REZIDUURI ŞI APLICAŢII

1. Formule pentru reziduuri

Când singularităţile
dau valoarea şi nuanţa.

Teorema reziduurilor

Definiţia 1. Fie f(z) o funcţie care are în $z = a \in C$ un pol sau un punct singular esenţial izolat. Rezultă că dezvoltarea în serie Laurent în vecinătatea punctului z = a, va fi:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{1}$$

Coeficientul c_{-1} al termenului $\frac{1}{z-a}$ se numeşte reziduul funcţiei f(z) relativ la punctul singular z = a şi se notează rez(f; a).

Ţinând seama de formula ce dă coeficienţii seriei Laurent $c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_a} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$ avem

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} f(z) dz \tag{2}$$

unde Γ este un cerc cu centrul în punctul z = a, situat în coroana circulară $r < |z-a| < R$, în care f(z) este olomorfă.

Reziduul funcţiei f(z) se poate calcula totodată cu ajutorul dezvoltării în serie Laurent a funcţiei f(z) în jurul punctului z = a.

1.1. Formule pentru calculul reziduurilor

În cazul în care z = a este un pol multiplu de ordinul p, calculul reziduului se poate face cu formula:

$$\mathrm{rez}(f,a)=\frac{1}{(p-1)!}\lim_{z\to a}[(z-a)^p f(z)]^{(p-1)} \tag{3}$$

În particular, pentru p = 1, avem:

$$\mathrm{rez}(f,a)=\lim_{z\to a}[(z-a)f(z)] \tag{4}$$

Dacă simplificarea cu (z-a) în formula (4) nu este posibilă şi $f(z)=\frac{g(z)}{h(z)}$, unde g(z) şi h(z) sunt olomorfe în z-a şi $g(a)\neq 0, h(a)=0, h'(a)\neq 0$ atunci calculul reziduului se poate face cu formula:

$$\mathrm{rez}(f,a)=\lim_{z\to a}\frac{g(z)}{h'(z)} \tag{5}$$

Reziduul unei funcţii în punctul de la infinit (z= ∞) este dat de relaţia:

$$\mathrm{rez}(f,\infty)=\frac{-1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} f(z)dz \tag{6}$$

unde Γ este un cerc cu centrul în origine şi de rază R suficiente mare, pentru ca în exteriorul lui funcţia şă nu aibă alte singularităţi decât punctul de la ∞ .

Teorema reziduurilor (Cauchy)

Dacă Γ este o curbă simplă închisă rectificabilă, în interiorul căreia funcţia uniformă f(z) are un număr infinit de puncte singulare izolate $a_1, a_2, ..., a_n$, atunci:

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} rez(f, a_k) \qquad (7)$$

Teorema 2. Dacă funcţia f(z) are un număr finit de puncte singulare izolate, atunci suma reziduurilor acestei funcţii relativ la toate punctele singulare inclusiv punctul de la infinit este nulă.

Pentru calculul unor integrale definite din domeniul real cu ajutorul teoremei reziduurilor procedăm în felul următor:

a) Alegem o funcţie complexă f(z) care pe axa reală se reduce la f(x);
b) Completăm intervalul de integrare cu un arc de cerc (semicerc sau cerc) pentru a obţine un contur închis;
c) Aplicăm teorema reziduurilor;
d) Evaluăm valoarea integralei pe drumul adăugat. Dacă drumul adăuga este un arc de cerc, evaluarea integralei se poate face ţinând seama de următoarele leme:

Lema 1. Dacă AB este un arc de cerc cu centrul în a şi de rază r, iar f(z) o funcţie continuă într-o vecinătate a punctului a, exceptând eventual punctul a, care satisface condiţia:

$$\lim_{z \to a} (z - a) f(z) = k \qquad (8)$$

atunci

$$\lim_{r \to 0} \int_{AB} f(z)dz = i(\beta - \alpha)k$$

unde $\alpha \le \arg(z - a) \le \beta$.

Lema 2. Dacă AB este un arc de cerc cu centrul în a şi de rază R, iar f(z) o funcţie continuă în exteriorul cercului cu centrul în a, exceptând eventual punctual de la infinit, care satisface condiţia:

$$\lim_{R \to \infty} (z - a) f(z) = k \qquad (9)$$

atunci

$$\lim_{R\to\infty}\int_{AB} f(z)dz = i(\beta-\alpha)k$$

unde $\alpha \le \arg(z-a) \le \beta$.

Lema 3. (Jordan). Dacă f(z) o funcţie olomorfă în semicercul $(\gamma:\ x^2+y^2=R^2, y\ge 0)$ şi tinde uniform către zero când $|z| = R \to \infty$, atunci

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma} e^{i\alpha z} f(z)dz = 0(\alpha > 0).$$

2. Integrale cu teorema reziduurilor

I. Integralele de forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

unde P şi Q sunt două polinoame care îndeplinesc condiţiile:

1. $Q(x) \ne 0\ \ \forall x \in R$ (nu are rădăcini reale)

2. 2+ grad P(x) $\le$ grad Q(x),

sunt convergente.

Pentru calculul acestor integrale cu teorema reziduurilor alegem

f(z) = $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ şi conturul de integrare $\Gamma = AB \cup \gamma$ unde $A(-R,0),\ B(R,0)$ iar γ

semicercul $x^2+y^2=R^2, y>0$.

Exemplu 1:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$$

Avem îndeplinite condiţiile: $Q(x) = x^4 + 1 \neq 0 \ \forall x \in R$ şi 2 + grad P $\leq$ grad Q, deci integrala este convergentă. Alegem $f(z) = \frac{z^2+1}{z^4+1}$ şi conturul de integrare din fig.1.

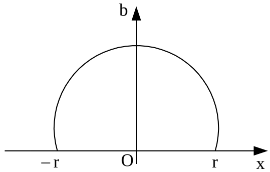

Figura 1

Atunci

$$\oint_\Gamma \frac{z^2+1}{z^4+1}dz = \int_{-R}^{R} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx + \int_\gamma \frac{z^2+1}{z^4+1}dz$$

Funcţia $f(z) = \frac{z^2+1}{z^4+1}$ are poli simpli:

$$z_k = \cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}, k = 0,1,2,3$$

din care numai $z_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$ şi $z_1 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}$ se află în interiorul conturului mărginit de curba Γ.

Aplicăm teorema reziduurilor avem:

$$\oint_\Gamma \frac{z^2+1}{z^4+1}dz = \int_{-R}^{R} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx + \int_\gamma \frac{z^2+1}{z^4+1}dz = 2\pi i[\mathrm{rez}(f, z_0) + \mathrm{rez}(f, z_1)]$$

dacă $R > |z|$.

Dacă trecem la limită în egalitatea precedentă şi ţinem seama că

$$\lim_{R=|z|\to\infty} zf(z) = 0$$

şi de lema (2) rezultă:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx+\int_{\gamma}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=2\pi i[\mathrm{rez}(f,z_0)+\mathrm{rez}(f,z_1)]$$

Calculăm

$$\mathrm{rez}(f,z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{z^2+1}{4z^3}=\lim_{z\to z_0}\frac{z(z^2+1)}{4z^4}=\frac{i\sqrt{2}}{-4}$$

$$\mathrm{rez}(f,z_1)=\lim_{z\to z_1}\frac{z^2+1}{4z^3}=\lim_{z\to z_1}\frac{z(z^2+1)}{4z^4}=\frac{i\sqrt{2}}{-4}$$

În consecinţă $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x2+1}{x^4+1}dx=2\pi i\left(-\frac{i\sqrt{2}}{4}-\frac{i\sqrt{2}}{4}\right)=-\pi\sqrt{2}$.

II. Integralele de forma:

$$I=\int_0^{2\pi}R(\sin\varphi,\cos\varphi)d\varphi$$

unde R(u,v) este o funcţie raţională se pot calcula cu teorema reziduurilor dacă se face schimbarea de variabilă $z=e^{i\varphi}$. Atunci

$$\sin\varphi=\frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}\right)=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$$

$$\cos\varphi=\frac{1}{2}\left(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}\right)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

iar $dz=ie^{i\varphi}d\varphi$. Când φ parcurge intervalul $[0,2\pi]$, z parcurge cercul $|z|=1$ o singură dată. Ca urmare

$$I=\int_0^{2\pi}R(\sin\varphi,\cos\varphi)d\varphi=$$
$$=\oint_{|x|=1}R\left(\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)dz=2\pi i\sum_k \mathrm{rez}(R,z_k).$$

Funcţia R fiind raţională nu are alte singularităţi decât poli.

Alegem pe aceia care sunt în interiorul cercului $|z|=1$.

Exemplu 2:

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{2-\sin^2\varphi}$$

Efectuând schimbarea de variabilă $z=e^{i\varphi}, dz=ie^{i\varphi}d\varphi$ integrala dată devine:

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{2-\sin\varphi}=\oint_{|z|=1}\frac{4z^2}{z^4+6z^2+1}\cdot\frac{dz}{iz}=\frac{4}{i}\oint_{|z|=1}\frac{zdz}{z^4+6z^2+1}=$$
$$=\frac{4}{i}\cdot 2\pi i\sum_k \operatorname{rez}(f,z_k)=8\pi\sum_k \operatorname{rez}(f,z_k)=8\pi\sum_k \operatorname{rez}(f,z_k)$$

Funcţia $\frac{z}{z^4+6z^2+1}$ are patru poli, iar în cercul $|z|=1$ se află polii

$$z_1=\sqrt{-3+\sqrt{8}}, z_2=-\sqrt{-3+\sqrt{8}}.$$

$$\operatorname{rez}(f,z_1)=\lim_{z\to z_1}\frac{z}{4z^3+12z}=\lim_{z\to z_1}\frac{z^2}{4z^4+12z^2}=$$
$$=\frac{\left(\sqrt{-3+\sqrt{8}}\right)^2}{4\left(\sqrt{-3+\sqrt{8}}\right)^4+12\left(\sqrt{-3+\sqrt{8}}\right)^2}$$

$$\operatorname{rez}(f,z_2)=\lim_{z\to z_2}\frac{z}{4z^3+12z}=\lim_{z\to z_2}\frac{z^2}{4z^4+12z^2}=$$
$$=\frac{\left(-\sqrt{-3+\sqrt{8}}\right)^2}{4\left(-\sqrt{-3+\sqrt{8}}\right)^4+12\left(-\sqrt{-3+\sqrt{8}}\right)^2}$$

Avem

$$\operatorname{rez}(f,z_1)+\operatorname{rez}(f,z_2)=\frac{\sqrt{2}}{8}$$

şi deci

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{2-\sin^2\varphi}=8\pi\cdot\frac{\sqrt{2}}{8}=\pi\sqrt{2}.$$

III. Integralele de forma:

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\cos\alpha x dx,\quad J=\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\sin\alpha x dx$$

presupuse convergente se calculează cu ajutorul teoremei reziduurilor, luând drept contur de integrare $\Gamma=AB\cup\gamma$ unde $A(-R,0), B(R,0)$ şi semicercul $x^2+y^2=R^2, y>0$ şi integrala:

$$K=I+iJ=\int_{-\infty}^{\infty}F(x)(\cos\alpha x+i\sin\alpha x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}F(x)e^{i\alpha x}dx$$

Pentru calculul integralei K pe conturul menţionat utilizăm funcţia:

$$f(z)=F(z)\cdot e^{i\alpha z}.$$

Exemplu 3:

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos 2x}{x^2-2x+5}dx$$

Pentru calculul integralei I, asociem integrala

$$J=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin 2x}{x^2-2x+5}dx$$

şi împreună cu I avem:

$$K=I+iJ=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{2ix}}{x^2-2x+5}dx$$

Evident ReK=I şi ImK=J. Conturul de integrare $\Gamma=AB\cup\gamma$ unde A(-R, 0),B(R, 0) iar γ este semicercul $x^2+y^2=R^2, y>0$ (fig.1). Calculăm integrala

$$\oint_\Gamma\frac{ze^{2iz}}{z^2-2z+5}dz$$

Care pentru y = 0 se reduce la K. Avem

$$\oint_{\Gamma} \frac{ze^{2ix}}{z^2 - 2z + 5} dz = \int_{-R}^{R} \frac{xe^{2ix}}{z^2 - 2z + 5} dz = 2\pi i \sum_{k=1} \text{rez}(f, z_k) \qquad (10)$$

Pe cercul γ funcţia $g(z) = \dfrac{z}{z^2 - 2z + 5}$ satisface relaţia $|g(z)| \le \dfrac{R}{R^2 - 2R + 5}$ şi deci

$$\lim_{R\to\infty} |g(z)| \le \lim_{R\to\infty} \frac{R}{R^2 - 2R + 5} = 0,$$

adică g(z) tinde uniform către zero când $R \to \infty$ şi conform lemei (3) avem:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma} \frac{ze^{2iz}}{z^2 - 2z + 5} dz = 0$$

Funcţia $f(z) = \dfrac{ze^{2iz}}{z^2 - 2z + 5}$ are polii $z_1 = 1 + 2i$ şi $z_2 = 1 - 2i$, din care numai z_1 este în interiorul domeniului mărginit de Γ. În consecinţă

$$\text{rez}(f, z_1) = \lim_{z\to z_1} \frac{(z - z_1)ze^{2iz}}{(z - z_1)(z - z_2)} = \frac{(1+2i)e^{2i(1+2i)}}{4i} = \frac{(1+2i)\cdot e^{-4} \cdot e^{2i}}{4i}$$

Ca urmare

$$\oint_{\Gamma} \frac{ze^{2iz}}{z^2 - 2z + 5} dz = 2\pi i \frac{(1+2i)e^{-4} \cdot e^{2i}}{4i} = \frac{\pi}{2e^4}[\cos 2 - 2\sin 2 + (2\cos 2 + \sin 2)]$$

Trecând la limită în (12) pentru $R \to \infty$ obţinem:

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{2ix}}{x^2 - 2x + 5} dx = \frac{\pi}{2e^4}[\cos 2 - 2\sin 2 + i(2\cos 2 + \sin 2)]$$

respective

$$I = \frac{\pi}{2e^4}(\cos 2 - 2\sin 2); \quad J = \frac{\pi}{2e^4}(2\cos 2 + \sin 2)$$

3. Aplicaţii la reziduuri cu integrale şi formule pentru reziduuri

3.1. Să se arate că:

3.1.1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1}dx = \frac{4}{3}\pi$

3.1.2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\left(x^2+a^2\right)^2}dx = \frac{\pi}{2a}$

3.1.3. $\int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{\left(x^2+a^2\right)^2}dx = \frac{\pi}{4a}$

3.1.4. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)\left(x^2+b^2\right)} = \frac{\pi(2a+b)}{2a^3(a+b)^2 b}$

3.1.5. $\int_{0}^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}dx = \frac{x}{\sin p\pi},\ 0<p<1$

3.1.6. $vp\int_{0}^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1-x}dx = \pi \cot a\pi,\ 0<a<1$

3.1.7. $\int_{0}^{\infty} \frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^3}dx = -\frac{1}{8}$

3.1.8. $\int_{0}^{\infty} \frac{xdx}{\left(1+x^2\right)^3} = \frac{1}{4}$

3.1.9. $\int_{0}^{\infty} \left(\frac{\ln x}{1+x}\right)^2 dx = \frac{\pi^2}{3}$

3.1.10. $\int_{0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{\cos\varphi + a} = \frac{2x}{\sqrt{a^2-1}};\ |a|>1$

3.1.11. $\int_{0}^{2\pi} \frac{\cos^2 2\varphi}{1-2\beta\cos\varphi + p^2}d\varphi = \frac{1+p^4}{1-p^2}\pi,\ |p|<1$

3. 2. Aplicaţii diverse

3.2. a) Aplicând formulele integrale ale lui Cauchy, calculaţi integralele:

1. $I = \int_C \frac{\cosh \frac{\pi z}{2}}{(z+i)^4} dz, \quad C = |z+2i| = 2$

$$R: I = \frac{2\pi i}{3!}\left(\cosh\frac{\pi z}{2}\right)_{z=-i} = \frac{\pi^4}{24}$$

2. $I = \int_C \frac{z^{100} e^{i\pi z}}{z^2+1} dz; \; C: 4x^2 + y^2 - 4 = 0$

$$\textbf{R:} \; I = 2\pi i \left.\frac{z^{100} \cdot e^{i\pi z}}{z+i}\right|_{z=i} + 2\pi i \left.\frac{z^{100} \cdot e^{i\pi z}}{z-i}\right|_{z=-i} = -2\pi \sinh \pi$$

3.2. b) Calculaţi $\operatorname{rez}(f, z_k)$ = reziduul funcţiei f(z) relativ la punctul său singular z_k (pol sau punct singular esenţial izolat).

1. $f(z) = \frac{e^{iaz}}{\sinh z}$

2. $f(z) = \frac{z^{2n}}{1+z^n}$

3. $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z-1)^2}$

4. $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^n}$

5. $f(z) = z^3 \cdot e^{\frac{1}{1-z}}$

Soluţii:

1. $z_k = ik\pi, k \in Z$ sunt poli de ordinul unu

$$\operatorname{rez}(f; z_k) = \left.\frac{e^{iaz}}{(\sinh)'}\right|_{z=z_k} = \frac{e^{-ak\pi}}{\cosh(ik\pi)} = (-1)e^{-ak\pi}/2$$

$z=\infty$ este punct singular esenţial neizolat pentru care nu se pune problema reziduului (Argumentare după problema 5).

2. $z_k = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{n}}, k=\overline{0,n-1}$ sunt poli de ordinul unu şi $z=\infty$ pol de ordinul n.

$$\text{rez}(f,z_k) = \frac{z^{2n}}{nz^{n-1}}\Bigg|_{z=z_k} = \frac{z^n \cdot z}{n}\Bigg|_{z=z_k} = -\frac{z_k}{n} = -\frac{1}{n}e^{i\frac{(2k+1)\pi}{n}}$$

$$f(z) = z^n \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z^n}} = z^n\left(1-\frac{1}{z^n}+\frac{1}{z^{2n}}-\frac{1}{z^{3n}}+\dots\right)$$

$$\text{rez}(f,\infty) = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad n\neq 1 \\ -1 & \text{dacă} \quad n=1 \end{cases}$$

3. z = 1 este pol de ordinul doi: $\text{rez}(f,1) = \left.\frac{d}{dz}\left((z-1)^2\frac{e^{\frac{1}{x}}}{(z-1)^2}\right)\right|_{z=1} = e$

şi z = 0 este punct singular esenţial izolat rez(f,0) = e după cum se vede din dezvoltarea:

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}(1-z)^{-2} = \left(1+\frac{1}{1!}\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\dots\right)\left(1+\frac{2}{1!}z+\frac{2\cdot 3}{2!}z^2+\dots\right) =$$

$$= \dots + \left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots\right)\cdot\frac{1}{z}+\dots$$

4. z = i şi z = -i sunt poli de ordinul n.

$$\text{rez}(f,i) = \frac{1}{(n-1)!}\cdot\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left.\left((z-i)^n\cdot\frac{1}{(z-i)^n(z+i)^n}\right)\right|_{z=i} = \frac{1}{i}\,\frac{n(n+1)\dots(2n-2)}{2^{2n-2}(n-1)!}$$

$$\text{rez}(f,-i) = -\frac{1}{i}\cdot\frac{n(n+1)\dots(2n-2)}{2^{2n-2}(n-1)!}$$

5. z = 1 este punct singular esenţial izolat iar $z=\infty$ este pol de ordinul trei. Dezvoltând în jurul punctului z = 1 obţinem:

$$f(z)=(z-1+1)^3\left(1+\frac{1}{1!}\frac{1}{1-z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{(1-z)^2}+\frac{1}{3!}\frac{1}{(1-z)^3}+...\right)$$

$$c_{-1}=-\frac{1}{1!}+\frac{3}{2!}-\frac{3}{3!}+\frac{1}{4!}=\frac{1}{24}$$

Deci

$$rez(f;1)=\frac{1}{24}$$

$$rez(f,\infty)=-rez(f;1)=-\frac{1}{24}$$

Să vedem pentru problema 1, de ce $z=\infty$ nu este izolat.

$$\sinh=0;\ e^{z}=e^{-z}\Leftrightarrow 2isuny=0\Rightarrow y=k\pi.$$

Deci pentru $z=ik\pi$; $\sinh z=0;$m $k\pi\to\infty.$

6. Utilizând teorema reziduurilor, calculaţi integralele:

6.1. $\int_c\frac{dz}{z\cos z^2};\ C:x^2+y^2-2y-3=0$

Funcţia are o infinitate de puncte singulare (polii de ordinul unu, z = 0,

$z_k=\pm\sqrt{(2k+1)\frac{\pi}{2}};\ z'_k=\pm\sqrt{(2k+1)\frac{\pi}{2}}$ şi singularitatea neizolată, punctul limită de poli $z=\infty$.)

$$rez(f,z_k)=\frac{1}{\left(z\cos z^2\right)'_{z=z_k}}=\frac{1}{\cos z_k^2-2z_k^2\sin z_k^2}$$

În interiorul conturului C avem polii:

$-\sqrt{\frac{\pi}{2}},0,\sqrt{\frac{\pi}{2}},i\sqrt{\frac{\pi}{2}},i\sqrt{\frac{3\pi}{2}},i\sqrt{\frac{5\pi}{2}}$ cu reziduurile: $-\frac{1}{\pi},1,\frac{1}{\pi},-\frac{1}{\pi},\frac{1}{3\pi},-\frac{1}{5\pi}.$ Deci

$$I=2\pi i\left(1-\frac{43}{15\pi}\right).$$

6.2. $\int_C z^2 e^{\frac{2z}{z+1}} dz$

a) $C: x^2 + y^2 + 2x = 0$

b) $C: x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$

Dezvoltând în jurul lui z =-1 obţinem:

a)

$$z^2 e^{\frac{2z}{z+1}} = (z+1-1)^2 e^{2-\frac{2}{z+1}} =$$

$$= e^2\left((z+1)^2 - 2(z+1)+1)\right)\cdot\left(1-\frac{1}{1!}\cdot\frac{2}{z+1}+\frac{1}{2!}\cdot\left(\frac{2}{z+1}\right)^2+...\right) = ... - \frac{22}{3}e^2\cdot\frac{1}{z+1}+...$$

$$\text{rez}(f;-1) = C_{-1} = -\frac{22}{3}e^2;$$

b) $I = 2\pi i\,\text{rez}(f;-1)$

6.3. $\int_{|z|=r} z^n \cos\frac{1}{z} dz$

z = 0 este punct singular esenţial izolat. Calculăm rez (f;0).

$$z^n \cos\frac{1}{z} = z^n\left(1-\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\frac{1}{4!}\frac{1}{z^4}+...+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}\frac{1}{z^{2n}}+...\right).$$

Dacă $n = 2k, C_{-1} = 0.$ Pentru $n = 2k+1, \frac{z^{2k+1}}{z^{2p}} = z^{-1} \to p = k+1.$

$$C_{-1} = \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+2)!} = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}+1}}{(n+1)!} = \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{(n+1)!}$$

Deci $I = 2\pi i C_{-1}$.

6.4. $I_\alpha = \int_C \frac{\sin^2 z}{z^2\left(z^2+4iz-3\right)}dz$

a) $C:|z|=3$; b) $C:|z-i|=1$; c) $C:|z+1|=\frac{1}{2}$

Soluţii: z = 0 pol dublu, z =-i, z =-3i poli simpli.

$I_a = 2\pi i rez(f,0) + 2\pi i rez(f,-i) + \pi i rez(f,-3i).$

$I_b = \pi i rez(f,0)$

$I_c = 0.$

conform teoremei lui Cauchy.

6.5. Se consideră conturul triunghiular C care se obţine unind două câte două punctele: $z_1 = -2i, z_2 = 2i, z_3 = -2.$

Calculaţi $\int_c \frac{dz}{(z+1)^2(z+2)\left(z^2+1\right)}$

Soluţie:

$$\int_c f(z)dz = 2\pi i rez(f;-1) + \pi i rez\left(f;i\right) + \pi i rez(f;-1) + \frac{\pi}{2} i rez(f;-2) =$$

$$= \pi\left(0 + \frac{-2+i}{20} - \frac{2+i}{20} + \frac{1}{5}\right) = i\frac{\pi}{10}.$$

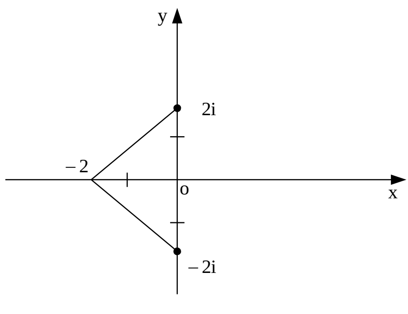

Figura 2

6.6. Aplicaţii:

1. Dacă a > 0, R > a, să se calculeze:

$$\int_{|z|=R} \frac{dz}{\left(z^2+a^2\right)^2}; z=0; z=\pm ai$$

$$I = 2\pi i\left(\text{rezf}(0) + \text{rezf}(ai) + \text{rezf}(-ai)\right)$$

$$\text{rezf}\ (0) = zf\ (z)\Big|_{z=0} = \frac{1}{a},$$

$$\text{rezf}\ (ai) = \left((z-ai)^2 \frac{1}{z(z-ai)^2(z+ai)^2}\right)'_{z=ai}$$

2. $\displaystyle\int_{|z|=a} \frac{dz}{z^3(1+z^2)}$ pentru a < 1, a > 1.

3. Calculaţi

$\displaystyle I = \int_{|z|=a} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z(1-z)} dz, a>1$ utilizând reziduul lui f în punctul de la infinit. $R: |z| > 1$

$$f(z) = -\frac{1}{z^2}\cdot e^{\frac{1}{z}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z^2}\left(1+\frac{1}{1!}\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+...\right)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+...\right) = c_{-1} = 0 \Rightarrow I = 0.$$

4. $\displaystyle I = \int_0^{\pi} \frac{\cos n\theta}{b - ia\cos\theta} d\theta$

Soluţie:

$$J = \frac{1}{2}\int_{\pi}^{\pi} \frac{i\sin n\theta}{b - ia\cos\theta} d\theta$$

căreia îi ataşăm integrala nulă

$$I + iJ = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{in\theta}}{b - ia\cos\theta} d\theta$$

Notând $e^{i\theta} = z, d\theta = \frac{dz}{iz}$, $\cos\theta = \frac{z^2+1}{2z}$.

Prin înlocuire obţinem

$$I + iJ = \int_{|x|=1} \frac{z^n}{az^2 + 2biz + a}\, dz$$

În interiorul cercului funcţia de integrat are doar polul

$$z_1 = i\frac{\sqrt{a^2+b^2} - b}{a}$$

cu reziduul:

$$\operatorname{rez}(f; z_1) = \left.\frac{z^n}{2az + izb}\right|_{z = z_1} = \frac{i^n}{2i\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{a^n}{\left(\sqrt{a^2+b^2}+b\right)^n}$$

Rezultă:

$$I = 2\pi i \operatorname{rez}(f; z_1) = \frac{\pi i^n}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{a^n}{\left(\sqrt{a^2+b^2}+b\right)^n}$$

5.

$$I = \int_{\pi}^{-\pi} \frac{\sin x \sin nx}{5 - 4\cos x}\, dx$$

Soluţie: Ataşăm cu integrala nulă

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x \cos nx}{5 - 4\cos x}\, dx$$

Calculând

$$J + iI = iI = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{inx} \sin x}{5 - 4\cos x}\, dx.$$

Punând $e^{ix} = z$

$$iI = \frac{1}{2}\int\limits_{|z|=1} \frac{\left(z^2-1\right)z^{n-1}dz}{2z^2-5z+2} = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i \operatorname{rez}\left(f;\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2^{n+1}}$$