţile $b) - e)$ se demonstrează analog.

IX.42. *Fie $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $a + b + c = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$. Să se afl a, b, c, dacă $|abc| = 1$. (enunţ scurtat)*

Marius Pachiţariu,

Soluţie. Ecuaţia $|abc| = 1$ este echivalentă cu $a^2b^2c^2 = 1$. Observăm

$$(1-ab)(1-bc)(1-ca) = 1 - ab - bc - ca + abc(a+b+c) - a^2b^2c^2 =$$

(s-a ţinut seama de relaţia din enunţ). Ca urmare, suntem conduşi $(1-ab)(1-bc)(1-ca) = 0$. Dacă $ab = 1$, găsim $c = \pm 1$ şi, deci $(x, 1/x, \pm 1)$, $x \in \mathbb{R}^*$, sunt soluţii ale problemei. Celelalte soluţii se obţin prin permutări circulare.

IX.43. *Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, iar $a \in (1, \infty)$. Ştiind că*

$$f\left(x^2 + ax - a\right) \geq f^2\left(\tfrac{1}{x}\right) - f\left(\tfrac{1}{x}\right) + 1, \quad \forall x \in (-\infty, 0),$$

să se arate că f nu este injectivă.

Titu Zvonaru, I

Soluţie. Ecuaţia $x^2 + ax - a = \dfrac{1}{x}$, $x \in (-\infty, 0)$ este echivalentă $\cdot\left(x^2 + ax + x + 1\right) = 0$ sau cu $x^2 + x(a+1) + 1 = 0$, $x \in (-\infty, 0)$. Cu $S < 0$, $P > 0$ ea are două rădăcini reale, distincte, negative x_1, x_2.

Pentru $x = x_1$, relaţia din enunţ devine $f\left(\frac{1}{x_1}\right) \geq f^2\left(\frac{1}{x_1}\right) - f\left(\frac{1}{x_1}\right.$

$\left(f\left(\frac{1}{x_1}\right)-1\right)^2 \leq 0$, de unde deducem $f\left(\frac{1}{x_1}\right)=1$. La fel $f\left(\frac{1}{x_2}\right)=1$. P
$f\left(\frac{1}{x_1}\right)=f\left(\frac{1}{x_2}\right)$, $x_1 \neq x_2$; deci f nu este injectivă.

IX.44. *Dacă $\triangle ABC$ este ascuţitunghic, să se găsească maximu* $E=\sin A\cdot\sqrt{\cos A}+\sin B\cdot\sqrt{\cos B}+\sin C\cdot\sqrt{\cos C}$.

Cezar Lupu, elev, şi Tudorel Lupu, C

Soluţie. Putem presupune $A \leq B \leq C$, deci $\sin A \leq \sin B \leq \sin C$ şi $\geq \sqrt{\cos B} \geq \sqrt{\cos C}$. Folosind inegalitatea lui Cebâşev, vom avea

$$E \leq \frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\cdot\left(\sqrt{\cos A}+\sqrt{\cos B}+\sqrt{\cos C}\right).$$

Dar $\sin A+\sin B+\sin C \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, $\sqrt{\cos A}+\sqrt{\cos B}+\sqrt{\cos C} \leq \sqrt{3(\cos A+\cos}$
$\leq \sqrt{3\cdot\dfrac{3}{2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$. Deci $E \leq \dfrac{3\sqrt{6}}{4}$. Cum pentru $A=B=C=60°$ obţinem
deducem că maximul lui E este $\dfrac{3\sqrt{6}}{4}$.

IX.45. *Demonstraţi că $\triangle ABC$ în care are loc egalitatea*

$$\sum \frac{h_a h_b m_c}{m_a m_b m_c + h_a h_b m_c + m_a m_b i_c}=1,$$

suma fiind obţinută prin permutări circulare, iar notaţiile fiind cele u echilateral.

Iuliana Georgescu şi Paul Georg

Soluţie. Avem $h_a \leq i_a \leq m_a$ şi analoagele; deci suma din enunţ este sau egală cu $S'=\sum\dfrac{h_a h_b m_c}{m_a m_b m_c+h_a h_b m_c+m_a m_b h_c}$. Notând $x=\dfrac{h_a}{m_a}$ $z=\dfrac{h_c}{m_c}$, avem $0 \leq x,y,z \leq 1$ şi $S'=\sum\dfrac{xy}{1+xy+z}$.

Cum $1+xy \geq x+y$ pentru $x,y \in [0,1]$ şi analoagele, avem $S' \leq \sum$ $\leq \sum\dfrac{x}{x+y+z}=1$; egalitate are loc dacă şi numai dacă $x=y=z$ $h_a=m_a$, $h_b=m_b$, $h_c=m_c$, adică dacă şi numai dacă triunghiul este ech

Clasa a X-a

X.41. *Prove the inequality* $\dfrac{F_{2n}^2}{F_{n-1}\cdot F_n} \leq \dbinom{2n}{n}$, *where the Fibonacci n are defined by* $F_0=F_1=1$, $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$, $n \geq 1$.

Zdravko Starc, Vršac, Serbia and Mo

Soluţie. Conform inegalităţii Cauchy-Schwarz, avem

$$\left[\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2\right]\left(F_0^2+F_1^2+\cdots+F_n^2\right) \geq \left[\binom{n}{0}F_0+\binom{n}{1}F_1+\cdots\right.$$

Deoarece $\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}^2=\dbinom{2n}{n}$, $\sum\limits_{k=0}^{n}F_k^2=F_n\cdot F_{n+1}$, $\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}F_k=F_{2n}$ (v 2/2002, p. 70), obţinem $\dbinom{2n}{n}F_nF_{n+1} \geq F_{2n}^2$. Egalitate apare pentru $n=$

X.42. *Să se rezolve ecuaţia* $2^{[x]}+6^{[x]}+7^{[x]}=3^{[x]}+4^{[x]}+8^{[x]}$.

Daniel Jing

Soluţie. Notăm $[x]=y$, $y\in\mathbb{Z}$. Avem de rezolvat în $\mathbb{Z}$ ecuaţia 2^y+ $=3^y+4^y+8^y$. Dacă $y<0$ avem $7^y>8^y$ şi $2^y+6^y>3^y+4^y$ (deoarece a echivalentă cu $(2^y-1)(3^y-2^y)>0$, $y<0$). Prin urmare nu avem soluţi Se verifică uşor faptul că $y=0$, $y=1$, $y=2$ sunt soluţii.

Pentru $n\geq 3$, $n\in\mathbb{N}$, demonstrăm că $3^n+4^n+8^n>2^n+6^n+7^n$. Es să arătăm prin inducţie că $8^n+4^n>6^n+7^n$, $n\geq 3$, care este un exerciţiu

Prin urmare $y\in\{0,1,2\}$ şi atunci $x\in[0,1)\cup[1,2)\cup[2,3)$. Mulţime ecuaţiei este intervalul $[0,3)$.

X.43. *Fie f o funcţie reală nenulă cu proprietatea că*

$$f(x+y-xy)=f(x+y)-f(x)f(y),\quad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Să se calculeze $f\left(\dfrac{2003}{2002}\right)$.

Adrian Zan

Soluţie. Rezolvăm problema în mai multe etape.

1. Pentru $x=y=0$, din relaţia dată găsim $f(0)=0$.

2. Pentru $y=-x=1$, deducem $f(1)+f(1)f(-1)=0$, adică $f(1$ $f(-1)=-1$. Dacă $f(1)=0$, pentru $y=1$ relaţia dată implică $f(x$ $\forall x\in\mathbb{R}$, adică $f=0$, contrar ipotezei.

3. Ne ocupăm de cazul $f(-1)=-1$ şi $f(1)=a\neq 0$. Pentru $y=1$, g

$$f(x+1)=af(x)+a,\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Pentru $y=-1$ şi $x\to x+1$, obţinem $f(2x+1)=f(x+1)+f(x$ $af(2x)+a=af(x)+a+f(x)$, deci

$$f(2x)=\frac{a+1}{a}f(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Din (1) şi (2) pentru $x=1$, deducem $f(2)=a^2+a=a+1$, de un Dacă $a=-1$, relaţia (2) implică $f(2x)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, fals. Prin urmare $a=$

4. Din (1), găsim $f(x+1)=f(x)+1$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Prin inducţie, găsim $=f(x)+k$, $\forall x\in\mathbb{R}$ şi $\forall k\in\mathbb{Z}$. Pentru $x=0$ deducem că $f(k)=k$, $\forall k\in$

5. În relaţia dată înlocuim x cu $\dfrac{p}{q}$ şi y cu q $(p,q\in\mathbb{Z},\ q\neq 0)$ şi găsim f

adică $f(x)=x$, $\forall x\in\mathbb{Q}$. Prin urmare, $f\left(\dfrac{2003}{2002}\right)=\dfrac{2003}{2002}$.

X.44. *Urnele $U_1,U_2,\ldots,U_n$ conţin fiecare câte a bile albe şi b bile fiecare urnă se extrage câte o bilă care se depune într-o altă urnă U. D se scoate o bilă şi se constată că este albă. Care este compoziţia cea mai urnei U?*

Petru M

Soluţie. Notăm cu E_k evenimentul constând în faptul că în U ar fi de albe (şi $n-k$ bile negre). Avem $P(E_k)=C_n^k\left(\dfrac{a}{a+b}\right)^k\left(\dfrac{b}{a+b}\right)^{n-k}$, k E evenimentul ca bila extrasa din U sa fie albă. Conform formulei lui Ba

$$P_E(E_k) = \frac{P(E_k) P_{E_k}(E)}{\sum_{i=1}^n P(E_i) P_{E_i}(E)} = \frac{kC_n^k a^k b^{n-k}}{\sum_{i=1}^n iC_n^i a^i b^{n-i}} = \frac{kC_n^k a^k b^{n-}}{na(a+b)^{n-}}$$

Această probabilitate este maximă când $f(k) = kC_n^k a^k b^{n-k}$, $k = \overline{0,n}$ est

Observăm că $\frac{f(k+1)}{f(k)} > 1 \Leftrightarrow k < \frac{na}{a+b}$ şi $\frac{f(k+1)}{f(k)} < 1 \Leftrightarrow k > \frac{na}{a+b}$

este punctul de maxim pentru $f(k)$, avem $f(k_0+1) \leq f(k_0)$ şi $f(k_0) \geq$

din care deducem $k_0 \in \left[\frac{na}{a+b}, \frac{na}{a+b}+1\right]$. Prin urmare, $k_0 = \frac{na}{a+b}$, dacă

şi $k_0 = \left[\frac{na}{a+b}\right] + 1$, dacă $\frac{na}{a+b} \notin \mathbb{N}$.

X.45. *Se consideră triunghiul ascuţitunghic ABC. Să se arate că triunghi $A'B'C'$ astfel încât $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$, $C' \in (AB)$, iar m $= m(\widehat{BA'C'}) = m(\widehat{CB'A'}) = \alpha \in (0, 90]$. Dacă în plus $\triangle ABC$ este echila calculeze lungimile laturilor $\triangle A'B'C'$ în funcţie de $a = BC$ şi α. (În leg problemă propusă la O. N. M., 2002)*

Dan Popescu

Soluţie. Fie D proiecţia punctului C pe AB, deci $D \in (AB)$. Fie C'' $E \in (AC)$ încât $m(\widehat{EC''A}) = \alpha$ şi $A'' \in (BC)$ încât $m(\widehat{C''A''B}) = \alpha$. De fie A_1 şi C_1, $A \in (BA_1)$, $C \in (BC_1)$ şi $F \in (A_1C_1)$ cu $A_1C_1 \parallel AC$ şi $m(\widehat{A''}$

În aceste condiţii, $(C''E \cap (A''F = \{B''\}$, $(BB'' \cap (AC) = \{B'\}$, iar o centru B şi raport λ, raport definit de $\overrightarrow{BB'} = \lambda \overrightarrow{BB''}$, transformă A'' în şi C'' în $C' \in (AB)$. Prin urmare $A'B'C'$ satisface enunţul.

În cazul în care triunghiul ABC este echilateral se deduce relativ uşor c este echilateral şi $(AB') \equiv (CA') \equiv (BC')$. Cu teorema sinusurilor î deducem $B'C' = \frac{a}{\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha}$.

Clasa a XI-a

XI.41. *Fie $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ astfel încât $\sum_{\sigma \in S_k} A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} \cdots$ unde S_k este mulţimea permutărilor de ordin k. Să se arate că $n \, \vdots \, k!$.*

Vladimir Marti

Soluţie. Deoarece $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(C)$, inductiv s $\operatorname{tr}\left(A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} \cdots A_{\sigma(k)}\right) = \operatorname{tr}(A_1 A_2 \cdots A_k)$, $\forall \sigma \in S_k$. Ţinând cont că tr $= \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(C)$ deducem că

$$\operatorname{tr}\left(\sum_{\sigma \in S_k} A_{\sigma(1)} \cdots A_{\sigma(k)}\right) = \operatorname{tr}(I_n) \Rightarrow \operatorname{tr}\left(\sum_{\sigma \in S_k} A_{\sigma(1)} \cdots A_{\sigma(k)}\right) = n$$

$$\Rightarrow \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{tr}\left(A_{\sigma(1)} \cdots A_{\sigma(k)}\right) = n \Rightarrow k! \operatorname{tr}(A_1 A_2 \cdots A_k) = n$$

şi cum $\operatorname{tr}(A_1 A_2 \cdots A_k) \in \mathbb{Z}$, concluzia problemei este imediată.

XI.42. *Prin punctele M_1 şi M_2 ale unei elipse se duc normalele la e intersectează una din axele de simetrie ale acesteia în M_1', respectiv M arate că mediatoarea segmentului $[M_1M_2]$ trece prin mijlocul lui $[M_1'M_2']$ proprietatea adevărată pentru hiperbolă sau pentru parabolă?*

Gheorghe Coste

Soluţie. Fie curba de ecuaţie $\dfrac{x^2}{a^2} + \varepsilon \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $\varepsilon = \pm 1$ şi $M_i\left(x_i, y_i\right)$
$i = 1, 2$. Normala în M_i la curbă are ecuaţia $y - y_i = \varepsilon \dfrac{a^2}{b^2} \dfrac{y_i}{x_i}\left(x - x_i\right)$,
intersectează una din axele simetrie, de exemplu Ox, în $M_i'\left(\dfrac{\varepsilon a^2 - b^2}{\varepsilon a^2} x_i, 0\right.$
Mijlocul M' al segmentului $\left[M_1', M_2'\right]$ are coordonatele $\left(\dfrac{\varepsilon a^2 - b^2}{2\varepsilon a^2}\left(x_1 + x_2\right.\right.$
diatoarea segmentului $M_1 M_2$ are ecuaţia $y - \dfrac{y_1 + y_2}{2} = -\dfrac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}\left(x - \right.$
Se verifică uşor că M' este situat pe mediatoarea segmentului $\left[M_1 M_2\right]$.

Prin calcul se verifică că proprietatea rămâne valabilă şi pentru parab

XI.43. *Considerăm şirul de funcţii* $f_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = nx + \ln$ *şi fie* x_n *soluţia unică a ecuaţiei* $f_n(x) = 0$. *Să se calculeze limitele şirurile şi* $\left(\left(x_n\right)^n\right)_{n \geq 1}$.

Angela Ţigăeru

Soluţie. Evident, funcţiile f_n sunt strict crescătoare şi surjective, ceea existenţa şi unicitatea soluţiei x_n.

Folosim în continuare inegalităţile $\dfrac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$, $\forall x \in (0, \infty)$.

$$f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} + \ln\frac{n}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} - 1 = 0 \quad \text{şi}$$

$$f_n\left(\frac{n+1}{n+2}\right) = \ln\frac{n+1}{n+2} + \frac{2}{n+2} \geq \left(\frac{n+1}{n+2} - 1\right)\frac{n+2}{n+1} + \frac{2}{n+2} > 0,$$

Prin urmare, $f_n\left(\dfrac{n}{n+1}\right) \leq f_n\left(x_n\right) \leq f_n\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)$ şi atunci $\dfrac{n}{n+1} \leq x_n$
$n \geq 1$. Găsim $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^n = \dfrac{1}{e}$.

XI.44. *Să se determine funcţiile continue* $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ $f(x) = f\left(\sqrt{2x^2 - 2x + 1}\right)$, $\forall x > 0$.

Marian Ursărescu

Soluţie. Fie $x_0 \in (0, 1]$ fixat şi şirul $\left(x_n\right)_{n \leq 0}$ definit prin $x_{n+1} = \sqrt{2x_n^2}$
$n \in \mathbb{N}$. Se verifică faptul că $x_n \in (0, 1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left(x_n\right)_{n \geq 0}$ este crescător şi li
Pentru $x = x_n$, relaţia din enunţ devine $f\left(x_n\right) = f\left(\sqrt{2x_n^2 - 2x_n + 1}\right) =$
$\forall n \in \mathbb{N}$, deci $f\left(x_0\right) = f\left(x_n\right)$. Ca urmare, $f\left(x_0\right) = \lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n\right)$. Rezultă
$= f(1)$, $\forall x \in (0, 1]$.

Fie $x_0 > 1$ şi şirul definit prin $x_{n+1} = \dfrac{1 + \sqrt{2x_n^2 - 1}}{2}$, $n \in \mathbb{N}$. S
$x_n > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. $\left(x_n\right)_{n \geq 0}$ este descrescător şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. Cum rel
curenţă se poate scrie şi în forma $x_n = \sqrt{2x_{n+1}^2 - 2x_{n+1} + 1}$, obţinem
$= f\left(\sqrt{2x_{n+1}^2 - 2x_{n+1} + 1}\right) = f\left(x_n\right)$, apoi $f\left(x_0\right) = f\left(x_n\right)$ şi $f(x) = f(1$

În concluzie, $f(x) = f(1)$, $\forall x \in (0, \infty)$, deci f este funcţie constantă.

XI.45. *Fie $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ şi numerele reale pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_k$, b_1 cu $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$. Definim $x_n = \sqrt[n]{b_1 a_1^n + b_2 a_2^n + \ldots + b_k a_k^n}$.*

a) Să se demonstreze că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a_k$;

b) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(x_n - a_k\right) = a_k \ln b_k$;

c) Dacă $b_k = 1$, are loc $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_k}{a_{k-1}}\right)^n (x_n - a_k) = a_k b_{k-1}$.

Marian Tetiv

Soluţie. *a)* Avem $a_k \sqrt[n]{b_k} \leq \sqrt[n]{a_1^n b_1 + \cdots + a_k^n b_k} \leq a_k \sqrt[n]{b_1 + b_2 + \cdots +}$
Deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_1 a_1^n + b_2 a_2^n + \cdots + b_k a_k^n} = a_k$.

b)

$$\lim_{n\to\infty} n\left(x_n - a_k\right) = a_k \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{a_k} - 1\right) = a_k \lim_{n\to\infty} n \frac{e^{\ln\frac{x_n}{a_k}} - 1}{\ln\frac{x_n}{a_k}} \ln\frac{x_n}{a_k} = a_k \lim_{n\to\infty}$$

$$= a_k \lim_{n\to\infty} \ln\left(b_1\left(\frac{a_1}{a_k}\right)^n + b_2\left(\frac{a_2}{a_k}\right)^n + \cdots + b_{k-1}\left(\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)^n + b_k\right) =$$

c)

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_k}{a_{k-1}}\right)^n (x_n - a_k) = \lim_{n\to\infty} a_k n\left(\frac{a_k}{a_{k-1}}\right)^n \frac{e^{\ln\frac{x_n}{a_k}} - 1}{\ln\frac{x_n}{a_k}} \ln\frac{x_n}{a_k}$$

$$= a_k \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_k}{a_{k-1}}\right)^n \ln\left(b_1\left(\frac{a_1}{a_k}\right)^n + b_2\left(\frac{a_2}{a_k}\right)^n + \cdots + b_{k-1}\left(\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)^n\right.$$

$$= a_k \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_k}{a_{k-1}}\right)^n\left(b_1\left(\frac{a_1}{a_k}\right)^n + b_2\left(\frac{a_2}{a_k}\right)^n + \cdots + b_{k-1}\left(\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)^n\right.$$

$$= a_k \lim_{n\to\infty}\left(b_1\left(\frac{a_1}{a_{k-1}}\right)^n + b_2\left(\frac{a_2}{a_{k-1}}\right)^n + \cdots + b_{k-1}\right) = a_k b_{k-1}$$

Clasa a XII-a

XII.41. *Să se calculeze $\displaystyle\int \frac{(1+x)\left(1+x^2\right)\ldots\left(1+x^{2^{n-1}}\right)}{x^{2^n}}dx$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.*

Oana Marangoci, stud

Soluţie. Pentru $x \in (1, \infty)$, avem $(1+x)\left(1+x^2\right)\cdots\left(1+x^{2^{n-1}}\right) =$

$$= \frac{1-x^2}{1-x} \cdot \frac{1-x^{2^2}}{1-x^2} \cdot \ldots \cdot \frac{1-x^{2^n}}{1-x^{2^{n-1}}} = \frac{1-x^{2^n}}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{2^n-1}$$

$$\frac{(1+x)\left(1+x^2\right)\cdots\left(1+x^{2^{n-1}}\right)}{x^{2^n}} = \frac{1}{x^{2^n}} + \frac{1}{x^{2^n-1}} + \cdots + \frac{1}{x},$$

relaţie care se verifică şi pentru $x = 1$. Primitivele funcţiei sunt

$$\frac{-1}{(2^n-1)\,x^{2^n-1}} + \frac{-1}{(2^n-2)\,x^{2^n-2}} + \cdots + \frac{-1}{x} + \ln x + C.$$

XII.42. *Fie $f\colon \left[\pi, \dfrac{5\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pentru care $\displaystyle\int_\pi^{\frac{5\pi}{4}} f(x)\sin$*

Să se arate că există $c\in\left(\pi,\dfrac{5\pi}{4}\right)$ *astfel încât* $f(c)\in(1,2)$.

Mihai Ha

Soluţie. Avem

$$\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}}\frac{\sin 2x}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}\,dx=-\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}}\frac{(\cos 2x)'}{1+\cos^2 2x}\,dx=-\operatorname{arctg}(\cos 2x)\Big|_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}}$$

$$\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}}f(x)\sin 2x\,dx=\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}}\frac{\sin 2x}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}\,dx\Leftrightarrow\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}}\left(f(x)-\frac{2}{2-\sin^2 x}\right)\sin$$

Aplicând teorema de medie există $c\in\left(\pi,\dfrac{5\pi}{4}\right)$ astfel încât

$$\frac{\pi}{4}\left(f(c)-\frac{2}{2-\sin^2 2c}\right)\sin 2c=0\Leftrightarrow f(c)=\frac{2}{2-\sin^2 2c}\,.$$

Dar $\dfrac{2}{2-\sin^2 2c}\in(1,2)$ pentru $c\in\left(\pi,\dfrac{5\pi}{4}\right)$, adică $f(c)\in(1,2)$.

XII.43. *Să se arate că*

$$1-\frac{\ln a}{3}\le\int_0^1 a^{-x^2}dx\le\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{\ln a}}{\sqrt{\ln a}},\quad\forall a>1.$$

Petru Rădu

Soluţie. Se arată că $a^x\ge x\ln a+1$, $\forall x\in\mathbb{R}$ şi $\forall a>1$. Obţinem astfe

$$-x^2\ln a+1\le a^{-x^2}=\frac{1}{a^{x^2}}\le\frac{1}{x^2\ln a+1},\quad x\in\mathbb{R},\ a>1.$$

Integrând între 0 şi 1, obţinem inegalităţile cerute.

XII.44. *Să se afle numărul rădăcinilor reale ale polinomului* $P\in\mathbb{Z}[$ *minim, care admite rădăcina* $\alpha^2+\alpha$, *unde* α *verifică ecuaţia* x^3-x+1

Laurenţiu Modan,

Soluţie. Polinomul în y care se cere, apare prin eliminarea lui x într $x^3-x+1=0$ şi $y=x^2+x$. Deoarece $x^2=y-x$, găsim $x(y-x)-x$ înlocuind din nou x^2 găsim $x=\dfrac{y-1}{y}$ (evident $y\neq0$). Deducem $y=\dfrac{(y-}{y^2}$ şi, în final, $P(y)=y^3-2y^2+3y-1$. Folosind şirul lui Rolle, polinomul P o singură rădăcină reală $y\in(0,1)$.

XII.45. *Fie* $\sigma\in S_5$. *Să se arate că* σ^2 *are puncte fixe dacă şi num are puncte fixe.*

Paul Georgescu şi Gabriel

Soluţie. Folosind descompunerea unei permutări în produs de cicli se poate observa că, dacă σ^k, $1\le k\le5$, are puncte fixe, atunci σ descompunerea sa cicli de lungime l, cu $l\mid k$.

Presupunem că σ^2 are puncte fixe. Atunci σ conţine în descompunerea lungime 1 (puncte fixe) sau 2. Dacă σ are puncte fixe, σ^3 are de asemen fixe. Dacă σ conţine în descompunerea sa cicli de lungime 2, fără a avea p atunci σ conţine în descompunerea sa şi un ciclu de lungime 3. Element ciclu vor fi toate puncte fixe pentru σ^3. Implicaţia reciprocă se demonstrea

Soluţiile problemelor pentru pregătirea concur
din nr. 2 / 2003

A. Nivel gimnazial

G46. *Determinaţi ultimele cinci cifre ale numărului*

$$A = 7^{2000} + 7^{2001} + 7^{2002} + 7^{2003}.$$

Viorel Cornea şi Dan Ştefan Marinescu, H

Soluţia I. Scriem $A = 7^{2000} \cdot 400$. Se constantă că $7^{20} = \mathcal{M}1000 + 1$. C
$7^{2000} = \mathcal{M}1000 + 1$ şi $A = (\mathcal{M}1000 + 1) \cdot 400 = \mathcal{M}100000 + 400$, deci ult
cifre ale lui A sunt 00400.

Soluţia II (**Irina Mustaţă**, elevă, Iaşi)**.** Conform teoremei lui Eule
$1 (\bmod n)$ pentru $(a, n) = 1$. Considerând $a = 7$, $n = 1000$, avem $\varphi (1000) =$
$7^{400} \equiv 1 (\bmod 1000)$, adică $7^{2000} = \left(7^{400}\right)^5 \equiv 1 (\bmod 1000)$, de unde $A = 7^2$
$400 (\bmod 100000)$, deci numărul A se termină cu 00400.

G47. *Determinaţi valorile parametrilor $a, b \in \mathbb{Z}$ pentru care soluţiile s*

$$x = a \frac{y}{y+1}\ ; \quad y = b \frac{x}{x+1}$$

sunt în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Temistocle Bî

Soluţie. Fie M mulţimea perechilor $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ pentru care este
cerinţa problemei. Observăm că $(0, 0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ este soluţie a sistemului şi
este unica soluţie dacă $a = 0$ sau $b = 0$. Ca urmare, $(a, 0) \in M$, $\forall a \in \mathbb{Z}$ şi
$\forall b \in \mathbb{Z}$.

Pe $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{-1\})$ sistemul dat, dacă facem abstracţie de sol
este echivalent cu

$$(b+1)\, x = ab - 1, \quad (a+1)\, y = ab - 1.$$

I. $a \neq -1$, $b \neq -1$. Obţinem $x = \dfrac{ab-1}{b+1}$, $y = \dfrac{ab-1}{a+1}$. Atunci $(x, y) \in$
$b + 1 \mid ab - 1$ şi $a + 1 \mid ab - 1$. Cum $ab - 1 = (a+1)(b+1) - (a+1)$
deducem că $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \Leftrightarrow b + 1 \mid a + 1$ şi $a + 1 \mid b + 1 \Leftrightarrow b + 1 =$
$b + 1 = -(a+1)$. Prin urmare $(a, a) \in M$, $\forall a \in \mathbb{Z}$, $a \neq -1$ şi $(a, -a$
$\forall \in \mathbb{Z}$, $a \neq -1$.

II. $a = b = -1$. Cum rezultă $ab - 1 = 0$, sistemul (1) are o infinitate d
nu toate sunt în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Deci $(-1, 1) \notin M$.

III. $a = -1$, $b \neq -1$ (analog $a \neq -1$, $b = -1$). Avem $ab - 1 \neq 0$, c
are soluţii, iar sistemul dat are $(0, 0)$ ca unică soluţie. Aşadar, $(a, -1) \in I$
$a \neq -1$ şi $(-1, b) \in \mathbb{Z}$, $\forall b \in \mathbb{Z}$, $b \neq -1$.

În concluzie:

$$M = \{(a, 0), a \in \mathbb{Z}\} \cup \{(0, b), b \in \mathbb{Z}\} \cup \{(a, -1), a \in \mathbb{Z}\} \cup \{(-1, b), b \in$$
$$\cup \{(a, a), a \in \mathbb{Z}\} \cup \{(a, -a-2), a \in \mathbb{Z}\} \setminus \{(-1, -1)\}.$$

G48. *Fie $A \subset (0, \infty)$ o mulţime care conţine $\dfrac{2002}{2003}$ şi având propr*
dacă $\dfrac{a}{b} \in A$ $(a, b \in \mathbb{N}^*)$, atunci $\dfrac{a+1}{b} \in A$ şi $\dfrac{a}{2b} \in A$. Să se arate că $A \supseteq$

Gheorghe I

Soluţie. Considerăm transformările

$$\frac{a}{b} \in A \Rightarrow \frac{a+1}{b} \in A$$

şi

$$\frac{a}{b} \in A \Rightarrow \frac{a}{2b} \in A.$$

Avem:

$$\frac{2002}{2003} \in A \overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{1001}{2003} \in A \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{1002}{2003} \in A \overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{501}{2003} \in A \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{502}{2003} \in A \overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{251}{2003} \in A \overset{(1)}{\Rightarrow} \cdots$$

$$\frac{1}{2003} \in A \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{2}{2003} \in A \overset{(1)}{\Rightarrow} \cdots \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{2003}{2003} \in A, \quad \text{deci} \quad \frac{1}{1} \in A.$$

Fie $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+^*$. Cum $\frac{1}{1} \in A \Rightarrow \frac{b}{b} \in A \Rightarrow \frac{1}{b} \in A \Rightarrow \frac{a}{b} \in A$, rezultă că $\frac{a}{b}$
$\mathbb{Q}_+^* \subseteq A$.

G49. *Fie* $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{R}_+^*$ *astfel încât* $x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1} \leq$
iar $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n+1}^2 \leq \frac{n+4}{4} M^2$, *unde* $m = \min x_i$, $M = \max x_i$.
că exact n *dintre numerele date sunt egale.*

Eugen J

Soluţie. Dacă toate numerele ar fi egale, relaţia a doua din e
$(n+1) M^2 \leq \frac{n+4}{4} M^2$, imposibil. Există cel puţin un număr egal cu M
x_{n+1}. Deducem că $(n+2) m \geq x_1 + \cdots + x_n + M$ deci $2m \geq M$. De
$\frac{n+4}{4} M^2 \geq x_1^2 + \cdots + x_n^2 + M^2 \geq nm^2 + M^2$ sau $M \geq 2m$. Rezultă
prima relaţie devine $x_1 + x_2 + \cdots + x_n + 2m \leq (n+2) m$, deci $x_1 + x_2 + \cdots$
sau încă $(x_1 - m) + \cdots + (x_n - m) \leq 0$. Cum $x_1 - m \geq 0$, $x_2 - m \geq 0, \ldots,$
deducem că $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = m$, valori care verifică şi a doua condiţ

În concluzie exact n numere sunt egale cu m şi unul egal cu $M = 2m$.

G50. *Fie* $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 3$. *Să se arate că*

$$\left[\sqrt{an+1}\right] = \left[\sqrt{an+2}\right] = \ldots = \left[\sqrt{an+a-1}\right], \ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a \in \{3$$

Ovidiu Pop, S

Soluţie. Pentru $n = 0$ relaţia din enunţ devine $\left[\sqrt{1}\right] = \left[\sqrt{2}\right] = \cdots =$
deci $\left[\sqrt{a-1}\right] = 1$, echivalent cu $2 \leq a < 5$, şi cum $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 3$, avem a

Reciproc, arătăm că, dacă $a \in \{3, 4\}$, au loc egalităţile din enunţ.
trebuie arătat că $\left[\sqrt{3n+1}\right] = \left[\sqrt{3n+2}\right]$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Pentru un număr $n \in \mathbb{N}$ există $k \in \mathbb{N}$ (k depinde de n) astfel încât k^2
$< (k+1)^2$. Considerând numărul $3n+2$ avem $3n+2 < (k+1)^2$sau $3n+2$
Cum $3n+2$ nu este pătrat perfect, deducem că $k^2 \leq 3n+1 < 3n+2 <$
unde rezultă $k \leq \sqrt{3n+1} < \sqrt{3n+2} < k+1$, deci $\left[\sqrt{3n+1}\right] = \left[\sqrt{3n+\right.$

Pentru $a = 4$, trebuie demonstrat că $\left[\sqrt{4n+1}\right] = \left[\sqrt{4n+2}\right] =$
$\forall n \in \mathbb{N}$. Considerând $k = \left[\sqrt{4n+1}\right]$ avem $k^2 \leq 4n+1 < (k+1)^2$ şi cu
$4n+3$ nu sunt pătrate perfecte pentru nici un $n \in \mathbb{N}$, deducem $k^2 \leq 4n+1$
$< 4n+3 < (k+1)^2$ şi atunci $\left[\sqrt{4n+1}\right] = \left[\sqrt{4n+2}\right] = \left[\sqrt{4n+3}\right] = k$.

G51. *Fie* $a, b, c \in \left[\frac{3}{10}, \infty\right)$ *cu* $a+b+c=1$. *Să se arate că*

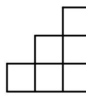
$$\frac{2}{3} \leq a\sqrt{a+bc} + b\sqrt{b+ca} + c\sqrt{c+ab} < \frac{3}{4}\ .$$

Gabriel Dospinescu, ele

Soluţia. Avem $\sqrt{a+bc} = \sqrt{(a+b)(a+c)} \leq \frac{a+b+a+c}{2} = \frac{1+}{2}$
$\sum a\sqrt{a+bc} \leq \sum \frac{a^2+a}{2} = \frac{1}{2}\left(1+\sum a^2\right)$. Cum $a = 1-(b+c) < 1$
etc., rezultă că $\frac{1}{2}\left(1+\sum a^2\right) < \frac{1}{2}\left(1+3\cdot\frac{4}{25}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{37}{25} < \frac{3}{4}$.

Pentru inegalitatea din stânga avem: $a+bc = (a+b)(a+c) \geq \Big(a$
atunci $\sum a\sqrt{a+bc} > \sum a\left(a+\sqrt{bc}\right) = 1-2\sum ab+\sum a\sqrt{bc}$. Rămâne
că $\frac{1}{3}-2\sum ab+\sum a\sqrt{bc} \geq 0$ sau, echivalent, $\sum \frac{(a-b)^2}{3} \geq \sum c\Big(\sqrt{a}-$
suficient să arătăm că $\frac{(a-b)^2}{3} \geq c\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$, echivalentă cu $\Big(\sqrt{a}+$
sau cu $a+b+2\sqrt{ab} \geq 3-3a-3b$. Ultima inegalitate se scrie $4a+4b+2$
este adevărată în condiţia $a, b \in \left[\frac{3}{10}, \infty\right)$.

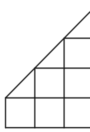
G52. *Se consideră o piramidă formată din pătrate* 1×1, *având* n *trepte, pe treapta* k *existând* $2k-1$ *pătrate (în figură,* $n=4$*). Aflaţi numărul minim de dreptunghiuri, fiecare alcătuit numai din căsuţe întregi, în care poate fi împărţită tabla.*



Adrian Zahariuc, ele

Soluţia I (a autorului). Colorăm căsuţele tablei alternativ în al
(căsuţa din vârf este neagră). Cum modulul diferenţei dintre numărul de c
şi numărul de căsuţe negre dintr-un dreptunghi este cel mult 1 şi cum
căsuţe negre mai multe decât albe, trebuie să avem cel puţin n dreptungh
număr poate fi obţinut tăind pe nivele. Aşadar, răspunsul este n.

Soluţia II (**Irina Mustaţă**, elevă, Iaşi)**.** Unim, ca în figură, vârfurile din stânga sus ale pătratelor marginale din stânga; se observă că deasupra acestei drepte nu mai există vârfuri ale piramidei. Oricare două pătrate marginale din stânga nu pot aparţine aceluiaşi dreptunghi, deoarece ar însemna că acel



dreptunghi va avea colţul din stânga sus deasupra dreptei considerate; pr
numărul minim de dreptunghiuri este n, minim atins pentru împărţirea p

Soluţia III (**Marius Pachiţariu**, elev, Iaşi)**.** Prin inducţie completă

G53. *Fie* $ABCD$ *un pătrat de latură* 70. *Să se arate că există o*
pătrate $\mathcal{P}_k = \left\{A_iB_iC_iD_i \mid A_iB_i = i,\ i=\overline{1,k}\right\}$ *care să aibă suma ariilor eg*
pătratului dat. Putem acoperi pătratul $ABCD$ *cu elementele mulţimii* $\mathcal{P}_k$

Petru As

Soluţie. Trebuie să avem $1^2+2^2+\cdots+k^2 = 70^2$, echivalent cu $\frac{k(k+1)}{}$

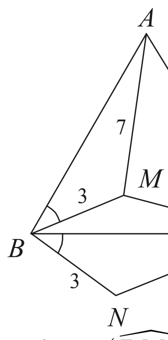
$= 70^2$, de unde $k = 24$. Soluţia este unică deoarece $k > 24$ implică 1^2+2^2+
$> 70^2$ iar $k < 24$, $1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 < 70^2$.

Arătăm că mulţimea $\mathcal{P}_k$ nu poate acoperi pătratul $ABCD$. Pentru a observăm că pătratele $A_iB_iC_iD_i$, pentru a acoperi $\mathcal{P}_k$, nu au puncte comun făcând laturile (altfel aria acoperită de acestea este mai mică decât 1^2+2^2+ $= 70^2$); de asemenea, pătratele $A_iB_iC_iD_i$ nu lasă "spaţii goale" între ele acoperită de ele plus ariile "spaţiilor goale" este mai mare ca $1^2+2^2+\cdots+2$

Analizând poziţia pătratului de latură 1 în pătratul $ABCD$, observăm o suprafaţă ce nu mai poate fi acoperită (rămîne o suprafaţă dreptung laturi 1 şi $l \geq 1$ în care nu "încape" nici unul din pătratele rămase, care mai mari sau egale cu 2).

G54. *Să se arate că nu putem alege nici un punct în interiorul t echilateral ABC de latură $l \leq 10$, care să aibă distanţele la vârfuri nu distincte.*

Doru B



Soluţie. Presupunem, prin absurd, că există $M \in \operatorname{Int}(ABC)$ astfel încât MA, MB, MC să fie numere prime.

Cum $MA, MB, MC < l$ şi MA, MB, MC pot fi laturile unui triunghi (teorema lui Pompeiu), deducem că $AM, BM, CM \in \{3, 5, 7\}$. Fie $AM = 7$, $BM = 3$, $CM = 5$.

Fie N astfel încât $BN = 3$ şi $m(\widehat{MBN}) = 60°$. Evident, triunghiul BMN este echilateral. Din congruenţa triunghiurilor AMB şi CNB deducem $NC = 7$. Atunci $\cos\widehat{NMC} = \dfrac{MN^2+MC^2-NC^2}{2\,MN\cdot MC} = -\dfrac{1}{2}$, deci $m(\widehat{NMC}) = 120°$ şi $m(\widehat{BM$ fals. Prin urmare, nu există $M \in \operatorname{Int}(ABC)$ cu proprietatea cerută.

G55. *Printr-un punct situat în interiorul unui tetraedru se duc planele feţele tetraedrului. Dacă V_1, V_2, V_3, V_4 sunt volumele tetraedrelor unic d de aceste plane, iar V este volumul tetraedrului dat, să se arate că*

$$27V \leq 16\left(V_1 + V_2 + V_3 + V_4\right).$$

Neculai Roman, Mirc

Soluţie. Notăm cu x_i distanţa de la punctul considerat la faţa te $A_1A_2A_3A_4$ opusă vârfului A_i şi cu h_i înălţimea corespunzătoare aceste $a_i = \sqrt[3]{V_i/V}$, $i = \overline{1,4}$. Avem $a_i = \dfrac{h_i - x_i}{h_i} = 1 - \dfrac{x_i}{h_i}$, $i = \overline{1,4}$, de

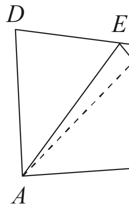
$$= 4 - \sum_{i=1}^{4} \frac{x_i}{h_i} = 4 - \sum_{i=1}^{4} \frac{S_i x_i}{S_i h_i} = 4 - \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{4} V_i = 4 - 1 = 3.$$

Relaţia de demonstrat se scrie $27 \leq 16\left(a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + a_4^3\right)$ şi decurge că $\dfrac{a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + a_4^3}{4} \geq \left(\dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}\right)^3 = \dfrac{3^3}{4^3} = \dfrac{27}{64}$.

B. Nivel liceal

L46. *Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil. Bisectoarele unghiurilor* *intersectează într-un punct situat pe latura $[CD]$. Să se arate că $CD =$*

Mircea Becheanu,



Soluţia I (**Irina Mustaţă**, elevă, Iaşi)**.** Fie $m(\widehat{A}) = 2\alpha$, $m(\widehat{B}) = 2\beta$, iar $P \in (CD)$ astfel încât $AD = DP$; avem că $m(\widehat{APD}) = \dfrac{1}{2}\left(180^\circ - m(\widehat{D})\right) = \beta$. Deosebim două cazuri, după cum $E \in (DP)$ sau $E \in (PC)$; ne plasăm în prima situaţie. Deoarece $\widehat{EPA} \equiv \widehat{EBA}$, patrulaterul $ABPE$ este inscriptibil, deci $m(\widehat{CPB}) = \alpha$. Atunci $m(\widehat{CBP}) = 180^\circ - m(\widehat{C}) - \alpha = \alpha$, deci $\triangle CPB$ este isoscel cu $CP = CB$, de unde concluzi

Soluţia II. Folosind teorema sinusurilor în triunghiurile ADE, BE obţinem:

$$DE = \frac{\sin\dfrac{A}{2}}{2\cos\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{A+B}{2}}\cdot AB, \quad CE = \frac{\sin\dfrac{B}{2}}{2\cos\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{A+B}{2}}\cdot AB$$

$$AD = \frac{\sin\left(B - \dfrac{A}{2}\right)}{2\cos\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{A+B}{2}}\cdot AB, \quad BC = \frac{\sin\left(A - \dfrac{B}{2}\right)}{2\cos\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{A+B}{2}}\cdot AB$$

din care deducem

$$CD = DE + CE = AD + BC = \frac{\sin A + \sin B}{4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{A+B}{2}}\cdot AB$$

Notă. S-a mai primit soluţie corectă de la **Marius Pachiţariu**, elev,

L47. *Dacă un triunghi are pătratele laturilor în progresie aritmet simetricul centrului de greutate faţă de latura mijlocie se află pe cercul triunghiului.*

Gabriel Popa şi Paul Georg

Soluţie. Fie a, b, c lungimile laturilor triunghiului ABC, $c < a < b$ cu 2 Simetricul cercului circumscris triunghiului ABC faţă de BC este cerc scris triunghiului BHC şi atunci simetricul lui G faţă de BC este pe cer scris dacă şi numai dacă $BHGC$ este patrulater inscriptibil, echivalent c $m(\widehat{BGC}) = m(\widehat{BHC}) = \pi - m(\widehat{A})$.

În triunghiul BGC se determină $\cos\widehat{BGC} = -\dfrac{a^2}{2bc}$ (se foloseşte relaţia 2 şi formula medianei). Cum $\cos A = \dfrac{a^2}{2bc}$, deducem că avem $\cos\widehat{BGC} = -$ $m(\widehat{BGC}) + m(\widehat{A}) = \pi$, ceea ce încheie soluţia.

Notă. Soluţii corecte au dat **Irina Mustaţă** şi **Marius Pachiţariu**,

L48. *Fie R, r, R_1 raza cercului circumscris $\triangle ABC$, raza cercului însc respectiv raza cercului circumscris $\triangle DEF$ determinat de picioarele bisect terioare ale $\triangle ABC$. Să se arate că $R/2 \geq R_1 \geq r$.*

Marian Tetiv

Soluţie (**Titu Zvonaru**, Comăneşti (Bacău))**.** Inegalitatea $r \leq R_1$ vărată oricare ar fi punctele $D \in (BC)$, $E \in (CA)$, $F \in (AB)$ (**Liliana N**

O metodă de demonstrare a unor inegalităţi geometrice, GM - 2-3/1993; T
p. 51). Într-adevăr, fie Q centrul cercului circumscris $\triangle DEF$ şi d_1, d_2, d_3
de la Q la laturile BC, CA, AB. Cum fiecare dintre dreptele BC, CA
secantă sau tangentă cercului circumscris $\triangle DEF$, avem $d_1 \leq R_1$, $d_2 \leq R_1$
deci

$$pr = \mathcal{A}_{[ABC]} = \mathcal{A}_{[QBC]} + \mathcal{A}_{[QCA]} + \mathcal{A}_{[QAB]} = \frac{ad_1}{2} + \frac{bd_2}{2} + \frac{cd_3}{2} \leq \frac{aR_1}{2} + \frac{bR_1}{2} + \frac{c$$

adică $r \leq R_1$.

Inegalitatea $R_1 \leq R/2$ este adevărată, dacă punctele D, E, F aparţin se
determinate de picioarele înălţimilor şi mijloacele laturilor respective (a
întâmplă cu picioarele bisectoarelor). În acest caz aceste puncte sunt în
cercului lui Euler al $\triangle ABC$, a cărui rază este $R/2$, şi rezultă $R_1 \leq R/2$.

L49. *Într-un pătrat* 10×10 *se înscriu numerele* $1, 2, 3, \ldots, 100$ *în as
oricare două numere consecutive să se afle în căsuţe vecine. Demonstraţ
o linie sau o coloană ce conţine măcar două pătrate perfecte.*

Adrian Zahariuc, ele

Soluţie. Observăm că avem 10 pătrate perfecte dintre care 5 sunt p
supunem că pătratele perfecte sunt situate pe linii şi coloane diferite. Colo
ca pe o tablă de şah în alb şi negru. Numerele pare vor fi situate pe căsuţ
culoare, la fel numerele impare.

Fie (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_{10}, y_{10}) coordonatele căsuţelor în care su
pătratele perfecte. Datorită presupunerii că pătratele perfecte sunt pe linii
diferite, numerele x_i, $i = \overline{1,10}$ sînt diferite două câte două şi $\{x_1, x_2, \ldots$
$= \{1, 2, \ldots, 10\}$; la fel pentru numerele y_i, $i = \overline{1,10}$. Obţinem $(x_1 + y_1) + ($
$+ \cdots + (x_{10} + y_{10}) = 2\,(1 + 2 + \cdots + 10) =$ număr par şi rezultă că un num
perechi are suma pară. Cum perechile cu suma combinaţiilor pară au acea
deducem că există un număr par de pătrate perfecte pare, absurd.

Notă. Soluţie corectă a dat **Marius Pachiţariu**, elev, Iaşi.

L50. *Fie* $(a_n)_{n \geq 1}$ *o progresie aritmetică având* $a_1 = 5$, $r = 2002$.
element b *al progresiei, să se arate că* b^m *aparţine progresiei dacă şi n*
$60 \mid m - 1$.

Mihai Piticari, C-lung Mo

Soluţie. Să demonstrăm mai întâi următoarea

Lemă. *Dacă* a, m, n *sunt numere naturale nenule astfel încât* $n \mid a^m$
este cel mai mic număr cu această proprietate, atunci $n \mid a^k - 1$ *dacă şi n*
$m \mid k$.

Într-adevăr, dacă $m \mid k$, atunci $k = sm$ şi din $n \mid a^m - 1 \mid a^{sm}$ -
$n \mid a^k - 1$. Presupunem $n \mid a^k - 1$. Conform teoremei împărţirii cu r
c şi r numere naturale astfel încât $k = mc + r$, $r < m$. Din $n \mid a^k$ –
$n \mid a^{mc+r} - 1 = a^r\,(a^{mc} - 1) + a^r - 1$ şi deducem $n \mid a^r - 1$. Cum $r <$ r
minimalităţii lui m rezultă $r = 0$, deci $m \mid k$.

Revenim la problema dată. Evident, b^m aparţine progresiei dacă şi n
$2002 \mid b^m - b$. Cum $b = 5 + 2002p$, rezultă că 2002 este prim cu b şi atunci b
progresiei dacă şi numai dacă $2002 \mid b^{m-1} - 1$. Din $b^{m-1} - 1 = (5 + 20$

$-5^{m-1}+5^{m-1}-1$, urmează că $2002 \mid b^{m-1}-1$ dacă şi numai dacă 2002
Avem $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ şi 6, 10, 4 sunt minime cu proprietăţile 7
$11 \mid 5^{10}-1$, $13 \mid 5^4-1$. Deci, pe baza lemei, $2002 \mid 5^{m-1}-1$ dacă şi n
$6 \mid m-1$, $10 \mid m-1$, $4 \mid m-1$, adică dacă şi numai dacă $60 \mid m-1$.

Notă. Soluţie corectă a dat **Marius Pachiţariu**, elev, Iaşi.

L51. *Fie* $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *două matrice care comută şi pentru care* det $($
$< (\det A + \det B)^2$. *Să se arate că* $xA + yB$ *este matrice nesingulară,* $\forall x$

Cătălin Cali

Soluţie. Se arată cu uşurinţă că

$$\det(xA+yB) = x^2 \det A + y^2 \det B + xy\left[\det(A+B) - \det A - \det B\right],$$

prin urmare

$$\det(A+iB)\det(A-iB) = (\det A - \det B)^2 + \left[\det(A+B) - \det A -\right.$$

Cum $AB = BA$, avem $(A+iB)(A-iB) = A^2 + B^2$ şi relaţia anterioară

$$\det\left(A^2+B^2\right) = (\det A - \det B)^2 + (\det(A+B) - \det B - \det A)$$

Condiţia din enunţ se rezumă la a arăta că $\forall x, y \in \mathbb{R}^*$, avem $\det(xA + yB$
ecuaţia $x^2 \det A + y^2 \det B + xy\left[\det(A+B) - \det A - \det B\right] = 0$ nu adm
reale nebanale. Într-adevăr, discriminantul acestei ecuaţii este

$$\Delta = \left[\det(A+B) - \det A - \det B\right]^2 - 4\det A \det B = \det\left(A^2 + B^2\right.$$

$$-(\det A - \det B)^2 - 4\det A \det B = \det\left(A^2+B^2\right) - (\det A + \det B)$$

L52. *Fie* $Q \in \mathbb{C}[X]$ *un polinom de grad* m *având rădăcinile distin*
determine cardinalul mulţimii

$$E = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid \exists A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ a. î. } Q(A) = O_n \text{ şi } P(X) = \det(XI_n$$

Ovidiu Muntean

Soluţie. Fie $P \in E$. Există $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $Q(A) = O_n$ şi $P(x) = \det$
Fie $\lambda \in \mathbb{C}$ o rădăcină a lui P. Rezultă că sistemul $AX = \lambda X$ are şi o soluţie
notată X_0. Este uşor de văzut că $Q(A) X_0 = Q(\lambda) X_0$ şi prin urmare $Q(\lambda$
rădăcinile lui P sunt n numere din mulţimea $\{\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_m\}$, unde λ_i sunt
lui Q. Prin urmare, P este determinat de n numere, nu neapărat distinc
$\ldots$, α_n din mulţimea $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\}$.

Invers, dând un polinom P care are ca rădăcini n numere α_1, α_2, .
mai sus, fie A matricea care are pe diagonala principală $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ş
Evident, $\det(xI_n - A) = (x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n) = P(x)$, iar $Q(A)$ este
care are pe diagonala principală $Q(\alpha_i) = 0$ şi 0 în rest, deci $Q(A) = O_n$.
$P \in E$. Prin urmare, numărul de elemente al lui E este egal cu numărul de
de a alege n numere oarecare dintr-o mulţime cu m elemente, fără a con
adică C_m^n.

L53. *Fie* $n \geq 2$ *şi* $(A, +, \cdot)$ *un inel comutativ cu* n^2 *elemente, care a*
$n-2$ *divizori ai lui zero. Să se arate că* A *este corp.*

Gabriel Dospinescu, ele

Soluţie. Presupunem că A nu este corp. Fie T mulţimea divizorilo
urmează că $T \neq \emptyset$. Presupunem că T are k elemente, $1 \leq k \leq n-2$. C

$x \in T$ şi $a \in A^* \backslash T$. Există $d \neq 0$ încât $xd = dx = 0$. Atunci $(ax)\,d = d\,(ax$
$ax = 0$ sau $ax \in T$. Dacă $ax = 0$, avem $a \in T$, fals. Deci $ax \in T$ şi prin urm
defini $f : A^* \backslash T \to T$, $f(a) = ax$. Cum $A^* \backslash T$ are $n^2 - k - 1$ elemente, T are
şi $\dfrac{n^2 - k - 1}{k} > n$, există elementele diferite $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1} \in A^* \setminus T$ a
$f(a_1) = f(a_2) = \cdots = f(a_{n+1})$. Deducem că $(a_{n+1} - a_i)\,x = x\,(a_{n+1}$
$i = \overline{1,n}$. Deci $a_{n+1} - a_i \in T$ pentru $i = \overline{1,n}$. Aşadar T are cel puţin n
contradicţie.

L54. *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie cu derivata continuă pentru care $f(x) \neq$*
Să se determine funcţiile continue $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care satisfac identitatea

$$f(x)\left[\int_0^y \varphi(t)\,dt - \frac{1}{a}\varphi(y)\right] = f(y)\left[\int_0^x \varphi(t)\,dt - \frac{1}{a}\varphi(x)\right], \quad \forall x, y$$

unde $a \neq 0$ este o constantă dată.

Adrian Corduno

Soluţie. Relaţia dată pote fi scrisă sub forma

$$\frac{\int_0^y \varphi(t)\,dt - \frac{1}{a}\varphi(y)}{f(y)} = \frac{\int_0^x \varphi(t)\,dt - \frac{1}{a}\varphi(x)}{f(x)}, \quad \forall x, y \neq 0.$$

Prin urmare, $\dfrac{\int_0^x \varphi(t)\,dt - \frac{1}{a}\varphi(x)}{f(x)} = c$, $c \in \mathbb{R}$, deci $\displaystyle\int_0^x \varphi(t)\,dt - \frac{1}{a}\varphi(x$
egalitatea având loc şi pentru $x = 0$, în baza continuităţii. Pentru $x =$
$\varphi(0) = -acf(0)$.

Prin derivare obţinem ecuaţia $\varphi(x) - \dfrac{1}{a}\varphi'(x) = cf'(x)$, ce a
$\varphi(x) = e^{ax}\left(k + \displaystyle\int_0^x e^{-at}\left(-acf'(t)\right)dt\right)$, unde $k = \varphi(0) = -acf(0)$
$\varphi(x) = -ace^{ax}\left(f(0) + \displaystyle\int_0^x e^{-at} f'(t)\,dt\right)$, $\forall c \in \mathbb{R}$.

L55. *Fie $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$. Definim şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ prin $x_0 = \dfrac{a-1}{\ln a}$; x*
$-\dfrac{n}{\ln a}\, x_{n-1}$, $\forall n \geq 1$. *Arătaţi că şirul este convergent şi calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ şi*

Gheorghe I

Soluţie. Prin inducţie matematică se arată că $x_n = \displaystyle\int_0^1 a^x x^n dx$
$x_0 = \dfrac{a-1}{\ln a}$. Pentru $a \in (0,1)$ avem $x^n a \leq x^n a^x \leq x^n$, $\forall x \in [0,1]$;
obţinem $\dfrac{a}{n+1} \leq \displaystyle\int_0^1 a^x x^n dx \leq \dfrac{1}{n+1}$. Deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Pentru $a \in ($
$x^n \leq x^n a^x \leq x^n a$, $\forall x \in [0,1]$, deducem $\dfrac{1}{n+1} \leq x_n \leq \dfrac{a}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. C
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

În concluzie, pentru orice $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Din relaţia de
rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} n x_{n-1} = a$, de unde deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} n x_n = a$.

Probleme propuse[1]

Clasele primare

P.74. Descoperă regula de formare, apoi completează şirurile următoa

a) 1,2,3; 2,3,5; 3,□,□; 5,□,□.

b) 11,10,12; 13,12,14; 15,□,□; 17,□,□.

c) 2,6,4; 3,7,5; 4,8,6; 5,□,□; 6,□,□.

(*Clasa I*) **Înv. Maria I**

P.75. Răspundeţi la următoarele întrebări:

a) De câte suprafeţe este mărginit cubul?

b) Ce formă au feţele cuboidului?

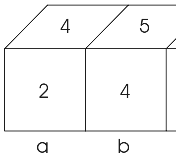
c) Ce formă are un obiect care se aseamănă cu sfera?

(*Clasa I*) **Aliona Loghin, e**

P.76. Completaţi casetele din expresia 6□5□4□3□2□1 cu semnele g sau "−" pentru a obţine cel mai mic rezultat posibil.

(*Clasa a II-a*) **Înv. Gheorghe Toma, Muncelu de S**

P.77. Un corp este format din trei cuburi a, b, c ca în figura alăturată. Fiecare cub are feţele numerotate de la 1 la 6, iar suma numerelor de pe oricare două feţe opuse ale sale este 7. Ştiind că pe feţele lipite ale cuburilor a şi b este scris acelaşi număr şi că aceeaşi proprietate o au şi cuburile b şi c, să se afle suma tuturor numerelor scrise pe feţele corpului văd.



(*Clasa a II-a*) **Oxana Pascal, e**

P.78. a) Verifică egalităţile: $1+3+5+7=4\times 4$, $1+3+5+7+9+$

b) Scrie rezultatul la fel ca la punctul a) pentru $1+3+5+7+\cdots+$

(*Clasa a III-a*) **Andreea Surugiu, stud**

P.79. 7 elevi mănâcă 7 ingheţate în 6 minute. Câţi elevi vor mânca 24 în 36 minute?

(*Clasa a III-a*) **Alexandru Tudorache,**

P.80. Două oraşe sunt legate printr-o linie de cale ferată. La fiecare un tren din fiecare oraş către celălalt. Toate trenurile merg cu aceeaşi vitez călătorie de la un oraş la altul durează 6 ore. De câte ori fiecare tren, car distanţa dintre oraşe, se întâlneşte cu trenuri care merg în sens opus?

(*Clasa a IV-a*) **Alexandru Tudorache,**

P.81. Să se arate că din feţele unui cub confecţionat din carton puter fără resturi, feţele a şase cuburi.

(*Clasa a IV-a*) **Petru As**

P.82. Să se afle cel mai mare număr natural de forma $\overline{abcd}$ cu pr $a\neq d$, $b+c=5\,(a+d)$.

(*Clasa a IV-a*) **Adrian Andronic,**

P.83. Mircea împreună cu fratele său au un număr de bomboane mai 30. Mircea are de 3 ori mai multe decât fratele său. Aflaţi câte bomboane

[1] Se primesc soluţii până la data de 1 iunie 2005.

îi dea Mircea fratelui său pentru a rămâne cu un număr de două ori mai m
al fratelui. Câte bomboane avea Mircea la început şi cu câte a rămas?
(*Clasa a IV-a*) **Inst. Tudor Tudorache**

Clasa a V-a

V.51. Între oricare două numere naturale definim operaţia $a * b = a^b$

a) Să se rezolve ecuaţia $2 * (x + 1) = 34$.

b) Este operaţia dată comutativă?

Vasile Solcanu, Bogdăneşti (

V.52. Un dreptunghi se poate descompune în 1344 pătrate de arie 25 c
perimetrul dreptunghiului dacă acesta este: a) maxim posibil; b) minim p

Romanţa Ghiţă şi Ioan Gh

V.53. Determinaţi $n \in \mathbb{N}$ pentru care

$$\frac{\dfrac{3}{2} - \left(1 + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{3^n}\right)}{\dfrac{5}{4} - \left(1 + \dfrac{1}{5} + \cdots + \dfrac{1}{5^n}\right)} = \frac{2 + 6 + \cdots + 98}{1 + 3 + \cdots + 17}.$$

Viorel Cornea, H

V.54. Să se arate că nu există numere raţionale pozitive a, b, c a
$\dfrac{a+b}{ab} = 2^{2003}$, $\dfrac{b+c}{bc} = 2^{2004}$ şi $\dfrac{c+a}{ca} = 2^{2005}$.

Andrei - Sorin Cozma,

V.55. Fie numărul raţional $N = \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{2}{a_2} + \dfrac{3}{a_3} + \cdots + \dfrac{2004}{a_{2004}}$, und
$i = \overline{1, 2004}$. Să se arate că există $a_1, a_2, \ldots, a_{2004}$ astfel încât $N = \dfrac{1}{20}$
ralizare.

Petru As

Clasa a VI-a

VI.51. Pentru efectuarea unei lucrări, trei muncitori au fost retribui
de bani direct proporţionale cu numerele 16, 14, 17. Unul dintre muncito
că dacă sumele primite ar fi fost invers proporţionale cu numerele 3, 4,
primit mai puţin cu 1000000 lei. Aflaţi ce sumă de bani a primit fiecare m

Ion Vişan

VI.52. Determinaţi numerele întregi n care pot fi scrise sub forma $n =$
cu a, b, $c \in \mathbb{Z}^*$.

Gheorghe I

VI.53. Se dă unghiul ascuţit $\widehat{xOy}$ şi punctele $A, B \in (Ox$, $C, D \in$
încât $A \in (OB)$, $C \in (OD)$, $AB \neq CD$ şi $t \cdot OA + s \cdot AB = t \cdot OC +$
$s, t \in \mathbb{R}^*$. Atunci mediatoarele segmentelor $[AB]$ şi $[CD]$ şi bisectoarea lu
trei drepte concurente dacă şi numai dacă $t = 2s$.

Ioan Săcălean

VI.54. Fie $\triangle ABC$ isoscel ($AB = AC$), N mijlocul lui $[AC]$, iar D u
prelungirea lui $[BC]$ astfel încât $CD < BC$. Să se arate că între triunghi
şi NCD nu există nici o congruenţă.

Romanţa Ghiţă şi Ioan Gh

VI.55. Fie punctele O, A_1, A_2, A_3, ... astfel încât $OA_1 = OA_2 = O$
$= 1$ cm, iar $m(\widehat{A_1OA_2}) = 1°$, $m(\widehat{A_2OA_3}) = 2°$, $m(\widehat{A_3OA_4}) = 3°$ etc. (to
urile se consideră în sens orar). Să se arate că există $k \neq l$ astfel încât A_k

Cristian L

Clasa a VII-a

VII.51. Fie $a, b \in \mathbb{N}$ astfel încât $n^{2004} - a$ se divide cu $n - b$, pentru o
$n \neq b$. Să se arate că $a = b^{2004}$.

Alexandru Negrescu, elev,

VII.52. Fie a, b, $c \in \mathbb{R}$ cu $a + b + c = 0$; să se arate că

$$\left(a^3 - b^3\right)^3 + \left(b^3 - c^3\right)^3 + \left(c^3 - a^3\right)^3 = 3(a-b)(b-c)(c-a)\left(a^2 - bc\right)\left(b^2 - ac\right.$$

Anca Tuţescu, elevă

VII.53. Determinaţi m, n, $p \in \mathbb{Z}$ astfel încât soluţia inecuaţiei $|mx -$
fie $[p, p + m + 1]$.

Ciprian Ba

VII.54. Se consideră unghiul $\widehat{xOy}$ de măsură $10°$ şi un segment $[MN]$
a. Să se construiască, folosind numai rigla şi compasul, un triunghi d
OAB, $A \in (Ox$, $B \in (Oy$, având o catetă de lungime a.

Florin Asăvoaie,

VII.55. Fie $ABCD$ patrulater convex, iar $\{O\} = AC \cap BD$. Bisec
terioare ale unghiurilor $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$, $\widehat{DOA}$ taie laturile (AB), $(B$
respectiv (DA) în M, N, P, respectiv Q. Să se arate că dreptele MQ,
sunt concurente sau paralele.

Constantin Cocea şi Dumitru N

Clasa a VIII-a

VIII.51. Se consideră funcţiile $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite prin $f(x) =$
$= \dfrac{x}{\sqrt{3}}$, $h(x) = 3$. Notăm $\{A\} = G_g \cap G_h$, $\{B\} = G_f \cap G_h$, iar C şi D sunt p
intersecţie ale dreptei $x = 2$ cu G_f, respectiv G_g. Determinaţi măsurile u
perimetrul şi aria patrulaterului $ABCD$.

Dumitru - Dominic Buc

VIII.52. Fie $E(x, y) = 2004 - 2x^2 - 5y^2 + 2xy + 6y$, cu $x, y \in \mathbb{N}$. D
valoarea maximă a lui E.

Gheorghe I

VIII.53. Să se arate că pentru orice $a, b, c \in \mathbb{R}$, are loc inegalitatea

$$a^4 + b^4 + c^4 + 3a^2b^2 + 3a^2c^2 + 3b^2c^2 \geq 2\left(a^3b + ab^3 + a^3c + ac^3 + b^3c\right.$$

Marian Tetiv

VIII.54. Pentru $a, b, c \in (0, \infty)$, să se demonstreze inegalitatea

$$a + \sqrt{b^2 + c^2} - \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} < \frac{2a\sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} < a + \sqrt{b^2 + c^2}$$

Radu Frunză şi Mircea Coşbuc,

VIII.55. O piramidă triunghiulară regulată este tetraedru regulat dac
dacă unghiurile făcute de o faţă laterală cu planul bazei, respectiv cu
laterală, sunt congruente.

Claudiu - Ştefan

Clasa a IX-a

IX.51. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin: $a_1 = 1+2-3$; $a_2 = a_1+4+5+$
$a_3 = a_2+9+10+11+12-13-14-15$ etc.

a) Să se determine semnele cu care apar 100 în a_{100}, respectiv 91 în a

b) Să se afle formula termenului general al şirului.

Lidia Nicola

IX.52. Să se determine funcţiile $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile: $f($
f este pară, g este impară şi există $a, b \in \mathbb{N}$ astfel încat $f(x) = f\big(x$
$g(x) = g\left(x^2+x+b\right)$, $\forall x \in \mathbb{Z}$.

D. M. Bătineţu-Giurgiu,

IX.53. Există funcţii $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care

$$|f(x+y+z+t) + \cos x + \cos y + \cos z + \cos t| < 4, \quad \forall x, y, z, t \in$$

Lucian Tuţescu

IX.54. Fie $ABCD$ un pătrat de latură a, iar $T \in (AD)$ astfel încât $m($
Notăm $\{S\} = AC \cap BT$ şi fie R punctul în care perpendiculara în S pe
sectează AB.

a) Să se arate că $\triangle RST$ este isoscel.

b) Să se exprime RS funcţie de a şi α.

Gheorghe Cost

IX.55. Fie ABC un triunghi cu $c < b$. Notăm cu M şi N mijloace
$[AB]$, respectiv $[AC]$ şi cu D şi E punctele de tangenţă a cercurilor înscris
A- exînscris triunghiului cu latura $[BC]$. Arătaţi că

(i) ME şi ND se intersectează pe mediana din vârful A;

(ii) $MD \parallel NE \Leftrightarrow a = 2(b-c)$;

(iii) dacă $a \neq 2(b-c)$, atunci MD şi NE se intersectează pe prelungire
din A.

Temistocle Bî

Clasa a X-a

X.51. Fie $OABC$ un tetraedru cu $OA \perp OB \perp OC$, circumscris un
rază r. Dacă R este raza cercului circumscris $\triangle ABC$, atunci $\dfrac{R}{r} \leq \dfrac{\sqrt{3}+}{2}$

Cezar Lupu, elev, C

X.52. Fie polinomul

$$P(X) = \left(1+X+X^2\right)^{6n+1} = \sum_{k=0}^{12n+2} a_k X^k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Să se arate că $\sum\limits_{k=0}^{2n} a_{6k} = \sum\limits_{k=0}^{2n} a_{6k+2}$.

Cătălin Cali

X.53. Fie $a, b, c \in (1, \infty)$ astfel încât $a+b+c = 9$. Să se arate că

$$\log_a\left(2b^3+c^3\right) + \log_b\left(2c^3+a^3\right) + \log_c\left(2a^3+b^3\right) \geq 12.$$

Angela Ţigăeru

X.54. Definim mulţimile A_k, $k \geq 1$, prin

$$A_1 = \left\{\frac{n}{2003} \mid n = 1, 2, \ldots, 10000\right\} \setminus \{1\}; \quad A_k = (A_{k-1} \setminus \{a, b\}) \cup \{a$$

cu $a, b \in A_{k-1}$ arbitrare, $k \geq 2$. Să se determine A_{9999}.

Marius Pachiţariu,

X.55. Fie $a, b \in \mathbb{Z}$ cu $a^2 - 4b < 0$, iar ε o soluţie a ecuaţiei $x^2 + a$ Definim funcţia $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x, y) = x^2 - axy + by^2$. Pentru ori $(x, y) \in f^{-1}(1)$, să se arate că $(x + \varepsilon y)^{\operatorname{card} f^{-1}(1)} = 1$.

Andrei Ned

Clasa a XI-a

XI.51. Să se calculeze determinantul unei matrice pătratice de ordinul are toţi minorii de ordin trei egali.

Lucian - Georges Lădu

XI.52. Fie funcţia $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to [0, \infty)$, $f(A) = \det\left(A^2 + I_2\right)$, $\forall A \in$

a) Să se arate că $f(A) = (\det A - 1)^2 + (\operatorname{tr} A)^2$, $\forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Să se demonstreze că f este surjectivă, dar nu este injectivă.

Ovidiu Pop, S

XI.53. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$; pentru $n \geq 3$, definim

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} \cos\left(\alpha + \frac{2k\pi}{n}\right) - \cos\alpha & \sin\left(\alpha + \frac{2k\pi}{n}\right) - \sin\alpha \\ \cos\left(\alpha + \frac{2(k+1)\pi}{n}\right) - \cos\alpha & \sin\left(\alpha + \frac{2(k+1)\pi}{n}\right) - \sin\alpha \end{vmatrix}, \quad \forall k$$

Să se calculeze limita şirului $(a_n)_{n \geq 3}$, $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n-2} |\Delta_k|$.

Gheorghe Croitoru şi Gabriel

XI.54. Fie $k \in \mathbb{N}^*$; să se arate că ecuaţia $x^{n+k} - x^n - x^{n-1} - \cdots - x$ o singură soluţie pozitivă, pe care o notăm x_n. Să se arate apoi că şirul $(x$ convergent; ce se poate spune despre limita sa?

Dumitru Mihalache şi Marian Tetiv

XI.55. Determinaţi toate funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care

$$f\left(x^{2n+1} + x\right) \leq x \leq f^{2n+1}(x) + f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

unde $n \in \mathbb{N}$. (În legătură cu problema 2811 din *Crux Mathematicorum*, n

Titu Zvonaru, C

Clasa a XII-a

XII.51. Să se arate că şirul $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = \displaystyle\int_{1/n}^{1} \frac{\sin x}{x^p}\, dx$, $p < 2$, este c

Rodica Luca Tudor

XII.52. Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ derivabilă, cu derivata continuă, astfel încâ $f(x) + f'(x) = 0$, $\forall x \in [0, 1]$. Să se arate că

$$\int_0^1 f(x)\, dx \leq \frac{(2e - 5) f(1)}{5} + \frac{4}{e} \int_1^2 \frac{xe^x f(x-1)}{\left(x^2 + 1\right)^2}\, dx.$$

Mihail Bencz

XII.53. Prove that

$$\frac{2\left(e^x - 1\right)}{e^x + 1} \leq \int_{-x}^{x} \frac{\sqrt{e^t}}{e^t + 1}\, dt \leq x, \quad \forall x \geq 0.$$

Zdravko Starc, Vrsac, Serbia and Mo

XII.54. Să se afle funcţiile continue $u = u(t)$, soluţii ale ecuaţiei
$$u(t) = \alpha + \int_0^t b(s)\,u(s)\,ds + \int_0^a b(s)\,u(s)\,ds, \quad 0 \le t \le a,$$
unde α este constantă, iar $b = b(t)$ este continuă pe $[0, a]$.

Adrian Cordun

XII.55. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, există monoizi care nu su
şi care conţin exact n elemente inversabile.

Paul Georgescu şi Gabriel

Probleme pentru pregătirea concursurilo

A. Nivel gimnazial

G66. Se consideră mulţimea $A = \{1, n+1, 2n+1, \ldots, mn+1\}$, n
$m > n$. Să se afle câte valori distincte poate lua suma $a_1 + a_2 + \cdots$
$a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$.

Petru As

G67. Fie $b \in \mathbb{N}$, $b \ge 2$. Spunem că un număr natural este *decompoza*
poate scrie ca suma a două numere cu aceeşi sumă a cifrelor în baza b.
că există o infinitate de numere care nu sunt decompozabile.

Adrian Zahariuc, ele

G68. Fie $N \in \mathbb{N}^*$; să se arate că există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât factorial
număr natural să nu se termine cu $n, n+1, \ldots, n+N$ zerouri.

Iuliana Georg

G69. Fie $E(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{R}$. Dacă $a + b + c \in \mathbb{Z}$
există o infinitate de numere întregi n astfel încât $E(n)$ să fie număr într

Gheorghe I

G70. Să se arate că ecuaţia $x^2 + y^2 + 3x + y - 707 = 0$ nu are soluţii

Dan Popescu

G71. Fie $(m, n) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Să se demonstreze inegalitatea
$$\frac{a}{(m+n)a^2 + mb^2 + nc^2} + \frac{b}{(m+n)b^2 + mc^2 + na^2} + \frac{c}{(m+n)c^2 + ma^2}$$
$$\le \frac{1}{2(m+n)}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right), \quad \forall a, b, c \in (0, \infty).$$

Titu Zvonaru, C

G72. Fie $\triangle ABC$ circumscris cercului de centru I. Cercul de diar
intersectează bisectoarele unghiurilor $\widehat{B}$ şi $\widehat{C}$ în M, respectiv N. Să se ara
N se află pe dreapta suport a liniei mijlocii paralele cu BC.

Doru B

G73. Fie $ABCD$ un dreptunghi de centru O. Considerăm $N \in (AO)$,
lui $[AD]$, $\{P\} = MN \cap CD$, $\{E\} = OP \cap BC$. Să se arate că $NE \perp BC$.

Andrei Ned

G74. Fie n puncte în spaţiu astfel încât oricare patru să formeze te
volum cel mult 1. Să se arate că există un tetraedru de volum cel mult
conţină în interior toate cele n puncte.

Tudor Chirilă,

G75. Fie $A_1A_2\ldots A_n$ un poligon regulat de latură 1, $n \geq 4$. Pe latu
se consideră punctul P_1 cu $P_1A_1 = a \in (0,1)$. Din punctul P_1 se propagă
lumină care se reflectă de laturile $[A_2A_3]$, $[A_3A_4]$, $\ldots$, generând pe latu
de incidenţă P_2, P_3, $\ldots$ (presupunând că raza de lumină nu ajunge niciod
vârf al poligonului) astfel încât $m(\widehat{A_2P_1P_2}) = \alpha \in \left(\frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}\right)$. Să se af
minimă a lui l pentru care P_l şi P_{l+1} nu aparţin la două laturi consecutiv

Irina Mustaţă, e

B. Nivel liceal

L66. Fie ABC un triunghi, D şi D_a punctele în care cercurile în
exînscris sunt tangente la BC şi E_b, F_c punctele în care cercurile B-exîn
exînscris sunt tangente la AC şi respectiv AB. Să se arate că punctele
F_c sunt conciclice dacă şi numai dacă $AB = AC$ sau $m(\widehat{A}) = 90°$.

Temistocle Bî

L67. Dreptele paralele t_1 şi t_2 sunt tangente cercului $\mathcal{C}$ de centru O.
de centru O_1 este tangent la t_1 şi $\mathcal{C}$, iar cercul $\mathcal{C}_2$ de centru O_2 este tange
şi $\mathcal{C}_1$; cele trei cercuri sunt exterioare unul celuilalt. Să se arate că ungh
este ascuţit şi să se afle valoarea maximă a măsurii acestuia.

Neculai Roman, Mirc

L68. a) Pentru $x, y, z \in (0, \infty)$, să se demonstreze inegalitatea

$$\sqrt{(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)} \geq 1 + \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}.$$

b) Folosind eventual a), să se arate că în orice triunghi, cu notaţiile u
loc inegalitatea

$$\sqrt{1 + 4 \cdot \frac{R}{r}} \geq 1 + \sqrt{\frac{p-a}{p-b}} + \sqrt{\frac{p-b}{p-a}}.$$

Marian Tetiv

L69. Pentru ce numere naturale $n \geq 3$, există în plan n puncte alb
puncte roşii, oricare trei necoliniare, astfel încât în interiorul oricărui t
vârfurile albastre să existe cel puţin un punct roşu, iar în interiorul oricăr
cu vârfurile roşii să existe cel puţin un punct albastru?

Adrian Zahariuc, ele

L70. Fie $k, p \in \mathbb{N}^*$ şi un dreptunghi de dimensiuni $82k \times 2p$, acoperit
fără suprapuneri cu dreptunghiuri 7×5 şi 6×4. Să se arate că numărul p
(x, y), x par, y impar, ale dreptunghiului mare, care sunt colţuri în dre
7×5, este egal cu numărul de dreptunghiuri 7×5. (Prin dreptunghiuri 7×5
dreptunghiuri cu lungimea egală cu 7 şi lăţimea egală cu 5.)

Marius Pachiţariu,

L71. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ fixat. Să se determine cea mai tare inegalitate

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k^2 + n^2 - 1} \leq m \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k + M,$$

unde m, M nu depind de $a_1, a_2, \ldots, a_n$, valabilă pentru orice numere a
a_n pozitive şi cu produsul 1.

Gabriel Dospinescu, I

L72. Fie a, b numere raţionale, pozitive, distincte, astfel încât $a^n - b^n$
o infinitate de numere naturale n. Să se arate că a şi b sunt întregi.

Gabriel Dospinescu, I

L73. Fie $k \in \mathbb{N}^*$, $k \geq 3$. Să se determine $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ pentru care

$$\sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \cdots + \sqrt{a_k}}} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_k}, \quad \forall a_1, a_2, \ldots, a_k \in [0,$$

Gabriel Popa şi Paul Georg

L74. Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ şi $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este
$\int_a^b x^k f(x)\, dx = 0$ pentru $0 \leq k \leq n$, atunci f are cel puţin $n + 1$ zerouri
(a, b).

Andrei Ned

L75. Să se determine $n \in \mathbb{N}$ pentru care este adevărată inegalitatea

$$\cos\varphi < \frac{1}{\sqrt[8]{1 + n\sin^4\varphi}}, \quad \forall \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Cătălin Cali

Training problems for mathematical conte

Junior high school level

G66. Considering the set $A = \{1, n+1, 2n+1, \ldots, mn+1\}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$,
the number of distinct values taken by the sum $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, when $a_1, a_2,$

Petru As

G67. Let $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$. It is said that $G \in \mathbb{N}$ is *decomposable* if we can
a sum of two numbers such that their expansions in the basis b have the sa
digits. Prove that there exist infinitely many numbers which are not deco

Adrian Zahariuc, high school stude

G68. Let $N \in \mathbb{N}^*$. Prove that there is $n \in \mathbb{N}$ such that no factorial
$n + 1, \ldots, n + N$ zeros.

Iuliana Georg

G69. Let $E(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{R}$. If $a + b + c$ is an int
that there exist infinitely many integers n such that $E(n)$ is also an integ

Gheorghe I

G70. Prove that the equation $x^2 + y^2 + 3x + y - 707 = 0$ has no solut

Dan Pop

G71. Let $(m,n) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Prove that

$$\frac{a}{(m+n)a^2+mb^2+nc^2}+\frac{b}{(m+n)b^2+mc^2+na^2}+\frac{c}{(m+n)c^2+ma^2}$$
$$\leq \frac{1}{2(m+n)}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right), \quad \forall a,b,c \in (0,\infty).$$

Titu Zvonaru, C

G72. Let I be the incenter of a triangle ABC. The circle with dia meets the bisectors of $\widehat{B}$ and $\widehat{C}$ in M, respectively N. Prove that M an the line joining the midpoints of $[AB]$ and $[AC]$.

Doru B

G73. Let $ABCD$ be a rectangle with center O. Let $N \in (AO)$, let midpoint of $[AD]$ and let $\{P\} = MN \cap CD$, $\{E\} = OP \cap BC$. Prove that

Andrei Ned

G74. Let us consider n points such that any given four are the ve tethraedron with volume at most 1. Prove that there is a tethraedron w at most 27 which contains all n points in its interior.

Tudor Chirilă, high school stu

G75. Let $A_1A_2\ldots A_n$ be a regular n-gon with side 1, $n \geq 4$. We c on the side $[A_1A_2]$ such that $P_1A_1 = a \in (0,1)$. A ray of light is emitte towards and is reflected by the sides $[A_2A_3]$, $[A_3A_4]$, ... , generating the points P_2, ... , P_n (supposing that the ray never meets the vertices A_1, A such that $m(\widehat{A_2P_1P_2}) = \alpha \in \left(\frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}\right)$. Find the minimal value of l such t P_{l+1} do not belong to adjacent sides.

Irina Mustaţă, high school stu

High school level

L66. Let ABC be a given triangle and let D, D_a be the points in incircle, respectively the A-escribed circle are tangent to the side BC. L F_c be the points in which the B-escribed and C-escribed circles are tang side AC, respectively to the side AB. Prove that D, D_a, E_b, F_c are concy only if $AB = AC$ or $m(\widehat{A}) = 90°$.

Temistocle Bî

L67. The parallel lines t_1 and t_2 are tangent to the circle $\mathcal{C}$ with cen circle $\mathcal{C}_1$ with center O_1 is tangent to t_1 and $\mathcal{C}$ and the circle $\mathcal{C}_2$ with ce tangent to t_2, $\mathcal{C}$ and $\mathcal{C}_1$; $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$ and $\mathcal{C}_2$ being exterior to each other. Prov angle $\widehat{O_1OO_2}$ is acute and find the minimum value of its measure.

Neculai Roman, Mirc

L68. $a)$ Prove that, for $x,y,z \in (0,\infty)$,

$$\sqrt{(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)} \geq 1+\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}.$$

b) Using *a*), prove that

$$\sqrt{1+4\cdot\frac{R}{r}}\geq 1+\sqrt{\frac{p-a}{p-b}}+\sqrt{\frac{p-b}{p-a}}$$

for any given triangle with the usual notations.

Marian Tetiv

L69. Find $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$, such that there are n blue points and n re
the same plane, no three points being collinear, such that the interior of a
with blue vertices contains at least one red point and the interior of any tri
red vertices contains at least one blue point.

Adrian Zahariuc, high school studen

L70. Let $k,p\in\mathbb{N}^*$ and let a $82k\times 2p$ rectangle which is completely co
7×5 and 6×4 rectangles with no superpositions. Prove that the number
(x,y) with side 1, x even, y odd, which are vertices of 7×5 rectangles
total number of 7×5 rectangles. (By a 7×5 rectangle we mean a rect
length 7 and height 5).

Marius Pachiţariu, high school stu

L71. Let $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Find the best constants m, M such that

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k^2+n^2-1}\leq m\cdot\sum_{k=1}^{n}a_k+M$$

for any $a_1,a_2,\ldots,a_n>0$ satisfying $a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n=1$.

Gabriel Dospinescu, I

L72. Let $a,b\in\mathbb{Q}$, $a,b>0$, $a\neq b$ such that $a^n-b^n\in\mathbb{Z}$ for infinitely m
Prove that $a,b\in\mathbb{Z}$.

Gabriel Dospinescu, I

L73. Let $k\in\mathbb{N}^*$, $k\geq 3$. Find $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ such that

$$\sqrt{a_1+\sqrt{a_2+\cdots+\sqrt{a_k}}}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_k},\quad\forall a_1,a_2,\ldots,a_k\in[0,$$

Gabriel Popa and Paul Georg

L74. Let $n\in\mathbb{N}^*$, $n\geq 2$ and $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$. If $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ is a
function such that $\int_a^b x^k f(x)\,dx=0$ for any $k\in\mathbb{N}$, $0\leq k\leq n$, then f h
$n+1$ distinct zeros in (a,b).

Andrei Ned

L75. Find $n\in\mathbb{N}$ such that

$$\cos\varphi<\frac{1}{\sqrt[8]{1+n\sin^4\varphi}},\quad\forall\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right].$$

Cătălin Cali

Pagina rezolvitorilor

BOTOŞANI

Şcoala nr. 7 "O. Băncilă". **Clasa a IV-a.** IFTODE Cozmin: P(54-5
67,68,70).

Colegiul Naţional "A. T. Laurian". **Clasa a IX-a**. NEGRESCU
VII(43,47,48), VIII(47,49), IX(42,46,48), X.42, G46.

CRAIOVA

Şcoala nr. 22 "M. Eliade". **Clasa a IV-a** (inst. VANŢU Angela).
Ioan: P (64-73)

IAŞI

Şcoala nr. 3 "Al. Vlahuţă". **Clasa a V-a.** COJOCARU Ioana: P
49),VI.46; DODU Corina: P.71, V(47-49),VI.46; IRIMIA Andreea: P
49),VI.46; ŞTIRBAN Ioana: P.71, V(47-49),VI.46; UNGURU George Cla
V(47-49),VI.46.

Şcoala nr. 7 "N. Tonitza". **Clasa a II-a** (înv. TUDOSE Elena). DOBR
Maria: P(64-68,70,72); LEONTE Anca: P(64-68,70,72); POSTICĂ Simon
dra: P(64-68,70,72); ROTARU Larisa-Maria: P(64-68,70,72); SAVIN Răz
68,70,72). **Clasa a II-a** (înv. MELINTE Rodica). BACIU Ciprian: P(64
BÂRZU Constantin: P(64-69,71,72); BOTOŞANU Bianca-Mihaela: P(64
BUZDUGAN Petru-Cătălin: P(64-69,71,72); CEUCĂ Dănuţ-Vasilică:
72); CONSTANTINESCU Diana-Gabriela: P(64-69,71,72); CUCUTEA
Cătălin: P(64-69,71,72); GUŞOVATE Diana-Ştefana: P(64-69,71,72);
Larisa-Diana: P(64-69,71,72); MIRON Vlad-Ştefan: P(64-69,71,72); MOT
na-Diana: P(64-69,71,72); ROTARIU Marian: P(64-69,71,72); SUCIU
P(64-69,71,72); TEIU-COSTIN Andra-Mihaela: P(64-69,71,72). **Clas**
(înv. PAŞANIUC Maria). ATASIEI Vlăduţ: P(64,65,67,68,72); PĂSĂROI
P(66-68,70,71); SOLOMON Ana-Maria: (65,68-71); TINCU Andrei:
70,72); ZAMFIR Loredana-Cristiana: P(64,65,69-71). **Clasa a III-a** (înv.
Gabriela). ADĂSCĂLIŢEI IONUŢ: P(65,68-71); GHIARASIM Olivia:
68,72); MACOVEI Alina: P(64,65,68-70,72); NEGRESCU Vlad-Petru:
71); TROCIN Monica-Andreea: P(66,68-71).

Şcoala nr. 13 "Alexandru cel Bun". **Clasa a IV-a** (inst. COJOCARIU
BILIŢĂ Cătălina-Elena: P(64-68,70); CURMEI Renata-Maria: P(64-68,7
Radu: P(64-68,70); ILIE Laura: P(64-68,70); MAGDICI Magda-Otilia: P
MARDARI Claudiu: P(64-68,70); LUCAN Mihaela-Alexandra; P(64-68,7
FOR Ştefan-Marian: P(64-68,70); NICULAE-GRIGORESCU Andrei: P
PRISACARU Carmen-Georgiana: P(64-68,70); PETREA Silvia: P(64-6
FAN Teodora-Ioana: P(64-68,70); TÂRLĂGEANU Ingrid-Maria: P(64-6

Şcoala nr. 17 "I. Creangă". **Clasa a VIII-a.** DUMITRIU Vlad: VI(46-
VIII.46.

Şcoala nr. 22 "B. P. Hasdeu". **Clasa I** (înv. ŞTEFAN Liviu). DĂ
drin P(55,64,65,67,71); IGNAT Andreea: P(54-56,64,65); NICOLA De
P(55,64,65,67,71); PURICE Dumitru-Ciprian: P(64-67,71). **Clasa a II-a**

HOTARU Liliana). TURCU Andrei-Daniel: P(64-67,71); **Clasa a II-a** (în
ORU Iuliana). ADĂSCĂLIŢEI Victor: P(64-69,71,72); APOSTOL A
P(64-68,71,72); BALAN Andrei: P(64-68,71,72); BURUIANĂ Cătălina: P
CUBERSCHI Paul: P(64-67,70-72); EŞANU Georgiana: P(64-68,71); GR
Claudiu: P(64-68,72); GÂNDU Alexandra-Livia: P(64-66,68,71,72); LĂM
na: P(61,64-68,71); MOGA Alexandru: P(64-68,71,72); REBEGEA Andr
68,71); UNGUREANU Teofana: P(64-68,71,72). **Clasa a II-a** (înv. TUT
AILENEI-OPREA Adriana: P(64-68); ANDRONICIUC Ana-Miruna: P(6
LĂDEANU Claus-Alex: P(64-66,68,71); BOARU Adrian: P(64-66,68,71);
NĂ Sebastian-Andrei: P(64-68,71): BUHU Vlad: P(64-68,71); CEOBAN
Nicolae: P(64-67,71); CHICHIRĂU Alexandra-Elena: P(64-68,71); COST
Ivona: P(64-68,71); DĂNILĂ Alexandru: P(64-66,68,71); DIACONES
P(64-68,71); DOROHOI Ovidiu: P(64-68,71); GHERAN Ana-Maria: P(64
GRIGORE Georgiana: P(64-68,71); GURĂU Raluca-Claudia: P(64-68,71
CU Iustina: P(64-68,71); HORBOVANU Bianca-Alexandra: P(64-68,71);
Andrei-Ionuţ: P(64-68,71); ONOFREI Liviana Ana-Maria: P(64-68,7
Andrei: P(64-66,68,71); SIMIRAD Andrei: P(54,55,57-59,61,62,64-72);
Alexandra-Arina: P(64-66,68,71). **Clasa a V-a.** PINTILIE Mina-Liviu: P
73); PINTILIE Nicoleta-Livia: P(61,62,71-73); ŞTERBULEAC Daniel: P
73),V(42,43).

Şcoala nr. 23 "T. Maiorescu". **Clasa a IV-a** (înv. CHIRILĂ Beatrice
RACHE Alexandru-Gabriel: P(64-73).

Şcoala nr. 26 "G. Coşbuc". **Clasa a II-a** (înv. BUCATARIU Rica)
Robert-Ionuţ: P(54-57,64-67); IVANCIUC Dumitru-Florin: P(55,64-67
Adrian-Bogdan: P(54-57,64-67); SANDU Ioana-Luiza: P(54-57,64-67); S
Ionela-Cristina: P(54-57,64-67). **Clasa a III-a** (înv. RACU Maria). B
Ionela-Alexandra: P(64-68,70-72); BURLACU Ştefan-Claudiu: P(64-68,7
LIN Andreea-Georgiana: P(64-68,70-72); IFROSĂ Adriana: P(64,66-72);
tru-Alexandru: P(64-70,72); MOISA Bogdan: P(64-68,70-72); PINTILI
Florin: P(64-68,70-72); RĂZLOG Ionuţ: P(64-68,70-72). **Clasa a III-a** (în
Paraschiva). ALUPEI Andra-Mădălina: P(64-67,68,70,71); CIOABĂ Oana
P(64-68,70,71); GHERCĂ Marius-Cătălin: P(64-68,70,71); HOMEA Li
68,70,71); HUIDEŞ Gina: P(64-68,70,71); MANOLIU Mădălina: P(64
MIHĂILESCU Laura; P(64-68,70,71); PISICĂ Alexandru: P(64-68,70,7
Florin: P(64-68,70,71); SCUTARU Constantin: P(64-68,70,71,73).

Colegiul Naţional "C. Negruzzi". **Clasa a V-a.** ANDRIESCU Gabriela
59,61,63),V.42; TIBA Marius: P(71-73),V(46,47,49,50),VI.46.

Colegiul Naţional Iaşi. **Clasa a V-a.** VÂLCU Maria Caterina: V(40,

Liceul "M. Eminescu". **Clasa a VI-a.** CIURARU Ionela: V(46,48), VI
IPATE Cristina: V(46,48),VI(47,48,50). **Clasa a IX-a.** AVRAM Mircea:
44,46,48). **Clasa a X-a.** COMAN Ştefan: VIII(46,49), IX(46,47), X.47.

Premii acordate rezolvitorilor

Pentru apariţia de trei ori la rubrica *"Pagina rezolvitorilor"* redacţ
"Recreaţii matematice" acordă o **diplomă** şi un **premiu** în cărţi elevilor

Şcoala nr. 22 "M. Eliade", Craiova
STANCIU Ioan (cl. a IV-a): 2/2003 (9pb), 1/2004 (10pb), 2/2004 (10p

Şcoala nr. 7 "N. Tonitza"
BACIU Ciprian (cl. a II-a): 2/2003 (5pb), 1/2004 (5pb), 2/2004 (8pb)
BÂRZU Constantin (cl. a II-a): 2/2003 (5pb), 1/2004 (5pb), 2/2004 (
BOTOŞANU Bianca-Mihaela (cl. a II-a): 2/2003 (5pb), 1/2004 (5pb
(7pb);
BUZDUGAN Petru-Cătălin (cl. a II-a): 2/2003 (5pb), 1/2004 (5pb),
(7pb);
CEUCĂ Dănuţ-Vasilică (cl. a II-a): 2/2003 (5pb), 1/2004 (5pb), 2/20
CONSTANTINESCU Diana-Gabriela (cl. a II-a): 2/2003 (5pb), 1/2
2/2004 (8pb);
CUCUTEANU Paul-Cătălin (cl. a II-a): 2/2003 (5pb), 1/2004 (5pb)
(8pb);
DOBRIN Diana-Maria (cl. a II-a): 2/2003 (5pb), 1/2004 (5pb), 2/200
GUŞOVATE Diana-Ştefana (cl. a II-a): 2/2003 (5pb), 1/2004 (5pb),
(8pb);
LEOGAN Larisa-Diana (cl. a II-a): 2/2003 (5pb), 1/2004 (5pb), 2/20
LEONTE Anca (cl. a II-a): 2/2003 (5pb), 1/2004 (5pb), 2/2004 (7pb);
MIRON Vlad-Ştefan (cl. a II-a): 2/2003 (5pb), 1/2004 (5pb), 2/2004
MOTAN Geanina-Diana (cl. a II-a): 2/2003 (5pb), 1/2004 (5pb), 2/2
POSTICĂ Simona-Alexandra (cl. a II-a): 2/2003 (5pb), 1/2004 (5pb
(7pb);
ROTARIU Larisa-Maria (cl. a II-a): 2/2003 (5pb), 1/2004 (5pb), 2/2
ROTARIU Marian (cl. a II-a): 2/2003 (5pb), 1/2004 (5pb), 2/2004 (8
SUCIUC Raluca (cl. a II-a): 2/2003 (5pb), 1/2004 (5pb), 2/2004 (8pb)
TEIU-COSTIN Andrada-Mihaela (cl. a II-a): 2/2003 (5pb), 1/2004
2/2004 (8pb).

Şcoala nr. 22 "B. P. Hasdeu"
ADĂSCĂLIŢEI Victor (cl. a II-a): 2/2003 (5pb), 1/2004, (5pb), 2/20
BALAN Andrei (cl. a II-a): 2/2003 (5pb), 1/2004 (5pb), 2/2004 (8pb)
BUHU Vlad (cl. a II-a): 2/2003 (5pb), 1/2004 (5pb), 2/2004 (6pb);
CHICHIRĂU Alexandra-Elena (cl. a II-a): 2/2003 (5pb), 1/2004 (6p
(6pb);
CUBERSCHI Paul (cl. a II-a): 2/2003 (5pb), 1/2004 (6pb), 2/2004 (7
EŞANU Georgiana (cl. a II-a): 2/2003 (5pb), 1/2004 (5pb), 2/2004 (5
GREIEROSU Claudiu (cl. a II-a): 2/2003 (5pb), 1/2004 (6pb), 2/200
GURĂU Raluca-Claudia (cl. a II-a): 2/2003 (5pb), 1/2004 (5pb), 2/2

NĂSTASE Andrei-Ionuţ (cl. a II-a): 2/2003 (5pb), 1/2004 (6pb), 2/2
HATESCU Iustina (cl. a II-a): 2/2003 (5pb), 1/2004 (5pb), 2/2004 (6
LĂMĂTIC Ioana (cl. a II-a): 2/2003 (5pb), 1/2004 (6pb), 2/2004 (7pb
REBEGEA Andrada (cl. a II-a): 2/2003 (5pb), 1/2004 (5pb), 2/2004

Şcoala nr. 23 "Titu Maiorescu"
TUDORACHE Alexandru-Gabriel (cl. a IV-a): 2/2003 (10pb), 1/20
2/2004 (10pb).

Şcoala nr. 26 "G. Coşbuc"
ALUPEI Andra-Mădălina (cl. a III-a): 2/2003 (5pb), 1/2004 (5pb), 2/2
BULGARU Ionela-Alexandra (cl. a III-a): 2/2003 (5pb), 1/2004 (5pb
(8 pb);
BURLACU Ştefan-Claudiu (cl. a III-a): 1/2003 (5pb), 1/2004 (5pb), 2/
GHERCĂ Marius-Cătălin (cl. a III-a): 2/2003 (5pb), 1/2004 (5pb), 2/2
HOMEA Liviu (cl. a III-a): 2/2003 (5pb), 1/2004 (5pb), 2/2004 (7pb);
HUIDEŞ Gina (cl. a III-a): 2/2003 (5pb), 1/2004 (5pb), 2/2004 (7pb);
IFROSĂ Adriana (cl. a III-a): 2/2003 (5pb), 1/2004 (5pb), 2/2004 (8p
IOJĂ Petru-Alexandru (cl. a III-a): 2/2003 (5pb), 1/2004 (5pb), 2/20
PISICĂ Alexandru (cl. a III-a): 2/2003 (5pb), 1/2004 (5pb), 2/2004 (

Colegiul Naţional "C. Negruzzi"
TIBA Marius (cl. V-a): 1/2003 (6pb), 2/2003 (7pb), 1/2004 (7pb).

Liceul "M. Eminescu"
CIURARU Ionela (cl. VI-a): 2/2003 (11pb), 1/2004 (5pb), 2/2004 (5p

---

(continuarea tabelului din p. 128)

178.	PIFTOR Rositta	Liceul economic nr. 2, Iaşi
179.	SPIRIDON Doina	Liceul de artă, Iaşi
180.	MARTINUŞI Vladimir	Colegiul Naţional "E. Racoviţă",
181.	TIMOHE TUMAC Gabriel	Liceul "G. Ibraăileanu", Iaşi
182.	ANTON Florina Cristiana	Colegiul Naţional "E. Racoviţă",
183.	PRICOP Vasile	Paşcani

Premiile pe anul 2004 acordate de FUNDAŢIA CULTURALĂ "POIANA

Fundaţia Culturală "Poiana" (director d-l **Dan Tiba**) acordă an
elevilor - colaboratori ai revistei *"Recreaţii matematice"* care se disting pri
articolelor, *notelor* şi *problemelor originale* publicate în paginile acesteia.

Redacţia revistei decide ca pentru anul 2004 premiile oferite, în valoa
1 000 000 lei, să fie atribuite următorilor elevi:

1. LUPU Cezar (*Colegiul Naţional "Mircea cel Bătrân", Constanţa*)
  – Asupra unei inegalităţi condiţionate (RecMat 1/2004, 27-28),
  – probleme propuse: IX.36 (1/2003), IX.44 (2/2003), IX.48, XI.4
  X.51 (2/2004).

2. NEGRESCU Alexandru (*Colegiul Naţional "A. T. Laurian", Boto*
  – Asupra unei inegalităţi (RecMat 2/2004, 106-108),
  – probleme propuse: VI.38 (1/2003), VII.41 (2/2003), VIII.46 (1
  VII.51 (2/2204).

Premiile se pot ridica direct de la redacţie sau pot fi trimise prin man
la adresa elevului premiat.

IMPORTANT

- În scopul unei legături rapide cu redacţia revistei, pot fi utilizate
toarele adrese e-mail: **tbi@math.tuiasi.ro**, **popagabriel@go.**
Pe această cale colaboratorii pot purta cu redacţia un dialog privi
materialele trimise acesteia, procurarea numerelor revistei etc.
- La *problemele de tip L* se primesc soluţii de la orice iubitor de mate
elementare (indiferent de *preocupare profesională* sau *vârstă*). F
dintre soluţiile acestor probleme - ce sunt publicate în revistă du
an - va fi urmată de numele tuturor celor care au rezolvat-o.
- **Adresăm cu insistenţă rugămintea ca materialele trimis vistei să nu fie (să nu fi fost) trimise şi altor publicaţii.**

Revista **RECREAȚII MATEMATICE** apare de *două ori pe* datele de 1 martie şi 1 septembrie) şi se adresează elevilor, profes studenților şi tuturor celor pasionați de matematicile elementare.

În atenția tuturor colaboratorilor

Materialele trimise redacției spre publicare (note şi articole, chesti metodică, probleme propuse etc.) trebuie prezentate îngrijit, clar şi conc trebuie să prezinte interes pentru un cerc cât mai larg de cititori. Se reco ca textele să nu depăşească patru pagini. Evident, **ele trebuie să fie ori şi să nu fi apărut sau să fi fost trimise spre publicare altor reviste.**

Problemele originale destinate rubricii **Probleme propuse** redactate pe foi separate câte una pe fiecare foaie, cu enu demonstrație/rezolvare, fiind însoțite de numele autorului, şcoala şi loca unde lucrează/învață.

Redacția revistei va decide asupra oportunității publicării mater primite.

În atenția elevilor

Numele elevilor care vor trimite redacției soluții corecte la exerci problemele din rubrica **Probleme propuse** vor fi menționate în **I rezolvitorilor**. Elevii vor ține seama de următoarele reguli:

1. Pot trimite soluții la **minimum cinci probleme propuse în nu prezent şi cel anterior al revistei**; pe o foaie va fi redactată soluți singure probleme.

2. Elevii din clasele **VI-XII** au dreptul să trimită soluții la prob propuse pentru clasa lor, pentru orice clasă mai mare, din două clase mai imediat anterioare. Elevii din clasa a **V**-a pot trimite soluții la prob propuse pentru clasele a IV-a, a V-a şi orice clasă mai mare, iar elevii c **I-IV** pot trimite soluții la problemele propuse pentru oricare din clasele p şi orice clasă mai mare. Orice elev poate trimite soluții la problem concurs (de tip **G** şi **L**).

3. Vor fi menționate următoarele date personale: numele şi pren clasa, şcoala şi localitatea.

4. Plicul cu probleme rezolvate se va trimite prin poştă (sau va direct) la adresa Redacției:

Prof. dr. Temistocle Bîrsan
Catedra de Matematică
Universitatea Tehnică "Gh. Asachi" Iaşi
Bulevardul Carol I nr. 11, 700506, Iaşi
E-mail: tbi@math.tuiasi.ro

CUPRINS

ARTICOLE ŞI NOTE

NOTA ELEVULUI

CHESTIUNI METODICE

CHESTIUNI COMPLEMENTARE MANUALELOR

CONCURSURI ŞI EXAMENE

CORESPONDENŢE

PROBLEME ŞI SOLUŢII

Anul VIII, Nr. 2 **Iulie – Decembri**

RECREAŢII MATEMATIC

REVISTĂ DE MATEMATICĂ PENTRU ELEVI ŞI PROF

$$e^{i\pi} = -1$$

Editura "Recreaţii Matematic

IAŞI - 2006

Semnificația formulei de pe copertă:

Într-o formă concisă, formula $e^{i\pi} = -1$ leagă cele patru ramuri fu
ale matematicii:

ARITMETICA	reprezentată de 1
GEOMETRIA	reprezentată de π
ALGEBRA	reprezentată de i
ANALIZA MATEMATICĂ	reprezentată de e

Adresa redacției:

Catedra de Matematică – Universitatea Tehnică "Gh. Asachi" Iaşi
Bd. Carol I, nr.11, 700506, Iaşi
Tel. 032 – 213737 / int. 123
E-mail: recreatii.matematice@gmail.com
http://www.recreatiimatematice.uv.ro

TIPĂRITĂ LA SL&F IMPEX IAŞI
Bd. Carol I, nr. 3-5
Tel. 0788 498933
E-mail: simonaslf@yahoo.com

Anul VIII, Nr. 2 **Iulie – Decembri**

RECREAŢII MATEMATICE

REVISTĂ DE MATEMATICĂ PENTRU ELEVI ŞI PROF

$$e^{i\pi} = -1$$

Revistă cu apariţie semestrială
publicată de

ASOCIAŢIA "RECREAŢII MATEMATIC

IAŞI - 2006

Mendel Haimovici şi Şcoala matematică din

Şcoala matematică din Iaşi, fondată
în cadrul Seminarului Matematic de cătr
Al. Myller, s-a dezvoltat şi consolidat prin
mari personalităţi, ca *Octav Mayer*, *Mendel*
şi prin contribuţia unor străluciţi continuato
Departamentul de mecanică al acestei Ş
creat de profesorul **Mendel Haimovici**,
Academiei Române. Calităţile sale de Om
Profesor, luptător neobosit pentru dreptate
admiraţia opiniei publice şi a colegilor, cola
şi studenţilor săi. Contribuţia sa la dezvolta
matematice moderne este cu totul remarc
treaga sa activitate poartă marca persona
caracterizată prin inteligenţă, curiozitate
creativitate, vastă cultură şi etică profesiona

M. Haimovici s-a născut la Iaşi, în 30 noiembrie 1906. A făcut studii
Colegiul (Liceul) Naţional. Şi-a continuat pregătirea la Facultate de Ştii
Matematică) pe care a absolvit-o în 1930. A fost imediat numit asistent ş
colaborator al foştilor săi profesori. A făcut stagii de specializare la Rom
Londra. În iulie 1933 şi-a luat doctoratul în Italia, cu o valoroasă teză de
fluidelor, sub îndrumarea lui *Tullio Levi-Civita*. Întors în ţară, şi-a reluat
asistent. În 1940, după promulgarea legilor rasiale, a fost îndepărtat câţ
Universitate. La încetarea războiului a fost numit profesor şi a devenit şef
de mecanică, pe care a condus-o până la sfârşitul vieţii, adică timp de 28

În 1948, **M. Haimovici** a fost ales membru corespondent, iar câţiva ani
a devenit membru titular al Academiei Române. Când s-a înfiinţat Filiala
demiei, a fost numit director al Institutului de Matematică, pe care l-a co
la sfârşitul vieţii. A fost invitat să ia parte la numeroase conferinţe intern
a organizat la Iaşi manifestări ştiinţifice de mare prestigiu. A încetat din
martie 1973, lăsând o operă valoroasă şi o amintire luminoasă de remarca

Cercetările lui **M. Haimovici** se raportează la trei domenii principale a
ticii: geometrie, teoria ecuaţiilor cu derivate paţiale şi mecanică. Cu to
influenţă exercitată de *Myller* şi *Mayer* în domeniul geometriilor cu grup
tal, a abordat un nou subiect din geometria acelui timp. După vizita lui
la Iaşi, în 1931, atras de ideile acestuia a eleborat importante lucrări a
probleme dificile. Astfel, a descoperit clase remarcabile de *spaţii Finsler*
ile fundamentale ale hipersuprafeţelor din aceste spaţii. Mai târziu, mate
japonez *Makoto Matsumo* a inclus lucrările lui M. Haimovici în celebra sa
asupra fundamentelor geometriei Finsler. M. Haimovici a fost pionier şi în
geometriei integrale, descoperind o formulă care generalizează teorema c
lui *Crofton*. A descoperit conceptul de quasigrup diferenţiabil şi a constru
completă şi unitară; a demonstrat că aceste obiecte se comportă faţă d
Lie în aceeaşi manieră în care varietăţile plate se comportă în raport cu ce
Actualmente, noţiunea de quasigrup este studiată din punct de vedere

topologic în şcoli renumite de matematică din SUA şi Rusia.

O lungă perioadă de timp, M. Haimovici s-a ocupat de geometria v
neolonome. Importanţa lor constă în faptul că ele conduc la cel mai adec
care descrie mişcarea sistemelor mecanice neolonome. Se poate spune că
intrinsecă a varietăţilor neolonome în spaţii Riemann este creaţia lui M.
În 1998, a apărut volumul I al operelor sale complete, iar volumul al doilea
cu prilejul Centenarului naşterii savantului.

Prin contribuţiile sale, **M. Haimovici** a scos la lumină noi domenii de
în care au lucrat şi lucrează continuatorii operei sale, printre care şi s
acestei Note, care este totodată şi primul cercetător care a obţinut doct
îndrumarea lui M. Haimovici.

Profesorul **M. Haimovici** a avut vocaţie de geometru. Pentru cei ca
familiarizaţi cu personalitatea sa, poate părea curios cum a putut el de
specialist în mecanică. Pentru a lămuri acest aspect, se cuvine să facem
istoric al predării mecanicii la Universitatea din Iaşi. La înfiinţarea acestei
o catedră de mecanică. Primul curs "Mecanică elementară şi raţională" a fo
Nicolae Culianu. Ulterior, această catedră a fost ilustrată de *Ioan Melik*
Tzony (absolvent de la Sorbona), care a publicat acum 125 de ani o c
probleme de mecanică în revista "Recreaţii Ştiinţifice". Manuscrisul cur
de Tzony se păstrează şi astăzi la Biblioteca Seminarului Matematic. T
datorează şi înfiinţarea Laboratorului. Tzony rămâne unul dintre cei mai
oameni care au pus bazele unui învăţământ de înaltă valoare în ţara n
condus catedra de mecanică până în anul 1898. În 1907, *Dimitrie Pomp*
în matematică de la Sorbona, a preluat această catedră. El era un excele
dar a fost şi primul în Iaşi, care a publicat lucrări originale de mecan
câţiva ani (cinci) a fost chemat la Bucureşti, pentru a lua postul rămas v
retragerea lui *Spiru Haret*. Ulterior, catedra de mecanică a fost ilustrată s
Victor Vâlcovici, *Simion Sanielevici* şi *Ioan Plăcinţeanu*.

În 1945, **M. Haimovici** a devenit şeful catedrei de mecanică. Având va
tinţe de geometrie, ecuaţii diferenţiale şi cu derivate parţiale, domenii în c
contribuţii de valoare, a găsit acum oportunitatea de a materializa în m
sinteză a experienţei predecesorilor şi a sa personală. A ţinut cursuri de
hidrodinamică şi mecanica mediilor continue. A publicat un curs de
şi a organizat seminarii de specialitate şi conferinţe naţionale. A cond
de mecanicieni de la Institutul de Matematică. A condus teze de docto
subiecte din teoria mediilor continue, hidrodinamică, magneto-hidrodina
ticitate isotropică şi neisotropică în medii omogene şi neomogene, termoe
plasticitate, medii continue cu microstructură şi mecanică analitică.

Această activitate intensă care a dus la crearea unei Şcoli originale de
este, fără îndoială, rezultatul muncii de o viaţă a profesorului **M. Haim**
nefericire, activitatea neîntreruptă, plină de abnegaţie şi permanentul său
satisface toate exigenţele au contribuit la sfârşitul său prematur.

Dăruirea sa pentru ştiinţă este concretizată în cele două mari realiză
Şcoala de Mecanică din Iaşi şi *Institutul de Matematică* (care a renăscut d

Acad. Radu MI

Florica T. Câmpan

Gândim că, în luna noiembrie a acestu
multe clopote de aur şi argint vor suna să a
100 de ani de la naşterea **Floricăi T. Câmp**
nu într-o zi anume, căci socotitorii de vreme a
stil vechi pe altul nou, încurcând un 13 cu un
nu în clopotniţe oficiind între cer şi pământ,
bre aule academice, ci doar în inimi ce adună
cu raţiunea. Poate nu cu frecvenţe şi inten
să zguduie timpane, ci profund, grav, linişt
mângâie şi să îndemne suflete. Gândim că
Recreaţiilor Matematice de a marca moment
tificată şi va reverbera ecouri.

Mulţi oameni cred despre ei înşişi că ştiu să
să preţuiască şi să iubească tot ce îi înconjoa
oameni, obiceiuri, gânduri, deveniri, cărţi. De fapt sunt puţini; o largă
îşi concentrează înţelegerea spre agonisiri de folos personal. (Citez însă
matematician din Focşani: *Dumnezeu îşi arată dispreţul faţă de avere prin*
le-o distribuie). Dintre cei puţini care pot să înţeleagă, să preţuiască şi s
sunt tare puţini care dovedesc generozitate, capacitate şi profunzime com
ale Floricăi.

Florica a înţeles şi iubit fizica şi mai ales matematica, dobândind licenţ
1929. Din matematică a înţeles profund şi a iubit cu înţelepciune mai ales
Fundamentele şi Istoria (matematicii). În geometrie şi-a împlinit şi doc
1942, sub bagheta renumitului făuritor de şcoală *Alexandru Myller*), cu o t
suprafeţe paralele şi asemenea, ilustrată cu elegante interpretări geometri
Nu putem uita aici inspirata carte **Aventura geometriilor neeuclidien**
adânci şi originale asupra Fundamentelor matematicii s-au închegat în r
carte **Licuricii din adâncuri**. Generoasa aplecare spre Istoria matema
valorificată în numeroase lucrări şi comunicări ştiinţifice dar şi în cărţi
numărului π, **Probleme celebre din istoria matematicii**.

Florica a înţeles şi iubit cartea. Semnatarul acestor rânduri nu poat
unele imagini din amintire. Era deja pensionară când ajungea la uşa
Seminarului matematic cu mult înaintea harnicei bibliotecare. Se scuz
reţinut prea bine nişte gânduri din anume cărţi. Auzeam apoi (cu tresăriri
un scârţâit de scară lungă, dar subţire (spre a fi uşoară), spre rafturi în
nerăbdătoare cu o minusculă batistă feminină în mână. După ce scotea o
o ştergea grijuliu de un bănuit colb, apoi o mângâia cu ochii şi cu mâna şi
cobora de pe scară (liniştindu-mi temeri). Nu accepta să fie ajutată; era
inalienabil al ei, instaurat încă de Alexandru Myller. Ştergea cu aceeaşi b
poate cu alta asemănătore) şi masa pe care aşeza cartea. O deschidea înc
cu pagină, şi adăsta îndelung notând ades într-un caiet de elev. Până s
pe masă se aduna un teanc de cărţi şi de reviste care aproape o ascunde
de închidere cerea îngăduinţă să păstreze pe acea masă şi cărţi care să l

a doua zi. Când socotea că dialogul nu are pe cine tulbura, împărtăşe
bucuriile ei: *iată ce idee grozavă a avut X*, sau *iată ce frumos o spune Y.*
stângăciile: *cum poate Z să scrie despre asta fără a-l cita pe...*? Pentru co
văzut frecvent mulţi care se încruntau când descopereau idei prin revist
mi-a venit mie *ideea asta*?

Mai cu seamă, Florica a înţeles şi iubit adolescenţii în strădaniile l
apropia de matematică. Din dragoste faţă de ei a fost o excelentă profe
la *Liceul "Oltea Doamna"*, unde fusese şi eleva primei femei din România
matematică, *Silvia Creangă.* Mai apoi a fost conferenţiar şi profesor la Fa
matematică din Iaşi. Din aceeaşi dragoste a scris şi cunoscutele şi mult-
cărţi. Alţii au conceput cărţi asemănătoare nu din dragoste faţă de citito
zgândări glorii; să ne mirăm că nu au avut ecou? Parcă spunea cineva că
este ca o minge pe care cu cât o arunci mai departe de tine, revine mai rep

Un mic dar gingaş, semn că ieşenii nu au uitat-o pe Florica, sunt cele
(judeţene şi interjudeţene) ale *Concursului de matematică "Florica T. C*
rândurile de mai sus doresc a semnala adâncă şi neîntinată preţuire.

Prof. dr. Dan BRÂN

Eclipsele de Soare

Se spune că un corp ceresc fără lumină proprie este **eclipsat** atunci c intră în conul de umbră al unei planete, fiind astfel lipsit de lumina Soa poate fi văzut. Aşa se produc eclipsele de Lună sau eclipsele sateliţilor Fenomenul de dispariţie a unui astru din câmpul nostru de vedere, când în tru şi observator se interpune un alt astru, se numeşte **ocultaţie**. Astfel, î sa în jurul Pământului, Luna poate să acopere parţial sau total Soarele. produs este impropriu spus *eclipsă de Soare*, când de fapt este vorba de **Soarelui de către Lună**. Trecând peste aceste mici neînţelegeri lingvis mărim cum se produce o eclipsă de Soare.

Dispariţia treptată a Soarelui din câmpul de vizibilitate are loc at Soarele, Luna şi Pământul sunt aproximativ în vecinătatea aceleiaşi dr au loc *eclipse parţiale*, *totale* sau *inelare*. Întrucât Luna se roteşte în jur tului de aproximativ 12,368 ori pe an, ar rezulta că în fiecare lună s-ar eclipsă de Soare şi una de Lună. Totuşi, nu este aşa şi iată de ce: Pă roteşte în jurul Soarelui pe o elipsă, Soarele aflându-se într-unul din foca *treia a lui Kepler*). Elipsa, curba plană descrisă de Pământ, este foarte a un cerc; distanţa minimă a Pământului faţă de Soare (Pământul la perihel 147 099 000 km, iar cea maximă (Pământul la afeliu) este de 152 097 090 altă parte, Luna se roteşte în jurul Pământului tot pe o elipsă, planul or (planul elipsei) face, însă, cu planul orbitei terestre un unghi de 5 grade, 8 48 secunde, aşa că, nu la fiecare rotaţie cele trei obiecte pot fi coliniare.

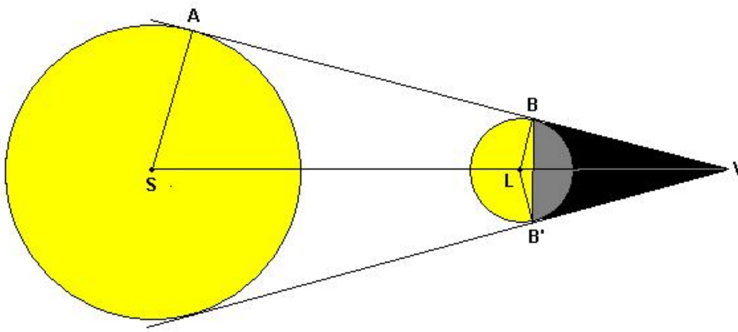


Figura 1

În fig.1, SA reprezintă raza Soarelui, egală cu 696 260 km, LB raza L cu 1738 km, iar V un punct situat în vârful conului de umbră. Din calcu că înălţimea conului variază în limitele 363 200 km şi 375 900 km, în timp de la Pământ la Lună rămâne cuprinsă între 363 100 km (perigeu) şi 4 (apogeu). Rezultă de aici că, în cazul în care Luna se află la distanţă m 375 900 km, vârful conului de umbră nu poate atinge nici un punct de pe Pământului şi, în consecinţă, nu poate avea loc nici o eclipsă totală. D

atunci când Luna se află între cele două limite menţionate pot avea loc to
de eclipse (totale, parţiale şi inelare), vizibile în mod diferit în funcţie de l
tului de observaţie.

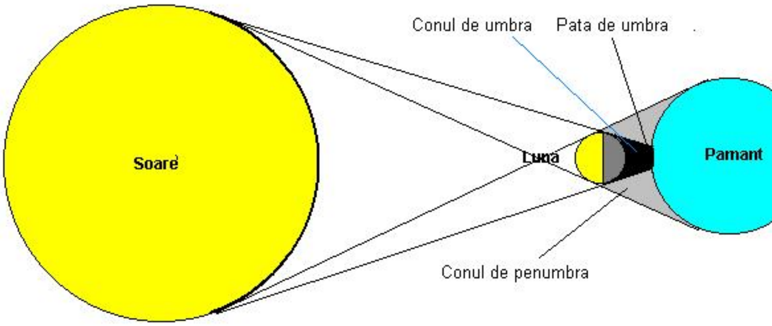


Figura 2

În fig. 2 se arată cazul unei eclipse totale de Soare de o anumită durată
depinde de lungimea conului de umbră. Durata maximă pentru un loc da
depăşi 8 minute, dar poate fi şi instantanee.

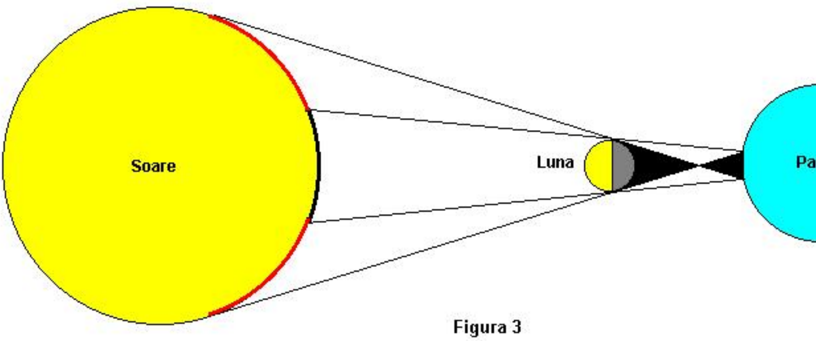


Figura 3

În fig. 3 este exemplificată o eclipsă inelară când de pe Pământ Soar
la un moment dat sub forma unui inel luminos.

Aşa cum se poate constata din figurile de mai sus, Luna lasă pe suprafa
tului o umbră (mulţimea punctelor de intersecţie a conului de umbră cu sfer
al cărui contur este o curbă ce numai într-un singur caz poate fi cerc: a
centrele Soarelui, Lunii şi Pământului sunt colineare iar Luna se află la
versitatea de manifestare a fenomenului depinde nemijlocit de raza Soarel
precum şi de cele două distanţe, SL şi LV.

În desfăşurarea unei eclipse totale de Soare se deosebesc cinci mome
tante. Astfel, momentul în care discul Lunii este tangent discului Soare
partea vestică sau, altfel spus, momentul la care începe eclipsa parţială s

momentul primului contact exterior. Urmează acoperirea treptată a Soa
când acesta nu se mai vede, *momentul primului contact interior*, după ca
stă *în totalitate* un timp, care nu poate fi mai mare de 8 minute. În
discul Lunii devine tangent exterior, moment numit *ultimul contact inte*
care Soarele iese din totalitate. După momentul când cele două discuri
nou tangente exterior, *ultimul contact exterior*, eclipsa ia sfârşit. Ans
turor punctelor de pe suprafaţa Pământului pe unde trece pata de umbră
banda de totalitate, a cărei lăţime maximă poate ajunge la 260 km, când L
perigeu. În afara benzii de totalitate, unde eclipsa este parţială, cele dou
interioare lipsesc.

Determinarea momentelor caracteristice, la care se adaugă un al cinc
momentul fazei maxime, oferă informaţii importante pentru mecanica cer

Acum circa 3000 de ani, caldeenii au notat datele la care observau fiec
şi au constatat că eclipsele de Soare şi Lună se reproduc în condiţii ident
interval de timp de **18 ani, 11 zile şi 8 ore**. Această perioadă de repetare
a primit numele de *ciclu Saros* (saros în limba arabă înseamnă repetiţie
ciclu Saros au loc 71 de eclipse din care 43 de Soare si 28 de Lună. Ulte
îmbunătăţirea mijloacelor de observare şi dezvoltarea mecanicii cereşti, s-a
că perioada ciclului Saros nu a fost determinată cu suficinentă precizie
condus la abateri mari în calcularea datei celei mai mari sărbători a cr
sărbătoarea Paştelui. Ca exemplu, în anul acesta creştinii catolici au
Paştele la data de 16 aprilie, iar ortodocşii la 23 aprilie. Diferenţele dintr
date pot depăşi uneori şi o perioadă sinodică a Lunii (*perioada sinodică*
timpul necesar Lunii ca să treacă prin două faze succesive de acelaşi fel şi a
de 29 zile, 12 ore, 44 minute şi 3 secunde).

În ziua de **29 martie** a acestui an a avut loc o **eclipsă totală de Soa**
la Iaşi ca *eclipsă parţială*, pentru care momentele caracteristice calculate (p
sunt: începutul eclipsei parţiale - 12h 50m 53s, faza maximă - 14h 02m 02
eclipsei parţiale –15h 12m 01s, iar acoperirea maximă a discului solar a fost

Chiar şi acum observarea eclipselor prezintă interes ştiinţific pentru o
mai bună a drumului parcurs de Pământ în jurul Soarelui precum şi pen
unor fenomene solare ce nu pot fi observate decât în timpul eclipselor. To
vaţiile făcute cu mare rigurozitate sunt binevenite.

Iulian BREAHNĂ

Membru al Uniunii Astronomice Internaţi
Ex-director al Observatorului Astronomic

OLIMPIADA 57

Cel care însăilă aceste rânduri socoteşte (de multişor) că olimpiadele d
tică sunt evenimente majore, pline de semnificaţii pentru multă lume: pe
eroi care îşi încearcă puterile în munci mai relevante decât cele ale lui Hercu
(veşnic tinerii) care şlefuiesc cu migală subiecte sau evaluează redactări,
moşii care asigură detalii organizatorice, pentru sponsorii care au avut înţe
plaseze bine bănuţi trebuitori. Lista de mai sus a fost nevoită să sară peste
pregătesc bune prestaţii ale elevilor în şcoală şi acasă: profesori (în genera
pectă eforturi, profesori de matematică aprinzători de scântei, părinţi car
iubitori, editori care adună strădanii trecute spre a fi de folos celor care u

Să mai spunem că apelativul de olimpiadă s-a conturat prin anii '50, m
strădanii ale neasemuitului **Grigore C. Moisil**. (În 2006 s-a evocat în l
centenarul naşterii sale.) Exista buna experienţă a concursurilor gazetei
ce cu suflet, inimă şi minte donate de **Gheorghe Ţiţeica**. Dar a exis
potrivnic dinspre răsărit care ar fi preferat un nume de spartakiadă. Inst
a asigurat geneza acestor olimpiade a fost *Societatea de Ştiinţe Matemati*

Este benefic să ne minunăm de vigoarea cu care au crescut şi s-au
olimpiadele. Erau 50, apoi o sută, apoi două de finalişti; acum ar veni (e
cheltuială proprie) cam 10 mii de finalişti; spre a preveni auto-sufocări s-
prin anul 2000 algoritm prin care să nu se treacă de 600 de participanţi.

Buna experienţă a olimpiadelor naţionale a îndreptăţit România să iniţi
ade Internaţionale, apoi *Olimpiade Balcanice*. Acum finala naţională nu m
ultim scop; urmează îndată prime baraje, calificări la loturi (de seniori şi
alte baraje, calificări în echipe naţionale, variate întreceri internaţionale.

Dulcele Târg al Ieşilor se întâlnise cu Olimpiada Naţională de Matemati
(A fost atunci creditat la treabă şi semnatarul acestor rânduri.) Au mai ex
de reîntâlnire; ce susţineau unii, boicotau alţii. Iaşul se afirmase prin anii
cial prin trio-ul de elevi *Turinici – Gheba – Bîrsan*, iar prin '99 prin multip
Marius Beceanu. Dintre vechi olimpici (dar nu numai) fuseseră invitaţi
Naţionale distinşi profesori ieşeni. Există o familie olimpică ieşeană; citân
pe ultimul: campionul *Pachi*. Loturi naţionale se pregătiseră în Bucium
în calendar naţional şi Tabere organizate de ieşeni. Se aprobase şi se desf
succes Concursul Naţional "Al. Myller". Factori diriguitori susţinuseră
Naţională de Matematică la Iaşi în 2005. A fost aprobare, dar s-a acorda
Olimpiadei Balcanice; se ştia că Olimpiada Naţională din 2006 va fi la Ia

A fost şi a ieşit bine. Climatul intelectual al Iaşului a constituit un fon
Profesori dotaţi şi inimoşi au contribuit cu capacitate şi dăruire. Colegii
şi Naţional au colaborat excelent ca gazde. Facultatea de matematică a a
academic; preşedinte de onoare a fost academicianul **Radu Miron**. Au fo
ca propunători sau evaluatori cam 15 profesori ieşeni. A funcţionat im
secretariat ce a însumat cam 30 de profesori destoinici. Elevii ieşeni au m
ceva din avantajul terenului, cifra pentru olimpiada naţională crescând de
Încă nu putem face un bilanţ al comportărilor internaţionale, dar suntem

Prof. dr. Dan BRÂN

Pseudoinversă şi inversă generalizată ale unei aplicaţii liniare

Adrian REISNER[1]

1. Pseudoinversă a unui endomorfism într-un spaţiu vectori mensiune finită. Fie S un $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial de dimensiune finită. Are

Teorema 1. *Fiind date două endomorfisme u, v ale spaţiului S, dac cele trei condiţii următoare:*

$$a)\ uvu = u, \qquad b)\ vuv = v, \qquad c)\ \operatorname{rang} u = \operatorname{rang} v$$

sunt verificate, atunci a treia este de asemenea verificată.

Demonstraţie. $\underline{a) \text{ şi } b) \Rightarrow c)}$ Avem: $\operatorname{rang} u = \operatorname{rang}(uvu) \leq \operatorname{rang}(uv$ din condiţia $a)$, $\operatorname{rang} v = \operatorname{rang}(vuv) \leq \operatorname{rang}(vu) \leq \operatorname{rang} u$ din condiţia $b)$. condiţia $c)$.

$\underline{a) \text{ şi } c) \Rightarrow b)}$ Condiţia $a)$ conduce, înmulţind la dreapta cu v, la egalit

$$uv = (uvu)v = u(vuv).$$

Ţinând seama de $a)$, avem, pe de altă parte, că $\operatorname{rang} u \leq \operatorname{rang}(uv)$ $\operatorname{rang}(uv) \leq \operatorname{rang} u$, deducem egalitatea $\operatorname{rang}(uv) = \operatorname{rang} u$. Dar rangul fismului uv este rangul *restricţiei* endomorfismului u la subspaţiul $\operatorname{Im} v$. stricţie $u_{/\operatorname{Im} v}$ este deci injectivă şi egalitatea $(*)$ poate fi simplificată cu u ceea ce închide demonstraţia.

$\underline{b) \text{ şi } c) \Rightarrow a)}$ rezultă imediat, endomorfismele u şi v având roluri sime laţiile $a)$, $b)$, $c)$. Teorema este demonstrată.

Corolar. *Fiind dat un endomorfism u al spaţiului vectorial S, exist morfism v (nu unic) verificând condiţiile $a)$, $b)$ şi $c)$.*

Demonstraţie. Ţinând seama de teoremă, ne propunem să constr morfismul v verificând condiţiile $b)$ şi $c)$. Fie v un astfel de endomorfis pentru $\forall y \in \operatorname{Im} v : vu(y) = y$. Deducem că, dacă $x \in \operatorname{Im} v \cap \operatorname{Ker} u$, $x =$ $\operatorname{Im} v \cap \operatorname{Ker} u = \{0\}$. Suma acestor două spaţii vectoriale este deci directă condiţia $\operatorname{rang} u = \operatorname{rang} v$, deducem atunci că $\operatorname{Im} v \oplus \operatorname{Ker} u = S$.

Fiind dat endomorfismul u, fie F un suplementar al subspaţiului vect şi G un suplementar al spaţiului $\operatorname{Im} u$. Aplicaţia $u' : F \to \operatorname{Im} u$, $x \mapsto u($ izomorfism. Definim aplicaţia v prin restricţiile sale la cele două subsp mentare $\operatorname{Im} u$ şi G prin:

- $v_{/\operatorname{Im} u} = (u')^{-1}$,
- $v_{/G} = 0$.

Această aplicaţie v este evident liniară şi verifică:

– $\operatorname{Im} v = \operatorname{Im}(u')^{-1} = F$, deci $\operatorname{rang} v = \dim F = \operatorname{rang} u$ şi rezultă că v

– $\forall x \in S$, $v(x) \in F$, deci $vuv(x) = v\{u'[v(x)]\} = (vu')[v(x)] = v$ verifică $vuv = v$, adică $b)$.

Corolarul este astfel stabilit.

[1] Cercetător, Centrul de Calcul E.N.S.T., Paris

Observaţie. Endomorfismul v *nu este unic*: el depinde de *alegerea s*
F *şi* G din demonstraţia corolarului.

Definiţii. Fiind dat endomorfismul u, orice endomorfism verificând con
numeşte *inversă generalizată* a lui u. Fiind dat endomorfismul u, orice en
verificând condiţiile a), b) se numeşte *pseudoinversă* a lui u.

Cu aceleaşi notaţii ca în corolarul precedent, o inversă generalizată v a
fismului u este definită prin restricţiile sale la subspaţiile suplementare
prin:

- $v_{/\operatorname{Im} u} = (u')^{-1}$,
- $v_{/G}$ morfism oarecare aparţinând spaţiului $\mathcal{L}(G, S)$.

O inversă generalizată a endomorfismului u depinde deci de *alegerea* subs
G şi de *alegerea morfismului* $v_{/G}$. Vom numi $\operatorname{Ing}(u) = \{v \in \mathcal{L}(S)\ |uvu =$

Observaţii. 1) Inversa generalizată a unui *automorfism* u este unică
cu inversa u^{-1} a lui u : $\operatorname{Ing}(u) = \left\{u^{-1}\right\}$.

2) Fie $v \in \operatorname{Ing}(u)$. Avem:

endomorfismul $w = uv$ este un *proiector* ($w^2 = w$) de imagine $\operatorname{Im} u$:

$$w^2 = (uv)(uv) = (uvu)v = uv = w,$$

endomorfismul $w' = vu$ este un *proiector* ($w'^2 = w'$) de nucleu $\operatorname{Ker} u$:

$$w'^2 = (vu)(vu) = v(uvu) = vu = w'.$$

Aplicaţie. Vom nota cu aceeaşi literă un endomorfism al spaţiulu
$\mathbb{R}^n$ şi matricea acestui endomorfism în *baza canonică* a lui $\mathbb{R}^n$. Fiinc
endomorfisme A, B, C ale spaţiului vectorial $\mathbb{R}^n$, fie $\tilde{A} \in \operatorname{Ing}(A)$ şi $\tilde{C} \in$ In
loc

Teorema 2. *Ecuaţia matriceală* $AXC = B$ *admite o soluţie* X *dac*
dacă avem $A\tilde{A}B\tilde{C}C = B$.

Demonstraţie. Presupunând că $A\tilde{A}B\tilde{C}C = B$, deducem că matricea
verifică $AXC = B$. Vom nota $X_0 = \tilde{A}B\tilde{C}$.

Invers, dacă există $X \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ verificând $AXC = B$, atunci avem $(A\tilde{A}A$
B şi, în consecinţă, $B = A\tilde{A}(AXC)\tilde{C}C = A\tilde{A}B\tilde{C}C$.

$\tilde{A}$ şi $\tilde{C}$ fiind două matrice oarecare aparţinând respectiv la $\operatorname{Ing}(A)$
notăm

$$K(A, C) = \left\{Y - \tilde{A}AYC\tilde{C} \mid Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right\}.$$

Teorema 3. *Soluţia generală a ecuaţiei matriceale* $AXC = B$ *este* X
Z, *unde* $Z \in K(A, C)$.

Demonstraţie. Soluţia generală a ecuaţiei matriceale $AXC = B$
$X_0 + Z$, unde $X_0 = \tilde{A}B\tilde{C}$ (v. demonstraţia Teoremei 2) şi Z este soluţia
ecuaţiei $AZC = O$. Ne propunem să justificăm echivalenţa următoare:

$$a) \quad AZC = O \quad \Leftrightarrow \quad b) \quad Z \in K(A, C).$$

<u>$a) \Rightarrow b)$</u> $Z = Z - O = Z - \tilde{A}(AZC)\tilde{C}$;

$\underline{b) \Rightarrow a)}$ $\forall Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, matricea $Z = Y - \tilde{A}AYC\tilde{C}$ verifică

$$AZC = AYC - A\tilde{A}AYC\tilde{C}C = AYC - (A\tilde{A}A)Y(C\tilde{C}C) = O$$

şi Teorema 3 este demonstrată.

Exemplu. Fie ecuaţia matriceală

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ unde } k \in \mathbb{R}.$$

Să găsim soluţia generală $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ a acestei ecuaţii.

Avem: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ing}(A)$; $C =$

şi $\tilde{C} = C \in \mathrm{Ing}(C)$. Cum $B = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A\tilde{A}B\tilde{C}C$, ecuaţia (1) adm

o soluţie fiind matricea $X = \tilde{A}B\tilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ţinând seama de T

soluţia generală a ecuaţiei (1) este

$$X = \tilde{A}B\tilde{C} + Y - \tilde{A}AYC\tilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + Y - \tilde{A}AYC\tilde{C},$$

unde Y este o matrice oarecare aparţinând spaţiului de matrice $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Considerând a, b, c, d, e, f, g, h, i numere reale oarecare, obţinem

$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, că soluţia generală a ecuaţiei matriceale (1) este $X =$

unde b, c, e, f, g, h, i sunt numere reale oarecare.

2. Pseudoinversa unui endomorfism într-un spaţiu euclidian un spaţiu euclidian, produsul scalar va fi notat $\langle , \rangle$. [Aceleaşi definiţii ş sunt valabile dacă spaţiul E este un spaţiu hermitian, adică un $\mathbb{C}$ - spaţi înzestrat cu un produs scalar, formă hermitiană pozitiv definită pe E.] definiţia şi teorema următoare:

Definiţie şi teoremă. *Fiind dat un endomorfism al spaţiului euclidia un singur endomorfism u^* al spaţiului E verificând*

$$\forall x, y \in E, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle .$$

Acest endomorfism se numeşte adjunctul endomorfismului u.

Avem $\mathrm{Ker}\, u^* = (\mathrm{Im}\, u)^\perp$ *şi* $\mathrm{Im}\, u^* = (\mathrm{Ker}\, u)^\perp$.

Demonstrăm că $\mathrm{Ker}\, u^* = (\mathrm{Im}\, u)^\perp$; într-adevăr,

$$y \in (\mathrm{Im}\, u)^\perp \Leftrightarrow \forall x \in E,\ \langle u(x), y \rangle = 0 \Leftrightarrow \forall x \in E,\ \langle x, u^*(y) \rangle = 0 \Leftrightarrow y$$

Asemănător procedăm pentru egalitatea $\mathrm{Im}\, u^* = (\mathrm{Ker}\, u)^\perp$.

Fie u un endomorfism al spaţiului euclidian E . Notăm $K = (\operatorname{Ker} u)^{\perp}$ o
nucleului lui u şi $I = (\operatorname{Im} u)^{\perp}$ ortogonalul imaginii endomorfismului u.

Notăm P proiecţia ortogonală de imagine K (de nucleu $\operatorname{Ker} u$), P
ortogonală de imagine $\operatorname{Im} u$ (de nucleu $I = (\operatorname{Im} u)^{\perp}$). Avem: $P'u =$
$P'(y) \in \operatorname{Im} u$, $\forall y \in E$; $u^{(-1)}P'(y)$ (imaginea reciprocă a elementului
o clasă modulo $\operatorname{Ker} u$ a spaţiului euclidian E (atenţie: $u^{(-1)}$ nu este o
Imaginea acestei clase prin proiecţia P este un element unic al spaţiului

Definiţie. Aplicaţia liniară $u^{+} = Pu^{(-1)}P'$ se numeşte *pseudoinver*
morfismului u.

Teorema 4. *Aplicaţia pseudoinversă u^{+} a endomorfismului u verific*

a) $uu^{+}u = u$,

b) $u^{+}uu^{+} = u^{+}$,

c) uu^{+} şi $u^{+}u$ sunt endomorfisme ortogonale, i.e. $(uu^{+})^{*} = uu^{+}$, $(u^{+}$
Mai mult, u^{+} este singurul endomorfism al spaţiului E verificând aserţi
şi c).

Demonstraţie. P şi P' fiind proiectori, avem $Pu^{+} = u^{+}P' = u^{+}$. At

$$u^{+}u = Pu^{(-1)}P'u = Pu^{(-1)}u = P, \text{ proiector ortogonal,}$$
$$uu^{+} = uPu^{(-1)}P' = uu^{(-1)}P' = P', \text{ proiector ortogonal,}$$

şi, în consecinţă, $uu^{+}u = uP = u$; $u^{+}uu^{+} = u^{+}P' = u^{+}$. În plus,

$\operatorname{Im} u^{+} = \operatorname{Im} P = K = (\operatorname{Ker} u)^{\perp} = \operatorname{Im} u^{*}$, $\quad \operatorname{Ker} u^{+} = \operatorname{Ker} P' = I = (\operatorname{Im} u)$

Demonstrăm acum unicitatea endomorfismului u^{+}. Fie u' un alt en
verificând condiţiile a), b) şi c). Avem:

$$u' = u'uu' = u'u'^{*}u^{*} = u'u'^{*}(u^{*}u^{+*}u^{*}) = u'(uu')(uu^{+}) = u'uu^{+}$$

$$u'uu^{+} = u^{*}u'^{*}u^{+} = (u^{*}u^{+*}u^{*})u'^{*}u^{+} = (u^{+}u)(u'u)u^{+} = u^{+}uu^{+} =$$

Deci $u' = u^{+}$, c.c.t.d.

Observaţie. Am văzut în prima parte că o pseudoinversă a lui u
particular de alegerea subspaţiilor suplementare F şi G ale spaţiilor $\operatorname{Ker} u$
$\operatorname{Im} u$. În cazul în care E este un spaţiu euclidian F şi G sunt unic de
$F = (\operatorname{Ker} u)^{\perp}$ şi $G = (\operatorname{Im} u)^{\perp}$, de unde unicitatea pseudoinversei.

Dacă y este un vector oarecare al spaţiului euclidian E, notăm $x_0 = u^{+}$

Teorema 5. *Vectorul $x_0 = u^{+}(y)$ verifică:*

a) $\|ux_0 - y\|$ este minimum, i.e. $\|ux_0 - y\| \le \|ux - y\|$, $\forall x \in E$;

b) $\|x_0\|$ este minim din toate elementele x verificând $\|ux - y\| = \|ux_0$

Demonstraţie. a) $\|ux_0 - y\| = \left\|uu^{+}y - y\right\| = \|P'y - y\|$,

$$\|ux - y\|^2 = \|u(x - x_0) + ux_0 - y\|^2 = \|u(x - x_0) + P'y - y\|^2 =$$
$$= \|u(x - x_0)\|^2 + \|P'y - y\|^2 \ge \|ux_0 - y\|^2 .$$

b) Avem $\|ux - y\| = \|ux_0 - y\|$ numai când $u(x - x_0) = 0$. În ca
$x = x_0 + z$, unde $x_0 \in K = (\operatorname{Ker} u)^{\perp}$ şi $z \in \operatorname{Ker} u$. Deci $\|x\|^2 = \|x_0\|^2 + \|z$
şi deducem b).

Observaţie. Din teorema precedentă deducem că $x_0 = u^+(y)$ este cea
soluţie apropiată în normă a ecuaţiei $y = ux$.

Pseudoinversa unei matrice. Dacă alegem în spaţiul euclidian
ortonormată $\mathcal{B}$, obţinem U-matricea endomorfismului u în această bază: M
$U^* = U^T$.[În cazul în care E este hermitian avem $Mat(u^*, \mathcal{B}) = U^* = \overline{U}^T$
Traducând cele de mai sus în limbaj matriceal, obţinem

*Fiind dată o matrice $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, există o singură matrice V verificân
următoare:*

$$UVU = U, \quad VUV = V, \quad (UV)^* = UV, \quad (VU)^* = VU.$$

Această unică matrice V se numeşte pseudoinversa matricei U şi se note

$X_0 = U^+Y$ este cea mai bună aproximaţie cuadratică a ecuaţiei $UX =$

Exemplu de calcul al pseudoinversei unei matrice. Fie matrice

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Să calculăm matricea U^+.

Matricea U fiind simetrică, avem $\operatorname{Ker} u = (\operatorname{Im} u)^\perp$.

Fie $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ baza canonică a spaţiului $\mathbb{R}^3$ înzestrat cu prod
canonic. Pentru endomorfismul u asociat matricei U în această bază, ave

$$\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}\{e_2, e_1 + e_3\}, \quad \operatorname{Ker} u = \mathbb{R}(e_1 - e_3).$$

Endomorfismul v de matrice U^+ în baza canonică $\mathcal{B}$ verifică atunci

$$\operatorname{Ker} v = (\operatorname{Im} u)^\perp = \operatorname{Ker} u; \quad \operatorname{Im} v = (\operatorname{Ker} u)^\perp = \operatorname{Im} u.$$

Pe de altă parte:

$uvu(e_2) = u(e_2) \Rightarrow uv(e_2) = u(e_2) \Rightarrow v(e_2) = e_2 + \lambda(e_1 - e_3)$; $v(e_2)$
$\operatorname{Im} u \Rightarrow \lambda = 0$, deci $v(e_2) = e_2$;

$uvu(e_1) = u(e_1) \Rightarrow uv(e_1 + e_3) = e_1 + e_3 = u(\dfrac{e_1 + e_3}{2}) \Rightarrow v(e_1 + e_3) =$
$\mu(e_1 - e_3)$; $v(e_1 + e_3) \in \operatorname{Im} u \Rightarrow \mu = 0$, deci $v(e_1 + e_3) = \dfrac{e_1 + e_3}{2}$. D
$v(e_1 - e_3) = 0$ [$\operatorname{Ker} v = \operatorname{Ker} u$], deducem că $v(e_1) = v(e_3) = \dfrac{e_1 + e_3}{4}$.

Finalmente matricea U^+ este

$$U^+ = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

O soluţie parţială a unei probleme a lui N. Pa

Cătălin ŢIGĂERU[1]

Profesorul **Nicolae Papacu** analizează în [**1**] recurenţa pătratică, subl
tul că natura şirului este dictată de alegerea termenului iniţial şi lasă ca
deschisă cazul (III.3.d). Ne propunem să dăm un răspuns parţial acestei p

I. O problemă deschisă şi câteva rezultate generale. Recurenţa

$$x_{n+1} = ax_n^2 + bx_n + c, \quad x_0 \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0,$$

se reduce, cu substituţia $y_n = ax_n + \dfrac{b}{2}$, la recurenţa $y_{n+1} = y_n^2 + \alpha,$
$\dfrac{1}{2}(2b - \Delta)$, cu $\Delta = b^2 - 4ac$. Situaţia propusă ca problemă deschisă, nota
în articolul citat, se referă la cazul în care $\alpha < 0$ şi $y_0 \in (-L_2, L_2) \setminus \{\pm$
$L_{1,2} = \dfrac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - 4\alpha}\right)$ reprezintă punctele fixe ale recurenţei. Dacă p
$-\delta^2$, atunci ne rămâne de studiat recurenţa

$$y_0 \in [-L_2, L_2], \; y_{n+1} = f(y_n), \; n \in \mathbb{N}, \text{ unde } f : \mathbb{R} \to \left[-\delta^2, \infty\right), \; f(x) = x$$

este funcţia ataşată recurenţei, care este surjectivă, strict descrescătoare pe
strict crescătoare pe $[0, \infty)$ şi care are punctele fixe

$$L_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 + 4\delta^2}\right), \quad L_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + 4\delta^2}\right).$$

Introducem notaţia: dacă $g : M \to M$, atunci $g \circ g \circ \ldots \circ g = g$
compunerea s-a efectuat de n ori. Astfel, constatăm că recurenţa (1) se m

$$y_0 \in [-L_2, L_2], \quad y_{n+1} = f^{[n]}(y_0), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Analiza care urmează va stabili următoarele tipuri distincte de comport
şirurilor studiate: (i) şiruri convergente, care nu sunt constante de la un
(ii) şiruri convergente, constante de la un loc încolo; (iii) şiruri mărginite, f
cu mulţimea valorilor finită; (iv) şiruri mărginite, fără limită, cu mulţime
infinită; (v) şiruri nemărginite, cu limita egală cu ∞.

O condiţie suficientă, care să asigure mărginirea şirului $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, este

Propoziţia 1. *Dacă* $0 < \delta \leq \sqrt{2}$, *atunci şirul* $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *este mărginit.*

Demonstraţie. Pornim cu observaţia că $f([-L_2, L_2]) = \left[-\delta^2, L_2\right]$; d
$-L_2 \leq -\delta^2 \quad (*)$, atunci $\left[-\delta^2, L_2\right] \subseteq [-L_2, L_2]$, de unde

$$f\left(\left[-\delta^2, L_2\right]\right) = f\left(\left[-\delta^2, 0\right] \cup [0, L_2]\right) = f([0, L_2]) = \left[-\delta^2, L_2\right].$$

Demonstrăm, prin inducţie, că $f^{[n]}([-L_2, L_2]) = \left[-\delta^2, L_2\right]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
dacă presupunem că $f^{[n-1]}([-L_2, L_2]) = \left[-\delta^2, L_2\right]$, atunci

$$f^{[n]}([-L_2, L_2]) = f\left(f^{[n-1]}([-L_2, L_2])\right) = f\left(\left[-\delta^2, L_2\right]\right) = \left[-\delta^2, L\right.$$

Deducem că $f^{[n]}([-L_2, L_2]) = \left[-\delta^2, L_2\right]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, adică, dacă este
condiţia $(*)$, atunci şirul $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este mărginit. Rezolvând inegalitatea şi ţ
de $\delta > 0$, obţinem $0 < \delta \leq \sqrt{2}$ şi demonstraţia este încheiată.

---

[1] Lect. dr., Universitatea „ Ştefan cel Mare”, Suceava

Ţinând cont de acest rezultat, împărţim analiza noastră în două ca
$\delta \leq \sqrt{2}$ şi $\delta > \sqrt{2}$. Teoremele materialului prezent aduc lămuriri doar în p
în al doilea limitându-ne la câteva comentarii şi la formularea unei conjec

Lema 1. *Dacă $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este şirul definit de (1), atunci $y_n > 0$, $\forall n \in$
numai dacă $y_0 = L_2$.*

Demonstraţie. Să presupunem prin reducere la absurd că există $(y_n)_r$
de (1) astfel încât $y_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, cu $y_0 \in (0, L_2)$. Demonstrăm că,
ipoteză, şirul ar fi strict descrescător: în adevăr, dacă $y_0 \in (0, L_2)$, atunc
$f(x) < x, \forall x \in (0, L_2)$, ar rezulta că $y_1 < y_0$, de unde, ţinând cont de f
este strict crescătoare pe $(0, \infty)$, s-ar deduce, prin inducţie, că $y_{n+1} < y$
Mai departe, ar rezulta că şirul este covergent, deci limita ar fi unul di
fixe L_1 sau L_2. Cum şirul este strict descrescător, s-ar deduce că $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$
ceea ce contrazice faptul că $y_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Constatarea faptului că, dac
atunci $y_n = L_2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, încheie demonstraţia.

Lema 2. *Fie $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şirul definit de (1); dacă $\delta > 1$, atunci $y_n <$
dacă şi numai dacă $y_0 = L_1$.*

Demonstraţie. Considerăm un invers la dreapta al funcţiei f:

$$h : \left[-\delta^2, L_2\right] \to [-L_2, 0], \quad h(x) = -\sqrt{x + \delta^2},$$

unde $\delta > 1$; evident h satisface $(f \circ h)(x) = x$, $\forall x \in \left[-\delta^2, L_2\right]$. Deoar
deducem că $-\delta^2 < -\delta < L_1 < 0$, de unde rezultă că $h([-\delta, 0]) \subset [-\delta, 0$
constatare permite construirea şirului $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definit astfel:

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_{n+1} = h(\alpha_n), \ n \in \mathbb{N}.$$

Ţinând cont de faptul că h este strict descrescătoare şi de faptul că L_1
punct fix al funcţiei h, se demonstrează prin inducţie că

$$-\delta = \alpha_1 < \alpha_3 < \cdots < \alpha_{2n-1} < \cdots < L_1 < \cdots < \alpha_{2n} < \cdots < \alpha_2 < \alpha$$

şi că $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = L_1$. Definim şirul de intervale după cum urmează:

$I_0 = (\alpha_1, \alpha_3)$, $I_n = (\alpha_{2n-1}, \alpha_{2n+1})$, $n \in \mathbb{N}^*$ şi $J_0 = (\alpha_2, \alpha_0)$, $J_n = (\alpha_{2n+2}, \alpha$

Constatând că $h(I_n) = J_n, n \in \mathbb{N}^*$, $h(J_n) = I_{n+1}, n \in \mathbb{N}$, obţinem $(h \circ$
I_n, $(h \circ h)^{[n]}(J_0) = J_n$, ceea ce conduce la

$$\left(f^{[2n-1]}\right)(I_n) = J_0, \ \left(f^{[2n]}\right)(J_n) = J_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Dacă $y_0 \in [-L_2, 0)$, atunci avem de analizat situaţiile:

(a) $y_0 \in [-L_2, -\delta)$; atunci $y_1 = f(y_0) > 0$;

(b) $y_0 \in \{\alpha_n \mid n \in \mathbb{N}\}$; atunci există un $m \in \mathbb{N}$ astfel ca $y_0 = \alpha_m = h^{[m}$
unde obţinem că $y_m = f^{[m-1]}\left(h^{[m-1]}(0)\right) = 0$; mai departe ajungem la y

(c) Dacă $y_0 \in [-\delta, 0] \setminus \{\{\alpha_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{L_1\}\}$, atunci: (c.1) dacă $y_0 <$
un $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $y_0 \in I_m$, deci $y_{2m-1} = \left(f^{[2m-1]}\right)(y_0) \in J_0$, de u
$f(J_0) = \left[-\delta^2, -\delta\right]$, ceea ce conduce la $y_{2m+1} \in f\left(\left[-\delta^2, -\delta\right]\right) \subset (0, L_2)$;
$y_0 > L_1$, există un $m \in \mathbb{N}$ astfel încât $y_0 \in J_m$, deci $y_{2m} = \left(f^{[2m]}\right)(y_0) \in J$
$y_{2m+2} \in (0, L_2)$.

S-a demonstrat că, dacă $y_0 \in [-L_2, 0] \setminus \{L_1\}$, atunci $m \in \mathbb{N}^*$ astfel în
Deoarece, dacă $y_0 = L_1$, atunci $y_n = L_1 < 0, \forall n \in \mathbb{N}$, deducem că $y_n <$
dacă şi numai dacă $y_0 = L_1$.

Următorul rezultat marchează locul apariţiei şirurilor periodice.

Propoziţia 2. *Dacă* $1 \leq \delta$, *atunci:*

a) ecuaţia $f(x) = h(x)$ *are o unică soluţie pozitivă* $a \in [0, \delta)$;

b) dacă $y_0 = a$, *atunci şirul* $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, *definit de* (1), *este periodic, cu* y_2
$y_{2n+1} = f(a) < 0$.

Demonstraţie. *a)* Fie funcţia $g(x) = f(x) - h(x) = x^2 + \sqrt{x + \ldots}$
este strict crescătoare pe $[0, \infty)$. Deoarece $g(0) = \delta - \delta^2 \leq 0$, $g(\delta) = \sqrt{\ldots}$
(egalitatea apare pentru $\delta = 1$), deducem că ecuaţia $g(x) = 0$ are o so
$a \in [0, \delta) \subset [0, L_2)$.

b) se deduce din $(f \circ h)(x) = x, \forall x \in \left[-\delta^2, L_2\right]$. În adevăr, dacă $y_0 =$
$y_2 = f(f(a)) = f(h(a)) = a$, de unde, prin inducţie obţinem $y_{2n} = a$
Analog vom obţine $y_{2n+1} = f(a), \forall n \in \mathbb{N}^*$. q.e.d.

II. Analiza cazurilor corespunzătoare lui $0 < \delta \leq 1$.

1. Cazul $0 < \delta < 1$. Comportamentul şirului (1) este descris de

Teorema 1. *Dacă* $0 < \delta < 1$, *atunci* $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = \begin{cases} L_1; & y_0 \in (-L_2, L \ldots \\ L_2; & y_0 \in \{-L_2, L \ldots \end{cases}$

Demonstraţie. În primul rând, demonstrăm că, dacă $y_0 \in (-L_2, L$
există $n_0 \geq 2$ astfel încât $y_n \in \left(-\delta^2, 0\right)$, $\forall n \geq n_0$. În adevăr, dacă y_0
atunci $y_2 \in \left(-\delta^2, 0\right)$; demonstrăm prin inducţie că $y_n \in \left(-\delta^2, 0\right)$, $\forall n$
$y_{n-1} \in \left(-\delta^2, 0\right)$, atunci $y_n = y_{n-1}^2 - \delta^2 \leq \delta^4 - \delta^2 = \delta^2\left(\delta^2 - 1\right) < 0$; cum y
$\delta^2 \geq -\delta^2$, obţinem $y_n \in \left(-\delta^2, 0\right)$, $\forall n \geq 2$. S-a demonstrat că, dacă y_0
atunci $y_n \in \left(-\delta^2, 0\right), \forall n \geq 2$.

Dacă $y_n \in (-L_2, -\delta) \cup (\delta, L_2)$, din Lema 1 deducem că $\exists n_0$ astfel c
Deoarece $y_1 > 0$, rezultă că $n_0 \geq 2$. Pentru că $y_{n_0} = f(y_{n_0 - 1})$, cu n
deducem că $y_{n_0} \in \left(-\delta^2, 0\right)$, de unde, ca mai sus, rezultă că $y_n \in \left(-\delta^2, 0\right)$,

Am demonstrat că, dacă $y_0 \in (-L_2, L_2)$, atunci există $n_0 \geq 2$ astfel
$\left(-\delta^2, 0\right)$, $\forall n \geq n_0$. Mai departe, dacă $y_0 \in (-L_2, L_2) \setminus \{L_1\}$, atunci, deoa
strict descrescătoare pe $\left(-\delta^2, 0\right)$, obţinem, prin inducţie, următoarele con

(a) în cazul $y_{n_0} \in \left(-\delta^2, L_1\right)$, avem $\forall m \in \mathbb{N}$

$$y_{n_0} < y_{n_0+2} < \cdots < y_{n_0+2m} < \cdots < L_1 < \cdots < y_{n_0+2m+1} < \cdots < y_{n_0+3}$$

(b) în cazul $y_{n_0} \in (L_1, 0)$, avem $\forall m \in \mathbb{N}$

$$y_{n_0+1} < y_{n_0+3} < \cdots < y_{n_0+2m+1} < \cdots < L_1 < \cdots < y_{n_0+2m} < \cdots < y_{n_0}$$

în ambele cazuri se deduce $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = L_1$. Dacă $y_0 = L_1$, atunci $y_n = L$
deci, din nou $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = L_1$. Ţinând cont că, dacă $y_0 \in \{-L_2, L_2\}$, at
$L_1, \forall n \geq 2$, deci $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = L_2$, demonstraţia se încheie.

2. Cazul $\delta = 1$. Conform Propoziţiilor 1 şi 2, vor apare şiruri mărg
limită. Pentru a enunţa rezultatul, construim mulţimea M_0 astfel: pentru

$\mathbb{N}^*$, considerăm mulţimile $M_0^n = \left\{x \in [-L_2, L_2] \mid f^{[n]}(x) = 0\right\}$ şi fie M_0

Să notăm faptul că, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, avem $0 \in M_0^{2n}$, $\{\pm 1\} \subset M$ mult, dacă $\beta \in M_0$, atunci avem şi incluziunea $\left\{x \in [-L_2, L_2] \mid f^{[n]}(x) = \right.$

Teorema 2. *Dacă $\delta = 1$, atunci şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent dac dacă $y_0 \in [-L_2, L_2] \setminus M_0$ şi* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \begin{cases} L_1; \ y_0 \in (-L_2, L_2) \setminus M_0, \\ L_2; \ y_0 \in \{-L_2, L_2\}. \end{cases}$

Dacă $y_0 \in M_0$, atunci $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nu are limită şi există $n_1 \in \mathbb{N}^*$ $y_n = \dfrac{1}{2}\left((-1)^n - 1\right)$, $\forall n \geq n_1$.

Demonstraţie. Se demonstrează prin inducţie că, dacă $y_0 \in (-1, 1)$, a $(-1, 0), \forall n \geq 1$. Mai departe, judecând ca în Teorema 1, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty}$

Să presupunem că $y_0 \in (-L_2, -1) \cup (1, L_2) \setminus M_0$; conform Lemei 1, exi astfel ca $y_{n_0} < 0$. Deoarece $y_0 \notin M_0$, rezultă că $f^{[n_0]}(y_0) \neq 0$, deci y_{n_0} unde $-1 < y_{n_0} < 0$. La fel ca mai sus, obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = L_1$.

Dacă $y_0 \in M_0$, atunci există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $y_{n_0+1} = f^{[n_0]}(y$ continuare obţinem $y_n = \dfrac{1}{2}\left((-1)^n - 1\right), \forall n \geq n_1 = n_0 + 1$ şi demonstraţia

3. Cazul $1 < \delta \leq \sqrt{2}$**.** Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, considerăm mulţimile

$M_{L_{1,2}}^n = \left\{x \in [-L_2, L_2] \mid f^{[n]}(x) = L_{1,2}\right\}$, $M_{L_1} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_{L_1}^n$, $M_{L_2} = \bigcup$

Să notăm deocamdată că $L_1 \in M_{L_1}, L_2 \in M_{L_2}$ şi că $M_{L_1} \cap M_{L_2} = \emptyset$.

Teorema 3. *Dacă $1 < \delta \leq \sqrt{2}$, atunci şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este conve şi numai dacă $y_0 \in M_{L_1} \cup M_{L_2}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = L_1$ dacă $y_0 \in M_{L_1}$ şi $y_0 \in M_{L_2}$.*

Dacă $y_0 \in [-L_2, L_2] \setminus \{M_{L_1} \cup M_{L_2}\}$, atunci şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărgi limită şi conţine o infinitate de termeni negativi şi o infinitate de terme Mai mult, există valori ale lui y_0 pentru care mulţimea valorilor şirului es valori ale lui y_0 pentru care mulţimea valorilor şirului este infinită.

Demonstraţie. Să presupunem că $y_0 \in [-L_2, L_2] \setminus \{M_{L_1} \cup M_{L_2}\}$ supunem prin absurd că există $n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $y_n > 0, \forall n \geq n_0$. Atu considera şirul $(\bar{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit astfel

$$\bar{y}_0 = y_{n_0}, \quad \bar{y}_{n+1} = f(\bar{y}_n), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Deoarece $\bar{y}_n = y_{n+n_0} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, deducem, pe baza Lemei 1, că adică $y_{n_0} = L_2$; dar aceasta conduce la $y_0 \in M_{L_2}$, fals. Presupunem p că există $n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $y_n < 0, \forall n \geq n_0$. Luând în considerare şir definit de $(**)$, deducem că $\bar{y}_n = y_{n+n_0} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$, ceea ce, în virtute conduce la $\bar{y}_0 = L_1$, adică $y_{n_0} = L_1$, aceasta însemnând că $y_0 \in M_{L_1}$, fa S-a demonstrat astfel că, dacă $y_0 \in [-L_2, L_2] \setminus \{M_{L_1} \cup M_{L_2}\}$, atunci şir este mărginit, nu are limită şi conţine o infinitate de termeni pozitivi şi de termeni negativi. Dacă $y_0 \in M_{L_1} \cup M_{L_2}$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \in \{L_1,$

Propoziţia 2 semnalează faptul că, în acest caz, există şiruri periodic general, şiruri cu mulţimea valorilor finită. Demonstrăm în continuare că p

y_0 astfel încât mulţimea valorilor şirului să fie infinită. Pentru aceasta, c
aplicaţia $A : \tilde{\mathbb{N}} \to [X]$, unde $\mathbb{R}[X]$ este inelul polinoamelor cu coeficie
$\tilde{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus \{(n,n) \mid n \in \mathbb{N}\}$, definită prin $A(n_1, n_2) = f^{[n_1]}(X) - f^{[n_2]}(X$
Considerăm mulţimea S care are ca elemente toate rădăcinile din intervalu
ale polinoamelor ce aparţin imaginii funcţiei A. Cum S este numărabi
$y_0 = b \in [-L_2, L_2] \setminus S$; demonstrăm că funcţia $Y : \mathbb{N} \to [-L_2, L_2]$, $Y(n)$
injectivă: în adevăr, dacă ar exista $n_1, n_2 \in \mathbb{N}, n_1 \neq n_2$, astfel ca $Y(n_1)$
atunci am avea $f^{[n_1]}(b) = f^{[n_2]}(b)$, ceea ce ar însemna că polinomul
$g(X) = f^{[n_1]}(X) - f^{[n_2]}(X)$, are rădăcina $b \in S$, ceea ce este fals. Q.e.d.

III. Completări şi comentarii finale. 1. Propoziţia 2 asigură, pe
existenţa şirurilor periodice, de perioadă 2. Fără a intra în detalii, preciză
se pot construi şiruri care au perioade mai mari decât 2.

2. Pentru $\delta = \sqrt{2}$ se cunoaşte forma analitică a termenului gener
situaţie făcând obiectul mai multor probleme de concurs (vezi [1], [3]).

3. În cazul $\delta > 1$, putem constata: (a) dacă $y_0 \in M_{L_1} \cup M_{L_2}$, atunci $\lim\limits_{n\to}$
dacă $y_0 \in M_{L_1}$ şi $= L_2$ dacă $y_0 \in M_{L_2}$.

(b) Conform propoziţiei 2, există şiruri periodice sau şiruri periodice d
încolo, deci şiruri mărginite, cu un număr finit de valori.

(c) Există posibilitatea de a alege $y_0 \in [-L_2, L_2]$ astfel încât şirul $(y_n)_n$
limita egală cu ∞; de exemplu, dacă este $y_0 = 0$, atunci $y_1 = -\delta^2, y_2 = \delta^4$
de unde $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$. Ceea ce nu putem preciza este dacă există posib
a alege $y_0 \in [-L_2, L_2]$, astfel încât şirul să fie mărginit şi mulţimea valor
infinită. În legătură cu acest subiect propunem conjectura:

Şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *definit de recurenţa* $y_0 \in \left[-\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+4\delta^2}\right), \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\right.\right.$
$y_{n+1} = y_n^2 - \delta^2, \delta > \sqrt{2}$, *este mărginit dacă şi numai dacă este periodic d*
încolo.

4. Sintetizăm concluziile articolului în următorul tabel:

Valorile lui δ	Tipul de şiruri
$\delta \in (0,1)$;	$(i), (ii)$;
$\delta = 1$;	$(i), (ii), (iii)$;
$\delta \in \left(1, \sqrt{2}\right]$;	$(ii), (iii), (iv)$;
$\delta \in \left(\sqrt{2}, \infty\right)$;	$(ii), (iii), (v), (iv-?)$.

5. Dl prof. *Gheorghe Marchitan* a citit cu atenţie materialul, îmbu
prin observaţii. Acelaşi efect benefic l-au avut şi discuţiile purtate cu dl pr
Marchitan. Amândurora, autorul le mulţumeşte şi pe această cale.

Bibliografie

1. **N. Papacu** - *Asupra unui şir recurent*, Arhimede, 5-6/2000, 1-4.
2. **Gh. Oprişan** - *On a class of real sequences defined by recurence*, Gazeta M
(seria informare ştiinţifică şi perfecţionare metodică), XIV(XCIII), 2/199
3. **C. Ţigăeru** - *Recurenţa* $a_n = 2a_{n-1}^2 - 1$ *şi problema XI.3 a Concursul*
"Sinus", Sinus, II.1(4)/2006.

Criterii de congruenţă a triunghiurilor

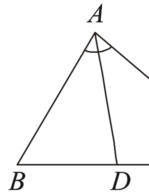
Marius APETRII*[1] *şi Cristian-Cătălin BUDEAN

În *RecMat - 2/2005*, elevilor de clasa a VII-a le este propusă următoarea

VII.63. *Fie triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ cu $AB = A'B'$, $AC = A'$ toarele $[AD]$, $[A'D']$ congruente. Să se arate că $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ (enun*

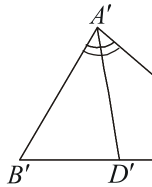
Petru As

În cele ce urmează, dorim să stabilim condiţii suficiente pentru congrue triunghiuri care au două bisectoare congruente. Vom considera mereu ipoteza



(*I*) *Triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ au bisectoarele $[AD]$ şi $[A'D']$ congruente, cu $D \in (BC)$, $D' \in (B'C')$, iar $m(\widehat{ADB}) \leq 90°$, $m(\widehat{A'D'B'}) \leq 90°$.*

Propoziţia 1. *În ipoteza (I), dacă $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}$ şi $\widehat{BDA} \equiv \widehat{B'D'A'}$, atunci $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.*



Demonstraţie. Din congruenţa triunghiurilor ADB şi $A'D'B'$ (U.L.U.) rezultă că $AB = A'B'$ şi $\widehat{ABD} \equiv \widehat{A'B'D'}$, de unde concluzia urmează conform U.L.U.

Propoziţia 2. *În ipoteza (I), dacă $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}$ şi $AB = A'B'$, atunci $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.*

Demonstraţie. Obţinem că $\triangle ABD \equiv \triangle A'B'D'$ (U.L.U.), de und $\widehat{A'B'C'}$. Folosind U.L.U., deducem că $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Propoziţia 3. *În ipoteza (I), dacă $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}$ şi $BD = B'$ $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.*

Demonstraţie. Deoarece $\widehat{BAD} \equiv \widehat{B'A'D'}$, $AD = A'D'$, $BD = B'D$ $\widehat{A'D'B'}$ sunt ambele neobtuze, conform L.L.U. rezultă că $\triangle ADB \equiv \triangle$ acum concluzia este imediată.

Propoziţia 4. *În ipoteza (I), dacă $AB = A'B'$ şi $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'}$ $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.*

Demonstraţie. Deoarece $AB = A'B'$, $AD = A'D'$, $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C}$ $\widehat{A'D'B'}$ sunt ambele neobtuze, conform L.L.U. rezultă că $\triangle ADB \equiv \triangle$ unde concluzia anunţată.

Propoziţia 5. *În ipoteza (I), dacă $\widehat{ADB} \equiv \widehat{A'D'B'}$ şi $BC = B'$ $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.*

Demonstraţie. Considerăm punctul A'' în acelaşi semiplan cu A fa astfel încât $\triangle A''BC \equiv \triangle A'B'C'$. Fie $[A''D''$ bisectoarea lui $\widehat{BA''C}$, $D'' \in$ $\{E\} = A''B \cap AD$, $\{F\} = A''D'' \cap AC$. Din $\widehat{ADB} \equiv \widehat{A''D''B}$ rezultă că A

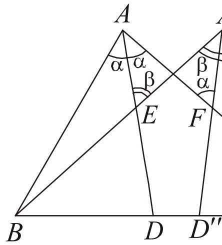
---

[1] Asist. drd., Facultatea de Matematică, Univ. Al. I. Cuza, Iaşi

[2] Profesor, C. N. Emil Racoviţă, Iaşi

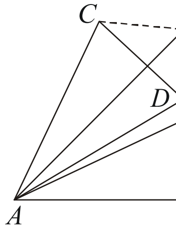
şi cum $AD = A''D''$, obţinem că $ADD''A''$ este paralelogram. Astfel, A
deci $A'' \in \operatorname{Ext} ABC$, de unde $m(\widehat{A''CB}) \geq m(\widehat{ACB})$ şi $m(\widehat{ABC}) \geq m($
invers; ne plasăm în prima situaţie.

Din $AD \parallel A''D''$ obţinem că $m(\widehat{EAC}) = m(\widehat{AFA''}) = \alpha$ şi $m(\widehat{AEA''}) = m(\widehat{EA''F}) = \beta$. Atunci $m(\widehat{ABE}) = 180° - \alpha - (180° - \beta) = \beta - \alpha$ şi $m(\widehat{A''CF}) = 180° - \beta - (180° - \alpha) = \alpha - \beta$. Cum $\alpha - \beta \geq 0$, deducem că $\alpha = \beta$. Astfel, $m(\widehat{A''CA}) = 0$, deci C, A'', A sunt coliniare şi $m(\widehat{ABA''}) = 0$, deci B, A'', A sunt coliniare. În concluzie, $A'' = A$, de unde $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.



Propozţia 6. *În ipoteza (I), dacă $AB = A'B'$ şi $AC = A'C'$, atunci*
$\triangle A'B'C'$. (Problema VII.63 din RecMat - 2/2005)

Demonstraţia 1. Considerăm punctul C'' în acelaşi semiplan cu C faţă de AB, astfel încât $\triangle ABC'' \equiv \triangle A'B'C'$. Fie $[AD''$ bisectoarea lui $\widehat{BAC''}$, $D'' \in (BC'')$. Din teorema bisectoarei avem că $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{AB}{AC}$ şi $\dfrac{BD''}{C''D''} = \dfrac{AB}{AC''}$ şi cum $AC'' = AC$, deducem că $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{BD''}{C''D''}$, deci $DD'' \parallel CC''$. Triunghiurile ACC'' şi ADD'' sunt
atunci A se află atât pe mediatoarea lui $[DD'']$, cât şi pe cea a lui $[CC'']$
două mediatoare sunt paralele sau coincid; rămâne cea de-a doua varian
rezultă că A aparţine medianei din B în $\triangle BCC''$, fals. Deducem că $C =$
$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.



Observaţia 1. În această demonstraţie nu folosim explicit faptul că
sunt bisectoare, ci doar egalitatea rapoartelor $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{B'D'}{D'C'}$. Astfel, auto
mei, **Petru Asaftei**, observă că rămâne adevărată concluzia dacă înlocuim
bisectoarele $[AD]$ şi $[A'D']$ cu două ceviene ce determină rapoarte egale p
care cad. În particular, concluzia rămâne adevărată pentru $[AD]$, $[A'D$
sau simediane.

Observaţia 2. Am putea denumi rezultatul Propoziţiei 6 *cazul de*
Latură-Bisectoare-Latură. **Claudiu-Ştefan Popa** ridică problema funcţi
cazuri *Bisectoare-Latură-Bisectoare* sau *Bisectoare-Bisectoare-Bisectoare*;
cititorului demonstrarea sau invalidarea acestora. Pentru o eventuală justi
promiţătoare pare calea urmată în

Demonstraţia 2. Cu notaţiile uzuale, $l_a = \dfrac{2bc}{b+c}\cos\dfrac{A}{2}$ şi $l'_a = \dfrac{2b}{b'+}$
Cum $l_a = l'_a$, $b = b'$, $c = c'$, obţinem $\cos\dfrac{A}{2} = \cos\dfrac{A'}{2}$, de unde $A = A'$.
rezultă din L.U.L.

Propoziţia 7. *În ipoteza (I), dacă $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$ şi $BC = B'$

$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Demonstraţie. Mai întâi, să observăm că:

(i) $m(\widehat{BDA}) < 90^\circ \Leftrightarrow AB < AC$. Într-adevăr:

$$m(\widehat{BDA}) < 90^\circ \Leftrightarrow BD > c\cos B \Leftrightarrow \frac{ac}{b+c} > \frac{a^2+c^2-b^2}{2a} \Leftrightarrow$$

$$2a^2c > a^2(b+c) + (c-b)(b+c)^2 \Leftrightarrow (b-c)\left[(b+c)^2 - a^2\right] > 0 \Leftrightarrow b$$

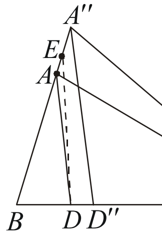
(ii) În $\triangle ABC$, $AB < AC$, considerăm A'' cu $A \in (BA'')$ şi fie $[A$
bisectoarele unghiurilor $\widehat{BAC}$, respectiv $\widehat{BA''C}$, $D, D'' \in (BC)$; pe segme
avem atunci ordinea $B - D - D'' - C$. Într-adevăr, dacă $AC = b$, $BC =$
$A''B = c''$, $A''C = b''$ şi $m(\widehat{ABC}) = \alpha$, avem că $\dfrac{a}{c} + \dfrac{a}{c''} > 2\cos\alpha$. R
evidentă pentru $\alpha \geq 90^\circ$, iar pentru $\alpha < 90^\circ$, folosind teorema cosinusului
$c < b$, avem:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\alpha \Rightarrow a^2 > 2ac\cos\alpha \Rightarrow \frac{a}{c} > 2\cos\alpha \Rightarrow \frac{a}{c} + \frac{a}{c''} >$$

Atunci

$$\left(\frac{a}{c} - \frac{a}{c''}\right)\left(\frac{a}{c} + \frac{a}{c''}\right) > \left(\frac{a}{c} - \frac{a}{c''}\right) \cdot 2\cos\alpha \Rightarrow$$

$$\frac{a^2}{c^2} > \frac{b''^2}{c''^2} \Rightarrow \frac{b}{c} > \frac{b''}{c''} \Rightarrow \frac{D''C}{D''B} < \frac{DC}{DB} \Rightarrow D \in (BD'').$$



Revenim la demonstraţia propoziţiei; putem presupune fără a restrânge generalitatea că $AB \leq A'B'$. Considerăm $A'' \in [BA$ astfel încât $\triangle A''BC \equiv \triangle A'B'C'$ (deci $A''B = A'B'$). Cum $A \in (BA'')$, conform observaţiei (ii), pe (BC) avem ordinea $B-D-D''-C$ şi atunci $m(\widehat{BAC}) > m(\widehat{BA''C})$, adică $m(\widehat{BDA}) < m(\widehat{BD''A''})$. Construim $DE \parallel A''D''$, $E \in AB$. Cum $m(\widehat{BAD}) < 90^\circ$,
atunci $m(\widehat{EAB}) > 90^\circ$ şi deci $ED > AD$. Din $DE \parallel D''A''$ rezultă că
$\dfrac{BE}{BA''} < 1$, de unde $DE < D''A''$. Obţinem astfel că $AD < A''D''$, fals. I
$AB = A''B$, prin urmare $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Propoziţia 8. *În ipoteza (I), dacă $AB = A'B'$ şi $BC = B'C'$, atunci*
$\triangle A'B'C'$.

Demonstraţie. Presupunem prin absurd că $m(\widehat{ABC}) < m(\widehat{A'B'C'})$,
$A'C'$. Cu notaţiile uzuale, avem:

$$AD^2 = \left(\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}\right)^2 = \frac{bc\left[(b+c)^2 - a^2\right]}{(b+c)^2} = bc\left[1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right] <$$

$$< b'c\left[1 - \frac{a^2}{(b'+c)^2}\right] = \frac{b'c\left[(b'+c)^2 - a^2\right]}{(b'+c)^2} = \frac{2b'c}{b'+c}\cos\frac{A'}{2} = A$$

deci, $AD < AD'$, ceea ce contrazice ipoteza. Presupunerea făcută este
urmare $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Asupra problemei 3639
din Gazeta Matematică, v. XXXIII (1927–1

D. M. BĂTINEŢU-GIURGIU[1]

În volumul XXXIII (1927-1928) al *Gazetei Matematice*, la pagina 2
Ionescu[2] a propus problema 3639 cu următorul enunţ:

Să se demonstreze că

$$\lim_{m\to\infty}\left(m\left(\left(1+\frac{1}{m}\right)^m-e\right)\right)=-\frac{e}{2},$$

$$\lim_{m\to\infty}\left(m\left(m\left(\left(1+\frac{1}{m}\right)^m-e\right)+\frac{e}{2}\right)\right)=\frac{11e}{24},$$

$$\lim_{m\to\infty}\left(m\left(m\left(m\left(\left(1+\frac{1}{m}\right)^m-e\right)+\frac{e}{2}\right)-\frac{11e}{24}\right)\right)=-\frac{21e}{48},$$

e fiind baza logaritmilor neperieni.

Soluţia acestei probleme a fost dată de d-nii *G. G. Constantinescu*,
Olteanu, *George Silaş* în Gazeta Matematică, vol. XLII (1936-1937), pag.

Mai întâi se arată că:

$$e_m=\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=e\left(1-\frac{1}{2m}+\frac{11}{24m^2}-\frac{21}{48m^3}+\frac{a_m}{m^4}\right),$$

unde $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{a_m}{m^4}=0$. Din (4) rezultă limitele din enunţ.

În această Notă ne propunem să generalizăm limita (1). Fie $(x_n)_{n\geq 1}$
vergent de numere reale cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \overset{\text{not}}{=} D_0(x_n)\in\mathbb{R}$.

Definiţie [1]. Spunem că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ admite o derivată dacă există
$\lim\limits_{n\to\infty}(n(x_n-x)) \overset{\text{not}}{=} D(x_n)\in\overline{\mathbb{R}}$. Dacă $D(x_n)\in\mathbb{R}$, spunem că şirul $(x$
derivabil.

Propoziţia 1. *Şirul* $(u_n)_{n\geq 1}$, $u_n=\left(1+\dfrac{r}{n}\right)^s$, *unde* $r\in\mathbb{R}_+^*$, s
derivabil.

Demonstraţie. Dacă $s=0$, atunci $u_n=1$, $\forall n\in\mathbb{N}$; deci $n(u_n$
$\forall n\in\mathbb{N}^*$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}(n(u_n-1))=0$.

Dacă $s\in\mathbb{R}_+^*$, atunci $D_0(u_n)=\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{r}{n}\right)^s=1$. Deci

$$\lim_{n\to\infty}(n(u_n-1))=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{u_n-1}{\ln u_n}\ln u_n^n\right)=1\cdot\lim_{n\to\infty}(\ln u_n^n)=\ln\Big(\lim_{n\to\infty}$$

$$=\ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{sn}\right)=\ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right)^{rs}\right)=\ln e^{rs}=rs$$

[1] Profesor, Colegiul Naţional "Matei Basarab", Bucureşti
[2] Matematician român (1901–1985)

ceea ce demonstrează propoziţia.

Propoziţia 2. *Dacă* $(x_n)_{n\geq 1}$ *este un şir convergent cu* $D_0(x_n) =$

$= x \in \mathbb{R}^*$, *atunci şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *este derivabil dacă şi numai dacă există* $\lim\limits_{n\to}$

$= d \in \mathbb{R}_+^*$.

Demonstraţie. Este evident că

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{x}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{x_n-x}{x}\right)^{\frac{x}{x_n-x}}\right)^{\frac{n(x_n-x)}{x}} = e^{\frac{1}{x}\lim\limits_{n\to\infty}(n(x_n-}$$

Relaţia (5) ne arată că, dacă există $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{x}\right)^n = d \in \mathbb{R}_+^*$, atunci $d = e^{\frac{1}{x}\,\mathrm{l}}$

Prin urmare există şi $D(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(n(x_n - x)) = x \ln d \in \mathbb{R}$, adică şir

este derivabil.

Reciproc, relaţia (5) ne arată că, dacă şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este derivabil, at

$D(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(n(x_n - x)) \in \mathbb{R}$, deci există şi $d = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{x}\right)^n = e^{\frac{1}{x}\lim\limits_{n\to\infty}(}$

$e^{\frac{1}{x}D(x_n)} \in \mathbb{R}_+^*$. Cu aceasta propoziţia este demonstrată.

În continuare vom nota $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = D_0(x_n) = x \in \mathbb{R}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = D_0(y_n$

Propoziţia 3 [2]. *Dacă şirurile* $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ *sunt derivabile, a*
$(x_n - y_n)_{n\geq 1}$ *este derivabil şi* $D(x_n y_n) = D(x_n)\, y + x D(y_n)$.

Demonstraţie. Conform enunţului avem:

$$D_0(x_n) = x = \lim_{n\to\infty} x_n, \quad D_0(y_n) = y = \lim_{n\to\infty} y_n \in \mathbb{R}$$

şi, de asemenea,

$$D(x_n) = \lim_{n\to\infty}(n(x_n - x)), \quad D(y_n) = \lim_{n\to\infty}(n(y_n - y)) \in \mathbb{R}.$$

Prin urmare, trebuie de arătat că

$$D(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty}(n(x_n y_n - xy)) \in \mathbb{R}.$$

Într-adevăr,

$$n(x_n y_n - xy) = n(x_n y_n - x y_n + x y_n - xy) = y_n n(x_n - x) + x n(y_n - y),$$

de unde, prin trecere la limită cu $n \to \infty$, deducem:

$$D(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty}(n(x_n y_n - xy)) = \lim_{n\to\infty}(n(x_n - x))\lim_{n\to\infty} y_n + x\lim_{n\to\infty}(n(y$$

$$= D(x_n)\, D_0(y_n) + D_0(x_n)\, D(y_n).$$

Cu aceasta propoziţia este demonstrată.

În continuare, fie $r \in \mathbb{R}_+^*$, $s \in \mathbb{R}_+$ şi vom adopta notaţiile:

$$e_n(r,s) = \left(1+\frac{r}{n}\right)^{n+s}, \quad e_n(r) = e_n(r,0) = \left(1+\frac{r}{n}\right)^n,$$

$$u_n = \left(1+\frac{r}{n}\right)^s, \quad e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Se observă că $\lim\limits_{n\to\infty} e_n(r,s) = e^r$, $\lim\limits_{n\to\infty} e_n(r,0) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n = e^r$, li
$\lim\limits_{n\to\infty} e_n = e$.

Propoziţia 4. *Şirul* $(e_n(r))_{n\geq 1}$ *este derivabil şi*

$$D(e_n(r)) = -\frac{r^2 e^r}{2}.$$

Demonstraţie. Conform inegalităţilor Bencze-Tóth din [**3**] avem

$$\frac{e^r}{an+b} < e^r - e_n(r) < \frac{e^r}{an+c},\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \text{unde } a=\frac{2}{r^2};\ b,c\in\mathbb{R}$$

Prin înmulţire cu n, deducem că

$$\frac{e^r n}{an+b} < n(e^r - e_n(r)) < \frac{e^r n}{an+c},\quad \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

De aici, prin trecere la limită cu $n\to\infty$, rezultă că

$$D(e_n(r)) = \lim_{n\to\infty}(n(e_n(r)-e^r)) = -\frac{e^r}{a} = -\frac{r^2e^r}{2}.$$

Teoremă. *Şirul* $(e_n(r,s))_{n\geq 1}$ *este derivabil şi*

$$D(e_n(r,s)) = \lim_{n\to\infty}(n(e_n(r,s)-e^r)) = \frac{re^r}{2}(2s-r).$$

Demonstraţie. Să observăm că $e_n(r,s) = e_n(r)u_n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Deoar
$(e_n(r))_{n\geq1}$ şi $(u_n)_{n\geq1}$ sunt şiruri derivabile, conform Proprietăţii 3 rezu
$(e_n(r,s))_{n\geq1} = (e_n(r))_{n\geq1}\cdot(u_n)_{n\geq1}$ este un şir derivabil şi

$$D(e_n(r,s)) = D(e_n(r)u_n) = D(e_n(r))\lim_{n\to\infty}u_n + \lim_{n\to\infty}e_n(r)D(u$$

$$= -\frac{r^2e^r}{2}\cdot 1 + e^r rs = \frac{re^r}{2}(2s-r).$$

Observaţie. În particular, dacă $r=1$, $s=0$ obţinem relaţia (1) din
3639 a lui **D. V. Ionescu**, iar dacă $r=s=1$ obţinem că

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-e\right)\right) = \frac{e}{2}.$$

Bibliografie

1. **M. Bătineţu-Giurgiu, D. M. Bătineţu-Giurgiu, M. Bencze** - *Şiruri*
Gazeta Matematică, nr. 9/2005, 410-420.

2. **M. Bătineţu-Giurgiu, D. M. Bătineţu-Giurgiu, M. Bencze** - *De*
quences, Octogon Mathematical Magazine, 13 (2005), no. 2, 936-945.

3. **M. Bencze, L. Tóth** - *O generalizare a inegalităţii Pólya-Szegö*, Arh
3-4/2005, 7-10.

O problemă despre suma cifrelor unui număr r în baze de numeraţie oarecare

Adrian ZAHARIUC[1]

1. Introducere. Studiul cifrelor puterilor unui număr întreg este c dificilă de teoria numerelor. Pentru ultimele progrese în acest sens, citit consulta [**2**]. Există multe probleme, evidente din punct de vedere int încă sunt departe de a fi rezolvate. Chiar şi faptul că suma cifrelor lui infinit nu este atât de evident, fiind un rezultat binecunoscut al lui Sc Printre întrebările ce apar, una pare adevărată dincolo de orice îndoială, d imposibil de atacat.

Propoziţia 1. *a şi b sunt numere naturale nenule astfel încât*

$$s(a^n) = s(b^n)$$

pentru orice n. Atunci $\lg a - \lg b \in \mathbb{Z}$. ($s\,(N)$ notează suma cifrelor numă

Observaţie. Desigur, $\lg a - \lg b = \lg a/b$, deci $\lg a - \lg b \in \mathbb{Z}$ înseamnă $a = b$ sau că numărul mai mare dintre a şi b este obţinut din celălalt prin câtorva 0-uri la sfârşit. Este evident că reciproca acestui fapt este adevăr

Propoziţia 2. *a şi b sunt numere naturale nenule astfel încât*

$$s(an) = s(bn)$$

pentru orice n. Atunci $\lg a - \lg b \in \mathbb{Z}$.

Este clar că aceasta este o variantă mai slabă a problemei anterioare (2) este mult mai restrictivă decât (1); în caz că (2) este adevărată, avem

$$s(a^n) = s(a^{n-1}b) = s(a^{n-2}b^2) = \cdots = s(ab^{n-1}) = s(b^n),$$

deci (1) este de asemenea adevărată. Astfel, am devenit interesaţi de ace bare. Am crezut că nu avem de verificat decât un lucru simplu, dar ac dovedit a fi altul.

2. Observaţii preliminare. O modalitate naturală de a ataca proble vedem care termeni ai şirurilor $s(an)$ şi $s(bn)$ pot fi calculaţi uşor. Aceas nu se va dovedi eficientă, dar ne va da o imagine asupra problemei. Este următoarea

Lemă. *Dacă $N \leq 10^k - 1$, atunci*

$$s\left(\left(10^k - 1\right) N\right) = 9k.$$

Demonstraţie. Putem presupune că 10 nu divide N. Fie $N = \overline{b_1 b_2 \ldots}$ primele cifre pot fi şi nule. Este mai convenabil şi mai uşor să calculăm

[1] Elev, cl. a XI-a, Colegiul Naţional "Ferdinand I", Bacău

decât un produs:

$$s\left(\left(10^k-1\right)N\right)=s\left(10^kN-N\right)=s(\overline{b_1b_2\dots b_k\underbrace{00\dots00}_{k\text{ cifre}}}-\overline{b_1b_2\dots b_{}}$$

$$=s\left(\overline{b_1b_2\dots b_{k-1}(b_k-1)(9-b_1)(9-b_2)\dots(9-b_{k-1})(10-b_k)}\right)=$$

deci lema este demonstrată.

Ce se întâmplă dacă folosim aceasta în problema noastră? Dacă $10^k -$
atunci

$$s\left(\left(10^k-1\right)a\right)=9k \quad \text{şi} \quad s\left(\left(10^k-1\right)b\right)=9k,$$

deci, de fapt, $s(an)=s(bn)$ pentru toţi $n=10^k-1$ suficient de mari
ipoteza noastră. Aşadar, din această observaţie, împreună cu observaţia că
0-urilor în numerele n nu are efect, concluzionăm că toate şirurile de form
structuri similare şi chiar valori comune pentru anumite valori ale lui n.
este clar că alegerea unor valori "frumoase" ale lui n nu este o tehnică ut
Dar ce s-ar întâmpla dacă am reuşi să găsim forme simple pentru a
Aceasta este prima idee utilă.

Desigur, putem tăia 0-urile de la sfârşitul numerelor a şi b, deci 10 nu
a nici b, şi ne ramâne să arătăm că $a=b$. Presupunem că nu este adevăr
$a>b$. Atunci, evident, pentru orice n, $an>bn$. Vrem să găsim un num
are suma cifrelor mai mare decât cea a tuturor numerelor mai mici decât e
aceasta va contrazice $s(an)=s(bn)$ şi problema este rezolvată. Dar care s
numere? Sunt numerele care conţin doar cifra 9, eventual, cu excepţia p
Nu este greu să vedem că a are un astfel de multiplu dacă şi numai dacă (
Deci, în acest caz, problema este rezolvată. Din păcate, nu putem rezolva
idee cazul în care a sau b sunt divizibile cu puteri mari ale lui 2 sau 5
dacă am fi folosit o bază primă în locul lui 10, problema ar fi fost rezo
acest motiv considerăm potrivit să generalizăm problema pentru o bază de
oarecare.

Propoziţia 3. *Fie $b\geq 2$, iar m şi n două numere naturale nenule a*

$$s_b(km)=s_b(kn),$$

pentru orice k. Atunci $\log_b m-\log_b n\in\mathbb{Z}$.

3. Soluţia problemei. *Pasul 1.* Vom arăta ca fracţia n/m are un
de cifre după virgulă. Pentru fiecare i, există un $k_i\in\mathbb{Z}$ astfel încât

$$b^i\leq k_im\leq b^i+m-1.$$

Atunci, deoarece funcţia s_b este subaditivă,

$$s_b(k_im)\leq s_b(b^i)+s(k_im-b^i)=1+s_b(k_im-b^i)\leq 1+k_im-b^i \leq$$

Să fixăm $j\in\mathbb{N}$, foarte mare. Vom demonstra că pentru orice i suficien
primele $j-1$ cifre ale lui k_in coincid cu primele $j-1$ cifre ale lui n/m.

a lui n/m este prima cifră din stânga diferită de 0 indiferent dacă este î
după virgulă. Fie

$$C = b^{-j} \left\lfloor \frac{n}{m} b^j \right\rfloor .$$

Avem

$$C \leq \frac{n}{m} = \frac{k_i n}{k_i m} < C + \frac{1}{b^j} \Leftrightarrow k_i m C \leq k_i n < k_i m \left(C + \frac{1}{b^j} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^i C \leq k_i n < \left(b^i + m \right) \left(C + \frac{1}{b^j} \right) = b^i C + \frac{b^i}{b^j} + m \left(C + \frac{1}{b^j} \right)$$

Ca să stabilim faptul că primele $j-1$ cifre ale lui $k_i n$ sunt aceleaşi
$j-1$ cifre ale lui n/m, trebuie să arătăm că

$$b^i C \leq k_i n < b^i C + \frac{b^{i+1}}{b^j}.$$

Conform $(*)$, este suficient să arătăm că

$$m \left(C + \frac{1}{b^j} \right) < \frac{b^i (b-1)}{b^j},$$

care este adevărată pentru i suficient de mare. Atunci, pentru orice j, exis
ai şirului $k_i n$ care au suma cifrelor cel puţin egală cu suma primelor $j -$
lui n/m.

Cum $s_b(k_i m) \leq m$, pentru orice i rezultă că şirul $s_b(k_i n)$ este mărgin
deducem că toate cifrele în baza b ale lui n/m sunt 0, eventual cu exc
număr finit.

Pasul 2. Vom începe cu un rezultat simplu, dar important. Nu-l vom d
fiind binecunoscut.

Lemă. *A şi B au proprietatea că A/B are un număr finit de cifre d*
în baza b. Atunci, toţi factorii primi ai lui

$$\frac{B}{(A, B)}$$

se numără printre factorii primi ai lui b. Altfel spus, dacă p este prim,
atunci $\exp_p m \geq \exp_p n$. ($\exp_p A$ notează exponentul numărului p în desc
lui A.)

Am văzut că n/m are un număr finit de cifre după virgulă. Dar, desig
demonstra analog că şi m/n are un număr finit de cifre după virgulă. Atunc
lemei, pentru orice p care nu îl divide pe b, $\exp_p m = \exp_p n$. Cu alte cuv

$$\text{dacă} \quad b = \prod_1^t p_i^{\alpha_i}, \quad \text{atunci } m = N \prod_1^t p_i^{r_i} \quad \text{şi} \quad n = N \prod_1^t p_i^{s_i},$$

cu $(N, b) = 1$. Să fixăm $f \in \mathbb{N}$ suficient de mare şi să luăm

$$k_1 = \prod_1^t p_i^{f\alpha_i - s_i}.$$

Înlocuind k din ipoteza $s_b(km) = s_b(kn)$ cu kk_1, obţinem

$$s_b(k_1km) = s_b(k_1kn) \Leftrightarrow s_b\left(k\prod_1^t p_i^{f\alpha_i - s_i + r_i} N\right) = s_b\left(kb^f N\right) = s_b(kN),$$

Pentru simplitate, fie

$$K = \prod_1^t p_i^{f\alpha_i - s_i + r_i}.$$

Atunci, $s_b(kNK) = s_b(kN)$ pentru toţi $k \in \mathbb{N}$, care reduce problema cu
important să ţinem minte că $(N, b) = 1$.

Pasul 3. Să arătăm că $\log_b K \in \mathbb{Z}$. Deoarece $s_b(kNK) = s_b(kN)$
$k \in \mathbb{N}$, deducem că

$$s_b(N) = s_b(KN) = s_b(K^2N) = s_b(K^3N) = \dots$$

În particular, aceasta înseamna că mulţimea $\{s_b(K^uN) : u \in \mathbb{N}\}$ este mar

Dacă $\log_b K \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, vom arăta că pentru orice înşiruire de cifre, e
astfel încât K^uN începe exact cu acea secvenţă de cifre, ceea ce ar co
contradicţie. Pentru aceasta, este suficient să arătăm că mulţimea

$$\{\{\log_b K^uN\} : u \in \mathbb{N}\},$$

unde $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$, este densă în $[0, 1]$. Dar, deoarece $\log_b K^uN = u\log_b$
aceasta rezultă imediat din lema lui Kronecker. Amintim că lema lui
afirmă faptul că pentru orice $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, mulţimea $\{\{\alpha n\} : n \in \mathbb{N}\}$ est
$(0, 1)$. Aşadar, am arătat că $\log_b K \in \mathbb{Q}$.

Să presupunem, prin absurd, că $\log_b K \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$. Este foarte interesant s
că acest lucru nu este posibil decât atunci când b este o putere netri
demonstraţia este făcută în toate celelalte cazuri. Observăm că $\log_b K \in$
de fapt că, pentru orice p, $\exp_p K = \log_b K \exp_p b$. Fie $r = \lfloor \log_b K \rfloor$; atunc
$r \cdot \exp_p b$, deci $b^r \mid K$. Fie $K' = K/b^r$; este clar că $K' < b$, deci K' est
baza b. Deoarece K' este obţinut din K prin ştergerea 0-urilor în baza b,
$s_b(kNK') = s_b(kN)$, pentru orice k. Deoarece $(N, b) = 1$, nu este greu s
N are un multiplu kN de forma $11\dots11$ în baza b (există două numere
formă congruente modulo K; deci K divide diferenţa lor, care, după omite
de la sfârşit este de forma $11\dots11$). Deci $s_b(kN) = a$ şi $s_b(kNK') = K'$
$K' = 1$. Aşadar, $K = b^r$, deci $\log_b K \in \mathbb{Z}$ şi, deoarece $\log_b K = f + (\log_b m$
$\mathbb{Z}$, va rezulta că afirmaţia din Propoziţia 3 este adevărată.

Bibliografie

1. **G. Dospinescu, A. Zahariuc** - *Suma cifrelor unui număr natural,*
Revistă de cultură matematică (Bucureşti), 2004, nr. 3-4, 2-15.

2. **R. Blecksmith, M. Filaseta, C. Nicol** - *A result on the digits of a^n,*
64(3), 1993, 331-339.

3. **http://www.mathlinks.ro**

Generalizări ale unor inegalităţi din RecM

Alexandru NEGRESCU[1]

Ne propunem să generalizăm următoarele inegalităţi apărute în revista
Matematice":

X.53. (nr. 2/2004, p. 155). *Fie* $a, b, c \in (1, \infty)$ *astfel încât* $a + b + c$
arate că

$$\log_a \left(2b^3 + c^3\right) + \log_b \left(2c^3 + a^3\right) + \log_c \left(2a^3 + b^3\right) \geq 12.$$

Angela

IX.48 (nr. 1/2004, p.77). *Fie* $a, b, c \in (0, \infty)$ *cu* $a + b + c + \sqrt{abc}$ =
arate că

$$\frac{a^2}{a + \sqrt{bc}} + \frac{b^2}{b + \sqrt{ca}} + \frac{c^2}{c + \sqrt{ab}} \geq \frac{3}{2}.$$

Ce

VII.17 (nr. 1/2001, p. 74). *a) Fie* $x, y, z \in [2, \infty)$. *Arătaţi că*

$$\left(x^2 + y\right)\left(y^2 + z\right)\left(z^2 + x\right) \geq 27xyz.$$

b) Fie $x, y, z \in [3, \infty)$. *Arătaţi că* $\left(x^2 + y\right)\left(y^2 + z\right)\left(z^2 + x\right) \geq 64xyz.$

Lucian

Soluţii ale acestor probleme pot fi găsite în numerele 2/2005, 1/2005 ş
1/2002 ale revistei.

Problema 1. *Date numerele* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (1, \infty)$, $n \geq 2$, *fie* S =
$+ \cdots + a_n$. *Să se arate că*

$$\log_{a_1} (2a_2^n + a_3^n + \cdots + a_n^n) + \log_{a_2} (a_1^n + 2a_3^n + \cdots + a_n^n) + \cdots +$$
$$+ \log_{a_n} \left(2a_1^n + a_2^n + \cdots + a_{n-1}^n\right) \geq \frac{n}{\log_n S - 1} + n^2,$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \dfrac{S}{n}$.

Soluţie. Notăm cu E membrul stâng al inegalităţii. Utilizând inegalit
ilor, avem:

$$E \geq \log_{a_1} \left(na_2^2 a_3 \cdots a_n\right) + \log_{a_2} \left(na_1 a_3^2 \cdots a_n\right) + \cdots + \log_{a_n} \left(na_1^2 a_2 \cdots\right.$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \log_{a_i} n + 2\left(\log_{a_1} a_2 + \log_{a_2} a_3 + \cdots + \log_{a_n} a_1\right) +$$
$$+ \left[\log_{a_1} (a_3 \cdots a_n) + \log_{a_2} (a_1 a_4 \cdots a_n) + \cdots + \log_{a_n} (a_2 \cdots a_{n-1}\right.$$
$$\geq \sum_{i=1}^{n} \log_{a_i} n + 2n + n \sqrt[n]{\log_{a_1} (a_3 \cdots a_n) \cdots \log_{a_n} (a_1 \cdots a_{n-1})}.$$

Dar

$$\log_{a_1} (a_3 \cdots a_n) = \frac{\ln a_3 + \ln a_4 + \cdots + \ln a_n}{\ln a_1} \geq \frac{(n-2)(\ln a_3 \cdots \ln a_n}{\ln a_1}$$

[1] Elev, cl. a XI-a, Colegiul Naţional "A. T. Laurian", Botoşani

Cu această inegalitate şi analoagele ei, vom avea

$$E \geq \sum_{i=1}^{n} \log_{a_i} n + 2n + n(n-2) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\log_n a_i} + n^2 \geq \frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n} \log_n a_i} + n^2$$

$$= \frac{n^2}{\log_n (a_1 a_2 \cdots a_n)} + n^2 \geq \frac{n^2}{\log_n \left(\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^n} + n^2 = \frac{n}{\log_n S}$$

şi astfel inegalitatea este dovedită. Cazul în care are loc egalitate se obţi rinţă.

Observaţie. Inegalitatea din Problema X.53 se obţine pentru $n = 3$ ş

Problema 2. *Date numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (0, \infty)$, $n \geq 3$, fie $S =$ $+ \cdots + a_n + \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \cdots a_n}$. Să se arate că*

$$\frac{a_1^2}{a_1 + k\sqrt[n-1]{a_2 a_3 \cdots a_n}} + \frac{a_2^2}{a_2 + k\sqrt[n-1]{a_1 a_3 \cdots a_n}} + \cdots +$$

$$+ \frac{a_n^2}{a_n + k\sqrt[n-1]{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}} \geq \frac{S - \left(\frac{S}{n+1}\right)^{1+\frac{1}{n}}}{k+1},$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$ şi $S = n + 1$.

Soluţie. Notând cu E primul membru al inegalităţii şi utilizând i Cauchy-Buniakowski-Schwarz şi cea a mediilor, obţinem

$$E \geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{\sum \left(a_1 + k\sqrt[n-1]{a_2 a_3 \cdots a_n}\right)} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{\sum \left(a_1 + k\dfrac{a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n-1}\right)}$$

$$= \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2}{(k+1)\sum_{i=1}^{n} a_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{k+1}.$$

Pe de altă parte, pornind de la $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ din nou inegalitatea mediilor, vom avea

$$S \geq (n+1)\sqrt[n+1]{\prod_{i=1}^{n} a_i \sqrt[n-1]{\prod_{i=1}^{n} a_i}},$$

de unde

$$\left(\frac{S}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\dfrac{n}{n-1}}.$$

Ca urmare,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = S - \sqrt[n-1]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \geq S - \left(\frac{S}{n+1}\right)^{\dfrac{n+1}{n}}.$$

Introducând în $(*)$, vom obţine inegalitatea din enunţ. Egalitate avem dac dacă $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \sqrt[n-1]{a_1 \cdots a_n} = \dfrac{S}{n+1}$, adică $a_i = 1$, $i \in \mathbb{N}$ şi S

Observaţii. 1) Mai general, putem considera $a_1, a_2, \dots, a_n \in (0, \infty)$
$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \sqrt[p]{a_1 a_2 \cdots a_n}$, $p \geq 3$; se va obţine

$$E \geq \frac{1}{k+1}\left[S - \left(\frac{S}{n+1}\right)^{\frac{p(n+1)}{p+1}}\right].$$

2) Pentru $n = 3$ şi $k = 1$ regăsim inegalitatea din Problema IX.48.

În privinţa Problemei VII.17, vom spune mai întâi că în nr. 1/2002,
sunt prezentate două demonstraţii pentru următoarea generalizare a aces

Fie $x, y, z \in [n, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$. Arătaţi că $\left(x^2 + y\right)\left(y^2 + z\right)\left(z^2 + x\right) \geq (n$

O inegalitate şi mai generală este dată de

Problema 3. *Fie $x_1, x_2, \dots, x_n \in [k, \infty)$, $k, n \in \mathbb{N}^*$ şi $n \geq 2$. Arătaţi*

$$\left(x_1^{n-1} + x_2\right)\left(x_2^{n-1} + x_3\right)\cdots\left(x_n^{n-1} + x_1\right) \geq (k+1)^n \left(x_1 x_2 \cdots x_n\right)^{\frac{k(n-}{k}}$$

Cu egalitate dacă şi numai dacă $x_i = k = 1$, $i = \overline{1, n}$, sau $x_i = k$, $n = 3$,

Soluţie. Să notăm din nou cu E membrul întâi al inegalităţii de d
Observăm că $x_1 \geq k$ implică $x_1^{n-1} \geq k x_1^{k-2}$ şi

$$x_1^{n-1} + x_2 \geq k x_1^{n-2} + x_2 = \underbrace{x_1^{n-2} + x_1^{n-2} + \cdots + x_1^{n-2}}_{k} + x_2.$$

Deci $x_1^{n-2} + x_2 \geq (k+1)\sqrt[k+1]{x_1^{k(n-2)} x_2}$. Utilizând această inegalitate şi
ei, obţinem că

$$E \geq (k+1)^n \sqrt[k+1]{x_1^{k(n-2)+1} x_2^{k(n-2)+1} \cdots x_n^{k(n-2)+1}} = (k+1)^n \left(x_1 x_2 \cdots x\right.$$

cu egalitate aşa cum este specificat în enunţ.

Observaţie. Inegalităţile din Problema VII.17 se obţin pentru $k =$
respectiv $k = 3$, $n = 3$, iar generalizarea lor, dată în revistă, pentru $n = 3$

Recreaţii ... matematice

Când se naşte, omul zice $AA\dots$. Când moare, zice $MOR\dots$. Aşadar
vieţii este $[A, MOR]$, adică $AMOR$.

Cea mai bună inegaliate de acest tip ...

Marian TETIVA[1]

1. Introducere. Aţi întâlnit cu siguranţă asemenea enunţ (mai al
preocupă şi probleme mai grele, "de olimpiadă"). Iată trei astfel de exem

1. *Cea mai bună inegalitate de tipul*

$$(x+y+z)^3 - 27xyz \geq k[(x+y+z)(xy+xz+yz) - 9xyz], \quad \forall x, y,$$

se obţine pentru $k = 4$ (este aşa-numita *inegalitate a lui Schur*).

2. *Cea mai bună inegalitate de tipul*

$$p \leq kR + hr$$

care are loc în orice triunghi se obţine pentru $k = 2$ *şi* $h = 3\sqrt{3} - 4$ (s
inegalitatea lui Blundon în acest caz).

3. *Cea mai bună inegalitate de forma*

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq kR^2 + hr^2$$

şi care are loc, iarăşi, în orice triunghi este cea obţinută pentru $k = 8$ *şi*

Cum se abordează o asemenea problemă? Răspundem imediat la aceast
rezolvând-o pe prima (a se vedea şi [**2**], problema 9.22, un pic altfel formul
celelalte sunt soluţionate în [**3**], respectiv [**1**]. Iată mai departe soluţia pr

Trebuie să înţelegem bine enunţul; observăm că expresia din membrul

$$(x+y+z)(xy+xz+yz) - 9xyz,$$

are numai valori nenegative, conform unei inegalităţi cunoscute. De aceea

$$k_1[(x+y+z)(xy+xz+yz) - 9xyz] \leq k_2[(x+y+z)(xy+xz+yz) -$$

pentru $x, y, z > 0$ şi $k_1 \leq k_2$, aşa că problema noastră este, de fapt, probl
celui mai mare număr k astfel încât inegalitatea

$$(x+y+z)^3 - 27xyz \geq k[(x+y+z)(xy+xz+yz) - 9xyz]$$

să fie adevărată pentru orice $x, y, z > 0$. De obicei într-o asemenea chestiun
mai întâi cea mai mare valoare posibilă a lui k (cea mai mică, în alte ca
valori particulare variabilelor, apoi se demonstrează inegalitatea rezulta
valoarea extremă depistată pentru k. Cel mai comun (şi comod) este
variabile; în cazul de faţă, să punem $y = z = 1$ şi $x > 0$ arbitrar. Obţinem i

$$(x+2)^3 - 27x \geq k[(x+2)(2x+1) - 9x] \Leftrightarrow (x-1)^2(x+8) \geq 2k(x-$$

care trebuie să aibă loc pentru orice $x > 0$ (pentru că inegalitatea iniţia
aibă loc pentru orice $x, y, z > 0$). De fapt asta înseamnă $x + 8 \geq 2k$, p
$x \neq 1$ şi, în ultimă instanţă, pentru orice $x > 0$. Aici are loc de obicei
de trecere la limită, pentru a obţine cel mai bun k. Limita se calculează,
puncte care sunt capete ale intervalelor pe care rezultă inegalitatea final
de faţă, pentru $x \to 0$, obţinem $k \leq 4$. (Evident, aici trecerea la limită î

[1] Profesor, Colegiul Naţional "Gheorghe Roşca Codreanu", Bârlad

strict necesară, căci x, y, z pot fi considerate ≥ 0 - nu neapărat strict p
raţionamentul funcţionează la fel). Astfel am aflat că, probabil, cea mai bu
a lui k este 4; numai dacă reuşim să demonstrăm inegalitatea pentru k =
trage concluzia finală, cum că "cea mai bună inegalitate de tipul"

$$(x+y+z)^3 - 27xyz \geq k[(x+y+z)(xy+xz+yz) - 9xyz], \quad \forall x, y,$$

se obţine pentru $k = 4$. Ori, înlocuind această valoare a lui k, ajungem la

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2, \quad \forall x, y, z$$

inegalitate bine cunoscută (numită uneori *"inegalitatea lui Schur"*, aşa cu
spus), care apare în multe cărţi (inclusiv în [**2**]), deci nu o mai demonstră

2. Din nou despre normare. Iniţial această lucrare s-a vrut o co
notei [**4**]. Între timp, s-a ivit această nouă inegalitate (vom arăta la ur
concurs de împrejurări am ajuns la ea) care s-a lăsat rezolvată cu metod
(nu ezitaţi să o folosiţi şi pentru *inegalitatea lui Schur*! de fapt, aşa e f
[**2**]) şi, în plus, ilustrează bine şi genul de probleme pe care l-am descri
de ce am decis să amânăm publicarea soluţiilor exerciţiilor din [**4**] (mai a
aşa?, "cititorii noştri sunt la fel de inteligenţi ca şi noi", ba chiar mai) î
problemei pe care o prezentăm chiar acum.

Problema 1. *Care este cea mai bună inegalitate de tipul*

$$(a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) \geq$$

$$\geq k(a+b+c)(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2-6abc), \quad \forall a, b, c >$$

Cu alte cuvinte, deoarece şi aici a doua paranteză din membrul drept
nenegative şi a, b, c sunt strict pozitive, trebuie să determinăm cea mai m
pe care o poate lua k astfel încât inegalitatea de mai sus să fie adevărată p
$a, b, c > 0$. Şi de această dată începem cu particularizarea $b = c = 1$ care
la $(a^2+2)(a-1)^2 \geq 2k(a+2)(a-1)^2$, deci, până la urmă $a^2 + 2 \geq 2k(a$
ar trebui să fie adevărată pentru orice $a > 0$, $a \neq 1$, adică (pe baza co
pentru orice $a > 0$. Facem iar pe a să tindă la 0 pentru a găsi $2k \leq 1$ da
Pentru $k = 1/2$ şi $b = c = 1$ inegalitatea devine $a(a-1)^3 \geq 0$ şi, prin u
departe de a fi adevărată pentru orice $a, b, c > 0$. Trebuie deci să rafinăm
lui k, observând că, de fapt, am obţinut

$$2k \leq \frac{a^2+2}{a+2}, \quad \forall a > 0;$$

ceea ce înseamnă că, în mod necesar, $2k$ este cel mult egal cu valoarea
funcţiei $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x+2}$ pe intervalul $(0, \infty)$. (De aici şi deosebirea faţ
studiat anterior: minimul nu se atinge în capătul intervalului.) Aceasta se
a fi ceva mai mică decât limita funcţiei în origine, adică decât 1; valoar
a funcţiei f este $2\sqrt{6} - 4$ (se realizează pentru $x = \sqrt{6} - 2$), astfel că a
avem $k \leq \sqrt{6} - 2$ (fără să fie deloc clar deocamdată dacă aceasta este, î
valoarea care produce cea mai bună inegalitate). Oricum, putem con
departe $k \in [0, \sqrt{6}-2]$ (în mod clar valorile negative ale lui k nu pot fi luate
drept candidate pentru "cel mai bun" k); în particular, avem $k \leq \sqrt{6} -$

$1-2k>0$. Mai departe încercăm, cu metoda normării, să vedem ce se în
inegalitatea noastră pentru asemenea k şi a,b,c numere pozitive oarecare
simetriei putem presupune $c=\min\{a,b,c\}$; notăm atunci

$$\frac{a}{c}=1+x,\quad \frac{b}{c}=1+y,$$

unde x şi y trebuie să fie nenegative. Inegalitatea mai poate fi scrisă în fo

$$\sum a^4+(2-2k)\sum a^2b^2+(4k-1)\sum a^2bc\geq(k+1)\sum(a^3b+a$$

(toate sumele sunt ciclice) sau înlocuind $\frac{a}{c}$ cu $1+x$ şi $\frac{b}{c}$ cu $1+y$,

$$(1+x)^4+(1+y)^4+1+(2-2k)\left[(1+x)^2(1+y)^2+(1+x)^2+(1+\right.$$

$$+(4k-1)\left[(1+x)^2(1+y)+(1+x)(1+y)^2+(1+x)(1+y)\right]\geq$$

$$\geq(k+1)\left[(1+x)^3(1+y)+(1+x)(1+y)^3+(1+x)^3+(1+y)^3+1+x\right.$$

Acum urmează partea neplăcută (dar inevitabilă când folosim metoda
în care trebuie să facem calculele; pe care nu le vom reproduce aici (dar
să le verificaţi!...). Inegalitatea de demonstrat capătă forma

$$x^4-(k+1)x^3y+(2-2k)x^2y^2-(k+1)xy^3+y^4+$$

$$+(2-2k)x^3-3x^2y-3xy^2+(2-2k)y^3+(3-6k)(x^2-xy+y^2)$$

sau încă

$$\frac{1}{2}(x-y)^4+\frac{1}{2}(x^2-y^2)^2+(1-k)xy(x-y)^2+2(1-2k)x^2y^2+$$

$$+2(1-k)(x+y)(x-y)^2+(2-5k)xy(x+y)+3(1-2k)(x-y)^2+3(1-$$

Acum putem demonstra inegalitatea pentru $k\leq\sqrt{6}-2$; oricum, ea est
pentru $k<0$, deci putem considera $k\geq 0$.

Să observăm mai întâi că, pentru aceste valori ale lui k, avem

$$2(1-2k)t^2-2(2-5k)t+3(1-2k)\geq 0,$$

pentru orice $t\in\mathbb{R}$, deoarece discriminantul trinomului este

$$4(2-5k)^2-24(1-2k)^2=4(k^2+4k-2)=4(k+\sqrt{6}+2)(k-\sqrt{6}+$$

în plus, cum am mai arătat, k este mai mic decât $1/2$, deci $2(1-2k)>0$

În membrul stâng al inegalităţii de demonstrat toţi termenii sunt în m
nenegativi, cu excepţia lui $(2-5k)xy(x+y)$ care poate fi luat în grupul

$$2(1-2k)x^2y^2+(2-5k)xy(x+y)+3(1-2k)xy=$$
$$=xy\left[2(1-2k)xy+(2-5k)(x+y)+3(1-2k)\right],$$

pe care-l mai putem scrie

$$xy\left(2(1-2k)\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+2(2-5k)\frac{x+y}{2}+3(1-2k)\right)-\frac{1-2k}{2}xy(x$$

Dar paranteza mare este nenegativă, conform observaţiei referitoare la tr
gradul al doilea, iar ultimul termen este "anihilat" de $(1-k)xy(x-y)^2$:

$$(1-k)xy(x-y)^2-\frac{1-2k}{2}xy(x-y)^2=\frac{1}{2}xy(x-y)^2\geq 0$$

şi inegalitatea este demonstrată; valoarea cea mai bună (maximă) a lui k
adevăr, $\sqrt{6}-2$.

3. Poate că nu e lipsit de interes să vedem cum am ajuns la aceas
tate: desigur, din întâmplare (multe ies astfel ...)! Am vrut să vedem c
dacă aplicăm *inegalitatea lui Jensen* funcţiei radical în felul următor:

$$\frac{a}{a+b+c}\sqrt{(b+c)^2}+\frac{b}{a+b+c}\sqrt{(a+c)^2}+\frac{c}{a+b+c}\sqrt{(a+b)^2}$$

$$\leq\sqrt{\frac{a}{a+b+c}(b+c)^2+\frac{b}{a+b+c}(a+c)^2+\frac{c}{a+b+c}(a+b)^2}.$$

(Asta mai rezultă şi folosind *inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz*).
care la pătrat şi încă câteva calcule ajungem la

$$\frac{4(ab+ac+bc)^2}{a+b+c}\leq\frac{4}{9}(a+b+c)^3+\frac{30abc-4\sum a^3-3\sum a(b^2+c}{9}$$

sau, totuna,

$$4(a^2+b^2+c^2+5ab+5ac+5bc)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=$$

$$=4\left[(a+b+c)^4-9(ab+ac+bc)^2\right]\geq(a+b+c)\Big(4\sum a^3+3\sum a(b^2+c^2$$

Mai ţinem cont acum de două lucruri: prima paranteză din membrul st
păşeşte $6(a^2+b^2+c^2)$, şi a doua este nenegativă conform inegalităţii

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+ac+bc,$$

pe când cea de-a doua paranteză din membrul drept se poate minora (pe
galităţii lui Schur) cu

$$4\sum a(b^2+c^2)-12abc+3\sum a(b^2+c^2)-30abc=7\left(\sum a(b^2+c^2)-\right.$$

astfel suntem conduşi la inegalitatea

$$24(a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)\geq$$

$$\geq 7(a+b+c)(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2-6abc),\quad\forall a,b,c$$

şi întrebarea din problema 1 vine în mod natural (după ce am demonstrat in
pentru $k=\frac{7}{24}$). Putem vedea acum că valoarea lui k de la care am pornit
de departe de cel mai bun k; avem, totuşi, o demonstraţie fără prea mult
unei inegalităţi de acest tip, care ne poate da speranţe că s-ar putea face
mai bună dintre aceste inegalităţi". De asemenea, vă propunem spre rezo

Problema 2. *Găsiţi cea mai bună inegalitate de forma*

$$(x+y)^2(x+z)^2(y+z)^2+(27k-64)x^2y^2z^2\geq kxyz(x+y+z)^3,\quad x,y$$

Bibliografie

1. **L. Panaitopol** - *O inegalitate geometrică*, Gazeta Matematică seria B, 4
2. **L. Panaitopol, V. Băndilă, M. Lascu** - *Inegalităţi*, Editura GIL, Ză
3. **V. Vâjâitu** - *Asupra unei inegalităţi*, Gazeta Matematică seria B, 7/198
4. **M. Tetiva** - *Metoda normării*, RecMat - 1/2006, 30-34.

CORESPONDENŢE

Societatea de Ştiinţe Matematice din R. Mol

Anul 2006 aduce cu sine două date marcante în cercetarea şi în înv superior din Republica Moldova. Două instituţii ce constituie imaginea postbelice în ştiinţa contemporană - **Academia de Ştiinţe a Moldov versitatea de Stat din Moldova** - împlinesc **60 de ani de la fonda** matematică din R. Moldova datorează în mare parte acestora evoluţia sa. vante despre istoria acestor instituţii pot fi găsite în volumele: *Institutul d tică şi Informatică. File din istorie*, editat de Acad. de Şt. a Moldovei *Istoria Universităţii de Stat din Moldova (1946-1996)*, editat de USM în

La afirmarea şcolii matematice basarabene au contribuit un şir de tăţi de autentică valoare, fondatori de şcoli ştiinţifice: *Vladimir Andru Valentin Belousov* (algebră), *Constantin Sibirschi* (ecuaţii diferenţiale), *berg* (analiză funcţională), *Alexandru Zamorzaev* (geometrie), *Alexandr* (logică matematică) ş.a. Şcolile ştiinţifice create în Republica Moldova a se impună în lumea matematică prin realizări valoroase, devenind centre d a specialiştilor din republică şi de peste hotare timp de câteva decenii.

Societatea Matematică a fost prezentă în Basarabia în diferite form nizare, reunind în rândurile sale cercetători, profesori de matematică din u şi şcoli şi chiar elevi. În actualul său statut Societatea Matematică din Moldova (SMM) activează din anul 1993. În prezent SMM întruneşte 18 bri, incluzând matematicieni consacraţi, tineri cercetători, profesori de l superioare de învăţământ, licee şi şcoli. În anul 2004 Adunarea Generală reales în calitate de preşedinte pe academicianul *Mitrofan Ciobanu*, iar vic pe profesorii universitari *Nicolae Jitaraşu* şi *Alexei Caşu*.

Activitatea de bază a SMM ţine de promovarea cercetărilor ştiinţifice î matematicii şi al informaticii, de monitorizarea sistemului de învăţământ la toate nivelele şi de consolidarea comunităţii matematice.

Un element important în consolidarea comunităţii matematice din Moldova, pe parcursul anilor, au fost conferinţele ştiinţifice. În ultimii 50 a nizate peste 50 conferinţe ştiinţifice, inclusiv ediţii ale unor conferinţe int ex-sovietice şi europene. La organizarea acestor manifestări ştiinţifice a cietăţii Matematice a fost esenţial, cu toate acestea prima conferinţă S organizată abia în anul 2001. Beneficiind de sprijinul financiar al UNES conferinţă a Societăţii Matematice din Republica Moldova a reuşit să î peste 160 de participanţi, inclusiv 40 de oaspeţi de peste hotare, speciali niul matematicii şi al informaticii din România, Franţa, Germania, Rus Ucraina, Belarus, Serbia şi Muntenegru. La conferinţă au fost prezent rapoarte iar ulterior au fost publicate materialele conferinţei în două num vistei *"Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematică"* al revistei *"Computer Science Journal of Moldova"* şi o culegere de artico niul didacticii matematicii şi al informaticii. În anul 2004 a fost organiz conferinţă SMM, fiind dedicată *aniversării a 40-a de la fondarea* **Instit Matematică şi Informatică al A.Ş. R.M.** La această conferinţă au

peste 170 de specialişti în matematică şi informatică, inclusiv 30 de invita
hotare (SUA, România, Germania, Ucraina, Rusia, Israel, Canada ş.a.).

În anul 2002, susţinând iniţiativa societăţilor matematice din Grecia, I
Bulgaria, SMM a participat la fondarea **Societăţii Matematice din S
Europei (MASSEE)** cu sediul la Atena, Grecia. Fondarea MASSEE a c
nouă etapă în cooperarea regională a matematicienilor din Balcani.

Criza extinsă prin care a trecut R. Moldova în primii săi ani de existe
repercursiuni negative asupra tuturor sferelor de activitate şi în primul râ
dezvoltării ştiinţelor fundamentale. Astfel, SMM şi-a propus drept scop id
unor modalităţi de depăşire a dificultăţilor ce afectează cercetarea şi e
R. Moldova. Prima conferinţă SMM a adresat conducerii R. Moldova
care au fost formulate propuneri concrete vizând probleme de stringentă
în domeniile cercetare-dezvoltare şi învăţământ. Iniţiativele SMM, inclu
apel, au influenţat politica Guvernului şi a altor structuri statale abilit
drept urmare anunţarea unor concursuri naţionale de granturi, inclusiv g
cercetare în matematică şi în informatică, granturi pentru organizarea co
şi a simpozioanelor ştiinţifice, pentru editarea revistelor de specialitate et

În anul 2004 a intrat în vigoare *Codul cu privire la ştiinţă şi inovare al I*
ce reglementează raporturile juridice ce ţin de elaborarea şi promovarea
stat în sfera ştiinţei şi inovării, de acreditarea organizaţiilor din sfera ş
atestarea cadrelor ş.a. Codul admite participarea comunităţii ştiinţific
rarea politicii de stat în domeniul ştiinţei şi inovării. Şi învăţământul, în
universitar şi postuniversitar, la etapa actuală este în proces de reformare
mitate cu cerinţele Programului de la Bologna, la care recent a aderat R.

În contextul celor menţionate conducerea SMM îşi propune monitori
cesului de reformare în domeniul matematicii şi al informaticii, promovâ
acceptate de comunitatea matematică internaţională.

Comunitatea matematică din Republica Moldova marchează în anul
nizarea *ediţiei a 50-a* a *Olimpiadei republicane de matematică pentru el*
eveniment este deosebit de semnificativ şi graţie rezultatelor Lotului olim
publicii Moldova, care a obţinut doar în ultimii cinci ani 66 de medalii la
internaţionale, inclusiv trei medalii de aur la olimpiadele internaţionale d
tică şi nouă medalii de aur la olimpiadele balcanice. *În anul 2006 Chiş*
gazdă a Olimpiadei Balcanice de Matematică pentru juniori.

Evoluţia ştiinţei şi a învăţământului în Basarabia după 1990 a fost put
enţată de deschiderea culturală către România. Un loc aparte îl ocupă c
dezinteresată a României în oferirea de burse pentru liceeni, studenţi, ma
doctoranzi din R. Moldova. Participarea largă la conferinţe ştiinţifice, inc
nizarea unora din ele în comun, a extins şi a concretizat cadrul de colabor
drept urmare susţineri de teze de doctorat, schimb de profesori invitaţi,
lotului olimpic, tabere de vară, editare de carte şi multe alte activităţi c
benefice pentru cultura, cercetarea şi educaţia din Basarabia.

Florin DAMIAN, Parascovia SÂRBU
Fac. de Mat. şi Inf., Univ. de Stat din Mol

CONCURSURI ŞI EXAMENE

Concursul de Matematică “Al. Myller”

Ediţia a IV-a, Iaşi

Clasele IV-VI, aprilie 2006

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp efectiv de lucru: 90 min. Se
oficiu 30 de puncte, câte 6 puncte pentru problemele 1-5, câte 8 puncte pentru
6-10 şi câte 10 puncte pentru problemele 11-15.

Clasa a IV-a

1. Ce număr trebuie scăzut din 9 pentru ca diferenţa obţinută înmulţ
devină 40?

2. Într-o clasă sunt băieţi şi fete. Numărul băieţilor este cu 3 mai
numărul fetelor. Dacă în clasă ar veni 4 băieţi şi ar pleca 4 fete, atun
băieţilor ar fi de 2 ori mai mare decât numărul fetelor. Câţi elevi sunt în

3. Se dau numerele: $a = 1 + 2 + 3 + \cdots + 9$; $b = 11 + 22 + 33$
$c = 111 + 222 + 333 + \cdots + 999$. Să se calculeze câtul împărţirii lui $a + b$

4. Suma dintre un număr şi succesorul său este cu 2006 mai mare dec
sorul său. Care este numărul?

5. Fie pătratul magic (sumele elementelor de pe linii, coloane
şi diagonale sunt egale). Aflaţi ce număr trebuie înscris în căsuţa
marcată cu X?

X
9

6. Împărţind numărul natural a la numărul natural b, obţinem câtul
31. Să se afle a ştiind că $a - b < 196$.

7. Într-un coş sunt 28 fructe: mere, pere şi caise. Câte fructe sunt de
dacă mere sunt de 6 ori mai multe decât pere, iar în coş se află cel puţin
fiecare fel?

8. Câte numere de 3 cifre se împart exact la 21?

9. Aflaţi cel mai mic număr natural cu suma cifreler 56.

10. Să se afle 3 numere naturale ştiind că: produsul primelor dou
produsul ultimelor două este 192, iar suma dintre primul şi ultimul este 4

11. Un tată, dorind să-şi încurajeze fiul să rezolve probleme, îi prom
da 8 monede pentru fiecare problemă bine rezolvată, dar pentru probler
nu a rezolvat-o sau a rezolvat-o greşit, fiul va trebui să-i plătească 5 mon
26 de probleme, fiul nu trebuie să plătească nimic, dar nici să primească
probleme a rezolvat corect?

12. Ioana culege o lădiţă de căpşuni în 40 minute, iar Luiza culege o
ore. În cât timp vor culege împreună 3 lădiţe de căpşuni?

13. Mama are cu 14 lei mai mult decât Paul şi cu 10 lei mai mult de
Câţi lei va da fiecăruia din băieţi pentru a avea toţi 3 aceeaşi sumă?

14. M-am născut în secolul XX. Dacă în 1999 am avut o vârstă egal cifrelor anului meu de naştere, ce vârstă am acum?

15. Sony cară în fiecare zi câte o piatră din vârful muntelui. În prima zi 7 ore urcând şi coborând, a doua zi a petrecut 8 ore urcând şi coborând. Î urcă de două ori mai încet decât în ziua precedentă, dar coboară de 2 ore m Cât timp va munci în cea de-a treia zi?

Clasa a V-a

1. Care este cel mai mare număr natural impar de 4 cifre distincte?

2. Determinaţi $x \in \mathbb{N}$ pentru care $5 \cdot 3^x - 2 \cdot 3^x = 81$.

3. Câţi termeni are suma $26 + 32 + 38 + \cdots + 2006$?

4. Câte pătrate perfecte conţine mulţimea $\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 1000\}$?

5. Câte mulţimi X verifică $\{1, 2\} \cup X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$?

6. Câte numere $\overline{xy}$ scrise în baza 10 verifică relaţia $x + \overline{xy} = y + \overline{yx} +$

7. Dacă $a \cdot b + a \cdot c = b \cdot c + c^2$, $b + c = 1003$, calculaţi $a + 2b + c$.

8. Să se determine un număr de 4 cifre al cărui produs cu 9 se termin

9. Dacă restul împărţirii lui $2a + 3b + 5c$ la 13 este 7, aflaţi restul îm $34a + 51b + 85c$ la 13.

10. Câte numere care se scriu cu 4 cifre în baza 10 au suma cifrelor 3

11. Se consideră 5 numere naturale distincte având suma 60. Găsiţ dacă suma diferenţelor dintre cel mai mare şi fiecare dintre celelalte 4 n 10.

12. Care sunt ultimele două cifre ale lui $5^{2006} + 7^{2006}$?

13. Fie $M = \left\{ \dfrac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{N}^*, a + b = 2006 \right\}$. Care este produsul elem M?

14. Suma a două numere naturale este $3n + 5$, $n \in \mathbb{N}^*$. Împărţind un dublul celuilalt obţinem câtul n şi restul 0. Care sunt numerele?

15. Se scriu în ordine crescătoare toate numerele nenule din baza 10 scriere nu apar alte cifre afară de 0, 1, 2 şi 3. Care este cel de-al 2006-lea

Clasa a VI-a

1. Care este cel mai mic număr natural de nouă cifre divizibil cu trei?

2. Fie a, b, c, d măsurile a 4 unghiuri formate în jurul unui punct. aceste măsuri dacă $\dfrac{a}{1} = \dfrac{b}{2} = \dfrac{c}{3} = \dfrac{d}{4}$.

3. Preţul unui obiect se micşorează cu 20%. Cu cât la sută trebuie să s noul preţ pentru a se ajunge la preţul iniţial?

4. Calculaţi măsura unui unghi ştiind că triplul complementului său e $30'$ mai mare decât jumătatea suplementului său.

5. Care este cea mai mare valoare pe care o poate lua numărul $n = a_1$ ... $a_4 + \cdots + a_9 - a_{10}$, unde $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ sunt numere naturale distincte di... $\{1, 2, 3, \ldots 10\}$?

6. Fie A, B, C, D puncte pe o dreaptă, în această ordine, astfel încâ... $\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{7}{5}$. Calculaţi $\dfrac{BC}{AD}$.

7. Se dau două vase cu apă astfel încât dacă turnăm jumătate din p... doilea şi jumătate din cantitatea de apă ce se află acum în al doilea o... primul şi luând apoi jumătate din cantitatea aflată în primul şi o turnăm ... obţinem (în al doilea vas) 10 litri apă. Aflaţi câţi litri de apă se află în ... ştiind că ambele cantităţi sunt numere întregi.

8. Arătaţi că numărul $a = 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{4n}$ se divide cu 120, $\forall$...

9. Să se calculeze a 2007-ea zecimală a numărului $n = 0,00\,(300) + 0,00$...

10. Să se afle x, ştiind că

$$\frac{1}{2}\%\text{din}\left(\frac{2}{3}\%\text{din}\left(\frac{3}{4}\%\text{din}\left(\ldots\left(\frac{n}{n+1}\%\text{din } x\right)\ldots\right)\right)\right) = \frac{1}{100^n\,(n+\ldots}$$

11. Fie n un număr natural, $n > 2$. Numărătorii şi numitorii fracţiilor... şi $\dfrac{555\ldots56}{666\ldots67}$ au câte n cifre. Care este fracţia mai mare?

12. Câte unghiuri cu măsurile numere naturale consecutive se pot for... unui punct?

13. Măsurile unghiurilor unui triunghi sunt direct proporţionale cu t... invers proporţionale cu trei numere direct proporţionale cu trei numere ... secutive ale lui 3. Găsiţi măsurile unghiurilor.

14. Fie $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 10^{2006}$. La ce putere apare 2 în descom... factori primi a lui S?

15. Să se afle cardinalul mulţimii $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \dfrac{2006!}{7^x \cdot 11^y} \in \ldots\right.$ $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \;\cdots\; \cdot n$.

Clasele VII-XII, 19 aprilie 2006

Juniori

1. Să se arate că ecuaţia $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{ab} = \dfrac{1}{c}$ are o infinitate de soluţii în...

2. Fie $\triangle ABC$ dreptunghic în C şi $D \in (BC)$, $E \in (CA)$ astfel înc... $\dfrac{AE}{CD} = k$. Dreptele BE şi AD se intersectează în O. Să se arate că $m(\widehat{BO}$... dacă şi numai dacă $k = \sqrt{3}$.

3. Se dau în plan 5 puncte cu proprietatea că oricare dintre cele 10
cu vârfurile în aceste puncte are aria cel mult egală cu 1. Să se arate c
trapez de arie cel mult 3 ce conţine în interior sau pe laturi cele 5 puncte

<u>Seniori</u>

1. Fie $p \geq 3$ număr prim. Demonstraţi că $\sum\limits_{k=1}^{p-1} \dfrac{k^p - k}{p} \equiv \dfrac{p+1}{2} \pmod{p}$

2. Fie $p \geq 5$ număr prim. Determinaţi numărul polinoamelor de fo
$pX^k + pX^l + 1$, $k > l$, $k, l \in \{1, 2, \ldots p-1\}$ care sunt ireductibile în $\mathbb{Z}[X$

3. Mediana AM a triunghiului ABC taie cercul înscris în K şi L. Dre
prin K şi L paralele la BC taie a doua oară cercul înscris în X şi Y.
intersecţiile dreptelor AX şi AY cu BC. Arătaţi că $BP = CQ$.

Recreaţii ... matematice

ARITMOGRIF

?

	8	11																
	3	6	1															21
	9	2	6	12		14									9		4	15
	10	5	3	2	9	12	8	7	18			19	8	12	4	6	1	2
A	1	2	3	1	2	4	5	6	6	*	7	4	5	2	7	4	5	6
			6	1	8	12	13	1	15			10	10	6	2	3	6	17
				13	8	12	15	13	2			8	1	19	15	13	17	
					2		16	17	8			8	7	15		20		

Înlocuind numerele cu litere veţi obţine numele a 18 matematicieni.
Pe orizontală A-B: numele unei reviste de matematică pentru elevi şi

Prof. Valeriu Br
C. N. "Gh. Roşca Codrean

(Rezolvarea aritmogrifului se găseşte la pag. 162)

Vizitaţi pe Internet revista "Recreaţii Matematice" la
http://www.recreatiimatematice.uv.ro

Concursul de matematică “Florica T. Câmp

Etapa judeţeană, 18 februarie 2006

Clasa a IV-a

1. Să se împartă la trei persoane 24 sticle de suc identice ca mărime,
sunt pline, 11 umplute pe jumătate şi 8 goale, încât fiecare să aibă acelaş
sticle, dar şi aceeaşi cantitate de suc.

Înv. Lin

2. Între cele 9 numere de mai jos există un "intrus". Acesta nu respe
dintre cifre ce există la fiecare din celelalte opt numere. Descoperă şi sc
precum şi numărul "intrus": 9334, 4862, 6148, 5132, 7835, 3524, 9963, 97

Înv. Fănică

3. Cântarul pe care vor să se cântărească trei copii nu măsoară mase n
40 kg. Fiecare din cei trei copii cântăresc între 25 şi 30 kg.

Cum a reuşit fiecare copil să se cântărească?

Inst. Iulia

Clasa a V-a

1. Cifrele care alcătuiesc vârsta bunicului reprezintă vârstele celor c
Dacă împărţim vârsta bunicului la suma vârstelor nepoţilor, se obţine
restul 12. Aflaţi vârsta bunicului şi vârstele nepoţilor.

Mihael

2. Se consideră înmulţirea următoare, unde literele nu reprezintă
obligatoriu cifre distincte:

a) Determinaţi e.

b) Arătaţi că $bd = 63$.

c) Reconstituiţi înmulţirea.

Gabriel Popa

3. Se consideră mulţimea $A = \{2, 3, 4, \ldots, 13\}$.

a) Determinaţi B, C disjuncte astfel încât $B \cup C = A$ şi suma element
este egală cu sumă elementelor din C.

b) Arătaţi că nu există M, N disjuncte cu $M \cup N = A$ şi produsul e
din M egal cu produsul elementelor din N.

c) Găsiţi două mulţimi X, Y disjuncte cu $X \cup Y = A$, X având două
cu produsul elementelor lui X egal cu suma elementelor lui Y.

Ionel

Clasa a VI-a

1. Pe o tablă s-au scris trei numere naturale. Când în locul lor s-au sc
produsul şi suma produselor câte două, s-a văzut că pe tablă au apăr
numere ca şi cele iniţiale. Care este produsul lor? Explicaţi!

2. Pe o tablă este scris numărul 12. La fiecare minut numărul se înm
se împarte fără rest fie la 2, fie la 3, iar rezultatul se scrie pe tablă în locul
iniţial. Să se arate că numărul scris pe tablă după exact o oră nu poate fi

3. Unghiurile proprii $\widehat{AOB}$ şi $\widehat{BOC}$ sunt adiacente suplementare. Fie
bisectoarele acestora. Dacă $m(\widehat{BOy}) \in \mathbb{N}^*$ şi $m(\widehat{COx}) = p \cdot m(\widehat{BOy})$, u

număr prim, aflaţi numărul p.

Vasil

Clasa a VII-a

1. Fie a un număr natural arbitrar, divizibil prin 9, având 2007 cifre. $s(a)$ numărul care reprezintă suma cifrelor lui a. Găsiţi $s(s(s(a)))$.

Gabriel

2. Vârfurile unui cub se notează cu 8 numere întregi consecutive, fiecărei feţe se notează cu media aritmetică a vârfurilor feţei respective.

a) Să se demonstreze că suma centrelor oricăror două feţe opuse este a se afle cât este aceasta în funcţie de cel mai mic dintre numerele din vârfu

b) Să se găsească în ce condiţii centrul unei feţe este număr întreg. vârfurile feţelor ale căror centre sunt numere întregi.

c) Arătaţi că, dacă centrele a trei feţe care au un vârf comun sunt numere întregi, atunci şi centrele celorlaltor feţe sunt notate tot cu nume

Julieta

3. În ţara **TI** a triunghiurilor isoscele era împărat, firesc, triunghiul El decretase că este singurul care binemerită numele de *Prearostogolibil*; trebuiau să fie numiţi *ţepoşi* dacă au o latură mai scurtă decât cele egale *turtiţi* dacă au o latură mai lungă decât cele egale. (Vorba congruent era ocară pe acele meleaguri.) Nişte unghiuri umblau venetice prin **TI** căuta triunghi isoscel la al cărui vârf să slujească.

– Ţeposule, zise un unghi α. Eu şi vecinii mei de pribegie bâlbâit nemăsuratul de γ ne căutăm stăpâni în **TI**. Ne-ai fi de mare folos dacă ai ne spui dacă nu cumva ai o bisectoare interioară a ta exact atât de lungă c

– După vorbire se cunoaşte că veniţi de pe coclauri unde lucrurile nu s din linii drepte bine limitate. Întrebi de lucruri la care nu gândeşte nim nu sunt de niciun folos. Dar, până cercetez pentru răspuns, fii bun mă tule şi spune-mi dacă aşa se obişnuieşte pe la voi: să-ţi ponegreşti coleg necuviincioase?

– Nu e necuviinţă, prea-limitatule. Eu, α, mă exprim frumos în grad sunt purtător de cuvânt; β nu cunoaşte fracţii ordinare ci doar zecimale şi grozav când încearcă să spună câte grade are; γ încă nu ştie dacă este m grade. Dar bag seamă că întârzii cu răspunsul la întrebarea mea; o fi cap mult ascuţit decât încăpător?

– Bine, măi vorbăreţule. Am cercetat şi răspund precis: am exact două interioare exact aşa de lungi ca laturile mele egale.

– Am înţeles. Te rog să mă ierţi că ţi-am zis ţepos; înţeleg că eşti t personal nu îmi eşti de folos, dar iată că pentru β eşti bun de stăpân. I toarele tale egale erau cât latura ta scurtă, te recunoşteam de stăpân. Dac bisectoare a ta era cât latura ta scurtă, te-ar fi slujit γ cu credinţă.

a) Exprimaţi cu fracţii ordinare gradele lui α şi β.

b) Exprimaţi cu fracţii zecimale numărul de grade, minute şi secunde

c) Argumentaţi că triunghiurile isoscele care convin lui α, respectiv *poase*, respectiv *turtite*.

d) Desenaţi un triunghi isoscel cu unghiurile de la vârf γ. Este el *ţepos*

Dar

Clasa a VIII-a

1. Într-o clasă sunt 20 de elevi. Fiecare fată oferă fiecărui băiat trei flor
fete o floare, iar fiecare băiat oferă câte trei flori fiecărei fete şi câte o floa
băiat.

a) Arătaţi că numărul maxim de flori oferite este 780.

b) Câte fete ar trebui să fie în clasă, astfel încât să fie oferite exact 78

Monica Ned

2. Pe fiecare faţă a unui cub este scris câte un număr natural nenul,
vârf îi corespunde produsul numerelor de pe cele trei feţe adiacente acest
suma numerelor corespunzătoare tuturor vârfurilor este 2006, arătaţi că
puţin două feţe pe care este scris acelaşi număr.

3. Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDMNPQ$ şi punctele $E \in$ (
(DQ) astfel încât suma $AE + AF + PE + PF$ este minimă. Arătaţi că
dacă şi numai dacă $ABCDMNPQ$ este prismă regulată.

Valentina Blendea şi Gheorghe Blen

Faza interjudeţeană, 20 mai 2005

Clasa a IV-a

1. Lungimea laturii unui pătrat este de 17 m. O persoană pleacă dintr
pătratului şi, mergând în acelaşi sens pe laturile acestuia, parcurge o dista
m. Din punctul în care a ajuns se întoarce şi parcurge 773 m. Aflaţi la c
se va situa în final persoana, faţă de punctul de plecare.

RecMat - 1/2

2. Avem mai multe vase identice. Ştim că 50 vase pline cu apă cântăre
iar 10 vase goale cântăresc cu un kilogram mai puţin decât apa dintr-un v
se afle cât cântăresc 100 de vase goale.

Petr

3. În câte moduri diferite pot fi scrise numerele 1, 2, 3, 4 în pătratele d
figura alăturată, câte unul în fiecare pătrat, astfel încât să nu existe dou
pătrate alăturate în care suma să fie 5? Justificaţi. (Pătratele care au do
un vârf comun nu sunt considerate alăturate, iar pătratul mare este fix.)

Petr

Clasa a V-a

1. Din produsul tuturor numerelor naturale de la 1 la 2006 se ex
numerele care se divid cu 5. În ce cifră se termină produsul celorlaltor nu

2. Pe o tablă sunt scrise numerele 1,3,4,6,8,9,11,12,16. Doi copii au
patru numere şi s-a observat că suma numerelor şterse de unul este de t
mare decât suma numerelor şterse de celălalt. Ce număr a rămas scris pe

3. Fie numărul 123456789. O operaţie înseamnă să alegem două cifre
cărora să li se scadă o unitate şi să li se schimbe locurile (de exemplu: 12
123436789 → ...). Care este cel mai mic număr ce se poate obţine ca
acestor operaţii? După câte operaţii se obţine cel mai mic număr?

Clasa a VI-a

1. Se pot aşeza pe muchiile unui cub numerele $1, 2, 3, \ldots, 12$ (câte un
fiecare muchie) astfel încât suma numerelor aflate pe cele trei muchii care
acelaşi vârf să fie aceeaşi pentru fiecare vârf al cubului?

Constanti

2. Se consideră triunghiul ABC cu $[AB] \equiv [AC]$ şi $m(\widehat{BAC}) =$
$M, P \in (AC)$ astfel încât şi $m(\widehat{ABM}) = m(\widehat{CBP}) = 20°$ şi $N \in (AB)$ a
$m(\widehat{BCN}) = 50°$. Să se afle $m(\widehat{AMN})$.

3. Numerele naturale $22, 23, 24$ au următoarea proprietate: descompun
tori primi ale numerelor din şir au exponenţii factorilor numere impare (22
$23 = 23^1$, $24 = 2^3 \cdot 3^1$). Care este cel mai mare număr de numere naturale c
care au această proprietate?

Cristian - Cătălin

Clasa a VII-a

1. *a*) Arătaţi că din oricare 3 numere naturale, putem alege două a
suma lor să fie un număr par.

b) Fiind date şapte numere naturale, arătaţi că putem alege patru dint
încât suma lor să fie divizibilă cu 4.

Crist

2. Fie ΔABC isoscel cu $BC = 2a$, $AB = AC = b$, $a, b \in \mathbb{N}^*$. Să se
toate triunghiurile ABC, dacă $a = 2r$, unde r este raza cercului înscris în
apoi găsiţi ΔABC cu aria minimă.

Da

3. Un trapez $ABCD$ are baza mare $[AB]$ şi $[AC] \cap [BD] = \{O\}$. Lin
a trapezului intersectează pe AC în E şi pe BD în F.

a) Demonstraţi că $ABCD$ este trapez isoscel dacă şi numai dacă $[OE$

b) Vârfurile trapezului şi punctul O reprezintă 5 oraşe, iar laturile şi d
sale sunt şosele de legătură. Două maşini pleacă din D, respectiv C pe ru
scurtă spre A, respectiv spre B şi alte două maşini pleacă din A respectiv
respectiv C, trecând prin O pe ruta cea mai scurtă. Cele 4 maşini au acee
constantă, pe întreg parcursul. Demonstraţi că primele 2 maşini ajung s
D, respectiv C. Pot ajunge, toate patru, în acelaşi timp la destinaţie?

Claudiu-Şte

Clasa a VIII-a

1. Aflaţi perechile de numere întregi cu proprietatea că diferenţa cu
este egală cu pătratul diferenţei lor.

2. Un poliedru are 17 muchii şi 9 feţe.

a) Desenaţi două astfel de poliedre diferite.

b) Dacă feţele poliedrului sunt doar triunghiuri echilaterale sau pătrat
muchiile sunt de lungime 1 cm, calculaţi aria sa totală.

Gab

3. Un cub cu latura de n cm ($n \in \mathbb{N}^*$) se împarte în cuburi cu latur
şi se colorează toate cuburile situate pe diagonalele feţelor cubului iniţia
astfel ca numărul cuburilor colorate să fie 2006.

Julieta

PROBLEME ŞI SOLUŢII

Soluţiile problemelor propuse în nr. 2 / 20

Clasele primare

P.94. *Aflaţi numerele de două cifre cu proprietatea că diferenţa dintr răsturnatul lui este egală cu cel mai mare număr scris cu o singură cifră.*
(*Clasa I*) **Mara Neicu, elev**

Soluţie. Dacă un număr de două cifre îndeplineşte condiţia din proble diferenţa dintre numărul reprezentat de cifra zecilor şi numărul reprezent unităţilor este egală cu 1. Numerele care verifică cerinţa sunt: 21, 32, 43, 87, 98.

P.95. *La ora de educaţie fizică, fetele unei clase sunt aliniate de la cea la cea mai scundă, iar băieţii după ele, în aceeaşi ordine. Ana este cea Ene este cel mai înalt, iar Sorin cel mai scund. Între Ana şi al doilea bă copii, iar între Ene şi Sorin sunt* 10 *băieţi. Câţi elevi sunt aliniaţi la educ*
(*Clasa I*) **Înv. Constanţa Cristea şi Inst. Iulian Cri**

Soluţie. Numărul fetelor este $15-1+1=15$, iar numărul băieţilor este 12. La ora de Educaţie fizică sunt aliniaţi 27 elevi.

P.96. *Descoperă regula şi completează căsuţele libere în cazurile:*

a)

2	5
3	8

6	10
4	14

5	7
2	

1	
6	13

3	
4	

;

b)

9	7
2	5

8	7
1	6

3	3
0	

5	3
	1

2	0

.

(*Clasa a II-a*) **Inst. Maria I**

Soluţie. *a*) Dacă tabelul este de forma

a	b
c	d

, atunci regula es $a+c=b$ şi $b+c=d$. În tabelul al treilea completăm căsuţa liberă cu 2 al patrulea cu $13-6=7$, iar în ultimul tabel cu $3+4=7$, respectiv $4+$

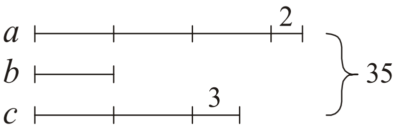
b) În acest caz regula este dată de $a-c=b$ şi $b-c=d$. Tabelele se co cu $3-0=3$; $5-3=2$; $b=0+2$, $a=b+2=2+2=4$.

P.97. *În câte moduri putem forma un şir indian compus din* 4 *băie astfel încât două fete să nu stea una lângă alta, iar şirul să nu înceapă c*
(*Clasa a II-a*) **Andrei Burdun,**

Soluţie. Şirul poate începe cu cel mult doi băieţi. Avem posibilităţil bfbbfbf; bfbfbbf; bbfbfbf. Şirul poate fi format în 4 moduri.

P.98. *La Crăciun, copii au împodobit bradul cu* 35 *globuri albe, galbe Andrei a observat că, dacă împarte numărul globurilor albe la cele galb câtul* 3 *şi restul* 2*, iar dacă împarte numărul globurilor roşii la cele gall câtul* 2 *şi restul* 3*. Câte globuri de fiecare fel au împodobit bradul?*
(*Clasa a III-a*) **Înv. Rica Bucă**

Soluţie. Folosim metoda figurativă.



Numărul globurilor galbene este
$[35-(2+3)]:6=5$.
Numărul globurilor albe este 5×3
Numărul globurilor roşii este 5×2

P.99. *La concursul de alergare organizat de clasa a II-a, cei mai buni Radu, Cezar, Tudor, Dan şi Mihai. Care a fost clasamentul final, dacă: nu a luat locul întâi,* 2) *Cezar s-a clasat în urma lui Mihai,* 3) *Radu înaintea lui Mihai,* 4) *Tudor nu s-a clasat al doilea,* 5) *Dan este al t Tudor.*

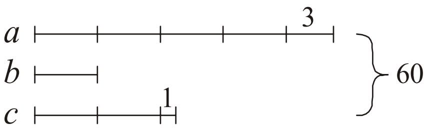
(*Clasa a III-a*) **Înv. Constanţa Cristea şi Inst. Iulian Cr**

Soluţie. Deoarece Tudor nu s-a clasat al doilea şi Dan este al treilea d deducem că Tudor s-a clasat pe locul I. Ţinând cont şi de ordinea R–M- clasamentul final TRMDC.

P.100. *Trei numere naturale au suma* 60. *Să se afle numerele ştiind c du-l pe primul la al doilea obţinem câtul* 4 *şi restul* 3, *iar al treilea este mare decât dublul celui de-al doilea.*

(*Clasa a III-a*) **Vasile Solcanu, Bogdăneşti**

Soluţie. Utilizăm metoda figurativă.



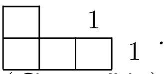
Al doilea număr este
$b=[60-(3+1)]:7=8$.
Primul număr este $a=4\times 8+3=3$
Al treilea număr este $c=2\times 8+1$

P.101. *Există numere naturale care împărţite la* 12 *să dea câtul* 7, *ia la* 15 *să dea restul* 2*?*

(*Clasa a IV-a*) **Alexandru-Gabriel Tudorache,**

Soluţie. Fie $n=12k+7=15p+2$. Atunci $n=3\,(4k+2)+1=$ adică pe de o parte n dă la împărţirea prin 3 restul 1, pe de altă parte imposibil.

P.102. *Să se arate că pătratul de latură* 36 *poate fi acoperit cu pies*



.

(*Clasa a IV-a*) **Andrei Burdun,**

Soluţie. Prin îmbinarea a două piese putem obţine o piesă dreptunghiulară de forma alăturată. Pentru acoperirea pătratului sunt necesare $(36:4)\times(36:2)=162$ piese dreptunghiulare. Pătratul poate fi acoperit cu 162×2 piese iniţiale.

P.103. *Un dreptunghi are perimetrul de* 624 *cm, iar lungimea este du Poate fi împărţit dreptunghiul într-o reţea de pătrate egale astfel încât su trelor lor să fie* 6656 *cm?*

(*Clasa a IV-a*) **Petru As**

Soluţie. Lăţimea dreptunghiului este $624:6=104$ cm. Dacă împă tunghiul în n pătrate egale, atunci n poate fi 2, 8, 32, 128, 512, … . Su trelor este $4nl=6656$ cm, de unde $nl=1664$ cm. Pentru $n=2$ obţinem

> 104 cm, fals. Pentru $n = 8$ obţinem $l = 208$ cm > 104 cm, fals. Pent
obţinem $l = 52$ cm, ceea ce înseamnă că lăţimea poate fi acoperită cu d
latura unui pătrat, ceea ce este fals, deoarece dreptunghiul trebuie acop
pătrate. Pentru $n = 128$ obţinem $l = 13$ cm. Atunci dreptunghiul poate
cu $(104 : 13) \times (208 : 13) = 8 \times 16 = 128$ pătrate. Pentru $n > 128$ nu ave

Clasa a V-a

V.61. *Determinaţi $x, y, z \in \mathbb{N}$ în fiecare din cazurile:*
a) $x \cdot y = \dfrac{25}{2z+1}$; *b)* $x^2 + y^2 = \dfrac{25}{2z+1}$;

Vasile Solcanu, Bogdăneşti

Soluţie. *a)* Deoarece $xy \in \mathbb{N}$, atunci $2z+1 \mid 25$, adică $2z+1 \in \{1, 5, 25$
mare $z \in \{0, 2, 12\}$. Dacă $z = 0$, atunci $xy = 25$, deci $(x, y) \in \{(1, 25); (5, 5$
Dacă $z = 2$, atunci $xy = 5$, deci $(x, y) \in \{(1, 5); (5, 1)\}$. Dacă $z = 12$, atu
deci $(x, y) = (1, 1)$. În concluzie,

$$(x, y, z) \in \{(1, 25, 0); (5, 5, 0); (25, 1, 0); (1, 5, 2); (5, 1, 2); (1, 1, 12)$$

b) Obţinem tot $z \in \{0, 2, 12\}$ şi, analizând toate cazurile, găsim că

$$(x, y, z) \in \{(0, 5, 0); (5, 0, 0); (3, 4, 0); (4, 3, 0); (1, 2, 2); (2, 1, 2); (0, 1, 12);$$

Să notăm că *a)* şi *b)* nu pot avea loc simultan.

V.62. *Să se scrie numărul 12321 ca diferenţă a două pătrate perfecte*

Andrei-Sorin Cozma,

Soluţie. Observăm că $12321 = 3^2 \cdot 37^2$. Înmulţim relaţia $3^2 + 4^2 = 5$
obţinem că $3^2 \cdot 37^2 + 4^2 \cdot 37^2 = 5^2 \cdot 37^2$, de unde $3^2 \cdot 37^2 = 5^2 \cdot 37^2 - 4^2$
$12321 = 34225 - 21904$.

V.63. *Să se scrie în ordine crescătoare numerele 3^{3^3}; 3^{33}; 333; 33^3;*

Ion Vişan

Soluţie. Observăm că

$$3^{33} > 3^{27} = 3^{3^3} = \left(3^9\right)^3 = 81^3 > 33^3 > 27^3 = \left(3^3\right)^3 > \left(3^2\right)^3 = 9^3 = 72$$

deci $333 < \left(3^3\right)^3 < 33^3 < 3^{3^3} < 3^{33}$.

V.64. *Să se determine $x, y, z \in \mathbb{N}$, $z \neq 0$, încât $5^x + 5^y = z!$, unde $z! =$*

Doru Tur

Soluţie. Notăm $U_2(A)$ ultimele două cifre ale numărului A. Dacă x
atunci $U_2(5^x + 5^y) = 50$, în timp ce $U_2(z!) \neq 50$, $\forall z \in \mathbb{N}$. Dacă $x = 1$, y
$U_2(5^x + 5^y) = 30$, în timp ce $U_2(z!) \neq 30$, $\forall z \in \mathbb{N}$. Analog se arată că
cazul $x \geq 2$, $y = 1$. Rămân de studiat cazurile $(x, y) \in \{(0, 0), (1, 0), (0,$
Analizându-le pe rând, obţinem soluţiile $(x, y, z) \in \{(0, 0, 2), (1, 0, 3), (0,$

V.65. *Vom numi "număr p" un număr natural care are exact 4 diviz*
a) Daţi exemplu de trei numere p consecutive.
b) Să se arate că nu există trei numere p consecutive astfel încât primu
să fie par.

Ovidiu Pop, S

Soluţie. *a)* De exemplu, putem considera numerele 33, 34, 35.

b) Presupunem prin absurd că există $a = 2k$, $b = 2k + 1$, $c = 2k + 2 =$
$k \in \mathbb{N}$, trei *numere p* consecutive. Cum $2k$ şi $2(k+1)$ au fiecare exact
numerele k şi $k+1$ trebuie să fie ambele prime. Singurele numere prime c
sunt 2 şi 3, deci $k = 2$, apoi $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$. Evident însă că 5 nu este

Clasa a VI-a

VI.61 *Dacă* $a = x^9y^3z^4t^{10}$, $b = xy^5z^6t^8$, $c = x^5y^7z^{10}t^{12}$ *şi* $|a| + a$
arate că $|b| + b = |c| + c = 0$.

Cristian - Cătălin Bud

Soluţie. Evident că $|a| + a = 0 \Leftrightarrow a \leq 0$. Deoarece $a = xy\left(x^4yz\right.$
rezultă că $xy \leq 0$. Atunci

$$b = xy\left(y^2z^3t^4\right)^2 \leq 0, \qquad c = xy\left(x^2y^3z^5t^6\right) \leq 0,$$

prin urmare $|b| + b = |c| + c = 0$.

VI.62. *Fie* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \{-1, 1\}$ *astfel încât*

$$\frac{a_1a_2a_3}{a_4} + \frac{a_2a_3a_4}{a_5} + \cdots + \frac{a_{n-1}a_na_1}{a_2} + \frac{a_na_1a_2}{a_3} = 0.$$

Să se arate că n *se divide cu* 4.

Ioana Olan, e

Soluţie. Suma dată are n termeni, fiecare dintre ei fiind $+1$ sau -1.
fiind 0, numărul termenilor egali cu $+1$ este acelaşi cu al celor egali c
urmare $n = 2k$. Produsul celor n fracţii este, pe de o parte, $(-1)^k(+1)^k =$
de alta este $a_1^2a_2^2 \cdots a_n^2 = +1$; rezultă $k = 2l$, $l \in \mathbb{N}$. În concluzie, $n = 4l$,

Să remarcăm că pentru $n = 4$ nu există numere a_1, a_2, a_3, a_4 care
ipotezele problemei, însă pentru $n = 8$ putem considera numerele -1, 1,
1, 1.

VI.63. *Se poate completa un pătrat* 10×10 *cu numerele de la* 1 *la* 100
pentru fiecare coloană să se poată forma (cu numerele din acea coloană)
astfel ca sumele numerelor din fiecare grupă să fie egale?

Bogdan Andrei Ciacoi, ele

Soluţie. Suma tuturor numerelor din pătrat este $\dfrac{100 \cdot 101}{2} = 5050$.
putea completa pătratul în acest fel, atunci datorită faptului că pe fieca
suma numerelor este multiplu de 3, suma numerelor de la 1 la 100 ar fi mu
Cum 5050 nu este multiplu de 3, rezultă că pătratul nu se poate complet
dorit.

VI.64. *Pentru fiecare* $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$, *arătaţi că interiorul oricărui*
convex se poate descompune în reuniune de n *triunghiuri dreptunghice cu i*
disjuncte.

Gabriel I

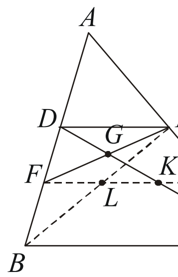
Soluţie. Observăm întâi că interiorul oricărui triunghi poate fi împăr
triunghiuri dreptunghice, ducând înălţimea din vârful unghiului cel mai
cauţie necesară dacă triunghiul iniţial este obtuzunghic). Dacă $n = 4$, o
împarte interiorul patrulaterului în două triunghiuri, iar după procedeul

obţinem 4 triunghiuri dreptunghice. Dacă se poate face o descompuner
unghiuri dreptunghice, putem realiza descompunerea în $k+1$ triunghiu
înălţimea ipotenuzei în unul din primele k şi cu aceasta rezolvarea este în

VI.65. *Fie $\triangle ABC, DE \parallel BC$, cu $E \in (AC)$ şi $D \in (AB)$, iar*
şi $\{G\} = FE \cap DC$. Demonstraţi că, dacă două dintre următoarele afir
adevărate, atunci este adevărată şi a treia:

(i) $BD = 2BF$; (ii) $AC = 2CE$; (iii) $EF = 2FG$.

Claudiu - Ştefan P



Soluţie. Fie H mijlocul lui $[CE]$, iar $\{L\} = BE \cap FH$, $\{K\} = CD \cap FH$.

$(\mathbf{i}), (\mathbf{ii}) \Rightarrow (\mathbf{iii})$. Folosim în mod repetat teoremele liniei mijlocii într-un triunghi/ trapez şi reciprocele lor. Cum $AE = EC$ şi $DE \parallel BC$, atunci $DE = \dfrac{BC}{2}$. Apoi, din $DF = FB$ şi $EH = HC$, obţinem $FH \parallel BC$, deci $[FL]$, $[FK]$ vor fi linii mijlocii în $\triangle BDE$, respectiv $\triangle DBC$. Atunci $FL = \dfrac{DE}{2} = \dfrac{BC}{4}$, $LK = FK - FL = \dfrac{BC}{2} - \dfrac{BC}{4} = \dfrac{BC}{4}$, adică $FL = LK = KH$. În $\triangle FEC$, FH este r
$\dfrac{FK}{KH} = \dfrac{2}{1}$, deci K va fi centru de greutate; rezultă că CK este medi
$FG = GE$.

$(\mathbf{i}), (\mathbf{iii}) \Rightarrow (\mathbf{ii})$. În $\triangle CEF$, FH şi CG sunt mediane, deci K va fi
greutate. Rezultă că $FK = 2KH$ şi cum $FK = \dfrac{BC}{2}$, $KH = \dfrac{DE}{2}$, atu
$2DE$. Conform unei a doua reciproce a teoremei liniei mijlocii în triunghi,
cunoscută, rezultă că $[DE]$ este linie mijlocie în $\triangle ABC$ (altfel $[D'E']$ ar f
mijlocie şi cum $DE = D'E' = \dfrac{BC}{2}$, $DE \parallel D'E' \parallel BC$, am obţine că DE
paralelogram, adică $DD' \parallel EE'$ şi atunci $AB \parallel AC$, fals!).

$(\mathbf{ii}), (\mathbf{iii}) \Rightarrow (\mathbf{i})$. Presupunem prin absurd că F nu este mijlocul lui $[BD]$
F' acest mijloc, iar $\{G'\} = F'E \cap DC$. Din (ii), $EF' = 2F'G'$, deci $[GG'$
mijlocie în $\triangle EFF'$, prin urmare $GG' \parallel BD$, adică $DC \parallel BD$, absurd.
are loc (i).

Clasa a VII-a

VII.61. *Fie $n \in \mathbb{N}^*$ fixat şi $p, k \in \mathbb{N}$, $p < k$. Să se arate că*

$$\frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p+1} + \cdots + \frac{1}{n+k} > \frac{2(k-p+1)}{2n+k+p}.$$

(În legătură cu **V.31** din RecMat - 2/2002).

Gigel Buth, S

Soluţie. Avem:

$$(n+p) + (n+p+1) + \cdots + (n+k) = \frac{(n+k)(n+k+1)}{2} - \frac{(n+p-1)}{2}$$

$$= \frac{(2n+k+p)(k-p+1)}{2}.$$

Inegalitatea dintre media armonică şi cea aritmetică arată că

$$\frac{(n+p)+(n+p+1)+\cdots+(n+k)}{k-p+1} > \frac{k-p+1}{\frac{1}{n+p}+\frac{1}{n+p+1}+\cdots+\frac{1}{n+}$$

Din (1) şi (2) obţinem inegalitatea dorită. Problema **V.31** se obţine p
100, $p = 1$, $k = 100$.

VII.62. *Fie $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $a^{10} - a^6 + a^2 = 4$. Să se arate că $7 <$*

Alexandru Negrescu, elev,

Soluţie. Faptul că $a^{10} - a^6 + a^2 = 4$ implică $a \neq 0$ şi $a \neq 1$, de unde a

şi $a^4 + \frac{1}{a^4} > 2$. Din $a^{12} + 1 = \left(a^4+1\right)\left(a^8 - a^4 + 1\right) = \frac{a^4+1}{a^2}\left(a^{10} - \right.$
$4\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)$, avem $a^{12} + 1 > 4 \cdot 2$, deci $a^{12} > 7$. Din $a^{10} + a^2 = a^6$
$a^4 + \frac{1}{a^4} = 1 + \frac{4}{a^6}$, de unde $1 + \frac{4}{a^6} > 2$, deci $a^6 < 4$, prin urmare $a^{12} < 16$

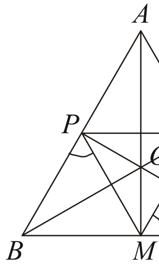
VII.63. *Fie triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ cu $AB = A'B'$, $BC = B'C$ toarele $[BE]$, $[B'E']$ congruente. Să se arate că $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.*

Petru As

Soluţie. A se vedea în acest număr nota *Criterii de congruenţă a triu* pag. 107-109.

VII.64. *În triunghiul echilateral ABC considerăm cevienele AM, concurente într-un punct O, interior triunghiului. Arătaţi că, dacă $\triangle$ echilateral, atunci O este centrul $\triangle ABC$.*

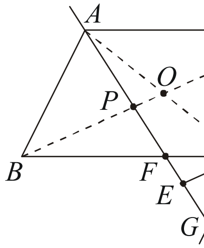
Temistocle Bî



Soluţie. Unghiurile marcate sunt congruente. Întradevăr, $m(\widehat{A}) = 60°$ implică $m(\widehat{ANP}) = 120° - m(\widehat{APN})$; $m(\widehat{NPM}) = 60°$ implică $m(\widehat{BPM}) = 120° - m(\widehat{APN})$, deci $\widehat{ANP} \equiv \widehat{BPM}$. Analog arătăm că $\widehat{BPN} \equiv \widehat{CMN}$; vom avea şi egalităţile $\widehat{APN} \equiv \widehat{BMP} \equiv \widehat{CNM}$. Se arată uşor că $\triangle ANP \equiv \triangle BPM \equiv \triangle CMN$, de unde $AP = BM = CN$ şi $AN = BP = CM$. Conform teoremei lui Ceva, are loc relaţia $\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1$, care revine la $\left(\frac{MB}{MC}\right)^3 = 1$ sau $MB \equiv MC$. Rezultă că M, N, P sunt mijloacel triunghiului ABC, deci O este centrul acestuia.

VII.65. *Fie $ABCD$ paralelogram. O dreaptă variabilă ce trece p dreptele BC şi CD în F, respectiv G şi taie paralela prin C la BD se arate că $AE^2 \leq AF \cdot AG$.*

Cătălin Cali



Soluţie. Fie $\{O\} = AC \cap BD$, $\{P\} = AE \cap BD$; cum $[OP]$ este linie mijlocie în $\triangle ACE$, vom avea că $AE = 2\,AP$. Din asemănările evidente $\triangle APD \sim \triangle FPB$, $\triangle ABF \sim \triangle GCF$, $\triangle GCF \sim \triangle GDA$, obţinem respectiv $\dfrac{1}{AP} = \dfrac{BF}{PF \cdot BC}$, $\dfrac{1}{AF} = \dfrac{CF}{GF \cdot BF}$, $\dfrac{1}{AG} = \dfrac{CF}{GF \cdot BC}$. De aici,

$$\frac{1}{AF} + \frac{1}{AG} = \frac{CF}{GF}\left(\frac{1}{BF} + \frac{1}{BC}\right) = \frac{CF}{GF} \cdot \frac{BF + BC}{BF \cdot BC} \cdot \frac{1}{AP} \cdot \frac{PF \cdot B}{BF}$$

$$= \frac{1}{AP} \cdot \frac{CF}{FG} \cdot \frac{BF + BC}{BF} \cdot \frac{PF}{BF}.$$

Din $\triangle DPA \sim \triangle BPF$ obţinem $\dfrac{FB}{BC + FB} = \dfrac{PF}{AP + PF} \Leftrightarrow \dfrac{BC + BF}{BF} =$

$$\frac{1}{AF} + \frac{1}{AG} = \frac{1}{AP} \cdot \frac{CF}{FG} \cdot \frac{AF}{PF} \cdot \frac{PF}{BF} = \frac{1}{AP} = \frac{2}{AE}$$

şi de aici concluzia rezultă imediat, aplicând inegalitatea mediilor.

Clasa a VIII-a

VIII.61. *Rezolvaţi în numere naturale ecuaţia* $x! = y^{2z} + 1$.

Denisa Florică şi Lucian Tuţescu

Soluţie. Pentru $x \in \{0, 1\}$, obţinem $y = 0$, $z \in \mathbb{N}$. Pentru $x = 2$, gă $z \in \mathbb{N}$ sau $y \in \mathbb{N}$, $z = 0$. Pentru $x \geq 3$ nu mai avem soluţii, deoarece $x!$ se 3, pe când $y^{2z} + 1$ nu (dacă $y = 3k$, atunci $y^{2z} + 1 = M3 + 1$, iar dacă y atunci $y^2 = M3 + 1$, deci $y^{2z} + 1 = M3 + 2$).

VIII.62. *If* $a, b, c > 0$ *and* $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq 3$, *prove that*

$$2\,(a + b + c)^2 \geq 3\,(ab + bc + ca) + 3\,(a + b + c)\,.$$

Babis Stergiou, Chalkid

Soluţie. Inegalitatea de demonstrat revine la

$$2\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + (ab + bc + ca) \geq 3\,(a + b + c)\,.$$

Condiţia din ipoteză şi inegalitatea Cauchy - Schwarz arată că

$$3\,(a + b + c) \geq \left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\right)^2 \Rightarrow a + b + c \geq 3.$$

Atunci:

$$2\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + (ab + bc + ca) \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2\,(ab + bc + ca)$$

$$= (a + b + c)^2 = (a + b + c)\,(a + b + c) \geq 3\,(a + b + c)\,,$$

deci (1) este adevărată. Egalitatea se atinge pentru $a = b = c = 1$.

VIII.63. *Let* a, b *be distinct nonzero real numbers. Find all solutions of the equation* $(x - 1)^2 + y^2 + \dfrac{4ab}{a^2 + b^2}\,(x - 1)\,y = 0$.

José Luis Díaz-Barrero, Barcelo

Soluţie. Ecuaţia devine succesiv:

$$\left(a^2+b^2\right)\left[\left(x-1^2\right)+y^2\right]+4ab\left(x-1\right)y=0 \Leftrightarrow$$
$$\left(a^2x^2+b^2y^2+a^2+2abxy-2a^2x-2aby\right)+$$
$$+\left(b^2x^2+a^2y^2+b^2+2abxy-2b^2x-2aby\right)=0 \Leftrightarrow$$
$$\left(ax+by-a\right)^2+\left(bx+ay-b\right)^2=0.$$

Evident atunci că $ax+by-a=bx+ay-b=0$, de unde obţinem $x =$

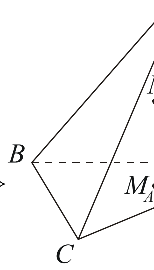
VIII.64. *Să se afle numărul de pătrate perfecte p astfel încât $2^n \leq p$*

Marian Panţ

Soluţie. Dacă $n=2k$, $k\in\mathbb{N}$, atunci primul pătrat perfect va fi Dacă notăm cu m numărul de pătrate perfecte căutat, atunci acesta ver inegalitate $\left(2^k+m-1\right)^2<2^{2k+1}<\left(2^k+m\right)^2$, de unde $m-1<2^k\sqrt{2}$ ceea ce ne arată că $m-1$ este partea întreagă a numărului $2^k\sqrt{2}-2^k$, 2^{2k} şi 2^{2k+1} se găsesc $\left[2^k\sqrt{2}\right]-2^k+1$ pătrate perfecte. Analog tratăm $2k+1, k\in\mathbb{N}$, obţinând $m=2^{k+1}-\left[2^k\sqrt{2}\right]$.

VIII.65. *Fie M un punct interior tetraedrului $ABCD$, iar d_A, d distanţele de la M la planele (BCD), (ACD), (ABD), respectiv $(AB$ arate că* $\dfrac{MA}{d_A}+\dfrac{MB}{d_B}+\dfrac{MC}{d_C}+\dfrac{MD}{d_D}\geq 12.$

D.M. Bătineţu-Giurgiu,



Soluţie. Fie M_A, H_A proiecţiile punctelor M, respectiv A, pe planul (BCD); evident că $d_A=MM_A$, $h_a=AH_A$ şi analoagele. Mai notăm $s_A=S_{BCD}$, $s_B=S_{ACD}$ etc. Observăm că:

$$AM+MM_A\geq AM_A\geq AH_A\Rightarrow$$
$$s_A\cdot MA+s_A\cdot d_A\geq s_A\cdot h_A=3V_{ABCD}\Rightarrow$$
$$s_A\cdot MA+s_A\cdot d_A\geq s_A\cdot d_A+s_B\cdot d_B+s_C\cdot d_C+s_D\cdot d_D\Rightarrow$$
$$\frac{MA}{d_A}>\frac{s_B}{s_A}\cdot\frac{d_B}{d_A}+\frac{s_C}{s_A}\cdot\frac{d_C}{d_A}+\frac{s_D}{s_A}\cdot\frac{d_D}{d_A}.$$

Grupând convenabil termenii, obţinem:

$$\sum\frac{MA}{d_A}\geq\sum\left(\frac{s_A}{s_B}\cdot\frac{d_A}{d_B}+\frac{s_B}{s_A}\cdot\frac{d_B}{d_A}\right)\geq 6\cdot 2=12,$$

cu egalitate când tetraedrul este regulat, iar M este centrul său de greuta

Clasa a IX-a

IX.61. *The radii of the three escribed circles of a triangle ABC a $r_b=6$, $r_c=12$. Find the lenghts of the sides of the triangle.*

José Luis Díaz-Barrero, Barcelo

Soluţie. Folosim succesiv binecunoscutele relaţii

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}; S^2=rr_ar_br_c; S=r_a\left(p-a\right)=r_b\left(p-b\right)=r_c\left(p-\right.$$

Obţinem $r=2$, apoi $S=24$, prin urmare $a=6$, $b=8$, $c=10$.

IX.62. *Rezolvaţi sistemul în necunoscutele* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^*, n \in \mathbb{N}$

$$2(n-1) \cdot \prod_{k=1}^{n} x_k = \left(1+x_1^2\right) \cdot \sum_{k=2}^{n} x_k^2 = \left(1+x_n^2\right) \cdot \sum_{k=1}^{n-1} x_k^2.$$

Silviu Boga

Soluţie. Considerând o soluţie $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, din prima egalitate ob

$$\left(\sum_{k=2}^{n} x_k^2\right) \cdot x_1^2 - 2(n-1)\left(\prod_{k=2}^{n} x_k\right) \cdot x_1 + \sum_{k=2}^{n} x_k^2 = 0.$$

Discriminantul este $\triangle = \left[(n-1) \cdot \prod\limits_{k=2}^{n} x_k\right]^2 - \left(\sum\limits_{k=2}^{n} x_k^2\right)$ şi, conform inegali

ilor, $\triangle \leq 0$. Însă $x_1 \in \mathbb{R}^*$prin urmare trebuie să avem $\triangle \geq 0$, fapt care se
când $x_2^2 = x_3^2 = \cdots = x_n^2$. Analog obţinem că $x_1^2 = x_2^2 = \cdots = x_{n-}^2$

$x_1^2 = x_2^2 = \cdots = x_n^2 = t \in \mathbb{R}_+^*$. Înlocuim în (1) şi găsim că $x_1 = \frac{\pm(n-}{(n-}$

$\pm t^{n-3}$, de unde $t = 1$. În concluzie, soluţiile sistemului au forma $(x_1, x_2,$
$|x_k| = 1, k \in \overline{1, n}$.

IX.63. *Determinaţi* $x, y \in \mathbb{Z}$ *pentru care* $x^3 + y^3 \leq x + y \leq x^5 + y^5$.

Romeo Ili

Soluţie. Notăm $x + y = s$, $xy = p$. Dacă $s > 0$, avem:

$$(x+y)\left(x^2 - xy + y^2\right) \leq x + y \leq (x+y)\left(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y\right.$$

$$(x+y)^2 - 3xy \leq 1 \leq \left(x^2+y^2\right)^2 - x^2y^2 - xy\left(x^2+y^2\right) \Leftrightarrow$$

$$s^2 - 3p \leq 1 \leq \left(s^2 - 2p\right)^2 - p\left(s^2 - 2p\right) - p^2.$$

Atunci $s^2 - 2p \leq 1 + p$, deci

$$1 \leq \left(s^2 - 2p\right)^2 - p\left(s^2 - 2p\right) - p^2 \leq (1+p)^2 - p(1+p) - p^2 =$$

$$= -p^2 + p + 1 = -\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} \leq \frac{5}{4}.$$

Deoarece $1 \leq -p^2+p+1 \leq \frac{5}{4}$ şi $-p^2+p+1 \in \mathbb{Z}$, atunci $-p^2+p+1 = 1$, deci
Ne amintim că $s > 0$ şi $s^2 - 3p \leq 1$ şi obţinem soluţiile $(x, y) \in \{(0,1); (1,$

Analog, dacă $s < 0$ găsim soluţiile $(x, y) \in \{(0,-1); (-1,0), (-1,-1)\}$.
dacă $s = 0$, evident că şirul de inegalităţi din ipoteză este adevărat cu egal
pereche $(n, -n)$, $n \in \mathbb{Z}$ constituie soluţie a ecuaţiei.

IX.64. *Fie* $ABCD$ *un patrulater, iar* H_A, H_B, H_C, H_D *ortocentrel*
urilor BCD, ACD, ABD, *respectiv* ABC. *Demonstraţi că* $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{H_C H}$
numai dacă $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{H_D H_B}$.

Ioan Săcălean

Soluţie. Notăm cu O_A, O_B, O_C, O_D centrele circumscrise triunghiur
ACD, ABD, respectiv ABC. Ţinând cont de relaţia Sylvester, se obţine

$$\overrightarrow{O_A H_A} + \overrightarrow{H_C O_C} = \left(\overrightarrow{O_A B} + \overrightarrow{O_A C} + \overrightarrow{O_A D}\right) + \left(\overrightarrow{AO_C} + \overrightarrow{BO_C} + \overrightarrow{DO_C}\right.$$

$$\overrightarrow{O_AC}+\overrightarrow{CH_A}+\overrightarrow{H_CA}+\overrightarrow{AO_C}=\overrightarrow{O_AC}+\overrightarrow{AO_C}+\left(\overrightarrow{O_AB}+\overrightarrow{BO_C}\right)+\left(\overrightarrow{O_AD}\right.$$

$$\overrightarrow{CH_A}+\overrightarrow{H_CA}=2\overrightarrow{O_AO_C}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{O_CO_A}=\overrightarrow{AH_C}+\overrightarrow{H_AC}.$$

Analog se deduce că $2\overrightarrow{O_BO_D}=\overrightarrow{DH_B}+\overrightarrow{H_DB}$. Atunci

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{H_CH_A}\Leftrightarrow\overrightarrow{AH_C}=\overrightarrow{CH_A}\Leftrightarrow\overrightarrow{AH_C}+\overrightarrow{H_AC}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow O_C=O_A$$

$ABCD$ patrulater inscriptibil $\Leftrightarrow O_B=O_D\Leftrightarrow\overrightarrow{DH_B}+\overrightarrow{H_DB}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{BD}$

IX.65. *Fie* $a,b\in\mathbb{R}$ *astfel încât* $\sin x+\sin a\geq\cos x\cdot\cos b$, $\forall x\in\mathbb{R}$. *că* $\dfrac{a-b}{\pi}\in\mathbb{Z}$.

Adrian Zanc

Soluţie. Dacă $\sin a<1$, pentru $x=\dfrac{3\pi}{2}$ relaţia dată devine $-1+\sin$ $\sin a<1$, contradicţie. Rămâne că $\sin a=1$, adică $a=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. I din enunţ devine:

$$\sin x+1\geq\cos x\cdot\cos b\Leftrightarrow\sin x-\cos x\cdot\cos b\geq-1\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 b}}\cdot\sin x-\frac{\cos b}{\sqrt{1+\cos^2 b}}\cdot\cos x\geq\frac{-1}{\sqrt{1+\cos^2 b}}\Leftrightarrow$$

$$\sin x\cdot\cos\phi-\sin\phi\cdot\cos x\geq-\frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 b}}\Leftrightarrow\sin(x-\phi)\geq\frac{-1}{\sqrt{1+\mathrm{co}}}$$

pentru orice $x\in\mathbb{R}$ (am notat $\phi\in[0,2\pi)$ numărul pentru care $\cos\phi=$ $\sin\phi=\dfrac{\cos b}{\sqrt{1+\cos^2 b}}$). Luând $x=\phi+\dfrac{3\pi}{2}$ în această inegalitate, obţi $\dfrac{-1}{\sqrt{1+\cos^2 b}}\Leftrightarrow\cos^2 b\leq 0\Leftrightarrow\cos b=0$, deci $b=\dfrac{\pi}{2}+l\pi, l\in\mathbb{Z}$. Astfe $2k-l\in\mathbb{Z}$.

Clasa a X-a

X.61. *If* $x\geq 0$, *prove that* $\log_3(1+3^x)>\log_4\left(4^x+\left(\sqrt[3]{2}\right)^x\right)$.

Oleg Faynshteyn, Leipzig,

Soluţie. Ineglitatea dată se scrie echivalent

$$\log_3 3^x\left(1+\left(\frac{1}{3}\right)^x\right)>\log_4 4^x\left(1+\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{4}\right)^x\right)\Leftrightarrow$$

$$\log_3\left(1+\left(\frac{1}{3}\right)^x\right)>\log_4\left(1+\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{4}\right)^x\right).$$

Această ultimă inegalitate rezultă din observaţia că $\dfrac{1}{3}>\dfrac{\sqrt[3]{2}}{4}$, iar $\log_3 a$ $\times\log_4 a>\log_4 a>\log_4 b$, de îndată ce $a>b$.

X.62. *Se dă şirul* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{C}$ *cu proprietatea că* $z_{n+2}=z_n+iz_{n+}$ *şi se notează cu* V *mulţimea termenilor săi. Dacă* $U_3\subset V$, *să se arate c* (*Am notat* $U_k=\left\{z\in\mathbb{C}\mid z^k=1\right\}$.)

Monica Ned

Soluţie. Observăm că $z_{n+3} = z_{n+1} + iz_{n+2} = z_{n+1} + i\left(z_n + iz_{n+1}\right) =$
urmare $z_{n+12} = iz_{n+9} = i^2 z_{n+6} = i^3 z_{n+3} = i^4 z_n = z_n$, deci şirul este p
perioadă 12. În plus, $iz \in V$ pentru orice $z \in V$.

Pentru a arăta că $V = U_{12}$, este suficient să demonstrăm că $U_{12} \subset V$.

$$U_{12} = \{z_k \mid z_k = \cos\frac{2k\pi}{12} + i\sin\frac{2k\pi}{12}, k = \overline{0,11}\}.$$

Evident că $\{z_0, z_{4,} z_8\} = U_3 \subset V$, apoi $z_3 = iz_0 \in V$, $z_6 = iz_3 \in V$, $z_9 =$
$z_7 = iz_4 \in V$, $z_{10} = iz_7 \in V$, $z_1 = iz_{10} \in V$, $z_{11} = iz_8 \in V$, $z_2 =$
$z_5 = iz_2 \in V$ şi demonstraţia este încheiată.

X.63. *Un număr de n jucători aruncă succesiv o monedă având feţ
jocul este câştigat de acela care obţine primul faţa s. Să se afle proba
jucătorul de pe locul k $(1 \leq k \leq n)$ să câştige jocul în primele $np + k$ a
monedei, unde $p \in \mathbb{N}^*$ este dat.*

Petru As

Soluţie. Problema extinde, folosind aceeaşi idee, cazul $n = 2$ prezen
manuale. Notăm cu A_i evenimentul ca jucătorul de pe locul k să câşti
exact $ni + k$ aruncări ale monedei; pentru realizarea lui A_i, feţele monedei
apară în ordinea $\underbrace{bb\ldots b}_{ni+k-1 \text{ori}}$ s, deci $P\left(A_i\right) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{ni+k}$. Evenimentele A_1,
sunt incompatibile în totalitatea lor, iar $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p$ reprezintă eve
cărui probabilitate este cerută de problemă. Avem:

$$P\left(A\right) = P\left(A_1\right) + P\left(A_2\right) + \cdots + P\left(A_p\right) = \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+m}} + \cdots + \frac{1}{2^{k+r}}$$

$$= \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\dfrac{1}{2^{np}} - 1}{\dfrac{1}{2^n} - 1} = \frac{1}{2^{n(p-1)+k}} \cdot \frac{1 - 2^{np}}{1 - 2^n}.$$

X.64. *Fie $f : \mathbb{R}^* \to (0, \infty)$, $f\left(x\right) = \dfrac{2005 \cdot |x|}{2004 \cdot \left|\sin^{2005} x\right| + 2005 \cdot |x|^4} +$
arate că $\left|f\left(x\right) + \dfrac{1}{2}\right| - \left|f\left(x\right) - \dfrac{1}{2}\right| \leq \dfrac{9}{1 + |x|^3}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$.*

Ioan Şerdean

Soluţie. Construim funcţia $g : \mathbb{R}^* \to (0, \infty)$,

$$g\left(x\right) = \frac{1 + |x|^3}{9}\left(\left|f\left(x\right) + \frac{1}{2}\right| - \left|f\left(x\right) - \frac{1}{2}\right|\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}^*;$$

este suficient să arătăm că $g\left(x\right) \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$. Vom demonstra acest luc
etape:

i) Dacă $|x| > 2$, atunci

$$0 < f\left(x\right) \leq \frac{2005 \cdot |x|}{2005 \cdot |x|^4} + \frac{3}{|x|^3} = \frac{4}{|x|^3} < \frac{4}{8} = \frac{1}{2},$$

deci $\left|f(x)+\frac{1}{2}\right|=f(x)+\frac{1}{2}$, iar $\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}-f(x)$. Rezultă că

$$g(x)+\frac{1+|x|^3}{9}\cdot 2f(x)\leq\frac{1+|x|^3}{9}\cdot 2\cdot\frac{4}{|x|^3}=\frac{8}{9}\left(\frac{1}{|x|^3}+1\right)\leq\frac{8}{9}\left(\frac{1}{8}+\right.$$

ii) Dacă $0<|x|\leq 2$, folosind faptul că $|a|-|b|\leq|a-b|$, avem:

$$g(x)\leq\frac{1+|x|^3}{9}\cdot\left|f(x)+\frac{1}{2}-f(x)+\frac{1}{2}\right|=\frac{1+|x|^3}{9}\leq\frac{1+8}{9}=1$$

X.65. *Fie $\mathcal{C}$ un cerc de rază 1 şi fie $P_1,P_2,\ldots,P_n$ puncte ale discului c tor. Arătaţi că există un semicerc închis $\mathcal{S}\subset\mathcal{C}$ astfel încât $MP_1+MP_2+\cdot\cdot$ $\geq n$, $\forall M\in\mathcal{S}$.*

Adrian Zahariuc, ele

Soluţie. Fie O centrul cercului, iar G centrul de greutate al sistemului $P_1,P_2,\ldots,P_n$. Vom demonstra că $MP_1+MP_2+\cdots+MP_n\geq nMG$, p punct M din plan. Raportăm planul complex la un reper cu originea î afixul lui G, p_i afixele punctelor $P_i, i=\overline{1,n}$. Atunci

$$g=\frac{p_1+p_2+\cdots+p_n}{n}\Rightarrow n\cdot|g|=|p_1+p_2+\cdots+p_n|\leq|p_1|+|p_2|+\cdots$$

$$n\cdot MG\leq MP_1+MP_2+\cdots+MP_n.$$

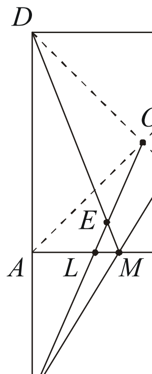
Rămâne de demonstrat că există un semicerc $\mathcal{S}\subset\mathcal{C}$ astfel încât $MG\geq$ Dacă $G=O$, inegalitatea este adevărată pentru orice $M\in\mathcal{C}$. Dacă $G\neq$ diametrul lui $\mathcal{C}$ perpendicular pe OG, iar $\mathcal{S}$ semicercul delimitat de aces lui G. Atunci $m(\widehat{MOG})\geq 90°, \forall M\in\mathcal{S}$, deci $MG\geq MO=1$, ceea rezolvarea.

Clasa a XI-a

XI.61. *Fie $a\in\mathbb{R}\backslash\{1\}$ şi $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Dacă există $k\in\mathbb{N}$ $A^{k+1}=aA^k$, să se arate că I_n-A este inversabilă.*

Gheorghe I

Soluţie. Fie $X_0\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ o soluţie a sistemului $(I_n-A)\cdot X=$ $AX_0=X_0$, deci $A^k\cdot X_0=A^{k+1}\cdot X_0=X_0$, de unde $X_0=aX_0$ şi cum a că $X_0=O$. Astfel, sistemul omogen $(I_n-A)\cdot X=O$ are doar soluţia atunci $\det(I_n-A)\neq 0$.



XI.62. *Fie $ABCD$ un pătrat de centru O, iar M un punct variabil pe $[AB]$. Notăm $\{S\}=CM\cap AD$, $\{E\}=SO\cap MD$. Se cere locul geometric al punctului E.*

Petru Răducanu, Iaşi

Soluţia 1 (analitică). Raportăm planul la un reper cu originea în A, având dreptele AB şi AD axe de coordonate. Putem considera $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,2)$, $D(0,2)$, $O(1,1)$, iar $M(a,0)$, cu $a\in(0,2)$. Intersectând dreapta CM cu AD, obţinem că $S\left(0,\frac{2a}{a-2}\right)$. Atunci ecuaţia

dreptei SO este $\dfrac{a+2}{a-2}\cdot(x-1)+y-1=0$ şi cum $DM : 2x+a\,(y-2)$
eliminarea parametrului a între cele două ecuaţii găsim ecuaţia locului
$x^2+y^2-2y=0$. Această ecuaţie reprezintă cercul de diametru $[AD$
trebuie reţinut doar semicercul interior pătratului (fără capete), deoarece

Soluţia 2 (sintetică). În $\triangle AMD$ cu transversala $E-L-S$, conform t
Menelaus obţinem că $\dfrac{EM}{ED}\cdot\dfrac{LA}{LM}\cdot\dfrac{SD}{SM}=1$. Apoi, în $\triangle AMC$ cu transversal
obţinem $\dfrac{LA}{LM}\cdot\dfrac{OC}{OA}\cdot\dfrac{SM}{SM}=1$. Cum $\dfrac{SC}{SM}=\dfrac{SD}{SA}=\dfrac{CD}{AM}$, atunci $\dfrac{EM}{ED}=$
aici rezultă că $AE\perp MD$, adică $AEOD$ este patrulater inscriptibil, deci
cercului de diametru $[AD]$.

Rămâne să arătăm că orice punct E' de pe semicercul interior pătratul
locului. Fie $\{M'\}=DE'\cap AB, \{S'\}=CM'\cap DA, \{T\}=AC\cap M'D$. A

$$\frac{OA}{OT}=\frac{OD}{OT}=\operatorname{tg}(\widehat{OTD})=\operatorname{tg}(\widehat{ATE'});$$

$$\frac{E'T}{E'D}=\frac{E'T}{AE'}:\frac{E'D}{AE'}=\frac{\operatorname{ctg}(\widehat{ATE'})}{\operatorname{ctg}(\widehat{ADM'})}=\frac{AM'}{AD}\cdot\operatorname{ctg}(\widehat{ATE'}).$$

Cum $\dfrac{S'D}{S'A}=\dfrac{CD}{AM'}=\dfrac{AD}{AM'}$, rezultă că $\dfrac{OA}{OT}\cdot\dfrac{E'T}{E'D}\cdot\dfrac{S'D}{S'A}=1$. Din reciproc
lui Menelaus în $\triangle ATD$ urmează că punctele O, E', S' sunt colinare, ceea
demonstraţia.

XI.63. *Fie $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ funcţii continue astfel încât $g(a)+f(b)<1$*
Să se arate că există $c\in(a,b)$ pentru care

$$\left(\frac{f\,(c)}{b-c}\right)^3+\left(\frac{g\,(c)}{a-c}\right)^3+\left[\frac{2c-a-b}{(b-c)\,(a-c)}\right]^3=\frac{3\,(2c-a-b)\,f\,(c)\,g}{(b-c)^2\,(a-c)^2}$$

Valeriu Braşovean

Soluţie. Florin Popovici, Braşov, dă următoarea generalizare:

Fie $f,g,h:[a,b]\to\mathbb{R}$ trei funcţii continue pe $[a,b]$, astfel încât (
$\cdot\,(f\,(b)-1)>0$ *şi $h\,(a)=h\,(b)=0$. Dacă $n\in\mathbb{N}^*$ este impar, există $c\in$* (
încât $f^n\,(c)\,(a-c)^n+g^n\,(c)\,(b-c)^n+(2c-a-b)^n=h\,(c)$.

Într-adevăr, din ipoteză rezultă că $(g^n\,(a)-1)\,(f^n\,(a)-1)>0$. C
funcţia $u:[a,b]\to\mathbb{R}$, $u\,(x)=f^n\,(x)\,(a-x)^n+g^n\,(x)\,(b-x)^n+(2x-a-$
Evident că u este continuă pe $[a,b]$, iar

$$u\,(a)=(g^n\,(a)-1)\,(b-a)^n\,;\quad u\,(b)=(1-f^n\,(b))\,(b-a)^n\Rightarrow$$
$$\Rightarrow u\,(a)\,u\,(b)=(g^n\,(a)-1)\,(1-f^n\,(b))\,(b-a)^{2n}<0.$$

Urmează că există $c\in(a,b)$ astfel încât $u\,(c)=0$, de unde concluzia.

Problema se obţine pentru $n=3$ şi $h\,(x)=3\,(2x-a-b)\,(a-b)\,(b-x)$

XI.64. *Fie $f:(0,1)\to(0,\infty)$ o funcţie crescătoare cu $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ ş*
$\forall x\in(0,1)$. Definim şirurile $(a_n)_{n\ge1}$, $(x_n)_{n\ge1}$ prin $a_n=\dfrac{1}{(a+b)\,(2a+b)\cdot}$

$(a > 0,\ b > 0)$ *şi* $x_n = \left[f(a_{n+1}) + f(a_{n+2}) + \cdots + f(a_{2n})\right]^{1/n}$. *Să s*
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Gheorghe Coste

Soluţie. Să observăm întâi că problema este consistentă, în sensul
funcţii f ca în enunţ; de exemplu $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \sin x$, $f_3(x) = \operatorname{arctg}$
$\ln(1+x)$ etc.

Notăm $b_n = f(a_{n+1}) + f(a_{n+2}) + \cdots + f(a_{2n})$ şi observăm că $b_n \to 0$

$$0 < b_n \leq nf(a_n) \leq n \cdot \frac{1}{(a+b)(2a+b)\cdots(na+b)} \to 0.$$

Avem că $x_n = e^{\ln x_n} = e^{\frac{\ln b_n}{n}}$. Pentru a calcula limita exponentului, ne c
raportul (Stolz pentru $\dfrac{\infty}{\infty}$)

$$\frac{\ln b_{n+1} - \ln b_n}{(n+1)-n} = \ln\frac{b_{n+1}}{b_n} = \ln\left(1 + \frac{f(a_{2n+1}) + f(a_{2n+2})}{b_n} - \frac{f(a_{n+}}{b_n}\right.$$

Dar

$$\frac{f(a_{2n+1}) + f(a_{2n+2})}{b_n} \leq \frac{a_{2n+1} + a_{2n+2}}{nf(a_{2n})} = \frac{1}{n} \cdot \frac{a_{2n}}{f(a_{2n})} \cdot \left(\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} + \frac{a_{2n+}}{a_{2n}}\right.$$

şi ţinând seama de faptul că $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} \cdot x = 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{f(a_{n+1})} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1} - b_n}{f(a_{n+2}) - f(a_{n+1})} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(a_{2n+1}) + f(a_{2n+2}) - }{f(a_{2n+2}) - f(a_{n+}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(a_{2n+1})}{a_{2n+1}} \cdot \frac{a_{2n+1}}{a_{n+1}} + \frac{f(a_{2n+2})}{a_{2n+2}} \cdot \frac{a_{2n+2}}{a_{n+1}} - \frac{f(a_{n+1})}{a_{n+1}}\right) :$$

$$: \left(\frac{f(a_{n+2})}{a_{n+2}} \cdot \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} - \frac{f(a_{n+1})}{a_{n+1}}\right) = 1$$

(am folosit Stolz pentru $\dfrac{0}{0}$). Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln b_n}{n} = -\infty$ şi, prin urmare, li

XI.65. *Pentru* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$, $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = nA$, *arătaţi*

$$\left[\left(\frac{x_1}{A}\right)^3 + 3\left(\frac{x_1}{A}\right) + 2\right] \cdot \left[\left(\frac{x_2}{A}\right)^3 + 3\left(\frac{x_2}{A}\right) + 2\right] \cdot \ldots \cdot \left[\left(\frac{x_n}{A}\right)^3 + 3\left(\frac{x_n}{A}\right) \right.$$

Să se obţină de aici inegalitatea dintre media aritmetică şi cea geometric

Dumitru Mihalach

Soluţia 1 (a autorului). Este cunoscută inegalitatea $e^x \geq 1 + \dfrac{x}{1!} +$
$\forall x \in \mathbb{R}$, egalitate pentru $x = 0$. (Inegalitatea se poate obţine ignorân
dezvoltarea Taylor a lui e^x, sau direct prin derivări repetate). Trecem pe
şi găsim că

$$e^{x-1} \geq 1 + \frac{x-1}{1} + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} \Leftrightarrow e^{x-1} \geq \frac{x^3 + 3x + 2}{6}, \forall x$$

cu egalitate pentru $x = 1$. Dăm lui x valorile $\dfrac{x_1}{A}, \dfrac{x_2}{A}, \ldots \dfrac{x_n}{A}$ şi înmulţim m
membru inegalităţile obţinute; ţinând seama de ipoteza $\dfrac{x_1 + x_2 \cdots + x_n}{A}$

obţinem concluzia. Egalitatea se atinge pentru $\frac{x_1}{A} = \frac{x_2}{A} = \cdots = \frac{x_n}{A} =$
$x_2 = \cdots = x_n$.

Vom demonstra că $x^3 + 3n + 2 \geq 6x, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$; într-adevăr, acest fap
$(x-1)^2 (x+2) \geq 0$, evident adevărat. Cu notaţia $G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$, obţ

$$6^n \geq \left[\left(\frac{x_1}{A}\right)^3 + 3\left(\frac{x_1}{A}\right) + 2\right]\left[\left(\frac{x_2}{A}\right)^3 + 3\left(\frac{x_2}{A}\right) + 2\right] \cdots \left[\left(\frac{x_n}{A}\right)^3 + 3\left(\frac{x_n}{A}\right.\right.$$

$$\geq \left(6 \cdot \frac{x_1}{A}\right)\left(6 \cdot \frac{x_2}{A}\right) \cdots \left(6 \cdot \frac{x_n}{A}\right) = 6^n \cdot \frac{G^n}{A^n} \Rightarrow \frac{G^n}{A^n} \leq 1 \Rightarrow G \leq A$$

adică tocmai inegalitatea mediilor.

Soluţia 2 (**Marian Tetiva**, Bârlad). Fie $x_1 = a_1 A, x_2 = a_2 A, \ldots, x_n$
$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{A} = n$; inegalitatea de demonstrat
$\left(a_1^3 + 3a_1 + 2\right)\left(a_2^3 + 3a_2 + 2\right) \ldots \left(a_n^3 + 3a_n + 2\right) \leq 6^n \Leftrightarrow P(a_1) \cdot P(a_2) \cdot \cdots$
unde $P(x) = x^3 + 3x + 2$. Însă

$$P(a_1) \cdot P(a_2) \cdot \cdots \cdot P(a_n) \leq 6^n \Leftrightarrow \ln P(a_1) + \ln P(a_2) + \cdots + \ln P(a_n) \leq$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln P(a_1) + \ln P(a_2) + \cdots + \ln P(a_n)}{n} \leq \ln P\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a}{n}\right.$$

deoarece $P\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right) = P(1) = 6$. Ultima inegalitate ar fi
dacă funcţia $\ln P(x)$ ar fi concavă. Cum

$$P''(x) \cdot P(x) - [P'(x)]^2 = 6x\left(x^3 + 3x + 2\right) - \left(3x^2 + 3\right)^2 =$$

$$= -3\left(x^4 - 4x + 3\right) = -3(x-1)^2\left(x^2 + 2x + 3\right) \leq 0,$$

demonstraţia este încheiată.

Notă. Cum domeniul de definiţie al funcţiei $\ln P(x)$ este de forma (
$x_0 \in (-1, 0)$, putem spune că inegalitatea din enunţ are loc pentru x_1, x
$(x_0, +\infty)$, cu $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \neq 0$.

Clasa a XII-a

XII.61. *Să se determine funcţiile derivabile* $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$
o primitivă $F : (0, \infty) \to (0, \infty)$ *pentru care* $\lim_{x \searrow 0} F(x) = 2 \cdot \lim_{x \searrow 0} f($
$F(x) f'(x) = F(x) f(x) - f^2(x) + x - 1$, $\forall x \in (0, \infty)$.

Mihai Ha

Soluţie. (dată de **Florin Popovici**, Braşov). Cu notaţia $u = \frac{1}{2}$
din enunţ se scrie sub forma $u''(x) - u'(x) = x - 1$, $\forall x \in (0, \infty)$,
ecuaţie diferenţială liniară de ordin 2, cu coeficienţi constanţi, neomogen
sa generală este $u(x) = c_1 + c_2 e^x - \frac{x^2}{2}$, $\forall x \in (0, \infty)$, adică $\frac{1}{2} F^2(x) = c_1 +$
$\forall x \in (0, \infty)$. Din condiţia $\lim_{x \searrow 0} F(x) = 1$ obţinem că $c_1 + c_2 = \frac{1}{2}$. Apoi,
ambii membri şi folosind din nou condiţia iniţială, găsim că $c_2 = \frac{1}{2}$, deci
concluzie, $F^2(x) = e^x - x^2$, $\forall x \in (0, \infty)$.

Pentru $x \in (0,1]$, avem $e^x - x^2 \geq e^x - 1 > 0$. Pentru $x \in (1,$ $\left(e^x - x^2\right)'' = e^x - 2 > e - 2 > 0$. Apoi, $\left(e^x - x^2\right)' > 0$, $\forall x \in (1,\infty)$ şi cum deducem că $e^x - x^2 > 0$, $\forall x \in (1,\infty)$. Astfel, $F(x) = \sqrt{e^x - x^2}$, $\forall x \in ($ urmare $f(x) = F'(x) = \dfrac{e^x - x^2}{2\sqrt{e^x - x^2}}$, $\forall x \in (0,\infty)$ este unica soluţie a prob

XII.62. *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ o funcţie continuă, iar F primitiva sa care s în origine. Să se calculeze:* $a)$ $\lim\limits_{x\to\infty} xF\left(\dfrac{1}{x}\right)$; $b)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} F\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)$.

Dan Popescu

Soluţie. $a)$ Avem:

$$\lim_{x\to\infty} xF\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} \frac{F(y)}{y} = \lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} \frac{F(y) - F(0)}{y - 0} = F'(0) = f(0)$$

$b)$ Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} nF\left(\dfrac{1}{n}\right) = f(0)$, pentru orice $0 < a < f(0)$, exist pentru care $\sqrt{n} \cdot F\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) > a, \forall n > n_1$, altfel spus $F\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) > \dfrac{a}{\sqrt{n}}$ Atunci

$$\sum_{k=1}^{n} F\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) = \sum_{k=1}^{n_1} F\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) + \sum_{k=n_1+1}^{n} F\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) > \sum_{k=1}^{n_1} F\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) + a\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} -$$

$$> \sum_{k=1}^{n_1} F\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) + a\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - a\sum_{k=1}^{n_1} \frac{1}{\sqrt{k}}, \forall n > n_1$$

şi cum $\lim\limits_{n\to\infty} a \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = +\infty$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} F\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right) = +\infty$.

XII.63. *Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcţii surjective. Dacă $g \circ (g - f)$ este toare şi există $L > 1$ astfel încât $|g(x) - g(y)| \geq L|x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, să f are un unic punct fix.*

Sorin Puşpană

Soluţie. Din $|g(x) - g(y)| \geq L|x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, rezultă că g est şi, cum g surjectivă, rezultă g bijectivă; atunci g^{-1} este o contracţie de $\dfrac{1}{L} < 1$, deci continuă. Rezultă că g este continuă şi cum este şi injectiv este strict monotonă. Folosind acum faptul că $g \circ (g - f)$ este descrescătoa că $g - f$ este monotonă, iar g şi $g - f$ au monotonii diferite. Distingem s

$i)$ Fie g descrescătoare, iar $g - f$ crescătoare; dacă $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, atu

$$(g - f)(x) \leq (g - f)(y) \Rightarrow g(x) - g(y) \leq f(x) - f(y) \Rightarrow$$
$$|f(x) - f(y)| \geq |g(x) - g(y)| \Rightarrow |f(x) - f(y)| \geq L \cdot |x - y|, \quad \forall x, y$$

$ii)$ Fie g crescătoare, $g - f$ descrescătoare; dacă $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, atunc

$$(g - f)(x) \geq (g - f)(y) \Rightarrow f(y) - f(x) \geq g(y) - g(x) \Rightarrow$$
$$|f(x) - f(y)| \geq L \cdot |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

În ambele cazuri am obţinut că $|f(x)-f(y)| \geq L\cdot|x-y|, \quad \forall x,y \in$
surjectivă, ca şi în cazul lui g, obţinem că f^{-1} este contracţie de constan
deci are un unic punct fix, acesta fiind unicul punct fix şi pentru f.

XII.64. *Fie M mulţimea funcţiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivabile de dou proprietatea că există $\alpha\in\mathbb{R}$ astfel încât $f''=\alpha f+1$. Arătaţi că există o grupuri $\{(G_\alpha,*_\alpha);\alpha\in\mathbb{R}\}$ ce verifică simultan:*

1) $(G_\alpha,*_\alpha)\simeq(\mathbb{R}^2,+)$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$;

2) $\{G_\alpha;\alpha\in\mathbb{R}\}$ *este o partiţie a mulţimii M.*

Temistocle Bî

Soluţie. Pentru $\alpha\in\mathbb{R}$ fixat notăm cu G_α mulţimea soluţiilor ecuaţiei $f''=\alpha f+1$. Ecuaţia caracteristică asociată este $\lambda^2=\alpha$, cu rădăcinile: λ_1 dacă $\alpha>0$, $\lambda_{1,2}=\pm i\sqrt{-\alpha}$, dacă $\alpha<0$ şi $\lambda_{12}=0$ (dublă), dacă λ observăm că o soluţie particulară a acestei ecuaţii este $f_\alpha(x)=-\dfrac{1}{\alpha}$, dac $f_0(x)=\dfrac{x^2}{2}$, dacă $\alpha=0$. Ca urmare, avem:

$$G_\alpha=\left\{ae^{-\sqrt{\alpha}x}+be^{\sqrt{\alpha}x}-1/\alpha;\quad a,b\in\mathbb{R}\right\},\text{ dacă }\alpha>0;$$
$$G_\alpha=\left\{a\cos\sqrt{-\alpha}x+b\sin\sqrt{-\alpha}x-1/\alpha;\quad a,b\in\mathbb{R}\right\},\text{ dacă }\alpha<0$$
$$G_0=\left\{ax+b+\frac{x^2}{2};\quad a,b\in\mathbb{R}\right\},\text{ dacă }\alpha=0.$$

Evident, $M=\bigcup\{G_\alpha;\alpha\in\mathbb{R}\}$. Mulţimile G_α sunt nevide şi $G_{\alpha_1}\cap G_{\alpha_2}$ $\alpha_1\neq\alpha_2$ (se aplică rezultatul: dacă $\sum\limits_{k=1}^{n}P_k(t)e^{\alpha_k t}=0$, $\forall t\in\mathbb{R}$, unde α_1,α $\mathbb{C}$ sunt distincte, atunci polinoamele $P_k(t)$ sunt identic nule pe $\mathbb{R}$, $i=\overline{1,}$ încheie demonstraţia punctului 2).

Pe mulţimea G_α, cu $\alpha\neq0$, definim operaţia $*_\alpha$ prin $(f*_\alpha g)(x)$ $g(x)+\dfrac{1}{\alpha}$, $x\in\mathbb{R}$, iar pe G_0 considerăm $*_0$ dată de $(f*_0 g)(x)=f(x)+$ $x\in\mathbb{R}$. Stabilitatea operaţiilor $*_\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$, şi axiomele de grup se verifică (elementele neutre sunt funcţiile f_α şi f_0 definite mai sus).

În sfârşit, dacă $f_i(x)=a_ie^{-\sqrt{\alpha}x}+b_ie^{\sqrt{\alpha}x}-1/\alpha$, $i=1,2$, avem $(f_1*$ $(a_1+a_2)e^{-\sqrt{\alpha}x}+(b_1+b_2)e^{\sqrt{\alpha}x}-1/\alpha$ şi deducem că $(G_\alpha,*_\alpha)\simeq(\mathbb{R}^2,$ $\alpha>0$. La fel se procedează în cazurile $\alpha<0$ şi $\alpha=0$.

XII.65. *Fie $p_1<p_2<\cdots<p_n$ numere prime, iar $\mathcal{P}$ mulţimea polin grad n cu termenul liber 1 şi ceilalţi termeni distincţi în mulţimea $\left\{\dfrac{1}{p_i}\mid i=\right.$ Să se arate că pentru orice $x\in\mathbb{N}^*\backslash\{1\}$ relativ prim cu toate numerel $q,r\in\mathcal{P}$ astfel încât $0\leq|q(x)-r(x)|<\dfrac{37x^n+42}{42n!}$. Dacă, în plus, x inegalitatea de mai sus este strictă.*

Marius Pachiţariu,

Soluţie. Avem:

$$\max_{k\in\mathcal{P}} k(x) = \frac{1}{p_1}x^n + \frac{1}{p_2}x^{n-1} + \cdots + 1 \leq x^n \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{2p_2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}p_n}\right.$$
$$\leq x^n \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2^2\cdot 5} + \left(\frac{1}{7\cdot 8} + \frac{1}{8\cdot 9} + \ldots\right)\right] + 1 <$$
$$< x^n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{20} + \frac{1}{7}\right) + 1 < \frac{37}{42}x^n + 1.$$

(Am utilizat inegalitatea evidentă $p_n \cdot 2^{n-1} \geq n(n-1)$, precum şi faptul

$$\frac{1}{7\cdot 8} + \frac{1}{8\cdot 9} + \cdots + \frac{1}{m(m+1)} = \frac{1}{7} - \frac{1}{m+1} < \frac{1}{7}).$$

Cum mulţimea $\mathcal{P}$ conţine $n!$ polinoame, putem găsi două q, r distincte p
să aibă loc inegalitatea din enunţ.

Pentru partea a doua, fie $q \neq r$ şi $x \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ relativ prim cu toate n
şi astfel încât $x \geq p_n - 1$. Să presupunem prin absurd că $q(x) = r(x)$, de

$$\frac{1}{p_{i_1}}x^n + \frac{1}{p_{i_2}}x^{n-1} + \cdots + 1 = \frac{1}{p_{j_1}}x^n + \frac{1}{p_{j_2}}x^{n-1} + \cdots + 1,$$

unde $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ şi $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ sunt permutări distincte ale mulţimii {
Atunci $x^{n-1}\left(\frac{1}{p_{i_1}} - \frac{1}{p_{j_1}}\right) + x^{n-2}\left(\frac{1}{p_{i_2}} - \frac{1}{p_{j_2}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{p_{in}} - \frac{1}{p_{j_n}}\right) = 0$ şi,
această relaţie cu $p_1 p_2 \cdots p_n$, obţinem că x divide $\frac{p_1 p_2 \cdots p_n (p_{j_n} - p_{i_n})}{p_{i_n} p_{j_n}}$, d
necesar $p_{i_n} = p_{j_n}$. Analog se demonstrează că $p_{i_k} = p_{j_k}$, $\forall k = \overline{1,n}$, de
astfel ajungem la o contradicţie.

IMPORTANT

- În scopul unei legături rapide cu redacţia revistei, pot fi utilizate urm
adrese e-mail: **tbirsan@math.tuiasi.ro**, **profgpopa@yahoo.co.**
această cale colaboratorii pot purta cu redacţia un dialog privitor l
rialele trimise acesteia, procurarea numerelor revistei etc. Sugerăm
ratorilor care trimit probleme originale pentru publicare să le numer
să-şi reţină o copie xerox a lor pentru a putea purta cu uşurinţă o
prin e-mail asupra acceptării/neacceptării acestora de către redacţia
- La *problemele de tip L* se primesc soluţii de la orice iubitor de mat
elementare (indiferent de *preocupare profesională* sau *vârstă*). Fiecar
soluţiile acestor probleme - ce sunt publicate în revistă după un an
urmată de numele tuturor celor care au rezolvat-o.
- **Adresăm cu insistenţă rugămintea ca materialele trimise r
să nu fie (să nu fi fost) trimise şi altor publicaţii.**
- Rugăm ca materialele tehnoredactate să fie trimise pe adresa reda
soţite de fişierele lor (de preferinţă în LaTeX).

Soluţiile problemelor pentru pregătirea concur
din nr. 2 / 2005

A. Nivel gimnazial

G86. *Fie $n \geq 3$ un număr natural impar, iar $A \subset \mathbb{N}$ o mulţime cu n*
elemente. Să se arate că putem alege n numere din mulţimea A cu prop
suma lor se divide cu n.

Titu Zvonaru, C

Soluţie. Scriem $A = \bigcup\limits_{i=0}^{n-1} A_i$, unde A_i conţine toate elementele lui
restul i la împărţirea prin n. Dacă cel puţin o mulţime A_i este vidă, cum n^2
$(n-1)(n-1)+1$, din principiul cutiei rezultă că există măcar o mulţim
conţine cel puţin n elemente, iar suma acestora se divide evident cu n.
mulţimile A_i, $i = \overline{0, n-1}$, sunt nevide, alegem câte un element din fiecar
Suma acestora, modulo n, este $0 + 1 + \cdots + (n-1) \equiv \dfrac{n(n-1)}{2} \pmod n$
este impar, $n-1$ este par şi rezultă că $\dfrac{n(n-1)}{2} \equiv 0 \pmod n$.

G87. *Arătaţi că există o infinitate de numere naturale n pentru care*
$a_i \in \{-1, 1\}$, $i = \overline{1, n}$ astfel încât $2005 = \sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$. Aflaţi valoarea minim

Gheorghe I

Soluţie. Putem scrie:

$$4010 = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 - \left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a\right.$$

şi cum $4010 = 64^2 - 86$, putem alege $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 64$, $a_1^2 + a_2^2 + \cdots$
Aceste două egalităţi sunt realizate pentru $n = 86$, $a_1 = a_2 = \cdots =$
$a_{76} = a_{77} = \cdots = a_{86} = -1$.

Bineînţeles, există o infinitate de posibilităţi de alegere ale lui n. D
scriind $4010 = 65^2 - 109$, ar trebui ca $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 65$, $a_1^2 + a_2^2 + \cdots +$
deci putem considera $n = 109$, $a_1 = a_2 = \cdots = a_{88} = 1$, $a_{89} = a_{90} = \cdots =$
Se poate continua!

Demonstrăm că valoarea minimă a lui n este 86. Fie p numere egal
numere egale cu -1, $p + q = n$. Atunci

$$4010 = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 - \left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right) = (p-q)^2 - p -$$

$$(2p - n)^2 - n = 4010 \Leftrightarrow 4p^2 - 4np + \left(n^2 - n - 4010\right) = 0.$$

Cum $p \in \mathbb{N}$, trebuie ca discriminantul ecuaţiei de grad II în p de mai sus s
perfect. Avem că $\Delta = 16(n + 4010)$ şi cel mai mic pătrat perfect de ace
se obţine pentru $n = 86$, când $\Delta = 16 \cdot 4096 = 256^2$.

G88. *Spunem că o mulţime $M \subseteq \mathbb{R}_+$ are proprietatea (P) dacă ori*
din M este media geometrică a două elemente distincte ale lui M.

a) Să se arate că există o infinitate de mulţimi cu proprietatea (P).

b) Găsiţi mulţimile cu 2005 elemente având proprietatea (P).

Gabriel Popa şi Paul Georg

Soluţie. $a)$ Pentru orice $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, mulţimea $M = \{x^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$
etatea (P), deoarece $x^n = \sqrt{1 \cdot x^{2n}}$, iar $1 = \sqrt{x^{n_0} \cdot x^{-n_0}}$, cu $n_0 \in \mathbb{Z}$ arbitr

$b)$ Fie M o mulţime finită cu proprietatea (P), iar $a \in M$ cel mai ma
al acesteia; atunci a este media geometrică a elementelor $b, c \in M$, cu $b <$
că $b < a < c$, deci c ar fi un element al lui M strict mai mare decât a! În
nici o mulţime finită nu are proprietatea (P).

G89. *Pentru $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, să se demonstreze inegalitatea*

$$\frac{1}{a^2+ab+b^2} + \frac{1}{a^2+a+1} + \frac{1}{b^2+b+1} \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab}\right).$$

Marius Pachiţariu,

Soluţie (semnalată de **Titu Zvonaru**, Comăneşti)**.** Inegalitatea
$(a-b)^2 \geq 0$ conduce la $a^2 + ab + b^2 \geq 3ab$, deci $\dfrac{1}{a^2+ab+b^2} \leq \dfrac{1}{3ab}$
obţinem că $\dfrac{1}{a^2+a+1} \leq \dfrac{1}{3a}$, $\dfrac{1}{b^2+b+1} \leq \dfrac{1}{3b}$ şi prin sumare obţinem
problemei. Egalitatea se atinge pentru $a = b = 1$.

Din păcate, această rezolvare evidentă nu a fost observată în mome
tării problemelor, fapt care a condus la includerea ei în secţiunea *Proble*
pregătirea concursurilor.

G90. *Fie $n \geq 1$ un număr natural. Să se arate că mulţimea $A = \{n+1,$*
se poate partiţiona în două submulţimi, fiecare cu aceeaşi sumă a elemen
şi numai dacă $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}^*$ sau $n = 4k+1$, $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

Marian Tetiv

Soluţie. Dacă A se poate partiţiona cum cere enunţul, suma element
$(n+1) + (n+2) + \cdots + 2n = \dfrac{n(3n+1)}{2}$ trebuie să fie număr par, deci $n($
Cum n şi $3n+1$ au parităţi diferite, unul dintre ele este multiplu de 4, d
$k \in \mathbb{N}^*$ sau $n = 4k+1$, $k \in \mathbb{N}^*$. În al doilea caz, nu putem avea k
$A = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ şi suma elementelor fiecarei submulţimi din partiţie a
fie 20; submulţimea care-l conţine pe 10 nu poate avea însă suma element

Reciproc, fie întâi $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}$. Atunci $A = \{4k+1, 4k+2, \ldots, 8k\}$
părţită în $2k$ submulţimi cu aceeaşi sumă a elementelor: $\{4k+1, 8k\}$; $\{4k +$
$\ldots$; $\{6k, 6k+1\}$. Reuniunea a k dintre aceste submulţimi constituie
clasele partiţiei, iar cele rămase cealaltă clasă.

Fie acum $n = 4k+1$, $k \geq 2$; atunci $A = \{4k+2, 4k+3, \ldots, 8k$
$A = B \cup C$ partiţia dorită. În B punem, pentru început, numerele $4k +$
$4k+4$, $4k+6$, $4k+8$, iar în C numerele $4k+5$, $4k+7$, $4k+9$, $8k+2$; p
elementele din B şi cele din C au aceeaşi sumă $20k+23$. Numerele răr
$4k+10$ la $8k+1$, le împăţim în $k-2$ grupe de câte 4 numere consecutive
$\{p, p+1, p+2, p+3\}$. Numerele p şi $p+3$ din fiecare grupă le punem în
şi $p+2$ le punem în C, realizând astfel partiţia dorită.

G91. *Găsiţi cel mai mic număr natural k pentru care, oricum am col*
de şah 8×8 cu k culori astfel încât fiecare culoare să fie folosită cel pu
există 6 căsuţe de culori diferite care se află pe aceeaşi linie sau coloană.

Adrian Zahariuc, ele

Soluţie. Răspunsul este 35. Dăm mai întâi un exemplu de colorar
culori care nu are proprietatea dorită: împărţim tabla în 4 table 4×4,
stânga-sus o colorăm în albastru, pe cea din dreapta-jos o colorăm în roşu
căsuţelor, în număr de 32, vor fi colorate fiecare cu câte una dintre cele 3
rămase. În acest fel, pe fiecare linie şi pe fiecare coloană vom avea câ
diferite.

Demonstrăm în continuare că numărul $k = 35$ verifică cerinţele probl
supunem prin absurd că ar exista o colorare cu 35 de culori care nu are p
dorită. Numerotăm culorile de la 1 la 35. Fie l_i, respectiv c_i, numărul de li
pe care se află cel puţin o căsuţă de culoare i. Cum intersecţia a l_i linii cu
are $l_i c_i$ elemente, rezultă că $\sum\limits_{i=1}^{35} l_i c_i \geq 64 \quad (*)$. Din faptul că pe fiecare li
avem cel mult 5 culori diferite, rezultă că $\sum\limits_{i=1}^{35} l_i \leq 40$, $\sum\limits_{i=1}^{35} c_i \leq 40$ şi, desi
$c_i \geq 1$. Fie $x_i = l_i - 1 \geq 0$, $y_i = c_i - 1 \geq 0$ şi atunci $\sum\limits_{i=1}^{35} x_i = \sum\limits_{i=1}^{35} l_i$
$\sum\limits_{i=1}^{35} y_i = \sum\limits_{i=1}^{35} c_i - 35 \leq 5$. Din $(*)$ obţinem:

$$\sum_{i=1}^{35} (x_i y_i + x_i + y_i + 1) \geq 64 \Rightarrow \sum_{i=1}^{35} x_i y_i \geq 19.$$

Putem presupune, din simetrie, că $\max x_i \geq \max y_i$. Cele trei inegalităţi
avem la îndemână nu sunt suficiente pentru a obţine o contradicţie, dar nu
3 cazuri:

i) $x_i = y_i = 5$ şi $x_k, y_k = 0$ pentru $k \neq i$ (pentru un i fixat); atun
culoare care ocupă (nu în întregime!) 6 linii şi 6 coloane, iar restul cul
exact o dată, deci vor rămâne două linii şi două coloane care conţin căsuţ
diferite două câte două, contradicţie cu presupunerea asumată.

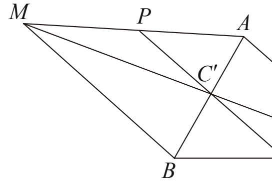
ii) $x_i = 5$, $y_i = 4$ şi $x_k, y_k = 0$ pentru $k \neq i$ (pentru un i fixat); ace
evident mai defavorabil decât primul.

iii) $x_i = 5$, $y_i = 4$, $y_j = 1$, $x_k = 0$ pentru $k \neq i$, $y_k = 0$ pentru $k \neq i, j$
nu putem evita existenţa unei linii sau coloane alcătuită numai din căsuţ
diferite, deoarece $5 + \max\{1, 2\} = 7 < 8$.

Rezultă că presupunerea făcută este falsă şi rămâne adevărată conclu
mei.

G92. *Fie $\triangle ABC$, cu $[AB]$ cea mai scurtă latură. Bisectoarea u
intersectează paralela dusă prin B la AC în M, iar latura AB în C'. P
C' la AC intersectează MA în P şi BC în Q. Arătaţi că înălţimile $\triangle$
laturi ale unui triunghi dacă şi numai dacă $2AB > PQ$.*

Valentina Blendea şi Gheorghe Ble



Soluţie. Cu notaţiile uzuale, $h_a = \dfrac{2S}{a}$, $h_b = \dfrac{2S}{b}$, $h_c = \dfrac{2S}{c}$. Cum $c \leq \min\{a, b\}$, atunci h_c
este cea mai lungă înălţime, prin urmare h_a, h_b,
h_c pot fi laturi ale unui triunghi dacă şi numai

dacă $h_c < h_a + h_b$. Însă

$$h_c < h_a + h_b \Leftrightarrow \frac{1}{c} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Leftrightarrow 2c > \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \Leftrightarrow 2\,AB > PQ.$$

Pentru ultima echivalenţă, am folosit faptul cunoscut că segmentul ce se laturile neparalele ale unui trapez, paralel cu bazele şi care trece prin intersecţie al diagonalelor, are ca lungime media armonică a bazelor.

G93. *Fie $\triangle ABC$ cu $m(\widehat{A}) \geq 90°$, M – mijlocul lui $[BC]$, iar N contact al cercului înscris cu BC. Dacă $\widehat{BAN} \equiv \widehat{MAC}$, să se arate că $\triangle$ isoscel.*

Doru B

Soluţie. Dreptele AN şi AM fiind izogonale, putem utiliza relaţia $\frac{BN}{NC} \cdot \frac{BM}{MC} = \frac{AB^2}{AC^2}$, de unde $\frac{BN}{NC} = \frac{c^2}{b^2}$. Pe de altă parte, $BN = p - b$ şi C deci

$$\frac{p-b}{p-c} = \frac{c^2}{b^2} \Leftrightarrow b^2\left(a+c-b\right) = c^2\left(a+b-c\right) \Leftrightarrow$$

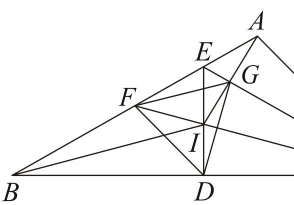
$$a\left(b^2 - c^2\right) + bc\left(b-c\right) - \left(b^3 - c^3\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(b-c)\left[a\left(a+b\right) + bc - \left(b^2 + bc + c^2\right)\right] = 0 \Leftrightarrow (b-c)\left[a\left(b+c\right) - \left(b^2 + \right.\right.$$

Cum $m(\widehat{A}) \geq 90°$, atunci $b^2 + c^2 < a^2$, iar $a^2 < a\left(b+c\right)$, prin urmare pătrată este strict pozitivă. Rămâne că $b - c = 0$, deci $\triangle ABC$ este isosce

G94. *Fie $\triangle ABC$ cu $m(\widehat{A}) = 105°$, $m(\widehat{B}) = 30°$. Se consideră DE m lui $[BC]$, $D \in BC$, $E \in AB$, $[CF$ bisectoarea lui $\widehat{BCE}$, $F \in AB$, $CF \cap DE$, $\{G\} = CE \cap AI$. Să se arate că $\triangle DFG$ este echilateral.*

Gabriel Mîr



Soluţie. Evident că $m(\widehat{BCF}) = m(\widehat{FCE}) = m(\widehat{ECA}) = 15°$. Apoi, $\triangle EBC$ este isoscel cu axa de simetrie ED şi $m(\widehat{B}) = 30°$, deci $m(\widehat{BED}) = m(\widehat{DEC}) = 60°$, de unde $m(\widehat{CEA}) = 60°$. Rezultă că $\triangle AEC \equiv \triangle IEC$ (U.L.U), prin urmare $EA = EI$ şi $AC = IC$. În $\triangle EAI$ isoscel, EG este bisectoare, deci va fi şi mediană: AG

Aplicând teorema bisectoarei în $\triangle EBC$, cum $ED = \frac{1}{2}BE$ ($\triangle DEB$ dr $m(\widehat{B}) = 30°$), obţinem:

$$\frac{EF}{FB} = \frac{EC}{BC} = \frac{2\,ED}{2\,BD} = \frac{ED}{BD}.$$

Reciproca teoremei bisectoarei în $\triangle EDB$ arată că DF este bisectoare, deci $m(\widehat{FDB}) = 45°$. Cum $\widehat{BDF} \equiv \widehat{ACB}$, atunci $FD \parallel AC$. Punctul D es lui $[BC]$, prin urmare DF va fi linie mijlocie în $\triangle BAC$: $DF = \frac{1}{2}A$ $AF = FB$ (3). În plus, $m(\widehat{BFD}) = m(\widehat{A}) = 105°$.Din (1) şi (3) rezu este linie mijlocie în $\triangle ABI$, deci $FG = \frac{1}{2}BI$ şi $m(\widehat{AFG}) = m(\widehat{ABI}) = 15$

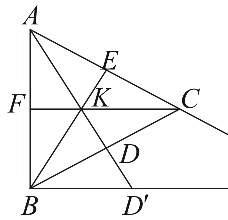
I se află pe mediatoarea lui $[BC]$, deci $BI = IC$ şi am arătat că $IC = A$
că $FG = \frac{1}{2}AC$. Conform (2), urmează că $FG = FD$, adică $\triangle FGD$ este
plus,

$$m(\widehat{DFG}) = 180° - m(\widehat{BFD}) - m(\widehat{AFG}) = 180° - 105° - 15° = 6$$

deci $\triangle FGD$ este echilateral.

G95. *Fie $\triangle ABM$ dreptunghic în B. Fie C pe $[MA]$ astfel încât M* *Să se arate că în $\triangle$ ABC, bisectoarea AD, mediana BE şi înălţimea* *concurente.*

Dan Brâ



Soluţiea 1 (a autorului). Fie $\{K\} = AD \cap CF$; vom arăta că punctele B, K, E sunt coliniare, de unde rezultă concluzia. Conform reciprocei teoremei lui Menelaus în $\triangle ADC$, coliniaritatea punctelor B, K, E revine la $\frac{KA}{KD} = \frac{BC}{BD}$ (1). Fie $\{D'\} = AD \cap BM$; atunci

$$\frac{KA}{KD} = \frac{KA}{KD'} \cdot \frac{KD'}{KD} = \frac{CA}{CM}\left(1 + \frac{DD'}{KD}\right) =$$

$$= \frac{AC}{AB}\left(1 + \frac{BD'}{KC}\right) = \frac{AC}{AB}\left(1 + \frac{BD'}{D'M} \cdot \frac{D'M}{KC}\right) =$$

$$= \frac{AC}{AB}\left(1 + \frac{AB}{AM} \cdot \frac{AM}{AC}\right) = \frac{AC}{AB}\left(1 + \frac{AB}{AC}\right) = \frac{AM}{AB}.$$

Pe de altă parte, $\frac{BC}{BD} = 1 + \frac{DC}{BD} = 1 + \frac{AC}{AB} = \frac{AM}{AB}$, ceea ce încheie j
egalităţii (1).

Soluţia 2 (dată de **Marius Tiba**, elev, Iaşi**).** Notăm $\{T\} = EB \cap C$
$EB \cap AD$. Cum $CF \parallel BM$, cu teorema lui Thales în $\triangle EBD$ obţinem că $\frac{E}{T}$
Din teorema bisectoarei în $\triangle AEB$ avem că $\frac{EU}{UB} = \frac{AE}{AB}$. Însă $EC = AE$,
şi atunci $T = U$, de unde concluzia problemei.

A. Nivel liceal

L86. *Cercurile de centre I_a, I_b, I_c exînscrise $\triangle ABC$ sunt tangen* *$[BC]$, $[AC]$ respectiv $[AB]$ în D, E, F. Bisectoarea interioară a unghi* *intersectează latura BC în M; fie $\{P\} = FE \cap AM$, iar $Q \in FD$, $S \in$* *definite. Arătaţi că dreptele DP, EQ şi FS sunt concurente.*

Neculai Roman, Mir

Soluţie. Cu notaţiile uzuale, avem: $BD = AE = p - c$, $CD = A$
$BF = CE = p - a$. Teorema bisectoarei şi teorema sinusurilor în $\triangle$
$\frac{MB}{MC} = \frac{I_AB}{I_aC} = \frac{\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}}$. Aplicăm acum relaţia (R_1) din nota *Rapoarte d*

de o ceviană şi o secantă într-un triunghi din *RecMat* 1/2005; obţinem:

$$\frac{AF}{AB}\cdot\frac{MB}{MC}\cdot\frac{AC}{AE}\cdot\frac{PE}{PF}=1\Leftrightarrow\frac{PE}{PF}=\frac{AB}{AF}\cdot\frac{MC}{MB}\cdot\frac{AE}{AC}\Leftrightarrow$$

$$\frac{PE}{PF}=\frac{c}{p-b}\cdot\frac{\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}\cdot\frac{p-c}{b}\Leftrightarrow\frac{PE}{PF}=\frac{c(p-c)}{b(p-b)}\cdot\frac{\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}}\cdot\frac{\cos^2\frac{B}{2}}{\cos^2\frac{C}{2}}\Leftrightarrow\frac{PE}{PF}$$

Analog, $\dfrac{QF}{QD}=\dfrac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$, $\dfrac{SD}{SE}=\dfrac{\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$, prin urmare $\dfrac{PE}{PF}\cdot\dfrac{QF}{QD}\cdot\dfrac{SD}{SE}=1$ ş
rezultă din reciproca teoremei lui Ceva.

Notă. **Vlad Emanuel**, elev, Sibiu, evaluează rapoartele necesare p
carea reciprocei teoremei lui Ceva prin considerente de arii.

L87. *Să se arate că un tetraedru cu muchiile în progresie geometrică
perechile de muchii opuse sunt perpendiculare, este regulat.*

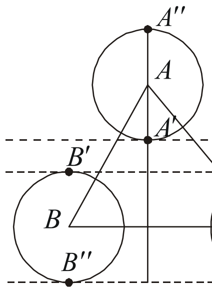
Marius Olteanu, Rm

Notă. Ulterior publicării în revista noastră, problema a apărut cu nr.
G.M. 6/2005. Soluţia ei poate fi găsită în G.M. 12/2005, pp. 640.

Soluţie corectă s-a primit de la **Vlad Emanuel**, elev, Sibiu.

L88. *Fie $\triangle ABC$ de arie S, perimetru $2p$, având razele cercurilor circ
înscris R, respectiv r. Notăm $k=\dfrac{8+3\sqrt{3}}{12}p+\dfrac{3}{4}r$. Fie $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ discur
A, B, C şi aceeaşi rază $\delta<r$. Pentru punctele $D\in\mathcal{A}$, $E\in\mathcal{B}$, $F\in\mathcal{C}$,
$\triangle DEF$. Să se arate că, dacă $\varepsilon=k\delta$, atunci $|T-S|<\varepsilon$.*

Dan Brâ



Soluţie. Înălţimea din A taie cercul frontieră a lui $\mathcal{A}$ în A', A'', iar paralelele la ea prin B, C taie celelalte două cercuri frontieră $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ în B', B'', C', C'', notate aşa încât $A'B''B'A''$ şi $A'C''C'A''$ să fie paralelograme. Înălţimea din D a $\triangle DEF$, notată h_D, satisface $h_A-2\delta\le h_D\le h_A+2\delta$. Avem şi că $a-2\delta\le EF\le a+2\delta$. Înmulţind aceste şiruri de inegalităţi între numere pozitive şi notând $L_a=a+h_A$, obţinem:

$$(h_A-2\delta)(a-2\delta)<2T<(h_A+2\delta)(a+2\delta)\Leftrightarrow$$
$$S-\delta L_a<T<S+\delta L_a\Leftrightarrow|S-T|<\delta L_a.$$

Rămâne de demonstrat că $L_a\le K$; de fapt, ar trebui arătat că u
numerele L_a, L_b sau L_c (L_b, L_c construindu-se analog cu L_a) poate fi
Avem:

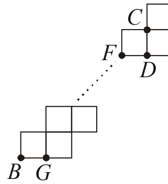
$$L=L_a+L_b+L_c=a+b+c+h_A+h_B+h_C=2p++2S\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right.$$

$$=2p+\frac{2S}{abc}(ab+bc+ac)=2p+\frac{p^2+r^2+4rR}{2R}=\left(2+\frac{p}{2R}\right)\cdot p+\Big(2$$

Vom fi asiguraţi că putem face alegerea anunţată dacă arătăm că L
galitate la care se ajunge uşor folosind cunoscutele $2p\le3\sqrt{3}R$ ($\Leftrightarrow\dfrac{p}{2R}$

$R \geq 2r$ ($\Leftrightarrow \dfrac{r}{2R} \leq \dfrac{1}{4}$).

L89. *Câte drumuri de la A la B există, dacă din orice punct de pe traseu ne putem deplasa doar spre stânga sau în jos?*



Irina Mustaţă, elevă, Iaşi

Soluţie. Notăm cu a_n numărul drumurilor de la A la B şi încercăm să găsim o relaţie de recurenţă pentru a_n. Notăm cu b_{n-1} numărul drumurilor de la E la B; numărul drumurilor de la C, F, respectiv D, până la B va fi a_{n-1}, a_{n-2}
b_{n-2}. De la A la C putem ajunge în două moduri, iar de la A la D put
într-un singur mod fără a trece prin C, prin urmare

$$a_n = 2a_{n-1} + b_{n-2}.$$

Cum din E putem pleca fie spre C, fie în jos, apoi stânga, spre D, atunci

$$b_{n-1} = 2a_{n-1} + b_{n-2}.$$

Din (1) şi (2) obţinem

$$a_n = 2_{n-1} + b_{n-2} = 2a_{n-1} + a_{n-2} + b_{n-3} = \ldots = 2a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots +$$

(Acel 1 din final reprezintă singurul drum posibil de la G la B.) Trecem
şi scădem egalităţile obţinute; găsim:

$$a_{n+1} - a_n = 2a_n - a_{n-1} \Leftrightarrow a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1}.$$

Se verifică uşor că $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, obţinând astfel o recurenţă liniară o
ordin II pentru a_n. Mai mult, se demonstrează imediat prin inducţie că a
unde F_k este al k-lea termen din şirul lui Fibonacci.

Notă. Soluţie corectă s-a primit de la **Vlad Emanuel**, elev, Sibiu.

L90. *Fie $n \geq 1$ un număr natural. Să se arate că mulţimea $A = \{n+1, n$
se poate partiţiona în trei submulţimi, fiecare cu aceeaşi sumă a elementel
numai dacă n este multiplu de 3, $n \geq 6$.

Marian Tetiv

Soluţie. Pentru ca A să poată fi partiţionată în trei clase având ac
a elementelor, trebuie ca suma elementelor sale, care este $\dfrac{n(3n+1)}{2}$, să fi
de 3, ceea ce conduce la $3 \mid n$. Pentru $n = 3$, evident că $A = \{4, 5, 6\}$ n
partiţiona cum cere enunţul, deci $n \geq 6$.

Fie acum $n = 3k$, $k \geq 2$; dacă k este par, $k = 2p$, $p \geq 1$, atunci A
$6p + 2, \ldots, 12p\}$. Scriem

$$A = \{6p+1, 12p\} \cup \{6p+2, 12p-1\} \cup \cdots \cup \{9p, 9p+1\},$$

numărul de submulţimi fiind $3p$, fiecare cu aceeaşi sumă a elementelo
partiţiei se obţin reunind p dintre aceste submulţimi (prima clasă), apoi
urmă cele p care au rămas.

Pentru k impar, $k = 2m + 1$, $m \geq 1$, avem de partiţionat mulţimea A
$6m + 5, \ldots, 12m + 6\}$. Remarcăm că suma tuturor elementelor lui A este
$\cdot(9m + 5)$, iar suma elemntelor lui A care dau restul 2 la împărţirea cu 3

$$(6m+5) + (6m+8) + \cdots + (12m+5) = (2m+1)(9m+5),$$

prin urmare o clasă a partiţiei poate fi construită din numerele care da
împărţirea cu 3; fie P această mulţime. Mai notăm cu M mulţimea elem
A ce dau restul 1 la împărţirea cu 3 şi cu N mulţimea elementelor lui
multipli de 3. Suma elementelor lui M este $(2m+1)(9m+5)-(2m+1)$
elementelor lui N este $(2m+1)(9m+5)+(2m+1)$; vom încerca să schimbă
elemente din N cu elemente din M astfel încât să egalizăm sumele. Întâi
schimbarea $12m+1 \leftrightarrow 12m+6$, care creşte suma elementelor lui M cu
efectuăm $m-2$ schimbări, fiecare mărind suma elementelor lui M cu 2 (şi
corespunzător suma elementelor lui N):

$$12m-2 \leftrightarrow 12m;\ 12m-5 \leftrightarrow 12m-3;\ \ldots\ ;\ 9m+7 \leftrightarrow 9m+9$$

Cu aceasta, soluţia problemei este încheiată.

Notă. O frumoasă soluţie prin inducţie matematică s-a primit d
Emanuel, elev, Sibiu.

L91. *Punctele planului se colorează în* 3 *culori astfel încât fiecare
fie folosită cel puţin o dată. Spunem despre un triunghi că este* aproape
dacă măsurile unghiurilor sale sunt cel mult $60,001°$. *Arătaţi că există
aproape echilateral cu vârfurile de culori diferite.*

Adrian Zahariuc, ele

Soluţie. Să numim albastru, roşu şi verde cele 3 culori. Vom scrie M
sau $M(v)$ după cum este punctul M albastru, roşu sau verde. Fie $A(a)$, B
şi $\mathcal{D}_1$ un disc de centru O_1 şi rază $r>0$ astfel încât $A,B,C \in \mathcal{D}_1$. Fie $d >$
Fie $\mathcal{D}$ discul de centru O_1 şi rază $d+r$.

Să luăm mai întâi cazul când mulţimea de puncte $\bar{\mathcal{D}}$ nu este monocroma
am notat cu $\bar{T}$ complementara mulţimii T (faţă de plan). Fie $P,Q \in \bar{\mathcal{D}}$
diferite. Este clar că există o înşiruire finită de puncte $P=M_0,M_1,\ldots$
astfel încât $[M_iM_{i+1}] \subset \bar{\mathcal{D}}$ şi $|M_iM_{i+1}| \le 2r$, $i=\overline{0,n-1}$. Cum M_0 şi M
diferite, rezultă că există $i \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}$ astfel încât M_i şi M_{i+1}
diferite. În concluzie, există $T,S \in \bar{\mathcal{D}}$ cu culori diferite, să zicem $T(a)$,
încât $[TS] \subset \bar{\mathcal{D}}$ şi $|TS| \le 2r$. Fie $\mathcal{D}_2$ discul de rază r şi centru O_2, un
mijlocul lui $[TS]$. Este clar că $T,S \in \mathcal{D}_2$ şi că $|O_1O_2| \ge d$. Fie un punc
încât triunghiul $O_1O_2O_3$ să fie echilateral. Să demonstrăm acum următoa

Lemă. *Fie O_1, O_2 şi O_3 vârfurile unui triunghi echilateral de latură $l \ge$
şi $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ şi $\mathcal{D}_3$, 3 discuri de rază r şi centre O_1, O_2, respectiv O_3. Dac
$Y \in \mathcal{D}_2$ şi $Z \in \mathcal{D}_3$, atunci măsurile unghiurilor $\triangle XYZ$ sunt cel mult 60,*

Demonstraţie. Avem $XY \le XO_1+O_1O_2+O_2Y \le l+2r$ şi O_2O_3
$YZ+ZO_3 \le YZ+2r$, sau $YZ \ge l-2r$. Atunci

$$\frac{XY}{YZ} \le \frac{l+2r}{l-2r} \le \frac{1000002}{999998} < 1,00001 \Rightarrow \frac{\sin Z}{\sin X} < 1,00001.$$

Relaţiile analoage se demonstrează într-o manieră asemănătoare etc.

Să revenim la problemă. Fie $\mathcal{D}_3$ discul de centru O_3 şi rază r. Fie
oarecare. Dacă W este albastru, conform lemei, triunghiul CSW este apr
lateral. Dacă W este roşu, triunghiul CTW este aproape echilateral. În fi
este verde, triunghiul ASW este aproape echilateral şi demonstraţia pen
caz se încheie.

Să luăm acum cazul când mulţimea de puncte $\bar{\mathcal{D}}$ este monocromatică, s
toate punctele ei sunt albastre. Fie $L = \{|RV| : R(r), V(v) \in \mathbb{R}^2\}$. Din pre
că toate punctele din exteriorul discului $\bar{\mathcal{D}}$ sunt albastre, rezultă că mulţi
mărginită. Atunci există $l \in L$ astfel încât $1,000001l > l'$ pentru orice l
punctele $R_1(r)$, $V_1(v)$ astfel încât $|R_1V_1| = l$. Fie punctul Q astfel înc
$QV_1 = 1,000001l$. Dacă Q este roşu, $OV_1 = 1,000001l$ contrazice aleg
Analog, Q verde ne conduce la o contradicţie. Rezultă că Q este albastru.
imediat că triunghiul QR_1V_1 este aproape echilateral şi problema este rez

L92. *Dacă $a_i \in (1,\infty)$, $\forall i = \overline{1,n}$, $n \geq 3$, iar $m,p \in N$ cu $m > p$
demonstreze inegalitatea*

$$\log_{a_1}\frac{a_2^m+\cdots+a_n^m}{a_2^{m-p}+\cdots+a_n^{m-p}}+\log_{a_2}\frac{a_1^m+a_3^m\cdots+a_n^m}{a_1^{m-p}+a_3^{m-p}\cdots+a_n^{m-p}}+\cdots$$
$$+\log_{a_n}\frac{a_1^m+\cdots+a_{n-1}^m}{a_1^{m-p}+\cdots+a_{n-1}^{m-p}}\geq np.$$

Gheorghe Molea, Curtea

Soluţie. Considerăm o ordonare a numerelor $a_i \in (1,\infty)$; putem pres
a restrânge generalitatea că $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$. Atunci $a_1^p \geq a_2^p \geq \cdot$
$a_1^{m-p} \geq a_2^{m-p} \geq \cdots \geq a_n^{m-p}$, $\forall m > p \geq 1$. Aplicăm inegalitatea lui
inegalitatea mediilor:

$$\frac{a_2^m+a_3^m+\cdots+a_n^m}{n-1}=\frac{a_2^{m-p}a_2^p+a_3^{m-p}a_3^p+\cdots+a_n^{m-p}a_n^p}{n-1}\geq$$
$$\geq\frac{a_2^{m-p}+a_3^{m-p}+\cdots+a_n^{m-p}}{n-1}\cdot\frac{a_2^p+a_3^p+\cdots+a_n^p}{n-1}\geq$$
$$\geq\frac{a_2^{m-p}+a_3^{m-p}+\cdots+a_n^{m-p}}{n-1}\cdot\sqrt[n-1]{a_2^pa_3^p\cdots a_n^p}\Rightarrow$$
$$\frac{a_2^m+a_3^m+\cdots+a_n^m}{a_2^{n-p}+a_3^{m-p}+\cdots+a_n^{m-p}}\geq\sqrt[n-1]{(a_2a_3\cdots a_n)^p}.$$

Dacă notăm cu S membrul stâng al inegalităţii din enunţ, folosind această
şi analoagele obţinem:

$$S\geq\frac{p}{n-1}\left[\log_{a_1}(a_2a_3\cdots a_n)+\log_{a_2}(a_1a_3\cdots a_n)+\log_{a_n}(a_1a_2\cdots a_{n-}\right.$$
$$S\geq\frac{p}{n-1}\sum_{i\neq j}\left(\log_{a_i}a_j+\log_{a_j}a_i\right).$$

Cum $\log_{a_i}a_j > 0$, atunci $\log_{a_i}a_j + \log_{a_j}a_i \geq 2$. Numărul grupelor
$(\log_{a_i}a_j + \log_{a_j}a_i)$ este $\dfrac{n(n-1)}{2}$ şi concluzia problemei urmează imediat

Notă. Pentru $n = 3$, $m = 4$, $p = 3$, obţinem problema 22814 din G.M
Pentru $n = 3$, $m = 2$, $p = 1$ obţinem problema C:1605 din G.M. 11/1994.

Principial aceeaşi soluţie a dat **Vlad Emanuel**, elev, Sibiu.

L93. *Există vreun polinom $f(X,Y)$ în două nedeterminate astfel înc*

$$\{f(m,n) \mid m,n\in\mathbb{Z}\}\cap\mathbb{N}^*=\left\{x_k^{2004} \mid k\geq 1\right\},$$

unde $x_n = \dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n}{2}$ *?*

Gabriel Dospines

Soluţie. Răspunsul este afirmativ! De exemplu, putem considera $X^{2004}(2-(X^2-2Y^2)^2)$ şi atunci, pentru $m,n \in \mathbb{Z}$,

$$f(m,n) > 0 \Leftrightarrow 2 > (m^2-2n^2)^2 \Leftrightarrow |m^2-2n^2| = 1.$$

Obţinem astfel două ecuaţii Pell; rezolvându-le, obţinem că, de fapt,

$$\{m^{2004} \mid \text{există } n \text{ a.î. } |m^2-2n^2| = 1\} = \{x_k^{2004} \mid k \geq 1\},$$

ceea ce arată că $\{f(m,n) \mid m,n \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{N}^* = \{x_k^{2004} \mid k \geq 1\}$.

L94. *Fie* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *o matrice cu coeficienţi întregi, inversabilă şi mulţimea* $\left\{A^k \mid k \in \mathbb{N}\right\}$ *este finită. Să se demonstreze că această mulţime* 3^{n^2} *elemente. Rămâne rezultatul adevărat dacă suprimăm condiţia ca matricei să fie întregi?*

Gabriel Dospines

Soluţie. Din ipoteză rezultă că există $p \geq 1$ astfel încât $A^p = I_n$. Să mai mic cu această proprietate şi să observăm că dacă $p \leq 3^{n^2}$ atunci ar prima parte a problemei. Să presupunem deci contrariul şi să considerăm din mulţimea $H = \{I, A, \ldots, A^{p-1}\}$. Ele sunt în mod evident diferite o şi, mai mult, fiecare element al lui H are proprietatea că $X^p = I_n$. Să o din faptul că H are cel puţin $3^{n^2}+1$ elemente, există două elemente în diferenţă este o matrice cu toate elementele multipli de 3 (principiul lu observând că există 3^{n^2} matrice cu elemente 0, 1 sau 2). Deci există $B \in$ $1 \leq i < j \leq p-1$ astfel încât $A^j - A^i = 3B$. Avem atunci $A^{j-1} - I_n =$ Notând $s = j-i$, $X = BA^{p-1}$ avem $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ şi $(I_n+3X)^p = I_n$. Fie valorile proprii ale lui X. Avem $(1+3\lambda_i)^p = 1$ de unde $|\lambda_i| \leq \dfrac{2}{3}$; atunci $\left|\sum\limits_{i=1}^n \lambda_i^m\right| \leq n\left(\dfrac{2}{3}\right)^m < 1$ de la un rang m_0. Ţinând cont că $\operatorname{tr} X^m$ este într că de la acel rang el este 0 şi deci $\sum\limits_{i=1}^n \lambda_i^m = 0$ de la acel rang. Din fo Newton rezultă imediat că $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$. Pe de altă parte, din $(I_n +$ obţinem $X\left(3pI_n + \binom{p}{2}3^2X + \cdots + 3^pX^{p-1}\right) = O_n$. Din faptul că $\lambda_i = 0$ $\det\left(3pI_n + \binom{p}{2}3^2X + \cdots + 3^pX^{p-1}\right) = (3p)^n \neq 0$, deci matricea $3pI_n +$ $\cdots + 3^pX^{p-1}$ este inversabilă şi cum $X\left(3pI_n + \binom{p}{2}3^2X + \cdots + 3^pX^{p-1}\right) =$ în mod necesar $X = O_n$, adică $A^{j-1} = I_n$, contradicţie cu minimalitatea justificat astfel prima parte a problemei.

Pentru a doua parte, mai mult o glumă, raspunsul este evident nu. Es să luăm o matrice diagonală ce are ca elemente pe diagonală o rădăcină p ordinul $3^{n^2}+2$ a unităţii.

L95. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *periodică, mărginită şi astfel încât există* $x_0 \in$ *care* $l_s(x_0)$, $l_d(x_0)$ *există, sunt finite şi distincte. Determinaţi* $a \in \mathbb{R}$ *pen există* $\lim\limits_{x\to\infty} \int\limits_0^x (f(t)+a)\,dt$.

Paul Georgescu şi Gabriel I

Soluţie. Fie $T \in \mathbb{R}_+^*$ o perioadă a lui f şi notăm $F(x) = \int\limits_0^x (f(t)+a)d$

$$F\left(x+(n+1)T\right) - F\left(x+nT\right) = \int_{x+nT}^{x+(n+1)T} \left(f\left(t\right)+a\right)dt = \int_0^T f\left(t\right)d$$

$$F\left(x+nT\right) = F\left(x\right) + n\left(\int_0^T f\left(t\right)dt + aT\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0$$

Cum f este mărginită, rezultă că F este mărginită pe $[0,T]$, iar dacă $\int\limits_0^T f(t$

0, rezultă imediat că $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = (+\infty)\,\mathrm{sgn}\left(\int\limits_0^T f\left(x\right)dt + aT\right)$.

Fie acum $a = -\dfrac{1}{T}\int\limits_0^T f\left(t\right)dt$; atunci

$$F(x+T) = \int_0^{x+T} \left(f\left(t\right)+a\right)dt = F\left(x\right), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

deci F este periodică de perioaă T. Presupunem prin absurd că F este
Atunci $F(x_1) = F(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, deci $\int\limits_{x_1}^{x_2} \left(f\left(t\right)+a\right)dt = 0$, $\forall x_1, x_2 \in$
$\varepsilon > 0$ fixat, putem găsi $\delta > 0$ astfel ca

$$\left(l_s - \varepsilon + a\right)\left(x_2 - x_1\right) \leq \int_{x_1}^{x_2} \left(f\left(t\right)+a\right)dt \leq \left(l_s + \varepsilon + a\right)\left(x_2 - x_1\right.$$

pentru $x_0 - \delta \leq x_1 < x_2 < x_0$, deci $l_s - \varepsilon + a \leq 0 \leq l_s + \varepsilon + a$. Cum ε er
obţinem că $l_s(x_0) + a = 0$. Analog, $l_d(x_0) + a = 0$, deci $l_s(x_0) = l_d($
contradicţie cu ipoteza. Rămâne că F este periodică şi neconstantă şi
limită la $+\infty$ în cazul în care $\int\limits_0^T f\left(t\right)dt + aT = 0$.

Recreaţii ... matematice

Rezolvarea aritmogrifului de la pag. 129.

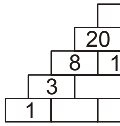
ARITMOGRIF

	S	V																	N
	C	I	R															K	
	H	E	I	F		P									H		A	L	
	U	T	C	E	H	F	S	M	W			G	S	F	A	I	R	E	C
A	R	E	C	R	E	A	T	I	I	*	M	A	T	E	M	A	T	I	C
			I	R	S	F	O	R	L			U	U	I	E	C	I	N	
				O	S	F	L	O	E			S	R	G	L	O	N		
					E		Z	N	S			S	M	L		B			

Probleme propuse[1]

Clasele primare

P.114. În piramida alăturată unele numere s-au şters de-a lungul timpului. Putem să le punem la loc?



(*Clasa I*) **Ionela Bărăgan, elevă, Iaşi**

P.115. Dacă din prima ladă iau 2 mere şi le pun în lada a doua, din a
iau 3 mere şi le pun în lada a treia, iar din lada a treia iau 4 mere şi le pu
ladă, atunci în fiecare ladă voi avea câte 34 mere. Câte mere au fost în fie
(*Clasa I*) **Mariana Nastasia, e**

P.116. Luni, mama pune într-un coş câteva mere. Joi, ea găseşte în c
de mere. Câte mere a pus mama în coş, ştiind că, în fiecare zi din acea s
Mihai, cel mai mare dintre fraţi, împarte fraţilor mai mici cu un măr mai
ziua precedentă şi că joi el împarte 5 mere? Câte mere mai rămân în co
după împărţirea merelor?
(*Clasa II-a*) **Inst. Maria I**

P.117. În exerciţiul 1□1□1□1□1□1□1 = fiecare căsuţă poate fi înlocu
sau " − ". Cât poate fi rezultatul acestui exerciţiu?
(*Clasa II-a*) **Diana Tănăsoaie, e**

P.118. Calculaţi $a + b + c + d$, ştiind că $a \times b = 5$ şi $c \times d = 15$. Gă
posibilităţile.
(*Clasa III-a*) **Înv. Rica Bucăt**

P.119. Produsul a 10 numere naturale este 40. Aflaţi cea mai mică
mare valoare a sumei celor 10 numere.
(*Clasa III-a*) **Înv. Mirela Buburuzanu, Tomo**

P.120. Se consideră numerele 1, 2, 3, 4, 5, ... , 49. Care este cel
număr de numere pe care putem să alegem dintre acestea astfel încât sun
trei dintre ele să se împartă exact la 9.
(*Clasa III-a*) **Înv. Felicia-Petronela Leanu, Cepler**

P.121. Ceasul lui Andrei o ia înainte cu 20 secunde pe oră. El a potr
luni la ora 8 şi a citit din nou ceasul lunea următoare la aceeaşi oră. Ş
această durată ceasul nu a funcţionat permanent, iar la ultima citire ară
50 min, să se afle cât nu a funcţionat ceasul.
(*Clasa IV-a*) **Paula Borşanu, e**

P.122. La Concursul de matematică "F.T.Câmpan", etapa judeţeană,
pat 100 elevi de clasa a IV-a, care au avut de rezolvat 3 probleme. Dacă
rezolvat bine prima problemă, 69 a doua problemă şi 64 a treia problemă,
că măcar 3 elevi au rezolvat corect toate cele trei probleme.
(*Clasa IV-a*) **Anca Cornea, e**

P.123. Într-o cutie sunt 34 bile, din care unele cântăresc cu 1 g mai n
fiecare bilă cântăreşte un număr natural de grame, iar masa tuturor bilelor

[1] Se primesc soluţii până la data de 1 iunie 2007.

să se afle câte bile sunt mai grele.
(*Clasa IV-a*) **Petru As**

Clasa a V-a

V.71. Comparaţi numerele 3^{300003} şi 2^{450004}.

Lucian Tuţescu

V.72. Fie mulţimile A, B astfel încât $A \subset B$, $|\mathcal{P}(A)| \geq 60$, $|\mathcal{P}(B)| \leq$ determine $|A|$ şi $|B|$. (Prin $|X|$ am notat cardinalul mulţimii X.)

Petru As

V.73. Să se scrie numărul 2006^{2005} ca o sumă de şase pătrate perfect

Ionel Nech

V.74. Se consideră şirul de numere naturale 1, 1, 2, 5, 12, 27, 58, ... suma primilor 100 de termeni ai şirului.

Marius Damia

V.75. Fie $x, k \in \mathbb{N}$, $x \geq 2$, $k < x$. Să se arate că

$$(x-1)\,\overline{12\ldots k}_{(x)} + k + 1 = \underbrace{\overline{11\ldots 1}}_{k+1 \text{ cifre}}{}_{(x)}.$$

Doru B

Clasa a VI-a

VI.71. Fie $x, y, z \in \mathbb{N}$ astfel încât $100x - 2006y^2 + 15z = 0$. Să s $y(x+z) \,\vdots\, 85$.

Dan Nedeianu, Dr.-Tr

VI.72. Fie $p \in \mathbb{N}^*$ un număr prim. Să se determine $x, y \in \mathbb{N}^*$ a $\dfrac{p}{x^2} + \dfrac{y}{x} \in \mathbb{N}^*$.

D. M. Bătineţu-Giurgiu, I

VI.73. Fie $A_n = 14 + 1414 + 141414 + \cdots + \underbrace{\overline{1414\ldots14}}_{2n \text{ cifre}}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Să se mulţimea $M = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \mid \dfrac{A_n - 7n^2 - 7n}{9} \in \mathbb{N} \right\}$.

Valeriu Braşovean

VI.74. Considerăm două axe perpendiculare Ox şi Oy, precum şi cel sectoare ale unghiurilor drepte care se formează. Fie A oarecare, iar B, C sale faţă de prima bisectoare, respectiv faţă de Ox. Rotim segmentul $[O$ lui O cu $90°$ în sensul acelor de ceasornic şi notăm cu D extremitatea s rotit. Să se arate că:

a) B, O, D sunt coliniare şi O este mijlocul lui $[BD]$;

b) D este simetricul lui A faţă de a doua bisectoare.

Adrian Cordun

VI.75. Fie $ABCD$ un patrulater convex, O intersecţia diagonalelor, lui $[AB]$, iar N mijlocul lui $[OD]$. Să se arate că $2P_{BCNM} < P_{BDC} + P_{A}$

Bogdan Posa şi Marius Drăgoi, ele

Clasa a VII-a

VII.71. Fie $\triangle ABC$, $AB < AC$ şi $D \in (AC)$. Fie AE bisectoarea
$E \in (BD)$, F mijlocul lui $[AD]$, $\{O\} = AE \cap BF$, $\{G\} = DO \cap AB$. Să
$GD \parallel BC \Leftrightarrow AB = CD$.

Carmen Daniela Tama

VII.72. Fie $ABCD$ paralelogram, $E \in (CD)$, $\{M\} = AE \cap BD$, $\{N$
AC, $\{O\} = AC \cap BD$. Să se arate că $A_{MEN} = 2A_{MON}$.

Mirela M

VII.73. Fie $a < b \leq c$ razele a trei cercuri tangente între ele şi tan
aceeaşi dreaptă în trei puncte distincte. Să se arate că $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}$.

Dan Radu,

VII.74. Fie M mulţimea multiplilor lui 36 în a căror scriere în baza
alte cifre decât 4, 6 sau 9. Câte numere cel mult egale cu 100 000 conţine

Gabriel

VII.75. Fie $m \geq 3$ un număr natural impar şi $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{Z}$ astf

$$|a_1 - a_2| = |a_2 - a_3| = \cdots = |a_{m-1} - a_m| = |a_m - a_1|.$$

Demonstraţi că $a_1 + a_2 + \cdots + a_m$ se divide cu m.

Maria Miheţ, T

Clasa a VIII-a

VIII.71. Pe planul $\triangle ABC$ se ridică perpendiculara AM. Fie P proi
pe planul (MBC), iar E, F proiecţiile punctului P pe MB, respectiv
arate că $\widehat{MEF} \equiv \widehat{MCB}$.

Otilia Nemeş, Oc

VIII.72. Fie a, b, c numere reale distincte. Să se afle partea întreagă a
$A = \frac{a^2 + bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2 + ca}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2 + ab}{(c-a)(c-b)}$.

Mihail Bencz

VIII.73. Să se demonstreze că $a \in \mathbb{N}$ este ipotenuză a unui triunghi d
cu laturile exprimate prin numere naturale dacă şi numai dacă există n
încât $a^2 - n$ şi $a^2 + n$ sunt pătrate perfecte.

Cătălin Cali

VIII.74. Fie $\alpha \in (0, 1]$; să se arate că $\left(\alpha + \left|\frac{x-y}{1-xy}\right|\right) : \left(\alpha - \left|\frac{x-y}{1-xy}\right.\right.$
fiecare din situaţiile:

a) $x, y \in [0, \alpha)$; *b*) $-\alpha < x \leq 0 \leq y < \frac{x+\alpha}{1+x\alpha} \leq \alpha$.

Gheorghe Cost

VIII.75. Determinaţi valorile lui $n \in \mathbb{N}$ pentru care fracţia $\frac{2^{n+1} +}{3 \cdot 2^n +}$
ductibilă.

Gheorghe I

Clasa a IX-a

IX.71. Fie $a < b$ numere reale; să se determine $x, y, z \in \mathbb{R}$ pentru care

$= 2yz + a$, iar $\sqrt{x-a} + \sqrt{b-x} = y$.

Andrei Nedelcu şi Lucian Lădu

IX.72. Fie $x, y, z \in [1, +\infty)$ aşa încât $\frac{x}{[x]} = \frac{y}{[y]} = \frac{z}{[z]}$. Să se arate că

$$\sqrt{[x]^2 + [y]^2 + [z]^2} + \sqrt{\{x\}^2 + \{y\}^2 + \{z\}^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Ce egalitate se obţine pentru $x, y, z \in (-\infty, -1]$?

Dan Pl

IX.73. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (0, \infty)$ cu $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$. Pentru orice m arate că are loc inegalitatea

$$a_1^m + a_2^m + \cdots + a_n^m \geq a_1^{m-1} + a_2^{m-1} + \cdots + a_n^{m-1}.$$

Marius Tiba,

IX.74. Fie a, b, c lungimile laturilor $\triangle ABC$ şi $m, n \in (0, +\infty)$. C punctele A', B', C' astfel încât $C \in (AA')$, $A \in (BB')$, $B \in (CC')$ şi CA' $AB' = mb + n$, $BC' = mc + n$. Să se arate că $\triangle ABC$ şi $\triangle A'B'C'$ au ace de greutate dacă şi numai dacă $\triangle ABC$ este echilateral.

Dumitru Mihalach

IX.75. Fie $ABCD$ patrulater inscriptibil, $\{O\} = AC \cap BD$, $m(\widehat{AC}$ şi punctele $M \in (AB)$, $N \in (CD)$. Notăm $k = \frac{MA}{MB}$, $r = \frac{NC}{ND}$, $p =$ $p \in \left\{2k, \frac{2}{r}, \frac{1}{2r}\right\}$, să se arate că $m(\widehat{MON}) \neq 90°$.

Mihai Ha

Clasa a X-a

X.71. Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi. Să se arate că

$$\frac{\sqrt{a} + 2\sqrt[4]{bc}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} + \frac{\sqrt{b} + 2\sqrt[4]{ac}}{\sqrt{a} + \sqrt{c}} + \frac{\sqrt{c} + 2\sqrt[4]{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} > 3.$$

Lucian Tuţescu

X.72. Să se rezolve sistemul

$$x^2 \log_2 15 + y^2 \log_3 10 + z^2 \log_5 6 = 2\left(xy + yz + zx\right),$$
$$x + y + z = 5.$$

Marius Damia

X.73. Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că pentru oric astfel încât $3 \mid x + y$, are loc egalitatea $f\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{3}$.

Eugenia Roşu, e

X.74. Fie d_1, d_2 două drepte perpendiculare şi l_1, l_2 dreptele suport toarelor celor două perechi de unghiuri opuse formate de ele. Determina cu $A \in d_1$, $B \in d_2$, $C \in l_1$ şi $O, H \in l_2$ (O, H cu semnificaţiile uzuale).

Temistocle Bî

X.75. $a)$ Fie $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Dacă z_1, z_2, z_3 sunt trei numere complexe d fel încât $\operatorname{Re}(\alpha \bar{z}_1) = \operatorname{Re}(\alpha \bar{z}_2) = \operatorname{Re}(\alpha \bar{z}_3)$, atunci punctele de afixe z_1, coliniare. Notăm cu d dreapta pe care sunt situate aceste puncte.

b) Dacă z_1', z_2', z_3' sunt trei numere complexe diferite cu proprietatea că I
$\mathrm{Im}\,(\alpha\bar{z}_2') = \mathrm{Im}\,(\alpha\bar{z}_3')$, atunci punctele cu afixele z_1, z_2, z_3 sunt colinia
dreapta ce le conţine.

c) Să se arate că dreptele d şi d' sunt perpendiculare.

Constantin C

Clasa a XI-a

XI.71. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, unde $x_1 > 1$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n - 1}{\ln x_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n^n$.

Dan Popescu

XI.72. Este posibil ca o funcţie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, care verifică $1+f(x)+f(x)\,f$
$\forall x \in \mathbb{R}$, să fie continuă pe $\mathbb{R}$?

Dorin Mărgidanu

XI.73. Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie nenulă de clasă C^{k+1} pe $[0,1]$, $k \in$
ca $f(0) = f(1) = 0$. Dacă pentru orice $1 \leq j \leq k$ există $a_j \in \{0,1\}$ a
$f^{(j)}(a_j) = 0$, atunci există $x_1, x_2 \in (0,1)$ astfel ca $f^{(k+1)}(x_1) \cdot f^{(k+1)}(x_2)$

Gheorghe Moroşanu şi Paul Georg

XI.74. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $n \in 2\mathbb{N}^*$. Următoarele afirmaţii sunt ech
(1) $b^2 - 4ac \leq 0$, (2) $\det\left(aA^2 + bA + cI_n\right) \geq 0$, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Marian Ursărescu

XI.75. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Să se arate că dacă $AB - BA$ comută cu
atunci $AB = BA$.

Dorel Miheţ, T

Clasa a XII-a

XII.71. Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă cu derivata continuă. S
că $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f(x) \cdot \sin nx\, dx = 0$.

Dan Radu, I

XII.72. Fie funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, indefinit derivabilă pe $[0,1]$, cu pr
că există $M > 0$ astfel încât $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M$, $\forall x \in [0,1]$ şi $\forall n \in \mathbb{N}$. Arătaţi

a)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} (n+p)(n+p-1)\cdots(n+p-k+2)\, f^{(n+p-k)}(1)}{(-1)^{p+1}(n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)} = ($$

b)
$$\lim_{p\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} (n+p)(n+p-1)\cdots(n+p-k+2)\, f^{(n+p-k)}(}{(-1)^{p+1}(n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)}$$
$$= \int_0^1 x^n f^{(n)}(x)\, dx,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ovidiu Pop, S

XII.73. Să se arate că
$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \ln \frac{(1+x)^n + (1-x)^n}{1+x^n} dx = n \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx = n\frac{\pi}{8} \ln 2,\ n$$

Să se calculeze apoi $\int\limits_0^{\pi/4} \ln \dfrac{1+\operatorname{tg}^3 x}{1+3\operatorname{tg}^2 x} dx$.

Gabriel Necula

XII.74. Fie $(G,\cdot)$ un grup comutativ cu proprietatea că există $n \in \mathbb{N}$ a din $x^n = y^n$ rezultă $x = y$, cu $x, y \in G$. Dacă f, g sunt două endomo lui G, atunci ecuaţia $f(x) = g\left(x^{-1}\right)$ are soluţie unică dacă şi numai da $h : G \to G$, $h(x) = f(x^n)\, g(x^n)$este injectivă.

D. M. Bătineţu-Giurgiu, I

XII.75. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang r şi $S = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid ABA = O_n$ că S este subspaţiu vectorial în $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi că $\dim S = n^2 - r^2$.

Adrian Reisn

Premiu pe anul 2006 acordat de ASOCIAŢIA "RECREAŢII MATEMATI

Se acordă un premiu în bani în valoare de **100** lei elevului

ZAHARIUC Adrian – *Colegiul Naţional "Ferdinand I", Ba*

pentru nota *O problemă despre suma cifrelor unui număr natural în b meraţie oarecare* apărută în acest număr la pagina 113.

Acest premiu este acordat de **Asociaţia "Recreaţii Matematice"** c contractului de sponsorizare cu **Fundaţia Culturală "Poiana"** (directo **Tiba**).

Premii pe anul 2006 acordate unor elevi din Republica Moldova participanţi la faza f a ONM, Iaşi, 2006

Se acordă câte un premiu în valoare de **100** lei elevilor

GUZUN Ion

BOREICO Iurie

din lotul Republicii Moldova, care au obţinut cele mai bune rezultate.

Premiile sunt acordate de **Asociaţia "Recreaţii Matematice"**, ia bani provine din contractul de sponsorizare cu **Fundaţia Culturală** (director d-l **Dan Tiba**).

Probleme pentru pregătirea concursurilo

A. Nivel gimnazial

G106. Fie $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ şi $k \in \mathbb{N}$, $k \leq m$. Pentru fiecare $x \in \mathbb{N}$, c
propoziţiile: $x > 1; x > 2; \ldots; x > m$. Aflaţi $x \in \mathbb{N}$ pentru care k c
propoziţii sunt adevărate, iar celelalte $m - k$ sunt false.

Maria Miheţ, T

G107. Mulţimea $A \subset \mathbb{N}$ de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ are proprietatea că, o
patru elemente ale sale, putem alege două cu suma $2^{2006} + 1$. Aflaţi valoar
a lui n.

Dan Nedeianu, Dr. Tr

G108. Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că mulţimea numerelor întregi de
mult egal cu n poate fi partiţionată în m submulţimi cu aceeaşi sumă a el
dacă şi numai dacă $n + 1 \geq m$.

Marian Tetiv

G109. La un concurs se dau şase probleme evaluate cu 1, 2, 3, 4,
6 puncte. Dacă un elev nu rezolvă o problemă, primeşte 1 punct; dacă
primeşte punctajul corespunzător. Fiecare elev obţine măcar 11 puncte.
că o problemă a fost rezolvată de cel puţin o treime dintre elevi.

Gabriel Dospinescu, stud

G110. Fie mulţimile $A = \{k + \sqrt{n} \mid k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ şi $B = (0, 1/10)$.
$A \cap B$ este infinită.

Petru As

G111. Fie $0 < a < b$ numere reale date şi $x, y \in [a, b]$. Dacă $s = x +$
să se afle maximul expresiei $E = p + \dfrac{ab\left(s^2 + ab\right)}{p}$.

Vlad Emanuel, e

G112. Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor triunghiului ABC, atunci

$$\sqrt{(a+b)^2 - c^2} + \sqrt{(b+c)^2 - a^2} + \sqrt{(c+a)^2 - b^2} < 2(a + b + c$$

Zdravko Starc, Vršac, Serbia şi Mu

G113. Fie segmentul $[AB]$ de mijloc O şi semicercurile $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ de diam
respectiv $[AO]$ situate în acelaşi semiplan faţă de AB. Perpendiculara în
pe AB intersectează $\mathcal{C}_1$ în E şi $\mathcal{C}_2$ în D. Dacă $AD \cap \mathcal{C}_1 \setminus \{F\}$, să se arate
tangentă cercului circumscris $\triangle DEF$.

Alexandru Negrescu, elev,

G114. Fie $ABCD$ un paralelogram care nu este romb cu $m(\widehat{BAD}) =$
$M, N \in (AC)$, $P \in (BC)$ şi $Q \in (CD)$ sunt astfel încât $[BM$, $[DN$, $[$
sunt bisectoarele unghiurilor $\widehat{ABC}$, $\widehat{ADC}$, $\widehat{BAC}$ şi respectiv $\widehat{DAC}$, atunc
perpendiculară pe NQ.

Andrei Ned

G115. Fie pătratul $MNPQ$ înscris în pătratul $ABCD$, $M \in (AB)$,
$P \in (CD)$, $Q \in (BC)$ şi fie $\{E\} = PN \cap AB$, $\{F\} = PQ \cap AB$. Notăm
S_3 ariile pătratului $ABCD$, pătratului $MNPQ$, respectiv $\triangle PEF$. Să se

$a)\ S_1 - S_2 = 4\sqrt{S_{AEN} \cdot S_{BFQ}}$; $\quad b)\ S_3 \geq S_1$; $\quad c)\ \dfrac{1}{S_3} = \dfrac{1}{S_3} - \dfrac{1}{S_3}$.

Claudiu Ştefan I

B. Nivel liceal

L106. Fie I centrul cercului înscris în $\triangle ABC$. Dreptele AI, BI şi sectează a doua oară cercurile circumscrise triunghiului BCI, CAI şi AB respectiv C'. Dacă notăm cu $|XYZ|$ perimetrul $\triangle XYZ$, să se demonstre

$$\frac{BC}{|BCA'|} + \frac{CA}{|CAB'|} + \frac{AB}{|ABC'|} = 1.$$

Titu Zvonaru, C

L107. Fie $M_1 N$ două puncte situate în interiorul $\triangle ABC$, având dista la laturile AB, BC, CA egale cu 3, 2, 7, respectiv $\frac{9}{2}$, 5, $\frac{5}{2}$. Dacă ra circumscris $\triangle ABC$ este $R = 8$, să se calculeze MN.

Vlad Emanuel, e

L108. Să se arate că în orice $\triangle ABC$ are loc inegalitatea

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} - (\sin A + \sin B + \sin C) \geq 4\sqrt{3} \sin^2 \frac{\pi - 3A}{12}.$$

Marian Tetiv

L109. Se dau numerele reale pozitive subunitare $a_1, a_2, \ldots, a_{2n^2-n}$, $n \in$ Să se demonstreze inegalitatea (sumarea se face prin permutări circulare)

$$\sum \frac{a_1^{2n-1}}{a_2^{2n-1} + a_3^{2n-1} + \ldots + a_{2n^2-n}^{2n-1} + 2n + 1} < \frac{2\,n - 1}{2\,n + 1}.$$

Ioan Şerdea

L110. Fie $a, b, c \in (0, \infty)$ şi $n, k \in \mathbb{N}$. Demonstraţi identitatea

$$\frac{a^{n+k}}{b^n} + \frac{b^{n+k}}{c^n} + \frac{c^{n+k}}{a^n} \geq a^k + b^k + c^k + \frac{4n(a-b)^2}{k(a^{2-k} + b^{2-k} + c^{2-k})}.$$

(În legătură cu o problemă propusă la OBM 2005).

Titu Zvonaru, Comăneşti and Bogdan Ioniţă,

L111. Se dau m numere naturale distincte din mulţimea $\{1, 2, \ldots, n\}$. că putem alege câteva dintre ele, cu suma S, astfel încât

$$0 \leq S - \frac{m(m+1)}{2} \leq n + \sqrt{2n} - m.$$

Adrian Zahariuc, ele

L112. Pentru $n \in \mathbb{N}$, notăm cu $a(n)$ numărul modurilor în care n se ca sumă a unui număr par de puteri ale lui 2 şi cu $b(n)$ numărul moduri n se poate scrie ca sumă a unui număr impar de puteri ale lui 2. Să $a(n) = b(n)$, $\forall n \geq 2$.

Adrian Zahariuc, ele

L113. Determinaţi numerele reale a, b pentru care mulţimea $A =$ $n \in \mathbb{N}^*\}$ este finită.

Gheorghe I

L114. Considerăm o parabolă şi două drepte secante parabolei, paralel
dar neparalele cu axa de simetrie a parabolei. Folosind doar rigla negra
construiască tangenta la parabolă care este paralelă cu dreptele date.

Titu Zvonaru, C

L115. Determinaţi $P \in \mathbb{R}[X]$, $\operatorname{grad} P \geq 2$, astfel încât funcţia f
$f(x) = p(\{x\}) + \{p(x)\}$ să fie periodică (unde p este funcţia polinomială
P, iar $\{\cdot\}$ desemnează partea fracţionară).

Paul Georgescu and Gabriel P

Training problems for mathematical conte

Junior highschool level

G106. Let $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ and $k \in \mathbb{N}$, $k \leq m$. For any $x \in \mathbb{N}$, co
assertions: $x > 1$; $x > 2$; ... ; $x > m$. Find $x \in \mathbb{N}$ such that k out
assertions are true while the other $m - k$ are false.

Maria Miheţ, T

G107. The set $A \subset \mathbb{N}$ of cardinal number $n \in \mathbb{N}$ has the property that
four of its elements, we can choose two elements whose sum is $2^{2006} + 1$
maximum value of n.

Dan Nedeianu, Drobeta-Turn

G108. Let $m, n \in \mathbb{N}^*$. Show that the set of integer numbers of abs
at most equal to n can be partitioned into m subsets with the same su
elements if and only if $n + 1 \geq m$.

Marian Tetiv

G109. Six problems are proposed for a school contest and they are r
evaluated with 1, 2, 3, 4, 5, 6 points. If a schoolchild does not solve a p
receives 1 point for it; if he (she) solves it he gets the corresponding poi
schoolchild receives at least 11 points. Show that a problem was solved
one third of the participating schoolchildren.

Gabriel Dospines

G110. Let us consider the sets $A = \{k + \sqrt{n} \mid k \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\}$ and $B =$
Show that $A \cap B$ is infinite.

Petru As

G111. Let $0 < a < b$ be two given real numbers and $x, y \in [a, b]$. If
$p = xy$, determine the maximum value of the expression $E = p + \frac{ab(s^2 +}{p}$

Vlad Emanuel, highschool stud

G112. Let a, b, c be the sides of the triangle ABC. Prove that

$$\sqrt{(a+b)^2 - c^2} + \sqrt{(b+c)^2 - a^2} + \sqrt{(c+a)^2 - b^2} < 2(a + b + c$$

Zdravko Starc, Vršac, Serbia and Mo

G113. Let $[AB]$ be a line segment of midpoint O and let $\mathcal{C}_1$ and
halfcircles of diameters $[AB]$, respectively $[AO]$ situated in the same half

respect to line AB. The perpendicular line at $C \in (AB)$ on AB meets C
$\mathcal{C}_2$ at D. If $AD \cap \mathcal{C}_1 = \{F\}$, show that AE is tangent to the circle circum
ΔDEF.

Alexandru Negrescu, highschool student,

G114. Let $ABCD$ be a parallelogram that is not a rhomb with m
$60°$. If $M, N \in (AC)$, $P \in (BC)$ and $Q \in (CD)$ are such that $[B$
$[AP$ and $[AQ$ are the bisectrix lines of the angles $\widehat{ABC}$, $\widehat{ADC}$, $\widehat{BAC}$ a
tively $\widehat{DAC}$ then MP is orthogonal on NQ.

Andrei Ned

G115. Let $MNPQ$ be the square inscribed in the square $ABCD$, with
$N \in (AD)$, $P \in (CD)$ and $Q \in (BC)$ and let $\{E\} = PN \cap AB$, $\{F\} =$
We denote by S_1, S_2, S_3, the areas of the square $ABCD$, of the square M
of ΔPEF, respectively. Show that:

a) $S_1 - S_2 = 4\sqrt{S_{AEN} \cdot S_{BFQ}}$; *b)* $S_3 \geq S_1$; *c)* $\dfrac{1}{S_3} = \dfrac{1}{S_3} - \dfrac{1}{S_3}$.

Claudiu-Ştefan P

Highschool level

L106. Let I be the centre of the circle inscribed in the arbitrary tria
The straight lines AI, BI, CI meet for the second time the circles circu
to the triangles BCI, CAI and ABI at the points A', B' and respectively
denote by $|XYZ|$ the perimeter of the triangle XYZ, show that

$$\frac{BC}{|BCA'|} + \frac{CA}{|CAB'|} + \frac{AB}{|ABC'|} = 1.$$

Titu Zvonaru, C

L107. Let M, N be two points situated in the interior of $\Delta\, ABC$
distances up to the sides AB, BC, CA are respectively equal to 3, 2, 7 an
If the radius of the circumscribed circle to ΔABC is $R = 8$, determine th
from M to N.

Vlad Emanuel, highschool stude

L108. Show that the following inequality holds in any ΔABC:

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} - (\sin A + \sin B + \sin C) \geq 4\sqrt{3}\sin^2\frac{\pi - 3A}{12}.$$

Marian Tetiv

L109. The real positive and less than 1 numbers $a_1, a_2, \ldots, a_{2n^2-n}$, n
are given. Prove the following inequality (with summation being perform
cular permutations):

$$\sum \frac{a_1^{2n-1}}{a_2^{2n-1} + a_3^{2n-1} + \ldots + a_{2n^2-n}^{2n-1} + 2n + 1} < \frac{2\,n - 1}{2\,n + 1}.$$

Ioan Şerdean

L110. Let $a, b, c \in (0, \infty)$ and $n, k \in \mathbb{N}$. Prove the inequality

$$\frac{a^{n+k}}{b^n} + \frac{b^{n+k}}{c^n} + \frac{c^{n+k}}{a^n} \geq a^k + b^k + c^k + \frac{4n(a-b)^2}{k(a^{2-k} + b^{2-k} + c^{2-k})}.$$

(A problem connected with another problem proposed at OBM 2005).

Titu Zvonaru, Comăneşti and Bogdan Ioniţă,

L111. We are given m distinct natural numbers contained in the set $\{1$
Show that it is possible to select a couple of them, with their sum equal
that $0 \leq S - \dfrac{m(m+1)}{2} \leq n + \sqrt{2n} - m$.

Adrian Zahariuc, highschool stude

L112. For $n \in \mathbb{N}$, we denote $a(n)$ the number of ways under which t
n can be written as a sum of an even number of powers of 2 and let b
the number of ways under which n can be written as the sum of an odd
powers of 2. Show that $a(n) = b(n)$, $\forall n \geq 2$.

Adrian Zahariuc, highschool stude

L113. Determine the real numbers a, b such that the set $A = \{a^n + b^n$
is finite.

Gheorghe I

L114. We consider a parabola and two parallel straight lines that
parabola but are not parallel to its axis of symmetry. Using a non-meas
build the tangent to the parabola which is parallel to the given lines.

Titu Zvonaru, C

L115. Determine the polynomials $P \in \mathbb{R}[X]$ of degree ≥ 2 so that th
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = p(\{x\}) + \{p(x)\}$ be periodical (where p is the polynomi
corresponding to P, and $\{\cdot\}$ denotes the franctional part function).

Paul Georgescu and Gabriel I

ASOCIAŢIA "RECREAŢII MATEMATIC

La data de 14.02.2005 a luat fiinţă **ASOCIAŢIA "RECREAŢI
MATICE"**, cu sediul în Iaşi (str. Aurora, nr. 3, sc. D, ap. 6), având ca
*jinirea activităţilor de matematică specifice învăţământului preuniversit
zarea şi desfăşurarea de activităţi care să contribuie la dezvoltarea gust
matematică în rândurile elevilor, profesorilor şi iubitorilor de matematic
larea preocupărilor şi cercetătorilor originale.*

Obiectivele majore pentru atingerea scopului propus sunt:

1. editarea unei reviste destinată elevilor şi profesorilor – **revista "
Matematice"**;

2. fondarea unei biblioteci de matematică elementară – **biblioteca "
Matematice"**;

3. alcătuirea unei colecţii de cărţi de matematică elementară, cărţi d
şi aflate la prima apariţie – **Colecţia "Recreaţii Matematice"**.

*Poate deveni membru al Asociaţiei, printr-o simplă completare a une
orice perosană care aderă la obiectivele acesteia şi sprijină realizarea lor.*

Pagina rezolvitorilor

BRAŞOV

Liceul "N. Titulescu". **Clasa a X-a.** ANTONACHE Alexandru: VIII
IX(61,70), X.67; BARBU Cosmin: VIII(61-64), IX(61,70), X.69; BA
VIII(61-64), IX(61,70), X.69; BRÂNZEA Alexandru: VIII(61-64), IX
NARIU Anda: VIII(61-64), IX.61; DAVID Dana: VIII(61,64), IX(61,70), X
Sandor: VIII(61-64), IX.61; GHICA Alexandra: VIII(61,63,64), IX(61
ILIE Andreea: VIII(61,62,64), IX(61,70), X.67; MUREŞIANU Raul: V
IX.61; OBANCEA Dragoş: VIII.64, IX(68,70), X(67,69); SZÖCS Daniel
64), IX(61,70), X.69; ŞEITAN Marius: VIII(61-64), IX.61; ŞOIM Mihael
64), IX(61,68,70), X.67; VASILE Cătălin: VIII(61-64), IX.61; VÂRD
VIII(61-64), IX.61. **Clasa a XI-a.** DEMÉNY Ana-Maria: IX(63,65,68,70)
MUNTEAN Vlad: IX(61,63,65), X(62,69).

CARANSEBEŞ

Liceul teoretic "Traian Doda". **Clasa a IV-a.** SZALO Ildiko: P(94-1

Liceul pedagogic "G. D. Loga". **Clasa a VIII-a.** VLAD Adina
VI(61-65), VII(61,64), VIII(61,62), IX.63.

CRAIOVA

Colegiul Naţional "Carol I". **Clasa a VI-a.** STANCIU Ioan: V(66-
70), VIII.68, G(96,97).

HÂRLĂU

Şcoala "P. Rareş". **Clasa a III-a** (înv. BUDACEA Maria). NE
P(100,104,105,108,110).

Liceul "Ştefan cel Mare". **Clasa a VII-a.** CURCĂ Ioana: VI(6
VII(68,70); PINTILII Anda: VI(66,67,69,70), VII(68,70).

IAŞI

Şcoala nr. 3 "Al. Vlahuţă". **Clasa a III-a** (inst. MAXIM Gabriela
Ionela-Lavinia: P(94,96,98,100,103-105,108); CELMARE Raluca: P(94
103-105,108); GHEMU Laura: P(94,96,98,100,103-105,108); NEAGU Ram
96,98,100,103-105,108); POPOVICI Ionuţ: P(94,96,98,100,103-105,108); R
Andreea: P(94,96,98,100,103-105,108); RUSU Mădălina Andreea: P(94
103-105,108); SAVA Vlad: P(94,96,98,100,103-105,108); VECHIU Mădăli
98,100,103-105,108), ZANCHI Georgiana-Alexandra: P(94,96,98,100,10
Clasa a III-a (înv. MĂRIUŢĂ Valentina). BÂRLĂDEANU Andrei: P(
105,108); CULEA Alina: P(98,100,103-105,108); HADARAG Ana-Maria:
103-105,108); NĂSTASE Cosmin: P(98,100,103-105,108); POPA Iulian:
103-105,108); PROCA Ancuţa-Ioana: P(98,100,103-105,108); TÂNCU
P(98,100,103-105,108).

Şcoala nr. 13 "Alexandru cel Bun". **Clasa a II-a** (inst. COJOCA
AGAFIŢEI Elena-Roxana: P(104-107,109); CARAMALĂU Andra: P(10
CĂLIN Andreea-Claudia: P(104-107,109); COJOCARIU Andreea: P(10
DUDUMAN Luisa-Ştefania: P(104-107,109); LELEU Alexandrina-Ştefa
107,109); LUPAŞCU Diana-Maria: P(104-107,109); MANOLACHE Măd

ea: P(104-107,109); MIHĂILĂ Narcisa-Lorena: P(104-107,109); PASCU P(104-107,109); PĂDURARU Tiberiu-Ştefan: P(104-107,109); RĂDUC Andrei: P(104-107,109); SAVIN Cristina-Simona: P(104-107,109); ŞTEFA Vasile: P(104-107,109); ŞTIUBEI Cosmin-Ionuţ: P(104-107,109).

Şcoala nr. 26 "G. Coşbuc". **Clasa I** (inst. RACU Maria). APACHI Georgiana: P(94-97,105,110); BURA Emma-Andreea: P(94-97,105,110); grid-Ştefania: P(94-97,105,110); GRĂDINARIU Georgiana: P(94-97,105,1 CU Ovidiu-Constantin: P(94-97,105,110); HUZA Mădălina: P(94-97,105, XIM Alexandra-Camelia: P(94-97,105,110); VASILE Bogdan-Andrei: P 110). **Clasa a IV-a** (înv. BUCATARIU Rica). AELENEI George-Cipri 105,108-111); SCUTARU Ionela-Cristina: P(104-112).

Colegiul Naţional "Emil Racoviţă". **Clasa a II-a** (inst. CĂLINESCU PETREA Mădălina: P(104-107,110); UNGUREANU George: P(104,10 110). **Clasa a V-a.** ENEA Maria: V(66-70); ŢURCANU Andreea Bia 70); **Clasa a VI-a.** TUDORACHE Alexandru Gabriel: V(66-70), VI(66-

Colegiul Naţional "C. Negruzzi". **Clasa a V-a.** PĂVĂLOI Alexandru: **Clasa a VII-a.** TIBA Marius: VII(66-68,70), G(96,97,100,103).

PETROŞANI

Liceul de informatică. **Clasa a X-a.** PĂLIŢĂ Florian: VIII(66,68, X.68, G(97,102,103).

SIBIU

Colegiul Naţional "Gh. Lazăr". **Clasa a XI-a.** VLAD Emanuel: X XI(62,63), L(86,87,89,90,92).

SUCEAVA

Şcoala generală nr. 3. **Clasa a II-a** (înv. TABARCEA Silvestru). Ştefan: P(94-97,99).

Premii acordate rezolvitorilor

ASOCIAŢIA "RECREAŢII MATEMATICE" în colaborare c revistei **RECREAŢII MATEMATICE** acordă câte o **diplomă** şi un **p** **cărţi** pentru trei apariţii la rubrica *Pagina rezolvitorilor* următorilor elev

Liceul "N. Titulescu", **Braşov**

BARDĂ Dan (cl. a X-a): 1/2005(5pb), 2/2005(5pb), 2/2006(7pb);

BUTNARIU Anda (cl. a X-a): 1/2005(6pb), 2/2005(5pb), 2/2006(5pb

SZÖCS Daniel (cl. a X-a): 1/2005(6pb), 2/2005(5pb), 2/2006(7pb);

Liceul "Ştefan cel Mare", **Hârlău**

CIUCĂ Ioana (cl. a VII-a): 2/2005(5pb), 1/2006(5pb), 2/2006(6pb);

PINTILII Anda (cl. a VII-a): 2/2005(5pb), 1/2006(5pb), 2/2006(6pb);

Colegiul Naţional "Gh. Lazăr", **Sibiu**

VLAD Emanuel (cl. a XI-a): 2/2005(5pb), 1/2006(7pb), 2/2006(12pb)

Şcoala nr. 3 "Al. Vlahuţă", **Iaşi**

RUSU Mădălina-Andreea (cl. a III-a): 2/2005(6pb), 1/2006(5pb), 2/

SAVA Vlad (cl. a III-a): 2/2005(6pb), 1/2006(5pb), 2/2006(8pb);

Şcoala nr. 13 "Alexandru cel Bun", **Iaşi**

AGAFIŢEI Elena-Roxana (cl. a III-a): 2/2005(5pb), 1/2006(5pb), 2/

CARAMALĂU Andra (cl. a III-a): 2/2005(5pb), 1/2006(5pb), 2/200

CĂLIN Andreea-Claudia (cl. a III-a): 2/2005(5pb), 1/2006(5pb), 2/2

COJOCARIU Andreea (cl. a III-a): 2/2005(5pb), 1/2006(5pb), 2/200

DUDUMAN Luisa-Ştefania (cl. a III-a): 2/2005(5pb), 1/2006(5pb), 2/

LELEU Alexandrina-Ştefana (cl. a III-a): 2/2005(5pb), 1/2006(5pb), 2

LUPAŞCU Diana-Maria (cl. a III-a): 2/2005(5pb), 1/2006(5pb), 2/20

MANOLACHE Mădălina-Andreea (cl. a III-a): 2/2005(5pb), 1/200
2/2006(5pb);

PASCU Gabriela (cl. a III-a): 2/2005(5pb), 1/2006(5pb), 2/2006(5pb)

PĂDURARU Tiberiu-Ştefan (cl. a III-a): 2/2005(5pb), 1/2006(5pb),

RĂDUCEA Marin-Andrei (cl. a III-a): 2/2005(5pb), 1/2006(5pb), 2/

SAVIN Cristina-Simona (cl. a III-a): 2/2005(5pb), 1/2006(5pb), 2/20

ŞTEFAN Bogdan-Vasile (cl. a III-a): 2/2005(5pb), 1/2006(5pb), 2/20

ŞTIUBEI Cosmin-Ionuţ (cl. a III-a): 2/2005(5pb), 1/2006(5pb), 2/20

ASOCIAŢIA "RECREAŢII MATEMATIC

Lista membrilor asociaţiei - continuarea listei din nr. 1/2006

	Numele şi prenumele	*Locul de muncă*	*Data*
40	Calistru Cătălin	Univ. Tehn. "Gh. Asachi", Iaşi	2
41	Nechita Vasile	Col. Naţ. "C. Negruzzi", Iaşi	0
42	Kern Edgar	S. C. SELGROS, Braşov	1
43	Bătineţu-Giurgiu Maria	Acad. Tehnică Militară, Buc.	1
44	Bătineţu-Giurgiu Dumitru	Col. Naţ. "Matei Basarab", Buc.	1
45	Picioroagă Gabriel	Univ. of Southern, Denmark	2
46	Anişca Răzvan	Lakehead University, Canada	0
47	Cheţan Corneliu	CITRIX, INC., USA	0
48	Maftei V. Ioan	Col. Naţ. "Sf. Sava", Buc.	0
49	Gheorhiţă V. Vitalii	Univ. Tehn. "Gh. Asachi", Iaşi	2
50	Ionescu Marius Vasile	Dartmounth College, USA	2
51	Ciacoi Bogdan Andrei	Lic. T. "Ana Ipătescu", Gherla, (elev)	2

Revista semestrială **RECREAȚII MATEMATICE** este e
ASOCIAȚIA "RECREAȚII MATEMATICE". Apare la datele de 1
1 septembrie şi se adresează elevilor, profesorilor, studenților şi tutu
pasionați de matematica elementară.

În atenția tuturor colaboratorilor

Materialele trimise redacției spre publicare (note şi articole, che
metodică, probleme propuse etc.) trebuie prezentate îngrijit, clar şi c
trebuie să prezinte interes pentru un cerc cât mai larg de cititori. Se reco
textele să nu depăşească patru pagini. Evident, **ele trebuie să fie origi
nu fi apărut sau să fi fost trimise spre publicare altor reviste.** Rugăm
rialele tehnoredactate să fie însoțite de fişierele lor.

Problemele destinate rubricilor: **Probleme propuse** şi **Problem
pregătirea concursurilor** vor fi redactate pe foi separate cu enunț şi d
ție/rezolvare (câte una pe fiecare foaie) şi vor fi însoțite de numele autoru
la şi localitatea unde lucrează/învață.

Redacția va decide asupra oportunității publicării materialelor prim

În atenția elevilor

Numele elevilor ce vor trimite redacției soluții corecte la proble
rubricile de **Probleme propuse** şi **Probleme pentru pregatirea conc
vor fi menționate în **Pagina rezolvitorilor**. Se va ține seama de regulile:

1. Pot trimite soluții la **minimum cinci probleme propuse în
prezent şi cel anterior al revistei**; pe o foaie va fi redactată soluția un
probleme.

2. Elevii din clasele **VI-XII** au dreptul să trimită soluții la p
propuse pentru clasa lor, pentru orice clasă mai mare, din două clase m
imediat anterioare. Elevii din clasa a **V**-a pot trimite soluții la problemel
pentru clasele a IV-a, a V-a şi orice clasă mai mare, iar elevii claselor
trimite soluții la problemele propuse pentru oricare din clasele primare şi
să mai mare. Orice elev poate trimite soluții la problemele de concurs (ti

3. Vor fi menționate următoarele date personale: numele şi p
clasa, şcoala şi localitatea.

4. Plicul cu probleme rezolvate se va trimite prin poştă (sau v
direct) la adresa Redacției:

Prof. dr. Temistocle Bîrsan
Str. Aurora, nr. 3, sc. D, ap. 6,
700 474, Iaşi
Jud. IAŞI
E-mail: tbirsan@math.tuiasi.ro

CUPRINS

Anul IX, Nr. 2 **Iulie – Decembri**

RECREAȚII
MATEMATIC

REVISTĂ DE MATEMATICĂ PENTRU ELEVI ŞI PROF

$$\boxed{e^{i\pi} = -1}$$

Asociația "Recreații Matemati

IAŞI - 2007

Semnificația formulei de pe copertă:

Într-o formă concisă, formula $e^{i\pi} = -1$ leagă cele patru ramuri fu
ale matematicii:

ARITMETICA	reprezentată de	1
GEOMETRIA	reprezentată de	π
ALGEBRA	reprezentată de	i
ANALIZA MATEMATICĂ	reprezentată de	e

Adresa redacției:

Catedra de Matematică – Universitatea Tehnică "Gh. Asachi" Iași
Bd. Carol I, nr.11, 700506, Iași
Tel. 032 – 213737 / int. 123
E-mail: recreatii.matematice@gmail.com
http://www.recreatiimatematice.uv.ro

TIPĂRITĂ LA SL&F IMPEX IAȘI
Bd. Carol I, nr. 3-5
Tel. 0788 498933
E-mail: simonaslf@yahoo.com

Anul IX, Nr. 2 Iulie – Decembri

RECREAȚII MATEMATICE

REVISTĂ DE MATEMATICĂ PENTRU ELEVI ŞI PROF

$$\boxed{e^{i\pi} = -1}$$

Revistă cu apariție semestrială publicată de

ASOCIAŢIA "RECREAŢII MATEMATIC

IAŞI - 2007

Al VI-lea Congres Internaţional al Matematicienilor Români

În zilele de 28 iunie – 4 iulie, 2007, s-au desfăşurat la Bucureşti (Unive
crările celui de-**al VI-lea Congres Internaţional al Matematicienilor**
sub auspiciile *Academiei Române* şi ale *Universităţilor din Bucureşti*, *Pites*
şoara. Un rol central în organizarea Congresului l-a avut *Institutul de M*
"Simion Stoilov" al Academiei Române.

Amintim că precedentele congrese, similare acestuia, s-au ţinut la C
Turnu Severin (1932), Bucureşti (1945), din nou Bucureşti (1956) şi Piteş

Ideea organizării unor astfel de congrese s-a datorat lui **Petre Sergesc**
fesor la Universităţile din Cluj şi Bucureşti, precum şi la Politehnica din
(unde a avut şi funcţia de rector). Petre Sergescu va deveni, după stab
Franţa (1946), preşedinte al Academiei Internaţionale de Istorie a Ştiinţe
sprijinit şi încurajat de către **Gheorghe Ţiţeica** şi **Dimitrie Pompeiu**
tanţi proeminenţi ai matematicii româneşti în prima jumătate a sec. al X
ticiparea matematicienilor străini a fost din ce în ce mai numeroasă, înreg
un record de peste 100 la prezentul congres. De asemenea, numărul ma
nilor români din diasporă a fost considerabil, remarcându-se în special tin
pregătesc doctoratul în diverse ţări.

Menţionăm că toate ţările europene, din est şi din vest, au avut partic
număr de peste 20 participanţi au prezentat celelalte continente ale globu

În cele opt secţii ale **Congresului** au fost prezentate peste 400 comu
deschiderea **Congresului** au fost prezentate trei rapoarte, întocmite d
desemnate de Comitetul de organizare: I Cercetarea matematică în R
Învăţământul matematic în România; III Diaspora matematică român
raportat *Vasile Brânzănescu* (Director al Institutului de Matematică "S.
Constantin Niculescu (Universitatea Craiova), *Constantin Corduneanu*
Română) şi *Dan Timotin* (Institutul de Matematică).

Dintre participanţii din străinătate (incluzând Diaspora), menţionăm
putaţi matematicieni ca *H. T. Banks* (SUA), *Daniel Tătaru* (SUA), *Do*
nescu (Franţa), *Izu Vaisman* (Israel), *Vicenzo Cappasso* şi *Mimo Ianne*
Jean Mawhin (Belgia), *Mitrofan Cioban* (R. Moldova), *Tudor Raţiu* (Elve
Grebenikov (Rusia), *Alexandra Bellow* (SUA), *Preda Mihăilescu* (Germa
Diacu (Canada).

Mulţi participanţi tineri au prezentat comunicări, din cele mai noi
cercetare matematică. Nici informatica nu a fost neglijată, precum şi ma
aplicate la diverse alte domenii de cercetare: *Mecanică*, *Fizica matematică*
tate şi Statistică, *Cercetare operaţională.*

Un alt fapt demn de remarcat şi foarte îmbucurător pentru noi este p
cadrelor didactice din (practic) toate universităţile româneşti în care m
apare ca disciplină de studiu.

Congresul s-a bucurat de atenţia forurilor răspunzătoare pentru şti
nească, începând cu *Preşedinţia* (mesaj trimis la deschidere), continuând c
Română (prin preşedintele ei, acad. Ionel Haiduc), cu *Universitatea Buc*

rector, care a oferit şi o recepţie împreună cu Ministerul de Externe).

O excursie a fost organizată în ziua de duminică 1 iulie, pentru mai
sută de participanţi. S-au vizitat obiective turistice precum oraşul Sinaia
Bran, iar la sfârşit Universitatea din Piteşti, unde a avut loc şi banc
gresului. Muzica şi dansul (cu specific românesc), costumele naţionale ş
plăcută ce a fost prezentă în timpul excursiei (minunatele privelişti de
Bran-Câmpulung-Muscel), au contribuit în mare măsură la reuşita aces
menită să amintească oaspeţilor de frumuseţile ţării noastre.

Sperăm ca următorul congres, **Al VII-lea Congres Internaţional al
ticienilor Români**, să aibă loc în anul 2011, dacă se va respecta interval
ani între congrese consecutive.

Constantin CORDUNEA

University of Texas at Arli

Conjectura lui Poincaré

Termenul *conjectură* înseamnă în matematică presupunere, ipoteză,
unei afirmaţii nedemonstrate, care poate fi adevărată cu o probabilitate
mare (spre exemplu, este adevărată în mai multe cazuri particulare, ca î
ducţiei incomplete). **Conjectura lui Poincaré** se referă la caracteriz
3-dimensionale cu ajutorul unor proprietăţi topologice uşor de intuit şi
pusă de Poincaré în 1904. **Jules Henri Poincaré** (29 aprilie 1854 -17
a fost unul dintre cei mai mari matematicieni francezi; a fost, în acelaş
mare fizician teoretic şi un filosof al ştiinţei. Poincaré este descris adesea
matematician universal, deoarece a excelat în toate domeniile matemati
vărat importante, ce existau în perioada vieţii sale (relativ scurte). La m
a fost caracterizat ca *matematician, geometru, filosof şi om de litere; a f*
al infinitului, un fel de bard al ştiinţei.

Până în momentul formulării conjecturii, existau suficiente informaţii ş
legate de caracterizarea suprafeţelor (varietăţi 2-dimenionale) orientabile,
şi închise din spaţiul euclidian 3-dimensioanal. Aceste suprafeţe pot fi ca
de *genul* lor. Acesta este un număr întreg nenegativ ($g \geq 0$) care poat
intuitiv ca numărul de *găuri* ale suprafeţei. Spre exemplu, sfera uzuală,
locul geometric binecunoscut în geometria euclidină clasică (sau ca fron
are genul zero pentru că nu are nici o gaură. Torul, asimilat cu suprafaţa u
are genul 1 pentru că are o gaură. Mai departe, se pot imagina covrigi cu
găuri, iar suprafeţele lor ne furnizează suprafeţe de genuri mai mari.
destul de uşor că *două suprafeţe orientabile, închise şi mărginite (compa*
acelaşi gen pot fi puse în corespondenţă biunivocă şi bicontinuă (sunt hon
În particular, sfera apare ca singura suprafaţă orientabilă, compactă de g

Problema ce apare în mod natural, este dacă există caracterizări de
pentru sfera 3-dimenională, gândită ca frontiera unei bile 4-dimensionale
a imaginat o operaţie intuitivă deosebit de fructuoasă pentru dezvoltarea
topologiei algebrice, o disciplină matematică nouă, extrem de importantă în
actual. Este vorba despre *deformarea continuă* în interiorul unei anumit
a unei curbe continue sau diferenţiabile din acea mulţime. O astfel de
poartă numele de *homotopie*. În particular, este important cazul când
simplă închisă şi deformarea se face către un punct al ei. Intuitiv, pu
imaginăm procesul realizat cu un lasou lansat de un paznic de vite. Când
nu prinde gâtul niciunei vite, el se strânge înapoi în mâna paznicului. C
prinde o vită (sau un ciot de copac), a întâlnit o singularitate (o gaură) şi pa
nevoit să deschidă lasoul (adică să renunţe la continuitate) ca să-l poată
Acum putem formula mai precis conţinutul *conjecturii lui Poincaré*:

Dacă o varietate M^3*, netedă, compactă, de dimensiune* 3*, are prop*
orice curbă simplă închisă situtată în această varietate poate fi deformat
la un punct, rezultă că M^3 *este homeomorfă cu o sferă?*

Chiar Poincaré a notat oarecum prevăzător: *Mais cette question nous e*
trop loin. Conjectura lui Poincaré a inspirat mulţi matematicieni şi tentati
demonstra au condus la multe progrese în înţelegerea topologiei varietăţilor

siune trei şi nu numai. O extindere naturală a acestei conjecturi a fost form
de Poincaré, care a afirmat, în mod eronat, că: *orice varietate poliedrală
având omologia unei sfere n-dimensionale este homeomorfă cu sfera n-dim*
Noţiunea de *omologie* a fost abordată, la început, în contextul *topologiei co*
disciplină ce studiază complexele simpliciale sau, mai general, celulare, ap
noţiune a fost studiată în condiţii mai generale, obţinându-se invarianţi
interesanţi.

Pe la sfârşitul anilor '50 şi începutul anilor '60 s-au obţinut rezultate
în studiul conjecturii lui Poincaré, realizându-se că studiul varietăţilor de
mai mari era mai uşor de făcut decât al celor de dimensiune 3. Con
Poincaré a fost demonstrată în cazul unei dimensiuni mai mari decât 4,
către *S. Smale*. Alte contribuţii au fost aduse de către *J. Stallings*, *E.*
A. Wallace. 20 de ani mai târziu, *M. Freedman* a folosit cup-produsul şi
Kirby Siebenmann, pentru a demonstra conjectura lui Poincaré în dimens

Pentru dimensiunea 3, toate tehnicile dezvoltate anterior nu au dat re
mod curios, la fel ca în problema găsirii structurilor diferenţiabile pe spaţ
ene (unde s-au folosit aşa numitele teorii de etalonare (gauge), specifice fizi
a venit din partea geometriei diferenţiale. In geometria diferenţială proble
centrată pe studierea proprietăţilor diverselor structuri geometrice pe vari
puţin pe probleme de tipul conjecturii lui Poincaré. A fost *R. Hamilton* ca
pentru studiu fluxul Ricci, pentru care a oferit şi unele interpretări fizice.
să construiască, în 2003, o metrică de curbură constantă pe orice 3-varie
curbura Ricci pozitivă.

Ceva mai târziu, *G. Perelman* de la Sankt Petersburg a oferit o sol
jecturii lui Poincaré, în câteva articole postate pe Internet. Această solu
intersul mai multor grupuri de cercetători care au început să aprofunde
tehnice ale demonstraţiilor propuse de Perelman.

Oricum, comunitatea matematică internaţională s-a arătat convins
mentele lui G. Perelman şi, la Congresul Internaţional al Matematicienilor
2006 de la Madrid, lui G. Perelman i s-a oferit *medalia Fields* (un premi
tor cu premiul Nobel, care nu există pentru domeniul matematicilor). T
că G. Perelman a refuzat, pentru prima dată în lumea matematicienil
Fields din diverse motive. În momentul actual, G. Perelman trece printr-
extrem de rea din viaţa sa, adoptând o atitudine de respingere a oricăr
de apropiere din partea confraţilor săi (o atitudine asemănătoare a adopt
american R. Fisher în anii '70, după obţinerea titlului de campion mondial)
man a refuzat şi un *premiu al Societăţii Europene de Matematică* (*EMS*
cale să refuze şi *Premiul Mileniului*. S-a retras de la Institutul Steklov,
şi trăieşte izolat, alături de mama sa.

Într-o ierarhie a celor mai importante descoperiri ştiinţifice din anul 200
de prestigioasa revistă Science, soluţia dată de G. Perelman s-a situat pe
devansând o altă descoperire ştiinţifică extrem de importantă din domeniu

Prof. dr. Vasile OPR
Univ. "Al. I. Cuza", I

Tipurile subgrupurilor finite din $GL_2(\mathbb{Z})$

Gabriel DOSPINESCU[1]

Studiul care urmează este o continuare a celui început în [**1**]. Cu ace
demonstrat o serie de rezultate care ne-au permis să găsim majorări pent
subgrupurilor finite ale lui $GL_n(\mathbb{Z})$.

Ne-am bazat pe o teoremă de mare profunzime, cunoscută sub numel
lui Serre. De fapt, rezultatul a fost obţinut de *Minkowski* şi extins de *Se*
pentru care îl vom numi în cele ce urmează *Lema lui Selberg.*

Ne-a mai rămas, din planul nostru, să demonstrăm că în $GL_2(\mathbb{Z})$ e
nouă tipuri de grupuri finite (până la un izomorfism). Am adus deja
marea teoremă *Jordan-Zassenhaus*, care asigură că în $GL_n(\mathbb{Z})$ există un
de clase de conjugare ale subgrupurilor finite, rezultat mult mai puternic
de demonstrat decât ceea ce am numit noi "versiunea slabă" a teorem
Zassenhaus. De asemenea, pentru $n \geq 3$, studiul subgrupurilor lui GL_n
foarte laborios şi complicat; de exemplu, in [**2**] se demonstrează că există
de conjugare ale subgrupurilor finite din $GL_3(\mathbb{Z})$. Chiar studiul claselor de
ale subgrupurilor finite din $GL_2(\mathbb{Z})$ este dificil (de altfel, in finalul artic
discuta problema conjugării subgrupurilor ciclice ale lui $GL_2(\mathbb{Z})$).

Teorema 5. *Există exact nouă clase de izomorfism ale subgrupurilo*
lui $GL_2(Z)$.

Demonstraţie. Desigur, aici considerăm şi subgrupurile triviale. Dej
teorema 2) că ordinul oricărui subgrup finit al lui $GL_2(\mathbb{Z})$ divide pe 24; p
ordinul unui subgrup finit al lui $GL_2(\mathbb{Z})$ poate fi doar unul dintre numer
4, 6, 8, 12 sau 24.

Să observăm că şapte clase de izomorfism se găsesc destul de repede. Î
subgrupuri cu un element sau două se găsesc fără probleme, cu trei elem
lua subgrupul generat de $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, pentru patru elemente putem alege
generat de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (izomorf cu $\mathbb{Z}_4$) şi subgrupul format din matrici
$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (izomorf cu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$), iar pentru şase elemente
subgrupul generat de $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (izomorf cu $\mathbb{Z}_6$) şi subgrupul generat d
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (izomorf cu grupul S_3 al permutărilor de grad 3).
teoremele de structură ale grupurilor cu cel mult şase elemente arată că a
singurele posibilităţi pentru subgrupurile lui $GL_2(\mathbb{Z})$ cu cel mult 6 elemen
rămâne să dovedim că există câte o singură clasă de izomorfism pentru
din $GL_2(\mathbb{Z})$ cu 8 elemente şi tot una pentru cele cu 12 elemente.

Un subgrup abelian cu opt elemente al lui $GL_2(\mathbb{Z})$ (ca, de altfel, ori
abelian cu opt elemente) ar trebui să fie izomorf cu $\mathbb{Z}_8$, cu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$, sau cu $\mathbb{Z}$

[1] Student, École Normale Supérieure, Paris

Cum orice element din $GL_2(\mathbb{Z})$ are ordinul 2, 3, 4, sau 6 (nu şi 8), nu exis
al lui $GL_2(\mathbb{Z})$ izomorf cu $\mathbb{Z}_8$.

Acum să facem câteva observaţii generale despre matricile de ordin
din $GL_2(\mathbb{Z})$. În primul rând se poate stabili (chiar cu mijloace element
folosi adică noţiuni ca polinom caracterisitic, valori proprii, etc) că orice
ordin 2 este fie $-I_2$, fie are forma $\begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$, cu x, y, z numere întregi
$x^2 + yz = 1$. O matrice A de ordinul patru trebuie să verifice polinom
deci (fiind cu elemente numere întregi) trebuie să aibă valorile proprii
cum $A^2 \neq I_2$, rămâne a doua variantă, deci $A^2 = -I_2$ şi $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$
numere întregi astfel încât $x^2 + yz = -1$. În sfârşit, argumente asemănăto
la concluzia că, dacă A are ordinul 3, atunci valorile sale proprii sunt ε şi
o rădăcină cubică diferită de 1 a unităţii), deci A are urma -1 şi determi
$A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -1-x \end{pmatrix}$, cu x, y, z numere întregi astfel încât $x^2 + x + 1 + yz$

Acum să presupunem că există în $GL_2(\mathbb{Z})$ un subgrup izomorf cu
$\mathbb{Z}_2$ şi să privim elementele lui ca matrici complexe. Fiind de ordinul al
sunt diagonalizabile şi, deoarece ele comută două câte două, există o ba
de diagonalizare. În acea bază, matricile din G sunt diagonale şi au pe
principală valorile lor proprii care sunt ± 1 (căci toate, cu excepţia ide
ordinul 2). Astfel s-ar obţine existenţa a opt matrici de ordinul al do
pe diagonala principală şi 0 în rest, evident absurd (acest argument func
general: ordinul maxim al unui subgrup al lui $GL_n()$ care are toate ele
ordinul 2 – desigur, cu excepţia elementului neutru – este 2^n; ceea ce fu
o demonstraţie elegantă a faptului că, pentru $m \neq n$, $GL_m(\mathbb{Z})$ nu este
$GL_n(\mathbb{Z})$, o problemă greu de rezolvat altfel).

Existenţa unui subgrup al lui $GL_2(\mathbb{Z})$ izomorf cu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ ar implica
a două matrici $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, de ordinul al doilea şi $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$,
4, cu a, b, c, x, y, z numere întregi, $a^2 + bc = 1$ şi $x^2 + yz = -1$, ca
$AB = BA$. Condiţia aceasta (de comutativitate) ne dă sistemul $bz = cy$
$az = cx$. Presupunerea că un element, oricare, al celor două matrici este n
la o contradicţie (de exemplu, $a = 0$ implică $bc = 1$ şi $yz = -1$ şi aceste
$bz = cy$). Dacă sunt nenule, a şi b sunt prime între ele, la fel x şi y; de
$ay = bx$ rezultă $a = \pm x$ şi $b = \pm y$, apoi obţinem şi $c = \pm z$ (semnele c
deci $A = \pm B$, evident o contradicţie. De altfel, se constată uşor că, tot
cale, se poate obţine şi afirmaţia demonstrată mai sus: orice subgrup al
format numai din elemente de ordin 2 (cu excepţia elementului neutru) a
patru elemente; desigur, în cazul general nu se poate proceda aşa.

Un subgrup necomutativ cu opt elemente este izomorf fie cu grupul die
cel al cuaternionilor. Un subgrup al lui $GL_2(\mathbb{Z})$ cu opt elemente, izomorf
diedral, este cel generat de matricile $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (omitem de fi
verificările, acestea fiind imediate). Ne mai rămâne să demonstrăm că

are subgrupuri izomorfe cu grupul cuaternionilor.

Presupunem că există un asemenea subgrup; asta ar însemna, de fapt matricile $A, B \in GL_2(\mathbb{Z})$, astfel încât $AB = B^3A$, $A^2 = B^2$, $B^4 = I_2$ lui B este 4; cum am văzut, asta înseamnă că $A^2 = B^2 = -I_2$, ceea la $AB = -BA$. Rezultă existenţa unor numere întregi a,b, c, x, y, z a $a^2 + bc + 1 = x^2 + yz + 1 = 0$ şi astfel încât $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ şi $B =$ Egalitatea $AB = -BA$ implică şi $2ax + bz + cy = 0$; eliminând c, z din pr relaţii şi folosind-o pe a treia, rezultă $(bx - ay)^2 + b^2 + y^2 = 0$, deci $b =$ ce, evident, conduce la contradicţie.

Să ne îndreptăm acum atenţia asupra subgrupurilor cu 12 elemente ale l considerăm mai întâi un asemenea subgrup G neabelian. Să presupunem numerele $x_2, \ldots, x_q$ nu apare şi 1; cum $(2 - (-1))(2 - 0) = 6$ şi cum $x_2) \cdots (2 - x_q)$, trebuie să avem $x_q = -2$. Deci există $a, b \in$, cu $a + b = 10$ $12 | 2^k + a \cdot 0^k + b \cdot (-1)^k + (-2)^k$, oricare ar fi k număr natural. Este clar să avem atunci $b = 0$, iar alegerea $k = 2$ conduce iarăşi la o contradicţie trebuie să existe o matrice $A \in G$ cu urma egală cu 1.

Fie u, v valorile proprii ale matricii A (care verifică $u + v = 1$). Cum u şi v au modulul 1, deci $\dfrac{1}{uv} = \dfrac{1}{u} + \dfrac{1}{v} = \overline{u} + \overline{v} = \overline{u + v} = 1$. Din $u + v$ rezultă $u^3 = v^3 = -1$, deci $A^3 = -I_2$, adică A are ordinul 6. Să mai $B \in G - \{A^k \mid 0 \leq k \leq 5\}$ şi să observăm că vom avea atunci $G = \{A^k$ $5\} \cup \{BA^k \mid 0 \leq k \leq 5\}$ şi că $AB = BA^5$. Într-adevăr, este clar (din mo l-am ales pe B) că există $k \geq 0$ astfel încât $AB = BA^k$, ceea ce înseamnă c $A^k = B^{-1}AB$ şi A sunt similare, deci au aceleaşi valori proprii. Atunci $\{u^k, \frac{1}{u^k}\}$ şi $\{u, \frac{1}{u}\}$ coincid, ceea ce duce imediat la posibilităţile $k \equiv 1\,($ $k \equiv 5 \pmod 6$. Cum G este neabelian rămâne $k \equiv 5 \pmod 6$ şi $AB = BA$ se mai scrie (ţinând cont de $A^2 - A + I_2 = 0_2$, adică de teorema *Cayley-* $AB + BA = B$, iar de aici obţinem $\mathrm{tr}(B) = 2\,\mathrm{tr}(AB)$. Cum matricile de o 6 au urma impară, B trebuie să aibă ordinul 2 sau 4. Să presupunem că ordinul 4; ca mai sus va rezulta că $B^2 = -I_2$. Un scurt moment de refl existenţa unor numere întregi a, b, c, x, y, z astfel încât $a^2 + bc + 1 = x^2 +$ şi $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & 1 - x \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$. Atunci, din $AB + BA = B$, după un obţinem relaţia $u^2 - u + 1 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = 0$ ($u = \dfrac{ay}{b} - x$), egalitate evident Astfel rezultă că B are ordinul 2, deci singurul subgrup necomutativ de or $GL_2(\mathbb{Z})$ ar putea fi cel diedral. Şi nici nu e greu să arătăm că există în subgrup izomorf cu D_6: este cel generat de matricile: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix} 1 & \\ 1 & \end{pmatrix}$

În fine, să presupunem că G ar fi un subgrup abelian cu 12 elemente al l După cum am amintit (v. mai sus problema de olimpiadă), ordinul orică din $GL_2(\mathbb{Z})$ poate fi doar 1, 2, 3, 4 sau 6; prin urmare G ar putea fi izomo două tipuri de grupuri comutative, adică $\mathbb{Z}_{12}$ şi $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$) doar cu $\mathbb{Z}_2$ (deoarece $\mathbb{Z}_{12}$ este generat de un element de ordin 12).

Să zicem că ar fi în $GL_n(\mathbb{Z})$ un subgrup izomorf cu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$; aces
mai mult de un element de ordin 2 (prin urmare şi o matrice de ordin 2

$-I_2)$, precum şi elemente de ordin trei, deci atunci ar exista matricile $A =$

de ordin 2 ($a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a^2 + bc = 1$) şi $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -1-x \end{pmatrix}$ de ordin 3 (

$x^2+x+1+yz = 0$) astfel încât $AB = BA$. Obţinem relaţiile $bz = cy$, $2ay$
şi $2az = c(2x + 1)$; vedem imediat că de aici s-ar obţine, dacă am presup
că $b = c = 0$, imposibil. De aceea $a \neq 0$ şi putem exprima $y =$

$c = \dfrac{c(2x+1)}{2a}$; înlocuim în $x^2 + x + 1 + yz = 0$, mai ţinem seama şi de
şi ajungem iar la o evidentă contradicţie: $3a^2 + (2x + 1)^2 = 0$; deci GL_2
subgrupuri comutative cu 12 elemente.

Ne-a mai rămas să demonstrăm că nu există subgrupuri cu 24 de e
$GL_2(\mathbb{Z})$. Din păcate, oricât ne-am străduit, nu am reuşit să găsim o astfel
straţie care să utilizeze ideile de mai sus. Se poate însă arăta acest fapt,
un nivel superior al edificiului matematic. Avem, mai întâi

Teorema 6. *Orice subgrup finit al lui $GL_n(\mathbb{Z})$ este conjugat cu un su*
$O_n(\mathbb{R})$.

Demonstraţie. Prin $O_n(\mathbb{R})$ înţelegem grupul matricilor ortogonale d
G fiind subgrupul finit despre care este vorba în enunţ, vom defini un
scalar pe $\mathbb{R}^n$ (unde elementele se consideră ca vectori coloană) prin

$$\langle x, y \rangle_* = \sum_{g \in G} \langle gx, gy \rangle,$$

unde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ este produsul scalar obişnuit din $\mathbb{C}^n$. Deoarece fiecare matrice
inversabilă, se verifică uşor faptul că şi $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ este un produs scalar, precu

$$\langle gx, gy \rangle_* = \langle x, y \rangle_*, \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n,$$

adică orice element din G este izometrie faţă de acest nou produs scala
mare, matricile din G sunt matrici ortogonale într-o bază ortonormală rela
produs, ceea ce reprezintă (reformulată) concluzia lemei. Acum putem de

Teorema 7. *Orice subgrup finit al lui $GL_2(\mathbb{Z})$ este fie ciclic, fie died*

Demonstraţie. Fie, iar, G un subgrup finit al lui $GL_2(\mathbb{Z})$, pe car
teoremei anterioare îl putem considera direct subgrup al lui $O_2(\mathbb{R})$, şi fie H
lui G cu $SO_2(\mathbb{R})$, adică cu grupul (matricilor) rotaţiilor lui $\mathbb{R}^2$ (matrici
cu determinantul 1). Indicele lui H în G este cel mult egal cu 2 (deoare
orice $x, y \in G$, xy^{-1} este o matrice ortogonală care are determinantul 1 s
plus, H este un grup ciclic, deoarece este un grup finit de rotaţii şi se ar
orice asemenea grup este generat de o rotaţie a sa de unghi minim (tot
arată că orice subgrup al lui $\mathbb{Z}$ este generat de un element al său de modu

Acum, dacă intersecţia H are indicele 1 în G, evident vom avea $G =$
este ciclic. Dacă indicele este 2, considerăm un element $s \in G - H$, care tr
o simetrie faţă de o dreaptă ce trece prin origine. Se verifică atunci cu u
prin calcul, fie – recurgând la interpretarea geometrică – pe un desen) că

r fiind generatorul lui H. Cum s^2 este identitatea şi G este generat d
(indicele lui H în G fiind 2) obţinem imediat că, în acest caz, G este died

În fine, Teorema 5 rezultă din nou, sub forma:

Teorema 8. *Orice subgrup finit al lui $GL_2(\mathbb{Z})$ are cel mult 12 elemen doar o clasă de izomorfism a subgrupurilor lui $GL_2(\mathbb{Z})$ cu 12 elemente.*

Demonstraţie. Totul rezulta din teorema anterioara si vesnica ob matricile din $GL_2(\mathbb{Z})$ au ordin 1, 2, 3, 4 sau 6. Evident, teorema 7 implic că există doar 9 tipuri de clase de izomorfism pentru subgrupurile lui G noi ne-am străduit mai sus (şi nu am reuşit în totalitate) să arătăm că se p acelaşi rezultat şi pe cale "elementară".

Terminăm acest articol ţinându-ne o promisiune: stabilirea claselor de ale matricilor de ordin 3, 4, 6 din $GL_2(\mathbb{Z})$. Nu vom trata cazul matricilor din simplul motiv că necesită o cu totul altă metodă. Vom folosi fără de un rezultat clasic de geometria numerelor, anume faimoasa teoremă a lui orice mulţime convexă, simetrică în raport cu originea şi de arie strict mai 4 din $\mathbb{R}^2$ conţine măcar un punct laticial nenul. Vom începe cu următoare directă a teoremei lui Minkowski, care se va dovedi crucială în studiul conjugare ale matricilor de ordin finit:

Lema 1. *a) Dacă a, b, c sunt numere întregi astfel încât $bc = a^2 +$ ecuaţia $\left|cx^2 - 2axy + by^2\right| = 1$ are soluţii în numere întregi.*

b) Dacă $bc = a^2 + a + 1$, atunci ecuaţia $\left|cx^2 - (2a+1)xy + by^2\right| = 1$ întregi.

Demonstraţia este uşoară dacă folosim teorema lui Minkowski şi altfel. Ideea este următoarea (vom rezolva doar a), punctul b) fiind absol dacă considerăm A mulţimea punctelor (x, y) din plan pentru care $\left|cx^2 - 2a\right.$ 2, un calcul imediat arata ca A are aria strict mai mare decat 4. Într-ade în mod evident presupune $b, c > 0$ şi atunci condiţia se scrie $z^2 + t^2$ $z = x\sqrt{c} - \dfrac{a}{\sqrt{c}}y$ şi $t = \dfrac{y}{\sqrt{c}}$. Deci A este imaginea cercului de arie 2π pri liniara $(z, t) \to (\dfrac{z + at}{\sqrt{c}}, \sqrt{c}t)$. Or, aceasta aplicaţie conservă ariile, căci ma ciată are determinantul 1. Deci A are aria $2\pi > 4$ si totul rezultă acum d lui Minkowki: A conţine un punct laticial nenul (x, y) şi pentru acest pu în ipoteza $b, c > 0$, avem în mod evident $\left|cx^2 - 2axy + by^2\right| = 1$. Cum a urmează exact aceeaşi cale de demonstraţie, deci rămâne în seama cititor

Acum putem începe să studiem conjugarea matricilor de ordin 3, 4, 6. vom demonstra următoarea:

Teorema 9. *Există exact o clasă de conjugare in $GL_2(\mathbb{Z})$ pentru m ordin 3 din $GL_2(\mathbb{Z})$. Aceeaşi concluzie este valabilă pentru matricile de pentru cele de ordin 6.*

Demonstraţie. Dacă $A \in GL_2(\mathbb{Z})$ este de ordin 3, respectiv 6, a timpul studiului tipului de izomorfism al subgrupurilor finite că $A^2 + A$ şi $A^2 - A + I_2 = O_2$, respectiv. Să considerăm o matrice A de ordinul 3.

că A se poate scrie sub forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ c & -1-a \end{pmatrix}$ unde $a, b, c \in \mathbb{Z}$ verifică $a^2 +$
Aplicând lema, rezultă că există un vector nenul $e = (x, y)$ astfel încât $|\det($
(aici (e, Ae) este matricea care are prima coloană egală cu e şi pe cea de
Ae): un calcul imediat arată că de fapt condiţia $|\det(e, Ae)| = 1$ este echi
$\left|cx^2 - (2a+1)xy + by^2\right| = 1$. Aceasta înseamnă că (e, Ae) este o bază a
sensul că matricea (e, Ae) este în $GL_2(\mathbb{Z})$. Or, $A(Ae) = A^2e = -Ae -$
această bază matricea lui A este exact $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Am arătat astfel că
de ordin 3 sunt toate conjugate între ele. Cu exact aceleaşi argumente s
elementele de ordinul 4, respectiv 6 au aceeaşi proprietate.

Cititorul ar putea să se întrebe în acest moment: de ce am inclus ultim
în acest articol? Răspunsul este simplu: cum în tot articolul am oscilat în
şi teoria numerelor şi cum am început cu algebra, preferăm să terminăm
numerelor. Şi, într-adevar, din ultima teoremă obţinem câteva rezultate
moase din acest domeniu. Să luăm, de exemplu, iarăşi cazul matricilor
Am văzut ca pentru o astfel de matrice, scrisă sub forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ c & -1-a \end{pmatrix}$,
$P \in GL_2(\mathbb{Z})$ astfel încât $A = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} P$. Scriind $P = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, un s
arată că există $\epsilon = \det P \in \{-1, 1\}$ astfel încât

$$a = \epsilon(yz - xy - zt),\ b = \epsilon(y^2 - yt + t^2) \quad \text{şi}$$
$$c = \epsilon(z^2 - xz + x^2),\ d = \epsilon(zt - xt + xy),$$

unde $xt - yz = \epsilon$. Aceasta este deci soluţia generală a ecuaţiei $a^2 +$
în numere întregi. Încercaţi să demonstraţi aceasta prin alte mijloace şi
avantajele acestei metode. Să mai subliniem un rezultat, deloc banal, ca
obţine de aici. Să presupunem că p este un număr prim de forma $3k+1$
u o rădăcină primitivă modulo p. Notând $x = u^{\frac{p-1}{3}}$, obţinem imediat c
$x^3 = 1$, deci $x^2 + x + 1 = 0$ (lucrăm in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$). Aceasta arată existenţa u
întreg a pentru care $p \mid a^2 + a + 1$. Din cele observate anterior, rezultă că
scrie sub forma $x^2 - xy + y^2$ pentru nişte numere întregi x şi y. Am arăta
orice număr prim de forma $3k+1$ poate fi exprimat ca $x^2 - xy + y^2$ (cu x
Evident, lucrând cu matricile de ordin 4, ajungem cu aceleaşi argumente l
teoremă a lui Fermat: orice număr prim de forma $4k+1$ se scrie ca su
pătrate de numere întregi.

Încheiem aici scurta noastră vizită în lumea subgrupurilor lui $GL_2(\mathbb{Z})$,
de a sugera cititorului temerar un studiu al claselor de izomorfism ale sub
finite ale lui $GL_3(\mathbb{Z})$.

Bibliografie

1. **G. Dospinescu** - *Câteva proprietăţi ale subgrupurilor finite din* $GL_n(\mathbb{Z})$
Matematice 1/2006.
2. **Ken-Ichi Tahara** - *On the finite subgroups of* $GL_3(\mathbb{Z})$, Nagoya Math. J

O problemă cu cifrele unui număr

Titu ZVONARU[1]

Problema *G.116*, propusă de **Maria Miheţ** în *RecMat - 1/2007*, are
enunţ:

*Aflaţi toate numerele naturale N de patru cifre nenule distincte cu p
că diferenţa dintre cel mai mare număr obţinut prin permutarea cifrelor l
mai mic asemenea număr este tocmai N.*

Ne propunem să rezolvăm următoarea problemă mai generală:

*Aflaţi toate numerele naturale N cu cifre dictincte cu proprietatea c
dintre cel mai mare număr obţinut prin permutarea cifrelor lui N şi c
asemenea număr este tocmai N.*

Fie n numărul cifrelor lui N. Avem de analizat următoarele cazuri:

A. $n = 2$. Fie $a > b$ cifrele lui N. Cel mai mare număr scris cu cifrele
$\overline{ab}$, iar cel mai mic este $\overline{ba}$.

Avem posibilităţile:

i) $\overline{ab} - \overline{ba} = \overline{ab} \Rightarrow \overline{ba} = 0$,

ii) $\overline{ab} - \overline{ba} = \overline{ba} \Rightarrow 8a = 19b$

şi nu obţinem soluţii.

B. $n = 3$. Fie $a > b > c$ cifrele lui N. Avem $\overline{abc} - \overline{cba} = \overline{xyz}$, cu $\{a, b, c\}$
şi obţinem $z = 10 + c - a$, $y = 9 + b - b = 9$, $x = a - 1 - c$.

Cum a este cea mai mare cifră, rezultă $a = 9$ şi $\{b, c\} = \{8 - c, c -$
$8 - c = c$, $b = c + 1$. Obţinem soluţia $954 - 459 = 495$.

C. $n = 4$. Fie $a > b > c > d$ cifrele lui N. Avem că $\overline{abcd} - \overline{dcba} = \overline{xyz}$
$\mathcal{C} = \{a, b, c, d\} = \{x, y, z, t\}$. Obţinem:

$$t = 10 + d - a, \quad z = 9 + c - b, \quad y = b - 1 - c, \quad x = a - d.$$

Observăm că $y + z = 8$, $x + t = 10$ şi deducem că

$$\{y, z\} \in \{\{0, 8\}, \{1, 7\}, \{2, 6\}, \{3, 5\}\}, \quad \{x, t\} \in \{\{1, 9\}, \{2, 8\}, \{3, 7\},$$

Avem de analizat următoarele posibilităţi:

$\{y,z\}$	$\{x,t\}$	(a,b,c,d)	
$\{0,8\}$	$\{1,9\}$	$(9,8,1,0)$	$b-1-c=6 \notin \mathcal{C}$
$\{0,8\}$	$\{3,7\}$	$(8,7,3,0)$	$9+c-b=5 \notin \mathcal{C}$
$\{0,8\}$	$\{4,6\}$	$(8,6,4,0)$	$b-1-c=1 \notin \mathcal{C}$
$\{1,7\}$	$\{2,8\}$	$(8,7,2,1)$	$b-1-c=4 \notin \mathcal{C}$
$\{1,7\}$	$\{4,6\}$	$(7,6,4,1)$	
$\{2,6\}$	$\{1,9\}$	$(9,6,2,1)$	$b-1-c=3 \notin \mathcal{C}$
$\{2,6\}$	$\{3,7\}$	$(7,6,3,2)$	$a-d=5 \notin \mathcal{C}$
$\{3,5\}$	$\{1,9\}$	$(9,5,3,1)$	$a-d=8 \notin \mathcal{C}$
$\{3,5\}$	$\{2,8\}$	$(8,5,3,2)$	$a-d=6 \notin \mathcal{C}$
$\{3,5\}$	$\{4,6\}$	$(6,5,4,3)$	$b-1-c=0 \notin \mathcal{C}$.

[1] Comăneşti, e-mail: tzvonaru@hotmail.com

Obţinem o singură soluţie: $7641 - 1467 = 6174$.

D. $n = 5$. Fie $a > b > c > d > e$ cifrele lui N. Avem că $\overline{abcde} - \overline{edcb}$
şi notăm $\mathcal{C} = \{a, b, c, d, e\} = \{x, y, z, t, u\}$. Obţinem $u = 10 + e - a$, $t =$
$z = 9$, $y = b - 1 - d$, $x = a - e$. Rezultă că $a = 9$ şi $e \neq 0$ (dacă $e = 0$ ar u
deci $x = z$). Observăm că $y + t = 8$, $x + u = 10$ şi, cum $0 \notin \mathcal{C}$, deducem c

$$\{y,t\} \in \{\{1,7\},\{2,6\},\{3,5\}\}, \quad \{x,u\} \in \{\{2,8\},\{3,7\},\{4,6\}\}$$

adică

$\{y,t\}$	$\{x,u\}$	(a,b,c,d,e)	
$\{1,7\}$	$\{2,8\}$	$(9,8,7,2,1)$	$b-1-d=4 \notin \mathcal{C}$
$\{1,7\}$	$\{4,6\}$	$(9,7,6,4,1)$	$a-e=8 \notin \mathcal{C}$
$\{2,6\}$	$\{3,7\}$	$(9,7,6,3,2)$	$9+d-b=5 \notin \mathcal{C}$
$\{3,5\}$	$\{2,8\}$	$(9,8,5,3,2)$	$a-e=7 \notin \mathcal{C}$
$\{3,5\}$	$\{4,6\}$	$(9,6,5,4,3)$	$b-1-d=2 \notin \mathcal{C}$.

Nu obţinem soluţii.

E. $n = 6$. Fie $a > b > c > d > e > f$ cifrele lui N. Avem că

$$\overline{abcdef} - \overline{fedcba} = \overline{xyztuv}$$

şi notăm $\mathcal{C} = \{a, b, c, d, e, f\} = \{x, y, z, t, u, v\}$. Obţinem

$v = 10 + f - a, \quad u = 9 + e - b, \quad t = 9 + d - c, \quad z = c - 1 - d, \quad y = b - e,$

Observăm că $z + t = 8$, $y + u = 9$, $x + v = 10$ şi deducem că

$$\{z,t\} \in \{\{0,8\},\{1,7\},\{2,6\},\{3,5\}\}$$
$$\{y,u\} \in \{\{0,9\},\{1,8\},\{2,7\},\{3,6\},\{4,5\}\}$$
$$\{x,v\} \in \{\{1,9\},\{2,8\},\{3,7\},\{4,6\}\}.$$

Avem de analizat următoarele posibilităţi:

$\{z,t\}$	$\{y,u\}$	$\{x,v\}$	(a,b,c,d,e,f)	
$\{0,8\}$	$\{2,7\}$	$\{1,9\}$	$(9,8,7,2,1,0)$	$c-1-d=4 \notin \mathcal{C}$
$\{0,8\}$	$\{2,7\}$	$\{4,6\}$	$(8,7,6,4,2,0)$	$b-e=5 \notin \mathcal{C}$
$\{0,8\}$	$\{3,6\}$	$\{1,9\}$	$(9,8,6,3,1,0)$	$b-e=7 \notin \mathcal{C}$
$\{0,8\}$	$\{4,5\}$	$\{1,9\}$	$(9,8,5,4,1,0)$	$b-e=7 \notin \mathcal{C}$
$\{0,8\}$	$\{4,5\}$	$\{3,7\}$	$(8,7,5,4,3,0)$	$10+f-a=2 \notin \mathcal{C}$
$\{1,7\}$	$\{0,9\}$	$\{2,8\}$	$(9,8,7,2,1,0)$	$c-d-1=4 \notin \mathcal{C}$
$\{1,7\}$	$\{0,9\}$	$\{4,6\}$	$(9,7,6,4,1,0)$	$9+e-b=3 \notin \mathcal{C}$
$\{1,7\}$	$\{3,6\}$	$\{2,8\}$	$(8,7,6,3,2,1)$	$b-e=5 \notin \mathcal{C}$
$\{1,7\}$	$\{4,5\}$	$\{2,8\}$	$(8,7,5,4,2,1)$	$c-1-d=0 \notin \mathcal{C}$
$\{2,6\}$	$\{0,9\}$	$\{3,7\}$	$(9,7,6,3,2,0)$	$b-e=5 \notin \mathcal{C}$
$\{2,6\}$	$\{1,8\}$	$\{3,7\}$	$(8,7,6,3,2,1)$	$b-e=5 \notin \mathcal{C}$
$\{2,6\}$	$\{4,5\}$	$\{1,9\}$	$(9,6,5,4,2,1)$	$a-f=8 \notin \mathcal{C}$
$\{2,6\}$	$\{4,5\}$	$\{3,7\}$	$(7,6,5,4,3,2)$	$c-1-d=0 \notin \mathcal{C}$
$\{3,5\}$	$\{0,9\}$	$\{2,8\}$	$(9,8,5,3,2,0)$	$b-e=6 \notin \mathcal{C}$
$\{3,5\}$	$\{0,9\}$	$\{4,6\}$	$(9,6,5,4,3,0)$	$9+d-c=8 \notin \mathcal{C}$
$\{3,5\}$	$\{1,8\}$	$\{4,6\}$	$(8,6,5,4,3,1)$	$a-f=7 \notin \mathcal{C}$
$\{3,5\}$	$\{2,7\}$	$\{1,9\}$	$(9,7,5,3,2,1)$	$a-f=8 \notin \mathcal{C}$
$\{3,5\}$	$\{2,7\}$	$\{4,6\}$	$(7,6,5,4,3,2)$	$c-1-d=0 \notin \mathcal{C}$.

Nu obţinem soluţii.

E. $n = 7$. Fie $a > b > c > d > e > f > g$ cifrele lui N. Avem

$$\overline{abcdefg} - \overline{gfedcba} = \overline{zyxtuvw}$$

şi la fel ca în cazul $n = 5$ deducem că $a = 9$ şi $g \neq 0$.

Diferenţa dintre un număr şi răsturnatul său este multiplu de 9; cum su
din baza 10 este de asemenea multiplu de 9, deducem că suma celor trei cifr
la scrierea lui N trebuie să fie multiplu de 9.

Deoarece ştim că cifra 0 nu este folosită, rămând de analizat doar u
posibilităţi:

cifre nefolosite	
0,1,8	$9765432 - 2345679 = 7419753$
0,2,7	$9865431 - 1345689 = 8519742$
0,3,6	$9875421 - 1245789 = 8629632$
0,4,5	$9876321 - 1236789 = 8639532$

şi nu obţinem soluţii.

F. $n = 8$. Din acelaşi motiv ca în cazul $n = 7$, avem doar posibilităţil

cifre nefolosite	
0,9	$87654321 - 12345678 = 75308643$
1,8	$97654320 - 2345679 = 95308641$
2,7	$98654310 - 1345689 = 97308621$
3,6	$98754210 - 1245789 = 97508421$
4,5	$98763210 - 1236789 = 97527421$

cu soluţia $98763210 - 1236789 = 97527421$.

G. $n = 9$. Deoarece n este impar, rezultă că singura cifră nefolosită
lui N este 0. Obţinem soluţia $987654321 - 123456789 = 864197532$.

H. $n = 10$. Obţinem soluţia $9876543210 - 123456789 = 9753086421$.

ERATĂ

În numărul 1/2007 al revistei Recreaţii Matematice s-au strecurat u
greşeli:

1. La pag. 2, r. 1 în loc de 1866 se va citi 1766.

2. În enunţul problemei XII.76 se va considera că funcţia $f : [a, b]$
continuă, condiţie care a fost omisă.

O problemă de construcţie a unui triungh

Temistocle BÎRSAN[1]

Problemele de construcţie cu rigla şi compasul au un specific şi un farm
Pe această linie, menţionăm remarcabila monografie *Probleme de constru
trice cu rigla şi compasul* a lui **Gh. Buicliu**.

Problema de care ne vom ocupa este de tipul următor:

*Se porneşte de la o figură $\mathcal{F}$ (un triunghi, de exemplu) şi prin diverse
auxiliare se obţine o configuraţie $\mathcal{F}'$. Reţinând câteva elemente ale lui
ştergând o bună parte din configuraţia $\mathcal{F}'$), cum putem reconstrui – cu ri
pasul – figura iniţială $\mathcal{F}$.*

Vom da câteva exemple cunoscute de acest fel:

1. Să se construiască un triunghi ABC cunoscându-i centrele cercuril
scrise triunghiurilor HBC, HCA şi HAB, unde H este ortocentrul ac
Problema 624).

2. Să se construiască un triunghi cunoscând punctele de intersecţie a bi
interioare cu cercul circumscris triunghiul ([**4**], p. 105, *Problema 88*).

3. Să se construiască triunghiul ABC cunoscând poziţiile vârfurilor A',
triunghiurilor echilaterale construite pe laturile lui şi în exterior ([**1**], *Prob

4. Să se construiască triunghiul ABC cunoscând centrele α, β, γ ale
adjuncte (CA), (AB), (BC) sau centrele α', β', γ' ale cercurilor adjun
(CB), (AC) (se numeşte cerc adjunct (CA) cercul care trece prin B şi es
în C laturii CA) ([**1**], *Problema 640*).

5. Să se construiască un triunghi cunoscându-i punctele O, H, I (cu s
uzuale); în ce condiţii există un astfel de triunghi? ([**3**])

Să începem prin a preciza notaţiile (de altfel uzuale, v. [**2**]) utiliza
(fig. 1):

• I, I_a, I_b, I_c – centrele cercurilor înscris şi exînscrise triunghiului;

• H, H_a, H_b, H_c – ortocentrul şi proiecţiile lui pe laturile BC, CA ş
AB;

• D, E, F – punctele de contact ale cercului înscris $\mathfrak{I}(I,r) \equiv \mathfrak{I}$ cu la
CA şi respectiv AB;

• D_a, E_a, F_a etc. – punctele de contact ale cercului exînscris $\mathfrak{I}_a(I_a, r_a$
cu dreptele suport ale aceloraşi laturi;

• A', B', C' – punctele date de $\{A'\} = D_bF_b \cap D_cE_c$, $\{B'\} = E_cI$
$\{C'\} = F_aE_a \cap F_bD_b$.

Ne propunem să rezolvăm următoarea

Problemă. *Să se construiască cu rigla şi compasul triunghiul ABC
poziţiile punctelor A', B', C'.*

[1] Prof. dr., Univ. Tehnică "Gh. Asachi", Iaşi

Vom face analiza problemei, adică pentru configurația construită, fo
$\triangle ABC$ dat, $\triangle I_aI_bI_c$ al centrelor cercurilor exînscrise și $\triangle A'B'C'$ al pu
contact exterioare (F_a, E_a; D_b, F_b și E_c, D_c) vom indica un număr de p
Ca urmare, construcția triunghiului $A'B'C'$ va decurge cu ușurință.

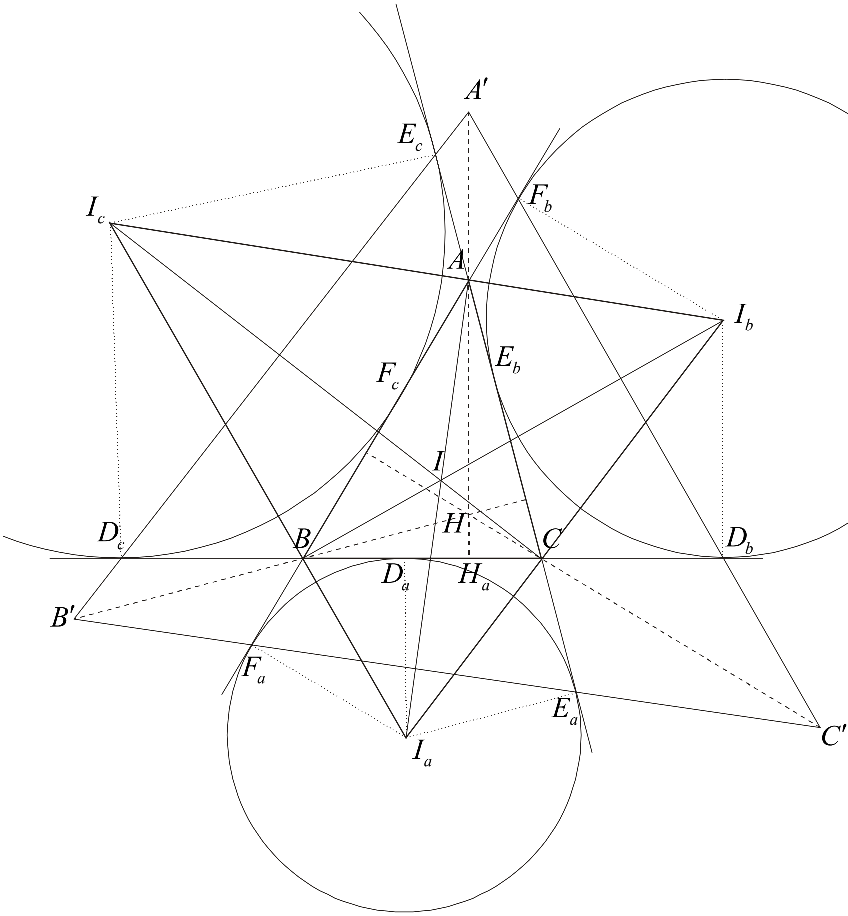


Fig. 1

Propoziția 1. *Triunghiul $A'B'C'$ are proprietățile: 1) $m(\widehat{A'}) =$*
2) $B'C'$ și D_bD_c sunt antiparalele, 3) $B'C' \parallel I_bI_c$, ca și analoagele aces

Demonstrație. 1) Deoarece BD_b și BF_b sunt tangente la cercul $\mathfrak{I}_b$,
$\triangle BD_bF_b$ este isocel și, deci, $m(\widehat{BD_bF_b}) = 90^\circ - \dfrac{B}{2}$. La fel, considerând
isoscel, deducem că $m(\widehat{CD_cE_c}) = 90^\circ - \dfrac{C}{2}$. Ca urmare, în $\triangle A'D_bD$
$m(\widehat{A'}) = 90^\circ - \dfrac{A}{2}$. Analog, se stabilește că $m(\widehat{B'}) = 90^\circ - \dfrac{B}{2}$ și $m(\widehat{C'}) =$

2) Întrucât $m(\widehat{B'}) = 90^\circ - \dfrac{B}{2} = m(\widehat{A'D_bD_c})$, dreptele $B'C'$ şi D_bD_c su
alele în raport cu $\triangle A'B'C'$.

3) Considerăm dreapta d determinată de punctele B şi I_b ca o secantă
$B'C'$ şi I_bI_c şi arătăm că se formează unghiuri alterne interne egale.

Se ştie că în $\triangle I_aI_bI_c$ avem $m(\widehat{I_a}) = 90^\circ - \dfrac{A}{2}$ şi analoagele ($m(\widehat{I_a})$
$m(\widehat{BIC}) = \dfrac{B}{2} + \dfrac{C}{2} = 90^\circ - \dfrac{A}{2}$). Atunci, din faptul că $d \perp I_aI_c$ d
$m(\widehat{d, I_bI_c}) = 90^\circ - m(\widehat{I_c}) = 90^\circ - \left(90^\circ - \dfrac{C}{2}\right) = \dfrac{C}{2}$, iar din $d \perp A'C$
$m(\widehat{d, B'C'}) = 90^\circ - m(\widehat{C'}) = \dfrac{C}{2}$.

Observaţie. $\triangle A'B'C'$ şi $\triangle I_aI_bI_c$ sunt omotetice, căci au laturile par
câte două. Centrul lor de omotetie este punctul de concurenţă a dreptelor
$C'I_c$, pe care-l notăm cu K'.

Propoziţia 2. *Dreptele AA', BB', CC' sunt concurente în punctul*
Demonstraţie. Fie A^* punctul în care AA' intersectează dreapta B
a arăta că AA' trece prin H, vom demonstra că A^* coincide cu H_a.

Conform teoremei lui Menelaus aplicată $\triangle BD_bF_b$ şi transversalei AA
laţia

$$\frac{A^*B}{A^*D_b} = \frac{AB}{AF_b} \cdot \frac{A'F_b}{A'D_b}.$$

Cum $AB = c$ şi $AF_b = BF_b - AB = p - c$ (p fiind semiperimetrul $\triangle ABC$),
calculăm $A'D_b$ şi $A'F_b$. Să mai observăm că $D_bD_c = BD_b + CD_c - BC =$
$b + c$. Acum, cu teorema sinusurilor în $\triangle A'D_bD_c$ şi ţinând cont de punct
ale Propoziţiei 1, obţinem relaţia

$$\frac{A'D_b}{\cos\frac{C}{2}} = \frac{D_bD_c}{\cos\frac{A}{2}} \Leftrightarrow A'D_b = (b+c)\,\frac{\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}},$$

iar $A'F_b = A'D_b - D_bF_b = (b+c)\,\dfrac{\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} - 2p\sin\dfrac{B}{2}$ (din $\triangle BD_bF_b$).

Ca urmare, relaţia de mai sus se scrie

$$\frac{A^*B}{A^*D_b} = \frac{c}{p-c} \cdot \frac{(b+c)\,\dfrac{\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} - 2p\sin\dfrac{B}{2}}{(b+c)\,\dfrac{\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}}.$$

Utilizând formele de tipul $\cos\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{p\,(p-a)}{bc}}$, după calcule de rutină re

$$\frac{A^*B}{A^*D_b} = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{(b+c)\,(a+b-c)},$$

de unde

$$\frac{A^*B}{A^*B+A^*D_b}=\frac{a^2-b^2+c^2}{(b+c)(a+b-c)+a^2-b^2+c^2}\Leftrightarrow\frac{A^*B}{BD_b}=\frac{a^2-b^2}{a\cdot 2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{A^*B}{p}=\frac{a^2-b^2+c^2}{2\cdot 2p}\Leftrightarrow A^*B=c\cos B,$$

adică A^* este piciorul înălţimii AH_a. Deci AA' trece prin H. Analog se BB', CC' trec prin H, ceea ce încheie demonstraţia.

Observaţie. $\triangle A'B'C'$ şi $\triangle ABC$ sunt omologice, H fiind centru de om remarcă uşor că ele sunt şi ortologice.

Propoziţia 3. *Punctul H este centrul cercului circumscris $\triangle A'B'C$ R' a acestui cerc este dată de $R'=HA+r_a=HB+r_b=HC+r_c$.*

Demonstraţie. Deoarece $B'H\perp AE_a$, avem că $m(\widehat{HB'C'})=m($ $90^\circ-m(\widehat{AE_aF_a})=\dfrac{A}{2}$. Din $CH'\perp AF_a$ şi procedând la fel, deducem că $m($ $\dfrac{A}{2}$. Deci $\triangle HB'C'$ este isoscel, adică $HB'=HC'$. În mod analog, s $HB'=HA'$. Rezultă că H este centrul cercului circumscris $\triangle A'B'C'$.

Pentru partea a doua din enunţ să arătăm că $AA'=r_a$. Într-adevăr, î avem: $AF_b=p-c$, $m(\widehat{AA'F_b})=\dfrac{B}{2}$ (analoagă uneia de mai sus) şi m $90^\circ+\dfrac{B}{2}$ (unghi exterior $\triangle BD_bF_a$ isoscel). Cu teorema sinusurilor, obţin

$$AA'=\cos\frac{B}{2}\cdot\frac{p-c}{\sin\frac{B}{2}}=(p-c)\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}\sqrt{\frac{ac}{(p-a)(p-c)}}=\frac{S}{p-a}$$

Atunci, $R'=A'H=HA+AA'=HA+r_a$ etc.

Consecinţă. *Dreptele $A'D_a$, $B'E_b$, $C'F_c$ sunt concurente în ortocen $\triangle A'B'C'$.*

Demonstraţie. Segmentele $[AA']$ şi $[I_aD_a]$ au lungimi egale cu r_a şi su (ca fiind perpendiculare pe BC). Prin urmare, patrulaterul $A'AI_aD_a$ est gram şi, deci, $A'D_a\parallel AI_a$. Din aceasta şi faptul că $AI_a\perp B'C'$, rezultă $B'C'$, adică $A'D_a$ este înălţimea în $\triangle A'B'C'$. În acelaşi fel, $B'E_b$, $C'F_c$ su în $\triangle A'B'C'$ şi demonstraţia este completă.

Propoziţia 4. *Dreptele $A'I_a$, $B'I_b$, $C'I_c$ trec prin mijloacele laturilor [şi repsectiv $[AB]$ ale $\triangle ABC$.*

Demonstraţie. Vom dovedi numai afirmaţia relativă la $A'I_a$. Fie $\{U$ BC. Revine la a arăta că $BU=\dfrac{a}{2}$.

Din faptul că $\triangle I_aD_aU\sim\triangle A'H_aU$ rezultă că

$$\frac{UD_a}{UH_a}=\frac{r_a}{r_a+h_a}\Leftrightarrow\frac{UD_a}{D_aH_a}=\frac{r_a}{2r_a+h_a}\Rightarrow UD_a=\frac{a}{2p}\cdot p\frac{c-b}{a}=\frac{c-}{2}$$

căci $D_aH_a=BH_a-BD_a=a\cos B-(p-c)=2c\cos^2\dfrac{B}{2}-p=p\dfrac{c-b}{a}$, i

$$\frac{r_a}{2r_a+h_a}=\frac{1}{2+\frac{h_a}{r_a}}=1\Big/\left(2+\frac{a\cdot h_a}{(p-a)r_a}\cdot\frac{p-a}{a}\right)=1\Big/\left(2+\frac{2S}{S}\cdot\frac{p-a}{a}\right.$$

În sfârşit, $BU = BD_a + UD_a = (p-c) + \frac{c-b}{2} = \frac{a}{2}$ şi demonstraţia este

Consecinţă. *$A'I_a$, $B'I_b$, $C'I_c$ sunt simediane atât în $\triangle A'B'C'$ cât şi î*

Demonstraţie. Mijlocul U al segmentului $[BC]$ este şi mijlocul lui $[I$ $CD_b = BD_c = p - a$. Ţinând cont de punctul 2) al Propoziţiei 1, în avem că $A'I_a$ trece prin mijlocul antiparalelei D_bD_c la $B'C'$. Cum în ori o simediană este locul mijloacelor antiparalelelor la latura opusă [**2**], p.55 că $A'I_a$ este simediana prin A' a $\triangle A'B'C'$. În sfârşit din omotetia observa a triunghiurilor $A'B'C'$ şi $I_aI_bI_c$, rezultă că $A'I_a$ este simediana prin I_a (faptul rezultă şi observând că BC şi I_bI_c sunt antiparalele în $\triangle I_aI_bI_c$).

Revenim la problema de construcţie propusă la început. Rezultatele fac posibilă construcţia $\triangle ABC$, atunci când se dă $\triangle A'B'C'$. Într-adevăr, compasul putem parcurge fiecare dintre paşii următori:

1) se construieşte centrul H al cercului circumscris triunghiului $A'B'C$ fi ortocentrul triunghiului ABC, conform Propoziţiei 3, iar conform Propo trebui ca A, B, C să se afle pe $A'H$, $B'H$, $C'H$, respectiv);

2) în $\triangle A'B'C'$ se construieşte simediana corespunzătoare vârfului A';

3) se ia în mod arbitrar un punct $C_1 \in (HC')$ şi prin el construim perp pe $A'H$ care intersectează $(B'H)$ într-un punct B_1;

4) unim H cu mijlocul segmentului $[C_1B_1]$ pentru a avea locul mijlo mentelor ce se sprijină pe HC' şi HB' şi sunt perpendiculare pe $A'H$;

5) intersectăm acest loc geometric cu simediana prin A' construită (conform Propoziţiei 4 şi Consecinţei sale, acest punct va fi mijlocul la căutate);

6) obţinem vârfurile C şi B ale triunghiului de construit ca intersecţii a dicularei pe $A'H$ dusă prin punctul construit la 5) cu (HC') şi respectiv

7) se construieşte vârful A ca intersecţie cu (HA') a perpendicularei $C'H$.

Bibliografie

1. **Gh. Buicliu** - *Probleme de construcţii geometrice cu rigla şi compasul*, Ed Bucureşti, 1957.
2. **T. Lalescu** - *Geometria triunghiului*, Ed. Tineretului, Bucureşti, 1958.
3. **F. Lo Jacomo** - *Enoncé 245*, APMEP, Buletin no. 408, 1997, 57-79.
4. **D. Smaranda, N. Soare** - *Transformări geometrice*, Ed. Acad. R.S.R., 1988.

Un şir strâns legat de şirul lui Wallis

Adrian CORDUNEANU[1]***, Gheorghe COSTOVIC***

Scopul propus este studiul şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin

$$a_n = C_n^0 - C_n^1 \frac{1!!}{2!!} + C_n^2 \frac{3!!}{4!!} - C_n^3 \frac{5!!}{6!!} + \cdots + (-1)^n C_n^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

Vom stabili că este monoton descrescător şi convergent la zero şi vom pune î
legătura acestuia cu *şirul lui Wallis* $(w_n)_{n\geq 1}$ dat de

$$w_n = \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n+1}$$

(despre care ştim că $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = \dfrac{\pi}{2}$).

Lemă ([**1**], p. 124 sau [**2**], p. 350). *Pentru orice* $k \in \mathbb{N}^*$ *avem*

$$\int_0^{\pi/2} \cos^k x\, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^k x\, dx = \begin{cases} \dfrac{(k-1)!!}{k!!} \cdot \dfrac{\pi}{2}, & k \text{ par} \\ \dfrac{(k-1)!!}{k!!}, & k \text{ impar} \end{cases}$$

Demonstraţie. Dacă în una din cele două integrale efectuăm schim
$x - \dfrac{\pi}{2}$, vom obţine pe cealaltă; deci integralele sunt egale. Fie I_k valoar
lor. Integrând prin părţi, găsim:

$$\begin{aligned} I_k &= \int_0^{\pi/2} \cos^k x\, dx = \int_0^{\pi/2} (\sin x)' \cos^{k-1} x\, dx = \\ &= -(k-1) \int_0^{\pi/2} \sin x \cos^{k-2} x\, (-\sin x)\, dx = \\ &= (k-1) \int_0^{\pi/2} \left(1 - \cos^2 x\right) \cos^{k-2} x\, dx = (k-1)\left(I_{k-2} - I_k\right) \end{aligned}$$

de unde

$$I_k = \frac{k-1}{k} I_{k-2}, \quad k \geq 2.$$

Această relaţie de recurenţă şi faptul că $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ şi $I_1 = 1$ conduc la rezult

Propoziţie. Are loc identitatea

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = C_n^0 - C_n^1 \frac{1!!}{2!!} + C_n^2 \frac{3!!}{4!!} + \cdots + (-1)^n C_n^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

Demonstraţie. Obţinem (3) exprimând integrala I_{2n} în două moduri.

---

[1] Prof. dr., Catedra de matematică, Univ. "Gh. Asachi", Iaşi
[2] Conf. dr., Catedra de matematică, Univ. "Gh. Asachi", Iaşi

conform Lemei, avem $I_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}$. Apoi, folosind formula binomul

$$I_{2n} = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x\, dx = \int_0^{\pi/2} \left(1 - \sin^2 x\right)^n dx =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(C_n^0 - C_n^1 \sin^2 x + C_n^2 \sin^4 x - C_n^3 \sin^6 x + \cdots + (-1)^n C_n^n \sin^2\right.$$

$$= C_n^0 I_0 - C_n^1 I_2 + C_n^2 I_4 - C_n^3 I_6 + \cdots + (-1)^n C_n^n I_{2n} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(C_n^0 - C_n^1 \frac{1!!}{2!!} + C_n^2 \frac{3!!}{4!!} - C_n^3 \frac{5!!}{6!!} + \cdots + (-1)^n C_n^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right).$$

Egalând aceste două valori ale lui I_{2n}, obţinem (3).

Corolarul 1. Sunt adevărate afirmaţiile:

1) $a_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}, \quad n \in \mathbb{N}^*$;

2) $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător.

Demonstraţie. Punctul 1) decurge din (1) şi (3), iar 2) din faptul c

$\frac{2n+1}{2n+2} < 1$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Corolarul 2. Sunt adevărate afirmaţiile următoare:

1) $a_n = \frac{1}{\sqrt{w_n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}^*$;

2) $(a_n)_{n\geq 1}$ converge la zero.

Demonstraţie. Punctul 1) rezultă din (2) şi (4), iar 2) prin trecere l
(5) pentru $n \to \infty$.

Observaţie. Faptul că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ poate fi stabilit şi utilizând dubla

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}},\ n > 1 \quad ([\mathbf{3}],\text{ p. } 48).$$

Bibliografie.

1. **G. M. Fihtenholţ** - *Curs de calcul diferenţial şi integral*, vol. II, Ed
Bucureşti, 1964.
2. **Gh. Sireţchi** - *Calcul diferenţial şi integral*, vol. I, Ed. Ştiinţifică şi Enc
Bucureşti, 1985.
3. ******* - *Probleme de matematică traduse din Kvant*, vol. I, E. D. P., Bucur

Asupra rădăcinilor polinomului $X^3 + pX + q \in$

Adrian REISNER[1]

I. Considerăm polinomul $P = X^3 + pX + q \in \mathbb{Q}[X]$, având rădăcinile α_1, α_2, α_3. Notăm, ca de obicei, cu ε rădăcina primitivă de ordin 3 ($\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$).

Propoziţia 1. *Pentru $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, următoarele afirmaţii sunt echivalen*
(i) $3\alpha\beta = -p$ şi $P(\alpha+\beta) = 0$;
(ii) α^3 şi p^3 sunt rădăcinile polinomului $Q = X^2 + qX - \frac{p^3}{27}$.

Demonstraţie. Cum $P(\alpha+\beta) = \alpha^3 + \beta^3 + (3\alpha\beta + p)(\alpha+\beta) + q$, a

$$(i) \Leftrightarrow \left[\alpha^3 + \beta^3 + q = 0,\ 3\alpha\beta = -p\right] \Leftrightarrow \left[\alpha^3 + \beta^3 = -q,\ \alpha^3\beta^3 = -\frac{p^3}{27}\right]$$

Consecinţa 1. *Dacă $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ satisfac (i) sau (ii), atunci rădăcinile p* *P sunt $\alpha+\beta$, $\varepsilon\alpha + \varepsilon^2\beta$ şi $\varepsilon^2\alpha + \varepsilon\beta$.*

Demonstraţie. Dacă α şi β sunt rădăcinile cubice cu produs rea două rădăcini ale polinomului Q, atunci perechile $(\varepsilon\alpha, \varepsilon^2\beta)$ şi $(\varepsilon^2\alpha, \varepsilon\beta)$ proprietăţi, deci are loc (ii). Deducem că $P(\varepsilon\alpha + \varepsilon^2\beta) = P(\varepsilon^2\alpha + \varepsilon\beta) =$ concluzia.

Observaţie. Dacă $\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27}$ este discriminantul polinomului Q a

1) Dacă $\Delta > 0$, atunci Q admite două rădăcini reale şi distincte, fie a B. Notând cu $\alpha = \sqrt[3]{A}$, $\beta = \sqrt[3]{B}$ rădăcinile cubice reale, atunci $\alpha + \beta =$ este unica rădăcină reală a lui P.

2) Dacă $\Delta = 0$, atunci Q admite rădăcina reală dublă A. Notând $\alpha =$ $\mathbb{R}$, rădăcinile polinomului P vor fi $\alpha + \beta = 2\sqrt[3]{A}$ şi $\varepsilon\alpha + \varepsilon^2\beta = \varepsilon^2\alpha + \varepsilon$ (rădăcină dublă), toate reale.

3) Dacă $\Delta < 0$, atunci Q admite două rădăcini complexe conjuga Notând cu α una dintre rădăcinile cubice ale lui A şi cu β conjugatul lui α, lui P vor fi $\alpha + \overline{\alpha}$, $\varepsilon\alpha + \overline{\varepsilon\alpha}$ şi $\varepsilon^2\alpha + \overline{\varepsilon^2\alpha}$, toate reale.

II. În cele ce urmează, vom studia submulţimile lui $\mathbb{C}$ definite prin:

$$A_i = \mathbb{Q}(\alpha_i) = \{R(\alpha_i) \mid R \in \mathbb{Q}[X]\}, \quad i = 1, 2, 3;$$
$$A = \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \{R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \mid R \in \mathbb{Q}[X_1, X_2, X_3]\}.$$

Propoziţia 2. *În raport cu operaţiile de adunare şi înmulţire a nume* *plexe, A_i se structurează ca un corp comutativ. În plus, A_i este un $\mathbb{Q}$-spaţ* *de dimensiune cel mult 3.*

Demonstraţie. Faptul că A_i este un inel integru, unitar şi $\mathbb{Q}$-spaţiu v verifică imediat. Dacă $R \in \mathbb{Q}[X]$, din teorema împărţirii cu rest rezultă c $P(X)C(X) + \lambda + \mu X + \nu X^2$ şi, cum $P(\alpha_i) = 0$, deducem că

$$A_i = \left\{\lambda + \mu\alpha_i + \nu\alpha_i^2 \mid \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{Q}\right\},$$

[1] Cercetător, Centrul de Calcul E. N. S. T., Paris

prin urmare $\{1, \alpha_i, \alpha_i^2\}$ constituie un sistem de generatori pentru $\mathbb{Q}$-spaţi
A_i; astfel , $\dim_{\mathbb{Q}} A_i \leq 3$. În sfârşit, pentru orice $a \in A_i \setminus \{0\}$, aplica
$A_i \to A_i$ definite prin $x \mapsto ax$ şi $x \mapsto xa$ sunt injective (A_i fiind int
surjective (A_i fiind spaţiu vectorial de dimensiune finită) şi atunci există
pentru care $aa' = a''a = 1$. Urmează uşor că $a' = a''$, deci A_i este corp.

Propoziţia 3. *Mulţimea A se structurează canonic drept corp com*
$\mathbb{Q}$-spaţiu vectorial de dimensiune cel mult 6.

Demonstraţie. Cum $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 0$, deducem că $A = \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbb{Q}$
Dar α_2 este rădăcină a polinomului $\dfrac{P(X)}{X-\alpha_1} = X^2 + \alpha X + \left(\alpha_1^2 + p\right) \in A$
urmare A va fi un A_1-spaţiu vectorial de dimensiune cel mult 2. Rezultă c
$\dim_{A_1} A \cdot \dim_{\mathbb{Q}} A_1 \leq 6$. Faptul că orice element nenul al lui A este in
demonstrează ca în Propoziţia 2.

III. Automorfismele algebrei A.

Să observăm că orice endomorfism al spaţiului vectorial A cu prop
$u(1) = 1$, $u(xy) = u(x)u(y)$, $\forall x, y \in A$ este în mod necesar bijectiv: dac
cu $x \neq 0$, atunci $1 = u(1) = u\left(xx^{-1}\right) = u(x)u\left(x^{-1}\right) = 0$, contradicţie,
injectiv, iar surjectivitatea urmează din faptul că $\dim A$ este finită.

Un astfel de endomorfism (de algebre) u va fi numit *automorfism*, ia
tuturor acestor automorfisme o vom nota $\operatorname{Aut} A$. În raport cu compunerea
$\operatorname{Aut} A$ se structurează în mod evident ca grup abelian.

Propoziţia 4. *În cazul în care P este un polinom reductibil peste*
$\dim A \in \{1, 2\}$; mai mult există doi indici distincţi i, j astfel încât $A =$
Dacă $\dim A = 1$, atunci $|\operatorname{Aut} A| = 1$, iar dacă $\dim A = 2$, atunci $|\operatorname{Aut} A|$

Demonstraţie. Cum P este reductibil peste $\mathbb{Q}$, atunci toate cele t
sunt raţionale şi atunci $A = A_1 = A_2 = A_3 = \mathbb{Q}$, iar $\dim_{\mathbb{Q}} A = 1$, sa
rădăcină, să zicem α_1, este raţională, caz în care $A_1 = \mathbb{Q}$, $A = A_2$
A_1-spaţiu vectorial de dimensiune 2, deci $\dim_{\mathbb{Q}} A = 2$.

Pentru orice $u \in \operatorname{Aut} A$ şi $x \in A$, avem că $u(x^n) = [u(x)]^n$, deci u
$R(u(x))$, $\forall R \in \mathbb{Q}[X]$. În particular, $P(u(\alpha_i)) = u(P(\alpha_i)) = u(0)$
$\forall i \in \{1, 2, 3\}$, $\exists j \in \{1, 2, 3\}$ a. î. $u(\alpha_i) = \alpha_j$; altfel spus, un automorfism u
o permutare a rădăcinilor.

Dacă $\dim A = 1$, deci când $A = \mathbb{Q}$, atunci pentru orice $x \in A$ avem
$u(x \cdot 1) = xu(1) = x$, deci $\operatorname{Aut} A = \{1_A\}$. Dacă $\dim A = 2$, fie $\alpha_i \in \mathbb{Q}$,
$\alpha_2 \neq \alpha_3$. Pentru $u \in \operatorname{Aut} A$ vom avea că $u(\alpha_1) = \alpha_1$. Dacă $u(\alpha_2) = \alpha_2$, u
iar $x = y + z\alpha_2$, $y, z \in \mathbb{Q}$, este un element al lui A, atunci $u(x) = y + z$
deci $u = 1_A$. Dacă $u(\alpha_2) = \alpha_3$, $u(\alpha_3) = \alpha_2$, atunci $u(x) = y + z\alpha$
să avem $u(xx') = u(x)u(x')$, $\forall x, x' \in A$, ceea ce revine la $u\left(\alpha_2^2\right) = [u$
această egalitate este realizată: am văzut în demonstraţia Propoziţiei 3
sunt rădăcinile polinomului $X^2+\alpha_1 X+\left(\alpha_1^2 + p\right) \in A_1[X]$, deci $\alpha_2^2 = -\alpha_1$
prin urmare $u\left(\alpha_2^2\right) = -\alpha_1\alpha_3 - \alpha_1^2 - p = \alpha_3^2 = [u(\alpha_2)]^2$. Astfel, în acest c
$\operatorname{Aut} A = \{1_A, u\}$.

Propoziţia 5. *Dacă P este ireductibil peste $\mathbb{Q}$, atunci:*

a) $\dim A \in \{3, 6\}$;

b) *Dacă* $\dim A = 6$ *şi* $u \in \operatorname{Aut} A$*, atunci există* $\sigma \in S_3$ *astfel încât* $u(\alpha$
$\forall i \in \{1,2,3\}$*, iar* $|\operatorname{Aut} A| = |S_3| = 6$*;*

c) *Dacă* $\dim A = 3$*, atunci* $|\operatorname{Aut} A| = 3$ *şi singurele elemente invaria*
orice automorfism sunt elementele lui $\mathbb{Q}$*.*

Demonstraţie. *a*) P fiind ireductibil, admite trei rădăcini distincte
(o eventuală rădăcină dublă ar anula P şi P', deci $(P, P') \in \mathbb{Q}[X]$ ar divi
astfel nu ar fi ireductibil). Cum α_i nu este rădăcină a unui polinom di
grad ≤ 2, atunci $\left\{1, \alpha_i, \alpha_i^2\right\}$ este sistem liniar independent şi astfel $\dim_{\mathbb{Q}} A$
$\alpha_2 \in A_1$, atunci $\alpha_3 = \alpha_1 - \alpha_2 \in A_1$, deci $A = A_1 = A_2 = A_3$ şi $\dim_{\mathbb{Q}} A$
$\alpha_2 \notin A_1$, atunci $\dim_{A_1} A = 2$, deci $\dim_{\mathbb{Q}} A = \dim_{A_1} A \cdot \dim_{\mathbb{Q}} A_1 = 6$.

b) Dacă $\dim_{\mathbb{Q}} A = 6$, o bază a lui A fiind $\left\{1, \alpha_1, \alpha_1^2, \alpha_2, \alpha_1\alpha_2, \alpha_1^2\alpha_2\right\}$ (v.
3), înseamnă că un automorfism u este bine determinat prin cunoaşterea e
$u(\alpha_1)$ şi $u(\alpha_2)$, pentru că u realizează şi aici o permutare a rădăcinilo
Propoziţia 4). Din comportarea lui u faţă de bază, rezultă că

$$u(1) = 1,\ u\left(\alpha_1^2\right) = [u(\alpha_1)]^2,\ u(\alpha_1\alpha_2) = u(\alpha_1)\, u(\alpha_2),\ u\left(\alpha_1^2\alpha_2\right) = [u(\alpha$$

aceste condiţii sunt suficiente pentru a demonstra că u este automorfism
Mai întâi, să arătăm că u este automorfism al lui A_1: o bază a acestui s
$\left\{1, \alpha_1, \alpha_1^2\right\}$, ar fi destul să arătăm că $u\left(\alpha_1^3\right) = [u(\alpha_1)]^3$ şi $u\left(\alpha_1^4\right) = [u(\alpha$
adevăr, avem:

$$u\left(\alpha_1^3\right) = u(-p\alpha_1 - q) = -pu(\alpha_1) - q = [u(\alpha_1)]^3;$$
$$u\left(\alpha_1^4\right) = u\left(-p\alpha_1^2 - q\alpha_1\right) = -p[u(\alpha_1)]^2 - qu(\alpha_1) = [u(\alpha_1)]^4.$$

Fie acum $x = y + z\alpha_2$, $x' = y' + z'\alpha_2$, cu $y, z, y', z' \in A_1$; trebuie s
că $u(xx') = u(x)\, u(x')$. Cum această proprietate are loc dacă $x \in A_2$ sa
rămâne să justificăm că $u\left(\alpha_2^2\right) = [u(\alpha_2)]^2$. Avem:

$$\alpha_2^2 = -\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1^2 - p \Rightarrow u\left(\alpha_2^2\right) = -\alpha_2\alpha_3 - \alpha_2^2 - p = \alpha_3^2 = [u(\alpha_2)$$

dat fiind că α_3 este rădăcină pentru $\dfrac{P(X)}{X - \alpha_2} = X^2 + \alpha X + \left(\alpha_2^2 + p\right)$
permutatrea asociată lui u este $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Obţinem astfel toate automorfismele lui A ca fiind asociate câte unei
din S_3, deci $|\operatorname{Aut} A| = |S_3| = 6$.

c) Conform celor demonstrate la *a*), dacă $\dim A = 3$, atunci $A = A_1 =$
baze a lui A fiind $\left\{1, \alpha_i, \alpha_i^2\right\}$, $i = 1, 2, 3$. Fie $u \in \operatorname{Aut} A$. Dacă exis
încât $u(\alpha_i) = \alpha_i$, atunci u invariază toate elementele unei baze, deci $u =$
$u \neq 1_A$, avem că $u(\alpha_1) = \alpha_2$ şi $u\left(\alpha_1^2\right) = \alpha_2^2$ sau $u(\alpha_1) = \alpha_3$ şi $u\left(\alpha_1^2\right) =$
automorfisme u sunt astfel unic determinate, deci $|\operatorname{Aut} A| = 3$ (automorfi
asociate ciclurilor de lungime 3 din S_3).

Căutăm acum elementele invariante pentru orice automorfism. Dacă
$x_2\alpha_1 + x_3\alpha_1^2 \in A$, atunci pentru $u \neq 1_A$ avem că $u(x) = x_1 + x_2\alpha_2$
$u^2(x) = x_1 + x_2\alpha_3 + x_3\alpha_3^2$. Egalitatea $x = u(x) = u^2(x)$ conduce, după
$x_2 + x_3(\alpha_2 + \alpha_1) = 0$, $x_2 + x_3(\alpha_3 + \alpha_1) = 0$. Dacă x_2 şi x_3 nu sunt an
atunci $\alpha_2 + \alpha_1 = \alpha_3 + \alpha_1$, deci $\alpha_2 = \alpha_3$, absurd. Rezultă că singurel
invariante pentru orice automorfism sunt elementele lui $\mathbb{Q}$.

NOTA ELEVULUI

Inegalităţi stabilite cu un procedeu de redu
a numărului de variabile - Mixing variab

Iurie BOREICO[1]***, Andrei CIUPAN***[2]

Prezentăm în cele ce urmează un procedeu mai recent de rezolvare a in
folosit adesea pentru rezolvarea inegalităţilor de tip olimpiadă. Ideea ce
acestuia este urmmătoarea: când avem de-a face cu inegalităţi, este co
transformăm o problemă ce comportă trei variabile într-una numai cu dou
sau să reducem inegalitatea la cazul când unul din numere este egal cu 0.
acest procedeu prin câteva probleme rezolvate în acest fel. Pornim cu o
simplă şi binecunoscută:

Exemplul 1. *Dacă $a+b+c=1$, să se arate că $a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}$.*

Soluţie. Să considerăm funcţia $f(a,b,c) = a^2+b^2+c^2-\frac{1}{3}$ şi să
$f(a,b,c) \geq 0$. Observăm că tripletele (a,b,c) şi $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right)$ au ac
şi evaluăm diferenţa

$$D = f(a,b,c) - f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right).$$

Se vede uşor că $D = \frac{1}{2}(a-b)^2 \geq 0$, adică $f(a,b,c) \geq f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right.$
fi de ajuns să demonstrăm că $f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right) \geq 0$, ceea ce este mai
Acest lucru este echivalent cu $\frac{(a+b)^2}{2}+c^2 \geq \frac{1}{3}$. Fiindcă $a+b+c=1$,
$a+b=1-c$, deci ne rămâne să demonstrăm că $(1-c)^2+2c^2 \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow (c\sqrt{3}-$
evident adevărată. Menţionăm că inegalitatea de mai sus are multe alte

Să ne ocupăm de probleme mai dificile, care au soluţii surprinzător
prin aceast procedeu.

Exemplul 2. *Dacă $a,b,c \geq 0$, să se arate că $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq$*

Soluţie. Fie $f(a,b,c) = \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{2}$. Vom arăta că
$f\left(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right)$. Explicitând şi apoi desfăcând parantezele, se obţine i
echivalentă $b^3+c^3+ab^2+ac^2 \geq 2abc+b^2c+bc^2$, inegalitate imedia
inegalităţii mediilor: $b^3+c^3 \geq b^2c+bc^2$ şi $a(b^2+c^2) \geq a \cdot 2bc$. Prin urma
să arătăm că $f(a,t,t) \geq 0$, unde $t = \frac{b+c}{2}$. Această relaţie este echi

[1] Elev, Chişinău
[2] Elev, Bucureşti

$\frac{a}{2t} + \frac{2t}{a+t} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow (a-t)^2 \geq 0$, adevărat. Deci problema este rezolvată.

Exemplul 3. *Dacă $a, b, c > 0$ şi $abc = 1$, atunci $a^2+b^2+c^2+3 \geq 2(ab$*

Soluţie. Fie $f(a,b,c) = a^2 + b^2 + c^2 + 3 - 2(ab + bc + ca)$. Cons
triplet convenabil, care să păstreze condiţia $abc = 1$. Un astfel de tripl
$(\sqrt{ab}, \sqrt{ab}, c)$. Avem $f(\sqrt{ab}, \sqrt{ab}, c) = ab + ab + c^2 + 3 - 2(ab + 2\sqrt{c}) = c^2$
Mai departe, $D = f(a,b,c) - f(\sqrt{ab}, \sqrt{ab}, c) = a^2 + b^2 + 4\sqrt{c} - 2(ab +$
$(a-b)^2 + 2c(2\sqrt{ab} - a - b)$, deci

$$D = (a-b)^2 - 2c(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = (a-b)^2 - 2c \cdot \frac{(a-b)^2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}.$$

Fiindcă relaţia din enunţ este simetrică, putem presupune că $c = \min\{a, b,$
deducem că $c < \sqrt{2}$. Asta înseamnă că $c^2 \leq 2 \Leftrightarrow 2ab \geq c \Rightarrow (\sqrt{a}$
$2c \Rightarrow (a-b)^2 - 2c \cdot \frac{(a-b)^2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \geq 0$, deci $D \geq 0$. Aşadar, rămâne să
$f(\sqrt{ab}, \sqrt{ab}, c) \geq 0 \Longleftrightarrow c^2 + 3 \geq 4\sqrt{c}$, adevărată din inegalitatea medi
patru numere.

Exemplul 4. *Dacă $a, b, c > 0$ şi $abc = 1$, atunci $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq$
$ab + bc + ca$.*

Soluţie. Să considerăm funcţia $f(a,b,c) = \sum a^2 - \sum a - \sum ab + 3$ şi
străm că $f(a,b,c) \geq 0$. Vom alege un triplet convenabil pe care să-l interc
$f(a,b,c)$ şi 0. Un astfel de triplet, la care şi produsul e invariant este $(\sqrt{}$
Se vede că $f(\sqrt{ab}, \sqrt{ab}, c) = c^2 + ab - 3 - 2\sqrt{ab} - c(1 + 2\sqrt{ab})$. At
$f(a,b,c) - f(\sqrt{ab}, \sqrt{ab}, c) = a^2 + b^2 - (a+b) - (bc+ca) - 2ab + 2\sqrt{a}$
Prin grupare convenabilă a termenilor, se obţine $D = (a-b)^2 - (\sqrt{a} - \sqrt{b}$
$(a-b)^2 - \frac{(a-b)^2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}(c+1)$, de unde $D = (a-b)^2 \left(1 - \frac{c+1}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}\right.$
inegalitatea din enunţ este simetrică, putem presupune că $c = \min\{a, b, c$
$c \leq 1$ şi $ab \geq 1$, de unde obţinem succesiv $c + 1 < 4 \leq 4\sqrt{ab} \leq ($
deci $\frac{c+1}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} - 1 < 0 \Rightarrow D \geq 0$. Deci, să demonstrăm că $f(\sqrt{ab}, \sqrt{ab}$
$c^2 + (1/\sqrt{c} - 1)^2 + 2 \geq c + 2\sqrt{c}$. Dar această relaţie din urmă este adevarat
$c^2 + 2 \geq 2c + 1 \geq c + 2\sqrt{c}$. În concluzie, problema este rezolvată.

Exemplul 5. *Se dau $a, b, c \geq 0$, cu $a + b + c = 3$. Atunci $\sqrt{a} +$
$ab + bc + ca$.*

(*Indicaţie.* Considerăm $f(a,b,c) = \sum \sqrt{a} - \sum ab$. Atunci

$$f(a,b,c) - f(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}) = \sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{2(b+c)} - bc + \frac{(b-c)}{2}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{2}\right)^2 \cdot \frac{(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2(\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{2(b+c)}) - 4}{\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{2(b+c)}}.$$

Cu presupunerea $a = \min\{a, b, c\}$ şi după efectuarea calculelor, se obţine
$f(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}) \geq 0$.)

Exemplul 6 (*Inegalitatea lui Schur*). *Dacă* $a, b, c \geq 0$ *şi* $r \geq 0$, *atunc*

$$a^r(a-b)(a-c) + b^r(b-a)(b-c) + c^r(c-a)(c-b) \geq 0.$$

Soluţie. Să considerăm $f(a,b,c) = a^r(a-b)(a-c) + b^r(b-a)(b-c) + c^r($
şi să demonstrăm că $f(a,b,c) \geq 0$. Se poate observa că $f(a,a,c) = c^r(c$
Rămâne să arătăm că $f(a,b,c) \geq f(a,a,c) \Leftrightarrow f(a,b,c) - f(a,a,c) \geq 0$. D
calcul ne arată că $f(a,b,c) - f(a,a,c) = (a-b)\left[(a-c)(a^r - c^r) + b^r(c\right.$
dacă considerăm ordonarea $a \geq c \geq b$, permisă de simetria inegalităţii
Prin urmare, $f(a,b,c) \geq f(a,a,c) \geq 0$ şi inegalitatea este demonstrată.

Exemplul 7. *Dacă* $a, b, c \geq 0$, $a + b + c = 1$, *atunci* $a^2b + b^2c + c^2a \leq$

Soluţie. Se observă că alegerile de triplete folosite în exemplele pre
mai duc la rezolvarea problemei; este nevoie de alegerea unui triplet inspi
că "ghicim" şi verificăm că egalitatea are loc dacă $a = 0$, $b = \frac{1}{3}$, $c = \frac{2}{3}$
un alt triplet care să ilustreze acest caz de egalitate. Mai întâi, consider
$f(a,b,c) = a^2b + b^2c + c^2a - \frac{4}{27}$, apoi evaluăm diferenţa $D = f(a,b,c) - f($
Obţinem $D = -a\left(bc - (c-a)(c-b)\right)$. Atunci când c este între a şi b,
$D \leq 0$ (putem face această presupunere, deoarece inegalitatea din enunţ
în cele trei variabile). Deci ar fi de ajuns să demonstrăm că $f(0, a+$
Deoarece $a + b + c = 1$, relaţia precedentă este echivalentă cu $(a+b)^2$
$2c(1-c)(1-c) \leq \frac{8}{27}$, care rezultă direct din inegalitatea mediilor.

Exemplul 8. *Dacă* $a, b, c \geq 0$ *şi* $a + b + c = 3$, *să se afle maximul ex*

$$E(a,b,c) = ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a).$$

Soluţie. Dacă $a = b = c = 1$, atunci expresia are valoarea 6, care nu est
ei. Însă vedem că, dacă luăm un numar egal cu 0 şi celelalte două egale c
expresia ia valoarea $\frac{27}{4}$. Vom arăta că acesta este maximul expresiei. C
funcţia $f(a,b,c) = ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) - \frac{27}{4}$. Cu presupunerea
obţinem $f(a,b,c) - f(a+b,c,0) = a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) - (a+b)^2c -$
$ab(a+b-2c) \leq 0$. Cum $f(a+b,c,0) \leq 0 \Leftrightarrow (a+b) \cdot c \cdot (a+b+c) \leq \frac{27}{4} \Leftrightarrow ($
(adevărată din inegalitatea mediilor!), problema este rezolvată.

Exemplul 9 (*Inegalitatea lui Turkevici*). *Dacă* $a, b, c, d \geq 0$, *atunci*

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd \geq a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2$$

(*Indicaţie.* Notăm $f(a,b,c,d) = \sum a^4 + 2abcd - \sum a^2b^2$. Presupună
$a \leq b \leq c \leq d$, se arată că $f(a,b,c,d) \geq f(a,b,c,c) \geq f(a,b,b,b) \geq f(a,a,$

Exemplul 10. *Dacă* $a, b, c \geq 0$, *să se arate că* $(a+b+c)^5 \geq 81abc\left(a^2\right.$

Soluţia 1. Inegalitatea din enunţ fiind omogenă, putem presupune
$c = 3$. Astfel, rămâne să demonstrăm că $abc\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \leq 3$. Fie

$abc\left(a^2+b^2+c^2\right)-3$. Se arată că $f\left(a,\dfrac{b+c}{2},\dfrac{b+c}{2}\right)-f(a,b,c)\geq 0$
$f\left(a,\dfrac{b+c}{2},\dfrac{b+c}{2}\right)\leq 0$ în urma unor calcule de rutină.

Soluţia 2. Se ţine cont din nou de omogenitatea inegalităţii din e
presupune $abc=1$. Pentru a demonstra că $(a+b+c)^6\geq 81(a^2+b$
procedează astfel: arătăm că $f(a,b,c)\geq f(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc})\geq 0$, unde f
$(a+b+c)^6-81(a^2+b^2+c^2)$.

Soluţia 3. Vom demonstra inegalitatea din enunţ fără a folosi metod
variables", pentru a arăta că, deşi aceasta metodă este eficienta pentru
foarte mare de probleme, pot exista şi soluţii mai simple. Folosind bin
inegalitate $(ab+bc+ca)^2\geq 3abc(a+b+c)$, deducem că $abc\leq\dfrac{(ab+bc+}{3(a+b-}$
ar fi de ajuns să demonstrăm că $(a+b+c)^6\geq 27\left(ab+bc+ca\right)^2\left(a^2+b^2\right.$
putea finaliza rezolvarea tot prin mixing variables, dar alegem inegalitate

$$(a+b+c)^2=\sum a^2+\sum ab+\sum ab\geq 3\sqrt[3]{\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(ab+bc+\right.}$$

de unde, prin ridicare la puterea a treia, rezultă chiar inegalitatea căutat

Exemplul 11. *Se dau $a,b,c\geq 0$, astfel încât $ab+bc+ca=1$. Să se af*
expresiei $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}$.

(*Indicaţie.* Minumul este $\dfrac{5}{2}$, şi se obţine când două din numere sunt
şi celălalt este 0. Putem considera două triplete pentru compararea c
şi cu 0: *a*) $f(a,b,c)\geq f(a,t,t)\geq 0$, $t=\sqrt{(a+b)(a+c)}-a$; *b*) f
$f\left(0,\dfrac{1}{a+b},a+b\right)\geq 0$.)

Aplicaţii

1. Se dau $x,y,z\geq 0$ şi $x+y+z=3$; să se arate că $x^2+y^2+z^2+x$
2. Se dau $a,b,c>0$, $abc=1$; să se arate că $3(a^2+b^2+c^2)+23\geq$
$\geq 4\left(a+1\right)\left(b+1\right)\left(c+1\right)$.

3. Dacă $a,b,c>0$ şi $abc=1$, să se arate că $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{6}{a+b+c}\geq$

4. Fie $a,b,c\geq 0$, $a+b+c=1$. Să se arate că $a^2b+b^2c+c^2a+abc\leq$

5. Dacă $a,b,c\geq 0$, să se arate că $\left(\dfrac{1}{(a+b)^2}+\dfrac{1}{(b+c)^2}+\dfrac{1}{(c+a)^2}\right)(ab$
$\geq\dfrac{9}{4}$ (*Olimpiadă Iran, 1996*).

6. Dacă $a,b,c\in[\dfrac{1}{3};3]$, să se arate că $\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{c}{c+a}\geq\dfrac{7}{5}$.

7. Fie $a,b,c>0$ şi $abc=1$. Să se arate că $2(a^2+b^2+c^2)+18\geq 3(a+1)(b$
8. Numerele reale a, b, c satisfac relaţia $a^2+b^2+c^2=9$. Să s
$2\left(x+y+z\right)-xyz\leq 10$ (*Test de selecţie, Vietnam*).
9. Dacă $a,b,c\geq 0$, să se arate că $\left(a+b+c\right)^4\geq 16\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right.$

10. Dacă $a, b, c \geq 0$ şi $a + b + c = 1$, atunci să se arate că

$$\left(a^2 + b^2\right)\left(b^2 + c^2\right)\left(c^2 + a^2\right) \geq 8 \cdot \left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right)^2.$$

11. Dacă $a, b, c \geq 0$ cu $a + b + c = 3$ şi $k \geq 0$, să se afle valoarea expresiei

$E_{a,b,c} = ab(a+b+k) + bc(b+c+k) + ca(c+a+k)$ (*Andrei Ciupan*

12. Se dau numerele reale pozitive $a_1, a_2 \ldots a_n$ astfel încât $a_1^2 + a_2^2 + \cdots +$ se afle maximul expresiei $E = (1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)$ (*Baraj,Seniori,Ron*

Bibliografie

1. **V. Cârtoaje** - *Algebraic Inequalities*, Editura GIL, 2006.
2. **M. O. Drâmbe** - *Inegalităţi - Idei şi Metode*, Editura GIL, 2003.
3. Site MathLinks: www.mathlinks.ro .

Din partea redacţiei

De-a lungul celor nouă ani de apariţie a *Recreaţiilor Matematice*, am av de a urmări evoluţia multor elevi de excepţie. Probleme şi note semnat **Dospinescu**, *elev*, *Oneşti*, au fost urmate de altele semnate de acelaşi, d *Bucureşti*, şi apoi *student*, *Paris*. Alţi tineri, precum **Oana Cârjă**, **Cez** **Irina Mustaţă**, **Marius Pachiţariu** (pentru a-i aminti măcar pe premi tei) şi-au făcut ucenicia în paginile *Recreaţiilor*, fiind acum studenţi emine universităţi prestigioase.

Parcă însă nicio promoţie nu ne-a adus atâţia colaboratori ca aceea c şi-a încheiat studiile liceale în 2007. Ne facem o plăcută datorie de a ami acestor proaspeţi studenţi (majoritatea la facultăţi de matematică):

Adrian Zahariuc, Bacău (o notă matematică, 15 probleme propuse)

Alexandru Negrescu, Botoşani (două note matematice, 10 problem

Iurie Boreico, Chişinău (o notă matematică, 2 probleme propuse);

Vlad Emanuel, Sibiu (6 probleme propuse, cel mai bun rezolvitor);

Bogdan Ciacoi, Gherla (două note matematice, 1 problemă propusă

Alături de aceştia, au mai publicat o notă **Anca Timofte** şi **Alexan** **canu** (Botoşani), au propus probleme originale **Cristian Săvescu** (Focşan **dra Vâlcu**, **Iulia Zanoschi**, **Florin Asăvoaie** (toţi din Iaşi), au fost cu soluţii deosebite ale unor probleme **Dana Timofte**, **Diana Proda** **Hamciuc** (Iaşi), au primit premii acordate rezolvitorilor **Ciprian Cost** **Ciucanu**, **Mihai Dănăilă**, **Mircea Avram**, **Andrei Tofan**, **Călin Tu** **fana Brănişteanu**, **Alina Andriescu** şi **Irina Pruteanu**.

Tuturor le mulţumim, le dorim succes în viitor şi pe toţi îi aşteptăm în alături de *Recreaţii Matematice*!

Asupra unei probleme de concurs

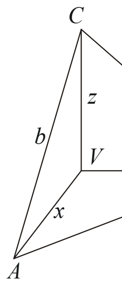
***Julieta GRIGORAŞ*[1], *Claudiu-Ştefan POPA*[2]**

În cele ce urmează vom vedea *cum se face o Notă* plecând de la o proble
şi comună şi utilizând mijloace elementare. Aşadar, un îndemn la crea
Punctul de pornire este cea de-a doua problemă propusă la *Concursul "*
Câmpan", etapa judeţeană, clasa a VIII-a, al cărei enunţ poate fi găsit în a
al revistei la pag. 116

Cerinţa de la primul punct al acestei probleme este, după cum au c
câţiva candidaţi, o consecinţă imediată a faptului că, în ipoteza problemei
considerată este una regulată. Vom indica şi alte condiţii, asemănătoar
problema sursă, care să implice o piramidă regulată. Mai întâi însă, vom
şi vom rezolva problema iniţială.

Problema 1. *Fie $VABC$ o piramidă triunghiulară regulată cu VA*
$VC \perp VA$. Notăm $x = VA$, $y = VB$, $z = VC$, $a = BC$, $b = AC$ şi c
ipoteza că

$$xa = yb = zc,$$



piramida $VABC$ este regulată.

Soluţie. Cum $a = \sqrt{y^2+z^2}$, $b = \sqrt{x^2+z^2}$, $c = \sqrt{x^2+y^2}$ $(*)$, condiţia (1) devine $x^2\left(y^2+z^2\right) = y^2\left(x^2+z^2\right) = z^2\left(x^2+y^2\right)$. După desfacerea parantezelor şi reducerea lui x^2y^2, din prima egalitate obţinem că $x = y$ şi analog $y = z$, prin urmare $VA = VB = VC$. Apoi, $a = b = c = x\sqrt{2}$ şi deducem că $VABC$ este piramidă regulată.

Problema 2. *Dacă în ipoteza Problemei 1 înlocuim condiţia* (1) *cu*

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c},^{3}$$

atunci $VABC$ este piramidă regulată.

Soluţie. Din (2) obţinem, folosind $(*)$ şi proprietatea şirului de rapo
că $\dfrac{x^2}{y^2+z^2} = \dfrac{y^2}{x^2+z^2} = \dfrac{z^2}{x^2+y^2} = \dfrac{x^2+y^2+z^2}{2\left(x^2+y^2+z^2\right)} = \dfrac{1}{2}$, de unde $2x^2$
$2y^2 = x^2 + z^2$ şi $2z^2 = x^2 + y^2$. Scăzând două câte două aceste relaţii,
$x = y = z$ şi apoi $a = b = c = x\sqrt{2}$.

Problema 3. *Dacă în ipoteza Problemei 1 înlocuim condiţia* (1) *cu*

$$x + a = y + b = z + c,^{3}$$

atunci $VABC$ este piramidă regulată.

---

[1] Profesor, Liceul Teoretic "V. Alecsandri", Iaşi

[2] Profesor, Şcoala "A. Russo", Iaşi

[3] **Nota redacţiei.** Un tetraedru (arbitrar) care verifică condiţia $VA \perp VB \perp$
se numeşte *tridreptunghic*, care verifică (2) – *izodinamic*, iar care verifică (3) – *Crelle* (**D.**
Aniţa, C. Cocea - *Planul şi spaţiul euclidian*, pp. 245, 255, 251).

Soluţie. Observăm, ţinând seama de $(*)$, că

$$(3) \Leftrightarrow x^2 + a^2 + 2xa = y^2 + b^2 + 2yb = z^2 + c^2 + 2zc \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \left(y^2 + z^2\right) + 2xa = y^2 + \left(x^2 + z^2\right) + 2yb = z^2 + \left(x^2 + y^2\right) + 2z$$

şi astfel Problema 3 se reduce la Problema 1.

Problema 4. *Dacă în ipoteza Problemei 1 înlocuim condiţia* (1) *cu*

$$|x - a| = |y - b| = |z - c|,$$

atunci $VABC$ este priramidă regulată.

Soluţie. Calculele sunt analoage cu cele din soluţia Problemei 3.

Apare întrebarea: ce se întâmplă dacă înlocuim a, b, c cu o permutare
lor? Vom arăta că şi în această situaţie piramida este regulată.

Problema 1′. *Dacă în ipoteza Problemei 1 înlocuim condiţia* (1) *cu*

$$xb = yc = za,$$

priramida $VABC$ este regulată.

Soluţie. Observăm întâi că, dacă două dintre numerele a, b, c sunt eg
uşor că sunt egale toate trei; prin urmare, a, b şi c sunt fie distincte două
fie egale între ele. Presupunem prin absurd că ne putem situa în primul
ordona numerele a, b, c; fie $a < b < c$. Atunci:

$$a^2 < b^2 < c^2 \Leftrightarrow z^2 + y^2 < x^2 + z^2 < x^2 + y^2 \Leftrightarrow z < y < x.$$

Pe de altă parte, din $(1')$ rezultă că $z > x > y$ şi ajungem astfel la o co
Rămâne că $a = b = c$, apoi $x = y = z$, deci $VABC$ este piramidă regulat

Problema 2′. *Dacă în ipoteza Problemei 1 înlocuim condiţia* (1) *cu*

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{c} = \frac{z}{a},$$

atunci $VABC$ este piramidă regulată.

Soluţie. Avem succesiv:

$$(2') \Leftrightarrow \frac{x^2}{x^2 + z^2} = \frac{y^2}{x^2 + y^2} = \frac{z^2}{y^2 + z^2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x^2 + z^2 - x^2} = \frac{y^2}{x^2 + y^2 - }$$

$$= \frac{z^2}{y^2 + z^2 - z^2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{z^2} = \frac{y^2}{x^2} = \frac{z^2}{y^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2} = 1,$$

de unde $x = y = z$, apoi $a = b = c$.

Observaţie. Dacă înlocuim $(2')$ cu $\frac{x}{c} = \frac{y}{a} = \frac{z}{b}$ $(2'')$, concluzia se
cu aceleaşi calcule. Dacă însă înlocuim $(2')$ cu $\frac{x}{a} = \frac{y}{c} = \frac{z}{b}$ $(2''')$, co
păstrează, cu o justificare puţin diferită:

$$(2''') \Leftrightarrow \frac{x^2}{z^2 + y^2} = \frac{y^2}{x^2 + y^2} = \frac{z^2}{x^2 + z^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2\left(x^2 + y^2 + z^2\right)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 = y^2 + z^2,\ 2y^2 = x^2 + y^2,\ 2z^2 = x^2 + z^2 \Leftrightarrow x = y = z.$$

Lăsăm în seama cititorului formularea problememlor $3'$ şi $4'$; soluţii
similare cu cele ale Problemei $1'$.

Concluzionăm că, dacă $x * u = y * v = z * t$, unde "$*$" este una dintre
aritmetice $+$, $-$, $\cdot$, $:$, iar u, v, t rezprezintă o permutare oarecare a numere
atunci piramida este regulată. Se obţin în acest fel 24 de probleme distin

MATEMATICA ÎN CLASELE PR

Intuirea proprietăţilor operaţiilor aritmeti utilizând metodele figurative

Petru ASAFTEI[1]

Este cunoscut faptul că în clasele primare se evidenţiază, fără utilizarea giei, unele proprietăţi ale operaţiilor lor. Cunoştinţele clare despre aceste se obţin dacă se porneşte de la un suport material intuitiv. În cazul de f rialul intuitiv va fi format din reţele de puncte în plan, structurate în aş elevii să sesizeze proprietăţile operaţiilor, bineînţeles, cu ajutorul explica de învăţător. Vom construi modele figurative pentru următoarele propriet tativitatea înmulţirii, asociativitatea înmulţirii, distributivitatea înmulţi adunare şi distributivitatea înmulţirii faţă de scădere.

1. *Comutativitatea înmulţirii*

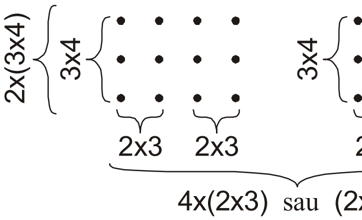
Această configuraţie de puncte poate fi privită în două moduri:

– primul, de jos în sus, care pune în evidenţă că se repetă 3 linii cu câte 4 puncte în fiecare linie, ceea ce înseamnă 3×4;

– al doilea de la stânga la dreapta, care pune în evidenţă că se repetă 4 coloane cu câte 3 puncte în fiecare coloană, ceea ce înseamnă

Generalizarea se face în mod natural, tot pe baza unei reţele de puncte formată din a linii şi b coloane. Prin analogie cu raţionamentul preceden $a \times b = b \times a$.

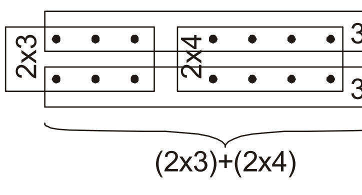
2. *Asociativitatea înmulţirii*



Raţionamentul matematic are la bază împărţirea reţelei în două submulţimi de puncte, fiecare formată din 3 linii şi 4 coloane. Prin analogie cu cazul precedent, constatăm că $2 \times (3 \times 4)$ şi $(2 \times 3) \times 4$ reprezintă *tot atât* şi scriem $2 \times (3 \times 4) = (2 \times 3) \times 4$.

Generalizarea acestei proprietăţi nu este evidentă. Produsul 2×3 trec ceea ce înseamnă un tablou cu a coloane şi b puncte în fiecare coloană. Rep tablou de c ori şi obţinem $c \times (a \times b) = (a \times b) \times c$. Pe de altă parte, să c din fiecare tablou o singură coloană; formăm în acest fel a tablouri cu puncte în fiecare linie. Ca urmare, obţinem $a \times (b \times c)$. Numărul total nu s-a schimbat, ceea ce înseamnă că $(a \times b) \times c$ şi $a \times (b \times c)$ reprezintă scriem $(a \times b) \times c = (a \times b) \times c$.

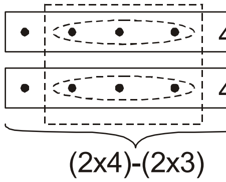
3. *Distributivitatea înmulţirii faţă de adunare*



Se constată că $2 \times (3 + 4)$ şi $(2 \times 3) + (2 \times 4)$ reprezintă *tot atât* şi scriem $2 \times (3 + 4) = (2 \times 3) + (2 \times 4)$.

[1] Profesor, Şcoala Normală "Vasile Lupu", Iaşi

Pentru generalizare trebuie să trecem 2×3 în $a\times b$, iar 2×4 în $a\times c$ şi vom
$(a \times b)+(a \times c)$ şi $a\times(b + c)$ reprezintă *tot atât*. Scriem $a\times(b + c) = (a \times b$



4. *Distributivitatea înmulţirii faţă de scădere*

Expresiile $2 \times (4 - 3)$ şi $(2 \times 4) - (2 \times 3)$ reprezintă *tot atât* şi scriem $2\times(4 - 3) = (2 \times 4) - (2 \times 3)$. Pentru generalizare trecem 2×4 în $a \times b$ şi 2×3 în $a \times c$, cu $b \geq c$. În continuare, raţionamentul este analog. Obţinem $2 \times (4 - 3) = (2 \times 4) - (2 \times 3)$.

Observaţie. Utilizarea modelelor figurative, de exemplu cazurile 3
tribuie la înţelegerea algoritmului de rezolvare a exerciţiilor care conţin p

---

ASOCIAŢIA "RECREAŢII MATEMATIC

La data de 14.02.2005 a luat fiinţă **ASOCIAŢIA "RECREAŢI
MATICE"**, cu sediul în Iaşi (str. Aurora, nr. 3, sc. D, ap. 6), având ca
jinirea activităţilor de matematică specifice învăţământului preuniversit
zarea şi desfăşurarea de activităţi care să contribuie la dezvoltarea gust
matematică în rândurile elevilor, profesorilor şi iubitorilor de matematic
larea preocupărilor şi cercetărilor originale.

Obiectivele majore pentru atingerea scopului propus sunt:

1. editarea unei reviste destinată elevilor şi profesorilor – **revista "
Matematice"**;

2. fondarea unei biblioteci de matematică elementară – **biblioteca "
Matematice"**;

3. alcătuirea unei colecţii de cărţi de matematică elementară, cărţi d
şi aflate la prima apariţie – **Colecţia "Recreaţii Matematice"**.

Poate deveni membru al Asociaţiei, printr-o simplă completare a une
orice perosană care aderă la obiectivele acesteia şi sprijină realizarea lor.

Membri de onoare ai Asociaţiei, academicienii: **Constantin Cor**
Radu Miron

Vizitaţi pe Internet revista "Recreaţii Matematice" la
http://www.recreatiimatematice.uv.ro

Jensen's inequality for non-convex functio

Holger STEPHAN[1]

Jensen's inequality is well known: Let $f(x)$ be a convex function on
$x_1, ..., x_n \in I$ and $q_i \geq 0$ are weights with $\sum_i q_i = 1$. Then, Jensen's inequ

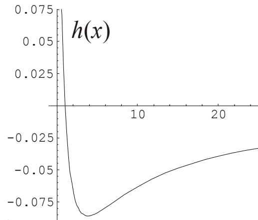
$$\sum_{i=1}^{n} q_i f(x_i) \geq f\Big(\sum_{i=1}^{n} q_i x_i\Big)$$

holds.

This inequality is in some sense equivalent to the definition of convex
why, it is not well known that Jensen's inequality holds even for non-conve
(moreover, this is believed to be false).

Let's start with an easy contest problem (from the journal $^{Die}\sqrt[]{wur}$
05/2005, problem $\mu 19$):

Let $x_1, \ldots, x_n$ be positive real numbers with $x_1 + \cdots + x_n = n$. Prove the following inequality.



$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+x_i} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{3+x_i} \qquad (1)$$

We use Jensen's inequality with the function

$$h(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{2}{3+x} = \frac{1-x}{(1+x)(3+x)} .$$

and the weights $q_i = \frac{1}{n}$. We get

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{1+x_i} - \frac{2}{3+x_i} \right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} h(x_i) \geq h\Big(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i\Big) = h(1) =$$

and therefore (1). The result is true but the proof is false, because $h(x)$ is
for $x > 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} = 6.69464\ldots$ (see the picture). Why does the
holds, nevertheless? To investigate this question, we try to prove Jensen's
deriving an identity for it. We fix $x_0 = \sum\limits_{i=1}^{n} q_i x_i$ and define a function

$$g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(for $x = x_0$ we define $g(x_0) = f'(x_0)$). Now, we set

$$X = \sum_{i=1}^{n} q_i f(x_i) - f\Big(\sum_{i=1}^{n} q_i x_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} q_i f(x_i) - f(x_0)$$

and check, when does $X \geq 0$ hold. Using easy calculations, we obtain

[1] Cercetător dr., Institutul Weierstrass, Berlin (e-mail: `stephan@wias-berlin.de`)

$$X = \sum_{i=1}^{n} q_i f(x_i) - f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} q_i \big(f(x_i) - f(x_0)\big) = \sum_{i=1}^{n} q_i \frac{f(x_i) - f(x_0)}{x_i - x_0} (x$$

$$= \sum_{i=1}^{n} q_i g(x_i)\,(x_i - x_0) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i) q_i \Big(x_i \sum_{j=1}^{n} q_j - \sum_{j=1}^{n} q_j x_j\Big) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} q_i q_j x_i g(x_i) - \sum_{i,j=1}^{n} q_i q_j x_j g(x_i) = \sum_{i,j=1}^{n} q_i q_j \big(x_i g(x_i) - x_j g(x_i)\big) =$$

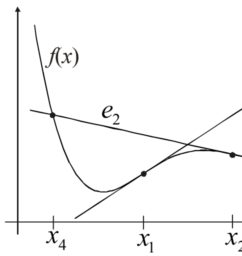
$$= \sum_{1 \le j < i \le n} q_i q_j (x_i - x_j)\big(g(x_i) - g(x_j)\big).$$

Thus, we get the identity

$$X = \sum_{i=1}^{n} q_i f(x_i) - f\Big(\sum_{i=1}^{n} q_i x_i\Big) = \sum_{1 \le j < i \le n} q_i q_j (x_i - x_j)\big(g(x_i) - g(x$$

We see that $X \ge 0$ holds, if the function $g(x)$ is monotone increasing. Th
$g(x)$ is called slope function. $g(x)$ is the slope of the secant through th
x_0 and x. If $f(x)$ in convex, $g(x)$ is increasing for any point x_0. But this
only case. Function $g(x)$ is increasing, if looking from the point $(x_0, f(x$
graph of $f(x)$, no point of $f(x)$ "lies in the shadow" of the graph. This c
for some points x_0 even if the function is not convex. The function $h(x)$ a
example (here is $x_0 = 1$).

An other amazing example are polynomials of fourth order – typical non-convex functions. We consider such a function $f(x)$ and its inflection points (the x-coordinates are x_1 and x_2). The inflection point tangents e_1 and e_2 intersect the graph of $f(x)$ in points with x-coordinates x_3 and x_4. Now, Jensen's inequality holds for $x_0 \ge x_3$ or $x_0 \le x_4$.



The typical proof of Jensen's inequality starts from the inequality
functions

$$(x_i - x_0) f'(x_0) \le f(x_i) - f(x_0) \le (x_i - x_0) f'(x_i)$$

Multiplying by q_i and adding up over i we get

$$\sum_{i=1}^{n} q_i (x_i - x_0) f'(x_0) \le \sum_{i=1}^{n} q_i f(x_i) - f(x_0) \sum_{i=1}^{n} q_i \le \sum_{i=1}^{n} q_i (x_i - x_0) f$$

The left hand side in zero because of $\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$ and $\sum_{i=1}^{n} q_i x_i = x_0$. The m
and transforming the right hand sind in a similar way as above (3) we ob

$$0 \le \sum_{i=1}^{n} q_i f(x_i) - f\Big(\sum_{i=1}^{n} q_i x_i\Big) \le \sum_{1 \le j < i \le n} q_i q_j (x_i - x_j)\big(f'(x_i) - f'($$

This is similar to identity (3), but holds only for convex functions.

Moreover, identity (3) is very useful, if we are not only interested i
inequality, but if we want to estimate the difference on the left hand side

Concursul de Matematică "Al. Myller"

Ediţia a V-a, Iaşi, martie 2007

Clasa a IV-a

1. Dacă $a = 2$ şi $b + c = 5$, calculaţi $a \times b + a \times c$.

2. Suma a două numere este 75. Dacă din primul scădem 45 şi la al doil 10, obţinem numere egale. Să se afle cele două numere.

3. Aflaţi $a \times b \times c$, unde b este dublul lui a, a este dublul lui c, iar $a +$

4. Produsul a 7 numere naturale este 7. Aflaţi suma numerelor.

5. Pentru numerotarea paginilor unei reviste sunt necesare 135 cifre. C are revista?

6. Numerele naturale nenule distincte a şi b sunt cele mai mici p împărţirile $a : 2 : 2 : 2 : 2$ şi $b : 2 : 2 : 2 : 2$ se efectuează exact. Aflaţi $a + b$

7. Aflaţi ce număr se măreşte cu 2007 când adăugăm la dreapta lui ci

8. Un profesor are un număr de caiete şi jumătate din numărul acestor Distribuind câte 3 caiete fiecărui elev mai rămân 3 caiete, iar distribu creioane fiecărui elev, rămân 3 elevi fără creioane. Care este numărul elev

9. Albă ca Zăpada şi cei şapte pitici au suma vârstelor 185 de ani. Ştii ca Zăpada este cu patru ani mai tânără decât cel mai tânăr pitic, iar vârste sunt numere naturale consecutive, aflaţi vârsta Albei ca Zăpada.

10. Setilă bea la o masă obişnuită 5 butoaie de apă, iar când este îns butoaie. Dacă a băut 39 de butoaie, la câte mese a fost Setilă însetat?

11. Ştefan trebuie sa înmulţească numărul 223 cu un număr format consecutive. Din greşeală, el a schimbat ordinea acestor cifre consecutive ş alt produs. Care este diferenţa celor două produse?

12. Primul termen al unui şir de numere naturale este $1 + 2 + 3$, al $2 + 3 + 4 + 5$, al treilea este $3 + 4 + 5 + 6 + 7$ şi aşa mai departe. Aflaţi val de-al 50-lea termen al şirului.

13. Suma a 2 numere A şi B este 150. Dacă ştergem una din cifre obţine B. Găsiţi toate numerele A şi B cu această proprietate.

14. O minge se ridică la trei sferturi din distanţa de la care cade. D dată i se dă drumul de la 64 metri, care este distanţa totală parcursă de m când atinge pământul a patra oară?

15. Pe o tablă sunt scrise numerele 1, 2, 3, ... , 100. Lucian şi Dan rând numerele de pe tablă astfel: mai întâi Lucian şterge numerele de impare, apoi Dana şterge numerele de pe locurile pare din şirul rămas. Lu din nou numerele de pe locurile impare din noul şir şi aşa mai departe. ultimul număr rămas pe tablă?

Clasa a V-a

1. Care sunt elementele mulţimii $A = \{2x \in \mathbb{N} \mid 100 \leq x < 103\}$?

2. Care este paritatea numărului $N = (3n+2)(2n+3)$, dacă n este
natural impar?

3. Determinaţi suma celor mai mari două pătrate perfecte impare de

4. Găsiţi numărul natural de două cifre egal cu triplul sumei cifrelor s

5. Care este cardinalul mulţimii $M = \{x \in \mathbb{N}^* \mid 2^x < 1025\}$?

6. Calculaţi suma $S = \dfrac{42}{43} + \dfrac{4242}{4343} + \dfrac{424242}{434343}$.

7. La un concurs se dau 30 de probleme. Pentru fiecare răspuns corec
5 puncte, iar pentru fiecare răspuns greşit se scad 3 puncte. Câte răspuns
a dat un elev care a obţinut 94 de puncte?

8. Scrieţi numărul 200 ca sumă de puteri ale lui 2.

9. Determinaţi toate perechile de numere naturale pentru care $m^2(n$ -

10. Care este cea mai mare fracţie de forma $\dfrac{\overline{ab}}{\overline{x3y}}$ mai mică decât
multiplu de 10?

11. Restul împărţirii numărului $3a + b$ la 23 este 11, iar câtul este
paritatea câtului împărţirii lui $3a + b - c$ la 11.

12. Fie numărul $n = 9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{99999\cdots99}_{2007}$. Câte cifre de 1
la scrierea lui n în baza 10?

13. Considerăm numerele $a = 2^{2005}$, $b = 2^{2006}$, $c = 2^{2007}$. Care este u
a numărului $N = 2a + 3b + 4c$?

14. Ştiind că numerele naturale a şi b dau la împărţirea prin 2001 res
şi respectiv 1999, determinaţi restul împărţirii la 667 a numărului $2a + 3$

15. Se dă şirul de numere naturale $1,\ 2 \cdot 3,\ 4 \cdot 5 \cdot 6,\ 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10, \ldots$. C
50-lea termen al şirului?

Clasa a VI-a

1. Numărul x pentru care $x^2 + x - y - 4 = 0$, unde $x, y \in \mathbb{N}$ şi y nu
este ...

2. Raportul dintre un număr natural şi inversul său este 9; atunci su
număr şi invers este ...

3. Dintre numerele 729^{100} şi 246^{150} mai mare este ...

4. Trei fraţi vor să-şi împartă între ei 240 de nuci. Ei hotărăsc să
în părţi direct proporţionale cu numerele 2, 3 şi 5 şi apoi să dea câte 25
primite surorii mai mici, care astfel a primit ... nuci.

5. Numărul de trei cifre egal cu de 15 ori suma cifrelor sale este ...

6. Cel mai mic multiplu de 5 cu suma cifrelor 44 este ...

7. Un muncitor lucrează piese trei zile astfel încât 20% din producţia f
este cât $\dfrac{1}{6}$ din producţia zilei următoare. Astfel, a treia zi a lucrat cu 55
mult ca în prima zi. A treia zi a lucrat ... piese.

8. Ştiind că raportul dintre suplementul sumei a două unghiuri adiacen
suplementelor lor este $\dfrac{1}{3}$, măsura unghiului format de bisectoarele lor este

9. Cel mai mic număr de forma $\overline{xyz}$ $(x < y < z)$ divizibil cu 12 este .

10. Cardinalul mulţimii $M = \left\{x \in \mathbb{N} \mid x = \frac{n+80}{n-10},\ n \in \mathbb{N}\right\}$ este ...

11. Numărul natural care are exact trei divizori naturali, iar suma
este 183 este ...

12. Cel mai mic număr natural de trei cifre care împărţit pe rând la 2
dă resturi diferite nenule este ...

13. Un unghi XOY cu măsura de $179°$ este împărţit de 17 semidr
unghiuri, cu măsurile exprimate prin numere naturale nenule, distincte
mare unghi posibil dintre cele 18 este ...

14. Fie triunghiul ABC, $(AM$ bisectoarea unghiului BAC şi $AD \perp$
$D, M \in (BC)$. Dacă $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{DAM})$ şi $m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{AMD}) = 1$
$\widehat{BAC}$ are măsura ...

15. Fie mulţimea $A = \{1, 4, 7, 10, 13, \ldots, 100\}$ şi B o submulţime
elemente având proprietatea că, la orice alegere a celor n elemente din A
cel puţin două cu suma 104. Valoarea minimă a lui n este ...

Juniori (Clasele VII-VIII)

1. *a*) Arătaţi că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, numărul $n^2+2n+2007$ nu este pătr

b) Fie k un număr natural par, $k \geq 4$. Să se arate că există un număr
astfel încât numărul $n^2 + 2n + k$ să fie pătrat perfect.

2. Considerăm n drepte concurente în punctul P. Dreptele determi
punctului $2n$ unghiuri cu interioare disjuncte, fiecare unghi având măsura
de $17°$.

a) Să se afle n.

b) Să se arate că cel puţin două dintre cele n drepte sunt perpendicula

3. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A şi fie M mijlocul laturi
perpendiculara în A pe AM considerăm un punct D astfel încât segment
AB să aibă un punct comun, notat P. Fie E proiecţia punctului D pe dr
Să se arate că $\widehat{BPM} = \widehat{EAC}$.

4. La un concurs de matematică participă n elevi, $n \geq 5$, iar proba
probleme. Fiecare elev a rezolvat exact 3 probleme. Pentru orice grup
există o aceeaşi problemă rezolvată de fiecare elev din grup. Să se arate
aceeaşi problemă rezolvată de toţi concurenţii.

Seniori (Clasele IX-XII)

1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi ecuaţia $x^3 - y^3 = 2xy + 7$.

2. Fie $a \geq 2$ un număr natural. Considerăm şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, unde x_n
$+a^2 + \cdots + a^{2n}$. Demonstraţi că există o infinitate de numere prime ca
nici un termen al şirului.

3. Pentagonul convex $ABCDE$ are proprietăţile: $AB = BC$, $m(\widehat{ABE})$-
$m(\widehat{DBE})$ si $m(\widehat{AEB}) + m(\widehat{BDC}) = 180°$. Demonstraţi că ortocentrul tr
BDE se află pe dreapta AC.

4. Fie $n \geq 2$ un număr întreg. Demonstraţi că, oricum am colora cu c
o mulţime de $\dfrac{n^3+5n}{6}$ numere întregi consecutive, există o submulţime n
$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ astfel încât $1 \leq a_2 - a_1 \leq a_3 - a_2 \leq \cdots \leq a_n - a_{n-1}$.

Concursul de matematică "Florica T. Câmp

Etapa judeţeană, 17-18 februarie 2007

Clasa a IV-a

1. Suma a patru numere este 282. Primul număr, pătrimea celui de-a
dublul celui de-al patrulea sunt cu 4 mai mari decât al treilea număr. Aflaţ

2. Găsiţi cel mai mic şi cel mai mare număr cu cifre distincte, ştiin
cifrelor fiecăruia este 17.

3. Koallo este un copil care locuişte în drăguţul orăşel Oloko din Niger
iubeşte matematica, recent a observat că dacă atribuie câte o altă cifră fiecă
literele K, O, A, L şi înmulţeşte numărul de 5 cifre corespunzător numelui
cu 11, obţine numărul corespunzător numelui său. Care sunt cifrele atribu
litere?

Clasa a V-a

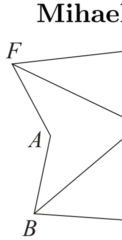
1. *a*) Fie numărul 12345678910111213 14...200520062007. Să se supri
cifre astfel încât numărul rămas să fie cel mai mare posibil.

b) Să se determine cel mai mic număr natural de forma $\overline{a_1a_2...a_k}$, k
verifică relaţia $\overline{7a_1a_2...a_k} = 5 \cdot \overline{a_1a_2...a_k7}$.

2. Pentru rezolvarea temei de vacanţă, bunica îi dă Anei câte o surpr
imediat ce termină de rezolvat o nouă problemă. Ana constată de fiecar
adunând cifrele numărului de surprize primite până atunci cu cifrele nu
probleme care i-au rămas de rezolvat, obţine 11. Câte surprize Barbie va
la terminarea temei?

Mihae

3. În figura alăturată avem un sistem de drumuri care leagă localităţile A, B, C, D, E, F, G. Fiecare drum existent între două localităţi vecine are lungimea un număr întreg de kilometri. O localitate se numeşte "nod impar" dacă suma lungimilor drumurilor care pleacă din ea este un număr impar de kilometri. Să se arate că localităţile nu pot fi toate "noduri impare".



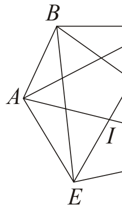
Petr

Clasa a VI-a

1. O reprezentanţă a unui constructor de autoturisme a vândut în 2005
de 200 de maşini. În 2006 vânzările au crescut cu 28%, iar în 2007 este pre
scădere cu 15% faţă de 2006. Câte autoturisme se prognozează a fi vându

Gab

2. În figura alăturată este desenat un pentagon $ABCDE$ în care $\angle DAC \equiv \angle DBE$, $\angle ACE \equiv \angle BEC$ şi $[AC] \equiv [BE]$. Fie $\{I\} = AD \cap CE$ şi $\{J\} = BD \cap CE$.



$a)$ Arătaţi că $\angle AIC \equiv \angle BJE$.

$b)$ Demonstraţi că $[AD] \equiv [BD]$.

3. $a)$ Câte numere naturale $\overline{a_1a_2...a_n}$ $(n \geq 2)$, formate din cifre nenu
prietatea că toate numerele $\overline{a_1a_2}, \overline{a_2a_3}, ..., \overline{a_{n-1}a_n}$ sunt pătrate perfecte?

Adrian

$b)$ Alin aruncă două zaruri, iar Vlad aruncă trei zaruri. Fiecare vrea c
numerelor obţinute de el să fie pătrat perfect. În care dintre cele dou
probabilitatea atingerii obiectivului este mai mare?

Monica

Clasa a VII-a

1. $a)$ Se dau două numere întregi x şi y. Cu ajutorul lor se formeaz
numere în felul următor. Primul număr este egal cu x. Al doilea număr e
$x + y$. Al treilea număr este egal cu diferenţa dintre al doilea şi primul
patrulea număr este egal cu diferenţa dintre al treilea şi al doilea număr.
număr este egal cu diferenţa dintre al patrulea şi al treilea număr şi aşa m
Să se afle primele 12 numere ale şirului şi al 2007-lea număr.

$b)$ Alegeţi în faţa fiecăruia dintre numerele $1, 2, 3, ..., 2006$ unul dintre se
sau "$-$" astfel încât numărul $|\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm ... \pm 2006|$ să ia cea mai mi
Determinaţi această valoare.

2. Un iaht trebuie să parcurgă un traseu sub formă de triunghi echilat
plecând din A. Pe iaht se află Sam, Bob şi John, care încearcă să î
viteza vasului, dar având toţi trei rău de mare, nu reuşesc să reţină decât
incomplete. Astfel, Sam a observat că iahtul a parcurs primele trei sfertur
în 3 ore şi jumătate, John şi-a notat doar că ultimele trei sferturi ale dr
fost parcurse în 4 ore şi jumătate, iar Bob a observat că pentru a parcurg
de la B la C au fost necesare cu 10 minute mai mult decât pentru distanţa
B. Presupunând că, pe fiecare latură a triunghiului, iahtul a avut viteză
să se determine durata parcurgerii întregului traseu.

3. Considerăm un pătrat $ABCD$ cu latura de 9 cm şi punctele $E \in AD$
astfel încât $A \in (ED)$, $C \in (BF)$, $AE = 9$ cm, $CF = 3$ cm. O furnic
cel mai scurt drum de la E la F care traversează pătratul după o paral
Construiţi drumul pe care îl parcurge furnica şi aflaţi lungimea lui.

Clasa a VIII-a

1. Considerăm 9 puncte dispuse ca în figura alăturată:

O furnică pleacă din A şi ajunge în B trecând prin fiecare punct o singură dată, pe un drum fără autointersecţie şi mergând pe laturile sau diagonalele pătratelor mici care se pot forma cu punctele din reţea. Dacă lungimea laturii pătratului mic este 1, arătaţi că lungimea minimă a drumului străbătut de furnică este 8 şi cea maximă este $4 + 4\sqrt{2}$.

Gheor

2. Fie piramida triunghiulară $VABC$ astfel încât $AV \perp BV$, $BV \perp CV$
şi care are produsul oricăror două muchii opuse egal cu P. Asociem fiec
a piramidei cea mai mică dintre ariile triunghiurilor care au drept bază
spectivă şi vârful pe muchia opusă a piramidei.

a) Demonstraţi că V este egal depărtat de muchiile bazei ABC.

b) Dacă suma muchiilor piramidei este S şi distanţa de la V la una dint
bazei este d, calculaţi în funcţie de S şi d suma celor şase arii asociate
piramidei.

Julieta

3. Fie

$$A = \left\{a \in \mathbb{R} \mid a = a_1\sqrt{3} + a_2(\sqrt{3})^2 + \cdots + a_{2007}(\sqrt{3})^{2007}; a_i \in \{-1, 1\}, i =$$

a) Determinaţi numărul de elemente raţionale din mulţimea A.

b) Determinaţi numărul elementelor mulţimii A.

Cristian Lazăr şi Claudiu-Şte

Etapa interjudeţeană, 1-3 iunie 2007

Clasa a IV-a

1. Suma unor numere naturale consecutive este 90. Unul dintre nume
Care sunt celelalte numere? Justificaţi răspunsul!

2. Se dă şirul de numere naturale 5, 10, 15, 20, 25, ... Care este pri
din şir cu suma cifrelor 27?

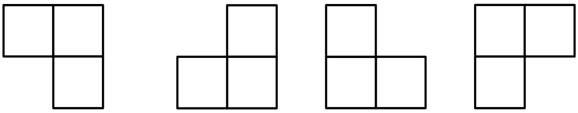
3. Lucian-Georges ia dintr-o cutie de fiecare dată mai multe bomb
luase data precedentă şi, în 5 dăţi, a luat în total 31 bomboane. Câte b
luat a patra oară, dacă prima dată a luat de trei ori mai puţine bomboa
cincea oară?

Clasa a V-a

1. Un dreptunghi cu n linii şi m coloane este împărţit în pătrăţele 1×1
linie colorăm primul pătrăţel, pe a doua linie colorăm primele două pătr
treia linie primele patru pătrăţele, pe a patra linie primele opt pătrăţele
până când pe a n-a linie se vor colora toate pătrăţelele. Ştiind că număr
pătrăţele colorate este 1023, aflaţi câte linii şi câte coloane are dreptungh

Mihaela

2. Pe o tablă de şah se găsesc 31 de pioni. Arătaţi că pe tablă există
având una dintre formele din figura de mai jos, pe care nu se află niciun



Tama

3. Un tâlhar împarte prada cu tovarăşul său de răutăţi. Dintr-un săcu
monede de 10 bani, el scoate pe rând câte o monedă, numărând: "Una la t
mine; a doua la tine, una, două la mine; a treia la tine, una, două, trei la
şi la fiecare număr rostit, aşează câte o monedă în faţa sa sau a tovarăşului
în săculeţ sunt 6000 de monede, aflaţi ce sumă (în lei) revine fiecărui tâlh

Gab

Clasa a VI-a

1. Două coli de hârtie care au aceleaşi dimensiuni, $L = 9$ dm şi $l =$
taie în dreptunghiuri, prima prin drepte paralele cu lungimea, iar a doua p
paralele cu lăţimea, numărul şi dimensiunile acestor dreptunghiuri fiind ar
se arate că există cel puţin o situaţie în care suma perimetrelor tuturor d
urilor obţinute prin tăiere din prima coală este egală cu suma perimetrel
dreptunghiurilor obţinute din a doua coală.

Petr

2. *a*) Fie mulţimea $A = \left\{n \in \mathbb{N} \mid \dfrac{2n+7}{3n+1} \text{ fracţie reductibilă}\right\}$. Să s
trei elemente din mulţimea A.

Enache

b) Cum plantează un pomicultor 10 copaci pe 5 rânduri, astfel încât să f
pe fiecare rând?

3. Un evantai are 37 de spiţe, astfel încât unghiul dintre oricare două s
rate are măsura de $5°$. Să se arate că, dacă se aleg oricare 12 spiţe, excep
prima, se formează cel puţin trei unghiuri de măsuri egale.

Do

Clasa a VII-a

1. Dan are trei jetoane pe care sunt scrise trei numere reale pozitive, i
alte trei pe care sunt scrise inversele lor. Dan îi dă Anei un jeton pe ca
îl asociază cu un altul decât inversul său. Apoi, Ana îi dă lui Dan u
care acesta îl asociază cu un altul decât inversul său. Ştefan primeşte de
copii jetoanele rămase şi constată că nici numerele sale nu sunt inverse unu
Fiecare anunţă suma numerelor pe care le are pe cele două jetoane, respe
$\dfrac{7}{3}$. Arătaţi că produsul numerelor scrise pe cele trei jetoane deţinute iniţ
este 1.

Mihae

2. Fie I punctul de intersecţie al diagonalelor trapezului $ABCD$, A
$AB = a$ cm, $CD = b$ cm, $a > b$. Paralela prin I la AB intersectează pe
în punctele P, respectiv Q. Trei mobile M_1, M_2 şi M_3 pleacă simultan,
cel mai scurt, din punctele B, Q, C spre punctele A, P respectiv D, ast
viteza constantă b cm/s, M_2 cu viteza constantă a cm/s până în I şi apoi, f

cu viteza constantă b cm/s de la I la P, iar M_3 cu viteza constantă a cm
ordinea în care ajung cele trei mobile în punctele A, P, respectiv D.

Claudiu Şte

3. Se consideră în plan nouă puncte, astfel încât din oricare trei se po
puţin două cu distanţa dintre ele mai mică sau egală cu 1. Arătaţi că exis
de rază 1 care conţine cel puţin 5 puncte din cele considerate.

Gheorghe

<u>Clasa a VIII-a</u>

1. Pe tablă sunt scrise numerele $\sqrt{3}-1$, $\sqrt{3}+1$, 2. Se şterg cele trei
se scriu în locul lor cele trei medii geometrice a câte două dintre numere.
procedeul cu noile numere. Este posibil ca după mai mulţi paşi pe tablă s
numerele:

$a)$ $\sqrt{2\sqrt{3}-2}$, 2, $\sqrt{2\sqrt{3}+2}$; $b)$ $2-\sqrt{3}$, $2+\sqrt{3}$, 4?

Monica

2. Triunghiul alăturat este considerat fix. În câte moduri putem aşeza numerele 1, 2, 3, 4, 5, 6 în cerculeţe, astfel încât suma numerelor de pe fiecare latură a triunghiului să fie aceeaşi?

Petru Asaftei

3. Există o ţară K a cubarzilor. Un cubard are corpul de forma u
antenă ce porneşte dintr-un vârf al cubului, o coadă ce este diagonală a
cubului şi o gură care este exact la mijlocul unei muchii a cubului. Un
poate rostogoli după voie, se poate umfla sau strânge dupa plac, îşi poate r
cum vrea. Nu există doi cubarzi pe care i-am putea suprapune încât sa
cozile, gurile şi antenele. Care este numărul maxim al cubarzilor?

Da

Olimpiada Balcanică de Matematică – Juni (JMBO)

Ediţia a XI-a, Şumen (Bulgaria), 23-30 iunie 200

La această ediţie a concursului au participat 11 ţări: *Albania*, *Bosni*
govina, *Cipru*, *Macedonia*, *Grecia*, *Moldova*, *Muntenegru*, *România*, *Serb*
Bulgaria 1 şi trei echipe în afara concursului: *Bulgaria 2*, *Kazahstan* şi
Varna.

Delegaţia României a fost condusă de prof. *Dinu Şerbănescu* şi pro
Fianu. Echipa ţării noastre a fost compusă din următorii elevi: **Chinde**
Bumbacea Radu (din Bucureşti) – medaliaţi cu aur (ambii au acumulat
de puncte), **Tiba Marius** (Iaşi), **Ciolan Emil Alexandru** (Slatina),
Alexandru (Bucureşti) şi **Filip Laurian** (Arad) – medaliaţi cu argint.

Elevul Tiba Marius a fost primul din medaliaţii cu argint, printre toţi c
ce au luat această medalie.

Se preconizează ca Albania să găzduiască următoarea ediţie a JMBO.

Enunţurile problemelor

1. Fie a un număr real pozitiv astfel încât $a^3 = 6(a+1)$. Să se arate
$x^2 + ax + a^2 - 6 = 0$ nu are soluţii reale.

2. Fie $ABCD$ un patrulater convex având $\angle DAC = \angle BDC = 36°$, $\angle C$
şi $\angle BAC = 72°$. Diagonalele AC şi BD se intersectează în punctul
determine măsura unghiului $\angle APD$.

3. Se consideră 50 de puncte în plan, oricare trei necolineare. Fie
aceste puncte este colorat folosind una dintre patru culori date. Să se arat
o culoare şi cel puţin 130 de triunghiuri scalene cu vârfurile în puncte
culoare.

4. Să se arate că dacă p este un număr prim, atunci $7p + 3^p - 4$ nu
perfect.

Notă. Timp de lucru: 4 ore şi 30 minute. Fiecare problemă este no
puncte.

Soluţiile problemelor

prezentate de elevul **Marius Tiba**

1. Observăm că $a^3 = 6(a+1) \Leftrightarrow a\left(a^2 - 6\right) = 6 \Leftrightarrow a^2 - 6 = \dfrac{6}{a}$ (a est
Atunci, ecuaţia din enunţ se scrie sub forma

$$x^2 + ax + \frac{6}{a} = 0$$

şi are discriminantul $D = a^2 - \dfrac{24}{a}$. Să presupunem, prin reducere la
ecuaţia dată sau ecuaţia (1) are soluţii reale. Acest fapt este echivalent c
$D \geq 0$. Avem

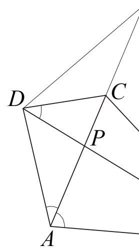
$$D \geq 0 \Leftrightarrow a^3 - 24 \geq 0 \Leftrightarrow 6(a+1) - 24 \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6(a-3) \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 3.$$

Atunci,

$$6 = a\left(a^2 - 6\right) \geq 3(9-6) = 9,$$

adică $6 \geq 9$, absurd.

2. Fie un punct Q pe dreapta AC ce respectă ordinea $A - C - Q$ şi este astfel încât $m(\widehat{CBQ}) = 18°$. Întrucât $\widehat{QAD} \equiv \widehat{QBD}$, patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil. Ca urmare, $m(\widehat{QDB}) = m(\widehat{QAB}) = 72°$. Deducem că $m(\widehat{QDC}) = 36° = m(\widehat{CDB})$. Aşadar, C este centrul cercului înscris în $\triangle DBQ$ şi, deci, $m(\widehat{DQP}) = \dfrac{1}{2} m(\widehat{DQB}) = 36°$. În sfârşit, $m(\widehat{APD}) = 108°$ (unghi exterior triunghiului PDQ).



3. Se constată uşor că există cel puţin 13 puncte colorate la fel (dacă
culoare ar exista cel mult 12 puncte colorate cu aceasta, atunci în plan a
mult 48 puncte). Vom arăta că există 130 triunghiuri scalene cu vârfu
aceste 13 puncte.

Într-adevăr, cu cele 13 puncte putem forma $13 \cdot 12 \cdot 11 : 6 = 286$ triu
numărul celor $13 \cdot 12 \cdot 11$ triunghiuri, un triunghi este socotit de 6 ori).
acum că, dacă considerăm un segment $[AB]$, există cel mult două puncte
$[AB]$ să fie bază de triunghi isoscel formate cu ele. Cum cu 13 puncte p
$\dfrac{13 \cdot 12}{2} = 78$ segmente, rezultă că există cel mult $78 \cdot 2 = 156$ triunghiuri is
urmare, există cel puţin $286 - 156 = 130$ triunghiuri scalene cu vârfurile
de această culoare.

4. Dacă p este par, atunci $p = 2$ şi se verifică direct că numărul din
pătrat perfect.

Dacă p este impar, atunci p este fie de forma $\mathcal{M}4 + 1$, fie $\mathcal{M}4 + 3$. În ca
$p = \mathcal{M}4 + 1$, rezultă că numărul $7p + 3^p - 4 = \mathcal{M}4 + 2$ (ultima cifră a lui 3^p
nu este pătrat perfect. Dacă, însă, $p = \mathcal{M}4 + 3$, să notăm $k^2 = 7p + 3^p - 4$
imediat că $k^2 = \mathcal{M}p - 1$ (se utilizează mica teoremă a lui Fermat), ech
$p \mid k^2 + 1$. De aici deducem că $p \mid 1$ (ştim că p prim şi $p \mid a^2 + b^2 \Rightarrow p \mid$
ceea ce este absurd. Deci, nici în acest caz numărul din enunţ, nu-i pătra

---

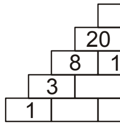
Vizitaţi pe Internet revista "Recreaţii Matematice" la

http://www.recreatiimatematice.uv.ro

Soluţiile problemelor propuse în nr. 2 / 20

Clasele primare

P.114. *În piramida alăturată unele numere s-au şters de-a lungul timpului. Putem să le punem la loc?*



(*Clasa I*) **Ionela Bărăgan, elevă, Iaşi**

Soluţie. $20 = 8 + 12$, $28 = 12 + 16$ etc.

P.115. *Dacă din prima ladă iau 2 mere şi le pun în lada a doua, din a iau 3 mere şi le pun în lada a treia, iar din lada a treia iau 4 mere şi le pu ladă, atunci în fiecare ladă voi avea câte 34 mere. Câte mere au fost în fie*

(*Clasa I*) **Mariana Nastasia, e**

Soluţie. În prima ladă erau $34 - 4 + 2 = 32$, în a doua $34 - 2 + 3 =$ treia $34 - 3 + 4 = 35$ (mere).

P.116. *Luni, mama pune într-un coş câteva mere. Joi, ea găseşte în c de mere. Câte mere a pus mama în coş, ştiind că, în fiecare zi din acea s Mihai, cel mai mare dintre fraţi, împarte fraţilor mai mici cu un măr mai ziua precedentă şi că joi el împarte* 5 *mere? Câte mere mai rămân în co după împărţirea merelor?*

(*Clasa a II-a*) **Inst. Maria B**

Soluţie. Merele luate până joi: $5 + 4 + 3 + 2 = 14$. Merele existente în coş: $20 + 14 = 34$. Merele împărţite vineri şi sîmbătă: $6 + 7 = 13$. Mer sâmbătă în coş: $20 - 13 = 7$.

P.117. *În exerciţiul* $1\square1\square1\square1\square1\square1\square1 =$ *fiecare căsuţă poate fi înlocu sau "* $-$ *". Cât poate fi rezultatul acestui exerciţiu?*

(*Clasa a II-a*) **Diana Tănăsoaie, e**

Soluţie. Deoarece avem un număr impar de 1, putem obţine ca rezul sau 5 sau 7. Exemplu: $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 1$; $1 - 1 + 1 - 1 + 1 +$ $1 - 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1$; $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1$.

P.118. *Calculaţi* $a + b + c + d$*, ştiind că* $a \times b = 5$ *şi* $c \times d = 15$. *C posibilităţile.*

(*Clasa a III-a*) **Înv. Rica Bucăt**

Soluţie. $a + b + c + d$ poate fi: $1 + 8 + 1 + 15 = 25$, $1 + 8 + 5$ $2 + 4 + 1 + 15 = 22$, $2 + 4 + 3 + 5 = 14$.

P.119. *Produsul a 10 numere naturale este 40. Aflaţi cea mai mică mare valoare a sumei celor 10 numere.*

(*Clasa a III-a*) **Înv. Mirela Buburuzanu, Tomo**

Soluţie. $40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 2 \times 2 \times 10 = 2 \times 20 = 4 \times 10$. După numerelor este $9 \times 1 + 40 = 49$, $6 \times 1 + 2 \times 3 \times 5 = 17$, $7 \times 1 + 2 \times 2$ $8 \times 1 + 2 + 20 = 30$, $8 \times 1 + 4 \times 10 = 22$. Suma minimă este 17, iar cea m 49.

P.120. *Se consideră numerele* $1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 49$. *Care este cel mai m de numere pe care putem să alegem dintre acestea astfel încât suma o*

dintre ele să se împartă exact la 9?
(*Clasa* a *III-a*) **Înv. Felicia-Petronela Leanu, Cepler**

Soluţie. Numerele 3, 12, 21, 30, 39, 48 satisfac condiţia cerută la probl
mai introducem cel puţin un număr, de exemplu 17, atunci putem găsi
trei numere care nu se împarte exact la 9, de exemplu $3+12+17$. Num
de numere este 6.

P.121. *Ceasul lui Andrei o ia înainte cu 20 secunde pe oră. El a pot
luni la ora 8 şi a citit din nou ceasul lunea următoare la aceeaşi oră. Ş
această durată ceasul nu a funcţionat permanent, iar la ultima citire ar
50 min, să se afle cât nu a funcţionat ceasul.*
(*Clasa* a *IV-a*) **Paula Borşanu, e**

Soluţie. De luni, ora 8, până lunea următoare, ora 8, sunt 168 ore. D
ar fi funcţionat permanent, atunci ar fi avut un avans de $168 \times 20 : 60 = 5$
În realitate, avansul este de 50 minute. Ceasul nu a funcţionat $(56-50) \cdot 6$
(ore).

P.122. *La Concursul de matematică "Fl.T.Câmpan", etapa judeţeană,
pat 100 elevi de clasa a IV-a, care au avut de rezolvat 3 probleme. Dacă
rezolvat bine prima problemă, 69 a doua problemă şi 64 a treia problemă,
că măcar 3 elevi au rezolvat corect toate cele trei probleme.*
(*Clasa* a *IV-a*) **Anca Cornea, e**

Soluţie. Dacă fiecare elev a rezolvat bine numai câte două proble
numărul de rezolvări corecte este $100 \times 2 = 200$. În realitate numărul d
corecte este $70+69+64 = 203$. Deoarece $203-200 = 3$, înseamnă că mă
au rezolvat corect toate cele trei probleme.

P.123. *Într-o cutie sunt 34 bile, din care unele cântăresc cu 1 g mai
fiecare bilă cântăreşte un număr natural de grame, iar masa tuturor bilelor
să se afle câte bile sunt mai grele.*
(*Clasa* a *IV-a*) **Petru As**

Soluţie. Dacă o bilă mai grea cântăreşte 3g , atunci masa maximă es
$3g \times 33 = 101g < 113g$. Dacă o bilă mai uşoară cântăreşte 4g, atunci ma
este $4g \times 33 + 5g \times 1 = 132g > 113g$. Înseamnă ca o bilă mai grea cân
Dacă fiecare bilă cântăreşte 3g, atunci masa tuturor bilelor este $3g \times 3$
$113g - 102g = 11g$; $4g - 3g = 1g$. Numărul bilelor mai grele este $11 : 1 =$

Clasa a V-a

V.71. *Comparaţi numerele* 3^{300003} *şi* 2^{450004}.
Lucian Tuţescu

Soluţie. Avem:

$$3^{300003} = 3 \cdot 3^{300002} = 3 \cdot 9^{150001} > 3 \cdot 8^{150001} = 3 \cdot 2^{450003} > 2 \cdot 2^{450003} =$$

V.72. *Fie mulţimile* A, B *astfel încât* $A \subset B$, $|\mathcal{P}(A)| \geq 60$, $|\mathcal{P}(B)|$
se determine $|A|$ *şi* $|B|$. *(Prin* $|X|$ *am notat cardinalul mulţimii* X.*)*
Petru As

Soluţie. Cum $A \subset B$, atunci $|A| \leq |B|$, de unde $60 \leq 2^{|A|} \leq 2^{|B|} \leq$
nem că $6 \leq |A| \leq |B| \leq 8$, deci $(|A|, |B|) \in \{(6,6);(6,7);(6,8);(7,7);(7,$

V.73. *Să se scrie numărul* 2006^{2005} *ca o sumă de şase pătrate perfec*

Ionel Nec

Soluţia 1. Avem:

$$2006^{2005} = 2006 \cdot 2006^{2004} = \left(1^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + 25^2 + 35^2\right) \cdot 2006^{200}$$

$$= \left(2006^{1002}\right)^2 + \left(5 \cdot 2006^{1002}\right)^2 + \left(7 \cdot 2006^{1002}\right)^2 + \left(9 \cdot 2006^{1}\right.$$

$$+ \left(25 \cdot 2006^{1002}\right)^2 + \left(35 \cdot 2006^{1002}\right)^2.$$

Soluţia 2 (Emanuel Petrescu, elev, Iaşi**).**

$$2006^{2005} = \left(2006^{1002}\right)^2 \cdot \left(4^2 + 5^2 + 10^2 + 11^2 + 12^2 + 40^2\right) =$$

$$= \left(2006^{1002} \cdot 4\right)^2 + \cdots + \left(2006^{1002} \cdot 40\right)^2.$$

V.74. *Se consideră şirul de numere naturale 1, 1, 2, 5, 12, 27, 58, ...*
suma primilor 100 de termeni ai şirului.

Marius Dami

Soluţie. Adunînd 0 la primul termen, 1 la al doilea, 2 la al treilea et
şirul puterilor lui 2. Deducem că termenii şirului sunt de forma $2^n - n$, n
primilor 100 de termeni va fi

$$S = \left(2^0 - 0\right) + \left(2^1 - 1\right) + \left(2^2 - 2\right) + \cdots + \left(2^{99} - 99\right) =$$

$$= \left(2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{99}\right) - (1 + 2 + \cdots + 99) = 2^{100} - 1 - \frac{99 \cdot 100}{2} =$$

V.75. *Fie* $x, k \in \mathbb{N}$, $x \geq 2$, $k < x$. *Să se arate că*

$$(x-1)\,\overline{12\ldots k}_{(x)} + k + 1 = \underbrace{\overline{11\ldots 1}}_{k+1 \text{ cifre}}{}_{(x)}.$$

Doru B

Soluţie. Avem:

$$(x-1) \cdot \overline{12\ldots k}_{(x)} + k + 1 = (x-1)\left(x^{k-1} + 2x^{k-2} + \cdots + (k-1)\,x + k\right) +$$

$$= x^k - x^{k-1} + 2x^{k-1} - 2x^{k-2} + \cdots + (k-1)\,x^2 - (k-1)\,x + kx - k +$$

$$= x^k + x^{k-1} + x^{k-2} + \cdots + x + 1 = \underbrace{\overline{11\ldots 1}}_{k+1 \text{ cifre}}{}_{(x)}.$$

Clasa a VI-a

VI.71. *Fie* $x, y, z \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $100x - 2006y^2 + 15z = 0$. *Să*
$y\,(x+z) \,\vdots\, 85$.

Dan Nedeianu, Drobeta-Tr

Soluţie. Cum $2006y^2 = 5\,(20x + 3z)$ şi $(5, 2006) = 1$, atunci $y^2 \,\vdots\, 5$
Apoi, $15\,(x+z) = 17\left(118y^2 - 5x\right)$ şi cum $(15, 17) = 1$, obţinem că $x +$
ducem că $y\,(x+z) \,\vdots\, 5 \cdot 17$, adică $y\,(x+z) \,\vdots\, 85$.

VI.72. *Fie* $p \in \mathbb{N}^*$ *un număr prim. Să se determine* $x, y \in \mathbb{N}^*$
$\dfrac{p}{x^2} + \dfrac{y}{x} \in \mathbb{N}^*$.

D. M. Bătineţu-Giurgiu,

Soluţie. Fie $\dfrac{p}{x^2}+\dfrac{y}{x}=a\in\mathbb{N}^*$; atunci $p+xy=ax^2$, deci $p=x\,(ax-$
este prim, atunci $x\in\{1,p\}$ şi corespunzător găsim soluţiile

$$(x,y)=\{(1,a-p)\,;(p,ap-1)\mid a\in\mathbb{N}^*\}\,.$$

VI.73. *Fie* $A_n=14+1414+141414+\cdots+\underbrace{\overline{1414\ldots14}}_{2n\text{ cifre}}$, $n\in\mathbb{N}^*$. *Să se*
mulţimea $M=\left\{n\in\mathbb{N}^*\mid \dfrac{A_n-7n^2-7n}{9}\in\mathbb{N}\right\}$.

Valeriu Braşovean

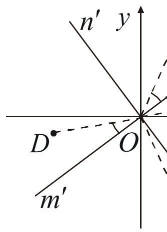
Soluţie. Notând cu $s\,(k)$ suma cifrelor numărului natural k, avem k
Deducem că $14-5\,\vdots\,9$, $1414-5\cdot2\,\vdots\,9$, $\ldots$, $\underbrace{\overline{1414\ldots14}}_{2n\text{ cifre}}-5n\,\vdots\,9$, prin urm
$5\dfrac{n\,(n+1)}{2}\,\vdots\,9$. Rezultă de aici că $A_n-\dfrac{5n\,(n+1)}{2}-\dfrac{9n\,(n+1)}{2}\,\vdots\,9$,
$\dfrac{A_n-7n\,(n+1)}{9}\in\mathbb{N}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. În concluzie, $M=\mathbb{N}^*$.

VI.74. *Considerăm două axe perpendiculare Ox şi Oy, precum şi ce sectoare ale unghiurilor drepte care se formează. Fie A oarecare, iar B, C sale faţă de prima bisectoare, respectiv faţă de Ox. Rotim segmentul $[O$ lui O cu $90°$ în sensul acelor de ceasornic şi notăm cu D extremitatea s rotit. Să se arate că:*

a) B, O, D sunt coliniare şi O este mijlocul lui $[BD]$;

b) D este simetricul lui A faţă de a doua bisectoare.

Adrian Cordun



Soluţie. *a*) Din $\triangle AOC$ isoscel avem că $\widehat{AOx}\equiv\widehat{COx}$, de unde $\widehat{AOn'}\equiv\widehat{COm'}$ (aceeaşi diferenţă până la $135°$). Atunci unghiurile $\widehat{AOm}$ şi $\widehat{DOm'}$ au complementele egale, deci sunt congruente. Din $\triangle AOB$ isoscel avem că $\widehat{AOm}\equiv\widehat{BOm}$, prin urmare $\widehat{DOm'}\equiv\widehat{BOm}$, adică punctele B, O, D sunt coliniare. Cum $AO=BO=CO=DO$, deducem şi că O este mijlocul lui $[BD]$.

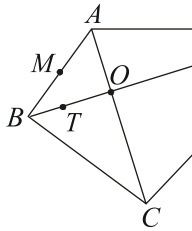
b) Din relaţia deja demonstrată $\widehat{AOm}\equiv\widehat{DOm'}$ rezultă că $\widehat{AOn'}\equiv\widehat{DOn'}$, deci $[On'$ este bisectoare în $\triangle AOD$ isoscel. Obţinem c mediatoarea lui $[AD]$, adică D este simetricul lui A faţă de a doua bisect

VI.75. *Fie $ABCD$ un patrulater convex, O intersecţia diagonalelor, lui $[AB]$, iar N mijlocul lui $[OD]$. Să se arate că $2P_{BCNM}<P_{BDC}+P$*

Bogdan Posa şi Marius Drăgoi, elev

Soluţie. Fie T mijlocul lui $[OB]$. Cum M, N, T nu pot fi colin că $MN<MT+TN=\dfrac{AO+BD}{2}$. În $\triangle CDO$, $[CN]$ fiind mediană, $CN<\dfrac{CO+CD}{2}$. Atunci:

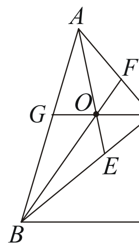
$$P_{BCNM} = BC + CN + NM + MB <$$
$$< BC + \frac{CO + CD}{2} + \frac{AO + BD}{2} + \frac{AB}{2} =$$
$$= \frac{BC + AC + AB}{2} + \frac{BC + BD + CD}{2} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(P_{ABC} + P_{BCD}\right).$$



Clasa a VII-a

VII.71. *Fie $\triangle ABC$, $AB < AC$ şi $D \in (AC)$. Fie AE bisectoarea* *$E \in (BD)$, F mijlocul lui $[AD]$, $\{O\} = AE \cap BF$, $\{G\} = DO \cap AB$. Să* *$GD \parallel BC \Leftrightarrow AB = CD$.*

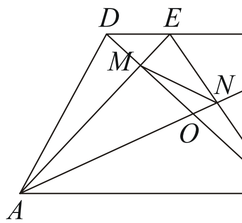
Carmen Daniela Tama



Soluţie. Cu teorema bisectoarei în $\triangle ABD$, obţinem că $\frac{BE}{DE} = \frac{AB}{AD}$. Folosind apoi teorema lui Ceva, $\frac{AG}{GB} \cdot \frac{BE}{DE} \cdot \frac{DF}{FA} = 1$, deducem că $\frac{AG}{GB} = \frac{AD}{AB}$. Atunci $GD \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AG}{GB} = \frac{AD}{DC} \Leftrightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AD}{DC} \Leftrightarrow AB = CD$.

VII.72. *Fie $ABCD$ paralelogram, $E \in (CD)$, $\{M\} = AE \cap BD$, $\{N$* *AC, $\{O\} = AC \cap BD$. Să se arate că $A_{MEN} = 2A_{MON}$.*

Mirela M



Soluţie. Cu teorema lui Menelaus în $\triangle MEB$ ($O - N - A$ transversală) şi $\triangle AEN$ ($M - O - B$ transversală) obţinem că $\frac{NE}{NB} \cdot \frac{OB}{OM} \cdot \frac{AM}{AE} = 1$, respectiv $\frac{ME}{MA} \cdot \frac{OA}{ON} \cdot \frac{BN}{BE} = 1$. Înmulţind aceste relaţii membru cu membru, rezultă că $\frac{OA \cdot OB}{OM \cdot ON} \cdot \frac{NE \cdot ME}{AE \cdot BE} = 1$, deci $\frac{A_{AOB}}{A_{MON}} \cdot \frac{A_{MEN}}{A_{AEB}} = 1$. Însă evident că $d\,(E, AB) = 2$ adică $A_{AEB} = 2A_{AOB}$ şi de aici urmează concluzia.

VII.73. *Fie $a < b \le c$ razele a trei cercuri tangente între ele şi tan* *aceeaşi dreaptă în trei puncte distincte. Să se arate că $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}$.*

Dan Radu,

Soluţie. Fie T_1, T_2, T_3 punctele de tangenţă ale celor trei cercuri c Un calcul imediat arată că $T_2T_3^2 = 4bc$ şi analog $T_1T_3^2 = 4ac$, $T_1T_2^2 = 4$ că $T_2T_3 = T_1T_2 + T_1T_3$, rezultă că $\sqrt{bc} = \sqrt{ac} + \sqrt{ab}$ şi, prin împărţire obţinem egalitatea dorită.

Evident, concluzia nu are loc în cazul în care $T_1 = T_2 = T_3$.

VII.74. *Fie M mulţimea multiplilor lui 36 în a căror scriere în baza alte cifre decât 4, 6 sau 9. Câte numere cel mult egale cu 100 000 conţine*

Gabriel I

Soluţie. Elementele lui M se divid cu 4 şi cu 9, deci se termină în 96 şi, cum au cel mult 5 cifre, au suma cifrelor 9, 18, 27 sau 36. Notăm tuturor cifrelor afară de ultimele două ale unui număr din M.

Dacă un număr se termină în 44, atunci $s \in \{10, 19\}$. Suma 10 se for $4+6$, iar suma 19 din $4+6+9$. Obţinem astfel $2+6=8$ elemente ale lu 6444, 46944, 49644, 64944, 69444, 96444, 94644. Dacă un număr se tern atunci $s \in \{8, 17\}$. Suma 8 se formează din $4+4$, iar suma 17 din $4+4+$ alte $1+3=4$ elemente ale lui M. În sfârşit, dacă un număr se termină în $s \in \{12, 21\}$. Avem că $12 = 4+4+4 = 6+6$, iar $21 = 9+6+6$ şi astfel $1+1+3=5$ elemente ale lui M.

În total, M conţine $8+4+5=17$ elemente cel mult egale cu 100000.

VII.75. *Fie $m \geq 3$ un număr natural impar şi $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{Z}$ ast*

$$|a_1 - a_2| = |a_2 - a_3| = \cdots = |a_{m-1} - a_m| = |a_m - a_1|.$$

Demonstraţi că $a_1 + a_2 + \cdots + a_m$ se divide cu m.

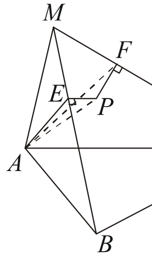
Maria Miheţ, T

Soluţie. Fie d valoarea comună a modulelor din enunţ; atunci fie numerele $a_1 - a_2$, $a_2 - a_3$, $\ldots$, $a_{m-1} - a_m$, $a_m - a_1$ este d sau $-d$, deci su un multiplu impar de d. Pe de altă parte, suma celor m numere este 0, Rezultă că $a_1 = a_2 = \cdots = a_m$, de unde $a_1 + a_2 + \cdots + a_m = ma_1$.

Clasa a VIII-a

VIII.71. *Pe planul $\triangle ABC$ se ridică perpendiculara AM. Fie P proi pe planul (MBC), iar E, F proiecţiile punctului P pe MB, respectiv arate că $\widehat{MEF} \equiv \widehat{MCB}$.*

Otilia Nemeş, Oc



Soluţie. Conform teoremei celor trei perpendiculare, obţinem că $AE \perp MB$ şi $AF \perp MC$. Cu teorema catetei în $\triangle MAB$ şi $\triangle MAC$, deducem că $MA^2 = ME \cdot MB = MF \cdot$ $\cdot MC$, deci $\dfrac{ME}{MC} = \dfrac{MF}{MB}$. Rezultă că $\triangle MEF \sim \triangle MCB$, de unde $\widehat{MEF} \equiv \widehat{MCB}$.

VIII.72. *Fie a, b, c numere reale distincte. Să se afle partea întreagă a*

$$A = \frac{a^2 + bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2 + ca}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2 + ab}{(c-a)(c-b)}.$$

Mihail Bencz

Soluţie. După calcule de rutină, se arată că $A = 2$, deci $[A] = 2$.

VIII.73. *Să se demonstreze că $a \in \mathbb{N}$ este ipotenuză a unui triunghi cu laturile exprimate prin numere naturale dacă şi numai dacă există n încât $a^2 - n$ şi $a^2 + n$ sunt pătrate perfecte.*

Cătălin Cali

Soluţie. Fie $b, c \in \mathbb{N}$ cu $a^2 = b^2 + c^2$; considerând $n = 2bc$, avem că
$(b-c)^2$ şi $a^2 + n = (b+c)^2$, Reciproc, dacă $a^2 - n = x^2$, $a^2 + n = y^2$, c
atunci $2a^2 = x^2 + y^2$, deci x, y au în mod necesar aceeaşi paritate. C
$a^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$, cu $\frac{x+y}{2}$, $\frac{x-y}{2}$ numere naturale.

VIII.74. *Fie $\alpha \in (0,1]$; să se arate că* $\left(\alpha + \left|\frac{x-y}{1-xy}\right|\right) : \left(\alpha - \left|\frac{x-}{1-}\right.\right.$
în fiecare din situaţiile:

a) $x, y \in [0, \alpha)$; *b)* $-\alpha < x \leq 0 \leq y < \frac{x+\alpha}{1+x\alpha} \leq \alpha$.

Gheorghe Cost

Soluţie. Este suficient să demonstrăm, în fiecare dintre ipoteze, că
$\alpha - \left|\frac{x-y}{1-xy}\right|$ este strict pozitiv.

a) Fără a restrânge generalitatea, să presupunem că $x \geq y$; atunci

$$\alpha - \left|\frac{x-y}{1-xy}\right| > 0 \Leftrightarrow \alpha - \frac{x-y}{1-xy} > 0 \Leftrightarrow (\alpha - x) + y\,(1-\alpha x) > 0$$

Însă $x < \alpha \Rightarrow \alpha x < \alpha^2 \leq \alpha \leq 1 \Rightarrow 1 - \alpha x > 0 \Rightarrow y\,(1-\alpha x) \geq 0$, de un
imediată.

b) Mai întâi, să verificăm că $0 < \frac{x+\alpha}{1+x\alpha} \leq \alpha$, adică ipoteza nu este cont
Avem:

$$-1 \leq -\alpha < x \Rightarrow -1 \leq -\alpha \leq -\alpha^2 < \alpha x \Rightarrow 1 + \alpha x > 0 \Rightarrow \frac{x+\alpha}{1+\alpha x}$$

$$\alpha^2 \leq 1 \Rightarrow x\left(\alpha^2 - 1\right) \geq 0 \Rightarrow x \leq \alpha^2 x \Rightarrow x + \alpha \leq \alpha\,(1+\alpha x) \Rightarrow \frac{x+\alpha}{1+\alpha x}$$

Acum:

$$\alpha - \left|\frac{x-y}{1-xy}\right| > 0 \Leftrightarrow \alpha - \frac{y-x}{1-xy} > 0 \Leftrightarrow \alpha\,(1-xy) - y + x > 0$$

$$(\alpha + x) - y\,(1+\alpha x) > 0 \Leftrightarrow y < \frac{\alpha + x}{1+\alpha x},$$

adevărat conform ipotezei.

Notă. Concluzia are loc şi dacă $x, y \in (-\alpha, 0]$ sau $-\alpha \leq \frac{x-\alpha}{1-\alpha x} < y \leq$

VIII.75. *Determinaţi valorile lui $n \in \mathbb{N}$ pentru care fracţia* $\frac{2^{n+1} +}{3 \cdot 2^n +}$
ductibilă.

Gheorghe I

Soluţie. Dacă $d \mid 2^{n+1} + 3$ şi $d \mid 3 \cdot 2^n + 1$, atunci $d \mid 3\left(2^{n+1} + 3\right) - 2\,($
adică $d \mid 7$. Cum fracţia este reductibilă, ea se simplifică prin 7. Vom ară
lucru se realizează dacă şi numai dacă $n = M_3 + 1$.

Dacă $n = M_3$, atunci $2^{n+1} + 3 = 2 \cdot 2^{3k} + 3 = 2\,(7+1)^k + 3 = 2\,(M_7$
$M_7 + 5$. Dacă $n = M_3 + 2$, atunci $2^{n+1} + 3 = 2^{3k+3} + 3 = (7+1)$
$(M_7 + 1) + 3 = M_7 + 4$. În sfârşit, pentru $n = M_3 + 1$, avem că 2
$2^{3k+2} + 3 = 3\,(7+1)^k + 3 = 4\,(M_7 + 1) + 3 = M_7$ şi $3 \cdot 2^n + 1 = 3 \cdot 2$
$3 \cdot 2\,(7+1)^k + 1 = 6\,(M_7 + 1) + 1 = M_7$.

Clasa a IX-a

IX.71. *Fie $a < b$ numere reale; să se determine $x, y, z \in \mathbb{R}$ pentru car*
$= 2yz + a$, iar $\sqrt{x-a} + \sqrt{b-x} = y$.

Andrei Nedelcu şi Lucian Lădu

Soluţie. Din a doua ecuaţie deducem că $x \in [a, b]$, iar $y \geq 0$. Cu i
Cauchy-Schwarz, obţinem

$$y^2 = \left(\sqrt{x-a} + \sqrt{b-x}\right)^2 \leq \left[\left(\sqrt{x-a}\right)^2 + \left(\sqrt{b-x}\right)^2\right]\left(1^2 + 1^2\right) = 2\,(b$$

Înmulţind prima relaţie cu 2 şi adumînd y^2, găsim că

$$y^2 + 4z^2 + 2b = 4yz + 2a + y^2 \Leftrightarrow (2z - y)^2 + 2b - 2a = y^2 \Leftrightarrow$$
$$y^2 = 2\,(b-a) + (2z-y)^2 \geq 2\,(b-a)\,.$$

Din (1) şi (2) deducem că $y = 2z = \sqrt{2\,(b-a)}$ şi, cum avem egalitate în
$x - a = b - x$, deci $x = \dfrac{1}{2}\,(a+b)$.

IX.72. *Fie $x, y, z \in [1, +\infty)$ aşa încât $\dfrac{x}{[x]} = \dfrac{y}{[y]} = \dfrac{z}{[z]}$. Să se arate c*

$$\sqrt{[x]^2 + [y]^2 + [z]^2} + \sqrt{\{x\}^2 + \{y\}^2 + \{z\}^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Ce egalitate se obţine pentru $x, y, z \in (-\infty, -1]$?

Dan Pl

Soluţie. Fie $\dfrac{x}{[x]} = \dfrac{y}{[y]} = \dfrac{z}{[z]} = k \in [1, 2)$; atunci

$$\frac{x^2}{[x]^2} = \frac{y^2}{[y]^2} = \frac{z^2}{[z]^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{[x]^2 + [y]^2 + [z]^2} = k^2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = k\sqrt{[x]^2 +$$

$$\frac{x - [x]}{[x]} = \frac{y - [y]}{[y]} = \frac{z - [z]}{[z]} = k - 1 \Rightarrow$$
$$\frac{\{x\}^2}{[x]^2} = \frac{\{y\}^2}{[y]^2} = \frac{\{z\}^2}{[z]^2} = \frac{\{x\}^2 + \{y\}^2 + \{z\}^2}{[x]^2 + [y]^2 + [z]^2} = (k-1)^2 \Rightarrow$$
$$\sqrt{\{x\}^2 + \{y\}^2 + \{z\}^2} = (k-1)\sqrt{[x]^2 + [y]^2 + [z]^2}.$$

Scăzând membru cu membru relaţiile (1) şi (2) obţinem concluzia. Cân
$(-\infty, -1]$, vom avea $k \in (0, 1]$ şi, reluând raţionamentul, găsim că

$$\sqrt{[x]^2 + [y]^2 + [z]^2} - \sqrt{\{x\}^2 + \{y\}^2 + \{z\}^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

IX.73. *Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (0, \infty)$ cu $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$. Pentru orice m*
se arate că are loc inegalitatea

$$a_1^m + a_2^m + \cdots + a_n^m \geq a_1^{m-1} + a_2^{m-1} + \cdots + a_n^{m-1}.$$

Marius Tiba,

Soluţia 1 (**Titu Zvonaru**, Comăneşti). Conform inegalităţii mediilo

$$a_1^m + \cdots + a_1^m + a_2^m + \cdots + a_n^m \geq mn \sqrt[mn]{a_1^{m(mn-n+1)} a_2^m \cdots a_n^m} =$$
$$= mn \sqrt[mn]{a_1^{mn(m-1)} \left(a_1 a_2 \cdots a_n\right)^m} = mna_1^{m-1} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

Scriind încă $n-1$ inegalităţi similare, după adunare şi împărţire cu mn,

$$a_1^m + a_2^m + \cdots + a_n^m \geq \left(a_1^{m-1} + a_2^{m-1} + \cdots + a_n^{m-1}\right) \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

inegalitate echivalentă cu cea dorită, întrucât $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$.

Soluţia 2. Putem presupune fără a restrânge generalitatea că $a_1 \geq a_2 \geq$ atunci $a_1^{m-1} \geq a_2^{m-1} \geq \cdots \geq a_n^{m-1}$ şi aplicăm inegalitatea lui Cebîşev:

$$a_1^m + a_2^m + \cdots + a_n^m = a_1 a_1^{m-1} + a_2 a_2^{m-1} + \cdots + a_n a_n^{m-1} \geq$$
$$\geq \frac{1}{n}\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\right)\left(a_1^{m-1} + a_2^{m-1} + \cdots + a_n^{m-1}\right).$$

Însă $\frac{1}{n}\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\right) \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = 1$ şi astfel rezultă concluzia. se atinge pentru $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$.

Notă. Demonstraţia inegalităţii (1) ca în soluţia a doua (folosind Ce prezentă în RecMat 2/2006, pg. 160, în cadrul soluţiei problemei L92.

IX.74. *Fie a, b, c lungimile laturilor $\triangle ABC$ şi $m, n \in (0, +\infty)$. C punctele A', B', C' astfel încât $C \in (AA')$, $A \in (BB')$, $B \in (CC')$ şi CA' $AB' = mb + n$, $BC' = mc + n$. Să se arate că $\triangle ABC$ şi $\triangle A'B'C'$ au ace de greutate dacă şi numai dacă $\triangle ABC$ este echilateral.*

Dumitru Mihalach

Soluţie. Observăm că $\overrightarrow{AA'} = \dfrac{ma+n+b}{b} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BB'} = \dfrac{mb+n+c}{c} \cdot \overrightarrow{B}$ $\dfrac{mc+n+a}{a} \cdot \overrightarrow{CB} = \dfrac{mc+n+a}{a}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right)$. Atunci $\triangle ABC$ şi $\triangle A'B'C'$ centru de greutate dacă şi numai dacă

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{mc+n+a}{a} - \frac{mb+n+c}{c}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{ma+n+b}{b} - \frac{mc+n+a}{a}\right)\overrightarrow{AC}$$

$$\frac{mc+n+a}{a} = \frac{mb+n+c}{c} = \frac{ma+n+b}{b} \Leftrightarrow \frac{mc+n}{a} = \frac{mb+n}{c} = \frac{ma}{b}$$

Dacă $a = b = c$, relaţia (1) este evidentă. Reciproc, să presupunem (1) î Dacă două dintre numerele a, b, c sunt egale, din (1) rezultă imediat că În caz contrar, putem considera că $a < b < c$ şi din (1) deducem că

$$\frac{(mc+n)-(mb+n)}{a-c} = \frac{(mb+n)-(ma+n)}{c-b} \Leftrightarrow \frac{c-b}{a-c} = \frac{b-a}{c-b}$$

unde primul raport este negativ, iar al doilea pozitiv, ceea ce constituie o co

IX.75. *Fie $ABCD$ patrulater inscriptibil, $\{O\} = AC \cap BD$, $m(\widehat{AC}$ şi punctele $M \in (AB)$, $N \in (CD)$. Notăm $k = \dfrac{MA}{MB}$, $r = \dfrac{NC}{ND}$, $p = \dfrac{O}{O}$*

$p \in \left\{2k, \frac{2}{r}, \frac{1}{2r}\right\}$, *să se arate că* $m(\widehat{MON}) \neq 90°$.

Mihai Ha

Soluţie. Cum $ABCD$ este inscriptibil, avem că $OA \cdot OC = OB \cdot OD$

$$m(\widehat{MON}) = 90° \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{k+1}\overrightarrow{OA} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{OB}\right)\left(\frac{1}{r+1}\overrightarrow{OC} + \frac{r}{r+1}\overrightarrow{OD}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$-OA \cdot OC + r \cdot OA \cdot OD \cdot \cos 60° + k \cdot OB \cdot OC \cdot \cos 60° - kr \cdot OB \cdot O$$

$$(1+rk)\, OA \cdot OC = \frac{1}{2}\left(r \cdot OA \cdot OD + k \cdot OB \cdot OC\right) \Leftrightarrow$$

$$2(1+rk) = r\frac{OD}{OC} + k\frac{OB}{OA} \Leftrightarrow 2(1+rk) = rp + \frac{k}{p}.$$

Dacă $p \in \left\{2k, \frac{2}{r}, \frac{1}{2r}\right\}$, evident că relaţia (1) nu este verificată, deci $m(\widehat{MO}$

Clasa a X-a

X.71. *Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi. Să se arate că*

$$\frac{\sqrt{a} + 2\sqrt[4]{bc}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} + \frac{\sqrt{b} + 2\sqrt[4]{ac}}{\sqrt{a} + \sqrt{c}} + \frac{\sqrt{c} + 2\sqrt[4]{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} > 3.$$

Lucian Tuţescu

Soluţie. Se observă că $\sqrt{a} < \sqrt{b} + \sqrt{c}$ (deoarece $a < b + c + 2\sqrt{bc}$), $\sqrt{b}$ şi $\sqrt{c} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Prin urmare, dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unu atunci $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ sunt de asemenea lungimile laturilor unui triunghi. raţionamentul anterior, deducem că şi $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[4]{b}$, $\sqrt[4]{c}$ sunt lungimile latu triunghi. De aici, rezultă că $\dfrac{\sqrt{a} + \sqrt[4]{bc}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} > 1$ (1). (Într-adevăr, (1) $\sqrt[4]{bc} > \sqrt{b} + \sqrt{c} \Leftrightarrow \sqrt{a} > \left(\sqrt[4]{b} - \sqrt[4]{c}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt[4]{a} > \left|\sqrt[4]{b} - \sqrt[4]{c}\right|$). Acum, nu decât să remarcăm faptul că inegalitatea din enunţ se obţine adunând rel inegalităţile derivate din ea prin permutări circulare ale laturilor a, b şi c

X.72. *Să se rezolve sistemul*

$$x^2 \log_2 15 + y^2 \log_3 10 + z^2 \log_5 6 = 2(xy + yz + zx),$$
$$x + y + z = 5.$$

Marius Damia

Soluţie. Adunând $x^2 + y^2 + z^2$ în ambii membri ai primei ecuaţi $x^2 \log_2 30 + y^2 \log_3 30 + z^2 \log_5 30 = (x+y+z)^2$, sau $\dfrac{x^2}{\log_{30} 2} + \dfrac{y^2}{\log_{30} 3} +$ $(x+y+z)^2$. Pe de altă parte, conform inegalităţii lui Cauchy-Schwarz, a

$$(\log_{30} 2 + \log_{30} 3 + \log_{30} 5)\left(\frac{x^2}{\log_{30} 2} + \frac{y^2}{\log_{30} 3} + \frac{z^2}{\log_{30} 5}\right) \geq (x + y +$$

$$\frac{x^2}{\log_{30} 2} + \frac{y^2}{\log_{30} 3} + \frac{z^2}{\log_{30} 5} \geq (x+y+z)^2.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă x, y, z sunt proporţionale cu $\log_{30}$
$\log_{30} 5$. Astfel, putem scrie

$$\frac{x}{\log_{30} 2} = \frac{y}{\log_{30} 3} = \frac{z}{\log_{30} 5} = \frac{x+y+z}{\log_{30} 2 + \log_{30} 3 + \log_{30} 5} = 5,$$

de unde rezultă că soluţia sistemului este $x = 5\log_{30} 2$, $y = 5\log_{30} 3$, $z =$

X.73. *Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că pentru ori* *astfel încât $3 \mid x+y$, are loc egalitatea $f\left(\dfrac{x+y}{3}\right) = \dfrac{f(x)+f(y)}{3}$.*

Eugenia Roşu, e

Soluţie. Fie f o funcţie cu proprietatea considerată. Pentru $x = y$ $f\left(\dfrac{0+0}{3}\right) = \dfrac{f(0)+f(0)}{3}$, deci $f(0) = 0$. Dacă luăm pe rând $x = 2$ apoi $x = 3$, $y = 0$ în egalitatea dată, obţinem $f(2) = 2f(1)$ şi $f(3) = 3$ demonstra prin inducţie propoziţia $P(n)$: $f(n) = nf(1)$, $n \in \mathbb{N}$. Am a că $P(0)$, $P(1)$ şi $P(2)$ sunt adevărate. Presupunem acum că $P(k)$ este oricare ar fi $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$, $m \in \mathbb{N}$. Să demonstrăm valabilitatea $P(m+1)$. Distingem trei cazuri.

I. Dacă $m+1 = 3l+1$, $l \in \mathbb{N}$, atunci luând $x = 3l+1$ şi $y = 3l-1$ în considerată (pentru că $3 \mid x+y$), avem $f\left(\dfrac{3l+1+3l-1}{3}\right) = \dfrac{f(3l+1)+}{3}$ deci $3(2l) = f(3l+1) + f(3l-1)$. Cum $2l \le 3l \le m$ şi $3l-1 \le m$, rezult ipotezei de inducţie, că $f(3l+1) = 3f(2l) - f(3l-1) = 6lf(1) - (3l -$ $(3l+1)f(1) = (m+1)f(1)$.

II. Dacă $m+1 = 3l+2$, $l \in \mathbb{N}$, considerăm $x = 3l+2$ şi $y = 3l+1$ în din ipoteză ($3 \mid x+y$) şi obţinem $f\left(\dfrac{3l+2+3l+1}{3}\right) = \dfrac{f(3l+2)+f(3l}{3}$ $f(3l+2) = 3f(2l+1) - f(3l+1) = 3(2l+1)f(1) - (3l+1)f(1) = (3l +$ $(m+1)f(1)$.

III. Dacă $m+1 = 3l+3$, $l \in \mathbb{N}$, atunci pentru $x = 3l+3$ şi $y = 3l$ (relaţia iniţială devine $f\left(\dfrac{3l+3+3l}{3}\right) = \dfrac{f(3l+3)+f(3l)}{3}$, de unde d $f(3l+3) = 3f(2l+1) - f(3l) = (3l+3)f(1) = (m+1)f(1)$.

Cu aceasta demonstraţia propoziţiei $P(n)$ este terminată. Cum func $nf(1)$, $n \in \mathbb{N}$ satisface proprietatea cerută, rezultă că aceasta este soluţia

X.74. *Fie d_1, d_2 două drepte perpendiculare şi l_1, l_2 dreptele supor toarelor celor două perechi de unghiuri opuse formate de ele. Determin cu $A \in d_1$, $B \in d_2$, $C \in l_1$ şi $O, H \in l_2$ (O, H cu semnificaţiile uzuale).*

Temistocle Bî

Soluţie. Faţă de reperul cartezian xOy cu d_1 luată ca axă Ox şi d_2 $A(a, 0)$, $B(0, b)$, $C(c, c)$ (nu este esenţial faptul că l_1 este luată ca prima a reperului). Mediatoarele laturilor $[AB]$ şi $[BC]$ au ecuaţiile $y - \dfrac{b}{2} =$ respectiv $y - \dfrac{b+c}{2} = \dfrac{c}{b-c}\left(x - \dfrac{c}{2}\right)$. Punând condiţia ca punctul lor aparţină dreptei l_2: $x + y = 0$, obţinem relaţia $(a+b)\left(2c^2 - ab\right) = 0$

înălţimile din A şi C au ecuaţiile $y = \dfrac{c}{b-c}(x-a)$, respectiv $y - c = \dfrac{a}{b}$ (
condiţia $H \in l_2$ conduce la $c\left(a^2+b^2\right) = 0$ (2). Distingem patru cazuri:

(*i*) $a+b=0$, $c=0$, adică $b=-a$, $c=0$; atunci $\triangle ABC$ este dreptung
situat în cadranele II sau IV, având catetele pe axele reperului.

(*ii*) $a+b=0$, $a^2+b^2=0$, adică $a=b=0$; atunci $\triangle ABC$ este degene

(*iii*) $2c^2-ab=0$, $c=0$; din nou $\triangle ABC$ este degenerat.

(*iv*) $2c^2-ab=0$, $a^2+b^2=0$, adică tot triunghi degenerat.

X.75. *a) Fie $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Dacă z_1, z_2, z_3 sunt trei numere complexe d
fel încât* $\operatorname{Re}(\alpha\bar{z}_1) = \operatorname{Re}(\alpha\bar{z}_2) = \operatorname{Re}(\alpha\bar{z}_3)$, *atunci punctele de afixe z_1,
coliniare. Notăm cu d dreapta pe care sunt situate aceste puncte.*

b) Dacă z_1', z_2', z_3' sunt trei numere complexe diferite cu proprietatea că
$\operatorname{Im}(\alpha\bar{z}_2') = \operatorname{Im}(\alpha\bar{z}_3')$, *atunci punctele cu afixele z_1, z_2, z_3 sunt colinia
dreapta ce le conţine.*

c) Să se arate că dreptele d şi d' sunt perpendiculare.

Constantin C

Soluţie. *a*) Avem:

$$\operatorname{Re}(\alpha\bar{z}_1) = \operatorname{Re}(\alpha\bar{z}_2) = \operatorname{Re}(\alpha\bar{z}_3) \Leftrightarrow \frac{\alpha\bar{z}_1+\bar{\alpha}z_1}{2} = \frac{\alpha\bar{z}_2+\bar{\alpha}z_2}{2} = \frac{\alpha\bar{z}_3+\bar{\alpha}}{2}$$

$$\frac{z_2-z_1}{\bar{z}_2-\bar{z}_1} = \frac{z_3-z_1}{\bar{z}_3-\bar{z}_1} = -\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}.$$

Din relaţia (1), obţinem $\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1} = \overline{\left(\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right)}$, adică $\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1} \in \mathbb{R}$, ceea c
că punctele de afixe z_1, z_2, z_3 sunt coliniare.

b) Deoarece

$$\operatorname{Im}(\alpha\bar{z}_1') = \operatorname{Im}(\alpha\bar{z}_2') = \operatorname{Im}(\alpha\bar{z}_3') \Leftrightarrow \frac{\alpha\bar{z}_1'-\bar{\alpha}z_1'}{2i} = \frac{\alpha\bar{z}_2'-\bar{\alpha}z_2'}{2i} = \frac{\alpha\bar{z}_3'-}{2i}$$

$$\frac{z_2'-z_1'}{\bar{z}_2'-\bar{z}_1'} = \frac{z_3'-z_1'}{\bar{z}_3'-\bar{z}_1'} = \frac{\alpha}{\bar{\alpha}},$$

rezultă că $\dfrac{z_2'-z_1'}{z_3'-z_1'} \in \mathbb{R}$. Prin urmare, punctele cu afixele z_1', z_2', z_3' sunt c

c) Din relaţiile (1) şi (2) deducem că $\dfrac{z_2-z_1}{\bar{z}_2-\bar{z}_1} = -\dfrac{z_2'-z_1'}{\bar{z}_2'-\bar{z}_1'}$ sau $\dfrac{z_2-z_1}{\bar{z}_2'-\bar{z}_1'} = -$

de unde rezultă că $\dfrac{z_2'-z_1'}{z_3'-z_1'} \in i\mathbb{R}_+^*$, aşadar dreptele d şi d' sunt perpendicu

Clasa a XI-a

XI.71. *Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, unde $x_1 > 1$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n-1}{\ln x_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.*
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n^n$.

Dan Popescu

Soluţie. Din inegalitatea $1 < \dfrac{x-1}{\ln x} < x$, $\forall x \in (1,\infty)$, rezultă c
strict descrescător şi are limita 1. Scriem $x_n^n = \left[(1+x_n-1)^{\frac{1}{x_n-1}}\right]^{n(x_n-1)}$

criteriul Stolz–Cesaro,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\left(x_n-1\right)}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_{n+1}-1}-\frac{1}{x_n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n\ln x_n-x_n+1}{\left(x_n-1\right)^2-\left(x_n-1\right)$$

(din $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln x-x+1}{(x-1)^2-(x-1)\ln x}=\infty$). Urmează că $x_n^n\to e^0=1$.

XI.72. *Este posibil ca o funcţie $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, care verifică $1+f(x)+f(x)f$ $\forall x\in\mathbb{R}$, să fie continuă pe $\mathbb{R}$?*

Dorin Mărgidanu

Soluţie. Răspunsul este negativ. Vom demonstra că f nu are propr Darboux. Fireşte $f(x)\neq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Dacă f ar avea proprietatea lu atunci ar fi negativă pe $\mathbb{R}$ (pozitivă pe $\mathbb{R}$ nu poate fi!): $f(x)<0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ imediat că $1+f(1+x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, deci $f(x)>-1$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Pe de din $-1<f(x)<0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, rezultă că $0<f(x)+1<1$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $-f(x)f(x+1)<1$, $\forall x\in\mathbb{R}$, contradicţie cu $f(x)<0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

XI.73. *Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcţie nenulă de clasă C^{k+1} pe $[0,1]$, $k\in$ ca $f(0)=f(1)=0$. Dacă pentru orice $1\leq j\leq k$ există $a_j\in\{0,1\}$ $f^{(j)}(a_j)=0$, atunci există $x_1,x_2\in(0,1)$ astfel ca $f^{(k+1)}(x_1)\cdot f^{(k+1)}(x_2$*

Gheorghe Moroşanu şi Paul Georg

Soluţie. Vom ţine seama că, dacă $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ este de clasă C^1 pe $[$ semn constant pe $(0,1)$, iar $g(0)=0$ sau $g(1)=0$, atunci g păstrează sem pe $[0,1]$ şi în plus este monotonă pe $[0,1]$. Dacă presupunem că $f^{(k+1}$ $\forall x\in(0,1)$, aplicând succesiv rezultatul precedent pentru $g=f^{(k)}$, $g=f$ $g=f$ obţinem că f este monotonă pe $[0,1]$. Cum $f(0)=f(1)=0$ rezult pe $[0,1]$, contradicţie; deci există $x_1\in(0,1)$ astfel că $f^{(k+1)}(x_1)<0$. An $x_2\in(0,1)$ astfel ca $f^{(k+1)}(x_2)>0$, de unde concluzia.

XI.74. *Fie $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, $n\in 2\mathbb{N}^*$. Următoarele afirmaţii sunt ec*
(1) $b^2-4ac\leq 0$, (2) $\det\left(aA^2+bA+cI_n\right)\geq 0$, $\forall A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Marian Ursărescu

Soluţie. Pentru (1) $\Rightarrow$ (2) avem succesiv:

$$\det\left(aA^2+bA+cI_n\right)=a^n\det\left(A^2+\frac{b}{a}A+\frac{c}{a}I_n\right)=$$

$$=a^n\det\left[\left(A+\frac{b}{2a}I_n\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}I_n\right]=a^n\det\left(X^2+Y^2\right)\geq 0$$

unde $X=A+\dfrac{b}{2a}I_n$, iar $Y=\dfrac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}I_n$; $X,Y\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $XY=YX$.

Pentru (2) $\Rightarrow$ (1) să presupunem că $b^2-4ac>0$. Notând cu x_1, x_2 reale şi distincte ale ecuaţiei $ax^2+bx+c=0$, vom considera două numere α şi $\beta\in(-\infty,x_1)\cup(x_2,\infty)$. Fie

$$A=\begin{pmatrix}\alpha & 0 & \dots & 0\\ 0 & \beta & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \beta\end{pmatrix};\quad aA^2+bA+cI_n=\begin{pmatrix}a\alpha^2+b\alpha+c & & & \\ & a\beta^2+b\beta+c & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a\beta^2+b\end{pmatrix}$$

Acum $\det\left(aA^2+bA+cI_n\right)=\left(a\alpha^2+b\alpha+c\right)\left(a\beta^2+b\beta+c\right)^{n-1}<0$, ţin
de alegerea numerelor α şi β, de semnul funcţiei de gradul al doilea şi de
este par. Avem deci contradicţie, ceea ce încheie demonstraţia.

XI.75. *Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Să se arate că dacă $AB-BA$ comută
B, atunci $AB=BA$.*

Dorel Miheţ, T

Soluţie. Vom utiliza următorul rezultat: "Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ şi mulţime
$\{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid AX = XA\}$. Atunci:

$a)$ Dacă $A = kI_2$, $k \in \mathbb{C}$, atunci $C(A) = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$;

$b)$ Dacă $A \neq kI_2$, $k \in \mathbb{C}$ atunci $C(A) = \{\alpha A + \beta I_2 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$".

Să presupunem că $AB-BA$ nu este de forma λI_2. Atunci $\exists \alpha, \beta, \gamma, \delta$
încât $A = \alpha(AB-BA)+\beta I_2$ şi $B = \gamma(AB-BA)+\delta I_2$. Dacă $\alpha =$
$A = \beta I_2$, deci $AB-BA = O_2$, absurd. Deci $\alpha \neq 0$ şi atunci $AB-BA =$
deci $B = \gamma\left(\frac{1}{\alpha}A - \frac{\beta}{\alpha}I_2\right)+\delta I_2 = \alpha A + bI_2$, ceea ce implică $AB = BA =$
adică $AB-BA = O_2$, absurd. Astfel, există $\lambda \in \mathbb{C}$ astfel încât $AB-$
Cum $\operatorname{tr}(AB-BA)=0$, obţinem $\lambda = 0$, adică $AB = BA$.

Clasa a XII-a

XII.71. *Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcţie derivabilă cu derivata continuă.
că $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\,dx = 0$.*

Dan Radu,

Soluţie. Integrând prin părţi, ajungem la relaţia

$$\int_a^b f(x)\sin nx\,dx = \frac{f(a)\cos na - f(b)\cos nb}{n} + \frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\cos nx$$

Dacă $M = \sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$, $M' = \sup\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)|$, obţinem că $0 \leq \left|\int_a^b f(x)\sin\right.$
$\frac{2M+M'(b-a)}{n}$. Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\int_a^b f(x)\sin nx\,dx\right| = 0$, de unde concl

XII.72. *Fie funcţia $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, indefinit derivabilă pe $[0,1]$, cu p
că există $M>0$ astfel încât $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M$, $\forall x \in [0,1]$ şi $\forall n \in \mathbb{N}$. Arăta*

a)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1}(n+p)(n+p-1)\cdots(n+p-k+2)f^{(n+p-k)}(1)}{(-1)^{p+1}(n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)} = $$

b)

$$\lim_{p\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1}(n+p)(n+p-1)\cdots(n+p-k+2)f^{(n+p-k)}(}{(-1)^{p+1}(n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)}$$

$$= \int_0^1 x^n f^{(n)}(x)\,dx,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ovidiu Pop, S

Soluţie. Integrând prin părţi, obţinem succesiv:

$$\int_0^1 x^{n+p} f^{(n+p)}(x)\,dx = x^{n+p} f^{(n+p-1)}(x)\Big|_0^1 - (n+p)\int_0^1 x^{n+p-1} f^{(n+p-1)}($$

$$= f^{(n+p-1)}(1) - (n+p)\Big[x^{n+p-1} f^{(n+p-2)}(x)\Big|_0^1 - (n+p-1)\int_0^1 x^{n+p-2} f^{(n+p-2)}$$

$$= f^{(n+p-1)}(1) - (n+p)\, f^{(n+p-2)}(1) + (n+p)(n+p-1)\cdot$$

$$\cdot\Big[x^{n+p-2} f^{(n+p-3)}(x)\Big|_0^1 - (n+p-2)\int_0^1 x^{n+p-3} f^{(n+p-3)}(x)\,dx$$

şi aşa mai departe. Deducem că

$$\int_0^1 x^{n+p} f^{(n+p)}(x)\,dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} (n+p)(n+p-1)\cdots(n+p-k+2)\, f^{(n+p-k)}(1) +$$

$$+ (-1)^p (n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)\int_0^1 x^n f^{(n)}(x)\,dx, \quad \forall n,p \in \mathbb{N},$$

Arătăm că

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^m f^m(x)\,dx = 0.$$

Din $\left|f^{(m)}(x)\right| \le M$, $\forall x \in [0,1]$, $\forall m \in \mathbb{N}$, rezultă că $-\dfrac{M}{m+1} \le \int_0^1 x^m f^{(m}$ $\dfrac{M}{m+1}$, $\forall m \in \mathbb{N}$ şi trecând la limită, obţinem relaţia (2).

Din (1) şi (2) rezultă concluzia problemei.

XII.73. *Să se arate că*

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\ln\frac{(1+x)^n+(1-x)^n}{1+x^n}dx = n\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx = n\frac{\pi}{8}\ln 2,\ n$$

Să se calculeze apoi $\int\limits_0^{\pi/4}\ln\dfrac{1+\operatorname{tg}^3 x}{1+3\operatorname{tg}^2 x}dx.$

Gabriel Necula

Soluţie. Cu substituţia $x = \dfrac{1-y}{1+y}$ avem succesiv

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\ln(1+x^n)\,dx = \int_0^1 \frac{2}{(1+y)^2+(1-y)^2}\ln\frac{(1+y)^n+(1-y}{(1+y)^n}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\ln\left((1+y)^n+(1-y)^n\right)dy - \int_0^1\frac{1}{1+y^2}\ln(1+y)^n\,dy$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\ln\left((1+x)^n+(1-x)^n\right)dx - \int_0^1\frac{1}{1+x^2}\ln(1+x^n)\,dx$$

$$= n\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{8}n\ln 2 \Rightarrow$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \ln \frac{(1+x)^n + (1-x)^n}{1+x^n} dx = n \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{8} n \ln$$

(Presupunem cunoscut rezultatul $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{8} \ln 2$.) Pentru n

$\int\limits_0^1 \frac{1}{1+x^2} \ln \frac{(1+x)^3 + (1-x)^3}{1+x^3} dx = 3\frac{\pi}{8} \ln 2$, sau $\int\limits_0^1 \frac{1}{1+x^2} \ln \frac{2\left(1+3x^2\right)}{1+x^3} dx$

adică

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \ln \frac{1+3x^2}{1+x^3} dx = 3\frac{\pi}{8} \ln 2 - \int_0^1 \frac{\ln 2}{1+x^2} dx = 3\frac{\pi}{8} \ln 2 - \frac{\pi}{4} \ln 2 =$$

Cu substituţia $x = \operatorname{tg} t$ rezultă că $\int\limits_0^{\pi/4} \ln \frac{1+\operatorname{tg}^3 x}{1+3\operatorname{tg}^2 x} dx = -\frac{\pi}{8} \ln 2$.

XII.74. *Fie $(G, \cdot)$ un grup comutativ cu proprietatea că există $n \in \mathbb{N}$ din $x^n = y^n$ rezultă $x = y$, unde $x, y \in G$. Dacă f, g sunt două endom lui G, atunci ecuaţia $f(x) = g\left(x^{-1}\right)$ are soluţie unică dacă şi numai d $h : G \to G$, $h(x) = f(x^n)\, g(x^n)$ este injectivă.*

D. M. Bătineţu-Giurgiu,

Soluţie. Să presupunem că ecuaţia $f(x) = g\left(x^{-1}\right)$ are soluţie uni aceasta va fi $x = e$) şi să arătăm că h este injectivă. Succesiv avem:

$$h(x) = h(y) \Leftrightarrow f(x^n)\, g(x^n) = f(y^n)\, g(y^n) \Leftrightarrow g(x^n)\,(g(y^n))^{-1} = (f(x^n))^{-}$$

$$g(x^n)\, g\big(y^{-n}\big) = f\big(x^{-n}\big)\, f(y^n) \Leftrightarrow$$

$$g\big(x^n y^{-n}\big) = f\big(x^{-n} y^n\big) = f\Big(\big(y^{-n} x^n\big)^{-1}\Big) = f\Big(\big(x^n y^{-n}\big)^{-1}\Big),$$

de unde deducem că $x^n y^{-n} = e \Rightarrow x^n = y^n \Rightarrow x = y$, adică h este imjecti

Reciproc, dacă h este injectivă, să presupunem că există $a \in G \setminus \{e\}$ $f(a) = g\left(a^{-1}\right)$. Dar $h(a^n) = f(a^n)\, g(a^n) = g(a^{-n})\, g(a^n) = g(a^{-n} a^n) =$ prin urmare $h(a^n) = h(e^n)$, ceea ce contrazice injectivitatea lui h. U ecuaţia $f(x) = g\left(x^{-1}\right)$ are numai soluţia $x = e$.

XII.75. *Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang r şi $S = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid ABA = O_r$ că S este subspaţiu vectorial în $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi că $\dim S = n^2 - r^2$.*

Adrian Reis

Soluţie. Faptul că S este subspaţiu vectorial în $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este o simplă

Matricea A fiind de rang r, există $P, Q \in GL_n(\mathbb{C})$ astfel încât $P^{-1}AQ =$

Acum $B \in S \Leftrightarrow ABA = O_n \Leftrightarrow P^{-1}ABAQ = O_n \Leftrightarrow \left(P^{-1}AQ\right)\left(Q^{-1}BP\right)\left(P^{-}\right.$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_n$, unde am notat $Q^{-1}BP = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$,

matrice pătratice de ordin r, respectiv $n - r$. Însă $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, de unde $\alpha = O_r$. Deducem că $B \in S \Leftrightarrow$

$\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, adică $\dim S = n^2 - r^2$.

Soluţiile problemelor pentru pregătirea concur
din nr. 2 / 2006

A. Nivel gimnazial

G106. *Fie $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ şi $k \in \mathbb{N}$, $k \leq m$. Pentru fiecare $x \in \mathbb{N}$, c propoziţiile: $x > 1; x > 2; \ldots; x > m$. Aflaţi $x \in \mathbb{N}$ pentru care k c propoziţii sunt adevărate, iar celelalte $m - k$ sunt false.*

Maria Miheţ, T

Soluţie. Pentru $k = 0$, toate propoziţiile sunt false. În particular, falsă şi dacă $x \in \{0, 1\}$. Pe de altă parte, pentru $x = 0$ şi $x = 1$ evident că m propoziţii sunt false, deci pentru $k = 0$ răspunsul este $x \in \{0, 1\}$.

Pentru $1 \leq k \leq m - 1$, cele k propoziţii adevărate trebuie să fie $x > 1$; $x > k$, iar cele false vor fi $x > k + 1; \ldots; x > m$. Avem aşadar $x > k$ şi deci $x = k + 1$.

Când $k = m$, toate propoziţiile trebuie să fie adevărate. În particular fi adevărată, deci $x \in \{m + 1, m + 2, \ldots\}$.

G107. *Mulţimea $A \subset \mathbb{N}$ de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ are proprietatea că, or patru elemente ale sale, putem alege două cu suma $2^{2006} + 1$. Aflaţi valoar a lui n.*

Dan Nedeianu, Dr. Tr

Soluţia 1 (a autorului). Pentru $m = 6$, putem considera $A = \{1, 2, 3$ $2^{2006} - 1, 2^{2006}\}$. Să presupunem prin absurd că ar exista mulţimi A c Conform principiului cutiei, există o submulţime $B \subset A$ de cardinal elementele de aceeaşi paritate. Suma oricăror două numere din B va fi diferită de $2^{2006} + 1$.

Soluţia 2 (Marius Tiba, elev, Iaşi**).** Pentru a demonstra că nu p $m \geq 7$, putem proceda astfel: dacă $n \geq 7$, există în A fie 4 elemente cel cu 2^{2005}, fie 4 elemente cel puţin egale cu $2^{2005} + 1$. Alegând două nume patru, obţinem o sumă fie mai mare, fie mai mică decât $2^{2006} + 1$.

G108. *Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că mulţimea numerelor întregi de mult egal cu n poate fi partiţionată în m submulţimi cu aceeaşi sumă a el dacă şi numai dacă $n + 1 \geq m$.*

Marian Tetiv

Soluţie. Să presupunem mai întâi că $n + 1 \geq m$. Să notăm $M = \{x \in \mathbb{Z}$ $\{x \in \mathbb{Z} \mid -n \leq x \leq n\}$ şi $M_k = \{-k, k\}$ pentru $k = \overline{0, n}$. Clasele part atunci mulţimile $M_0, M_1, \ldots, M_{m-2}, M_{m-1} \cup M_m \cup \cdots \cup M_n$; este evide elementelor din fiecare astfel de mulţime este aceeaşi şi anume 0.

Reciproc, să presupunem că avem partiţia $M = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m$ elementelor din fiecare mulţime A_j este aceeaşi, $j = \overline{1, m}$. Se obţine fără că această sumă trebuie să fie 0 (deoarece şi suma elementelor mulţimii Observăm atunci că fiecare mulţime a partiţiei, cu excepţia celei care-l co are cel puţin două elemente. (Orice element nenul al mulţimii respective fie adunat cu un element nenul pentru a da suma zero). Avem atunci că $\operatorname{card} M = \sum\limits_{k=1}^{m} \operatorname{card} A_k \geq 2(m-1) + 1$, de unde deducem că $n + 1 \geq m$.

G109. *La un concurs se dau şase probleme evaluate cu 1, 2, 3, 4,*
6 puncte. Dacă un elev nu rezolvă o problemă, primeşte 1 punct; dacă
primeşte punctajul corespunzător. Fiecare elev obţine măcar 11 puncte.
că o problemă a fost rezolvată de cel puţin o treime dintre elevi.

Gabriel Dospinescu, stude

Soluţie. Fie n numărul elevilor; punctajul total este cel puţin $11n$
problemă, de punctaj a, şi notăm cu $A(a)$ mulţimea elevilor care rezol
problemă. Astfel, exact $|A(a)|$ elevi primesc a puncte şi exact $n - |A(a)|$
punct, deci punctajul obţinut la această problemă va fi $(a-1)|A(a)| + n$.
total va fi

$$\sum_a [(a-1)|A(a)| + n] \leq \max_a |A(a)| (1+2+3+4+5) + 6n,$$

deci $\max_a |A(a)| \cdot 15 + 6n \geq 11n$, de unde concluzia problemei.

G110. *Fie mulţimile* $A = \{k + \sqrt{n} \mid k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ *şi* $B = (0, 1/10)$.
$A \cap B$ *este infinită.*

Petru As

Soluţia 1. Considerăm $C = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \sqrt{m^2+1} - m, m \in \mathbb{N}, m \geq\right.$
dent că $C \subset A$ şi, dacă $x \in C$, atunci $0 < x = \dfrac{1}{\sqrt{m^2+1}+m} < \dfrac{1}{m}$
urmare $C \subset A \cap B$. Să mai arătăm că mulţimea C este infinită. Dacă p
contrariul, există $s \neq t$, $s, t \geq 10$ astfel încât $\sqrt{s^2+1} - s = \sqrt{t^2+1} - t$
succesiv:

$$t - s = \sqrt{t^2+1} - \sqrt{s^2+1} \Rightarrow s^2 - 2st + t^2 = t^2 + s^2 + 2 - 2\sqrt{(t^2+1)(}$$

$$\sqrt{(t^2+1)(s^2+1)} = st + 1 \Rightarrow \left(t^2+1\right)\left(s^2+1\right) = (st+1)^2 \Rightarrow s^2 + t^2 -$$

prin urmare $t = s$ şi ajungem astfel la o contradicţie. Rămâne că C es
prin urmare $A \cap B$ este infinită.

Soluţia 2 (Marius Tiba, elev, Iaşi**).** Pentru fiecare k întreg negativ
5, considerăm $n = k^2 - \dfrac{k}{5}$; ar fi suficient să arătăm că $0 < k + \sqrt{n} < \dfrac{1}{10}$.

$$\sqrt{k^2 - \frac{k}{5}} + k > 0 \Leftrightarrow \sqrt{k^2 - \frac{k}{5}} > -k \Leftrightarrow k^2 - \frac{k}{5} > k^2 \Leftrightarrow k < 0;$$

$$\sqrt{k^2 - \frac{k}{5}} + k < \frac{1}{10} \Leftrightarrow k^2 - \frac{k}{5} < \frac{(1-10k)^2}{100} \Leftrightarrow 100k^2 - 20k < 100k^2 -$$

ambele relaţii la care am ajuns fiind evident adevărate.

G111. *Fie* $0 < a < b$ *numere reale date şi* $x, y \in [a, b]$. *Dacă* $s = x +$
să se afle maximul expresiei $E = p + \dfrac{ab\left(s^2+ab\right)}{p}$.

Vlad Emanuel, e

Soluţie. Cum $x \in [a, b]$, avem că $(x-a)(x-b) \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - (a+b)x$
deci $(a+b)x \geq x^2 + ab$. Scriem o inegalitate analoagă în y şi înmulţind
membru, obţinem:

$$(a+b)^2 xy \geq \left(x^2+ab\right)\left(y^2+ab\right) \Leftrightarrow (a+b)^2 p \geq p^2 + ab\left(s^2 - 2p\right) + a$$

$$p+\frac{ab\left(s^2+ab\right)}{p}\leq a^2+b^2+4ab \Leftrightarrow E\leq a^2+b^2+4ab.$$

Pentru a se atinge egalitatea, trebuie ca $x^2-(a+b)\,x+ab=y^2-(a+b)$ fapt care se realizează pentru $(x,y)\in\{(a,a)\,;(a,b)\,;(b,a)\,;(b,b)\}$. Rezultă a^2+b^2+4ab.

G112. *Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor triunghiului ABC, atunc*

$$\sqrt{(a+b)^2-c^2}+\sqrt{(b+c)^2-a^2}+\sqrt{(c+a)^2-b^2}<2\,(a+b+c$$

Zdravko Starc, Vršac, Serbia şi Mu

Soluţie. Evident că $\sqrt{(a+b)^2-c^2}<\sqrt{(a+b)^2}=a+b$; scriind inegalităţi similare şi sumând, obţinem concluzia.

Notă. O mai bună evaluare a membrului stâng al inegalităţii, este i **Titu Zvonaru**:

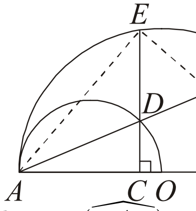
Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi, atunci

$$\sqrt{(a+b)^2-c^2}+\sqrt{(b+c)^2-a^2}+\sqrt{(c+a)^2-b^2}\leq\sqrt{3}\,(a+b+$$

G113. *Fie segmentul $[AB]$ de mijloc O şi semicercurile $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ d $[AB]$, respectiv $[AO]$ situate în acelaşi semiplan faţă de AB. Perpend $C\in(AO)$ pe AB intersectează $\mathcal{C}_1$ în E şi $\mathcal{C}_2$ în D. Dacă $AD\cap\mathcal{C}_1=$ arate că AE este tangentă cercului circumscris $\triangle DEF$.*

Alexandru Negrescu, elev,

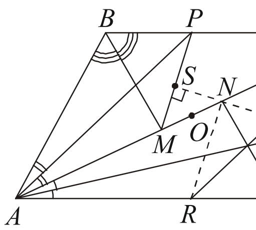
Soluţie. Cum $m(\widehat{DCB})+m(\widehat{DFB})=90^\circ+90^\circ=180^\circ$, rezultă că punctele B, F, D, C sunt conciclice. Scriind puterea punctului A faţă de cercul determinat de ele, obţinem că $AC\cdot AB=AD\cdot AF$. Pe de altă parte, $AC\cdot AB=AE^2$ din teorema catetei în $\triangle AEB$. Deducem că $AE^2=AD\cdot AF$, de unde concluzia.



G114. *Fie $ABCD$ un paralelogram care nu este romb cu $m(\widehat{BAD})=$ $M,N\in(AC)$, $P\in(BC)$ şi $Q\in(CD)$ sunt astfel încât $[BM$, $[DN$, $[$ sunt bisectoarele unghiurilor $\widehat{ABC}$, $\widehat{ADC}$, $\widehat{BAC}$ şi respectiv $\widehat{DAC}$, atunc perpendiculară pe NQ.*

Andrei Ned

Soluţie. Luăm $R\in(AD)$ astfel încât $[CR$ este bisectoarea unghiului $\widehat{ACD}$, adică cea de a treia bisectoare interioară a triunghiului ACD.



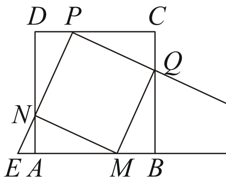
Deoarece triunghiurile ABC şi ADC sunt congruente şi simetrice faţă de centrul O al paralelogramului $ABCD$, rezultă că $[AP]$ este paralel şi congruent cu $[CR]$. De asemenea, din congruenţa şi simetria triunghiurilor AMP şi CNR rezultă că PM este paralelă cu RN. Prin urmare, dacă vom arăta că $NQ\perp R$ rezultă că $NQ\perp MP$. Punctul R este centrul cercului exînscris, tangent la în triunghiul CDN. Prin urmare, $[NR$ este bisectoarea unghiului $\widehat{AND}$. este centrul cercului exînscris, tangent laturii $[ND]$ în triunghiul AND;

[NQ este bisectoarea unghiului $\widehat{CND}$. Deoarece unghiurile $\widehat{AND}$ şi $\widehat{CNI}$
comun N şi laturile [NA şi [NC în prelungire, rezultă că bisectoarele lor [
sunt perpendiculare, ceea ce încheie rezolvarea.

G115. *Fie pătratul $MNPQ$ înscris în pătratul $ABCD$, $M \in (AB)$, $P \in (CD)$, $Q \in (BC)$ şi fie $\{E\} = PN \cap AB$, $\{F\} = PQ \cap AB$. Notăm S_3 ariile pătratului $ABCD$, pătratului $MNPQ$, respectiv $\triangle PEF$. Să se*

a) $S_1 - S_2 = 4\sqrt{S_{AEN} \cdot S_{BFQ}}$; *b)* $S_3 \geq S_1$; *c)* $\dfrac{1}{S_3} = \dfrac{1}{S_2} - \dfrac{1}{S_1}$.

Claudiu Ştefan



Soluţie. *a*) Din congruenţa triunghiurilor AMN, BQM, CPQ şi DNP (I.U.) rezultă că $AN = BM = CQ = DP$ şi $AM = BQ = CP = DM$. Notăm cu S aria $\triangle AMN$; evident că $4S = S_1 - S_2$. Apoi, din asemănările evidente $\triangle AEN \sim \triangle DPN$ şi $\triangle CPQ \sim \triangle BFQ$, obţinem că $\dfrac{S_{AEN}}{S} = \left(\dfrac{AN}{DN}\right)^2 = \left(\dfrac{CQ}{BQ}\right)^2 = \dfrac{S}{S_{BFQ}}$, deci $S^2 = S_{AEN} \cdot S_{BFQ}$. Concluzia de la *a*) este imed

b) Fie $k = \dfrac{AN}{ND} = \dfrac{CQ}{BQ}$; atunci $S_{AEN} = k^2 S$, $S_{BFQ} = \dfrac{S}{k^2}$, prin urmare

$$S_3 = S_2 + 2S + S_{AEN} + S_{BFQ} = S_2 + 2S + k^2 S + \frac{S}{k^2} = S_2 + S\left(k + \right.$$

Cum $k + \dfrac{1}{k} \geq 2$, rezultă că $S_3 \geq S_2 + 4S$, adică $S_3 \geq S_1$.

c) Cum $S_3 = S_{PEM} + S_{PFM}$, avem succesiv:

$$\frac{1}{2} PE \cdot PF = \frac{PM \cdot PE \cdot \sin 45^\circ}{2} + \frac{PM \cdot PF \cdot \sin 45^\circ}{2} \Leftrightarrow PM = \frac{\sqrt{2}PE}{PE -}$$

$$BQ^2 + BM^2 = MQ^2 = \left(\frac{PM}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{PE^2 \cdot PF^2}{(PE + PF)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{BQ^2 + BM^2} = \frac{EF^2 + 2PE \cdot PF}{PE^2 \cdot PF^2} \Rightarrow \frac{1}{AM^2 + BM^2} = \left(\frac{EF}{PE \cdot PF}\right)^2 + \frac{}{P}$$

$$\frac{1}{(AM + MB)^2 - 2AM \cdot MB} = \left(\frac{1}{AD}\right)^2 + \frac{1}{S_3} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{AB^2 - 4\dfrac{AM \cdot AN}{2}} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{S_3} \Rightarrow \frac{1}{S_3} = \frac{1}{S_1 - 4S} - \frac{1}{S_1} \Rightarrow \frac{1}{S_3} = \frac{1}{S_2}$$

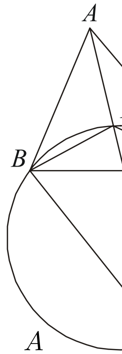
B. Nivel liceal

L106. *Fie I centrul cercului înscris în $\triangle ABC$. Dreptele AI, BI şi secţează a doua oară cercurile circumscrise triunghiului BCI, CAI şi B', respectiv C'. Dacă notăm cu $|XYZ|$ perimetrul $\triangle XYZ$, să se demo*

$$\frac{BC}{|BCA'|}+\frac{CA}{|CAB'|}+\frac{AB}{|ABC'|}=1.$$

Titu Zvonaru, C

Soluţie. Notăm cu R raza cercului circumscris $\triangle ABC$. Patrulaterul B inscriptibil, deci $m(\widehat{CA'I})=m(\widehat{IBC})=\frac{1}{2}m(\widehat{B})$. Aplicând teorema sinus în $\triangle AA'C$ şi în $\triangle ABC$, avem:



$$\frac{A'C}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{AC}{\sin\frac{B}{2}}=\frac{2R\sin B}{\sin\frac{B}{2}}=\frac{4R\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}=4R\cos\frac{B}{2},$$

deci $A'C=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$. Atunci:

$$|BCA'|=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}+a=$$
$$=4R\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)\Rightarrow$$

$$\frac{BC}{|BCA'|}=\frac{4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{4R\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)}=\frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos}$$

Egalând analog celelalte două rapoarte din concluzie, se obţine cerinţa pr

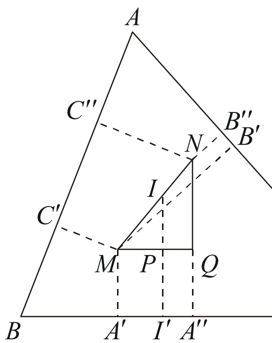
Observaţie. 1) Dacă $\triangle ABC$ este ascuţitunghic şi în locul punctulu erăm punctul O, relaţia rămâne valabilă şi constituie o parte a probleme *Crux Mathematicorum 1/2006.*

2) Relaţia este adevărată şi pentru ortocentrul H în cazul triunghiu tunghic.

Notă. În aceeaşi manieră a rezolvat problema **Vlad Emanuel**, elev,

L107. *Fie M, N două puncte situate în interiorul $\triangle ABC$, având până la laturile AB, BC, CA egale cu 3, 2, 7, respectiv $\frac{9}{2}$, 5, $\frac{5}{2}$. Dacă ra circumscris $\triangle ABC$ este $R=8$, să se calculeze MN.*

Vlad Emanuel, el



Soluţie. Fie A', B', C' şi A'', B'', C'' proiecţiile punctelor M, respectiv N pe laturile AB, BC, CA. Considerăm punctul $I\in[MN]$ astfel $\frac{MI}{IN}=2$ şi fie $MQ\parallel BC$, $Q\in NA''$, $I'=\mathrm{Pr}_{BC}\,I$, $\{P\}=II'\cap MQ$. Avem că $NQ=NA''-MA'=5-2=3$ şi $\frac{IP}{NQ}=\frac{MI}{MN}=\frac{2}{3}$, deci $IP=2$, apoi $II'=2+2=4$. Dacă $I''=\mathrm{Pr}_{AC}\,I$, $I'''=\mathrm{Pr}_{AB}\,I$, analog se arată că $II''=II'''=4$, prin urmare I este centrul cercului înscris în $\triangle ABC$, iar $r=4$. Rezultă că în inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$ se atinge egalitatea şi astfel $\triangle ABC$ este ech

Notăm $x = A'B$, $y = C'B$. Din teorema lui Pitagora, $BM^2 = BC'^2 +$
$BA'^2 + A'M^2$. Apoi, cu teorema cosinusului, $A'C'^2 = MC'^2 + MA'^2 - 2M$
$\cos 120^\circ = BC'^2 + BA'^2 - 2BC' \cdot BA' \cdot \cos 60^\circ$. Obţinem astfel sistemul $x^2 +$
$x^2 + y^2 - xy = 19$, cu unica soluţie admisibilă $x = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$, $y = \dfrac{7\sqrt{3}}{3}$.

Latura $\triangle ABC$ echilateral este $l = 8\sqrt{3}$. Cum I' este mijlocul lui BC
că $BI' = 4\sqrt{3}$, de unde $A'I' = 4\sqrt{3} - \dfrac{8\sqrt{3}}{3} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. Ştim că $\dfrac{A'I'}{I'A''} = \dfrac{MI}{IN}$
$A'A'' = 2\sqrt{3}$. Din trapezul dreptunghic $MA'A''N$ găsim $MN = \sqrt{21}$.

Notă (Mihai Haivas). Dacă $M, N \in \operatorname{Int} ABC$ au distanţele până
triunghiului egale cu a, b, c, respectiv a', b', c', iar raza cercului circumsc
este $R = \dfrac{2(ab' - a'b)}{a - b - a' + b'}$, atunci condiţia

$$(ab' - a'b)(b - c - b' + c') = (bc' - b'c)(a - b - a' + b')$$

este suficientă pentru ca triunghiul să fie echilateral. În cazul nostru, cele c
sunt verificate.

L108. *Să se arate că în orice $\triangle ABC$ are loc inegalitatea*

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} - (\sin A + \sin B + \sin C) \geq 4\sqrt{3}\sin^2\frac{\pi - 3A}{12}.$$

Marian Tetiv

Soluţia 1 (Vlad Emanuel, elev, Sibiu**).** Deoarece

$$\sin B + \sin C = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right)\cos\frac{B - C}{2} \leq 2\cos\frac{A}{2},$$

cu egalitate când $B = C = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{A}{2}$, rămâne să demonstrăm că

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} - \sin A - 2\cos\frac{A}{2} \geq 2\sqrt{3}\left(1 - \cos\frac{\pi - 3A}{6}\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} - 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} - 2\cos\frac{A}{2} \geq 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{A}{2} + \sin\frac{\pi}{6}\sin\right.$$

Notăm $x = \cos\dfrac{A}{2} \in (0, 1)$, $\sqrt{1 - x^2} = \sin\dfrac{A}{2}$; avem de arătat că

$$-2x\sqrt{1 - x^2} - 2x \geq \frac{\sqrt{3}}{2} - 3x - \sqrt{3}\sqrt{1 - x^2} \Leftrightarrow x - \frac{\sqrt{3}}{2} \geq 2\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Dacă $x > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ rămâne că $1 \geq 2\sqrt{1 - x^2}$, evident, iar dacă $x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ră
$2\sqrt{1 - x^2}$, iarăşi evident. Egalitatea se atinge în cazul triunghiului echila

Soluţia 2 (a autorului). Mai general, vom demonstra că oricare ar
$(0, \pi)$, are loc inegalitatea

$$\sin\frac{x + y + z}{3} - \frac{\sin x + \sin y + \sin z}{3} \geq \frac{8}{3}\sin\frac{x + y + z}{3}\sin^2\frac{x + y -}{12}$$

Plecăm de la egalitatea imediată

$$\sin\frac{x+y}{2}-\frac{\sin x+\sin y}{2}=2\sin\frac{x+y}{2}\sin^2\frac{x-y}{4},$$

pe care o rescriem sub formele

$$\sin\frac{z+t}{2}-\frac{\sin z+\sin t}{2}=2\sin\frac{z+t}{2}\sin^2\frac{z-t}{4},$$

$$\sin\frac{x+y+z+t}{4}-\frac{\sin\frac{x+y}{2}+\sin\frac{z+t}{2}}{2}=2\sin\frac{x+y+z+t}{4}\sin^2\frac{x+y}{}$$

Din relaţiile (2), (3) şi (4) deducem că

$$\sin\frac{x+y+z+t}{4}-\frac{\sin x+\sin y+\sin z+\sin t}{4}=\sin\frac{x+y}{2}\sin^2\frac{x-}{4}$$
$$+\sin\frac{z+t}{2}\sin^2\frac{z-t}{4}+2\sin\frac{x+y+z+t}{4}\sin^2\frac{x+y-z-t}{8}.$$

Pentru $x,y,z,t\in(0,\pi)$, primii doi termeni din membrul drept sunt neneg
cu 0 când $x=y$, $z=t$), deci are loc inegalitatea

$$\sin\frac{x+y+z+t}{4}-\frac{\sin x+\sin y+\sin z+\sin t}{4}\geq 2\sin\frac{x+y+z+t}{4}\sin^2\frac{x-}{}$$

Înlocuind aici $t=\dfrac{x+y+z}{3}$, obţinem exact relaţia (1). Egalitatea se ati
$x=y$, $z=\dfrac{x+y+z}{3}$, deci când $x=y=z$.

Cerinţa problemei se obţine din (1) pentru $x+y+z=\pi$. Egalitatea s
cazul triunghiului echilateral.

L109. *Se dau numerele reale pozitive subunitare* $a_1,a_2,\ldots,a_{2n^2-n}$, $n\in$
Să se demonstreze inegalitatea (sumarea se face prin permutări circulare)

$$\sum\frac{a_1^{2n-1}}{a_2^{2n-1}+a_3^{2n-1}+\ldots+a_{2n^2-n}^{2n-1}+2n+1}<\frac{2\,n-1}{2\,n+1}.$$

Ioan Şerdean

Soluţie. Cum $1>a_1^{2n+1}$, atunci

$$\sum\frac{a_1^{2n-1}}{a_2^{2n+1}+a_3^{2n+1}+\cdots+a_{2n^2-n}^{2n+1}+2n+1}<$$
$$<\sum\frac{a_1^{2n-1}}{a_2^{2n+1}+a_3^{2n+1}+\cdots+a_{2n^2-n}^{2n+1}+2n+a_1^{2n+1}}=$$
$$=\frac{a_1^{2n-1}+a_2^{2n-1}+\cdots+a_{2n^2-n}^{2n-1}}{a_1^{2n+1}+a_2^{2n+1}+\cdots+a_{2n^2-n}^{2n+1}+2n}.$$

Pe de altă parte, din inegalitatea mediilor $MG\leq MA$, avem că

$$(2n-1)\,a_1^{2n+1}+1+1\geq(2n+1)\sqrt[2n+1]{\left(a_1^{2n+1}\right)^{2n-1}\cdot 1\cdot 1}=(2n+1)$$

şi încă $2n^2 - n - 1$ inegalităţi analoage pentru $a_2, a_3, \ldots, a_{2n^2-n}$. Prin
acestora membru cu membru, obţinem că

$$(2n-1)\left(a_1^{2n+1} + a_2^{2n+1} + \cdots + a_{2n^2-n}^{2n+1}\right) + 2\left(2n^2 - n\right) \geq$$
$$\geq (2n+1)\left(a_1^{2n-1} + a_2^{2n-1} + \cdots + a_{2n^2-n}^{2n-1}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{a_1^{2n-1} + a_2^{2n-1} + \cdots + a_{2n^2-n}^{2n-1}}{a_1^{2n+1} + a_2^{2n+1} + \cdots + a_{2n^2-n}^{2n+1} + 2n} \leq \frac{2n-1}{2n+1}.$$

Din (1) şi (2) rezultă inegalitatea dorită, care este strictă întrucât (1) est

L110. *Fie* $a, b, c \in (0, \infty)$ *şi* $n, k \in \mathbb{N}$. *Demonstraţi inegalitatea*

$$\frac{a^{n+k}}{b^n} + \frac{b^{n+k}}{c^n} + \frac{c^{n+k}}{a^n} \geq a^k + b^k + c^k + \frac{4n(a-b)^2}{k(a^{2-k} + b^{2-k} + c^{2-k})}.$$

(În legătură cu o problemă propusă la OBM 2005).

Titu Zvonaru, Comăneşti şi Bogdan Ioniţă,

Soluţie. Considerăm polinomul $P(t) = kt^{n+k} - (n+k)t^k + n$, $t > 0$
schema lui Horner, obţinem că

$$P(t) = (t-1)^2\left[kt^{n+k-2} + \cdots + 2nt + n\right] \geq n(t-1)^2.$$

În inegalitatea $P(t) \geq n(t-1)^2$ facem $t = \dfrac{a}{b}$; obţinem

$$k\,\frac{a^{n+k}}{b^{n+k}} \geq (n+k)\,\frac{a^k}{b^k} - n + \frac{n(a-b)^2}{b^2} \Rightarrow k\,\frac{a^{n+k}}{b^n} \geq (n+k)\,a^k - nb^k + \ldots$$

Scriem încă două relaţii analoage pentru $t = \dfrac{b}{c}$ şi $t = \dfrac{c}{a}$ şi le sumăm:

$$k\left(\frac{a^{n+k}}{b^n} + \frac{b^{n+k}}{c^n} + \frac{c^{n+k}}{a^n}\right) \geq k\left(a^k + b^k + c^k\right) + n\left(\frac{(a-b)^2}{b^{2-k}} + \frac{(b-c)^2}{c^{2-k}} + \ldots\right.$$

Însă, din inegalitatea Cauchy-Schwarz, avem că

$$\frac{(a-b)^2}{b^{2-k}} + \frac{(b-c)^2}{c^{2-k}} + \frac{(c-a)^2}{a^{2-k}} \geq \frac{(a-b+c-b+a-c)^2}{a^{2-k} + b^{2-k} + c^{2-k}} = \frac{4(a-\ldots}{a^{2-k} + b^{2-k} \ldots}$$

de unde concluzia problemei.

L111. *Se dau* m *numere naturale distincte din mulţimea* $\{1, 2, \ldots,$
arate că putem alege câteva dintre ele, cu suma S, *astfel încât*

$$0 \leq S - \frac{m(m+1)}{2} \leq n + \sqrt{2n} - m.$$

Adrian Zahariuc, el

Soluţie. Fie $a_1 < a_2 < \cdots < a_m$ cele m numere date. Notăm cu
minim pentru care $a_1 + a_2 + \cdots + a_j \geq \dfrac{m(m+1)}{2}$ şi cu i indicele max
care $a_i + a_{i+1} + \cdots + a_j \geq \dfrac{m(m+1)}{2}$. Pentru $S = a_i + a_{i+1} + \cdots + a_j$
îndeplinită condiţia $0 \leq S - \dfrac{m(m+1)}{2}$.

Din maximalitatea lui i, avem $S - a_i \leq \dfrac{m(m+1)}{2}$, deci

$$S \leq a_i + \frac{m(m+1)}{2} - 1.$$

Din minimalitatea lui j, deducem că

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{j-1} < \frac{m(m+1)}{2} \leq a_i + a_{i+1} + \cdots + a_j \Rightarrow a_j > a_1 + a_2 +$$

Însă $a_k \geq k$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, deci

$$n - 1 \geq a_1 + a_2 + \cdots + a_{i-1} \geq 1 + 2 + \cdots + (i-1) = \frac{i(i-1)}{2} \Rightarrow i \leq \sqrt{}$$

Apoi, $a_k \leq n - m + k$, $\forall k \in \{1, 2, \ldots, m\}$; în particular

$$a_i \leq n - m + i \leq n - m + \sqrt{2n} + 1.$$

Din relaţiile (1) şi (2) obţinem că $S \leq \dfrac{m(m+1)}{2} + n - m + \sqrt{2n}$, ceea
rezolvarea.

L112. *Pentru $n \in \mathbb{N}$, notăm cu $a(n)$ numărul modurilor în care n se ca sumă a unui număr par de puteri ale lui 2 şi cu $b(n)$ numărul modur n se poate scrie ca sumă a unui număr impar de puteri ale lui 2. Să s $a(n) = b(n)$, $\forall n \geq 2$.*

Adrian Zahariuc, ele

Soluţia 1. Fie $\mathcal{N}$ mulţimea tuturor şirurilor de numere naturale c număr finit de termeni nenuli. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, definim

$$\mathcal{M}_n = \{(a_0, a_1, \ldots) \in \mathcal{N} \mid n = a_0 + 2a_1 + 4a_2 + \cdots\}.$$

Atunci se observă că

$$a(n) = |\mathcal{M}_n(A)|, \quad \text{unde} \quad \mathcal{M}_n(A) = \{(a_0, a_1, \ldots) \in \mathcal{M}_n \mid a_0 + a_1 + \cdots =$$
$$b(n) = |\mathcal{M}_n(B)|, \quad \text{unde} \quad \mathcal{M}_n(B) = \{(a_0, a_1, \ldots) \in \mathcal{M}_n \mid a_0 + a_1 + \cdots =$$

Evident că

$$a(2n+1) = a(2n) \quad \text{şi} \quad b(2n+1) = b(2n).$$

Să evaluăm $a(2n)$. Este clar că a_0 este tot timpul par. Cardinalul lui $a_0 = 2k$, $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, este $b(n-k)$. Atunci

$$a(2n) = b(n) + b(n-1) + \cdots + b(0) \Rightarrow a(2n) = a(2n-2) + b(n$$

Analog se arată că

$$b(2n) = b(2n-2) + a(n).$$

Folosind relaţiile (1), (2) şi (3), se arată prin inducţie că $a(n) = b(n)$, $\forall n$

Notă. Asemănător a rezolvat problema **Vlad Emanuel**, elev, Sibiu.

Soluţia 2 (a autorului). Vom folosi funcţii generatoare. Fie

$$f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \frac{1}{1+x}.$$

Atunci, din definiţia numerelor $a(n)$ şi $b(n)$ dată în prima soluţie,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a(n) - b(n))\, x^n = f(x) f\left(x^2\right) f\left(x^4\right) \cdots = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1+x^4} \cdots$$

de unde $a(n) - b(n) = 0$, $\forall n \geq 2$, ceea ce trebuia demonstrat.

L113. *Determinaţi numerele reale a, b pentru care mulţimea $A =$ $n \in \mathbb{N}^*\}$ este finită.*

Gheorghe I

Soluţia 1 (a autorului). Notăm $S_n = a^n + b^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Deoarece A ea este mărginită: există $m = \min A$, $M = \max A$, deci $m \leq S_n \leq M$, Pentru $|a| > 1$, avem că

$$S_{2n} = a^{2n} + b^{2n} \geq a^{2n} = \left(1 + a^2 - 1\right)^n \geq 1 + n\left(a^2 - 1\right) > M,\ \forall n >$$

Din contradicţia obţinută rezultă că $|a| \leq 1$. La fel se arată că $|b| \leq 1$.

Dacă $|a| < 1$, $a \neq 0$ şi $|b| \leq 1$, atunci $a^{2n+2} < a^{2n}$ şi $b^{2n+2} \leq b^{2n}$, de S_{2n}, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Rezultă astfel că mulţimea A este infinită, fals. Analog contradicţie dacă $|b| < 1$, $b \neq 0$. Deducem că $a, b \in \{-1, 0, 1\}$ şi pentru ac se verifică imediat că A este finită.

Soluţia 2 (Vlad Emanuel, elev, Sibiu**).** Dacă A, B sunt mulţim $|A| = m$, $|B| = n$, atunci $A \pm B = \{x \pm y \mid x \in A, y \in B\}$ şi $A \cdot B = \{xy \mid x \in$ sunt tot finite, având cel mult mn elemente. Fie $x_n = a^n + b^n$; cum A mulţimile $\{x_{2n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ şi $\left\{x_n^2 \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$ sunt finite. Atunci $\left\{x_n^2 - x_{2n} \mid\right.$ $\{2a^n b^n g \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ este finită, apoi $\left\{(a^n - b^n)^2 \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$ este finită, deci $\{a^n -$ este finită. Cum $a^n = \dfrac{(a^n + b^n) + (a^n - b^n)}{2}$, deducem că $\{a^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ de unde se deduce imediat că $a \in \{-1, 0, 1\}$. Analog obţinem că $b \in \{$ pentru aceste valori se verifică imediat că A este finită.

L114. *Considerăm o parabolă şi două drepte secante parabolei, paralel dar neparalele cu axa de simetrie a parabolei. Folosind doar rigla negra construiască tangenta la parabolă care este paralelă cu dreptele date.*

Titu Zvonaru, C

Soluţie. Fie $\mathcal{P} : y^2 = 2px$ parabola dată, iar d şi d' cele două d $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ intersecţiile lui d cu $\mathcal{P}$, cu $y_1^2 = 2px_1$, $y_2^2 = 2px_2$, i punctul căutat în care tangenta la parabolă este paralelă cu dreapta PQ. în M are ecuaţia $by = px + pa$ şi panta $\dfrac{p}{b}$, iar dreapta PQ are panta

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{2p\left(y_1 - y_2\right)}{2px_1 - 2px_2} = \frac{2p\left(y_1 - y_2\right)}{y_1^2 - y_2^2} = \frac{2p}{y_1 + y_2}.$$

Din egalitatea pantelor obţinem că $b = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$, deci M are aceeaşi or mijlocul segmentului $[PQ]$.

Folosind teorema lui Ceva, se arată că putem construi mijlocul unui seg avem dată o dreaptă paralelă cu el, apoi putem construi o nouă paralelă printr-un punct dat, ambele construcţii efectuându-se doar cu sigla negra de exemplu, A.Tóth - *Noţiuni de teoria construcţiilor geometrice*, E.D.P.,

Cu segmentul $[PQ]$ şi dreapta d', construim mijlocul M al lui $[PQ]$ taie parabola în P' şi Q', construim mijlocul M' al lui $[P'Q']$. Dreapta parabola în punctul T (ea fiind paralelă cu axa de simetrie a parabole paralela prin T la d este tangenta dorită.

Notă. Soluţie corectă s-a primit de la **Vlad Emanuel**, elev, Sibiu.

L115. *Determinaţi* $P \in \mathbb{R}[X]$, $\operatorname{grad} P \geq 2$, *astfel încât funcţia* f
$f(x) = p(\{x\}) + \{p(x)\}$ *să fie periodică (unde* p *este funcţia polinomială*
P*, iar* $\{\cdot\}$ *desemnează partea fracţionară).*

Paul Georgescu şi Gabriel

Soluţie. Vom arăta că nu există polinoame P cu proprietăţile din e
supunem contrariul şi fie $T \in \mathbb{R}_+^*$ o perioadă a lui f. Cum discontinuităţ
ale lui f sunt numere întregi şi soluţiile ecuaţiei $p(x) = n$, $n \in \mathbb{Z}$, rezultă
$[0, T]$ un număr finit de puncte de discontinuitate – fie acesta N. Funcţia
acelaşi număr de puncte de discontinuitate în orice interval $[kT, (k+1)T$

Fie $n = \operatorname{grad} P$; atunci $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(k) = p((k+1)T) - p(kT)$ e
polinomială de grad $n-1$ în k, deci $\lim\limits_{k\to\infty} g(k) = \pm\infty$. Pentru fixarea
presupunem că $\lim\limits_{k\to\infty} g(k) = +\infty$. Există atunci $k \in \mathbb{Z}$ pentru care $g(k) \geq$
Cum $p((k+1)T) - p(kT) \geq N + [T] + 2$, între $p(kT)$ şi $p((k+1)T)$
minim $N + [T] + 2$ valori întregi, iar din continuitatea funcţiei polinomi
rezultă că p ia toate aceste valori pe $[kT, (k+1)T]$. În intervalul $[kT, (k$
află cel mult $[T] + 1$ numere întregi, posibile puncte de discontinuitate pen
şi cum $p(\{x\})$ este continuă pe restul intervalului, rezultă că f are cel p
puncte de discontinuitate pe $[kT, (k+1)T]$, contradicţie.

IMPORTANT

- În scopul unei legături rapide cu redacţia revistei, pot fi utilizate urm adrese e-mail: **tbirsan@math.tuiasi.ro** sau **t_birsan@yahoo** **profgpopa@yahoo.co.uk** . Pe această cale colaboratorii pot purta ţia un dialog privitor la materialele trimise acesteia, procurarea n revistei etc. Sugerăm colaboratorilor care trimit probleme original publicare să le numeroteze şi să-şi reţină o copie xerox a lor pentru purta cu uşurinţă o discuţie prin e-mail asupra acceptării/neaccept tora de către redacţia revistei.

- La *problemele de tip L* se primesc soluţii de la orice iubitor de ma elementare (indiferent de *preocupare profesională* sau *vârstă*). Fieca soluţiile acestor probleme - ce sunt publicate în revistă după un a urmată de numele tuturor celor care au rezolvat-o.

- **Adresăm cu insistenţă rugămintea ca materialele trimise să nu fie (să nu fi fost) trimise şi altor publicaţii.**

- Rugăm ca materialele tehnoredactate să fie trimise pe adresa reda soţite de fişierele lor (de preferinţă în LaTeX).

Probleme propuse[1]

Clasele primare

P.134. De la apartamentul meu cobor 7 etaje, apoi urc 4 etaje şi obse
la etajul 9. La ce etaj locuiesc?
(*Clasa I*) **Dragoş Iacob,**

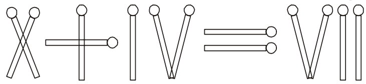
P.135. În trei vase sunt 36 nuci. Dacă din primul vas se iau 3 nuc
treilea o nucă şi se pun în al doilea vas, atunci în fiecare vas va fi acelaşi
nuci. Câte nuci au fost la început în fiecare vas?
(*Clasa I*) **Înv. Rica Bucăt**

P.136. Aflaţi vârsta tatălui meu ştiind că este un număr cuprins într
dublul lui între 73 şi 77, iar triplul lui este cuprins între 112 şi 118.
(*Clasa a II-a*) **Iurie Juc,**

P.137. Dorin, Oana şi Claudia se pregătesc pentru Concursul "Floric
pan". Oana a rezolvat 15 probleme. Dorin a rezolvat un număr de proble
faţă de Oana, egal cu numărul de probleme rezolvate în plus de Oana faţă c
Câte probleme au rezolvat împreună cei trei copii?
(*Clasa a II-a*) **Inst. Maria I**

P.138. Doi taţi şi trei fii au împuşcat fiecare câte un iepure. Când i-au
au văzut că au doar patru iepuri. De ce?
(*Clasa a III-a*) **Inst. Elena**

P.139. Mutaţi un singur chibrit pentru a obţine o egalitate:



(*Clasa a III-a*) **Nicolae Ivăşchescu**

P.140. Descoperă regula de completare a jetoanelor

10	11	12	13	14	...	98	99
0	1	2				72	81

şi calculează câte numere diferite sunt scrise pe aceste jetoane pe locul de
(*Clasa a III-a*) **Lenuţa Zaharia, e**

P.141. Fiul observă că, atunci când îi mai trebuia un an până la
vârstei din prezent, tatăl avea vârsta de 12 ori mai mare decât a sa, iar câ
11 ani, vârsta lui va fi de 4 ori mai mică decât a tatălui. Să se afle vârst
prezent.
(*Clasa a IV-a*) **Petru As**

P.142. Paginile unei cărţi sunt numerotate de la 1 la 336. Din aceas
rup, la întâmplare, 111 foi. Să se arate că:

a) suma numerelor de pe foile rămase nu se împarte exact la 10;

b) produsul numerelor de pe foile rămase se împarte exact la 3.

(*Clasa a IV-a*) **Maria Frangoi, e**

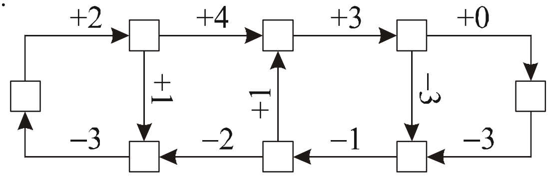
---

[1] Se primesc soluţii până la data de 1 iunie 2008.

P.143. Aşezaţi numerele 2, 3, 4, ..., 10 în pătratul alăturat astfel
încât, pe fiecare linie, suma numerelor din primele două casete să fie egală
cu numărul din ultima casetă. În câte moduri pot fi aşezate aceste numere?
(*Clasa a IV-a*) **Ionela Bărăgan, e**

Clasa a V-a

V.81. Demonstraţi că putem completa cu numere naturale într-o in
moduri căsuţele libere din figura de mai jos, astfel încât să se poată efec
operaţiile indicate:



Amalia Cantemir, e

V.82. Într-o fermă sunt găini, oi şi vaci, în total 324 de picioare şi
impar de capete:

a) Să se arate că în fermă nu pot fi 101 găini.

b) Să se arate că numărul oilor nu poate fi egal cu numărul vacilor.

Petru As

V.83. Să se demonstreze că $13 \mid \overline{abc}$ dacă şi numai dacă $13 \mid 3 \cdot \overline{ab} - c$

Otilia Nemeş, Oc

V.84. Determinaţi cel mai mic şi cel mai mare număr natural de 9
divizibile cu 90 şi având suma cifrelor 90.

Carmen Daniela Tama

V.85. Fie $a, b \in \mathbb{N}$; să se arate că dacă ultima cifră a numărului a^2 +
atunci ultima cifră a lui $(a+b)^2$ este tot 9. Reciproca este adevărată?

Ioan Săcălean

V.86. *a*) Să se rezolve în numere naturale ecuaţia $x^2 + y^2 = 625$.

b) Să se arate că ecuaţia $x^2 + y^2 = 2007$ nu are soluţii în $\mathbb{N}^2$.

Valerica B

V.87. Să se arate că $7^{51} > 3^{89}$.

Nela Cice

Clasa a VI-a

VI.81. Ştiind că $13 \mid 2a + 3b + 4c + 5d$, arătaţi că $13 \mid 43a + 45b + 4$
$13 \mid 46a + 30b - 64c - 54d$ $(a, b, c, d \in \mathbb{N})$.

Norbert-Traian Ioniţă,

VI.82. Fie $A = 3^m \cdot 5^n$, $m, n \in \mathbb{N}$. Notăm cu a, b, c numărul divizorilor
A, $3A$, respectiv $5A$. Ştiind că a şi b sunt direct proporţionale cu 3 şi 4
sunt invers proporţionale cu 15 şi 16, să se determine A.

Mihai Ha

VI.83. Dacă p este număr prim, iar $n \in \mathbb{N}^*$, să se arate că $p^{4n} - 3$ nu
perfect.

Mirela M

VI.84. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, considerăm $A_n = 1 + 11 + 111 + \cdots + \underbrace{11\ldots1}_{n}$.

a) $3 \mid A_n$ dacă şi numai dacă $3 \nmid n - 1$;

b) $10^n + 1 + \dfrac{9n}{10} < \dfrac{A_{2n}}{A_n} < 10^n + 1 + \dfrac{10n}{11}$, $\forall n \geq 3$.

Temistocle Bî

VI.85. Pe latura Ox a unghiului drept xOy considerăm un punct bisectoarea unghiului considerăm un punct B. Perpendiculara în B p dreapta Oy în C. Să se arate că $AB = BC$.

Petru As

VI.86. *a*) Fie $\triangle ADC$ şi $M \in (AC)$. Să se arate că $P_{ADM} < P_{ADC}$.

b) Fie $\triangle ABC$ şi (AD) bisectoarea unghiului $\widehat{A}$, $D \in BC$. Dacă P_{ABD} să se arate că $\triangle ABC$ este isoscel.

Gheorghe I

VI.87. În figura alăturată sunt desenate 6 puncte, care unite două câte două dau naştere la 9 drepte. Avem voie să ştergem unul dintre puncte şi să-l desenăm oriunde în altă parte.

a) Efectuaţi operaţia descrisă astfel încât, prin unirea câte două a noilor puncte, să se obţină 11 drepte.

b) Care este numărul minim şi cel maxim de drepte care se pot ob configuraţie permisă?

Gabriel P

Clasa a VII-a

VII.81. Se consideră $\overline{abc}$ şi $\overline{xyzt}$ numere naturale scrise în baza 10. Să s numerele naturale $A = \sqrt{6\sqrt{2\sqrt{\overline{abc}}}}$ şi $B = \sqrt{3\sqrt{2\sqrt{\overline{xyzt}}}}$.

Bogdan Chiriac, stu

VII.82. Fie a, b numere reale strict pozitive. Să se arate că:

a) dacă $a^3 - b^3 = a + b$, atunci $a^2 + b^2 > 1$;

b) dacă $a^3 + b^3 = a - b$, atunci $a^2 + b^2 < 1$.

Ionel Necl

VII.83. Determinaţi numerele întregi a, b, c, d pentru care $ac + b$ $ad + bc = 2$.

Gheorghe I

VII.84. Fie pătratul $ABCD$ cu latura de lungime a, iar E, F, G laturile $[BC]$, $[CD]$, respectiv $[AB]$ astfel încât $CE = \dfrac{a}{4}$, $CF = \dfrac{a}{3}$, iar B se arate că dreptele AE, BF şi CG sunt concurente.

Claudiu Ştefan P

VII.85. Fie O intersecţia diagonalelor patrulaterului $ABCD$. Dacă $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{COD}$, să se arate că $\dfrac{CD}{AB} - \dfrac{AB}{CD} = 1$.

Doru B

VII.86. Fie A un punct pe manta unei mese de biliard circulare cu ra O bilă pleacă din A şi ajunge înapoi în A lovind manta de cel puţin trei c

bilei se face considerând că aceasta loveşte un perete plan tangent la cerc
de contact. Să se arate că există o infinitate de traiectorii posibile şi să se
traiectoria de lungime minimă.

Cristian L

VII.87. O tablă are forma unui dreptunghi 4×5, format din 20 d
1×1. Avem la dispoziţie două jetoane, fiecare putând acoperi câte un p
câte moduri putem aşeza jetoanele pe tablă, astfel încât ele să nu se a
aceeaşi linie, nici pe aceeaşi coloană? Generalizare.

Gabriel P

Clasa a VIII-a

VIII.81. Considerăm fixate numerele $a, b \in \mathbb{Z}^*$, $m, n \in \mathbb{N}^*$, $m \neq n$ şi
$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = ax+b$. Dacă $f(1)+f(2)+\cdots+f(m) = f(1)+f(2)+$
să se calculeze suma $S = f(1) + f(2) + \cdots + f(m+n)$.

Dan Nedeianu, Dr.T

VIII.82. Să se arate că $|-3xy + x + y| \leq 1$, $\forall x, y \in [0, 1]$.

Ovidiu Pop, S

VIII.83. Să se arate că nu există $x, y \in \mathbb{Z}$ pentru care $147x^2 = 1 + 4y$

Mihai Crăciun

VIII.84. Laturile a, b, c ale unui triunghi verifică egalitatea $2\left(a^8 +\right.$
$\left.\left(a^4 + b^4 + c^4\right)^2\right.$. Să se arate că triunghiul este dreptunghic.

Corina Elena Vişan

VIII.85. Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, să se arate că

$$\sqrt{a^2 + b^2 - ab} + \sqrt{b^2 + c^2 - bc\sqrt{3}} = \sqrt{a^2 + c^2} \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{\sqrt{3}}{c} = \frac{2}{b}$$

Liviu Smarandache

VIII.86. O piramidă hexagonală regulată $VABCDEF$ are muchia ba
cm şi înălţimea $VO = 4\sqrt{2}$ cm. Fie M mijlocul lui VD, $\{P\} = AD$
$\{Q\} = PM \cap (VCF)$. Să se arate că:

a) dreptele VP şi DQ sunt concurente; *b*) $DQ \perp (VBF)$.

Gabriel P

VIII.87. Considerăm prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C$
$AMCNA'M'C'N'$, unde M este punct interior triunghiului ABC. Fie
F' mijloacele muchiilor $[AB]$, $[BC]$, $[A'B']$, respectiv $[A'C']$.

a) Aflaţi măsura unghiului dintre dreptele EF' şi $E'F$.

b) Aflaţi măsura unghiului format de planele (MCC') şi (BCC').

Claudiu Ştefan P

Clasa a IX-a

IX.81. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă ecuaţia $x^2 + ax + b + 2 = 0$ are ambe
întregi, arătaţi că numărul $2a^2 + b^2$ este natural compus.

Dorin Mărghidanu

IX.82. Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care

$$f\left(x^4+y^3+z^2+t\right)=f(x)+f\left(y^2\right)+f\left(z^3\right)+f\left(t^4\right), \quad \forall x,y,z,t$$

Lucian Tuţescu şi **Liviu Smarandache**

IX.83. Pentru $a \geq 9$, să se demonstreze că are loc inegalitatea

$$\sqrt{3+\sqrt{3a+9}} \geq 1+\sqrt{1+\sqrt{a}}.$$

Marian Tetiv

IX.84. Fie ABC un triunghi. Determinaţi numerele întregi a, b, c ne întrele două câte două, astfel încât punctele M, N, P să fie coliniare, u P sunt determinate prin condiţiile $\overrightarrow{AM}=a\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CN}=b\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{CP}=c\overrightarrow{BC}$.

Ioan Săcălean

IX.85. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic şi $D=\operatorname{pr}_{BC}A$, $E=\operatorname{pr}_{C}$ $\operatorname{pr}_{AB}C$. Demonstraţi echivalenţa afirmaţiilor următoare:

(i) $\triangle ABC$ este isoscel;

(ii) $DB+EC+FA=DC+EA+FB$;

(iii) $\dfrac{1}{DB}+\dfrac{1}{EC}+\dfrac{1}{FA}=\dfrac{1}{DC}+\dfrac{1}{EA}+\dfrac{1}{FB}$.

Examinaţi cazurile în care $\triangle ABC$ este obtuzunghic sau dreptunghic.

Temistocle Bî

Clasa a X-a

X.81. Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul

$$x-y^{2/3}=z^{1/3};\quad x^{4/3}-y=z^{2/3};\quad z^{5/3}-y^{4/3}=z.$$

Vasile Chiri

X.82. Solve the equation

$$ae^{-x}+b\left|e^{-x}-3\right|=ax^3+b\left|x^3-2\right|+a,\quad a>b>0.$$

Zdravko Starc, Vrša

X.83. În exteriorul triunghiului ABC se construiesc triunghiurile isos ANC şi CPB de baze AB, AC şi respectiv BC, astfel încât $m(\widehat{MA}$ $m(\widehat{NAC})=45^\circ$, iar $m(\widehat{PBC})=30^\circ$. Să se arate că $m(\widehat{MPN})=60^\circ$.

Angela Ţigăeru

X.84. Fie ABC un triunghi în care $(\operatorname{tg}B-1)(\operatorname{tg}C-1)=2$. Dacă M picioarele înălţimilor din B, respectiv C, să se arate că segmentele BM, C se pot constitui în laturi ale unui triunghi.

Cătălin Cali

X.85. Se prelungeşte diametrul $[MN]$ al unui cerc $\mathcal{C}$ cu segmentul $[NP]$ cu $[MN]$. Fie d perpendiculara în P pe MN şi $R\in d$ oarecare. Tangentel R la $\mathcal{C}$ intersectează tangenta în M la $\mathcal{C}$ în S şi T. Să se arate că centrul c al $\triangle RST$ este un punct fix.

Adrian Reis

Clasa a XI-a

XI.81. Dacă $m\in\mathbb{Z}$, să se studieze existenţa limitei $\lim\limits_{x\to m}\dfrac{\{x\}}{\sin\pi x}$.

Dan Popescu

XI.82. Considerul şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definit prin $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ şi $a_{n+2} =$ 3
$\forall n \in \mathbb{N}$. Pentru $x \in \left(0, \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$, arătaţi că şirul $x_n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 +$
$n \in \mathbb{N}$, este convergent şi calculaţi limita sa.

Vlad Emanuel, el

XI.83. Fie $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ pentru care are loc relaţia $f(f(x)) + 9$
$\forall x \in [0,\infty)$. Arătaţi că $f(x) \geq 3x$, $\forall x \in [0,\infty)$.

Bogdan Poşa şi **Marius Drăgoi, elev**

XI.84. Determinaţi numerele $a \in \mathbb{R}$ pentru care există o funcţi
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $(f \circ f)(x) = a^2 f(x) - 2a^4 x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Andrei Ned

XI.85. Fie $A = (a_{ij})_{2007\times 2007}$ o matrice pătratică în care $a_{ij} \in \{-1, 0,$
$\overline{1, 2007}$. Să se arate că determinantul matricei $2008 I_{2007} + A$ este nenul.

Paul Georgescu şi **Gabriel P**

Clasa a XII-a

XII.81. Dintre toate parabolele $y = ax^2 + bx + c$, să se determine
trece prin punctele $A(0,1)$, $B(1,2)$, satisface condiţia $y \geq 0$ pentru $0 \leq$
realizează minimul ariei determinată de graficul parabolei, Ox şi drept
respectiv $x = 1$.

Adrian Cordun

XII.82. Determinaţi primitivele funcţiei $f : (1,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^3\left(5x^4+3\right)(\ln x - 1)}{\left(x^4-1\right)^3}.$$

Dan Nedeianu, Dr. Tr

XII.83. Să se determine funcţiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care

$$f(x) = |x| + \int_0^x e^{-t} f(x-t)\, dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dumitru Mihalach

XII.84. Fie polinomul $f \in \mathbb{Z}[X]$, $f = a_0 X^{2n+1} + a_1 X^{2n} + \cdots + a_{2n}$
pentru care n este impar, $a_0 a_{2n+1}$ este impar, iar $a_1 a_2$ este par. Să se ara
f are toate rădăcinile reale, cel puţin una este iraţională.

Mihai Ha

XII.85. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Arătaţi că există $P \in \mathbb{Z}[X]$ de grad n a
toate mulţimile $A_k = \{P(i) \pmod{k} \mid i \in \mathbb{Z}\}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, să aibă cardi
mai mic decât k.

Vlad Emanuel, el

Probleme pentru pregătirea concursurilo

A. Nivel gimnazial

G126. Să se determine numerele naturale care au proprietatea că me
trică a tuturor divizorilor lor este un număr natural.

Petru M

G127. Dacă a, b, c, x, y, z, t sunt numere reale pozitive, să se de
inegalitatea

$$\frac{1}{ax+by+cz}+\frac{1}{ay+bz+ct}+\frac{1}{az+bt+cx}+\frac{1}{at+bx+cy}>\frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{x^2+y}}$$

D. M. Bătineţu-Giurgiu,

G128. Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $abc = 1$ şi fie $t \in [$
arate că

$$\frac{a}{a^2+t}+\frac{b}{b^2+t}+\frac{c}{c^2+t}\le\frac{3}{t+1}.$$

Titu Zvonaru, Comăneşti şi **Bogdan Ioniţă,**

G129. Să se determine $y \in \mathbb{R}^*$ pentru care $\{x\}+\left\{x+\frac{1}{y}\right\}=\{xy\}+$
(Cu $\{\cdot\}$ am notat partea fracţionară.)

Alexandru Negrescu, elev,

G130. Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi ABC. Dacă a^{2007}
$\left(2^{2007}+1\right)c^{2007}$, să se arate că unghiul $\widehat{C}$ este ascuţit.

Lucian Tuţescu

G131. Fie $n, k \geq 2$ numere naturale şi mulţimea $M = \{-(n-1), \ldots$
$2, \ldots, n\}$. Să se arate că M se poate partiţiona în k submulţimi având fiec
sumă a elementelor dacă şi numai dacă n se divide cu k.

Marian Tetiv

G132. În fiecare câmp unitate al unei livezi $m \times n$ se află câte un
număr de k arici pornesc, pe rând, din câmpul stânga-sus al livezii şi se
câmpul din dreapta-jos. La fiecare mişcare, un arici se poate deplasa cu
spre dreapta sau în jos, fără a ieşi din livadă. Ariciul poate să culeagă
câmpul pe care îl vizitează, dacă nu a fost cules deja de alt arici. Care est
minim k, pentru care k arici pot să culeagă toate merele?

Iurie Boreico, elev,

G133. Fie $\triangle ABC$ echilateral şi D un punct astfel încât $BD = DC$, m
$30°$, iar BC separă A şi D. Dacă $E \in (BD)$ cu $m(\widehat{BAE}) = 15°$, să s
$CE \perp AC$.

Enache Pătraşcu

G134. Se consideră patrulaterul convex $ABCD$ înscris într-un cerc
cm, având $m(\widehat{A}) = 60°$ şi $m(\widehat{B}) = 45°$. Să se arate că aria patrulaterul
mult egală cu $3\sqrt{6}$ cm^2.

Constantin Apostol, R

G135. Fie tetraedrul $ABCD$ cu $AB = CD$, $AC = BD$, $AD = BC$. S
că cel puţin două dintre unghiurile diedre formate de faţa (ABC) cu feţe
(ACD), (ABD) sunt ascuţite.

Dan Brâ

B. Nivel liceal

L126. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic. Madiatoarea laturii AB int
latura AC în T, iar mediatoarea laturii AC intersectează latura AB în S.
că paralela prin T la AB, paralela prin S la AC şi simediana din A sunt c

Titu Zvonaru, C

L127. Fie $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$un hexagon inscriptibil. Să se arate că

$$r_{A_1A_2A_3} + r_{A_4A_5A_6} + r_{A_1A_3A_6} + r_{A_3A_4A_6} = r_{A_3A_4A_5} + r_{A_1A_2A_6} + r_{A_2A_3A_6}$$

unde r_{XYZ} este raza cercului înscris în $\triangle XYZ$.

Cătălin Cali

L128. Să se arate că între medianele unui triunghi are loc inegalitatea

$$8\left(\prod m_a\right)\left(\sum m_a^2 m_b^2\right) \geq \left[\prod (m_a + m_b)\right]\left[2\sum m_a^2 m_b^2 - \sum m_a^4\right.$$

Dorel Băiţan şi **I.V.Maftei, I**

L129. În planul raportat la un reper cartezian xOy considerăm vec
în O: $\vec{v}_1(a_1, b_1)$, $\vec{v}_2(a_2, b_2)$, $\vec{v}_3(a_3, b_3)$. Să se arate că există un tetraed
regulat, de muchie 1 şi astfel încât $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ se proiectează pe planul
$\vec{v}_2$, respectiv $\vec{v}_3$ dacă şi numai dacă se verifică simultan relaţiile:

$$\frac{3}{2}\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right) - a_1a_2 - a_1a_3 - a_2a_3 = \frac{3}{2}\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right) - b_1b_2 - b_1b_3 -$$

$$\frac{3}{2}(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) - (a_1b_2 + a_2b_1 + a_1b_3 + a_3b_1 + a_2b_3 + a_3b_2)$$

Irina Mustaţă, studentă

L130. Să se arate că pentru orice $x, y \geq 1$ are loc inegalitatea

$$(xy - x - y)^2 + \left(6\sqrt{3} - 10\right)xy \geq 6\sqrt{3} - 9.$$

Gabriel Dospinescu, Paris şi **Marian Tetiv**

L131. Să se afle valoarea minimă a numărului real k astfel încât, oric
b, c reale pozitive cu $a + b + c = ab + bc + ca$, să aibă loc inegalitatea

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} - k\right) \leq k.$$

Andrei Ciupan, elev, I

L132. Fie $a, b, c, x, y, t \in \mathbb{R}$ şi $A = ax + by + cz$, $B = ay + bz + cx$, $C = a$
Dacă $|A - B| \geq 1$, $|B - C| \geq 1$ şi $|C - A| \geq 1$, arătaţi că $\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\left(x^2 + y\right.$

Adrian Zahariuc, ele

L133. Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ pentru care

$$2f(n+3)f(n+2) = f(n+1) + f(n) + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Gheorghe I

L134. Avem un colier cu n mărgele, numerotate consecutiv $1, 2, \ldots$
$n \geq 3$. În câte moduri putem să le colorăm cu trei culori, astfel încât or
mărgele consecutive să aibă culori diferite?

Iurie Boreico, elev,

L135. Se consideră un poligon cu $3n$ laturi, $n \geq 2$, înscris într-un cerc
Arătaţi că cel mult $3n^2$ dintre segmentele având capetele în vârfurile poli
lungimea strict mai mare decât $\sqrt{2}$.

Bianca-Teodora Iordache, elevă

Training problems for mathematical conte

Junior highschool level

G126. Determine the natural numbers such that the arithmetic mean
divisors is a natural number as well.

Petru M

G127. If a, b, c, x, y, z, t are positive real numbers, prove the inequa

$$\frac{1}{ax+by+cz}+\frac{1}{ay+bz+ct}+\frac{1}{az+bt+cx}+\frac{1}{at+bx+cy} > \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{x^2+y}}$$

D. M. Bătineţu-Giurgiu, I

G128. Let a, b, c be positive real numbers such that $abc = 1$ and le
Show that

$$\frac{a}{a^2+t}+\frac{b}{b^2+t}+\frac{c}{c^2+t} \leq \frac{3}{t+1}.$$

Titu Zvonaru, Comăneşti and **Bogdan Ioniţă, I**

G129. Determine $y \in \mathbb{R}^*$ such that $\{x\} + \left\{x + \dfrac{1}{y}\right\} = \{xy\} + \dfrac{1}{y}$, $\forall x$
$\{\cdot\}$ denoting the fractional part.)

Alexandru Negrescu, highschool student,

G130. Let a, b, c be the side lengths of a triangle ABC. If a^{2007}
$\left(2^{2007}+1\right) c^{2007}$, show that the angle $\widehat{C}$ is acute.

Lucian Tuţescu

G131. Let $n, k \geq 2$ be natural numbers and consider the set $M = \{-(n$
$-2, -1, 1, 2, \ldots, n\}$. Show that M can be partitioned into k subsets with
sum of the elements in each of them if and only if n is divisible by k.

Marian Tetiv

G132. A rectangular garden has $m \times n$ unit squares. On each of the
an apple. A number of k hedgehogs start successively from the first left t
moving to the right bottom square. At each step, any hedgehog may move
right or below (still remaining in the garden) and picking up the apple on t
unless the apple was not earlier picked up. Which is the least number k of
able to pick up all the apples?

Iurie Boreico, highschool student,

G133. Let $\triangle ABC$ be an equilateral triangle and D a point such that I
$m(\widehat{BDC}) = 30°$, and BC separates A and D. If $E \in (BD)$ with $m(\widehat{BA}$
show that $CE \perp AC$.

Enache Pătraşcu

G134. It is considered the convex quadrilateral $ABCD$ inscribed in
of radius of $\sqrt{6}$ cm, with $m(\widehat{A}) = 60°$ and $m(\widehat{B}) = 45°$. Show that the
quadrilateral is at most equal to $3\sqrt{6}$ cm^2.

Constantin Apostol, R

G135. Let $ABCD$ be a tetrahedron with $AB = CD$, $AC = BD$,
Show that at least two of the angles between the surface (ABC) with t
(BCD), (ACD), (ABD) are acute.

Dan Brâ

B. Highschool level

L126. Let ABC be an acute-angled triangle. The mid-perpendicu
side AB intersects the side AC at point T, and mid-perpendicular line
intersects the side AB at point S. Show that the parallel line to AB, thro
parallel line to AC, through S and the simedian from A are three concu

Titu Zvonaru, C

L127. Let $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ be an inscriptible hexagon. Show that

$$r_{A_1A_2A_3} + r_{A_4A_5A_6} + r_{A_1A_3A_6} + r_{A_3A_4A_6} = r_{A_3A_4A_5} + r_{A_1A_2A_6} + r_{A_2A_3A_6}$$

where r_{XYZ} is the radius of the circle inscribed in ΔXYZ.

Cătălin Cali

L128. Show that the following inequality involving the bisectors of th
medians) of a triangle holds:

$$8\left(\prod m_a\right)\left(\sum m_a^2 m_b^2\right) \geq \left[\prod (m_a + m_b)\right]\left[2\sum m_a^2 m_b^2 - \sum m_a^4\right.$$

Dorel Băiţan and **I.V.Maftei,**

L129. In the Cartesian system xOy, let three vectors $\vec{v}_1\,(a_1, b_1)$,
$\vec{v}_3\,(a_3, b_3)$ be sitting with their origin in the point O. Prove that there exis
tetrahedron $OABC$ with the edges of length 1, such that the projections o
$\overrightarrow{OC}$ (onto the plane xOy) are equal with $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, respectively, if and
equations below are simultaneously satisfied:

$$\frac{3}{2}\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right) - a_1a_2 - a_1a_3 - a_2a_3 = \frac{3}{2}\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right) - b_1b_2 - b_1b_3 -$$

$$\frac{3}{2}\left(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\right) - \left(a_1b_2 + a_2b_1 + a_1b_3 + a_3b_1 + a_2b_3 + a_3b_2\right)$$

Irina Mustaţă, student

L130. Show that the following inequality holds for any $x, y \geq 1$:

$$(xy - x - y)^2 + \left(6\sqrt{3} - 10\right)xy \geq 6\sqrt{3} - 9.$$

Gabriel Dospinescu, Paris and **Marian Tetiv**

L131. Find the minimum value of the real number k such that any wo
real positive numbers a, b, c with $a+b+c=ab+bc+ca$, the following
holds:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}-k\right)\leq k.$$

Andrei Ciupan, highschool student, I

L132. Let $a,b,c,x,y,t\in\mathbb{R}$ and $A=ax+by+cz$, $B=ay+bz+cx$, $C=$
If $|A-B|\geq 1$, $|B-C|\geq 1$ and $|C-A|\geq 1$, show that $\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+\right.$

Adrian Zahariuc, highschool stude

L133. Determine the functions $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ satisfying the equation

$$2f(n+3)f(n+2)=f(n+1)+f(n)+1,\quad\forall n\in\mathbb{N}.$$

Gheorghe I

L134. A necklace consist of n pearls consecutively numbered $1,2,\ldots$
$n\geq 3$. How many ways exist to colour these pearls using three colours s
two neighbor pearls have different colours?

Iurie Boreico, highschool student,

L135. It is considered a polygon with $3n$ sides, such that $n\geq 2$ and t
is inscribed into a circle of radius 1. Show that at most $3n^2$ line segments
ends at pairs of polygon's vertices have their length strictly greater than

Bianca-Teodora Iordache, highschool student

Premiu pe anul 2007 acordat de ASOCIAŢIA "RECREAŢII MATEMATI

Se acordă un premiu în bani în valoare de **100** lei elevului

CIACOI Bogdan – *Liceul teoretic "Ana Ipătescu", Gherl*

pentru nota *O propoziţie echivalentă cu conjectura lui Goldbach* apărută
1/2007 al revistei *Recreaţii Matematice*, la pagina 27.

Se acordă, de asemenea, un premiu în bani în valoare de **100** lei elevil

BOREICO Iurie, elev, Chişinău şi **CIUPAN Andrei**, elev, Bu

pentru nota *Inegalităţi stabilite cu un procedeu de reducere a numărului*
- *Mixing variables* apărută în acest număr la pagina 100.

Aceste premii sunt acordate de **Asociaţia "Recreaţii Matematice"**
a contractului de sponsorizare cu **Fundaţia Culturală "Poiana"** (direct
Tiba).

Pagina rezolvitorilor

BRAŞOV

Colegiul Naţional de Informatică "G. Moisil". **Clasa a IX-a.** AMBI
dra: VII(71,73,77,80), VIII(72,73,74), IX.80; BACIU Dan: VII(71,80), V
IX.80; BAUM Bianca: VII(78,79), VIII(77,78), IX.80; DĂINEANU Cătăli
77-80), IX.80; FARSCH Cristina: VII(79,80), VIII(77,78), IX.80; FIN
ana: VII(77,78,80), VIII(71-74,77,78), IX.72; HERMENEANU Horia:
VIII(77,78), IX.80; MAN Andrada: VII(77,79,80), VIII(77,78), IX.80;
Laurenţiu: VII(71,73,77), VIII(72,74); NEGREA Andrei: VII.80, VIII(71-
OANCEA Mihai: VII.80, VIII(71-74); OGLINDĂ Sorin: VII(71,73), V
IX.80; POTEC Ionela: VII(77,79), VIII(77,78), IX.80; SIMION Adrian
VIII(71-73), IX.80; TURTUREANU Veronica: VII(71,79), VIII(71-73,77,

BOGDĂNEŞTI (SUCEAVA)

Şcoala de arte şi meserii. **Clasa a VI-a.** SOLCANU Mădălina Vasilica
76,78,79), VII.75, VIII.75.

HÂRLĂU

Liceul "Ştefan cel Mare". **Clasa a V-a.** BARĂU Larisa Ionela: P(121-
VI.71; BUZILĂ Andreea: P(121,122), V(72,73), VI.71; CEUCĂ Răzvan: P
V.73, VI(71,72); IVĂNUŢĂ Andreea Simona: P(121-123), V.73, VI.71;
Adina-Diana: P(121-123), V.72, VI.72.

IAŞI

Şcoala nr. 3 "Al. Vlahuţă". **Clasa a IV-a** (înv. MĂRIUŢĂ Valentina
Alina: P(125-129,131); DIACONIŢĂ Theodor: P(125-129,131); HADA
Maria: P(125-129,131); NASTASE Cosmin: P(125-129,131); POPA Iuli
129,131); PROCA Ancuţa: P(125-129,131); TÂNCU Alexandra Ioana:
131). **Clasa a IV-a** (inst. MAXIM Gabriela). BACIU Ionela-Lavin
128); CELMARE Raluca-Iuliana: P(124-128); POPOVICI Ionuţ: P(124-1
Mădălina-Andreea: P(124-128); SAVA Vlad: P(124-128); VECHIU Mădăl
128).

Şcoala nr. 13 "Alexandru cel Bun". **Clasa a III-a** (inst. COJOCA
AGAFIŢEI Elena-Roxana: P(124,125,127-129); CARAMALĂU Andra:
127-129); CĂLIN Andreea-Claudia: P(124,125,127-129); COJOCARIU
P(124,125,127-129); DUDUMAN Luisa-Ştefania: P(124,125,127-129); L
xandrina-Ştefana: P(124,125,127-129); LUPAŞCU Diana-Maria: P(124,12
MANOLACHE Mădălina-Andreea: P(124,125,127-129); MIHĂILĂ Narc
P(124,125,127-129); PASCU Gabriela: P(124,125,127-129); PĂDURAR
Ştefan: P(124,125,127-129); RĂDUCEA Marin-Andrei: P(124,125,127-12
Cristina-Simona: P(124,125,127-129); ŞTEFAN Bogdan-Vasile: P(124,12
ŞTIUBEI Cosmin-Ionuţ: P(124,125,127-129).

Şcoala nr. 14 "Gh. Mârzescu". **Clasa a II-a** (inst. NUŢĂ Elena). B
dor: P(114-118, 124-128); CHIRILUŢĂ George-Ştefan: P(114-118, 124-1
ORGHIŢĂ Mădălina-Gabriela: P(114-118; STOICA Adriana: P(114-118
ŢÂMBALARIU Ioana-Vasilica: P(114-118).

Şcoala nr. 26 "G. Coşbuc". **Clasa a II-a** (inst. RACU Maria). AI
Aura-Georgiana: P(124-129); BURA Emma-Andreea: P(124-129); CIORN
dra: P(124-127,129); CRĂCIUN Ioana-Daniela: P(124-127,129); FILIP In
nia: P(124-129); GHEORGHIŢĂ Narcis-Eugen: P(124-127,129); GRĂ
Georgiana: P(124-129); HRISCU Ovidiu-Constantin: P(124-129); HUZA
P(124-129); MARICIUC Dragoş-Claudiu: P(124-127,129); MAXIM Alexa
lia: P(124-129); ŢUCĂ Cosmin: P(124-127,129); VASILE Bogdan-Andr
129).

Colegiul Naţional, locaţia "Gh. Asachi". **Clasa a III-a** (inst. CĂ
Rodica). BERECHET Alexandru: P(126-130); GHENARU Brădiţă: F
CHIVULESCU Alexandru: P(126-130); PETREA Mădălina: P(126-130);
ANU George: P(126-130).

Colegiul Naţional. **Clasa a VII-a.** CEUCĂ Răzvan: V(71-75), VI
VII(71-75), VIII(72,73,75); MOCANU Dan Mihai: V(76-79), VI(76,78,79),
PETRESCU Emanuel: V(76-79), VI.76.

Colegiul Naţional "C. Negruzzi". **Clasa a VI-a.** PĂVĂLOI Alexand
123), VI(71-74).

Colegiul Naţional "Emil Racoviţă". **Clasa a VII-a.** TUDORACHE
VII(76-80), G(117,118).

SUCEAVA

Şcoala cu clasele I-VIII, nr. 3. **Clasa a II-a** (înv. TABARCEA Silve
CHET Ştefan: P(114-118). **Clasa a III-a** (inst. NECHITA Daniela).
Mircea: P(114,115,117-119).

Premii acordate rezolvitorilor

ASOCIAŢIA "RECREAŢII MATEMATICE" în colaborare c
revistei **RECREAŢII MATEMATICE** acordă câte o **diplomă** şi un **p**
cărţi pentru trei apariţii la rubrica *Pagina rezolvitorilor* următorilor elev

Şcoala cu clasele I-VIII, nr.3, **Suceava**

FECHET Ştefan (cl. a II-a): 2/2006(5pb), 1/2007(5pb), 2/2007(5pb);

FECHET Mircea (cl. a III-a): 2/2006(9pb), 1/2007(6pb), 2/2007(5pb)

Şcoala nr. 3 "Al. Vlahuţă", **Iaşi**

HADARAG Ana-Maria (cl. a IV-a): 2/2006(6pb), 1/2007(5pb), 2/20

NASTASE Cosmin (cl. a IV-a): 2/2006(6pb), 1/2007(5pb), 2/2007(6p

TÂNCU Alexandra-Ioana (cl. a IV-a): 2/2006(6pb), 1/2007(5pb), 2/

BACIU Ionela-Lavinia (cl. a IV-a): 2/2006(8pb), 1/2007(6pb), 2/200

RUSU Mădălina-Andreea (cl. a IV-a): 2/2006(8pb), 1/2007(6pb), 2/

SAVA Vlad (cl. a IV-a): 2/2006(8pb), 1/2007(6pb), 2/2007(5pb);

Şcoala nr. 26 "Gh. Coşbuc", **Iaşi**

APACHIŢEI Aura-Georgiana (cl. a II-a): 2/2006(6pb), 1/2007(5pb),

BURA Emma-Andreea (cl. a II-a): 2/2006(6pb), 1/2007(5pb), 2/200

FILIP Ingrid-Ştefania (cl. a II-a): 2/2006(6pb), 1/2007(5pb), 2/2007(

GRĂDINARIU Georgiana (cl. a II-a): 2/2006(6pb), 1/2007(5pb), 2/

HRISCU Ovidiu-Constantin (cl. a II-a): 2/2006(6pb), 1/2007(5pb), 2/

HUZA Mădălina (cl. a II-a): 2/2006(6pb), 1/2007(5pb), 2/2007(6pb);

MAXIM Alexandra-Camelia (cl. a II-a): 2/2006(6pb), 1/2007(5pb), 2

VASILE Bogdan-Andrei (cl. a II-a): 2/2006(6pb), 1/2007(5pb), 2/20

Colegiul Naţional, locaţia Şcoala "Gh. Asachi", **Iaşi**

PETREA Mădălina (cl. a III-a): 2/2006(5pb), 1/2007(7pb), 2/2007(6

UNGUREANU Georghe (cl. a III-a): 2/2006(5pb), 1/2007(7pb), 2/2

Colegiul Naţional, **Iaşi**

CEUCĂ Răzvan (cl. a VII-a): 1/2005(6pb), 2/2005(5pb), 1/2006(5pb)

Colegiul Naţional "C. Negruzzi", **Iaşi**

PĂVĂLOI Alexandru (cl. a VI-a): 2/2006(5pb), 1/2007(5pb), 2/2007

Colegiul Naţional "Emil Racoviţă", **Iaşi**

TUDORACHE Alexandru (cl. a VII-a): 2/2006(10pb), 1/2007(10pb),

---

Vizitaţi pe Internet revista "Recreaţii Matematice" la

http://www.recreatiimatematice.uv.ro

Revista semestrială **RECREAȚII MATEMATICE** este e
ASOCIAȚIA "RECREAȚII MATEMATICE". Apare la datele de 1
1 septembrie şi se adresează elevilor, profesorilor, studenților şi tutu
pasionați de matematica elementară.

În atenția tuturor colaboratorilor

Materialele trimise redacției spre publicare (note şi articole, che
metodică, probleme propuse etc.) trebuie prezentate îngrijit, clar şi c
trebuie să prezinte interes pentru un cerc cât mai larg de cititori. Se reco
textele să nu depăşească patru pagini. Evident, **ele trebuie să fie origi
nu fi apărut sau să fi fost trimise spre publicare altor reviste.** Rugăm
rialele tehnoredactate să fie însoțite de fişierele lor.

Problemele destinate rubricilor: **Probleme propuse** şi **Problem
pregătirea concursurilor** vor fi redactate pe foi separate cu enunț şi d
ție/rezolvare (câte una pe fiecare foaie) şi vor fi însoțite de numele autoru
la şi localitatea unde lucrează/învață.

Redacția va decide asupra oportunității publicării materialelor prim

În atenția elevilor

Numele elevilor ce vor trimite redacției soluții corecte la proble
rubricile de **Probleme propuse** şi **Probleme pentru pregatirea conc
vor fi menționate în **Pagina rezolvitorilor**. Se va ține seama de regulile:

1. Pot trimite soluții la **minimum cinci probleme propuse în
prezent şi cel anterior al revistei**; pe o foaie va fi redactată soluția un
probleme.

2. Elevii din clasele **VI-XII** au dreptul să trimită soluții la p
propuse pentru clasa lor, pentru orice clasă mai mare, din două clase m
imediat anterioare. Elevii din clasa a **V**-a pot trimite soluții la problemel
pentru clasele a IV-a, a V-a şi orice clasă mai mare, iar elevii claselor
trimite soluții la problemele propuse pentru oricare din clasele primare şi
să mai mare. Orice elev poate trimite soluții la problemele de concurs (ti

3. Vor fi menționate următoarele date personale: numele şi p
clasa, şcoala şi localitatea.

4. Plicul cu probleme rezolvate se va trimite prin poştă (sau v
direct) la adresa Redacției:

Prof. dr. Temistocle Bîrsan
Str. Aurora, nr. 3, sc. D, ap. 6,
700 474, Iaşi
Jud. IAŞI
E-mail: tbirsan@math.tuiasi.ro sau t_birsan@yahoo.

CUPRINS

Anul X, Nr. 2 Iulie – Decembri

RECREAȚII MATEMATIC

REVISTĂ DE MATEMATICĂ PENTRU ELEVI ŞI PROF

125 de ani de la apariţi
revistei "Recreaţii Ştiinţific
(1883 – 1888)

$$\boxed{e^{i\pi} = -1}$$

Asociația "Recreații Matemati
IAŞI - 2008

Semnificația formulei de pe copertă:

Într-o formă concisă, formula $e^{i\pi} = -1$ leagă cele patru ramuri fu
ale matematicii:

ARITMETICA	reprezentată de 1
GEOMETRIA	reprezentată de π
ALGEBRA	reprezentată de i
ANALIZA MATEMATICĂ	reprezentată de e

TIPĂRITĂ LA SL&F IMPEX IAȘI
Bd. Carol I, nr. 3-5
Tel. 0788 498933
E-mail: simonaslf@yahoo.com

ISSN 1582 - 1765

Anul X, Nr. 2 **Iulie – Decembri**

RECREAȚII MATEMATICE

REVISTĂ DE MATEMATICĂ PENTRU ELEVI ŞI PROF

$$e^{i\pi}=-1$$

Revistă cu apariție semestrială

EDITURA "RECREAŢII MATEMATICE

IAŞI - 2008

O sută de ani de la naşterea lui Gheorghe Gheo

Gheorghe Gheorghiev a fost elev al iluştrilor savanţi *A. Myller* şi *O. Mayer* şi a devenit, pentru o bună perioadă de timp, liderul şcolii de geometrie de la Universitatea din Iaşi. A fost un reprezentant al unei generaţii de dascăli ieşeni care au vegheat la destinele matematicilor româneşti, într-o perioadă de mari schimbări politice. În acelaşi timp, a căutat să reia legăturile întrerupte cu matematicile din lumea întreagă. A fost un adevărat constructor de şcoală ştiinţifică la Facultatea de matematică din Iaşi, dovedindu-se un merituos continuator al eforturilor şi străduinţelor profesorului său *A. Myller*.

S-a născut la 27 iunie 1907 la Bolgrad, judeţul Ismail. A urmat liceul din Bolgrad în anii 1916-1925, după care a susţinut examenul de bacalureat la Ismail în iunie 1925. Imediat a devenit student la Facultatea de ştiinţe din Iaşi, secţia matematică, unde a urmat cursu de profesorii *A. Myller*, *Vera Myller Lebedeff*, *O. Mayer*, *Simeon Saniele* *Culianu*, *Constantin Popovici*, *Mendel Haimovici*, *Gheorghe Vrănceanu* avut asistent pe *Ilie Popa*, cu care a rămas prieten pentru toată viaţa. ultimului an de studiu şi după examenul de licenţă, în martie 1929, a dever şi s-a împrietenit cu mai mulţi tineri matematicieni: *I. Schoenberg*, *P.* *D. Mangeron*, *E. Stihi*, şi cu studentul *A. Climescu*. Tot în 1929 a urmat specializare la Universitatea din Hamburg, cu cunoscutul profesor *W. Bla*

În 1929 s-a declanşat criza economica pe plan mondial, care a afec noastră. În perioada 1929-1938, **Gh. Gheorghiev** a fost profesor de ma liceele din Aiud, Ismail, Chilia Noua, Cetatea Alba şi Iaşi. In perioada 1 fost înscris la doctorat la Universitatea din Iaşi. În aceeaşi perioadă a fost şi mobilizat timp de peste 5 ani. A participat la război ca ofiţer de geniu circa un an şi jumătate, a fost prizonier. A existat chiar pericolul să fie în momentul în care a fost luat prizonier, pentru că era ofiţer.

În 1946 a susţinut teza de doctorat cu titlul *Suprafeţe ale căror familii* *de curbe sunt asemenea* (comisia de doctorat, fiind compusă din *A. Myller*, *V. Myller*, *I. Popa*).

A funcţionat la Universitatea din Iaşi ca lector (1946-1948), conferenţ de matematici generale (1946-1948), profesor suplinitor de geometrie anali 1954), profesor titular de geometrie (1955-1975).

Între anii 1953-1968 a fost decan al Facultăţii de matematică din Iaş 1960-1975, a fost şeful catedrei de geometrie. În aceste posturi şi poziţii de **Gh. Gheorghiev** a avut o influenţă hotărâtoare asupra dezvoltării facu priveşte stabilirea unor legături cu direcţii de cercetare ştiinţifică exister şcolile de matematică din occident cât şi cu cele existente în Uniunea Sov

A colaborat la elaborarea unui tratat de geometrie intitulat simplu *G
ometrie analitică* (1951); recunoaşterea meritelor acestui tratat s-a realizat
darea Premiului de Stat. A mai colaborat la realizarea unei carţi *Geometr
şi diferenţială*, apărută în două volume în 1968 şi 1969 la Editura Didact
agogică. În această carte încep să se reflecte schimbările de concepţie şi
de investigare în ce priveşte studiul geometriei diferenţiale. Ideile au fost
în alte două carţi, elaborate în colaborare, *Varietăţi diferenţiabile finit ş
mensionale*, apărută în două volume în 1976 şi 1979 la Editura Academi
şi *Geometrie diferenţială* apărută la Editura Didactică şi Pedagogică.

A scris circa 180 de lucrări ştiinţifice în domeniul geometriei diferenţ
meroase articole de popularizare a matematicii. A conferenţiat la mai mu
sitaţi de prestigiu din lume. A primit premiul "Gh. Ţiţeica" al Academie
a primit titlul de profesor emerit, mai multe diplome şi medalii ale unc
profesionale şi numeroase ordine şi medalii, din partea statului român.

După pensionare, în 1975, a rămas profesor consultant la Facultatea d
tică (cu unele întreruperi) până la deces, în 28 iunie 1999.

A abordat teme de cercetare ştiinţifică din geometria diferenţială euclidi
pe suprafeţe, câmpuri de vectori pe suprafeţe) geometria diferenţială afin
tivă (câmpuri de conuri, configuraţii Myller), geometria diferenţială a
modelate de spaţii Banach, teoria grupurilor Lie, teoria G-structurilor şi g
ale acesteia. Circa 30 de tineri studioşi şi-au elaborat tezele de doctorat su
rea ştiinţifică a profesorului Gheorghiev. A colaborat, în elaborea cărţilor
colegi apropiaţi: *R. Miron*, *D. Papuc*, *V. Oproiu.*

A fost profesor vizitator şi a conferenţiat la numeroase universitaţi d
Jena, Padova, Sofia, Londra, Moscova, Debrecen etc.

A predat cursuri de geometrie analitică, diferenţială, teoria grupurilor
diverse nivele, la Facultatea de matematică a Universităţii din Iaşi. A
şi cursuri de matematici generale pentru studenţii de la facultăţile Instit
litehnic din Iaşi. Lecţiile sale erau renumite prin densitatea informaţiilor t
pentru solicitarea intelectuală extremă la care erau supuşi studenţii ce le
În perioada cât a fost decan, în facultate s-a petrecut o extraordinară s
argumentelor predate la cursuri şi a celor abordate în cercetare, realizându
de la aspectele tradiţionale existente în matematicile din perioada interb
matematicile moderne, cercetate şi predate în stilul structuralist, promov
grupul Bourbaki. În ultimii ani ai vieţii era preocupat de istoria matem
probleme matematice ale filosofiei fizicii.

Meritele la catedră, în cercetarea ştiinţifică, de om care, pe tot parc
sale, a practicat cultul muncii şi al cinstei au făcut din profesorul **Gh. G**
o personalitate în domeniul matematicilor, respectată atât în facultate şi u
cât şi pe plan naţional şi internaţional.

Activitatea sa în slujba şcolii româneşti şi în servirea matematicii a fost
prin mai multe distincţii, titlul de Profesor Emerit (1964), Premiul de S
premiul "Gh.Ţiţeica" al Academiei Române (1981), Ordinul Muncii (196
Meritul Ştiinţific (1960), Medalii ale Muncii etc.

Prof. dr. Vasile O

Ilie Popa - 100 de ani de la naştere

Ilie Popa a rămas în conştiinţa noastră ca unul dintre matematicienii remarcabili ai şcolii de geometrie din Iaşi, cunoscut şi recunoscut şi peste hotarele ţării, ca un subtil şi profund cercetător în domeniul istoriei matematicii, ca un profesor care, cu lecţiile sale expuse cu tact, claritate şi farmec, a format numeroase generaţii de profesori şi viitori cercetători, care, de la nivelul funcţiilor de conducere asumate, a militat cu dăruire şi pricepere pentru un învăţământ de calitate.

Intreaga viaţă şi activitatea sa variată şi rodnică sunt legate de oraşul Iaşi.

În Iaşi s-a născut, la 20 iulie 1907. A urmat şcoala primară "C. Negri". Apoi, în perioada 1919-1927, Liceul Internat – astăzi Colegiul Naţional "C. Negruzzi" -, având ca profesor de matematică pe *Ion Raianu* (pe care-l va evoca mai târziu cu recunoştinţă şi preţuire). Pe placa de onoare a şefilor de p liceului, în dreptul anului 1927, este scris numele său (pe aceeaşi placă, pe apărea şi numele fiului său, *Eugen*, la rândul lui distins matematician). E cu faptul că absolvise Liceul Internat şi o afirma cu plăcere când avea pri

A continuat studiile la Facultatea de ştiinţe (secţia matematică) din Ia ţinut examenul de licenţă în 1931. A susţinut doctoratul în matematici în conducerea lui **O. Mayer**, cu teza *Contribuţii la geometria centro-afină d*

La această înşirare de date se impune să menţionăm rolul avut în form ambianţa Seminarului matematic din Iaşi, de condiţiile propice de muncă oteca acestuia, cât şi de înrâurirea favorabilă exercitată de **A. Myller** şi **C** conducătorii de atunci ai şcolii matematice ieşene. Ilie Popa s-a încadrat î de cercetare ale şcolii de geometrie din Iaşi, contribuind cu rezutatele construcţia geometriei centro-afine, considerată mai târziu o creaţie pur ro

Între 1936 şi 1938, Ilie Popa a făcut stagii de specializare la Roma, cu *E piani*, şi la Hamburg, cu *Wilhelm Blaschke*, doi renumiţi matematicieni a

Prin muncă şi merit a urcat treptele ierarhiei universitare, ocupând div şi predând cursuri variate la Universitatea "Al. I. Cuza" şi la Politehnica "C din Iaşi. În 1942, în urma plecării prof. Gr. Moisil la Bucureşti a fost titu postul rămas vacant, ca profesor la Facultatea de ştiinţe, catedra de calcul şi integral. A fost şeful catedrei de analiză matematică din 1948 şi până în an în care, prin retragere la pensie, a devenit profesor consultant.

La 26 iulie 1983 a încetat din viaţă după o lungă şi grea suferinţă, fiin în cimitirul Eternitatea.

Nu vom prezenta nici măcar sumar contribuţia adusă de **Ilie Popa** în centro-afină diferenţială, contribuţie care l-a consacrat şi făcut cunoscu nitatea matematică; vom observa doar colaborarea în acest domeniu cu ieşean *Gheorghe Gheorghiev* şi prietenia durabilă care s-a legat între ace

siderăm că pentru cititorii prezentei reviste sunt mai accesibile, mai intere
un folos mai mare alte aspecte ale activităţii variate pe care a desfăşurat-o

Având un spirit pătrunzător, o gândire profundă şi o mare putere de
beneficiind de o bogată cultură generală, **Ilie Popa** a abordat teme diverse
matematicii româneşti aducând clarificări într-un material faptic din trecu
destinat cu precădere uitării. A scos la lumină meritele unor precursori a
ticii româneşti ca *Dimitrie Asachi* – fiul cel mare al lui Gh. Asachi –, pri
ce publică în străinătate (München, 1841) o lucrare de matematici supe
N. Şt. Botez, care dă în 1872 o formulă pentru o bucată a seriei armonice,
atenţia matematicianului belgian *E.-Ch. Catalan*. Un alt studiu este d
Amfilochie Hotiniul, care tipăreşte în Iaşi, la 1795, prima aritmetica român
menti aritmetice arătate fireşti, o compilaţie după câteva cărţi italieneşti. Î
o muncă dificilă de restaurare, atunci când reconstituie manuscrisul de geom
dut al lui *Gh. Lazăr*. A pus în evidenţă rolul jucat de soţii *Alexandru* şi *V*
în crearea şcolii matematice ieşene, cu numele generic de *Seminarul mate*
prilejul centenarului Universitătii din Iaşi (1860–1960), publică, în al
consacrat evenimentului, studiul Dezvoltarea matematicii – o amplă şi do
contribuţie privind realizările şcolii matematice ieşene pe parcursul unui s

Să mai spunem cititorilor că Ilie Popa a publicat în 1955 studiul *Re*
inţifice – precursoare a Gazetei matematice în care evidenţiază rolul acest
prima de acest fel din ţară, străbună a actualei *Recreaţii Matematice* – în c
învăţământului şi netezirea drumului ce duce la cercetări originale în mat

Ca profesor, **Ilie Popa** a fost un maestru al artei comunicării. Lecţiil
oficiate după un ritual neabătut. Începeau când profesorul punea ceasul c
pe masă şi se terminau când acesta era repus la locul lui. Era omisă pa
ore, dar timpul acordat prelegerii era respectat cu stricteţe. Cu un timbr
vorbire blândă, moldovenească, cu un ritm al expunerii care antrena dar
profesorul reuşea imediat să captiveze auditoriul. Ideile şi argumentele e
într-o înlănţuire uşor de urmărit. Erau scoase în evidenţă semnificaţiile c
şi rezultatelor. Faţa magistrului se acoperea de o lumină discretă, cea
de a dărui. Câte un zâmbet involuntar, reţinut cu grijă, marca un mome
lecţiei sau însoţea un rezultat de o rară frumuseţe. Calmul, echilibrul, t
întotdeauna prezente. *George Şt. Andonie* spune inspirat: *îşi alege detali*
şi obiectivitate şi lasă impresia că-şi sună în prealabil cuvintele, spre a-ş
de rezonanţa lor (Istoria matematicii în România, vol. III).

A avut numeroase funcţii de conducere în diverse structuri ale înv
lui superior: prorector al Universitaţii din Iaşi, director al Seminarului
"Al. Myller", director general în Ministerul Învăţământului, rector al I
Pedagogic de 3 ani din Iaşi ş.a. Cu devotament şi competenţă, a folosit î
capacitate de muncă în scopul ridicării învăţământului românesc.

La împlinirea unui secol de la naşterea sa, ne gândim cu profundă re
la cel ce a fost omul şi profesorul **Ilie Popa** şi cu toată admiraţia la o
geometru, de istoriograf al matematicii şi învăţământului matematic şi d
învăţământului din ţara noastră.

Prof. dr. Temistocle B

Simpozion

dedicat revistei "Recreaţii Ştiinţifice" (1883-

Academia Română - filiala din Iaşi a găzduit, în ziua de 15 martie
pozionul *"125 de ani de la apariţia revistei* ***Recreaţii ştiinţifice****"*. Festi
desfăşurat sub auspiciile Academiei Române, Facultăţii de matematică a U
"Al. I. Cuza", Catedrei de matematică a Universităţii Tehnice "Gh. Asa
Asociaţiei "Recreaţii matematice".

Cuvântul de deschidere a aparţinut acad. *Viorel Barbu*, preşedintele fi
Academiei Române, care a subliniat faptul că revista *Recreaţii ştiinţifice*
publicaţie din ţară cu acest profil adresată tineretului. Alături de alte e
ieşene remarcabile ale anului 1883 – apariţia ediţiei T. Maiorescu a *P*
Mihai Eminescu, inaugurarea *statuii lui Ştefan cel Mare* ş.a. – apariţia F
ştiinţifice reprezintă un moment important al culturii şi spiritualităţii ron

Fondatorii, distinşi profesori ai Universităţii din Iaşi sau ai şcolilor ieş
colaboratorii revistei au asigurat o înaltă ţinută ştiinţifică acesteia. Revista
în întregul Regat al României de atunci şi se remarcă prin varietatea
abordate, rigoare, frumoasa limbă română folosită şi o grafică excelentă p
timpuri.

Acad. V. Barbu menţionează că în cadrul simpozionului este lansa
integrală a revistei *Recreaţii ştiinţifice*, reeditată în forma originară, ne
Realizarea acestui proiect de reeditare se datoreşte sprijinului material e
doamnei *Marinela Ghigea*, director al firmei Kepler Systèmes d'Informatio
şi muncii depuse de dr. *Dan Tiba*, cercetător la Institutul de matematică al
Române şi de prof. dr. *Temistocle Bîrsan*, Universitatea Tehnică "Gh. A

Cuvântările ţinute de acad. *Radu Miron*, prof. dr. *Vasile Oproiu*, prof.
Ieşan, m.c. al Academiei, prof. dr. *Teodor Precupanu*, în această ordine, su
tate mai jos. Programul simpozionului se încheie cu proiecţia unor
privind revista Recreaţii ştiinţifice şi epoca în care a apărut aceasta pre
prof. dr. *Temistocle Bîrsan*.

Recreaţii Ştiinţifice –
125 ani de la apariţia primului număr

Acad. prof. dr. doc. Radu MIRON

La 15 ianuarie 2008 s-au împlinit **125 de ani** de la publicarea numă
primul volum al revistei **Recreaţii ştiinţifice**. Menită a face educaţie
tineretului din Regatul României, revista, care a avut o existenţă de numai
depăşit graniţele în toate zonele locuite de români. Înfiinţată de zece oame
din vechea capitală a Moldovei, ea avea să imprime în conştiinţa locuitori

pământ primele capitole elevate de istorie a ştiinţelor din ţară şi cele
pentru un învăţământ modern în domeniul ştiinţelor exacte. Peste veac
înrâurirea covârşitoare a ideilor vehiculate în cuprinsul acestei reviste, în
toate gradele şi în cercetare, conducând la integrarea noastră în rândul ţ
aveau deja tradiţii seculare.

Datorită conţinutului preponderent matematic se poate afirma cu de
că revista a deschis prima pagină a matematicilor româneşti. Aşa cum s-
mai târziu, dacă publicaţia s-ar fi numit *Recreaţii matematice*, ea ar fi
prima publicaţie din lume în domeniu, care se adresează tineretului. Est
că, la şapte ani de la dispariţia "Recreaţiilor ştiinţifice", în 1895 a fost
Gazeta Matematică cu adresă specială pentru tineretul român. Dar acea
este considerată a doua din lume ca profil şi destinaţie.

Evident, apariţia "Gazetei", aşa cum sublinia Gheorghe Ţiţeica a fost
nată de "Recreaţiile ştiinţifice".

Acum, la 125 de ani de la înfiinţare a celebrei reviste se cuvine să
omagii profunde memoriei fondatorilor: **N. Culianu**, **C. Climescu**, **I. M**
Universitatea "Al. I. Cuza", **G. I. Lucescu**, **V. Paladi**, **G. I. Roşiu**, **I. I**
G. Zarifopol, **I. V. Praja** şi **I. M. Dospinescu** din învăţământul pre
ieşean. Prin competenţă, pasiune şi sacrificii personale făcute cu generoz
reuşit să trezească interesul pentru ştiinţă în general şi să stimuleze gus
matematici în special.

Sunt emoţionante cuvintele scrise într-un editorial al revistei: *Credem*
tras cea întâi brazdă care conduce către lucrări originale. Brazda-i mică
dar există!

Personalitatea fondatorilor este bine cunoscută. Ei sunt prezentaţi de
Andonie în volumul I din *Istoria Matematicii în România*. Majoritate
oameni de ştiinţă cu studii înalte făcute în Franţa, Italia, Olanda şi Ger
gând de recunoştinţă colaboratorilor, nu mai puţin celebri: **M. Tzony**, **V**
P. Tanco, **C. Gogu** şi rezolvitorilor pasionaţi, elevi pe vremea aceea, **E.**
şi **D. Pompeiu**.

Nu trebuie să-i uităm pe oamenii de ştiinţă care au susţinut peste timp i
revistei şi impactul ei în cultura românească. Cităm doar câţiva dintre ei:
Myller, *Octav Mayer*, *Ilie Popa*, *Gheorghe Gheorghiev*, *Gheorghe Bantaş*
Ţiţeica, *G. Şt. Andonie*, *N. N. Mihăileanu* etc.

Condiţiile istorice în care a apărut în 1883 revista "Recreaţii ştiinţific
dintre cele mai favorabile. Unirea Principatelor abia se înfăptuise, Regatu
era abia întemeiat, Războiul de Independenţă din 1877 lăsase urme adânc
inţa românilor, alfabetul chirilic fusese înlocuit cu cel latin, limba romă
abia îşi definitivase procesul de unificare, românii îşi afirmau în mod de
raţia spre o societate modernă. În atari condiţii, deşi apăruseră cu 23 de
universităţile din Iaşi şi Bucureşti, şcoala de toate gradele trebuia profund
Era nevoie imperioasă de regândit programarea curriculară, de pregătit

didactic, de scris manuale bune în limba româna, de construit şcoli etc.

În atari condiţii spirituale, materiale şi sociale dure, a pune bazele u
de cultură ştiinţifică era un act de curaj, de patriotism. El constituia o i
realizare destinată poporului nostru. Soliditatea acestui edificiu este dată c
ştiinţifică, didactică şi educaţională a subiectelor publicate, de limbaju
adoptat, de grafica de excepţie utilizată în acea vreme. Am prezentat ace
în articolul *"Centenarul revistei Recreaţii ştiinţifice"*, Probleme de istoria
ştiinţei, vol. X, 1984, Filiala Iaşi. Valabilitatea afirmaţiilor făcute atunci îş
temeiul şi astăzi. Din acest motiv reproduc o parte din text.

*Tonul întregii producţii matematice, cuprinzând mai bine de 90% din
de pagini cât însumează această revistă, a fost dat în primul rând de fo
care, prin prestigiul lor, au atras foarte curând valoroşi colaboratori: Milt
– profesor de mecanică teoretică la Universitatea din Iaşi, Candide (prob
Costin, pe atunci student la Paris), Iacob Solomon – inginer, Paul Tan
sor de matematică şi fizică la Gimnaziul Superior din Năsăud, Constan
profesor de geometrie analitică la Universitatea din Bucureşti, Vasile B
profesor de mineralogie şi petrografie la Facultatea de ştiinte din Iaşi ş. a*

*În paginile revistei sunt publicate articole, note, probleme şi soluţii d
ca: aritmetică, algebră, geometrie elementară, geometrie analitică şi difere
cul diferenţial şi integral, mecanică, astronomie, istoria matematicii, chi
geografie. Apare prima traducere a cărţii întâi din celebrele "Elemente"
clid. Miltiade Tzony tipăreşte în coloanele ei o remarcabilă culegere d
de mecanică teoretică. Geometria proiectivă, domeniu de mare actualit
vreme, este prezentă prin traducerea primelor opt paragrafe din vestita lu
ometria de poziţie" a lui Criristian von Staudt. Întâile elemente din ist
maticilor în antichitate sunt transpuse în limba română de Iacob Solomo*

*La succesul binemeritat al Recreaţiilor ştiinţifice a contribuit şi prezent
excelentă. Scrisă într-o limbă literară elevată, revista are, cu excepţia un
matematici în formare, ceva din culoarea şi prospeţimea revistelor actual*

*Privită global, ca act de cultură ştiinţifică, revista rivalizează cu cel
publicaţii de acest gen tipărite acum un secol pe plan mondial.*

Închei aici relatarea din articolul amintit. Dar ultima frază trebuie co
"acum un secol şi un sfert pe plan mondial".

Subliniez faptul că în tot cuprinsul celor şase volume ale revistei imp
grija pentru rigoarea prezentării, acurateţa exprimării în limba română, a
expunerilor, informaţia de ultimă oră, profunzimea raţionamentelor şi, nu
rând, atenţia acordată contribuţiilor personale ale tinerilor rezolvitori sau
problemelor propuse spre publicare.

A fost realizată astfel în premieră, o revistă românească extrem de i
pentru învăţământ şi cercetare în ştiinţele exacte, de acelaşi nivel cu revis
cosacrate şi vestite din lume. După şapte ani de la stingerea activităţii aces
ideea de a răspândi în rândul tineretului pasiunea pentru matematică va

de "Gazeta Matematică".

La 125 de ani de la apariţia revistei "Recreaţii ştiinţifice", generaţiil
omagiază acest eveniment ca semn de adâncă recunoştinţă adusă înainta
pentru contribuţia lor inestimabilă la tezaurul ştiinţei şi culturii române

Şi un scurt adaos: Centenarul apariţiei revistei "Recreaţii ştiinţifice" a
nizat în 1983 de matematicieni ieşeni în Seminarul Matematic "Alexandr
iar sărbătorirea celor 125 de ani de la apariţie a fost iniţiată tot în cad
Seminar pregatită fiind de Asociaţia "Recreaţii Matematice", Facultatea
matică şi Institutul de Matematică "Octav Mayer" de la Filiala din Iaşi a
Române. Asociaţia "Recreatii Matematice" îşi face un titlu de onoare
itarea integrală, exclusiv prin grijă proprie, a colecţiei revistei "Recreaţii ş
Acest fapt îl datorăm prof. univ. *Temistocle Bîrsan* de la Universitate
"Gheorghe Asachi" din Iaşi, cercetătorului dr. *Dan Tiba* de la Institutul
atică al Academiei Române din Bucureşti şi doamnei *Marinela Ghigea* –
firmei Kepler Systèmes d' Information. Îi asigurăm de toată preţuirea şi gr
noastră.

Rolul şi ponderea geometriei în revista „Recreaţii Ştiinţifice"

Prof. dr. Vasile OPROIU

În revista **Recreaţii ştiinţifice**, scrisă şi editată de un grup de oamen
şi cultură inimoşi (**N. Culianu**, **C. Climescu**, **I. Melik**, **G. I. Lucescu**,
G. I. Roşiu, **I. D. Rallet**, **G. Zarifopol**, **I. V. Praja**, şi **I. M. Dos**
s-au adunat şi publicat diferite materiale din domeniile matematicii, fizic
geografiei, cosmografiei, topografiei, mineralogiei, istoriei matematicii et
se adresa elevilor din clasele de gimnaziu şi liceu, dar şi altor categorii d
interesate de cunoaştere: profesori, studenţi, funcţionari, militari etc.

Geometria, ca ramura a matematicilor are o pondere destul de îns
paginile revistei. Trebuie să menţionăm, de la început, că G.I. Roşiu
tre anii 1883-1885 prima carte a *Elementelor* lui *Euclid* (traducere du
italiană). Am regăsit cu o anumită emoţie şi nostalgie multe formulări
întâlnisem când eram student şi apoi le citisem în cărţile lui Efimov (edit
română şi cea în franceză) şi în cartea lui I.Vaisman. Astfel (în volumul II a
ilor), printre definiţiile lui Euclid am regăsit formulări precum: *Punctul es*
nu are părţi, adecă nu are nici o mărime, *Linia este lungime fără lărgime*
plană este aceea care este aşezată egal în respectul tuturor liniilor sale d
tulatele şi axiomele au fost publicate anterior, în primul volum, într-o ord

de cea cu care suntem obişnuiţi. Astfel, faimosul postulat V al lui Eucli axioma XII. Autorul prezintă şi definiţiile şi axiomele, aşa cum au fost de *Legendre* în *Geometria* sa, ediţia V, Paris, 1804. Legendre nu defineş şi, în legatură cu definiţia, formulează următoarea aserţiune: *Definiţia este exprimarea raporturilor sale catră lucruri cunoscute.* După care, se în definescă dreapta: *Linia dreaptă este drumul cel mai scurt de la un pun* Mai sunt prezentate comentarii critice ale diverşilor matematicieni relati definiţii, inclusiv noi definiţii: *Cea mai simplă din toate liniile este linia căria noţiune este familiară la toţi şi despre care ni da o idee un fir în* sunt prezentate propoziţiile de la I la XXII. Cum spuneam, prezentarea E continuă în volumul III cu propoziţiile rămase şi cu exerciţiile la cartea I.

În revistă sunt prezentate numeroase aspecte ale geometriei elemen elevilor, profesorilor şi altor persoane interesate: maxime şi minime geomet şi extrema raţie, calculul lungimilor unor linii importante din triunghi, calc patrulaterul inscriptibil (în primul volum), proprietaţi ale poligoanelor şi Simson (în vol. II), calcularea volumelor piramidei trunchiate şi al conului proprietaţi sintetice ale elipsei (în vol. III), teoria transversalelor, diviziu nică, fasciculul armonic, poli şi polare, geometria de poziţie a lui Staudt (î aceasta din urma se continua şi în volumul V. Chestiunile de geometrie ana considerate separat şi se referă la: secţiuni plane în conul drept, construcţi cu exemplificări din clasele curbelor celebre, tratarea acestora în coordon plane principale la suprafeţele de gradul al doilea.

O secţiune importantă în revistă este cea a problemelor propuse (de jur de 10 probleme la fiecare număr), la care se adugă, pe parcurs, cea cu şi listele de rezolvitori. Trebuie să menţionăm că, în Regatul României existau câteva zeci de gimnazii şi licee (oricum, sub 30) şi că numărul rezolvau probleme era destul de mic. Moda rezolvărilor de probleme la matematică nu prinsese încă. Menţionăm că existau şi colaborări venite din Transilvania, Banat şi alte regiuni ale viitoarei României Mari.

Ca o apreciere cu caracter general, conţinutul revistei Recreaţii Şt destul de ridicat din punct de vedere al nivelului chestiunilor de geometr Subiectele erau interesante şi atractive pentru numeroşi cititori. Cred că, revistei, erau persoane care doreau să facă revista cât mai atractivă.

Răsfoind cele şase volume am dat şi peste un articol fascinant de la mografie, scris de *G.I. Lucescu*, în care se explica în ce manieră au fost calendarele iulian şi gregorian şi că motivul pentru care s-a făcut trecerea la altul a fost legat de ideea că, în acord cu hotărârea Conciliului de la anul 325, punctul de plecare pentru fixarea zilei de Paşti trebuia să fie de primăvară şi acesta trebuia să fie mereu la 21 martie. După aceea, s prima noapte cu lună plină şi Paştele se fixa în duminica imediat următo în 2008, noaptea cu lună plină cade exact în 21 martie şi Paştele catolic es 23 martie; fixarea Paştelui ortodox este mult mai complicată şi ţine de niş calendarul iudaic). De la data Conciliului de la Niceea până în 1582 calend rămăsese în urmă cu 10 zile faţa de calendarul real (anul din calendarul puţin mai lung decât anul real). Acest lucru influenţa foarte mult divers practice, de exemplu, unele lucrări agricole ce se făceau în strânsă legătur torile religioase. În 1582, papa Grigore al XIII-lea a dat o bulă prin care avansarea calendarului iulian, existent, cu 10 zile şi că anii multipli de puţin cei multipli de 400) nu sunt bisecţi. Acest calendar mai are o mica constă în rămânerea în urmă cu o zi în circa 3300 ani, eroare considerată şi care va fi corectată în viitor. În ţară la noi, calendarul grigorian a fost 1923 (s-a trecut la stilul nou!), dată când întârzierea calendarului iulian real, sau cel grigorian, ajunsese la 13 zile.

Revenind la revista Recreaţii ştiinţifice, apreciez că un cititor interesa găsească în cuprimsul ei lucruri incitante, atât în domeniul geometriei, câ domenii ale matematicilor şi ale altor ştiinţe.

Despre problemele de mecanică

Prof. dr. Dorin IEŞAN, m.c. al Academiei

Pe lângă alte chestiuni interesante, în revista **Recreaţii ştiinţifice** şi un număr de probleme de mecanică raţională, semnate de **Miltiade T** vremea când a publicat aceste probleme, M. Tzony era profesor de mecanic la Universitatea din Iaşi (a funcţionat în această calitate în perioada 2 15.III.1898).

Miltiade Tzony este autorul unui curs de mecanică, prezentat în ma două volume. Primul volum a fost scris în 1869, iar al doilea volum în prima pagină a acestui curs autorul scrie *"Cursŭ de Mecanică raţionale Profesat la Universitatea de Jasy; După cei mai buni autori francezi: Sturm, Duhamel, Bellanger, Bresse, Bour, Collignon, Mesat, Chasles; Tzony, Licenţiat în ştiinţe matematice de la Sorbona din Paris, Inginerii de poduri din Paris, Vechiu elevu al şcoalei politechnice din acestu oraşu, Universităţii de Jasy şi a Lyceului Nou din Jasy"*. Lecţiile de mecanică r la Universitatea din Iaşi se făceau după acest curs.

In perioada 1885-1888, M. Tzony publică *Un curs de probleme* în revista ştiinţifice". El mărturiseşte că acest lucru îl face *"în scopul de a uşura Universităţilor noastre completa pricepere a cursului de mecanică raţional ta întrebuinţare a principiilor acestei însemnate ştiinţi"* (vol. III, pp. vedem care este originea problemelor şi a rezolvărilor date. M. Tzony n *"problemele sunt lucrate după diverşi autori între care figurează în primul*

Jullien, a cărui carte în această materie a devenit clasică". Am constat
cele 98 de probleme publicate de Tzony în "Recreaţii ştiinţifice" sunt luate
călugărului **P.M. Jullien** *Problèmes de mécanique rationnelle*, apărută
anul 1855. Cartea lui P.M. Jullien conţine atât probleme originale cât şi pr
altor autori. In "Recreaţii ştiinţifice" M. Tzony prezintă 36 probleme ale
este P.M. Jullien, 24 de probleme datorate lui W. Walton şi 28 probleme a
tori (printre care Euler, Bernoulli, Leibniz, Laplace, Gauss, Möbius). Me
problemele datorate lui *W. Walton* se găsesc în cartea acestuia *A Collect
blems in Illustration of the Principles of Theoretial Mechanics*, apărută la
în anul 1842.

La începutul prezentării problemelor, M. Tzony afirmă că *"de câte
fi posibil vom indica la finea fiecărei probleme autorul căruia se dator*
blemele publicate de Tzony sunt şi rezolvate şi cu *"toate indicaţiunile nece
a putea fi cuprinse cu uşurinţă de tânărul public cetitoriu căruia este
destinat".* M. Tzony susţine, pe drept cuvânt, că *"opera abatelui Jullien
într-un mod atît de laconic încât cetirea ei de începători este foarte labo
unele puncte aproape cu totul neînţeleasă".* Dintre problemele publicate
în "Recreaţii ştiinţifice" un număr de 51 sunt rezolvate în cartea lui P.
Celelalte sunt probleme pe care Jullien le-a propus spre rezolvare. O p
problemele nerezolvate de Jullien sunt însă însoţite de figuri şi răspunsu
lui W. Walton. Am comparat aceste rezolvări şi figuri cu cele date de M
"Recreaţii ştiinţifice". Se poate spune cu certitudine că Tzony nu s-a i
cartea lui W. Walton.

Fiecare capitol din culegerea de probleme este prefaţat cu *"o scurtă
rezultatelor finale ale teoriei, întovărăşite de câteva noţiuni istorice pe ca
altor documente, le vom împrumuta pentru cea mai mare parte din opera
de care facem menţiune".* Este uşor de văzut că aceste comentarii sunt
cartea lui P.M. Jullien.

Menţionăm că rezolvările prezentate de M. Tzony sunt clare, iar fi
îngrijite şi binevenite. Un lucru remarcabil este faptul că şi în cazul p
rezolvate de Jullien, M. Tzony face figuri suplimentare şi adaugă explicaţ
lemele publicate de Tzony în "Recreaţii ştiinţifice" sunt 88 de figuri, din
nu se află în cartea lui Jullien.

Referitor la repartiţia pe ani a problemelor se constată că în anul
publicate 18 probleme, în anul 1886 apar 33 probleme, în anul 1887 sun
23 probleme, iar în anul 1888 apar 18 probleme. In anul 1888 revista
ştiinţifice" îşi încetează apariţia. Acest lucru a curmat publicarea firea
probleme.

Menţionăm că problemele apărute se referă doar la partea de Statică
predat de Tzony la Universitate. Dintre acestea, 18 se referă la echilibru
material, 39 la echilibrul corpului rigid, 6 tratează echilibrul unui sist
articulate, 27 sunt dedicate echilibrului firelor, iar 8 se referă la principiu

mecanic virtual".

Cursul lui M. Tzony (în manuscris) şi problemele publicate de el în
ştiinţifice" au stat la baza învăţământului Mecanicii din ţara noastră.

În afară de activitatea de profesor, Miltiade Tzony s-a remarcat prin
depusă în vederea propăşirii României. A fost senator, secretar de stat
terul Construcţiilor Publice, director al C.F.R. Printre altele, oraşul Iaşi î
pavarea străzilor.

Despre M. Tzony se pot spune multe lucruri. Un fost elev de-al său, *Pe*
lianu, care a urmat cursurile de mecanică de la Universitatea din Iaşi în
îl descrie pe Miltiade Tzony astfel: *"Cu mintea ageră, cu figura frumo*
luat ca model de pictorul Grigorescu pentru unele figuri din biserica de la
Agapia), ce corespund întru totul nobleţei caracterului său, el a fost cu to
datoriei şi înaltei misiuni a profesorului".

Problematica de algebră şi analiză matema
în revista „Recreaţii Ştiinţifice”

Prof. dr. Teodor PRECUPANU

Pentru matematica românească, apariţia revistei **Recreaţii ştiinţifi**
ţiativa unei elite de profesori ai universităţii şi ai liceelor din Iaşi, rep
moment important, de început, pentru crearea unei atmosfere propice dez
inţelor matematice, de atragere a tinerilor, stimulându-i şi amplificându-le
călăuzindu-i spre problemele moderne ale acelei perioade.

Este de remarcat faptul că iniţiatorii revistei erau la curent cu mult
ocupările existente în matematica europeană, având o bună informare, fa
accesul la o serie de reviste importante, îndeosebi din Franţa, Italia şi Germ
semnalate nu numai apariţia unor rezultate importante, ci şi diverse even
comunităţii ştiinţifice, cum ar fi, spre exemplu, apariţia revistei *Acta M*
fondată de *Mittag-Leffler* prin casa regală suedo-norvegiană, solemnitatea
din învăţământ la vârsta de 70 de ani a marelui matematician *Eugè*
Catalan, apariţia unor tratate importante de matematică, discuţiile g
proiectul Turnului Eiffel, ce urma să se construiască în Paris.

Adresându-se în primul rând elevilor din învăţământul secundar, rev
mulat, de asemenea, preocupările profesorilor pentru modernizarea învăţ
matematic, găzduind în paginile sale dezbateri interesante cu caracter meto
programelor analitice şi a metodelor prin care să fie atraşi elevii pent
matematicii, să se asigure o cât mai bună accesibilitate, punând pe p
intuiţia şi dezvoltarea abilităţilor de rezolvitori de probleme.

Să remarcăm faptul că în acea perioadă, sfârşitul secolului al XIX-lea
cipline componente ale matematicii nu erau încă bine conturate, în acord
care ele erau concepute la marile universităţi europene, influenţate de căr
tante de matematică din acei ani. Abia apăruse cursul de analiză matem
Sturm (1880) şi cel de calcul diferenţial şi integral al lui *Catalan* (1878),
unei cărţi despre serii, unică la acel moment, cărţi ce urmau tratatelor cel
de *Leibniz*, *Bernoulli* sau *Serret*.

Algebra şi analiza matematică este prezentă în paginile revistei atât p
cu caracter teoretic informativ asupra unor chestiuni importante, cât şi pri
variată de exerciţii şi probleme ce vizau şi pe studenţii anilor pregătitori pe
politehnice din ţară sau din străinătate. Semnalăm astfel mai mult artico
C. Climescu dedicate numerelor complexe (numite cantităţi imaginare), n
încă erau evitate de mulţi matematicieni. Întâlnim, de asemenea, demonst
mei fundamentale a algebrei precum şi unele consideraţii asupra dreptelor
sau asupra unor funcţii complexe, date însă sub formă implicită prin relaţi
ale. Mai mult, în unele probleme apar integrale ale unor funcţii complexe
a se depăşi aspectele dificile de multivocitate şi determinându-se cu clarit
lor principale.

In cadrul algebrei sunt cuprinse şi seriile numerice, dezvoltările taylo
cepute ca sume (numerice sau polinomiale) infinite. Convergenţa acestor
intuitiv se reduce de fapt la extinderea operaţiilor numerice algebrice şi
(nu reiese dacă se folosea şi $-\infty$), fiind cunoscute limitele fundamentale.
însă pentru convergenţă criterii fine, aproape toate cele cunoscute astăzi
articolelor respective sunt *C. Climescu*, *I.D. Rallet* şi *I.V. Praja*. Erau
mod uzual dezvoltările în serii de puteri ale funcţiilor elementare. Tot ca fă
din algebră, sunt prezentate cunoscutele formule Lagrange şi Newton de
într-un articol foarte interesant scris de *Alex. Sadoveanu*.

In primul volum, din 1883, problema dezvoltării funcţiilor în serie es
făcând parte din Analiza algebrică iar Calculul integral era considerat
Analiza matematică. De fapt, analiza matematică era concepută la ac
numai ca teorie a derivabilităţii având ca principale rezultate teorema c
lui Lagrange şi condiţiile suficiente de extrem la funcţii de una sau mai
abile. Problemele de calcul de arii sau volume erau considerate ca făcân
geometrie sau intervenind în probleme de mecanică.

Noţiunea de derivată era acceptată prin interpretările ei: geometrică - d
sau cele din mecanică. Mai mult, trebuie avut în vedere că însăşi noţiunea
fundamentală pentru întreaga matematică, era concepută în acele timpuri
euleriană, ceea ce corespunde astăzi funcţiilor elementare.

Menţionăm că ecuaţiile diferenţiale sunt frecvent întâlnite în partea de
de geometrie a curbelor plane (probleme concrete de aflare a unor curbe d
anumite proprietăţi metrice legate de tangente) şi nu sunt prezentate ca
disciplinei de astăzi Ecuaţii diferenţiale, ceea ce este normal, întrucât ac

plină avea să se contureze în matematică mult mai târziu. Este însă pre
cadrul Analizei matematice problema schimbării de variabilă cu suportu
ecuaţiile diferenţiale şi schimbările de coordonate (îndeosebi polare şi sferic
de importante în mecanică, geometrie şi astronomie.

Problemele de algebră şi analiză matematică prezente în cele şase v
revistei sunt deosebit de frumoase şi ilustrative, de mare diversitate, oferin
exactă a conţinutului disciplinelor de matematică din acea perioadă. Apr
pot fi regăsite de fapt în culegerile de probleme de astăzi.

În încheiere, subliniem încă odată rolul remarcabil avut de revista *Re*
inţifice în dezvoltarea şi impulsionarea învăţământului matematic român
cordanţă cu cel european, ce era urmărit îndeaproape.

Nu aveau să treacă mulţi ani după încetarea bruscă a apariţiei aceste
la universitatea ieşeană un fost rezolvitor al Recreaţiilor ştiinţifice elabo
lucrări originale de matematică. Este vorba de marele matematician româ
Pompeiu, ale cărui rezultate privitoare la teorema creşterilor finite, obţi
rioada când funcţiona ca profesor al Universităţii din Iaşi, sunt citate şi
presionând prin profunzimea şi eleganţa lor. Cercetările sale de analiză m
sunt de fapt primele cercetări ştiinţifice originale de matematică la Univer
Iaşi.

Invocând anterior numele lui Catalan, matematician cu vaste preocupă
tice (analiză, algebră, geometrie, teoria numerelor), se cuvine a aminti nu
ia dintre primii autori români ai unor cercetări ştiinţifice originale de m
N.Şt. Botez, care stabileşte o frumoasă identitate legată de seria armonică,
azi ca *identitatea Catalan-Botez*, rolul lui Catalan fiind acela de a o menţio
din articolele sale cu precizarea lui Botez ca autor.

Revista *Recreaţii ştiinţifice* constituie pasul premergător apariţiei
ştiinţifice ale Universităţii "Al.I. Cuza", în 1900, revistă dedicată cercetă
nale ale profesorilor universităţii ieşene, dar care a publicat încă din primele
articole ale unor recunoscuţi matematicieni străini ca *Lucien Godeaux*, *Ma*
Kentaro Yano, *T.J. Willmore* ş.a.

Semnalăm cititorilor reeditarea colecţiei complete a revistei

RECREAŢII ŞTIINŢIFICE (1883-1

la 125 de ani de la apariţia primului număr, cu respectarea formei în c
publicată iniţial. Revista prezintă şi astăzi interes prin culoarea limbii
terminologiei folosite, prin conţinutul interesant şi de un înalt nivel ştiinţif
şi prin forma grafică frumoasă. Cei interesaţi pot consulta site-ul revistei

http://www.recreatiistiintifice.ro

de unde se poate prelua gratuit.

Despre calendar

Filip REICHER[1]

Omagiu adus revistei Recreaţ
la 125 de ani de

Nevoia măsurării timpului. Din cele mai vechi timpuri oamenii simţ de a măsura trecerea timpului, pentru a şti cât timp a trecut de când un anumit eveniment. Prima posibilitate de a măsura timpul, a fost de fazele succesive ale Lunii. Astronomii antichităţii au reuşit să determine c exactitate timpul dintre fazele de acelaşi fel ale Lunii (Luna nouă, prin Luna plină, al treilea pătrar). De cea mai mare importanţă era însă de determina apariţia anotimpurilor succesive.

Calendarul egiptenilor din antichitate. În Egipt se întâmpla un naturii la începutul fiecărei veri, care era de cea mai mare importanţă p cultură: revărsarea fluviului Nil pe o parte a pământului, care făcea teren Egiptenii au observat, spre marea lor surprindere, că trei fenomene ale na tâmplau cu regularitate la acelaşi timp: începutul verii, revărsarea Nilului anumită a stelei Sirius pe cer. (Apariţia stelei la orizont, înaintea răsărit lui). Astfel, preoţii egipteni au putut să determine lungimea anului; a fo un calendar, care cuprindea 365 de zile.

S-au stabilit 12 luni cu câte 30 de zile şi suplimentar 5 zile, după cele 360 celor 12 luni. Primul calendar egiptean, bazat pe mişcarea Soarelui pe ce a poziţiilor stelelor, a fost adoptat în anul 4241 î.Hr. Mai târziu a fost det anul cu lungimea de $365,25$ zile, prin adăugarea unei zile odată la 4 ani. apropiat lungimea anului egiptean de lungimea exactă a anului astonomic, determinată mai târziu de astronomii moderni, anume de 365 zile, 5 ore, şi 46 secunde (ca număr zecimal: $365,2422$ zile.)

Calendarul iulian. Acesta este denumit după împăratul roman *C Caesar* şi are 365 de zile într-un an ordinar şi, o dată la 4 ani, 366 zile – a

Abaterea calendarului iulian. În raport cu anul adevărat, anul astrono şi anul tropic, care cuprinde $365,2422$ zile, calendarul iulian are o diferenţă care face ca, în conformitate cu acest calendar, anotimpurile să se schimb după o dată întârziată.

Pentru a calcula abaterea, luăm valoarea medie a anului, conform acestu $(4 \times 365 + 1) : 4 = 365,25$. Diferenţa faţă de anul adevărat (astronom $365,25 - 365,2422 = 0,0078$ zile într-un an. După câţi ani acest calendar urmă cu o zi? Rezultatul se obţine din împărţirea $1/0,0078 = \mathbf{128,2}$ ani.

Deoarece după calendarul iulian era pierdută (întârziată) o zi la fiecar de 128 ani şi începutul primăverii – 21 martie – era indicat mereu mai târz o piedică în a stabili din timp sărbătorile, mai ales Paştele.

Acest lucru s-a remediat prin adoptarea unui calendar nou, calendarul

[1] Inginer dr., Facultatea de chimie, Univ. Tehnică "Gh. Asachi", Iaşi

Calendarul gregorian. Acesta este denumit după papa *Grigore*
Deoarece abaterea calendarului iulian era prea mare, s-a adoptat un cal
la care abatarea faţă de anul astronomic este mult mai mică.

Conform acestui calendar anii de fine ai secolelor, la care numărul nu es
prin 400, nu sunt ani bisecţi. Deci, anii 1700, 1800, 1900, 2100, 2200 et
ani bisecţi, în timp ce anii 1600, 2000, 2400, etc. sunt ani bisecţi.

Abaterea calendarului gregorian. În intervalul de 400 de ani, acest c
are 100 de ani bisecţi – o dată la 4 ani – ci numai 97 de ani bisecţi. Valo
a anului este de aceea $(303 \times 365 + 97 \times 366) : 400 = 365,2425$ zile. Abate
anul astronomic este de $365,2425 - 365,2422 = 0,0003$ zile. În câţi ani răm
calendar în urmă cu o zi? Răspunsul rezultă din împărţirea $1 : 0,0003 =$

Calendarul gregorian este cel mai exact dintre calendare (mai exact d
darul iudaic, aceasta o vom vedea mai jos).

Calendarul iudaic. Ca şi alte popoare, evreii au ales să măsoare timp
mişcării Lunii în jurul Pământului, anume, potrivit fazelor Lunii. Începu
luni Lunare era determinat prin apariţia secerii subţiri a Lunii pe cer, im
Luna Nouă. În fiecare lună se întrunea "Consiliul Calendarului" şi apar
subţiri a Lunii pe cer – numită "Moled", adică naşterea Lunii – trebuia s
mată de către doi martori credibili. "Consiliul Calendarului" se întrunea
zile; dacă secera subţire a Lunii nu apărea, ziua a 31-a era stabilită dre
a lunii următoare. Apoi erau trimişi oameni în ţară şi se aprindeau focur
pentru ca toţi oamenii să ia la cunoştinţă că a început noua lună.

Începând din sec. IV î.Hr., calendarul Lunar a fost înlocuit în mod
calendarul Luni-Solar. Deoarece în biblie este prevăzut că eliberarea e
robia egipteană a avut loc primăvara, evreii au dorit să potrivească astfel
ca sărbătoarea Paştelui – Pesah –, care aminteşte de acest eveniment, s
întotdeauna în primăvară. Deci, trebuia construit un calendar care să p
anul iudaic cu anul astronomic. O lună astronomică durează 29 zile, 12 ore,
şi 2,8 secunde (sau, ca număr zecimal: $29,53059$ zile). Dar 12 luni Luna
mai puţin decât un an astronomic: $12 \times 29,53059 = 354,36708$ zile, aşa
să fie intercalată o lună suplimentară, din când în când.

Această problemă a fost rezolvată în antichitate de astronomul Meton
Soluţia sa se cheamă *Ciclul lui Meton*, care cuprinde 19 ani, în care, pe lân
pe an, se intercalează 7 luni suplimentare. Se are în vedere calculul:

durata unui an, conform calendarului cunoscut în acea vreme: $365,25$

19 ani solari $= 19 \times 365,25$ zile $= 6939,75$ zile;

$(19 \times 12) + 7$ luni $= 235$ luni Lunare; $235 \times 29,53059$ zile $= 6939,688$
Este o diferenţă foarte mică, deci acceptabilă. În ciclul lui Meton, urmă
cuprind a 13-a lună: cele cu numărul de ordine 0, 3, 6, 8 11, 14, 17 din cadr

Calendarul iudaic a adoptat exact această succesiune de ani, când se
lună suplimentară. Această lună se cheamă ADAR II sau VE-ADAR.

Calendarul iudaic are două particularităţi. Lungimea unui an poate a
353, 354 sau 355 zile într-un an obişnuit (ordinar) şi 383, 384 sau 385 zile
cu 13 luni (an bisect). A doua particularitate a calendarului iudaic const
că data de 1 Tişri (Anul Nou iudaic) nu poate fi niciodată într-o dumin

miercuri sau într-o vineri.

Este uşor de stabilit când avem un an bisect. Se împarte numărul calendarul iudaic prin 19. Dacă restul este unul din numerele de mai su 3, 6, 8, 11, 14 sau 17, acel an este bisect. De exemplu: anul 5744 (19 în caledarul gregorian) este un an bisect, deoarece împărţirea prin 19 dă şi restul este 6. Mult mai dificil este de a se stabili lungimea unui an iu 354 sau 355 de zile într-un an ordinar, respectiv 383, 384 sau 385 de zile bisect). Calendarul iudaic are o întâziere de o zi în **216, 4** ani.

Addendum. La catolici şi protestanţi, data Paştelui este aceeaşi. Ea se după o regulă simplă: Duminica Paştelui este prima duminică de după p plină ce apare după echinoxiul de primăvară.

	Luna plină	*Data Paştelui*		*Luna plină*	*Data*
2005	05.03	27.03	2009	09.04	1
2006	13.04	16.04	2010	30.03	0
2007	02.04	08.04	2011	18.04	2
2008	21.03	23.03	2012	06.04	0

Data Paştelui pentru ortodocşi se stabileşte după un algoritm mult mai Interesant este faptul că acest algoritm se bazează tot pe ciclul de 19 ani, c calendarul iudaic. De aceea, nu întâmplător, Duminica Paştelui pentru ort întotdeauna în ultima zi, puţin înaintea ultimei zile sau imediat după ult cele 8 zile ale sărbătorii Paştelui (PESAH) din calendarul iudaic.

	Ultima zi de PESAH	*Paştele ortodox*		*Ultima zi de PESAH*
2005	dum. 01.05	01.05	2009	joi 16.04
2006	joi 20.04	23.04	2010	marţi 06.04
2007	marţi 10.04	08.04	2011	marţi 26.04
2008	dum. 27.04	27.04	2012	sâmb. 14.04

Bibliografie

1. **G. Petrescu** - *Astronomie elementară*, Bucureşti, 1962
2. **G. Stănilă** - *Sisteme calendaristice*, Bucureşti, 1980
3. www.jewfaq.org: Judaism 101
4. LUAH 5743 (Calendar 1982 -1983), editat de Federaţia Comunităţilor ev România

Nota Redacţiei. În revista *Recreaţii Ştiinţifice* probleme ca: măsura lui, alcătuirea unui calendar, stabilirea datei Paştelui au fost îndelung de aprofundate. Într-un ciclu de nouă articole (apărute în vol. I(1883), vol. vol. III(1885)), **G. I. Lucescu**, profesor la Liceul Naţional din Iaşi, face u calendarului, din cele mai vechi timpuri şi până la adoptarea calendarului În cuprinsul a cinci scrisori publicate în vol. VI(1888), **Constantin Go** sor la Universitatea din Bucureşti, se ocupă de regulile pentru găsirea zil **Paul Tanco** din Năsăud, primul român cu titlul de doctor în matema problema periodicităţii cu care Paştele cade a doua zi după Sf. Gheorghe

Câteva probleme de teoria numerelor a căr rezolvare se bazează pe identităţi

Marian TETIVA[1]

Când vorbim despre utilizarea identităţilor în teoria numerelor, prob gândim în primul rând la ecuaţii diofantice, în special la demonstrarea soluţiilor unor asemenea ecuaţii. De exemplu, identităţile

$$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2$$

şi

$$(m^2 - 2mn - n^2)^2 + (m^2 + 2mn - n^2)^2 = 2(m^2 + n^2)^2$$

arată că ecuaţiile $x^2 + y^2 = z^2$ şi, respectiv, $x^2 + y^2 = 2z^2$ au, fiecare, c de soluţii întregi. Totuşi, în cele ce urmează, vom rezolva alte tipuri de pr teoria numerelor cu ajutorul identităţilor.

Avem în minte mai ales două identităţi, binecunoscute cititorilor. Este

$$(x - y)(x + y)(x^2 + y^2)\cdots(x^{2^{n-1}} + y^{2^{n-1}}) = x^{2^n} - y^{2^n}$$

şi de

$$(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4)\cdots(x^{2^n} - x^{2^{n-1}}y^{2^{n-1}} +$$
$$= x^{2^{n+1}} + x^{2^n}y^{2^n} + y^{2^{n+1}}.$$

Ambele sunt valabile pentru orice numere complexe x şi y (dar, desigur c vor interesa pentru numere întregi) şi orice număr natural $n \geq 1$. Se just prin aplicarea repetată a formulei $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

Problema cea mai cunoscută care utilizează (1) este probabil

Problema 1. *Fie $n \geq 1$ un număr natural. Să se arate că numărul N scris în baza 10 cu 2^n cifre de 1 are cel puţin n divizori primi distincţi.*

Soluţie. Într-adevăr, avem

$$N = (10^{2^n} - 1)/9 = (10 + 1)(10^2 + 1)\cdots(10^{2^{n-1}} + 1)$$

deci (1) ne permite să scriem pe N ca produsul a n numere; dacă reuşim că acestea sunt prime între ele două câte două problema ar fi rezolvată fiecare din aceste n numere ar aduce (cel puţin) un factor prim în descomp N ca produs de numere prime.

Avem, pentru $0 \leq i < j$, că $10^{2^i} + 1$ divide pe $10^{2^j} - 1$ (tot pe baza (1)), deci dacă d este un divizor comun pentru $10^{2^i} + 1$ şi $10^{2^j} + 1$, atu divizor şi al lui $2 = 10^{2^j} + 1 - (10^{2^j} - 1)$. Cum d este impar, rezultă $d =$ se încheie.

Problema care urmează a apărut acum ceva vreme în *Recreaţii mate* 1/2005, pag. 42, *Problema 2*, cl. a X-a, **Lucian Tuţescu**.

Problema 2. *Există o infinitate de numere $n \in \mathbb{N}$ astfel încât n^2+n+1 d*

Soluţie. Să pornim de la un caz particular al identităţii (2):

$$m^8 + m^4 + 1 = (m^2 + m + 1)(m^2 - m + 1)(m^4 - m^2 + 1)$$

[1] Profesor, Colegiul Naţional "Gheorghe Roşca Codreanu", Bârlad

şi să observăm că avem

$$m^2 - m + 1 < m^2 + m + 1 < m^4 - m^2 + 1 < m^4$$

pentru orice număr natural $m \geq 2$. Aceste inegalităţi arată că $(m^4)!$ se $(m^2+m+1)(m^2-m+1)(m^4-m^2+1)$, deci cu $(m^4)^2+m^4+1$ pentru o număr natural. Problema este aşadar rezolvată: putem alege $n = m^4$, m exemplu, 16! se divide cu $16^2 + 16 + 1 = 7 \cdot 3 \cdot 13$; de fapt, $n = 16$ este c cu proprietatea din enunţ.)

O problemă asemănătoare a apărut mai demult în *American Mathemati*

Problema 3. *Există o infinitate de numere* $n \in \mathbb{N}$ *astfel încât* n^2+1 *d*

Soluţie. De data asta ne vom folosi de identitatea

$$4m^4 + 1 = (2m^2 - 2m + 1)(2m^2 + 2m + 1),$$

unde vom încerca să mai descompunem şi cel de-al doilea factor. Pent observăm că

$$4m^2 + 4m + 2 = (2m+1)^2 + 1 = 2p^2 \Rightarrow 2m^2 + 2m + 1 = p^2,$$

dacă $2m + 1$ şi p sunt soluţii ale ecuaţiei $x^2 - 2y^2 = -1$.

Dar acest lucru este cunoscut: ecuaţia menţionată are, într-adevăr, c de soluţii. Mai precis, dacă notăm $x_k + y_k\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^{2k+1}$, cu x_k şi naturale, atunci avem şi $x_k - y_k\sqrt{2} = (1-\sqrt{2})^{2k+1}$, deci

$$x_k^2 - 2y_k^2 = (x_k + y_k\sqrt{2})(x_k - y_k\sqrt{2}) = ((1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}))^{2k+1} = (-1)^{2}$$

pentru orice k; de exemplu, primele trei soluţii (care corespund lui $k =$ respectiv $k = 2$) sunt $(1,1)$, $(7,5)$ şi $(41,29)$. În plus, se arată destul de este impar pentru orice k.

Atunci, este suficient să alegem perechea $(2m+1, p)$ ca fiind una dint (x_k, y_k) ale ecuaţiei $x^2 - 2y^2 = -1$, pentru a avea

$$(2m^2)^2 + 1 = (2m^2 - 2m + 1)p^2.$$

În aceste condiţii,

$$4m^4 + 1 = (2m^2 - 2m + 1)p^2 > 17p^2 \geq 16p^2 + 1,$$

dacă m este suficient de mare (ceea ce se poate, deoarece şirul (x_k) ti de fapt, pentru $k \geq 2$, avem $m = (x_k - 1)/2 \geq 20$, ceea ce asigură va inegalităţii care ne trebuie), de unde obţinem

$$m^2 > 2p \Rightarrow 2m^2 - 2m + 1 \geq m^2 > 2p.$$

Astfel că $2m^2 > 2m^2 - 2m + 1 > 2p > p$, deci produsul $(2m^2)!$ conţ (distincţi) $2m^2 - 2m + 1$, $2p$ şi p, deci se divide cu $(2m^2 - 2m + 1)p^2 = ($ prin urmare sunt soluţii toate numerele $n = 2m^2$, unde $m = (x_k - 1)/2$, k

Se poate vedea prin calcul direct că soluţia cea mai mică este $n = 18$ (18 cu $18^2 + 1 = 5^2 \cdot 13$). Această soluţie face parte din şirul de mai sus; se obţ $k = 1$, când $m = 3$ şi $p = 5$ (inegalitatea $2m^2 - 2m + 1 > 2p$ are loc şi în chiar dacă nu are loc $m^2 > 2p$).

Problema 4. *Pentru un număr natural* $n \geq 2$ *notăm cu* $h(n)$ *cel divizor prim al lui* n*. Să se arate că există o infinitate de numere* n *c* $h(n) < h(n+1) < h(n+2)$.

Soluţie. De astă dată, pe lângă identitatea (2), vom folosi şi o ide
subtilă. Anume, să fixăm un număr prim impar p şi să observăm că,
Problema 1, oricare două dintre numerele

$$p+1, p^2+1, \ldots, p^{2^k}+1, \ldots$$

au cel mai mare divizor comun 2. De aceea există unul dintre ele care
un factor prim mai mare decât p. Să considerăm primul dintre aceste nu
fie k acel număr natural pentru care $h(p^{2^k}+1) > p$ şi $h(p^{2^j}+1) < p$
$1, 2, \ldots, k-1$ (clar, nu putem avea $h(p^{2^s}+1) = p$, deoarece nici unul di
numere nu poate avea factorul p). Numărul $n = p^{2^k}-1$ are atunci propr
enunţ. Într-adevăr, $h(n+1) < h(n+2)$ înseamnă $p < h(p^{2^k}+1)$, deci
alegerea lui k; şi tot din alegerea lui k rezultă şi cealaltă inegalitate, deoa

$$h(p^{2^k}-1) = h((p-1)(p+1)(p^2+1)\cdots(p^{2^{k-1}}+1)) =$$
$$= \max\{(h(p-1), h(p+1), h(p^2+1), \ldots, h(p^{2^{k-1}}+1)\}$$

Astfel vedem că pentru fiecare număr prim impar p există un număr înt
k astfel încât $n = p^{2^k}-1$ să aibă proprietatea $h(n) < h(n+1) < h(n+2$

Exerciţii pentru cititor.

Problema 5. Fie a, b, c numere întregi astfel încât ab nu este pătrat
a, b sunt pozitive. Arătaţi că dacă ecuaţia $ax^2 - by^2 = c$ are o soluţie în
numerelor întregi, atunci ea are o infinitate de asemenea soluţii.

Problema 6. Să se dea o altă soluţie Problemei 3 folosind identitatea

$$(4x^2-2x+1)^2+1 = 2(4x^2+1)(2x^2-2x+1).$$

Verificaţi această identitate!

De asemenea, puteţi obţine o soluţie a problemei folosind identitatea

$$(x^2+1)((x+1)^2+1) = (x^2+x+1)^2+1.$$

Problema 7. Fie $p > 0$ un număr prim. Să se arate că din oricare $2p$
întregi $x_1, \ldots, x_{2p-1}$ se pot alege p a căror sumă se divide cu p.

Indicaţie. Aceasta nu e o problemă uşoară. De fapt ea este valabilă p
număr natural n (adică din oricare $2n-1$ numere întregi $x_1, \ldots, x_{2n-1}$ s
n a căror sumă se divide cu n) şi în această formă se numeşte **teorem**
Ginzburg-Ziv (a fost pentru prima dată demonstrată de cei trei matem
1961). Se poate arăta că acest enunţ are proprietatea de multiplicativitat
că dacă este adevărat pentru $n = a$ şi $n = b$, atunci este adevărat şi pen
(a se vedea cartea lui **Horea Banea** de *Probleme traduse din revista K*
urmare demonstrarea sa pentru n număr prim îi asigură valabilitatea pent
Şi ajungem acum şi la indicaţia promisă: utilizaţi identitatea

$$\sum(x_1+\cdots+x_p)^{p-1} - \sum(x_1+\cdots+x_{p-1})^{p-1} + \cdots + (-1)^{p-1}\sum x$$

pentru care se poate consulta, de exemplu, **Ioan Tomescu**, *Probleme*
natorică şi teoria grafurilor, E. D. P., Bucureşti, 1981. Sumele se fac
posibilităţile de a alege din cele $2p-1$ numere câte p, $p-1$, …, respectiv

O caracterizare a punctului Mathot

Cătălin ŢIGĂERU[1]

Punctul lui Mathot (sau anticentrul) unui patrulater inscriptibil este punctul de intersecţie al perpendicularelor duse din mijlocul fiecărei laturi laterului pe latura opusă. Numeroase proprietăţi ale acestui punct au fo evidenţă, cele mai spectaculoase fiind în legătură cu cele patru triunghiu de câte două laturi adiacente ale patrulaterului şi câte o diagonală.

În acestă notă punem în evidenţă o caracterizare a punctului Mathot ca la cele patru triunghiuri formate de câte o latură şi câte două segmente d pe diagonale de punctul lor de intersecţie. Mai precis, demonstrăm

Teorema 1. *Se consideră patrulaterul inscriptibil $ABCD$, înscris în centru O, în care se notează cu E intersecţia diagonalelor AC şi BD şi H_3, H_4 ortocentrele triunghiurilor AEB, BEC, CED şi respectiv DEA.*

(a) Patrulaterul $H_1H_2H_3H_4$ este paralelogram.

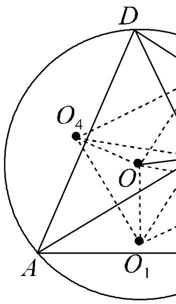
(b) Intersecţia diagonalelor paralelogramului $H_1H_2H_3H_4$ coincide cu p thot al patrulaterului $ABCD$.

Pentru demonstraţie folosim

Lema 1. *Dacă O_1, O_2, O_3, O_4 sunt centrele cercurilor circumscris urilor AEB, BEC, CED şi respectiv DEA, atunci*

(a) Patrulaterul $O_1O_2O_3O_4$ este paralelogram.

(b) Dacă Γ este punctul de intersecţie a diagonalelor paralelogramului C atunci punctele O, Γ, E sunt coliniare, punctul Γ fiind mijlocul segment



Demonstraţie. Cititorul poate verifica imediat faptul că patrulaterul $O_1O_2O_3O_4$ este paralelogram. Notăm cu F piciorul perpendicularei din E pe AB şi unim E cu O_3. Pe de o parte avem $m(\widehat{FEA}) = 90° - m(\widehat{BAE})$; pe de altă parte $m(\widehat{CEO_3}) = 90° - m(\widehat{CDE})$; cum $m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{CDE})$, rezultă că $m(\widehat{FEA}) = m(\widehat{CEO_3})$, adică F, E, O_3 sunt coliniare, deci $EO_3 \perp AB$, deci $O_3E \parallel OO_1$; analog se demonstrează că $O_1E \parallel OO_3$, $O_4E \parallel OO_2$, $O_2E \parallel OO_4$, de unde rezultă că patrulaterele O_1EO_3O, O_2EO_4O sunt paralelograme. Cum diagonalele paralelogramelor se înjumătăţesc, rezultă că punctul Γ este mijlocul segmentulu

Demonstraţia Teoremei 1. Vom folosi şi următoarele rezultate:

(A) Dacă $UVWZ$ este un paralelogram, S este intersecţia diagonalelor este un punct oarecare din plan, atunci $4\overrightarrow{MS} = \overrightarrow{MU} + \overrightarrow{MV} + \overrightarrow{MW} + \overrightarrow{M}$

(B) (Sylvester) Dacă M este centrul cercului circumscris triunghiulu dacă S este ortocentrul triunghiului, atunci $\overrightarrow{MS} = \overrightarrow{MU} + \overrightarrow{MV} + \overrightarrow{MW}$;

(C) Dacă $ABCD$ este inscriptibil, dacă O este centrul cercului circumsc Ω este punctul Mathot al patrulaterului, atunci

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{O\Omega}.$$

[1] Lect. dr., Univ. "Ştefan cel Mare", Suceava

Se demonstrează imediat că $H_1H_2H_3H_4$ este paralelogram. Putem sc $\overrightarrow{OO_4}+\overrightarrow{O_4A}=\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{O_1A}$, $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{O_1B}=\overrightarrow{OO_2}+\overrightarrow{O_2B}$, $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OO}$ $\overrightarrow{OO_3}+\overrightarrow{O_3C}$, $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OO_3}+\overrightarrow{O_3D}=\overrightarrow{OO_4}+\overrightarrow{O_4D}$, de unde, prin însumare,

$$2\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)=2\left(\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{OO_2}+\overrightarrow{OO_3}+\overrightarrow{OO_4}\right)+$$

$$+\left(\overrightarrow{O_1A}+\overrightarrow{O_1B}+\overrightarrow{O_1E}\right)+\left(\overrightarrow{O_2B}+\overrightarrow{O_2C}+\overrightarrow{O_2E}\right)+\left(\overrightarrow{O_3C}+\overrightarrow{O_3D}+\overrightarrow{O}\right.$$

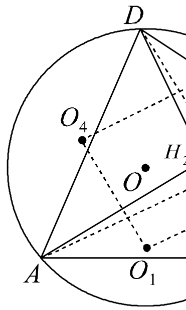
$$+\left(\overrightarrow{O_4D}+\overrightarrow{O_4A}+\overrightarrow{O_4E}\right)+\overrightarrow{EO_1}+\overrightarrow{EO_2}+\overrightarrow{EO_3}+\overrightarrow{EO_4}\overset{(B)}{=}$$

$$=2\sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{OO_i}+\sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{O_iH_i}+\sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{EO_i}=\sum_{i=1}^{4}\left(\overrightarrow{OO_i}+\overrightarrow{O_iH_i}\right)+\sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{OO_i}+\sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{EO_i}$$

$$=(A)+lema=\sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{OH_i}+4\overrightarrow{O\Gamma}+4\overrightarrow{E\Gamma}.$$

Conform lemei, rezultă că $\overrightarrow{O\Gamma}+\overrightarrow{E\Gamma}=\bar{0}$. Dacă notăm cu Ω' punctul de intersecţie a diagonalelor paralelogramului $H_1H_2H_3H_4$ şi, ţinând cont din nou de (A), avem $\sum\limits_{i=1}^{n} OH_i=4O\Omega'$. Ca urmare, obţinem

$$2\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)=4\overrightarrow{O\Omega'}. \qquad (2)$$



Din (1) şi (2) obţinem că $4\overrightarrow{O\Omega}=4\overrightarrow{O\Omega'}$, de unde deducem că $\Omega\equiv\Omega'$ şi teorema este demonstrată. (Cele spuse se pot urmări pe figura alăturată.)

O consecinţă imediată a teoremei este şi relaţia vectorială

$$\sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{O_iH_i}=4\overrightarrow{\Gamma\Omega},$$

care se deduce imediat folosind (A).

Este posibil ca rezultatul notei să nu fie nou, dar sigur nu este trecut, d printre proprietăţile punctului Mathot, demonstrate în capitolul consacra lui, din monografia "Problems in plane and solid geometry", scrisă de V solov, care este accesibilă pe Internet. Precizăm că autorul nu a găsit rezu în cărţile citate în bibliografie, nici în alte cărţi clasice de geometrie, scris română.

Bibliografie

1. **D. Mihalcea, I. Chiţescu, M. Chiriţă** - *Geometria patrulaterului*, Seria Bacalaureat-Admitere, nr. 24, 1998.
2. **C. Mihalescu** - *Geometria elementelor remarcabile*, Bibl. Soc. Şt. Ma S.S.M.R., Ed. Tehnică, Bucureşti, 2007.

Unsprezece pătrate perfecte

Dan POPESCU[1]

Scopul acestei note este **determinarea numerelor naturale în baz** **forma** $\overline{\underbrace{aa\ldots a}_{n \text{ cifre}} b \underbrace{cc\ldots c}_{n \text{ cifre}} d}$, $n \in \mathbb{N}^*$, **care, pentru orice număr natura** **pătrate perfecte**.

Se va vedea că rezultatul obţinut are drept consecinţe un număr mare d publicate în reviste de specialitate destinate elevilor (de gimnaziu).

Din modul cum s-a formulat problema, rezultă că pătratele perfecte găsesc printre cele ce corespund unei valori particulare a lui n. Pentru găsesc, cu ajutorul calculatorului următoarele 11 pătrate perfecte de form

$$
\begin{array}{rll}
1) & 1111022224 = 33332^2; & a=1, b=0, c=2, d=4,\\
2) & 1111088889 = 33333^2; & a=1, b=0, c=8, d=9,\\
3) & 1111155556 = 33334^2; & a=1, b=1, c=5, d=6,\\
4) & 1111222225 = 33335^2; & a=1, b=2, c=2, d=5,\\
5) & 4444222225 = 66665^2; & a=4, b=2, c=2, d=5,\\
6) & 4444355556 = 66666^2; & a=4, b=3, c=5, d=6,\\
7) & 4444488889 = 66667^2; & a=4, b=4, c=8, d=9,\\
8) & 4444622224 = 66668^2; & a=4, b=6, c=2, d=4,\\
9) & 9999400009 = 99997^2; & a=9, b=4, c=0, d=9,\\
10) & 9999600004 = 99998^2; & a=9, b=6, c=0, d=4,\\
11) & 9999800001 = 99999^2; & a=9, b=8, c=0, d=1.
\end{array}
$$

Vom arăta că există exact 11 numere de forma $\overline{\underbrace{aa\ldots a}_{n} b \underbrace{cc\ldots c}_{n} d}$ care su perfecte pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, anume, acelea ce se scriu cu sistemele de ci d) pe care le-am întâlnit mai sus (în cazul $n = 4$), adică

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \overline{\underbrace{11\ldots1}_{n}0\underbrace{22\ldots2}_{n}4} = \overline{\underbrace{33\ldots3}_{n}2}^2,\\
(2) & \overline{\underbrace{11\ldots1}_{n}0\underbrace{88\ldots8}_{n}9} = \overline{\underbrace{33\ldots3}_{n+1}}^2,\\
(3) & \overline{\underbrace{11\ldots1}_{n+1}\underbrace{55\ldots5}_{n}6} = \overline{\underbrace{33\ldots3}_{n}4}^2,\\
(4) & \overline{\underbrace{11\ldots1}_{n}\underbrace{22\ldots2}_{n+1}5} = \overline{\underbrace{33\ldots3}_{n}5}^2,\\
(5) & \overline{\underbrace{44\ldots4}_{n}\underbrace{22\ldots2}_{n+1}5} = \overline{\underbrace{66\ldots6}_{n}5}^2,\\
(6) & \overline{\underbrace{44\ldots4}_{n}3\underbrace{55\ldots5}_{n}6} = \overline{\underbrace{66\ldots6}_{n+1}}^2,
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
(7) & \overline{\underbrace{44\ldots4}_{n+1}\underbrace{88\ldots8}_{n}9} = \overline{66\ldots}\\
(8) & \overline{\underbrace{44\ldots4}_{n}6\underbrace{22\ldots2}_{n}4} = \overline{66\ldots}\\
(9) & \overline{\underbrace{99\ldots9}_{n}4\underbrace{00\ldots0}_{n}9} = \overline{99\ldots}\\
(10) & \overline{\underbrace{99\ldots9}_{n}6\underbrace{00\ldots0}_{n}4} = \overline{99\ldots}\\
(11) & \overline{\underbrace{99\ldots9}_{n}8\underbrace{00\ldots0}_{n}1} = \overline{99\ldots}
\end{array}
$$

[1] Profesor, Colegiul Naţional "Ştefan cel Mare", Suceava

În scopul propus, să notăm $x_n = \overline{\underbrace{aa\ldots a}_{n}b\underbrace{cc\ldots c}_{n}d}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Putem scr

$$x_n = \overline{\underbrace{aa\ldots a}_{n+1}} \cdot 10^{n+1} - a \cdot 10^{n+1} + b \cdot 10^{n+1} + \overline{\underbrace{cc\ldots c}_{n+1}} + d - c =$$

$$= \overline{\underbrace{aa\ldots a}_{n+1}} \cdot \left(10^{n+1} - 1\right) + (b - a)\left(10^{n+1} - 1\right) + \overline{\underbrace{aa\ldots a}_{n+1}} + \overline{\underbrace{cc\ldots c}_{n+1}} + d -$$

adică

$$x_n = 9a\overline{\underbrace{11\ldots 1}_{n+1}}^2 + (9b + c - 8a) \cdot \overline{\underbrace{11\ldots 1}_{n+1}} + b + d - a - c, \quad n \in \mathbb{N}$$

Acum, să observăm că în $(*)$ coeficienţii $9a$, $9b + c - 8a$ şi $b + d - a - c$ s pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ (ei reflectând numai forma lui x_n). Ca urmare dac din membrul doi este pătrat perfect pentru o valoare particulară a lui n avea această proprietate pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Acest fapt verificându-se di $n = 4$, vom deduce că numerele $(1) - (11)$ sunt cele căutate.

Observaţia 1. i) Cititorul poate observa că, pentru $1 \le n \le 3$, exis perfecte de forma $\overline{\underbrace{aa\ldots a}_{n}b\underbrace{cc\ldots c}_{n}d}$ care nu apar printre cele unsprezece. U pentru $n = 2$: $344^2 = 118336$. Mai precis, pentru $n = 2$, există 18 pătra de forma enunţată, iar pentru n = 3, numărul lor este 12. În cazul $n =$ lor este mult mai mare, căci problema se reduce la identificarea pătratel cu patru cifre ale sistemului zecimal.

ii) Elevul *Aursulesei Tudor*, căruia îi mulţumim şi cu acest prilej, a ve intermediul calculatorului faptul că, pentru $4 \le n \le 14$, singurele pătra de forma $\overline{\underbrace{aa\ldots a}_{n}b\underbrace{cc\ldots c}_{n}d}$ sunt exact cele unsprezece prezentate mai sus.

Observaţia 2. i) Singurele pătrate perfecte de forma $\overline{\underbrace{aa\ldots a}_{n+1}\underbrace{bb\ldots b}_{n}}$ sunt: $\overline{\underbrace{11\ldots 1}_{n+1}\underbrace{55\ldots 5}_{n}6}$, $n \in \mathbb{N}^*$ şi $\overline{\underbrace{44\ldots 4}_{n+1}\underbrace{88\ldots 8}_{n}9}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

ii) Singurul pătrat perfect de forma $\overline{\underbrace{aa\ldots a}_{n}\underbrace{bb\ldots b}_{n+1}c}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ este $\overline{\underbrace{44\ldots}_{n}}$ $n \in \mathbb{N}^*$.

Aplicaţii

1. *Să se arate că numărul* $N = \overline{\underbrace{11\ldots 1}_{1997}\underbrace{22\ldots 2}_{1998}5}$ *este pătrat perfec* juniori, Atena, 1998) [**1**].

Este un caz particular al rezultatului (4); $N = \overline{\underbrace{33\ldots 3}_{1997}5}^2$.

2. *Să se determine cifrele x şi y, $x \neq 0$, dacă* $\overline{\underbrace{xx\ldots x}_{n}6\underbrace{yy\ldots y}_{n}4}$ *perfect, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.*

Rezolvarea problemei decurge din (8) şi (10), deci avem $(x, y) \in \{(4, 2$

3. *Nu există pătrate perfecte în baza zece de forma* $\overline{\underbrace{aa\ldots a}_{n}}$*;* $a \neq 0$*,* $n \geq$

Rezultă din cele prezentate mai sus; o altă abordare poate fi găsită în

4. Rezultatele de la (3) şi (7) sunt prezente în [**3**].

5. *Să se arate că numerele* $a = \overline{\underbrace{11\ldots1}_{2n}} - \overline{\underbrace{22\ldots2}_{n}}$ *şi* $b = \overline{\underbrace{44\ldots4}_{2n}} - \overline{8}$

pătrate perfecte, $\forall n \in \mathbb{N}$*,* $n \geq 2$*.*

Se arată că $a = \overline{\underbrace{11\ldots1}_{n-1}0\underbrace{88\ldots8}_{n-1}9}$ şi se aplică (2), iar $b = \overline{\underbrace{44\ldots4}_{n-1}3\underbrace{55}_{n}}$

aplică (6).

6. *Să se arate că există o infinitate de numere cu terminaţia* 0004 *patrate perfecte.*

Se poate utiliza egalitatea (10).

7. *Este numărul* $a = \sqrt{\overline{4\underbrace{4\,4\ldots4}_{2007}3\underbrace{55\ldots5}_{2007}6}}$ *natural?* (**P. Bătrîneţu** -

scurtă), Piteşti, ediţia 2007 [**6**]).

Observaţia 3. *i*) În lista scurtă cu problemele propuse la Olimpiada de Matematică, ediţia 2005 [**6**], **E. Velcea** a propus problema care fa rezultatului de la (6).

ii) Rezultatul de la (4) a constituit o problemă de la *Concursul In* *"Gh. Ţiţeica"*, ediţia 2004.

iii) Autorul acestei note nu a identificat enunţuri legate de rezultatele (9) şi (11).

În final, propunem următorul exerciţiu (poate cu o alta abordare):

Să se arate că nu există numere în baza zece cu scrierea poziţională $\overline{\underbrace{aa.}_{n}}$ *care, pentru ficare număr natural nenul* n*, să fie pătrate perfecte.*

Bibliografie

1. **D. Brînzei** ş.a. - *10 ani de Olimpiade Balcanice ale Juniorilor*, Paralela
2. **N.B. Vasiliev, A.A. Egorov** - *Zadaci vsesoiuznîi matematiceskih olimp* Nauka, Moscova, 1988.
3. **A.P. Ghioca, L.A. Cojocaru** - *Matematica gimnazală dincolo de m* Zalău, 2005.
4. **I. Cucurezeanu** - *Pătrate şi cuburi perfecte de numere întregi*, Gil, Zală
5. *Gazeta Matematică*, Seria B, nr. 12/2005, Problema E:13095.
6. *Romanian Mathematical Competitions*, Theta, Bucureşti, 2005.
7. *Romanian Mathematical Competitions*, Theta, Bucureşti, 2007.

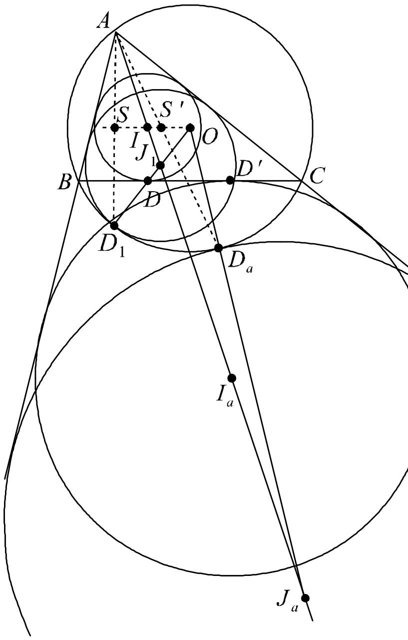
Cercuri semiînscrise și puncte de tip Gergonne sau Nagel

Temistocle BÎRSAN[1]

Fie ABC un triunghi oarecare. Pentru cercurile circumscris, înscris,
etc. folosim notaţiile uzuale: $\mathcal{C}(0,R)$, $\mathcal{C}(I,r)$, $\mathcal{C}(I_a,r_a)$ etc. Punctele d
a dreptei BC cu cercurile $\mathcal{C}(I,r)$ şi $\mathcal{C}(I_a,r_a)$ se notează D şi D'; cu E,
notăm punctele cu semnificaţii similare relativ la dreptele CA şi, respecti

Este cunoscut faptul că *dreptele AD, BE şi CF sunt concurente* (înt
Γ – *punctul lui Gergonne*) şi, de asemenea, faptul că *dreptele AD', BE' ş
concurente (într-un punct N – *punctul lui Nagel*).

Se asociază triunghiului ABC trei *cercuri semiînscrise*: $\mathcal{C}(J_1,\rho_1)$,
$\mathcal{C}(J_3,\rho_3)$ ($\mathcal{C}(J_1,\rho_1)$ fiind cercul tangent dreptelor AB şi AC şi tangent in
cului circumscris triunghiului etc.), precum şi trei *cercuri ex-semiînscrise*:
$\mathcal{C}(J_b,\rho_b)$, $\mathcal{C}(J_c,\rho_c)$ ($\mathcal{C}(J_a,\rho_a)$ fiind cercul tangent dreptelor AB şi AC
exterior cercului $\mathcal{C}(O,R)$ etc.). Observăm că avem un singur cerc înscr
cercuri semiînscrise; pe de altă parte, numărul cercurilor exînscrise este eg
celor ex-semiînscrise. Privitor la cercurile semiînscrise, un număr de prop
lor sunt date în [**3**] şi [**1**].



Ne propunem în această Notă să "trecem" cele două rezultate mai sus menţionate la cercurile semiînscrise şi ex-semiînscrise.

În scopul propus, să notăm D_1 şi D_a punctele de tangenţă a cercurilor $\mathcal{C}(J_1,\rho_1)$ şi, respectiv, $\mathcal{C}(J_a,\rho_a)$ cu $\mathcal{C}(O,R)$; E_1, E_b şi F_1, F_c au semnificaţii analoage.

Odată cu trecerea de la cercul $\mathcal{C}(I,r)$ la cele trei cercuri semiînscrise $\mathcal{C}(J_i,\rho_i)$ $(i = 1,2,3)$, este firesc să considerăm în rolul cevienelor Gergonne AD, BE şi CF cevienele AD_1, BE_1 şi, respectiv, CF_1. Similar, în locul cevienelor Nagel AD', BE' şi CF' să considerăm cevienele AD_a, BE_b şi, respectiv, CF_c legate de cercurile exsemiînscrise $\mathcal{C}(J_a,\rho_a)$ etc.

Vom arăta că rezultatelor clasice de mai sus le corespund cele din urm

Teoremă. *a) Cevienele AD_1, BE_1 şi CF_1 sunt concurente în ce
omotetiei directe a cercurilor $\mathcal{C}(O,R)$ şi $\mathcal{C}(I,r)$.*

[1] Prof. dr., Universitatea Tehnică "Gh. Asachi", Iaşi

b) Cevienele AD_a, BE_b şi CF_c sunt concurente în centrul S' al omote
a cercurilor $\mathcal{C}(O,R)$ şi $\mathcal{C}(I,r)$.

Demonstraţie. *a)* Evident, omotetia H_A^k, cu $k=\dfrac{\rho_1}{r}$, transformă cer în $\mathcal{C}(J_1,\rho_1)$, pe când omotetia $H_{D_1}^{k'}$, cu $k'=\dfrac{R}{\rho_1}$, transformă $\mathcal{C}(J_1,\rho_1)$ în $\mathcal{C}$ urmare, produsul $H_{D_1}^{k'}\circ H_A^k$ are centrul pe AD_1 şi raportul $kk'=\dfrac{\rho_1}{r}\cdot\dfrac{R}{\rho_1}=$ transformă $\mathcal{C}(I,r)$ în $\mathcal{C}(O,R)$, acest produs coincide cu omotetia directă cercuri. În consecinţă, AD_1 trece prin S – centrul omotetiei directe a $\mathcal{C}(I,r)$ şi $\mathcal{C}(O,R)$ (situat pe OI şi definit de relaţia $\overline{SO}=\dfrac{R}{r}\overline{SI}$). Simil că dreptele BE_1 şi CF_1 trec prin S.

b) Se procedează la fel. H_A^t, cu $t=\dfrac{\rho_a}{r}$, transformă $\mathcal{C}(I,r)$ în $\mathcal{C}($ $H_{D_a}^{t'}$, cu $t'=-\dfrac{R}{\rho_a}$, transformă $\mathcal{C}(J_a,\rho_a)$ în $\mathcal{C}(O,R)$. Omotetia produs cu raportul $tt'=-\dfrac{R}{r}$, coincide cu omotetia inversă a cercurilor $\mathcal{C}(I,r)$ AD_a conţine centrul S' al acestei din urmă omotetii (situat pe OI şi det $\overline{S'O}=-\dfrac{R}{r}\overline{S'I}$). Se arată similar că şi BE_b, CF_c trec prin S'. Q.e.d.

Observaţia 1. Demonstraţia standard pentru concurenţa cevienelor (sau Nagel) se bazează pe reciproca teoremei lui Ceva. Acest instrume utilizat şi pentru stabilirea afirmaţiilor *a)* şi *b)*, dar cu preţul unor calcule Astfel, dacă notăm $X=BC\cap AD_1$, se găseşte că $\dfrac{BX}{XC}=\dfrac{c^2}{b^2}\cdot\dfrac{p-b}{p-c}$ $(2p=$ Această relaţie şi cu analoagele ei fac posibilă aplicarea reciprocei teorem şi, deci, dovedirea concurenţei dreptelor AD_1, BE_1, CF_1. Faptul că S es lor de concurenţă devine o chestiune de rutină, care cere noi calcule; de e poate utiliza Propoziţia 2 din [**2**] şi lista de coordonate triliniare din [**4**]. În este preferabilă demonstraţia dată pe baza produsului a două omotetii.

Observaţia 2. În [**3**], sub formă de problemă propusă cititorilor spre este afirmată concurenţa dreptelor AD_1, BE_1, CF_1 (cu alte notaţii), fără vreo precizare asupra punctului lor de concurenţă.

Observaţia 3. În [**5**], într-o interesantă Notă de geometria triunghiul de omotetie S şi S' apar ca puncte de concurenţă ale altor două triplete asociate unui triunghi dat.

Bibliografie

1. **R. Bairac** - *Cercuri semiînscrise în triunghi*, Delta, 1/2006, 12-15.
2. **T. Bîrsan** - *Ceviene izogonale şi puncte de concurenţă remarcabile*, 9/200
3. **A. Girici** - *Câteva probleme despre triunghiuri şi cercuri*, Kvant, 11/199
4. **C. Kimberling** - *Centrul Points and Central Lines in the Plane of* Mathematics Magazine, 67(1994), no.3, 163-187.
5. **I. V. Maftei** - *Două puncte remarcabile într-un triunghi*, G.M. (B) – 1/2

O rafinare a inegalităţii lui Jensen

Florin POPOVICI[1]

Cu o demonstraţie simplă, stabilim un criteriu de monotonie a funcţiil
caţie, prezentăm o rafinare a inegalităţii lui Jensen, despre care credem că

1. Preliminarii. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a < b$. Se stabileşte în mod obişnuit

Propoziţia 1 (de tip Fermat). *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie dată. Dacă este un punct de maxim local (respectiv de minim local) al funcţiei f şi f a la dreapta în $\overline{\mathbb{R}}$ în punctul x_0, atunci $f'_+(x_0) \leq 0$ (respectiv $f'_+(x_0) \geq 0$)*

Propoziţia 2 (de tip Rolle). *Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie contin care are derivată la dreapta în $\overline{\mathbb{R}}$ pe $[a, b)$ şi*

$$f(a) = f(b),$$

atunci există $c_1, c_2 \in [a, b)$, astfel încât

$$f'_+(c_1) \leq 0 \leq f'_+(c_2).$$

Demonstraţie. Presupunem că f nu-i constantă (cazul contrar fi
Conform teoremei de mărginire a funcţiilor continue a lui Weierstrass, exis
$[a, b]$, încât $f(c_1) = \max\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ şi $f(c_2) = \min\{f(x) \mid x \in [a, b$
rezultă că putem alege $c_1, c_2 \in [a, b)$. Conform Propoziţiei 1, rezultă că a

Propoziţia 3 (de tip Lagrange). *Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie c $[a, b]$, care are derivată la dreapta în $\overline{\mathbb{R}}$ pe $[a, b)$, atunci există $c_1, c_2 \in [a,$*

$$f'_+(c_1) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'_+(c_2).$$

Demonstraţie. Aplicăm Propoziţia 2 funcţiei $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, definită

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x, \quad \forall x \in [a, b].$$

Propoziţia 4 (criteriu de monotonie). *Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţ pe $(a, b]$, care are derivată la dreapta în $\overline{\mathbb{R}}$ pe $[a, b)$ şi*

$$f'_+(x) \geq 0, \quad \forall x \in [a, b),$$

atunci funcţia f este crescătoare.

Demonstraţie. Fie $x_1, x_2 \in (a, b]$, cu $x_1 < x_2$. Conform Propoziţiei 3
restricţiei $f\Big|_{(a,b]}$, există $c_1 \in [x_1, x_2)$, astfel încât $f'_+(c_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1}{x_2 - x_1}$
$0 \leq f(x_2) - f(x_1)$, adică $f\Big|_{(a,b]}$ este crescătoare. Urmează că $\exists \lim_{x \searrow a} f$
$\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Conform ipotezei (3), avem $f'_+(a) \geq 0$. Rezultă că $f(a) \leq l$
că avem $f(a) \leq f(x)$, $\forall x \in (a, b]$, deci funcţia f este crescătoare.

2. Rezultatul principal. Putem acum stabili următoarea

Teoremă. *Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval dat. Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcţ atunci pentru orice $a_1, \ldots, a_n \in I$, cu $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ şi pentru orice p*

[1] Prof. dr., Colegiul Naţional "Gr. Moisil", Braşov

$(0,\infty)$, *are loc inegalitatea lui Jensen rafinată:*

$$\frac{p_1 f(a_1)+\cdots+p_n f(a_n)}{p_1+\cdots+p_n} - f\left(\frac{p_1 a_1+\ldots p_n a_n}{p_1+\cdots+p_n}\right) \geq$$

$$\geq \frac{(p_1+p_2) f(a_2)+\cdots+p_n f(a_n)}{p_1+\cdots+p_n} - f\left(\frac{(p_1+p_2) a_2+\cdots+p_n a_n}{p_1+\cdots+p_n}\right) \geq$$

$$\geq \frac{(p_1+\cdots+p_{n-1}) f(a_{n-1})+p_n f(a_n)}{p_1+\cdots+p_n} - f\left(\frac{(p_1+\cdots+p_{n-1}) a_{n-1}+p_{\ldots}}{p_1+\cdots+p_n}\right.$$

Demonstraţie. Stabilim prima inegalitate din (4). Dacă $a_1 = a_2$, at... inegalitate din (4) are loc cu egalitate. Dacă $a_2 = a_n$, atunci prima ineg... (4) rezultă direct din definiţia convexităţii. Considerăm cazul $a_1 < a_2$ ... $g : I \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin

$$g(x) = \frac{p_1 f(x)+p_2 f(a_2)+\cdots+p_n f(a_n)}{p_1+\cdots+p_n} - f\left(\frac{p_1 x+p_2 a_2+\cdots+p_n a_n}{p_1+\cdots+p_n}\right)$$

Deoarece funcţia f este convexă rezultă (a se vedea [**1**], §1.3) că funcţia ... tinuă pe $(a_1, a_2]$, este derivabilă la dreapta pe (a_1, a_2), are derivată la dre... $f'_+(a_1) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ şi derivata $f'_+ : [a_1, a_2) \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ este funcţie c... Urmează că funcţia g este continuă pe $(a_1, a_2]$, este derivabilă la dreapta ... are derivată la dreapta în a_1 (în $\overline{\mathbb{R}}$) şi avem

$$g'_+(x) = \frac{p_1}{p_1+\cdots+p_n}\left(f'_+(x) - f'_+\left(\frac{p_1 x+p_2 a_2+\cdots+p_n a_n}{p_1+\cdots+p_n}\right)\right), \quad \forall x$$

Deoarece

$$x \in [a_1, a_2) \Rightarrow x < \frac{p_2 a_2+\cdots+p_n a_n}{p_2+\cdots+p_n} \Rightarrow x < \frac{p_1 x+p_2 a_2+\cdots+p_{\ldots}}{p_1+\cdots+p_n}$$

rezultă că $g'_+(x) \leq 0$, $\forall x \in [a_1, a_2)$. Conform Propoziţiei 4, aplicată ... $g\Big|_{[a_1,a_2]}$, rezultă că funcţia $g\Big|_{[a_1,a_2]}$ este descrescătoare. Urmează că ave... $g(a_2)$, care este prima inegalitate din (4).

Prin inducţie finită descendentă se obţin şi celelalte inegalităţi din (... inegalitate din (4) se obţine direct din definiţia convexităţii.

Observaţia 1. În particular, din (4) se obţine inegalitatea lui Jensen

$$f\left(\frac{p_1 a_1+\cdots+p_n a_n}{p_1+\cdots+p_n}\right) \leq \frac{p_1 f(a_1)+\cdots+p_n f(a_n)}{p_1+\cdots+p_n}.$$

Observaţia 2. Criteriul de monotonie de mai sus (Propoziţia 4) este ... diferite situaţii. De exemplu, pe baza lui poate fi obţinută o rafinare a ... lui Tiberiu Popovici (a se vedea [**2**]).

Bibliografie

1. **C. P. Niculescu, L. E. Persson** - *Convex Functions and Their Appli... Contemporary Approach*, CMS Books in Mathematics, vol. 23, Springer-V... York, 2006.

2. **C. P. Niculescu, F. Popovici** - *A Refinement of Popoviciu's Inequality*, ... Sci. Math. Roum. 49 (97), No.3, 285-290.

Asupra unor inegalităţi geometrice

Gheorghe IUREA[1]

Rezultatul principal al notei [**1**] este următoarea

Propoziţie. *Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi; atunci, p*
$x \geq 0$, au loc inegalităţile:

$$(a+b+c)^3(x+1)^3 \geq 27\left[(a-b)(1-x)+c(1+x)\right]\left[(b-c)(1-x)+a(1\right.$$
$$\cdot\left[(c-a)(1-x)+b(1+x)\right],$$

$$\frac{(a+b-c)x+b+c-a}{\sqrt{(ax+b)(bx+c)}}+\frac{(b+c-a)x+c+a-b}{\sqrt{(bx+c)(cx+a)}}+\frac{(c+a-b)x+a+b-c}{\sqrt{(cx+a)(ax+b)}}$$

$$\frac{(b+c)x+a+c}{\sqrt{ax+b}}+\frac{(c+a)x+b+a}{\sqrt{bx+c}}+\frac{(a+b)x+c+b}{\sqrt{cx+a}} \geq$$
$$\geq 2\left(\sqrt{ax+b}+\sqrt{bx+c}+\sqrt{cx+a}\right),$$

În cele ce urmează, vom demonstra că inegalităţile (1), (2) şi (3) au
orice a, b, c numere reale pozitive.

Cu substituţiile $\alpha = (a-b)(1-x)+c(1+x)$, $\beta = (b-c)(1-x)$
şi $\gamma = (c-a)(1-x)+b(1+x)$, observând că $\alpha+\beta+\gamma = (a+b+$
inegalitatea (1) se scrie sub forma $(\alpha+\beta+\gamma)^3 \geq 27\alpha\beta\gamma$ $(1')$. Dacă
atunci $(1')$ este evidentă. Dacă $\alpha\beta\gamma \geq 0$, cum $\alpha+\beta$, $\beta+\gamma$ şi $\gamma+\alpha$ sunt
rezultă că α, β, γ sunt nenegative şi atunci $(1')$ urmează imediat din
mediilor $(MA \geq MG)$. Egalitatea se atinge pentru $a=b=c$ şi $x \in [0,\infty$

Notând $ax+b=\alpha^2$, $bx+c=\beta^2$, $cx+a=\gamma^2$, cu $\alpha,\beta,\gamma>0$, inega
devine

$$\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{\alpha\beta}+\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{\beta\gamma}+\frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{\alpha\gamma} \leq 3$$

care, după calcule, poate fi scrisă sub forma

$$\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)+\beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)+\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) \geq 0.$$

Aceasta este însă cunoscuta *inegalitate Schur*. Egalitatea se atinge când

Folosind aceleaşi substituţii, inegalitatea (3) este echivalentă cu

$$\frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha}+\frac{\alpha^2+\beta^2}{\gamma}+\frac{\alpha^2+\gamma^2}{\beta} \geq 2(\alpha+\beta+\gamma),$$

care rezultă prin sumarea inegalităţilor $\dfrac{\beta^2}{\alpha}+\dfrac{\alpha^2}{\gamma}+\dfrac{\gamma^2}{\beta} \geq \alpha+\beta+\gamma$ şi $\dfrac{\gamma^2}{\alpha}+$
$\alpha+\beta+\gamma$. Egalitatea are loc pentru $a=b=c$.

Bibliografie

1. I. V. Maftei, M. Haivas - *Tehnici de stabilire a unor inegalităţi*
Recreaţii Matematice 1/2008, 22-23.

[1] Profesor, Liceul Teoretic "Dimitrie Cantemir", Iaşi

Metoda deligamentării şi rafinarea unor inega

Titu ZVONARU[1]

Scopul acestei note este de a prezenta demonstraţii elementare pentr
egalităţi, ca şi obţinerea unor rafinări ale acestora. Descrierea metodei deli
poate fi găsită în [**2**].

Pentru început, o demonstraţie prin metoda deligamentării a unei
cunoscute:

1. $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\geq\dfrac{3}{2},\quad a,b,c>0.$

Soluţie. Avem $\dfrac{a}{b+c}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{2a-b-c}{2(b+c)}=\dfrac{a-b}{2(b+c)}+\dfrac{a-c}{2(b+c)}$ şi, anal
$\dfrac{b}{c+a}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{b-c}{2(c+a)}+\dfrac{b-a}{2(c+a)}$, $\dfrac{c}{a+b}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{c-a}{2(a+b)}+\dfrac{c-b}{2(a+b)}$. Grupâ
în funcţie de numărătorii lor, obţinem:

$$\frac{a-b}{2(b+c)}+\frac{b-a}{2(c+a)}=\frac{(a-b)(c+a-b-c)}{2(b+c)(c+a)}=\frac{(a-b)^2}{2(b+c)(c+a)}$$

împreună cu relaţiile similare:

$$\frac{b-c}{2(c+a)}+\frac{c-b}{2(a+b)}=\frac{(b-c)^2}{2(c+a)(a+b)},\qquad\frac{c-a}{2(a+b)}+\frac{a-c}{2(b+c)}=\frac{(c}{2(a+}$$

deducem valabilitatea inegalităţii de demonstrat.

Metoda deligamentării, folosită în demonstraţia următoarelor inegalit
la obţinerea unor rafinări ale acestora. Chiar dacă sunt necesare unele calcu
sunt uşor de condus către rezultatul dorit.

2. $\dfrac{a}{(b+c)^2}+\dfrac{b}{(c+a)^2}+\dfrac{c}{(a+b)^2}\geq\dfrac{3(a+b+c)}{4(ab+bc+ca)},\quad a,b,c>0.$

Darij Grinberg şi Ce

Soluţie. Demonstraţia din [**1**] face apel la *inegalitatea lui Cebâşev* şi
tatea lui Gerretsen. Avem

$$\frac{a}{(b+c)^2}-\frac{3a}{4(ab+bc+ca)}=\frac{a\left(4ab+4bc+4ca-3b^2-3c^2-6bc\right)}{4(ab+bc+ca)(b+c)^2}$$
$$=\frac{(3ab+ac)(a-b)}{4(ab+bc+ca)(b+c)^2}+\frac{(3ac+ab)(a-c)}{4(ab+bc+ca)(b+c)^2}$$

şi, analog,

$$\frac{b}{(c+a)^2}-\frac{3b}{4(ab+bc+ca)}=\frac{(3bc+ab)(b-c)}{4(ab+bc+ca)(c+a)^2}+\frac{(3ab+bc)(b}{4(ab+bc+ca)}$$
$$\frac{c}{(a+b)^2}-\frac{3c}{4(ab+bc+ca)}=\frac{(3ac+bc)(c-a)}{4(ab+bc+ca)(a+b)^2}+\frac{(3bc+ac)(c}{4(ab+bc+ca)}$$

[1] Comăneşti, e-mail: *tzvonaru@yahoo.com*

Grupând convenabil, obţinem

$$\frac{(3ab+ac)(a-b)}{4(ab+bc+ca)(b+c)^2}+\frac{(3ab+bc)(b-a)}{4(ab+bc+ca)(c+a)^2}=$$

$$=\frac{a-b}{4(ab+bc+ca)}\cdot\frac{(3ab+ac)(c+a)^2-(3ab+bc)(b+c)^2}{(b+c)^2(c+a)^2},$$

şi cum

$$(3ab+ac)(c+a)^2-(3ab+bc)(b+c)^2=3a^3b+a^3c+3abc^2+ac^3+\ldots$$

$$+2a^2c^2-3ab^3-b^3c-3abc^2-bc^3-6ab^2c-2b^2c^2=$$

$$=3ab\left(a^2-b^2\right)+c\left(a^3-b^3\right)+c^3(a-b)+6abc(a-b)+2c^2\left(a^2-\ldots\right.$$

$$=(a-b)\left(3a^2b+3ab^2+a^2c+abc+b^2c+c^3+6abc+2ac^2+2bc^2\ldots\right.$$

$$=(a-b)\left(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2+3abc+2a^2b+2ab^2+4abc+c^3+\ldots\right.$$

$$=(a-b)\left[(a+b+c)(ab+bc+ca)+2a^2b+2ab^2+4abc+c^3+bc^2+\ldots\right.$$

deducem că

$$\frac{(3ab+ac)(a-b)}{4(ab+bc+ca)(b+c)^2}+\frac{(3ab+bc)(b-a)}{4(ab+bc+ca)(c+a)^2}=$$

$$=\frac{(a-b)^2\left[(a+b+c)(ab+bc+ca)+2a^2b+2ab^2+4abc+c^3+bc^2+\ldots\right.}{4(ab+bc+ca)(b+c)^2(c+a)^2}$$

$$\geq\frac{(a-b)^2(a+b+c)(ab+bc+ca)}{4(ab+bc+ca)(b+c)(c+a)^2}=\frac{(a-b)^2(a+b+c)}{4(b+c)^2(c+a)^2}.$$

Prin permutări circulare obţinem încă două relaţii similare. Rezultă u… rafinare a inegalităţii date:

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}-\frac{3(a+b+c)}{4(ab+bc+ca)}\geq$$

$$\geq\frac{a+b+c}{4}\left(\frac{(a-b)^2}{(b+c)^2(c+a)^2}+\frac{(b-c)^2}{(c+a)^2(a+b)^2}+\frac{(c-a)^2}{(a+b)^2(b+c)\ldots}\right.$$

3. $\dfrac{a^2}{b^2+c^2}+\dfrac{b^2}{c^2+a^2}+\dfrac{c^2}{a^2+b^2}\geq\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b},\quad a,b,c>0.$

Vasile

Soluţie. Avem

$$\frac{a^2}{b^2+c^2}-\frac{a}{b+c}=\frac{ab(a-b)}{(b+c)(b^2+c^2)}+\frac{ac(a-c)}{(b+c)(b^2+c^2)},$$

$$\frac{b^2}{c^2+a^2}-\frac{b}{c+a}=\frac{bc(b-c)}{(c+a)(c^2+a^2)}+\frac{ab(b-a)}{(c+a)(c^2+a^2)},$$

$$\frac{c^2}{a^2+b^2}-\frac{c}{a+b}=\frac{ac(c-a)}{(a+b)(a^2+b^2)}+\frac{bc(c-b)}{(a+b)(a^2+b^2)}$$

şi mai departe

$$\frac{ab\,(a-b)}{(b+c)\,(b^2+c^2)}+\frac{ab\,(b-a)}{(c+a)\,(c^2+a^2)}=\frac{ab\,(a-b)}{(b+c)\,(c+a)\,(b^2+c^2)\,(c^2+\ldots}$$
$$\cdot\left(c^3+ac^2+a^2c+a^3-b^3-b^2c-bc^2-c^3\right)=$$
$$=\frac{ab\,(a-b)^2\left(c^2+ac+bc+a^2+ab+b^2\right)}{(b+c)\,(c+a)\,(b^2+c^2)\,(c^2+a^2)}\geq\frac{ab\,(a-b)^2\left(c^2+ac+bc\ldots\right.}{(b+c)\,(c+a)\,(b^2+c^2)\,(c^2\ldots}$$
$$=\frac{ab\,(a-b)^2\,(b+c)\,(c+a)}{(b+c)\,(c+a)\,(b^2+c^2)\,(c^2+a^2)}=\frac{ab\,(a-b)^2}{(b^2+c^2)\,(c^2+a^2)}.$$

Obţinem următoarea rafinare a inegalităţii în discuţie:

$$\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}-\frac{a}{b+c}-\frac{b}{c+a}-\frac{c}{a+b}\geq$$
$$\geq\frac{ab\,(a-b)^2}{(b^2+c^2)\,(c^2+a^2)}+\frac{bc\,(b-c)^2}{(c^2+a^2)\,(a^2+b^2)}+\frac{ca\,(c-a)^2}{(a^2+b^2)\,(b^2+c^2)}$$

În încheiere, propunem cititorilor demonstrarea şi, eventual, rafinarea ur
inegalităţi:

4. $\dfrac{x^{n+1}}{y+z}+\dfrac{y^{n+1}}{z+x}+\dfrac{z^{n+1}}{x+y}\geq\dfrac{x^n+y^n+z^n}{2}$, $x,y,z>0$, $n\in\mathbb{N}$.

5. a, b, c fiind laturile unui triunghi, are loc inegalitatea

$$\frac{ab}{a+b-c}+\frac{bc}{b+c-a}+\frac{ca}{c+a-b}\geq a+b+c.$$

Gabriel D

Indicaţie. $\dfrac{ab}{a+b-c}-\dfrac{a+b}{2}=\ldots$ etc.

6. a, b, c fiind laturile unui triunghi, avem

$$\frac{b^2+c^2}{a^3+abc}+\frac{c^2+a^2}{b^3+abc}+\frac{a^2+b^2}{c^3+abc}\geq\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}.$$

Titu Zvonaru şi Bogd

Indicaţie. $\dfrac{b^2+c^2}{a^3+abc}-\dfrac{1}{2ab}-\dfrac{1}{2ac}=\ldots$ etc.

Bibliografie

1. **C. Lupu** - *Asupra inegalităţii lui Gerretsen*, R.M.T., 4/2006, 3-100.
2. **T. Zvonaru** - *Inegalităţi ligamentate şi neligamentate*, Arhimede, 5-6/20

CHESTIUNI METODICE

O problemă şi ... nouă soluţii

Gheorghe IUREA[1], **Gabriel POPA**[2]

În numărul 2/2007 al Recreaţiilor Matematice, **Enache Pătraşcu** a p
rezolvare problema

G133. *Fie $\triangle ABC$ echilateral şi D un punct astfel încât $BD = DC$, m*
$30°$, iar BC separă A şi D. Dacă $E \in (BD)$ cu $m(\widehat{BAE}) = 15°$, să s
$CE \perp AC$.

Soluţia autorului problemei (prezentată mai jos) recurge la o constru
toare interesantă, dar greu de găsit. Încercările de a aborda problema în
diferit au fost încununate de succes într-o măsură mai mare decât ne aş
cele ce urmează pot fi găsite nouă soluţii ale problemei, iar cititorul prob
mai observa şi altele.

Soluţia 1. Notăm cu A' simetricul lui A faţă de BC. Observăm că m
$m(\widehat{EBC}) - m(\widehat{A'BC}) = 75° - 60° = 15°$, prin urmare $\widehat{EBA'} \equiv \widehat{EAA'}$. D
patrulaterul $ABEA'$ este inscriptibil, de unde $\widehat{EA'B} \equiv \widehat{EAB}$, adică $m(\widehat{EA}$
Obţinem astfel că $\triangle EBA'$ este isoscel cu $EB = EA'$ şi de aici rezultă c
pe mediatoarea segmentului $[BA']$, deci $CE \perp BA'$. Este însă clar că B
prin urmare $CE \perp AC$ (fig. 1).

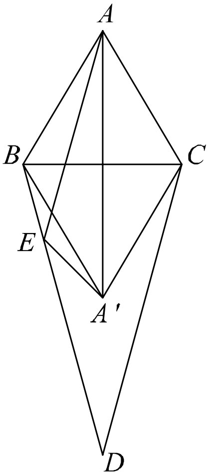


Fig. 1

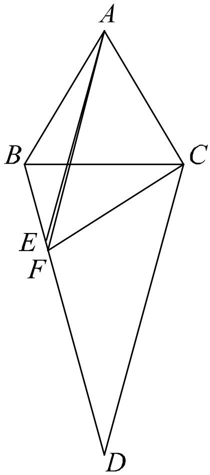


Fig. 2

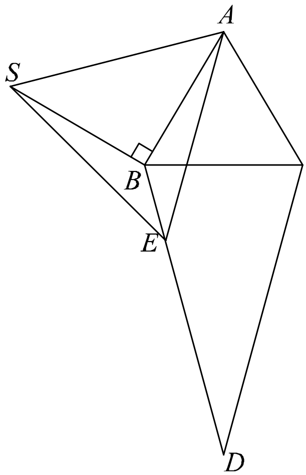


Fig. 3

Soluţia 2 (Sergiu Prisacariu, Cristian Lazăr). Fie $F \in (BD)$ a
$CF \perp AC$; atunci $m(\widehat{BCF}) = 90° - 60° = 30°$ şi cum $m(\widehat{CBF}) = 75°$
că $m(\widehat{CFB}) = 75°$. Rezultă că $CB = CF$, de unde $CA = CF$, adică $\triangle$

[1] Profesor, Liceul Teoretic "Dimitrie Cantemir", Iaşi
[2] Profesor, Colegiul Naţional, Iaşi

dreptunghic isoscel, cu $m(\widehat{CAF}) = 45^\circ$. Astfel, $m(\widehat{BAF}) = 60^\circ - 45^\circ =$
urmare $m(\widehat{BAF}) = 15^\circ$ şi astfel $F = E$, de unde concluzia problemei (fig

Soluţia 3 (Enache Pătraşcu). Considerăm punctul S pentru care
$AB \perp BS$, iar AB separă C şi S. Cum $m(\widehat{ABE}) = m(\widehat{SBE}) = 135^\circ$, d
$\triangle ABE \equiv \triangle SBE$ (L.U.L.), de unde $AE = SE$. Însă $m(\widehat{SAE}) = 45^\circ +$
deci $\triangle ASE$ este echilateral. Rezultă că $\triangle ABS \equiv \triangle ACE$ ($SA = AE$,
iar $m(\widehat{SAB}) = m(\widehat{EAC}) = 45^\circ$), prin urmare $m(\widehat{ACE}) = m(\widehat{ABS}) = 90^\circ$

Soluţia 4 (după o idee dată de **Cătălin Budeanu).** Vom calcu
$\triangle ACE$ în funcţie de $a = AB$. Mai întâi, observăm că, dacă $\{M\} = AD \cap$
că $AD = AM + MD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} + \dfrac{a}{2\operatorname{tg} 15^\circ} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} + \dfrac{a}{2\left(2-\sqrt{3}\right)} = a\left(1 + \right.$
cum AE este bisectoare în $\triangle ABD$, atunci $\dfrac{BE}{ED} = \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ şi, pe de
$AE = \dfrac{2 \cdot AB \cdot AD}{AB + AD} \cos 15^\circ = \dfrac{2a^2\left(1+\sqrt{3}\right)}{a\left(2+\sqrt{3}\right)} \cdot \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = a\sqrt{2}$. Folosind
Stewart în $\triangle BCD$, obţinem că $CE^2 \cdot BD = BC^2 \cdot DE + CD^2 \cdot BE - BE \cdot DE$
văzut mai sus că $BE = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \cdot ED$; după calcule de rutină, deducem c
În concluzie, $CA = CE = a$ şi $AE = a\sqrt{2}$ şi, din reciprova teoremei lu
rezultă că $EC \perp AC$ (fig. 4).

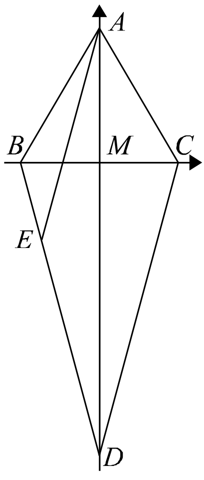


Fig. 4

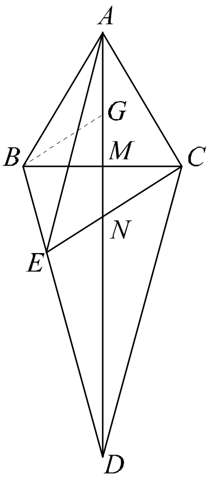


Fig. 5

Soluţia 5. Fie $\{N\} = AD \cap CE$ şi G centrul triunghiului ABC; ca
precedentă, avem că $\dfrac{BE}{ED} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$, de unde, folosind proporţiile derivat
că $\dfrac{DE}{DB} = \sqrt{3} - 1$. Aplicăm teorema lui Menelaus în $\triangle BMD$ cu transversa
C; deducem că $\dfrac{BE}{ED} \cdot \dfrac{DN}{NM} \cdot \dfrac{MC}{CB} = 1$, de unde $\dfrac{DN}{NM} = 2\left(\sqrt{3}+1\right)$. După

rutină, rezultă că $DN = \frac{a\left(3+\sqrt{3}\right)}{3}$, $DG = \frac{a\left(3+2\sqrt{3}\right)}{2}$, şi atunci $\frac{DN}{DG}$
În concluzie, $\frac{DE}{DB} = \frac{DN}{DG}$ şi din reciproca teoremei lui Thales obţinem că
prin urmare $NE \perp AC$, tocmai concluzia problemei (fig. 5).

Soluţia 6. Folosim teorema sinusurilor în triunghiurile ABE şi BCD
că $\frac{BE}{\sin 15^\circ} = \frac{AB}{\sin 30^\circ}$, respectiv $\frac{BC}{\sin 30^\circ} = \frac{BD}{\sin 75^\circ}$. Se verifică prin calcu
$\frac{\sin 15^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 75^\circ}$, deci $\frac{BE}{AB} = \frac{BC}{BD}$. Cum $AB = BC$ şi $\widehat{CBE} \equiv \widehat{CBD}$, u
$\triangle CBE \sim \triangle DBC$, prin urmare $m(\widehat{BCE}) = 30^\circ$, de unde $m(\widehat{ACE}) = 90^\circ$

Soluţia 7. Raportăm planul la un reper cu originea în M, unde M
BC; dacă $a = AB$, atunci $A\left(0, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$, $C\left(\frac{a}{2}, 0\right)$, $D\Big(0, \frac{-a\,(}{}$
Observăm că $\triangle EAD$ este isoscel, deoarece $m(\widehat{EAD}) = m(\widehat{EDA}) = 15^\circ$, p
ordonata lui E va fi media aritmetică a ordonatelor punctelor A şi D, adică
Cum punctele B, E, D sunt coliniare, avem că $\frac{y_E - y_B}{y_D - y_B} = \frac{x_E - x_B}{x_D - x_B}$, de
$\frac{a\left(1-\sqrt{3}\right)}{2}$. Panta dreptei AC este $m_{AC} = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = -\sqrt{3}$, iar panta d
este $m_{CE} = \frac{y_C - y_E}{x_C - x_E} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ şi, cum $m_{AC} \cdot m_{CE} = -1$, rezultă că $CE \perp A$

Soluţia 8. Folosim reperul din soluţia precedentă, lucrând însă cu nu
plexe. Pentru simplitate, vom considera că $AB = 2$; atunci $C(1)$, $B(-1)$
$D\left(-\left(2+\sqrt{3}\right)i\right)$. Cum $\frac{BE}{ED} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} = k$, avem $z_E = \frac{z_B + kz_D}{1+k} = (1$
Rezultă că $\frac{z_E - z_C}{z_A - z_C} = i$, prin urmare $CE \perp AC$ (şi, în plus, $CE = AC$) (

Soluţia 9. Din $\frac{BE}{ED} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$, obţinem că $\overrightarrow{CE} = \frac{\overrightarrow{CB} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}\overrightarrow{CD}}{1 + \frac{\sqrt{3}-1}{2}} =$
$= \frac{2\overrightarrow{CB} + \left(\sqrt{3}-1\right)\overrightarrow{CD}}{\sqrt{3}+1}$, deci $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{CA} = \frac{1}{\sqrt{3}+1}\Big(2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} + \left(\sqrt{3}-1\right)$
Însă $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = CB \cdot CA \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$, $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CA} = \left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}\right) \cdot \overrightarrow{CA}$
$AD \cdot AC \cdot \cos\widehat{CAD} = -\frac{\sqrt{3}+1}{2}a^2$. Astfel, $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$, de unde $CE \perp C$

Notă. Soluţia 6 sugerează următoarea extindere:

Se consideră $\triangle ABC$ isoscel ($AB = BC$) şi triunghiul BCD cu A, I
plane opuse faţă de BC, iar $m(\widehat{ABC}) = 2m(\widehat{BDC})$. Dacă $E \in (BD$
prietatea că $\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta+x)} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\sin\left(\beta+\frac{x}{2}\right)}$, unde $\alpha = m(\widehat{BAE})$, $\beta = m$
$x = m(\widehat{ABC})$, atunci $CE \perp AC$.

Problema G133 se obţine pentru $\alpha = 15^\circ$, $\beta = 75^\circ$ şi $x = 60^\circ$.

Sur les matrices magiques

Adrien REISNER[1]

Toutes les matrices considérées ici appartiennent à l'espace vectoriel ré
Cet espace est de dimension 9. Nous nous proposons d'étudier certaines
de l'ensemble des matrices 3×3 dites magiques dont la définition est la s

Définition. Une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est dite *magique* si les hu
$a_{i1} + a_{i2} + a_{i3}$, $a_{1j} + a_{2j} + a_{3j}$, $a_{11} + a_{22} + a_{33}$, $a_{31} + a_{22} + a_{13}$ sont é
$i, j : 1, 2, 3$. On appelera *somme magique* cette somme commune.

Considérons les trois matrices suivantes (évidemment magiques):

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = M^T.$$

Proposition 1. *Une matrice quelconque A est somme d'une matrice*
A' et d'une matrice antisymétrique A'', la décomposition $A = A' + A''$ éta

Démonstration. On a de façon unique: $A = A' + A''$, où $A' = \frac{1}{2}\big(A$
$A'' = \frac{1}{2}\left(A - A^T\right)$; A' est symétrique et A'' est antisymétrique (i.e. $A''^T =$

Proposition 2. *La somme de deux matrices magiques est une matric*
La transposée d'une matrice magique est magique. Enfin le produit d'u
maqique et d'un scalaire est une matrice magique. Si A est une matrice m
deux matrices A' et A'' définies plus haut sont elles mêmes magiques.

On se propose de construire toutes les matrices magiques antisymétr
effet, si $A'' = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$, alors: $-\gamma + \beta = -\alpha + \gamma = -\beta + \alpha =$
$\alpha - \gamma = \beta - \alpha = 0$. On en déduit la solution générale: $A'' = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
λ est un scalaire arbitraire.

On se propose de construire toutes les matrices magiques symétriques.
que précédemment toutes les matrices symétriques $A'_1 = (a_{ij})$ vérifiant: s
$a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$ sont de la forme suivante: $A'_1 = \mu \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
un scalaire arbitraire. Si $s \neq 0$, la forme générale des matrices symétriques
s'obtient en ajoutant $\frac{s}{3}$ aux éléments a_{ij} de la matrice précédente. On en
solution générale:

$$A' = \mu \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

[1] Centre de Calcul E.N.S.T., Paris; e-mail: *adrien.reisner@enst.fr*

où μ, ν sont des réels arbitraires. Compte tenu de la Proposition 1, immédiatement la *forme générale des matrices magiques*:

$$A = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{2}(\lambda - \mu) M - \frac{1}{2}(\lambda + \mu) N + \nu L.$$

Les trois matrices M, N et L étant linéairement indépendantes on a,

Théorème 3. *L'ensemble des matrices* 3×3 *magiques est un sous-espa de* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$*. Ce sous-espace vectoriel a pour dimension* 3*, une base étant les trois matrices* L*,* M *et* N*.*

Etant donné les deux matrices $A = \alpha M + \beta N + \gamma L$ et $B = \alpha' M +$ nous avons:

Proposition 4. *Le produit* AB *est une matrice magique si et seulem* $\alpha\beta' = \beta\alpha' = 0$*. La matrice* L *est la seule matrice (à un facteur scalair soit magique et produit de deux matrices magiques.*

Démonstration. Les relations évidentes: $M^2 = N^2 = ML = LM$ $LN = 0$, $L^2 = 3L$ et $MN + NM = 12I - 4L$ conduisent immédiatement

$$AB = (\alpha M + \beta N + \gamma L)\left(\alpha' M + \beta' N + \gamma' L\right) =$$
$$= 3\gamma\gamma' L + \begin{pmatrix} 2\beta\alpha' + 6\alpha\beta' & -4\beta\alpha' & 2\beta\alpha' - 6\alpha\beta' \\ -4\beta\alpha' & 8\beta\alpha' & -4\beta\alpha' \\ 2\beta\alpha' - 6\alpha\beta' & -4\beta\alpha' & 2\beta\alpha' + 6\alpha\beta' \end{pmatrix}$$

et par suite à l'équivalence: AB est une matrice magique $\Leftrightarrow$ $\alpha\beta' = \beta\alpha$ obtient les quatre cas suivants:

- $\alpha = \beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda L\left(\alpha' M + \beta' N + \gamma' L\right) = 3\gamma\gamma' L \quad (1)$
- $\alpha = \alpha' = 0 \quad \Rightarrow \quad (\beta N + \gamma L)\left(\beta' N + \gamma' L\right) = 3\gamma\gamma' L \quad (2)$
- $\beta = \beta' = 0 \quad \Rightarrow \quad (\alpha M + \gamma L)(\alpha' M + \gamma' L) = 3\gamma\gamma' L \quad (3)$
- $\alpha' = \beta' = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma' L(\alpha M + \beta N + \gamma L) = 3\gamma\gamma' L \quad (4)$

Les deux cas (1), (4) n'en forment qu'un seul. Les cas (2), (3) sont id un échange de matrices près. On en déduit immédiatement la deuxième Proposition 4.

Proposition 5. *Le produit d'une matrice magique par une combinais de* L *et* I *est une matrice magique.*

Démonstration. De façon évidente la matrice:

$$(\alpha M + \beta N + \gamma L)(\alpha' I + \gamma' L) = \alpha\alpha' M + \beta\alpha' N + (\gamma\alpha' + 3\gamma\gamma') L$$

est magique.

Proposition 6. $A = \alpha M + \beta N + \gamma L$ *est inversible si et seulement s De plus, dans le cas où* $\alpha\beta\gamma \neq 0$ *la matrice* A^{-1} *est elle même magique.*

Démonstration. La proposition est immédiate puisque det $(\alpha M + \beta$ $-36\alpha\beta\gamma$. Dans le cas où $\alpha\beta\gamma \neq 0$ il vient: $A^{-1} = \dfrac{1}{36}\left(\dfrac{3}{\beta}M + \dfrac{3}{\alpha}N + \dfrac{4}{\gamma}\right.$ bien une matrice magique.

Cette proposition se généralise avec le théorème suivant:

Théorème 7. *Soit $A = \alpha M + \beta N + \gamma L$ une matrice magique. Alors $n \in \mathbb{N}$ la matrice A^{2n+1} est magique. Si $\alpha\beta\gamma \neq 0$, pour tout $p \in \mathbb{N}$ $A^{-(2p+1)}$ est magique.*

Démonstration. Avec $A = \alpha M+\beta N+\gamma L$ on obtient $A^2 = 12\alpha\beta I + (3\gamma$ et la Proposition 5 permet alors par une récurrence évidente sur $n \in \mathbb{N}$ de les implications suivantes: A^{2n-1} est une matrice magique $\Rightarrow$ $A^{2n} = k$ $A^{2n}+1$ est une matrice magique. On conclut alors grâce à la proposition puisque $A^{-(2p+1)} = \left(A^{-1}\right)^{2p+1}$.

Remarques. Mis à part le cas où $\alpha\beta = 0$ – voir la Propozition 4 – le A^{2n} ne sont pas magiques.

Si $\alpha\beta = 0$ les matrices A et $A^n = 3^{n-1}\gamma^n L$ avec $n > 1$ sont magiques.

Si $\alpha\beta \neq 0$ on obtient immédiatement par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$A^{2n} = (12\alpha\beta)^n I + \frac{1}{3}\left[(3\gamma)^{2n} - (12\alpha\beta)^n\right] L$$

n'est pas magique.

$$A^{2n+1} = (12\alpha\beta)^n (\alpha M + \beta N) + \gamma (3\gamma)^{2n} L$$

est une matrice magique.

Si $\alpha\beta\gamma \neq 0$ ces mêmes formules sont vérifiées aussi pour $n < 0$.

Généralisation. Les résultats précédents peuvent être généralisés po trices magiques appartenant à l'espace vectoriel réel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considè deux sous-espaces vectoriels $S_0 = \mathcal{M}g_0 \cap \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ et $A_0 = \mathcal{M}g_0 \cap \mathrm{Asym}_n($ est l'ensemble de matrices magiques ayant une somme magique nulle e [resp. $\mathrm{Asym}_n(\mathbb{R})$] est l'ensemble des matrices symétriques [resp. antisymé $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\mathcal{M}g_n(\mathbb{R})$ étant le sous-espace vectoriel des matrices magiques on démontre que $\mathcal{M}g_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}g_0 \oplus \Delta$, où Δ est la droite engendrée par (c_{ij}) avec $c_{ij} = 1$ $(i, j : 1, \ldots, n)$ – voir le Théorème 3. De plus les sous-es toriels S_0 et A_0 admettent chacun une base formée des matrices dont les appartiennent à l'ensemble $\{0, \pm 1, \pm 2\}$.

Carrés magiques. Un cas particulier des matrices magiques A $\mathcal{M}g_n(\mathbb{R})$ est le "carré magique". Pour construire un carré magique o la condition supplémentaire: $a_{ij} \in \left\{1, 2, \ldots, n^2\right\}$. Exemples célèbres des c iques:

Le carré magique "lo-shu" attribué au philosophe chinois **K'ung Tzu** (

(VI-ème siècle avant J.C.): $\begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ est un carré magique connu pro bien avant Confucius. (voir: http://membres.lycos.fr/fusionbfr/JHM/CM

Un autre carré magique célébre est: $\begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix}$ qui appar célébre tableau (eau-forte) de **Albrecht Dürer** (1471 – 1528) intitulé (voir: http://users.skynet.be/litterature/lecture/melancholia.htm).

CONCURSURI ŞI EXAMENE

Concursul de matematică "Al. Myller"

Ediţia a VI-a, Iaşi, martie 2008

Clasa a VII-a

1. Numerele reale distincte x, y, z au propietatea că $x^3 - x = y^3 - y$
Să se arate că $x + y + z = 0$.

2. a) Să se arate că, dintre cinci numere naturale oarecare, se pot
numere cu suma divizibilă cu 3.

b) Să se arate că, dintre 17 numere naturale oarecare, se pot alege no
cu suma divizibilă cu 9.

3. Fie AD înălţimea triunghiului ascuţitunghic ABC. Considerăm m
a punctelor $X \in (AD)$ cu proprietatea că $\widehat{ABX} = \widehat{ACX}$.

a) Să se arate că mulţimea M este nevidă.

b) Dacă M conţine cel puţin două elemente, să se demonstreze că m
conţine o infinitate de elemente.

Crist

4. Fie segmentul AB şi semidreapta $(Ox$, unde $O \in (AB)$ şi $A, B \notin$
pendicularele în A şi B pe dreapta AB intersectează bisectoarele $(Oy$
unghiurilor $\widehat{AOx}$ şi $\widehat{BOx}$ în punctele M, respectiv N. Perpendiculara din
intersectează perpendiculara din B pe $(Oz$ în punctul P. Să se arate că p
N, P sunt coliniare.

Mir

Clasa a VIII-a

1. Considerăm cubul $ABCDA'B'C'D'$ şi M, N, P mijloacele muchiilo
respectiv AA'. Să se determine măsura unghiului dintre dreapta $A'C'$ şi
intersecţie a planelor (MNP) şi (BCC').

2. Fie a, b numere întregi distincte cu proprietatea că există n număr
încât $a^3 - a = b^3 - b = n$. Să se arate că $n = 0$.

3. Se dau şase puncte în plan, oricare trei necoliniare. Considerăm zece
fiecare având capetele în câte două dintre aceste puncte. Să se arate că
puţin un triunghi având ca laturi trei dintre cele zece de segmente.

4. Fie $SABC$ un tetraedru regulat. Punctele A_1, B_1, C_1 aparţin much
(SB), (SC), respectiv, astfel încât $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1A_1$. Să se arate
$(A_1B_1C_1)$ şi (ABC) sunt paralele.

Clasa a IX-a

1. Determinaţi numărul soluţiilor ecuaţiei $\dfrac{[x]}{\{x\}} = \dfrac{2007x}{2008}$.

Miha

2. Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi ecuaţia $x^6 + x^5 + 4 = y^2$.

Ioan Cuc

3. Fie $ABCDE$ un pentagon convex. Demonstraţi că

$$\frac{aria(ABC)}{aria(ABCD)} + \frac{aria(CDE)}{aria(BCDE)} < 1.$$

Dan I

4. Fie $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ două cercuri concentrice distincte şi $[AB]$ un diametru $\mathcal{C}_1$. Considerăm două puncte variabile $M \in \mathcal{C}_1$, $N \in \mathcal{C}_2$, nesituate pe drea

a) Arătaţi că există şi sunt unic determinate punctele P, Q, situate MA, respectiv MB, astfel încât N să fie mijlocul segmentului $[PQ]$.

b) Arătaţi că suma $AP^2 + BQ^2$ este constantă, unde P, Q sunt defini

Mihai Piticari, Miha

Clasa a X-a

1. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC şi A_1 punctul diametral opus lui A. Notăm cu G, G_1 centrele de greutate al triunghiuril A_1BC şi cu P intersecţia dreptelor AG_1 şi OG. Să se arate că $\frac{PG}{PO} = \frac{2}{3}$.

Gabriel Popa, Paul G

2. Să se arate că nu există numere întregi a, b, c astfel încât $(a+bi\sqrt{3})^{17}$

Dorin Andrica, Miha

3. Să se determine poligoanele convexe, inscriptibile, cu proprietate triunghi determinat de trei dintre vârfurile acestora este isoscel.

Gheor

4. Fie r un număr real cu proprietatea că $\left(2^n r - \frac{1}{4}, 2^n r + \frac{1}{4}\right) \cap \mathbb{Z} \neq$ orice $n \in \mathbb{N}$. Să se arate că r este număr întreg.

Cipria

Clasa a XI-a

1. Fie $A \in M_4(\mathbb{R})$ astfel încât $det(A^2 - I_4) < 0$. Să se arate că există $|\alpha| < 1$, astfel încât matricea $A + \alpha I_4$ să fie singulară.

Mih

2. Fie $A, B, S \in M_3(\mathbb{C})$, S fiind o matrice nesingulară încât $B = S^{-1}$ arate că $\mathrm{tr}(B^2) + 2\,\mathrm{tr}(B^*) = (\mathrm{tr}(A))^2$.

Mih

3. Fie $a > 1$ un număr real. Pentru fiecare număr natural nenul n, $k($ mai mic număr natural k pentru care $(n+1)^k \geq an^k$. Să se calculeze $\lim_{n\to}$

Necul

4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe $\mathbb{Q}$, cu proprietatea că $f(x) <$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}^*$. Să se demonstreze că f este strict crescătoa

Gabriel Mârşanu, Miha

Clasa a XII-a

1. Se consideră şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n = \int_1^n \frac{dx}{(1+x^2)^n}$. Calculaţi $\lim_{n\to\infty} n \cdot 2^n \cdot a$

Bogda

2. Determinaţi numerele $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ şi $a \in \mathbb{R}$ pentru care polinomul X
are un divizor de foma $X^2 + \alpha X + \beta$ cu $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$.

Miha

3. Determinaţi funcţiile crescătoare $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ pentru care $\left|\int\limits_0^1 f\,(x\right.$
≤ 2008, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Miha

4. Fie A un inel finit în care numărul elementelor inversabile este egal c
elementelor nilpotente. Să se arate că numărul elementelor inelului este
lui 2. (Un element $x \in A$ se numeste *nilpotent* dacă există k natural cu x

Dinu Şe

Concursul de matematică "Florica T. Câmp

Etapa judeţeană, 16-17 februarie 2008

Clasa a IV-a

1. *a*) Găsiţi regula de formare a şirului 3, 8, 13, ... şi scrieţi termenul
31.

b) După un concurs de matematică, un elev nu şi-a amintit rezultatul
leme. Totuşi, şi-a adus aminte că numărul are şase cifre, începe cu 1 şi c
cifră se mută la sfârşit, atunci numărul obţinut va fi de trei ori mai mar
iniţial. Care a fost rezultatul problemei?

2. Mergând cu maşina, un şofer observă la ora 09:10 că pe kilomet
bord apare numărul 12921. La ora 11:00, pe kilometraj apare următorul n
coincide cu răsturnatul său. La ce oră va observa şoferul din nou un astfel
presupunând că se deplasează cu viteză constantă?

Gabriel Mîrşanu, Recreaţii Matemati

3. Pe o foaie este scris numărul $A = \overline{1234xy}$. Cinci elevi joacă urm
fiecare dintre primii patru citeşte numărul, îşi fixează câte o regulă de tr
a lui şi scrie pe tablă numărul transformat. Al cincilea, care cunoaşte do
patru cifre ale lui A, trebuie să ghicească regula fiecăruia dintre colegi şi
să afle numărul. Ştiind că primii patru au scris pe tablă numerele 12350
123460, 120000, se cere:

a) Care sunt regulile de transformare observate de al cincilea elev?

b) Poate al cincilea elev să afle cu exactitate numărul? Care sunt valor
ale numărului A?

Petr

Clasa a V-a

1. La un concurs se acordă cinci puncte pentru premiul I, trei puncte
doilea şi două puncte pentru al treilea. Aflaţi numărul de premii primit
unei şcoli, ştiind că au obţinut în total 25 de puncte şi cel puţin câte două
fiecare categorie.

2. Un număr natural se numeşte *simpatic* dacă este format din cifr
nenule, a căror sumă se divide cu 10.

a) Determinaţi cel mai mic şi cel mai mare număr simpatic.

b) Precizaţi câte numere de trei cifre sunt simpatice şi divizibile cu 4.

3. Dacă $a \in \mathbb{N}^*$ şi $b \in \mathbb{N}^*$, notăm $a*b = a^b + b^a$ (de exemplu, $3*2 = 3^2$ -

a) Determinaţi numărul $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $1*1 + 2*1 + 3*1 + \cdots +$

b) Comparaţi numerele $3*18$ şi $2*27$.

c) Aflaţi ultima cifră a numărului $2*(2*2008)$.

Adrian

Clasa a VI-a

1. Un părinte îşi împarte averea astfel: primul copil primeşte 10 0 o cincime din rest; al doilea copil primeşte 20 000 lei plus o cincime din al treilea copil primeşte 30 000 lei plus o cincime din noul rest şi aşa m Să se afle suma împărţită de părinte, precum şi numărul copiilor, ştiind moşteniri egale.

Mihai Gârtan, Recreaţii Matemati

2. Cătălin este faianţar şi trebuie să paveze podeaua unei încăperi î dreptunghi având lungimea de 3 metri şi lăţimea de 2 metri, folosind dal cu latura de 50 centimetri. El are la dispoziţie 6 dale roşii, 6 albastre, 6 g verzi, iar cerinţa este ca orice două dale de aceeaşi culoare să nu se ating

a) Indicaţi un exemplu de pavare corectă.

b) Cătălin sparge o dală roşie şi primeşte în loc una verde. Poate acu în aşa fel încât să respecte cerinţa? Justificaţi răspunsul.

Do

3. Un număr natural N se scrie în baza 10 folosind 6 cifre nenule ş Se ştie că, oricum am schimba ordinea cifrelor numărului N, numărul N numerele obţinute sunt toate multipli de p, unde p este un număr prim.

a) Determinaţi câte numere se pot obţine din N prin schimbarea ordi

b) Dacă $p = 3$, daţi exemplu de un număr N care să verifice condiţiile

c) Dacă $p \neq 3$, demonstraţi că nu există numere N care să verifice co enunţ.

R

Clasa a VII-a

1. Se consideră şirurile definite prin: $a_1 = 91204$; $a_2 = 9012004$; $a_3 =$ … ; $b_1 = 91504$; $b_2 = 9015004$; $b_3 = 900150004$; …

a) Aflaţi numărul de cifre al sumei $a_n + b_n$, unde $n \in \mathbb{N}^*$;

b) Arătaţi că $\sqrt{a_n + b_n} \notin \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}^*$;

c) Demonstraţi că $\sqrt{a_n} \in \mathbb{Q}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, însă $\sqrt{b_n} \notin \mathbb{Q}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Constantin Chirilă, Recreaţii Matemati

2. Două blocuri de locuinţe care au înălţimea de 21 m fiecare sunt un teren plat. La ora 10, umbra primului bloc proiectată pe cel de-al înălţimea de 15 m, iar umbra celui de-al doilea bloc pe pământ are lung m. Ce înălţime are umbra primului bloc pe cel de-al doilea la ora 11, d celui de-al doilea bloc pe pământ este de 31,50 m?

3. Pardoseala unei băi de dimensiuni $L = 45$ dm, $l = 35$ dm este acoper de gresie în formă de pătrat cu latura de 1 dm. Dacă se îndepărtează cât

din cele patru colţuri, se poate acoperi suprafaţa rămasă cu plăci dreptun
dimensiuni 1 dm × 2 dm?

Clasa a VIII-a

1. *a*) Fie suma

$$S = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1^2-1}}} + \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{3^2-1}}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2007+\sqrt{2007^2-}}}$$

Aflaţi cel mai mic număr natural nenul n pentru care numărul $S \cdot \sqrt{n}$ est

b) Dacă a este lungimea ipotenuzei şi b, c lungimile catetelor unui triu tunghic, demonstraţi că $2a > b + c + h_a$, unde h_a este lungimea înălţimii zătoare ipotenuzei.

Claudiu Şte

2. Câte plane pot fi duse la egală distanţă de patru puncte necopla Justificaţi răspunsul.

3. În cetatea NN a numerelor naturale se organizează o mare petrecere numărului 0. La poarta castelului bate unul din locuitorii cetăţii.

– Sunt numărul 83. Îmi permiteţi să intru la petrecere? întreabă aces

– La petrecere sunt invitate doar numerele fantastice, îi răspunse o voc cealaltă.

– Dar ce înseamnă număr fantastic? întreabă numărul 83.

– Să vă explic, spune vocea stranie. Dacă n este un număr natural decât 1 şi notăm $A_n = \{x \in \mathbb{N} \mid (x, n) \neq 1\}$, numărul n se numeşte fan pentru orice două numere x, y aparţinând mulţimii A_n, suma lor $x + y$ element al mulţimii A_n. Aţi priceput?

– Am înţeles, răspunde lămurit vizitatorul.

a) Stabiliţi voi dacă numărul 83 este invitat la petrecere. Aceeaşi cerin numărul 2008.

b) Găsiţi toate numerele pare invitate la petrecere.

Alexandru

Etapa interjudeţeană, 22-23 martie 2008

Clasa a IV-a

1. George este mai mic decât Andrei cu o pătrime din vârsta lui An un an, Andrei va fi mai mare decât George cu o pătrime din vârsta lui vârstă au acum Andrei şi George?

2. Se consideră împărţirea:

```
* * * * * |
* *
= = * *
    * *
    = = *
        *
        =
```

a) Daţi un exemplu de astfel de împărţire.

b) Câte împărţiri de acest tip se pot efectua? Justificaţi răspunsul!

3. Un elev de clasa a IV-a are în total 100 de fructe, nuci şi mere. El schimbă cu un prieten câte nouă nuci pentru două mere, terminând toate nucile după un număr de schimburi şi rămânând în final cu 44 de mere.

a) Câte nuci a avut iniţial elevul?

b) Câte schimburi s-au făcut şi câte mere a primit de la prietenul său?

Clasa a V-a

1. Un număr se numeşte fiul unui alt număr dacă este format cu d
cifrele numărului iniţial, numit tată. Dintre numerele de trei cifre cu ulti
aflaţi toţi taţii cu 891 mai mari decât unul dintre fiii lor.

2. Se consideră următorul tablou cu 200 de linii.

a) Ce număr se află în mijlocul ultimei linii a tabloului?

b) Câte numere conţine tabloul?

c) De câte ori apare numărul 100 în acest tablou?

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 2 & & & \\ & & 2 & 4 & 2 & & \\ & 2 & 4 & 6 & 4 & & \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 6 & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \end{array}$$

3. La concursul "Florica T. Câmpan", etapa locală, au luat parte to
clasa a V-a dintr-o şcoală. Elevii din clasa a V-a D au obţinut următoarele
prima problemă au rezolvat-o 9 elevi, a doua problemă au rezolvat-o 7 ele
problemă au rezolvat-o 5 elevi, a patra problemă au rezolvat-o 3 elevi, ia
problemă a rezolvat-o un singur elev. Toţi elevii clasei, în afară de Petrică,
acelaşi număr de probleme, în timp ce Petrică a rezolvat cu una mai mult d
săi. Poate să fie el premiant al concursului, dacă premianţii concursului au
care au rezolvat 4 sau 5 probleme?

Clasa a VI-a

1. Se consideră mulţimea $A = \left\{\frac{2008}{7}, \frac{2009}{8}, \frac{2010}{9}, \ldots\right\}$. Determinaţi
mulţimii $A \cap \mathbb{N}$.

2. Fie dreapta AB, O un punct între A şi B şi, de aceeaşi parte
semidreptele $[OA_1$, $[OA_2, \ldots, [OA_n$, în această ordine, astfel încât $m(\widehat{A\ldots}$
$m(\widehat{A_1OA_2}) = a+2, \ldots, m(\widehat{A_nOB}) = a+2n$, unde $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. D
numărul unghiurilor şi măsura fiecăruia dintre ele.

3. *a*) Arătaţi că, oricum am alege cinci numere naturale, există prin
cu suma divizibilă cu 3.

b) Arătaţi că, oricum am alege 25 de numere naturale, există printre e
suma divizibilă cu 9.

Clasa a VII-a

1. *a*) Se consideră numerele 1, $3-\sqrt{2}$, $3+\sqrt{2}$ şi 5. După un pas, fie
se înlocuieşte cu media aritmetică a celorlaltor trei. Este posibil ca, după
de paşi, să obţinem numerele $5-2\sqrt{2}$, 3, $3+2\sqrt{2}$ şi 2?

b) Să se arate că dacă numerele a, b şi $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ sunt raţionale, atunc
sunt raţionale.

2. Fie ΔABC, $AB < AC$ şi $D \in (AC)$. Fie AE bisectoarea unghi
$E \in (BD)$, F mijlocul lui $[AD]$, $\{O\} = AE \cap BF$, $\{G\} = DO \cap AB$. Să
$GD \parallel BC \Leftrightarrow AB = CD$.

Daniela Tamaş, Recreaţii Matemati

3. Ionel şi Gigel au trasat cu creta pe parchet, în două colţuri diferi
camere, câte un segment de dreaptă cu capetele la marginea pereţilor

două triunghiuri dreptunghice. Dacă cele două triunghiuri au aceeaşi ari
perimetru, să se arate că ele sunt congruente.

Clasa a VIII-a

1. Să se afle valoarea fracţiei $\dfrac{x+y}{x-y}$, ştiind că $0<x<y$ şi $(x-y)(3x-$

2. Doi puşti au un cornet transparent care, ca şi lichidul omogen pentru
conţinut în el, au forme de piramide patrulatere regulate de vârf V şi baze X
respectiv $A_1A_2A_3A_4$, $A_i\in(VX_i)$, $i=\overline{1,4}$. Deoarece, din motive care
sează aici, nu-l pot îngheţa în poziţie verticală, ei înclină cornetul, fără
astfel încât noua suprafaţă a lichidului este $A_1'A_2'A_3'A_4'$, $A_i'\in(VX_i)$,
$(A_1A_2A_3)\cap(A_1'A_2'A_3')=M_1M_2$, unde $M_1\in(A_2A_3)$, $M_2\in(A_1A_4)$, ia
A_1A_2.

a) Arătaţi că patrulaterul $A_1'A_2'A_3'A_4'$ este trapez isoscel.

b) Cum vor controla cei doi puşti înclinarea cornetului, înainte de a
îngheţat, pentru ca, după aceea, planul (VM_1M_2) să împartă îngheţata î
egale, ştiind că pot să măsoare doar ariile suprafeţelor $A_1A_2A_2'A_1'$ şi A_3A

Claudiu Şte

3. Se dau zece numere naturale nenule care au suma egală cu 100. D
că putem alege trei dintre numerele date care să poată fi lungimile lat
triunghi.

Adrian Zanoschi, Recreaţii Matemati

Concursul "Student pentru o zi"

prezentare de *Cătălin ŢIGĂERU*[1]

Începând din acest an, Universitatea "Ştefan cel Mare" din Suceava o
în lunile martie şi aprilie, suita de concursuri care poartă denumirea generi
pentru o zi. Concursurile se adresează elevilor de clasa a XII-a şi se de
acele discipline al căror studiu este aprofundat în facultăţile Universităţii
matematică a avut loc în ziua de 9 martie şi a constat în rezolvarea a patr
în timp de trei ore, programa fiind anunţată în prealabil. Au participat
de la câteva colegii renumite din judeţele Neamţ, Botoşani şi Suceava. Pr
şi III au fost în valoare de 500, 300, respectiv 200 de lei. Câştigătorii ac
ediţii sunt următorii:

Premiul I – **Cepoi Alexandru**, C.N. "Ştefan cel Mare", Suceava
Premiul II – **Bozianu Rodica**, C.N. "A. T. Laurian", Botoşani
Premiul III – **Brăescu Lucian**, C.N. "Mihai Eminescu", Botoşani
Problemele date la concurs au fost următoarele:

Problema 1. Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

[1] Lector dr., Universitatea "Ştefan cel Mare", Suceava

a) Arătaţi că funcţia $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $F(x) = 2\sqrt{x}(\ln x - 2)$, este o
pentru funcţia f.

b) Demonstraţi că orice primitivă G a funcţiei f este crescătoare pe [1

c) Aflaţi aria suprafeţei cuprinse între graficul lui f, axa Ox şi dreptele
$x = \frac{1}{e}$ şi $x = e$.

Subiect propus pentru Bacala

Problema 2. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel de caracteristică 3 ($3x = 0$, $\forall x \in A$
un element oarecare. Fie $M = \{x \in A \mid x^3 = ax = xa\}$ şi $b \in M$ cu prop
b comută cu orice element din A.

a) Demonstraţi că $b - x \in M$, oricare ar fi $x \in M$.

b) Să se arate că, dacă $a \in A$ are în plus proprietatea că există $n \in$
care $a^n = 1$, atunci $x + (b - x)^{2n+1} \in M$, oricare ar fi $x \in M$.

Ion Bursuc

Problema 3. Dacă $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ este funcţia continuă, atunci

$$\int_0^1 x\left(f(x) + f(1-x)\right) dx = \int_0^1 f(x)\, dx.$$

Dumitru Crăciun,

Problema 4. Se consideră numerele prime distincte p şi q, astfel încât
cu $r \geq 3$ prim.

a) Arătaţi că $p - q \mid p^q - q^p$ dacă şi numai dacă $p - q \mid q^{p-q} - 1$.

b) Demonstraţi că $p - q \mid p^q - q^p$ dacă şi numai dacă $q^2 \equiv 1 \pmod{(p -$

Cătălin Ţigăeru

Prima problemă fiind una cunoscută, prezentăm doar soluţiile celorlal

Problema 2. *a*) Observăm că $(\alpha - x)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2 x + 3\alpha x^2 - x^3 =$
$\alpha^3 - ax$. Cum $\alpha \in M$, atunci $\alpha^3 = \alpha a = a\alpha$, de unde deducem că (
$a\alpha - ax = \alpha a - xa = a(\alpha - x) = (\alpha - x)a$.

b) Demonstrăm prin inducţie că $x^{2m+1} = a^m x$, pentru orice $x \in M$
Pentru $m = 1$, relaţia este adevărată. Presupunem că, dacă $x \in M$, atun
$a^{k-1}x$; atunci $x^{2k+1} = x^{2k-1}x^2 = a^{k-1}x\, x^2 = a^{k-1}x^3 = a^{k-1}ax = a^k$
încheie demonstaţia afirmaţiei iniţiale.

Deoarece $\alpha - x \in M$, atunci pentru orice număr $m \in \mathbb{N}^*$, rezultă că $(\alpha -$
$a^m(\alpha - x)$. Luând $m = n$, obţinem că $(\alpha - x)^{2n+1} = \alpha - x$, de unde $x + (\alpha$
$\alpha \in M$, ceea ce trebuia demonstrat.

Problema 3. Făcând o schimbare de variabilă, se arată că $\int\limits_a^b f(x)\, dx$
$= \int\limits_a^b f(a + b - x)\, dx$, $\forall f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuă. Aplicând de două ori a
tat, obţinem că $\int\limits_0^1 f(x)\, dx = \int\limits_0^1 f(1-x)\, dx$, respectiv $\int\limits_0^1 x\left(f(x) + f(1 -\right.$
$\int\limits_0^1 (1-x)\left(f(x) + f(1-x)\right) dx$, de unde $2\int\limits_0^1 x\left(f(x) + f(1-x)\right) dx = \int\limits_0^1 f($

$\int\limits_0^1 f(x)\,dx$. Deducem că $2\int\limits_0^1 x\,(f(x)+f(1-x))\,dx = 2\int\limits_0^1 f(x)\,dx$, adică t
cluzia problemei.

Problema 4. *a*) Putem scrie că $p^q - q^p = (p-q)\left(p^{q-1} + qp^{q-2} + \cdots\right.$
$q^q\left(q^{p-q}-1\right)$; deoarece $(p-q, q^q) = 1$, deducem că $p-q \mid p^q - q^p$ dacă şi n
$p-q \mid q^{p-q}-1$.

b) Rezultatul de la punctul *a*) se reformulează astfel: $p-q \mid p^q - q^p$ dac
dacă $q^{p-q} \equiv 1 \pmod{(p-q)}$. Dar $(p-q, q) = 1$, deci $q^{\varphi(p-q)} \equiv 1$ (m
(teorema lui Euler); deoarece $\varphi(p-q) = \varphi(2r) = r-1$, deducem că
$(\mathrm{mod}\,(p-q))$ şi $q^{2r} \equiv 1 \pmod{(p-q)}$. Dar $(r-1, 2r) = 2$, deci $p-q \mid p^q$
şi numai dacă $q^2 \equiv 1 \pmod{(p-q)}$.

Particularizând, se pot obţine o serie de probleme interesante; iată câtev
$34 \mid 67^{101} - 101^{67}$, $34 \mid 137^{103} - 103^{137}$, $22 \mid 881^{859} - 859^{881}$, $6 \mid 2011^{2017}$ -

---

Recreaţii ... matematice

1. La data de 15 ianuarie 1883 a apărut primul număr al revistei *Re*
inţifice (1883–1888). În anul acesta, 2008, se împlinesc 125 de ani de
acesteia.

Scrieţi 2008 folosind numărul 125 şi (numai) operaţiile de adunare şi
Care este numărul maxim de operaţii cu care puteţi face această scriere
minim? (Nu se acceptă termeni nuli!)

2. Se dau trei cifre şi un rezultat. Indicaţi operaţiile necesare pentru
egalitatea!

$$1 \quad 1 \quad 1 = 8$$
$$2 \quad 2 \quad 2 = 8$$
$$3 \quad 3 \quad 3 = 8$$
$$4 \quad 4 \quad 4 = 8$$
$$5 \quad 5 \quad 5 = 8$$
$$6 \quad 6 \quad 6 = 8$$
$$7 \quad 7 \quad 7 = 8$$
$$8 \quad 8 \quad 8 = 8$$
$$9 \quad 9 \quad 9 = 8.$$

Notă. Răspunsurile pot fi găsite la pag. 160.

Soluţiile problemelor propuse în nr. 2 / 20

Clasele primare

P.134. *De la apartamentul meu cobor 7 etaje, apoi urc 4 etaje şi obs la etajul 9. La ce etaj locuiesc?*
(*Clasa I*) **Dragoş Iacob,**

Soluţie. $9+(7-4)=9+3=12$. Eu locuiesc la etajul 12.

P.135. *În trei vase sunt 36 nuci. Dacă din primul vas se iau 3 nu treilea o nucă şi se pun în al doilea vas, atunci în fiecare vas va fi acelaş nuci. Câte nuci au fost la început în fiecare vas?*
(*Clasa I*) **Înv. Rica Bucăt**

Soluţie. Din $36=12+12+12$ obţinem: în primul vas erau $12+3=$ al doilea vas $12-3-1=8$ nuci, iar în al treilea vas $12+1=13$ nuci.

P.136. *Aflaţi vârsta tatălui meu, ştiind că este un număr cuprins într dublul lui între 73 şi 77, iar triplul lui este cuprins între 112 şi 118.*
(*Clasa a II-a*) **Iurie Juc,**

Soluţie. Numerele cuprinse între 35 şi 41 sunt 36, 37, 38, 39 şi 40. N nu verifică a doua condiţie, iar numărul 37 nu verifică a treia condiţie. N verifică toate condiţiile, iar dacă vârsta este mai mare ca 38, atunci dub depăşeşte pe 77. Tatăl are 38 ani.

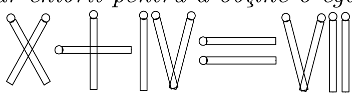
P.137. *Dorin, Oana şi Claudia se pregătesc pentru Concursul "Floric pan". Oana a rezolvat 5 probleme. Dorin a rezolvat un număr de proble faţă de Oana, egal cu numărul de probleme rezolvate în plus de Oana faţă Câte probleme au rezolvat împreună cei trei copii?*
(*Clasa a II-a*) **Inst. Maria**

Soluţie. Cei trei copii au rezolvat împreună $5+(5+a)+(5-a)=15$

P.138. *Doi taţi şi trei fii au împuşcat fiecare câte un iepure. Când i-a au văzut că au doar patru iepuri. De ce?*
(*Clasa a III-a*) **Inst. Elena**

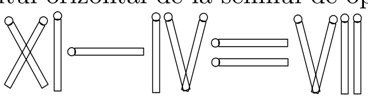
Soluţie. Echipa de vânători este formată din doi feciori, tatăl lor şi bu doi feciori.

P.139. *Mutaţi un singur chibrit pentru a obţine o egalitate:*



(*Clasa a III-a*) **Nicolae Ivăşchescu**

Soluţie. Mutăm chibritul orizontal de la semnul de operaţie plus şi o



P.140. *Descoperă regula de completare a jetoanelor*

10	11	12	13	14	...	98	99
0	1	2				72	81

şi calculează câte numere diferite sunt scrise pe aceste jetoane pe locurile
(*Clasa a III-a*) **Lenuţa Zaharia, e**

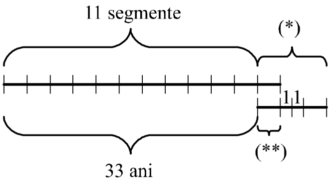
Soluţie. Regula este dată de: $1 \times 0 = 0$, $1 \times 1 = 1, \ldots, 9 \times 9 = 81$.
diferite scrise pe locurile de jos sunt generate de produsele:

$1 \times 0, 1 \times 1, 1 \times 2, \ldots, 1 \times 9$	10 numere
$2 \times 5, 2 \times 6, \ldots, 2 \times 9$	5 numere
$3 \times 5, 3 \times 7, 3 \times 8, 3 \times 9$	4 numere
$4 \times 5, 4 \times 7, 4 \times 8, 4 \times 9$	4 numere
$5 \times 5, 5 \times 6, \ldots, 5 \times 9$	5 numere
$6 \times 7, 6 \times 8, 6 \times 9$	3 numere
$7 \times 7, 7 \times 8, 7 \times 9$	3 numere
$8 \times 8, 8 \times 9$	2 numere
9×9	1 număr.

În total sunt scrise 37 numere diferite.

P.141. *Fiul observă că, atunci când îi mai trebuia un an până la vârstei din prezent, tatăl avea vârsta de 12 ori mai mare decât a sa, iar câ 11 ani, vârsta lui va fi de 4 ori mai mică decât a tatălui. Să se afle vârs prezent.*
(*Clasa a IV-a*) **Petru As**

Soluţie. Diferenţa dintre vârsta tatălui şi vârsta fiului este $4 \times 11 - 1$
Figurarea mărimilor din problemă:



(*) – vârsta fiului în prezent
(**) – vârsta fiului când mai avea un an p
jumătatea vârstei din prezent.

Valoarea unui segment este $33 : 11 = 3$ ani. Vârsta fiului în prezent est
$2 = 8$ ani.

P.142. *Paginile unei cărţi sunt numerotate de la 1 la 336. Din aceas rup, la întâmplare, 111 foi. Să se arate că:*

a) *suma numerelor de pe foile rămase nu se împarte exact la 10;*

b) *produsul numerelor de pe foile rămase se împarte exact la 3.*

(*Clasa a IV-a*) **Maria Frangoi, e**

Soluţie. *a*) În total cartea are $336 : 2 = 168$ foi. Numărul foilor r
$168 - 111 = 57$. Suma numerelor de pe fiecare foaie este un număr im
unui număr impar de numere impare este un număr impar, deci nu se poa
exact la 10.

b) În şirul 1, 2, 3,…, 336 avem 112 numere care se împart exact la
sunt: 1×3, 2×3, $3 \times 3, \ldots, 112 \times 3$. Pe paginile celor 111 foi putem av
111 numere care se împart exact la 3. Pe paginile rămase vom întâlni c
număr care se împarte exact la 3, deci şi produsul numerelor se împarte e

P.143. *Aşezaţi numerele 2, 3, 4, ..., 10 în pătratul alăturat ast-fel încât, pe fiecare linie, suma numerelor din primele două casete să fie egală cu numărul din ultima casetă. În câte moduri pot fi aşezate aceste numere?*

(*Clasa a IV-a*) **Ionela Bărăgan, e**

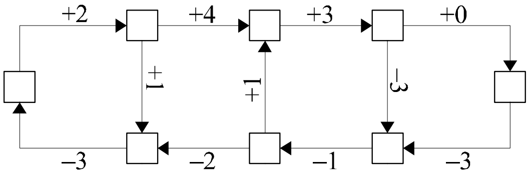
Soluţie. Suma numerelor de pe primele două coloane este egală cu suma numerelor de pe ultima coloană. Suma tuturor numerelor este 54, deci suma numerelor de pe ultima coloană este 27. Singura situaţie care satisface condiţia de pe ultima coloană este $8+9+10=27$. Un exemplu de aşezare este prezentat alăturat. Numerele 8, 9 şi 10 pot fi $3\times 2\times 1=6$ moduri pe ultima coloană. Deoarece

$$\begin{cases} 2+6=6+2=8 \\ 4+5=5+4=9 \\ 3+7=7+3=10 \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} 3+5=5+3=8 \\ 2+7=7+2=9 \\ 4+6=6+4=10 \end{cases},$$

înseamnă că avem $(8\times 2)\times 6=96$ moduri de aşezare a celor 9 numere.

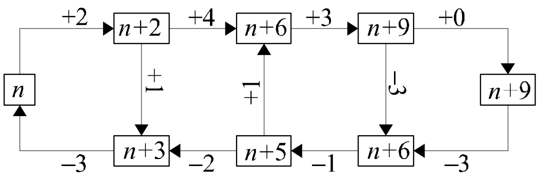
Clasa a V-a

V.81. *Demonstraţi că putem completa cu numere naturale într-o in moduri căsuţele libere din figura de mai jos, astfel încât să se poată efe operaţiile indicate:*

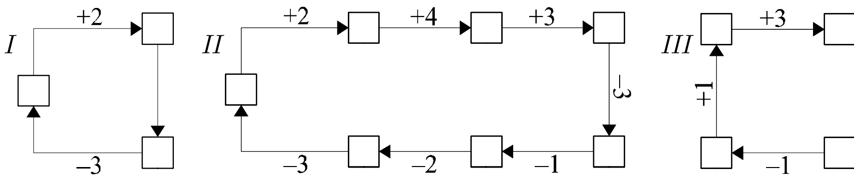


Amalia Cantemir, e

Soluţie.



Notă. Explicaţia este aceea că "schema" se poate descompune în cât "nule", în sensul că suma numerelor care sunt scrise pe traseu şi care se egală cu suma numerelor care se scad:



V.82. *Într-o fermă sunt găini, oi şi vaci, în total 324 de picioare şi impar de capete:*

a) Să se arate că în fermă nu pot fi 101 *găini.*

b) Să se arate că numărul oilor nu poate fi egal cu numărul vacilor.

Petru As

Soluţie. *a*) Notăm cu g, o, v numărul găinilor, oilor, respectiv vacilor. $2g + 4o + 4v = 324$, de unde $g + 2(o+v) = 162$, deci g trebuie să fie num

b) Cum $g + o + v$ este număr impar, iar g este par, rezultă că $o + v$ e impar, prin urmare o şi v au în mod necesar parităţi diferite.

V.83. *Să se demonstreze că* $13 \mid \overline{abc}$ *dacă şi numai dacă* $13 \mid 3 \cdot \overline{ab} -$

Otilia Nemeş, Oc

Soluţie. Avem:

$$13 \mid \overline{abc} \Leftrightarrow 13 \mid 10 \cdot \overline{ab} + c \Leftrightarrow 13 \mid 13 \cdot \overline{ab} - \left(10 \cdot \overline{ab} + c\right) \Leftrightarrow 13 \mid 3 \cdot \overline{ab}$$

V.84. *Determinaţi cel mai mic şi cel mai mare număr natural de* 9 *divizibile cu* 90 *şi având suma cifrelor* 90.

Carmen Daniela Tama

Soluţie. Un număr cu suma cifrelor 90 este oricum divizibil cu 9; divizibil şi cu 10, el trebuie să se termine în 0. Cel mai mare număr cu pr dorită va fi $\underbrace{99\ldots9}_{10}\underbrace{00\ldots0}_{80}$, iar cel mai mic $1\underbrace{00\ldots0}_{78}8\underbrace{99\ldots9}_{9}0$.

V.85. *Fie* $a, b \in \mathbb{N}$*; să se arate că dacă ultima cifră a numărului* $a^2 +$ *atunci ultima cifră a lui* $(a+b)^2$ *este tot* 9*. Reciproca este adevărată?*

Ioan Săcăleanu

Soluţie. Ultima cifră a unui pătrat perfect poate fi 0, 1, 4, 5, 6 sa $U\left(a^2+b^2\right) = 9$, obligatoriu $U\left(a^2\right) = 0$, $U\left(b^2\right) = 9$ (sau invers) sau U $U\left(b^2\right) = 5$ (sau invers). În primul caz , vom avea $U(a) = 0$, $U(b) \in$ invers), deci $U(a+b) \in \{3,7\}$ şi atunci $U\left((a+b)^2\right) = 9$. În al doilea caz $U(a) \in \{2,8\}$, $U(b) = 5$ (sau invers), deci $U(a+b) \in \{3,7\}$ şi din nou $U\left((a+b)^2\right) = 9$.

Reciproca este falsă; de exemplu, pentru $a = 2$, $b = 1$ avem că $(a+b)$ $a^2 + b^2 = 5$.

V.86. *a) Să se rezolve în numere naturale ecuaţia* $x^2 + y^2 = 625$.

b) Să se arate că ecuaţia $x^2 + y^2 = 2007$ *nu are soluţii în* $\mathbb{N}^2$.

Valerica B

Soluţie. *a*) Scădem din 625, pe rând, fiecare pătrat perfect care nu-l rezultatul este tot pătrat perfect în cazurile $625 - 49 = 576$, $625 - 225 =$ $400 = 225$ şi $625 - 576 = 49$. Obţinem soluţiile $(x, y) \in \{(7, 24); (15, 20); (2$

b) Un pătrat perfect dă la împărţirea prin 4 fie restul 0, fie restul 1, y^2poate fi M_4, $M_4 + 1$ sau $M_4 + 2$. Cum $2007 = M_4 + 3$, ecuaţia dată nu în $\mathbb{N}^2$.

V.87. *Să se arate că* $7^{51} > 3^{89}$.

Nela Cice

Soluţia 1 (a autoarei). Avem:

$$7^{51} = \left(7^3\right)^{17} = 343^{17} > 342^{17} = (9 \cdot 38)^{17} > (9 \cdot 36)^{17} = 3^{68} \cdot 2^{34} =$$

$$= 3^{68} \cdot 2^2 \cdot \left(2^8\right)^4 > 3^{68} \cdot 3 \cdot 256^4 > 3^{69} \cdot 243^4 = 3^{69} \cdot \left(3^5\right)^4 = 3^{8}$$

Soluţia 2 (M. Haivas). Inegalitatea se scrie echivalent

$$\left(7^4\right)^{\frac{51}{4}} > \left(3^7\right)^{\frac{89}{7}} \Leftrightarrow (2401)^{\frac{51}{4}} > (2187)^{\frac{89}{7}},$$

ceea ce este evident adevărat deoarece $2401 > 2187$, iar $\dfrac{51}{4} > \dfrac{89}{7}$.

Clasa a VI-a

VI.81. *Ştiind că* $13 \mid 2a + 3b + 4c + 5d$, *arătaţi că* $13 \mid 43a + 45b + 4$
$13 \mid 46a + 30b - 64c - 54d$ *(*$a, b, c, d \in \mathbb{N}$*).*

Norbert-Traian Ioniţă,

Soluţie. Avem:
$13 \mid 2\,(2a + 3b + 4c + 5d) + 13\,(3a + 3b + 3c + 3d) \Rightarrow 13 \mid 43a + 45b + 4$
$13 \mid 13\,(4a + 3b - 4c - 3d) - 3\,(2a + 3b + 4c + 5d) \Rightarrow 13 \mid 46a + 30b - 6$

VI.82. *Fie* $A = 3^m \cdot 5^n$, $m, n \in \mathbb{N}$. *Notăm cu* a, b, c *numărul numerelor* A, $3A$, *respectiv* $5A$. *Ştiind că* a *şi* b *sunt direct proporţionale iar* b *şi* c *sunt invers proporţionale cu* 15 *şi* 16, *să se determine* A.

Mihai Ha

Soluţie. Avem că $a = (m + 1)(n + 1)$, $b = (m + 2)(n + 1)$, iar $c = (m$
Din $\dfrac{a}{3} = \dfrac{b}{4}$ obţinem că $m = 2$, apoi din $15b = 16c$ deducem că $n = 3$, p
$A = 3^2 \cdot 5^3 = 1125$.

VI.83. *Dacă* p *este număr prim, iar* $n \in \mathbb{N}^*$, *să se arate că* $p^{4n} -$ *pătrat perfect.*

Mirela M

Notă. Domnul **Titu Zvonaru** atrage atenţia asupra faptului că ipotez număr prim nu este importantă, fiind suficient să considerăm $p \in \mathbb{N} \setminus \{0$ lucru a fost observat în redacţie în momentul selectării problemei spre pub s-a preferat păstrarea enunţului dat de autor. Prezentăm mai jos soluţiile Zvonaru.

Soluţia 1. Urmărim ultima cifră a numărului $p^{4n} - 3$:

$U(p)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$U\left(p^4\right)$	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1
$U\left(p^{4n}\right)$	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1
$U\left(p^{4n} - 3\right)$	7	8	3	8	3	2	3	8	3	8

Deducem astfel că $p^{4n} - 3$ nu poate fi pătrat perfect.

Soluţia 2. Are loc dubla inegalitate $\left(p^{2n} - 1\right)^2 < p^{4n} - 3 < \left(p^{2n}\right)^2$. Î inegalitatea din dreapta este evidentă, iar cea din stânga se scrie succesiv

$$p^{4n} - 2 \cdot p^{2n} + 1 < p^{4n} - 3 \Leftrightarrow 2 \cdot p^{2n} > 4 \Leftrightarrow p^{2n} > 2,$$

fapt adevărat pentru $p \geq 2$. Astfel $p^{4n} - 3$ este strict cuprins între do perfecte consecutive, prin urmare nu poate fi pătrat perfect.

VI.84. *Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, definim $A_n = 1 + 11 + 111 + \cdots + \underbrace{11\ldots1}_{n}$. A*

a) $3 \mid A_n$ dacă şi numai dacă $3 \nmid n - 1$;

b) $10^n + 1 + \dfrac{9n}{10} < \dfrac{A_{2n}}{A_n} < 10^n + 1 + \dfrac{10n}{11}$, $\forall n \geq 3$.

Temistocle Bî

Soluţie. a) Restul împărţirii unui număr prin 3 este acelaşi cu restul prin 3 a sumei cifrelor sale. Rezultă că oricum am considera trei termeni din A_n, ei vor fi de forma M_3, $M_3 + 1$ şi $M_3 + 2$ (nu neapărat în această atunci suma lor se va divide cu 3.

Dacă $n = 3k$, grupând câte trei termenii lui A_n, deducem că $A_n \,\vdots\, 3$. $3k + 1$, atunci $A_n = M_3 + \underbrace{11\ldots1}_{3k+1} = M_3 + 1$. Dacă $n = 3k + 2$, atu $M_3 + \underbrace{11\ldots1}_{3k+1} + \underbrace{11\ldots1}_{3k+2} = M_3 + (M_3 + 1) + (M_3 + 2) = M_3$ şi de aici rezultă de la a).

b) Observăm că

$$\begin{aligned} A_{2n} =& A_n + \underbrace{11\ldots1}_{n+1} + \cdots + \underbrace{11\ldots1}_{2n} = A_n + \Big(10^n + \underbrace{11\ldots1}_{n}\Big) + \\ &+ \Big(11 \cdot 10^n + \underbrace{11\ldots1}_{n}\Big) + \cdots + \Big(\underbrace{11\ldots1}_{n} \cdot 10^n + \underbrace{11\ldots1}_{n}\Big) = \\ =& A_n\left(10^n + 1\right) + n \cdot \underbrace{11\ldots1}_{n}. \end{aligned}$$

Rezultă că $\dfrac{A_{2n}}{A_n} = 1 + 10^n + n \cdot \dfrac{11\ldots1}{A_n}$ şi rămâne să arătăm că $\dfrac{9}{10} < \dfrac{11\ldots}{A}$ $\forall n \geq 3$. Scrise dezvoltat, aceste inegalităţi revin la

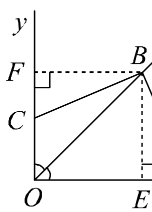
$$9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{9\ldots9}_{n} < 10 + 100 + 1000 + \cdots + 1\underbrace{0\ldots0}_{n};$$

$$11 + 110 + 1100 + \cdots + 11\underbrace{0\ldots0}_{n-1} < 10 + 110 + 1110 + \cdots + \underbrace{11\ldots}_{n}$$

şi sunt adevărate pentru $n \geq 3$.

VI.85. *Pe latura Ox a unghiului drept xOy considerăm un punct bisectoarea unghiului considerăm un punct B. Perpendiculara în B p dreapta Oy în C. Să se arate că $AB = BC$.*

Petru Asaftei, Iaşi



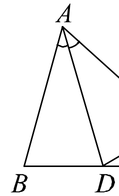
Soluţie. Fie E şi F proiecţiile lui B pe dreptele Ox, respectiv Oy. Observăm că $\widehat{ABE} \equiv \widehat{CBF}$ (au acelaşi complement), $BE = BF$ (deoarece OB este bisectoarea lui $\widehat{EOF}$) şi, conform C.U., rezultă că $\triangle ABE \equiv \triangle CBF$, de unde $AB = BC$.

VI.86. *a) Fie $\triangle ADC$ şi $M \in (AC)$. Să se arate că $P_{ADM} < P_{ADC}$.*

b) Fie $\triangle ABC$ şi (AD) bisectoarea unghiului $\widehat{A}$, $D \in BC$. Dacă P_{ABI}

să se arate că $\triangle ABC$ este isoscel.

Gheorghe I



Soluţie. a) Folosind inegalitatea triunghiului în $\triangle CDM$,

$$P_{ADM} = AD + AM + DM < AD + AM + (DC + MC) =$$
$$= AD + DC + (AM + MC) = P_{ADC}.$$

b) Să presupunem prin absurd că $AB \neq AC$; să zicem că $AB < AC$ şi fie $M \in (AC)$ astfel încât $AM = AB$. Avem că $\triangle ABD \equiv \triangle AMD$ (L.U.L), deci $P_{ABD} = P_{ADM} < P_{ACD}$ şi astfel am ajuns la o contradicţie.

VI.87. *În figura alăturată sunt desenate 6 puncte, care unite două câte două dau naştere la 9 drepte. Avem voie să ştergem unul dintre puncte şi să-l desenăm oriunde în altă parte.*

a) Efectuaţi operaţia descrisă astfel încât, prin unirea câte două a noilor puncte, să se obţină 11 drepte.

b) Care este numărul minim şi cel maxim de drepte care se pot ob configuraţie permisă?

Gabriel I

Soluţie. a) De exemplu, putem proceda ca în figura 1.

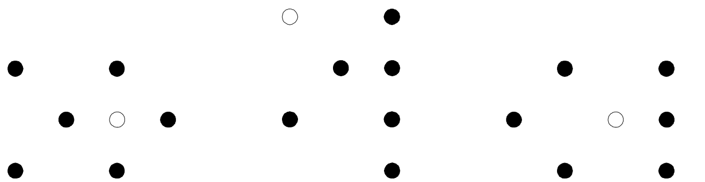


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

b) Numărul minim de drepte este 8, deoarece nu vom putea face în a să obţinem mai mult de 4 puncte coliniare; a se vedea figura 2.

Numărul maxim de drepte este 13: numărul maxim posibil de drepte pr este $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ şi el nu poate fi atins decât dacă oricare trei puncte sunt La înlocuirea a trei puncte necoliniare cu trei puncte coliniare, numărul scade cu 2 şi atunci maximul posibil este 13, atins de exemplu în confi figura 3.

Clasa a VII-a

VII.81. *Se consideră $\overline{abc}$ şi $\overline{xyzt}$ numere naturale scrise în baza compare numerele naturale $A = \sqrt{6\sqrt{2\sqrt{\overline{abc}}}}$ şi $B = \sqrt{3\sqrt{2\sqrt{\overline{xyzt}}}}$.*

Bogdan Chiriac, stu

Soluţie. Fie $\sqrt{6\sqrt{2\sqrt{\overline{abc}}}} = k \in \mathbb{N}$; atunci $6\sqrt{2\sqrt{\overline{abc}}} = k^2$, iar $k^2 \vdots 6$, p $k = 6l$. Rezultă că $\sqrt{2\sqrt{\overline{abc}}} = 6l^2$, deci $\sqrt{\overline{abc}} = 18l^4$, de unde $\overline{abc} =$ $100 \leq 324l^8 \leq 999$ obţinem că $l = 1$, adică $A = 6$. Cu un raţionament a găsim că $B = 6$ şi astfel $A = B$.

VII.82. *Fie a, b numere reale strict pozitive. Să se arate că:*

a) dacă $a^3 - b^3 = a + b$, *atunci* $a^2 + b^2 > 1$;
b) dacă $a^3 + b^3 = a - b$, *atunci* $a^2 + b^2 < 1$.

Ionel Nec

Soluţie. Mai întâi, să observăm că nu putem avea $a = b$, altfel din amb ar rezulta că $a = b = 0$. Avem:

a) $\dfrac{a^3 - b^3}{a + b} = 1 \Rightarrow \dfrac{a^3 + b^3}{a + b} > 1 \Rightarrow a^2 - ab + b^2 > 1 \Rightarrow a^2 + b^2 > 1$;

b) $\dfrac{a^3 + b^3}{a - b} = 1 \Rightarrow \dfrac{a^3 - b^3}{a - b} < 1 \Rightarrow a^2 + ab + b^2 < 1 \Rightarrow a^2 + b^2 < 1$.

VII.83. *Determinaţi numerele întregi* a, b, c, d *pentru care* $ac + b$ $ad + bc = 2$.

Gheorghe I

Soluţie. Scăzând membru cu membru relaţiile din ipoteză, deducem c $ac - bd = 1$, deci $(a-b)(d-c) = 1$, de unde $a - b = d - c = 1$ sau $a - b =$

În primul caz, substituind $a = b + 1$ şi $d = c + 1$ în prima dintre relaţi avem succesiv:

$$ac + bd = 1 \Leftrightarrow c(b+1) + b(c+1) = 1 \Leftrightarrow 2bc + b + c = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4bc + 2b + 2c + 1 = 3 \Leftrightarrow (2b+1)(2c+1) = 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (b, c) \in \{(1, 0); (0, 1); (-1, 2); (-2, -1)\}.$$

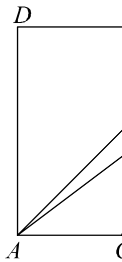
Obţinem soluţiile $(a, b, c, d) \in \{(-1, -2, -1, 0); (0, -1, -2, -1); (1, 0, 1, 2);$

Similar, în al doilea caz găsim soluţiile

$$(a, b, c, d) \in \{(-2, -1, 0, -1); (-1, 0, -1, -2); (0, 1, 2, 1); (1, 0, 1, 2)$$

VII.84. *Fie pătratul* $ABCD$ *cu latura de lungime* a, *iar* E, F, G *laturile* $[BC]$, $[CD]$, *respectiv* $[AB]$ *astfel încât* $CE = \dfrac{a}{4}$, $CF = \dfrac{a}{3}$, *iar* B *se arate că dreptele* AE, BF *şi* CG *sunt concurente.*

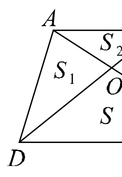
Claudiu Ştefan Popa, Iaşi



Soluţie. Fie $\{P\} = AC \cap BF$; din asemănarea $\triangle CFP \sim \triangle ABP$, deducem că $\dfrac{CP}{PA} = \dfrac{CF}{AB} = \dfrac{1}{3}$. Atunci $\dfrac{CP}{PA} \cdot \dfrac{AG}{GB} \cdot \dfrac{BE}{EC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{1} \cdot \dfrac{3}{1} = 1$ şi din reciproca teoremei lui Ceva urmează concluzia.

VII.85. *Fie* O *intersecţia diagonalelor patrulaterului* $ABCD$. *Dac* $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{COD}$, *să se arate că* $\dfrac{CD}{AB} - \dfrac{AB}{CD} = 1$.

Doru B



Soluţie. Notăm $S_1 = \mathcal{A}_{AOD}$, $S_2 = \mathcal{A}_{AOB}$, $S = \mathcal{A}_{DOC}$. Cum $\mathcal{A}_{ABD} = \mathcal{A}_{ABC}$, rezultă că $ABCD$ este trapez cu $AB \parallel CD$, prin urmare $\mathcal{A}_{BOC} = S_1$. Din ipoteză vom avea că $S = S_1 + S_2$. Notăm $c = \dfrac{CD}{AB}$ şi atunci, cum $\triangle OAB \sim \triangle OCD$, deducem că $\dfrac{S}{S_2} = c^2$. Pe de altă parte,

$\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{OD \cdot \text{dist}(A, BD)}{OB \cdot \text{dist}(A, BD)} = c$ şi astfel $\dfrac{S}{S_2} = \left(\dfrac{S_1}{S_2}\right)^2$, prin urmare $S_1 = \sqrt{\ldots}$

obţinut că $S = \sqrt{S \cdot S_2} + S_2$, deci $\dfrac{S}{S_2} = 1 + \sqrt{\dfrac{S}{S_2}}$, adică $c^2 = 1 + c$.

$c = 1 + \dfrac{1}{c}$ (c este tocmai *numărul de aur*), de unde concluzia problemei.

VII.86. *Fie A un punct pe manta unei mese de biliard circulare cu ra… O bilă pleacă din A şi ajunge înapoi în A lovind manta de cel puţin trei c… bilei se face considerând că aceasta loveşte un perete plan tangent la cerc… de contact. Să se arate că există o infinitate de traiectorii posibile şi să se… traiectoria de lungime minimă.*

Cristian L…

Soluţie. Considerând un poligon regulat cu n laturi, $n \geq 4$, înscri… dat, vârfurile acestuia pot fi punctele de contact cu manta ale bilei într-o… dorită; poligonul poate fi chiar unul stelat! Lungimea minimă a traiectori… în cazul triunghiului echilateral înscris în cerc, al cărui perimetru va fi $3\sqrt{\ldots}$

VII.87. *O tablă are forma unui dreptunghi* 4×5, *format din* 20 *d…* 1×1. *Avem la dispoziţie două jetoane, fiecare putând acoperi câte un p… câte moduri putem aşeza jetoanele pe tablă, astfel încât ele să nu se a… aceeaşi linie, nici pe aceeaşi coloană? Generalizare.*

Gabriel I…

Soluţie. Numărăm întâi în câte moduri putem aşeza jetoanele pe ta… senţa restricţiei din enunţ. Dacă jetoanele ar fi numerotate, ar exista $20 \cdot 19$… de aşezare a lor; cum nu contează ordinea, avem $\dfrac{20 \cdot 19}{2} = 190$ modalităţi…

Dintre acestea, 10 conţin cele două jetoane pe prima linie, 10 pe a dou… deci 40 de aşezări au jetoanele pe aceeaşi linie. Apoi, există 6 aşezări cu je… prima coloană etc., deci $6 \cdot 5 = 30$ de aşezări cu jetoanele pe aceeaşi coloa…

În final, avem $190 - 40 - 30 = 120$ aşezări ce verifică enunţul.

Generalizare. În cazul unei table $m \times n$, avem

$$\frac{mn\,(mn-1)}{2} - \frac{mn\,(n-1)}{2} - \frac{mn\,(m-1)}{2} = \frac{mn}{2}\,(m-1)\,(n-1\ldots$$

modalităţi de aşezare.

Clasa a VIII-a

VIII.81. *Considerăm fixate numerele* $a, b \in \mathbb{Z}^*$, $m, n \in \mathbb{N}^*$, $m \neq n$ *şi…* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = ax + b$. *Dacă* $f(1) + f(2) + \cdots + f(m) = f(1) + f(2) + \ldots$ *să se calculeze suma* $S = f(1) + f(2) + \cdots + f(m+n)$.

Dan Nedeianu, Dr.T…

Soluţie. Din relaţia din ipoteză deducem că $\dfrac{(m^2+m)\,a}{2} + mb = \dfrac{(n^2 + \ldots}{2\ldots}$ Trecem totul într-un membru şi simplificăm prin $m - n \neq 0$; rezultă că $a\,(m\ldots$

$2b=0$. Atunci

$$f\left(1\right)+f\left(2\right)+\cdots+f\left(m+n\right)=\frac{\left(m+n\right)\left(m+n+1\right)a}{2}+\left(m+n\right)$$

$$=\frac{\left(m+n\right)\left(-2b\right)}{2}+\left(m+n\right)b=0.$$

VIII.82. *Să se arate că* $\left|-3xy+x+y\right|\leq 1$, $\forall x,y\in[0,1]$.

Ovidiu Pop, S

Soluţie. Avem de arătat că $-1\leq -3xy+x+y\leq 1$, $\forall x,y\in[0,$ inegalitate este echivalentă cu $0\leq x\left(1-y\right)+y\left(1-x\right)+\left(1-xy\right)$, adevăr $x,y\in[0,1]$ (toţi cei trei termeni sunt pozitivi). A doua inegalitate este cu $0\leq\left(1-x\right)\left(1-y\right)+2xy$, din nou adevărată pentru $x,y\in[0,1]$.

VIII.83. *Să se arate că nu există* $x,y\in\mathbb{Z}$ *pentru care* $147x^2=1+4$

Mihai Crăciun

Soluţia 1. Scriem relaţia din enunţ sub forma $3\left[\left(7x\right)^2+y^2\right]=4y$ pătrat perfect este sau M_4, sau M_4+1; pentru $x,y\in\mathbb{Z}$, paranteza pătrat M_4+1 sau M_4+2 şi atunci membrul stâng este M_4, M_4+3 sau M_4 membrul drept este M_4+1, urmează concluzia.

Soluţia 2 (Ioan Stanciu, elev, Craiova**).** Dacă există x, y cu pr cerute, în mod necesar $1+4y-3y^2\geq 0$. Deducem că $y\in\{0,1\}$, valori p x nu este întreg.

VIII.84. *Laturile* a, b, c *ale unui triunghi verifică egalitatea* $2\left(a^8+\right.$ $\left(a^4+b^4+c^4\right)^2$. *Să se arate că triunghiul este dreptunghic.*

Corina Elena Vişan

Soluţie. Avem succesiv:

$$a^8+b^8+c^8-2a^4b^4-2b^4c^4-2c^4a^4=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(a^4+b^4-c^4\right)^2-4a^4b^4=0\Leftrightarrow\left(a^4+b^4+2a^2b^2-c^4\right)\left(a^4+b^4-2a^2b^2-c\right.$$

$$\Leftrightarrow\left(\left(a^2+b^2\right)^2-c^4\right)\left(\left(a^2-b^2\right)^2-c^4\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(a^2-b^2+c^2\right)\left(a^2-b^2-c^2\right)=0$$

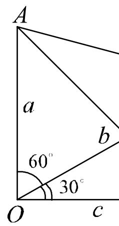
şi de aici concluzia.

VIII.85. *Dacă* a, b, c *sunt numere reale pozitive, să se arate că*

$$\sqrt{a^2+b^2-ab}+\sqrt{b^2+c^2-bc\sqrt{3}}=\sqrt{a^2+c^2}\Leftrightarrow\frac{1}{a}+\frac{\sqrt{3}}{c}=\frac{2}{b}$$

Liviu Smarandache

Soluţie. Fie $[OA]$, $[OB]$, $[OC]$ trei segmente de lungimi a, b, respectiv c, astfel încât $m(\widehat{AOB})=60^\circ$, iar $m(\widehat{BOC})=30^\circ$. Avem:



$$\sqrt{a^2+b^2-ab}+\sqrt{b^2+c^2-bc\sqrt{3}}=\sqrt{a^2+c^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos 60^\circ}+\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos 30^\circ}=$$

$$=\sqrt{a^2+c^2}\Leftrightarrow AB+BC=AC\Leftrightarrow A,B,C\text{ coliniare}\Leftrightarrow$$

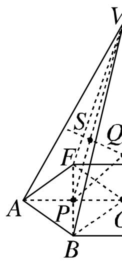
$$\Leftrightarrow \mathcal{A}_{AOB} + \mathcal{A}_{BOC} = \mathcal{A}_{AOC} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{ab\sin 60^\circ}{2} + \frac{bc\sin 30^\circ}{2} = \frac{ac}{2} \Leftrightarrow ab\sqrt{3} + bc = 2ac \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{\sqrt{3}}{c} =$$

VIII.86. *O piramidă hexagonală regulată $VABCDEF$ are muchia baz cm şi înălţimea $VO = 4\sqrt{2}$ cm. Fie M mijlocul lui VD, $\{P\} = AD$ $\{Q\} = PM \cap (VCF)$. Să se arate că:*

a) dreptele VP şi DQ sunt concurente; *b) $DQ \perp (VBF)$.*

Gabriel



Soluţie. *a*) Cum $(VAD) \cap (VCF) = VO$, $PM \subset (VAD)$, iar $\{Q\} = PM \cap (VCF)$, înseamnă că $Q \in VO$. Astfel dreptele VP şi DQ sunt ambele incluse în planul (VAD), cu $Q \in \operatorname{Int} VPD$ şi de aici urmează concurenţa dorită.

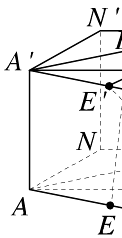
b) Observăm că $BF \perp AD$ şi $BF \perp VO$ ($VO \perp (ABC)$), de unde $BF \perp (VAD)$, prin urmare $BF \perp DQ$. Vom mai arăta că $DQ \perp VP$ şi atunci va rezulta că $DQ \perp (VBF)$. Avem că $PO = 2$ cm, deci $VP = \sqrt{VO^2 + OP^2} = 6$ cm, iar $PD = PO + OD = 6$ cm. Deducem că $\triangle PDV$ este isoscel, iar mediana bazei PM va fi şi înălţime. Astfel, Q va fi ortocentru în $\triangle$ urmare $DQ \perp VP$.

VIII.87. *Considerăm prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C$ $AMCNA'M'C'N'$, unde M este punct interior triunghiului ABC. Fie F' mijloacele muchiilor $[AB]$, $[BC]$, $[A'B']$, respectiv $[A'C']$.*

a) Aflaţi măsura unghiului dintre dreptele EF' şi $E'F$.

b) Aflaţi măsura unghiului format de planele (MCC') şi (ECC').

Claudiu Ştefan



Soluţie. *a*) Fie $l = AB$, $h = AA'$; cum $AC = AM\sqrt{2}$ şi $AM = AA' = h$, deducem că $l = h\sqrt{2}$. În $\triangle A'B'C'$ echilateral, avem că $C'E' = \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{h\sqrt{6}}{2}$, iar din $\triangle CC'F$ dreptunghic obţinem că $C'F = \frac{h\sqrt{6}}{2}$. Se observă uşor că $EFC'F'$ este paralelogram, deci $EF' \parallel FC'$, $EF' = FC'$. Rezultă că $m(\widehat{EF', E'F}) = m(\widehat{FC', E'F}) = m(\widehat{C'FE'})$. Din motive de simetrie, $E'F = EF' = FC' = \frac{h\sqrt{6}}{2}$ şi astfel $\triangle FC'E'$ este echilateral, p măsura unghiului dorit este de 60°.

b) Unghiul planelor este $\widehat{E'C'M'}$, a cărui măsură este $m(\widehat{A'C'M'}) - m($ $45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$.

Clasa a IX-a

IX.81. *Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Dacă ecuaţia $x^2 + ax + b + 2 = 0$ are ambele rădă arătaţi că numărul $2a^2 + b^2$ este natural compus.*

Dorin Mărghidanu

Soluţie. Dacă $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ sunt soluţiile ecuaţiei date, atunci $a = -($

$b = x_1 x_2 - 2$, de unde rezultă că $a, b \in \mathbb{Z}$, deci $2a^2 + b^2 \in \mathbb{N}$. În plus,

$$2a^2 + b^2 = 2\left(x_1 + x_2\right)^2 + \left(x_1 x_2 - 2\right)^2 = \left(x_1^2 + 2\right)\left(x_2^2 + 2\right)$$

şi concluzia se impune.

Notă. Într-o formă puţin modificată, problema a apărut în RMT

numărul IX.216, sub semnătura aceluiaşi autor.

IX.82. *Determinaţi funcţiile* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *pentru care*

$$f\left(x^4 + y^3 + z^2 + t\right) = f(x) + f\left(y^2\right) + f\left(z^3\right) + f\left(t^4\right), \quad \forall x, y, z, t$$

Lucian Tuţescu şi **Liviu Smarandache**

Soluţie. Pentru $x = y = z = t = 0$, găsim $f(0) = 0$. Dacă $y = z =$
$f\left(x^4 + t\right) = f(x) + f\left(t^4\right)$, $\forall x, t \in \mathbb{R}$. Pentru $t = -x^4$, găsim că $f\left(x^{16}\right)$
$\forall x \in \mathbb{R}$. Cum $f\left(x^4\right) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, deducem că $f\left(x^{16}\right) = f\left(\left(x^4\right)^4\right) =$
$f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Prin urmare $f(x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, adică $f(x) = 0$, $\forall x \in$

IX.83. *Pentru* $a \geq 9$*, să se demonstreze că are loc inegalitatea*

$$\sqrt{3 + \sqrt{3a + 9}} \geq 1 + \sqrt{1 + \sqrt{a}}.$$

Marian Tetiv

Soluţie. Pentru $a = 9$ avem egalitate; să arătăm că are loc strict i
din enunţ pentru $a > 9$. Prin ridicare la pătrat şi cu notaţia $a = x^2$, $x >$
succesiv:

$$1 + \sqrt{3a + 9} > 2\sqrt{1 + \sqrt{a}} + \sqrt{a} \Leftrightarrow 1 + \sqrt{3x^2 + 9} > 2\sqrt{1 + x} + x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x^2 + 9} - (x + 3) \geq 2\left(\sqrt{1 + x} - 2\right) \Leftrightarrow \frac{2x(x - 3)}{\sqrt{3x^2 + 9} + x + 3} > \frac{2(x}{\sqrt{1 +}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{3x^2 + 9} + x + 3} > \frac{1}{\sqrt{1 + x} + 2} \Leftrightarrow x\left(\sqrt{1 + x} + 1\right) > \sqrt{3x^2 + 9}$$

Această din urmă inegalitate rezultă adunând $x > 3$ şi $x\sqrt{1 + x} > \sqrt{3x}$
revine la $\sqrt{x^3 + x^2} > \sqrt{3x^2 + 9}$, evident pentru $x > 3$).

IX.84. *Fie* ABC *un triunghi. Determinaţi numerele întregi* a, b, c *ne*
între ele două câte două, astfel încât punctele M, N, P *să fie coliniare, u*
P *sunt determinate prin condiţiile* $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CN} = b\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{CP} = c\overrightarrow{BC}$

Ioan Săcăleanu

Soluţie. Exprimând vectorii $\overrightarrow{NP}$ şi $\overrightarrow{MN}$ în funcţie de $\overrightarrow{AC}$ şi $\overrightarrow{BA}$,
$\overrightarrow{NP} = (b + c)\overrightarrow{AC} + c\overrightarrow{BA}$ şi $\overrightarrow{MN} = (1 - b)\overrightarrow{AC} - a\overrightarrow{BA}$. Deoarece punctel
sunt coliniare, rezultă că vectorii $\overrightarrow{NP}$ şi $\overrightarrow{MN}$ sunt coliniari; folosind rela
dente, găsim condiţia $ab + ac + bc = c$. De aici rezultă că $c \mid ab$ şi cum
cu a şi b, deducem că $c \in \{-1, 1\}$. Pentru $c = 1$ găsim soluţiile $a = -$
sau $a = -2$, $b = -3$. Pentru $c = -1$ găsim soluţiile $a = 1$, $b \in \mathbb{Z}$ (în
$M = P = B$) sau $a \in \mathbb{Z}$, $b = 1$ (în acest caz $N = A$ şi $P = B$).

IX.85. *Fie* ABC *un triunghi ascuţitunghic şi* $D = \mathrm{pr}_{BC} A$, $E = \mathrm{pr}$
$\mathrm{pr}_{AB} C$*. Demonstraţi echivalenţa afirmaţiilor următoare:*

(*i*) $\triangle ABC$ *este isoscel;*

(ii) $DB + EC + FA = DC + EA + FB;$

(iii) $\dfrac{1}{DB} + \dfrac{1}{EC} + \dfrac{1}{FA} = \dfrac{1}{DC} + \dfrac{1}{EA} + \dfrac{1}{FB}.$

Examinaţi cazurile în care $\triangle ABC$ este obtuzunghic sau dreptunghic.

Temistocle Bî

Soluţie. Implicaţiile $(i) \Rightarrow (ii)$ şi $(i) \Rightarrow (iii)$ sunt triviale. Pentru i inverse acestora, utilizăm relaţiile $BD = c\cos B$, $DC = b\cos C$ etc. cosinusului. Astfel, avem:

$$(iii) \Leftrightarrow \sum \frac{1}{c\cos B} = \sum \frac{1}{b\cos C} \Leftrightarrow \sum \frac{2a}{b^2 - c^2 - a^2} = \sum \frac{2a}{c^2 - a^2}$$

care, după transformări, este echivalentă cu $(a-b)(b-c)(c-a)(a+b$
Prin urmare, (iii) este echivalentă cu (i).

Analog se arată că (ii) este echivalentă cu $(a-b)(b-c)(c-a)(a+$
deci cu (i).

În cazul în care triunghiul este obtuzunghic şi $\widehat{A}$ este unghiul obtuz, av lenţa condiţiilor:

(j) $\triangle ABC$ este isoscel de vârf A,

(jj) $DB + EC - FA = DC - EA + FB$,

(jjj) $\dfrac{1}{DB} + \dfrac{1}{EC} - \dfrac{1}{FA} = \dfrac{1}{DC} - \dfrac{1}{EA} + \dfrac{1}{FB}.$

Dacă $\triangle ABC$ este dreptunghic în A, atunci condiţia (iii) nu se mai poa iar (ii) devine $DB + b = DC + c$, care este echivalentă cu faptul că $\triangle$ dreptunghic şi isoscel de vârf A.

Clasa a X-a

X.81. *Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul*

$$x - y^{2/3} = z^{1/3}; \quad x^{4/3} - y = z^{2/3}; \quad z^{5/3} - y^{4/3} = z.$$

Vasile Chiri

Soluţie. Notând $x^{1/3} = t$, $y^{1/3} = u$, $z^{1/3} = v$, sistemul devine t^3 $t^4 - u^3 = v^2$; $t^5 - u^4 = v^3$. Avem că $t^8 = \left(u^3 + v^2\right)^2 = \left(u^2 + v\right)\left(u^4 + v^3\right.$ găsim că $uv\left(u - v\right)^2 = 0$. Prin urmare, $u = 0$ sau $v = 0$ sau $u = v$. Analiz cazuri, gasim soluţiile (t, u, v) : $(1, 0, 1)$; $(-1, 0, -1)$; $(0, 0, 0)$; $(1, 1, 0)$; $($ $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ şi $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$. Corespunzăto soluţiile (x, y, z) ale sistemului dat.

X.82. *Solve the equation*

$$ae^{-x} + b\left|e^{-x} - 3\right| = ax^3 + b\left|x^3 - 2\right| + a, \quad a > b > 0.$$

Zdravko Starc, Vrša

Soluţie. Scriem ecuaţia sub forma

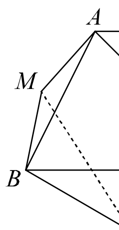
$$a\left(e^{-x} - 2\right) + b\left|e^{-x} - 3\right| = a\left(x^3 - 1\right) + b\left|x^3 - 2\right|.$$

Considerând funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = at + b|t - 1|$, ecuaţia devine $f($ $f\left(x^3 - 1\right)$. Se verifică uşor că f este strict crescătoare, deci injectivă. Ec se reduce la $e^{-x} - 2 = x^3 - 1$, adică $x^3 - e^{-x} + 1 = 0$. Cum funcţia g

$g(x) = x^3 - e^{-x} + 1$ este strict crescătoare şi $g(0) = 0$, concluzionăm
$x^3 - e^{-x} + 1 = 0$ are soluţia unică $x = 0$. Prin urmare, ecuaţia dată are so
$x = 0$.

X.83. *În exteriorul triunghiului ABC se construiesc triunghiurile isos ANC şi CPB de baze AB, AC şi respectiv BC, astfel încât $m(\widehat{MA}$ $m(\widehat{NAC}) = 45°$, iar $m(\widehat{PBC}) = 30°$. Să se arate că $m(\widehat{MPN}) = 60°$.*

Angela Ţigăeru



Soluţie. Vom nota afixul fiecărui punct cu litera mică ce îi corespunde. Deoarece $\overrightarrow{MA}$ se obţine din $\overrightarrow{MB}$ în urma unei rotaţii în jurul lui M de unghi $\frac{5\pi}{6}$, avem că $a - m = (b-m)\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$, de unde $m = \frac{2a + b\sqrt{3} - bi}{2 + \sqrt{3} - i}$. Analog găsim afixele punctelor P şi N, anume $p = \frac{2b + c - c\sqrt{3}i}{3 - \sqrt{3}i}$, respectiv $n = \frac{c - ai}{1 - i}$. Prin calcule, $\frac{m-p}{n-p} = \left(\sqrt{3} - 1\right)\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ concluzia problemei.

X.84. *Fie ABC un triunghi în care $(\operatorname{tg} B - 1)(\operatorname{tg} C - 1) = 2$. Dac sunt picioarele înălţimilor din B, respectiv C, să se arate că segmentele şi MN se pot constitui în laturi ale unui triunghi.*

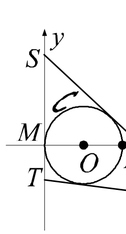
Cătălin Cali

Soluţie. Problema este înrudită cu VI.30, publicată de acelaşi autor 1/2002. Ca şi acolo, cheia rezolvării este aceea de a arăta că $m(\widehat{A}) = 4$ triunghiurile ABM şi ACN vor fi dreptunghice isoscele, cu $BM = AM$ şi deci segmentele din enunţ se constituie în laturi ale $\triangle AMN$.

Deoarece $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$ (identitate cunoscută), ipoteză este echivalentă cu $1 + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$, i.e. $(\operatorname{tg} A - 1)(\operatorname{tg} B$ t 0. Se observă uşor că al doilea factor nu se poate anula, deci rămâne că adică $m(\widehat{A}) = 45°$.

X.85. *Se prelungeşte diametrul $[MN]$ al unui cerc $\mathcal{C}$ cu segmentul $[N$ ent cu $[MN]$. Fie d perpendiculara în P pe MN şi $R \in d$, oarecare. duse prin R la $\mathcal{C}$ intersectează tangenta în M la $\mathcal{C}$ în S şi T. Să se arate de greutate al $\triangle RST$ este un punct fix.*

Adrian Reis



Soluţie. Raportăm planul la un reper ortogonal cu originea în M, având dreapta MN ca axă Ox şi tangenta în M la $\mathcal{C}$ drept axă Oy. Fie $\frac{a}{2}$ raza cercului $\mathcal{C}$; atunci $M(0,0)$, $N(a,0)$, $P(2a,0)$, iar $R(2a,\lambda)$, cu λ variabil şi fie $S(0,s)$.

Ecuaţia dreptei RS este $(\lambda - s)x - 2ay + 2as = 0$ şi, impunând condiţia că $d(O,RS) = \frac{a}{2}$, obţinem:

$$\frac{\left|\frac{a}{2}(\lambda - s) + 2as\right|}{\sqrt{(\lambda - s)^2 + 4a^2}} = \frac{a}{2} \Leftrightarrow |\lambda + 3s| = \sqrt{(\lambda - s)^2 + 4a^2} \Leftrightarrow 2s^2 + 2\lambda s - a$$

Dacă $T(0,t)$, se obţine pentru t ecuaţia $2t^2+2\lambda t-a^2=0$. Din relaţiile lui ducem că $t+s=-\lambda$. Centrul de greutate al $\triangle RST$ este $G\left(\frac{2a+0+0}{3},\right.$ i.e. $G\left(\frac{2a}{3},0\right)$, deci este un punct fix.

Clasa a XI-a

XI.81. *Dacă $m\in\mathbb{Z}$, să se studieze existenţa limitei* $\lim\limits_{x\to m}\frac{\{x\}}{\sin\pi x}$.

Dan Popescu

Soluţie. Observăm că $\sin\pi x=(-1)^{[x]}\sin(\pi x-\pi[x])=(-1)^{[x]}\sin\pi$ $\mathbb{R}$. Atunci $\lim\limits_{\substack{x\to m\\x>m}}\frac{\{x\}}{\sin\pi x}=\lim\limits_{\substack{x\to m\\x>m}}\frac{\pi\{x\}}{\sin\pi\{x\}}\frac{1}{(-1)^{[x]}\pi}=\frac{(-1)^m}{\pi}$. Pentru calcu la stânga, dacă $m=2k$, $k\in\mathbb{Z}$, obţinem că $\lim\limits_{\substack{x\to 2k\\x<2k}}\frac{\{x\}}{\sin\pi x}=\frac{1}{0-}=-\infty$ $m=2k+1$, $k\in\mathbb{Z}$, atunci $\lim\limits_{\substack{x\to 2k\\x<2k}}\frac{\{x\}}{\sin\pi x}=\frac{1}{0+}=+\infty$. În concluzie, limi există pentru nicio valoare a lui $m\in\mathbb{Z}$.

XI.82. *Considerul şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definit prin $a_0=0$, $a_1=1$ şi a_{n+2} a_n, $\forall n\in\mathbb{N}$. Pentru $x\in\left(0,\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$, arătaţi că şirul $x_n=a_0+a_1x+a$ a_nx^n, $n\in\mathbb{N}$, este convergent şi calculaţi limita sa.*

Vlad Emanuel, e

Soluţie. Folosind ecuaţia caracteristică pentru şirul (a_n), stabilim $\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Rezultă că $a_n\in\left[0,\left(\frac{3}{}\right.\right.$ $n\in\mathbb{N}$. Evident că şirul (x_n) este strict crescător şi cum

$$0\le x_n<1+\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)x+\cdots+\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n<\frac{1}{1-x\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$$

(x_n) este mărginit. În concluzie, (x_n) este convergent. Fie $l=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ $x_{n+2}-3xx_{n+1}+x^2x_n=a_0+(a_1-3a_0)x=x$, prin trecere la limită $l=\frac{x}{x^2-3x+1}$.

XI.83. *Fie $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ pentru care are loc relaţia $f(f(x))+9$ $\forall x\in[0,\infty)$. Arătaţi că $f(x)\ge 3x$, $\forall x\in[0,\infty)$.*

Bogdan Posa şi **Marius Drăgoi, ele**

Soluţie. Din ipoteză deducem că $f(6x)\ge 9x$, de unde $f(x)\ge\frac{9}{6}x$ şi $\left(\frac{9}{6}\right)^2 x$, $\forall x\in[0,\infty)$. Atunci, conform ipotezei, $f(x)\ge\frac{\left(\frac{9}{6}\right)^2+9}{6}x$, $\forall$ Prin inducţie se arată că $f(x)\ge u_nx$, $\forall x\ge 0$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, unde $u_1=\frac{9}{6}$,

$\dfrac{u_n^2+9}{6}$. Deoarece (u_n) este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 3$, deducem că $f(x) \geq$
deci $f(x) \geq 3x$, $\forall x \in [0,\infty)$.

XI.84. *Determinaţi numerele $a \in \mathbb{R}$ pentru care există o funcţi* *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $(f \circ f)(x) = a^2 f(x) - 2a^4 x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.*

Andrei Ned

Soluţie. Pentru $a = 0$ există $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ care verific
Vom arăta că nu există astfel de funcţii pentru $a \neq 0$. Presupunând cont
ipoteză se obţine că f este injectivă, prin urmare f va fi strict monotonă.
$f \circ f$ este strict crescătoare; din $x < y$ deducem că $(f \circ f)(x) < (f \circ f)(y$
$2a^4(y-x) < a^2(f(y) - f(x))$ şi de aici deducem că f este strict crescătoa
mare, şi funcţia $f \circ f \circ f$ este strict crescătoare. Cum $(f \circ f \circ f)(x) = -a^4 f$
$\forall x \in \mathbb{R}$, în membrul stâng am avea o funcţie strict crescătoare, iar în c
funcţie strict descrescătoare. În concluzie, rămâne că $a = 0$.

XI.85. *Fie $A = (a_{ij})_{2007\times 2007}$ o matrice pătratică în care $a_{ij} \in$* *$\forall i,j = \overline{1,2007}$. Să se arate că determinantul matricei $2008 I_{2007} + A$ este*

Paul Georgescu şi **Gabriel P**

Soluţie. Fie $B = 2008 I_{2007} + A$; atunci $b_{ii} = 2008 + a_{ii}$, iar $b_{ij} =$
$i \neq j$. Observăm că

$$|b_{ii}| = |2008 + a_{ii}| \geq 2007 > 2006 \geq \sum_{j=1, j\neq i}^{2007} |b_{ij}|, \quad \forall i = \overline{1,2007}.$$

Presupunem prin absurd că $\det B = 0$; atunci există $c_1, c_2, \ldots, c_{2007} \in$
nuli, astfel încât

$$c_1 C_1 + c_2 C_2 + \cdots + c_{2007} C_{2007} = O,$$

unde C_1, C_2, $\ldots$, C_{2007} sunt coloanele lui B. Fie $k \in \overline{1,2007}$ pentru c
$\max\left\{|c_i| ; i = \overline{2007}\right\}$; atunci

$$C_k = -\frac{c_1}{c_k} C_1 - \frac{c_2}{c_k} C_2 - \cdots - \frac{c_{k-1}}{c_k} C_{k-1} - \frac{c_{k+1}}{c_k} C_{k+1} - \cdots - \frac{c_{2007}}{c_k} C_2$$

$$\Rightarrow b_{kk} = -\frac{c_1}{c_k} b_{k1} - \frac{c_2}{c_k} b_{k2} - \cdots - \frac{c_{k-1}}{c_k} b_{k,k-1} - \frac{c_{k+1}}{c_k} b_{k,k+1} - \cdots - \frac{c_{200}}{c_k}$$

De aici deducem că

$$|b_{kk}| = \left| \sum_{j=1, j\neq i}^{2007} \frac{c_j}{c_k} b_{kj} \right| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{2007} \left| \frac{c_j}{c_k} \right| |b_{kj}| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{2007} |b_{kj}|.$$

Relaţiile (1) şi (2) intră în contradicţie, prin urmare rămâne că $\det B \neq 0$

Clasa a XII-a

XII.81. *Dintre toate parabolele $y = ax^2 + bx + c$, să se determine* *trece prin punctele $A(0,1)$, $B(1,2)$, satisface condiţia $y \geq 0$ pentru 0* *şi realizează minimul ariei determinată de graficul parabolei, Ox şi drep* *respectiv $x = 1$.*

Adrian Cordune

Soluţie. Din condiţiile $y(0) = 1$ şi $y(1) = 2$, găsim $y = ax^2 + (1$
cu $a \in \mathbb{R}^*$. Cum $y(0) = 1 > 0$, $y(1) = 2 > 0$, condiţia $y \geq 0$ pentru x

scrie sub forma $\dfrac{1+x}{x-x^2} > a$, $\forall x \in (0,1)$, deci $a \leq \sup\limits_{x\in(0,1)} h(x)$, unde $h : ($

$h(x) = \dfrac{1+x}{x-x^2}$. Găsim cu uşurinţă $a \leq 3+2\sqrt{2}$, prin urmare $y = ax^2 + (1$

$a \in \left(-\infty, 3+2\sqrt{2}\right] \setminus \{0\}$. Cum aria cerută în enunţ este $A = \int\limits_0^1 y(x)\, d$

obţinem că A este minimă pentru a maxim, deci $a = 3+2\sqrt{2}$, iar $A_{\min} =$

XII.82. *Determinaţi primitivele funcţiei* $f : (1,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^3\left(5x^4+3\right)(\ln x - 1)}{\left(x^4-1\right)^3}.$$

Dan Nedeianu, Dr. Tr

Soluţie. Cu substituţia $x^4 - 1 = t$, avem de calculat

$$\frac{1}{16}\int \frac{(5t+8)(\ln(t+1)-4)}{t^3}dt =$$

$$= \frac{1}{16}\left(-4\int \frac{5t+8}{t^3}dt + \int \frac{5t+8}{t^3}\ln(t+1)\,dt\right).$$

Calculând a doua integrală prin părţi şi înlocuind t cu x^4-1, găsim că

$$\int f(x)\,dx = \frac{x^4}{\left(x^4-1\right)^2} - \frac{x^8+3x^4}{4\left(x^4-1\right)^2}\ln x + \frac{1}{16}\ln\left(x^4-1\right) + C.$$

XII.83. *Să se determine funcţiile continue* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *pentru care*

$$f(x) = |x| + \int_0^x e^{-t} f(x-t)\,dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dumitru Mihalach

Soluţie. Cu schimbarea de variabilă $x - t = u$, aducem ecuaţia f

la forma $f(x) = |x| + \int\limits_0^x e^{-x+u} f(u)\,du$. Notând $\int\limits_0^x e^u f(u)\,du = F(x)$, d

$e^x f(x) = F'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ şi ecuaţia devine $e^{-x}F'(x) - e^{-x}F(x) = |x|$, $\forall$

încă $\left(e^{-x}F(x)\right)' = |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Considerând $G(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2}, x < 0 \\ \frac{x^2}{2}, x \geq 0 \end{cases}$, o p

funcţiei $g(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, obţinem că $e^{-x}F(x) = G(x) + C$, C constant

$f(x) = F'(x)\,e^{-x}$, deci $f(x) = |x| + \begin{cases} -\frac{x^2}{2}, x < 0 \\ \frac{x^2}{2}, x \geq 0 \end{cases} + C$. Cum $f(0) =$

$C = 0$ şi atunci $f(x) = \begin{cases} -x - \frac{x^2}{2}, x < 0 \\ x + \frac{x^2}{2}, x \geq 0 \end{cases}$, funcţie care verifică ecuaţia d

XII.84. *Fie polinomul* $f \in \mathbb{Z}[X]$, $f = a_0X^{2n+1} + a_1X^{2n} + \cdots + a_{2n}$
pentru care n este impar, a_0a_{2n+1} este impar, iar a_1a_2 este par. Să se ara
f are toate rădăcinile reale, cel puţin una este iraţională.

Mihai Ha

Soluţie. Dacă x_1, x_2, $\ldots$, x_{2n+1} ar fi rădăcini raţionale ale lui f, a
a_0x_i, $i = \overline{1, 2n+1}$ vor fi rădăcini raţionale ale polinomului $g = Y^{2n+1}$

$a_0a_2Y^{2n-1} + \cdots + a_0^{2n}a_{2n+1}$. Rezultă că $y_i \in \mathbb{Z}$ şi $y_i \mid a_0^{2n}a_{2n+1}$, $\forall i =$
Cum a_0a_{2n+1} este impar, atunci $a_0^{2n}a_{2n+1}$ este impar, deci y_i, $i = \overline{1, 2}$
numere impare. Din prima relaţie Viète, $\sum_{i=1}^{2n+1} y_i = -a_1$, rezultă că a_1 e
Apoi, din $\sum_{i<j} y_iy_j = a_0a_2$, obţinem că a_0a_2 este număr impar, fiind
$C_{2n+1}^2 = n(2n+1)$ termeni impari, iar n fiind impar. Deducem că a_2 est
astfel produsul a_1a_2 va fi impar, contradicţie. Rezultă că f are cel puţin
iraţională.

XII.85. *Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Arătaţi că există $P \in \mathbb{Z}[X]$ de grad n,*
toate mulţimile $A_k = \{P(i) \,(\mathrm{mod}\, k) \mid i \in \mathbb{Z}\}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, să aibă cardi
mai mic decât k.

Vlad Emanuel, el

Soluţie (Gheorghe Iurea). Deoarece $P(mk+i) = P(i) \;(\mathrm{mod}\, k)$
şi $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $i = \overline{1, k-1}$, mulţimea A_k conţine, cel mult, elemen
$P(1), \ldots, P(k-1) \;(\mathrm{mod}\, k)$. Trebuie determinat un polinom $P \in \mathbb{Z}[X]$ a
printre elementele enumerate mai sus, cel puţin două să fie egale (pentr
Polinomul $P = X^n - X$, verifică cerinţele date, întrucât $P(0) = P(1)$, $\forall k$

Recreaţii ... matematice

Răspunsuri (la *recreaţiile* de la pag. 142)

1. Numărul maxim cerut este 4015:

$$2008 = \underbrace{125 : 125 + 125 : 125 + \cdots + 125 : 125}_{2008 \text{ termeni}},$$

pe când cel minim este 24:

$$2008 = \underbrace{125 + \cdots + 125}_{16 \text{ termeni}} + \underbrace{125 + \cdots + 125}_{8 \text{ termeni}} : 125.$$

2.

$$(1 + 1 : 1)^3 = 8$$
$$2 \times 2 \times 2 = 8$$
$$3^2 - 3 : 3 = 8$$
$$\left(\sqrt{4} + \sqrt{4}\right) \times \sqrt{4} = 8$$
$$5 + 5!! : 5 = 8$$
$$\sqrt{(6+6)!! : 6!} = 8$$
$$7 + 7 : 7 = 8$$
$$8 + 8 - 8 = 8$$
$$9 - 9 : 9 = 8$$

(Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, *factorialul* se defineşte prin $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$, ia
torialul astfel: $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)$ şi $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$.)

Soluţiile problemelor pentru pregătirea concur
din nr. 2/2007

A. Nivel gimnazial

G126. *Să se determine numerele naturale care au proprietatea că me trică a tuturor divizorilor lor este un număr natural.*

Petru M

Soluţie. Fie $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$ divizorii lui n; atun $\ldots, \frac{n}{d_k}$ este şirul aceloraşi divizori, scris descrescător, prin urmare d_1 $\frac{n^k}{d_1 d_2 \cdots d_k}$, de unde $(d_1 d_2 \cdots d_k)^2 = n^k$. Media geometrică a tuturor div n este $\sqrt[k]{d_1 d_2 \cdots d_k} = \sqrt{n}$ şi este număr natural dacă şi numai dacă n perfect.

G127. *Dacă a, b, c, x, y, z, t sunt numere reale pozitive, să se d inegalitatea*

$$\frac{1}{ax+by+cz}+\frac{1}{ay+bz+ct}+\frac{1}{az+bt+cx}+\frac{1}{at+bx+cy} \geq \frac{8}{\sqrt{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{x^2}}$$

D. M. Bătineţu-Giurgiu,

Soluţie. Observăm că produsul $(a+b+c)(x+y+z+t)$ este, după parantezelor, tocmai suma numitorilor din membrul stâng ai inegalităţii strat. Notăm acest membru stâng cu S; folosind inegalitatea dintre media şi cea armonică, obţinem

$$(a+b+c)(x+y+z+t)\,S \geq 16 \Leftrightarrow S \geq \frac{16}{(a+b+c)(x+y+z+}$$

Însă $\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$ şi $\frac{x+y+z+t}{4} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2+t^2}{4}}$ (i dintre media aritmetică şi cea pătratică) şi atunci concluzia problemei urm litatea se atinge când $a = b = c$ şi $x = y = z = t$.

G128. *Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $abc = 1$ şi fie t se arate că*

$$\frac{a}{a^2+t}+\frac{b}{b^2+t}+\frac{c}{c^2+t} \leq \frac{3}{t+1}.$$

Titu Zvonaru, Comăneşti şi **Bogdan Ioniţă,**

Soluţie. Deoarece $abc = 1$, există numerele reale pozitive x, y, z a $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{y}{z}$, $c = \frac{z}{x}$. Avem că

$$\frac{a}{a^2+t} = \frac{xy}{x^2+ty} \leq \frac{xy}{2xy+(t-1)\,y^2} = \frac{x}{2x+(t-1)\,y} = \frac{x^2}{2x^2+(t-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{a^2+t}+\frac{b}{b^2+t}+\frac{c}{c^2+t} \leq \frac{x^2}{2x^2+(t-1)\,xy}+\frac{y^2}{2y^2+(t-1)\,yz}+\frac{z}{2z^2+(}$$

$$\leq \frac{(x+y+z)^2}{2\,(x^2+y^2+z^2)+(t-1)\,(xy+yz+zx)}.$$

Prin urmare, este suficient să demonstrăm că

$$\frac{(x+y+z)^2}{2\left(x^2+y^2+z^2\right)+(t-1)(xy+yz+zx)} \leq \frac{3}{t+1}.$$

După efectuarea calculelor, acesta se reduce la

$$(5-t)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right) \geq 0,$$

evident adevărată.

Notă. Pentru $t=2$ se obţine o problemă propusă la concursul Baltic

G129. *Să se determine $y \in \mathbb{R}^*$ pentru care $\{x\}+\left\{x+\frac{1}{y}\right\}=\{xy\}+$ (Cu $\{\cdot\}$ am notat partea fracţionară.)*

Alexandru Negrescu, elev,

Soluţie. Pentru $x=\frac{1}{y}$ obţinem că $\left\{\frac{1}{y}\right\}+\left\{\frac{2}{y}\right\}=\frac{1}{y}$, deci $\left\{\frac{2}{y}\right\}=$ $\left\{\frac{2}{y}\right\} \in [0,1)$, iar $\left[\frac{1}{y}\right] \in \mathbb{Z}$, deducem că $\left\{\frac{2}{y}\right\}=\left[\frac{1}{y}\right]=0$, prin urmare $\frac{1}{y}$ $\frac{2}{y} \in \mathbb{N}$. Astfel, $\frac{2}{y} \in (0,2)\cap\mathbb{N}$, deci $\frac{2}{y}=1$ şi atunci $y=2$.

Pentru $y=2$, egalitatea din enunţ devine $\{x\}+\left\{x+\frac{1}{2}\right\}=\{2x\}$ $\mathbb{R}$, iar aceasta este adevărată întrucât revine la cunoscuta identitate a l $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

G130. *Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi ABC. Dacă a^{2007} $\left(2^{2007}+1\right)c^{2007}$, să se arate că unghiul $\widehat{C}$ este ascuţit.*

Lucian Tuţescu

Soluţie. Vom arăta că c este cea mai mică latură a triunghiului, de und este imediată. Să presupunem prin absurd că $c \geq b$; atunci

$$a^{2007}+c^{2007} \geq a^{2007}+b^{2007} > \left(2^{2007}+1\right)c^{2007} \Rightarrow a^{2007} > (2c)^{2007} \Rightarrow$$

de unde $a > 2c \geq b+c$, ceea ce contrazice inegalitatea triunghiului. procedează dacă am presupune că $c \geq a$.

G131. *Fie $n, k \geq 2$ numere naturale şi mulţimea $M=\{-(n-1),\ldots$ $2,\ldots,n\}$. Să se arate că M se poate partiţiona în k submulţimi având fiec sumă a elementelor dacă şi numai dacă n se divide cu k.*

Marian Tetiv

Soluţie. Condiţia este necesară: dacă M admite o partiţie ca în enu suma elementelor sale (care este n) va fi egală cu sk (s fiind suma elem fiecare clasă a partiţiei).

Pentru a demonstra suficienţa, vom construi efectiv o partiţie în ca

$n = ks$, cu $s \in \mathbb{N}$. Considerăm mulţimile:

$$M_1 = \{2, 3, \ldots, s, s+1, -1, -2, \ldots, -(s-1), -s\};$$
$$M_2 = \{s+2, \ldots, 2s, 2s+1, -(s+1), \ldots, -(2s-1), -2s\};$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$M_{k-1} = \{(k-2)s+2, \ldots, (k-1)s, (k-1)s+1, -((k-2)s+1), \ldots, -$$
$$M_k = \{1, (k-1)s+2, \ldots, ks, -((k-1)s+1), \ldots, -(ks-1)\}$$

şi este evident că $M = M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_k$, $M_i \cap M_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$, iar suma e oricărei mulţimi M_i este s.

G132. *În fiecare câmp unitate al unei livezi $m \times n$ se află câte un număr de k arici pornesc, pe rând, din câmpul stânga-sus al livezii şi se câmpul din dreapta-jos. La fiecare mişcare, un arici se poate deplasa cu spre dreapta sau în jos, fără a ieşi din livadă. Ariciul poate să culeagă câmpul pe care îl vizitează, dacă nu a fost cules deja de alt arici. Care es minim k, pentru care k arici pot să culeagă toate merele?*

Iurie Boreico, elev,

Soluţie. Numerotăm câmpurile (x, y), cu $x \in \{1, 2, \ldots, m\}$; $y \in \{1$ începând din colţul stânga-sus. Fiecare mişcare a unui arici duce la mă donatei x sau y a câmpului pe care se află cu 1, adică suma coordonat cu 1 la fiecare mişcare a unui arici. În particular, un arici poate să v mult un câmp de pe diagonala $x + y = k$. Cea mai lungă diagonală are $\min(m, n)$ (diagonalele cu această lungime sunt $x + y = m + 1$, $x + y =$ $x + y = n + 1$ dacă, de exemplu, asumăm că $m \leq n$), prin urmare avem ne puţin $\min(m, n)$ arici care să culeagă toate merele de pe această diagona $k \geq \min(m, n)$. Pe de altă parte, un număr de $\min(m, n)$ arici sunt su cazul $m \leq n$, putem considera că primul arici merge spre dreapta până la livezii, apoi coboară până la destinaţie; al doilea merge o unitate în jos dreapta până la marginea livezii, după care coboară; al treilea merge două jos ş.a.m.d.

Răspunsul este deci $k = \min(m, n)$.

G133. *Fie $\triangle ABC$ echilateral şi D un punct astfel încât $BD = DC$, m $30°$, iar BC separă A şi D. Dacă $E \in (BD)$ cu $m(\widehat{BAE}) = 15°$, să s $CE \perp AC$.*

Enache Pătraşcu

Notă. A se vedea nota *O problemă şi... nouă soluţii* din acest număr pag. 128.

G134. *Se consideră patrulaterul convex $ABCD$ înscris într-un cerc c cm, având $m(\widehat{A}) = 60°$ şi $m(\widehat{B}) = 45°$. Să se arate că aria patrulateru mult egală cu $3\sqrt{6}$ cm^2.*

Constantin Apostol, R

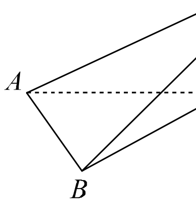
Soluţie (Gabriel Popa). Cu teorema sinusurilor în $\triangle ABC$ şi î obţinem că $AC = 2R \sin 45° = 2\sqrt{3}$ cm, respectiv $BD = 2R \sin 60° =$ Dacă $\alpha = m(\widehat{AC, BD})$, aria patrulaterului este $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \alpha$ şi es

când $\alpha = 90°$. În cazul nostru, cum $AC^2 + BD^2 > (2R)^2$ (relaţia revine l
deducem că există un patrulater cu diagonalele perpendiculare şi de lungi
şi $3\sqrt{2}$ cm, prin urmare maximul ariei se atinge şi este $S_{\max} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3$
cm^2.

G135. *Fie tetraedrul $ABCD$ cu $AB = CD$, $AC = BD$, $AD = BC$.*
că cel puţin două dintre unghiurile diedre formate de faţa (ABC) cu feţe
(ACD), (ABD) sunt ascuţite.

Dan Brâ

Soluţie (Răzvan Ceucă, elev, Iaşi**).** Este evident că cele trei diedre nu pot fi toate neascuţite; să presupunem prin absurd că două dintre ele sunt neascuţite (anume cele de muchii BC şi AC, ale căror măsuri vor fi α, respectiv β, cu $\alpha, \beta \geq 90°$), iar al treilea, anume cel de muchie AB, are măsura $\gamma < 90°$. Se observă uşor că proiecţia O a lui D pe planul (ABC) aparţine interiorului sau laturilor unghiului opus la



vârf lui $\widehat{ACB}$. Deducem că $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{ABO} - \mathcal{A}_{ACO} - \mathcal{A}_{BCO}$, pr
$\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{ABD} \cos\gamma - \mathcal{A}_{ACD} \cos(180° - \beta) - \mathcal{A}_{BCD} \cos(180° - \alpha)$. Tetr
echifacial, deci $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{ABD} = \mathcal{A}_{ACD} = \mathcal{A}_{BCD}$ şi, după simplificare,
$1 + \cos(180° - \beta) + \cos(180° - \alpha) = \cos\gamma$. Cum cele trei cosinusuri sunt
intervalul $[0, 1)$, ajungem la o contradicţie.

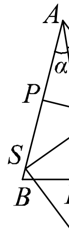
B. Nivel liceal

L126. *Fie ABC un triunghi ascuţitunghic. Mediatoarea laturii AB in*
latura AC în T, iar mediatoarea laturii AC intersectează latura AB în
arate că paralela prin T la AB, paralela prin S la AC şi simediana
concurente.

Titu Zvonaru, C

Soluţia 1 (în maniera autorului). Notăm cu b, c lungimile lat
respectiv AB şi fie $\alpha = m(\widehat{BAQ})$, $\beta = m(\widehat{CAQ})$, unde Q este intersecţ
prin T la AB cu paralela prin S la AC. Notăm, de asemenea, $\{D\} = AQ$
Folosind teorema sinusurilor în $\triangle ABD$ şi în $\triangle ACD$, găsim că

$$\frac{BA}{DC} = \frac{c}{b} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}. \qquad (1)$$



Cum patrulaterul $ASQT$este paralelogram, folosind triunghiul ASQ, deducem că

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{SQ}{AS} = \frac{AT}{AS} = \frac{\frac{c}{2\cos A}}{\frac{b}{2\cos A}} = \frac{c}{b}. \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) obţinem că $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{c^2}{b^2}$, de unde AD este simediana din A în triunghiul ABC.

Soluţia 2 (Vlad Emanuel, student, Bucureşti**).** Este cunoscut fapt
diana dusă dintr-un vârf este locul geometric al mijloacelor antiparalelelo

opusă (vezi, de exemplu, L. Niculescu şi V. Boskoff - *Probleme practice de* Ed. Tehnică, 1990). Cum noi dorim să arătăm că diagonala AQ a parale $ASQT$ este simediană, ar fi destul să demonstrăm că ST este antiparal deci că $\dfrac{AT}{AB} = \dfrac{AS}{AC}$. Acest lucru este însă evident, deoarece $AT =$ $AS = \dfrac{AC}{2\cos A}$ şi astfel rezolvarea este încheiată.

L127. *Fie $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ un hexagon inscriptibil. Să se arate că*

$$r_{A_1A_2A_3} + r_{A_4A_5A_6} + r_{A_1A_3A_6} + r_{A_3A_4A_6} = r_{A_3A_4A_5} + r_{A_1A_2A_6} + r_{A_2A_3A_6}$$

unde r_{XYZ} este raza cercului înscris în $\triangle XYZ$.

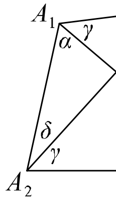
Cătălin Cali

Soluţie. Dacă R este raza cercului circumscris hexagonului, este cunosc $r_{XYZ} = 4R\sin\dfrac{X}{2}\sin\dfrac{Y}{2}\sin\dfrac{Z}{2}$, unde XYZ este un triunghi având vârfur cu hexagonul. Vom demonstra întâi următoarea

Lemă. *Dacă $A_1A_2A_3A_4$ este un patrulater inscriptibil, atunci*

$$r_{A_1A_2A_3} + r_{A_1A_3A_4} = r_{A_1A_2A_4} + r_{A_2A_3A_4}.$$

Într-adevăr, cu notaţiile din figură, vom avea:



$$r_{A_1A_2A_3} + r_{A_1A_3A_4} = 4R\Big(\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma+\delta}{2} + \\ + \sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\delta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\Big);$$

$$r_{A_1A_2A_4} + r_{A_2A_3A_4} = 4R\Big(\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\delta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2} + \\ + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\delta}{2}\Big)$$

şi dezvoltând $\sin\dfrac{\gamma+\delta}{2} = \sin\dfrac{\gamma}{2}\cos\dfrac{\delta}{2} + \sin\dfrac{\delta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}$ etc., obţinem concluzia

Aplicând lema patrulaterelor inscriptibile $A_1A_2A_3A_6$ şi $A_3A_4A_5A_6$ membru cu membru egalităţile obţinute, găsim tocmai relaţia de demonst

Notă. Aceeaşi soluţie a fost dată de **Vlad Emanuel**, student, Bucur

L128. *Să se arate că între medianele unui triunghi are loc inegalitate*

$$8\left(\prod m_a\right)\left(\sum m_a^2m_b^2\right) \geq \left[\prod(m_a+m_b)\right]\left[2\sum m_a^2m_b^2 - \sum m_a^4\right.$$

Dorel Băiţan şi **I.V.Maftei,**

Soluţie. Avem, folosind cunoscutele $x^2+y^2+z^2 \geq xy+xz+yz$, sin şi $4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} = r$, că

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geq abc(a+b+c) \geq (b+c)\sin\frac{A}{2}(c+a)\sin\frac{B}{2}(a+b)\sin$$

$$= \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cdot 2p\cdot(a+b)(b+c)(c+a) =$$

$$= \frac{r}{4R}\frac{2S}{r}(a+b)(b+c)(c+a) = \frac{S}{2R}(a+b)(b+c)(c+$$

Apoi, să observăm că are loc identitatea

$$a^4+b^4+c^4+(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)=2\left(a^2b^2+b^2c\right.$$

de unde obţinem că

$$a^4+b^4+c^4+16S^2=2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$$

Pentru triunghiul de laturi a, b, c, există un triunghi dual, având laturi

m_c. Relaţia (1) aplicată în triunghiul dual ne dă că $2\left(\sum m_a^2m_b^2\right)\geq\frac{\widetilde{S}}{\widetilde{R}}\prod$

şi putem scrie, folosind (2), că

$$\frac{\widetilde{S}}{\widetilde{R}}=\frac{\widetilde{S}}{\frac{m_am_bm_c}{4\widetilde{S}}}=\frac{16\widetilde{S}^2}{4m_am_bm_c}=\frac{2\left(\sum m_a^2m_b^2\right)-\sum m_a^4}{4m_am_bm_c}.$$

Combinând aceste relaţii se obţine concluzia problemei.

Notă. Principial aceeaşi soluţie a dat **Marius Olteanu**, inginer, Rm

L129. *În planul raportat la un reper cartezian xOy considerăm vec în O: $\vec{v}_1(a_1,b_1)$, $\vec{v}_2(a_2,b_2)$, $\vec{v}_3(a_3,b_3)$. Să se arate că există un tetraed regulat, de muchie 1 şi astfel încât $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ se proiectează pe plan $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, respectiv $\vec{v}_3$ dacă şi numai dacă se verifică simultan relaţiile:*

$$\frac{3}{2}\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)-a_1a_2-a_1a_3-a_2a_3=\frac{3}{2}\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right)-b_1b_2-b_1b_3-$$

$$\frac{3}{2}(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)-(a_1b_2+a_2b_1+a_1b_3+a_3b_1+a_2b_3+a_3b_2)$$

Irina Mustaţă, studentă

Soluţie. Completăm reperul din plan la unul în spaţiu $Oxyz$ şi fie A $B(a_2,b_2,c_2)$, $C(a_3,b_3,c_3)$ astfel încât $OABC$ este tetraedru regulat de Din $OA=OB=OC=1$ deducem că $a_1^2+b_1^2+c_1^2=a_2^2+b_2^2+c_2^2=a_3^2+$ 1, iar din $m(\widehat{AOB})=m(\widehat{BOC})=m(\widehat{COA})=60^\circ$ rezultă, via produs $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3=a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3=\frac{1}{2}$. Acest pot fi scrise sub formă matriceală astfel:

$$\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_2&c_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_2\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}.$$

Fie $X=\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_2&c_3\end{pmatrix}$, iar $A=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$; vom avea $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&-\\-\frac{1}{2}&\\-\frac{1}{2}&-\end{pmatrix}$ deci

$$X\left(X^TA^{-1}\right)=I_3$$

Evident, de aici avem că $X^TA^{-1}X=I_3$ şi, după efectuarea calculelor, se exact cele trei condiţii din enunţul problemei.

Să arătăm acum că aceste condiţii sunt suficiente, adică să demonstrăm găsi c_1, c_2, c_3 care să dea restul condiţiilor din egalitatea (2). Ecuaţiile în

c_1, c_2, c_3 sunt:

$$c_1\left(\frac{3a_1}{2}-\frac{a_2}{2}-\frac{a_3}{2}\right)+c_2\left(-\frac{a_1}{2}+\frac{3a_2}{2}-\frac{a_3}{2}\right)+c_3\left(-\frac{a_1}{2}-\frac{a_2}{2}+\frac{3a_3}{2}\right.$$

$$c_1\left(\frac{3b_1}{2}-\frac{b_2}{2}-\frac{b_3}{2}\right)+c_2\left(-\frac{b_1}{2}+\frac{3b_2}{2}-\frac{b_3}{2}\right)+c_3\left(-\frac{b_1}{2}-\frac{b_2}{2}+\frac{3b_3}{2}\right.$$

$$\frac{3}{2}\left(c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)-c_1c_2-c_1c_3-c_2c_3=1.$$

Primele două sunt ecuaţii omogene cu 3 necunoscute, despre care se şt variabilă liberă, deci o soluţie netrivială $(\widetilde{c_1},\widetilde{c_2},\widetilde{c_3})$. Cum a treia ecuaţie est şi omogenă în c_1, c_2, c_3, putem înmulţi $\widetilde{c_1}$, $\widetilde{c_2}$, $\widetilde{c_3}$ cu un factor k astfel încât să fie îndeplinită şi rezolvarea problemei este încheiată.

L130. *Să se arate că pentru orice $x, y \geq 1$ are loc inegalitatea*

$$(xy-x-y)^2+\left(6\sqrt{3}-10\right)xy \geq 6\sqrt{3}-9.$$

Gabriel Dospinescu, Paris şi **Marian Tetiv**

Soluţie. Luăm $x=a+1$, $y=b+1$, cu $a,b\geq 0$; inegalitatea de c devine

$$a^2b^2+\left(6\sqrt{3}-10\right)(a+b+ab)-2ab\geq 0.$$

Cum $a+b\geq 2\sqrt{ab}$ şi $6\sqrt{3}-10>0$, ar fi suficient să arătăm că

$$a^2b^2+\left(6\sqrt{3}-10\right)\left(2\sqrt{ab}+ab\right)-2ab\geq 0.$$

Cu notaţia $t=\sqrt{ab}\geq 0$, am avea de justificat că

$$t^4+\left(6\sqrt{3}-10\right)t^2+2\left(6\sqrt{3}-10\right)t\geq 0 \Leftrightarrow f(t)\geq 0,$$

unde $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(t)=t^3+\left(6\sqrt{3}-10\right)t+2\left(6\sqrt{3}-10\right)$. Deriv funcţiei este $f'(t)=3\left(t^2-\left(\sqrt{3}-1\right)^2\right)$, care are ca singură rădăcină p $\sqrt{3}-1$. E uşor de văzut că acesta este punct de minim pentru f pe interva prin urmare $f(t)\geq f\left(\sqrt{3}-1\right)=0$, $\forall t\geq 0$, ceea ce încheie demonstraţia.

Nota autorilor. De fapt, avem că $f(t)=\left(t-\sqrt{3}+1\right)^2\left(t+2\sqrt{3}-\right.$ conduce la concluzia dorită $f(t)\geq 0$, $\forall t\geq 0$, însă această descompuner greu de văzut.

Notă. Soluţii asemănătoare celei prezentate s-au primit de la **Vlad** student, Bucureşti, precum şi de la dl. **Marius Olteanu**, inginer, Rm. V

L131. *Să se afle valoarea minimă a numărului real k astfel încât, o a, b, c reale pozitive cu $a+b+c=ab+bc+ca$, să aibă loc inegalitatea*

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}-k\right)\leq k.$$

Andrei Ciupan, elev,

Soluţii. În particular, inegalitatea din enunţ trebuie să aibă loc pentr $c=1$; astfel, $3\left(\frac{3}{2}-k\right)\leq k \Leftrightarrow k\geq\frac{9}{8}$. Vom arăta că $\frac{9}{8}$ este valoarea minin a lui k; pentru aceasta, ar trebui să arătăm că

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\leq\frac{9}{8}(a+b+c+1),$$

oricare ar fi $a,b,c\in\mathbb{R}_+$ cu $a+b+c=ab+bc+ca$. Observăm că

$$a+b+c+1=\frac{(a+b+c)^2+(a+b+c)}{a+b+c}=\frac{(a+b+c)^2+ab+bc+}{a+b+c}$$

$$=\frac{(a+b)(b+c)+(b+c)(c+a)+(c+a)(a+b)}{a+b+c};$$

astfel, ar fi suficient să demonstrăm că $(a+b+c)\dfrac{1}{a+b}\leq\dfrac{9(b+c)(c+a)}{8(a+b+c)}$

scriind încă două inegalităţi similare şi sumându-le, obţinem chiar ceea

Această ultimă inegalitate se scrie succesiv:

$$9(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8(a+b+c)^2\Leftrightarrow 9(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$\geq 8(a+b+c)(ab+bc+ca)\Leftrightarrow 9(a+b)(b+c)(c+a)\geq$$

$$\geq 8(a+b)(b+c)(c+a)+8abc\Leftrightarrow(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$$

fapt care rezultă din inegalitatea mediilor.

Notă. Soluţie corectă a dat dl. **Marius Olteanu**, inginer, Rm. Vâlc

L132. *Fie* $a,b,c,x,y,z\in\mathbb{R}$ *şi* $A=ax+by+cz$, $B=ay+bz+cx$, $C=$

Dacă $|A-B|\geq 1$, $|B-C|\geq 1$ *şi* $|C-A|\geq 1$, *arătaţi că* $\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+\right.$

Adrian Zahariuc, ele

Soluţie. Deoarece distanţa pe axa reală între oricare două dintre nu B şi C este cel puţin 1, distanţa dintre cel mai mare şi cel mai mic dint cel puţin 2, deci cel puţin unul dintre ele se află la distanţa de cel puţi origine. Putem presupune că $|A|=\max\{|A|,|B|,|C|\}\geq 1$. Folosind ide Lagrange şi inegalitatea CBS, obţinem:

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)=(ax+by+cz)^2+(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+$$

$$\geq(ax+by+cz)^2+\frac{(ay+bz+cx-bx-cy-az)^2}{3}=|A|^2+\frac{|B-C|}{3}$$

L133. *Determinaţi funcţiile* $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ *pentru care*

$$2f(n+3)f(n+2)=f(n+1)+f(n)+1,\quad\forall n\in\mathbb{N}.$$

Gheorghe I

Soluţie. Notăm $a_n=f(n)$, $n\in\mathbb{N}$; atunci $2a_{n+3}a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ $2a_{n+4}a_{n+3}=a_{n+2}+a_{n+1}+1$, deducem că $2a_{n+3}(a_{n+4}-a_{n+2})=a_{n+2}-a$ Prin urmare, $2a_{n+3}|a_{n+4}-a_{n+2}|=|a_{n+2}-a_n|$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Deoarece $2a$ $a_{n+1}+a_n+1\geq 1$, rezultă că $a_n\neq 0$, $\forall n\geq 2$. Dacă există $n_0\in\mathbb{N}$ cu a folosind relaţiile anterioare găsim că $a_{n_0+4}\neq a_{n_0+2}$, $a_{n_0+6}\neq a_{n_0+4}$, ...,

$$|a_{n_0+2}-a_{n_0}|>|a_{n_0+4}-a_{n_0+2}|>|a_{n_0+6}-a_{n_0+4}|>\cdots>0,$$

contradicţie. Prin urmare, $a_{n+2}=a_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Notând $a_1=a_3=a_5=\cdots$ $a_2=a_4=a_6=\cdots=b\in\mathbb{N}$, găsim $2ab=a+b+1$, de unde $a=1$, $b=2$ $b=1$, deci $f(n)=\begin{cases}1,\ n\text{ par}\\2,\ n\text{ impar}\end{cases}$ sau $f(n)=\begin{cases}2,\ n\text{ par}\\1,\ n\text{ impar}\end{cases}$.

L134. *Avem un colier cu* n *mărgele, numerotate consecutiv* $1, 2, \ldots$
$n \geq 3$. *În câte moduri putem să le colorăm cu trei culori, astfel încât o*
mărgele consecutive să aibă culori diferite?

Iurie Boreico, elev,

Soluţie. Notăm cu a_n numărul modalităţilor de colorare şi vom calc
cursiv. Evident că $a_2 = a_3 = 6$. Fie $n \geq 4$; putem alege culoarea mă
3 moduri, iar culorile mărgelelor $2, 3, \ldots, n$ în câte două moduri, obţin
$3 \cdot 2^{n-1}$ modalităţi de colorare în care mărgelele 1 şi 2, 2 şi 3, ..., $n -$
culori diferite. Mai avem însă o condiţie: ca mărgelele n şi 1 să aibă culo
atunci $3 \cdot 2^{n-1} = a_n + b_n$, unde $b_n$este numărul colorărilor de tipul descr
pentru care mărgelele 1 şi n au aceeaşi culoare. Observăm că $b_n = a_{n-1}$, s
mărgelei n dând o corespondenţă bijectivă între numărul colorărilor coresp
prin urmare $a_{n-1} + a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.

Avem că $a_n + a_{n+1} = 3 \cdot 2^n$ şi, prin scădere, $a_{n+1} - a_{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1}$. D

$$a_{2k+1} = 3\left(2^{2k-1} + 2^{2k-3} + \cdots + 2^3\right) + a_3 = 6\left(a^{2k-2} + \cdots + 2^2 + 1\right) = 6$$

$2^{2k+1} - 2$. Cum $a_{2k} + a_{2k+1} = 3 \cdot 2^{2k}$, vom avea că $a_{2k} = 2^{2k} + 2$. Răspu
fi scris sub forma $a_n = 2^n + 2 \cdot (-1)^n$.

L135. *Se consideră un poligon cu* $3n$ *laturi,* $n \geq 2$, *înscris într-un c*
1. *Arătaţi că cel mult* $3n^2$ *dintre segmentele având capetele în vârfurile*
au lungimea strict mai mare decât $\sqrt{2}$.

Bianca-Teodora Iordache, elevă

Soluţie. Evident că oricum am alege 4 puncte pe cercul de rază
două printre acestea situate la o distanţă cel mult egală cu $\sqrt{2}$. Consic
ful $G(X, U)$, unde X este mulţimea vârfurilor poligonului iniţial, iar două
fi unite printr-o muchie dacă şi numai dacă distanţa dintre ele este strict
decât $\sqrt{2}$. Conform observaţiei iniţiale, oricum am alege 4 vârfuri ale graf
două care nu sunt unite printr-o muchie, deci G nu conţine subgrafuri c
ordin 4. Aplicăm acum următorul rezultat:

Teorema lui Turan. *Dacă* $G = (X, U)$ *este un graf neorientat cu* n
nu conţine subgrafuri complete de ordin p, *iar* r *este restul împărţirii lui*
atunci

$$|U| \leq \frac{p-2}{p-1} \cdot \frac{n^2 - r^2}{2} + \frac{r(r-1)}{2}.$$

În cazul nostru avem $3n$ vârfuri, $p = 4$, $r = 0$, prin urmare $|U| \leq 3r$
mult $3n^2$ distanţe formate cu vârfurile poligonului iniţial sunt strict mai m

Notă. Soluţie asemănătoare a dat **Vlad Emanuel**, student, Bucureş

Probleme propuse[1]

Clasele primare

P.154. Dorina are 15 baloane roşii şi albastre. Câte baloane roşii p
dacă numărul acestora este mai mic decât numărul baloanelor albastre
puţin egal cu 3?
(*Clasa I*) **Inst. Maria E**

P.155. Dintr-o carte lipsesc câteva pagini, de la numărul 71 la număru
foi lipsesc din această carte?
(*Clasa I*) **Ionela Bărăgan, e**

P.156. La concursul "Desene pe asfalt", elevii claselor I-IV de la Şco
Cazimir" au acumulat 50 de puncte şi cel puţin 2 premii din fiecare categ
este cel mare număr de premii pe care-l pot primi elevii, dacă pentru pre
acordat 10 puncte, pentru premiul al II-lea s-au acordat 6 puncte, iar pent
al III-lea s-au acordat 4 puncte?
(*Clasa a II-a*) **Înv. Elena P**

P.157. Prin golirea unui singur vas, ales dintre cele de mai jos, put
restul vaselor să aibă cantităţi egale de lichid. Care vas trebuie golit?

9 litri	10 litri	11 litri	12 litri	13 litri	14 litri	15 litri

(*Clasa a II-a*) **Amalia Cantemir, e**

P.158. Aflaţi trei numere naturale ştiind că, adunându-le două câte do
100, 89, respectiv, 141.
(*Clasa a III-a*) **Inst. Maria E**

P.159. Se consideră numerele: $a = 1 + 4 + 7 + 10 + \cdots + 2008$, $b =$
$+ \cdots + 2009$, $c = 3 + 6 + 8 + \cdots + 2010$. Arătaţi că suma $a + b + c$ se îm
la 3, fără să calculaţi această.
(*Clasa a III-a*) **Iuliana Moldovanu, e**

P.160. Numărul a este de forma $\overline{xy0}$, iar numărul b este de forma $\overline{uv}$
a şi b ştiind că $a + b = 22$ zeci.
(*Clasa a III-a*) **Dragoş Toma,**

P.161. Fie a şi b două numere naturale astfel încât diferenţa lor este d
mică decât suma lor. Să se arate că numărul cel mai mare se împarte exa
cel mai mic se împarte exact la 2.
(*Clasa a IV-a*) **Diana Tănăsoaie, e**

P.162. Maria are 9 săculeţi cu monede. Cel puţin un săculeţ cân
kilogram. În orice grupare de 5 săculeţi, cel puţin 3 săculeţi au aceeaşi m
orice grupare de 6 săculeţi, cel mult 5 săculeţi au aceeaşi masă. Care es
mare număr de săculeţi de un kilogram pe care îl poate avea Maria?
(*Clasa a IV-a*) **Petru As**

[1] Se primesc soluţii până la data de 1 iunie 2009.

P.163. Jumătatea produsului a două numere naturale consecutive în
3, nu poate da niciodată restul 2.

Recreaţii Ştiinţifice, Anul I (1883), nr. 4,

Clasa a V-a

V.95. Două numere naturale se scriu în baza 10 folosind doar cifrele 1
Poate fi unul dintre numere de 2008 ori mai mare decât celălalt?

Cătălin Bud

V.96. Determinaţi $k, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$(1 + 1 \cdot n) + (2 + 2 \cdot n) + \cdots + (k + k \cdot n) = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6.$$

Petru As

V.97. Arătaţi că numărul $N = 17^n + 21^n + 25^n$, $n \in \mathbb{N}$, nu poate fi pătr

Virginia Grigorescu

V.98. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se demonstreze că numărul $N = 5050\ldots505$ (2
se scrie ca sumă a $4n + 2$ pătrate perfecte distincte.

Veronica Plăeşu şi Dan Pl

V.99. Se consideră numărul $N = 1 + 11 + 101 + 1001 + \cdots + \underbrace{100\ldots0}_{n \text{ cifre}}$

a) Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$, arătaţi că $5 \mid N \Leftrightarrow 5 \mid n$.

b) Precizaţi care dintre propoziţiile "$3 \mid n \Rightarrow 3 \mid N$" şi "$3 \mid N \Rightarrow$
adevărată pentru orice $n \geq 3$.

Temistocle Bî

V.100. Determinaţi numerele naturale nenule a şi b pentru care exi
astfel încât $\dfrac{a}{b} = \dfrac{3n+2}{7n+5}$ şi $3a + 2b < 100$.

Gheorghe I

V.101. Considerăm fracţia $\dfrac{an+b}{cn+d}$, unde $n, a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$, astfel încâ
parităţi diferite, iar a şi c au aceeaşi paritate. Arătaţi că, dacă $ad - bc =$
atunci fracţia este ireductibilă.

Cosmin Manea şi Dragoş Petric

Clasa a VI-a

VI.95. Determinaţi numerele naturale nenule $a_1, a_2, \ldots, a_{2008}$, ştiind
$\dfrac{a_2 a_3}{2 \cdot 3} = \cdots = \dfrac{a_{2007} a_{2088}}{2007 \cdot 2008}$, iar $a_1 + a_{2008} = 2009$.

Gheorghe I

VI.96. Determinaţi $p \in \mathbb{N}$ pentru care numerele p, $p + 12$, $p + 22$, $p +$
$p + 102$ şi $p + 132$ sunt prime.

Damian Marinescu, T

VI.97. *a*) Dacă $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}^*$ sunt astfel încât $(a, b) = (c, d) =$
$(b, d) = 1$, iat $t = \dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d} + \dfrac{e}{f} \in \mathbb{N}$, arătaţi că $f = bd$.

b) Determinaţi $a, b \in \mathbb{N}$ pentru care $\dfrac{4}{2a+1} - \dfrac{1}{2^b} + \dfrac{7}{6} \in \mathbb{N}$.

Cosmin Manea şi Dragoş Petric

VI.98. Determinaţi cel mai mic număr natural n cu proprietatea c
zerourilor în care se termină numărul $(n+10)!$ este cu 2008 mai mare dec
zerourilor în care se termină $n!$ (unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$).

Cătălin Bud

VI.99. Un patrulater convex are două laturi opuse congruente şi
congruente. Arătaţi că patrulaterul este trapez isoscel sau dreptunghi.

Ioan Săcălean

VI.100. Fie $\triangle ABC$ cu $m(\widehat{A}) \geq 90°$. Să se arate că $m(\widehat{B}) = 2m($
numai dacă există $M \in [BC]$ astfel încât $AB = AM = MC$.

Petru As

VI.101. Fie ABC un triunghi dreptunghic cu $m(\widehat{A}) = 90°$ şi CD
unghiului $\widehat{C}$, $D \in (AB)$. Perpendiculara din D pe bisectoarea unghiul
sectează ipotenuza BC în E. Dacă P este punctul de intersecţie a bi
unghiurilor triunghiului ABC, iar M este punctul de intersecţie dintre
arătaţi că $\widehat{MPA} \equiv \widehat{PBE}$.

Nela Ciceu, Bacău şi Titu Zvonaru, C

Clasa a VII-a

VII.95. Fie $ABCD$ pătrat, M un punct oarecare pe (AB), iar $N \in$
astfel încât $MN \perp MD$. Arătaţi că $AM \cdot AB + CN \cdot CB = DM^2$.

Ovidiu Pop, Satu Mare şi Gh. Szöllösy, Sighetul M

VII.96. Fie $[AD]$ mediană în $\triangle ABC$, M mijlocul lui $[AD]$, $\{E\} =$
iar punctul F pe dreapta AB este astfel încât $CF \parallel AD$. Demonstraţi c
D, E şi F sunt coliniare.

Mirela M

VII.97. Fie $\mathcal{C}_1(O_1, r_1)$ şi $\mathcal{C}_2(O_2, r_2)$, $r_1 < r_2$, două cercuri tangent
Considerăm punctele $A' \in \mathcal{C}_1$, $B' \in \mathcal{C}_2$, de aceeaşi parte a dreptei O_1O_2,
$A'O_1 \parallel B'O_2$. Dacă AB este tangentă comună exterioară a cercurilor
$B \in \mathcal{C}_2$), demonstraţi că dreptele AB, $A'B'$ şi O_1O_2 sunt concurente.

Romanţa Ghiţă şi Ioan G

VII.98. Să se determine numerele naturale nenule a şi b, ştiind că
proporţionale cu $b-6$ şi a şi invers proporţionale cu $a+12$ şi b.

Constantin Apostol, R

VII.99. Fie $a, b \in \mathbb{Z}$ şi numerele $A = 119a^5 + 5b^3 - 4a$ şi $B = 119b^5$
Să se arate că A se divide cu 120 dacă şi numai dacă B se divide cu 120.

Dan Nedeianu, Dr. Tr

VII.100. Arătaţi că $2a^2 + 15b^2 + 7c^2 \geq 10ab - 6ac + 20bc$, $\forall a, b, c \in$

Alexandru Negrescu, stu

VII.101. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, notăm cu $d(n)$ numărul divizorilor primi ai
$a)$ Determinaţi cardinalul mulţimii $A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n \leq 208, d(n) = 3\}$.
$b)$ Aflaţi cel mai mic şi cel mai mare element al mulţimii

$$B = \{k \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}^*, n \leq 2008, \text{ a.î. } d(n) = k\}.$$

Gabriel

Clasa a VIII-a

VIII.95. Pentru $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, notăm $\alpha = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$, $\beta = \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$
numărul $x = \frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{c^3} + \frac{c^3}{a^3}$ în funcţie α şi β.

Elena Nicu, Malu-Ma

VIII.96. Rezolvaţi în numere naturale ecuaţia $x^2 + y^2 + xy = x^2y^2$.

Mihail Bencz

VIII.97. Fie d_1, d_2, d_3, d lungimile diagonalelor feţelor, respectiv diag
paralelipiped dreptunghic. Dacă $d_1^2 = \frac{2d_2^2 d_3^2}{d_2^2 + d_3^2}$, să se arate că paralelipi
muchie de lungime cel puţin egală cu $\frac{d\sqrt{3}}{3}$.

Gheorghe Molea, Curtea

VIII.98. Fie $VABCD$ piramidă patrulateră regulată. Notăm $u = m((V$
$v = m(\widehat{(VBC), (VCD)})$ şi $t = m(\widehat{(VBC), (VAD)})$. Arătaţi că $u + v + t$

Claudiu Ştefan

VIII.99. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, considerăm $A = \left\{1^2, 2^2, 3^2, \ldots, n^2\right\}$. Dete
ştiind că există o funcţie $f : A \to A$ astfel încât $f(x) - f(y) = \sqrt{x} - \sqrt{y}$,

Cristian L

VIII.100. Rezolvaţi în în $\mathbb{N}^2$ ecuaţia $x^2 - 8^n + 1287 = 0$.

Mihai Crăciun

VIII.101. Se calculează suma cifrelor pentru fiecare dintre numerele
n, $n > 10$. Pentru fiecare sumă dintre cele n se calculează din nou sun
repetându-se această operaţie până când obţinem n numere formate din cât
cifră. Să se afle n, ştiind că în mulţimea astfel obţinută cifrele 1, 2, 3 şi
de câte 101 ori fiecare, iar cifrele 5, 6, 7, 8 şi 9 de câte 100 ori fiecare.

Mihai Ha

Clasa a IX-a

IX.91. Fie $a, b, c, p \in \mathbb{R}$, $p > 0$. Dacă $\left|ax^2 + bx + c\right| \le p$, $\forall x \in [-1$
$\left|cx^2 + bx + a\right| \le 2p$, $\forall x \in [-1, 1]$.

Dorin Mărghidanu

IX.92. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 3$, iar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $n + \alpha + \beta \ne 0$. Ară

$$\frac{(1+\alpha)\cdots(n+\alpha)}{n+\alpha+\beta} - (1+\alpha)\cdots(n-1+\alpha) + \sum_{i=1}^{n-2}(-1)^{i+1}(1+\alpha)\cdots(n-i$$

$$\times\beta(\beta+1)\cdots(\beta+i-1) + (-1)^n\beta\cdots(\beta+n-2) = (-1)^n\frac{\beta(\beta+1)\cdots(}{n+\alpha}$$

Gheorghe Cost

IX.93. Fie $\triangle ABC$ dreptunghic cu $m(\widehat{A}) = 90°$ şi $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{2}$, iar D
$[AC]$. Notăm cu E punctul de intersecţie a cercurilor $\mathcal{C}_1(A, AD)$ şi $\mathcal{C}_2(B,$
de aceeaşi parte a dreptei AB ca şi punctul C. Determinaţi măsura unghi

Cătălin Ţigăeru

IX.94. În $\triangle ABC$, I este centrul cercului înscris, iar $\{M\} = AI \cap BC$
straţi că bisectoarea unghiului $\widehat{AMC}$, BI şi AC sunt trei drepte concure
numai dacă $m(\widehat{A}) = 120°$.

Vlad Emanuel, student şi Andrei Cozma, elev,

IX.95. Dacă $x_i \in [0,a]$, $i = \overline{1,n}$ şi $x_{n+1} = x_1$, demonstraţi că

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i+1}(a - x_i) < \frac{na^2}{4\sin^2 \frac{\pi}{4}}.$$

Gigel Buth, S

Clasa a X-a

X.91. Arătaţi că

$$\left[\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{7}\right)^2 + \left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{\pi^2}{16}\right]^2 = 2\left[\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{7}\right)^4 + \left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)^4 + \right.$$

D. M. Bătineţu-Giurgiu,

X.92. Fie $a, b \in \mathbb{C}$. Demonstraţi că ecuaţia $z^2 - az + b = 0$ are ambel
modul 1 dacă şi numai dacă $|b| = 1$ şi $|a|^2 + \left|a^2 - 4b\right| = 4$. (*În legătură c
RecMat - 1/2007.*)

Marian Tetiv

X.93. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (0,1)$ sau $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (1,\infty)$, iar $f, g : \{$
$\to \{1, 2, \ldots, n\}$ sunt funcţii injective, să se arate că

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\log_{a_k} a_{f(k)}}{a_{g(k)}}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \geq n^2.$$

Dan Popescu

X.94. *a*) Să se arate că

$$\sqrt{x^{2n} + y^{2n} + x^n y^n} + \sqrt{x^{2n} + z^{2n} + x^n z^n} \geq \sqrt{y^{2n} + z^{2n} + y^n z^n},\ \forall x, y, z \in$$

b) Demonstraţi că, dacă n este par, inegalitatea este strictă, iar dacă n
atunci există $x, y, z \in \mathbb{R}$ pentru care se atinge egalitatea.

Bogdan Victor Grigoriu,

X.95. Considerăm funcţia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x, y, z) = \sin x + \sin y + \sin z + \sin(x - y) + \sin(y - z) + \sin(z -$$

Determinaţi maximul şi minimul funcţiei f.

Cătălin Cal

Clasa a XI-a

XI.91. Fie matricele $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât $AC + BD$
$AD = BC$. Demonstraţi că $CA + DB = I_n$ şi $DA = CB$.

I. V. Maftei, Bucureşti şi Mihai Ha

XI.92. Determinaţi matricele $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pentru care $X^2 + X = \Big($

Adrian Reis

XI.93. Studiaţi convergenţa şirului $(u_n)_{n\geq 1}$ definit prin $u_1 \geq 0$, u_{n+1}
$\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Gheorghe Costovici şi Adrian Cordun

XI.94. Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, există numerel
$x_1, x_2, \ldots, x_n \in (1,2)$, aşa încât $x_1 x_2 \cdots x_n = \left(\frac{4}{e}\right)^n$.

Dan Pl

XI.95. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)+\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^{\frac{1}{2^\alpha}}+\cdots+\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^{\frac{1}{n^\alpha}}\right.$
$\alpha \geq 1$ este fixat. (*În legătură cu L83 din RecMat-1/2005.*)

Marius Olteanu, Rn

Clasa a XII-a

XII.91. Prove that $\int\limits_0^1 (1+x)\, e^{(1+x)e^x} dx = e^e - 1$.

Zdravko Starc, Vrša

XII.92. Fie $b > a > 0$, iar $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe $[a,b]$ şi
pe (a,b); să se arate că există $c \in (a,b)$ astfel încât $b\int\limits_a^c f(x)\, dx = c\,(b-c)$

Dan Nedeianu, Dr. Tr

XII.93. Demonstraţi că există $c \in (2,\pi)$ pentru care $\int\limits_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{2\,\mathrm{co}}{c}$

Constantin Micu, Meline

XII.94. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} n \int\limits_n^{2n} \frac{x^a + b}{\sqrt{x^{2a+4}+1}} dx$, unde $a \in (0,\infty)$ şi $b \in \mathbb{R}$.

Liviu Smarandache

XII.95. Fie $(A,+,\cdot)$ un inel în care $0 \neq 1$ şi $1+1+1+1+1 = 0$.
că, dacă $x^3y^2 = y^2x^3$, $\forall x, y \in A$, atunci inelul este comutativ.

I.V. Maftei, Bucureşti şi Mihai Ha

Probleme pentru pregătirea concursurilo

A. Nivel gimnazial

G146. Fie $x, y, z \in (0, \infty)$ astfel încât $xyz = 1$. Arătaţi că
$$\frac{xy^3}{x^4+y+z}+\frac{yz^3}{y^4+z+x}+\frac{zx^3}{z^4+x+y}\geq 1.$$

Liviu Smarandache şi Lucian Tuţescu

G147. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, fixat, iar a, b, c sunt numere naturale a
$na + (n+1)\,b + 2nc = n^2 + 1$. Arătaţi că $n - \left[\dfrac{n-1}{2}\right] \leq a+b+c \leq n$.

Gheorghe I

G148. Fie $\overline{a_1a_2\ldots a_p} \in \mathbb{N}$. Să se arate că orice număr natural are u
de forma $\overline{a_1a_2\ldots a_pa_1a_2\ldots a_p\ldots a_1a_2\ldots a_p0\ldots 0}$.

Marian Panţ

G149. a) Determinaţi două numere prime p, q astfel încât $p < q$, iar
mai mulţi divizori naturali decât $q^2 - 1$.

b) Determinaţi toate numerele prime p pentru care $p^2 - 1$ are exact o
naturali.

Dan Popescu

G150. Fie m şi n numere naturale nenule cu proprietatea că $m \leq 1+$
Să se arate că m poate fi scris ca suma câtorva numere distincte dintre 1

Marian Tetiv

G151. Bazele unei prisme sunt poligoane cu 2008 vârfuri. Numero
2,..., 2008 vârfurile bazei inferioare şi, corespunzător, cu a_1, a_2,..., a_{200}
bazei superioare, unde $\{a_1, a_2, \ldots, a_{2008}\} = \{1, 2, \ldots, 2008\}$.

a) Demonstraţi că putem găsi o numerotare pentru baza superioară a
$i + a_i \,\vdots\, 8$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, 2008\}$.

b) Demonstraţi că nu putem găsi o numerotare pentru baza superioară a
$i + a_i \,\vdots\, 9$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, 2008\}$.

Gabriel Popa şi Gheorghe I

G152. În triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$) notăm cu B', C' picioa
milor din B, respectiv C. Dacă $AB = 2\,B'C'$, să se determine unghiurile tr

Nela Ciceu, Bacău şi Titu Zvonaru, C

G153. În triunghiul ABC, M este mijlocul laturii $[BC]$, $m(\widehat{ABC}$
$m(\widehat{ACB}) = 105°$. Perpendiculara din C pe AM taie AB în Q. Calcula
raportului $\dfrac{QA}{QB}$.

Neculai Roman, Mirc

G154. Fie D mijlocul laturii $[BC]$ a triunghiului echilateral ABC d
iar P un punct mobil pe $[CD]$. Notăm cu M şi N proiecţiile pe AP ale pu
respectiv C. Aflaţi aria locului geometric descris de segmentul $[MN]$.

Marius Olteanu, Rn

G155. Fie $\mathcal{C}$ cercul circumscris $\triangle ABC$ ascuţitunghic. Notăm cu P
intersecţie al tangentelor duse la cerc în B şi C, $\{D\} = AP \cap \mathcal{C}$, iar M

mijloacele arcului mic $\overset{\frown}{BC}$, respectiv arcului mare $\overset{\frown}{BC}$. Să se arate că dre
DN şi BC sunt concurente.

Gabriel I

B. Nivel liceal

L146. În plan se consideră dreptele d_1, d_2,..., d_{n+1}, oricare două
Notăm cu $\alpha_k = m(\widehat{d_k, d_{k+1}})$, $\alpha_k \leq 90°$, $k = \overline{1,n}$. Pe d_1 se consideră u
de lungime 2 care se proiectează pe d_2, apoi segmentul obţinut se proi
d_3 şi tot aşa, până când pe d_{n+1} se obţine un segment de lungime 1.
$\operatorname{tg}\left(\min\left\{\alpha_i \mid i = \overline{1,n}\right\}\right) = \sqrt{\sqrt[n]{4} - 1}$, determinaţi unghiurile α_k, $k = \overline{1,n}$.

Cristian Săvescu, student, I

L147. Se consideră un poligon convex cu n laturi, $n \geq 4$, având prop
oricare două diagonale nu sunt paralele şi oricare trei nu sunt concurente
diferite de vârfurile poligonului. Se notează cu n_i numărul punctelor de in
diagonalelor interioare poligonului şi cu n_e cel al punctelor de intersecţie
poligonului.

a) Să se arate că există exact opt poligoane care verifică relaţia $n_i > n$

b) Să se arate că există exact trei poligoane pentru care $n_i + n_e = kn^2$

Mihai Ha

L148. Pe latura (AB) a triunghiului ABC considerăm punctul D a
$AB = 4\,AD$. De aceeaşi parte a laturii AB ca şi punctul C, luăm u
astfel încât $\widehat{PDA} \equiv \widehat{ACB}$ şi $PB = 2\,PD$. Demonstraţi că patrulaterul A
inscriptibil.

Nela Ciceu, Bacău şi Titu Zvonaru, C

L149. Să se determine poziţia punctului P pe directoarea parabole
încât aria triunghiului PT_1T_2 să fie minimă, unde T_1 şi T_2 sunt punctele
cu parabola ale tangentelor duse din P la $\mathcal{P}$.

Adrian Cordun

L150. Fie tetraedrul $A_1A_2A_3A_4$, iar P un punct în interiorul său.
$A_{ij} \in (A_iA_j)$ proiecţiile ortogonale ale lui P pe muchiile A_iA_j ale te
Demonstraţi că

$$\mathcal{V}_{PA_{12}A_{13}A_{23}} + \mathcal{V}_{PA_{12}A_{14}A_{24}} + \mathcal{V}_{PA_{13}A_{14}A_{34}} + \mathcal{V}_{PA_{23}A_{24}A_{34}} \leq \frac{1}{4}\mathcal{V}_{A_1A_2}$$

Când se atinge egalitatea?

Marius Olteanu, Rm

L151. Să se demonstreze că nu există numere naturale n şi k a
$\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{2n+1}\right] = \left[\left(4+\sqrt{15}\right)^{k}\right]$.

Cosmin Manea şi Dragoş Petric

L152. Pentru $a, b, c \in \mathbb{R}$ şi $x \in \mathbb{R}_+$, demonstraţi inegalitatea

$$\frac{9}{a^2+b^2+c^2} \leq \frac{3\,(x+1)^2\,(a+b+c)^4}{\left[3(x^2+1)(a^2+b^2+c^2)+2x(a+b+c)^2\right](ab+bc+ca)^2} \leq$$

I. V. Maftei şi Dorel Băiţan, I

L153. Găsiţi toate funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f\left(x^2 + xy + yf(y)\right) = xf(x+y) + f^2(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Adrian Zahariuc, student, I

L154. Fie $P \in \mathbb{R}[X]$ un polinom de gradul n şi $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţia
ală asociată. Ştiind că mulţimea $\{x \in \mathbb{R} \mid p(x) = 0\}$ are k elemente (dis
funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |p(x)|$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$, arătaţi că numărul
rădăcini complexe nenule ale lui P este egal cu $2\left[\frac{n}{2}\right] - 2k$.

Vlad Emanuel, student, I

L155. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ două matrice astfel încât matricea $AB -$
inversabilă. Să se arate că urma matricei $(I_2 + AB)(AB - BA)^{-1}$ este eg

Florina Cârlan şi Marian Tetiv

Training problems for mathematical conte

A. Junior highschool level

G146. Let $x, y, z \in (0, \infty)$ such that $xyz = 1$. Prove that

$$\frac{xy^3}{x^4 + y + z} + \frac{yz^3}{y^4 + z + x} + \frac{zx^3}{z^4 + x + y} \geq 1.$$

Liviu Smarandache and Lucian Tuţescu

G147. Let $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ be a fixed number and let a, b, c be natura
such that $na + (n+1)b + 2nc = n^2 + 1$. Show that $n - \left[\frac{n-1}{2}\right] \leq a + b$

Gheorghe I

G148. Let $\overline{a_1 a_2 \ldots a_p} \in \mathbb{N}$. Show that every natural number has a
the form $\overline{a_1 a_2 \ldots a_p a_1 a_2 \ldots a_p \ldots a_1 a_2 \ldots a_p 0 \ldots 0}$.

Marian Pan

G149. a) Determine two prime numbers p, q so that $p < q$, and $p^2 -$
natural divisors than $q^2 - 1$.

b) Determine all the prime numbers p such that $p^2 - 1$ has exactly eig
divisors.

Dan Popescu

G150. Let m and n be nonzero natural numbers with the property
$1 + 2 + \cdots + n$. Show that m may be written as the sum of a couple
numbers among 1, 2,..., n.

Marian Tetiv

G151. The bases of a prism are polygons with 2008 vertices. We
$1, 2, \ldots, 2008$ the vertices of the lower basis and by a_1, a_2,..., a_{2008} the
the upper basis, where $\{a_1, a_2, \ldots, a_{2008}\} = \{1, 2, \ldots, 2008\}$.

a) Show that we can find a numbering for the upper basis so that
$\forall i \in \{1, 2, \ldots, 2008\}$.

b) Show that we cannot find a numbering for the upper basis so that
$\forall i \in \{1, 2, \ldots, 2008\}$.

Gabriel Popa and Gheorghe I

G152. In the isosceles triangle ABC ($AB = AC$), B', C' denote
the altitudes from B, respectively C. If $AB = 2\,B'C'$, determine the an
triangle.

Nela Ciceu, Bacău and Titu Zvonaru, C

G153. In the triangle ABC, M is the midpoint of the side $[BC]$, $m(\widehat{A}$
and $m(\widehat{ACB}) = 105°$. The perpendicular from C on AM cuts AB at Q.
the value of the ratio $\dfrac{QA}{QB}$.

Neculai Roman, Mirc

G154. Let D be the midpoint of the side $[BC]$ in the equilateral tria
of side length 1, and let P be a moving point on $[CD]$. Denote by M
projections of the points B, respectively C on AP Find the area of the
locus described by the segment $[MN]$.

Mariu Olteanu, Rn

G155. Let $\mathcal{C}$ be the circumcircle of the acute-angled triangle $\triangle ABC$.
P the intersection point of the tangents to the circle at B and C, $\{D\}$
while M and N are the midpoints of the small arc $\overset{\frown}{BC}$, respectively of
$\overset{\frown}{BC}$. Show that the straight lines AM, DN and BC meet at a point.

Gabriel I

B. Highschool level

L146. The straight lines d_1, d_2,..., d_{n+1}, are considered in the plane
any two lines are not parallel. We denote by $\alpha_k = m(\widehat{d_k, d_{k+1}})$, $\alpha_k \leq 90$
A segment of length 2 is cosidered on d_1 that is projected on d_2, then th
segment is projected on d_3 and so on, until a segment of length 1 is o
d_{n+1}. Knowing that $\tan\left(\min\left\{\alpha_i \mid i = \overline{1,n}\right\}\right) = \sqrt{\sqrt[n]{4} - 1}$, determine the
$k = \overline{1,n}$.

Cristian Săvescu, student, I

L147. A convex polygon with n sides, $n \geq 4$, is considered such that
diagonals are not parallel and and any three diagonals do not meet at o
except the vertices of the polygon. Let us denote by n_i the number of i
points of the diagonals inside the polygon and by n_e the number of intersec
of the diagonals outside the polygon.

a) Show that exactly eight polygons exist such that the inequality
satisfied.

b) Show that exactly three polygons exist such that $n_i + n_e kn^2$, $k \in \mathbb{N}$

Mihai Ha

L148. A point D is considered on the side (AB) of the triangle ABC
$AB = 4\,AD$. In the same halfplane as point C with respect to the side A
a point P such that $\widehat{PDA} \equiv \widehat{ACB}$ and $PB = 2\,PD$. Prove that the qu
$ABCP$ is inscriptible, that si it admits a circumscribed circle.

Nela Ciceu, Bacău and Titu Zvonaru, C

L149. Determine the position of the point P on the directrix line of th
$\mathcal{P}$, so that the area of the triangle PT_1T_2 be minimum, where T_1 and
contact points with $\mathcal{P}$ of the tangents drawn from P to $\mathcal{P}$.

Adrian Cordun

L150. Let us consider the tetrahedron $A_1A_2A_3A_4$, and a point P
Denote by $A_{ij} \in (A_i A_j)$ the orthogonal projections of P on the edge(s) A
tetrahedron. Prove that

$$\mathcal{V}_{PA_{12}A_{13}A_{23}} + \mathcal{V}_{PA_{12}A_{14}A_{24}} + \mathcal{V}_{PA_{13}A_{14}A_{34}} + \mathcal{V}_{PA_{23}A_{24}A_{34}} \leq \frac{1}{4}\mathcal{V}_{A_1A_2}$$

When the equality is attained?

Marius Olteanu, Rn

L151. Prove than no natural numbers n and k exist such that $\left[\left(2+\sqrt{\right.\right.$
$\left[\left(4+\sqrt{15}\right)^k\right]$.

Cosmin Manea and Dragoş Petric

L152. For $a, b, c \in \mathbb{R}$ and $x \in \mathbb{R}_+$, prove the inequality

$$\frac{9}{a^2+b^2+c^2} \leq \frac{3\left(x+1\right)^2\left(a+b+c\right)^4}{\left[3(x^2+1)(a^2+b^2+c^2)+2x(a+b+c)^2\right]\left(ab+bc+ca\right)^2} \leq$$

I. V. Maftei and Dorel Băiţan,

L153. Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ with the property that

$$f\left(x^2+xy+yf\left(y\right)\right) = xf\left(x+y\right)+f^2\left(y\right), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Adrian Zahariuc, student,

L154. Let $P \in \mathbb{R}[X]$ a polynomial of degree n and $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ its
polynomial function. Knowing that the set $\{x \in \mathbb{R} \mid p(x) = 0\}$ consists of
elements, and the function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |p(x)|$ is differentiable
that the maximum number of nonzero complex roots of P equals $2\left[\frac{n}{2}\right] -$

Vlad Emanuel, student,

L155. Let $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ be two matrices such that the matrix A
invertible. Show that the trace of the matrix $(I_2+AB)(AB-BA)^{-1}$ is

Florentina Cârlan and Marian Tetiv

Concursul omagial "Recreaţii Ştiinţifice"

Acest concurs este organizat cu prilejul împlinirii a 125 de ani de la apa
tei "Recreaţii Ştiinţifice" (1883-1888), prima revistă ştiinţifică (predomina
atică) din ţară adresată tineretului.

Organizatorii concursului: Asociaţia "Recreaţii matematice".

Premiile prevăzute de concurs:

Premiul I – **200 lei** (un prem
Premiul II – **100 lei** (două pre
Premiul III – **50 lei** (trei prem

Participanţii la concurs: orice elev al şcolilor de orice nivel.

Obligaţiile concurenţilor:

– se cere rezolvarea celor cinci probleme enunţate mai jos, selectate di
Recreaţii Ştiinţifice şi *Recreaţii matematice*;

– elevii vor trimite soluţiile prin poştă (plic simplu timbrat) pe adresa

Asociaţia "Recreaţii matematice"
str. Aurora, nr. 3, sc. D, ap. 6
700474, Iaşi

cu menţiunea (pe plic): *Concursul "Recreaţii Ştiinţifice"*;

– data limită de participare este **1.02.2009**;

– concurenţii vor redacta îngrijit soluţiile problemelor trimise (câte
problemă pe foaie, cu enunţ, figură etc.).

Acordarea premiilor se face pe baza punctajelor obţinute de concur

– fiecare problemă este notată maxim cu 10 puncte;

– se acordă câte 2 puncte suplimentare pentru alte soluţii ale problem
lizări etc;

– se depunctează soluţiile incomplete sau redactate neîngrijit;

– concurenţii trebuie să obţină

· minim 42 puncte, pentru premiul I,
· minim 35 puncte, pentru premiul II,
· minim 25 puncte, pentru premiul III.

Sponsor: Fundaţia culturală "Poiana" (director, **Dan Tiba**).

Premianţii concursului vor fi anunţaţi în nr. 1/2009 al revistei *Recr
matice* (ce va apărea în martie 2009).

Problemele concursului

1. *Ion şi Constantin merg la cumpărături cu soţiile lor, Maria şi Ele
din aceste patru persoane cumpără un număr de obiecte ce le plăteşte pe
atâţia lei câte obiecte a cumpărat. Ion cumpără nouă obiecte mai mult
şi fiecare soţ cheltuieşte cu 21 lei mai mult decât soţia sa. Care este soţi
care este a lui Constantin? Care este numărul de obiecte cumpărate de fie
aceste persoane? Care este suma cheltuită de fiecare dintre ele?*

2. *Să se rezolve sistemul de ecuaţii*

$$(x+2y)(x+2z)=a,$$
$$(y+2x)(y+2z)=b,$$
$$(z+2x)(z+2y)=c \qquad (0<a<b<c).$$

3. *Fie O, I, I' centrele cercului circumscris triunghiului ABC, cerc*
acestuia şi, respectiv, al cercului exînscris tangent laturii BC. Să se dem

$$\operatorname{tg}\widehat{IOI'}=\frac{2\left|\sin B-\sin C\right|}{2\cos A-1}.$$

4. *Să se taie o sferă cu un plan astfel încât diferenţa volumelor conu*
ce au ca baze secţiunea planului cu sfera şi vârfurile pe sferă să fie maxi

5. *Fie M un punct exterior cercului $\mathcal{C}$ de centru O şi raza R. Notăm*
punctele de contact ale tangentelor duse din M la $\mathcal{C}$ şi cu A punctul de i
dreptei OM cu cercul $\mathcal{C}$ care verifică condiţia $A\notin[OM]$. Să se determin
punctelor M pentru care se poate construi un triunghi cu segmentele $[M$
şi $[MO]$, dar nu se poate construi un triunghi cu $[MT_1]$, $[MT_2]$ şi $[MA]$.

IMPORTANT

- În scopul unei legături rapide cu redacţia revistei, pot fi utilizate urm adrese e-mail: **t_birsan@yahoo.com** şi **profgpopa@yahoo.co** această cale colaboratorii pot purta cu redacţia un dialog privitor rialele trimise acesteia, procurarea numerelor revistei etc. Sugerăm ratorilor care trimit probleme originale pentru publicare să le nume să-şi reţină o copie xerox a lor pentru a putea purta cu uşurinţă o prin e-mail asupra acceptării/neacceptării acestora de către redacţia

- La *problemele de tip L* se primesc soluţii de la orice iubitor de ma elementare (indiferent de *preocupare profesională* sau *vârstă*). Fieca soluţiile acestor probleme - ce sunt publicate în revistă după un a urmată de numele tuturor celor care au rezolvat-o.

- **Adresăm cu insistenţă rugămintea ca materialele trimise să nu fie (să nu fi fost) trimise şi altor publicaţii.**

- Rugăm ca materialele tehnoredactate să fie trimise pe adresa reda soţite de fişierele lor (de preferinţă în LaTeX).

- Pentru a facilita comunicarea redacţiei cu colaboratorii ei, autorii alelor sunt rugaţi să indice adresa e-mail.

Pagina rezolvitorilor

BRAŞOV

Colegiul Naţional de Informatică "Gr. Moisil". **Clasa a IX-a** (prof. F
Florin). DARIE Flavius: VII.88, VIII(88-90), IX(88,89).

CRAIOVA

Colegiul Naţional "Carol I". **Clasa a VIII-a** (prof. STANCA Monica
CIU Ioan: VII(81,82), VIII(84-86), G(126,129,130,133).

IAŞI

Şcoala nr. 11 "Otilia Cazimir". **Clasa a III-a** (inst. HUZUM Lina)
Laura: P(144-148); HUZUM Andrei: P(144-148); MĂRIUŢA Simina: P
STOIAN Ioana: P(144-148).

Şcoala nr. 14 "Gh. Mârzescu". **Clasa a III-a** (inst. NUŢĂ Elena). B
dor: P(144-148); CHIRILUŢĂ George-Ştefan: P(144-148); POSTUDOR
Mădălina: P(144-148); STOICA Adriana: P(144-148).

Şcoala nr. 26 "G. Coşbuc". **Clasa a III-a** (inst. RACU Maria). A
Aura Georgiana: P(144-149); BURA Emma-Andreea: P(144-149); FIL
Ştefania: P(144-149); GHEORGHIŢĂ Narcis-Eugen: P(144-149); HRISC
Constantin: P(144-150); HUZA Mădălina: P(144-150); LEŞOVSCHI
Ioana: P(144-149); LUPU Roxana-Elena: P(144-149); MARICIUC Drago
P(144-149); MAXIM Alexandra-Camelia: P(144-149); TUDOSE Ema-Ali
150); ŢUCĂ Cosmin: P(144-149); VASILE Bogdan-Andrei: P(144-149). **C**
a (înv. HRIMIUC Valeria). BRUMĂ Andrei-Alexandru: P(144-150); DU
Bianca: P(144-150); HARAPCIUC Eduard-Gabriel: P(144-150); MANTA
Adrian: P(144-150); OLARU Alexandra: P(144-150).

Colegiul Naţional. **Clasa a V-a** (prof. POPA Gabriel). STOLERU
Ingrid: V(88-90,93,94).

Colegiul Naţional "C. Negruzzi". **Clasa a VII-a** (prof. SAVA Radu)
Norbert Traian: VII(81-86), G126.

SUCEAVA

Şcoala cu clasele I-VIII, nr. 3. **Clasa a III-a** (înv. TABARCEA
FECHET Ştefan: P(136-139,141,143); **Clasa a IV-a** (inst. NECHITA Da
CHET Mircea: P(134-141,143).

Premii acordate rezolvitorilor

Şcoala nr. 14 "Gh. Mârzescu", **Iaşi**

BACIU Tudor (cl. a III-a): 2/2007(10pb), 1/2008(6pb), 2/2008(5pb),
CHIRILUŢĂ George-Ştefan (cl. a III-a): 2/2007(10pb), 1/2008(6pb),
STOICA Adriana (cl. a III-a): 2/2007(10pb), 1/2008(6pb), 2/2008(5p

Şcoala nr. 26 "G. Coşbuc", **Iaşi**

GHEORGHIŢĂ Narcis-Eugen (cl. a III-a): 2/2007(5pb), 1/2008(6pb)

Revista semestrială **RECREAŢII MATEMATICE** este e
ASOCIAŢIA "RECREAŢII MATEMATICE". Apare la datele de 1
1 septembrie şi se adresează elevilor, profesorilor, studenţilor şi tutu
pasionaţi de matematica elementară.

În atenţia tuturor colaboratorilor

Materialele trimise redacţiei spre publicare (note şi articole, che
metodică, probleme propuse etc.) trebuie prezentate îngrijit, clar şi c
trebuie să prezinte interes pentru un cerc cât mai larg de cititori. Se reco
textele să nu depăşească patru pagini. Evident, **ele trebuie să fie origi
nu fi apărut sau să fi fost trimise spre publicare altor reviste.** Rugăm
rialele tehnoredactate să fie însoţite de fişierele lor.

Problemele destinate rubricilor: **Probleme propuse** şi **Problem
pregătirea concursurilor** vor fi redactate pe foi separate cu enunţ şi d
ţie/rezolvare (câte una pe fiecare foaie) şi vor fi însoţite de numele autoru
la şi localitatea unde lucrează/învaţă.

Redacţia va decide asupra oportunităţii publicării materialelor prim

În atenţia elevilor

Numele elevilor ce vor trimite redacţiei soluţii corecte la proble
rubricile de **Probleme propuse** şi **Probleme pentru pregatirea conc
vor fi menţionate în **Pagina rezolvitorilor**. Se va ţine seama de regulile:

1. Pot trimite soluţii la **minimum cinci probleme propuse în
prezent şi cel anterior al revistei**; pe o foaie va fi redactată soluţia un
probleme.

2. Elevii din clasele **VI-XII** au dreptul să trimită soluţii la p
propuse pentru clasa lor, pentru orice clasă mai mare, din două clase m
imediat anterioare. Elevii din clasa a **V**-a pot trimite soluţii la problemel
pentru clasele a IV-a, a V-a şi orice clasă mai mare, iar elevii claselor
trimite soluţii la problemele propuse pentru oricare din clasele primare şi
să mai mare. Orice elev poate trimite soluţii la problemele de concurs (ti

3. Vor fi menţionate următoarele date personale: numele şi p
clasa, şcoala şi localitatea.

4. Plicul cu probleme rezolvate se va trimite prin poştă (sau v
direct) la adresa Redacţiei:

Prof. dr. Temistocle Bîrsan
Str. Aurora, nr. 3, sc. D, ap. 6,
700 474, Iaşi
Jud. IAŞI
E-mail: t_birsan@yahoo.com

CUPRINS

ARTICOLE ŞI NOTE

CHESTIUNI METODICE

CORESPONDENȚE

CONCURSURI ŞI EXAMENE

PROBLEME ŞI SOLUȚII

ISSN 1582 – 1765