MINISTERUL ÎNVĂŢĂMÎNTULUI
INSTITUTUL POLITEHNIC «GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ» BUCUREŞTI

Prof. ing. dr. MARCEL N. ROŞCULEŢ

Manual de Analiză matematică

vol. II

CALCULUL INTEGRAL. ECUAŢII DIFERENŢIALE

EDITURA DIDACTICĂ ŞI PEDAGOGICĂ, BUCUREŞTI—1966

CALCULUL INTEGRAL

Capitolul I

INTEGRALA DEFINITĂ. INTEGRALA NEDEFINITĂ

§ 1. NOŢIUNI DE TEORIA MĂSURII

1. Măsura unui interval

Fie $I = (a, b)$, $-\infty < a < b < +\infty$, un interval oarecare.

Se numeşte *măsura* intervalului I numărul pozitiv $b - a$ şi se notează

$$m(I) = b - a.$$

Măsura intervalului I este *lungimea* sa.

Intervalele $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$ au aceeaşi măsură ca şi intervalul deschis (a, b).

Dacă x şi y sînt două numere reale, cărora le corespund două puncte M, N pe o dreaptă, măsura segmentului MN este

$$m(MN) = | x - y |,$$

adică norma diferenţei $x - y$.

Dacă punctele M şi N sînt confundate, deci $x = y$, atunci $m(M) = 0$.

Măsura unui punct este numărul zero. Spunem că punctul este o mulţime de *măsură nulă*.

Fie $I_1, I_2, \ldots, I_p$ un număr finit de intervale disjuncte; măsura lor G este prin definiţie

$$G = m(I_1) + m(I_2) + \ldots + m(I_p).$$

O mulţime finită de puncte este o mulţime de măsură nulă.

T e o r e m ă. Dacă I_1 şi I_2 sînt două intervale, deschise, mărginite, atunci

$$m(I_1 \cup I_2) \leqslant m(I_1) + m(I_2);$$

dacă intervalele I_1, I_2 sînt disjuncte, $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, avem egalitatea

$$m(I_1 \cup I_2) = m(I_1) + m(I_2).$$

Demonstrație. Să presupunem că intervalele sînt disjuncte:

$$I_1 = (a, b),\ I_2 = (c, d);\ a < b,\ c < d,\ b \leqslant c,$$
$$m(I_1 \cup I_2) = b - a + d - c = m(I_1) + m(I_2).$$

Dacă intervalele deschise I_1 și I_2 nu sînt disjuncte (fig. 1), atunci au comun intervalul $I_3 = (c, b)$, $c < b$. Avem

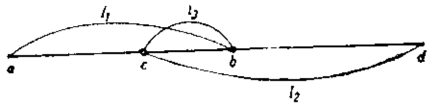

Fig. 1

$$m(I_1) = b - a,\quad m_2(I_2) = d - c,$$
$$m(I_1 \cup I_2) = d - a,\quad \text{dacă } d > b,$$
$$m(I_1 \cup I_2) = b - a,\quad \text{dacă } b > d;$$

in toate cazurile avem

$$m(I_1 \cup I_2) < m(I_1) + m(I_2) = b - a + d - c.$$

Teorema este adevărată pentru o reuniune finită sau numerabilă de intervale conținute într-un interval mărginit I.

Aplicație

Fie I_1 și I_2 două intervale mărginite și $I_3 = I_1 - I_2$; dacă $I_1 \supset I_2$, atunci

$$m(I_1 - I_2) = m(I_1) - m(I_2).$$

Fie $I_1 = (a, b)$, $I_2 = (c, d)$ cu $a \leqslant c \leqslant b$, $a \leqslant d \leqslant b$,

$$I_3 = (a, c) \cup (d, b),$$

deci

$$m(I_3) = m(a, c) + m(d, b) = c - a + b - d = (b - a) - (d - c)$$

sau

$$m(I_3) = m(I_1) - m(I_2).$$

Observație

Dacă $I_2 \subset I_1$, din relația de mai sus rezultă imediat că

$$m(I_2) \leqslant m(I_1).$$

2. Măsura unui interval plan

Fie $I = I_1 \times I_2 = \{(x, y) \mid x \in (a, b),\ y \in (c, d)\}$ un interval plan.

Se numește măsura intervalului I numărul pozitiv $(b - a)(d - c)$ și se notează

$$a(I) = (b - a)(d - c).$$

Măsura intervalului I este *aria* dreptunghiului I.

Aria unui interval plan este nulă dacă unul sau ambele intervale ce intervin în produsul cartezian $I_1 \times I_2$ se reduce la un punct. De aici deducem:

a) un segment este o mulțime de arie nulă,

b) un punct este o mulțime de arie nulă.

Fie $I_1, I_2, \ldots, I_p$ un număr finit de intervale plane, disjuncte; aria lor G este

$$G = a(I_1) + a(I_2) + \ldots + a(I_p).$$

T e o r e m ă. Dacă I' și I'' sînt două intervale conținute în același interval I, atunci

$$a(I' \cup I'') \leqslant a(I') + a(I'').$$

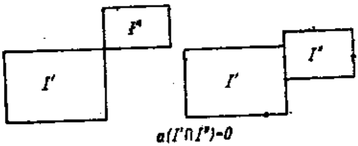

Fig. 2

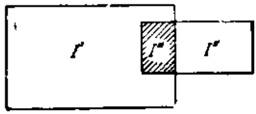

Fig. 3

Demonstrație. *a')* Dacă intervalele sînt disjuncte sau intersecția lor este o mulțime de arie nulă (fig. 2),

$$a(I' \cup I'') = a(I') + a(I'').$$

b') Dacă $I' \cap I'' = I'''$, atunci (fig. 3)

$$a(I' \cup I'') = a(I') + a(I'') - a(I''') < a(I') + a(I'').$$

Teorema este demonstrată.

Numim poligon domeniul plan mărginit de o linie poligonală închisă, fără puncte multiple. Vom spune că *măsura mulțimii de puncte interioare unui contur poligonal L este aria mărginită de conturul poligonal*, adică aria poligonului mărginit de L.

Dacă o figură P este reuniunea unui număr finit de poligoane, disjuncte două cîte două, figura formată o vom numi tot poligon

$$P = P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_s,$$

$$\text{aria } P = \text{aria } P_1 + \text{aria } P_2 + \ldots + \text{aria } P_s$$

sau

$$a(P) = a(P_1) + a(P_2) + \ldots + a(P_s).$$

Punctele, segmentele de dreaptă le vom considera tot poligoane (degenerate). *Ele sînt poligoane de arie nulă.*

Dacă dintr-un poligon P_1 decupăm un poligon $P_2 \subset P_1$ (fig. 4), figura rezultată P o vom numi tot poligon, deci

$$P = P_1 - P_2$$

şi

$$a(P) = a(P_1) - a(P_2).$$

În fine, dacă luăm $P_1 = P_2$, poligonul rezultat P este *mulţimea vidă* $\emptyset$.

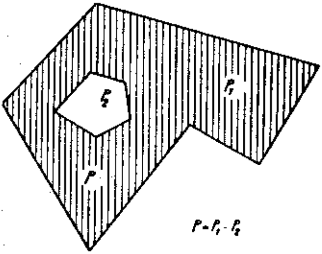

Fig. 4

Aria unui poligon în clasa poligoanelor, definite mai sus, are următoarele proprietăţi :

1) $a(P) \geqslant 0$,

2) $a(P \cup Q) \leqslant a(P) + a(Q)$

(avem egalitate dacă $P \cap Q$ este o mulţime de arie nulă),

3) $a(P - Q) = a(P) - a(Q)$, dacă $Q \subset P$,

4) $a(P) \geqslant a(Q)$, dacă $Q \subset P$.

3. Aria mulţimilor plane

Fie A o mulţime plană *oarecare, mărginită.* Fiind mărginită, există poligoane P care conţin toate punctele mulţimii A (fig. 5)

$$P \supset A.$$

Vom numi un astfel de poligon, *poligon exterior.*

Există de asemenea poligoane Q ale căror puncte aparţin toate mulţimii A

$$Q \subset A.$$

Vom numi un astfel de poligon, *poligon interior.*

Un poligon interior poate fi eventual chiar un punct, dacă mulţimea A este formată din puncte izolate.

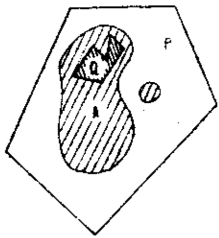

Fig. 5

Oricare ar fi poligonul exterior P şi poligonul interior Q avem incluziunile

$$P \supset A \supset Q,$$

deci

$$a(P) \geqslant a(Q).$$

Dacă notăm

$$a_i(A) = \sup_{Q \subset A} a(Q),$$

$$a_e(A) = \inf_{P \supset A} a(P),$$

avem neegalitățile

$$a(P) \geqslant a_e(A) \geqslant a_i(A) \geqslant a(Q).$$

D e f i n i ț i i

1) **Numărul $a_e(A)$ se numește aria exterioară a mulțimii A.**

2) **Numărul $a_i(A)$ se numește aria interioară a mulțimii A.**

3) **Dacă numerele $a_i(A)$ și $a_e(A)$ sînt egale, spunem că mulțimea A are o arie sau că este măsurabilă Jordan. Valoarea comună a celor două arii se numește aria mulțimii A și se notează $a(A)$**

$$a(A) = a_i(A) = a_e(A).$$

O b s e r v a ț i i

1) Dacă mulțimea A este măsurabilă și are aria $a(A)$, atunci oricare ar fi poligoanele P și Q avem neegalitățile

$$a(P) \geqslant a(A) \geqslant a(Q),$$

de unde rezultă că

$$a(A) \geqslant 0.$$

2) Există mulțimi pentru care aria interioară este diferită de aria exterioară, deci care nu sînt măsurabile Jordan.

E x e m p l u

Fie A mulțimea punctelor de coordonate numere raționale situate într-un cerc de rază R. Toate poligoanele exterioare vor conține cercul de rază R, deci

$$a_e(A) = \pi R^2.$$

Mulțimea A avînd toate coordonatele raționale nu are puncte interioare. Orice poligon interior va fi format dintr-un număr finit de puncte, deci

$$a_i(A) = 0.$$

Mulțimea A nu este măsurabilă Jordan.

4. Criterii de măsurabilitate

T e o r e m a. O mulțime plană A este măsurabilă dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un poligon $P_\varepsilon \supset A$ și $Q_\varepsilon \subset A$ astfel încît

$$a(P_\varepsilon) - a(Q_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Demonstrație. *Condiția este necesară.* Să presupunem că A este măsurabilă, deci

$$a_i(A) = a_e(A) = a(A),$$

însă

$$a_i(A) = \sup_{Q \subset A} a(Q), \ a_e(A) = \inf_{P \supset A} a(P),$$

prin urmare pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există două poligoane P_ε şi Q_ε astfel încît

$$a(A) < a(Q_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2},$$

$$a(P_\varepsilon) < a(A) + \frac{\varepsilon}{2},$$

sau, adunîndu-le,

$$a(P_\varepsilon) - a(Q_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Condiţia este suficientă. Să presupunem că pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există două poligoane exterior şi interior P_ε şi Q_ε astfel încît

$$a(P_\varepsilon) - a(Q_\varepsilon) < \varepsilon;$$

însă avem

$$a(Q_\varepsilon) \leqslant a_i(A) \leqslant a_e(A) \leqslant a(P_\varepsilon),$$

deci

$$a_e(A) - a_i(A) \leqslant a(P_\varepsilon) - a(Q_\varepsilon) < \varepsilon$$

sau

$$a_e(A) - a_i(A) < \varepsilon$$

şi pentru că $\varepsilon > 0$ este arbitrar, iar $a_e(A)$ şi $a_i(A)$ sînt două numere, diferenţa lor nu poate fi arbitrar de mică decît dacă

$$a_e(A) = a_i(A).$$

Teorema este demonstrată.

T e o r e m a 2. O mulţime A este măsurabilă dacă există un şir de poligoane exterioare P_n şi un şir de poligoane interioare Q_n astfel încît şirurile ariilor lor

$$a(P_1), \quad a(P_2), \ldots, \quad a(P_n), \ldots$$
$$a(Q_1), \quad a(Q_2), \ldots, \quad a(Q_n), \ldots$$

să aibă aceeaşi limită

$$\lim_{n\to\infty} a(P_n) = \lim_{n\to\infty} a(Q_n) = a(A);$$

limita comună $a(A)$ este egală cu aria mulţimii A.

Demonstraţie. *Condiţia este necesară.* Presupunem mulţimea A măsurabilă. Pentru $\varepsilon = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ există două poligoane P_n şi Q_n astfel încît

$$P_n \supset A \supset Q_n,$$
$$a(P_n) \geqslant a(A) \geqslant a(Q_n)$$

şi

$$a(P_n) - a(Q_n) < \frac{1}{n},$$

din care rezultă

$$a(A) - a(Q_n) < a(P_n) - a(Q_n) < \frac{1}{n},$$

$$a(P_n) - a(A) < a(P_n) - a(Q_n) < \frac{1}{n},$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} [a(A) - a(Q_n)] = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} [a(P_n) - a(A)] = 0,$$

sau

$$\lim_{n\to\infty} a(P_n) = \lim_{n\to\infty} a(Q_n) = a(A).$$

Condiţia este suficientă. Să presupunem că există două şiruri de poligoane P_n şi Q_n astfel încît pentru orice n natural

$$P_n \supset A \supset Q_n,$$

$$\lim_{n\to\infty} a(P_n) = \lim_{n\to\infty} a(Q_n).$$

Avem şirul de neegalităţi

$$a(P_n) \geqslant a_e(A) \geqslant a_i(A) \geqslant a(Q_n)$$

pentru orice n, de unde rezultă că

$$a_i(A) = a_e(A) = \lim_{n\to\infty} a(P_n) = \lim_{n\to\infty} a(Q_n),$$

deci A este măsurabilă şi aria sa $a(A)$ este egală cu limita comună a celor două şiruri. Teorema este demonstrată.

Această teoremă arată că se poate stabili măsurabilitatea unei mulţimi cu ajutorul şirurilor.

Aplicaţii

1) Dacă E_1 şi E_2 sînt două mulţimi măsurabile, reuniunea lor $E_1 \cup E_2$ este o mulţime măsurabilă.

Deoarece E_1 şi E_2 sînt măsurabile, pentru orice $\varepsilon > 0$ există patru poligoane P_1, Q_1, P_2, Q_2 astfel încît

$$P_1 \supset E_1 \supset Q_1;\ P_2 \supset E_2 \supset Q_2$$

şi

$$a(P_1 - Q_1) < \varepsilon,\ a(P_2 - Q_2) < \varepsilon.$$

Folosind incluziunea

$$(P_1 \cup P_2) - (Q_1 \cup Q_2) \subset (P_1 - Q_1) \cup (P_2 - Q_2) \tag{1}$$

şi dat fiind că

$$P_1 \cup P_2 \supset E_1 \cup E_2 \supset Q_1 \cup Q_2,$$

şi întrucît reuniunea a două poligoane este un poligon, iar diferenţa a două poligoane este tot un poligon, din (1) avem

$$a\,[(P_1 \cup P_2) - (Q_1 \cup Q_2)] \leqslant a\,(P_1 - Q_1) + a\,(P_2 - Q_2) < 2\varepsilon$$

şi, conform teoremei 1, $E_1 \cup E_2$ este măsurabilă.

Proprietatea este adevărată pentru o reuniune finită de mulţimi măsurabile.

2) Dacă E_1 şi E_2 sînt două mulţimi măsurabile, diferenţa lor $E_1 - E_2$ este o mulţime măsurabilă.

Deoarece E_1 şi E_2 sînt două mulţimi măsurabile, pentru orice $\varepsilon > 0$ există patru poligoane P_1, Q_1, P_2, Q_2, astfel încît

$$P_1 \supset E_1 \supset Q_1;\ P_2 \supset E_2 \supset Q_2$$

şi

$$a\,(P_1 - Q_1) < \varepsilon,\ a\,(P_2 - Q_2) < \varepsilon.$$

Folosind incluziunile

$$(P_1 - Q_2) - (Q_1 - P_2) \subset (P_1 - Q_1) \cup (P_2 - Q_2),$$

$$P_1 - Q_2 \supset E_1 - E_2 \supset Q_1 - P_2,$$

obţinem

$$a\,[(P_1 - Q_2) - (Q_1 - P_2)] \leqslant a\,(P_1 - Q_1) + a\,(P_2 - Q_2) < 2\varepsilon,$$

de unde rezultă că $E_1 - E_2$ este măsurabilă.

Se poate arăta că măsura mulţimilor plane are şi următoarele proprietăţi:

3) $$a\,(E_1 \cup E_2) \leqslant a\,(E_1) + a\,(E_2);$$

egalitatea are loc dacă intersecţia $E_1 \cap E_2$ este o mulţime de arie nulă.

4) $$a\,(\bigcup_{i=1}^{p} E_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} a\,(E_i);$$

egalitatea are loc dacă intersecţiile $E_i \cap E_j$ sînt mulţimi de arie nulă.

5) $a\,(E_1) \geqslant a\,(E_2)$, dacă $E_2 \subset E_1$.

6) $a\,(E_1 - E_2) = a\,(E_1) - a\,(E_2)$, dacă $E_2 \subset E_1$.

5. Măsura unui interval din spaţiu. Poliedre

Fie $I = I_1 \times I_2 \times I_3$ cu $I_1 = (a, b)$, $I_2 = (c, d)$, $I_3 = (e, f)$ un interval tridimensional.

Se numeşte măsura intervalului I numărul pozitiv $(b-a)\,(d-c)\,(f-e)$ şi se notează

$$v(I) = (b - a)\,(d - c)\,(f - e).$$

Măsura intervalului I este volumul paralelipipedului I.

Volumul unui interval spaţial este nul dacă cel puţin unul din cele trei intervale ce intervin în produsul cartezian $I_1 \times I_2 \times I_3$ se reduce la un punct, prin urmare

a) o mulţime plană are volumul nul,

b) un segment este o mulţime de volum nul,

c) un punct este o mulţime de volum nul.

Fie $I_1, I_2, \ldots, I_p$, p intervale spaţiale disjuncte; volumul lor G este

$$G = v(I_1) + v(I_2) + \ldots + v(I_p).$$

La fel ca şi în cazul plan avem următoarea

Teoremă. Dacă I' şi I'' sînt două intervale conţinute în acelaşi interval I, atunci

$$v(I' \cup I'') \leqslant v(I') + v(I'').$$

Dacă considerăm acum un poliedru (o figură mărginită de feţe plane), vom spune că măsura mulţimii de puncte interioare unei suprafeţe poliedrale S este volumul corpului mărginit de suprafaţa poliedrală, adică volumul poliedrului mărginit de S.

Dacă o figură P este reuniunea unui număr finit de poliedre, disjuncte, două cîte două, figura formată o vom numi tot poliedru

$$P = P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_s$$

şi

$$v(P) = v(P_1) + v(P_2) + \ldots + v(P_s).$$

Punctele, segmentele de dreaptă, figurile plane le vom considera tot poliedre (degenerate) de volum nul.

Dacă dintr-un poliedru P_1 scoatem un poliedru $P_2 \subset P_1$, figura rezultată P se numeşte tot poliedru

$$P = P_1 - P_2$$

şi

$$v(P) = v(P_1) - v(P_2),$$

iar dacă $P_1 = P_2$, poliedrul P este mulţimea vidă $\emptyset$.

Din cele de mai sus rezultă că volumul poliedrelor are proprietăţile 1), 2), 3), 4) de la sfîrşitul alineatului 2, stabilite pentru poligoane.

6. Volumul mulţimilor din spaţiu

Fie A o mulţime spaţială, mărginită. Există un poliedru P, numit *poliedru exterior*, care conţine toate punctele mulţimii A, şi un poliedru Q, numit *poliedru interior*, ale cărui puncte sînt toate conţinute de mulţimea A, deci

$$P \supset A \supset Q$$

şi

$$v(P) \geqslant v(Q).$$

Dacă notăm

$$v_i(A) = \sup_{Q \subset A} v(Q),$$

$$v_e(A) = \inf_{P \supset A} v(P),$$

avem neegalitățile

$$v(P) \geqslant v_e(A) \geqslant v_i(A) \geqslant v(Q)$$

oricare ar fi poliedrul exterior P și oricare ar fi poliedrul interior Q. Numerele $v_e(A)$ și $v_i(A)$ se numesc respectiv volumul exterior și volumul interior al mulțimii spațiale A.

D e f i n i ț i e. O mulțime spațială A are un volum sau este măsurabilă Jordan dacă volumul exterior este egal cu volumul interior

$$v_i(A) = v_e(A) = v(A).$$

Numărul $v(A)$ se numește volumul mulțimii A.

O b s e r v a ț i i

1) Dacă mulțimea A este măsurabilă, deci are un volum $v(A)$, atunci oricare ar fi poliedrele P și Q avem neegalitățile

$$v(P) \geqslant v(A) \geqslant v(Q),$$

de unde rezultă că

$$v(A) \geqslant 0.$$

Teoremele următoare dau criterii de măsurabilitate pentru mulțimile spațiale.

T e o r e m a 1′. O mulțime spațială A are un volum dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un poliedru P_ε și un poliedru Q_ε astfel încît

$$v(P_\varepsilon) - v(Q_\varepsilon) < \varepsilon.$$

T e o r e m a 2′. O mulțime spațială A are un volum dacă există un șir de poliedre exterioare P_n și un șir de poliedre interioare Q_n astfel încît șirurile volumelor lor

$$v(P_1),\ v(P_2), \ldots, v(P_n), \ldots$$

$$v(Q_1),\ v(Q_2), \ldots, v(Q_n), \ldots$$

să aibă aceeași limită

$$\lim_{n\to\infty} v(P_n) = \lim_{n\to\infty} v(Q_n) = v(A);$$

limita comună $v(A)$ este egală cu volumul mulțimii A.

Se demonstrează la fel ca în cazul mulțimilor plane.

Proprietățile enumerate la sfîrșitul alineatului 4 se mențin și pentru volumul mulțimilor spațiale.

§ 2. INTEGRALA DEFINITĂ

1. Aria unei suprafețe plane mărginite de o curbă

Fie $y = f(x)$ o funcție continuă, pozitivă și crescătoare în intervalul (a, b). Graficul acestei funcții este un arc de curbă situat deasupra axei Ox (fig. 6). Ne propunem să calculăm aria trapezului mixtiliniu $ABB'A'$. În acest scop vom construi un șir de poligoane exterioare și un șir de poligoane interioare de o formă anumită, care ne vor duce la rezultat. Să împărțim intervalul $A'B'$ prin punctele

$$x_0 = a,\ x_1,\ x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b,$$

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n,$$

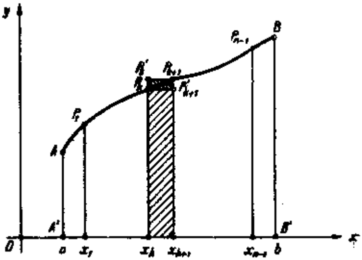

Fig. 6

în n subintervale, iar prin aceste puncte să ducem paralele la axa Oy, paralele care taie arcul AB în punctele $P_0 = A,\ P_1, \ldots,\ P_{n-1}, P_n = B$ astfel încît trapezul mixtiliniu $ABB'A'$ apare ca reuniune a n trapeze mixtilinii

$$(x_k\, P_k\, P_{k+1}\, x_{k+1}),\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1.$$

Dacă notăm

$$\omega_k = \text{aria trapezului } (x_k\ P_k\ P_{k+1}\ x_{k+1}),$$

atunci aria totală $\mathcal{A}$ este suma ariilor elementare ω_k

$$\mathcal{A} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k .$$

Aria ω_k a trapezului mixtiliniu $(x_k\ P_k\ P_{k+1}\ x_{k+1})$ este cuprinsă între aria dreptunghiului exterior $(x_k\, P'_k\, P_{k+1}\, x_{k+1})$ și a dreptunghiului interior $(x_k\, P_k\, P'_{k+1}\, x_{k+1})$; dacă notăm cu S_k și s_k aceste două arii

$$s_k = (x_{k+1} - x_k)\, f(x_k),$$
$$S_k = (x_{k+1} - x_k)\, f(x_{k+1})$$

urmează că avem neegalitățile

$$s_k < \omega_k < S_k \ ;$$

însumînd, obținem

$$s < \mathcal{A} < S$$

unde

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} s_k = (x_1 - x_0) f(x_0) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) f(x_{n-1}),$$

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} S_k = (x_1 - x_0) f(x_1) + (x_2 - x_1) f(x_2) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) f(x_n).$$

Sumele s şi S se numesc sumele lui Darboux.

Să observăm că S este aria poligonului exterior, obţinut ca reuniunea dreptunghiurilor exterioare $(x_k P'_k P_{k+1} x_{k+1})$, iar s este aria poligonului interior obţinut ca reuniunea dreptunghiurilor interioare $(x_k P_k P'_{k+1} x_{k+1})$ corespunzătoare diviziunii $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Înainte de a merge mai departe să definim cîteva noţiuni.

a) Fie $[a, b]$ un interval închis şi mărginit. O familie finită de puncte $d = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$

$$a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{n-1} \leqslant x_n = b$$

se numeşte o diviziune a intervalului $[a, b]$.

Un interval oarecare $[x_k, x_{k+1}]$ al diviziunii se numeşte *interval parţial* sau *subinterval*.

b) Vom numi *norma diviziunii* $d = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ numărul pozitiv

$$\nu(d) = \max_{0 \leqslant k \leqslant n-1} (x_{k+1} - x_k),$$

adică lungimea celui mai mare *interval parţial* al diviziunii d; deci pentru orice $k = 0, 1, \ldots, n-1$ avem

$$x_{k+1} - x_k \leqslant \nu(d).$$

c) Vom spune că o diviziune d' a intervalului $[a, b]$ este *mai fină* decît diviziunea d şi se scrie $d' \supset d$ sau $d \subset d'$ dacă *toate* punctele diviziunii d aparţin diviziunii d' (care conţine şi alte puncte). Dacă d' este mai fină decît d, atunci

$$\nu(d') \leqslant \nu(d). \tag{1}$$

Reciproca nu este însă în general adevărată, adică neegalitatea (1) nu atrage incluziunea $d \subset d'$, deoarece diviziunea d' poate fi formată din intervale parţiale mai mici decît ale diviziunii d, fără ca toate punctele diviziunii d să aparţină diviziunii d'.

Să considerăm acum un şir de diviziuni (d_n) *ordonate* după relaţia de fineţe

$$d_1 \subset d_2 \subset d_3 \subset \ldots \subset d_n \subset \ldots,$$

prin urmare normele lor formează şirul descrescător

$$\nu(d_1) \geqslant \nu(d_2) \geqslant \ldots \geqslant \nu(d_n) \geqslant \ldots$$

Să cerem ca $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(d_n) = 0$. În aceste condiţii, şirul sumelor s

$$s_{d_1},\ s_{d_2},\ \ldots,\ s_{d_n},\ \ldots$$

şi al sumelor S

$$S_{d_1},\ S_{d_2},\ldots,\ S_{d_n},\ldots$$

sînt convergente către o limită comună care este aria trapezului mixtiliniu $A'ABB'$. Într-adevăr avem

$$S_{d_n} - s_{d_n} = (x_1 - x_0)\,(f(x_1) - f(x_0)) + (x_2 - x_1)(f(x_2) - f(x_1)) + \ldots$$
$$\ldots + (x_n - x_{n-1})\,(f(x_n) - f(x_{n-1}))$$

deci şi

$$\begin{aligned} |\,S_{d_n} - s_{d_n}\,| \leqslant |\,x_1 - x_0\,|\cdot|\,f(x_1) - f(x_0)\,| + \ldots \\ \ldots + |\,x_n - x_{n-1}\,|\cdot|\,f(x_n) - f(x_{n-1})\,| \end{aligned} \tag{2}$$

Funcţia $f(x)$ fiind continuă în intervalul $[a, b]$ este uniform continuă în $[a, b]$, deci pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $\eta(\varepsilon) > 0$ astfel încît să avem

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

oricare ar fi $x',\ x'' \in [a, b]$, care satisfac neegalitatea

$$|\,x' - x''\,| < \eta(\varepsilon).$$

Să considerăm acum numărul N astfel încît pentru $n > N$ toate diviziunile d_n să îndeplinească condiţia

$$\nu(d_n) < \eta(\varepsilon),$$

fapt ce este posibil, deoarece $\nu(d_n) \to 0$ cînd $n \to \infty$. Deci pentru două puncte consecutive oarecare $x_i,\ x_{i+1}$, ale unei diviziuni d_n, avem

$$|\,f(x_i) - f(x_{i+1})\,| < \varepsilon,$$

deoarece $\max\ |\,x_{i+1} - x_i\,| < \eta(\varepsilon)$, deci şi $|\,x_{i+1} - x_i\,| < \eta(\varepsilon)$. Cu aceste rezultate neegalitatea (2) se scrie

$$|\,S_{d_n} - s_{d_n}\,| < \varepsilon\,(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \ldots + x_n - x_{n-1}) = \varepsilon(b - a),$$

de unde rezultă imediat că S_{d_n} şi s_{d_n} au aceeaşi limită, anume aria $\mathcal{A}$ a trapezului curbiliniu $A'ABB'$, conform teoremei 2 de la § 1, al. 2

Numărul $\mathcal{A}$ se numeşte şi *integrala definită* a funcţiei $f(x)$ în intervalul $[a, b]$ şi se notează

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\,dx$$

(se citeşte integrală de la a la b din $f(x)$). Semnul $\int$ se numeşte semnul de integrare; a, b se numesc limitele de integrare, a limita inferioară şi b

limita superioară; intervalul $[a, b]$ se numeşte intervalul de integrare, iar $f(x)$ funcţia de integrat sau integrant.

Observaţie

Raţionamentul de sus rămîne valabil în condiţii mult mai largi pentru funcţia $f(x)$, fapt pe care îl vom lua în considerare în alineatul următor. În particular rămîne valabil dacă $f(x)$ este descrescătoare în (a, b) sau prezintă un număr finit de extreme relative, deoarece în acest

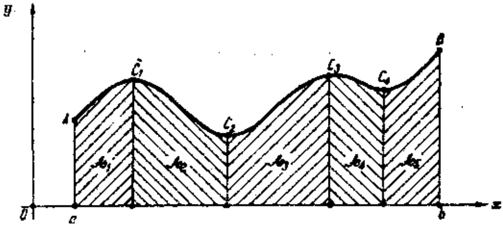

Fig. 7

caz (fig. 7) putem împărţi intervalul (a, b) în intervale parţiale, în care funcţia este monotonă, iar aria totală este suma ariilor parţiale. Astfel (fig. 7),

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4 + \mathcal{A}_5.$$

Exemplu

Să calculăm prin procedeul de mai sus aria unei bucle a sinusoidei

$$y = \sin x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi.$$

Din motive de simetrie vom lua intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ şi rezultatul îl vom dubla. Dacă împărţim intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ în n subintervale egale de lungime $\frac{\pi}{2n}$, avem

$$s = 2\,\frac{\pi}{2n}\left(\sin 0 + \sin\frac{\pi}{2n} + \ldots + \sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right),$$

$$S = 2\,\frac{\pi}{2n}\left(\sin\frac{\pi}{2n} + \sin\frac{2\pi}{2n} + \ldots + \sin\frac{n\pi}{2n}\right).$$

Cunoaştem însă suma

$$\sin h + \sin 2h + \ldots + \sin (n-1)h = \frac{\sin\left(\frac{n-1}{2}h\right)\sin\frac{nh}{2}}{\sin\frac{h}{2}}$$

deci

$$s = \frac{\pi}{n} \frac{\sin\left(\frac{n-1}{2} \cdot \frac{\pi}{2n}\right) \sin\left(\frac{n}{2} \cdot \frac{\pi}{2n}\right)}{\sin \frac{\pi}{4n}}$$

şi

$$\lim_{n\to\infty} s = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot \frac{n-1}{n}\right) \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\pi}{4n}}{\sin \frac{\pi}{4n}} \cdot 4 \sin \frac{\pi}{4} = 2.$$

Se verifică uşor că şi $\lim\limits_{n\to\infty} S = 2$, deci aria căutată este 2.

2. Sumele lui Darboux

Fie $f(x)$ o funcţie *mărginită*, definită pe un interval $[a, b]$

$$m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

Să împărţim intervalul $[a, b]$ în n subintervale prin punctele $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Notăm cu M_k, m_k marginile superioară şi inferioară ale funcţiei $f(x)$ în intervalul $[x_k, x_{k+1}]$ (fig. 8).

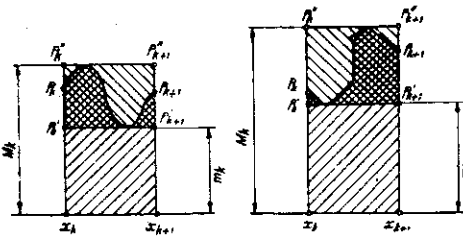

Fig. 8

Aria ω_k a trapezului mixtiliniu $(x_k\ P_k\ P_{k+1}\ x_{k+1})$ este cuprinsă între ariile dreptunghiurilor exterior $(x_k\ P_k''\ P_{k+1}''\ x_{k+1})$ şi interior $(x_k\ P_k'\ P_{k+1}'\ x_{k+1})$, deci

$$m_k (x_{k+1} - x_k) \leqslant \omega_k \leqslant M_k (x_{k+1} - x_k);$$

însumînd în raport cu $k = 0, 1, \ldots, n-1$, obţinem

$$s \leqslant \mathcal{A} \leqslant S$$

unde

$$s = m_0(x_1 - x_0) + m_1(x_2 - x_1) + \ldots + m_{n-1}(x_n - x_{n-1}),$$

$$S = M_0(x_1 - x_0) + M_1(x_2 - x_1) + \ldots + M_{n-1}(x_n - x_{n-1});$$

sumele S şi s se numesc tot sumele lui Darboux relative la diviziunea considerată, s este *suma inferioară Darboux*, iar S *suma superioară Darboux* şi au următoarele proprietăţi :

1) $m(b-a) \leqslant s \leqslant S \leqslant M(b-a)$.

Într-adevăr, pentru orice interval $[x_k, x_{k+1}]$ avem

$$m_k \geqslant m\,;\ M \leqslant M_k$$

deci şi

$$m(x_{k+1} - x_k) \leqslant m_k(x_{k+1} - x_k) \leqslant M_k(x_{k+1} - x_k) \leqslant M(x_{k+1} - x_k),$$

din care prin însumare obţinem

$$m\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)M_k \leqslant$$

$$\leqslant M\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k),$$

deci

$$m(b-a) \leqslant s \leqslant S \leqslant M(b-a).$$

2) **Dacă ξ_k este un punct oarecare al intervalului $[x_k, x_{k+1}]$ şi σ suma**

$$\sigma = (x_1 - x_0)f(\xi_0) + (x_2 - x_1)f(\xi_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1})f(\xi_{n-1}),$$

atunci

$$s \leqslant \sigma \leqslant S. \tag{1}$$

Într-adevăr, pentru orice $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ avem

$$m_k \leqslant f(\xi_k) \leqslant M_k,$$

deoarece M_k, m_k sînt marginile funcţiei în intervalul $[x_k, x_{k+1}]$; dacă înmulţim cu $(x_{k+1} - x_k)$ şi însumăm rezultă neegalităţile (1). Sumele σ se numesc *sume Riemann* relativ la diviziunea considerată.

Să observăm că pentru o diviziune dată d avem o infinitate de sume σ_d, însă numai două sume Darboux S_d şi s_d.

3) **Între sumele Riemann şi sumele Darboux ale unei diviziuni d avem următoarele relaţii**

$$s_d = \inf_{\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]} \sigma_d\,, \qquad S_d = \sup_{\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]} \sigma_d\,.$$

Într-adevăr, fie $\varepsilon > 0$; în orice interval parţial $[x_k, x_{k+1}]$ există un punct ξ_k astfel încît să avem

$$f(\xi_k) - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a};$$

dacă alegem pentru suma σ_d punctele $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ care îndeplinesc această condiție, obținem

$$\sigma_d - s_d = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) - \sum_{k=0}^{n-1} m_k (x_{k+1} - x_k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (f(\xi_k) - m_k)(x_{k+1} - x_k) \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = \varepsilon,$$

deci

$$\sigma_d - \varepsilon \leqslant s_d < \sigma_d,$$

de unde rezultă că $s_d = \inf\limits_{\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]} \sigma_d$. Pentru egalitatea a doua se procedează în mod asemănător.

4) **Dacă diviziunea d' este mai fină decît diviziunea d, atunci**

$$s_d \leqslant s_{d'} \leqslant S_{d'} \leqslant S_d,$$

adică sumele inferioare cresc, iar sumele superioare descresc dacă trecem de la o diviziune la o altă diviziune mai fină.

Dacă $[x_k, x_{k+1}]$ este un subinterval al diviziunii d, atunci punctele x_k, x_{k+1} aparțin și diviziunii $d' \supset d$, însă în intervalul $[x_k, x_{k+1}]$ poate să existe și alte puncte ale diviziunii d', fie (fig. 9)

$$y_{0,k} = x_k < y_{1,k} < y_{2,k} < \ldots < y_{m-1,k} < y_{m,k} = x_{k+1}.$$

Dacă m_{ik}, M_{ik} sînt marginile inferioară și superioară ale funcției $f(x)$ în intervalul $[y_{i,k}, y_{i+1,k}]$, atunci

$$m_k \leqslant m_{ik} \leqslant M_{ik} \leqslant M_k$$

deci și

$$(x_{k+1} - x_k)\, m_k \leqslant \sum_{i=0}^{m-1} (y_{i+1,k} - y_{i,k})\, m_{ik} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{m-1} (y_{i+1,k} - y_{i,k})\, M_{ik} \leqslant M_k (x_{k+1} - x_k);$$

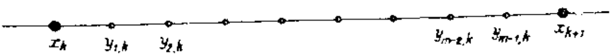

Fig. 9

însumînd acum în raport cu indicii k obținem

$$s_d \leqslant s_{d'} \leqslant S_{d'} \leqslant S_d.$$

5) **Oricare ar fi diviziunile d' și d'' avem**

$$s_{d'} < S_{d''},$$

adică orice sumă inferioară este mai mică sau cel mult egală cu o sumă superioară.

Să considerăm diviziunea d formată cu toate punctele diviziunilor d' şi d''. Diviziunea d va fi mai fină decît diviziunea d' sau d'', prin urmare conform proprietăţii 4 avem

$$s_{d'} \leqslant s_d \leqslant S_d \leqslant S_{d'},$$

şi

$$s_{d''} \leqslant s_d \leqslant S_d \leqslant S_{d''}$$

de unde

$$s_{d'} \leqslant s_d \leqslant S_d \leqslant S_{d''}$$

sau

$$s_{d'} \leqslant S_{d''}. \tag{2}$$

C o n s e c i n ţ e. 1) Dacă D este mulţimea tuturor diviziunilor intervalului $[a, b]$, atunci

$$\sup_{d \in D} s_d \leqslant \inf_{d \in D} S_d,$$

cum rezultă imediat din neegalitatea (2).

2) Mulţimea s_d este mărginită superior, iar mulţimea S_d este mărginită inferior.

D e f i n i ţ i e. O funcţie mărginită $f: [a, b] \to R$ se spune că este integrabilă Riemann pe $[a, b]$ dacă pentru orice şir de diviziuni (d_n) cu norma $\nu(d_n) \to 0$ cînd $n \to \infty$ şirurile sumelor Darboux s_{d_n} şi S_{d_n} au o limită comună finită I, şi se notează

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Această definiţie corespunde teoremei 2 de la A, cap. I, § 1, al. 4.

O b s e r v a ţ i e

Ţinînd seamă de definiţia mulţimilor măsurabile (A, cap. I, § 1, al. 3), urmează că definiţia de mai sus este echivalentă cu

$$\sup_{d \in D} s_d = \inf_{d \in D} S_d = I,$$

unde D este mulţimea tuturor diviziunilor intervalului $[a, b]$.

De obicei se notează

$$\sup s_d = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\inf S_d = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

şi se numesc, respectiv, *integrala inferioară Darboux* şi *integrala superioară Darboux*.

3. Criteriu de integrabilitate

Criteriul lui Darboux. O funcție $f:[a, b] \to R$, mărginită, este integrabilă pe $[a, b]$ dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $\eta(\varepsilon) > 0$, astfel încît pentru orice diviziune d cu

$$\nu(d) < \eta(\varepsilon)$$

să avem $S_d - s_d < \varepsilon$.

$\Longrightarrow$

Demonstrație. *Condiția este necesară.* Să presupunem că f este integrabilă. Fie $d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots$ un şir de diviziuni, astfel încît $d_1 \subset d_2 \subset \subset \ldots \subset d_n \subset \ldots$
şi

$$\nu(d_1) \geqslant \nu(d_2) \geqslant \ldots \geqslant \nu(d_n) \geqslant \ldots$$

cu

$$\lim_{n \to \infty} \nu(d_n) = 0.$$

Deoarece f este integrabilă, pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $N(\varepsilon)$, astfel încît pentru $n > N(\varepsilon)$ avem

$$s_{d_n} > I - \frac{\varepsilon}{2}, \quad S_{d_n} < I + \frac{\varepsilon}{2},$$

deci

$$S_{d_n} - s_{d_n} < \varepsilon.$$

$\Longleftarrow$

Condiția este suficientă. Fie $d_1 \subset d_2 \subset \ldots$ un şir de diviziuni (arbitrar) pentru care $\nu(d_n) \to 0$ cînd $n \to \infty$. Există $N(\varepsilon)$ astfel încît pentru orice $n > N(\varepsilon)$ avem

$$S_{d_n} - s_{d_n} < \varepsilon.$$

Din neegalitățile

$$s_{d_n} \leqslant I' \leqslant I'' \leqslant S_{d_n}$$

unde am pus

$$I' = \lim_{n \to \infty} s_{d_n}, \quad I'' = \lim_{n \to \infty} S_{d_n},$$

rezultă că

$$I'' - I' < \varepsilon,$$

şi cum ε este oarecare, iar şirul (d_n) este arbitrar, urmează că $I' = I''$, deci f este integrabilă Riemann.

Observații

1) Dacă σ_{d_n} este o sumă Riemann *oarecare*, relativă la diviziunea d_n, avem

$$s_{d_n} \leqslant \sigma_{d_n} \leqslant S_{d_n},$$

iar dacă f este integrabilă rezultă că

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_{d_n} = I,$$

adică şi sumele Riemann sînt convergente către o limită comună care este aria mărginită de arcul de curbă $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. Reciproca acestui rezultat este de asemenea adevărată, astfel încît avem următoarea definiţie echivalentă a integrabilităţii.

Definiţie. Spunem că o funcţie $f(x)$ definită pe intervalul $[a, b]$ este integrabilă Riemann pe $[a, b]$ dacă pentru orice şir de diviziuni (d_n) cu norma $\nu(d_n) \to 0$, cînd $n \to \infty$ şi pentru orice alegere a punctelor intermediare ξ_k şirurile Riemann corespunzătoare σ_{d_n} au o limită comună, finită I.

2) O funcţie mărginită nu este neapărat integrabilă Riemann.

Exemplu

Funcţia $f(x)$ definită pe un interval $[a, b]$ astfel

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x \text{ este raţional} \\ 1, \text{ dacă } x \text{ este iraţional} \end{cases}$$

nu este integrabilă Riemann. Într-adevăr, orice subinterval al unei diviziuni d a intervalului $[a, b]$ conţine şi puncte raţionale şi puncte iraţionale, deci

$$\begin{aligned} &m_k = 0, \qquad && M_k = 1, \\ &s_d = 0, && S_d = (b - a), \\ &\sup s_d = 0, && \inf S_d = b - a, \end{aligned}$$

şi f nu este integrabilă Riemann.

3) Dacă am dovedit că o funcţie f este integrabilă Riemann pe un interval $[a, b]$, pentru calculul efectiv al numărului I este suficient să luăm un şir particular de diviziuni d_n cu $\nu(d_n) \to 0$ cînd $n \to \infty$, precum şi un şir particular de puncte intermediare în fiecare diviziune.

Exemplu

Funcţia $f(x) = x^2$, $x \in R$ este integrabilă pe $[0, 1]$. Luăm şirul de diviziuni d_n, $n = 1, 2, \ldots$ cu

$$d_n : 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1 \text{ şi } \xi_k = \frac{k}{n},$$

$k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$. Avem

$$\sigma_{d_n} = 0 + \frac{1}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^3} = \frac{1}{6} \frac{n(n-1)(2n-1)}{n^3}$$

şi

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_{d_n} = \frac{1}{3}, \text{ deci } \int_0^1 x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}.$$

Dacă luăm însă $\xi_k = \frac{k+1}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, obținem

$$\sigma'_{d_n} = \frac{1}{n^3}(1 + 2^2 + \ldots + n^2) = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1),$$

de unde

$$\lim_{n\to\infty} \sigma'_{d_n} = \frac{1}{3}\text{ ; rezultatul este același.}$$

4. Clase de funcții integrabile

Teoremă. Funcțiile continue pe un interval $[a, b]$ sînt integrabile pe $[a, b]$.

Demonstrație. Fie f o funcție continuă pe $[a, b]$. Funcția f este mărginită pe $[a, b]$, deci

$$m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

Fie d o diviziune a intervalului $[a, b]$ și $[x_k, x_{k+1}]$ un subinterval al lui d; avem

$$m_k \leqslant f(x) \leqslant M_k, \quad x \in [x_k, x_{k+1}].$$

Există două puncte x'_k, x''_k pentru care

$$f(x'_k) = m_k, \; f''(x''_k) = M_k.$$

Să considerăm sumele lui Darboux relative la diviziunea d

$$s_d = \sum_{k=0}^{n-1} f(x'_k)(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k (x_{k+1} - x_k),$$

$$S_d = \sum_{k=0}^{n-1} f(x''_k)(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k (x_{k+1} - x_k).$$

O funcție continuă într-un interval închis este și uniform continuă, deci pentru un număr $\varepsilon > 0$ există un număr $\eta(\varepsilon) > 0$, astfel încît pentru orice pereche de puncte x', x'' situată în intervalul $[a, b]$ să avem

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

dacă

$$|x' - x''| < \eta(\varepsilon).$$

Să alegem diviziunea d astfel încît $\nu(d) < \eta(\varepsilon)$; în această situație

$$M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

deci

$$S_d - s_d = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)\,(x_{k+1} - x_k) \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = \varepsilon,$$

ceea ce dovedește că f este integrabilă.

T e o r e m ă. Funcțiile monotone pe un interval $[a, b]$ sînt integrabile pe $[a, b]$.

Demonstrație. Presupunem $f(x)$ crescătoare pe $[a, b]$; dacă d este o diviziune a intervalului $[a, b]$, avem pentru un subinterval oarecare $[x_k, x_{k+1}]$

$$f(x_k) \leqslant f(x) \leqslant f(x_{k+1}),\ x \in [x_k, x_{k+1}],$$

deci

$$m_k = f(x_k),\ M_k = f(x_{k+1})$$

și

$$s_d = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\,(x_{k+1} - x_k),$$

$$S_d = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1})\,(x_{k+1} - x_k),$$

$$S_d - s_d = \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_{k+1}) - f(x_k)]\,(x_{k+1} - x_k).$$

Pentru $\varepsilon > 0$, oarecare, să alegem diviziunea d astfel încît

$$\nu(d) < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)};$$

deoarece

$$x_{k+1} - x_k < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)},$$

rezultă că

$$S_d - s_d < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_{k+1}) - f(x_k)] = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} [f(b) - f(a)] = \varepsilon$$

și teorema este demonstrată.

O b s e r v a ț i i

1) Funcțiile monotone nu sînt neapărat continue.

Am arătat în vol. I, B, cap. II, § 3, al. 5 că pot admite o infinitate numărabilă de discontinuități de prima speță. Rezultă de aici: clasa funcțiilor integrabile este mai cuprinzătoare decît clasa funcțiilor continue.

2) Deoarece un segment de dreaptă este o mulțime de arie nulă, urmează că dacă schimbăm valoarea unei funcții integrabile f într-un număr finit de puncte, funcția f rezultată este de asemenea integrabilă, deci:

O funcție mărginită pe $[a, b]$, continuă pe $[a, b]$ cu excepția unui număr finit de puncte, este integrabilă pe $[a, b]$.

5. Proprietățile funcțiilor integrabile

Fie $f(x)$ o funcție integrabilă pe intervalul $[a, b]$. Integrala funcției $f(x)$ pe intervalul $[a, b]$

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

se numește și *integrala definită* a funcției $f(x)$ pe intervalul $[a, b]$. Variabila x se numește *variabila de integrare*. Integrala definită este un *număr*, deci nu depinde de variabila de integrare. Din această cauză, variabila de integrare se poate nota cu orice literă

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(s)\,\mathrm{d}s.$$

***a)* Dacă $a < b$, $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ se definește prin egalitatea**

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

de unde urmează imediat

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

***b)* Dacă $f(x) \geqslant 0$, $x \in [a, b]$ și este integrabilă pe $[a, b]$, atunci**

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

Într-adevăr, dacă $f(x) \geqslant 0$ pentru orice $x \in [a, b]$, rezultă că pentru orice diviziune d avem $m_k \geqslant 0$, $M_k \geqslant 0$, deci și

$$s_d \geqslant 0, \quad S_d \geqslant 0,$$

de unde rezultă

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

c) **Dacă f și g sînt integrabile pe $[a, b]$, funcția $f+g$ este integrabilă pe $[a, b]$ și**

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

(proprietatea de aditivitate a integralei față de funcții).

Fie d o diviziune a intervalului $[a, b]$ și ξ_k un punct oarecare al intervalului $[x_k, x_{k+1}]$,

$$\sum_{k=0}^{n-1}[f(\xi_k) + g(\xi_k)](x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} g(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) = \sigma_d(f) + \sigma_d(g);$$

putem scrie deci

$$\sigma_d(f+g) = \sigma_d(f) + \sigma_d(g).$$

Fie acum un șir de diviziuni d_n ale intervalului $[a, b]$ cu $\nu(d_n) \to 0$; vom avea

$$\sigma_{d_n}(f+g) = \sigma_{d_n}(f) + \sigma_{d_n}(g)$$

și pentru că f și g sînt integrabile,

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{d_n}(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{d_n}(g) = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

de unde urmează că $f+g$ este integrabilă pe $[a, b]$ și

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Observație

Reciproca acestei proprietăți nu este în general adevărată, deci dacă $f+g$ este integrabilă pe $[a, b]$ nu trebuie să deducem că f și g sînt integrabile pe $[a, b]$.

d) **Dacă funcția f este integrabilă pe $[a, b]$, atunci funcția λf, $\lambda \in R$ este integrabilă pe $[a, b]$.**

Într-adevăr avem

$$\sigma_d(\lambda f) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) = \lambda \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k),$$

deci

$$\sigma_d(\lambda f) = \lambda \sigma_d(f)$$

şi pentru că f este integrabilă pe $[a, b]$ urmează că λf este integrabilă pe $[a, b]$ şi

$$\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Observaţii

1) Din proprietăţile (*c*) şi (*d*) rezultă că dacă f şi g sînt două funcţii integrabile pe $[a, b]$, funcţia $Af + Bg$, A, B fiind constante, este integrabilă pe $[a, b]$ şi

$$\int_a^b [Af(x) + Bg(x)]\,\mathrm{d}x = A\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + B\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

2) Proprietăţile (*c*) şi (*d*) arată că mulţimea funcţiilor integrabile pe $[a, b]$ formează un spaţiu vectorial.

e) **Dacă $f(x) \geqslant g(x)$ pentru orice $x \in [a, b]$ şi dacă f şi g sînt integrabile pe $[a, b]$, atunci**

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

(proprietatea de monotonie a integralei).

Funcţia $\varphi(x) = f(x) - g(x)$ este nenegativă pe $[a, b]$, deci conform proprietăţii (*b*) avem

$$\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$$

sau

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x \geqslant 0\,;$$

aplicînd proprietatea (*c*) rezultă că

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

f) **Dacă f este integrabilă pe $[a, b]$, atunci oricare ar fi punctul $c \in [a, b]$ avem**

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \quad (1)$$

$$\text{Dacă } c = a, \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = 0, \text{ deci} \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

şi relaţia (1) este verificată. În mod asemănător se arată că relaţia (1) este adevărată dacă $c = b$. Să presupunem $a < c < b$. Fie d_n' un şir de diviziuni ale intervalului $[a, c]$ cu $\nu(d'_n) \to 0$. Dacă $(\sigma_{d'_n})$ este un şir oarecare de sume Riemann relativ la aceste diviziuni, atunci

$$\sigma_{d'_n} \to \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Fie d''_n un şir de diviziuni ale intervalului $[c, b]$ cu $\nu(d''_n) \to 0$. Dacă $(\sigma_{d''_n})$ este un şir oarecare de sume Riemann relativ la aceste diviziuni, avem

$$\sigma_{d''_n} \to \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dacă notăm cu $d_n = d'_n \cup d''_n$, am obţinut un şir de diviziuni ale intervalului $[a, b]$ cu $\nu(d_n) \to 0$, deoarece

$$\nu(d_n) \leqslant \nu(d'_n) + \nu(d''_n).$$

Fie σ_{d_n} suma celor două sume Riemann $\sigma_{d'_n}$ şi $\sigma_{d''_n}$; avem

$$\sigma_{d_n} \to \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\sigma_{d_n} = \sigma_{d'_n} + \sigma_{d''_n};$$

la limită, egalitatea de mai sus ne conduce la

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Relaţia obţinută este adevărată oricare ar fi succesiunea punctelor a, b, c. Într-adevăr, fie $c < b < a$; avem

$$\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

însă

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x,$$

deci

$$\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

sau

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Din demonstrație rezultă și reciproca acestei proprietăți, anume:

g) **Dacă o funcție f este integrabilă pe intervalele $[a, c]$ și $[c, b]$ atunci f este integrabilă pe $[a, b]$.**

(proprietatea de aditivitate a integralei față de intervale).

h) **Dacă funcția f este integrabilă pe intervalul $[a, b]$, atunci f este integrabilă pe orice subinterval $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$.**

Fie $\varepsilon > 0$, arbitrar și o diviziune d a intervalului $[a, b]$. Deoarece f este integrabilă, există $\eta(\varepsilon) > 0$ astfel încît $\nu(d) < \eta(\varepsilon)$ și

$$S_d(f) - s_d(f) < \varepsilon.$$

Fie d' o diviziune a intervalului $[\alpha, \beta]$ cu $\nu(d') < \eta(\varepsilon)$.

Să completăm diviziunea d' a lui $[\alpha, \beta]$ pînă la o diviziune d'' a lui $[a, b]$, astfel încît $d'' \supset d$, deci cu $\nu(d'') < \eta(\varepsilon)$ vom avea

$$S_{d''}(f) - s_{d''}(f) = \sum_{[a, b]} (M_k - m_k)(x_{k+1} - x_k) < \varepsilon,$$

însă

$$S_{d'}(f) - s_{d'}(f) = \sum_{[\alpha, \beta]} (M_k - m_k)\ (x_{k+1} - x_k) \leqslant \sum_{[a, b]} (M_k - m_k)(x_{k+1} - x_k) < \varepsilon,$$

deoarece $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ și $M_k - m_k \geqslant 0$; din aceste neegalități rezultă

$$S_{d'}(f) - s_{d'}(f) < \varepsilon,$$

ceea ce dovedește că f este integrabilă pe orice interval $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$.

i) **Dacă funcția f este integrabilă pe $[a, b]$, atunci și $|f|$ este integrabilă pe $[a, b]$ și**

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Fie d o diviziune a intervalului $[a, b]$. Dacă notăm cu $\bar{f} = |f|$, avem

$$m \leqslant f(x) \leqslant M$$

$$\overline{m} \leqslant \bar{f}(x) \leqslant \overline{M}, \qquad x \in [a, b],$$

iar dacă $[x_k, x_{k+1}]$ este un subinterval al lui $[a, b]$, avem

$$m_k \leqslant f(x) \leqslant M_k$$

$$\overline{m}_k \leqslant \bar{f}(x) \leqslant \overline{M}_k, \qquad x \in [x_k, x_{k+1}].$$

Avem mai multe cazuri de considerat:

a') $m_k \geqslant 0,\ M_k \geqslant 0$. În această situație

$$\overline{m}_k = m_k, \quad \overline{M}_k = M_k$$

și

$$\overline{M}_k - \overline{m}_k = M_k - m_k.$$

b') $m_k \leqslant 0,\ M_k \leqslant 0$. Atunci

$$\overline{m}_k = -M_k, \quad \overline{M}_k = -m_k,$$

deci

$$\overline{M}_k - \overline{m}_k = M_k - m_k.$$

c') $m_k < 0,\ M_k > 0$. Atunci

$$\overline{M}_k = \sup\ [M_k,\ |m_k|]$$

$$\overline{M}_k - \overline{m}_k \leqslant \overline{M}_k = \sup\ [M_k,\ |m_k|] \leqslant M_k - m_k,$$

deci în toate cazurile

$$\overline{M}_k - \overline{m}_k \leqslant M_k - m_k$$

putem scrie

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\overline{M}_k - \overline{m}_k)\ (x_{k+1} - x_k) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)\ (x_{k+1} - x_k)$$

sau

$$S_d(\overline{f}) - s_d(\overline{f}) \leqslant S_d(f) - s_d(f)$$

și pentru că f este integrabilă rezultă din această neegalitate că f este integrabilă. Din

$$-|f| \leqslant f \leqslant |f|,$$

aplicînd proprietatea *e)* rezultă

$$-\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x,$$

deci

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Toate aceste proprietăți sînt folosite des în aplicații.

6. Formule de medie

Dacă f este mărginită și integrabilă pe intervalul $[a, b]$, am văzut că avem

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a), \tag{1}$$

unde m și M sînt marginile funcției f în $[a, b]$. Din (1) urmează că există un număr μ cuprins între m și M astfel încît

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mu(b-a).$$

Să presupunem că $f(x)$ este şi *continuă* pe $[a, b]$; în această situaţie există cel puţin un punct $\xi \in [a, b]$ astfel încît

$$f(\xi) = \mu,$$

deci

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(\xi),$$

care se numeşte *formula mediei* pentru integrale. Această formulă are o interpretare geometrică simplă, şi anume spune că există cel puţin un punct $\xi \in (a, b)$ astfel încît aria mărginită de arcul de curbă AB, $a \leqslant x \leqslant b$ şi de segmentele $a\,b$, aA, bB (fig. 10) este egală cu aria dreptunghiului de înălţime $f(\xi)$ şi bază $b - a$.

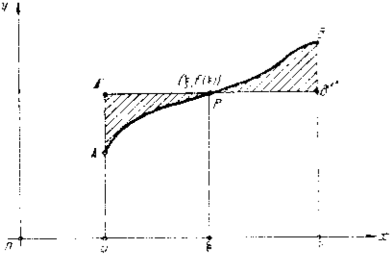

Fig. 10

Un rezultat mai general este conţinut în următoarea

T e o r e m ă. Dacă f şi p sînt două funcţii mărginite şi integrabile pe $[a, b]$ şi dacă *a)* $p(x) \geqslant 0$, $x \in [a, b]$, *b)* $f(x)$ este continuă pe $[a, b]$, atunci există un punct $\xi' \in (a, b)$ astfel încît

$$\int_a^b f(x)p(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi')\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x.$$

Demonstraţie. Să presupunem mai întîi pe $f(x)$ numai mărginită şi integrabilă. Avem

$$m \leqslant f(x) \leqslant M$$

şi pentru că $p(x) \geqslant 0$ urmează

$$mp(x) \leqslant f(x)\,p(x) \leqslant Mp(x)$$

deci şi

$$m\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b p(x)f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x,$$

neegalitatea care arată că există un număr μ' cuprins între m şi M astfel încît

$$\int_a^b p(x)f(x)\,\mathrm{d}x = \mu'\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Să presupunem acum că $f(x)$ este şi *continuă* în $[a, b]$, deci că există un punct $\xi' \in (a, b)$ astfel încît

$$f(\xi') = \mu';$$

în această situație relația (2) se scrie

$$\int_a^b f(x)p(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi')\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x.$$

Formula obținută se numește *formula generală a mediei* pentru integrale.

Pentru $p(x) \equiv 1$ obținem formula mediei.

Observație

Cele două formule de medie obținute sînt valabile și pentru $b < a$.

Aplicație

Inegalitatea lui Schwarz-Buniakovski. Oricare ar fi funcțiile f, g integrabile pe $[a, b]$ avem

$$\left[\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Să considerăm forma pătratică în λ și μ

$$\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]^2\,\mathrm{d}x = \lambda^2\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x + 2\lambda\mu\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x + \mu^2\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x$$

pozitivă pentru orice λ și μ; discriminantul ei este negativ

$$\left[\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 - \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0,$$

de unde deducem neegalitatea din enunț.

§ 3. INTEGRALA NEDEFINITĂ. PRIMITIVE

1. Funcții primitive

Fie $f(x)$ o funcție definită pe intervalul $[a, b]$. Ne propunem să determinăm o funcție $F(x)$ în $[a, b]$ care să aibă proprietatea ca în fiecare punct al intervalului (a, b) derivata ei să fie $f(x)$, deci

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = f(x), \quad x \in (a,\ b)$$

sau

$$\mathrm{d}F = f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Funcția $F(x)$ se numește *funcție primitivă* a funcției $f(x)$ în (a, b). Problema determinării *primitivei* unei funcții date se descompune de fapt în următoarele trei probleme:

a) O problemă de existență. Trebuie să arătăm că problema pusă nu este fără obiect, adică astfel de funcții $F(x)$ există.

b) Gradul de generalitate al soluției. Trebuie să cercetăm, în cazul cînd există, dacă soluția este unică sau sînt mai multe soluții; în cazul cînd soluția nu este unică să găsim forma ei generală.

c) Determinarea funcției $F(x)$. Trebuie să stabilim metodele pentru determinarea funcției $F(x)$ a cărei derivată este $f(x)$.

Pentru punctul *b*) putem răspunde imediat. Să presupunem că există funcții $F(x)$ și fie $F_1(x)$ și $F_2(x)$ două primitive; avem pentru orice $x \in (a, b)$

$$\frac{dF_1}{dx} = f(x), \quad \frac{dF_2}{dx} = f(x),$$

deci

$$\frac{d}{dx}[F_2(x) - F_1(x)] = 0, \quad x \in (a, b)$$

și conform unui rezultat cunoscut (vol. I, B, cap. IV, § 5, al. 6) urmează că

$$F_2(x) = F_1(x) + C, \quad x \in (a, b)$$

unde C este o constantă arbitrară. Am obținut următorul rezultat: dacă există o primitivă $F(x)$, atunci există o infinitate care diferă de $F(x)$ printr-o constantă arbitrară.

Toate primitivele se obțin dintr-una (din $F(x)$) printr-o deplasare paralelă cu axa Oy (fig. 11), deci soluția generală (dacă există) este formată dintr-o *familie de curbe paralele*, numite astfel, deoarece tangentele la curbele din familie în punctele de intersecție cu o paralelă la axa Oy, $x = x_1$ sînt paralele

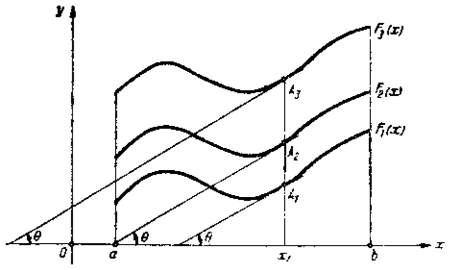

Fig. 11

$$\operatorname{tg} \theta = \Big[F(x) + C\Big]'_{x=x_1} = f(x_1) = \text{const.}$$

2. Legătura dintre noțiunile de primitivă și de arie mărginită de o curbă plană

Dacă notăm $y = F(x)$ o primitivă a funcției $f(x)$, atunci problema găsirii unei primitive a lui $f(x)$, $x \in (a, b)$ este de fapt problema găsirii unei soluții a ecuației

$$y' = f(x), \tag{1}$$

care este cea mai simplă *ecuaţie diferenţială*. La capitolul care tratează despre ecuaţii diferenţiale vom prezenta o teoremă de existenţă în legătură cu soluţiile ecuaţiei (1). Acum ne vom mulţumi cu o justificare geometrică, justificare ce ne va permite să stabilim şi o legătură strînsă între noţiunea de primitivă şi aria mărginită de o curbă plană.

Fie $f(x)$ o funcţie definită pe intervalul $[a, b]$ continuă, avînd un număr finit de puncte de extremum şi pozitivă pe acest interval. Această ultimă condiţie $f(x) \geqslant 0$, $x \in [a, b]$ nu restrînge generalitatea rezultatului pe care îl vom obţine, deoarece dacă $f(x)$ nu este pozitivă pe $[a, b]$ putem găsi un număr $A > 0$ astfel încît

$$f(x) + A \geqslant 0, \quad x \in [a, b]$$

şi dacă $F(x)$ este o primitivă a lui $f(x) + A$, atunci $F(x) - Ax$ este o primitivă a lui $f(x)$, deoarece

$$[F(x) - Ax]' = f(x), \quad x \in (a, b).$$

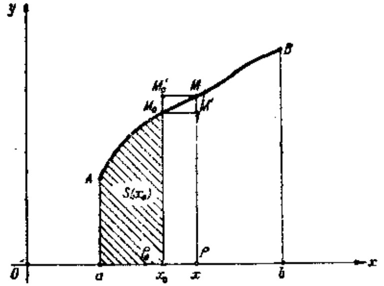

Fig. 12

Graficul funcţiei $f(x)$ este situat deasupra axei Ox (fig. 12).

Dacă P_0 este un punct de abscisă x_0, situat pe axa Ox între a şi b, atunci aria aAM_0P_0 este o funcţie de x_0, anume $S(x_0)$. Să găsim legătura între $S(x_0)$ şi $f(x_0)$. Aria trapezului mixtiliniu (P_0M_0MP), (fig. 12), este diferenţa

$$S(x) - S(x_0), \quad x > x_0$$

şi este cuprinsă între valorile

$$(x - x_0)\, f(x_0) \text{ şi } (x - x_0) f(x),$$

astfel încît avem şirul de neegalităţi

$$(x - x_0)\, f(x_0) < S(x) - S(x_0) < (x - x_0) f(x)$$

dacă $f(x) > f(x_0)$ şi

$$(x - x_0) f(x) < S(x) - S(x_0) < (x - x_0) f(x_0)$$

dacă $f(x) < f(x_0)$. Dacă împărţim cu $x - x_0 > 0$ avem

$$f(x_0) < \frac{S(x) - S(x_0)}{x - x_0} < f(x)$$

dacă $f(x) > f(x_0)$; trecînd la limită obţinem

$$\lim_{x \to x_0} \frac{S(x) - S(x_0)}{x - x_0} = S'(x_0) = f(x_0).$$

Acelaşi rezultat îl obţinem şi în cazul al doilea, cînd $f(x) < f(x_0)$.
Funcţia** $S(x)$ **este aşadar o primitivă a funcţiei $f(x)$ şi reprezintă aria mărginită de graficul funcţiei $f(x)$, axa Ox şi paralelele la axa Oy în punctele $A(a, 0)$ şi $P(x, 0)$.

3. Integrala nedefinită

Fie f o funcţie integrabilă pe un interval $[a, b]$ şi $c \in [a, b]$. Funcţia

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt \tag{1}$$

este definită pentru orice valoare a lui $x \in [a, b]$. Avem

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_c^b f(t)\,dt - \int_c^a f(t)\,dt$$

şi cu notaţia de la (1)

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a); \tag{2}$$

de aici rezultă că *valoarea integralei definite* $\int_a^b f(t)\,dt$ se obţine cu ajutorul valorilor funcţiei $F(x)$: anume valoarea lui $F(x)$ pentru limita superioară b, $F(b)$, minus valoarea lui $F(x)$ pentru limita inferioară a, $F(a)$; din această cauză funcţia $F(x)$ definită de (1) cu c oarecare (însă fix) în intervalul $[a, b]$ şi $x > c$ se numeşte *integrala nedefinită a funcţiei f*.

Observaţie

Integrala definită reprezintă o arie, prin urmare dacă reuşim printr-un procedeu oarecare să obţinem funcţia $F(x)$, calculul ariilor se reduce la determinarea funcţiei $F(x)$, adică la determinarea integralei nedefinite.

4. Proprietăţile integralei nedefinite

Teorema 1. Fie f o funcţie mărginită şi integrabilă pe un interval $[a, b]$; funcţia

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in [a, b]$$

este continuă pe $[a, b]$.

Demonstrație. Fie x_0 un punct interior lui $[a, b]$, cu

$$|f(x)| \leqslant M, \quad x \in [a, b];$$

avem

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

deci

$$|F(x) - F(x_0)| \leqslant \left|\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_{x_0}^x |f(t)|\,\mathrm{d}t\right| \leqslant M\,|x - x_0|$$

sau

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x_0 \in (a,\, b)}} F(x) = F(x_0)$$

şi pentru că x_0 este un punct oarecare din interval, rezultă continuitatea funcției F în intervalul (a, b).

Teorema 2. Dacă f este o funcție continuă pe un interval $[a, b]$, funcția

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

este derivabilă pe intervalul (a, b) şi $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = f(x)$.

Demonstrație. Fie x_0 un punct oarecare al intervalului (a, b); avem

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

pentru orice $x \in (a, b)$, $x \neq x_0$. Deoarece $f(x)$ este continuă putem aplica formula mediei lui (1)

$$F(x) - F(x_0) = (x - x_0) f(\xi), \quad x < \xi < x_0$$

deci

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$$

întrucît f este continuă şi $\lim\limits_{x \to x_0} f(\xi) = f(x_0)$. Punctul x_0 este arbitrar în (a, b), deci $F(x)$ este derivabilă în (a, b).

Această teoremă are consecințe importante:

C o n s e c i n ţ a I. Dacă funcţia f este continuă pe $[a, b]$, atunci funcţia

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in (a, b),\ x > c$$

este o primitiva a lui f pentru orice $c \in (a, b)$.

C o n s e c i n ţ a II. Dacă f este o funcţie continuă pe $[a, b]$ şi dacă $\alpha, \beta \in [a, b]$, atunci

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = F(\beta) - F(\alpha)$$

oricare ar fi primitiva F a lui f.

Într-adevăr, funcţia f fiind continuă are primitive; fie F o primitivă; conform rezultatului obţinut la acest paragraf, al. 3, avem

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = F(\beta) - F(\alpha).$$

Fie acum $F_1 = F + C$ o primitivă oarecare a lui f în intervalul (a, b); avem

$$F_1(\beta) - F_1(\alpha) = (F(\beta) + C) - (F(\alpha) + C) = F(\beta) - F(\alpha),$$

aşadar diferenţa $F(\beta) - F(\alpha)$ este aceeaşi *oricare ar fi* primitiva F a lui f.

Formula

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a) = F(t)\Big|_a^b$$

se numeşte *formula lui Leibniz-Newton* şi este foarte importantă în aplicaţii pentru că *reduce calculul integralei definite a unei funcţii continue f la găsirea unei primitive particulare F a lui f.*

O b s e r v a ţ i e

Formula lui Leibniz-Newton nu este valabilă numai pentru funcţiile continue, ci pentru o clasă mai largă de funcţii integrabile, care au şi primitive. Vom reveni mai tîrziu la formula lui Leibniz-Newton, cînd vom considera integralele generalizate.

Fie f o funcţie definită pe un interval (a, b) care are primitive, şi F o primitivă a sa.

Mulţimea $F + C$ a tuturor primitivelor se numeşte tot *integrala nedefinită* a sa şi se notează

$$F(x) + C = \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Deoarece avem $F'(x) = f(x)$ urmează că putem scrie

$$\int F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

sau

$$\int \mathrm{d}\,(F(x)) = F(x) + C.$$

Avem de asemenea

$$\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x)$$

sau

$$\mathrm{d}\int f(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,\mathrm{d}x,$$

formule care se folosesc deseori.

Exemple

1) Să calculăm aria cuprinsă între parabola $y^2 = 2px$, dreapta $x = 2p$ și axa Ox (fig. 13).

$\mathcal{A} = \int_0^{2p} \sqrt{2px}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2p}\int_0^{2p} x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$. O primitivă a funcției $x^{\frac{1}{2}}$ este $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, deoarece $\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)' = x^{\frac{1}{2}}$ deci

$$\mathcal{A} = \sqrt{2p}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^{2p} = \frac{8}{3}p^2,$$

adică $\mathcal{A}$ este $\frac{2}{3}$ din aria pătratului de latură $2p$.

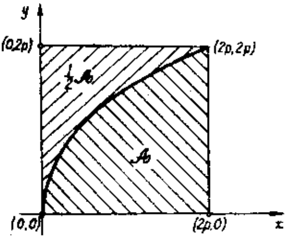

Fig. 13

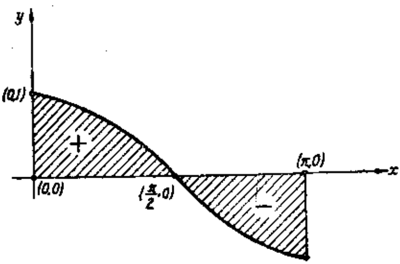

Fig. 14

2) Să calculăm aria mărginită de arcul de curbă $y = \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ și axele de coordonate. Avem

$$\mathcal{A} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Să calculăm acum aria mărginită de $y = \cos x$ pentru $0 \leqslant x \leqslant \pi$; avem (fig. 14)

$$\mathcal{A} = \int_0^{\pi} \cos x \, dx = \sin x \Big|_0^{\pi} = 0,$$

ceea ce nu este adevărat . Dacă ținem seamă de interpretarea geometrică a integralei definite, rezultă că ariile calculate au un semn, anume sînt pozitive în intervalele în care $f(x) > 0$ și negative în intervalele în care $f(x) < 0$. Rezultatul nul obținut în exemplu arată numai că aria situată deasupra axei Ox este egală cu aria aflată sub axa Ox.

Aplicații

1) După cum se știe, într-o mișcare rectilinie viteza unui mobil la un timp t este dată de

$$v(t) = \frac{ds}{dt} \cdot$$

unde $s = s(t)$ dă legea de variație a spațiului în raport cu timpul. Dacă cunoaștem funcția $s(t)$ putem găsi, prin derivare, viteza $v(t)$. Să presupunem acum că știm legea de variație a vitezei $v(t)$ și ne propunem să găsim funcția $s(t)$; avem

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} v(t) \, dt$$

(am luat $s(t_0) = 0$). De exemplu, dacă gt este viteza de cădere a corpurilor în vid (g = const.), atunci

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} gt \, dt = \frac{1}{2} gt^2 - \frac{1}{2} g t_0^2 \cdot$$

Am găsit astfel legea de variație a spațiului în raport cu timpul, în această mișcare.

2) Dacă $f(x)$ este un polinom de grad mai mic sau egal cu 3, atunci

$$\int_a^b f(x) \, dx = \frac{b-a}{b} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

(formula celor trei nivele).

Fie $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$,

$$I = \int_a^b f(x) \, dx = \left[A \frac{x^4}{4} + B \frac{x^3}{3} + C \frac{x^2}{2} + Dx \right]_a^b =$$

$$= A \frac{b^4 - a^4}{4} + B \frac{b^3 - a^3}{3} + C \frac{b^2 - a^2}{2} + D(b-a) =$$

$$= \frac{b-a}{6} \left[\frac{3}{2} A (b^3 + b^2 a + ba^2 + a^3) + 2B(b^2 + ab + a^2) + 3C(b-a) + 6D \right] =$$

$$= \frac{b-a}{6} \left[Aa^3 + Ba^2 + Ca + D + Ab^3 + Bb^2 + Cb + D + \right.$$

$$\left. + 4A \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + 4B \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + 4C \frac{a+b}{2} + 4D \right]$$

și formula este demonstrată.

§ 4. METODE DE INTEGRARE

1. Tabloul primitivelor curente

Pentru funcțiile continue $f(x)$ fiind valabilă relația $F'(x) = f(x)$, putem obține, din tabloul derivatelor funcțiilor ce apar în mod curent în calcule, următorul tablou de funcții primitive

1) $\int 0\,\mathrm{d}x = C,$

2) $\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\quad n$ număr real $\neq -1,$

3) $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C,$

4) $\int (ax+b)^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} + C,\quad n,$ real, $\neq -1,$

5) $\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C,$

6) $\int a^x \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}a^x + C,\quad a > 0,\ a \neq 1,$

7) $\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C,$

8) $\int e^{mx}\mathrm{d}x = \frac{1}{m}e^{mx} + C,$

9) $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C,$

10) $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C,$

11) $\int \sin(ax+b)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C,$

12) $\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C,$

13) $\int \operatorname{ctg} x\,\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C,$

14) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C,$

15) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C\,,$

16) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,$

17) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,$

18) $\displaystyle\int \operatorname{ch} x \,\mathrm{d}x = \operatorname{sh} x + C,$

19) $\displaystyle\int \operatorname{sh} x \,\mathrm{d}x = \operatorname{ch} x + C,$

20) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{th} x + C,$

21) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C,$

22) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0,$

23) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad a \neq 0,$

24) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0,$

25) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C,$

26) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax+b)^2 + c^2} = \frac{1}{ac} = \operatorname{arc\,tg}\frac{ax+b}{c} + C,$

formule valabile pe un interval conținut în domeniul de definiție al fiecărei funcții în parte.

O b s e r v a ț i e .

Prin C se înțelege *o constantă arbitrară,* adică o nedeterminată care poate să parcurgă toate numerele reale.

Folosind tabloul de primitive de mai sus, precum şi următoarele reguli de calcul :

$$1) \quad \int [Af(x) + Bg(x)]\,\mathrm{d}x = A\int f(x)\mathrm{d}x + B\int g(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$2) \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C,$$

$$3) \quad \int f^n(x) f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} f^{n+1}(x) + C, \quad n \neq -1,$$

putem obţine primitive noi.

Aplicaţii.

1) Să calculăm primitiva unui polinom

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n.$$

Avem $$\int P_n(x)\mathrm{d}x = a_0\int \mathrm{d}x + a_1\int x\,\mathrm{d}x + \ldots + a_n\int x^n \mathrm{d}x,$$

deci

$$\int P_n(x)\,\mathrm{d}x = C + a_0 x + a_1\frac{x^2}{2} + \ldots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1},$$

adică tot un polinom de grad superior cu o unitate.

Exemplu

$$\int\left(x^3 - 2x^2 + \frac{1}{2}x + 1\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + x + C.$$

2) Regula de calcul

$$\int x^p \mathrm{d}x = \frac{1}{p+1}x^{p+1} + C$$

este valabilă pentru orice $p \neq -1$, real.

Exemplu

$$\int \frac{x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{5}{7}} - x^{\frac{1}{2}}}{x}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x + 2\int x^{-\frac{2}{7}}\,\mathrm{d}x -$$

$$-\int x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{14}{5}x^{\frac{5}{7}} - 2x^{\frac{1}{2}} + C.$$

3) Integralele

$$\int \cos mx \cos nx \, dx, \quad \int \cos mx \sin nx \, dx,$$

$$\int \sin mx \sin nx \, dx, \ m \neq n$$

se obţin transformînd produsele în sume

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} \cos (m+n) x + \frac{1}{2} \cos (m-n) x,$$

$$\cos mx \sin nx = \frac{1}{2} \sin (m+n) x - \frac{1}{2} \sin (m-n) x,$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2} \cos (m-n) x - \frac{1}{2} \cos (m+n) x,$$

ale căror primitive sînt imediate

$$\int \cos mx \cos nx \, dx = \frac{1}{2(m+n)} \sin (m+n) x + \frac{1}{2(m-n)} \sin (m-n) x + C,$$

$$\int \cos mx \sin nx \, dx = -\frac{1}{2(m+n)} \cos (m+n) x + \frac{2}{2(m+n)} \cos (m-n) x + C,$$

$$\int \sin mx \sin nx \, dx = \frac{1}{2(m-n)} \sin (m-n) x - \frac{1}{2(m+n)} \sin (m+n) x + C.$$

Alte exemple

1) $$\int \frac{x + \operatorname{arc} tg\, x}{1+x^2} dx = \int \frac{x\, dx}{1+x^2} + \int \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} +$$

$$+ \int \operatorname{arc\,tg} x \, d(\operatorname{arc\,tg} x) = \frac{1}{2} \ln (1+x^2) + \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg}^2 x + C.$$

2) $$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

3) $$\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

4 $$\int \sin^3 x \, dx = -\int \sin^2 x \, d(\cos x) = -\int (1 - \cos^2 x) \, d(\cos x) =$$

$$= -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C.$$

5) $\displaystyle\int \cos^3 x\,\mathrm{d}x = \int \cos^2 x\,\mathrm{d}(\sin x) = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C.$

6) $\displaystyle\int \frac{3x^2+2x+1}{x^3+x^2+x+9}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(x^3+x^2+x+9)}{x^3+x^2+x+9} = \ln|x^3+x^2+x+9| + C.$

7) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{ch} x}{e^x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{e^x+e^{-x}}{e^x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C.$

8) Să se găsească lucrul mecanic de deformaţie la o grindă încastrată şi încărcată cu o sarcină uniform distribuită (fig. 15).

Pentru o grindă încastrată de lungime l, încărcată cu o sarcină uniform distribuită p kg/ml, lucrul mecanic este dat de

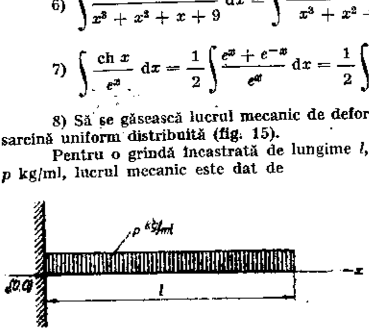

Fig. 15

$$L = \int_0^l \frac{M^2}{2EI}\,\mathrm{d}x, \quad M = p\,\frac{x^2}{2}$$

deci

$$L = \frac{p^2}{8EI}\int_0^l x^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{40}\cdot\frac{p^2 l^5}{EI}.$$

În formula folosită I şi E sînt constante, deoarece reprezintă respectiv momentul de inerţie al grinzii şi modulul de elasticitate al materialului, şi considerăm că grinda are o secţiune constantă şi este făcută dintr-un material omogen.

2. Metoda de integrare prin părţi

T e o r e m ă. Dacă $u(x)$ şi $v(x)$ sînt două funcţii care au derivate $u'(x)$, $v'(x)$ continue pe un interval $[a, b]$, atunci

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Demonstraţie. Funcţiile u şi v sînt continue fiind derivabile. Derivatele u', v' fiind continue urmează că funcţiile $u'v$ şi $v'u$ sînt de asemenea continue, deci au primitive. Din

$$(uv)' = u'v + v'u$$

sau

$$(uv)'\mathrm{d}x = vu'\mathrm{d}x + uv'\,\mathrm{d}x$$

obţinem prin integrare

$$uv = \int vu'\,\mathrm{d}x + \int uv'\,\mathrm{d}x$$

sau

$$\int uv'\,\mathrm{d}x = uv - \int vu'\,\mathrm{d}x\,; \tag{1}$$

formula obţinută se numeşte formula *integrării prin părţi*.

Observaţii.

1) Deoarece $v'\mathrm{d}x = \mathrm{d}v$, $u'\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$, formula de integrare prin părţi se mai scrie

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u.$$

2) Metoda poate fi folosită cu succes dacă integrala $\int v\mathrm{d}u$ poate fi calculată.

3) Formula de integrare prin părţi este adevărată şi pentru integrale definite; anume din

$$\int_a^b (u\,v)'\;\mathrm{d}x = \int_a^b uv'\,\mathrm{d}x + \int_a^b v'u\,\mathrm{d}x$$

obţinem

$$\int_a^b u\,\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u.$$

Exemple

1) Să se calculeze $\int \ln x\,\mathrm{d}x$, $x > 0$. Luăm $u = \ln x$, $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$, deci $v = x$, $\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$,

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int x\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\ln x - x + C\,,\ x > 0.$$

2) Să se calculeze $\int \operatorname{arc\,tg} x\,\mathrm{d}x$. Punem $u = \operatorname{arc\,tg} x$, $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$, deci $v = x$, $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2}$,

$$\int \operatorname{arc\,tg} x\;\mathrm{d}x = x \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1 + x^2} = x \operatorname{arc\,tg}\ x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C.$$

3) Să se calculeze $\int \arcsin x\,\mathrm{d}x$. Punem $u = \arcsin x$, $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$, deci $v = x$, $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}}$,

$$\int \arcsin x\;\mathrm{d}x = x \arcsin\ x - \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C,\ x \in (-1, +1).$$

4) Să se calculeze $I_{m,n} = \int_0^1 x^m (\ln x)^n \, dx$, m, n, întregi, > 0.

Luăm $u = (\ln x)^n$, $dv = x^m \, dx$, deci $v = \frac{x^{m+1}}{m+1}$, $du = \frac{n}{x}(\ln x)^{n-1}$, prin urmare

$$I_{m,n} = \frac{1}{m+1} x^{m+1} (\ln x)^n \Big|_0^1 - \frac{n}{m+1} \int_0^1 x^m (\ln x)^{n-1} \, dx$$

sau

$$I_{m,n} = -\frac{n}{m+1} \int_0^1 x^m (\ln x)^{n-1} \, dx = -\frac{n}{m+1} I_{m,n-1};$$

obținem astfe.

$$I_{m,n} = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^n} I_{m,0} = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

T e o r e m ă. Dacă $u(x)$ și $v(x)$ au derivate continue de ordinul n pe un interval $[a, b]$, avem

$$\int uv^{(n)} \, dx = uv^{(n-1)} - uv^{(n-2)} + \ldots + (-1)^k u^{(k)} v^{(n-k-1)} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1} u^{(n-1)} v + (-1)^n \int u^{(n)} v dx$$

(formula integrării prin părți generalizată).

Demonstrație. Avem, conform formulei de integrare prin părți,

$$\int uv^{(n)} \, dx = uv^{(n-1)} - \int u' v^{(n-1)} \, dx,$$

$$\int u' v^{(n-1)} \, dx = u' v^{(n-2)} - \int u'' v^{(n-2)} \, dx,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int u^{(k)} v^{(n-k)} \, dx = u^{(k)} v^{(n-k-1)} - \int u^{(k+1)} v^{(n-k-1)} \, dx,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int u^{(n-1)} v' dx = u^{(n-1)} v - \int u^{(n)} v \, dx;$$

înmulțim prima cu 1, a doua cu $-1, \ldots$, ultima cu $(-1)^{n-1}$ și le adunăm

$$\int u \, v^{(n)} \, dx = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k u^{(k)} v^{(n-k-1)} + (-1)^n \int u^{(n)} v \, dx; \tag{1}$$

obținem astfel formula din enunț.

Pentru integrale definite, formula obţinută se scrie

$$\int_a^b uv^{(n)}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k u^k v^{(n-k-1)}\Big|_a^b + (-1)^n\int_a^b u^{(n)} v\,\mathrm{d}x.$$

Exemple

1) Să se calculeze $I = \int \cos(ax)\, e^{bx}\,\mathrm{d}x$. Dacă punem

$$u = \cos\ ax,\quad v'' = e^{bx}$$

obţinem

$$I = \frac{1}{b}\cos\ (ax)\, e^{bx} + \frac{a}{b^2}\ \sin\ (ax)\, e^{bx} - \frac{a^2}{b^2} I,$$

deci

$$\int \cos\ ax\ e^{bx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2+b^2}\,[b\cos\ ax + a\sin ax]\, e^{bx} + C;$$

în mod analog avem şi

$$\int \sin\ (ax)\, e^{bx}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{a^2+b^2}\,[a\cos ax - b\sin bx]\, e^{bx} + C.$$

2) Să se calculeze

$$I = \int (ax+b)^m e^{cx}\,\mathrm{d}x.$$

Cu $n = m - 1$ obţinem din (1)

$$I = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k\ \frac{m!}{(m-k)!}\ \frac{a^k}{c^{k+1}}(ax+b)^{m-k}\, e^{cx}.$$

Aplicaţii

1) Formula lui Taylor cu restul sub formă integrală. În formula

$$\int_a^b uv^{(n+1)}\ \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}\left[(-1)^k\, u^{(k)}\, v^{(n-k)}\Big|_a^b\right] + (-1)^{n+1}\int_a^b u^{(n+1)}\, v\,\mathrm{d}x$$

să punem

$$v(x) = f(x),\quad u(x) = \frac{(b-x)^n}{n!},$$

f fiind o funcţie continuă avînd derivate continue pînă la ordinul $(n+1)$ în $[a, b]$. Avem

$$u'(x) = -\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!},\quad u''(x) = \frac{(b-x)^{n-2}}{(n-2)!},\ \ldots,\ u^{(n)} = (-1)^n,\ u^{(n+1)} = 0,$$

deci

$$\int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[f(x) + \frac{b-x}{1!} f'(x) + \dots + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + \right.$$

$$\left. + \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n)}(x) \right]_a^b$$

sau

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{1}{n!}\int_a^b (b-x)^n f^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x; \qquad (1)$$

am obţinut astfel formula lui Taylor cu forma integrală a restului

$$R_n = \frac{1}{n!}\int_a^b (b-x)^n f^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (2)$$

Observăm că $b-x \geqslant 0$ în intervalul $[a, b]$; deoarece $f^{(n+1)}(x)$ este continuă pe $[a, b]$, folosind formula generală a mediei cu $q(x) = (b-x)^n$ obţinem

$$R_n = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) \int_a^b (b-x)^n\,\mathrm{d}x = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

adică restul lui Lagrange.

Dacă în (2) luăm $q(x) = (b-x)^{p-1}$, $p \geqslant 1$, şi aplicăm formula generală a mediei, obţinem

$$R_n = \frac{1}{n!} f^{n+1}(\xi)(b-\xi)^{n-p+1} \int_a^b (b-x)^{p-1}\,\mathrm{d}x$$

sau

$$R_n = \frac{1}{n!}(b-a)^p (b-\xi)^{n-p+1} f^{(n+1)}(\xi),$$

adică restul lui Schlomilch; în fine, dacă luăm în (2), $q(x) \equiv 1$, pe aceeaşi cale obţinem restul lui Cauchy.

Dacă înlocuim în formula obţinută (1) pe $f'(x)$ cu $g(x)$ obţinem

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{1!} g(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} g^{(n-1)}(a) + \frac{1}{n!}\int_a^b (b-x)^n g^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (3)$$

2) Dacă $P(x)$ este un polinom de gradul n, aplicînd formula de integrare prin părţi, generalizată, se obţine

$$\int e^{ax} P(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{a} P(x) - \frac{1}{a^2} P'(x) + \dots + (-1)^n \frac{1}{a^{n+1}} P^{(n)}(x)\right] e^{ax}.$$

În acelaşi mod se pot calcula integralele de forma

$$\int P(x)\cos ax\,\mathrm{d}x, \quad \int P(x)\sin ax\,\mathrm{d}x.$$

3. Schimbarea variabilei de integrare în integrala definită

T e o r e m ă. Dacă $f(x)$ este continuă pe intervalul $[a, b]$, iar $x = \varphi(t)$ este o funcţie strict monotonă, cu derivata continuă pe $[\alpha, \beta]$, atunci

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\, \varphi'(t)\, dt,$$

unde α şi β sînt soluţiile ecuaţiilor $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$.

Demonstraţie. Fie d o diviziune a intervalului $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

şi

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = \beta$$

diviziunea corespunzătoare d' a intervalului $[\alpha, \beta]$ ce se obţine rezolvînd ecuaţiile $x_k = \varphi(t_k)$, ecuaţii care au o singură soluţie pentru fiecare k, deoarece φ este strict monotonă. Avem de asemenea

$$x_{k+1} - x_k = \varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k) = (t_{k+1} - t_k)\varphi'(\tau_k), \quad \tau_k \in (t_k, t_{k+1}).$$

Să considerăm o sumă Riemann *oarecare* relativă la diviziunea d

$$\sigma_d(f) = f(\xi_0)(x_1 - x_0) + f(\xi_1)(x_2 - x_1) + \ldots + f(\xi_{n-1})(x_n - x_{n-1})$$

şi să luăm punctele ξ_k astfel încît

$$\xi_k = \varphi(\tau_k);$$

în această situaţie suma σ_d devine

$$\sigma_d(f) = f[\varphi(\tau_0)]\, \varphi'(\tau_0)(t_1 - t_0) + f[\varphi(\tau_1)]\varphi'(\tau_1)(t_2 - t_1) + \ldots$$
$$\ldots + f[\varphi(\tau_{n-1})]\varphi'(\tau_{n-1})(t_n - t_{n-1}).$$

Fie (d_n) un şir de diviziuni ale intervalului $[a, b]$ căruia îi corespunde şirul de diviziuni (d'_n) ale intervalului $[\alpha, \beta]$; dacă $\nu(d_n) \to 0$ atunci $\nu(d'_n) \to 0$, deci la limită obţinem

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t) dt,$$

relaţie care se numeşte *formula schimbării de variabilă în integrala definită.*

O b s e r v a ț i i.

1. Formula stabilită mai sus permite și calculul de primitive; într-adevăr putem scrie

$$\int_{a'}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha'}^{t} f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F(t) - F(\alpha')$$

deci

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(\overset{-1}{\varphi}(x)) + C,$$

unde am notat pe $-F(\alpha')$ cu C (constanta arbitrară), deoarece considerăm pe a' oarecare (însă fix) în $[a, b]$.

2. Condițiile impuse funcției φ se cer numai în intervalul $[\alpha, \beta]$, transformatul intervalului $[a, b]$. Dacă condițiile din enunț nu sînt îndeplinite, se poate ajunge la rezultate false.

E x e r c i ț i i

1) Să se calculeze

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Facem schimbarea de variabilă $x = a\,\mathrm{sh}\,t$, $\mathrm{d}x = a\,\mathrm{ch}\,t\,\mathrm{d}t$,

$$I = \int \frac{a\,\mathrm{ch}\,t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{a^2 + a^2\mathrm{sh}^2 t}} = \int \mathrm{d}t = t + C;$$

revenind la variabila x obținem

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \arg\mathrm{sh}\frac{x}{a} + C = \ln\,(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C.$$

2) Să se calculeze

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{(ax + b)^2 + c^2}.$$

Facem schimbarea de variabilă $ax + b = ct$, $\mathrm{d}x = \frac{c}{a}\,\mathrm{d}t$,

$$I = \frac{1}{ac}\int \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2} = \frac{1}{ac}\,\mathrm{arc\,tg}\,t + C;$$

revenind la variabila x obținem

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax + b)^2 + c^2} = \frac{1}{ac}\,\mathrm{arc\,tg}\frac{ax + b}{c} + C.$$

3) Să se calculeze

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{4 + \cos\,x}.$$

O astfel de integrală se calculează cu ajutorul transformării

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Observăm însă că pentru $x = 0$, $t = 0$, $x = 2\pi$, $t = 0$, deci $I = 0$, ceea ce este imposibil, deoarece $4 + \cos x > 0$. Eroarea provine din faptul că funcția $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ nu este monotonă decît pe intervalele $(k\pi, k\pi + \pi)$. Împărțind intervalul $(0, 2\pi)$ în două avem

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{4+\cos x} = \int_0^{\pi}\frac{dx}{4+\cos x} + \int_{\pi}^{2\pi}\frac{dx}{4+\cos x},$$

ultima integrală, cu substituția $x + \pi = u$, se transformă în

$$\int_0^{\pi}\frac{du}{4-\cos u},$$

deci

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{4+\cos x} = \int_0^{\pi}\frac{dx}{4+\cos x} + \int_0^{\pi}\frac{dx}{4-\cos x}.$$

Pentru a evita limite infinite mai împărțim o dată intervalul în două

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{4+\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{4+\cos x} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dx}{4+\cos x} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{4-\cos x} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dx}{4-\cos x}.$$

În integrala a doua și a patra făcînd substituția $x + \frac{\pi}{2} = u$, obținem, în cele din urmă

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{4+\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{4+\cos x} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{4-\sin x} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{4-\cos x} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{4+\sin x};$$

putem face acum substituția $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$; avem

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{4+\cos x} = \int_0^1\frac{2dt}{5+3t^2} + \int_0^1\frac{dt}{2t^2-t+2} + \int_0^1\frac{2dt}{3+5t^2} + \int_0^1\frac{dt}{2t^2+t+2} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}t\Big|_0^1 + \frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arc\,tg}\frac{4t-1}{\sqrt{15}}\Big|_0^1 + \frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}t\Big|_0^1 +$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arc\,tg}\frac{4t+1}{\sqrt{15}}\Big|_0^1 = \frac{4}{\sqrt{15}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{15}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{15}}\pi,$$

deoarece $\operatorname{arc\,tg} a + \operatorname{arc\,tg} b = \operatorname{arc\,tg}\frac{a+b}{1-ab}$.

4. Integrarea prin recurență

Vom prezenta această metodă prin exemple.

a) Să se integreze

$$I_n = \int \operatorname{tg}^n x \,\mathrm{d}x, \quad n \text{ întreg} > 0.$$

Putem scrie

$$I_n = \int \operatorname{tg}^{n-2} x \ \operatorname{tg}^2 x \ \mathrm{d}x$$

unde înlocuim pe $\operatorname{tg}^2 x$ cu $\frac{1}{\cos^2 x} - 1$

$$I_n = \int \operatorname{tg}^{n-2} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) \mathrm{d}x = -\int \operatorname{tg}^{n-2} x \ \mathrm{d}x + \int \operatorname{tg}^{n-2} x \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x},$$

însă

$$\int \operatorname{tg}^{n-2} x \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \operatorname{tg}^{n-2} x \,\mathrm{d}\,(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{n-1} \operatorname{tg}^{n-1} x,$$

deci

$$I_n = -I_{n-2} + \frac{1}{n-1} \operatorname{tg}^{n-1} x;$$

am stabilit o formulă de recurență care ne permite determinarea primitivei lui I_n. Pentru $a = 2m$ avem

$$I_2 = -I_0 + \operatorname{tg} x,$$

$$I_4 = -I_2 + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$I_{2m} = -I_{2m-2} + \frac{1}{2m-1} \operatorname{tg}^{2m-1} x,$$

deci

$$I_{2m} = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \frac{1}{2m-2k-1} \operatorname{tg}^{2m-2k-1} x + (-1)^m x + C.$$

Pentru $n = 2m + 1$ obținem în mod analog

$$I_3 = -I_1 + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x,$$

$$I_5 = -I_3 + \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$I_{2m+1} = -I_{2m-1} + \frac{1}{2m}\operatorname{tg}^{2m} x,$$

deci

$$I_{2m+1} = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \frac{1}{2m-2k}\operatorname{tg}^{2m-2k} x + (-1)^{m+1}\ln \cos x + C.$$

b) Să se calculeze integralele definite

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx, \quad I_n^* = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx, \quad n > 0, \text{ întreg.}$$

Prin substituția $x = \frac{\pi}{2} - t$ se reduce una la cealaltă, deci $I_n = I_n^*$.

Pentru I_n putem scrie

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x \, dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \, d(\cos x),$$

pe care o integrăm prin părți cu $u = \sin^{n-1} x$, $dv = d(\cos x)$,

$$I_n = -\cos x \sin^{n-1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx;$$

înlocuind pe $\cos^2 x$ cu $1 - \sin^2 x$, obținem formula de recurență

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Pentru $n = 2m$ avem

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0,$$

$$I_4 = \frac{3}{4} I_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m} I_{2m-2},$$

şi cum $I_0 = \frac{\pi}{2}$, rezultă, înmulţind pe coloane

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \, dx = \frac{1.3.5 \ldots (2m-1)}{2.4.6 \ldots 2m} \, \frac{\pi}{2}.$$

Pentru $n = 2m + 1$ obţinem în mod analog

$$I_3 = \frac{2}{3} I_1,$$

$$I_5 = \frac{4}{5} I_3,$$

$$\cdots\cdots$$

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} I_{2m-1}$$

şi pentru că $I_1 = 1$, avem

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x \, dx = \frac{2.4.6 \ldots 2m}{1.3.5 \ldots (2m+1)}.$$

c) Pentru orice $n > 0$, întreg, şi orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ avem

$$\sin^{2n-1} x > \sin^{2n} x > \sin^{2n+1} x > 0$$

deci şi

$$I_{2n-1} > I_{2n} > I_{2n+1}$$

sau

$$\frac{2.4.6 \ldots (2n-2)}{1.3.5 \ldots (2n-1)} > \frac{1.3.5 \ldots (2n-1)}{2.4.6 \ldots 2n} \, \frac{\pi}{2} > \frac{2.4.6 \ldots 2n}{1.3.5 \ldots (2n+1)}$$

şi înmulţindu-le cu $\frac{2.4.6 \ldots 2n}{1.3.5 \ldots (2n-1)}$ obţinem

$$\frac{2^2.4^2 \ldots (2n-2)^2 \, 2n}{1^2.3^2 \ldots (2n-1)^2} > \frac{\pi}{2} > \frac{2^2.4^2 \ldots 2(n)^2}{1^2.3^2 \ldots (2n-1)^2 (2n+1)};$$

ultimul raport diferă de primul prin $\frac{2n}{2n+1}$, prin urmare la limită are loc egalitatea

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^2.4^2 \ldots (2n)^2}{1^2.3^2 \ldots (2n-1)^2 (2n+1)},$$

formulă datorită lui Wallis.

Aplicație
Integralele de forma

$$I_n = \int_0^a (a^2 - x^2)^n \,dx, \quad J_n = \int_0^a (a^2 - x^2)^{\frac{2n-1}{2}} \,dx$$

se reduc la cele studiate la punctul *b)* prin transformarea $x = a \sin t$. Într-adevăr

$$I_n = a^{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t \,dt = a^{2n+1} \frac{2.4.6 \ldots 2n}{1.3.5 \ldots (2n+1)},$$

$$J_n = a^{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t \,dt = a^{2n} \frac{1.3.5 \ldots (2n-1)}{2.4.6 \ldots 2n} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

§ 5. INTEGRAREA FUNCȚIILOR RAȚIONALE

1. Descompunerea în elemente simple a unei funcții raționale

O funcție rațională

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

este definită ca raportul a două polinoame, iar integralele de forma

$$\int R(x) \,dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)} \,dx$$

se numesc integrale de funcții raționale. Putem presupune că gradul polinomului $Q(x)$ este superior gradului polinomului de la numărător, deoarece, în caz contrar, prin împărțire

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{P^*(x)}{Q(x)}$$

obținem cîtul $C(x)$, care este un polinom, și funcția rațională $\frac{P^*(x)}{Q(x)}$ unde, de astă dată, gradul polinomului de la numărător este inferior cu cel puțin o unitate gradului polinomului $Q(x)$.

Vom arăta în cele ce urmează că dacă sînt cunoscute rădăcinile ecuației $Q(x) = 0$, atunci putem determina primitiva funcției $\frac{P(x)}{Q(x)}$ astfel încît integrarea funcțiilor raționale se poate totdeauna efectua.

Pentru integrarea unei funcții raționale

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

este necesară în prealabil o pregătire algebrică.

Definiție. Se numesc elemente simple funcțiile raționale

$$\frac{A}{(x-a)^n}, \quad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}, \quad n, \text{natural}, \ b^2-4ac < 0.$$

Teoremă. O funcție rațională $\frac{P(x)}{Q(x)}$ admite o descompunere în elemente simple, unică.

Demonstrație. Pe tot parcursul demonstrației vom face ipoteza că se cunosc rădăcinile ecuației $Q(x) = 0$.

a) Ecuația $Q(x) = 0$ are rădăcină reală $x = a$ de ordinul m de multiplicitate. În acest caz putem scrie

$$Q(x) \equiv (x-a)^m Q_1(x), \quad \text{cu} \quad Q_1(a) \neq 0.$$

Presupunem că gradul lui $P(x)$ este inferior gradului lui $Q(x)$. Avem pentru orice număr A, identitatea

$$\frac{P(x)}{(x-a)^m Q_1(x)} \equiv \frac{A}{(x-a)^m} + \frac{P(x) - AQ_1(x)}{(x-a)^m Q_1(x)},$$

deoarece am scăzut și am adunat în partea a doua pe $\frac{A}{(x-a)^m}$; determinăm pe A astfel încît polinomul $P(x)-AQ_1(x)$ să fie divizibil cu $x-a$, deci

$$P(a)-AQ_1(a) = 0,$$

relație care determină în *mod unic* pe $A = \frac{P(a)}{Q_1(a)}$.

Cu A astfel determinat putem scrie

$$P(x)-AQ_1(x) \equiv (x-a) P_1(x)$$

deci

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{A}{(x-a)^m} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{m-1}Q_1(x)}, \quad A = \frac{P(a)}{Q_1(a)}.$$

Procedînd în același mod pentru funcția rațională

$$\frac{P_1(x)}{(x-a)^{m-1} Q_1(x)}$$

obținem în cele din urmă identitatea

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{A_m}{(x-a)^m} + \frac{A_{m-1}}{(x-a)^{m-1}} + \dots + \frac{A_1}{x-a} + \frac{P^*(x)}{Q_1(x)}, \quad Q_1(a) \neq 0.$$

Fracțiile

$$\frac{A_k}{(x-a)^k}, \quad k = 1,2, \ldots, m$$

se numesc *elementele simple* relative la rădăcina $x = a$ de ordinul m de multiplicitate.

b) Calculul coeficienților A_k. 1) Să presupunem că $Q(x)$ este de gradul n și are toate rădăcinile reale simple $a_1, a_2, .., a_n$. În această situație avem descompunerea în elemente simple

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \ldots + \frac{A_n}{x-a_n}. \tag{1}$$

Determinarea numerelor A_k se poate face fie prin identificare, adică se aduce la același numitor și se identifică numărătorii, fie în modul următor: pentru determinarea lui A_1 înmulțim identitatea (1) cu $x - a_1$ și facem apoi $x = a_1$:

$$A_1 = \lim_{x \to a_1}\left[\frac{(x-a_1)\,P(x)}{Q(x)}\right] = \lim_{x \to a_1} \frac{(x-a_1)\,P'(x) + P(x)}{Q'(x)} = \frac{P(a_1)}{Q'(a_1)},$$

deoarece $x = a_1$ este rădăcină simplă a numitorului și $Q'(a_1) \neq 0$. În general

$$A_k = \lim_{x \to a_k}\left[\frac{(x-a_k)\,P(x)}{Q(x)}\right] = \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)}$$

astfel încît avem următoarea identitate:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{P(a_1)}{Q'(a_1)} \cdot \frac{1}{x-a_1} + \frac{P(a_2)}{Q'(a_2)} \cdot \frac{1}{x-a_2} + \ldots + \frac{P(a_n)}{Q'(a_n)} \cdot \frac{1}{x-a_n}. \tag{2}$$

Observație.

În identitatea (2) să presupunem pe $P(x)$ de grad $n-1$. Dacă înmulțim ambii termeni ai identității (2) cu $Q(x)$ obținem

$$P(x) \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)} \cdot \frac{Q(x)}{x-a_k}$$

relație care se numește *formula de interpolare a lui Lagrange*. Această formulă dă expresia unui polinom de grad $n-1$ cînd se cunosc valorile $P(a_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, ale polinomului $P(x)$ în n puncte arbitrare $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

În partea a doua intervine polinomul de gradul n

$$Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$$

care se poate construi cu ușurință, deoarece numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt date.

Exemplu

Să se descompună în elemente simple funcţia raţională

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x+1}{(x-1)(x-2)(x+3)}.$$

Trebuie să determinăm pe A, B, C astfel încît să avem identic

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x-2)(x+3)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3};$$

obţinem succesiv

$$A = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(2x+1)}{(x-1)(x-2)(x+3)} = -\frac{3}{4},$$

$$B = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(2x+1)}{(x-1)(x-2)(x+3)} = 1,$$

$$C = \lim_{x\to -3} \frac{(x+3)(2x+1)}{(x-1)(x-2)(x+3)} = -\frac{1}{4},$$

deci

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x-2)(x+3)} \equiv -\frac{3}{4}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{4}\frac{1}{x+3}.$$

2) Polinomul $Q(x)$ are rădăcini multiple. Pentru rădăcina $x = a$ de ordinul $m \leqslant n$ de multiplicitate avem

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{A_m}{(x-a)^m} + \frac{A_{m-1}}{(x-a)^{m-1}} + \dots + \frac{A_1}{x-a} + \frac{P^*(x)}{Q_1(x)}, \quad Q_1(a) \neq 0. \quad (1)$$

Calculul coeficienţilor A_k se face fie aducînd la acelaşi numitor şi identificînd numărătorii, fie în modul următor: înmulţim identitatea (1) cu $(x-a)^m$ şi facem pe $x\to a$, obţinem pe A_m

$$A_m = \lim_{x\to a} (x-a)^m \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Pentru calculul lui A_{m-1} înmulţim identitatea (1) cu $(x-a)^m$, derivăm o dată în raport cu x, apoi facem ca $x\to a$, deci

$$A_{m-1} = \lim_{x\to a} \frac{1}{1!}\left[\frac{P(x)(x-a)^m}{Q(x)}\right]'.$$

În general, dacă înmulţim pe (1) cu $(x-a)^m$, derivăm de k ori $(k \leqslant m-1)$, apoi facem $x\to a$, obţinem pe A_{m-k}

$$A_{m-k} = \lim_{x\to a} \frac{1}{k!}\left[\frac{P(x)(x-a)^m}{Q(x)}\right]^{(k)}.$$

Exemplu

Să se descompună în elemente simple fracția

$$\frac{x+2}{(x-1)^3(x-2)}\cdot \text{ Avem}$$

$$\frac{x+2}{(x-1)^3(x-2)} \equiv \frac{A_3}{(x-1)^3} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_1}{x-1} + \frac{B}{x-2}.$$

Folosim metoda coeficienților nedeterminați. Trebuie să avem identic

$$x+2 \equiv A_3(x-2) + A_2(x-1)(x-2) + A_1(x-1)^2(x-2) + B(x-1)^3$$

sau

$$x+2 \equiv x^3(A_1+B) + x^2(A_2 - 4A_1 - 3B) + x(A_3 - 3A_2 + 5A_1 + 3B) -$$
$$- 2A_3 + 2A_2 - 2A_1 - B$$

care conduce la sistemul

$$A_1 + B = 0, \quad A_2 - 4A_1 - 3B = 0,$$
$$A_3 - 3A_2 + 5A_1 + 3B = 1,$$
$$-2A_3 + 2A_2 - 2A_1 - B = 2,$$

cu soluția $A_1 = -4$, $A_2 = -4$, $A_3 = -3$, $B = 4$, deci

$$\frac{x+2}{(x-1)^3(x-2)} \equiv \frac{4}{x-2} - \frac{3}{(x-1)^3} - \frac{4}{(x-1)^2} - \frac{4}{x-1}.$$

Putem proceda și în modul următor. În identitatea

$$\frac{x+2}{(x-1)^3(x-2)} \equiv \frac{A_3}{(x-1)^3} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_1}{x-1} + \frac{B}{x-2} \tag{1}$$

putem determina imediat pe B și A_3. Într-adevăr, înmulțind cu $(x-1)^3$ și făcînd $x = 1$ obținem pe A_3

$$A_3 = \left.\frac{x+2}{x-2}\right|_{x=1} = -3.$$

Dacă înmulțim cu $x-2$ și facem $x = 2$ obținem pe B

$$B = \left.\frac{x+2}{(x-1)^3}\right|_{x=2} = 4.$$

Să înlocuim pe A_3 și B astfel găsiți în identitatea (1) și să facem pe rînd $x = 0$, $x = -1$; obținem sistemul

$$1 = 3 + A_2 - A_1 - \frac{4}{2},$$

$$\frac{1}{24} = \frac{3}{8} + \frac{A_2}{4} - \frac{A_1}{2} - \frac{4}{3},$$

cu soluția $A_1 = A_2 = -4$.

c) Ecuația $Q(x) = 0$ are rădăcina $x = a + ib$ de ordinul m de multiplicitate. După cum se știe, polinomul $Q(x)$ avînd coeficienții reali, va avea și pe $\bar{x} = a - ib$ rădăcină de același ordin de multiplicitate, deci

$$Q(x) \equiv [(x-a)^2 + b^2]^m \cdot Q_1(x),$$

unde polinomul $Q_1(x)$ nu se divide cu $(x-a)^2 + b^2$.

Să arătăm că putem determina două numere A și B (unice) astfel încît să avem

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{Ax + B}{[(x-a)^2 + b^2]^m} + \frac{P_1(x)}{[(x-a)^2 + b^2]^{m-1} Q_1(x)}, \tag{2}$$

polinomul $P_1(x)$ fiind unic.

Pentru aceasta pornim de la identitatea

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{Ax + B}{[(x-a)^2 + b^2]^m} + \frac{P(x) - (Ax + B) Q_1(x)}{[(x-a)^2 + b^2]^m Q_1(x)},$$

adevărată oricare ar fi A și B. Să determinăm numerele A și B astfel încît polinomul

$$P(x) - (Ax + B) Q_1(x)$$

să fie divizibil cu $(x - a - ib)(x - a + ib)$. Trebuie deci să avem

$$P(a + ib) - (Aa + B + iAb)\ Q_1(a + ib) = 0,$$

$$P(a - ib) - (Aa + B - iAb)\ Q_1(a - ib) = 0,$$

care sînt echivalente cu două condiții în real, anume cu două ecuații de gradul întîi în A și B. Se determină astfel în mod unic A și B. Cu A și B astfel determinați putem scrie

$$P(x) - (Ax + B)\ Q_1(x) \equiv [(x-a)^2 + b^2]\ P_1(x),$$

polinomul $P_1(x)$ fiind *unic*. Identitatea (2) este demonstrată.

În continuare avem

$$\frac{P_1(x)}{[(x-a)^2 + b^2]^{m-1} \cdot Q_1(x)} \equiv \frac{Cx + D}{[(x-a)^2 + b^2]^{m-1}} + \frac{P_2(x)}{[(x-a)^2 + b^2]^{m-2} \cdot Q_1(x)};$$

în cele din urmă, putem scrie, dacă $a + ib$ este o rădăcină multiplă de ordinul m a ecuației $Q(x) = 0$,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{A_m + xB_m}{[(x-a)^2 + b^2]^m} + \frac{A_{m-1} + xB_{m-1}}{[(x-a)^2 + b^2]^{m-1}} + \dots + \frac{A_1 + xB_1}{(x-a)^2 + b^2} + \frac{P^*(x)}{Q_1(x)};$$

fracțiile raționale

$$\frac{A_k + x B_k}{[(x-a)^2 + b^2]^k}, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

se numesc elementele simple relative la rădăcina complexă $a + ib$ de ordinul m de multiplicitate.

Coeficienții A_k, B_k se determină prin identificare. Teorema este demonstrată.

Recapitulînd toate cazurile care pot interveni, anume dacă ecuația $Q(x) = 0$ are rădăcinile reale $a_1, a_2, \dots, a_p$ de ordinele de multiplicitate $m_1, m_2, \dots, m_p$ și rădăcinile complex conjugate $b_1 + ic_1$, $b_2 + ic_2, \dots, b_r + ic_r$ de ordinele de multiplicitate $q_1, q_2, \dots, q_r$, atunci fracția $\frac{P(x)}{Q(x)}$ admite descompunerea în elemente simple

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \sum_{k=1}^{p} \sum_{h=0}^{m_k-1} \frac{A_{m_k-h}}{(x-a_k)^{m_k-h}} + \sum_{k=1}^{r} \sum_{h=0}^{q_k-1} \frac{B_{q_k-h} + xC_{q_k-h}}{[(x-b_k)^2 + c_k^2]^{q_k-h}}.$$

Exemplu

Să se descompună în elemente simple funcția rațională

$$R(x) = \frac{x+2}{(x+1)(x^2+1)^2}.$$

Avem

$$\frac{x+2}{(x+1)(x^2+1)^2} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}. \qquad (\alpha)$$

Pentru a determina pe A înmulțim ambii termeni ai identității cu $(x+1)$ și facem $x = -1$, deci

$$A = \left.\frac{x+2}{(x^2+1)^2}\right|_{x=-1} = \frac{1}{4}.$$

Pentru determinarea lui B înmulțim pe (α) cu x și facem $x \to \infty$; obținem

$$B = -A = -\frac{1}{4}.$$

Pentru $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ avem sistemul în C, E, F

$$2 = \frac{1}{4} + C + F,$$

$$\frac{3}{8} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \frac{C}{2} + \frac{E}{8} + \frac{F}{4},$$

$$\frac{4}{75} = \frac{1}{12} - \frac{1}{10} + \frac{C}{5} + \frac{2E}{25} + \frac{F}{25},$$

cu soluția $C = \frac{1}{4}$, $E = -\frac{1}{2}$, $F = \frac{3}{2}$, deci

$$\frac{x+2}{(x+1)(x^2+1)^2} \equiv \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{1}{4}\cdot\frac{-x+1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{-x+3}{(x^2+1)^2}.$$

2. Primitiva unei funcții raționale

Din cele de mai sus rezultă că determinarea primitivei unei funcții raționale $R(x)$ se reduce la determinarea primitivelor elementelor simple, adică la integralele nedefinite

$$\int \frac{dx}{x-a}, \quad \int \frac{dx}{(x-a)^n},$$

$$\int \frac{Ax+B}{(x-a)^2+b^2}\,dx; \quad \int \frac{Ax+B}{[(x-a)^2+b^2]^n}\,dx,$$

cu n întreg > 1. Avem imediat

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln\ |x-a| + C,$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \frac{1}{-n+1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C$$

și

$$\int \frac{Ax+B}{(x-a)^2+b^2}\,dx = \int \frac{A(x-a)}{(x-a)^2+b^2}\,dx + (B+aA)\int \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} =$$

$$= \frac{A}{2}\ \ln\ [(x-a)^2+b^2] + \frac{aA+B}{b}\cdot \operatorname{arc\,tg}\frac{x-a}{b} + C.$$

Rămîne să ne ocupăm numai de integrala

$$J_n = \int \frac{Ax+B}{[(x-a)^2+b^2]^n}\,dx, \quad n \text{ întreg} > 1,$$

pentru care vom stabili o formulă de recurență.

Să observăm mai întîi că putem scrie

$$\frac{Ax+B}{[(x-a)^2+b^2]^n} = \frac{A}{2}\,\frac{2(x-a)}{[(x-a)^2+b^2]^n} + \frac{Aa+B}{[(x-a)^2+b^2]^n}$$

deci

$$\int \frac{Ax+B}{[(x-a)^2+b^2]^n}\,dx = \frac{A}{2}\cdot\frac{1}{-n+1}\cdot\frac{1}{[(x-a)^2+b^2]^{n-1}} +$$

$$+ (Aa+B)\int \frac{dx}{[(x-a)^2+b^2]^n}$$

și am redus calculul acestui tip de integrale la

$$\int \frac{dx}{[(x-a)^2+b^2]^n}$$

Dacă mai punem $x-a=u$, $dx=du$, obținem forma definitivă a integralei, pentru care vom stabili formula de recurență

$$I_n=\int\frac{du}{(u^2+b^2)^n}.$$

Avem

$$I_n=\frac{1}{b^2}\int\frac{u^2+b^2-u^2}{(u^2+b^2)^n}\,du=\frac{1}{b^2}\,I_{n-1}-\frac{1}{2b^2}\int\frac{2u^2\,du}{(u^2+b^2)^n};$$

în integrala din partea a doua punem $d\alpha=\dfrac{2u\,du}{(u^2+b^2)^n}$, $u=\beta$, și o integrăm prin părți:

$$\int\frac{u\cdot 2u\,du}{(u^2+b^2)^n}=\frac{1}{-n+1}\cdot\frac{u}{(u^2+b^2)^{n-1}}-\frac{1}{-n+1}\int\frac{du}{(u^2+b^2)^{n-1}}$$

sau

$$I_n=\frac{1}{b^2}I_{n-1}+\frac{1}{2b^2}\cdot\frac{1}{n-1}\cdot\frac{u}{(u^2+b^2)^{n-1}}-\frac{1}{2b^2}\,\frac{1}{n-1}\,I_{n-1}$$

sau

$$I_n=\frac{1}{b^2}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\,I_{n-1}+\frac{1}{b^2}\cdot\frac{1}{2n-2}\cdot\frac{u}{(u^2+b^2)^{n-1}},\qquad(\beta)$$

care constituie formula de recurență căutată.

Pentru $n=1,\ 2,\ 3$, avem

$$I_1=\int\frac{du}{u^2+b^2}=\frac{1}{b}\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{b}+C,$$

$$I_2=\int\frac{du}{(u^2+b^2)^2}=\frac{1}{2b^2}\cdot\frac{u}{u^2+b^2}+\frac{1}{2b^3}\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{b}+C,$$

$$I_3=\int\frac{du}{(u^2+b^2)^3}=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{b^4}\cdot\frac{u}{u^2+b^2}+\frac{1}{4b^2}\cdot\frac{u}{(u^2+b^2)^2}+$$

$$+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{b^5}\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{b}+C$$

și în general

$$\int\frac{du}{(u^2+b^2)^n}=\frac{1}{b^{2n-1}}\cdot\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)}\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{b}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(2k+1)(2k+3)\ldots(2n-3)}{2k(2k+2)\ldots(2n-2)}\,\frac{1}{b^{2n-2k}}\cdot\frac{u}{(u^2+b^2)^k}+C.$$

Dacă revenim la integrala inițială J_n, avem

$$\int \frac{Ax+B}{[(x-a)^2+b^2]^n}\,dx = \frac{A}{2-2n}\cdot\frac{1}{[(x-a)^2+b^2]^{n-1}} +$$

$$+\frac{Aa+B}{b^{2n-1}}\cdot\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)}\cdot \operatorname{arc\,tg}\frac{x-a}{b}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(2k+1)(2k+3)\ldots(2n-3)}{2k(2k+2)\ldots(2n-2)}\cdot\frac{1}{b^{2n-2k}}\,\frac{x-a}{[(x-a)^2+b^2]^k}+C.$$

Observații

1) Calculul unei integrale de forma

$$\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n},\quad b^2-4ac<0$$

se reduce la precedenta, deoarece avem

$$\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}=\frac{1}{a^n}\int\frac{dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}$$

cu

$$\alpha=-\frac{b}{2a},\quad \beta=\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}.$$

2) Pentru integrala

$$I_n=\int\frac{du}{(u^2-b^2)^n},\quad n \text{ întreg} > 1$$

se stabilește în mod asemănător formula de recurență

$$I_n=-\frac{1}{b^2}\cdot\frac{1}{2n-2}\cdot\frac{u}{(u^2-b^2)^{n-1}}-\frac{1}{b^2}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\,I_{n-1}$$

cu

$$I_1=\int\frac{du}{u^2-b^2}=\frac{1}{2b}\ln\left|\frac{u-b}{u+b}\right|+C.$$

Funcția $\frac{1}{(u^2-b^2)^n}$ nu este fracție simplă, deoarece numitorul are rădăcinile reale b și $-b$.

3) Din rezultatele obținute urmează că o funcție rațională are ca primitivă o sumă de funcții raționale, de funcții logaritmice $A\ln(ax^2+bx+c)$ și de funcții A arc tg $(ax+b)$, pe *intervale care nu conțin rădăcini ale numitorului.*

Exemple

1) Să se calculeze integrala

$$\int \frac{2x+1}{(x-1)(x-2)(x+3)}\,dx.$$

Am văzut că avem descompunerea în elemente simple

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x-2)(x+3)} \equiv -\frac{3}{4}\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+3},$$

deci pe orice interval I care nu conţine punctele $1,\ 2,\ -3$,

$$\int \frac{2x+1}{(x-1)(x-2)(x+3)}\,dx = -\frac{3}{4}\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{x-2}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+3}=$$

$$= -\frac{3}{4}\ln|x-1|+\ln|x-2|-\frac{1}{4}\ln|x+3|+C.$$

2) Să se calculeze integrala

$$\int \frac{x+2}{(x-1)^3(x-2)}\,dx.$$

Am obţinut mai înainte descompunerea în elemente simple

$$\frac{x+2}{(x-1)^3(x-2)} \equiv \frac{4}{x-2}-\frac{3}{(x-1)^3}-\frac{4}{(x-1)^2}-\frac{4}{x-1}$$

deci

$$\int\frac{x+2}{(x-1)^3(x-2)}dx = 4\int\frac{dx}{x-2}-3\int\frac{dx}{(x-1)^3}-4\int\frac{dx}{(x-1)^2}-4\int\frac{dx}{x-1}=$$

$$=\ln(x-2)^4+\frac{3}{2}\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{4}{x-1}-\ln(x-1)^4+C,$$

pe orice interval I care nu conţine punctele $1,\ 2$.

3) Să se calculeze integrala

$$\int \frac{x+2}{(x-1)(x^2+1)^2}\,dx.$$

Am găsit mai sus descompunerea

$$\frac{x+2}{(x+1)(x^2+1)^2} \equiv \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{-x+1}{x^2+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{-x+3}{(x^2+1)^2}.$$

deci pe orice interval I care nu conţine punctul -1, avem

$$\int\frac{x+2}{(x+1)(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+1}+\frac{1}{4}\int\frac{-x+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\frac{-x+3}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{1}{8}\ln(x+1)^2-\frac{1}{8}\ln(x^2+1)+\frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg}x+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^2+1}+$$

$$+\frac{3}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1}+\frac{3}{2}\operatorname{arc\,tg}x+C.$$

3. Integrala definită a unei funcţii raţionale

O funcţie raţională $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ este continuă pe domeniul său de definiţie care este format din axa reală, cu excepţia punctelor pentru care se anulează numitorul. Prin urmare, pentru orice interval $[a, b]$ pe care funcţia $R(x)$ este continuă, deci conţinut în domeniul de definiţie al funcţiei $R(x)$, este valabilă formula lui Leibniz-Newton

$$\int_a^b R(x)\,\mathrm{d}\,x=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a),$$

unde $F(x)$ este o primitivă *oarecare* a lui $R(x)$.

Calculul integralei definite a unei funcţii raţionale

$$\int_a^b\frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$$

se efectuează aşadar în modul următor:

a) se determină rădăcinile ecuaţiei $Q(x)=0$; dacă rădăcinile numitorului nu aparţin intervalului *închis* $[a, b]$ urmează că funcţia raţională $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ este continuă pe $[a, b]$;

b) se determină o primitivă a funcţiei $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ după procedeul prezentat la alineatul precedent;

c) se aplică formula lui Leibniz-Newton.

Observaţie

Cazul în care $Q(x)$ se anulează în puncte situate în $[a, b]$ va fi discutat la capitolul integralelor generalizate.

Exemple

1) Să se calculeze integrala definită

$$\int_0^a \frac{dx}{(x^2+a^2)\,(x^2+b^2)}.$$

Numitorul nu are rădăcini reale, deci funcţia de integrat este continuă pe R. Avem

$$\frac{1}{(x^2+a^2)\,(x^2+b^2)} \equiv \frac{Ax+B}{x^2+a^2} + \frac{Cx+D}{x^2+b^2};$$

deoarece funcţia de integrat nu se schimbă cînd înlocuim pe x cu $-x$ (funcţie pară) urmează că $A=0$, $C=0$, deci avem următoarea descompunere în elemente simple:

$$\frac{1}{(x^2+a^2)\,(x^2+b^2)} \equiv \frac{B}{x^2+a^2} + \frac{D}{x^2+b^2}$$

cu

$$B = \frac{1}{b^2-a^2}, \qquad D = \frac{1}{a^2-b^2};$$

$$\int_0^a \frac{dx}{(x^2+a^2)\,(x^2+b^2)} = \frac{1}{b^2-a^2}\int_0^a \frac{dx}{x^2+a^2} + \frac{1}{a^2-b^2}\int_0^a \frac{dx}{x^2+b^2} =$$

$$= \frac{1}{b^2-a^2}\cdot\frac{1}{|a|}\ \text{arc tg}\,\frac{x}{|a|}\Big|_0^a + \frac{1}{a^2-b^2}\cdot\frac{1}{|b|}\ \text{arc tg}\,\frac{x}{|b|}\Big|_0^a =$$

$$= \frac{\pi}{4}\,\frac{a}{a^2}\,\frac{1}{b^2-a^2} + \frac{1}{a^2-b^2}\cdot\frac{1}{|b|}\ \text{arc tg}\,\frac{a}{|b|}.$$

2) Să se calculeze integrala definită

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x^2+5}{x^2(1+x^2)}\,dx.$$

Numitorul se anulează pentru $x=0$, punct care nu aparţine intervalului $[1, \sqrt{3}]$. Avem

$$\frac{2x^2+5}{x^2(1+x^2)} \equiv \frac{5\,(x^2+1)-3x^2}{x^2\,(1+x^2)} \equiv \frac{5}{x^2} - \frac{3}{1+x^2},$$

deci

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x^2+5}{x^2\,(1+x^2)}\,dx = 5\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2} - 3\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= -\frac{5}{x}\Big|_1^{\sqrt{3}} - 3\ \text{arc tg}\,x\Big|_1^{\sqrt{3}} = 5\,\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} - 3\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right).$$

§ 6. INTEGRALE REDUCTIBILE LA INTEGRALE DE FUNCŢII RAŢIONALE

Am văzut din cele de mai sus că putem găsi primitiva unei funcţii raţionale dacă cunoaştem rădăcinile numitorului.

Acest fapt are o deosebită importanţă în aplicaţii, deoarece dacă printr-o schimbare convenabilă de variabilă $x = \varphi(t)$, o integrală se transformă într-o integrală de funcţie raţională în argumentul t

$$\int F(x)\,\mathrm{d}x = \int F[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t,$$

atunci determinarea primitivei funcţiei $F(x)$ se reduce la determinarea primitivei funcţiei raţionale $F[(\varphi(t)]\,\varphi'(t)$.

În cele ce urmează vom prezenta diverse cazuri de astfel de transformări care ne conduc la integrale de funcţii raţionale.

1. Integrale de funcţii trigonometrice

Se numesc integrale de funcţii trigonometrice integralele de forma

$$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x, \tag{1}$$

unde $R(u, v)$ este o funcţie raţională în argumentele u, v.

O astfel de integrală se transformă într-o integrală de funcţii raţionale în t, cu transformarea

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Într-adevăr, pentru $x \in (-\pi, \pi)$ avem

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos t = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

şi integrala (1) se transformă în

$$\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

care este o integrală de funcţie raţională în t, deoarece o funcţie raţională de argumente raţionale într-o variabilă t este funcţie raţională de variabila t.

Observație

Integrala definită

$$\int_{x_1}^{x_2} R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x,$$

unde $[x_1, x_2] \subset (-\pi, \pi)$ sau $[x_1, x_2] \subset (2k\pi - \pi, 2k\pi + \pi)$,

cu substituția $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ se transformă în integrala definită

$$\int_{t_1}^{t_2} R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

cu condiția, bineînțeles, ca numitorul lui $R(\sin x, \cos x)$ să nu se anuleze în intervalul $(2k\pi - \pi, 2k\pi + \pi)$.

Exemplu

Să se calculeze

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{2 + \sin x + \cos x}.$$

Numitorul $2 + \sin x + \cos x$ nu se anulează pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, deci putem face schimbarea de variabilă $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$; noile limite sînt 0 și 1, deci

$$I = \int_0^1 \frac{1}{2 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2} = 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + 2t + 3} =$$

$$= 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2 + 2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{t+1}{\sqrt{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{2}}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{\sqrt{2}} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{2}}\right].$$

Sînt cazuri cînd putem găsi transformări mai simple.

a) Dacă funcția $R(\sin x, \cos x)$ este impară în $\sin x$, adică $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, prin transformarea $\cos x = t$ integrala (1) se transformă într-o integrală de funcție rațională în t, deoarece $-\sin x\, dx = dt \Rightarrow dx = -\frac{dt}{\sin x}$

$$\frac{R(\sin x, \cos x)}{\sin x}$$

conține numai puterile pare ale lui $\sin x$

$$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{R(\sin x, \cos x)}{\sin x} \sin x\,\mathrm{d}x = \int R^*(\sin^2 x, \cos x)\,\mathrm{d}(\cos x)$$

şi pentru $\cos x = t$, $\sin^2 x = 1 - t^2$, $d(\cos x) = dt$, integrala se transformă în

$$\int R^*(1 - t^2, t)\,dt,$$

adică într-o integrală de funcţie raţională în argumentul t.

b) În mod asemănător, dacă funcţia $R(\sin x, \cos x)$ este impară în $\cos x$, prin transformarea $\sin x = t$ integrala

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$$

se transformă într-o integrală de funcţie raţională in t.

Exemple

1) Să se calculeze

$$I = \int \frac{\sin^3 x + 2\sin x}{1 + \cos x}\,dx.$$

Punem $\cos x = t$, $\sin^2 x = 1 - t^2$, $\sin x\,dx = -dt$, şi integrala se transformă în

$$-\int \frac{1 - t^2 + 2}{1 + t}\,dt = -\ln(1 + t)^2 + \frac{t^2}{2} - t + C,$$

deci

$$\int \frac{\sin^3 x + 2\sin x}{1 + \cos x}\,dx = -\ln(1 + \cos x)^2 + \frac{\cos^2 x}{2} - \cos x + C$$

pentru orice interval care nu conţine punctele $(2k + 1)\pi$.

2) Să se calculeze

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{1 + \sin x + \sin^2 x}.$$

Facem schimbarea de variabilă $\sin x = t$, $\cos x\,dx = dt$; numitorul nu se anulează pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

$$I = \int_0^1 \frac{dt}{1 + t + t^2} = \int_0^1 \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2t + 1}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^1,$$

$$I = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3} - \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3}}{3}\right] = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

c) Dacă funcţia $R(\sin x, \cos x)$ este de forma

$$R^*(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x),$$

cu schimbarea de variabilă $\operatorname{tg} x = t$ integrala

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R^*(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x)\,dx$$

se transformă într-o funcție rațională de t.

Avem $\operatorname{tg} x = t$, $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$,

deci pentru orice interval care nu conține rădăcinile numitorului lui R, interval conținut în intervalele $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ sau $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, integrala se transformă în

$$\int R^*\left(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}, \frac{t}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2},$$

adică într-o integrală de funcție rațională în t.

Observație

Pentru orice $[x_1, x_2] \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ sau $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ avem

$$\int_{x_1}^{x_2} R^*(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x)\, dx = \int_{t_1}^{t_2} R^*\left(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}, \frac{t}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2}$$

dacă numitorul R^* nu se anulează pe intervalul $[x_1, x_2]$.

Exemplu

Să se calculeze

$$I = \int \frac{dx}{\cos^4 x + \sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x}.$$

Avem $\cos^4 x + \sin^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$,

deci

$$I = \int \frac{dx}{1 - \sin^2 x \cos^2 x} = 4\int \frac{dx}{4 - \sin^2 2x};$$

facem substituția $\operatorname{tg} 2x = t$, $\sin^2 2x = \frac{t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{dt}{1+t^2}$,

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{1}{4 - \frac{t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{dt}{1+t^2} = 2\int\frac{dt}{3t^2+4} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3}}{2}t + C,$$

revenim la variabila inițială

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x + \sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x} = \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg} 2x\right] + C.$$

d) Pentru integralele

$$I_1 = \int \cos^n x\, dx, \quad I_2 = \int \sin^n x\, dx, \quad n \text{ număr natural},$$

nu se fac transformările prezentate anterior, deoarece conduc la calcule complicate, ci se procedează în modul următor:

Dacă n este impar, $n = 2m + 1$, atunci

$$\cos^n x = \cos^{2m} x \cos x = (1 - \sin^2 x)^m \cos x = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k \sin^{2k} x \cos x,$$

$$\sin^n x = \sin^{2m} x \sin x = (1 - \cos^2 x)^m \sin x = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k \cos^{2k} x \sin x,$$

deci

$$\int \cos^{2m+1} x\, dx = \int \sum_{k=0}^{m} (-k)^k C_m^k \sin^{2k} x \cos x\, dx = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{C_m^k}{2k+1} \sin^{2k+1} x + C,$$

$$\int \sin^{2m+1} x\, dx = \int \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k \cos^{2k} x \sin x\, dx = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{k+1} \frac{C_m^k}{2k+1} \cos^{2k+1} x + C.$$

Dacă n este par, $n = 2m$, folosim formulele lui Euler

$$\sin^{2m} x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^{2m}, \quad \cos^{2m} x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^{2m},$$

unde, dacă dezvoltăm și regrupăm termenii, obținem

$$\sin^{2m} x = 2^{-2m+1}\left[\frac{1}{2} C_{2m}^{m} - C_{2m}^{m+1} \cos 2x + C_{2m}^{m+2} \cos 4x - \ldots + (-1)^m C_{2m}^{2m} \cos 2mx\right],$$

$$\cos^{2m} x = 2^{-2m+1}\left[\frac{1}{2} C_{2m}^{m} + C_{2m}^{m+1} \cos 2x + C_{2m}^{m+2} \cos 4x + \ldots + C_{2m}^{2m} \cos 2mx\right];$$

partea a doua poate fi integrată imediat, deci

$$\int \cos^{2m} x\, dx = \frac{1}{2^{2m}}\left[C_{2m}^{m} x + C_{2m}^{m+1} \cdot \frac{\sin 2x}{1} + C_{2m}^{m+2} \cdot \frac{\sin 4x}{2} + \ldots + C_{2m}^{2m} \cdot \frac{\sin 2mx}{m}\right] + C,$$

$$\int \sin^{2m} x\, dx = \frac{1}{2^{2m}}\left[C_{2m}^{m} x - C_{2m}^{m+1} \cdot \frac{\sin 2x}{1} + C_{2m}^{m+2} \cdot \frac{\sin 4x}{2} - \ldots + (-1)^m C_{2m}^{2m} \cdot \frac{\sin 2mx}{m}\right] + C.$$

e) Pentru integralele

$$I_{m,n} = \int \cos^m x \sin^n x\, dx, \; m, \; n \text{ numere naturale},$$

se stabilesc formule de recurență. Avem

$$I_{m,n} = \int \cos^m x \sin^{n-1} x \sin x\, dx = -\int \cos^m x \sin^{n-1} x\, d(\cos x)$$

pe care o integrăm prin părți

$$I_{m,n} = -\frac{\cos^{m+1}}{m+1} \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{m+1} \int \cos^{m+2} x \sin^{n-2} x\, dx,$$

$a(x-x_1)(x-x_2)=t^2$

însă

$$\cos^{m+2} x \sin^{n-2} x = \cos^m x\,(1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x = \cos^m x \sin^{n-2} x - \cos^m x \sin^n x,$$

deci

$$I_{m,n} = -\frac{1}{m+1} \cos^{m+1} x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{m+1} I_{m,n-2} - \frac{n-1}{m+1} I_{m,n}$$

sau

$$I_{m,n} = -\frac{1}{m+n} \cos^{m+1} x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2}$$

care constituie formula de recurență căutată.

Aplicații

Să se arate că pentru orice numere naturale m și p avem

1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^{2m} x \sin^{2p+1} x \, dx = 0;$

2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^{2m-1} x \sin^{2p} x \, dx = 0;$

3) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^{2m+1} x \sin^{2p+1} x \, dx = 0;$

4) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^{2m} x \sin^{2p} x \, dx = \frac{(2m)!\,(2p)!}{(m+p)!\,m!\,p!} \cdot \frac{2\pi}{4^{m+p}}.$

Pentru (1) avem

$$I_1 = \int_0^{\pi} \cos^{2m} x \sin^{2p+1} x \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} \cos^{2m} x \sin^{2p+1} x \, dx$$

și dacă înlocuim în ultima integrală pe x cu $\pi + x$ obținem

$$I_1 = \int_0^{\pi} \cos^{2m} x \sin^{2p+1} x \, dx + (-1)^{2m+2p+1} \int_0^{\pi} \cos^{2m} x \sin^{2p+1} x \, dx = 0;$$

pentru (2) se procedează în mod analog. Pentru (3) avem

$$I_3 = \int_0^{2\pi} \cos^{2m-1} x \sin^{2p-1} x \, dx = \int_0^{2\pi} \cos^{2m-2} x \sin^{2p-1} x \, d(\sin x)$$

sau

$$I_3 = \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 x)^{m-1} \sin^{2p-1} x \, d(\sin x) = 0,$$

deoarece primitiva este un polinom numai în sinus care se anulează pentru 0 și 2π.

Pentru (4) observăm imediat că este $\neq 0$, deoarece funcția de sub semnul integral este pozitivă. Folosim formula de recurență stabilită la *c)*:

$$I_{2m,\,2p} = -\frac{1}{2m+2p}\cos^{2m+1}x\sin^{2p-1}x\Big|_0^{2\pi} + \frac{2p-1}{2m+2p}I_{2m,\,2p-2}$$

deci

$$I_{2m,\,2p} = \frac{2p-1}{2m+2p}I_{2m,\,2p-2},$$

$$I_{2m,\,2p-2} = \frac{2p-3}{2m+2p-2}I_{2m,\,2p-4},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$I_{2m,\,2} = \frac{1}{2m+2}I_{2m,\,0},$$

$$I_{2m,\,2p} = \frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{(2m+2)(2m+4)\ldots(2m+2p)}I_{2m,\,0},$$

pe $I_{2m,0}$ îl obținem de la punctul *d)*

$$I_{2m,\,0} = \frac{2\pi}{2^{2m}}C_{2m}^{m} = \frac{2\pi}{2^{2m}}\cdot\frac{(2m)!}{m!\,m!}$$

sau

$$I_{2m,\,2p} = \frac{(2p-1)!!\,(2m)!}{(2m+2)(2m+4)\ldots(2m+2p)}\cdot\frac{1}{m!\,m!}\frac{2\pi}{2^{2m}} = \frac{(2p)!\,(2m)!}{(m+p)!\,m!\,p!}\cdot\frac{2\pi}{4^{m+p}}.$$

2. Integrale de funcții hiperbolice

Se numesc integrale de funcții hiperbolice integralele de forma

$$\int R(\operatorname{sh}x,\ \operatorname{ch}x,\ e^x)\,\mathrm{d}x$$

unde $R(u, v, w)$ este o funcție rațională de argumentele u, v, w.

O astfel de integrală se transformă într-o integrală de funcții rațional în argumentul t prin intermediul substituției $e^x = t$.

Într-adevăr avem

$$\operatorname{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{t-\frac{1}{t}}{2},\quad \operatorname{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{t+\frac{1}{t}}{2}$$

și

$$e^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t,\quad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{t},$$

iar integrala se transformă în

$$\int R\left(\frac{t-\frac{1}{t}}{2},\ \frac{t+\frac{1}{t}}{2},\ t\right)\frac{dt}{t} = \int R^*(t)\,dt.$$

Observație

Integrala definită

$$\int_{x_1}^{x_2} R(\text{sh } x, \text{ ch } x, e^x)\,dx$$

se transformă în

$$\int_{\ln t_1}^{\ln t_2} R\left(\frac{t-\frac{1}{t}}{2},\ \frac{t+\frac{1}{t}}{2},\ t\right)\frac{dt}{t}$$

dacă numitorul lui R nu se anulează în intervalul închis $[\ln t_1, \ln t_2]$, unde $\ln t_1 = x_1$, $\ln t_2 = x_2$.

Exemple

1) Să se calculeze

$$I = \int \frac{dx}{\text{ch } x + 2\text{sh } x + 1}.$$

Dacă punem $e^x = t$ obținem

$$I = \int \frac{1}{t + \frac{1}{t} + 2t - \frac{2}{t} + 2}\cdot\frac{dt}{t} = \int \frac{2dt}{3t^2 + 2t - 1},$$

$$I = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{9}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{6}{2}\ln\left|\frac{3t-1}{3t+3}\right| + C,$$

deci

$$\int \frac{dx}{\text{ch } x + 2\,\text{sh } x + 1} = \ln\left(\frac{3e^x-1}{3e^x+3}\right)^2 + C.$$

2) Să se calculeze

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{ae^{mx} + be^{-mx}},\ a\,b < 0.$$

Facem schimbarea de variabilă $e^{mx} = u$, $me^{mx}\,dx = du$ și integrala definită se transformă în

$$I = \frac{1}{m}\int_1^{e^m} \frac{1}{au + \frac{b}{u}}\cdot\frac{du}{u} = \frac{1}{ma}\int_1^{e^m}\frac{du}{u^2 + \frac{b}{a}};$$

pentru că $ab > 0$ avem

$$I = \frac{1}{ma}\sqrt{\frac{a}{b}}\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\frac{a}{b}}\,u\Big|_1^{e^m} = \frac{1}{m\sqrt{ab}}\left[\mathrm{arc\,tg}\left(e^m\sqrt{\frac{a}{b}}\right) - \mathrm{arc\,tg}\sqrt{\frac{a}{b}}\right].$$

3. Integrale de funcţii iraţionale

Se numesc integrale de funcţii iraţionale integralele al căror integrant conţine variabila sub radical. Vom prezenta mai jos diverse cazuri cînd astfel de integrale se reduc la integrale de funcţii raţionale.

***a)* Integralele de forma**

$\int R\left(x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots, x^{\frac{m_p}{n_p}}\right) \mathrm{d}x$, m_i, n_i, **numere naturale, unde** $R(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ **este o funcţie raţională de argumentele** $u_1, u_2, \ldots, u_p$, **se transformă în integrale de funcţii raţionale dacă facem substituţia** $x = t^r$, **unde** r **este cel mai mic multiplu comun al numerelor** $n_1, n_2, \ldots, n_p$.

Într-adevăr, dacă punem $x = t^r$, obţinem

$$x^{\frac{m_1}{n_1}} = t^{\frac{rm_1}{n_1}} = t^{s_1}, \ldots, x^{\frac{m_p}{n_p}} = t^{\frac{rm_p}{n_p}} = t^{s_p},$$

unde $s_1, s_2, \ldots, s_p$ sînt numere naturale; cu $\mathrm{d}x = rt^{r-1}\,\mathrm{d}t$ integrala se transformă în

$$r\int R\left(t^{s_1}, t^{s_2}, \ldots, t^{s_p}\right) t^{r-1}\,\mathrm{d}t,$$

care este o integrală de funcţie raţională în t.

Exemple

Să se calculeze

$$I = \int \frac{\sqrt[4]{x^3}}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

Dacă punem $x = t^4$, avem $\mathrm{d}x = 4t^3\,\mathrm{d}t$ şi

$$I = \int \frac{t^3}{1+t^2}\,4t^3\,\mathrm{d}t = 4\int \frac{t^6}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

însă

$$\frac{t^6}{1+t^2} = \frac{t^6-1+1}{1+t^2} = \frac{-1}{1+t^2} + t^4 - t^2 + 1$$

deci

$$I = 4\int\left[\frac{-1}{1+t^2} + t^4 - t^2 + 1\right]\mathrm{d}t = -4\,\mathrm{arc\,tg}\,t + \frac{4}{5}t^5 - \frac{4}{3}t^3 + 4t + C.$$

iar dacă revenim la variabila x

$$I = -4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt[4]{x} + \frac{4}{5} x \sqrt[4]{x} - \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} + 4 \sqrt[4]{x} + C.$$

Observații

1) Integrala definită

$$\int_{x_1}^{x_2} R\left(x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots, x^{\frac{m_p}{n_p}}\right) \mathrm{d}x$$

cu ajutorul substituției $x = t^r$, unde r este cel mai mic multiplu comun al numerelor $n_1, n_2, \ldots, n_p$, se transformă în

$$r \int_{t_1}^{t_2} R\left(t^{s_1}, t^{s_2}, \ldots, t^{s_p}\right) t^{r-1} \mathrm{d}t,$$

unde $t_1 = x_1^{\frac{1}{r}}$, $t_2 = x_2^{\frac{1}{r}}$, dacă numitorul funcției raționale R nu se anulează pe intervalul închis $[x_1, x_2]$.

2) Dacă cel puțin unul din numerele n_i este par, atunci x_1 și x_2 trebuie să fie pozitivi pentru ca valoarea integralei să fie reală.

b) **Integrala**

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_p}{n_p}}\right] \mathrm{d}x,$$

unde $R(u, v_1, v_2, \ldots, v_p)$ este funcție rațională de toate argumentele, se transformă în integrală de funcție rațională dacă facem substituția

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^r,$$

unde r este cel mai mic multiplu comun al numerelor întregi $n_1, n_2, \ldots, n_p$.

Într-adevăr, cu această transformare avem

$$x = \frac{t^r d - b}{a - t^r c}, \quad \mathrm{d}x = \frac{r(ad-bc)\, t^{r-1}}{(a - ct^r)^2} \mathrm{d}t$$

și

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}} = t^{\frac{m_1}{n_1} r} = t^{s_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_p}{n_p}} = t^{\frac{m_p}{n_p} r} = t^{s_p},$$

și integrala se transformă în

$$\int R\left[\frac{dt^r - b}{a - ct^r}, t^{s_1}, \ldots, t^{s_p}\right] \cdot \frac{r(ad-bc)}{(a-ct^r)^2} t^{r-1} \, \mathrm{d}t,$$

care este o integrală de funcţie raţională în t, deoarece $r, s_1, s_2, \ldots, s_p$ sînt întregi.

Integrala definită

$$\int_{x_1}^{x_2} R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_p}{n_p}}\right] \mathrm{d}x$$

cu ajutorul substituţiei $\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^r$, unde r este cel mai mic multiplu comun al numerelor $n_1, n_2, \ldots, n_p$, se transformă în

$$r(ad-bc)\int_{t_1}^{t_2} R\left[\frac{dt^r - b}{a - ct^r}, t^{s_1}, \ldots, t^{s_p}\right] \frac{t^{r-1}}{(a-ct^r)^2}\, \mathrm{d}t$$

unde

$$t_1 = \left[\frac{ax_1+b}{cx_1+d}\right]^{\frac{1}{r}}, \quad t_2 = \left[\frac{ax_2+b}{cx_2+d}\right]^{\frac{1}{r}},$$

dacă următoarele condiţii sînt îndeplinite

α) numitorul lui R nu se anulează pe intervalul $[x_1, x_2]$,

β) $cx + d$ nu se anulează pe intervalul $[x_1, x_2]$,

γ) $\dfrac{ax+b}{cx+d} \geqslant 0$ dacă cel puţin unul din numerele $n_1, \ldots, n_p$ este par.

Observaţie

Dacă $c = 0$, $d = 1$, obţinem integralele de forma

$$\int R\left(x, (ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}}, \ldots, (ax+b)^{\frac{m_p}{n_p}}\right) \mathrm{d}x$$

care, conform celor de mai sus, se reduc la integrale de funcţii raţionale cu substituţia $ax + b = t^r$.

Exemplu

Să se calculeze

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{(x+1)^3(x-1)}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)\sqrt[4]{\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^3}}.$$

Dacă punem $\dfrac{x+1}{x-1} = t^4$, avem

$$x = \frac{t^4+1}{t^4-1}, \quad \mathrm{d}x = \frac{-8t^3}{(t^4-1)^2}\,\mathrm{d}t, \quad x - 1 = \frac{2}{t^4-1}, \text{ deci}$$

$$I = \int \frac{1}{t^3}\,\frac{t^4-1}{2}\cdot\frac{-8t^3}{(t^4-1)^2}\,\mathrm{d}t = -4\int\frac{\mathrm{d}t}{t^4-1} = -2\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} + 2\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} =$$

$$= 2 \operatorname{arc\,tg} t - \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C$$

$g = 32$

deci

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{(x+1)^3\,(x-1)}} = 2\ \mathrm{arc\,tg}\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}} - \ln\left|\frac{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[4]{x-1}}\right| + C.$$

c) **Integralele de forma**

$$I = \int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\mathrm{d}x, \tag{1}$$

unde $R(u, v)$ este o funcție rațională în argumentele u și v, se reduc totdeauna la integrale de funcții raționale în modul următor:

c_1) **Pentru $a > 0$ se face transformarea**

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + t;$$

dacă ridicăm la pătrat obținem

$$ax^2+bx+c = ax^2 + 2\sqrt{a}\,xt + t^2$$

deci

$$x = \frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{-2\sqrt{a}\,t^2 + 2bt - 2\sqrt{a}c}{(b-2\sqrt{a}\,t)^2}\,\mathrm{d}t$$

și

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t + \sqrt{a}\,\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t} = \frac{-\sqrt{a}t^2+bt-c\sqrt{a}}{b-2\sqrt{a}t},$$

iar integrala se transformă în

$$I = 2\int R\left(\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t},\ \frac{-\sqrt{a}t^2+bt-c\sqrt{a}}{b-2\sqrt{a}t}\right)\frac{-\sqrt{a}t^2+tb-\sqrt{a}c}{(b-2\sqrt{a}t)^2}\,\mathrm{d}t$$

care este o integrală de funcție rațională.

Exemplu

Să se calculeze $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+x+1}}$.

Punem $\sqrt{x^2+x+1} = t + x$, deoarece $a = 1$. Avem

$$x^2+x+1 = t^2+x^2+2tx, \quad x = \frac{t^2-1}{1-2t}, \quad \mathrm{d}x = 2\,\frac{-t^2+t-1}{(1-2t)^2}\,\mathrm{d}t,$$

$$\sqrt{x^2+x+1} = t + x = t + \frac{t^2-1}{1-2t} = \frac{-t^2+t-1}{1-2t}, \text{ deci}$$

$$I = 2\int\frac{1-2t}{t^2-1}\cdot\frac{1-2t}{-t^2+t-1}\cdot\frac{-t^2+t-1}{(1-2t)^2}\,\mathrm{d}t = 2\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C$$

sau

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} = \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+x+1}-x-1}{\sqrt{x^2+x+1}-x+1}\right| + C,$$

rezultat valabil pentru orice interval care nu conţine originea, deoarece radicalul este pozitiv pentru orice x, iar numitorul se anulează numai în punctul $x = 0$.

Observaţie

Integrala definită

$$\int_{x_1}^{x_2} R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx, \quad a > 0,$$

cu substituţia $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,x + t$
se transformă într-o integrală de funcţie raţională

$$\int_{t_1}^{t_2} R(t)\,dt$$

unde $t_1 = \sqrt{ax_1^2+bx_1+c} - \sqrt{a}\,x_1, \quad t_2 = \sqrt{ax_2^2+bx_2+c} - \sqrt{a}\,x_2$
şi integrala are sens dacă pe intervalul $[x_1, x_2]$ expresia de sub radical este pozitivă, iar numitorul funcţiei $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ nu se anulează.

Exemplu

Integrala

$$\int_{-2}^{2} \frac{x\,dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$$

nu are sens, deoarece numitorul se anulează în punctul $x = -1$ care aparţine intervalului de integrare $[-2, +2]$.

Dacă $a < 0$ trinomul ax^2+bx+c trebuie să aibă rădăcini reale pentru ca integrala (1) să fie reală, deoarece, în caz contrar, trinomul păstrînd semnul lui a, $\sqrt{ax^2+bx+c}$ este totdeauna imaginar.

c_2) În ipoteza că trinomul are rădăcinile reale α, β,

$$ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta), \quad a < 0,$$

se face transformarea

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = t(x-\alpha).$$

Avem

$$a(x-\beta) = t^2(x-\alpha)$$

deci

$$x = \frac{a\beta - \alpha t^2}{a - t^2}, \quad \mathrm{d}x = \frac{2t\, a(\beta - \alpha)}{(a - t^2)^2}\, \mathrm{d}t,$$

$$\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = t(x-\alpha) = t\left(\frac{a\beta - \alpha t^2}{a - t^2} - \alpha\right) = t\ \frac{a(\beta-\alpha)}{a - t^2}$$

și integrala (1) se transformă în

$$\int R\left(\frac{a\beta - \alpha t^2}{a - t^2}, \frac{a(\beta-\alpha)t}{a - t^2}\right)\cdot \frac{2a(\beta-\alpha)}{(a - t^2)^2}\, t\, \mathrm{d}t$$

care este o integrală de funcție rațională.

Observație

Integrala definită

$$\int_{x_1}^{x_2} R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\, \mathrm{d}x, \quad a < 0$$

în condițiile precizate mai sus, se transformă în

$$\int_{t_1}^{t_2} R^*(t)\, \mathrm{d}t$$

$$\text{cu } t_1 = \frac{1}{x_1 - \alpha}\sqrt{a(x_1-\alpha)(x_1-\beta)}, \quad t_2 = \frac{1}{x_2 - \beta}\sqrt{a(x_2-\alpha)(x_2-\beta)}.$$

Integrala definită obținută are sens dacă următoarele condiții sînt îndeplinite:

Numitorul funcției R nu se anulează pe intervalul $[x_1, x_2]$.

Dacă $\alpha < \beta$, este necesar ca $[x_1, x_2] \subset [\alpha, \beta]$, deoarece numai în acest caz radicalul $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ este real ($a < 0$).

c_3) **Dacă $a < 0$ și $c > 0$ se poate face și substituția**

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx + \sqrt{c}.$$

Exemple

1) Să se calculeze

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2 + x + 1}}.$$

Avem $a < 0$, $c > 0$, facem substituția $\sqrt{-x^2 + x + 1} = tx + 1$

$$-x^2 + x + 1 = t^2x^2 + 2tx + 1; \quad x = \frac{1 - 2t}{1 + t^2}, \quad \mathrm{d}x = 2\,\frac{t^2 - t - 1}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$\sqrt{-x^2 + x + 1} = t\,\frac{1 - 2t}{1 + t^2} + 1 = \frac{-t^2 + t + 1}{t^2 + 1},$$

deci

$$I = \int \frac{t^2+1}{-t^2+t+1} \cdot \frac{2(t^2-t-1)}{(t^2+1)^2}\, dt = -2\int \frac{dt}{t^2+1} = -2 \operatorname{arc\,tg} t + C;$$

dacă revenim la variabila x obţinem

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+x+1}} = -2 \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{-x^2+x+1}-1}{x} + C$$

pe orice interval conţinut în intervalul $[x_1, x_2]$ unde

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2},\ x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ sînt rădăcinile ecuaţiei } x^2 - x - 1 = 0.$$

2) Să se calculeze $\int \frac{x dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}}$.

Numitorul are rădăcinile $x = 1$, $x = 2$, deci facem substituţia

$$\sqrt{(x-1)(2-x)} = t(x-1)$$

care dă

$$2 - x = t^2(x-1), \quad x = \frac{2+t^2}{1+t^2},\ dx = \frac{-2t\, dt}{(1+t^2)^2},$$

$$\sqrt{(x-1)(2-x)} = t\left(\frac{2+t^2}{1+t^2} - 1\right) = \frac{t}{1+t^2}$$

şi integrala se transformă în

$$-\int \frac{2+t^2}{1+t^2} \cdot \frac{1+t^2}{t} \cdot \frac{2t}{(1+t^2)^2}\, dt = -2\int \frac{2+t^2}{(1+t^2)^2}\, dt =$$

$$= -2\int \frac{2(1+t^2)-t^2}{(1+t^2)^2}\, dt = -4 \operatorname{arc\,tg} t + \int \frac{t \cdot 2t\, dt}{(1+t^2)^2} =$$

$$= -3 \operatorname{arc\,tg} t - \frac{t}{1+t^2} + C.$$

Dacă revenim la variabila x avem

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}} = -3 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{2-x}{x-1}} - \sqrt{-x^2+3x-2} + C,$$

rezultat valabil pentru orice interval conţinut în intervalul $(1, 2)$.

3) Integrala

$$\int_2^3 \frac{x+1}{\sqrt{x^2-5x+4}}$$

nu are sens, deoarece în intervalul $(1, 4) \supset [2, 3]$ integrantul nu este definit.

d) Sînt cazuri cînd transformările de mai sus se pot înlocui cu altele mai simple.

***d₁)* Integralele de forma**

$$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})\,\mathrm{d}x,$$

cu $R(u, v)$ funcție rațională de u, v, se transformă într-o integrală rațională de funcții trigonometrice dacă facem substituția $x = a \sin t$.

Exemplu

Să se calculeze $\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$. Cu substituția $x = a \sin t$, $\mathrm{d}x = a \cos t\,\mathrm{d}t$ integrala se transformă în

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{a \cos t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{6}.$$

Am luat determinarea principală a lui $t = \arcsin \frac{x}{a}$. Rezultatul este același pentru orice altă determinare a funcției $\arcsin \frac{x}{a}$.

***d₂)* Integralele de forma**

$$\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})\,\mathrm{d}x$$

cu substituția $x = a \operatorname{ch} t$ se transformă în integrale de funcții raționale în e^t.

Exemplu

Să se calculeze

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Avem $x = a \operatorname{ch} t$, $\mathrm{d}x = a \operatorname{sh} t\,\mathrm{d}t$, deci integrala se transformă în

$$\int \frac{a \operatorname{sh} t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{a \operatorname{ch}^2 t - a^2}} = \int \mathrm{d}t = t + C$$

sau

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \operatorname{arg\,ch} \frac{x}{a} + C = \ln (x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C.$$

***d_3)* Integralele de forma**

$$\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2})\,\mathrm{d}x$$

cu substituția $x = a \operatorname{sh} t$ se transformă în integrale de funcții raționale de e^t.

Exemplu

Să se calculeze $\int \sqrt{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x$. Punem $x = a \operatorname{sh} t$, $\mathrm{d}x = a \operatorname{ch} t \; \mathrm{d}t$; integrala se transformă în

$$a^2 \int \operatorname{ch}^2 t\,\mathrm{d}t = a^2 \int \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 \mathrm{d}t = \frac{a^2}{8}(e^{2t} - e^{-2t}) + \frac{a^2}{2} t + C =$$

$$= \frac{a^2}{2}(\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t + t) + C$$

sau

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C.$$

***e)* Integrale binome. O integrală de forma**

$$I = \int x^m (ax^n + b)^p\,\mathrm{d}x, \tag{1}$$

unde m, n, p sînt numere raționale, a, b constante, se numește o integrală binomă.

Dacă facem substituția $x = t^s$, unde s este cel mai mic multiplu comun al numitorilor lui m și n, obținem

$$x^m = t^{sm}, \; x^n = t^{sn}, \; \mathrm{d}x = st^{s-1}\,\mathrm{d}t$$

și integrala se transformă în

$$s \int t^{sm} (a\, t^{sn} + b)^p\, t^{s-1}\,\mathrm{d}t,$$

adică într-o integrală de forma (1), unde de astă dată m și n sînt întregi, deoarece sm, sn și $s - 1$ sînt întregi.

Mai putem presupune în (1) că $n > 0$, deoarece în caz contrar putem scrie

$$\int x^m (ax^n + b)^p\,\mathrm{d}x = \int x^{m+np} (a + bx^{-n})^p\,\mathrm{d}x$$

și $-n > 0$ dacă $n < 0$. În concluzie vom considera integralele

$$I = \int x^m (ax^n + b)^p\,\mathrm{d}x$$

cu m, n întregi, $n > 0$ și $p = \frac{q}{r}$.

Matematicianul rus Cebîșev a arătat (în 1853) că o integrală binomă se exprimă cu ajutorul funcțiilor elementare numai în următoarele trei cazuri:

I) $p =$ întreg, cînd conform celor de mai sus integrantul este o funcție rațională.

II) $p = \frac{q}{r}$, $\frac{m+1}{n} =$ întreg. În această situație se face schimbarea de variabilă

$$ax^n + b = u^r, \quad x = \left(\frac{u^r - b}{a}\right)^{\frac{1}{n}},$$

$$\mathrm{d}x = \frac{r}{na}\left(\frac{u^r - b}{a}\right)^{\frac{1}{n}-1} u^{r-1}\,\mathrm{d}u,$$

deci

$$I = \frac{r}{na}\int\left(\frac{u^r - b}{a}\right)^{\frac{m}{n}} u^r \cdot \left(\frac{u^r - b}{a}\right)^{\frac{1}{n}-1} u^{r-1}\,\mathrm{d}u$$

și

$$I = \frac{r}{na}\int\left(\frac{u^r - b}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} u^{2r-1}\,\mathrm{d}u\,;$$

cum r este întreg, urmează că dacă $\frac{m+1}{n} =$ întreg, funcția de sub semnul integral este rațională.

III) $p = \frac{q}{r}$, $\frac{m+1}{n} + \frac{q}{r} =$ întreg. În această ultimă situație să facem schimbarea de variabilă $\frac{m+1}{n} + p =$ întreg

$$\frac{ax^n + b}{x^n} = u^r,$$

de unde obținem

$$x = \left(\frac{u^r - a}{b}\right)^{-\frac{1}{n}}, \; ax^n + b = u^r \cdot \left(\frac{u^r - a}{b}\right)^{-1},$$

$$\mathrm{d}x = -\frac{r}{bn}\left(\frac{u^r - a}{b}\right)^{-\frac{1}{n}-1} u^{r-1}\,\mathrm{d}u,$$

deci

$$I = -\frac{r}{bn}\int\left(\frac{u^r-a}{b}\right)^{-\frac{m}{n}} u^q \left(\frac{u^r-a}{b}\right)^{-\frac{q}{r}} \left(\frac{u^r-a}{b}\right)^{-\frac{1}{n}-1} u^{r-1}\,\mathrm{d}u$$

sau

$$I = -\frac{r}{bn}\int u^{q+r-1}\left(\frac{b}{u^r-a}\right)^{\frac{m+1}{n}+\frac{q}{r}+1} \mathrm{d}u$$

şi cum q, r sînt întregi, urmează că dacă $\frac{m+1}{n}+\frac{q}{r}=$ întreg, funcţia de sub semnul integral este raţională.

Observaţie

Integrala definită

$$\int_{x_1}^{x_2} x^m(ax^n+b)^{\frac{q}{r}}\,\mathrm{d}x$$

m, n, p, q întregi şi $n>0$ se transformă într-o integrală de funcţie raţională, cu transformările de mai sus, şi integrala transformată are sens dacă

1) $ax^n+b \geqslant 0$ pentru orice $x\in[x_1, x_2]$, dacă r este par,
2) $ax^n+b \neq 0$ pentru orice $x\in[x_1, x_2]$, dacă $q\leqslant 0$,
3) $0 \notin [x_1, x_2]$, dacă $m<0$.

Exemple

1) Să se calculeze integrala

$$\int\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^4}\,\mathrm{d}x,$$

$m=-4$, $n=2$, $q=3$, $r=2$ şi $\frac{m+1}{n}+\frac{q}{r}=0$; deci trebuie să facem substituţia

$$\frac{1-x^2}{x^2}=u^2,\quad x^2=\frac{1}{1+u^2},\quad \mathrm{d}x=-\frac{1}{2}(1+u^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2u\mathrm{d}u,$$

iar integrala se transformă în

$$I=-\int(1+u^2)^2\left(1-\frac{1}{1+u^2}\right)^{\frac{3}{2}}(1+u^2)^{-\frac{3}{2}}u\mathrm{d}u=-\int\frac{u^4}{1+u^2}\,\mathrm{d}u=$$

$$=-\int\frac{u^4-1+1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u=-\int(u^2-1)\,\mathrm{d}u-\int\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=u-\frac{u^3}{3}-\operatorname{arc\,tg} u+C.$$

Revenind la variabila x

$$\int \frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^4}\,dx = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1-x^2}{x^3}\sqrt{1-x^2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C.$$

2) Să se calculeze

$$\int_{\frac{a}{2}}^{a} x^{-2}(x^2+a^2)^{-\frac{5}{2}}.\,dx,$$

$m = -2,\ n = 2,\quad p = -\frac{5}{2},\ \frac{m+1}{n} + p = \frac{-2+1}{2} - \frac{5}{2} = -3$ (întreg),

deci facem substituția $\frac{x^2+a^2}{x^2} = u^2;\ x^2 = \frac{a^2}{u^2-1}$,

$$dx = -a(u^2-1)^{-\frac{3}{2}}\,u\,du,\ u_1 = \sqrt{5},\ u_2 = \sqrt{2},$$

$$I = -\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{2}} \frac{u^2-1}{a^2}\left(\frac{a^2}{u^2-1}\ u^2\right)^{-\frac{5}{2}} \cdot a(u^2-1)^{-\frac{3}{2}}\cdot u\,du = \frac{1}{a^6}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{(u^2-1)^2}{u^4}\,du =$$

$$= \frac{1}{a^6}\left[u + \frac{2}{u} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{u^3}\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} = \frac{1}{a^6}(\sqrt{5}-\sqrt{2}) + \frac{2}{a^6}\left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) +$$

$$+ \frac{1}{3a^6}\left[\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{5\sqrt{5}}\right],$$

Aplicații

1) Integralele de funcții trigonometrice

$$I = \int \sin^m x \cos^n x\,dx,\quad m,n \text{ întregi},$$

de transformă în integrale binome prin substituția $\sin x = t$.

Într-adevăr $\cos x = \sqrt{1-t^2}$, $dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, deci

$$I = \int t^m (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}\,dt$$

și este de tipul II $\left(\frac{m+1}{2} = \text{întreg}\right)$ dacă m este impar și de tipul III $\left(\frac{m+1}{2} + \frac{n-1}{2} = \text{întreg}\right)$ dacă m și n sînt simultan pari sau impari. Dacă n este impar integrala este rațională.

2) Integralele de funcții hiperbolice

$$\int \operatorname{sh}^m x\, \operatorname{ch}^n x\,dx,\quad m,n \text{ întregi},$$

se transformă în integrale binome cu substituția $\operatorname{sh} x = t$.

Avem $dx = \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$, ch $x = \sqrt{1+t^2}$, deci

$$I = \int t^m (1+t^2)^{\frac{n-1}{2}}\, dt$$

adică de tipul precedent.

§ 7. INTEGRALE CARE DEPIND DE UN PARAMETRU. DERIVAREA SUB SEMNUL INTEGRAL

1. Trecerea la limită sub semnul integral

Integralele de forma

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$$

sau, mai general, de forma

$$J(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\, dx$$

se numesc „integrale care depind de un parametru" şi apar în mod curent în aplicaţii. Funcţia $f(x, y)$ este definită pe o mulţime $[a, b] \times Y$, unde Y este un interval $\subset R$, şi dacă $f(x, y)$ este integrabilă pentru orice $(x, y) \in [a, b] \times Y$, $I(y)$ sau $J(y)$ sînt funcţii definite pe Y.

D e f i n i ţ i e. Fie $f(x, y)$ o funcţie definită pe $X \times Y$ şi y_0 un punct de acumulare al lui Y care poate să aparţină sau să nu aparţină lui Y. Fie $g(x) = \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$ pentru orice $x \in X$. Spunem că $f(x, y)$ t i n d e u n i f o r m pe mulţimea X către $g(x)$ dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $\eta(\varepsilon) > 0$ astfel încît să avem

$$|f(x, y) - g(x)| < \varepsilon$$

dacă

$$|y - y_0| < \eta(\varepsilon)$$

oricare ar fi $x \in X$.

O b s e r v a ţ i e

Fie $f_n(x)$ un şir de funcţii definite pe mulţimea X; după cum ştim, se spune că şirul $f_n(x)$ este uniform convergent pe X către funcţia $g(x)$, dacă, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît pentru orice $n > N(\varepsilon)$ şi orice $x \in X$ să avem

$$|f_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Dacă luăm $Y = \{1, 2, \ldots\}$, adică mulţimea numerelor naturale, atunci definiţia dată este echivalentă cu definiţia convergenţei uniforme la şiruri de funcţii.

Sîntem în măsură acum să dăm următoarea teoremă care ne dă regula de *intervertire a operaţiei de integrare cu operaţia de trecere la limită.*

Teoremă. Fie $f(x, y)$ o funcţie definită pe $[a, b] \times Y$ continuă pe $[a, b]$ oricare ar fi $y \in Y$. Dacă există $g(x) = \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$, unde y_0 este un punct de acumulare al lui Y şi dacă $f(x, y)$ tinde uniform către $g(x)$ pe $[a, b]$, atunci

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b [\lim_{y \to y_0} f(x, y)]\, dx = \int_a^b g(x)\, dx.$$

Demonstraţie. Funcţia $g(x)$ este continuă pe $[a, b]$. Într-adevăr, dacă considerăm un şir arbitrar

$$y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots, \quad y_n \in Y,$$

convergent către y_0, şirul de funcţii

$$f(x, y_1),\ f(x, y_2), \ldots,\ f(x, y_n), \ldots$$

este uniform convergent către $f(x, y_0) \equiv g(x)$ pe $[a, b]$, deci conform unei teoreme demonstrate la şiruri uniform convergente de funcţii continue, funcţia limită $g(x)$ este o funcţie continuă pe $[a, b]$. Funcţia $g(x)$ fiind continuă pe $[a, b]$ este integrabilă $[a, b]$ şi putem scrie

$$\left| \int_a^b f(x, y)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x, y) - g(x)|\, dx.$$

Ţinînd seamă că $f(x, y)$ tinde uniform către $g(x)$ pe $[a, b]$, deci pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $\eta(\varepsilon) > 0$ astfel încît să avem

$$|f(x, y) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{b - a},$$

dacă

$$|y - y_0| < \eta(\varepsilon)$$

pentru orice $x \in [a, b]$, rezultă că

$$\left| \int_a^b f(x, y)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx \right| < \varepsilon, \text{ dacă } |y - y_0| < \eta(\varepsilon),$$

deci

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b g(x)\, dx = \int_a^b [\lim_{y \to y_0} f(x, y)]\, dx.$$

Teorema este demonstrată.

2. Derivarea integralelor care depind de un parametru

Integrala definită

$$\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x,\ y \in [c, d],$$

reprezintă o funcţie $F(y)$ pe $[c, d]$; să vedem în ce condiţii $F(y)$ este derivabilă şi cum se calculează $F'(y)$. Rezultatul este conţinut în următoarea

T e o r e m ă. Fie $f(x, y)$ o funcţie continuă cu derivata parţială $f'_y(x, y)$ continuă pe intervalul $I = [\alpha, \beta] \times [c, d]$. Dacă funcţiile $a(y)$ şi $b(y)$ definite pe $[c, d]$ au derivate continue pe $[c, d]$, iar curbele $x = a(y)$, $x = b(y)$ se află în I, atunci funcţia $F(y)$ dată de

$$F(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x$$

este derivabilă pe $[c, d]$ şi

$$F'(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,\mathrm{d}x + b'(y) f\,[b(y), y] - a'(y) f\,[a(y), y] \quad (1)$$

Demonstraţie. Să notăm $a(y) = a$, $b(y) = b$, $a(y_0) = a_0$, $b(y_0) = b_0$; avem evident

$$F(y) = \int_{a_0}^{b_0} f(x, y)\,\mathrm{d}x + \int_{b_0}^{b} f(x, y)\,\mathrm{d}x - \int_{a_0}^{a} f(x, y)\,\mathrm{d}x,$$

$$F(y_0) = \int_{a_0}^{b_0} f(x, y_0)\,\mathrm{d}x,$$

deci

$$\frac{F(y) - F(y_0)}{y - y_0} = \int_{a_0}^{b_0} \frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{y - y_0}\int_{b_0}^{b} f(x, y)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{y - y_0}\int_{a_0}^{a} f(x, y)\,\mathrm{d}x.$$

Să ne ocupăm de fiecare integrală din partea a doua.

a) Dacă aplicăm formula lui Lagrange, avem în prima integrală

$$\frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0} = f'_y(x, y_0 + \theta(y - y_0)),\quad 0 < \theta < 1,$$

deoarece f'_y este continuă pe I. Funcţia f'_y fiind şi uniform continuă pe I urmează că pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există $\eta(\varepsilon) > 0$ astfel încît

$$\left|\frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0} - f'_y(x, y_0)\right| = |f'_y(x, y_0 + \theta(y - y_0)) - f'_y(x, y_0)| < \varepsilon$$

pentru orice $|y - y_0| < \eta(\varepsilon)$ şi orice $x \in [a, b]$, deci diferenţa

$$\frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0}$$

tinde uniform către $f'_y(x, y_0)$ cînd $y \to y_0$, şi, conform teoremei precedente, avem

$$\lim_{y \to y_0} \int_{a_0}^{b_0} \frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0} \mathrm{d}x = \int_{a_0}^{b_0} \lim_{y \to y_0} \frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0} \mathrm{d}x = \int_{a_0}^{b_0} \frac{\partial f(x, y_0)}{\partial y} \mathrm{d}x.$$

b) În a doua integrală din partea a doua aplicăm formula mediei pentru integrale, deci

$$\frac{1}{y - y_0} \int_{b_0}^{b} f(x, y)\, \mathrm{d}x = \frac{b(y) - b(y_0)}{y - y_0} f\,[b(y_0) + \theta(b\ (y) - b(y_0)), y]$$

şi la limită obţinem

$$\lim_{y \to y_0} \frac{1}{y - y_0} \int_{b_0}^{b} f(x, y)\ \mathrm{d}x = b'(y_0)\, f\,[b(y_0), y_0]\,;$$

deoarece b este derivabilă pe $[c, d]$, $f(x, y]$ este continuă pe $[\alpha, \beta] \times \times [c, d]$, iar $y_0 \in [c, d]$.

Acelaşi rezultat îl obţinem şi pentru a treia integrală din partea a doua, anume

$$\lim_{y \to y_0} \frac{1}{y - y_0} \int_{a_0}^{a} f(x, y)\ \mathrm{d}x = a'(y_0)\, f[a(y_0), y_0].$$

Rezultatele obţinute sînt adevărate pentru orice punct y_0 (de acumulare) al intervalului $[c, d]$. Teorema este demonstrată.

Observaţii

1) Dacă a şi b sînt constante, atunci formula de derivare ia forma simplă

$$F'(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \int_a^b f(x, y)\, \mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \mathrm{d}x$$

numită şi „formula de derivare sub semnul integral".

2) Dacă aplicăm formula de derivare (1) integralei nedefinite

$$\int_a^y f(t)\, \mathrm{d}t$$

avem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \int_a^y f(t)\, \mathrm{d}t = f(y)$$

rezultat obţinut anterior.

3. Exemple de integrale definite calculate prin derivare sub semnul integral

Prin derivare sub semnul integral se pot calcula integrale definite, după cum se va vedea din exemplele ce urmează. Dacă funcţia de sub semnul integral nu depinde de nici un parametru, putem introduce un parametru, urmînd ca în rezultatul final să-l înlăturăm.

1) Să derivăm integrala

$$F(a) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a}$$

în raport cu parametrul a:

$$F'(a) = \frac{\partial}{\partial a} \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} = -2a \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{(a^2 + x^2)^2};$$

avem de asemenea

$$\left(\frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a}\right)'_a = -\frac{1}{a^2} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} - \frac{1}{a} \cdot \frac{x}{x^2 + a^2},$$

deci

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2a^2} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{x}{a^2 + x^2},$$

formulă obţinută anterior la A, cap. I, § 5, al. 2.

2) Se cunoaşte

$$F(a, b) = \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{a + b \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad a > b > 0.$$

Să se deducă

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{(a + b \cos x)^2}, \quad \int_0^\pi \frac{\cos x \,\mathrm{d}x}{(a + b \cos x)^2}.$$

Derivăm în raport cu a

$$F'_a(a, b) = -\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{(a + b \cos x)^2} = -\pi a (a^2 - b^2)^{-\frac{3}{2}}$$

deci

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{(a + b \cos x)^2} = \pi a (a^2 - b^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

În mod asemănător avem şi

$$F'_b(a, b) = -\int_0^{\pi} \frac{\cos x \, dx}{(a + b \cos x)^2} = \pi \, b(a^2 - b^2)^{-\frac{3}{2}}$$

deci

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos x \, dx}{(a + b \cos x)^2} = -\pi \, b(a^2 - b^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

3) Să se calculeze

$$F(a) = \int_0^{\pi} \ln (1 + a \cos x) \, dx, \quad -1 < a < 1.$$

Derivăm în raport cu a

$$F'(a) = \int_0^{\pi} \frac{\cos x}{1 + a \cos x} \, dx.$$

Avem

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{1 + a \cos x} \, dx = \frac{1}{a} \int_0^{\pi} \frac{1 - 1 + a \cos x}{1 + a \cos x} \, dx = \frac{\pi}{a} - \frac{1}{a} \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + a \cos x}$$

şi dacă folosim datele de la exerciţiul precedent,

$$F'(a) = \frac{\pi}{a} - \frac{\pi}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}},$$

deci

$$F(a) = \pi \int \frac{da}{a} - \pi \int \frac{da}{a\sqrt{1 - a^2}} = \pi \ln a + \frac{\pi}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - a^2}}{1 - \sqrt{1 - a^2}} + C$$

sau

$$F(a) = \pi \ln (1 + \sqrt{1 - a^2}) + C.$$

Observăm din enunţ că $F(a) = 0$, prin urmare determinăm constanta arbitrară C punînd această condiţie; avem

$$0 = \pi \ln 2 + C, \quad C = -\pi \ln 2$$

şi

$$\int_0^{\pi} \ln (1 + a \cos x) dx =$$

$$= \pi \ln \frac{1 + \sqrt{1 - a^2}}{2}.$$

4) Să se găsească legea de variaţie a secţiunii unei bare, care, sub acţiunea unei forţe F_0 şi a greutăţii sale, să fie un solid de egală rezistenţă (rezistenţa în orice secţiune să fie aceeaşi) (fig. 16).

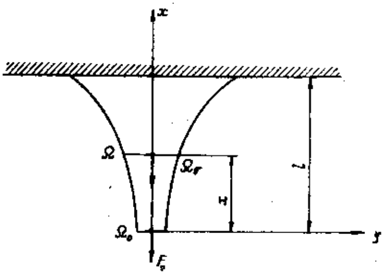

Fig. 16.

Dacă γ este greutatea specifică a materialului într-o secţiune oarecare avem

$$\sigma \cdot \Omega = F_0 + \int_0^x \gamma \, \Omega \, \mathrm{d}x,$$

unde $\sigma = \text{const}$. Derivînd în raport cu x obţinem

$$\sigma \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}x} = \gamma \, \Omega,$$

sau

$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\Omega} = \frac{\gamma}{\sigma} \mathrm{d}x$$

deci

$$\Omega = \Omega_0 \, e^{\frac{\gamma}{\sigma} x},$$

care ne dă legea de variaţie a secţiunii. Dacă presupunem secţiunea circulară avem

$$\Omega = \pi \, y^2 ,$$

prin urmare

$$y = \sqrt{\frac{\Omega_0}{\pi}} \cdot e^{\frac{\gamma}{2\sigma} x} .$$

§ 8. INTEGRAREA SERIILOR DE FUNCŢII. INTEGRAREA PRIN DEZVOLTARE ÎN SERIE

1. Integrarea termen cu termen a şirurilor de funcţii

Teoremă. Fie $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ un şir de funcţii continue definite pe un interval $[a, b]$. Dacă şirul (f_n) este uniform convergent pe $[a, b]$ către o funcţie f atunci

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^b [\lim_{n \to \infty} f_n(x)] \, \mathrm{d}x = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Demonstraţie. Şirul (f_n) fiind uniform convergent pe $[a, b]$ către funcţia f, atunci pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît pentru orice $n > N(\varepsilon)$ avem

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{1}$$

oricare ar fi $x \in [a, b]$. Funcțiile f_n și f fiind continue sînt integrabile, deci putem scrie

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Ținînd seama de (1) avem și

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon(b-a), \quad \text{dacă } n > N(\varepsilon),$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemplu

Șirul de funcții $f_n(x) = \dfrac{\cos n x}{n}$ definit pe $[0, \pi]$ este uniform convergent pe $[0, \pi]$ către funcția $f(x) \equiv 0$.

Avem $\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos n x \,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{n^2} \sin n x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{1}{n^2} \sin \dfrac{n\pi}{2} \to 0$, cînd $n \to \infty$.

2. Integrarea termen cu termen a seriilor de funcții

Teoremă. Fie $f_1 + f_2 + \dots + f_n + \cdots$

o serie de funcții continue pe același interval $[a, b]$. Dacă seria este uniform convergentă pe intervalul $[a, b]$ și are suma f, atunci

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x + \dots + \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x + \cdots$$

Demonstrație. Avem $f(x) = S_n(x) + R_n(x)$, unde

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$$

și

$$R_n(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_{n+p}(x) + \cdots$$

funcțiile date $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ și funcția sumă f fiind continue pe intervalul $[a, b]$ sînt integrabile pe $[a, b]$, deci putem scrie

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b S_n(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b R_n(x)\,\mathrm{d}x$$

sau

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n}\int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b R_n(x)\,\mathrm{d}x;$$

seria dată fiind însă uniform convergentă pe $[a, b]$ urmează că pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît pentru $n > N(\varepsilon)$ şi orice $x \in [a, b]$ avem

$$|R_n(x)| < \varepsilon,$$

deci putem scrie

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n}\int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon\int_a^b \mathrm{d}x = \varepsilon\,(b-a)$$

de unde rezultă că

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x$$

sau

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b\left[\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right]\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x$$

Teorema este demonstrată.

Observaţii

1) Teorema demonstrată este *a treia teoremă* fundamentală în legătură cu seriile de funcţii şi se poate enunţa, pe scurt, în modul următor: „O serie uniform convergentă de funcţii continue poate fi integrată termen cu termen“ pe intervalul de convergenţă uniformă.

2) Tot din teorema demonstrată rezultă că, pentru seriile uniform convergente, operaţia de sumă Σ poate fi intervertită cu operaţia de integrare $\int$.

3) Teorema serveşte nu numai pentru calculul integralei definite a unei serii de funcţii, ci şi a primitivelor pe orice interval conţinut în mulţimea de convergenţă uniformă a seriei considerate.

Exemple

1) Seria trigonometrică

$$f(x) = 1 + \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \ldots + \frac{\cos nx}{n^2} + \ldots$$

este uniform convergentă pentru orice $x \in R$, deci

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = C + x + \frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 2x}{2^3} + \ldots + \frac{\sin nx}{n^3} + \ldots$$

2) Seria de funcții

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

este uniform convergentă pentru orice $|x| < 1$ și are suma $\frac{1}{1-x}$, deci pentru $|x| < 1$ avem

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x} = C + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots = -\ln(1-x) + C'$$

pentru $x = 0$, $C = C'$, deci

$$\ln(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots \quad |x| < 1.$$

3. Integrarea seriilor de puteri

Teoremă. Fie $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$ o serie de puteri cu raza de convergență $R \neq 0$. Pentru orice interval închis $[a, b] \subset (-R, R)$, seria de puteri poate fi integrată termen cu termen și

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n \,\mathrm{d}x.$$

Demonstrație. O serie de puteri este uniform convergentă pe orice interval închis I conținut în intervalul de convergență $(-R, R)$, deci conform teoremei precedente poate fi integrată termen cu termen pe I.

Aplicații

1) Formula care ne dă perioada unei oscilații complete de amplitudine α, a unui pendul matematic, oscilînd în vid, este

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}}, \tag{1}$$

unde l este lungimea pendulului, g accelerația gravitației, și $k^2 = \sin^2 \frac{\alpha}{2}$. Se cere să se dezvolte T în serie după puterile lui k. Deoarece $k^2 < 1$, putem folosi formula binomului generalizat, deci

$$(1 - k^2 \sin^2\theta)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot k^2 \sin^2\theta + \frac{1.3}{1.4} k^4 \sin^4\theta + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1.3.5 \ldots (2n-1)}{2.4.6 \ldots 2n} k^{2n} \sin^{2n}\theta + \ldots$$

de unde avem

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1 + \frac{1}{2}\ k^2 \sin^2\theta + \frac{1.3}{2.4}k^4\sin^4\theta + \dots\right.$$

$$\left.\dots + \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n}k^{2n}\sin^{2n}\theta + \dots\right)\mathrm{d}\theta$$

sau

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\frac{\pi}{2}\left[1 + \frac{k^2}{4} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}k^4 + \dots + \left(\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n}\right)^2 k^{2n} + \dots\right]$$

deoarece

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Dacă în (1) facem substituţia $\sin\theta = x$, ajungem la o integrală eliptică

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

În general se numesc *integrale eliptice*, integralele de forma

$$\int R(x,\ \sqrt{P(x)})\,\mathrm{d}x$$

unde $R(u, v)$ este o funcţie raţională de u şi v, iar $P(x)$ este un polinom de gradul 3 sau 4. Prin transformări convenabile ele se reduc la următoarele trei tipuri

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\ \int\frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x,\ \int\frac{\mathrm{d}x}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Cu substituţia $\sin\theta = x$, obţinem următoarele forme trigonometrice ale integralelor eliptice

$$\int\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}},\ \int\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta,\ \int\frac{\mathrm{d}\theta}{(1+n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}.$$

Exemple

1) Să se calculeze

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}}.$$

Folosim dezvoltarea în serie de puteri

$$(1+x^4)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x^4}{2} + \frac{1.3}{2.4}x^8 - \dots + (-1)^n\ \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.3.6\dots 2n}x^{4n} + \dots$$

Pentru $0 \leqslant x \leqslant 1$, putem integra termen cu termen

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = 1 - \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{9} - \ldots + (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4.6 \ldots 2n}\cdot\frac{1}{4n+1} + \ldots$$

2) Să se calculeze $\int e^{-x^2}\,dx$.

Folosim dezvoltarea în serie

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots + (-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{n!} + \ldots$$

valabilă pentru $x \in R$, deci

$$\int e^{-x^2}\,dx = C + \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \ldots + (-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)} + \ldots$$

pentru $x \in R$.

§ 9. METODE APROXIMATIVE DE INTEGRARE

1. Determinarea grafică a unei funcții primitive

I. *Prima metodă*. Dacă funcția de integrat $f(x)$ nu ne este dată prin expresia ei analitică, ci prin graficul său provenind de la date experimentale sau de la un aparat de înregistrare, putem obține graficul unei primitive a funcției $f(x)$, (în ipoteza că $f(x)$ admite primitive),

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx,$$

care trece prin punctul $(a, 0)$ în modul următor. Fie $y = f(x)$ graficul dat (fig. 17); determinăm prin puncte și tangente graficul primitivei

$$\overline{y} = \int_a^x f(x)\,dx$$

care trece prin punctul $(a, 0)$, ținînd seamă că

1) pentru $x = 0$, $\overline{y} = 0$;

2) în punctele x pentru care $f(x) = 0$, funcția $\overline{y} = F(x)$ are un extremum, tangenta la graficul lui $F(x)$ fiind paralelă cu axa Ox;

3) ordonata într-un punct b, $y_b = f(b)$, reprezintă panta tangentei la curba $\overline{y} = F(x)$ în punctul de abscisă b;

4) ordonata $\overline{y}_b = F(b)$ se obține evaluînd aria (cu semnul ei) cuprinsă între curba $y = f(x)$, axa Ox și paralele la axa Oy în punctele $x = a$, $x = b$ (se lucrează pe hîrtie milimetrică).

În modul acesta putem avea oricîte puncte dorim ale curbei integrale $\overline{y} = F(x)$, precum și tangentele la curba integrală în punctele obținute.

Pe figura 17 se pot urmări etapele de mai sus. În punctul $B(x_1, 0)$, $f(x_1) = 0$, deci în punctul $B_1(x_1, F(x_1))$, $F(x)$ are un extremum, anume un maxim, deoarece $f(x)$ trece de la valori pozitive la valori negative.

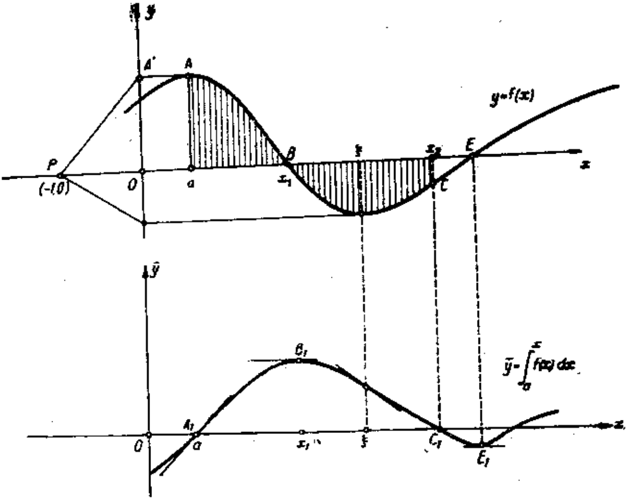

Fig. 17

În punctul $C_1(x_2, 0)$ primitiva taie axa Ox, deoarece aria cuprinsă între paralelele $x = a$, $x = x_2$ și curba $y = f(x)$ situată deasupra axei Ox este egală cu aria cuprinsă între paralelele $x = a$, $x = x_2$ și curba $y = f(x)$ situată sub axa Ox.

În fine, punctele ξ care sînt puncte de extremum pentru $y = f(x)$, deci $f'(\xi) = 0$, $f''(\xi) \neq 0$ sînt puncte $(\xi, F(\xi))$ de inflexiune pentru primitiva $\overline{y} = F(x)$, deoarece $f'(\xi) = F''(\xi) = 0$ și $F'''(\xi) \neq 0$.

II. *Metoda a doua. a)* Această metodă se bazează pe construcția primitivelor funcției în trepte:

$$f(x) = \begin{cases} y_0 \ , & 0 \leqslant x < x_1 \\ y_1 \ , & x_1 \leqslant x < x_2 \\ \dots & \dots \\ y_{n-1}, & x_{n-1} \leqslant x \leqslant x_n, \end{cases}$$

iar curba integrală care trece prin punctul (0, 0) este o linie poligonală care are ecuația

$$F(x) = \begin{cases} y_0 x, & 0 \leqslant x \leqslant x_1 \\ y_1 x + x_1 (y_0 - y_1), & x_1 \leqslant x \leqslant x_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ x y_{n-1} + x_1 (y_0 - y_1) + x_2 (y_1 - y_2) + \dots + x_{n-1} (y_{n-2} - y_{n-1}), & \\ & x_{n-1} \leqslant x \leqslant x_n, \end{cases}$$

deci

$$F(x) = \int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x, \quad x \in [0,\ x_n].$$

Grafic, pentru determinarea pantei primitivei $F(x)$ în intervalul (x_k, x_{k+1}), se unește punctul $P(-1, 0)$ cu punctul $(0,\ y_k)$. În orice punct

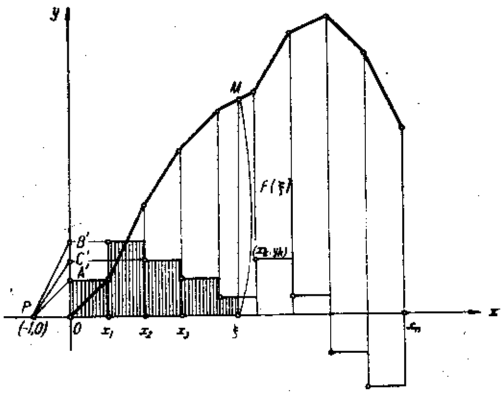

Fig. 18

$\xi \in [0,\ x_n]$, ordonata $F(\xi)$ a liniei poligonale ne dă (la scara adoptată) aria mărginită de funcția în trepte, axa Ox, dreptele $x = 0$ și $x = \xi$ (fig. 18).

b) Fie acum o funcție $f(x)$ căreia voim să-i găsim grafic o primitivă

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x,$$

care trece prin punctul $(a,\ 0)$. Vom reprezenta grafic curba $y = f(x)$ într-un interval $[a,\ b]$, împărțim intervalul $[a,\ b]$ în n subintervale cu punctele de diviziune

(*d*) $$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

şi în fiecare subinterval (x_k, x_{k+1}) înlocuim funcţia cu dreapta $y = f(\xi_k)$ astfel încît să avem

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \cong (x_{k+1} - x_k)\, f(\xi_k) \tag{1}$$

(punctul ξ_k se determină grafic, deci relaţia (1) este aproximativă). În modul acesta am aproximat pe $f(x)$ în $[a, b]$ cu o funcţie în trepte (fig. 19),

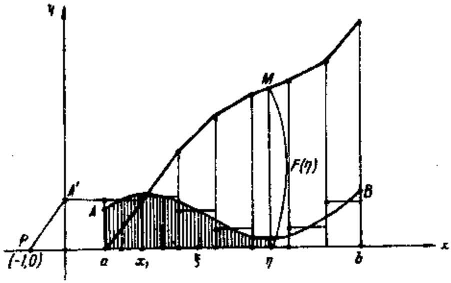

Fig. 19

iar primitiva căutată cu o linie poligonală, construită cum s-a arătat mai sus.

c) Fie un şir de diviziuni

$$d_1 \subset d_2 \subset d_3 \subset \ldots \subset d_n \subset \ldots$$

astfel încît $\nu(d_n) \to 0$ cînd $n \to \infty$; se poate arăta că şirul de primitive construite aşa cum s-a arătat mai sus,

$$F_1(x),\ F_2(x),\ \ldots,\ F_n(x),\ \ldots$$

definite pe intervalul $[a, b]$, converge uniform către primitiva $F(x)$

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x, \quad x \in [a, b].$$

2. Calculul cu aproximaţie al integralelor definite

Metodele aproximative de calcul ale integralei definite au ca principiu înlocuirea curbei $y = f(x)$ în intervalul de integrare $[a, b]$ cu o curbă mai simplă $y = g(x)$, deci

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cong \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

unde curba $y = g(x)$ este o funcție în scară, o linie poligonală (metoda trapezelor, metoda tangentelor), un lanț de parabole (metoda lui Simpson) sau polinomul de interpolare al lui Lagrange.

3. Metoda dreptunghiurilor

Fie $y = f(x)$ funcția de integrat, $[a, b]$ intervalul de integrare și

$$(d) \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

o diviziune pe care o luăm cu toate subintervalele egale, deci

$$x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}.$$

Metoda dreptunghiurilor constă în a aproxima integrala definită

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

cu o sumă Riemann σ_n, anume se ia pentru punctul ξ_k în intervalul (x_k, x_{k+1}) punctul x_k (sau x_{k+1}). Avem deci ca valoare aproximativă fie

$$I \simeq D_n = \frac{b-a}{n}[f(a) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})], \quad (1)$$

fie

$$I \simeq D_n^* = \frac{b-a}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) + f(b)] \quad (1')$$

și oricare din aceste două formule este formula dreptunghiurilor.

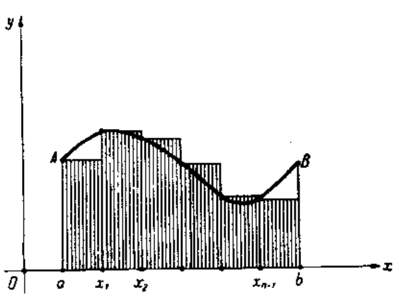

Fig. 20

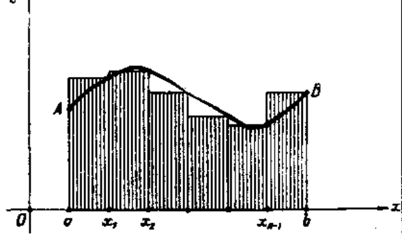

Fig. 21

Din figurile 20 şi 21 se vede că metoda constă în a se înlocui arcul de curbă $y = f(x)$ cu o funcţie în trepte.

O b s e r v a ţ i e.

Dacă funcţia $f(x)$ este crescătoare în intervalul $[a, b]$, atunci D_* aproximează pe I prin lipsă, iar D_n^* prin exces.

Eroarea în metoda dreptunghiurilor. Dacă $S_d(f)$, $s_d(f)$ sînt sumele lui Darboux, relative la diviziunea considerată

$$S_d(f) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) M_k, \quad s_d(f) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) m_k,$$

atunci

$$s_d(f) \leqslant \int_a^b f(x)\, dx \leqslant S_d(f)$$

şi pentru că

$$s_d(f) \leqslant D_d(f) \leqslant S_d(f), \quad s_d(f) \leqslant D_d^*(f) \leqslant S_d(f)$$

urmează că

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - D_d(f) \right| < S_d(f) - s_d(f),$$

neegalitate adevărată şi pentru $D_d^*(f)$, de unde rezultă că *eroarea în metoda dreptunghiurilor este dată de diferenţa sumelor lui Darboux.*

T e o r e m ă. Dacă funcţia f este derivabilă, cu derivata f' mărginită în $[a, b]$, atunci

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - D_d(f) \right| \leqslant A \cdot \frac{(b-a)^2}{n}$$

unde

$$A = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f'(x)|.$$

Demonstraţie. Avem

$$S_d(f) - s_d(f) = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)(x_{k+1} - x_k),$$

însă

$$M_k - m_k = f(\xi_k') - f(\xi_k'') = (\xi_k' - \xi_k'') f'(\xi_k);$$

deoarece f este continuă pe $[a, b]$ deci şi pe $[x_k, x_{k+1}]$, urmează că f îşi atinge marginile pe $[x_k, x_{k+1}]$, anume în punctele ξ_k', ξ_k''. Avem

$$|S_d(f) - s_d(f)| \leqslant \left| \sum_{k=0}^{n-1} (\xi_k' - \xi_k'')(x_{k+1} - x_k) f'(\xi_k) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |\xi_k' - \xi_k''| \cdot |x_{k+1} - x_k| \cdot |f'(\xi_k)|$$

şi pentru că

$$|\xi_k' - \xi_k''| \leqslant \frac{b-a}{n}, \quad x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$$

şi $|f'(\xi_k)| \leqslant A$, deducem

$$|S_d(f) - s_d(f)| < An \cdot \frac{b-a}{n} \cdot \frac{b-a}{n} = A \cdot \frac{(b-a)^2}{n}.$$

Teorema este demonstrată. Teorema serveşte pentru stabilirea numărului n pentru ca eroarea comisă să fie inferioară unui număr dat.

Exemplu

Ne propunem să determinăm numărul n astfel încît integrala definită

$$\int_0^1 x^6 \, dx$$

să fie aproximată prin metoda dreptunghiurilor cu două zecimale exacte. Eroarea trebuie să fie inferioară lui 10^{-2}. Avem $|f'(x)| \leqslant 6, x \in [0, 1]$, numărul întreg n satisface neegalitatea

$$\frac{6}{n} \leqslant 10^{-2} \quad \text{sau } n \geqslant 6 \cdot 10^2 = 600,$$

deci numărul diviziunilor trebuie să fie cel puţin egal cu 600.

Acest exemplu arată că metoda dreptunghiurilor nu ne dă în general o bună aproximare a integralei definite considerate decît dacă panta curbei este mică şi dacă intervalul de integrare este suficient de mic. În adevăr, pe intervalul $\left[0, \frac{1}{10}\right]$ obţinem

$$\frac{6}{n} \cdot 0{,}01 \leqslant 10^{-2}, \quad \text{deci } n \geqslant 6.$$

4. Metoda trapezelor

Metoda trapezelor constă în a aproxima integrala definită

$$I = \int_a^b f(x) \, dx$$

prin semisuma valorilor $D_d(f)$ şi $D_d^*(f)$ calculate la alineatul precedent la metoda dreptunghiurilor, anume

$$I \simeq C_d(f) = \frac{1}{2}[D_d(f) + D_d^*(f)] = \frac{b-a}{2n}[f(a) + 2f(x_1) + \cdots$$

$$\cdots + 2f(x_{n-1}) + f(b)].$$

Se observă că, din punct de vedere geometric, metoda constă în a aproxima curba $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, prin linia poligonală care trece prin punctele $(a, f(a))$, $(x_1, f(x_1))$, ..., $(b, f(b))$, (fig. 22), adică în fiecare interval $[x_k, x_{k+1}]$ se aproximează arcul de curbă $M_k M_{k+1}$ cu coarda $M_k M_{k+1}$, aria patrulaterului mixtiliniu, $P_k M_k M_{k+1} P_{k+1}$, înlocuindu-se cu aria *trapezului* $P_k M_k M_{k+1} P_{k+1}$.

Eroarea în metoda trapezelor este dată de următoarea

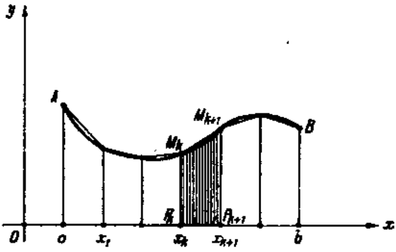

Fig. 22

Teoremă. Dacă funcţia f are derivata de ordinul doi f'', integrabilă pe intervalul $[a, b]$, atunci

$$\left| \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - C_a(f) \right| \leqslant B \cdot \frac{(b-a)^3}{12n^2},$$

unde $B = \sup\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f''(x)|$.

Demonstraţie. Pentru un interval oarecare $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, diferenţa dintre aria trapezului $\alpha MN\beta$ şi aria patrulaterului mixtiliniu $\alpha MN\beta$ este dată de

$$\Delta = (\beta - \alpha)\frac{f(\beta) + f(\alpha)}{2} - \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x,$$

iar dacă folosim formula lui Taylor cu restul sub formă integrală (A, cap. I, § 4, al. 2),

$$f(\beta) = f(\alpha) + \frac{\beta - \alpha}{1\,!} f'(\alpha) + \int_\alpha^\beta (\beta - x) f''(x)\mathrm{d}x,$$

avem

$$(\beta - \alpha)\frac{f(\beta) + f(\alpha)}{2} = (\beta - \alpha) f(\alpha) + \frac{(\beta - \alpha)^2}{2\,!} f'(\alpha) + $$

$$+ \frac{\beta - \alpha}{2\,!}\int_\alpha^\beta (\beta - x) f''(x)\,\mathrm{d}x,$$

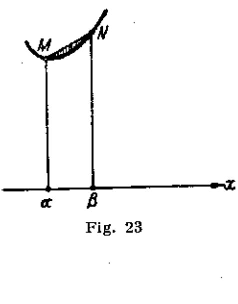

Fig. 23

şi dacă ţinem seama şi de formula (3) (A, cap. I, §4, al. 2)

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x = (\beta - \alpha) f(\alpha) + \frac{(\beta - \alpha)^2}{2\,!} f'(\alpha) + $$

$$+ \frac{1}{2\,!}\int_\alpha^\beta (\beta - x)^2 f''(x)\,\mathrm{d}x$$

prin scădere obţinem

$$\Delta = \frac{\beta - \alpha}{2}\int_\alpha^\beta (\beta - x) f''(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (\beta - x)^2 f''(x)\,\mathrm{d}x,$$

deci

$$\Delta = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(\beta - x) f''(x)\,\mathrm{d}x$$

sau

$$|\Delta| \leqslant \frac{1}{2}\ B \left| \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(\beta - \alpha - x + \alpha)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \frac{B(\beta - \alpha)^3}{12}.$$

Eroarea provenind din metoda trapezelor este dată de

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)\cdot\frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \right| \leqslant$$

$$\leqslant B\,\frac{n}{12}\cdot\frac{(b-a)^3}{n^3} = \frac{B}{12}\cdot\frac{(b-a)^3}{n^2}.$$

Teorema este demonstrată.

Exemplu

Să se determine n astfel încît integrala definită

$$\int_0^1 x^6\mathrm{d}x$$

să fie aproximată prin metoda trapezelor cu două zecimale exacte.

Avem $f''(x) = 30\,x^4$, $|f''(x)| \leqslant 30$, $x \in [0, 1]$, deci numărul n satisface neegalitatea

$$\frac{30}{12\cdot n^2} < \frac{1}{100},\ \text{de unde } n \geqslant \sqrt{250} \simeq 16.$$

Comparînd rezultatul obținut cu rezultatul de la metoda dreptunghiurilor, deducem că metoda trapezelor ne dă o aproximare mai bună.

5. Metoda tangentelor

În această metodă se aproximează pe fiecare subinterval $[x_k, x_{k+1}]$ arcul de curbă $y = f(x)$ cu tangenta la curbă. Anume se ia numărul diviziunilor par ($n = 2m$) și se duce tangenta la curbă în punctele de abscisă x_{2k+1}, tangentă pe care o mărginim la dreptele paralele cu axa Oy duse prin punctele $(x_{2k}, 0)$ și $(x_{2k+2}, 0)$ astfel încît aria trapezului mixtiliniu (fig. 24) ($x_{2k}\ P_{2k}\ P_{2k+2}\ x_{2k+2}$) este aproximată cu aria trapezului

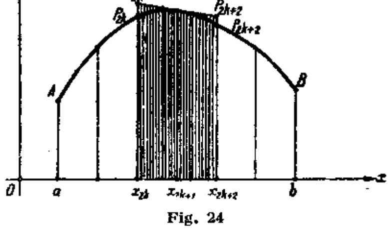

Fig. 24

$(x_{2k}\, P'_{2k}\, P'_{2k+2}\, x_{2k+2})$ dată de

$$\frac{b-a}{2m}(f(x_{2k})+f(x_{2k+2})) = \frac{b-a}{m}f(x_{2k+1});$$

dacă însumăm toate aceste arii elementare obținem

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x \simeq \mathrm{T}_d = \frac{b-a}{m}(f(x_1)+f(x_3)+\ldots+f(x_{2m-1})).$$

6. Metoda lui Simpson

În metoda lui Simpson se ia o medie ponderată a valorilor aproximative obținute prin metodele trapezelor și tangentelor, anume

$$S_d = \frac{2C_d + \mathrm{T}_d}{3},$$

sau, folosind expresiile lui C_d și T_d, cu numărul de diviziuni par $n = 2m$, obținem

$$S_d = \frac{b-a}{6m}[f(a)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\ldots+2f(x_{2m-2})+$$

$$+4f(x_{2m-1})+f(b)],$$

numită formula de aproximare a lui *Simpson*.

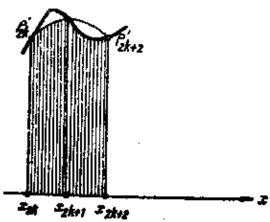

Fig. 25

În metoda lui Simpson se aproximează curba în intervalul $[x_{2k}, x_{2k+2}]$ printr-un arc de parabolă $y = Ax^2 + Bx + C$ care trece prin punctele de abscise x_{2k}, x_{2k+1} și x_{2k+2}. Într-adevăr, aria mărginită de parabola (fig. 25)

$$y = g(x) \equiv Ax^2 + Bx + C$$

care trece prin punctele de abscise $\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}, \beta$ este dată, conform formulei celor trei nivele (A, cap. I, § 3, al. 3), de

$$\frac{\beta-\alpha}{6}\left[g(\alpha)+4g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+g(\beta)\right]$$

și dacă facem $\alpha = x_{2k}, \frac{\alpha+\beta}{2} = x_{2k+1}, \beta = x_{2k+2}$, deci $\frac{\beta-\alpha}{6} = \frac{x_{2k+2}-x_{2k}}{6} = \frac{b-a}{6m}$, aria trapezului $(x_{2k}\, P_{2k}\, P_{2k+2}\, x_{2k+2})$

este

$$\frac{b-a}{6m}\left[f(x_{2k})+4\,f(x_{2k+1})+f(x_{2k+2})\right]$$

şi însumînd relativ la $k = 0, 1, 2, \ldots, m$ obţinem formula lui Simpson.

Eroarea în metoda de aproximare a lui Simpson este dată de următoarea

Teoremă. Dacă funcţia f are derivata de ordinul patru continuă pe $[a, b]$, atunci

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - S_d(f)\right| < A\cdot\frac{(b-a)^5}{2\,880\,m^4},$$

unde $A = \sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f''''(x)$, iar $S_d(f)$ este valoarea aproximată de formula lui Simpson.

Demonstraţie. Să considerăm două intervale consecutive de lungime h, $(x-h, x)$, $(x, x+h)$ şi să evaluăm eroarea făcută folosind formula lui Simpson pentru aproximarea integralei definite

$$F(x+h)-F(x-h)=\int_{x-h}^{x+h} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

unde am notat cu $F(x)$ o primitivă (necunoscută) a lui $f(x)$.

Urmează că avem, folosind formula lui Simpson sau formula celor trei nivele,

$$S=\frac{h}{3}\,[f(x-h)+4f(x)+f(x+h)]$$

şi diferenţa

$$\rho(h)=F(x+h)-F(x-h)-\frac{h}{3}\,[f(x-h)+4f(x)+f(x+h)]$$

este eroarea comisă. Dacă derivăm pe ρ în raport cu h şi ţinem seamă că $F(x)$ este o primitivă a lui $f(x)$, avem

$$\rho'(h)=f(x+h)+f(x-h)-\frac{1}{3}f(x-h)-\frac{4}{3}f(x)-\frac{1}{3}f(x+h)-$$

$$-\frac{h}{3}\,[f'(x+h)-f'(x-h)],$$

$$\rho''(h)=\frac{2}{3}f'(x+h)-\frac{2}{3}f'(x-h)-\frac{1}{3}f'(x+h)+\frac{1}{3}f'(x-h)-$$

$$-\frac{h}{3}\,[f''(x+h)+f''(x-h)]$$

şi

$$\rho'''(h)=-\frac{h}{3}\,[f'''(x+h)-f'''(x-h)].$$

Să aplicăm lui $\rho'''(h)$ formula creşterilor finite

$$\rho'''(h) = -\frac{2}{3} h^2 f''''(\xi), \quad (x - h < \xi < x + h),$$

să integrăm consecutiv de trei ori de la 0 la h, aplicînd în prealabil formula mediei generalizate

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x, \quad (g(x) \geqslant 0),$$

şi să ţinem seamă că $\rho(0) = \rho'(0) = \rho''(0) = 0$; avem

$$\rho''(h) = \int_0^h \rho'''(h)\, \mathrm{d}h = -\frac{2}{3}\int_0^h h^2 f''''(\xi)\, \mathrm{d}h = -\frac{2}{3} f''''(\xi_1) \int_0^h h^2 \mathrm{d}h =$$

$$= -\frac{2}{9} h^3 f''''(\xi_1),$$

$$\rho'(h) = \int_0^h \rho''(h)\, \mathrm{d}h = -\frac{2}{9}\int_0^h h^3 f''''(\xi_1)\, \mathrm{d}h = -\frac{2}{9} f''''(\xi_2) \int_0^h h^3\, \mathrm{d}h =$$

$$= -\frac{1}{18} h^4 f''''(\xi_2)$$

şi în mod analog

$$\rho(h) = -\frac{1}{90} h^5 f''''(\theta), \quad \xi,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \theta \in (x - h,\ x + h).$$

Să facem acum suma acestor erori, pentru cele $2m$ intervale egale în care împărţim intervalul $[a, b]$; obţinem astfel eroarea totală

$$E(h) = \sum_{k=1}^{m} \rho_{2k-1}(h) = -\frac{h^5}{90} \sum_{k=1}^{m} f''''(\theta_{2k-1})$$

cu

$$a + (p-1)h < \theta_p < a + (p+1)h.$$

Funcţia $f''''(x)$ fiind continuă, urmează că putem scrie

$$\frac{f''''(\theta_1) + f''''(\theta_3) + \ldots + f''''(\theta_{2m-1})}{m} = f''''(\xi),\ a < \xi < b,$$

deci cu $h = \dfrac{b-a}{2m}$ eroarea totală este dată de

$$E(h) = -\frac{h^5}{90} m f''''(\xi) = -\frac{(b-a)^5}{2\,880\, m^4} f''''(\xi)$$

şi are semn contrar cu $f''''(\xi)$. Deoarece derivata de ordinul patru este mărginită în $[a, b]$, $|f''''(x)| \leqslant A,\ x \in [a, b]$ obţinem

$$\left| \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x - S_d(f) \right| \leqslant \frac{(b-a)^5}{2\,880\, m^4} A.$$

Teorema este demonstrată.

Exemplu

Să se determine n astfel încît integrala definită

$$\int_0^1 x^6 \, dx$$

să fie aproximată cu formula lui Simpson cu două zecimale exacte.

Avem $f''''(x) = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot x^2$, deci $|f''''(x)| \leqslant 360$, $x \in [0, 1]$ și numărul n satisface neegalitatea

$$\frac{16}{2\,880\, n^4} \cdot 360 \leqslant \frac{\ }{100}, \text{ sau } n \geqslant \sqrt[4]{18\,000} \simeq 12.$$

Comparînd metodele — a dreptunghiurilor, trapezelor și Simpson —, rezultă că metoda lui Simpson, pentru același număr n de subintervale, dă aproximarea cea mai bună sau, eroarea admisibilă fiind impusă, metoda lui Simpson cere cele mai puține calcule pentru aproximarea integralei definite, deoarece numărul n pentru această metodă este cel mai mic.

7. Aproximarea prin interpolare

Să presupunem intervalul de integrare $[a, b]$ împărțit în n subintervale *oarecare* prin punctele

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b;$$

în care funcția $f(x)$ ia valorile

$$f(a), \; f(x_1), \; \ldots, f(x_{n-1}), \; f(b).$$

În această metodă, funcția de integrat $f(x)$ se aproximează cu polinomul L_n de interpolare al lui Lagrange care trece prin cele $n + 1$ puncte

$$(x_0, f(x_0)); \quad (x_1, f(x_1)); \ldots; (b, f(b))$$

a cărui expresie este

$$L_n = X_0 f(x_0) + X_1 f(x_1) + \ldots + X_n f(x_n)$$

cu

$$X_k = \frac{1}{x - x_k} \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \ldots (x_k - x_n)}.$$

Dacă înlocuim pe $f(x)$ în $\int_a^b f(x)\, dx$ cu $L_n(x)$ obținem

$$I = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \ldots (x_k - x_n)} \int_a^b \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)}{x - x_k} \, dx$$

şi am redus astfel calculul integralei definite $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ la integrarea unor polinoame. Putem să simplificăm şi mai mult rezultatul, anume să facem o schimbare de variabilă astfel încît integralele obţinute să nu depindă nici de punctele de diviziune $x_0, x_1, \ldots, x_n$ şi nici de intervalul $[a, b]$. Să punem $x = a + t(b - a)$, deci $\mathrm{d}x = (b-a)\,\mathrm{d}t$ şi

$$x_0 = a + t_0(b - a), \quad x_1 = a + t_1(b-a), \ldots, x_n = a + t_n(b-a);$$

vom avea

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = 1.$$

Avem de asemenea

$$x - x_k = (b - a)(t - t_k), \quad x_i - x_k = (b - a)(t_i - t_k),$$

astfel încît integrala I devine

$$I = \sum_{k=0}^{n} Y_k \int_0^1 T_k(t)\,\mathrm{d}t$$

unde

$$Y_k = \frac{(b - a) f(x_k)}{(t_k - t_0)(t_k - t_1)\ldots(t_k - t_{k-1})(t_k - t_{k+1})\ldots(t_k - t_n)},$$

$$T_k(t) = (t - t_0)(t - t_1)\ldots(t - t_{k-1})(t - t_{k+1})\ldots(t - t_n),$$

$T_k(t)$ fiind polinoame de grad n în t. Pentru diverse valori ale lui n s-au calculat integralele

$$\int_0^1 T_k(t)\,\mathrm{d}t = T_k'$$

şi coeficienţii

$$\frac{T_k'}{(t_k - t_0)(t_k - t_1)\ldots(t_k - t_n)} = A_k,$$

astfel încît prin intermediul acestor coeficienţi, care se găsesc în tabele anume calculate, aproximarea integralei definite se reduce la calculul sumei

$$(b - a)\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k).$$

Capitolul II

EXTINDEREA NOȚIUNII DE INTEGRALĂ DEFINITĂ

§ 1. INTEGRALE CU LIMITELE DE INTEGRARE INFINITE

1. Integrale convergente. Integrale divergente

În definiția dată integralei definite

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

am presupus că limitele a și b sînt finite, iar funcția $f(x)$ este mărginită pe $[a, b]$. Sînt cazuri cînd putem da un sens noțiunii de integrală definită, deși amîndouă sau numai una din aceste condiții nu sînt îndeplinite.

Vom considera în acest paragraf situația cînd unul sau amîndouă numerele a și b sînt infinite.

Vom avea, așadar, cazurile

$$\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x,\ \int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x,\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

și cum toate se pot reduce cu ușurință la primul, în cele ce urmează vom studia integrala sau, mai bine zis, simbolul

$$I = \int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

D e f i n i ț i e. Fie f o funcție definită pe $[a, +\infty)$, integrabilă pe $[a, A]$ pentru orice $A > a$; dacă limita

$$\lim_{A\to\infty}\int_a^{A} f(x)\,\mathrm{d}x$$

există și este finită, vom spune că integrala

$$\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

are sens sau că este convergentă, și o vom nota

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{A\to\infty}\int_a^A f(x)\,dx.$$

O integrală care nu este convergentă se spune că este divergentă sau că nu are sens.

Observație

Integrala

$$\int_a^\infty f(x)\,dx,$$

dacă este convergentă, reprezintă aria unui domeniu plan (fig. 26)

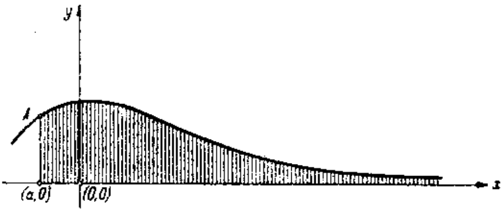

Fig. 26

domeniu care are însă puncte la infinit.

Exemple

1) Să se calculeze

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx$$

arătîndu-se mai întîi că are sens. Avem pentru $A > 1$

$$\int_0^A e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^A = 1 - e^{-A},$$

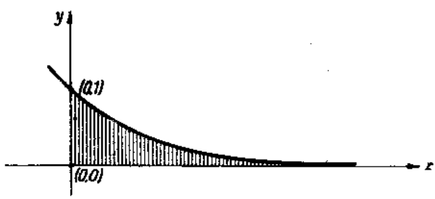

Fig. 27

însă $\lim_{A\to\infty} (1 - e^{-A}) = 1$, deci integrala are sens şi valoarea ei este 1. Din punct de vedere geometric, acest rezultat arată că aria cuprinsă între graficul exponenţialei e^{-x} (fig. 27) şi axa $Ox\ (x \geqslant 0)$ este finită şi are valoarea 1.

2) Să se calculeze

$$\int_1^\infty \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Avem

$$\int_1^A \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2}\Big|_1^A = \sqrt{1+A^2} - \sqrt{2},$$

însă $\lim_{A\to\infty} [\sqrt{1+A^2} - \sqrt{2}] = \infty$, deci integrala este divergentă; nu are sens.

3) Integrala

$$\int_0^\infty \cos x\,\mathrm{d}x$$

nu are sens. Într-adevăr

$$\int_0^A \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x\Big|_0^A = \sin A$$

şi $\lim_{A\to\infty} \sin A$ nu există.

2. Transformarea unei integrale cu limite infinite într-o serie numerică. Criterii de convergenţă

O integrală cu limite infinite poate fi transformată cu uşurinţă într-o serie numerică. Într-adevăr putem scrie

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{a+1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a+1}^{a+2} f(x)\,\mathrm{d}x + \ldots + \int_{a+n}^{a+n+1} f(x)\,\mathrm{d}x + \ldots$$

şi dacă punem

$$u_n = \int_{a+n}^{a+n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

atunci avem

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1}$$

Convergenţa integralei $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ poate fi aşadar redusă la convergența seriei $\sum\limits_{0}^{\infty} u_n$. Pentru serii numerice avem următorul *criteriu general al lui Cauchy*:

Seria $\sum\limits_{0}^{\infty} u_n$ este convergentă dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît pentru orice $n > N(\varepsilon)$ și orice $p \geqslant 1$ să avem

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon$$

(vol. I, B, cap. I, § 7, al. 2).

Transpunînd acest rezultat la seria (1) urmează că

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p} = \int_{a+n+1}^{a+n+p+1} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

însă n și p sînt arbitrare, deci numerele M și N

$$M = a + n + 1, \qquad N = a + n + p + 1$$

sînt arbitrare. Putem deci enunța următorul

Criteriu de convergență. Integrala

$$\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

este convergentă, dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $L > a$ astfel încît oricare ar fi numerele $M > L$, $N > L$ să avem

$$\left|\int_M^N f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$

Observații

1) Criteriul de convergență pentru integrale cu limite infinite enunțat corespunde *criteriului general al lui Cauchy* pentru serii.

2) Condiția din teoremă este echivalentă cu

$$\lim_{\substack{M \to \infty \\ N \to \infty}} \int_M^N f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

M și N tinzînd spre infinit independent unul de celălalt.

3) Integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{\infty} f(-x)\,\mathrm{d}x + \int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

se studiază în mod asemănător. Dacă condițiile din criteriul de mai sus nu sînt îndeplinite, se poate întîmpla ca limita

$$\lim_{N \to \infty} \int_{-N}^{N} f(x)\,\mathrm{d}x$$

să existe și să fie finită. Această limită se numește *valoarea principală* a integralei $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ și se spune că integrala este convergentă „în sensul de valoare principală".

4) O integrală nu se transformă în mod unic într-o serie. Într-adevăr, putem scrie și

$$\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^{b+1} f(x)\,\mathrm{d}x +$$

$$+ \int_{b+1}^{b+2} f(x)\,\mathrm{d}x + \ldots + \int_{b+n}^{b+n+1} f(x)\,\mathrm{d}x + \ldots$$

Exemple

1) Integrala $\int_a^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}}$, $(a > 0)$

este convergentă dacă $\alpha > 1$ și divergentă dacă $\alpha \leqslant 1$.

Avem

$$\int_M^N \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}} = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{N^{\alpha-1}} - \frac{1}{M^{\alpha-1}}\right] \to 0, \quad M \to \infty, \quad N \to \infty,$$

dacă $\alpha > 1$.

Pentru $\alpha = 1$, $\int_a^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty} \ln \frac{N}{a} = +\infty$, divergentă.

Pentru $\alpha < 1$, $\int_a^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}}\,\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{1-\alpha} x^{-\alpha+1}\Big|_0^N = +\infty$, divergentă.

2) Să se calculeze

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}.$$

$$\text{Avem } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim_{N\to\infty}\int_0^N \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} + \lim_{M\to\infty}\int_{-M}^0 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \operatorname{arc\,tg} N - \lim_{M\to\infty} \operatorname{arc\,tg}(-M) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Transformarea integralelor cu limite infinite în serii numerice permite să le studiem folosind rezultatele de la seriile numerice. Să observăm însă că, dacă $f(x)$ păstrează un semn constant pe intervalul de integrare $[a, +\infty)$, atunci seria corespunzătoare este o serie cu termeni pozitivi, iar dacă funcția $f(x)$ schimbă semnul de o infinitate de ori în intervalul de integrare $[a, +\infty)$, atunci integralei îi corespunde o serie alternată. Avem deci de considerat aceste două alternative separat.

3. Funcţia de sub semnul integral păstrează un semn constant pe $[a, +\infty)$

Să presupunem $f(x) \geqslant 0$, $x \in [a, +\infty)$, avem

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = u_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots$$

cu

$$u_n = \int_{a+n}^{a+n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

Criteriile de comparaţie de la seriile cu termeni pozitivi (vol. I, B, cap. I, § 7, al. 3) ne dau:

a) Dacă $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$, $x\ [a, \infty)$, şi dacă integrala

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

este convergentă, atunci şi integrala

$$\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$$

este convergentă.

b) Dacă $g(x) \geqslant f(x) \geqslant 0$, $x \in [a, \infty)$, şi dacă integrala

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

este divergentă, atunci şi integrala

$$\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$$

este divergentă.

c) Dacă $f(x) \geqslant 0$, $g(x) \geqslant 0$, $x \in [a, \infty)$, şi dacă integralele

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x\,,\quad \int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$$

sînt convergente, şi integrala

$$\int_a^\infty [A_1 f(x) + A_2 g(x)]\,\mathrm{d}x$$

este convergentă, oricare ar fi numerele A_1 şi A_2.

O condiţie necesară de convergenţă pentru serii este ca şirul termenilor seriei să fie convergent către zero, de unde rezultă că o condiţie necesară ca integrala $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ să fie convergentă este ca

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Condiția este numai necesară, deoarece, după cum am văzut,

$$\int_a^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}, \quad 0 < \alpha \leqslant 1, \quad a > 0$$

este divergentă, deși $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^\alpha} = 0$ dacă $0 < \alpha \leqslant 1$. O condiție *suficientă de convergență* este dată de următoarea

Teoremă. Fie $f(x)$ o funcție definită pe intervalul $[a, \infty)$, $a > 0$ și $f(x) > 0$, $x \in [a, \infty)$. Dacă

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha f(x) = A \text{ (finit)} \tag{1}$$

pentru $\alpha > 1$, atunci integrala

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

este convergentă.

Dacă $\alpha \leqslant 1$ și $A \neq 0$, integrala este divergentă.

Demonstrație. Dacă condiția (1) este îndeplinită, există un număr $M > 0$ astfel încît pentru orice $x \in [a, \infty)$ să avem

$$f(x) < \frac{M}{x^\alpha}, \qquad \alpha \leqslant 1,$$

deci

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x < M\int_a^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \frac{M}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{a^{\alpha-1}} < +\infty.$$

Dacă însă $\alpha \leqslant 1$ și $A \neq 0$, atunci există un număr $M' > 0$ astfel încît să avem

$$f(x) > \frac{M'}{x^\alpha}, \qquad \alpha \leqslant 1,$$

deci

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x > M'\int_a^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = +\infty.$$

Teorema este demonstrată.

Aplicaţii

1) Integralele de forma

$$\int_a^\infty P(x)\,e^{-\lambda^2 x}\,dx,$$

unde $P(x)$ este un polinom de x, sînt convergente.

Într-adevăr, oricare ar fi gradul polinomului $P(x)$, avem

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha P(x)\,e^{-\lambda^2 x} = 0, \quad \alpha > 1.$$

2) Integralele de funcţii raţionale

$$\int_a^\infty \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

în care $Q(x)$ nu are rădăcini în intervalul $[a, \infty)$, iar gradul numitorului este mai mare cu cel puţin două unităţi decît gradul numărătorului, au totdeauna sens, deoarece

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha \frac{P(x)}{Q(x)} = A \text{ (finit)},$$

dacă $1 < \alpha \leqslant 2$.

Exemple

1) Să se calculeze $\int_0^\infty x\,e^{-x}\,dx$. Avem, integrînd prin părţi,

$$\int_0^\infty xe^{-x}\,dx = -xe^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}\,dx = \Big[-xe^{-x} - e^{-x}\Big]_0^\infty = 1.$$

2) Să se calculeze $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2}$. Numitorul nu se anulează pe $(-\infty, +\infty)$ şi gradul numitorului depăşeşte cu patru unităţi gradul numărătorului, deci integrala are sens. Avem

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x\right]_{-\infty}^\infty = \frac{\pi}{2}\cdot$$

3) Un conductor traversat de un curent electric de intensitate I este îndoit în formă de cerc de rază a. Ştiind că forţa exercitată de curentul electric după o dreaptă perpendiculară pe planul cercului, asupra unui pol magnetic, egal cu unitatea, situat la distanţa x de centrul cercului este

$$2\pi I a^2 (a^2 + x^2)^{-\frac{3}{2}},$$

să se găsească lucrul mecanic efectuat, aducînd un pol magnetic egal cu unitatea, de la infinit pînă în centrul cercului, pe dreapta definită mai sus.

Lucrul mecanic este egal cu

$$T = \int_0^\infty \frac{2\pi I a^2}{(a^2+x^2)^{3/2}}\,dx = 2\pi I a^2 \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}};$$

Integrala are sens, deoarece gradul numitorului întrece cu trei unități gradul numărătorului. Avem, cu $x = a \operatorname{tg} \theta$,

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \,\mathrm{d}\,\theta = \frac{1}{a^2},$$

deci $T = 2\pi I$.

4. Criteriul integral al lui Cauchy

Următoarea teoremă stabilește o legătură strînsă între integralele cu limite infinite și seria numerică ce poate fi construită cu ajutorul funcției de sub semnul integral:

Criteriul integral al lui Cauchy. Fie $f(x)$ o funcție continuă, pozitivă, descrescătoare pe $[1, \infty)$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. Integrala

$$\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

este convergentă sau divergentă după cum seria

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(n) + \ldots = \sum v_n \tag{2}$$

este convergentă sau divergentă și reciproc.

Demonstrație. Avem

$$\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^{3} f(x)\,\mathrm{d}x + \ldots + \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x + \ldots$$

Dacă punem $u_n = \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$ urmează că

$$\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

Funcția $f(x)$ fiind continuă putem aplica formula mediei, deci

$$u_n = \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi_n), \quad n < \xi_n < n+1;$$

funcția $f(x)$ fiind descrescătoare avem

$$f(n) \geqslant f(\xi_n) \geqslant f(n+1),$$

prin urmare:

a) Dacă seria cu termeni pozitivi $\sum\limits_1^{\infty} v_n = \sum\limits_1^{\infty} f(n)$ este convergentă, din

$$u_n = f(\xi_n) \leqslant f(n) = v_n$$

rezultă că și seria cu termeni pozitivi $\sum_{1}^{\infty} u_n$ este convergentă, deci integrala (1) este convergentă.

b) Dacă seria $\sum_{1}^{\infty} v_n$ este divergentă, din

$$u_n = f(\xi_n) \geqslant f(n+1) = v_{n+1}$$

rezultă că și seria $\sum_{1}^{\infty} u_n$ este divergentă.

c) Dacă seria $\sum_{1}^{\infty} u_n$ este convergentă, din

$$v_{n+1} = f(n+1) \leqslant f(\xi_n) = u_n$$

rezultă că și seria $\sum_{1}^{\infty} v_n$ este convergentă.

d) Dacă seria $\sum_{1}^{\infty} u_n$ este divergentă, din

$$v_n = f(n) \geqslant f(\xi_n) = u_n$$

urmează că și seria $\sum_{1}^{\infty} v_n$ este divergentă. Teorema este demonstrată.

Observație

Deoarece natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ nu se schimbă dacă suprimăm un număr oarecare de termeni, urmează că putem înlocui în teoremă intervalul $[1, \infty)$ cu orice interval $[m, \infty)$.

Aplicație

Integrala $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{\alpha}}$ este convergentă pentru $\alpha > 1$ și divergentă pentru $\alpha \leqslant 1$.

Într-adevăr, dacă punem $\ln x = t$, $\frac{dx}{x} = dt$, obținem

$$\int_{\ln 2}^{\infty} \frac{dt}{t^{\alpha}},$$

integrală care este convergentă pentru $\alpha > 1$ și divergentă pentru $\alpha \leqslant 1$. Rezultă de aici, aplicînd criteriul integral al lui Cauchy, că seria cu termenul general

$$u_n = \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}, \; n = 2, 3, \ldots$$

numită seria lui J. Bertrand, este convergentă pentru $\alpha > 1$ și divergentă pentru $\alpha \leqslant 1$.

Exemplu

Să se arate că seria

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{n \ln n}{\sqrt{n^3+1}\,(n+1)}$$

este convergentă.

Integrala $\int_1^{\infty} \frac{x \ln x \, dx}{(x+1)\sqrt{x^3+1}}$ este convergentă, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} x^{\alpha} \frac{x \ln x}{(x+1)\sqrt{x^3+1}} = 0$, pentru $\alpha < \frac{3}{2}$ deci seria dată este convergentă.

5. Funcția de sub semnul integral schimbă semnul de o infinitate de ori în intervalul $[a, \infty)$

Să cercetăm cazul cînd funcția $f(x)$ schimbă de semn de o infinitate de ori pe intervalul $[a, \infty)$ oricare ar fi numărul real a.

Exemplu

Funcția $f(x) = x \sin x$, $x \in (-\infty, +\infty)$ schimbă semnul de o infinitate de ori în orice interval $[a, \infty)$ sau $(-\infty, b]$.

Definiții. **Fie $f(x)$, definită pe intervalul $[a, \infty)$ care schimbă semnul de o infinitate de ori pe $[a, \infty)$. Dacă integrala**

$$\int_a^{\infty} |f(x)|\, dx$$

este convergentă spunem că integrala $\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ este absolut convergentă; dacă integrala $\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ este convergentă, însă integrala

$$\int_a^{\infty} |f(x)|\, dx$$

este divergentă, spunem că integrala $\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ este simplu convergentă.

Teoremă. O integrală absolut convergentă este convergentă.

Demonstrație. Integrala

$$\int_a^{\infty} |f(x)|\, dx$$

fiind convergentă, urmează că pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr L astfel încît pentru orice numere $M > L$, $N > L$ avem

$$\int_M^N |f(x)|\, dx < \varepsilon;$$

însă avem

$$\left|\int_M^N f(x)\, dx\right| \leqslant \int_M^N |f(x)|\, dx < \varepsilon,$$

de unde rezultă și $\left|\int_M^N f(x)\, dx\right| < \varepsilon$. Teorema este demonstrată.

Exemple

1) Integralele

$$\int_0^\infty e^{-k^2x} \sin bx\, dx, \quad \int_0^\infty e^{-k^2x} \cos bx\, dx$$

sînt absolut convergente. Într-adevăr

$$\int_0^\infty |e^{-k^2x} \sin bx|\, dx \leqslant \int_0^\infty e^{-k^2x}\, dx = -\frac{1}{k^2} e^{-k^2x}\Big|_0^\infty = \frac{1}{k^2}.$$

2) Integralele

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx, \quad \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^\alpha}\, dx, \ \alpha > 1$$

sînt absolut convergente. Într-adevăr

$$\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| dx \leqslant \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \frac{1}{\alpha - 1}, \text{ dacă } \alpha > 1.$$

Observație

Integralele

$$\int_{-\infty}^\infty |f(x)|\, dx, \quad \int_a^\infty |f(x)|\, dx$$

sînt integrale cu limite infinite, cu funcția de sub semnul integral păstrînd un semn constant pe intervalul de integrare, deci convergența lor se poate stabili după cum s-a arătat la alineatele precedente.

Un criteriu de convergență simplă este dat de următoarea

Teoremă. Fie $f(x)$ o funcție definită pe $[a, \infty)$, pozitivă, descrescătoare, astfel încît

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

dacă $g(x)$ este o funcţie mărginită pe $[a, \infty)$ şi pe care schimbă semnul de o infinitate de ori; dacă pe intervalele $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$, unde

$$a) \qquad \bigcup_{0}^{\infty} [\alpha_k, \alpha_{k+1}] = [a, \infty),$$

$$b) \qquad \alpha_{k+1} - \alpha_k \leqslant l$$

$g(x)$ îndeplineşte condiţia

$$c) \quad (-1)^k \, g(x) \geqslant 0, \qquad \alpha_k \leqslant x \leqslant \alpha_{k+1}.$$

atunci integrala

$$\int_a^{\infty} f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x$$

este convergentă.

Demonstraţie. Integrala $\int_a^{\infty} f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x$ se transformă într-o serie alternată

$$\int_a^{\infty} f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \ldots + (-1)^n u_n + \ldots \quad (1)$$

cu

$$u_n = \left| \int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}} f(x)\ g(x)\ \mathrm{d}x \right|,$$

însă $|g(x)| \leqslant M$ pentru orice $x \in [a, \infty)$, deci

$$u_n \leqslant M \int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}} f(x)\, \mathrm{d}x,$$

şi pentru că $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$, pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît pentru $n > N(\varepsilon)$ să avem $f(x) < \varepsilon$, cu $\alpha_n \leqslant x \leqslant \alpha_{n+1}$, de unde rezultă că

$$u_n \leqslant M\,\varepsilon \int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}} \mathrm{d}x = M\,\varepsilon\,(\alpha_{n+1} - \alpha_n) \leqslant l\,M\varepsilon$$

şi $u_n \to 0$ cînd $n \to \infty$, deci seria (1) este convergentă conform criteriului lui Leibniz de la seriile alternate (vol. I, B, cap. I, § 7, al. 4). Teorema este demonstrată.

Aplicaţie

Integrala $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}}\, \mathrm{d}x$, $\alpha > 0$, este convergentă. Într-adevăr, dacă punem $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$, $g(x) = \sin x$, condiţiile din teoremă sînt îndeplinite, deoarece $|g(x)| \leqslant 1$ şi $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$.

Funcția schimbă semnul de o infinitate de ori pe $[1, \infty)$, anume pe intervalele $[k\pi, k\pi + \pi]$, $k = 0, 1, \ldots$.

În particular integralele

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx, \qquad \int_1^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx \tag{2}$$

sînt convergente. Dacă punem $x = t^2$, $dx = 2t\,dt$ deducem că integralele lui Fresnel

$$\int_0^\infty \sin x^2\,dx, \qquad \int_0^\infty \cos x^2\,dx$$

sînt convergente. Valoarea lor este $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

§ 2. INTEGRALE DEFINITE DE FUNCȚII NEMĂRGINITE ÎN INTERVALUL DE INTEGRARE

1. Integrale convergente. Integrale divergente

În definiția dată integralei definite

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

am presupus că funcția $f(x)$ este mărginită în intervalul $[a, b]$.

Sînt cazuri cînd putem da un sens noțiunii de integrală definită chiar dacă funcția $f(x)$ are limite infinite în puncte din intervalul $[a, b]$.

Vom studia, așadar, integrala

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{cu} \quad \lim_{x\to c} |f(x)| = +\infty,\ a \leqslant c \leqslant b.$$

Deoarece putem scrie

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_c^a f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

putem considera totdeauna că funcția $f(x)$ are limită infinită în *punctul* $x = a$, adică dreapta $x = a$ este asimptotă verticală la graficul lui $f(x)$, $a < x \leqslant b$ (fig. 28); observăm că domeniul plan care are aria reprezentată de integrala definită are și în acest caz puncte la infinit.

Definiție. **Fie f o funcție definită pe $(a, b]$ cu $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = +\infty$, integrabilă pe $[\alpha, b]$ pentru orice $\alpha > a$; dacă limita**

$$\lim_{\alpha\to a+} \int_\alpha^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

există și este finită, vom spune că integrala

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

este convergentă, sau că are sens, și vom nota

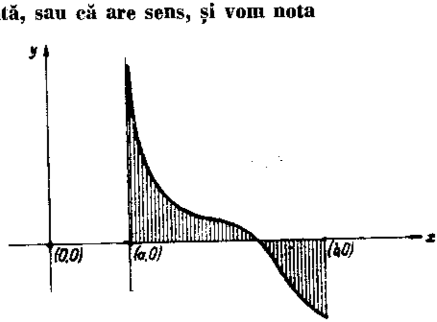

Fig. 28

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\alpha\to a+} \int_\alpha^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dacă $\lim\limits_{x\to b-} f(x) = +\infty$, atunci vom nota

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\beta\to b-} \int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}x.$$

O integrală care nu este convergentă se spune că este divergentă sau că nu are sens.

Exemple

1) Integrala $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^\lambda}$ este convergentă pentru $\lambda < 1$ și divergentă pentru $\lambda \geqslant 1$.

Avem $\int_\alpha^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^\lambda} = \frac{1}{1-\lambda}\cdot\frac{1}{(x-a)^{\lambda-1}}\Big|_\alpha^b = \frac{1}{1-\lambda}\left[\frac{1}{(b-a)^{\lambda-1}} - \frac{1}{(\alpha-a)^{\lambda-1}}\right]$,

însă

$\lim\limits_{\alpha\to a+} \frac{1}{1-\lambda}\left[\frac{1}{(b-a)^{\lambda-1}} - \frac{1}{(\alpha-a)^{\lambda-1}}\right] = \frac{1}{1-\lambda}\cdot\frac{1}{(b-a)^{\lambda-1}}$ pentru $\lambda < 1$ și $+\infty$ pentru

$\lambda>1$. Pentru $\lambda=1$

$$\int_{\alpha}^{b}\frac{dx}{x-a}=\ln|x-a|\Big|_{\alpha}^{b}\to-\infty \text{ dacă } \alpha\to a+,$$

deci și în acest caz integrala este divergentă.

2) $\int_0^1 \ln x\, dx$ este convergentă și are valoarea -1.

Avem

$$\int_{\alpha}^{1}\ln x\, dx=\Big[x\ln x-x\Big]_{\alpha}^{1}=-1+\alpha-\alpha\ln\alpha,$$

$$\text{însă} \lim_{\lambda\to 0+}\alpha\ln\alpha=0, \text{ deci} \int_0^1 \ln x\, dx=-1.$$

3) $\int_0^1 \frac{\ln x}{x}\, dx$ este divergentă.

Avem

$$\int_{\alpha}^{1}\ln x\, d(\ln x)=\frac{1}{2}\ln^2 x\Big|_{\alpha}^{1}=-\frac{1}{2}\ln^2\alpha\to-\infty \text{ dacă } \alpha\to 0+,$$

deci integrala este divergentă.

2. Transformarea într-o serie numerică. Criterii de convergență

Integrala

$$\int_a^b f(x)\, dx, \quad (b>a)$$

cu $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=+\infty$, se transformă într-o serie numerică în modul următor. Dacă $b-a>1$, putem scrie

$$\int_a^b f(x)\, dx=\int_{a+1}^{b} f(x)\, dx+\int_{a+\frac{1}{2}}^{a+1} f(x)\, dx+\ldots+\int_{a+\frac{1}{n+1}}^{a+\frac{1}{n}} f(x)\, dx+\ldots$$

și dacă punem

$$u_n=\int_{a+\frac{1}{n+1}}^{a+\frac{1}{n}} f(x)\, dx$$

atunci

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

Să aplicăm seriei $\sum\limits_1^\infty u_n$ criteriul general al lui Cauchy; avem

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p} = \int_{a+\frac{1}{n+p+1}}^{a+\frac{1}{n+1}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

și pentru că numerele n, p sînt arbitrare, numerele

$$\eta'' = \frac{1}{n+1}, \quad \eta' = \frac{1}{n+p+1}$$

sînt arbitrare. Putem deci enunța următorul

Criteriu de convergență. Integrala

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{cu} \quad \lim_{x\to a+} |f(x)| = +\infty,$$

este convergentă dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $\eta > 0$ astfel încît pentru orice $\eta' < \eta$, $\eta'' < \eta$, $\eta' > 0$, $\eta'' > 0$, să avem

$$\left|\int_{a+\eta'}^{a+\eta''} f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

Observații

1) Condiția enunțată este echivalentă cu

$$\lim_{\substack{\eta'\to 0\\ \eta''\to 0}} \int_{a+\eta'}^{a+\eta''} f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

η' și η'' tinzînd către 0 independent unul de celălalt.

2) Dacă $f(x)$ este infinită în punctul c interior intervalului $[a, b]$, atunci trebuie să avem

$$\left|\int_{c-\eta'}^{c+\eta''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

dacă $\eta' < \eta$, $\eta'' < \eta$ și $\eta' > 0$, $\eta'' > 0$, fapt echivalent cu

$$\lim_{\substack{\eta'\to 0\\ \eta''\to 0}} \int_{c-\eta'}^{c+\eta''} f(x)\,\mathrm{d}x = 0, \tag{1}$$

η' și η'' tinzînd către 0, independent unul de celălalt.

Observăm în acest caz că, dacă $f(x)$ este integrabilă pe $[a, b]$ și dacă $F(x)$ este o primitivă a lui $f(x)$, avem

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{\eta'\to 0\\ \eta''\to 0}}\left[\int_a^{c-\eta'} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c+\eta''}^b f(x)\,\mathrm{d}x\right] =$$

$$= \lim_{\substack{\eta'\to 0\\ \eta''\to 0}}\left[F(c-\eta') - F(a) + F(b) - F(c+\eta'')\right] =$$

$$= F(b) - F(a),$$

deoarece $F(x)$ este continuă pe $[a, b]$.

3) Dacă condiția (1) (observația 2) nu este îndeplinită se poate întîmpla ca limita

$$\lim_{\eta\to 0+}\left[\int_a^{c-\eta} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c+\eta}^b f(x)\,\mathrm{d}x\right]$$

să existe și să fie finită. Această limită se numește „valoarea principală în sensul lui Cauchy" a integralei

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemplu

Să se calculeze integrala definită

$$\int_{-2}^{3}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}}.$$

Funcția de sub semnul integral are limite infinite cînd $x \to 0+$ și $x \to 0-$. Avem însă

$$\int_{0-\eta'}^{0+\eta''}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\Big|_{0-\eta'}^{0+\eta''} \to 0 \text{ cînd } \eta'\to 0,\ \eta''\to 0$$

deci

$$\int_{-2}^{3}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}\,x^{\frac{2}{3}}\Big|_{-2}^{3} = \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{4})\right).$$

Și în această situație se impune discuția integralei

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \lim_{x\to a+}|f(x)| = +\infty,$$

după cum $f(x)$ păstrează un semn constant pe $(a, b]$ sau schimbă semnul de o infinitate de ori pe $(a, b]$. Această discuție o vom face în alineatele ce urmează.

3. Funcția de sub semnul integral păstrează un semn constant pe (a,b)

Să presupunem $f(x) \geqslant 0$, $x \in (a, b]$, $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = +\infty$; avem

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots, \quad b - a > 1,$$

$$u_n = \int_{a+\frac{1}{n+1}}^{a+\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0;$$

criteriile de comparație de la seriile cu termeni pozitivi ne dau:

a) Dacă $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$, $x \in (a, b]$, $\lim\limits_{x \to a+} g(x) = +\infty$ și dacă integrala

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

este convergentă, atunci și integrala

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

este convergentă.

b) Dacă $g(x) \geqslant f(x)$, $x \in (a, b]$, $\lim\limits_{x \to a+} g(x) = +\infty$ și dacă integrala

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

este divergentă, atunci și integrala

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

este divergentă.

O condiție suficientă de convergență este dată de următoarea

T e o r e m ă. Fie $f(x)$ o funcție pozitivă, definită pe intervalul $(a,b]$, cu $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = +\infty$. Dacă

$$\lim_{x \to a+} (x - a)^\alpha f(x) = A \text{ (finit)} \tag{1}$$

pentru $\alpha < 1$, atunci integrala

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

este convergentă; dacă $\alpha \geqslant 1$ și $A \neq 0$, integrala este divergentă.

Demonstrație. Dacă condiția (1) este îndeplinită, există un număr $M > 0$ astfel încît pentru orice $x \in (a, b]$ să avem

$$f(x) < \frac{M}{(x-a)^\alpha}, \qquad \alpha < 1,$$

deci

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x < M\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^\alpha} = M\frac{1}{1-\alpha}\cdot(b-a)^{1-\alpha}.$$

Dacă $\alpha \geqslant 1$ și $A \neq 0$ atunci există un număr $M' > 0$ astfel încît să avem

$$f(x) > \frac{M'}{(x-a)^\alpha}, \quad \alpha \geqslant 1,$$

deci

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > M'\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^\alpha} = M'\frac{1}{1-\alpha}\,(x-a)^{1-\alpha}\Big|_a^b = +\infty.$$

Teorema este demonstrată.

Exemple

1) Să se calculeze $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$, arătîndu-se mai întîi că are sens. Funcția de sub semnul integral are limite infinite la ambele capete ale intervalului; avem însă

$$\lim_{x\to a+}(x-a)^\alpha \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \frac{1}{\sqrt{b-a}}, \text{ pentru } \alpha = \frac{1}{2} < 1$$

și

$$\lim_{x\to b-}(b-x)^\beta \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \frac{1}{\sqrt{b-a}}, \text{ pentru } \beta = \frac{1}{2} < 1,$$

deci integrala are sens. Cu transformarea $x = a\cos^2 t + b\sin^2 t$ avem

$$x - a = (b-a)\sin^2 t,\ b - x = (b-a)\cos^2 t,\ \mathrm{d}x = 2(b-a)\sin t\cos t\,\mathrm{d}t,$$

deci

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t = \pi.$$

2) Să se arate că integrala $\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ este convergentă și are valoarea zero. Intervalul este infinit și $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln x}{1+x^2} = -\infty$. Avem

$$I = \int_0^1 \frac{\ln x}{1 + x^2}\, dx + \int_1^\infty \frac{\ln x}{1 + x^2}\, dx$$

însă

$$\lim_{x \to 0+} x^\alpha \frac{\ln x}{1 + x^2} = 0, \text{ pentru } \alpha > 0$$

și

$$\lim_{x \to \infty} x^\beta \frac{\ln x}{1 + x^2} = 0, \text{ pentru } 1 < \beta < 2,$$

deci ambele integrale au sens. Cu transformarea $x = \frac{1}{u}$ prima integrală se transformă în

$$- \int_\infty^1 \frac{1}{u^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{u^2}} \ln \frac{1}{u}\, du = - \int_1^\infty \frac{1}{1 + u^2} \ln u\, du,$$

deci

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} \ln x\, dx + \int_1^\infty \frac{1}{1 + x^2} \ln x\, dx = 0.$$

3) Să se arate că integrala

$$\int_0^1 (\ln x)^n\, dx,\ n > 0,$$

are sens. Pentru $n > 0$ avem $\lim\limits_{x \to 0+} (\ln x)^n = (-1)^n \infty$, însă

$$\lim_{x \to 0+} x^\alpha \ln^n x = \left[\lim_{x \to 0+} x^{\frac{\alpha}{n}} \ln x \right]^n = 0, \quad 0 < \alpha < 1,$$

deci integrala are sens pentru $n > 0$.

Aplicație

Integralele de forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx,$$

unde P și Q sînt două polinoame, au sens dacă gradul numitorului depășește cu cel puțin două unități gradul numărătorului și dacă numitorul are numai rădăcini imaginare. Într-adevăr, integrala poate să nu fie convergentă din cauză că intervalul este infinit, însă

$$\lim_{x \to \infty} x^\alpha \frac{P(x)}{Q(x)} = A \text{ (finit), pentru } \alpha > 1,$$

dacă gradul numitorului este mai mare cu cel puțin două unități decît gradul numărătorului.

Integrala poate să nu fie convergentă și în cazul în care $Q(x)$ se anulează în interval. Dacă a este o rădăcină reală a numitorului de ordinul λ de multiplicitate, atunci

$$\lim_{x\to a}(x-a)^{\alpha}\frac{P(x)}{(x-a)^{\lambda}Q_1(x)}=+\infty\ (\text{sau }-\infty),\ \alpha<1,$$

deoarece λ este un întreg $\geqslant 1$, prin urmare $Q(x)$ trebuie să aibă numai rădăcini imaginare.

Exemplu

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{a+bx^2+ax^4}=2\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{a+bx^2+ax^4}$$

cu $a(b+2a)>0$. Cu substituția $x=\frac{1}{t}$ devine

$$I=-2\int_{\infty}^{0}\frac{1}{t^2}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{a+\frac{b}{t^2}+\frac{a}{t^4}}=2\int_0^{\infty}\frac{t^2\,\mathrm{d}t}{a+bt^2+at^4}$$

deci

$$I=\int_0^{\infty}\frac{(1+x^2)\,\mathrm{d}x}{a+bx^2+ax^4}=\int_0^{\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b}\,\mathrm{d}x;$$

cu substituția $x\frac{1}{x}=u$, $\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$, integrala se transformă în

$$I=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}u}{au^2+b+2a}=\frac{1}{a}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^2+\frac{b+2a}{a}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a(b+2a)}}\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a}{b+2a}}\,u\Bigg|_0^{\infty}=\frac{\pi}{2\sqrt{a(b+2a)}}.$$

Dacă luăm $a=1$, $b=0$, obținem

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}};$$

dacă luăm $a=b=1$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+x^4}=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

4. Funcția de sub semnul integral schimbă semnul de o infinitate de ori pe $(a, b]$

Fie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ un şir de numere astfel încît

$$b = \alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_n > \ldots,$$

cu $\alpha_n > a$ pentru orice indice n şi $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = a$; avem

$$(a, b] = \bigcup_1^{\infty} [\alpha_k, \alpha_{k+1}].$$

Fie $f(x)$ o funcție definită pe $(a, b]$ astfel încît

$$(-1)^k f(x) \geqslant 0, \ \alpha_k \leqslant x \leqslant \alpha_{k+1},$$

şi

$$\lim_{x\to a+} |f(x)| = +\infty.$$

D e f i n i ț i e. Fie $f(x)$ o funcție definită pe $(a, b]$ care schimbă semnul de o infinitate de ori pe $(a, b]$, cu $\lim\limits_{x\to a+} |f(x)| = +\infty$. Dacă integrala

$$\int_a^b |f(x)|\, dx$$

este convergentă, spunem că integrala $\int_a^b f(x)\, dx$ este absolut convergentă.

Dacă integrala $\int_a^b f(x)\, dx$ este convergentă, însă integrala

$$\int_a^b |f(x)|\, dx$$

este divergentă, spunem că integrala $\int_a^b f(x)\, dx$ este simplu convergentă.

T e o r e m ă. O integrală absolut convergentă este convergentă. Se demonstrează la fel ca la paragraful precedent.

E x e m p l u

Integrala

$$\int_0^1 \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^\alpha}\, dx, \quad 0 < \alpha < 1,$$

este absolut convergentă. Într-adevăr

$$\left| \int_0^1 \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^\alpha}\, dx \right| \leqslant \int_0^1 \frac{\left| \sin \frac{1}{x} \right|}{x^\alpha}\, dx \leqslant \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha},$$

iar integrala ultimă este convergentă.

Pentru convergenţa simplă a integralei

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

avem următoarea

T e o r e m ă. Integrala

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_1^\infty (-1)^k u_k$$

cu

$$u_k = \left| \int_{\alpha_{n+1}}^{\alpha_n} f(x)\,dx \right|$$

este convergentă dacă

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\alpha_{n+1}}^{\alpha_n} f(x)\,dx = 0.$$

Demonstraţie. Într-adevăr, dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\alpha_{n+1}}^{\alpha_n} f(x)\,dx = 0$, urmează că seria alternată $\sum\limits_1^\infty (-1)^n u_n$ este convergentă, conform criteriului lui Leibnitz pentru seriile alternate (vol I, B, cap. I, § 7, al. 5), deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, deci şi integrala este convergentă.

E x e m p l e

1) Integrala $\int_0^\infty \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^\alpha}\,dx$ are sens pentru $0 < \alpha < 2$. Funcţia de sub semnul integral schimbă semnul de o infinitate de ori pe intervalul (0, 1], iar integrala are limite infinite.

Cu transformarea $x = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{1}{t^2}\,dt$, integrala dată se transformă în

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t^{2-\alpha}}\,dt = \int_0^1 \frac{\sin t}{t^{2-\alpha}}\,dt + \int_1^\infty \frac{\sin t}{t^{2-\alpha}}\,dt.$$

Observăm că $\sin t = t\,\varphi(t)$ cu $\varphi(t)$ mărginit între 0 şi 1, deci prima integrală din partea a doua are sens pentru $1 - \alpha < 1$ sau $\alpha > 0$.

Integrala a doua are sens dacă $2 - \alpha > 0$, deci $\alpha < 2$, prin urmare integrala

$$\int_0^\infty \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^\alpha}\,dx$$

are sens pentru $0 < \alpha < 2$. Din discuție mai rezultă că integrala

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^{\beta}} \mathrm{d}x$$

este convergentă pentru $0 < \beta < 2$.

2) Vom arăta printr-un exemplu cum o integrală definită poate să se transforme, în urma unei schimbări de variabile, fie într-o integrală cu limite infinite, fie într-o integrală de funcții nemărginite, fie succesiv în ambele tipuri.

$$I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(4 + 3x^2)\sqrt{1 - x^2}}$$

avem

$$\lim_{x \to 1-} \frac{1}{(4 + 3x^2)\sqrt{1 - x^2}} = +\infty, \text{ însă integrala are sens,}$$

deoarece

$$\lim_{x \to 1-} (1 - x)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(4 + 3x^2)\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{7\sqrt{2}}.$$

Facem schimbarea de variabilă $x = \sin t$, obținem

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{4 + 3\sin^2 t},$$

unde intervalul este finit, iar funcția de integrat este mărginită.

Dacă punem $\operatorname{tg} t = u$, avem și

$$I = \int_0^{\infty} \frac{1}{4 + 3\dfrac{u^2}{1 + u^2}} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{1 + u^2} = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{4 + 3u^2}$$

integrală cu intervalul de integrare infinit

$$I = \frac{1}{7}\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\dfrac{4}{7} + u^2} = \frac{\sqrt{7}}{14} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{7}}{2} u \Big|_0^{\infty} = \frac{\sqrt{7}}{28}\pi.$$

§ 3. INTEGRALE UNIFORM CONVERGENTE

1. Integrale cu limite infinite care depind de un parametru

Fie

$$\int_a^{\infty} f(x, y)\, \mathrm{d}x \tag{1}$$

o integrală cu limite infinite cu funcția $f(x, y)$ definită pe intervalul $[a, +\infty)\times[\alpha, \beta]$. Dacă integrala are sens pentru orice $y\in[\alpha, \beta]$, atunci integrala (1) definește o funcție de y pe $[\alpha, \beta]$,

$$F(y)=\int_a^\infty f(x, y)\,\mathrm{d}x,\ y\in[\alpha, \beta].$$

Dacă transformăm într-o serie integrala (1), atunci $F(y)$ apare ca suma unei serii de funcții

$$F(y)=u_0(y)+u_1(y)+\ldots+u_n(y)+\ldots \tag{2}$$

cu

$$u_n(y)=\int_{a+n}^{a+n+1} f(x, y)\,\mathrm{d}x.$$

a) În legătură cu seriile de funcții avem noțiunea *de convergența uniformă* pe care o reamintim:

„Fie $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ un șir de funcții definite pe intervalul $[\alpha, \beta]$. Spunem că seria de funcții

$$u_0+u_1+\ldots+u_n+\ldots$$

este uniform convergentă către funcția F pe intervalul $[\alpha, \beta]$ dacă pentru orice număr $\varepsilon>0$ există un număr $N(\varepsilon)$, astfel încît pentru orice $n>N(\varepsilon)$ să avem

$$|u_0(y)+u_1(y)+\ldots+u_n(y)-F(y)|<\varepsilon$$

oricare ar fi $y\in[\alpha, \beta]$".

Dacă transpunem la seria (2) această definiție, cu

$$u_0(y)+u_1(y)+\ldots+u_n(y)=\int_a^{a+n+1} f(x, y)\,\mathrm{d}x,$$

și punem $a+n+1=A$, obținem următoarea

Definiție. Integrala

$$\int_a^\infty f(x, y)\,\mathrm{d}x$$

este uniform convergentă pe intervalul $[\alpha, \beta]$ către funcția F dacă pentru orice număr $\varepsilon>0$ există un număr $L(\varepsilon)>a$ astfel încît să avem pentru orice $A>L(\varepsilon)$

$$\left|\int_a^A f(x, y)\,\mathrm{d}x-F(y)\right|<\varepsilon,$$

oricare ar fi $y\in[\alpha, \beta]$.

O b s e r v a ţ i e

Condiţia din definiţie este echivalentă cu

$$\left|\int_A^\infty f(x, y)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$

pentru $A > L(\varepsilon)$ şi orice $y \in [\alpha, \beta]$. În această definiţie nu intervine funcţia $F(y)$.

O condiţie suficientă de convergenţă uniformă este dată de următoarea

T e o r e m ă. Dacă există o funcţie pozitivă $g(x)$, $x \in [a, \infty)$ astfel încît

$$|f(x, y)| < g(x)$$

pentru orice $x \in [a, \infty)$ şi orice $y \in [\alpha, \beta]$ şi dacă

$$\int_a^\infty g(x)\, dx$$

este convergentă, atunci integrala

$$\int_a^\infty f(x, y)\, \mathrm{d}x \tag{1}$$

este uniform convergentă pe $[\alpha, \beta]$.

Demonstraţie. Din condiţia $|f(x, y)| < g(x)$ rezultă că seria

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\int_{a+n}^{a+n+1} f(x, y)\, \mathrm{d}x\right|$$

are majorantă seria numerică cu termeni pozitivi, convergentă,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{a+n}^{a+n+1} g(x)\, \mathrm{d}x,$$

de unde rezultă, folosind criteriile de convergenţă uniformă ale seriilor de funcţii, că integrala (1) este uniform convergentă.

b) Fie $f(x, y)$ o funcţie continuă de variabilele $x \in [a, \infty)$ şi $y \in [\alpha, \beta]$. Dacă integrala

$$\int_a^A f(x, y)\, \mathrm{d}x, \qquad A > a,$$

este convergentă cînd $A \to \infty$, atunci integrala

$$F(y) = \int_a^\infty f(x, y)\, \mathrm{d}x \tag{1}$$

reprezintă o funcție de $y \in [\alpha, \beta]$ care nu este cu necesitate continuă pe $[\alpha, \beta]$; ținînd seamă de faptul că integrala (1) se transformă într-o serie de funcții

$$u_0(y) + u_1(y) + \ldots + u_n(y) + \ldots$$

și transpunînd rezultatul corespunzător de la seriile de funcții [vol. I, B, cap. V, § 2, al. 5], avem următoarea

Teorema 1. Fie $f(x, y)$ o funcție continuă pe $[a, \infty) \times [\alpha, \beta]$. Dacă integrala

$$F(y) = \int_a^{\infty} f(x, y)\, \mathrm{d}x \tag{1}$$

este uniform convergentă pe intervalul $[\alpha, \beta]$, atunci funcția $F(y)$ definită de (1) este o funcție continuă pe $[\alpha, \beta]$.

c) Fie $f(x, y)$ o funcție continuă pe $I = [a, \infty) \times [\alpha, \beta]$ cu derivata parțială f'_y continuă pe I. Avem următoarea

Teorema 2. Dacă integrala

$$\int_a^{\infty} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, \mathrm{d}x$$

este uniform convergentă pe $[\alpha, \beta]$, atunci

$$F'(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_a^{\infty} f(x, y)\mathrm{d}x = \int_a^{\infty} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, \mathrm{d}x$$

pentru orice $y \in [\alpha, \beta]$.

Demonstrație. Seria de funcții

$$\int_a^{a+1} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, \mathrm{d}x + \int_{a+1}^{a+2} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, \mathrm{d}x + \ldots \tag{2}$$

este uniform convergentă pe intervalul $[\alpha, \beta]$, deci, folosind un rezultat corespunzător de la seriile de funcții (vol. I, B, cap. V, § 2, al. 5) și dacă scriem pe $F(y)$ în modul următor:

$$F(y) = \int_a^{a+1} f(x, y)\, \mathrm{d}x + \int_{a+1}^{a+2} f(x, y)\, \mathrm{d}x + \ldots$$

urmează că seria (2) este uniform convergentă pe $[\alpha, \beta]$ către derivata funcției $F(y)$, deci avem

$$F'(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{a+n}^{a+n+1} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, \mathrm{d}x = \int_a^{\infty} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, \mathrm{d}x.$$

Observații.

1) Formula stabilită ne dă regula de derivare a integralelor cu limite infinite, în raport cu un parametru.

2) Am considerat limita inferioară a constantă, deoarece dacă $a=a(y)$, atunci putem scrie

$$F(y)=\int_{a(y)}^{\infty} f(x, y)\mathrm{d}x=\int_{a(y)}^{b} f(x, y)\mathrm{d}x+\int_{b}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x,$$

unde b este constant. Prima integrală din partea a doua se derivează după regula de derivare a integralelor definite, iar a doua integrală din partea a doua, dacă integrala

$$\int_{b}^{\infty} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,\mathrm{d}x$$

este uniform convergentă, după regula de mai sus.

2. Integrale de funcții nemărginite care depind de un parametru

Fie

$$F(y)=\int_{a}^{b} f(x, y)\,\mathrm{d}x, \qquad \lim_{x\to a+} |f(x, y)|=+\infty \tag{1}$$

cu $f(x, y)$ definită pe $(a, b]\times[\alpha, \beta]$, convergentă pentru orice $y\in[\alpha, \beta]$. Integrala (1) poate fi transformată într-o serie de funcții

$$F(y)=u_0(y)+u_1(y)+\dots+u_n(y)+\dots$$

cu

$$u_0(y)=\int_{a+1}^{b} f(x, y)\,\mathrm{d}x, \dots, u_n=\int_{a+\frac{1}{n+1}}^{a+\frac{1}{n}} f(x, y)\mathrm{d}x, \dots$$

a) În mod asemănător ca la alineatul precedent, avem următoarea

D e f i n i ț i e. Integrala

$$\int_{a}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x, \quad \lim_{x\to a+} |f(x, y)|=+\infty,$$

cu funcția $f(x, y)$ definită pe $I=(a, b]\times[\alpha, \beta]$, este uniform convergentă către funcția F dacă pentru orice număr $\varepsilon>0$ există un număr $\eta(\varepsilon)>0$ astfel încît să avem pentru orice $0<h<\eta(\varepsilon)$

$$\left|\int_{a}^{a+h} f(x, y)\mathrm{d}x-F(y)\right|<\varepsilon,$$

oricare ar fi $y\in[\alpha, \beta]$.

Un criteriu de convergență uniformă este dat de următoarea

Teoremă. Dacă există o funcție pozitivă $g(x)$, $x \in (a, b]$ astfel încît

$$|f(x, y)| < g(x),$$

pentru orice $x \in (a, b]$ și orice $y \in [\alpha, \beta]$; dacă integrala

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

este convergentă, atunci integrala $\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x$ este uniform convergentă pe $[\alpha, \beta]$.

b) Proprietățile funcției $F(y)$, $y \in [\alpha, \beta]$,

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x$$

sînt date în următoarele două teoreme care se demonstrează în mod asemănător ca la alineatul precedent.

Teorema 1. Fie $f(x, y)$ o funcție continuă pe $(a, b] \times [\alpha, \beta]$. Dacă integrala

$$\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

este uniform convergentă pe intervalul $[\alpha, \beta]$, atunci funcția $F(y)$ definită de (1) este o funcție continuă pe $[\alpha, \beta]$.

Teorema 2. Fie $f(x, y)$ o funcție continuă cu derivata parțială f'_y continuă pe $(a, b] \times [\alpha, \beta]$. Dacă integrala

$$\int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,\mathrm{d}x$$

este uniform convergentă pe $[\alpha, \beta]$, atunci

$$F'(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,\mathrm{d}x$$

pentru orice $y \in [\alpha, \beta]$.

Aplicație

Dacă $f(x)$ este o funcție continuă pe $[0, \infty)$ și $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = M$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = N$, atunci avem

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = [M - N]\ln\frac{b}{a},\ a > 0,\ b > 0.$$

Să considerăm integrala

$$I = \int_{\varepsilon}^{A} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx = \int_{\varepsilon}^{A} \frac{f(ax)}{x}\, dx - \int_{\varepsilon}^{A} \frac{f(bx)}{x}\, dx.$$

În prima integrală din partea a doua facem substituţia $ax = t$ şi în a doua $bx = t$; avem

$$I = \int_{\varepsilon a}^{Aa} \frac{f(t)}{t}\, dt - \int_{\varepsilon b}^{Ab} \frac{f(t)}{t}\, dt = \int_{\varepsilon a}^{\varepsilon b} \frac{f(t)}{t}\, dt - \int_{Aa}^{Ab} \frac{f(t)}{t}\, dt;$$

funcţia de sub semnul integral este continuă, iar pe fiecare interval de integrare $\frac{1}{t} > 0$, **deci putem aplica formula generală a mediei pentru integrale**

$$I = f(\xi) \int_{\varepsilon a}^{\varepsilon b} \frac{dt}{t} - f(\xi') \int_{Aa}^{Ab} \frac{dt}{t} = f(\xi) \ln \frac{b}{a} - f(\xi') \ln \frac{b}{a};$$

la limită, cînd $\varepsilon \to 0$ şi $A \to \infty$, atunci $\xi \to 0$, $\xi' \to \infty$ deci

$$\int_{0}^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx = [M - N] \ln \frac{b}{a}.$$

Exemple

1) **Integrala**

$$F(a, b) = \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-a^2x^2} - e^{-b^2x^2}}{x}\, dx$$

îndeplineşte condiţiile de mai sus; valoarea ei este $\ln \frac{b}{a}$.

2) Să se arate că

$$F(a, b) = \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \sin mx\, dx = \operatorname{arctg} \frac{a}{m} - \operatorname{arctg} \frac{b}{m}.$$

Integrala este uniform convergentă pentru $0 < a < b$, deoarece este majorată de

$$\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx$$

care are sens.

Derivata în raport cu a

$$F'_a(a, b) = -\int_{0}^{\infty} e^{-ax} \sin mx\, dx$$

este uniform convergentă, deoarece este majorată de

$$\int_{0}^{\infty} e^{-ax}\, dx = \frac{1}{a}.$$

Avem

$$F_a'(a, b) = -\frac{m \cos mx + a \sin mx}{m^2 + a^2} e^{-ax} \Big|_0^\infty = \frac{m}{m^2 + a^2}$$

și

$$F_b'(a, b) = \frac{m \cos mx - b \sin mx}{m^2 + b^2} e^{-bx} \Big|_0^\infty = -\frac{m}{m^2 + b^2},$$

$$\mathrm{d}F = F_a' \,\mathrm{d}a + F_b' \,\mathrm{d}b = \frac{m \,\mathrm{d}a}{m^2 + a^2} - \frac{m \,\mathrm{d}b}{m^2 + b^2}$$

deci

$$F = \operatorname{arctg} \frac{a}{m} - \operatorname{arctg} \frac{b}{m} + C,$$

însă dacă $a = b$, din integrală rezultă cu $F(a, a) = 0$, deci $C = 0$.

3) Să se calculeze integrala

$$F(y) = \int_0^\infty e^{-xy} \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}x, \text{ unde } y > 0.$$

Integrala este uniform convergentă pentru $y > 0$, deoarece $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, deci integrala are sens pentru limita inferioară; pentru limita superioară avem

$$\lim_{x \to \infty} x^\alpha e^{-xy} \frac{\sin x}{x} = 0, \quad \alpha > 1.$$

Integrala obținută prin derivare în raport cu y este tot uniform convergentă pentru $y > 0$, deoarece

$$\left| -\int_0^\infty e^{-xy} \sin x \,\mathrm{d}x \right| < \int_0^\infty e^{-xy} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{y}.$$

Avem

$$F'(y) = -\int_0^\infty e^{-xy} \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{\cos x + y \sin x}{1 + y^2} e^{-xy} \Big|_0^\infty = \frac{-1}{1 + y^2}$$

deci

$$F(y) = C - \operatorname{Arctg} y,$$

însă

$$\lim_{y \to \infty} \int_0^\infty e^{-xy} \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}x = 0,$$

deci

$$C = \frac{\pi}{2} = \lim_{y \to \infty} \operatorname{Arctg} y, \text{ astfel încît avem}$$

$$\int_0^\infty e^{-xy} \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctg} y = \operatorname{Arctg} \frac{1}{y}, \qquad (y > 0).$$

Am arătat că $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ are sens (A, cap. II, § 2, al. 4), prin urmare avem şi

$$\lim_{y\to 0}\int_0^\infty e^{-xy}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

deoarece

$$\lim_{y\to 0}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctg} y\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Dacă înlocuim pe xy cu u obţinem

$$\int_0^\infty e^{-u}\frac{\sin\left(\frac{u}{y}\right)}{u}\,\mathrm{d}u = \operatorname{Arctg}\frac{1}{y}$$

sau

$$\int_0^\infty e^{-u}\frac{\sin(uy)}{u}\,\mathrm{d}u = \operatorname{Arctg} y, \quad y \geqslant 0.$$

3. Funcţia $\Gamma(x)$

Funcţia $\Gamma(x)$ sau funcţia de speţa a doua a lui Euler este definită de integrala

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t, \quad x > 0. \tag{1}$$

Să observăm că putem scrie

$$\Gamma(x) = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t + \int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

şi fiecare integrală din partea a doua are sens. Într-adevăr

$$\int_\eta^1 t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t < \int_\eta^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}t^x\Big|_\eta^1 = \frac{1}{x} - \frac{\eta^x}{x}$$

şi pentru $x > 0$, $\eta^x \to 0$ cînd $\eta \to 0$, deci prima integrală are sens. Pentru integrala

$$\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

avem

$$e^t > \frac{t^m}{m!}, \text{ sau } e^{-t} < \frac{m!}{t^m}$$

deci

$$t^{x-1}e^{-t} < m!\, t^{x-m-1};$$

prin urmare, dacă luăm $m > x$, oricare ar fi $A > 1$, avem

$$\int_1^A t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t < m!\int_1^A t^{x-m-1}\,\mathrm{d}t = m!\,\frac{A^{x-m}-1}{x-m}$$

sau

$$\int_1^A t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t < \frac{m!}{m-x},$$

adică integrala a doua are sens pentru $x > 0$. Domeniul de definiţie al funcţiei $\Gamma(x)$ este deci $x > 0$.

Dacă integrăm în (1) prin părţi, obţinem, după ce am înlocuit pe x cu $x+1$,

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = -t^x e^{-t}\Big|_0^\infty + x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t,$$

însă

$$-t^x e^{-t}\Big|_0^\infty = 0,$$

deci avem relaţia

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x) \tag{2}$$

numită şi *relaţia funcţională* verificată de funcţia $\Gamma(x)$. Avem şi

$$\begin{aligned}\Gamma(x+2) &= (x+1)\,\Gamma(x+1)\\ \Gamma(x+3) &= (x+2)\,\Gamma(x+2)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \Gamma(x+n+1) &= (x+n)\,\Gamma(x+n)\end{aligned}$$

sau

$$\Gamma(x+n+1) = x(x+1)\ldots(x+n)\,\Gamma(x).$$

Pentru $x = 1$ avem

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1,$$

deci

$$\Gamma(n+1) = 1\cdot 2\ldots n = n!$$

adică funcţia $\Gamma(x)$, pentru $n = 1, 2, \ldots$ ia valorile $(n-1)!$, iar pentru $x > 0$, $x \neq n$, extrapolează factorialul.

Pentru $x = \frac{1}{2}$ avem

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-x}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

Integrala $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ o vom calcula la A, cap. IV, § 1, al. 9.

Exerciţii. 1) Să se calculeze $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$.

Avem

$$\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$\Gamma\left(2+\frac{1}{2}\right)=\left(1+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right),$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\left(n-1+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-1+\frac{1}{2}\right),$$

deci

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1.\ 3.\ 5\ \ldots\ (2n-1)}{2^n}\cdot\sqrt{\pi}.$$

2) Să se arate că

$$\int_0^\infty e^{-t^x}\,dt=\Gamma\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

Dacă punem $t^x=u$, $du=xt^{x-1}\,dt$, $dt=\frac{1}{x}\cdot u^{\frac{1}{x}-1}\,du$,

$$\int_0^\infty e^{-t^x}\,dt=\frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-u}u^{\frac{1}{x}-1}\cdot du=\frac{1}{x}\Gamma\left(\frac{1}{x}\right)=\Gamma\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

Capitolul III

INTEGRALE CURBILINII

§ 1. INTEGRALE CURBILINII. PROPRIETĂŢI

1. Definiţia integralei curbilinii

Integrala curbilinie este o extindere a integralei definite, în sensul că intervalul de integrare $[a, b]$ se înlocuieşte cu un arc de curbă $\overset{\frown}{AB}$.

Aplicaţiile practice ale integralei curbilinii sînt foarte variate; din această cauză vom introduce noţiunea de integrală curbilinie pornind de la o problemă fizică.

Lucrul mecanic efectuat de o forţă constantă $\overline{F}$ într-o deplasare rectilinie $\overline{AB}$ este produsul scalar

$$L = \overline{F} \cdot \overline{AB} = F \cdot AB \cdot \cos \theta,$$

θ fiind unghiul pe care îl face forţa $\overline{F}$ cu direcţia orientată $\overline{AB}$ (fig. 29).

Dacă $\overline{F}$ are componentele X, Y, Z, iar A şi B au coordonatele (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) respectiv, atunci,

$$L = (x_2 - x_1) X + (y_2 - y_1) Y + (z_2 - z_1) Z \tag{1}$$

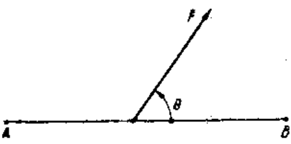

Fig. 29

sau, dacă notăm cu $\overline{r}_1$ şi $\overline{r}_2$ vectorii de poziţie ai punctelor A şi B

$$L = \overline{F} \cdot (\overline{r}_2 - \overline{r}_1).$$

Fie C o curbă în spaţiu de ecuaţii parametrice

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t)$$

cu f, g, h continue şi cu derivatele de ordinul întîi continue într-un interval $[a, b]$; o astfel de curbă se numeşte *curbă netedă*.

Pentru $a \leqslant t \leqslant b$ punctul (x, y, z) descrie arcul $\overset{\frown}{AB}$, de la A la B.

Fie $\overline{F}(x, y, z)$ o funcție vectorială de trei variabile scalare x, y, z

$$\overline{F} = \overline{i}X(x,y,z) + \overline{j}\,Y(x,y,z) + \overline{k}\,Z(x,y,z)$$

cu componentele X, Y, Z definite pe arcul AB. Ne propunem să calculăm lucrul mecanic $\mathcal{L}$ efectuat de forța $\overline{F}$ de-a lungul arcului AB. Pentru aceasta vom împărți arcul AB în n subarce cu ajutorul punctelor de diviziune $A = M_0, M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}, M_n = B$ de coordonate (x_0, y_0, z_0), $(x_1, y_1, z_1), \ldots, (x_n, y_n, z_n)$, respectiv (fig. 30). Punctele $M_0, M_1, \ldots, M_n$

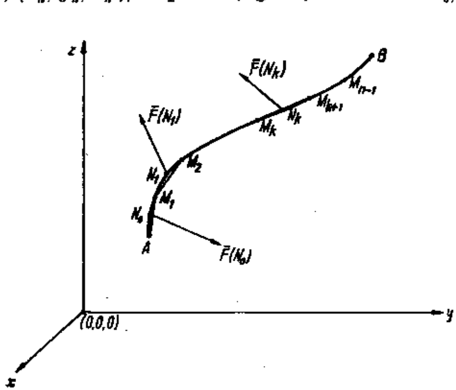

Fig. 30

formează o diviziune d a arcului AB. Numim normă a diviziunii d numărul $\nu(d) = \max |M_kM_{k+1}|$, $k=0, 1, \ldots, n-1$, și unde am notat $|M_kM_{k+1}|$ lungimea segmentului M_kM_{k+1}.

Pe fiecare subarc M_kM_{k+1} luăm un punct arbitrar $N_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$; valoarea funcției $\overline{F}$ în punctul N_k este

$$\overline{F}(N_k) = \overline{i}X(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) + \overline{j}\,Y(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) + \overline{k}Z(\xi_k, \eta_k\,\zeta_k).$$

Lucrul mecanic $\mathcal{L}$ efectuat de forța variabilă $\overline{F}$ de-a lungul arcului AB îl vom aproxima cu suma $\mathcal{L}_n$

$$\mathcal{L}_n = \overline{F}(N_0)\,\overline{M_0M_1} + \overline{F}(N_1)\,\overline{M_1M_2} + \ldots + \overline{F}(N_{n-1})\,\overline{M_{n-1}M_n},$$

adică cu suma lucrului mecanic efectuat de forțele constante $\overline{F}(N_k)$ pe segmentele M_kM_{k+1}, $k=0, 1, \ldots, n-1$; deci, folosind pe (1)

$$\mathcal{L}_n = \sum_{k=0}^{n-1} [X(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)(x_{k+1} - x_k) + Y(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)(y_{k+1} - y_k) +$$

$$+ Z(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)(z_{k+1} - z_k)].$$

Definiție. Fie (d_n) un şir de diviziuni ale arcului AB cu $\nu(d_n) \to 0$.

Numim integrala curbilinie a funcției vectoriale $\overline{F}(x, y, z)$ de-a lungul arcului AB, limita

$$\mathcal{L} = \lim_{\nu(d_n) \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} [X(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)(x_{k+1} - x_k) + Y(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)(y_{k+1} - y_k) + $$
$$+ Z(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)(z_{k+1} - z_k)]$$

dacă această limită există şi este finită, oricare ar fi alegerea punctelor (ξ_k, η_k, ζ_k) şi oricare ar fi şirul (d_n) cu $\nu(d_n) \to 0$. Limita însăşi se notează

$$\int_{AB} X(x, y, z)\,\mathrm{d}x + Y(x, y, z)\,\mathrm{d}y + Z(x, y, z)\,\mathrm{d}z$$

şi reprezintă din punct de vedere fizic lucrul mecanic efectuat de forța variabilă $\overline{F}(x, y, z)$ de-a lungul arcului AB.

Observații

1) Dacă punem $\bar{i}\,\mathrm{d}x + \bar{j}\,\mathrm{d}y + \bar{k}\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}\bar{r}$, unde $\bar{r}$ este vectorul de poziție $\bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z$, atunci integrala curbilinie se scrie

$$\int_{AB} \overline{F} \cdot d\bar{r}.$$

2) În definiția dată AB este un arc de curbă. Dacă AB este o curbă închisă C, atunci se folosesc notațiile

$$\int_{C} \overline{F}\, d\bar{r} \quad \text{sau} \quad \oint_{C} \overline{F}\, \mathrm{d}\bar{r},$$

notații care au însă dezavantajul că nu ne dau punctul de plecare de pe curba C.

2. Modul de calcul al integralei curbilinii

Regula de calcul a unei integrale curbilinii este dată de următoarea

Teoremă. Fie AB un arc de curbă de ecuații parametrice

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t), \quad a \leqslant t \leqslant b$$

cu f, g, h funcții continue cu derivate de ordinul întîi continue pe $[a, b]$. Dacă $\overline{F}(x, y, z) = \bar{i}\, X(x, y, z) + \bar{j}\, Y(x, y, z) + \bar{k} Z(x, y, z)$ este o func-

ție vectorială de variabilele scalare x, y, z, cu componentele X, Y, Z continue pe arcul AB, atunci are loc egalitatea

$$\int_{AB} X(x, y, z)\,\mathrm{d}x + Y(x, y, z)\,\mathrm{d}y + Z(x, y, z)\,\mathrm{d}z =$$

$$= \int_a^b \{X[f(t), g(t), h(t)]\,f'(t) + Y[f(t), g(t), h(t)]\,g'(t) +$$

$$+ Z[f(t), g(t), h(t)]\,h'(t)\}\,\mathrm{d}t.$$

Demonstrație. Fie $M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}, M_n$ o diviziune d a arcului AB; acestei diviziuni îi corespunde, pe axa Ot, diviziunea d'

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$$

astfel încît avem pentru $k = 0, 1, \ldots, n-1$

$$x_k = f(t_k),\ y_k = g(t_k),\ z_k = h(t_k).$$

Să considerăm suma

$$\sum_{k=0}^{n-1} [X(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)(x_{k+1} - x_k) + Y(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)(y_{k+1} - y_k) +$$

$$+ Z(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)(z_{k+1} - z_k)]$$

și pentru cele ce urmează numai pe prima din ele

$$\sum_{k=0}^{n-1} X(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)(x_{k+1} - x_k);$$

avem

$$x_{k+1} - x_k = f(t_{k+1}) - f(t_k) = (t_{k+1} - t_k) f'(\theta_k),\ t_k < \theta_k < t_{k+1};$$

am folosit formula creșterilor finite a lui Lagrange, deoarece f este derivabilă. Avem

$$\xi_k = f(\tau_k),\ \eta_k = g(\tau_k),\ \zeta_k = h(\tau_k), \quad t_k < \tau_k < t_{k+1},$$

deci

$$\sum_{k=0}^{n-1} X(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)(x_{k+1} - x_k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} X[f(\tau_k), g(\tau_k), h(\tau_k)]\ f'(\theta_k)(t_{k+1} - t_k).$$

Derivata $f'(t)$ fiind continuă este și uniform continuă pe $[a, b]$, deci pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există $\eta(\varepsilon) > 0$ astfel încît să avem

$$|f'(\theta_k) - f'(\tau_k)| < \varepsilon$$

pentru orice θ_k, $\tau_k \in [a, b]$ dacă $|\theta_k - \tau_k| < \eta(\varepsilon)$.

Funcţia X fiind continuă este mărginită, deci

$$|X| < A$$

pentru orice $(x, y, z) \in \overline{AB}$, deci orice $t \in [a, b]$.

Ţinînd seamă de aceste date urmează că pentru o diviziune d' a intervalului $[a, b]$ astfel încît $\nu(d') < \eta(\varepsilon)$, avem

$$\sum_{k=0}^{n-1} X(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\,(x_{k+1} - x_k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} X[f(\tau_k), g(\tau_k), h(\tau_k)]\, f'(\tau_k)\,(t_{k+1} - t_k) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} X[f(\tau_k), g(\tau_k), h(\tau_k)]\,[f'(\theta_k) - f'(\tau_k)]\,(t_{k+1} - t_k);$$

ultimul termen din partea a doua fiind majorat de

$$A \cdot \varepsilon\,(b - a);$$

urmează că dacă (d_n) este un şir de diviziuni astfel încît $\nu(d_n) \to 0$, atunci putem scrie

$$\lim_{\nu(d_n)\to 0} \sum_{k=0}^{\infty} X(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\,(x_{k+1} - x_k) = \int_a^b X[f(t), g(t), h(t)]\, f'(t)\, dt$$

conform definiţiei integralei definite, observîndu-se că suma

$$\sum_{k=0}^{n-1} X[f(\tau_k), g(\tau_k), h(\tau_k)]\, f'(\tau_k)\,(t_{k+1} - t_k)$$

este o sumă Riemann, iar funcţia

$$X[f(t), g(t), h(t)]\, f'(t)$$

este integrabilă Riemann, deoarece, conform ipotezelor făcute, este o funcţie continuă.

În mod asemănător obţinem şi

$$\lim_{\nu(d_n)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} Y(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\,(y_{k+1} - y_k) = \int_a^b Y[f(t), g(t), h(t)]\, g'(t)\, dt,$$

$$\lim_{\nu(d_n)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} Z(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\,(z_{k+1} - z_k) = \int_a^b Z[f(t), g(t), h(t)]\, h'(t)\, dt;$$

prin însumare obţinem formula din enunţ. Teorema este demonstrată.

O b s e r v a ţ i i

1) Rezultatul obţinut este valabil nu numai pentru un arc de curbă, ci şi pentru o curbă închisă.

2) Conform teoremei demonstrate, calculul integralei curbilinii pe arcul AB se reduce la calculul integralei *rectilinii* pe segmentul $[a, b]$ al axei Ot.

3) Formula demonstrată arată că integrala definită se obţine din integrala curbilinie

$$\int_{AB} X(x, y, z)\, \mathrm{d}x + Y(x, y, z)\, \mathrm{d}y + Z(x, y, z)\, \mathrm{d}z$$

punînd

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t),$$
$$\mathrm{d}x = f'(t)\, \mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}y = g'(t)\, \mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}z = h'(t)\, \mathrm{d}t,$$

cu limitele a şi b capetele intervalului de variaţie al lui t.

4) O integrală curbilinie nu poate fi calculată decît după ce este

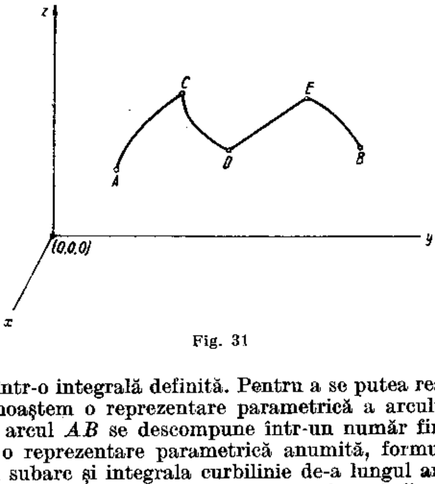

Fig. 31

transformată într-o integrală definită. Pentru a se putea realiza acest fapt trebuie să cunoaştem o reprezentare parametrică a arcului AB.

5) Dacă arcul AB se descompune într-un număr finit de subarce, fiecare avînd o reprezentare parametrică anumită, formula obţinută se aplică fiecărui subarc şi integrala curbilinie de-a lungul arcului AB este definită ca suma integralelor curbilinii de-a lungul fiecărui subarc în parte (fig. 31)

$$\int_{AB} = \int_{AC} + \int_{CD} + \int_{DE} + \int_{EB} \cdot$$

Exemple

1) Să se calculeze integrala curbilinie

$$I = \int_{AB} \mathrm{d}x - x\, \mathrm{d}y + (x^2 + y^2)\, \mathrm{d}z$$

pe arcul de elice $x = a \cos t,\ y = a \sin t,\ z = ht,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Deoarece ne este dată reprezentarea parametrică putem scrie

$$I = \int_0^{2\pi} [-a \sin t - a^2 \cos^2 t + a^2 h] \, dt =$$

$$= \left[a \cos t - a^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t \right) + a^2 ht \right]_0^{2\pi} = \pi a^2 [2h + 1].$$

2) Să se calculeze integrala curbilinie

$$\int_C x \, dy - z \, dy + y \, dz$$

de-a lungul curbei de intersecție dintre planul $z = h$, $(h < c)$ și elipsoidul

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Trebuie să găsim o reprezentare parametrică a curbei de intersecție care este o elipsă în planul $z = h$. Avem

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}, \quad z = h,$$

R

deci elipsa de intersecție are reprezentarea parametrică

$$x = \frac{a}{c} \sqrt{c^2 - h^2} \cos t, \quad y = \frac{b}{c} \sqrt{c^2 - h^2} \sin t, \ z = h$$

cu $0 \leqslant t < 2\pi$; prin urmare

$$I = \int_0^{2\pi} \left[\frac{ab}{c^2} \ (c^2 - h^2) \cos^2 t - h \frac{b}{c} \sqrt{c^2 - h^2} \cos t \right] dt =$$

$$= \frac{ab}{c^2} (c^2 - h^2) \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right) \Bigg|_0^{2\pi} - h \frac{b}{c} \sqrt{c^2 - h^2} \sin t \Bigg|_0^{2\pi} = \frac{\pi ab}{c^2} (c^2 - h^2).$$

3) Să se calculeze integrala curbilinie

$$I_L = \int_L \frac{x \, dx}{(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2} + \frac{y \ dy}{(x^2 - y^2 + z^2 + 1)^2} + \frac{z \ dz}{(x^2 + y^2 - z^2 + 1)^2},$$

L fiind semiaxa negativă OX', prelungită din origine, cu prima bisectoare a axelor (fig. 32)

Ecuațiile drumului de integrare L sînt

$$(L) \begin{cases} y = 0, \ z = 0, \ x \leqslant 0, & (L_1) \\ x = y = z, \ x \geqslant 0, & (L_2) \end{cases}$$

deci integrala o vom descompune în suma a două integrale curbilinii pe L_1 și L_2

$$\int_L = \int_{L_1} + \int_{L_2};$$

avem

$$I_L = \int_{-\infty}^{0} \frac{x\ \mathrm{d}x}{(x^3+1)^2} + \int_0^{\infty} \left[\frac{x}{(3x^2+1)^2} + \frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{x}{(x^2+1)^2} \right] \mathrm{d}x$$

$$I = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1} \Big|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3x^2+1} \Big|_{0}^{\infty} - \frac{1}{x^2+1} \Big|_{0}^{\infty} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + 1 = \frac{2}{3} \cdot$$

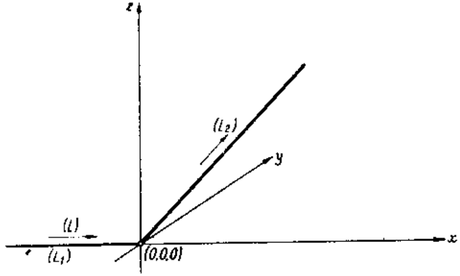

Fig. 32

Regula de calcul a unei integrale curbilinii arată că valoarea unei integrale curbilinii depinde de funcţia vectorială $\overline{F}$, de drumul de integrare AB, de sensul de parcurs pe drumul de integrare. Aparent depinde şi de reprezentarea parametrică a arcului AB. Avem însă următoarea

T e o r e m ă. Valoarea integralei curbilinii

$$\int_{AB} X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y + Z\,\mathrm{d}z \tag{1}$$

nu depinde de reprezentarea parametrică a arcului AB, sau, oricare ar fi reprezentarea parametrică a arcului AB, valoarea integralei curbilinii (1) rămîne aceeaşi.

Demonstraţie. Fie $x = f(t),\ y = g(t),\ z = h(t),\ t \in [a,\ b]$ ecuaţiile arcului AB, cu $f,\ g,\ h$ continue şi cu derivate de ordinul întîi continue. Orice reprezentare parametrică a arcului AB se obţine prin substituţia $t = \varphi(u),\ t \in [a,\ b],\ u \in [\alpha,\ \beta]$ cu $\varphi(u)$ continuă şi cu derivată continuă pe $[\alpha,\ \beta]$, deci

$$x = f(\varphi(u)),\quad y = g(\varphi(u)),\quad z = h(\varphi(u)),\quad u \in [\alpha,\ \beta].$$

Faţă de prima reprezentare parametrică, integrala curbilinie

$$\int_{AB} X(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}x$$

are valoarea

$$\int_a^b X\,[f\,(t),\ g\,(t),\ h\,(t)]\,f'\,(t)\ \mathrm{d}t\,; \tag{2}$$

față de a doua reprezentare parametrică, aceeași integrală curbilinie are valoarea

$$\int_\alpha^\beta X\,[f\,(\varphi\,(u)),\ g\,(\varphi\,(u)),\ h\,(\varphi\,(u))]\ f'_\varphi\,\varphi'\ \mathrm{d}u\,;$$

cele două valori sînt egale, deoarece, dacă, în integrala definită (2) facem schimbarea de variabilă $x = \varphi\,(u)$, avem egalitatea

$$\int_a^b X\,[f\,(t),\ g\,(t),\ h\,(t)]\,f'\,(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_\alpha^\beta X\,[f(\varphi\,(u)),\ g\ (\varphi\,(u)),\ h\ (\varphi\ (u))]\ f'_\varphi\ \varphi'\,\mathrm{d}u$$

după regula schimbării de variabile la integrala definită. (A, cap. 1, § 4, al. 3). Teorema este demonstrată.

Exemplu

Să se calculeze integrala curbilinie

$$I = \int_{AB} \frac{\mathrm{d}x}{y} - z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z$$

pe arcul AB definit de $x = z^2$, $y = z^3$, $1 \leqslant z \leqslant 2$. Dacă punem $z = t$, obținem următoarea reprezentare parametrică a arcului AB

$$x = t^2,\quad y = t^3,\quad z = t,\quad 1 \leqslant t \leqslant 2,$$

deci

$$I = \int_1^2 \left(\frac{2t}{t^3} - 3t^3 + t^2\right)\mathrm{d}t = -\frac{2}{t} - \frac{3}{4}t^4 + \frac{t^3}{3}\Bigg|_1^2 =$$

$$= -1 - 12 + \frac{8}{3} + 2 + \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = -11 + \frac{37}{12}\cdot$$

Dacă punem $z = t^2$, obținem o altă reprezentare parametrică a arcului AB

$$x = t^4,\quad y = t^6,\quad z = t^2,\quad t \in [1,\ \sqrt{2}],$$

$$I = \int_1^{\sqrt{2}} \left(\frac{4}{t^3} - 6t^7 + 2t^5\right)\mathrm{d}t = -\frac{2}{t^2} - \frac{3}{4}t^8 + \frac{1}{3}t^6\Bigg|_1^{\sqrt{2}} =$$

$$= -\frac{2}{2} - \frac{3}{4}16 + \frac{8}{3} + 2 + \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = -11 + \frac{37}{12},$$

adică același rezultat.

3. Integrala curbilinie în plan

Integrala curbilinie în plan se defineşte în mod asemănător cu integrala curbilinie din spaţiu.

Fie AB un arc de curbă plană, de ecuaţii parametrice

$$x = f(t),\ y = g(t),\ a \leqslant t \leqslant b$$

şi $\mathbf{F}(x, y)$ o funcţie vectorială de două variabile scalare x, y

$$\overline{\mathbf{F}}(x, y) = \bar{i}\, X(x, y) + \bar{j}\, Y(x, y).$$

Dacă d este o diviziune $A = M_0, M_1, \ldots, M_n = B$, a arcului AB, lucrul mecanic $\mathcal{L}$ efectuat de forţa variabilă $\overline{\mathbf{F}}$ de-a lungul arcului AB îl aproximăm cu suma

$$\mathcal{L}_n = \sum_{k=0}^{n-1} [X(\xi_k, \eta_k)(x_{k+1} - x_k) + Y(\xi_k, \eta_k)(y_{k+1} - y_k)]$$

unde $N_k(\xi_k, \eta_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ sînt n puncte situate pe subarcele $M_k M_{k+1}$, respectiv.

D e f i n i ţ i e. Fie (d_n) un şir de diviziuni ale arcului plan AB cu $\nu(d_n) \to 0$. Numim integrala curbilinie a funcţiei vectoriale $\overline{F}(x, y)$ de-a lungul arcului AB limita

$$\mathcal{L} = \lim_{\nu(d_n) \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} [X(\xi_k, \eta_k)(x_{k+1} - x_k) + Y(\xi_k, \eta_k)(y_{k+1} - y_k)]$$

dacă această limită există şi este finită. Limita însăşi se notează

$$\int_{AB} X(x, y)\,\mathrm{d}x + Y(x, y)\,\mathrm{d}y$$

şi reprezintă, din punct de vedere fizic, lucrul mecanic efectuat de forţa $\overline{F}$ de componente X, Y de-a lungul arcului AB.

Punctele $N_k(\xi_k, \eta_k)$ sînt arbitrare pe subarcele $M_k M_{k+1}$; limita $\mathcal{L}$ trebuie să fie aceeaşi pentru orice puncte N_k situate pe arcele $M_k M_{k+1}$ şi pentru orice şir de diviziuni (d_n) cu $\nu(d_n) \to 0$.

Modul de calcul al unei integrale curbilinii în plan este dat de următoarea:

T e o r e m ă. Fie AB un arc de curbă plană de ecuaţii parametrice

$$x = f(t),\ y = g(t),\ a \leqslant t \leqslant b,$$

cu f şi g, funcţii continue cu derivate de ordinul întîi continue pe $[a, b]$.

Dacă $\overline{F}(x, y) = \bar{i}\, X(x, y) + \bar{j}\, Y(x, y)$ este o funcţie vectorială de variabilele scalare x, y cu componentele X, Y continue într-un domeniu D care conţine arcul AB, atunci are loc egalitatea

$$\int_{AB} X(x, y)\,\mathrm{d}x + Y(x, y)\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_a^b X\{[f(t), g(t)]\, f'(t) + Y[f(t), g(t)]\, g'(t)\}\,\mathrm{d}t.$$

Demonstrația se face la fel ca la integralele curbilinii în spațiu.

Observații

1) Valoarea integralei curbilinii nu depinde de reprezentarea parametrică aleasă.

2) Dacă arcul AB are ecuația $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, atunci putem lua $x = t$, $y = f(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, deci

$$\int_{AB} X(x, y)\,\mathrm{d}x + Y(x, y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b [X(t, f(t)) + Y(t, f(t))\,f'(t)]\,\mathrm{d}t.$$

3) Dacă $\bar{r} = \bar{i}x + \bar{j}y$ este vectorul de poziție al unui punct (x, y), avem

$$X(x, y)\,\mathrm{d}x + Y(x, y)\,\mathrm{d}y = \bar{F}\,\mathrm{d}\bar{r},$$

astfel încît și pentru integralele curbilinii din plan putem scrie

$$\int_{AB} X(x, y)\,\mathrm{d}x + Y(x, y)\,\mathrm{d}y = \int_{AB} \bar{F}\cdot\mathrm{d}\bar{r}.$$

Exemple

1) Să se calculeze $I = \int_{AB} x^3\,\mathrm{d}y - y^3\,\mathrm{d}x$ pe arcul de elipsă de semiaxe a, b, din primul cadran.

Elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ are o reprezentare parametrică dată de $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $0 \leqslant t < 2\pi$. Arcul AB din primul cadran, parcurs de la $A(a, 0)$ la $B(0, b)$ se obține pentru $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$. Avem

$$\mathrm{d}x = -a\sin t\,\mathrm{d}t,\quad \mathrm{d}y = b\cos t\,\mathrm{d}t,$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^3 b\cos^4 t + b^3 a\sin^4 t)\,\mathrm{d}t = a^3 b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\,\mathrm{d}t + ab^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\,\mathrm{d}t$$

și folosind formulele lui Wallis avem

$$I = ab(a^2 + b^2)\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{16}\cdot ab(a^2 + b^2).$$

Integrala are o semnificație geometrică, anume $\frac{1}{3} I$ reprezintă momentul de inerție polar al plăcii plane omogene definită de $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b} \leqslant 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

2) Să se calculeze integrala curbilinie

$$I = \int_L \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^4 - y^4}$$

de-a lungul arcului L de hiperbolă echilateră $x^2 - y^2 = a^2$ situat în primul cadran. Hiperbola echilateră dată are reprezentarea parametrică $x = a\,\mathrm{ch}t$, $y = a\,\mathrm{sh}t$ și arcul L se parcurge dacă $0 \leqslant t < \infty$ (fig. 33).

Avem $\mathrm{d}x = a \operatorname{sh} t \, \mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y = a \operatorname{ch} t \, \mathrm{d}t$,

$$I = \int_0^{\infty} \frac{a^2 (\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t) \, \mathrm{d}t}{a^4 (\operatorname{ch}^4 t - \operatorname{sh}^4 t)} = \frac{1}{a^2} \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t} = \frac{1}{a^2} \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}(\operatorname{th} t)}{1 + \operatorname{th}^2 t},$$

$$I = \frac{1}{a^2} \cdot \operatorname{arctg} (\operatorname{th} t) \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{4a^2}.$$

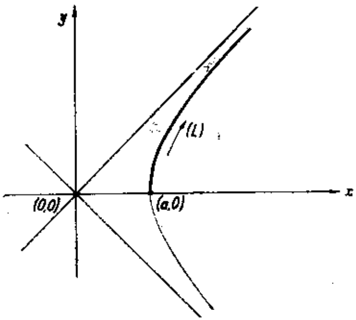

Fig. 33

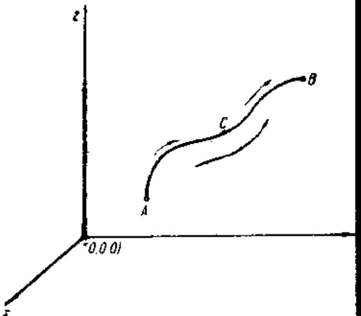

Fig. 34

3) Să se calculeze integrala curbilinie

$$\int_L \frac{\mathrm{d}x}{y^4 + y^2 + 1}$$

pe arcul L de parabolă $y^2 = 2x$ din primul cadran.

O reprezentare parametrică a arcului de parabolă L este

$$x = t, \quad y = \sqrt{2t}, \quad 0 \leqslant t < \infty,$$

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{4 + t^2 + 2t + 1} = \frac{1}{4} \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{16}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{4t + 1}{\sqrt{3}} \Big|_0^{\infty} =$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Fie $x = 2t^2$, $y = 2t$, $0 \leqslant t < \infty$ o altă reprezentare a arcului L. Avem

$$I = \int_0^{\infty} \frac{4t \, \mathrm{d}t}{16 \, t^4 + 4t^2 + 1} = 2 \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{16u^2 + 4u + 1} = \frac{1}{8} \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\left(u + \frac{1}{8}\right)^2 + \frac{3}{64}},$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{8u + 1}{\sqrt{3}} \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}},$$

adică același rezultat.

4. Proprietățile integralelor curbilinii

Am văzut că o integrală curbilinie se exprimă cu ajutorul integralei definite

$$\int_{BA} \overline{F} \cdot d\overline{r} = \int_a^b \Phi(t)\, dt$$

de unde rezultă următoarele proprietăți pentru integrala curbilinie (în plan sau în spațiu)

a) $$\int_{AB} \overline{F} \cdot d\overline{r} = -\int_{BA} \overline{F} \cdot d\overline{r}.$$

b) Dacă C este un punct pe arcul AB, avem (fig. 34)

$$\int_{AB} \overline{F} \cdot d\overline{r} = \int_{AC} \overline{F} \cdot d\overline{r} + \int_{CB} \overline{F} \cdot d\overline{r}$$

sau

$$\int_{AB} \overline{F} \cdot d\overline{r} + \int_{BC} \overline{F} \cdot d\overline{r} + \int_{CA} \overline{F} \cdot d\overline{r} = 0,$$

oricare ar fi punctele A, B, C pe drumul de integrare L.

c) Dacă funcțiile $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$ sînt integrabile pe arcul AB, atunci și suma $\overline{F}_1 + \overline{F}_2$ este integrabilă pe AB și

$$\int_{AB} (\overline{F}_1 + \overline{F}_2)\, d\overline{r} = \int_{AB} \overline{F}_1 \cdot d\overline{r} + \int_{AB} \overline{F}_2 \cdot d\overline{r}.$$

d) Dacă funcția $\overline{F}$ este integrabilă pe AB, iar $\lambda \in R$, atunci

$$\int_{AB} \lambda \overline{F} \cdot d\overline{r} = \lambda \int_{AB} \overline{F} \cdot d\overline{r}.$$

e) Dacă Γ este un contur închis, iar $\overline{F}$ are componentele continue cu derivate parțiale continue într-un domeniu D care conține curba Γ, atunci integrala curbilinie

$$\int \overline{F} \cdot d\overline{r}$$

nu depinde de punctul de plecare de pe curba Γ.

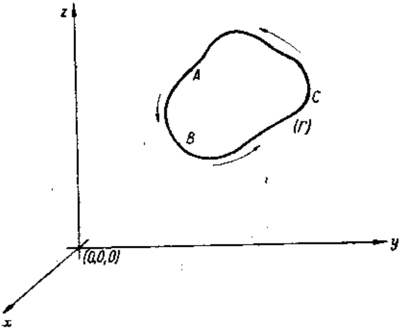

Fig. 35

Într-adevăr (fig. 35), oricare ar fi punctele A, B, C de pe Γ, conform proprietăţii (*b*) avem

$$\int_{AB}+\int_{BC}+\int_{CA}=\int_{BC}+\int_{CA}+\int_{AB}=\int_{CA}+\int_{AB}+\int_{BC}=\int_{\Gamma}$$

5. Integrale curbilinii care nu depind de drumul de integrare

Integrala curbilinie

$$\int_{AB} P(x, y, z)\,\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\,\mathrm{d}y + R(x, y, z)\,\mathrm{d}z \tag{1}$$

depinde de funcţiile P, Q, R, de arcul de curbă Γ care uneşte punctele A şi B şi de sensul de parcurs pe arcul AB. Ne ocupăm acum de condiţiile ce trebuie îndeplinite pentru ca integrala (1) să nu depindă de drum, adică să nu depindă de curba Γ (curbă formată dintr-o reuniune de arce netede), care leagă punctele A, B (oarecare), ci numai de aceste puncte. Aceste condiţii sînt date de următoarea

Teoremă. Fie D un domeniu în spaţiu în care funcţiile P, Q, R, sînt continue. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca integrala curbilinie

$$\int_{AB} P(x, y, z)\,\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\,\mathrm{d}y + R(x, y, z)\,\mathrm{d}z$$

să nu depindă de drum în D, este ca să existe o funcţie $V(x, y, z)$ diferenţiabilă în D, astfel încît să avem

$$\mathrm{d}V = P(x, y, z)\,\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\,\mathrm{d}y + R(x, y, z)\,\mathrm{d}z, \quad (x, y, z) \in D.$$

Demonstraţie. *Condiţia este necesară.* Să presupunem că integrala curbilinie nu depinde de drum. Fie $A(a, b, c)$ un punct fix însă arbitrar în D şi $M(x, y, z)$ un punct variabil în D. Integrala curbilinie calculată de la A la M va depinde numai de punctul M, adică de coordonatele x, y, z ale acestui punct şi este o funcţie

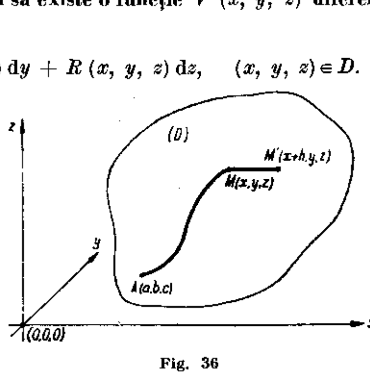

Fig. 36

$V(x, y, z)$ de trei variabile, definită în D; să notăm

$$V(x, y, z)=\int_{AM} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z; \tag{2}$$

dacă $(x+h, y, z)\in D$ avem (fig. 36)

$$V(x+h, y, z)=\int_{AM'} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z;$$

să formăm diferența

$$V(x+h, y, z)-V(x, y, z)=\int_{AM'} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z-$$

$$-\int_{AM} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\int_{MM'} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=\int_{x}^{x+h} P(x,y,z)\,\mathrm{d}x, \tag{3}$$

deoarece de-a lungul lui MM', y și z sînt constante, deci $\mathrm{d}y=0$, $\mathrm{d}z=0$.

Funcția P este continuă în D, deci putem aplica formula medie în (3). Avem

$$V(x+h, y, z)-V(x, y, z)=h\cdot P(x+\theta h, y, z),$$

de unde obținem imediat

$$\lim_{h\to 0}\frac{V(x+h, y, z)-V(x, y, z)}{h}=\frac{\partial V}{\partial x}=P(x, y, z)$$

pentru orice $(x, y, z)\in D$.
În mod asemănător obținem și

$$\frac{\partial V}{\partial y}=Q(x, y, z),\ \frac{\partial V}{\partial z}=R(x, y, z)$$

sau

$$\mathrm{d}V=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z,$$

iar $V(x, y, z)$ este funcția căutată.

Condiția este suficientă. Dacă forma diferențială $P\,\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+$ $+R\mathrm{d}z$ este diferențiala totală a unei funcții $V(x, y, z)$ în D, avem

$$P=\frac{\partial V}{\partial x},\ Q=\frac{\partial V}{\partial y},\ R=\frac{\partial V}{\partial z}\ (x, y, z)\in D,$$

deci dacă Γ este o curbă de ecuații parametrice

$$x=f(t),\quad y=g(t),\quad z=h(t),\quad t\in[\alpha, \beta]$$

cu f, g, h funcții continue cu derivate de ordinul întîi continue pentru $t\in[\alpha, \beta]$ și dacă pentru $A(a, b, c)\in D$, $t=t_0\in[\alpha, \beta]$, iar pentru

$M(x, y, z) \in D$, $t = \tau \in [\alpha, \beta]$, putem scrie

$$\int_{AM} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \int_{AM} \frac{\partial V}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathrm{d}z =$$

$$= \int_{t_0}^{\tau}\left[\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right]\mathrm{d}t =$$

$$= \int_{t_0}^{\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[V(f(t), g(t), h(t)\right]\mathrm{d}t =$$

$$= V[f(\tau), g(\tau), h(\tau)] - V[f(t_0), g(t_0), h(t_0)] = V(M) - V(A),$$

ceea ce arată că integrala curbilinie nu depinde decît de A și M.

Teorema este demonstrată.

Consecințe. 1) Dacă integrala curbilinie

$$\int_{AB} P(x, y, z)\,\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\,\mathrm{d}y + R(x, y, z)\,\mathrm{d}z \tag{1}$$

nu depinde de drum, atunci există o funcție $V(x, y, z)$ astfel încît să avem pentru orice $(x, y, z) \in D$,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = P(x, y, z),\ \frac{\partial V}{\partial y} = Q(x, y, z),\ \frac{\partial V}{\partial z} = R(x, y, z).$$

Eliminind pe V între aceste relații obținem legăturile între P, Q și R independente de V,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y},\quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}. \tag{2}$$

Vom arăta mai tîrziu în ce condiții [A, cap. IV, § 2, al. 5] relațiile (2) sînt și suficiente pentru ca integrala curbilinie să nu depindă de drum.

2) **Dacă integrala curbilinie (1) nu depinde de drum în D, atunci pentru orice curbă închisă Γ situată în D avem**

$$\oint_{\Gamma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = 0.$$

Într-adevăr (fig. 37), dacă Γ este o curbă închisă în D și AB sînt două puncte pe Γ, avem, deoarece integrala nu depinde de drum,

$$\int_{AMB} P\,\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \int_{ANB} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z.$$

sau

$$\int_{AMB} - \int_{ANB} = \int_{AMB} + \int_{BNA} = \oint_{\Gamma} = 0.$$

Reciproca este de asemenea adevărată, anume :

Dacă integrala curbilinie este nulă pe orice curbă închisă situată în D, atunci nu depinde de drum în D.

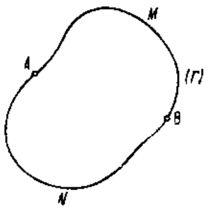

Fig. 37

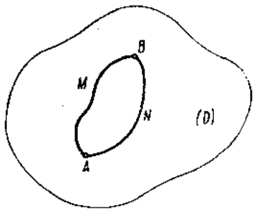

Fig. 38

Într-adevăr, să presupunem

$$\oint_{\Gamma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = 0$$

pentru orice curbă închisă $\Gamma \subset D$. Fie A, B două puncte arbitrare în D şi AMB, ANB două drumuri care nu se taie şi care duc de la A la B; ele formează o curbă închisă Γ (fig. 38),

deci

$$\int_{AMB} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z + \int_{BNA} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = 0$$

sau

$$\int_{AMB} = \int_{ANB},$$

adică integrala nu depinde de drum.

Dacă arcele AMB şi ANB se taie, luăm al treilea arc ATB care nu le taie (fig. 39); în acest caz $AMBTA$ şi $ANBTA$ sînt curbe închise, deci

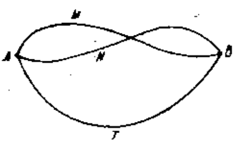

Fig. 39

$$\int_{AMB} + \int_{BTA} = 0\,; \ \int_{ANB} + \int_{BTA} = 0\,,$$

de unde rezultă imediat și în acest caz că

$$\int_{AMB} = \int_{ANB}.$$

Putem deci formula următoarea

T e o r e m ă. Integrala curbilinie

$$\int P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

nu depinde de drum într-un domeniu $D \subset R^3$ decît dacă și numai dacă este nulă pentru orice curbă închisă conținută în Γ.

Ne propunem să determinăm funcția $V(x, y, z)$ în D

$$V(x, y, z) = \int_{AM} P(x, y, z)\,\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\,\mathrm{d}y + R(x, y, z)\,\mathrm{d}z$$

în ipoteza în care integrala curbilinie nu depinde de drum.

Deoarece valoarea integralei nu depinde de drumul care duce de la punctul $A(a, b, c)$ la punctul $M(x, y, z)$ vom alege drumul din figura 40, unde AB este paralel cu Ox, BC paralel cu Oy și CM paralel cu Oz (situat în întregime în D).

3) **Funcția $V(x, y, z)$, $(x, y, z) \in D$ este dată de**

$$V(x, y, z) = \int_{AB} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z + \int_{BC} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z +$$

$$+ \int_{CM} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

sau

$$V(x, y, z) =$$

$$= \int_a^x P(t, a, b)\,\mathrm{d}t +$$

$$+ \int_b^y Q(x, t, c)\,\mathrm{d}t +$$

$$+ \int_c^z R(x, y, t)\,\mathrm{d}t.$$

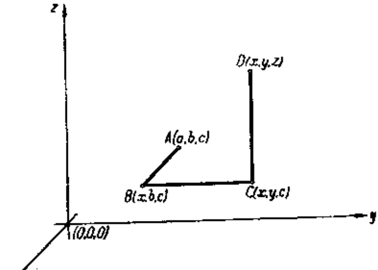

Fig. 40

Funcția $V(x, y, z)$ este astfel determinată, în afara unei constante arbitrare, aditive.

Aplicații

Lucrul mecanic al forțelor de atracție newtoniană către un centru fix de masă m, la deplasarea punctului de masă $m' = 1$ din poziția M_1 în poziția M_2 are valoarea

$$\mathcal{L} = -\gamma \cdot m \int_{M_1 M_2} \frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z}{r^3}$$

deoarece $\overline{F} = -\frac{m \cdot \gamma}{r^2} \cdot \frac{\overline{r}}{r}$, γ constanta gravitației (am pus în originea axelor centrul de atracție de masă m). Observăm că integrala nu depinde de drum, deoarece

$$P = \frac{x}{r^3},\ Q = \frac{y}{r^3},\ R = \frac{z}{r^3}$$

și

$$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \mathrm{d}\left(-\frac{1}{r}\right),$$

deci

$$\mathcal{L} = \gamma \cdot m \int_{r_1}^{r_2} \mathrm{d}\left(\frac{1}{r}\right) = m\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1}\right),$$

unde $\overline{r}_1$ și $\overline{r}_2$ sînt vectorii de poziție ai punctelor M_1 și M_2.

Exemplu

Integrala curbilinie

$$\int_{AB} (x^2 - yz + ax)\,\mathrm{d}x + (y^2 - zx + by)\,\mathrm{d}y + (z^2 - xy + cz)\,\mathrm{d}z$$

nu depinde de drum. Să se calculeze pentru $A\,(1, 1, 1)$ și $B\,(4, 3, 2)$.

Dacă punem

$$X = x^2 - yz + ax\,,\quad Y = y^2 - zx + by\,,\quad Z = z^2 - xy + cz\,,\quad \text{avem}$$

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} = -z\ ;\ \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y} = -x\ ;\ \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z} = -y\,,$$

deci integrala nu depinde de drum. Aplicăm formula pentru calculul lui V

$$I_{AB} = \int_1^4 (x^2 - 1 + ax)\,\mathrm{d}x + \int_1^3 (y^2 - 4 + by)\,\mathrm{d}y + \int_1^2 (z^2 - 12 + cz)\,\mathrm{d}z\,,$$

$$I_{AB} = \frac{x^3}{3} - x + \frac{ax^2}{2}\Big|_1^4 + \left(\frac{y^3}{3} - 4y + \frac{by^2}{2}\right)\Big|_1^3 + \left(\frac{z^3}{3} - 12z + \frac{cz^2}{2}\right)\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(15a + 8b + 3c) + 9\,.$$

Pentru integralele curbilinii în plan, care nu depind de drum, re..ı'tatele sînt asemănătoare și se demonstrează în același mod; le en... ăn

T e o r e m ă. **Fie D un domeniu plan în care funcțiile $P(x, y)$, $Q(x, y)$ sînt continue. Condiția necesară și suficientă pentru ca integrala curbilinie**

$$\int_{AB} P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y \tag{1}$$

să nu depindă de drum în D: să existe o funcție $V(x, y)$ diferențiabilă în D astfel încît să avem

$$\mathrm{d}V = P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y\,, \quad (x, y) \in D\,. \tag{2}$$

C o n s e c i n ț e. 1) **Din condiția**

$$\mathrm{d}V = P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y\,, \quad (x, y) \in D\,,$$

rezultă

$$\frac{\partial V}{\partial x} = P(x, y)\,, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = Q(x, y)\,;$$

eliminînd pe V, obținem legătura între P și Q pentru ca integrala curbilinie să nu depindă de drum

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\,, \qquad (x, y) \in D\,.$$

2) **Dacă integrala curbilinie** (1) **nu depinde de drum în** D, **atunci pentru orice curbă închisă** Γ **situată în** D **avem**

$$\oint_{\Gamma} P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = 0$$

și reciproc:

Dacă integrala curbilinie (1) **este nulă pe orice curbă închisă situată în D, atunci nu depinde de drum în D.**

3) **Dacă integrala curbilinie** (1) **nu depinde de drum în** D, **atunci funcția $V(x, y)$ definită de**

$$V(x, y) = \int_{AM} P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y\,,$$

unde $A(a, b)$ este un punct fix (însă oarecare), **iar $M(x, y)$ un punct variabil în D, se obține integrînd pe un drum** (fig. 41) **ABM, unde AB este paralelă cu Ox și BM paralelă cu Oy. Avem**

$$V(x, y) =$$

$$= \int_{AB} P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y +$$

$$+ \int_{BM} P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y$$

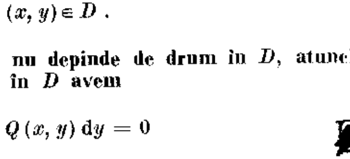

Fig. 41

sau

$$V(x, y) = \int_a^x P(t, b)\,dt + \int_b^y Q(x, t)\,dt;$$

funcţia $V(x, y)$ este determinată în afara unei constante arbitrare aditive.

Aplicaţie

În termodinamică, starea oricărui corp este definită de trei mărimi fizice: presiunea p, volumul v şi temperatura (absolută) T. Aceste trei variabile sînt legate printr-o anumită relaţie $f(p, v, T) = 0$, astfel încît starea corpului este determinată de fapt de două din ele. În cazul gazelor ideale, această relaţie este dată de formula lui Clapeyron, $pv - RT = 0$.

Să presupunem acum că starea unui corp este determinată de volumul v şi presiunea p. Faţă de un sistem de referinţă vOp starea corpului va fi dată de un punct $M(p, v)$ din plan. Dacă starea corpului variază, punctul M descrie o curbă care se numeşte *diagrama* procesului respectiv; dacă corpul revine la starea iniţială, procesul respectiv se numeşte proces ciclic sau *ciclu* şi diagrama respectivă va fi o curbă închisă Γ.

În timpul unui proces dat, corpul absoarbe o anumită cantitate de căldură Q. Pentru a determina valoarea lui Q să descompunem procesul într-un număr n (oarecare) de etape. Dacă de la etapa $k-1$ la etapa k variază numai una din mărimile p, v, T, atunci cantitatea căldurii absorbite se ia proporţională cu variaţia variabilei corespunzătoare. De exemplu, dacă variază numai v, cantitatea căldurii absorbite va fi dată de

$$\alpha_k(v_k - v_{k-1})$$

unde α_k este un număr anumit. Dacă toate cele trei mărimi variază în acelaşi timp, atunci creşterea totală δQ_k va fi egală cu suma creşterilor parţiale, după principiul suprapunerii efectelor,

$$\delta Q_k = \alpha_k(v_k - v_{k-1}) + \beta_k(p_k - p_{k-1}) + \gamma_k(T_k - T_{k-1}).$$

O aproximaţie a lui Q pentru întreg procesul va fi deci

$$Q \simeq \sum_{k=1}^{n} [\alpha_k(v_k - v_{k-1}) + \beta_k(p_k - p_{k-1}) + \gamma_k(T_k - T_{k-1})];$$

dacă se înlocuieşte T în funcţie de v şi p din relaţia $f(p, v, T) = 0$ şi dacă se trece de la sumele care dau aproximativ variaţia cantităţii de căldură la integrale, printr-un proces de trecere la limită, se obţine o formulă de forma

$$Q = \int_\Gamma P\,dp + V\,dv,$$

unde P şi V sînt anumite funcţii de p şi v, iar Γ diagrama procesului.

În cazul unui proces reversibil, integrala curbilinie

$$\int_\Gamma \frac{P}{T}\,dp + \frac{V}{T}\,dv \tag{1}$$

nu depinde de drum. Funcţia S cu $dS = \frac{P}{T}\,dp + \frac{V}{T}\,dv$ se numeşte *entropie* şi este determinată de integrala (1) în afara unei constante aditive. Pentru două puncte A şi B din planul vOp, formula

$$\int_{AB} \frac{P}{T}\,dp + \frac{V}{T}\,dv = S(B) - S(A)$$

ne dă variaţia entropiei cînd se trece de la starea A la starea B.

Exemple

1) Integrala curbilinie

$$\int_{AM}\left(\frac{y}{x^2+y^2}+2y\right)\mathrm{d}x-\left(\frac{x}{x^2+y^2}-2x\right)\mathrm{d}y$$

nu depinde de drum într-un domeniu care nu conține originea. Să se determine $V(x, y)$. Avem

$$P(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}+2y\,,\quad Q(x,y)=2x-\frac{x}{x^2+y^2}\,,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1}{x^2+y^2}+2-\frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}\,,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=2-\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

și

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}+2,$$

deci integrala nu depinde de drum într-un domeniu pentru care $x^2+y^2\neq 0$. Avem de asemenea

$$V(x,y)=\int_a^x\left(\frac{b}{x^2+b^2}+2\,b\right)\mathrm{d}x-\int_b^y\left(\frac{x}{x^2+y^2}-2x\right)\mathrm{d}y\,,$$

$$V(x,y)=\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{b}\Big|_a^x+2\,bx\Big|_a^x-\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\Big|_b^y+2\,xy\Big|_b^y,$$

$$V(x,y)=-\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}+2xy-\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}-2\,ab$$

sau

$$V(x,y)=2xy+\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}+C\,.$$

2) Integrala

$$\int_{AB}\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$$

nu depinde de drum într-un domeniu D care nu conține puncte ale dreptei $x+y=0$. Să se calculeze valoarea ei pentru $A\,(1,0)$, $B\,(2,3)$. Avem

$$P=\frac{y}{(x+y)^2}\,,\qquad Q=\frac{-x}{(x+y)^2}\,,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1}{(x+y)^2}-\frac{2y}{(x+y)^3}\,,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{-1}{(x+y)^2}+\frac{2x}{(x+y)^3}\,,\ \text{deci}\ \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\,,$$

P și Q sînt continue în orice domeniu D care nu conține puncte ale dreptei $y+x=0$.

$$I_{AB}=\int_1^2\frac{0\cdot\mathrm{d}x}{x^2}-\int_0^3\frac{2\,\mathrm{d}y}{(2+y)^2}=\frac{2}{2+y}\Big|_0^3=\frac{2}{5}-1=-\frac{3}{5}\,.$$

6. Integrale curbilinii într-un domeniu multiplu conex

a) În vol. I, B, cap. VI, § 2, al. 5, am definit noţiunile de mulţime conexă şi domeniu, anume:

O mulţime A se numeşte *mulţime conexă* dacă, oricum am descompune-o în două mulţimi A_1 şi A_2 disjuncte şi nevide, cel puţin una din mulţimile A_1 sau A_2 are cel puţin un punct de acumulare în cealaltă.

O mulţime D se numeşte domeniu dacă este deschisă şi conexă. Într-un domeniu D, oricare ar fi punctele $a, b \in D$ există o linie poligonală $L \subset D$ care uneşte punctele a şi b.

La aceste definiţii trebuie să mai adăugăm şi pe următoarele:

Definiţii. 1. Un domeniu plan D se numeşte simplu conex dacă, cu orice curbă închisă $\Gamma \subset D$, aparţine lui D şi porţiunea plană mărginită de Γ.

2. Un domeniu V din spaţiu se numeşte simplu conex dacă la orice curbă închisă $\Gamma \subset V$ există cel puţin o suprafaţă S, mărginită de Γ, situată în întregime în V.

Exemple

1) Interiorul unui cerc (fig. 42), interiorul unei sfere sînt domenii simplu conexe.

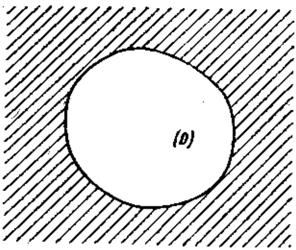

Fig. 42

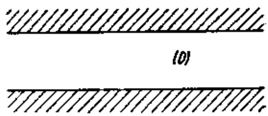

Fig. 43

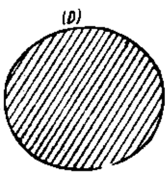

Fig. 44

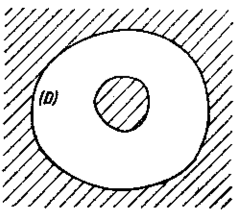

Fig. 45

2) Interiorul unui cilindru, banda plană mărginită de două drepte paralele (fig. 43) sînt domenii simplu conexe.

3) Exteriorul unui cerc (fig. 44), o coroană circulară (fig. 45), exteriorul unui cilindru nu sînt domenii simplu conexe.

Definiţie. Un domeniu care nu este simplu conex se numeşte multiplu conex.

Un domeniu multiplu conex poate fi transformat în domeniu simplu conex cu ajutorul unor *tăieturi.*

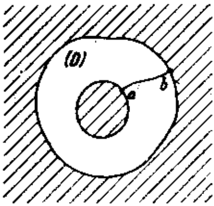

Fig. 46

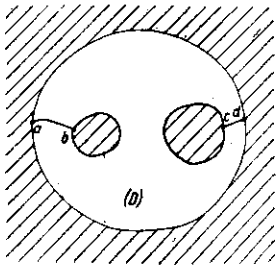

Fig. 47

Exemple

1) O coroană circulară (fig. 46) se transformă într-un domeniu simplu conex cu ajutorul tăieturii *ab*.

2) Un domeniu circular cu două găuri (fig. 47) poate fi transformat în domeniu simplu conex cu ajutorul a două tăieturi *ab, cd*.

3) Exteriorul unui cilindru (fig. 48) poate fi transformat într-un domeniu simplu conex cu ajutorul unei tăieturi formate de un semiplan P.

Definiţie. Numărul minim de tăieturi, pentru a transforma un domeniu multiplu conex D într-un domeniu simplu conex, mărit cu o unitate, se numeşte ordinul de conexiune al domeniului D.

O coroană circulară, exteriorul unui cerc, exteriorul unui cilindru sînt domenii dublu conexe.

Un disc circular cu două găuri (fig. 47) este un domeniu triplu conex.

b) Am văzut că o condiţie necesară pentru ca integrala curbilinie

$$\int P(x,\ y)\,\mathrm{d}x + Q(x,\ y)\,\mathrm{d}y \qquad (1)$$

să fie nulă pentru orice curbă închisă Γ situată într-un domeniu D în care funcţiile P şi Q sînt continue şi au derivate parţiale continue, este ca P şi Q să îndeplinească condiţia $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ în D.

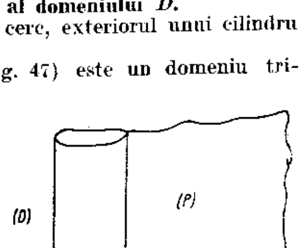

Fig. 48

Vom vedea mai tîrziu (A, cap. IV, § 1, al. 7), cînd vom demonstra suficienţa acestei condiţii, că trebuie să impunem domeniului D să fie simplu conex. Dacă domeniul D nu este simplu conex, integrala (1) nu este în general nulă.

Să presupunem acum că în (1) funcţiile P şi Q sînt continue împreună cu derivatele lor parţiale într-un domeniu D avînd două găuri (triplu conex), (fig. 49). Dacă într-un astfel de domeniu considerăm o curbă închisă Γ care nu înconjură o gaură, această curbă este conţinută într-un subdomeniu D' simplu conex, deci integrala

$$\oint_{\Gamma} P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y$$

este nulă. Să observăm că în acest caz funcţiile P şi Q sînt continue şi au derivate parţiale continue pe Γ şi în domeniul mărginit de curba Γ.

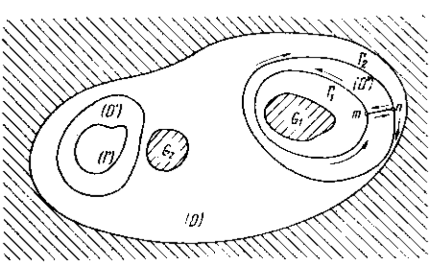

Fig. 49

Dacă luăm acum un contur închis Γ_1 care înconjoară o gaură (G_1), integrala curbilinie (1) poate să nu mai fie nulă, deoarece P şi Q nu sînt continue şi nu au derivate parţiale continue în G_1 (în G_1 se poate să nu fie nici definite).

Putem să arătăm că aceste integrale nu depind de forma curbei Γ_1, ci este esenţial doar faptul că înconjură pe G_1.

T e o r e m ă. Fie Γ_1 şi Γ_2 două contururi care înconjură pe G_1; avem

$$\oint_{\Gamma_1} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \oint_{\Gamma_2} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y.$$

Demonstraţie. Ducem arcul de curbă mn care leagă pe Γ_1 de Γ_2. Curbele Γ_1, Γ_2 şi arcele mn, nm formează împreună frontiera Γ' a unui domeniu simplu conex (D'') în care P şi Q sînt continue şi au derivate parţiale continue. Ele îndeplinesc şi condiţia $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$, deci putem scrie

$$\int_{\Gamma'} P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = 0$$

sau

$$\int_{\Gamma_1} + \int_{mn} + \int_{\Gamma_2} + \int_{nm} = 0,$$

însă

$$\int_{mn} + \int_{nm} = 0$$

deoarece arcul mn este parcurs de două ori în sensuri diferite; ne mai rămîne

$$\oint_{\Gamma_1} + \oint_{\Gamma_2} = 0$$

sau

$$\oint_{\Gamma_1} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \oint_{\Gamma_2} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y,$$

curbele Γ_1 și Γ_2 fiind parcurse în același sens. Teorema este demonstrată.

Observații

1) Din cele arătate mai sus rezultă că găurii G_1 îi corespunde un număr ω_1 (numit *constanta ciclică* relativă la gaura G_1) egal cu valoarea integralei (1) luată pe o curbă închisă Γ_1 (oarecare) care înconjură o dată pe G_1. În mod asemănător se asociază și găurii G_2 un număr ω_2 (constanta ciclică relativă la gaura G_2).

2) Raționamentele făcute pentru un domeniu triplu conex se extind pentru orice domeniu multiplu conex.

3) Mulțimea G_1 sau G_2 se poate reduce fiecare la cîte un punct.

Exemplu

Integrala curbilinie

$$\int \frac{-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{x^2 + y^2}$$

este nulă pentru orice contur care nu înconjură originea. Pentru un cerc (C) cu centru în origine valoarea integralei este 2π.

Integrala nu depinde de drum într-un domeniu care nu conține originea. Într-adevăr avem

$$P = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad Q = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

iar P, Q și derivatele lor sînt discontinue numai în origine.

Pe un cerc $x^2 + y^2 = R^2$ avem $x = R\cos\theta$, $y = R\sin\theta$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, $\mathrm{d}x = -R\sin\theta\mathrm{d}\theta$, $\mathrm{d}y = R\cos\theta\mathrm{d}\theta$, deci

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta\mathrm{d}\theta + \cos^2\theta\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 2\pi;$$

conform teoremei demonstrate, integrala are valoarea 2π pe orice curbă închisă care înconjură o dată originea.

În acest exemplu, gaura G este formată dintr-un singur punct.

c) Pentru integrale curbilinii în spațiu, rezultatul este asemănător.

Fie D un domeniu triplu conex format dintr-un interval tridimensional (paralelipiped) din care scoatem două tuburi (fig. 50), domeniu în care funcțiile P, Q, R sînt continue și au derivate parțiale continue. Pentru orice curbă închisă Γ situată în D, care nu înconjură nici unul din tuburi, o condiție necesară pentru ca integrala

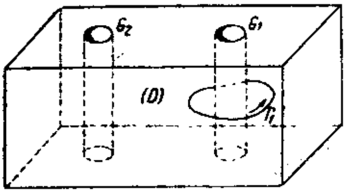

Fig. 50

$$\oint_{\Gamma} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z \tag{1}$$

să fie nulă este ca P, Q, R să îndeplinească condițiile

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}. \tag{2}$$

Vom vedea mai tîrziu (A, cap. IV, § 2, al. 5), cînd vom demonstra suficiența acestor condiții, că trebuie să cerem ca domeniul D să fie simplu conex. Dacă Γ nu înconjură nici unul din tuburi și dacă condițiile (2) sînt îndeplinite în D, integrala (1) este nulă, deoarece curba închisă Γ este conținută într-un domeniu D' simplu conex, D' fiind un subdomeniu al lui D.

Dacă luăm acum un contur închis Γ_1 care înconjură tubul G_1, integrala curbilinie (1) poate să nu fie nulă.

Se arată la fel ca și la cazul plan, că pentru două contururi Γ_1 și Γ_2 care înconjură tubul G_1 avem

$$\int_{\Gamma_1} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_2} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z.$$

Fiecărui tub G_i $(i = 1, 2)$ îi corespunde o constantă determinată ω_i $(i = 1,2)$ (numită constanta ciclică relativă la tubul G_i), egală cu valoarea integralei (1) luată pe o curbă închisă Γ_i (oarecare) care înconjură o dată pe G_i.

În spațiu, tubul G_1 sau G_2 se poate reduce fiecare la cîte un arc de curbă.

Rezultatele obținute pentru domeniul triplu conex se extind la un domeniu multiplu conex oarecare.

7. Derivarea integralelor curbilinii care depind de un parametru

Să considerăm integrala curbilinie

$$F(u) = \int_{AB} P(x, y, z, u)\,\mathrm{d}x + Q(x, y, z, u)\,\mathrm{d}y + R(x, y, z, u)\,\mathrm{d}z.$$

unde $P(x, y, z, u)$, $Q(x, y, z, u)$, $R(x, y, z, u)$ sînt funcţii continue de variabilele x, y, z, u într-un domeniu $D = I \times [u_1, u_2]$, $I \subset R^3$, cu derivatele parţiale

$$\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial u}, \frac{\partial Q}{\partial x}, \ldots$$

continue în D.

Fie familia de curbe Γ definită de

$$x = f(t, u), \quad y = g(t, u), \quad z = h(t, u)$$

cu f, g, h continue în $D' = [a, b] \times [u_1, u_2]$, cu derivatele parţiale

$$\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial^2 f}{\partial u\, \partial t}, \frac{\partial g}{\partial u}, \ldots$$

continue în D', astfel încît pentru orice punct $(t, u) \in D'$, punctul $(x, y, z) \in I$. La u dat însă arbitrar în $[u_1, u_2]$ corespunde o curbă (γ) din familia Γ. Cînd t parcurge intervalul $[a, b]$, (x, y, z) descrie un arc AB al curbei (γ) situat în I; a şi b sînt funcţii de u, $a(u)$, $b(u)$, pe care le presupunem continue, cu derivate continue în $[u_1, u_2]$. Avem următoarea

Teoremă. În condiţiile prezentate mai sus, funcţia $F(u)$, definită de

$$F(u) = \int_{AB} P(x, y, z, u)\,dx + Q(x, y, z, u)\,dy + R(x, y, z, u)\,dz,$$

este continuă pe $[u_1, u_2]$, cu derivata $F'(u)$ continuă.

Derivata $F'(u)$ este dată de

$$\begin{aligned} F'(u) = &\int_{AB} \frac{\partial P}{\partial u}\,dx + \frac{\partial Q}{\partial u}\,dy + \frac{\partial R}{\partial u}\,dz + \\ &+ \int_{AB} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial u}\,dx - \frac{\partial f}{\partial u}\,dy\right) + \\ &+ \int_{AB} \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial h}{\partial u}\,dy - \frac{\partial g}{\partial u}\,dz\right) + \\ &+ \int_{AB} \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial u}\,dz - \frac{\partial h}{\partial u}\,dx\right) + \end{aligned}$$

$$+ \left[P(x, y, z, u)\frac{dx}{du} + Q(x, y, z, u)\frac{dy}{du} + R(x, y, z, u)\frac{dz}{du}\right]_{a(u)}^{b(u)}$$

(în ultima paranteză se înlocuieşte în x, y, z, parametrul t cu $b(u)$ apoi cu $a(u)$ şi se scad)

Demonstraţie. Dacă transformăm în integrală definită pe

$$F_1(u) = \int_{AB} P(x, y, z, u)\,dx$$

avem

$$F_1(u) = \int_{a(u)}^{b(u)} P(f, g, h, u)\frac{\partial f}{\partial t}\,dt,$$

căreia îi putem aplica formula de derivare stabilită la integrale definite (A, cap. I, § 7, al. 2); dacă ţinem seamă de ipotezele făcute,

$$F_1'(u) = \int_{a(u)}^{b(u)} \left(\frac{\partial P}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial u} \right) \frac{\partial f}{\partial t}\, dt +$$

$$+ \int_{a(u)}^{b(u)} P \frac{\partial^2 f}{\partial u\, \partial t}\, dt + \frac{db}{du}\left[P(f, g, h, u) \frac{\partial f}{\partial t} \right]_{t=b(u)} - \frac{da}{du}\left[P(f, g, h, u)\frac{\partial f}{\partial t}\right]_{t=a(u)}.$$

Avem însă

$$\int_{a(u)}^{b(u)} P \frac{\partial^2 f}{\partial u\, \partial t}\, dt = P\frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{a(u)}^{b(u)} - \int_{a(u)}^{b(u)} \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial P}{\partial t}\, dt$$

cu

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t},$$

astfel încît putem scrie, ţinînd seamă că $dx = \frac{\partial f}{\partial t} dt$, $dy = \frac{\partial g}{\partial t} dt$, $dz = \frac{\partial h}{\partial t} dt$,

$$F_1(u) = \int_{AB} \frac{\partial P}{\partial u}\, dx + \int_{AB}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial u}\right) dx - \int_{AB}\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial u}\, dy -$$

$$- \int_{AB}\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial u}\, dz + \left[P\frac{\partial f}{\partial t}\frac{dt}{du} + P\frac{\partial f}{\partial u}\right]_{a(u)}^{b(u)}.$$

Dacă observăm că

$$P\left[\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{dt}{du} + \frac{\partial f}{\partial u}\right] = P(x, y, t, u)\frac{dx}{du},$$

obţinem imediat formula dată, însumînd cele trei integrale ce intervin în integrala curbilinie din enunţ. $F'(u)$ este continuă, deoarece toţi termenii care intervin în expresia sa sînt continui. Teorema este demonstrată.

În cazul plan avem o formulă analogă

$$\frac{d}{du}\int_{a(u)}^{b(u)} P(x, y, u)\, dx + Q(x, y, u)\, dy = \int_{a(u)}^{b(u)} \frac{\partial P}{\partial u}\, dx + \frac{\partial Q}{\partial u}\, dy +$$

$$+ \int_{AB}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial u}\, dx - \frac{\partial f}{\partial u}\, dy\right) + \left[P(x, y, u)\frac{dx}{du} + Q(x, y, u)\frac{dy}{du}\right]_{a(u)}^{b(u)}.$$

Observaţie

Dacă arcul AB nu depinde de parametrul u, atunci formula de derivare ia forma simplă

$$F'(u) = \int_{AB}\frac{\partial P}{\partial u}\, dx + \frac{\partial Q}{\partial u}\, dy + \frac{\partial R}{\partial u}\, dz.$$

§ 2. APLICAȚIILE INTEGRALELOR CURBILINII ȘI DEFINITE

1. Lungimea unui arc de curbă

a) Fie AB un arc de curbă plană definit de ecuația $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, funcția f fiind continuă, cu derivata întîi continuă în $[a, b]$. Ne propunem să găsim lungimea arcului AB. Pentru aceasta vom considera o diviziune $d: A = M_0$, $M_1, \ldots, M_{n-1}$, $M_n = B$ a arcului AB și vom aproxima lungimea L a arcului AB cu lungimea liniei poligonale $M_0 M_1 \ldots M_n$, adică cu suma

$$L_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2},$$

unde (x_k, y_k) sînt coordonatele lui M_k (fig. 51).

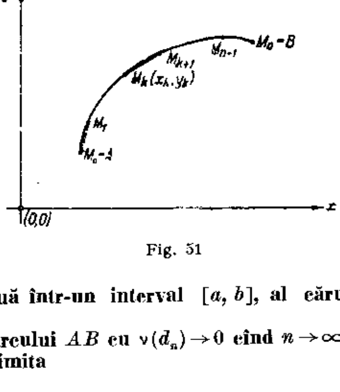

Fig. 51

D e f i n i ț i e. Fie $y = f(x)$ o funcție continuă cu derivata continuă într-un interval $[a, b]$, al cărui grafic este un arc AB.

Fie (d_n) un șir de diviziuni ale arcului AB cu $\nu(d_n) \to 0$ cînd $n \to \infty$. Numim lungimea arcului AB limita

$$L = \lim_{\nu(d_n) \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2}.$$

T e o r e m ă. Numărul L este valoarea integralei definite

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, \mathrm{d}x. \tag{1}$$

Demonstrație. Într-adevăr, putem scrie

$$\sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}\right)^2}\,(x_{k+1} - x_k)$$

însă

$$y_{k+1} - y_k = f(x_{k+1}) - f(x_k) = (x_{k+1} - x_k) f'(\xi_k),\ \xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$$

L este limita unei sume Riemann

$$\sigma_{d_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\,(x_{k+1} - x_k)$$

şi L există, deoarece $f'(x)$ este continuă pe $[a, b]$. Ţinînd seamă de definiţia integralei definite avem

$$\lim_{\nu(d_n)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\,(x_{k+1} - x_k) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Teorema este demonstrată.

D e f i n i ţ i e. Forma diferenţială

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

se numeşte elementul de arc al curbei $y = f(x)$. Deoarece $f'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$ elementul de arc se mai poate scrie

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}. \tag{2}$$

O b s e r v a ţ i i

1) Dacă arcul de curbă AB ne este dat printr-o reprezentare parametrică $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [a, b]$, cu funcţiile φ şi ψ continue, cu derivate de ordinul întîi continue, avem

$$\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}y = \psi'(t)\,\mathrm{d}t,$$

deci

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}\,\mathrm{d}t,$$

iar lungimea arcului AB este dată de

$$L_{AB} = \int_a^b \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}\,\mathrm{d}t.$$

2) Dacă punem $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$,

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}r\cos\theta - r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta)^2 + (\mathrm{d}r\sin\theta + r\cos\theta\,\mathrm{d}\theta)^2}$$

sau

$$\mathrm{d}s = \sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta,$$

care este expresia elementului de arc al unei curbe dată în coordonate polare $r = r(\theta)$.

3) Un arc de curbă pentru care integrala $\int_{AB} \mathrm{d}s$ are sens se numeşte un *arc rectificabil*.

Dacă arcul AB este dat de

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in [a, b],$$

cu φ și ψ continue cu derivate de ordinul întîi continue pe $[a, b]$, integrala

$$\int_{AB} \mathrm{d}s = \int_a^b \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}\, \mathrm{d}t \qquad (\alpha)$$

are totdeauna sens, însă integrala (α) poate avea sens în condiții mai puțin restrictive decît cele enunțate. Se poate studia în această direcție ***Manualul de analiză matematică***, vol. II, pag. 120 și urm. de acad. Miron Nicolescu, N. Dinculeanu și S. Marcus.

Exemple

1) Să se calculeze lungimea astroidei. Astroida (fig. 52) are ecuația $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. O reprezentare parametrică este dată de

$x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ 0 \leqslant t < 2\pi,\ a > 0;$

calculăm elementul de arc

$$\mathrm{d}x = -3a\cos^2 t \sin t\, \mathrm{d}t,$$

$$\mathrm{d}y = 3a\sin^2 t \cos t\, \mathrm{d}t,$$

deci

$$\mathrm{d}s = 3a\cos t \sin t\, \mathrm{d}t.$$

Din motive de simetrie

$$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}s = 12\,a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t\, \mathrm{d}t = 6\,a.$$

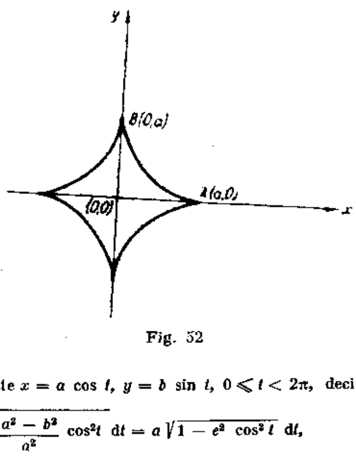

Fig. 52

2) Să se calculeze lungimea elipsei de semiaxe a, b.

O reprezentare parametrică a elipsei este $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ 0 \leqslant t < 2\pi$, deci

$$\mathrm{d}s = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\ \mathrm{d}t = a\sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\cos^2 t}\ \mathrm{d}t = a\sqrt{1 - e^2\cos^2 t}\ \mathrm{d}t,$$

unde $e = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1$ este excentricitatea elipsei,

$$L = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2\cos^2 t}\, \mathrm{d}t.$$

Integrala o calculăm prin dezvoltare în serie; avem

$$L = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - \frac{1}{2}e^2\cos^2 t - \frac{1}{2^2\cdot 2!}e^4\cos^4 t - \dots\right]\mathrm{d}t$$

şi dacă folosim formulele lui Walis obţinem

$$L = 2\pi a\left[1 - \frac{1}{2^2}e^2 - \frac{1^2.3}{2^2.4^2}e^4 - \ldots - \frac{1^2.3^2\ldots(2n-3)^2,\ (2n-1)}{2^2.4^2\ldots(2n)^2}e^{2n}\ldots\right].$$

Pentru $e=0$ (cerc), $L = 2\pi a$, lungimea cercului.

b) Fie AB un arc de curbă în spaţiu definit de ecuaţiile parametrice

$$x = f(t),\ y = g(t),\ z = h(t),\ a \leqslant t \leqslant b,$$

funcţiile $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ fiind continue cu derivate de ordinul întîi continue pe intervalul de definiţie $[a, b]$. Pentru calculul lungimii arcului AB se procedează în mod asemănător cu cazul plan. Se consideră o diviziune $d: A = M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}, M_n = B$ şi se aproximează lungimea L_{AB} a arcului AB cu lungimea liniei poligonale $M_0M_1\ldots M_n$, adică cu suma

$$L_n = \sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+(y_{k+1}-y_k)^2+(z_{k+1}-z_k)^2},$$

unde (z_k, y_k, z_k) sînt coordonatele lui M_k.

D e f i n i ţ i e. Fie AB un arc de curbă definit de ecuaţiile parametrice

$$x = f(t),\quad y = g(t),\quad z = h(t),\quad a \leqslant t \leqslant b,$$

cu f, g, h, continue cu derivate de ordinul întîi continue pe $[a, b]$.

Fie (d_n) un şir de diviziuni ale arcului AB cu $\nu(d_n) \to 0$ cînd $n \to \infty$. Numim lungimea arcului AB limita

$$L = \lim_{\nu(d_n)\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+(y_{k+1}-y_k)^2+(z_{k+1}-z_k)^2}$$

T e o r e m ă. Numărul L este valoarea integralei definite

$$L = \int_a^b\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)+h'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Demonstraţie. Pentru demonstraţia formulei (1) plecăm de la o diviziune $d: M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}, M_n$ a arcului AB, căreia îi corespunde o diviziune d' a intervalului $[a, b]$, $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$, cu

$$x_k = f(t_k),\ y_k = g(t_k),\ z_k = h(t_k).$$

Fie

$$L_n = \sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k$$

unde

$$\lambda_k = \sqrt{[f(t_{k+1})-f(t_k)]^2+[g(t_{k+1})-g(t_k)]^2+[h(t_{k+1})-h(t_k)]^2};$$

folosind formula creșterilor finite avem

$$f(t_{k+1}) - f(t_k) = (t_{k+1} - t_k) f'(\tau_k),$$

$$g(t_{k+1}) - g(t_k) = (t_{k+1} - t_k) g'(\tau_k'),$$

$$h(t_{k+1}) - h(t_k) = (t_{k+1} - t_k) h'(\tau_k''),$$

$$\tau_k, \tau_k', \tau_k'' \in [t_k, t_{k+1}], \text{ deci}$$

$$\lambda_k = \sqrt{f'^2(\tau_k) + g'^2(\tau_k') + h'^2(\tau_k'')};$$

dacă punem

$$\mu_k = \sqrt{f'^2(\theta_k) + g'^2(\theta_k) + h'^2(\theta_k)}$$

cu $\theta_k \in [t_k, t_{k+1}]$, avem imediat

$$\lambda_k - \mu_k = \frac{[f'(\tau_k) - f'(\theta_k)]\,[f'(\tau_k) + f'(\theta_k)]}{\lambda_k + \mu_k} + \ldots$$

și pentru că

$$|f'(\tau_k) + f'(\theta_k)| < \lambda_k + \mu_k,$$

iar f', g', h' sînt continue pe $[a, b]$, urmează că pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $\eta(\varepsilon) > 0$ astfel încît pentru $k = 0, 1, \ldots, n-1$
avem

$$|f'(\tau_k) - f'(\theta_k)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |g'(\tau_k') - g'(\theta_k)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |h'(\tau_k'') - h'(\theta_k)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

dacă $|t_{k+1} - t_k| < \eta(\varepsilon)$; putem scrie

$$|\lambda_k - \mu_k| < \varepsilon, \text{ dacă } |t_{k+1} - t_k| < \eta(\varepsilon)$$

sau

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k (t_{k+1} - t_k) - \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k (t_{k+1} - t_k) \right| < \varepsilon (b - a),$$

de unde rezultă imediat că

$$\lim_{\nu(d_n) \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k (t_{k+1} - t_k) = \int_a^b \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t)}\, dt$$

întrucît

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mu_k (t_{k+1} - t_k)$$

este o sumă Riemann, iar funcția

$$\sqrt{f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t)}$$

este integrabilă pe $[a, b]$, deoarece este continuă pe $[a, b]$.

Teorema este demonstrată

Observații

1) Forma diferențială

$$ds = \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t)}\, dt$$

se numește elementul de arc al curbei $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$.

Deoarece $dx = f'(t)\,dt$, $dy = g'(t)\,dt$, $dz = h'(t)\,dt$, elementul de arc are și expresia

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

2) Dacă arcul AB este format dintr-o reuniune finită de subarce, netede,

$$AB = \bigcup_{i=1}^{p} A_i B_i,$$

atunci

$$L_{AB} = \sum_{i=1}^{p} \int_{A_i B_i} ds.$$

Exemple

1) Se dă elicea circulară $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = ht$, $t \in R$; să se calculeze elementul de arc. Avem

$$dx = -a \sin t\, dt,\ dy = a \cos t\, dt,\ dz = h\, dt$$

deci

$$ds = \sqrt{a^2 + h^2}\, dt.$$

2) Să se calculeze lungimea arcului AB definit de

$$x = a \cos t\, e^{kt},\ y = a \sin t\, e^{kt},\ z = ae^{kt},\ t \in [0, 1],$$

$$dx = (-a \sin t + k a \cos t)\, e^{kt}\, dt,$$

$$dy = (a \cos t + k a \sin t)\, e^{kt}\, dt,\ dz = k a e^{kt}\, dt$$

și

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = a^2 (2k^2 + 1)\, e^{2kt}\, dt^2,$$

$$L_{AB} = \int_0^1 a \sqrt{2k^2 + 1}\, e^{kt}\, dt = \frac{a}{k} \sqrt{2k^2 + 1}\, (e^k - 1).$$

2. Integrale curbilinii în raport cu lungimea arcului

a) Fie AB un arc de curbă definit de ecuațiile

$$x = f(t),\ y = g(t),\ z = h(t),\ a \leqslant t \leqslant b,$$

cu f, g, h continue cu derivate de ordinul întîi continue pe $[a, b]$ și $F(x, y, z)$ o funcție continuă într-un domeniu $D \subset R^3$ care conține arcul AB.

Fie d o diviziune $A = M_0, M_1, \ldots, M_n = B$ a arcului AB; să formăm suma

$$\sum_{k=0}^{n-1} F(M_k)\, s_k, \tag{1}$$

unde s_k este lungimea arcului $M_k M_{k+1}$; dacă (d_n) este un șir de diviziuni ale arcului AB cu $\gamma(\mathrm{d}_n) \to 0$, atunci

$$\lim_{\nu(d_n)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} F(M_k)\, s_k$$

există și se notează

$$\int_{AB} F(M)\, \mathrm{d}s.$$

Într-adevăr, dacă luăm, în reprezentarea parametrică a arcului AB, parametru pe s (în locul lui t) dat de $t = \varphi(s)$, φ continuă cu derivata de ordinul întîi continuă, suma (1) conduce la integrala definită

$$\int_0^L F(f^*(s), g^*(s), h^*(s))\, \mathrm{d}s \tag{2}$$

$$\text{cu } f^*(s) = f(\varphi(s)), g^*(s) = g(\varphi(s)),\ h^*(s) = h(\varphi(s)),$$

și integrala (2) există deoarece $F, f^*, g^*, h^*, \varphi'$ sînt continue. Am notat cu L lungimea arcului AB.

Observăm că avem

$$s_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t)}\, \mathrm{d}t =$$

$$= \sqrt{f'^2(\theta_k) + g'^2(\theta_k) + h'^2(\theta_k)}\, (t_{k+1} - t_k)$$

cu $\theta_k \in [t_k, t_{k+1}]$, deci suma (1), cînd $\nu(\mathrm{d}_n) \to 0$ are limita

$$\int_a^b F[f(t), g(t), h(t)] \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t)}\, \mathrm{d}t, \tag{3}$$

expresie care ne dă regula de calcul a integralei

$$\int_{AB} F(M)\, \mathrm{d}s$$

Observații

1) Dacă în integrala

$$\int_{AB} F(M)\, \mathrm{d}s = \int_{AB} F(x, y, z)\, \mathrm{d}s$$

înlocuim pe $x, y, z, \mathrm{d}s$ cu $f(t),\ g(t),\ h(t),\ \sqrt{f'^2 + g'^2 + h'^2}\, \mathrm{d}t$ respectiv, obținem pe (3).

2) În plan, integralele curbilinii în raport cu lungimea arcului se definesc în mod asemănător

$$\int_{AB} F(M)\,\mathrm{d}s = \int_a^b F(f(t), g(t)) \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

b) O integrală curbilinie

$$\int_{AB} P(x, y, z)\,\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\,\mathrm{d}y + R(x, y, z)\,\mathrm{d}z \tag{4}$$

se poate scrie totdeauna sub forma

$$\int_{AB} F(x, y, z)\,\mathrm{d}s.$$

Să presupunem că AB este un *arc neted*, adică este cotinuu cu tangenta continuă. Dacă α, β, γ sînt cosinușii directori ai tangentei într-un punct al arcului $A\,B$, tangenta fiind orientată în sensul de creștere al lui s pe AB, atunci avem

$$\mathrm{d}x = \alpha\,\mathrm{d}s, \quad \mathrm{d}y = \beta\,\mathrm{d}s, \quad \mathrm{d}z = \gamma\,\mathrm{d}s,$$

Și integrala (4) se transformă în:

$$\int_{AB} \left[P(x, y, z)\,\alpha + Q(x, y, z)\,\beta + R(x, y, z)\gamma\right] \mathrm{d}s \tag{5}$$

sau

$$\int_{AB} F(x, y, z)\,\mathrm{d}s\,.$$

Observație

1) Dacă arcul $A\,B$ are reprezentarea parametrică

$$x = f(t),\ y = g(t),\ z = h(t),\ a \leqslant t \leqslant b,$$

cu f, g, h continue cu derivate continue pe $[a, b]$, atunci α, β, γ, sînt dați de

$$\alpha = \frac{f'(t)}{\pm\sqrt{f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t)}}\,,$$

$$\beta = \frac{g'(t)}{\pm\sqrt{f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t)}}\,,$$

$$\gamma = \frac{h'(t)}{\pm\sqrt{f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t)}}\,,$$

pe care dacă îi înlocuim în (5) regăsim regula de calcul a integralelor curbilinii.

3. Aria unei suprafețe plane mărginite de o curbă

a) Fie $y = f(x)$ o funcție continuă și pozitivă pe $[a, b]$. Am văzut că aria domeniului plan mărginit de graficul funcției $f(x)$, anume de arcul AB, (fig. 53), axa Ox și segmentele AA', BB' paralele cu axa Oy, este dată de integrala definită

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (1)$$

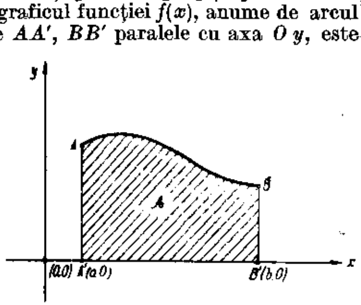

Fig. 53

Dacă $f(x)$ nu păstrează un semn constant pe $[a, b]$, însă nu schimbă semnul de o infinitate de ori pe $[a, b]$, atunci integrala definită (1) ne dă diferența $\mathcal{A}' - \mathcal{A}''$ dintre aria $\mathcal{A}'$ situată deasupra axei Ox și aria $\mathcal{A}''$ situată sub axa Ox (fig. 54).

Și în acest caz putem afla suma ariilor $\mathcal{A}'$ și $\mathcal{A}''$ înlocuind în (1) pe $f(x)$ cu $|f(x)|$,

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}' + \mathcal{A}'' = \int_a^b \left| f(x) \right| \mathrm{d}x.$$

Într-adevăr, dacă $f(x) \geqslant 0$ pe $[a, b] - [c, d]$, $f(x) \leqslant 0$ pe $[c, d]$ cu $[c, d] \subset [a, b]$, (fig. 54), putem scrie

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x),$$

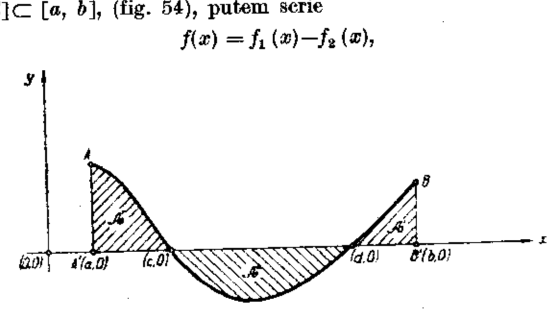

Fig. 54

cu f_1 și f_2 definite pe $[a, b]$ în modul următor:

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [a, b] - [c, d] \\ 0, & x \in [c, d] \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 0, & x \in [a, b] - [c, d] \\ -f(x), & x \in [c, d] \end{cases}$$

şi

$$\mathcal{A}' = \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \mathcal{A}'' = \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x,$$

deci

$$\mathcal{A}' + \mathcal{A}'' = \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \left| f(x) \right| \mathrm{d}x,$$

deoarece $f_1(x) + f_2(x) = |f(x)|$, $x \in [a, b]$.

Exemplu

Să calculăm aria mărginită de curba $y = \cos x$, $x \in [0, 2\pi]$ şi axa Ox. Funcţia $\cos x$ este pozitivă pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ şi negativă pe intervalul $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Aria cerută este dată de

$$\int_0^{2\pi} \left| \cos x \right| \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x\,\mathrm{d}x = 1 + 2 + 1 = 4.$$

b) Fie $f(x)$ şi $g(x)$ două funcţii continue pe intervalul $[a, b]$ astfel încît

$$f(x) \geqslant g(x), \qquad x \in [a, b]$$

aria mărginită de curbele $y = f(x)$, $y = g(x)$ şi dreptele $x = a$, $x = b$, (fig. 55), este dată de

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left[f(x) - g(x) \right] \mathrm{d}x, \tag{1}$$

deoarece este egală cu diferenţa $A''A'B'B'' - A''ABB''$. Formula (1) rămîne valabilă şi dacă $f(x)$ sau $g(x)$ nu sînt pozitive pe $[a, b]$, deci dacă aria $\mathcal{A}$ se găseşte parţial sau în întregime sub axa Ox. Într-adevăr, dacă f şi g nu sînt pozitive pe $[a, b]$, deoarece sînt mărginite, putem găsi o constantă λ astfel încît

$$f_1(x) = f(x) + \lambda \geqslant 0, \; x \in [a, b],$$
$$g_1(x) = g(x) + \lambda \geqslant 0, \; x \in [a, b].$$

Aria mărginită de curbele $y = f_1(x)$ şi $y = g_1(x)$ este egală cu aria mărginită de curbele $y = f(x)$ şi $y = g(x)$, deoarece se obţine printr-o translaţie paralelă cu axa Oy; pentru că $f(x) \geqslant g(x)$ avem şi $f_1(x) \geqslant g_1(x)$, însă

$$f_1(x) - g_1(x) = f(x) + \lambda - g(x) - \lambda = f(x) - g(x),$$

deci şi în acest caz formula (1) este valabilă.

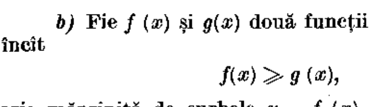

Fig. 55

Exemplu

Să se găsească aria mărginită de parabolele $x = y^2$, $x = 4y^2$, $y \geqslant 0$ și dreptele $x = 0$ și $x = 1$, (fig. 56).

$$\text{Avem } \mathcal{A} = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}}{2} \right) \mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Observație

Dacă $f(x)$ și $g(x)$ nu sînt comparabile pe $[a, b]$, adică nu avem fie $f(x) - g(x) \geqslant 0$, fie $f(x) - g(x) \leqslant 0$ pentru orice $x \in [a, b]$, atunci formula (1) se înlocuiește cu

$$\mathcal{A} = \int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| \mathrm{d}x.$$

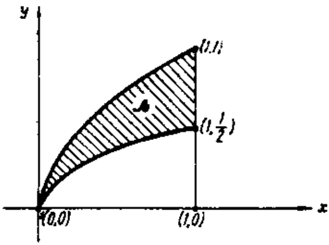

Fig. 56

Exemplu

Să se găsească aria mărginită de curbele $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x \in [0, 2\pi]$. Conform figurii 57 avem

$$\mathcal{A} = \int_0^{2\pi} \left| \cos x - \sin x \right| \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\, \mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x)\, \mathrm{d}x +$$

$$+ \int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} (\cos x - \sin x)\, \mathrm{d}x = (\sin x + \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + (-\cos x - \sin x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} +$$

$$+ (\sin x + \cos x) \Big|_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{2} - 1 + \frac{2\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{2} + 1 + \frac{2\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

c) Fie Γ o curbă închisă, plană, fără puncte multiple, netedă sau formată dintr-un număr finit de arce netede, pe care o supunem la restricția : paralele la axa Oy să o întîlnească în două puncte. Fie A, B punctele de pe Γ (fig. 58) de abscise extreme a, b, $a < b$;

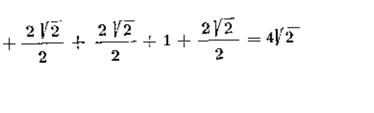

Fig. 57

...le A, B împart curba Γ în două arce: arcul inferior AMB de ... $y = \varphi_1(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ şi arcul superior ANB de ecuaţie $y = \varphi_2(x)$, ... $x \leqslant b$. Aria $\mathcal{A}'$, mărginită de arcul AMB, axa Ox şi dreptele $x = a$, ... b, este dată de

$$\mathcal{A}' = \int_a^b \varphi_1(x)\,\mathrm{d}x;$$

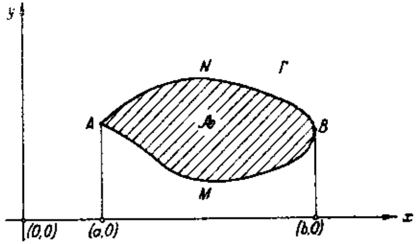

Fig. 58

aria $\mathcal{A}''$ mărginită de arcul ANB, axa Ox şi dreptele $x = a$, $x = b$ este dată de

$$\mathcal{A}'' = \int_a^b \varphi_2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Aria mărginită de curba închisă Γ este egală cu diferenţa celor două arii, anume

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}'' - \mathcal{A}' = \int_a^b \varphi_2(x)\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi_1(x)\mathrm{d}x = -\int_\Gamma y\,\mathrm{d}x,$$

curba Γ fiind parcursă în sens direct (sensul trigonometric).

Dacă adăugăm la rezultatul obţinut integrala curbilinie

$$\frac{1}{2}\int_\Gamma \mathrm{d}(xy) = \frac{1}{2}\int_\Gamma x\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\int_\Gamma y\,\mathrm{d}x$$

de valoare zero, obţinem pentru $\mathcal{A}$ expresia simetrică

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_\Gamma x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x, \tag{1}$$

formulă care ne dă prin intermediul unei integrale curbilinii aria mărginită de curba închisă Γ.

Observaţie

Condiţia ca paralelele la axa Oy să nu întîlnească decît în două puncte curba Γ a servit numai pentru demonstraţie şi poate fi înlăturată.

Într-adevăr, dacă această condiție nu este îndeplinită, introducem arce suplimentare (fig. 59), care împart domeniul D mărginit de curba Γ în subdomenii D', D'' pentru care contururile îndeplinesc această condiție; pentru fiecare subdomeniu avem

$$\mathcal{A}_{D'} = \frac{1}{2}\int_{\Gamma'} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{AB} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{BMA} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x,$$

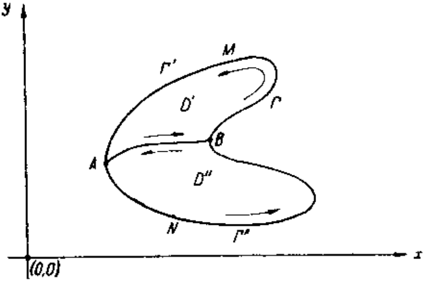

Fig. 59

$$\mathcal{A}_{D''} = \frac{1}{2}\int_{\Gamma''} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{BA} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{ANB} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x.$$

Aria $\mathcal{A}$ mărginită de curba Γ este suma ariilor $\mathcal{A}_{D'}$ și $\mathcal{A}_{D''}$ deci

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_{BMA} + \frac{1}{2}\int_{ANB} + \frac{1}{2}\int_{AB} + \frac{1}{2}\int_{BA} = \frac{1}{2}\int_{\Gamma},$$

conturul Γ fiind parcurs în sens direct.

Exemple

1) Să se calculeze aria mărginită de un arc a)cicloidei, (fig. 60),

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),$$

$$0 \leqslant t \leqslant 2\pi \text{ și axa } Ox.$$

Avem $\mathrm{d}x = a(1 - \cos t)\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y = a \sin t\ \mathrm{d}t$,

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{0}\left[a^2(t - \sin t)\sin t - a^2(1 - \cos t)^2\right]\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_{0}^{2\pi}(2 - t\sin t - 2\cos t)\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{a^2}{2}(2t + t\cos t - \cos t - 2\sin t)\Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2.$$

2) Să se calculeze aria elipsei $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Avem $x = a \cos t$, $y = b \sin t$,

$0 \leqslant t < 2\pi$; $dx = -a \sin t \, dt$, $dy = b \cos t \, dt$

deci

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (ab \cos^2 t + ab \sin^2 t) dt = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt = \pi ab.$$

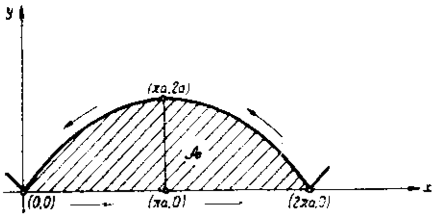

Fig. 60

3) Să se calculeze aria astroidei alungite $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ (fig. 61).

O reprezentare parametrică a astroidei alungite este

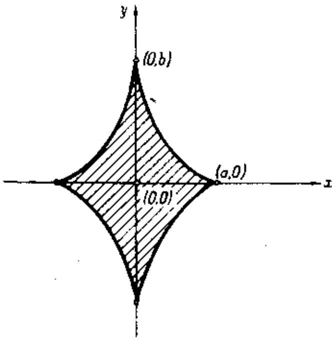

Fig. 61

$$x = a \cos^3 t, \; y = b \sin^3 t, \; 0 \leqslant t < 2\pi,$$

$$dx = -3a \cos^2 t \sin dt, \; dy = 3b \sin^2 t \cos t \, dt,$$

$$\mathcal{A} = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} ab \, [\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t] \, dt =$$

$$= \frac{3ab}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t \, dt = \frac{3}{8} ab\int_0^{2\pi} \sin^2 2t \, dt =$$

$$= \frac{3}{8} ab \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt = \frac{3\pi}{8} ab.$$

Dacă $a = b$, obținem aria astroidei, $\frac{3}{8}\pi a^2$.

4. Aria unui domeniu plan, mărginit de o curbă dată în coordonate polare

Ne propunem să calculăm aria mărginită de arcul de curbă AB dat de

$$r = f(\theta),\ a \leqslant \theta \leqslant b,$$

cu $f(\theta)$, mărginită și pozitivă pe intervalul $[a, b]$, și de razele vectoare OA, OB (fig. 62).

Fie $d': A = P_0,\ P_1, \ldots, P_{n-1},\ \ P_n = B$ o diviziune a arcului AB; acestei diviziuni îi corespunde diviziunea $d: a = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_{n-1} < \theta_n = b$ a intervalului $[a, b]$. Dacă m_k și M_k sînt marginile inferioară și superioară a funcției $f(\theta)$ în intervalul $[\theta_k, \theta_{k+1}]$ să considerăm sumele lui Darboux

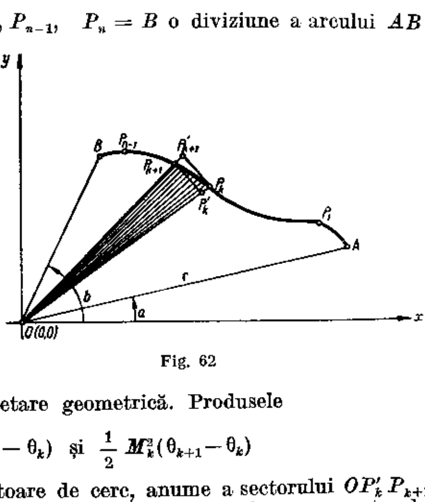

Fig. 62

$$s_d = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} m_k^2(\theta_{k+1} - \theta_k),$$

$$S_d = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} M_k^2(\theta_{k+1} - \theta_k),$$

care au următoarea interpretare geometrică. Produsele

$$\frac{1}{2} m_k^2(\theta_{k+1} - \theta_k) \ \text{ și } \ \frac{1}{2} M_k^2(\theta_{k+1} - \theta_k)$$

reprezintă ariile a două sectoare de cerc, anume a sectorului $OP'_k P_{k+1}$, de rază m_k, și $OP_k P'_{k+1}$ de rază M_k, respectiv; aria ω_k a sectorului $OP_k P_{k+1}$, mărginit de razele vectoare OP_k, OP_{k+1}, și arcul de curbă $P_k P_{k+1}$, este cuprinsă între aceste arii

$$\frac{1}{2} m_k^2(\theta_{k+1} - \theta_k) \leqslant \omega_k \leqslant \frac{1}{2} M_k^2(\theta_{k+1} - \theta_k),$$

deci aria căutată $\mathcal{A}$ este cuprinsă între s_d și S_d,

$$s_d \leqslant \mathcal{A} \leqslant S_d.$$

Fie (d_n) un șir de diviziuni ale intervalului $[a, b]$ cu $\nu(d_n) \to 0$ și să *presupunem că funcția $f^2(\theta)$ este integrabilă*; în această situație cele două șiruri (s_{d_n}) și (S_{d_n}) au o limită comună care este aria mărginită de arcul AB și de razele OA și OB, anume

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_a^b f^2(\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_{AB} r^2 \mathrm{d}\theta.$$

O b s e r v a ț i i

1) Dacă Γ este o curbă închisă, aria mărginită de curba Γ este dată de integrala curbilinie

$$\mathcal{A}=\frac{1}{2}\oint_{\Gamma} r^2 \mathrm{d}\theta. \tag{1}$$

2) Expresia diferențială

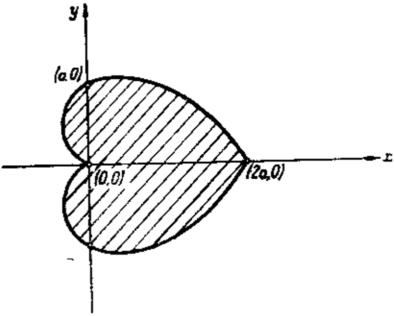

Fig. 63

$$\frac{1}{2}(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x)$$

în coordonate polare $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ se transformă în

$$\frac{1}{2} r^2 \mathrm{d}\theta$$

din care se deduce cu ușurință formula (1).

Exemple

1) Aria mărginită de cardioidă. Ecuația în coordonate polare a cardioidei (fig. 63) este dată de

$$r = a(1+\cos\theta), \qquad 0 \leqslant \theta < 2\pi,\ a > 0,$$

$$\mathcal{A}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1+\cos\theta)^2 \mathrm{d}\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

2) Să se calculeze aria mărginită de lemniscata lui Bernoulli

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2).$$

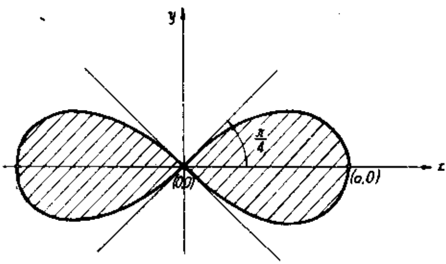

Fig. 64

În coordonate polare $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ ecuația lemniscatei este

$$r^2 = a^2\cos 2\theta.$$

O buclă a lemniscatei (fig. 64), se parcurge dacă $-\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}$, deci aria totală este

$$\mathcal{A} = 2\cdot\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\theta d\theta = a^2.$$

5. Aria unei suprafețe de rotație

Fie $y = f(x)$ o funcție continuă, pozitivă, cu derivată continuă pe $[a, b]$. Graficul funcției $f(x)$ pe $[a, b]$ este un arc AB, situat deasupra axei Ox. Ne propunem să găsim aria $\mathcal{A}$ a suprafeței generate de arcul AB cînd se rotește în jurul axei Ox, (fig. 65).

Fie d' : $A = P_0$, $P_1, \ldots, P_{n-1}$, $P_n = B$ o diviziune a arcului AB căreia îi corespunde o diviziune $d : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ a segmentului $[a, b]$. Dacă considerăm linia poligonală $P_0P_1\ldots P_{n-1}P_n$, prin rotația acestei linii poligonale în jurul axei Ox ia naștere o suprafață S_n formată din n trunchiuri de con. Trunchiul de con generat de rotația segmentului $P_k P_{k+1}$ are aria laterală

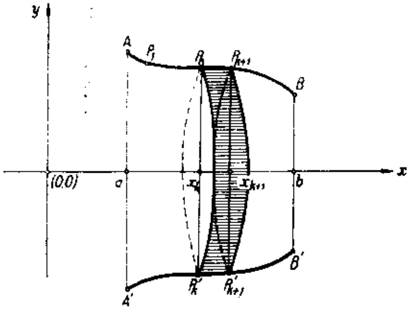

Fig. 65

$$\omega_k = 2\pi\frac{y_k + y_{k+1}}{2}\sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2}$$

Avem

$$y_{k+1} - y_k = f(x_{k+1}) - f(x_k) = (x_{k+1} - x_k)f'(\xi_k),\ \ \xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$$

deci

$$\omega_k = 2\pi\frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2}\sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\,(x_{k+1} - x_k)$$

și aria $\mathcal{A}_n$ a lui S_n este

$$\mathcal{A}_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2\pi\frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2}\sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\,(x_{k+1} - x_k);$$

să considerăm şi suma Riemann

$$\mathcal{A}_n^* = \sum_{k=0}^{n-1} 2\pi f(\xi_k) \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\,(x_{k+1} - x_k).$$

Avem imediat

$$\mathcal{A}_n - \mathcal{A}_n^* = 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k) - f(\xi_k) + f(x_{k+1}) - f(\xi_k)}{2} \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\,(x_{k+1} - x_k)$$

sau

$$|\mathcal{A}_n - \mathcal{A}_n^*| \leqslant 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|f(x_k) - f(\xi_k)| + |f(x_{k+1}) - f(\xi_k)|}{2} \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\,(x_{k+1} - x_k).$$

Funcţia $f(x)$ fiind continuă este şi uniform continuă pe $[a, b]$, deci pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $\eta(\varepsilon) > 0$ astfel încît să avem

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{1}{2\pi\sqrt{1 + \lambda^2}} \cdot \frac{\varepsilon}{b - a}$$

pentru orice $|x' - x''| < \eta(\varepsilon)$, $x', x'' \in [a, b]$, şi unde am notat $\lambda = \sup\limits_{x \in [a, b]} |f'(x)|$. Fie acum o diviziune d a intervalului $[a, b]$ cu $\nu(d) < \eta(\varepsilon)$; avem

$$|x_k - \xi_k| < \eta(\varepsilon), \; |x_{k+1} - \xi_k| < \eta(\varepsilon),$$

deci

$$|\mathcal{A}_n - \mathcal{A}_n^*| \leqslant 2\pi \frac{\sqrt{1 + \lambda^2}}{2\pi\sqrt{1 + \lambda^2}} \cdot \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = \varepsilon,$$

prin urmare pentru orice şir de diviziuni (d_n) ale intervalului $[a, b]$ cu $\nu(d_n) \to 0$, avem

$$\lim_{\nu(d_n)\to 0} \mathcal{A}_n = \lim_{\nu(d_n)\to 0} \mathcal{A}_n^*$$

însă

$$\lim_{\nu(d_n)\to 0} \mathcal{A}_n^* = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

deoarece f şi f' sînt continue, deci integrabile pe $[a, b]$; obţinem aşadar

$$\mathcal{A} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

O b s e r v a ţ i i

1) Formula (1) se mai poate scrie

$$\mathcal{A} = 2\pi \int_{AB} y\sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_{AB} y\,\mathrm{d}s. \tag{2}$$

2) Dacă arcul AB se înlocuiește cu o curbă închisă Γ, formula (2) rămîne încă valabilă, astfel încît aria $\mathcal{A}$ a suprafeței generată de o curbă închisă plană Γ (formată dintr-un număr finit de arce netede) prin rotație în jurul axei Ox (curba nu întîlnește axa Ox), este dată de integrala curbilinie $\mathcal{A} = 2\pi \oint_\Gamma y\, ds$.

3) Dacă $f(x)$ nu este pozitivă pe $[a, b]$, atunci formula (1) se înlocuiește cu

$$\mathcal{A} = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx. \tag{1'}$$

Exemple

1) Aria sferei se obține prin rotația semicercului $x^2 + y^2 = R^2$, $y \geqslant 0$ în jurul axei Ox. Avem

$$x = R\cos\theta, \quad y = R\sin\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,$$

deci

$$\mathcal{A} = 2\pi \int_0^\pi R\sin\theta\, R d\theta = 2\pi R^2 (-\cos\theta)\Big|_0^\pi = 4\pi R^2.$$

2) Torul este suprafața generată de un cerc, care se rotește în jurul unei drepte din planul său (dreapta nu întîlnește cercul). Să calculăm aria torului.

Dacă luăm cercul $x = x_0 + R\cos\theta$, $y = y_0 + R\sin\theta$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, $|y_0| > R$, și îl rotim în jurul axei Ox, aria căutată este

$$\mathcal{A} = 2\pi \int_0^{2\pi} (y_0 + R\sin\theta)\, R d\theta = 4\pi^2 |y_0| R.$$

3) Să se calculeze aria suprafeței obținute prin rotația unei bucle a cicloidei în jurul axei Ox.

Fie $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, o reprezentare parametrică a unei bucle a cicloidei. Avem

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt = a\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}\, dt = 2a \sin\frac{t}{2}\, dt$$

deci

$$\mathcal{A} = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)\, 2a \sin\frac{t}{2}\, dt = \frac{64}{3}\pi a^2.$$

6. Volumul corpurilor

Să considerăm un corp K în spațiu. Față de un sistem de axe de coordonate $Oxyz$ (fig. 66), corpul K este cuprins între planele paralele cu axa Oz de cote maximă b și minimă a.

Să presupunem că se cunoaşte legea de variaţie a ariei secţiunii S, în corp, printr-un plan paralel cu planul xOy de cotă z, anume funcţia $S = S(z)$ definită şi integrabilă pe intervalul $[a, b]$.

Fie $d : a = z_0 < z_1 < z_2 < \ldots < z_{n-1} < z_n = b$ o diviziune a intervalului $[a, b]$ şi M_k, m_k, marginile superioară şi inferioară a funcţiei $S(z)$ în intervalul $[z_k, z_{k+1}]$. Sumele lui Darboux

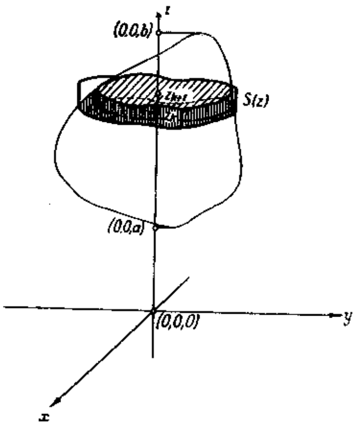

Fig. 66

$$S_d = \sum_{k=0}^{n-1} M_k (z_{k+1} - z_k),$$

$$s_d = \sum_{k=0}^{n-1} m_k (z_{k+1} - z_k),$$

au următoarea interpretare geometrică. S_d reprezintă suma volumelor a unei reuniuni de cilindri, care conţin în interior volumul V, iar s_d reprezintă suma volumelor unei reuniuni de cilindri, conţinuţi în întregime în volumul V, deci

$$s_d \leqslant V \leqslant S_d.$$

Fie (d_n) un şir de diviziuni ale intervalului $[a, b]$ cu $\nu(d_n) \to 0$; dacă $S(z)$ este integrabilă pe $[a, b]$, atunci limita comună a şirurilor (s_{d_n}) şi (S_{d_n}) este volumul V al corpului K, deci

$$V = \int_a^b S(z)\,\mathrm{d}\,z$$

Exemple

1) Să calculăm volumul elipsoidului $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leqslant 1$.

Tăiat cu un plan de cotă z, obţinem discul eliptic

$$\frac{c^2x^2}{a^2(c^2 - z^2)} + \frac{c^2y^2}{b^2(c^2 - z^2)} \leqslant 1,$$

care are aria

$$S(z) = \pi \frac{ab(c^2 - z^2)}{c^2}, \quad |z| \leqslant |c|.$$

Volumul V al elipsoidului va fi aşadar

$$V = \pi \frac{ab}{c^2} \int_{-c}^{c} (c^2 - z^2)\,\mathrm{d}z = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Pentru $a = b = c$ obținem volumul sferei de rază a.

2) Să calculăm volumul corpului definit de

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant \frac{2z}{c}, \quad 0 \leqslant z \leqslant h, \quad c > 0.$$

Tăiat cu un plan de cotă z $(0 \leqslant z \leqslant h)$, (fig. 67), obținem discul eliptic

$$\frac{cx^2}{2\,a^2z} + \frac{cy^2}{2b^2\,z} \leqslant 1$$

care are aria

$$S(z) = 2\pi \frac{ab\,z}{c}.$$

Volumul V al porțiunii de paraboloid va fi deci

$$V = 2\pi \frac{ab}{c} \int_0^h z\mathrm{d}z = \pi \frac{ab\,h^2}{c}.$$

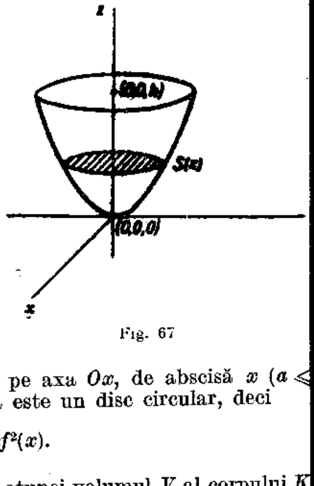

Fig. 67

Aplicație

Volumul corpurilor de rotație. Fie f o funcție pozitivă, definită pe intervalul $[a, b]$. Fie Q domeniul plan mărginit de arcul de curbă $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, dreptele $x = a$, $x = b$ și axa Ox. Prin rotația lui Q în jurul axei Ox ia naștere un corp de rotație K. Dacă secționăm corpul K cu un plan perpendicular pe axa Ox, de abscisă x $(a \leqslant x \leqslant b)$, secțiunea plană $S(x)$ obținută este un disc circular, deci

$$S(x) = \pi y^2 = \pi f^2(x).$$

Dacă $f^2(x)$ este integrabilă pe $[a, b]$, atunci volumul V al corpului K conform rezultatului obținut la alineatul precedent, este dat de

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (1$$

Observații

1) Dacă $f(x)$ nu este pozitivă pe $[a, b]$ formula (1) se înlocuiește c

$$V = \pi \int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x$$

care este identică cu (1), deoarece $f^2(x) = |f(x)|^2$.

2) Formula (1) se poate scrie şi sub forma unei integrale curbilinii

$$V = \pi \int_{AB} y^2 \, \mathrm{d}x, \tag{2}$$

formă valabilă şi pentru volumul generat de rotaţia unui domeniu plan D, mărginit de curba închisă Γ, în jurul axei Ox (domeniu care nu este intersectat de axa Ox), anume

$$V = \pi \oint_{\Gamma} y^2 \, \mathrm{d}x.$$

Exemple

1) Volumul limitat de sfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ poate fi obţinut prin rotaţia semidiscului circular $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, $y \geqslant 0$, deci

$$V = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2) \, \mathrm{d}x = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

2) Volumul obţinut prin rotaţia domeniului plan mărginit de arcul de lănţişor $y = a \operatorname{ch} \dfrac{x}{a}$, $0 \leqslant x \leqslant a$, dreptele $x = 0$, $x = a$ şi axa Ox, în jurul axei Ox, este dat de

$$V = \pi a^2 \int_0^a \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a} \, \mathrm{d}x = \pi a^2 \int_0^a \frac{1 + \operatorname{ch} \frac{2x}{a}}{2} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi a^3}{4} (2 + \operatorname{sh} 2).$$

7. Centrul de greutate al corpurilor filiforme

După cum se ştie din statică, dacă $M_k(x_k, y_k, z_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ sînt n puncte, care sînt centrele de greutate a n corpuri, de mase, respectiv,

$$m_1, m_2, \ldots, m_n,$$

atunci coordonatele (x_G, y_G, z_G) ale centrului de greutate ale celor n corpuri sînt date de

$$x_G = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}, \quad y_G = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}, \quad z_G = \frac{\sum_{k=1}^{n} z_k m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}.$$

Să considerăm un corp filiform, un fir, adică un corp la care una din dimensiuni este mult mai mare decît celelalte două; un astfel de corp îl asimilăm cu un arc de curbă AB plană sau în spațiu. Să presupunem că firul nu este omogen, ci are densitatea $\rho(x, y, z)$, variabilă cu punctul $P(x, y, z)$ de pe arcul AB, (fig. 68).

Dacă $A = P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}, P_n = B$ sînt $n+1$ puncte pe arcul AB,

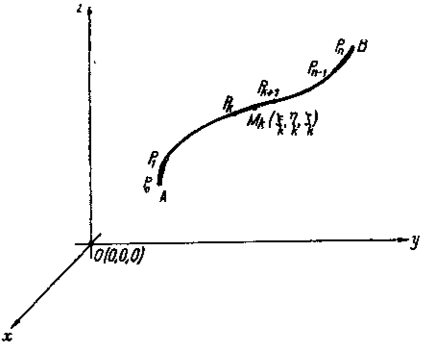

Fig. 68

substituim arcului AB linia poligonală $P_0\, P_1 \ldots P_{n-1}\, P_n$. Fie

$$M_k(\xi_k,\ \eta_k,\ \zeta_k)$$

centrul de greutate al segmentului $P_k\ P_{k+1}$, neomogen, de masă $m_k = \rho_k \cdot P_k P_{k+1}$, $\rho_k = \rho\ (\xi_k', \eta_k', \zeta_k')$.

Centrul de greutate al liniei poligonale este dat de

$$\overline{x}_G = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \cdot \rho_k \cdot s_k}{\sum_{k=0}^{n-1} \rho_k \cdot s_k}, \quad \overline{y}_G = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \eta_k \cdot \rho_k \cdot s_k}{\sum_{k=0}^{n-1} \rho_k \cdot s_k},$$

$$\overline{z}_G = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \rho_k \cdot \zeta_k \cdot s_k}{\sum_{k=0}^{n-1} \rho_k \cdot s_k},$$

unde am notat cu s_k lungimea segmentului $P_k\ P_{k+1}$.

Observăm că atît la numărătorul cît și la numitorul lui $\overline{x}_G, \overline{y}_G, \overline{z}_G$ avem sume integrale care conduc la integrale curbilinii în raport cu arcul.

Astfel dacă (d_n) este un şir de diviziuni ale arcului AB cu $\nu(d_n) \to 0$, avem

$$\lim_{\nu(d_n)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \cdot \rho_k \cdot s_k = \int_{AB} x\,\rho(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}s,$$

$$\lim_{\nu(d_n)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \eta_k \cdot \rho_k \cdot s_k = \int_{AB} y\,\rho(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}s,$$

$$\lim_{\nu(d_n)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \zeta_k \cdot \rho_k\, s_k = \int_{AB} z\,\rho(x, y, z)\,\mathrm{d}s$$

şi

$$\lim_{\nu(d_n)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \rho_k\, s_k = \int_{AB} \rho(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}s,$$

astfel încît centrul de greutate al arcului neomogen AB este dat de

$$x_G = \frac{\int_{AB} x\,\rho(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}s}{\int_{AB} \rho(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}s},\quad y_G = \frac{\int_{AB} y\,\rho(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}s}{\int_{AB} \rho(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}s},$$

$$z_G = \frac{\int_{AB} z\,\rho(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}s}{\int_{AB} \rho(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}s}. \tag{1}$$

Observaţii

1) Dacă arcul este omogen, $\rho = \text{const.}$, şi formulele (1) devin

$$x_G = \frac{\int_{AB} x\,\mathrm{d}s}{\int_{AB} \mathrm{d}s},\quad y_G = \frac{\int_{AB} y\,\mathrm{d}s}{\int_{AB} \mathrm{d}s},\quad z_G = \frac{\int_{AB} z\,\mathrm{d}s}{\int_{AB} \mathrm{d}s}. \tag{1'}$$

2) Dacă arcul (neomogen) este plan, coordonatele $(x_G,\ y_G)$ ale centrului de greutate sînt date de

$$x_G = \frac{\int_{AB} x\,\rho(x,\ y)\,\mathrm{d}s}{\int_{AB} \rho(x,\ y)\,\mathrm{d}s},\quad y_G = \frac{\int_{AB} y\,\rho(x,\ y)\,\mathrm{d}s}{\int_{AB} \rho(x,\ y)\,\mathrm{d}s}, \tag{2}$$

iar dacă arcul plan este omogen, sînt date de

$$x_G = \frac{\int_{AB} x\,ds}{\int_{AB} ds}, \quad y_G = \frac{\int_{AB} y\,ds}{\int_{AB} ds}. \tag{2'}$$

Aplicație

Să considerăm un arc plan AB, omogen. Coordonatele centrului de greutate sînt date de (2'). Să observăm însă că

$$\int_{AB} ds = L \text{ (lungimea arcului } AB);$$

putem scrie, de exemplu, pentru a doua formulă din (2'),

$$L \cdot y_G = \int_{AB} y\,ds$$

sau, înmulțind cu 2π, și presupunînd că arcul AB este situat deasupra axei Ox deci $y_G > 0$,

$$2\pi y_G \cdot L = 2\pi \int_{AB} y\,ds = \mathcal{A},$$

unde $\mathcal{A}$ este aria suprafeței generate de arcul plan AB prin rotație în jurul axei Ox; am obținut astfel

Prima teoremă a lui Guldin. Aria suprafeței de rotație, generată prin rotația unui arc plan AB (rectificabil) în jurul unei drepte din planul său (dreaptă care nu întîlnește arcul AB), este egală cu lungimea arcului AB, înmulțită cu lungimea cercului descris de centrul de greutate al arcului AB, în jurul aceleiași drepte.

Exemple

1) Să se găsească centrul de greutate al arcului de cicloidă $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, omogen.

Din motive de simetrie centrul de greutate se găsește pe dreapta $x = \pi a$, deci nu avem de calculat decît pe y_G. Avem $ds = 2a \sin \frac{t}{2}\,dt$, deci

$$y_G = \frac{2a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sin \frac{t}{2}\,dt}{2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2}\,dt},$$

$$\int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sin \frac{t}{2}\,dt = 2\int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2}\,dt = -4\int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2}\right) d\left(\cos \frac{t}{2}\right) =$$

$$= -4\left(\cos \frac{t}{2} - \frac{1}{3}\cos^3 \frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{16}{3},$$

$$\int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2}\,dt = -2\cos \frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi} = 4.$$

Centrul de greutate al arcului de cicloidă are aşadar coordonatele

$$x_G = \pi a, \quad y_G = \frac{4}{3}\,a.$$

2) Centrul de greutate al unui semicerc, $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$, îl putem afla folosind teorema lui Guldin. Într-adevăr, rotind semicercul dat în jurul axei Ox, obţinem sfera de rază R; centrul de greutate al semicercului dat se găseşte pe axa Oy, deci $x_G = 0$; pentru y_G aplicăm prima teoremă a lui Guldin

$$\pi R \cdot 2\pi y_G = 4\pi R^2,$$

deci $y_G = \dfrac{2}{\pi}\,R$.

3) *Suprafaţa torului*. Cu teorema lui Guldin putem obţine imediat suprafaţa torului generat de cercul $x = x_0 + R\cos t$, $y = y_0 + R\sin t$, $0 \leqslant t < 2\pi$, prin rotaţie în jurul axei Ox. Avem cu $|y_0| > R$,

$$S = 2\pi\,|y_0| \cdot 2\pi R = 4\pi^2\,|y_0|\,R.$$

Capitolul IV

INTEGRALE DUBLE. INTEGRALE DE SUPRAFAŢĂ

§ 1. INTEGRALE DUBLE

1. Funcţii integrabile

a) Fie $f(x, y)$ o funcţie definită şi mărginită pe un domeniu plan D,

$$m \leqslant f(x, y) \leqslant M, \qquad (x, y) \in D;$$

domeniul D îl vom considera închis şi mărginit, deci interior unui interval bidimensional $I = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$, (fig. 69).

Frontiera domeniului D este formată dintr-o curbă închisă Γ, alcătuită dintr-un număr finit de arce netede.

Să presupunem că $f(x, y)$ este şi pozitivă pe D, deci $f(x, y) \geqslant 0$ pentru orice $(x, y) \in D$; în această situaţie, graficul funcţiei

$$z = f(x, y), \qquad (x, y) \in D$$

reprezintă o suprafaţă S situată în întregime deasupra planului xOy avînd ca proiecţie pe planul xOy domeniul D.

Ne propunem să găsim volumul V al corpului mărginit de suprafaţa S, planul xOy şi cilindrul (proiectant) cu generatoarele paralele cu axa Oz şi a cărui curbă directoare în planul xOy este curba Γ.

b) În vederea acestui scop vom da cîteva noţiuni.

Fie diviziunile

$$\delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

$$\bar{\delta} : c = y_0 < y_1 < \ldots < y_{m-1} < y_m = d$$

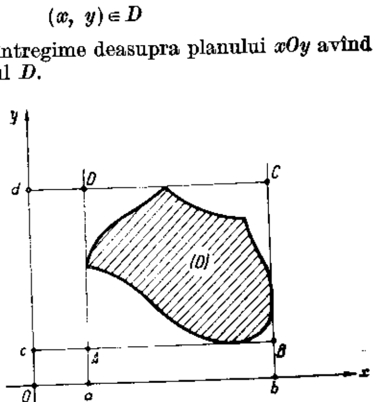

Fig. 69

ale intervalelor $[a, b]$, $[c, d]$ respectiv. Paralelele la axa Ox prin punctele diviziunii $\overline{\delta}$ şi la axa Oy prin punctele diviziunii δ împart intervalul I în $n \times m$ subintervale (fig. 70), $I_{ij} = \{(x, y) \mid x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1},\ y_j \leqslant y \leqslant y_{j+1}\}$. Dintre aceste subintervale numai o parte sînt conţinute în întregime în domeniul D; să notăm mulţimea lor cu $\mathfrak{M}$. O parte din subintervalele I_{ij} conţin şi puncte ale domeniului D şi ale diferenţei $I-D$; notăm mulţimea lor cu $\mathfrak{M}'$. În fine, există subintervale exterioare intervalului D; notăm mulţimea lor cu $\mathfrak{M}''$.

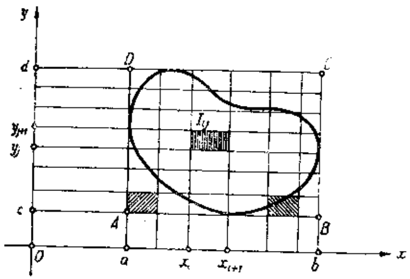

Fig. 70

D e f i n i ţ i e. Vom numi o diviziune Δ a domeniului D, mulţimea subintervalelor I_{ij} dată de $\mathfrak{M} \cup \mathfrak{M}'$ şi o vom nota

$$\Delta = (\delta_1,\ \delta_2, \ldots, \delta_p),$$

ordinea de numerotare a subintervalelor δ_k fiind indiferentă.

Din definiţia dată rezultă

$$\delta_k \cap D \neq \varnothing, \qquad k = 1, 2, \ldots, p$$

şi pentru orice $k > p$, $\delta_k \cap D = \varnothing$.

Vom numi *norma* unei diviziuni Δ şi o vom nota $\nu(\Delta)$, numărul pozitiv

$$\nu(\Delta) = \max_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n-1 \\ 0 \leqslant j \leqslant m-1}} \{x_{i+1} - x_i,\ y_{j+1} - y_j\} = \max(\nu(\delta),\ \nu(\overline{\delta}))$$

deci

$$x_{i+1} - x_i \leqslant \nu(\Delta), \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$y_{j+1} - y_j \leqslant \nu(\Delta), \qquad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Să considerăm diviziunile δ' şi $\overline{\delta}'$ ale intervalelor $[a, b]$ şi $[c, d]$ respectiv, mai fine decît δ şi $\overline{\delta}$, deci

$$\delta' \supset \delta, \qquad \overline{\delta}' \supset \overline{\delta};$$

diviziunilor δ' şi $\overline{\delta}'$ le corespunde o diviziune Δ' a domeniului D, *mai fină* decît diviziunea Δ,

$$\Delta' \supset \Delta,$$

şi dacă notăm cu $\nu(\Delta')$ norme diviziunii Δ' avem

$$\nu(\Delta') \leqslant \nu(\Delta),$$

deoarece

$$\nu(\delta') \leqslant \nu(\delta), \qquad \nu(\bar{\delta}') \leqslant \nu(\bar{\delta})$$

şi

$$\nu(\Delta') = \max(\nu(\delta'), \nu(\bar{\delta}')) \leqslant \max(\nu(\delta), \nu(\bar{\delta})).$$

Observaţii

1) Faptul că diviziunea Δ' este mai fină decît diviziunea Δ înseamnă că orice interval al diviziunii Δ' este conţinut într-un interval al diviziunii Δ şi acest fapt se întîmplă dacă şi numai dacă $\delta' \supset \delta$ şi $\bar{\delta}' \supset \bar{\delta}$.

2) Dacă Δ şi Δ_1 sînt două diviziuni ale aceluiaşi domeniu D şi dacă $\nu(\Delta_1) \leqslant \nu(\Delta)$ nu înseamnă că diviziunea Δ_1 este mai fină decît diviziunea Δ.

c) Să considerăm acum o diviziune Δ a domeniului D în care funcţia $f(x, y)$ este definită şi mărginită. Fie

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p$$

intervalele bidimensionale ale diviziunii Δ, numerotate într-o ordine oarecare şi

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$$

ariile corespunzătoare ale acestor intervale. Să notăm cu m_k, M_k marginile inferioară şi superioară ale funcţiei $f(x, y)$ în δ_k

$$m_k \leqslant f(x, y) \leqslant M_k, \quad (x, y) \in \delta_k \subset \Delta$$

şi să formăm sumele Darboux

$$s_\Delta = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \ldots + m_p\omega_p \quad \text{(suma inferioară Darboux)},$$

$$S_\Delta = M_1\omega_1 + M_2\omega_2 + \ldots + M_p\omega_p \quad \text{(suma superioară Darboux)};$$

avem evident

$$\Omega m \leqslant s_\Delta \leqslant S_\Delta \leqslant M\Omega,$$

unde am notat cu Ω aria domeniului D, iar cu m şi M marginile inferioară şi superioară a lui f în D.

Se demonstrează la fel ca pentru integrala definită (numită şi *integrala simplă*) următoarele proprietăţi:

1) Dacă Δ' este o diviziune a domeniului D mai fină decît Δ, atunci

$$s_\Delta \leqslant s_{\Delta'} \leqslant S_{\Delta'} \leqslant S_\Delta.$$

2) Oricare ar fi diviziunile Δ' şi Δ'' avem

$$s_{\Delta'} \leqslant S_{\Delta''}.$$

3) Dacă Δ^* este mulțimea tuturor diviziunilor domeniului D, atunci

$$\sup_{\Delta\in\Delta^*} s_\Delta \leqslant \inf_{\Delta\in\Delta^*} S_\Delta .$$

4) Mulțimea $\underset{\Delta\in\Delta^*}{s_\Delta}$ este mărginită superior, iar mulțimea $\underset{\Delta\in\Delta^*}{S_\Delta}$ este mărginită inferior.

5) Dacă (ξ_k, η_k) este un punct oarecare al intervalului $\delta_k \in \Delta$ și σ_Δ suma

$$\sigma_\Delta = \omega_1 f(\xi_1, \eta_1) + \omega_2 f(\xi_2, \eta_2) + \ldots + \omega_p f(\xi_p, \eta_p),$$

atunci

$$s_\Delta \leqslant \sigma_\Delta \leqslant S_\Delta ;$$

sumele σ_Δ se numesc sume Riemann relative la diviziunea Δ.

6) Între sumele Riemann și sumele Darboux ale unei diviziuni Δ avem următoarele relații

$$s_\Delta = \inf_{(\xi_k, \eta_k)\in\delta_k} \sigma_\Delta, \quad S_\Delta = \sup_{(\xi_k, \eta_k)\in\delta_k} \sigma_\Delta$$

***d) Interpretarea geometrică a sumelor** s_Δ, S_Δ **și** σ_Δ.* Să considerăm un interval $\delta_k = \{(x, y) \mid x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}, y_j \leqslant y \leqslant y_{j+1}\}$ care aparține diviziunii Δ, și S_k, partea din suprafața S care se proiectează pe planul xOy în δ_k; dacă M_k și m_k sînt marginile superioară și inferioară ale funcției $f(x, y) \geqslant 0$ în δ_k, produsele

$$\omega_k m_k \text{ și } \omega_k M_k$$

reprezintă respectiv volumele paralelipipedelor de bază δ_k (fig. 71) și înălțime m_k și M_k. Se observă că volumul V_k mărginit de partea de

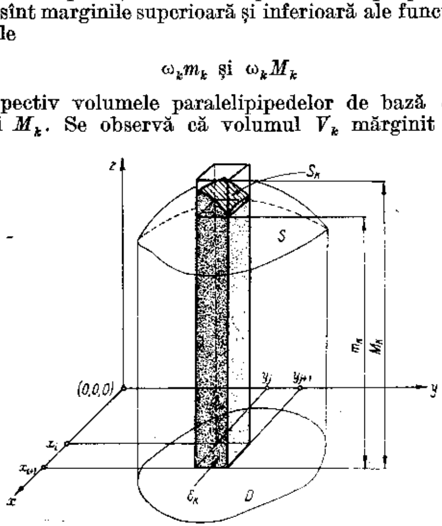

Fig. 71

suprafață S_k, de intervalul δ_k și de cilindrul proiectant (format din fețe plane) al conturului lui S_k pe conturul lui δ_k este cuprins între cele două volume

$$\omega_k m_k \leqslant V_k \leqslant \omega_k M_k,$$

prin urmare, însumînd în raport cu $k = 1,2, \ldots, p$, avem

$$s_\Delta \leqslant V \leqslant S_\Delta.$$

Produsul

$$f(\xi_k, \eta_k)\, \omega_k \text{ cu } (\xi_k, \eta_k) \in \delta_k$$

reprezintă volumul unui paralelipiped de bază δ_k și înălțime $f(\xi_k, \eta_k)$; avem $m_k \leqslant f(\xi_k, \eta_k) \leqslant M_k$, deci

$$m_k \omega_k \leqslant f(\xi_k, \eta_k)\, \omega_k \leqslant \omega_k M_k,$$

de unde prin însumare rezultă și

$$s_\Delta \leqslant \sigma_\Delta \leqslant S_\Delta.$$

Toate proprietățile enumerate mai sus sînt adevărate pentru funcția f, definită și mărginită în D. Faptul că funcția f este și pozitivă în D a servit numai pentru a da o semnificație geometrică sumelor s_Δ, S_Δ și σ_Δ.

Putem să dăm acum următoarea

D e f i n i ț i e. Fie f o funcție definită și mărginită pe un domeniu închis și mărginit $D \subset R^2$. Se spune că f este integrabilă Riemann pe D dacă pentru orice șir de diviziuni (Δ_n) ale domeniului D cu $\nu(\Delta_n) \to 0$ cînd $n \to \infty$, șirurile sumelor lui Darboux (s_{Δ_n}) și (S_{Δ_n}) au o limită comună finită $\mathcal{V}$. Limita însăși se numește integrala dublă a funcției f întinsă la domeniul D și se notează

$$\mathcal{V} = \iint_D f(x, y)\, \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

Dacă $f(x, y)$ este și pozitivă în D atunci $\mathcal{V}$ reprezintă volumul corpului mărginit de suprafața $z = f(x, y)$ care se proiectează pe planul xOy în domeniul D, de planul xOy și de cilindrul proiectant al conturului lui S pe conturul lui D.

Această definiție corespunde teoremei 2′, A Cap. I, § 1, al. 6.

O b s e r v a ț i i.

1) Ținînd seamă de definiția mulțimilor măsurabile din spațiu A, cap. I, (§1, al. 6), urmează că definiția dată este echivalentă cu

$$\sup_{\Delta \in \Delta^*} s_\Delta = \inf_{\Delta \in \Delta^*} S_\Delta = \mathcal{V},$$

unde Δ^* este mulțimea tuturor diviziunilor intervalului D.

De obicei se notează

$$\sup s_\Delta = \underline{\iint_D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\inf S_\Delta = \overline{\iint_D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

şi se numesc, respectiv, *integrala dublă inferioară Darboux* şi *integrala dublă superioară Darboux.*

2) Domeniul D se numeşte *domeniul de integrare.*

3) Expresia $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ se numeşte *elementul de arie* în coordonate carteziene.

4) Dacă σ_{Δ_n} este o sumă Riemann *oarecare* relativă la diviziunea Δ_n, avem

$$s_{\Delta_n} \leqslant \sigma_{\Delta_n} \leqslant S_{\Delta_n},$$

deci, dacă f este integrabilă, rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n} = \mathcal{V},$$

adică şi sumele Riemann sînt convergente către limita comună a celor două şiruri ale sumelor Darboux (s_{Δ_n}) şi (S_{Δ_n}). Reciproca acestui rezultat este de asemenea adevărată astfel încît avem următoarea definiţie echivalentă a integrabilităţii :

D e f i n i ţ i e. Spunem că o funcţie $f(x, y)$ definită şi mărginită pe domeniul închis şi mărginit D este integrabilă Riemann pe D, dacă pentru orice şir de diviziuni (Δ_n) cu norma $\nu(\Delta_n) \to 0$ cînd $n \to \infty$, şi pentru orice alegere a punctelor $(\xi_k, \eta_k) \in \delta_k \subset \Delta_n$, şirurile Riemann corespunzătoare (σ_{Δ_n}) au o limită comună, finită, $\mathcal{V}$.

2. Criteriu de integrabilitate

C r i t e r i u l l u i D a r b o u x. Fie $f(x,y)$ o funcţie definită şi mărginită pe un domeniu închis şi mărginit D. Funcţia $f(x, y)$ este integrabilă pe D, dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $\eta(\varepsilon) > 0$ astfel încît pentru orice diviziune Δ a domeniului D cu $\nu(\Delta) < \eta(\varepsilon)$ să avem $S_\Delta - s_\Delta < \varepsilon$.

Demonstraţie. *Condiţia este necesară.* Presupunem că f este integrabilă p D. Fie $\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \ldots \subset \Delta_n \subset \ldots$ un şir de diviziuni ale domeniului D, rdonate după fineţe ; avem şi

$$\nu(\Delta_1) \geqslant \nu(\Delta_2) \geqslant \ldots \geqslant \nu(\Delta_n) \geqslant \ldots$$

cu

$$\lim_{n\to\infty} \nu(\Delta_n) = 0.$$

Dacă notăm

$$\mathcal{V} = \iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

funcţia f fiind integrabilă, pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $N(\varepsilon)$, astfel încît pentru orice $n > N(\varepsilon)$ avem

$$s_{\Delta_n} > \mathcal{V} - \frac{\varepsilon}{2}, \quad S_{\Delta_n} < \mathcal{V} + \frac{\varepsilon}{2}$$

deci

$$S_{\Delta_n} - s_{\Delta_n} < \varepsilon.$$

Condiţia este suficientă. Fie $\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \ldots \subset \Delta_n \subset \ldots$ un şir de diviziuni (arbitrar) al domeniului D cu $\nu(\Delta_n) \to 0$ cînd $n \to \infty$. Pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există $N(\varepsilon)$, astfel încît pentru orice $n > N(\varepsilon)$ avem

$$S_{\Delta_n} - s_{\Delta_n} < \varepsilon.$$

Dacă

$$\lim_{n \to \infty} s_{\Delta_n} = \mathcal{V}', \quad \lim_{n \to \infty} S_{\Delta_n} = \mathcal{V}'',$$

avem neegalităţile

$$s_{\Delta_n} \leqslant \mathcal{V}' \leqslant \mathcal{V}'' \leqslant S_{\Delta_n},$$

deci

$$\mathcal{V}'' - \mathcal{V}' < \varepsilon$$

şi cum ε este oarecare, iar $\mathcal{V}'$, $\mathcal{V}''$ sînt fixe, urmează că

$$\mathcal{V}' = \mathcal{V}'',$$

deci f este integrabilă Riemann pe D.

3. Clase de funcţii integrabile

Teoremă. Funcţiile continue pe un domeniu închis şi mărginit D sînt integrabile pe D.

Demonstraţie. Fie $f(x, y)$ o funcţie continuă pe domeniul închis şi mărginit D. Funcţia $f(x, y)$ este şi mărginită pe D, deci

$$m \leqslant f(x, y) \leqslant M, \ (x, y) \in D.$$

Fie $\Delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p)$ o diviziune a domeniului D; avem

$$m_k \leqslant f(x, y) \leqslant M_k, \ (x, y) \in \delta_k;$$

există două puncte $(x_k', y_k') \in \delta_k$, $(x_k'', y_k'') \in \delta_k$, astfel încît

$$f(x_k', y_k') = m_k, \ f(x_k'', y_k'') = M_k.$$

Să considerăm sumele lui Darboux relative la diviziunea Δ

$$s_\Delta = \sum_{k=1}^{p} f(x_k', y_k')\,\omega_k = \sum_{k=1}^{p} m_k\,\omega_k,$$

$$S_\Delta = \sum_{k=1}^{p} f(x_k'', y_k'')\,\omega_k = \sum_{k=1}^{p} M_k\,\omega_k,$$

prin urmare

$$S_\Delta - s_\Delta = \sum_{k=1}^{p} [f(x_k'', y_k'') - f(x_k', y_k')]\,\omega_k.$$

O funcție continuă în domeniul închis și mărginit D este și uniform continuă, deci pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $\eta(\varepsilon) > 0$, astfel încît pentru orice pereche de puncte (x', y'), $(x'', y'') \in D$, avem

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| < \frac{\varepsilon}{A}$$

dacă

$$|x' - x''| < \eta(\varepsilon),\ |y' - y''| < \eta(\varepsilon)$$

am notat cu A aria intervalului I care conține domeniul D, deci $A = (b-a)(d-c)$.

Să alegem diviziunea Δ astfel încît $\nu(\Delta) < \eta(\varepsilon)$; în această situație

$$M_k - m_k \leqslant \frac{\varepsilon}{A},$$

deci

$$S_\Delta - s_\Delta = \sum_{k=1}^{p} (M_k - m_k)\,\omega_k \leqslant \frac{\varepsilon}{A}\sum_{k=1}^{p} \omega_k < \varepsilon,$$

deoarece $\sum\limits_{k=1}^{p} \omega_k \leqslant A$. Teorema este demonstrată.

Clasa funcțiilor integrabile Riemann este însă mai întinsă decît clasa funcțiilor continue. Acest fapt reiese din următoarea

Teoremă. Dacă mulțimea T a punctelor de discontinuitate a unei funcții mărginite f, definită pe un domeniu închis și mărginit D ($T \subset D$) este formată dintr-un număr finit de arce netede, atunci funcția f este integrabilă Riemann pe D.

Demonstrație. *a*) Pentru demonstrația teoremei enunțate avem nevoie de următoarea

Lemă. Un arc de curbă AB definit de $y = \varphi(x)$, cu φ continuă pe intervalul închis și mărginit $[a, b]$, este o mulțime de arie nulă.

Demonstrația lemei. Este suficient să arătăm că arcul AB are aria exterioară nulă. Dacă φ este continuă pe $[a, b]$ este și uniform continuă pe $[a, b]$, deci pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $\eta(\varepsilon) > 0$, astfel încît să avem

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

dacă

$$|x' - x''| < \eta(\varepsilon), \qquad x', x'' \in [a, b].$$

Dacă $\varphi(x)$ este continuă pe $[a, b]$ este şi mărginită pe $[a, b]$, prin urmare arcul AB este conţinut într-un interval bidimensional I dat de

$$I = \{(x, \varphi(x)) \mid a \leqslant x \leqslant b, \quad m \leqslant \varphi(x) \leqslant M\},$$

unde m şi M sînt marginile inferioară şi superioară ale lui φ în $[a, b]$.

Fie Δ o diviziune a intervalului I formată din pătrate de latură $r \leqslant \inf\left[\frac{\varepsilon}{3(b-a)}, \eta(\varepsilon)\right]$; fie $\Delta' = (\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n)$, $\delta_k \subset \Delta$, $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$, o diviziune a arcului AB, adică mulţimea pătratelor conţinute în Δ şi care au cu arcul AB intersecţia nevidă (fig. 72); fie $d: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, diviziunea intervalului $[a, b]$ care a condus la diviziunea Δ a intervalului bidimensional I. Deoarece $r \leqslant \eta(\varepsilon)$, rezultă că oscilaţia funcţiei φ în orice subinterval $[x_k, x_{k+1}]$ este cel mult egală cu $\frac{\varepsilon}{3(b-a)}$.

Subarcul de curbă $y = \varphi(x)$, $x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}$ poate să aparţină la cel mult 3 pătrate δ_i, deci aria exterioară a acestui subarc este inferioară lui

$$\frac{3\varepsilon}{3(b-a)}(x_{k+1} - x_k) = \frac{\varepsilon}{b-a}(x_{k+1} - x_k);$$

în consecinţă, aria exterioară a arcului AB este inferioară sumei

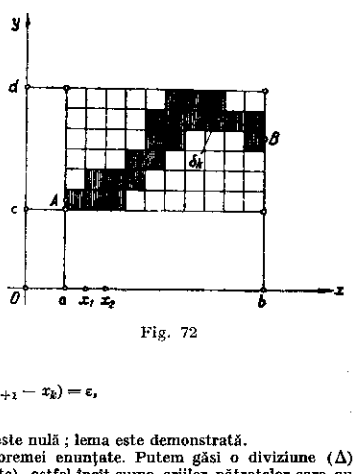

Fig. 72

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\varepsilon}{(b-a)}(x_{k+1} - x_k) = \varepsilon,$$

de unde rezultă că aria exterioară a arcului AB este nulă ; lema este demonstrată.

b) Să revenim acum la demonstraţia teoremei enunţate. Putem găsi o diviziune (Δ) a domeniului D (formată de exemplu din pătrate), astfel încît suma ariilor pătratelor care au puncte comune cu T să fie $\leqslant \frac{\varepsilon}{2A}$, unde $A = M' - m'$, M' şi m' fiind marginile superioară şi inferioară a funcţiei f în D.

Dacă $\mathfrak{M}$ este mulţimea acestor pătrate, urmează că pe $D - \mathfrak{M}$ funcţia f este continuă. Dacă S_Δ şi s_Δ sînt sumele lui Darboux relative la domeniul D şi S'_Δ, s'_Δ sumele lui Darboux relative la domeniul format de mulţimea pătratelor din $\mathfrak{M}$, avem

$$S'_\Delta - s'_\Delta \leqslant \frac{\varepsilon}{2A}(M - m) = \varepsilon,$$

deoarece $M_k - m_k \leqslant M - m = A$.

Fie S''_Δ şi s''_Δ sumele Darboux relative la $D - \mathfrak{M}$. Pe $D - \mathfrak{M}$ să înlocuim diviziunea Δ cu diviziunea Δ', astfel încît

$$S''_{\Delta'} - s''_{\Delta'} \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

fapt ce este posibil, deoarece pe $D - \mathfrak{M}$ funcţia f este continuă, deci integrabilă. Dacă considerăm acum diviziunea Δ'' a domeniului D care pe $D - \mathfrak{M}$ este diviziunea Δ', iar pe $\mathfrak{M}$ diviziunea Δ, avem

$$S_{\Delta''} - s_{\Delta''} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

de unde rezultă că f este integrabilă pe D. Teorema este demonstrată.

4. Proprietățile integralelor duble

Se demonstrează la fel ca și pentru integrale simple următoarele proprietăți :

a) Dacă f este integrabilă pe D și $\lambda \in R$, atunci λf este integrabilă pe D și

$$\iint_D \lambda f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lambda \iint_D f(x, y)\,dx\,dy.$$

b) Dacă f și g sînt integrabile pe D, funcția sumă $f+g$ este integrabilă pe D și

$$\iint_D [f(x,y) + g(x,y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

c) Dacă $f(x, y) \geqslant 0$, $(x, y) \in D$ este integrabilă pe D, atunci

$$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \geqslant 0.$$

d) Dacă $f(x, y) \geqslant g(x, y)$ pentru orice $(x, y) \in D$ și dacă f și g sînt integrabile pe D, atunci

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \geqslant \iint_D g(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

e) Dacă f este integrabilă pe D, iar domeniul D este împărțit în două subdomenii (fig. 73), D_1 și D_2, printr-o curbă C de arie nulă, atunci f este integrabilă pe D_1 și pe D_2 și are loc egalitatea

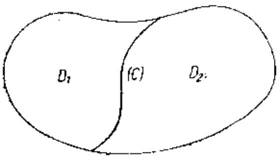

Fig. 73

$$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D_1} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{D_2} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

f) Dacă f este integrabilă pe D, atunci $|f|$ este integrabilă pe D și

$$\left|\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| \leqslant \iint_D |f(x, y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

g) Formule de medie. 1) Dacă f este mărginită și integrabilă pe D

$$m \leqslant f(x, y) \leqslant M, \quad (x, y) \in D,$$

atunci există un număr μ cuprins între m și M, astfel încît

$$\iint_D f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \mu\Omega,$$

unde Ω este aria domeniului D.

2) Dacă $f(x, y)$ este continuă pe D, atunci există un punct $(\xi, \eta) \in D$, astfel încît să avem egalitatea

$$\iint_D f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \Omega f(\xi, \eta); \tag{1}$$

formula (1) se numește *formula mediei* pentru integrale duble.

3) Dacă $f(x, y)$ este continuă pe D, iar $p(x, y)$ este integrabilă și pozitivă pe D, atunci există un punct $(\xi', \eta') \in D$, astfel încît să avem

$$\iint_D f(x, y)\, p(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = f(\xi', \eta') \iint_D p(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y; \tag{2}$$

relația (2) se numește *formula generală a mediei pentru integrale duble.*

5. Calculul integralelor duble

Să considerăm mai întîi pentru D un interval $I = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant$ $c \leqslant y \leqslant d\}$ și f integrabilă pe I. Avem următoarea

T e o r e m ă. Dacă $f(x, y)$ este mărginită și integrabilă pe I și dacă

***a)* pentru orice $x \in [a, b]$ există integrala**

$$F(x) = \int_c^d f(x, y)\, \mathrm{d}y,$$

***b)* $F(x)$ este integrabilă pe $[a, b]$, atunci**

$$\iint_I f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x.$$

Demonstrație. Să considerăm o diviziune Δ a intervalului bidimensional I (fig. 74), realizată de dreptele $x = x_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $y = y_k$, $k = 0, 1, \ldots, m$, cu

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

$$c = y_0 < y_1 < \ldots < y_{m-1} < y_m = d;$$

să notăm cu δ_{ik} intervalul bidimensional definit de

$$\delta_{ik} = \{(x, y) \mid x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1},\ y_k \leqslant y \leqslant y_{k+1}\}$$

şi

$$m_{ik} = \inf_{(x,y)\in\delta_{ik}} f(x,y),\ M_{ik} = \sup_{(x,y)\in\delta_{ik}} f(x,y);$$

cu aceste notaţii sumele s_Δ şi S_Δ sînt date de

$$s_\Delta = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1} m_{ik}\,\omega_{ik},$$

$$S_\Delta = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1} M_{ik}\,\omega_{ik},$$

unde ω_{ik} = aria intervalului δ_{ik}.

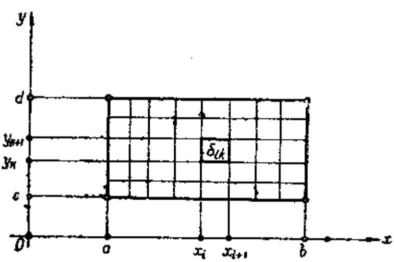

Fig. 74

Avem

$$m_{ik}(y_{k+1}-y_k) \leqslant \int_{y_k}^{y_{k+1}} f(x,y)\,\mathrm{d}y \leqslant M_{ik}(y_{k+1}-y_k) \qquad (1)$$

dacă $(x, y)\in\delta_{ik}$, deoarece pentru orice $(x, y)\in\delta_{ik}$, $m_{ik}\leqslant f(x,y)\leqslant M_{ik}$; însumînd în (1) în raport cu k obţinem

$$\sum_{k=0}^{m-1} m_{ik}(y_{k+1}-y_k) \leqslant \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} M_{ik}(y_{k+1}-y_k);$$

funcţia $F(x)=\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$ este integrabilă pe $[a, b]$, deci pentru orice interval $[x_i, x_{i+1}]$ putem scrie

$$\sum_{k=0}^{m-1} m_{ik}(y_{k+1}-y_k)(x_{i+1}-x_i) \leqslant \int_{x_i}^{x_{i+1}}\left[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{m-1} M_{ik}(y_{k+1}-y_k)(x_{i+1}-x_i);$$

însumînd în raport cu i obţinem şi

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1} m_{ik}(y_{k+1}-y_k)(x_{i+1}-x_i) \leqslant \int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1} M_{ik}(y_{k+1}-y_k)(x_{i+1}-x_i)$$

sau

$$s_\Delta \leqslant \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x \leqslant S_\Delta\, ;$$

pentru că $f(x, y)$ este integrabilă pe I rezultă imediat

$$\sup_{\Delta \in \Delta^*} s_\Delta = \inf_{\Delta \in \Delta^*} S_\Delta = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x$$

unde Δ^* este mulţimea tuturor diviziunilor lui I, deci

$$\iint_I f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x. \tag{2}$$

Teorema este demonstrată.

O b s e r v a ţ i i

1) În mod analog se obţine şi

$$\iint_I f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y$$

dacă $f(x, y)$ este integrabilă pe $[a, b]$ pentru orice $y \in [c, d]$ şi dacă

$$F^* (y) = \int_a^b f(x, y)\, \mathrm{d}x$$

este integrabilă pe $[c, d]$.

2) De obicei se notează

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x, y)\, \mathrm{d}x$$

şi

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x, y)\, \mathrm{d}x,$$

deci putem scrie

$$\iint_I f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x, y)\, \mathrm{d}y$$

sau

$$\iint_I f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x, y)\, \mathrm{d}x,$$

ordinea de integrare în partea a doua fiind de la dreapta la stînga.

3) Relația

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \qquad (\alpha)$$

se numește și formula ***integrării sub semnul integral.*** Într-adevăr, dacă $f(x, y)$ este definită pe intervalul bidimensional $[a, b] \times [c, d]$ și $f(x, y)$ este integrabilă în raport cu x pe $[a, b]$ pentru orice $y \in [c, d]$, integrala

$$\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x$$

reprezintă o funcție $F(y)$ definită pe $[c, d]$. Dacă $F(y)$ este integrabilă pe $[c, d]$ și dacă se cere să calculăm pe $\int_c^d F(y)\,\mathrm{d}y$, formula (α) ne spune că putem schimba ordinea de efectuare a integralelor, anume putem integra mai întîi în raport cu parametrul y (sub semnul integral) și apoi în raport cu variabila de integrare x.

Aplicație

Calculul integralelor definite cu ajutorul integrării sub semnul integral. Pentru $\alpha > -1$ avem

$$\int_0^1 x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha + 1};$$

să înmulțim cu $\mathrm{d}\alpha$ și să integrăm în raport cu α de la 0 la λ,

$$\int_0^\lambda \mathrm{d}\alpha \int_0^1 x^\alpha\,\mathrm{d}x = \int_0^\lambda \frac{1}{\alpha + 1}\,\mathrm{d}\alpha = \ln(1 + \lambda);$$

dacă intervertim ordinea de integrare obținem

$$\int_0^1 \left[\int_0^\lambda x^\alpha\,\mathrm{d}\alpha\right]\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^\lambda - 1}{\ln x}\,\mathrm{d}x.$$

Am găsit astfel valoarea integralei definite

$$\int_0^1 \frac{x^\lambda - 1}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln(1 + \lambda).$$

Dacă scriem și

$$\int_0^1 \frac{x^\mu - 1}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln(1 + \mu), \quad \mu > -1,$$

rezultă

$$\int_0^1 \frac{x^\lambda - x^\mu}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln\frac{1 + \lambda}{1 + \mu}.$$

Să găsim acum formula de calcul a unei integrale duble pentru un domeniu plan D, mărginit de o curbă închisă Γ, formată dintr-un număr finit de arce netede. Vom face ipoteza că o paralelă la axa Oy taie conturul Γ numai în două puncte (fig. 75); fie A şi B punctele de pe Γ de abscise extreme a, b, $a < b$, şi E, F punctele de pe Γ de ordonate extreme c, d, $c < d$, deci domeniul D este conţinut în intervalul închis bidimensional

$$I = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\};$$

fie

$$y = \varphi_1(x), \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

ecuaţia arcului AEB al curbei Γ şi

$$y = \varphi_2(x), \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

ecuaţia arcului $A\,F\,B$ al curbei Γ.

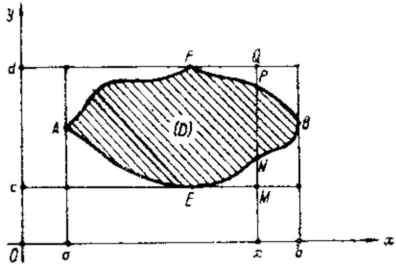

Fig. 75

Teoremă. Fie funcţia $f(x, y)$ definită pe D mărginită şi integrabilă pe D; dacă există integrala

$$F(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y$$

pentru orice $x \in [a, b]$ şi dacă $F(x)$ este integrabilă pe $[a, b]$, atunci

$$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x.$$

Demonstraţie. Pentru demonstraţie, vom reduce problema integrării pe D la problema integrării pe intervalul I, tratată anterior. Funcţia $f(x, y)$ este definită de domeniul închis şi mărginit D. Să considerăm funcţia $\bar{f}(x, y)$ definită pe intervalul $I \supset D$ în modul următor

$$\bar{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{dacă } (x, y) \in D \\ 0 & \text{, dacă } (x, y) \in I - D. \end{cases} \tag{1}$$

Funcţia $\bar{f}(x, y)$ este integrabilă pe I, deoarece $f(x, y)$ este integrabilă pe D, este nulă pe $I - D$, iar frontiera lui D este o mulţime de arie nulă. Dacă ţinem seamă şi de faptul că $\bar{f}(x, y) = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, rezultă că

$$\iint_I \bar{f}(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2}$$

însă

$$\iint_I \bar{f}(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_c^d \bar{f}(x, y)\,\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x\cdot$$

Dacă considerăm integrala definită

$$\int_c^d \bar{f}(x, y)\, dy$$

conform (fig. 75) și ținînd seamă de proprietatea de aditivitate a integralelor definite, putem scrie

$$\int_c^d = \int_{MN} + \int_{NP} + \int_{PQ},$$

însă pe MN și PQ, $\bar{f}(x, y) = 0$, iar pe NP, $\bar{f}(x, y) = f(x, y)$, deci

$$\int_c^d \bar{f}(x, y)\, dx = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy.$$

Integrala din partea a doua, conform ipotezei din enunț, există pentru orice $x \in [a, b]$. Deoarece există și integrala

$$\int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right] dx,$$

urmează din (2) egalitatea

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right] dx.$$

Teorema este demonstrată.

Observații

1) Dacă $x = \psi_1(y)$, $c \leqslant y \leqslant d$, este ecuația arcului EAF și $x = \psi_2(y)$, $c \leqslant y \leqslant d$, este ecuația arcului EBF, dacă integrala

$$F^*(y) = \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx$$

există pentru orice $y \in [c, d]$ și dacă $F^*(y)$ este integrabilă pe $[c, d]$, avem

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx \right] dy$$

și se demonstrează în mod asemănător. De astă dată o paralelă la axa Ox trebuie să întîlnească conturul Γ numai în două puncte.

2) De obicei se scrie

$$\int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right] dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \tag{1}$$

și

$$\int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx \right] dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx. \tag{1'}$$

3) În integrala $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy$, care intervine în (1), x este considerat constant, variabila de integrare fiind y.

În integrala $\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,dx$ care intervine în (1′), y este considerat constant, variabila de integrare fiind x.

4) Dacă $f(x, y)$ este continuă pe D, atunci condiţiile din teoremă şi din observaţia 1) sînt îndeplinite, deci

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,dx .$$

Am impus domeniului D condiţia ca o paralelă la axa Oy (şi axa Ox) să întîlnească conturul Γ numai în două puncte. Această condiţie poate fi înlăturată. Într-adevăr, dacă D nu îndeplineşte această condiţie, însă o paralelă la axa Ox (şi o paralelă la axa Oy) întîlneşte pe Γ într-un număr finit de puncte, atunci împărţim domeniul D în subdomenii (fig. 76) cu arce de curbă (de arie nulă), astfel încît o paralelă la una din axe să taie conturul lor numai în două puncte şi aplicăm teorema de aditivitate faţă de intervalul de integrare

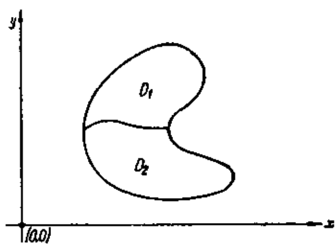

Fig. 76

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x, y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x, y)\,dx\,dy .$$

Exemple

1) Să se calculeze integrala dublă

$$I = \iint_D \sin(mx + ny)\,dx\,dy ,$$

D fiind dreptunghiul definit de $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$.

$$\text{Avem } I = \int_0^a dx \int_0^b \sin(mx + ny)\,dy = -\frac{1}{n}\int_0^a \left[\cos(mx + ny)\right]_0^b dx =$$

$$= \frac{1}{n}\int_0^a \left[\cos mx - \cos(mx + nb)\right] dx = \frac{1}{mn}\left[\sin mx - \sin(mx + nb)\right]_0^a =$$

$$= \frac{1}{mn}\left[\sin ma + \sin nb - \sin(ma + nb)\right] \cdot$$

2) Să se calculeze integrala dublă

$$I = \iint_D \frac{dx\, dy}{(x^2 + y + 1)^2}$$

unde D este triunghiul OAB, cu $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(0, 1)$ (fig. 77). Avem

$$I = \int_0^1 dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{dy}{(x^2 + y + 1)^2}$$

cu $\varphi_1(x) = 0$, $\varphi_2(x) = -x + 1$, $x \in [0,1]$, deci

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{-x+1} \frac{dy}{(x^2 + y + 1)^2} = \int_0^1 \left[-\frac{1}{x^2 + y + 1} \right]_0^{-x+1} dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1} - \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - x + 2} ,$$

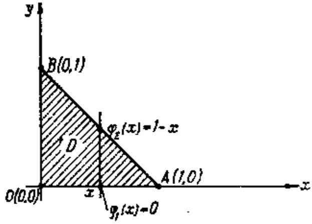

Fig. 77

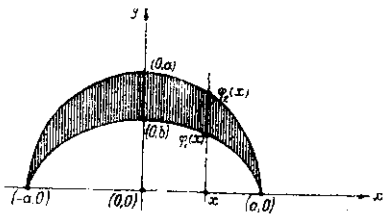

Fig. 78

$$I = \operatorname{arc\,tg} x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x - 1}{\sqrt{7}} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{4}{\sqrt{7}} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{7}} .$$

3) Să se calculeze integrala dublă

$$I = \iint_D x^2 y\, dx\, dy ,$$

D fiind domeniul definit de $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \geqslant 1$ și $y \geqslant 0$, $(a > b)$ (fig. 78).

$$\text{Avem } \varphi_1(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} ,$$

$$\varphi_2(x) = \sqrt{a^2 - x^2} , \ x \in [-a, +a] ,$$

deci

$$I = \int_{-a}^{+a} x^2\,dx \int_{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} y\,dy = \int_{-a}^{+a}\left[x^2(a^2-x^2) - \frac{b^2}{a^2}x^2(a^2-x^2)\right]dx =$$

$$= \left[a^2\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} - b^2\frac{x^3}{3} + \frac{b^2}{a^2}\frac{x^5}{5}\right]_{-a}^{+a} = \frac{4}{15}a^3(a^2-b^2).$$

6. Integrala dublă, funcție de limitele de integrare.

Fie $f(x, y)$ o funcție mărginită și integrabilă într-un domeniu $D \subset R^2$. Pentru orice interval $I = \{(u, v) \mid a \leqslant u \leqslant x,\ b \leqslant v \leqslant y\}$ conținut în D, integrala dublă

$$\iint_I f(u, v)\,du\,dv$$

definește o funcție reală F de variabilele reale $(x, y) \in D$

$$F(x, y) = \int_a^x du \int_b^y f(u, v)\,dv.$$

Ne propunem să stabilim cîteva proprietăți ale funcției F.

Teorema 1. Dacă $f(x, y)$ este mărginită și integrabilă în D, atunci

$$F(x, y) = \int_a^x du \int_b^y f(u, v)\,dv$$

este continuă în D.

Demonstrație. Fie (a, b) un punct oarecare însă fix în D și (x, y), $(x + h, y + k) \in D$, astfel încît intervalele $[a, x] \times [b, y]$ și $[a, x + h] \times [b, y + k]$ să fie conținute în D (fig. 79). Diferența

$$F(x + h, y + k) - F(x, y) = \int_a^{x+h} du \int_b^{y+k} f(u, v)\,dv - \int_a^x du \int_b^y f(u, v)\,dv$$

este egală cu

$$\int_a^x du \int_y^{y+k} f(u, v)\,dv + \int_x^{x+h} du \int_b^{y+k} f(u, v)\,dv\ ;$$

funcția f este mărginită în D, $|f(u, v)| \leqslant M$, $(u, v) \in D$, deci putem scrie

$$|F(x + h, y + k) - F(x, y)| \leqslant M\,|x - a|\cdot|k| + M\cdot|h|\cdot|y + k - b|,$$

de unde se deduce imediat că

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}} F(x+h,\ y+k) = F(x,\ y)\,,$$

deci F este continuă. Teorema este demonstrată.

Teorema 2. Dacă $f(x, y)$ este continuă în D, atunci funcţia

$$F(x,\ y) = \int_a^x \mathrm{d}u \int_b^y f(u,\ v)\ \mathrm{d}v$$

are derivatele parţiale de ordinul întîi continue în D,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int_b^y f\ (x,\ v)\ \mathrm{d}v\,,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int_a^x f\ (u,\ y)\ \mathrm{d}u\,.$$

Derivata a doua mixtă

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\ \partial y} = f(x,\ y)$$

există şi este continuă în D.

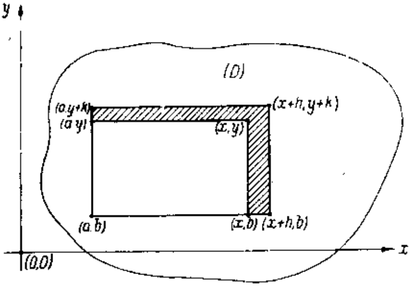

Fig. 79

Demonstraţie. *a)* Funcţia

$$G\ (u,\ v) = \int_b^y f\ (u,\ v)\ \mathrm{d}v$$

este continuă pentru orice $(u,\ y) \in D$, deoarece $f(u,\ v)$ este continuă în D; avem

$$F(x,\ y) = \int_a^x G\ (u,\ y)\ \mathrm{d}u\ ,$$

F este derivabilă parţial în raport cu x, iar după regula de derivare a unei integrale definite care depinde de un parametru obţinem

$$\frac{\partial F}{\partial x} = G\ (x,\ y) = \int_b^y f\ (x, v)\ \mathrm{d}v\,.$$

b) Funcţia

$$H\ (x,\ v) = \int_a^x f\ (u, v)\ \mathrm{d}u$$

este continuă pentru orice $(x, v) \in D$, deoarece f este continuă în D. Avem

$$F(x, y) = \int_b^y H(x, v)\, \mathrm{d}v,$$

$F(x, y)$ este derivabilă parțial în raport cu y în D și după aceeași regulă obținem

$$\frac{\partial F}{\partial y} = H(x, y) = \int_a^x f(u, y)\, \mathrm{d}u. \tag{1}$$

c) Funcția $f(x, y)$ este continuă în raport cu ambele variabile în D, deci este continuă în raport cu fiecare variabilă în parte; prin urmare funcția

$$H(x, y) = \int_a^x f(u, y)\, \mathrm{d}u$$

este derivabilă parțial în raport cu x, iar funcția

$$G(x, y) = \int_b^y f(x, v)\, \mathrm{d}v$$

este derivabilă parțial în raport cu y; avem

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x} H(x, y) = f(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y} G(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in D$$

Teorema este demonstrată.

Consecință. Dacă ne propunem să găsim soluțiile $F(x, y)$ care verifică ecuația cu derivate parțiale

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} = f(x, y),$$

ținînd seamă de cele de mai sus, obținem

$$F(x, y) = \int_a^x \mathrm{d}u \int_b^y f(u, v)\, \mathrm{d}v + \varphi_1(x) + \varphi_2(y),$$

unde φ_1 și φ_2 sînt funcții arbitrare, derivabile.

7. Formula lui Green

Fie D un domeniu închis și mărginit de o curbă închisă Γ formată dintr-un număr finit de arce netede. Vom presupune că domeniul D îndeplinește condiția că atît paralelele la axa Ox *cît* și paralelele la axa Oy taie conturul *numai* în două puncte.

Teoremă. Fie $P(x,y)$ și $Q(x,y)$ două funcții continue pe D derivabile parțial, cu derivatele $\frac{\partial P}{\partial y}$ și $\frac{\partial Q}{\partial x}$ continue pe D.

În aceste condiții are loc egalitatea

$$\oint_{\Gamma} P(x, y)\, \mathrm{d}x + Q(x, y)\, \mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

numită formula lui Green sau formula integrală a lui Green.

Demonstrație. Fie A și B punctele de pe Γ de abscise extreme a, b $(a < b)$ și E, F punctele de pe Γ de ordonate extreme c, d $(c < d)$, fig. 80.

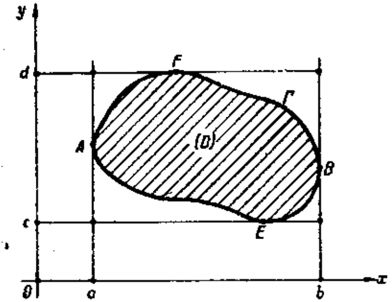

Fig. 80

Dacă $y = \varphi_1(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ este ecuația arcului AEB și $y = \varphi_2(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, ecuația arcului AFB, putem scrie

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y =$$

$$= -\int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\, \mathrm{d}y =$$

$$= -\int_a^b P(x, y)\Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \mathrm{d}x =$$

$$= -\int_a^b P(x, \varphi_2(x))\, \mathrm{d}x + \int_a^b P(x, \varphi_1(x))\, \mathrm{d}x$$

însă

$$\int_a^b P(x, \varphi_2(x))\, \mathrm{d}x = \int_{BFA} P(x, y)\, \mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b P(x, \varphi_1(x))\, \mathrm{d}x = \int_{AEB} P(x, y)\, \mathrm{d}x,$$

deci

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \oint_{\Gamma} P(x, y)\, \mathrm{d}x. \tag{1}$$

În mod asemănător, dacă $x = \psi_1(y)$, $c \leqslant y \leqslant d$, este ecuația arcului EAF, iar $x = \psi_2(y)$, $c \leqslant y \leqslant d$ este ecuația arcului EBF avem

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\, \mathrm{d}x = \int_c^d Q(x, y)\Big|_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \mathrm{d}y =$$

$$= \int_c^d Q(\psi_2(y), y)\, \mathrm{d}y - \int_c^d Q(\psi_1(y), y)\, \mathrm{d}y$$

însă

$$\int_c^d Q(\psi_2(y), y)\, dy = \int_{EBF} Q(x, y)\, dy\ ,$$

$$-\int_c^d Q(\psi_1(y), y)\, dy = \int_{FAE} Q(x, y)\, dy\ ,$$

deci

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = \oint_{\Gamma} Q(x, y)\, dy\ ; \tag{1'}$$

dacă adunăm pe (1) şi (1′) obţinem formula lui Green

$$\oint_{\Gamma} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy\ .$$

Teorema este demonstrată.

Observaţie

Condiţia ca paralelele la axele de coordonate să taie conturul Γ numai în două puncte a servit doar la demonstraţie şi poate fi înlăturată. Într-adevăr, dacă domeniul D nu îndeplineşte această condiţie putem să-l împărţim într-un număr finit de subdomenii $D_1, D_2, \ldots$, de contururi $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ care îndeplinesc această condiţie. Pentru fiecare subdomeniu D_k de contur Γ_k avem

$$\oint_{\Gamma_k} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \iint_{D_k} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy,\ k = 1, 2, \ldots$$

însă (cazul fig. 81) avem

$$\int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} = \int_{\Gamma} \text{ şi } \iint_{D_1} + \iint_{D_2} = \iint_D ,$$

deci şi pentru domeniul D subsistă formula integrală

$$\oint_{\Gamma} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy\ .$$

Formula lui Green ne permite să demonstrăm următoarea

Teoremă. Fie $P(x, y)$ şi $Q(x, y)$ două funcţii continue în domeniul simplu conex D. Dacă derivatele $\frac{\partial P}{\partial y}$ şi $\frac{\partial Q}{\partial x}$ există şi sînt con-

tinue în D, atunci condiția necesară și suficientă pentru ca integrala curbilinie

$$\int P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y$$

să nu depindă de drum în D este ca pentru orice $(x, y) \in D$

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0. \tag{1}$$

Demonstrație. Am arătat (A, cap. III, § 1, al. 5, consecința 1), că relația (1) este necesară. Să arătăm acum că este și suficientă. Într-ade-

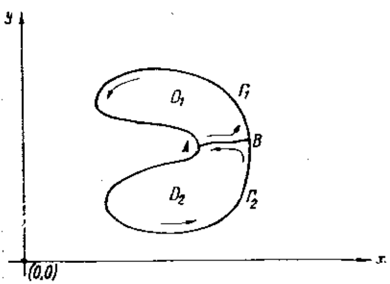

Fig. 81

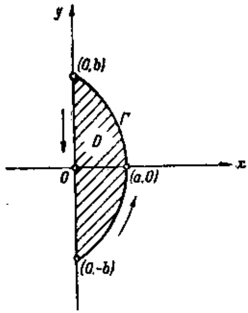

Fig. 82

văr, dacă $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ în orice punct din (D), atunci, conform formulei lui Green, pentru orice curbă închisă $\Gamma \subset D$ avem

$$\oint_{\Gamma} P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = 0,$$

însă o integrală, care este nulă pe orice contur închis situat într-un domeniu D, nu depinde de drum în D (A, cap. III, § 1, al. 5, consecința 2), deci condiția este și suficientă. Teorema este demonstrată.

Aplicație

Dacă $P(x, y) = -\frac{1}{2}y$, $Q(x, y) = \frac{1}{2}x$, obținem $\frac{1}{2}\oint_{\Gamma} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$ Aria domeniului D.

Exemplu

Să se calculeze integrala curbilinie

$$I = \oint_{\Gamma} y^2 x \, dx - x^2 dx,$$

(unde Γ este conturul din fig. 82), transformînd-o într-o integrală dublă. Avem

$$P(x, y) = y^2 x, \quad Q(x, y) = -x^2$$

deci

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2x(1 + y)$$

şi

$$I = -2\int_{-b}^{b} dy \int_{0}^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}} x(1+y)\, dx = \frac{a^2}{b^2}\int_{-b}^{b} (b^2 - y^2)(1 + y)\, dy =$$

$$= -\frac{a^2}{b^2}\left[b^2 y - \frac{y^3}{3} + b^2\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right]_{-b}^{b} = -\frac{4}{3}a^2 b.$$

8. Schimbarea de variabile în integrale duble

a) Să considerăm în planul xOy un domeniu D mărginit de o curbă închisă Γ formată dintr-un număr finit de arce netede şi în planul uOv un domeniu D' mărginit de o curbă închisă Γ' formată tot dintr-un număr finit de arce netede. Fie transformarea punctuală a domeniului D' şi D realizată de funcţiile

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad (u, v) \in D' \tag{1}$$

cu φ şi ψ continue, cu derivate de ordinul întîi şi derivatele de ordinul doi mixte continue pe D'; determinantul funcţional

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix}$$

nu se anulează în D'.

Vom presupune că transformarea (1) este şi biunivocă pe D (fig. 83 şi 84), adică reciproc fiecărui punct (x, y) din D îi corespunde un punct $(u, v) \in D'$ dat de

$$u = \varphi_1(x, y), \quad v = \psi_1(x, y), \quad (x, y) \in D.$$

Corespondența dintre D' și D se spune că este ***directă*** dacă următoarea condiție este îndeplinită: cînd un punct se deplasează pe Γ' în sens direct, punctul corespunzător de pe Γ se deplasează tot în sens

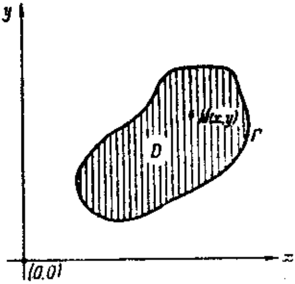

Fig. 83

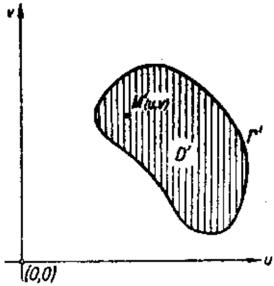

Fig. 84

direct. Dacă un punct de pe Γ' se deplasează în sens direct și punctul corespunzător de pe Γ se deplasează în sens invers, corespondența dintre D' și D se spune că este ***inversă***.

T e o r e m ă. Dacă determinantul funcțional

$$\frac{\mathrm{D}(x,\ y)}{\mathrm{D}(u,\ v)},\ (u,\ v) \in D',$$

este pozitiv în D', transformarea este directă.

Demonstrație. Aria $\mathcal{A}_D$ a domeniului D este dată de integrala curbilinie

$$\oint_{\Gamma} x\,\mathrm{d}y,$$

conturul Γ fiind parcurs în sens direct. Să facem schimbarea de variabilă definită de (1); avem

$$\mathcal{A}_D = \int_{\Gamma'} \varphi(u,\ v)\left[\frac{\partial\psi}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial\psi}{\partial v}\mathrm{d}v\right]$$

căreia să-i aplicăm formula lui Green. Avem

$$\mathcal{A}_D = \int_{\Gamma'} P(u,\ v)\ \mathrm{d}u + Q(u,\ v)\ \mathrm{d}v = \iint_{D'}\left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v}\right)\mathrm{d}u\ \mathrm{d}v$$

cu

$$P = \varphi\,\frac{\partial\psi}{\partial u},\ Q = \varphi\,\frac{\partial\psi}{\partial v},$$

deci

$$\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\,\frac{\partial\psi}{\partial v} + \varphi\,\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial u} - \varphi\,\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v}$$

sau

$$\frac{\partial Q}{\partial u}-\frac{\partial P}{\partial v}=\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v}-\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u}=\begin{vmatrix}\frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u}\\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v}\end{vmatrix},$$

aşadar

$$\mathcal{A}_D=\int_{\Gamma'}P\,\mathrm{d}u+Q\,\mathrm{d}v=\iint_{D'}\frac{\mathrm{D}(\varphi,\psi)}{\mathrm{D}(u,v)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

însă $\mathcal{A}_D>0$, deci dacă $\frac{\mathrm{D}(\varphi,\psi)}{\mathrm{D}(u,v)}>0$, atunci conturul Γ' este parcurs în sens direct şi

$$\mathcal{A}_D=\int_{\Gamma'}P\,\mathrm{d}u+Q\,\mathrm{d}v=\iint_{D'}\frac{\mathrm{D}(\varphi,\psi)}{\mathrm{D}(u,v)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, \tag{1}$$

iar dacă $\frac{\mathrm{D}(\varphi,\psi)}{\mathrm{D}(u,v)}<0$, conturul Γ' este parcurs în sens invers şi

$$\mathcal{A}_D=\int_{\Gamma'}P\,\mathrm{d}u+Q\,\mathrm{d}v=-\iint_{D'}\frac{\mathrm{D}(\varphi,\psi)}{\mathrm{D}(u,v)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \tag{1'}$$

Teorema este demonstrată.

Observaţie

Dacă folosim formula mediei în (1) sau (1′) obţinem

$$\mathcal{A}_D=\left|\frac{\mathrm{D}(\varphi,\psi)}{\mathrm{D}(u,v)}\right|\Bigg|_{(u_0,v_0)}\cdot A_{D'}$$

unde (u_0, v_0) este un punct din D'.

Fig. 85

Exemple

1) Funcţiile $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$ definite pe $I=\left\{(\rho,\theta)\mid 1\leqslant\rho\leqslant 2,\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$, transformă direct pe I în $D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}$ (fig. 85).

Determinantul funcțional al transformării

$$\frac{D(x,\ y)}{D(\rho,\ \theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho$$

este pozitiv pe I.

2) Funcțiile $x = v - u$, $y = u + v$,
definite pe intervalul $I = \{(u,\ v) \mid 0 \leqslant u \leqslant 1,\ 0 \leqslant v \leqslant 1\}$, transformă invers intervalul I în domeniul D definit de

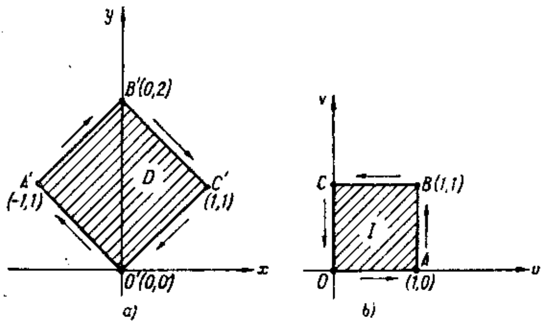

Fig. 86

$$u = \frac{1}{2}(y - x), \quad v = \frac{1}{2}(y + x), \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 2.$$

Determinantul funcțional

$$\frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

este negativ pe D (fig. 86).

b) Să revenim acum la schimbarea de variabile în integrale duble.

Fie Δ' o diviziune $(\delta_1',\ \delta_2', \ldots,\ \delta_p')$ a domeniului D' căreia, prin transformarea

$$x = \varphi(u,\ v), \quad y = \psi(u,\ v), \quad (u,\ v) \in D',$$

îi corespunde diviziunea $\Delta = (\delta_1,\ \delta_2, \ldots,\ \delta_p)$ a domeniului D. Fie ω_k' și ω_k ariile subdomeniilor δ_k' și δ_k respectiv; între ariile subdomeniilor δ_k și δ_k' avem relația

$$\omega_k = \left| \frac{D(\varphi,\ \psi)}{D(u, v)} \right|_{(u_k,\ v_k)} \cdot \omega_k', \quad (u_k,\ v_k) \in \delta_k',$$

conform observației făcute. Dacă notăm

$$x_k = \varphi(u_k,\ v_k), \quad y_k = \psi(u_k,\ v_k)$$

avem următoarea egalitate

$$\sum_{k=1}^{p} f(x_k,\ y_k)\ \omega_k = \sum_{k=1}^{p} f[\varphi(u_k,\ v_k),\ \psi(u_k,\ v_k)]\left|\frac{D(\varphi,\ \psi)}{D(u_k,\ v_k)}\right|\cdot\omega'_k,$$

de unde rezultă imediat

$$\iint_D f(x,\ y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \iint_{D'} f[\varphi(u,\ v),\ \psi(u,\ v)]\left|\frac{D(\varphi,\ \psi)}{D(u,\ v)}\right|\mathrm{d}u\ \mathrm{d}v,$$

care este ***formula schimbării de variabile în integrale duble.***

Aplicații

O transformare curentă a planului este trecerea în coordonate polare $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $\rho \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, 2\pi)$.

Avem

$$\frac{D(x,\ y)}{D(\rho,\ \theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho$$

deci

$$\iint_D f(x,\ y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D'} f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta.$$

Expresia $\rho\ \mathrm{d}\rho\ \mathrm{d}\theta$ se numește *elementul de arie* în coordonate polare.

Electricitate
EFM
III Analiză M
Electronic
Programar
EFM
Mec. An
Optica
Electr

Exemple

1) Să se calculeze

$$I = \iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{a^2 + x^2 + y^2}},$$

unde D este discul circular $x^2 + y^2 \leqslant a^2$. Facem schimbarea de variabilă $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $0 \leqslant \rho \leqslant a$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, $\dfrac{D(x,\ y)}{D(\rho,\ \theta)} = \rho$, deci

$$I = \iint_{D'} \frac{\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{a^2 + \rho^2}} =$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a \frac{\rho\,\mathrm{d}\rho}{\sqrt{a^2 + \rho^2}} = 2\pi\sqrt{a^2 + \rho^2}\,\Big|_0^a$$

sau

$$I = 2\pi a(\sqrt{2} - 1).$$

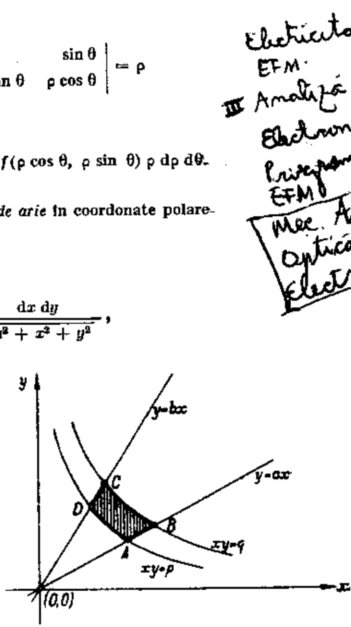

Fig. 87

2) Să se calculeze aria mărginită de curbele

$$y = ax, \quad y = bx, \quad b > a > 0,$$

$$xy = p, \quad xy = q, \quad q > p > 0,$$

situată în primul cadran ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$). Aria se calculează ușor cu transformarea

$$y = ux, \quad a \leqslant u \leqslant b,$$

$$xy = v, \quad p \leqslant v \leqslant q,$$

care transformă dreptunghiul $I = \{(u, v) \mid u \in [a, b], v \in [p, q]\}$ în patrulaterul curbiliniu $ABCD$ (fig. 87). Avem

$$x = \sqrt{\frac{v}{u}}, \quad y = \sqrt{uv}, \quad (u, v) \in I$$

și

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} v^{\frac{1}{2}} u^{-\frac{3}{2}} & \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}} & \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u}$$

Aria căutată este

$$A = \iint_{ABCD} dx\, dy = \iint_I \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u}\, du\, dv = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{1}{u}\, du \int_p^q dv$$

deci

$$A = \frac{1}{2} (q - p) \ln \frac{b}{a} \cdot$$

3) Să se calculeze integrala dublă

$$I = \iint_D \frac{dx\, dy}{(a^2 b^2 + a^2 y^2 + b^2 x^2)^n},$$

domeniul D fiind discul eliptic $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$. Transformarea punctuală $x = a \rho \cos \theta$, $y = b \rho \sin \theta$, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$ transformă dreptunghiul $I = \{(\rho, \theta) | \rho \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi)\}$ în domeniul D. Avem

$$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} = \begin{vmatrix} a \cos \theta & b \sin \theta \\ -a \rho \sin \theta & b \rho \cos \theta \end{vmatrix} = ab\, \rho;$$

dacă $ab < 0$, transformarea este directă

$$I = \iint_I \frac{ab\, \rho\, d\rho\, d\theta}{[a^2 b^2 (1 + \rho^2)]^n} = \frac{1}{(ab)^{2n-1}} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{\rho\, d\rho}{(1 + \rho^2)^n} \cdot$$

Pentru $n \neq 1$

$$I = \frac{2\pi}{(ab)^{2n-1}} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-n} \cdot \frac{1}{(1+\rho^2)^{n-1}} \right]_0^1 = \frac{\pi}{(ab)^{2n-1}} \cdot \frac{(2^{n-1}-1)}{(n-1)\cdot 2^n} ,$$

iar pentru $n = 1$

$$I = \frac{\pi}{ab} \ln (1+\rho^2) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{ab} \ln 2 \cdot$$

9. Integrale duble cu domeniul de integrare nemărginit

Ne propunem să studiem în ce condiţii există integrala dublă

$$\iint_D f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y ,$$

unde D este un domeniu plan nemărginit, iar $f(x, y)$ este o funcţie definită pe D.

Un domeniu plan D se spune că este nemărginit dacă conţine puncte exterioare oricărui interval mărginit sau ceea ce este acelaşi lucru, conţine puncte exterioare oricărui disc circular din plan. Să considerăm un şir infinit de cercuri

$$K_1 , K_2 \ldots R_n \ldots$$

cu centrul într-un punct oarecare O al planului, de raze respectiv

$$R_1 < R_2 < \ldots < R_n < \ldots$$

formînd un şir crescător divergent. Dacă considerăm discurile $\mathfrak{D}_n$ de centru O şi raze R_n (mărginite de cercurile K_n) avem

$$\mathfrak{D}_1 \subset \mathfrak{D}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{D}_n \subset \ldots$$

Să considerăm subdomeniile D_n, $n = 1, 2, \ldots$ ale lui D, definite astfel

$$D_1 = D \cap \mathfrak{D}_1 ,\ D_2 = D \cap \mathfrak{D}_2 , \ldots ,\ D_n = D \cap \mathfrak{D}_n , \ldots$$

Avem

a) $$D_1 \subset D_2 \subset \ldots \subset D_n \subset \ldots$$

b) orice punct P al domeniului D aparţine unui subdomeniu D_n dacă se ia n convenabil.

Într-adevăr, dacă $PO < R_n$ atunci $P \in D_n$. Vom scrie acest fapt astfel

$$\lim_{n\to\infty} D_n = D \quad \text{sau} \quad D_n \to D$$

Mai general, şirul de discuri $(\mathfrak{D}_n)$ fiind dat, vom spune că un şir de subdomenii (D'_n) ale lui D tinde către D, dacă există un număr N astfel încît să avem

$$D'_n \supset D_n = D \cap \mathfrak{D}_n ,$$

pentru orice $n > N$; vom scrie şi în acest caz

$$\lim_{n\to\infty} D'_n = D \text{ sau } D'_n \to D .$$

Fie acum un şir *oarecare* de subdomenii (D_n) ale domeniului D (construit în modul arătat mai sus) care îndeplineşte următoarele condiţii:

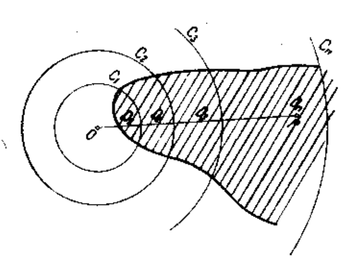

Fig. 88

a) $D_1 \subset D_2 \subset \ldots \subset D_n \subset \ldots$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} D_n = D$

c) frontiera domeniului D_n, $n = 1, 2, \ldots,$ este formată dintr-un număr finit de arce netede.

Fie $f(x, y)$ o funcţie definită în D, integrabilă pe orice subdomeniu D_n al lui D; la şirul de domenii (D_n) corespunde şirul de valori ale integralei duble

$$\iint_{D_1} f(x, y) \, dx \, dy, \iint_{D_2} f(x, y) \, dx \, dy, \ldots, \iint_{D_n} f(x, y) \, dx \, dy, \ldots$$

Folosind criteriul general al lui Cauchy de convergenţă a şirurilor, putem enunţa următorul

Criteriu de convergenţă. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca integrala

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$$

să aibă sens este ca pentru orice număr $\varepsilon > 0$ să existe un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît să avem

$$\left| \iint_{D_{n+p}} f(x, y) \, dx \, dy - \iint_{D_n} f(x, y) \, dx \, dy \right| < \varepsilon,$$

oricare ar fi $n > N(\varepsilon)$ şi $p \geqslant 1$.

Aplicație

Dacă $f(x, y)$ în D îndeplinește condiția

$$|f(x, y)| \leqslant \frac{M}{(x^2 + y^2 + a^2)^{\alpha}}, \ \alpha > 1, \ M > 0, \tag{1}$$

atunci integrala dublă

$$\iint_D f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

este convergentă. Într-adevăr

$$\left| \iint_{D_n} f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \right| \leqslant M \iint_{D_n} \frac{\mathrm{d}x \, \mathrm{d}y}{(x^2 + y^2 + a^2)^{\alpha}} \leqslant M \iint_D \frac{\mathrm{d}x \, \mathrm{d}y}{(x^2 + y^2 + a^2)^{\alpha}} \cdot$$

Dacă trecem în coordonate polare $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$ și $0 \leqslant \rho < \infty$, avem imediat, cu $\alpha > 1$,

$$\left| \iint_{D_n} f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \right| \leqslant M \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\infty} \frac{\rho \, \mathrm{d} \rho}{(\rho^2 + a^2)^{\alpha}} = \frac{\pi M}{\alpha - 1} \cdot \frac{1}{a^{2(\alpha-1)}},$$

deci integrala este convergentă.

Dacă originea nu aparține nici lui D și nici frontierei lui D, în (1) se poate lua $a = 0$.

Exemple

1) Să se calculeze integrala dublă

$$I = \iint_D \frac{\mathrm{d}x \, \mathrm{d}y}{(x^2 + y^2 + a^2)^n}, \quad n > 1,$$

D fiind exteriorul cercului cu centrul în origine, de rază R. În coordonate polare $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, $R \leqslant \rho < \infty$, $\mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \rho \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\theta$, obținem

$$I = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_R^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{(\rho^2 + a^2)^n} = \frac{\pi}{n-1} \left[-\frac{1}{(\rho^2 + a^2)^{n-1}} \right]_R^{\infty} = \frac{\pi}{n-1} \cdot \frac{1}{(R^2 + a^2)^{n-1}};$$

pentru $n \leqslant 1$ integrala este divergentă.

2) Să se calculeze

$$I = \int_0^{\infty} \mathrm{d}x \int_0^{\infty} e^{-x^2 - y^2} \mathrm{d}y.$$

Integrala I poate fi considerată ca limita integralei duble

$$I_P = \iint_P e^{-x^2 - y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

întinsă la pătratul (P): $ABCO$, (fig. 89), de rază a, cînd $a \to \infty$. Funcția de sub semnul integral fiind pozitivă, urmează că

$$I_D < I_P < I_{D'},$$

unde D este sfertul de disc circular de rază a, $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, iar D' sfertul de disc circular $x^2 + y^2 \leqslant 2a^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Cu substituția $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$,

avem

$$I_D = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a e^{-\rho^2} \rho \, d\rho = \frac{\pi}{4} [1 - e^{-a^2}],$$

$$I_{D'} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\sqrt{2}} e^{-\rho^2} \rho \, d\rho = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2a^2}), \tag{1}$$

deci

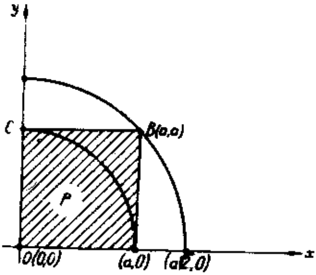

Fig. 89

$$\frac{\pi}{4}(1 - e^{-a^2}) < I_P < \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2a^2});$$

la limită, cînd $a \to \infty$, obținem

$$\frac{\pi}{4} \leqslant I \leqslant \frac{\pi}{4}$$

deci

$$I = \frac{\pi}{4}.$$

Deoarece putem scrie

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \frac{\pi}{4}, \text{ rezultă } \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

10. Integrale duble de funcții nemărginite în domeniul de integrare

Fie $f(x, y)$ o funcție definită într-un domeniu închis și mărginit D, în afara unui punct $M_0\ (x_0, y_0)$ interior acestui domeniu, punct în care $f(x, y)$ are limita infinită

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} |f(x, y)| = +\infty$$

Ne propunem să cercetăm în ce condiții integrala dublă

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy$$

există și este finită.

Să izolăm punctul $M_0(x_0, y_0)$ printr-o curbă închisă $C \subset D$ și să notăm cu $\mathfrak{D}_\varepsilon$ domeniul mărginit de curba C. Funcția $f(x, y)$ este nemărginită în $\mathfrak{D}_c$. Vom presupune că $f(x, y)$ este integrabilă în $D_c = D - \mathfrak{D}_c$, oricare ar fi curba închisă $C \subset D$, care înconjură punctul $M_0 (x_0, y_0)$.

Se numește diametrul unui domeniu D și se notează d_D marginea superioară a distanței dintre două puncte ale sale

$$d_D = \sup_{P \in D,\, P' \in D} PP'$$

Să considerăm un șir (oarecare) de curbe

$$C_1,\ C_2, \ldots,\ C_n, \ldots$$

care înconjură punctul $M_0\ (x_0, y_0)$, situate în întregime în D, fie

$$\mathfrak{D}_1 \supset \mathfrak{D}_2 \supset \ldots \supset \mathfrak{D}_n \supset \ldots$$

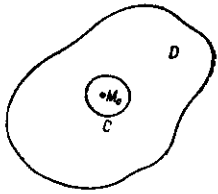

Fig. 90

domeniile mărginite de aceste curbe. Diametrele lor formează un șir monoton descrescător

$$d_{\mathfrak{D}_1} > d_{\mathfrak{D}_2} > \ldots > d_{\mathfrak{D}_n} > \ldots$$

cu

$$\lim_{n \to \infty} d_{\mathfrak{D}_n} = 0.$$

Vom scrie acest fapt astfel

$$\lim_{n \to \infty} \mathfrak{D}_n = M_0 \quad \text{sau} \quad \mathfrak{D}_n \to M_0.$$

Să considerăm acum subdomeniile D_n definite astfel:

$$D_n = D - \mathfrak{D}_n\,;$$

avem șirul de incluziuni

$$D_1 \subset D_2 \subset \ldots \subset D_n \subset \ldots$$

și pentru că $\mathfrak{D}_n \to M_0$ rezultă că $D_n \to D - \{M_0\}$.
La șirul (D_n) de subdomenii ale lui D corespunde șirul de integrale duble

$$\iint_{D_1} f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y, \iint_{D_2} f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y, \ldots, \iint_{D_n} f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y, \ldots \qquad (\alpha)$$

deoarece $f(x, y)$ este integrabilă pe D_n, $n = 1, 2, \ldots$.

Aplicînd criteriul general al lui Cauchy șirului (α) obținem următorul

Criteriu de convergență. Condiția necesară și suficientă pentru ca integrala dublă

$$\iint_D f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

să aibă sens este ca pentru orice număr $\varepsilon > 0$ să existe un număr $N(\varepsilon)$, astfel încît să avem

$$\left|\iint_{D_{n+p}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint_{D_n} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| < \varepsilon$$

oricare ar fi $n > N(\varepsilon)$ și $p \geqslant 1$.

Aplicație

Dacă în domeniul mărginit D funcția $f(x, y)$ îndeplinește condiția

$$|f(x, y)| \leqslant \frac{M}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]^{\alpha}}, \; M > 0, \; \alpha < 1,$$

iar $(x_0, y_0) \in D$, atunci integrala

$$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{1}$$

este convergentă.

Avem

$$\left|\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| \leqslant \iint_D |f(x, y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \iint_D \frac{M\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]^{\alpha}}.$$

Fie S_R un disc circular cu centrul în punctul (x_0, y_0) și rază R, ales astfel încît $D \subset S_R$. Dacă efectuăm schimbarea de variabile

$$x = x_0 + \rho\cos\theta, \; y = y_0 + \rho\sin\theta,$$

$0 \leqslant \rho \leqslant R$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$, obținem

$$\left|\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| \leqslant M \iint_{S_R} \frac{\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta}{\rho^{2\alpha}} = M\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho^{2\alpha-1}} =$$

$$= 2\pi M \frac{1}{2-2\alpha}\cdot\frac{1}{\rho^{2\alpha-2}}\Bigg|_0^R = \frac{2\pi M}{2(1-\alpha)}\cdot\frac{1}{R^{2\alpha-2}}, \text{ dacă } \alpha < 1,$$

deci integrala (1) este convergentă.

Exemplu

Să se calculeze

$$I = \iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

D fiind discul circular $x^2 + y^2 \leqslant a^2$. Integrala este convergentă, deoarece $\alpha = \dfrac{1}{2}$. Facem schimbarea de variabile

$$x = \rho\cos\theta, \; y = \rho\sin\theta, \; 0 \leqslant \rho \leqslant a, \; 0 \leqslant \theta < 2\pi, \; \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta,$$

deci

$$I = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a \frac{\rho\,\mathrm{d}\rho}{\rho} = 2\pi a.$$

Raționamentele precedente pot fi extinse pentru cazul cînd $f(x, y)$ nu este mărginită de-a lungul unui arc de curbă.

Exemplu

Să calculăm integrala dublă

$$I = \iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{x-y}},$$

D fiind triunghiul mărginit de $x = a$, $y = x$, $y = 0$. Funcția de sub semnul integral este infinită de-a lungul segmentului AB (fig. 91), de ecuație $y - x = 0$. Integrăm pe D_ε definit de $x \leqslant a$, $x \geqslant y + \varepsilon$, $y \geqslant 0$,

$$I(\varepsilon) =$$

$$= \int_\varepsilon^a dx \int_0^{x-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{x-y}}\,dy = -2\int_\varepsilon^a \sqrt{x-y}\,\Big|_0^{x-\varepsilon} dx =$$

$$= -2\int_\varepsilon^a (\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{x})\,dx = -2\left(x\sqrt{\varepsilon} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_\varepsilon^a,$$

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0+} I(\varepsilon) = \frac{4}{3}a^{\frac{3}{2}}.$$

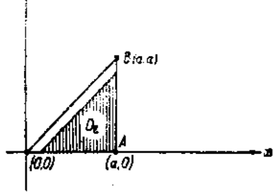

Fig. 91

§ 2. INTEGRALE DE SUPRAFAȚĂ

1. Elemente de teoria suprafețelor

a) Fie $f(u, v)$, $g(u, v)$, $h(u, v)$ trei funcții continue cu derivate parțiale de ordinul întîi continue într-un domeniu închis D din planul uOv. Mulțimea punctelor $M(x, y, z)$ din spațiu, dată de

$$x = f(u, v),\ y = g(u, v),\ z = h(u, v),\quad (u, v) \in D, \tag{1}$$

cu determinanții funcționali

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)},\quad \frac{D(y, z)}{D(u, v)},\quad \frac{D(z, x)}{D(u, v)}$$

care nu se anulează simultan în D, este o suprafață S în spațiu, iar ecuațiile (1) se numesc ecuațiile parametrice ale suprafeței S.

Pe suprafața S dată de (1) dacă $u = c_1$ (constant), obținem o curbă trasată pe suprafața S, de-a lungul căreia variază numai parametrul v. Pentru valori diferite ale lui c_1 obținem așadar o familie de curbe trasate pe suprafață, curbe de-a lungul cărora variază numai v.

În mod asemănător, dacă $v = c_2$ (constant), obținem o curbă trasată pe suprafața S de-a lungul căreia variază numai parametrul u, deci la $v =$ constant corespunde o familie de curbe trasate pe suprafața S, de-a lungul cărora variază numai u (fig. 92).

Printr-un punct P de pe suprafață trece o curbă $u = u_0$ și o curbă $v = v_0$.

b) Parametrii directori ai tangentei PT_1 la curba $u = u_0$ în punctul $P(u_0, v_0)$, după cum se știe, sînt

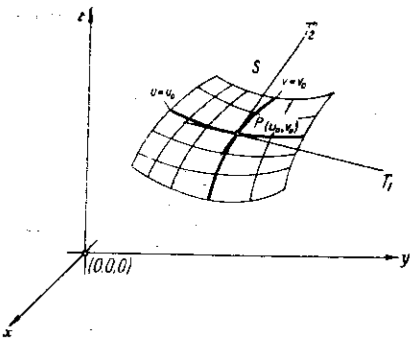

Fig. 92

$$\frac{\partial f(u_0, v_0)}{\partial v}, \frac{\partial g(u_0, v_0)}{\partial v}, \frac{\partial h(u_0, v_0)}{\partial v},$$

iar ai tangentei PT_2 la curba $v = v_0$ în punctul $P(u_0, v_0)$ sînt

$$\frac{\partial f(u_0, v_0)}{\partial u}, \frac{\partial g(u_0, v_0)}{\partial u}, \frac{\partial h(u_0, v_0)}{\partial u};$$

cosinușii directori ai dreptelor PT_1 și PT_2 sînt respectiv

$$\frac{f'_v}{\pm\sqrt{G}}, \frac{g'_v}{\pm\sqrt{G}}, \frac{h'_v}{\pm\sqrt{G}},$$

$$\frac{f'_u}{\pm\sqrt{E}}, \frac{g'_u}{\pm\sqrt{E}}, \frac{h'_u}{\pm\sqrt{E}},$$

unde am notat

$$E = f'^2_u + g'^2_u + h'^2_u,$$

$$G = f'^2_v + g'^2_v + h'^2_v,$$

toate derivatele fiind calculate în punctul (u_0, v_0). Unghiul θ dintre cele două curbe $u = u_0$ și $v = v_0$ este dat de

$$\cos\theta = \pm\frac{f'_u f'_v + g'_u g'_v + h'_u h'_v}{\sqrt{EG}} = \pm\frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

c) Elementul de arc al unei curbe oarecare trasată pe suprafața S este definit de

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2;$$

dacă ținem seamă că

$$dx = f'_u\,du + f'_v\,dv,$$

$$dy = g'_u\,du + g'_v\,dv,$$

$$dz = h'_u\,du + h'_v\,dv,$$

obținem

$$ds^2 = E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2,$$

E, F, G avînd semnificația de mai sus. În particular, pentru curbele $u = u_0$ elementul de arc ds_v este

$$ds_v = \sqrt{G}\, dv,$$

iar pentru curbele $v = v_0$, elementul de arc este

$$ds_u = \sqrt{E}\, du.$$

d) Dacă α, β, γ sînt cosinușii directori ai normalei $\overline{n}$ la suprafață, în punctul P, deoarece $\overline{n}$ este perpendiculară pe PT_1 și PT_2, avem relațiile

$$\alpha f'_u + \beta g'_u + \gamma h'_u = 0,$$

$$\alpha f'_v + \beta g'_v + \gamma h'_v = 0,$$

de unde deducem, în ipoteza că matricea

$$\begin{Vmatrix} f'_u & g'_u & h'_u \\ f'_v & g'_v & h'_v \end{Vmatrix}$$

este de rang doi, soluțiile

$$\alpha = \lambda A, \quad \beta = \lambda B, \quad \gamma = \lambda C,$$

unde A, B, C sînt determinanții funcționali

$$A = \frac{D(g, h)}{D(u, v)}, \quad B = \frac{D(h, f)}{D(u, v)}, \quad C = \frac{D(f, g)}{D(u, v)}$$

și pentru că $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ rezultă λ, astfel încît avem în cele din urmă

$$\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

În fiecare punct al suprafeței S avem doi vectori normali la suprafață, de sensuri opuse. Dacă $C \neq 0$, unul din ei va face un unghi ascuțit cu axa Oz (deci $\gamma > 0$), iar celălalt va face un unghi obtuz (deci $\gamma < 0$).

Folosind identitatea lui Lagrange

$$(bc' - cb')^2 + (ca' - ac') + (ab' - ba')^2 =$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) - (aa' + bb' + cc')^2$$

și ținînd seamă că

$$A^2 = (g'_u h'_v - g'_v h'_u)^2, \qquad E = f'^2_u + g'^2_u + h'^2_u,$$

$$C^2 = (f'_u g'_v - f'_v g'_u)^2, \qquad G = f'^2_v + g'^2_v + h'^2_v,$$

$$B^2 = (h'_u f'_v - h'_v f'_u)^2, \qquad F = f'_u f'_v + g'_u g'_v + h'_u h'_v,$$

rezultă identitatea

$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2 > 0.$$

e) Să considerăm funcţia vectorială $\bar{r}(u, v)$, $\bar{r} = \overline{OM}$, definită de

$$\bar{r}(u, v) = \bar{i}f(u, v) + \bar{j}g(u, v) + \bar{k}h(u, v), \quad (u, v) \in D;$$

cînd punctul (u, v) parcurge domeniul D, vîrful $M(x, y, z)$ al vectorului $\bar{r}$ descrie suprafaţa S. Vectorii

$$\bar{r}_u = \bar{i}\frac{\partial f}{\partial u} + \bar{j}\frac{\partial g}{\partial u} + \bar{k}\frac{\partial h}{\partial u},$$

$$\bar{r}_v = \bar{i}\frac{\partial f}{\partial v} + \bar{j}\frac{\partial g}{\partial v} + \bar{k}\frac{\partial h}{\partial v},$$

calculaţi în punctul (u_0, v_0), sînt vectori tangenţi la curbele $v = v_0$ şi $u = u_0$ în punctul $P(u_0, v_0)$ respectiv. Avem şi

$$\|\bar{r}_u\|^2 = E, \quad \|\bar{r}_v\|^2 = G, \quad (\bar{r}_u, \bar{r}_v) = F,$$

deci

$$EG - F^2 = \|\bar{r}_u \times \bar{r}_v\|^2, \quad \bar{r}_u \times \bar{r}_v \neq 0,$$

deoarece

$$\|\bar{r}_u \times \bar{r}_v\|^2 = \|\bar{r}_u\|^2 \cdot \|\bar{r}_v\|^2 - (\bar{r}_u, \bar{r}_v)^2.$$

Versorul normalei $\bar{n}$ la suprafaţă este dat, aşadar, de

$$\frac{\bar{r}_u \times \bar{r}_v}{\pm \|\bar{r}_u \times \bar{r}_v\|};$$

semnele $+$ şi $-$ corespund la cei doi vectori normali la suprafaţă.

Planul tangent la suprafaţă este planul ce trece prin punctul (u_0, v_0) şi este paralel cu vectorii $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$ deci are ecuaţia

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \lambda\bar{r}_u + \mu\bar{r}_v$$

sau, în coordonate carteziene,

$$(x - x_0)A + (y - y_0)B + (z - z_0)C = 0.$$

2. Aria unei suprafeţe

Să considerăm suprafaţa S definită de

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v), \quad z = h(u, v), \quad (u, v) \in D,$$

D fiind un domeniu închis şi mărginit din planul uOv, interior unui interval $I = \{(u, v) \mid u \in [a, b], \quad v \in [c, d]\}$.

Fie δ' o diviziune a domeniului D

$$\delta' = (\delta_1, \ \delta_2, \ldots, \delta_p) ;$$

dreptelor $u = u_i, \ i = 1, 2, \ldots, m, \ v = v_j, \ j = 1, 2, \ldots, n$ care formează diviziunea δ' le corespund pe suprafața S o *rețea de curbe parametrice*, care la rîndul lor determină o diviziune δ a suprafeței S

$$\delta = (s_1, \ s_2, \ldots, s_p) .$$

Reciproc, la o diviziune δ a suprafeței S formată dintr-o rețea de curbe parametrice corespunde pe domeniul D o diviziune δ' formată din paralelele la axele de coordonate Ou și Ov.

Dacă $s_1, s_2, \ldots, s_p$ sînt părțile de suprafață care formează diviziunea δ, pentru fiecare suprafață s_k să considerăm cea mai mică sferă care conține pe s_k și fie d_k diametrul său; pe cel mai mare dintre numerele $d_1, d_2, \ldots, d_p$ îl numim norma diviziunii δ și îl notăm cu $\nu(\delta)$.

În planul uOv, diviziunea δ' are norma $\nu(\delta')$, așa cum a fost definită anterior.

Să luăm un interval δ_k al diviziunii δ determinat de dreptele $u = u_i$, $u = u_{i+1}, \ v = v_j, \ v = v_{j+1}$

$$\delta_k = \{(u, \ v) \mid u \in [u_i, \ u_{i+1}], \ v \in [v_j, \ v_{j+1}]\} ;$$

acestui interval îi corespunde partea de suprafață s_k mărginită de curbele parametrice (fig. 93),

$$u = u_i, \ \ u = u_{i+1}, \ \ v = v_j, \ \ v = v_{j+1}.$$

În planul tangent la suprafață în punctul $P(u_i, v_j)$ de pe suprafață, să considerăm paralelogramul cu un vîrf în acest punct și laturi dirijate după vectorii $\bar{r}_u, \bar{r}_v$, de lungimi

$$\|\bar{r}_u\| \cdot (u_{i+1} - u_i), \quad \|\bar{r}_v\| \cdot (v_{j+1} - v_j).$$

Vom aproxima aria părții de suprafață s_k cu aria σ_k a acestui paralelogram

$$\sigma_k = \|\bar{r}_u\| \, \|\bar{r}_v\| \sin\theta \, (u_{i+1} - u_i)(v_{j+1} - v_j),$$

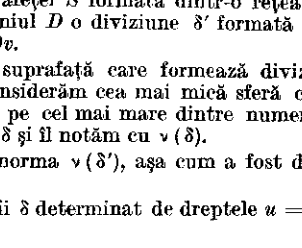

Fig. 93

unde θ este unghiul curbelor parametrice $u = u_i, \ v = v_j$.

Deoarece avem

$$\|\bar{r}_u\| = \sqrt{E}, \quad \|\bar{r}_v\| = \sqrt{G},$$

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \frac{F^2}{EG}} = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}$$

rezultă imediat că

$$\sigma_k = \sqrt{EG - F^2}\,(u_{i+1} - u_i)\,(v_{j+1} - v_j),$$

expresia $\sqrt{EG-F^2}$ fiind calculată în punctul (u_i, v_j).

Aria $\mathcal{A}_s$ a suprafeței S o aproximăm cu suma

$$\mathcal{A}_s \simeq \mathcal{A}_{\delta'} = \sum_{\delta} \sigma_k = \sum_{\delta'} \sqrt{EG - F^2}\Big|_{(u_i, v_j)}\,(u_{i+1} - u_i)\,(v_{j+1} - v_j)$$

Să considerăm acum un șir de diviziuni (δ_n) ale suprafeței S cu $\nu(\delta_n)\to 0$ cînd $n\to\infty$; acestui șir îi corespunde un șir de diviziuni (δ'_n) ale domeniului D, de asemenea cu $\nu(\delta'_n)\to 0$ cînd $n\to\infty$. Sumele $\mathcal{A}_{\delta'}$ sînt sume Riemann relative la funcția $\sqrt{EG-F^2}$ și diviziunea δ'_n a domeniului D. Deoarece f, g, h au derivate parțiale continue în D, urmează că $\sqrt{EG-F^2}$ reprezintă o funcție continuă în D; prin urmare cînd $\nu(\delta'_n)\to 0$ sumele $\mathcal{A}_{\delta'_n}$ sînt convergente către integrala dublă

$$\iint_D \sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

D e f i n i ț i e. Spunem că suprafața S are o arie dacă integrala dublă

$$\iint_D \sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

există și este finită. Valoarea integralei duble reprezintă aria suprafeței S.

O b s e r v a ț i e

O suprafață S pentru care funcțiile f, g, h sînt continue cu derivate parțiale de ordinul întîi continue în D și pentru care determinanții funcționali

$$\frac{\mathrm{D}(f, g)}{\mathrm{D}(u, v)},\quad \frac{\mathrm{D}(g, h)}{\mathrm{D}(u, v)},\quad \frac{\mathrm{D}(h, f)}{\mathrm{D}(u, v)}$$

nu se anulează simultan în D, se numește o ***suprafață netedă.***

Din definiția dată rezultă că o suprafață netedă, sau o suprafață formată dintr-un număr finit de porțiuni netede, are o arie.

D e f i n i ț i e. Forma diferențială

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

se numește elementul de arie al suprafeței S.

O b s e r v a ț i e. Dacă suprafața S este dată prin ecuația ei carteziană $z = f(x, y)$, $(x, y)\in D$, punînd $x = u$, $y = v$, $z = f(u, v)$, obținem

$$E = 1 + p^2,\quad G = 1 + q^2,\quad F = pq,\quad p = \frac{\partial z}{\partial x},\quad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

elementul de arie este dat de

$$d\sigma = \sqrt{(1 + p^2)(1 + q^2) - p^2 q^2}\, du\, dv = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, du\, dv,$$

iar aria suprafeței S de integrala dublă

$$A_s = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\ dy.$$

unde D este proiecția suprafeței S pe planul xOy.

Exemple

1) Sfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ are o reprezentare parametrică $x = R \sin\theta \cos\varphi$, $y = R \sin\theta \sin\varphi$, $z = R\cos\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Avem, cu $\varphi = u$, $\theta = v$,

$$E = R^2 (\sin^2\theta \sin^2\varphi + \sin^2\theta\cos^2\varphi) = R^2 \sin^2\theta,$$

$$G = R^2 (\cos^2\theta\cos^2\varphi + \cos^2\theta \sin^2\varphi + \sin^2\theta) = R^2,$$

$$F = 0,$$

prin urmare elementul de arie al sferei este dat de

$$d\sigma = R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

2) Paraboloidul eliptic $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ are o reprezentare parametrică dată de $x = u$, $y = v$, $z = \dfrac{u^2}{a^2} + \dfrac{v^2}{b^2}$. Avem $p = \dfrac{2u}{a^2}$, $q = \dfrac{2v}{b^2}$, deci elementul de arie este

$$d\sigma = \sqrt{1 + 4\frac{x^2}{a^4} + 4\frac{y^2}{b^4}}\, dx\, dy.$$

În *formula* care dă aria suprafeței S

$$A_S = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

E, F, G depind de f, g, h, adică de reprezentarea parametrică a suprafeței S. Numărul A_S este însă independent de reprezentarea parametrică a suprafeței S. Avem următoarea

Teoremă. Integrala dublă

$$\iint_D \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$$

este independentă de reprezentarea parametrică a suprafeței S.

Demonstrație. Orice altă reprezentare parametrică a suprafeței S se obține din

$$x = f(u, v),\quad y = g(u, v),\ z = h(u, v),\ (u, v) \in D,$$

printr-o schimbare de variabile

$$u = \varphi(s, t), \quad v = \psi(s, t), \quad (s, t) \in D', \tag{2}$$

cu φ, ψ funcții continue cu derivate parțiale de ordinul întîi continue în D', cu determinantul funcțional

$$\frac{D(\varphi, \psi)}{D(s, t)} \neq 0, \quad (s, t) \in D'$$

și care realizează o transformare regulată a lui D' pe D.

Dacă considerăm transformarea punctuală

$$x = \varphi(s, t), \quad y = \psi(s, t), \quad (s, t) \in D',$$

care transformă domeniul D' în domeniul D, avem egalitatea

$$\iint_D \Phi(u, v)\, du\, dv = \iint_{D'} \Phi(\varphi(s, t), \psi(s, t)) \left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(s, t)} \right| ds\, dt \tag{3}$$

demonstrată la integrale duble (A, cap. IV, § 1, al. 8) și unde am notat

$$\Phi(u, v) = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Avem însă

$$A' = \frac{D(y, z)}{D(s, t)} = \frac{D(y, z)}{D(u, v)} \cdot \frac{D(u, v)}{D(s, t)} = A \cdot \frac{D(u, v)}{D(s, t)},$$

$$B' = \frac{D(z, x)}{D(s, t)} = \frac{D(z, x)}{D(u, v)} \cdot \frac{D(u, v)}{D(s, t)} = B \cdot \frac{D(u, v)}{D(s, t)},$$

$$C' = \frac{D(x, y)}{D(s, t)} = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \cdot \frac{D(u, v)}{D(s, t)} = C \cdot \frac{D(u, v)}{D(s, t)},$$

conform unei proprietăți cunoscute (vol. I, B, cap. VII, § 5, al. 3) a determinanților funcționali, deci

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2} : \left| \frac{D(u, v)}{D(s, t)} \right|$$

pe care dacă o înlocuim în (3) ne dă

$$\iint_D \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du\, dv = \iint_{D'} \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}\, ds\, dt.$$

Teorema este demonstrată.

Exemple

1) Să se calculeze aria suprafeței $az = xy$ (paraboloid hiperbolic) care se proiectează pe planul xOy în interiorul cercului $x^2 + y^2 = R^2$.

Avem

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{a}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{a},$$

deci aria $\mathcal{A}$ căutată este dată de

$$\mathcal{A} = \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{a^2}}\, dx\, dy,$$

unde D este discul circular $x^2 + y^2 \leqslant R^2$. Dacă facem schimbarea de variabile

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant R, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi,$$

obținem

$$\mathcal{A} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \sqrt{1 + \frac{\rho^2}{a^2}}\, \rho\, d\rho = \pi a^2 \int_0^R \sqrt{1 + \frac{\rho^2}{a^2}}\, d\left(1 + \frac{\rho^2}{a^2}\right)$$

sau

$$\mathcal{A} = \pi a^2 \cdot \frac{2}{3} \left[1 + \frac{\rho^2}{a^2}\right]^{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^R = \frac{2\pi a^2}{3} \left[\left(1 + \frac{R^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right].$$

2. Să se calculeze aria elipsoidului de rotație

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad 0 < c < a.$$

O reprezentare parametrică a elipsoidului este

$x = a \cos u \sin v$, $y = a \sin u \sin v$, $z = c \cos v$ cu $0 \leqslant u < 2\pi$ și $0 \leqslant v \leqslant \pi$. Avem

$E = a^2 \sin^2 u \sin^2 v + a^2 \cos^2 u \sin^2 v = a^2 \sin^2 v,$

$G = a^2 \cos u \cos^2 v + a^2 \sin^2 u \cos^2 v + c^2 \sin^2 v = a^2 \cos^2 v + c^2 \sin^2 v,$

$F = - a^2 \sin u \cos u \sin v \cos v + a^2 \sin u \cos u \sin v \cos v = 0$

deci

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv = a \sqrt{a^2 \cos^2 v + c^2 \sin^2 v}\, \sin v\, du\, dv.$$

Aria elipsoidului de rotație este dată de integrala dublă

$$\mathcal{A} = a \int_0^{2\pi} du \int_0^{\pi} \sqrt{c^2 + (a^2 - c^2) \cos^2 v}\, \sin v\, dv \tag{1}$$

în care dacă punem $\cos v = u$, obținem

$$\mathcal{A} = - 2\pi a \int_{+1}^{-1} \sqrt{c^2 + (a^2 - c^2) u^2}\, du = 4\pi a \int_0^1 \sqrt{c^2 + (a^2 - c^2) u^2}\, du,$$

$$\mathcal{A} = 4\pi a \left[\frac{1}{2} u \sqrt{c^2 + (a^2 - c^2) u^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{\sqrt{a^2 - c^2}} \ln \left[\sqrt{a^2 - c^2}\, u + \sqrt{c^2 + (a^2 - c^2) u^2}\right]\right]_0^1,$$

$$\mathcal{A} = 2\pi a \left[\frac{a}{2} + \frac{1}{2} \frac{c^2}{\sqrt{a^2 - c^2}} \ln [\sqrt{a^2 - c^2} + a] - \frac{1}{2} \frac{c^2 \ln c}{\sqrt{a^2 - c^2}}\right].$$

Dacă $a = c$ din (1) obținem suprafața sferei $4\pi a^2$.

3. Integrale de suprafaţă în raport cu aria

Fie S o suprafaţă în spaţiu definită de $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$, $z = h(u, v)$, $(u, v) \in D$, funcţiile f, g, h fiind continue şi avînd derivate parţiale de ordinul întîi continue în domeniul D (închis şi mărginit) şi $F(x, y, z)$ o funcţie definită pe S.

Fie δ o diviziune a suprafeţei S în părţile de suprafaţă

$$s_1, s_2, \ldots, s_p$$

de arii respectiv $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$.

Să considerăm suma

$$\Omega_\delta = \sum_{k=1}^{p} F(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\, \sigma_k \tag{1}$$

unde (ξ_k, η_k, ζ_k) este un punct oarecare situat pe s_k; deoarece avem

$$\xi_k = f(u_k, v_k), \qquad \eta_k = g(u_k, v_k), \quad \zeta_k = h(u_k, v_k)$$

urmează că suma (1) este egală cu suma (1′),

$$\Omega_\delta^* = \sum_{p=1}^{p} F[f(u_k, v_k),\ g(u_k, v_k),\ h(u_k, v_k)]\, \sigma_k. \tag{1′}$$

Diviziunii δ a lui S îi corespunde diviziunea δ' a lui D, iar părţilor de suprafaţă $s_1, s_2, \ldots, s_p$, le corespund subdomeniile $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p$; punctul (u_k, v_k) aparţine aşadar lui δ_k.

Să considerăm acum un şir de diviziuni (δ_n) ale suprafeţei S cu $\nu(\delta_n) \to 0$. La şirul de diviziuni (δ_n) ale suprafeţei S corespunde un şir de diviziuni (δ'_n) ale domeniului D (închis şi mărginit) de asemenea cu $\nu(\delta'_n) \to 0$.

La şirul de diviziuni (δ_n) ale suprafeţei S corespunde şirul sumelor Ω_{δ_n}.

Definiţie. Dacă pentru orice şir de diviziuni (δ_n) ale suprafeţei S cu $\nu(\delta_n) \to 0$, şirul sumelor (Ω_{δ_n}) are o limită finită, atunci limita şirului (Ω_{δ_n}) se numeşte integrala de suprafaţă a funcţiei F pe suprafaţa S (în raport cu aria) şi se notează

$$\iint_S F(x, y, z)\, \mathrm{d}\sigma. \tag{2}$$

Deoarece şirul sumelor $(\Omega^*_{\delta'_n})$ are aceeaşi limită cu şirul (Ω_{δ_n}) (dacă există), urmează că avem egalitatea

$$\begin{aligned}\iint_S F(x, y, z)\, \mathrm{d}\sigma &= \iint_D F[f(u, v),\ g(u, v),\ h(u, v)]\, \mathrm{d}\sigma = \\ &= \iint_D F[f(u, v),\ g(u, v),\ h(u, v)] \sqrt{EG - F^2}\, \mathrm{d}u\mathrm{d}v,\end{aligned} \tag{3}$$

formulă care constituie şi regula de calcul pentru integrala de suprafaţă (2).

Observaţii

1) Dacă $F(x, y, z)$ este continuă într-un domeniu $\Delta \subset R^3$ şi dacă $S \subset \Delta$, atunci integrala (2) există, deoarece şi (3) există.

2) Dacă suprafaţa S este definită de

$$z = f(x, y),\ (x, y) \in D,$$

atunci avem

$$\iint_S F(x, y, z)\, \mathrm{d}\sigma = \iint_D F[x, y, f(x, y)] \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

3) Dacă luăm $F(x, y, z) = 1$ pe S, obţinem integrala de suprafaţă

$$\iint_S \mathrm{d}\sigma = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v$$

care ne dă aria suprafeţei S.

Exemple

1) Să se calculeze integrala de suprafaţă

$$I = \iint_S xyz\, \mathrm{d}\sigma,$$

S fiind porţiunea din suprafaţa sferei $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, situată în primul octant. O reprezentare parametrică a suprafeţei S este dată de

$$x = R \sin\theta \cos\varphi, \quad y = R \sin\theta \sin\varphi, \quad z = R\cos\theta,$$

cu $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ şi $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$. Elementul de arie al sferei de rază R este $\mathrm{d}\sigma = R^2 \sin\theta\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\varphi$ avem

$$I = R^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta \cos\theta \cos\varphi \sin\varphi\, \mathrm{d}\varphi,$$

$$I = R^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta \cos\theta\, \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi\, \mathrm{d}\varphi,$$

$$I = R^5 \frac{1}{4} \sin^4\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{2} \sin^2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8} R^5.$$

2) Să se calculeze integrala de suprafaţă

$$I = \iint_S \frac{z\, \mathrm{d}\sigma}{\sqrt{a^2 + x^2 + y^2}}$$

unde S este porțiunea din paraboloidul de rotație $2az = x^2 + y^2$ cuprinsă între planele $z = 0$ și $z = h$. Avem

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{a}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{a}$$

deci

$$d\sigma = \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{a^2}}\, dx\, dy$$

și calculul integralei de suprafață se reduce la calculul integralei duble

$$I = \iint_D \frac{x^2 + y^2}{2a} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{a}\sqrt{a^2 + x^2 + y^2}\, dx\, dy$$

sau

$$I = \frac{1}{2a^2}\iint_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy,$$

D fiind discul circular $x^2 + y^2 \leqslant 2ah$, $(ah > 0)$. Cu substituția $x = \rho \cos\theta$, $y = \rho \sin\theta$, $0 \leqslant \rho \leqslant \sqrt{2ah}$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, $dx\, dy = \rho\, d\rho\, d\theta$, obținem

$$I = \frac{1}{2a^2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2ah}} \rho^3\, d\rho = \frac{1}{2a^2} \cdot 2\pi \cdot \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^{\sqrt{2ah}} = \pi h^2.$$

4. Integrale de suprafață în raport cu coordonatele

a) Să considerăm o suprafață S dată de ecuațiile $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$, $z = h(u, v)$, $(u, v) \in D$, f, g, h fiind funcții continue cu derivate parțiale de ordinul întîi continue în domeniul închis și mărginit D din planul uOv. Vom presupune că determinanții funcționali $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$, $\frac{D(y, z)}{D(u, v)}$, $\frac{D(z, h)}{D(u, v)}$ nu se anulează simultan în D.

În fiecare punct $P(x, y, z)$ al suprafeței S se pot considera doi vectori normali la suprafață, $\overline{n}_s$ și $\overline{n}_i$, avînd sensuri opuse.

Unul din vectori face un unghi ascuțit cu axa Oz, iar celălalt un unghi obtuz. Vom numi *fața superioară* a suprafeței S în raport cu planul xOy fața lui S pentru care vectorul normal $\overline{n}$ face un unghi ascuțit cu axa Oz; vom numi fața inferioară a suprafeței S, cealaltă față a lui S, adică fața pentru care vectorul normal $\overline{n}$ face un unghi obtuz cu axa Oz.

Exemplu

a) Să considerăm semisfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geqslant 0$. Fața superioară are ca normală normala exterioară la sfera dată. Fața inferioară are ca normală normala la sferă dirijată spre centrul sferei.

b) Dacă considerăm semisfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \leqslant 0$, situată sub planul xOy, faţa superioară are normala dirijată spre centrul sferei, iar faţa inferioară are normala dirijată spre exteriorul sferei.

Fie Γ conturul suprafeţei S (care nu este o suprafaţă închisă) şi C proiecţia lui Γ pe planul xOy. Pe Γ se pot lua două sensuri de parcurs. Sensul asociat suprafeţei superioare (fig. 94), este acela care corespunde sensului direct pe conturul C. Feţei inferioare i se asociază sensul invers. În acest mod se defineşte un sens de parcurs pe conturul oricărei porţiuni din suprafaţa S. Spunem că suprafaţa S este orientată faţă de planul xOy, în acelaşi timp fiind orientat şi domeniul Δ, proiecţia suprafeţei S pe planul xOy, precum şi domeniul D din planul uOv.

Observaţie

Nu orice suprafaţă are două feţe. Există suprafeţe cu o singură faţă; suprafeţe pe care, printr-o deplasare continuă, normala schimbîndu-şi direcţia în mod continuu, poate reveni în punctul iniţial cu sensul opus sensului iniţial.

Cel mai simplu exemplu este aşa-numita bandă a lui Möbius (fig. 95). Pentru a o obţine luăm o foaie de hîrtie dreptunghiulară $ABCD$, o răsucim şi o lipim astfel încît A să coincidă cu C şi B cu D.

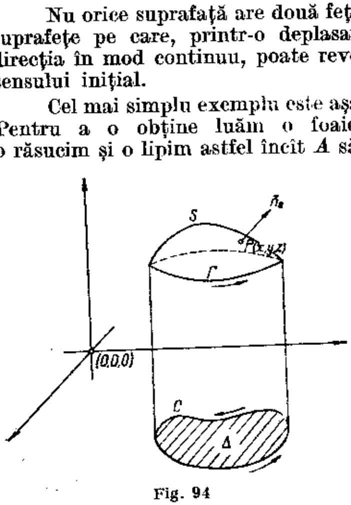

Fig. 94

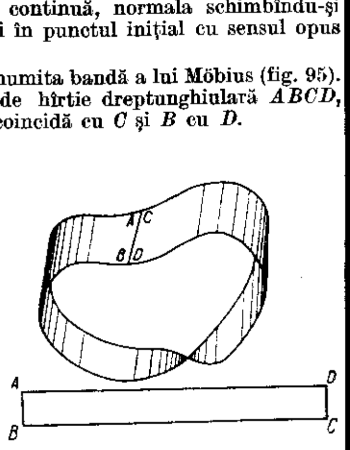

Fig. 95

Fie $R(x, y, z)$ o funcţie definită pe suprafaţa orientată S. Fie (δ) o diviziune a suprafeţei S

$$\delta = (\delta_1, \ \delta_2, \dots, \delta_p)$$

căreia îi corespunde o diviziune δ' a domeniului Δ, proiecţia suprafeţei S pe planul xOy,

$$\delta' = (\delta'_1, \ \delta'_2, \dots, \delta'_p)$$

(δ_k se proiectează pe δ'_k, iar frontiera lui δ_k se proiectează pe frontiera lui δ'_k), şi fie

$$\omega_k = \begin{cases} \text{aria } \delta'_k, \text{ dacă } \delta'_k \text{ este orientat direct} \\ -\text{aria } \delta'_k, \text{ dacă } \delta'_k \text{ este orientat invers.} \end{cases}$$

Dacă notăm cu σ_k aria părţii de suprafaţă δ_k de pe S avem egalitatea

$$\omega_k = \gamma_k \cdot \sigma_k, \tag{1}$$

unde γ_k este cosinusul unghiului pe care îl face normala la suprafaţa orientată δ_k într-un punct de pe suprafaţa δ_k, cu axa Oz.

Să considerăm suma

$$\Omega_{\delta'} = \sum_{k=1}^{p} R(x_k, y_k, z_k)\,\omega_k,$$

unde (x_k, y_k, z_k) este un punct oarecare de pe δ_k. Conform egalităţii (1), suma $\Omega_{\delta'}$ este egală cu suma

$$\Omega^*_\delta = \sum_{k=1}^{p} R(x_k, y_k, z_k)\,\gamma_k\,\sigma_k$$

relativă la diviziunea δ a suprafeţei S.

Fie (δ'_n) un şir de diviziuni ale domeniului Δ cu $\nu(\delta'_n) \to 0$, cînd $n \to \infty$. Acestui şir de diviziuni îi corespunde un şir de diviziuni (δ_n) ale suprafeţei S cu $\nu(\delta_n) \to 0$, cînd $n \to \infty$.

D e f i n i ţ i e. Dacă pentru orice şir de diviziuni (δ'_n) cu $\nu(\delta'_n)$, şirul sumelor $(\Omega_{\delta'_n})$ are o limită finită, această limită se numeşte integrala de suprafaţă a funcţiei $R(x, y, z)$ în raport cu x şi y şi se notează

$$\iint_S R(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Deoarece şirul sumelor $(\Omega^*_{\delta_n})$ are aceeaşi limită cu şirul (Ω'_{δ_n}) (dacă există), avem egalitatea

$$\iint_S R(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_S R(x, y, z)\gamma\,\mathrm{d}\sigma, \tag{2}$$

unde γ este cosinusul unghiului pe care îl face normala la suprafaţa orientată S cu axa Oz.

Formula (2) ne dă regula de calcul a integralei de suprafaţă în raport cu x, y, deoarece

$$\iint_S R(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_S R[f(u, v), g(u, v), h(u, v)]\,\gamma\sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

unde

$$\gamma = \frac{1}{\pm\sqrt{EG - F^2}} \cdot \frac{\mathrm{D}(f, g)}{\mathrm{D}(u, v)};$$

avem așadar

$$\iint_S R(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D R\ [f(u, v), g(u, v),\ h(u, v)]\ \frac{\mathrm{D}(f, g)}{\mathrm{D}(u, v)}\ \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

dacă domeniul D are aceeași orientare cu domeniul Δ, și

$$\iint_S R(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint_D R\,[f(u, v),\ g(u, v),\ h(u, v)]\,\frac{\mathrm{D}(f, g)}{\mathrm{D}(u, v)}\ \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

dacă domeniul D are orientare inversă față de domeniul Δ.

b) Procedeul folosit pentru a orienta suprafața S și de a asocia acestei orientări orientarea domeniului Δ, proiecția suprafeței S pe planul xOy poate fi extins și la celelalte plane de coordonate. Astfel, vom numi fața superioară a suprafeței S în raport cu planul yOz, fața lui S pentru care vectorul normal $\overline{n}$ face un unghi ascuțit cu axa Ox. Dacă Γ este conturul lui S și C' proiecția lui Γ pe planul yOz, sensul pe Γ asociat suprafeței superioare este acel care corespunde sensului direct pe C'. În modul acesta, suprafața S este orientată față de planul yOz, fiind în același timp orientat și domeniul Δ', proiecția suprafeței S pe planul yOz, precum și domeniul D din planul uOv. Vom numi fața superioară a suprafeței S în raport cu planul zOx, fața lui S pentru care vectorul normal $\overline{n}$ face un unghi ascuțit cu axa Oy. Dacă C'' este proiecția conturului Γ a lui S pe planul zOx, sensul pe Γ asociat suprafeței superioare este acela care corespunde sensului direct pe C''. În modul acesta, suprafața S este orientată față de planul zOx, fiind în același timp orientat și domeniul Δ'', proiecția suprafeței S pe planul zOx, precum și domeniul D din planul uOv.

Exemplu

Fie semisfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x \geqslant 0$ pe care planele de coordonate o împart în 4 octante. Să cercetăm cum este orientată suprafața *exterioară* a semisferei față de cele trei plane de coordonate în fiecare octant.

Se observă că pentru această față, normala este normala la sfera dirijată înspre exteriorul sferei.

a) în octantul $(x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$, octantul corespunzător al sferei este suprafață superioară față de cele trei plane de coordonate.

b) în octantul $(x > 0,\ y > 0,\ z < 0)$, octantul corespunzător al sferei este suprafața superioară față de planele, yOz, zOx și fața inferioară pentru planul xOy.

c) în octantul $(x > 0,\ y < 0,\ z > 0)$ octantul corespunzător al sferei este suprafața superioară pentru planele yOz, xOy și fața inferioară pentru planul zOx.

d) în octantul $(x > 0,\ y < 0,\ z < 0)$, octantul corespunzător al sferei este fața superioară față de planul yOz și fața inferioară față de planele xOy și zOx.

c) Dacă $P(x, y, z)$ este o funcție definită pe suprafața S, integrala de suprafață a funcției $P(x, y, z)$ în raport cu y, z, pe o anumită față a suprafeței S se definește în mod asemănător

$$\iint_S P(x, y, z)\ \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_S P(x, y, z)\ \alpha\,\mathrm{d}\sigma \tag{1}$$

unde α este cosinusul unghiului pe care îl face normala la suprafața orientată S cu axa Ox. Dacă domeniul D (din planul uOv) are aceeași orientare cu suprafața S, atunci avem egalitatea

$$\iint_S P(x, y, z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_D P[f(u, v), g(u, v), h(u, v)]\frac{\mathrm{D}(g, h)}{\mathrm{D}(u, v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

iar dacă domeniul D este orientat invers, avem egalitatea

$$\iint_S P(x, y, z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = -\iint_D P[f(u, v), g(u, v), h(u, v)]\frac{\mathrm{D}(g, h)}{\mathrm{D}(u, v)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

formule care ne dau regula de calcul pentru integrala (1).

Dacă $Q(x, y, z)$ este o funcție definită pe suprafața S, integrala de suprafață a funcției $Q(x, y, z)$ în raport cu z, x pe o anumită față a suprafeței S se definește în mod asemănător

$$\iint_S Q(x, y, z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \iint_S Q(x, y, z)\,\beta\,\mathrm{d}\sigma,$$

unde β este cosinusul unghiului pe care îl face normala la suprafața orientată S cu axa Oy. Dacă domeniul D (din planul uOv) are aceeași orientare cu suprafața S, atunci avem egalitatea

$$\iint_S Q(x, y, z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \iint_D Q[f(u, v), g(u, v), h(u, v)]\,\frac{\mathrm{D}(h, f)}{\mathrm{D}(u, v)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

iar dacă domeniul D este orientat în sens invers,

$$\iint_S Q(x, y, z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = -\iint_D Q[f(u, v), g(u, v), h(u, v)]\frac{\mathrm{D}(h, f)}{\mathrm{D}(u, v)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

d) Am obținut egalitățile

$$\iint_S P(x, y, z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_S P(x, y, z)\,\alpha\,\mathrm{d}\sigma,$$

$$\iint_S Q(x, y, z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \iint_S Q(x, y, z)\,\beta\,\mathrm{d}\sigma,$$

$$\iint_S R(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_S R(x, y, z)\gamma\,\mathrm{d}\sigma,$$

unde α, β, γ sînt cosinușii directori ai normalei la suprafața S și anume ai normalei la fața suprafeței S în raport cu care sînt luate integralele din prima parte (această față este aceeași pentru cele trei integrale).

Dacă le adunăm, obținem

$$\iint_S P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_S (P\alpha + Q\beta + R\gamma)\,\mathrm{d}\sigma, \tag{1}$$

egalitatea care ne dă și regula de calcul pentru integrala de suprafață în raport cu coordonatele

$$\iint_S P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y + R\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{2}$$

Expresia (2) este *forma generală* a integralei de suprafață în raport cu coordonatele și din discuția de mai sus rezultă că se calculează aducîndu-se la forma (1), adică la o integrală în raport cu aria, care la rîndul ei se calculează după regula dată la alineatul precedent.

Observații.

1) Dacă considerăm cîmpul vectorial $\overline{F}\,(x, y, z)$ de componente (P, Q, R), definit într-un domeniu $V \subset R^3$,

$$F\,(x, y, z) = \bar{i}\,P\,(x, y, z) + \bar{j}\,Q\,(x, y, z) + \bar{k}\,R\,(x, y, z),$$

iar dacă $\overline{n}$ este versorul normalei la fața suprafeței $S \subset V$ în raport cu care se calculează integrala de suprafață (2), adică

$$\overline{n} = \bar{i}\alpha + \bar{j}\beta + \bar{k}\gamma,$$

atunci relația (1) se scrie

$$\iint_S P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_S \overline{F}\cdot\overline{n}\,\mathrm{d}\sigma.$$

În cazul cînd $\overline{F}$ este cîmpul de viteze ale unui fluid în mișcare (de masă specifică egală cu unitatea), produsul

$$\overline{F}\cdot\overline{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

reprezintă cantitatea de fluid care trece prin elementul de suprafață $\mathrm{d}\sigma$ (al suprafeței S) în unitatea de timp și se numește *fluxul elementar* al cîmpului de viteze $\overline{F}$ prin elementul $\mathrm{d}\sigma$. Integrala de suprafață

$$\iint_S \overline{F}\cdot\overline{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

reprezintă așadar *fluxul total* al cîmpului de viteze $\overline{F}$ prin suprafața orientată S și după cum se vede are o semnificație fizică.

2) Dacă P, Q, R sînt continue într-un domeniu $V \subset R^3$ și dacă $S \subset V$, toate integralele de suprafață în raport cu coordonatele care intră în componența integralei (2) există.

3) Dacă suprafața S nu este netedă însă este formată din reuniunea unui număr finit de suprafețe netede S_i $(i = 1, 2, ..., m)$, atunci integrala de suprafață (2) se definește ca suma integralelor de suprafață relative la suprafețele netede S_i a căror reuniune este suprafața S.

Exemple

1) Să se calculeze integrala la suprafață

$$I = \iint_S x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

unde S este suprafața (fața exterioară) a sferei $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$. Normala la suprafața sferei, dirijată spre exteriorul sferei, are cosinușii directori

$$\alpha=\frac{x-a}{R},\ \beta=\frac{y-b}{R},\ \gamma=\frac{z-c}{R},$$

deci

$$I=\frac{1}{R}\iint_S[x^2(x-a)+y^2(y-b)+z^2(z-c)]\,d\sigma.$$

O reprezentare parametrică a sferei date este

$$x=a+R\sin\theta\cos\varphi,\quad y=b+R\sin\theta\sin\varphi,\quad z=c+R\cos\theta,$$

$0\leqslant\theta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi<2\pi$. Avem $d\sigma=R^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$, deci

$$I=R^2\iint_S[(a+R\sin\theta\cos\varphi)^2\sin\theta\cos\varphi+(b+R\sin\theta\sin\varphi)^2\sin\theta\sin\varphi+$$

$$+(c+R\cos\theta)^2\cos\theta]\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

și ținînd seamă că integralele $\int_0^{2\pi}\cos^m\varphi\sin^n\varphi\,d\varphi$, m, n întregi >0, sînt nule dacă cel puțin unul din numerele m, n este impar, obținem

$$I=R^2\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi}[2aR\sin^3\theta\cos^2\varphi+2bR\sin^3\theta\sin^2\varphi+(c+R\cos\theta)^2\sin\theta\cos\theta]\,d\varphi,$$

$$I=2\pi R^2\int_0^\pi[Ra\sin^3\theta+Rb\sin^3\theta+(c+R\cos\theta)^2\sin\theta\cos\theta]\,d\theta,$$

$$I=\frac{8}{3}\pi(a+b+c)R^3.$$

2) Să se calculeze integrala de suprafață

$$I=\iint_S x^3\,dy\,dz+x^2y\,dz\,dy+x^2z\,dx\,dy,$$

unde S este suprafața (fața exterioară) a cilindrului $x^2+y^2=r^2$, cuprinsă între planele $z=0$ și $z=h$.

Avem

$$I=\iint_S(x^3\alpha+x^2y\beta+x^2z\gamma)\,d\sigma,$$

unde α, β, γ sînt cosinușii directori ai normalei exterioare la suprafața S, deci

$$\alpha=\frac{x}{r},\ \beta=\frac{y}{r},\ \gamma=0,$$

prin urmare

$$I = \frac{1}{r}\iint_S x^2 (x^2 + y^2)\, d\sigma.$$

O reprezentare parametrică a suprafeței S este

$$x = r \cos u, \quad y = r \sin u, \quad z = v, \quad 0 \leqslant u < 2\pi, \quad 0 \leqslant v \leqslant h.$$

Avem

$$E = r^2,\ F = 0,\ G = 1,$$

deci $d\sigma = r\, du\, dv$,

$$I = r^4 \int_0^{2\pi} du \int_0^h \cos^2 u\, dv = \pi r^4 h.$$

5. Formula lui Stokes

Fie S o suprafață orientată, netedă, deschisă, definită de

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v), \quad z = h(u, v), \quad (u, v) \in D, \tag{1}$$

mărginită de o curbă închisă, netedă, C, funcțiile f, g, h avînd derivatele parțiale de ordinul doi, continue în D.

La suprafața orientată S corespunde un sens de parcurs pe curba C; vom alege fața suprafeței S astfel încît un observator situat pe acea față să vadă conturul C parcurs în sens direct (fig. 96).

În aceste condiții, avem următoarea

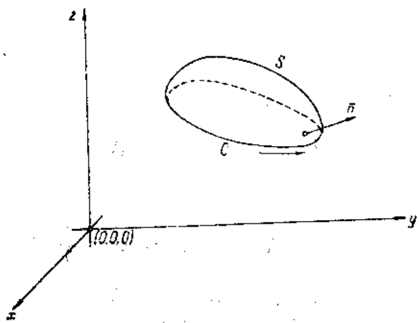

Fig. 96

T e o r e m ă. **Dacă $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ sînt trei funcții continue cu derivate parțiale de ordinul întîi continue într-un domeniu $\Delta \subset R^3$ care conține suprafața S, atunci are loc egalitatea**

$$\int_C P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz =$$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\, dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\, dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy$$

care se numește formula lui Stokes sau formula integrală a lui Stokes.

Demonstrație. Avem

$$\int_C P(x, y, z)\,\mathrm{d}x = \int_\Gamma P\,[f(u, v),\ g(u, v),\ h(u, v)]\left(\frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial f}{\partial v}\mathrm{d}v\right) \quad (2)$$

unde Γ este conturul domeniului D din planul uOv (prin transformarea (1) domeniului D îi corespunde suprafața S și curbei Γ curba C din spațiu). Dacă punem

$$P\,[f(u, v),\ g(u, v),\ h(u, v)] = P^*(u, v)$$

și dacă aplicăm formula lui Green în (2) obținem

$$\int_C P(x, y, z)\,\mathrm{d}x = \iint_D\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(P^*\frac{\partial f}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P^*\frac{\partial f}{\partial u}\right)\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}v \qquad (3)$$

însă

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(P^*\frac{\partial f}{\partial v}\right) = P^*\frac{\partial^2 f}{\partial v\,\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\left[\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial u}\right]$$

și

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(P^*\frac{\partial f}{\partial u}\right) = P^*\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial f}{\partial u}\left[\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial v}\right];$$

pentru că $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial v\,\partial u}$, rezultă că integrantul integralei duble este

$$-\frac{\partial P}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial u}\right) + \frac{\partial P}{\partial z}\left(\frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial u}\right),$$

astfel încît dacă îl înlocuim în (3) ne dă

$$\int_C P(x, y, z)\,\mathrm{d}x = \iint_D\left[\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{D(h, f)}{D(u, v)} - \frac{\partial P}{\partial y}\cdot\frac{D(f, g)}{D(u, v)}\right]\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

sau

$$\int_C P(x, y, z)\,\mathrm{d}x = \iint_S \frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x - \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad (4)$$

dacă ținem seamă de rezultatele de la alineatul precedent.

În mod analog obținem și

$$\int_C Q(x, y, z)\,\mathrm{d}y = \iint_S \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \frac{\partial Q}{\partial z}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \qquad (4')$$

$$\int_C R(x, y, z)\,\mathrm{d}z = \iint_S \frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - \frac{\partial R}{\partial x}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x, \qquad (4'')$$

iar dacă adunăm pe (4), (4′) și (4″) obținem formula integrală a lui Stokes

$$\int_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x +$$
$$+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Teorema este demonstrată.

O b s e r v a ț i i

1) Teorema este adevărată pentru orice suprafață S, care îndeplinește condițiile din enunț și care are ca bordură curba C.

2) Formula lui Green se obține din formula lui Stokes dacă C și S sînt în R^2, adică $z = 0$, $\mathrm{d}z = 0$

$$\int_C P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

3) Dacă (α, β, γ) sînt cosinușii directori ai normalei $\overline{n}$ la suprafața orientată S, atunci formula lui Stokes se scrie

$$\int_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\gamma\right]\mathrm{d}\sigma,$$

iar dacă $\overline{F}(x, y, z)$ este un cîmp vectorial de componente (P, Q, R), observăm că funcția vectorială

$$\overline{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \overline{j}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \overline{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right), \quad (x, y, z) \in \Delta,$$

este rot $\overline{F}$ (vol I, B, cap. 6, § 6, al. 5), astfel încît formula lui Stokes are și următoarea formă remarcabilă

$$\int_C \overline{F}\cdot\mathrm{d}\overline{r} = \iint_S \mathrm{rot}\ \overline{F}\cdot\overline{n}\,\mathrm{d}\sigma,$$

care se citește în modul următor: *Circulația cîmpului $\overline{F}$ de-a lungul curbei închise C este egală cu fluxul rotorului cîmpului $\overline{F}$ prin orice suprafață S, care are ca bordură curba C.*

4) Dacă citim formula lui Stokes în mod invers, vedem că nu orice integrală de suprafață

$$\iint_S X\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Y\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + Z\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{1}$$

poate fi transformată în integrală curbilinie. Pentru aceasta trebuie ca vectorul $\overline{\Phi}(x, y, z) = \overline{i}X(x, y, z) + \overline{j}Y(x, y, z) + \overline{k}Z(x, y, z)$ definit în Δ să fie rotorul unei anumite funcții $\overline{F}(x, y, z)$, adică

$$\overline{\Phi} = \mathrm{rot}\ \overline{F},$$

de unde rezultă

$$\operatorname{div} \overline{\Phi} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \overline{F} = 0, \quad (x, y, z) \in \Delta. \tag{2}$$

Se poate arăta că această condiție

$$\operatorname{div} \overline{\Phi} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0, \ (x, y, z) \in \Delta,$$

este și suficientă pentru ca integrala de suprafață (1) să se transforme într-o integrală curbilinie.

Formula lui Stokes ne permite să demonstrăm următoarea

T e o r e m ă. Dacă $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ sînt trei funcții continue cu derivate parțiale continue într-un domeniu simplu conex Δ din spațiu, atunci condiția necesară și suficientă pentru ca integrala curbilinie

$$\int P(x, y, z)\,\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\,\mathrm{d}y + R(x, y, z)\,\mathrm{d}z$$

să nu depindă de drum în Δ este ca pentru orice $(x, y, z) \in \Delta$ să avem

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} = 0. \tag{1}$$

Demonstrație. Am arătat (A, cap. III, § 1, al. 5) că relațiile (1) sînt necesare. Să arătăm acum că sînt și suficiente. Într-adevăr, dacă pentru orice $(x, y, z) \in \Delta$ avem egalitățile (1), atunci, conform formulei lui Stokes, pentru orice curbă închisă $C \subset \Delta$ avem

$$\int_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = 0,$$

însă o integrală care este nulă pe orice contur închis situat într-un domeniu Δ nu depinde de drum în Δ (A, cap. III, § 1, al. 5), deci condiția este și suficientă. Teorema este demonstrată.

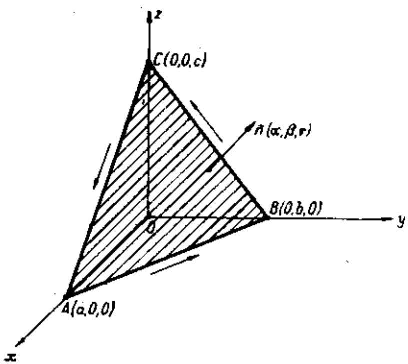

Fig. 97

Exerciții

1) Să se calculeze integrala curbilinie

$$I = \int_{ABC} (z - y)\,\mathrm{d}x + (x - z)\,\mathrm{d}y + (y - x)\,\mathrm{d}z$$

luată de-a lungul laturilor triunghiului $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$, transformînd-o într-o integrală de suprafață.

Ecuația planului ABC este

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0,$$

deci o reprezentare parametrică a suprafeței triunghiului ABC este dată de

$$x = u, \quad y = v, \quad z = c\left(1 - \frac{u}{a} - \frac{v}{b}\right)$$

cu $\frac{x}{a} + \frac{v}{b} - 1 \leqslant 0, \quad u \geqslant 0, \quad v \geqslant 0.$

Integrala curbilinie se transformă cu formula lui Stokes în integrala de suprafață

$$I = \iint_S \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \iint_S (\alpha + \beta + \gamma)\,\mathrm{d}\sigma$$

unde (α, β, γ) sînt cosinușii directori ai normalei la planul triunghiului ABC, dirijată spre exteriorul tetraedrului $OABC$ (fig. 97). Avem

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{1}{ab}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

și

$$\alpha = \frac{bc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}, \quad \beta = \frac{ca}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}, \quad \gamma = \frac{ab}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2}},$$

deci

$$I = \frac{1}{ab}(ab + bc + ca)\iint_{OAB} \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}(ab + bc + ca).$$

2) Să se calculeze integrala de suprafață

$$\iint_S xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + 2x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (x^2 - yz)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

întinsă la semisfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geqslant 0$, transformînd-o într-o integrală curbilinie p[e] cercul (C) $x^2 + y^2 = R^2$ din planul xOy.

Dacă punem

$$X = xy, \; Y = 2x, \; Z = x^2 - yz$$

avem

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=y-y=0,$$

deci integrala de suprafață poate fi transformată în integrală curbilinie. Trebuie să avem

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=x^2-yz,\quad \frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=xy,\quad \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=2x.$$

O soluție particulară a acestui sistem este dată de

$$P=-x^2y,\ Q=-xyz,\ R=-x^2.$$

Avem deci

$$I=-\int_C x^2y\,\mathrm{d}x+xyz\,\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}z.$$

Cercul (C) are o reprezentare parametrică $x=R\cos\theta$, $y=R\sin\theta$, $z=0$, $0\leqslant\theta<$ $<2\pi$, prin urmare

$$I=R^4\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{R^4}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{4}R^4.$$

§ 3. APLICAȚIILE INTEGRALELOR DUBLE ȘI DE SUPRAFAȚĂ

Reamintim aplicațiile întîlnite pînă acum și dăm în continuare altele noi.

1. Aria unui domeniu plan

Aria unui domeniu plan, închis și mărginit $D\subset R^2$ este dată de integrala dublă

$$\Omega_D=\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

după cum rezultă din definiția integralei duble.

Dacă considerăm aria domeniului D dată de integrala curbilinie

$$\Omega_D=\frac{1}{2}\oint_\Gamma x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x,$$

unde Γ este conturul lui D, obținem, aplicînd formula lui Green, același rezultat.

Exemplu

Să se calculeze aria $\mathcal{A}$ a domeniului plan mărginit de curbele $xy = 1$, $x + 4y - 5 = 0$ (fig. 98).

Punctele de intersecție ale celor două curbe se obțin rezolvînd sistemul

$$xy = 1, \ x + 4y - 5 = 0,$$

deci $x_1 = 1$, $y_1 = 1$, $x_2 = 4$, $y_2 = \frac{1}{4}$,

$$\mathcal{A} = \int_1^4 \mathrm{d}x \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5-x}{4}} \mathrm{d}y = \int_1^4 \left(\frac{5-x}{4} - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{5}{4}x - \frac{x^2}{8} - \ln x\right)\Bigg|_1^4 = \frac{15}{8} - \ln 4.$$

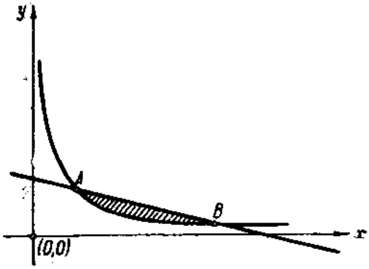

Fig. 98

2. Aria unei suprafețe din spațiu

Aria $\mathcal{A}_s$ a unei suprafețe S definită de ecuațiile parametrice

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v), \ z = h(u, v), \ (u, v) \in D$$

cu f, g, h continue cu derivate parțiale de ordinul întîi continue în D, este dată de

$$\mathcal{A}_s = \iint_S \mathrm{d}\sigma = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

3. Volumul corpurilor

Din definiția integralei duble rezultă că volumul mărginit de suprafața S definită de $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, de cilindrul proiectant al suprafeței S pe planul xOy (cu generatoarele paralele cu axa Oz) și de planul xOy este dat de

$$\mathcal{V} = \iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_S z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{1}$$

dacă $f(x, y) \geqslant 0$ și de

$$\mathcal{V} = \iint_D |f(x, y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

dacă $f(x, y)$ nu păstrează un semn constant în D.

Observație.

Formula (1) este valabilă și cînd suprafața S este închisă, deci

$$\mathcal{V} = \iint_S z \, dx \, dy. \tag{2}$$

Formula (2) se mai poate scrie și

$$\mathcal{V} = \iint_S x \, dy \, dz \tag{2'}$$

sau

$$\mathcal{V} = \iint_S y \, dz \, dx. \tag{2''}$$

Dacă adunăm pe (2), (2′) și(2″) obținem și

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \iint_S x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy.$$

Exemplu

Să se calculeze volumul $\mathcal{V}$ al corpului cuprins între paraboloidul $x^2 + y^2 = az$, cilindrul $x^2+y^2=2ax$ și planul $z=0$ (fig. 99).

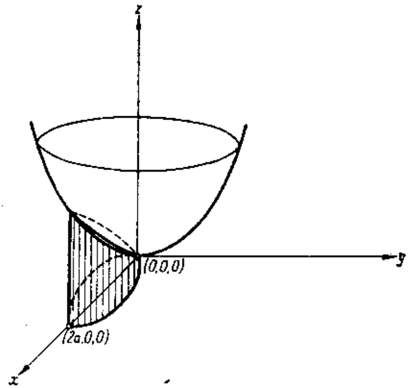

Fig. 99

$$\mathcal{V} = \iint_D z \, dx \, dy =$$

$$= \frac{1}{a} \iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy$$

unde D este discul circular $x^2 + y^2 \leqslant 2ax$.

Dacă facem schimbarea de variabile

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta,$$

$$0 \leqslant \rho \leqslant 2a \cos \theta,$$

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, \; dx \, dy = \rho \, d\rho \, d\theta,$$

obținem

$$\mathcal{V} = \frac{1}{a} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} \rho^3 \, d\rho = \frac{1}{4a} \, 16 \, a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta \, d\theta,$$

$$\mathcal{V} = 8 \, a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta \, d\theta = 8 \, a^3 \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2} \pi \, a^3.$$

4. Centre de greutate

a) Se numește corp plat sau placă un corp la care una din dimensiuni este mult mai mică față de celelalte două dimensiuni; un astfel de corp îl asimilăm cu un domeniu plan D, dacă placa este plană, sau cu o suprafață S în spațiu, dacă placa este curbă.

Să considerăm o placă plană D (în planul xOy), neomogenă, de densitate $\rho(x, y)$. Fie δ o diviziune a domeniului D,

$$\delta = (\delta_1, \ \delta_2, \ldots, \delta_p)$$

și $\omega_1, \ \omega_2, \ldots, \omega_p$, ariile subdomeniilor $\delta_1, \ \delta_2, \ldots, \delta_p$, respectiv. Masa unei plăcuțe δ_k este dată de

$$\rho(x_k, y_k) \ \omega_k,$$

unde (x_k, y_k) este un punct aparținînd domeniului δ_k. Dacă presupunem masa unei plăcuțe δ_k concentrată în punctul $P_k(x_k, y_k)$, urmează că centrul de greutate al celor p plăcuțe are coordonatele

$$x_G = \frac{\sum_{k=1}^{p} x_k \ \rho(x_k, y_k) \ \omega_k}{\sum_{k=1}^{p} \rho(x_k, y_k) \ \omega_k}, \quad y_G = \frac{\sum_{k=1}^{p} y_k \ \rho(x_k, y_k) \ \omega_k}{\sum_{k=1}^{p} \rho(x_k, y_k) \ \omega_k}.$$

Observăm că atît la numărătorul cît și la numitorul lui x_G, y_G avem sume integrale care conduc la integrale duble relative la domeniul D.

Astfel, dacă (δ_n) este un șir de diviziuni ale domeniului D cu $\nu(\delta_n) \to 0$, avem

$$\lim_{\nu(\delta_n) \to 0} \sum_{k=1}^{p} x_k \ \rho(x_k, y_k) \ \omega_k = \iint_D x \ \rho(x, y) \, dx \, dy,$$

$$\lim_{\nu(\delta_n) \to 0} \sum_{k=1}^{p} y_k \ \rho(x_k, y_k) \ \omega_k = \iint_D y \ \rho(x, y) \, dx \, dy,$$

$$\lim_{\nu(\delta_n) \to 0} \sum_{k=1}^{p} \rho(x_k, y_k) \ \omega_k = \iint_D \rho(x, y) \, dx \, dy,$$

prin urmare centrul de greutate al plăcii D de densitate $\rho(x, y)$ este dat de

$$x_G = \frac{\iint_D x \ \rho(x, y) \, dx \, dy}{\iint_S \rho(x, y) \, dx \, dy}, \quad y_g \ \frac{\iint_D y \ \rho(x, y) \, dx \, dy}{\iint_D \rho(x, y) \, dx \, dy}. \qquad (1)$$

b) Centrul de greutate al unei plăci curbe, de densitate $\rho(x, y, z)$, căreia i se asociază o suprafață S, se obține în mod asemănător,

$$x_G = \frac{\iint_S x\rho(x, y, z)\,\mathrm{d}\sigma}{\iint_S \rho(x, y, z)\,\mathrm{d}\sigma}, \quad y_G = \frac{\iint_S y\,\rho(x, y, z)\,\mathrm{d}\sigma}{\iint_S \rho(x, y, z)\,\mathrm{d}\sigma}, \tag{2}$$

$$z_G = \frac{\iint_S z\rho(x, y, z)\,\mathrm{d}\sigma}{\iint_S \rho(x, y, z)\,\mathrm{d}\sigma},$$

unde $\mathrm{d}\sigma$ este elementul de arie al suprafeței S.

Aplicație

Dacă placa este omogenă, atunci în formulele (1) sau (2) $\rho =$ constant. Să considerăm o placă plană omogenă ; centrul de greutate are coordonatele

$$x_G = \frac{\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}, \quad y_G = \frac{\iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}.$$

Ultima relație se mai scrie

$$y_G \cdot A_D = \iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}\oint_\Gamma y^2\mathrm{d}x. \tag{3}$$

Am folosit formula lui Green și am notat cu A_D aria domeniului D, iar cu Γ conturul lui D (conturul plăcii). Dacă înmulțim în (3) cu 2π obținem

$$2\pi\,|y_G|\cdot A_D = \pi\oint_\Gamma y^2\,\mathrm{d}x = V,$$

unde V este volumul corpului obținut prin rotația domeniului plan D în jurul axei Ox. Am demonstrat astfel

Teorema a doua a lui Guldin. Volumul născut din rotația unui domeniu plan D în jurul unei drepte din planul său (dreaptă care nu traversează domeniul D) este egal cu suprafața domeniului D înmulțită cu lungimea cercului descris de centrul de greutate al domeniului D.

Exemple

1) Să se determine centrul de presiune pe o clapă eliptică situată în peretele vertical al unui rezervor cu lichid (fig. 100), greutatea specifică a lichidului fiind γ.

Luăm originea axelor în centrul elipsei $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, cu Oy dirijat în jos. Presiunea specifică în punctul de adîncime $y + c$ este

$$\Phi(y) = \gamma(y+c),$$

c fiind înălțimea lichidului pînă la centrul elipsei. Problema se reduce la găsirea centrului de greutate al plăcii eliptice $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$ de densitate $\rho(x, y) = \gamma(y + c)$. Din motive de simetrie $x_G = 0$; y_G este dat de

$$y_G = \frac{\iint_D \gamma(y + c)\, y \, dx\, dy}{\iint_D \gamma(y + c) dx\, dy}.$$

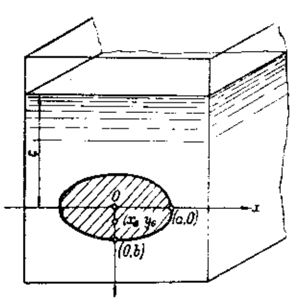

Fig. 100

Se observă că $\iint_D y \, dx\, dy = 0$, deci ne mai rămîne

$$y_G = \frac{\iint_D y^2 dx dy}{\pi\, abc}.$$

Avem

$$\iint_D y^2 \, dx\, dy = \int_{-b}^{b} y^2\, dy \int_{-\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}}^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}} dx = \frac{2a}{b}\int_{-b}^{b} y^2 \sqrt{b^2 - y^2}\, dy$$

sau, punînd $y = b \sin \varphi$, $dy = b \cos \varphi \, d\varphi$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$,

$$\iint_D y^2 \, dx\, dy = \frac{2a}{b}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} b^4 \sin^2\varphi \cos^2\varphi \, d\varphi = \frac{ab^3}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi \, d\varphi = \frac{ab^3\pi}{4},$$

deci $y_G = \frac{b^2}{4c}$.

2) Să se găsească centrul de greutate al unei tole, omogene, care are forma porțiunii S din sfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ situată în primul octant. Din motive de simetrie, centrul de greutate al tolei se găsește pe prima bisectoare a triedrului axelor, deci $x_G = y_G = z_G$

$$x_G = \frac{\iint_S x \, d\sigma}{\iint_S d\sigma}.$$

Folosind reprezentarea parametrică a suprafeței S, $x = R\sin\theta\cos\varphi$, $y = R\sin\theta\sin\varphi$,

$z = R\cos\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $d\sigma = R^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$, obținem

$$x_G = \frac{R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos\varphi\, d\varphi}{\frac{\pi R^2}{2}} = \frac{2}{\pi}R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\, d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi$$

deci

$$x_G = y_G = z_G = \frac{2}{\pi}R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta = \frac{R}{2}\cdot$$

3) Folosind teorema lui Guldin să se găsească centrul de greutate al plăcii omogene semicirculare $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, $y \geqslant 0$.

Prin rotația plăcii $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, $y \geqslant 0$ în jurul axei Ox obținem sfera de rază R. Conform teoremei lui Guldin, avem

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 2\pi y_G \cdot \frac{\pi}{2} R^2,$$

de unde

$$y_G = \frac{4}{3\pi} R.$$

Centrul de greutate G al plăcii se găsește pe axa Oy, deci $x_G = 0$.

5. Momente de inerție

Definiție. Dacă $M_1, M_2, \ldots, M_n$ sînt n puncte materiale de mase $m_1, m_2, \ldots, m_n$, respectiv, momentul de inerție I al acestor n puncte materiale față de un punct P (o dreaptă Δ, sau un plan Π) este suma

$$I = \sum_{k=1}^{n} m_k d_k^2,$$

unde d_k este distanța punctului M_k la punctul P (dreapta Δ sau planul Π).

Dacă punctele M_k au coordonatele (x_k, y_k, z_k) față de un sistem triortogonal $Oxyz$, atunci

a) Momentul de inerție al sistemului de puncte considerat față de originea axelor $O\,(0, 0, 0)$ este dat de

$$I_O = \sum_{k=1}^{n} (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2)\, m_k.$$

b) Momentul de inerție al sistemului de puncte $M_1,\ M_2, \ldots, M_n$ față de axele Ox, Oy, Oz, respectiv, este dat de

$$I_{Ox} = \sum_{k=1}^{n} (y_k^2 + z_k^2)\, m_k\,,$$

$$I_{Oy} = \sum_{k=1}^{n} (z_k^2 + x_k^2) m_k\,, \qquad I_{Oz} = \sum_{k=1}^{n} (x_k^2 + y_k^2) m_k\,.$$

c) Momentul de inerție al sistemului de puncte $M_1, M_2, \ldots, M_n$ față de planele xOy, yOz, zOx, respectiv, este dat de

$$I_{xOy} = \sum_{k=1}^{n} z_k^2 m_k, \qquad I_{yOz} = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 m_k, \qquad I_{zOx} = \sum_{k=1}^{n} y_k^2 m_k\,.$$

Dacă considerăm acum o distribuție continuă de masă de densitate $\rho(x, y, z)$ pe o suprafață S, momentele de inerție enumerate mai sus sînt date de integralele de suprafață

$$I_O = \iint_S \rho\,(x,\ y,\ z)\ (x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}\sigma,$$

$$I_{Ox} = \iint_S \rho\,(x, y,\ z)\ (y^2 + z^2)\,\mathrm{d}\sigma,$$

$$I_{Oy} = \iint_S \rho\,(x,\ y,\ z)\ (z^2 + x^2)\,\mathrm{d}\sigma,$$

$$I_{Oz} = \iint_S \rho\,(x,\ y,\ z)\,(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}\sigma,$$

și

$$I_{Oxy} = \iint_S \rho(x,\ y,\ z)\, z^2 \mathrm{d}\sigma,$$

$$I_{Oyz} = \iint_S \rho\,(x,\ y,\ z)\, x^2 \mathrm{d}\sigma,$$

$$I_{Ozx} = \iint_S \rho\,(x,\ y,\ z) y^2\,\mathrm{d}\sigma.$$

Pentru o distribuție de masă de densitate $\rho\,(x, y)$ pe un domeniu plan D, momentul de inerție față de originea axelor $O\ (0,\ 0)$ este dat de

$$I_O = \iint_D \rho\,(x, y)\,(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

iar față de axele de coordonate Ox, Oy, de

$$I_{Ox} = \iint_D \rho(x, y)\, y^2\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad I_{Oy} = \iint_D \rho(x, y)\, x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Exemple

1) Să se calculeze momentul de inerție al tolei omogene S definită de $2az = x^2 + y^2$, $0 \leqslant z \leqslant \frac{a}{2}$, față de originea axelor. Avem

$$I_O = \rho \iint_S (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma, \qquad \text{cu} \quad \mathrm{d}\sigma = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 + x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

deci

$$I_O = \frac{\rho}{a}\iint_D (x^2 + y^2)\sqrt{a^2 + x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

unde D este discul circular $x^2 + y^2 \leqslant a^2$.
Cu

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ 0 \leqslant \theta < 2\pi,\ 0 \leqslant r \leqslant a,\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta,$$

obținem

$$I_O = \frac{\rho}{a}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^3\sqrt{a^2 + r^2}\mathrm{d}r = \frac{\pi\rho}{a}\int_0^a (r^2 + a^2 - a^2)\sqrt{a^2 + r^2}\mathrm{d}(r^2 + a^2) =$$

$$= \frac{\pi\rho}{a}\left[\frac{2}{5}(r^2 + a^2)^{\frac{5}{2}} - a^2\frac{2}{3}(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a = \pi\frac{4}{15}(\sqrt{2} + 1)\,\rho a^4.$$

2) Să se calculeze momentul de inerție al unei plăci plane omogene al cărei contur este elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, față de vîrful $A(a, 0)$ al elipsei.

Momentul de inerție este dat de integrala dublă

$$I_A = \rho\iint_D [(x - a)^2 + y^2]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

O reprezentare parametrică a domeniului D este $x = ar\cos\theta$, $y = br\sin\theta$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, $0 \leqslant r \leqslant 1$; $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = ab\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$, deci

$$I_A = \rho\,ab\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 [a^2(1 - r\cos\theta)^2 + b^2r^2\sin^2\theta]\,r\mathrm{d}r,$$

$$I_A = \rho\,ab\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 [a^2 - 2a^2r\cos\theta + a^2r^2\cos^2\theta + b^2r^2\sin^2\theta]\,r\mathrm{d}r,$$

$$I_A = \rho\,ab\int_0^{2\pi}\left(\frac{a^2}{2} + \frac{a^2\cos^2\theta}{4} + \frac{b^2\sin^2\theta}{4} - \frac{2}{3}a^2\cos\theta\right)\mathrm{d}\theta,$$

$$I_A = \frac{\pi ab}{4}(5a^2 + b^2).$$

6. Potențialul newtonian

După legea de atracție enunțată de Newton, forța de atracție $\overline{F}$ pe care o exercită un punct $Q\,(a,\ b,\ c)$ de masă μ asupra unui punct $P\,(x,\ y,\ z)$ de masă unitatea este dată de

$$\overline{F} = -\frac{\mu\gamma}{r^3}\,\overline{r}, \qquad \overline{F} = -f\frac{\gamma}{r^3}\overline{r};$$

unde $\overline{r} = \overline{r}_P - \overline{r}_Q = \overline{i}(x-a) + \overline{j}(y-b) + \overline{k}(z-c)$, iar γ o constantă pozitivă.

Proiecțiile forței $\overline{F}$ pe axele de coordonate sînt

$$-\mu\gamma\,\frac{x-a}{r^3}, \qquad -\mu\gamma\,\frac{y-b}{r^3}, \qquad -\mu\gamma\,\frac{z-c}{r^3}$$

și se observă că sînt derivatele parțiale ale funcției

$$U_1 = \gamma\, U, \quad \text{cu} \quad U = \frac{\mu}{r}, \qquad U_1 = \gamma\frac{\mu}{r}$$

deci $\overline{F} = \operatorname{grad}_P\, U_1 = \gamma \operatorname{grad}_P\, U$.

Dacă considerăm mai multe centre atractive $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ de mase $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ asupra punctului P, expresia forței de atracție va fi

$$\overline{F} = -\gamma\left[\frac{\mu_1}{r_1^3}\,\overline{r}_1 + \frac{\mu_2}{r_2^3}\,\overline{r}_2 + \ldots + \frac{\mu_n}{r_n^3}\,\overline{r}_n\right],$$

unde $\overline{r}_k = \overline{r}_P - \overline{r}_{Q_k} = \overline{i}(x-a_k) + \overline{j}(y-b_k) + \overline{k}(z-c_k)$.

Dacă punem

$$U_1 = \gamma\, U$$

cu

$$U = \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} + \ldots + \frac{\mu_n}{r_n},$$

atunci

$$\overline{F} = \gamma \operatorname{grad}_P U;$$

funcția U se numește *potențialul newtonian*; cunoașterea funcției U ne permite să determinăm forța $\overline{F}$.

Dacă acum avem un mediu atractiv repartizat continuu pe o suprafață S, de masă specifică superficială $\mu\,(a,\ b,\ c)$, atunci potențialul U este dat de

$$U\,(x,\ y,\ z) = \iint_S \frac{\mu\,(a,\ b,\ c)\,d\sigma}{r},$$

unde r este distanța punctului P (x, y, z) la un punct curent (a, b, c) de pe suprafața S.

Exemplu

Potențialul de suprafață al sferei omogene (μ = const.) este dat de

$$U = \mu \iint_S \frac{d\sigma}{r}.$$

Din motive de simetrie putem considera punctul P pe axa Oz, deci de coordonate $0, 0, z$). În coordonate polare în spațiu

$$x = R \sin\theta \cos\varphi, \qquad y = R \sin\theta \sin\varphi, \qquad z = R\cos\theta,$$

$$0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \qquad d\sigma = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi, \quad \text{avem}$$

$$U = 2\pi R^2 \mu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta \, d\theta}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz\cos\theta}},$$

deci

$$U = 2\pi\mu R^2 \left[\frac{\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz\cos\theta}}{Rz}\right]_0^{\pi},$$

sau

$$U = 2\pi\mu R^2 \left[\frac{|R + z|}{Rz} - \frac{|R - z|}{Rz}\right].$$

a) Dacă $|z| > R$ obținem

$$U = \frac{4\pi\mu R^2}{|z|}.$$

b) Dacă $|z| < R$, atunci

$$U = 4\pi\mu R.$$

Prin urmare potențialul de suprafață al unei sfere omogene cînd $OP > R$, adică punctul este exterior sferei, este dat de

$$U = \frac{4\pi\mu R^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

(se înlocuiește distanța $OP = z$ cu $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) și se obține ca și cum toată masa atractivă ar fi concentrată în centrul O al sferei.

Cînd punctul P este în interiorul sferei, asupra lui nu se exercită nici o atracție.

Capitolul V

INTEGRALE TRIPLE

§ 1. INTEGRALE TRIPLE

1. Definiții. Criterii de integrabilitate. Funcții integrabile.

Fie V un domeniu închis şi mărginit în spaţiul cu trei dimensiuni R^3, interior unui interval tridimensional I (fig. 101),

$$I = \{(x, y, z) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d,\ e \leqslant z \leqslant g\}.$$

Frontiera domeniului V este o suprafaţă închisă S formată dintr-un număr finit de porţiuni netede. Să presupunem că volumul V reprezintă

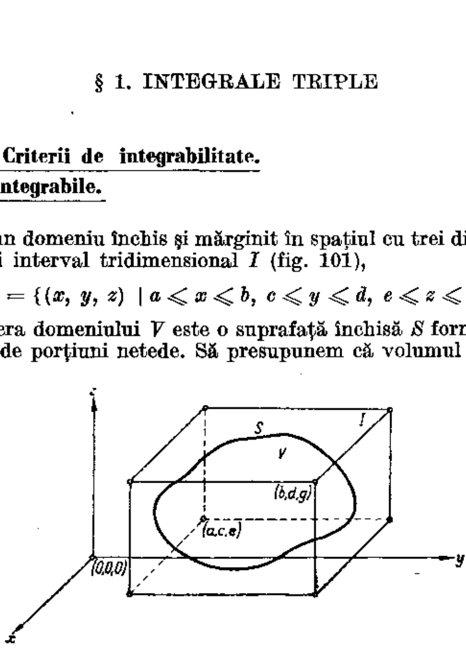

Fig. 101

un corp K, neomogen, de densitate $f(x, y, z) \geqslant 0$, variabilă, funcţia f fiind definită şi mărginită în V

$$m \leqslant f(x, y, z) \leqslant M, \quad (x, y, z) \in V.$$

Ne propunem să găsim masa totală a corpului K.

În cele ce urmează vom cere funcției f de a fi numai definită și mărginită în V. Cînd vom reveni la semnificația fizică a rezultatelor obținute vom adăuga și condiția suplimentară de a fi pozitivă în V.

Sînt necesare mai întîi cîteva noțiuni.

a) Fie diviziunile

$$\delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} < x_m = b,$$

$$\delta^* : c = y_0 < y_1 < \ldots < y_{n-1} < y_n = d,$$

$$\delta^{**} : e = z_0 < z_1 < \ldots < z_{p-1} < z_p = g,$$

respectiv ale intervalelor $[a, b]$, $[c, d]$, $[e, g]$. Planele paralele cu planul yOz prin punctele diviziunii δ, planele paralele cu planul zOx prin punctele

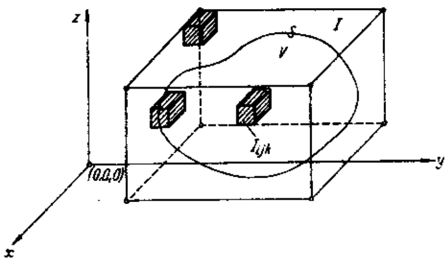

Fig. 102

diviziunii δ^* și planele paralele cu planul xOy prin punctele diviziunii δ^{**} împart intervalul I în $m \cdot n \cdot p$ subintervale I_{ijk} (fig. 102),

$$I_{ijk} = \{(x, y, z) \mid x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1},\ y_j \leqslant y \leqslant y_{j+1},\ z_k \leqslant z \leqslant z_{k+1}\}.$$

Dintre aceste subintervale numai o parte sînt conținute în întregime în volumul V; să notăm mulțimea lor cu $\mathfrak{M}$. O parte din subintervalele I_{ijk} conțin și puncte ale lui V și ale lui $I-V$; notăm mulțimea lor cu $\mathfrak{M}'$. În fine, există subintervale exterioare lui V; notăm mulțimea lor cu $\mathfrak{M}''$.

Definiții. 1) **Vom numi o diviziune** Δ **a volumului** V, **mulțimea subintervalelor** I_{ijk} **dată de** $\mathfrak{M} \cup \mathfrak{M}'$ **și o vom nota**

$$\Delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p),$$

ordinea de numerotare a subintervalelor δ_k **fiind indiferentă.**

2) **Vom numi norma unei diviziuni** Δ **și o vom nota** $\nu(\Delta)$ **numărul pozitiv**

$$\nu(\Delta) = \max_{\substack{0 \leqslant i \leqslant m-1 \\ 0 \leqslant j \leqslant n-1 \\ 0 \leqslant k \leqslant p-1}} \{x_{i+1}-x_i,\ y_{j+1}-y_j,\ z_{k+1}-z_k\} = \max\ [\nu(\delta), \nu(\delta^*),\ \nu(\delta^{**})].$$

Să considerăm diviziunile δ', δ'^*, δ'^{**} ale intervalelor $[a, b]$, $[c, d]$, $[e, g]$, respectiv mai fine decît δ, δ^*, δ^{**}, deci

$$\delta' \supset \delta, \quad \delta'^* \supset \delta^*, \quad \delta'^{**} \supset \delta^{**}.$$

Diviziunilor δ', δ'^*, δ'^{**} le corespunde o diviziune Δ' a volumului V despre care vom spune că este *mai fină* decît diviziunea Δ, şi vom scrie

$$\Delta' \supset \Delta;$$

dacă notăm cu $\nu(\Delta')$ norma diviziunii Δ' avem

$$\nu(\Delta') \leqslant \nu(\Delta),$$

deoarece

$$\nu(\delta') \leqslant \nu(\delta), \quad \nu(\delta'^*) \leqslant \nu(\delta^*), \nu(\delta'^{**}) \leqslant \nu(\delta^{**})$$

şi

$$\nu(\Delta') = \max\{\nu(\delta'), \nu(\delta'^*), \nu(\delta'^{**})\} \leqslant$$
$$\leqslant \max\{\nu(\delta), \nu(\delta^*), \nu(\delta^{**})\}.$$

Observaţii

1) Faptul că diviziunea Δ' este mai fină decît diviziunea Δ înseamnă că orice subinterval al diviziunii Δ' este conţinut într-un subinterval al diviziunii Δ.

2) Dacă Δ_1 şi Δ_2 sînt două diviziuni ale aceluiaşi volum V şi dacă $\nu(\Delta_2) \leqslant \nu(\Delta_1)$ nu înseamnă că diviziunea Δ_2 este mai fină decît diviziunea Δ_1.

b) Să considerăm acum o diviziune Δ a volumului V în care funcţia $f(x, y, z)$ este definită şi mărginită. Să notăm cu

$$\delta_1, \ \delta_2, \ldots, \delta_r$$

subintervalele tridimensionale ale diviziunii Δ, numerotate într-o ordine oarecare, şi

$$v_1 \ v_2, \ldots, v_r$$

volumele acestor subintervale. Să notăm cu m_k, M_k, marginile inferioară şi superioară ale funcţei $f(x, y, z)$ în δ_k

$$m_k \leqslant f(x, y, z) \leqslant M_k, \quad (x, y, z) \in \delta_k$$

şi să formăm sumele lui Darboux

$$s_\Delta = m_1 v_1 + m_2 v_2 + \ldots + m_r v_r \text{ (suma inferioară Darboux)},$$

$$S_\Delta = M_1 v_1 + M_2 v_2 + \ldots + M_r v_r \text{ (suma superioară Darboux)}.$$

Avem

$$v\, m \leqslant s \leqslant S \leqslant v\, M,$$

unde am notat cu v volumul lui V, iar cu m şi M marginile inferioară şi superioară ale lui f în V.

Se demonstrează la fel ca pentru integrala simplă următoarele proprietăţi :

1) dacă Δ' este o diviziune a volumului V mai fină decît Δ, $\Delta' \supset \Delta$, atunci

$$s_\Delta \leqslant s_{\Delta'} \leqslant S_{\Delta'} \leqslant S;$$

2) oricare ar fi diviziunile Δ' şi Δ'' ale volumului V avem

$$s_{\Delta'} \leqslant S_{\Delta''};$$

3) dacă Δ^* este mulţimea tuturor diviziunilor volumului V, atunci

$$\sup_{\Delta \in \Delta^*} s_\Delta \leqslant \inf_{\Delta \in \Delta^*} S_\Delta;$$

4) mulţimea $\underset{\Delta \in \Delta^*}{s_\Delta}$ este mărginită superior, iar mulţimea $\underset{\Delta \in \Delta^*}{S_\Delta}$ este mărginită inferior;

5) dacă (ξ_k, η_k, ζ_k) este un punct oarecare al intervalului $\delta_k \in \Delta$ şi σ_Δ suma

$$\sigma_\Delta = v_1 f(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) + v_2 f(\xi_2, \eta_2, \zeta_2) + \ldots + v_r f(\xi_r, \eta_r, \zeta_r),$$

atunci

$$s_\Delta \leqslant \sigma_\Delta \leqslant S_\Delta,$$

sumele σ_Δ se numesc sume Riemann relative la diviziunea Δ;

6) între sumele Riemann şi sumele Darboux ale unei diviziuni Δ avem următoarele relaţii

$$s_\Delta = \inf_{(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in \delta_k} \sigma_\Delta, \qquad S_\Delta = \sup_{(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in \delta_k} \sigma_\Delta$$

c) Interpretarea fizică a sumelor s_Δ, S_Δ şi σ_Δ. Dacă $f(x, y, z)$ este şi pozitivă în V, suma s_Δ reprezintă masa totală a r corpuri omogene de mase, respectiv $m_1 v_1, m_2 v_2, \ldots, m_r v_r$; suma S_Δ reprezintă masa totală a r corpuri omogene de mase, respectiv $M_1 v_1, M_2 v_2, \ldots, M_r v_r$; suma σ_Δ reprezintă masa totală a r corpuri omogene de mase, respectiv

$$f(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) v_1, f(\xi_2, \eta_2, \zeta_2) v_2, \ldots, f(\xi_r, \eta_r, \zeta_r) v_r.$$

Sîntem în măsură acum să dăm următoarea

Definiţie. Fie f o funcţie definită şi mărginită pe un volum $V \subset R^3$. Se spune că f este integrabilă Riemann pe V dacă pentru orice şir de diviziuni (Δ_n) ale volumului V cu $\nu(\Delta_n) \to 0$, cînd $n \to \infty$, şirurile sumelor lui Darboux (s_{Δ_n}) şi (S_{Δ_n}) au o limită comună finită $\mathcal{M}$. Limita însăşi se numeşte integrala triplă a funcţiei f întinsă la volumul V şi se notează

$$\mathcal{M} = \iiint_V f(x, y, z)\, dx dy dz.$$

Dacă $f(x, y, z)$ este şi pozitivă în V, atunci $\mathcal{M}$ reprezintă masa corpului K, de volum V, neomogen, de densitate $f(x, y, z) \geqslant 0$.

Observaţii

1) Definiţia dată este echivalentă cu

$$\sup_{\Delta \in \Delta^*} s_\Delta = \inf_{\Delta \in \Delta^*} S_\Delta = \mathcal{M},$$

unde Δ^* este mulţimea tuturor diviziunilor lui V.

2) Volumul V se numeşte domeniul de integrare al integralei triple.

3) Dacă σ_{Δ_n} este o sumă Riemann *oarecare* relativă la diviziunea Δ_n a volumului V, avem

$$s_{\Delta_n} \leqslant \sigma_{\Delta_n} \leqslant S_{\Delta_n},$$

deci, dacă f este integrabilă pe V, rezultă că

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_{\Delta_n} = \mathcal{M},$$

adică şi sumele Riemann sînt convergente către limita comună a celor două şiruri (s_{Δ_n}) şi (S_{Δ_n}). Reciproca acestui rezultat este de asemenea adevărată astfel încît avem următoarea definiţie echivalentă a integrabilităţii.

Definiţie. Spunem că o funcţie $f(x, y, z)$ definită şi mărginită pe domeniul închis şi mărginit $V \subset R^3$ este integrabilă Riemann pe V, dacă pentru orice şir de diviziuni (Δ_n) cu norma $\nu(\Delta_n) \to 0$ cînd $n \to \infty$, şi pentru orice alegere a punctelor $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in \delta_k \subset \Delta_n$ şirurile Riemann corespunzătoare (σ_{Δ_n}) au o limită comună, finită, $\mathcal{M}$.

Următoarele rezultate se demonstrează la fel ca pentru integrale duble.

Criteriul de integrabilitate al lui Darboux. Fie $f(x, y, z)$ o funcţie definită şi mărginită pe un domeniu închis şi mărginit V; funcţia $f(x, y, z)$ este integrabilă pe V dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $\eta(\varepsilon) > 0$ astfel încît pentru orice diviziune Δ a domeniului V cu $\nu(\Delta) < \eta(\varepsilon)$ să avem $S_\Delta - s_\Delta < \varepsilon$.

Teoremă. Funcţiile continue pe un domeniu închis şi mărginit V sînt integrabile pe V.

Teoremă. Dacă mulţimea T a punctelor de discontinuitate a unei funcţii mărginite f, definită pe un domeniu închis şi mărginit $V (T \subset V)$, este formată dintr-un număr finit de suprafeţe netede, atunci funcţia f este integrabilă Riemann pe V.

2. Proprietăţile integralelor triple

Se demonstrează la fel ca pentru integrale simple următoarele proprietăţi:

a) Dacă f este integrabilă pe V şi $\lambda \in R$, atunci λf este integrabilă pe V şi

$$\iiint_V \lambda f(x, y, z)\, dx dy dz = \lambda \iiint_V f(x, y, z)\, dx dy dz.$$

b) Dacă f şi g sînt integrabile pe V, funcţia sumă $f+g$ este integrabilă pe V şi

$$\iiint_V [f(x,y,z)+g(x,y,z)]\,dx dy dz = \iiint_V f(x,y,z)\,dx dy dz + \\ + \iiint_V g(x,y,z)\,dx dy dz.$$

c) Dacă $f(x,y,z) \geqslant 0$, $(x,y,z) \in V$ este integrabilă pe V, atunci

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx dy dz \geqslant 0.$$

d) Dacă $f(x,y,z) \geqslant g(x,y,z)$ pentru orice $(x,y,z) \in V$ şi dacă f şi g sînt integrabile pe V, atunci

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx dy dz \geqslant \iiint_V g(x,y,z)\,dx dy dz.$$

e) Dacă f este integrabilă pe V, iar volumul V este împărţit în două subvolume V_1, V_2, printr-o suprafaţă S de volum nul, atunci f este integrabilă pe V_1 şi pe V_2 şi are loc egalitatea

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx dy dz = \iiint_{V_1} f(x,y,z)\,dx dy dz + \\ + \iiint_{V_2} f(x,y,z)\,dx dy dz.$$

f) Dacă f este integrabilă pe V, atunci $|f|$ este integrabilă pe V şi

$$\left|\iiint_V f(x,y,z)\,dx dy dz\right| \leqslant \iiint_V |f(x,y,z)|\,dx dy dz.$$

g) Formule de medie. 1) Dacă f este mărginită şi integrabilă pe V

$$m \leqslant f(x,y,z) \leqslant M, \quad (x,y,z) \in V,$$

atunci există un număr μ cuprins între m şi M astfel încît

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx dy dz = \mu \mathcal{V};$$

am notat cu $\mathcal{V}$ volumul domeniului V.

2) Dacă $f(x,y,z)$ este continuă pe V, există un punct $(\xi, \eta, \zeta) \in V$ astfel încît avem egalitatea

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx dy dz = f(\xi, \eta, \zeta)\mathcal{V},$$

care se numeşte *formula mediei* pentru integrale triple

3) Dacă $f(x, y, z)$ este continuă pe V, iar $p(x, y, z)$ este pozitivă și integrabilă pe V, există un punct $(\xi', \eta', \zeta') \in V$ astfel încît avem egalitatea

$$\iiint_V f(x, y, z)\, p(x, y, z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = f(\xi', \eta', \zeta') \iiint_V p(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

care se numește *formula generală* a mediei pentru integrale triple.

3. Calculul integralelor triple

Calculul integralelor triple se reduce la calculul *succesiv* a trei integrale simple.

a) Să considerăm mai întîi cazul cînd V este un interval I:

$$I = \{(x, y, z) \mid x \in [a, b],\ y \in [c, d],\ z \in [e, g]\}.$$

Avem următoarea

Teoremă. Dacă $f(x, y, z)$ este mărginită și integrabilă pe I și dacă

α) **pentru orice $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$ există integrala**

$$F(x, y) = \int_e^g f(x, y, z)\, \mathrm{d}z,$$

β) **$F(x, y)$ este integrabilă pe $D = [a, b] \times [c, d]$, atunci**

$$\iiint_I f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \iint_D \left[\int_e^g f(x, y, z)\, \mathrm{d}z\right] \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

Demonstrație. Să considerăm o diviziune Δ a intervalului I realizată de planele $x = x_i$, $i = 0, 1, \ldots, m$, $y = y_j$, $j = 0, 1, \ldots, n$, $z = z_k$, $k = 0, 1, \ldots, p$:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} < x_m = b,$$

$$c = y_0 < y_1 < \ldots < y_{n-1} < y_n = d,$$

$$e = z_0 < z_1 < \ldots < z_{p-1} < z_p = g;$$

să notăm cu δ_{ijk} intervalul tridimensional definit de

$$\delta_{ijk} = \{(x, y, z) \mid x \in [x_i, x_{i+1}],\ y \in [y_j, y_{j+1}],\ z \in [z_k, z_{k+1}]\};$$

fie

$$m_{ijk} = \inf_{(x, y, z) \in \delta_{ijk}} f(x, y, z), \quad M_{ijk} = \sup_{(x, y, z) \in \delta_{ijk}} f(x, y, z).$$

Observăm că toate subintervalele δ_{ijk} aparţin diviziunii Δ, deci

$$s_\Delta = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{p-1} m_{ijk}\, v_{ijk},$$

$$S_\Delta = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{p-1} M_{ijk}\, v_{ijk},$$

unde v_{ijk} este volumul intervalului δ_{ijk},

$$v_{ijk} = (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)(z_{k+1} - z_k).$$

Avem

$$m_{ijk}(z_{k+1} - z_k) \leqslant \int_{z_k}^{z_{k+1}} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z \leqslant M_{ijk}(z_{k+1} - z_k)$$

pentru orice $(x, y, z) \in \delta_{ijk}$. Însumînd în raport cu k obţinem

$$\sum_{k=0}^{p-1} m_{ijk}(z_{k+1} - z_k) \leqslant \int_e^g f(x, y, z)\,\mathrm{d}z \leqslant \sum_{k=0}^{p-1} M_{ijk}(z_{k+1} - z_k).$$

Funcţia $F(x, y)$ dată de

$$F(x, y) = \int_e^g f(x, y, z)\,\mathrm{d}z, \quad (x, y) \in [a, b] \times [c, d]$$

este integrabilă pe $D = [a, b] \times [c, d]$, deci pentru orice interval $\theta_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ avem

$$\sum_{k=0}^{p-1} m_{ijk}(z_{k+1} - z_k)(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) \leqslant \iint_{\theta_{ij}} \left[\int_e^g f(x, y, z)\,\mathrm{d}z\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{p-1} M_{ijk}(z_{k+1} - z_k)(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j),$$

unde dacă însumăm în raport cu i şi j şi ţinem seamă că prima sumă este s_Δ, iar ultima S_Δ, ajungem la neegalităţile

$$s_\Delta \leqslant \iint_D \left[\int_e^g f(x, y, z)\,\mathrm{d}z\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant S_\Delta, \tag{α}$$

deoarece

$$\bigcup_{\substack{0 \leqslant i \leqslant m-1 \\ 0 \leqslant j \leqslant n-1}} \theta_{ij} = D;$$

avînd în vedere că $f(x, y, z)$ este integrabilă pe I, avem

$$\sup s_\Delta = \inf S_\Delta = \iiint_V f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

în timp ce neegalitățile (α) conduc la limită la

$$\iiint_I f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_D \left[\int_e^g f(x, y, z)\,\mathrm{d}z\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,. \tag{1}$$

Teorema este demonstrată.

O b s e r v a ț i i

1) Este obiceiul să se noteze integrala (1) din partea a doua în modul următor

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_e^g f(x, y, z)\,\mathrm{d}z\,. \tag{2}$$

2) Integrala dublă din (1) se poate scrie cu ajutorul a două integrale simple succesive, și dacă ținem seamă că domeniul D este un dreptunghi, avem efectiv, folosind notația (2),

$$\iiint_I f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d \mathrm{d}y \int_e^g f(x, y, z)\,\mathrm{d}z\,, \tag{3}$$

ordinea de integrare fiind de la dreapta la stînga.

3) Condițiile din teoremă sînt îndeplinite dacă $f(x, y, z)$ este continuă pe I. Ordinea de integrare în (3) poate fi în acest caz inversată și obținem $3! = 6$ formule analoge lui (3).

4) Domeniul D din formula (1) este proiecția intervalului I pe planul xOy.

Exemple

1) Să se calculeze integrala triplă

$$I = \iiint_V \frac{xyz}{\sqrt{1 + z^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,,$$

V fiind paralelipipedul $[0,2] \times [0,1] \times [0,1]$. Avem

$$I = \int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 \frac{xyz}{\sqrt{1 + z^2}}\,\mathrm{d}z = \int_0^2 x\,\mathrm{d}x \int_0^1 y\,\mathrm{d}y \int_0^1 \frac{z}{\sqrt{1 + z^2}}\,\mathrm{d}z\,,$$

$$I = \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^2 \cdot \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^1 \cdot \sqrt{1 + z^2}\,\Bigg|_0^1 = \sqrt{2} - 1\,.$$

Observăm că, în acest exemplu, integrala triplă este *produsul* a trei integrale simple.

2) Să se calculeze

$$I = \iiint_V \frac{xyz}{[x^2 + y^2 + z^2 + a^2]^5}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

unde V este cubul $[0, a] \times [0, a] \times [0, a]$. Avem

$$I = \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^a \mathrm{d}y \int_0^a \frac{xyz\,\mathrm{d}z}{(x^2 + y^2 + z^2 + a^2)^5} = \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^a \mathrm{d}y \left[-\frac{1}{8} \frac{xy}{(x^2 + y^2 + z^2 + a^2)^4} \right]_0^a =$$

$$= -\frac{1}{8} \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^a \left[\frac{xy}{(x^2 + y^2 + 2a^2)^4} - \frac{xy}{(x^2 + y^2 + a^2)^4} \right] \mathrm{d}y =$$

$$= -\frac{1}{8} \int_0^a \left[-\frac{1}{6} \frac{x}{(x^2 + y^2 + 2a^2)^3} + \frac{1}{6} \frac{x}{(x^2 + y^2 + a^2)^3} \right]_0^a \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{48} \int_0^a \left[\frac{x}{(x^2 + 3a^2)^3} - \frac{2x}{(x^2 + 2a^2)^3} + \frac{x}{(x^2 + a^2)^3} \right] \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{192} \left[-\frac{1}{(x^2 + 3a^2)^2} + \frac{2}{(x^2 + 2a^2)^2} - \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} \right]_0^a = \frac{25}{9216} \cdot \frac{1}{a^4}.$$

b) Să considerăm acum cazul cînd domeniul de integrare V este un cilindru, anume

$$V = D \times [e, g] = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D,\ z \in [e, g]\},$$

unde D este un domeniu închis și mărginit din planul xOy, avînd contur curba Γ, curbă formată dintr-un număr finit de arce netede.

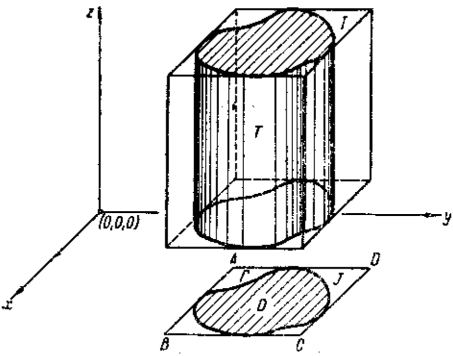

Fig. 103

Volumul V poate fi închis în paralelipipedul I (fig. 103).

Proiecția paralelipipedului I pe planul xOy este dreptunghiul $J = ABCD = \{(x, y) \mid x \in [a, b],\ y \in [c, d]\}$, unde a, b $(a < b)$ sînt abscisele extreme ale punctelor domeniului D, iar $c, d\,(c < d)$ ordonatele extreme ale punctelor domeniului D (fig. 104).

Pentru calculul integralei triple

$$\iiint_V f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

vom folosi rezultatul de la alineatul precedent. Să considerăm funcţia

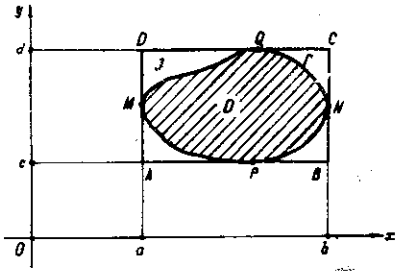

Fig. 104

(x, y, z) definită în $I \supset V$ în modul următor

$$\bar{f}(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z), & \text{dacă } (x, y, z) \in V \\ 0, & \text{dacă } (x, y, z) \in I - V. \end{cases}$$

Funcţia $f(x, y, z)$ fiind integrabilă pe V, rezultă că şi $\bar{f}(x, y, z)$ $\bar{f}$ este integrabilă pe I şi cele două integrale sînt egale:

$$\iiint_I \bar{f}(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_V \bar{f}(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Pentru integrala pe intervalul I putem aplica rezultatul din teorema de la alineatul precedent, deci

$$\iiint_I \bar{f}(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_J \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_e^g \bar{f}(x, y, z)\,\mathrm{d}z\,,$$

însă, după cum a fost definită funcţia $\bar{f}$, observăm că pe D

$$\int_e^g \bar{f}(x, y, z)\,\mathrm{d}z = \int_e^g f(x, y, z)\,\mathrm{d}z\,,$$

iar pe $J - D$,

$$\int_e^g \mathrm{f}(x, y, z)\,\mathrm{d}z = 0\,,$$

deoarece $\bar{f}(x, y, z) = 0$ pe $J - D$, prin urmare

$$\iiint_I \bar{f}(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_e^g f(x, y, z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Să presupunem acum că domeniul D are proprietatea că o paralelă la axa Oy taie curba Γ care mărgineşte pe D în două puncte. În această situaţie (fig. 104), dacă $y = \varphi_1(x)$ este ecuaţia arcului MPN, iar $y = \varphi_2(x)$ este ecuaţia arcului MQN, conform celor spuse la integrale duble avem

$$\iiint_V f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \mathrm{d}y \int_e^g f(x, y, z)\,\mathrm{d}z\,,$$

deci şi în acest caz integrala triplă se obţine prin calculul *succesiv* a trei integrale simple.

c) Să găsim acum formula de calcul a unei integrale triple pentru un volum V închis şi mărginit de o suprafaţă S, pe care o presupunem alcătuită dintr-un număr finit de părţi netede. Vom face ipoteza că o paralelă la axa Oz taie suprafaţa S în două puncte. Fie e, g $(e < g)$, cotele extreme ale punctelor de pe suprafaţa S; aceasta înseamnă că volumul V este cuprins între planele $z = e$ şi $z = g$. Fie T cilindrul proiectant al

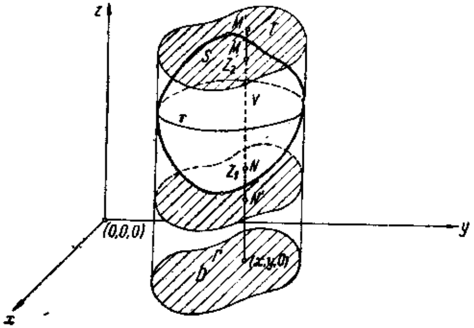

Fig. 105

volumului V pe planul xOy (cilindrul cu generatoarele paralele la axa Oz şi tangente la suprafaţa S), cuprins între planele $z = e$ şi $z = g$. Vom nota cu D proiecţia volumului V pe planul xOy.

Volumul V este interior cilindrului T (fig. 105).

Cilindrul T este tangent după curba γ la suprafaţa S şi proiecţia curbei γ pe planul xOy este conturul Γ al domeniului D. Curba γ împarte suprafaţa S într-o suprafaţă S_1, de ecuaţie $z = \psi_1(x, y)$, şi o suprafaţă S_2

de ecuaţie $z = \psi_2(x, y)$. Cu aceste elemente putem enunţa următoarea

T e o r e m ă. Fie funcţia $f(x, y, z)$ definită pe V, mărginită şi integrabilă pe V. Dacă există integrala

$$F(x, y) = \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z$$

pentru orice $(x, y) \in D$ şi dacă $F(x, y)$ este integrabilă pe D, atunci

$$\iiint_V f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_D \left[\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \qquad (1)$$

Demonstraţie. Vom reduce problema integrării pe volumul V la problema integrării pe cilindrul T, prezentată la alineatul precedent (b). Să considerăm în acest scop funcţia $f^*(x, y, z)$ definită pe cilindrul T în modul următor

$$f^*(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z), & \text{dacă } (x, y, z) \in V \\ \quad 0 & , \text{dacă } (x, y, z) \in T - V \end{cases}$$

Deoarece f este integrabilă pe V urmează că f^* este integrabilă pe T şi cele două integrale triple sînt egale:

$$\iiint_T f^*(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_V f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Conform rezultatului obţinut la alineatul $b)$ avem

$$\iiint_T f^*(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_D \left[\int_e^g f^*(x, y, z)\,dz\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

însă, (fig. 105), putem scrie

$$\int_e^g f^*(x, y, z)\,\mathrm{d}z = \int_{N'N} f^*(x, y, z)\,\mathrm{d}z + \int_{NM} f^*(x, y, z)\,\mathrm{d}z +$$
$$+ \int_{MM'} f^*(x, y, z)\,\mathrm{d}z$$

unde N', N, M, M' sînt puncte de pe dreapta paralelă cu Oz ce trece prin punctul $(x, y) \in D$, anume punctele de intersecţie cu planul $z = e$, cu suprafaţa S_1, cu suprafaţa S_2, cu planul $z = g$, respectiv. Pe $N'N \subset T - V$ şi $MM' \subset T - V$ $f^*(x, y, z) = 0$, iar pe $NM \subset V$, $f^*(x, y, z) = f(x, y, z)$; dacă mai observăm că N şi M au cotele $\psi_1(x, y)$ şi $\psi_2(x, y)$ respectiv, obţinem în cele din urmă

$$\int_e^g f^*(x, y, z)\,\mathrm{d}z = \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z,$$

deci

$$\iiint_V f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_D \left[\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,. \tag{1}$$

Teorema este demonstrată.

Formula (1) de calcul a integralei triple se scrie în mod curent astfel

$$\iiint_V f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z\,,$$

integrarea efectuîndu-se de la dreapta la stînga. Ţinînd seama de modul cum se calculează integrala dublă, dacă, (fig. 104), $y = \varphi_1(x)$ este ecuaţia arcului MPN şi $y = \varphi_2(x)$ este ecuaţia arcului MQN, avem şi

$$\iiint_V f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \mathrm{d}y \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z\,, \tag{2}$$

integrarea efectuîndu-se de la dreapta la stînga.

O b s e r v a ţ i i

1) În integrala simplă

$$\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z$$

ce intervine în (2), x şi y sînt considerate constante, variabila de integrare fiind z.

2) Dacă volumul V nu îndeplineşte condiţia ca o paralelă la axa Oz să întîlnească suprafaţa contur S în două puncte, ci într-un număr finit de puncte, atunci împărţim volumul V în subvolume $V_1, V_2, \ldots, V_p$, cu ajutorul unor părţi de suprafeţe netede, astfel încît fiecare din subvolumele V_k să îndeplinească această condiţie şi

$$\iiint_V = \iiint_{V_1} + \iiint_{V_2} + \cdots + \iiint_{V_p}\,.$$

3) Schimbînd ordinea de integrare în (2) se pot obţine încă cinci formule de calcul pentru integrale triple; limitele de integrare se modifică însă în mod corespunzător.

4) Dacă $f(x, y, z)$ este funcţie continuă în domeniul V, condiţiile din teoremă sînt îndeplinite.

E x e m p l e

1) Să se calculeze integrala triplă

$$I = \iiint_V \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{(1 + x + y + z)^4}\,,$$

unde V este tetraedrul $OABC$ definit de $x + y + z \leqslant 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, (fig. 106). În acest caz avem $\psi_1(x, y) = 0$, $\psi_2(x, y) = 1 - x - y$,

$$I = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_0^{1-x-y} \frac{\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^4} = \iint_D \left[-\frac{1}{3} \frac{1}{(1+x+y+z)^3} \right]_0^{1-x-y} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

$$I = \frac{1}{3} \iint_D \left[\frac{1}{(1+x+y)^3} - \frac{1}{8} \right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Domeniul D este proiecţia tetraedrului $OABC$ pe planul xOy, adică triunghiul OAB, deci

$$I = \frac{1}{3} \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \left[\frac{1}{(1+x+y)^3} - \frac{1}{8} \right] \mathrm{d}y,$$

$$I = \frac{1}{3} \int_0^1 \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{y}{8} \right]_0^{1-x} \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{6} \int_0^1 \left[\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{4} - \frac{1-x}{4} \right] \mathrm{d}x = \frac{1}{6} \left[-\frac{1}{1+x} - \frac{2x}{4} + \frac{x^2}{8} \right]_0^1 = \frac{1}{48}.$$

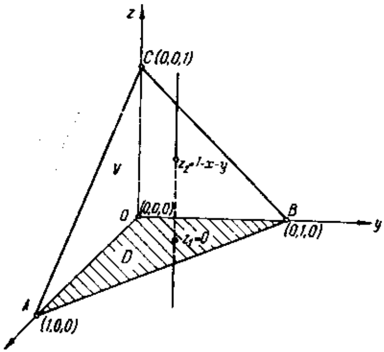

Fig. 106

2) Să se calculeze integrala triplă

$$I = \iiint_V \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\sqrt{a^2 + x^2 + y^2 + az}}, \qquad a > 0,$$

unde V este partea din paraboloidul de rotaţie definită de $x^2 + y^2 \leqslant az$ şi $0 \leqslant z \leqslant a$ (fig. 107). O paralelă la axa Oz taie suprafaţa paraboloidului în două puncte de cote $z_1 = \psi_1(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{a}$ şi $z_2 = \psi_2(x, y) = a$, prin urmare

$$I = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_{\frac{x^2+y^2}{a}}^{a} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{a^2 + x^2 + y^2 + az}},$$

$$I = \frac{2}{a} \iint_D \sqrt{a^2 + x^2 + y^2 + az} \Big|_{\frac{x^2+y^2}{a}}^{a} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

$$I = \frac{2}{a} \iint_D \left[\sqrt{x^2 + y^2 + 2a^2} - \sqrt{2(x^2 + y^2) + a^2} \right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

unde D este discul circular $x^2 + y^2 \leqslant a^2$. În coordonate polare $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $0 \leqslant \rho \leqslant a$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, $dx\,dy = \rho d\rho\, d\theta$ obținem

$$I = \frac{2}{a}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a [\sqrt{\rho^2 + 2a^2} - \sqrt{2\rho^2 + a^2}]\,\rho d\rho = \frac{4\pi}{a}\left[\frac{1}{3}(\rho^2 + 2a^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6}(2\rho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a =$$

$$= \frac{2\pi}{3} a^2 (3\sqrt{3} - 4\sqrt{2} + 1).$$

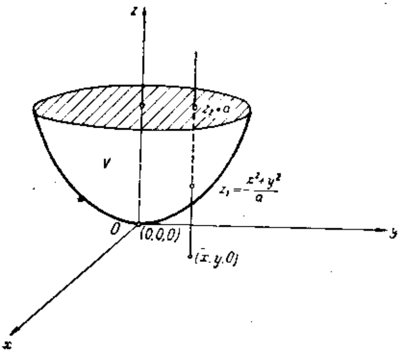

Fig. 107

4. Integrala triplă, funcție de limitele de integrare

Fie $f(x, y, z)$ o funcție mărginită și integrabilă Riemann pe un domeniu $V \subset R^3$.

Pentru orice interval $I = \{(u, v, w) \mid a \leqslant u \leqslant x,\ b \leqslant v \leqslant y,\ c \leqslant \leqslant w \leqslant z\}$ conținut în V integrala triplă

$$\iiint_I f(u, v, w)\, du\, dv\, dw$$

definește o funcție reală F de variabilele reale $(x, y, z) \in V$.

$$F(x, y, z) = \int_a^x du \int_b^y dv \int_c^z f(u, v, w)\, dw.$$

Se demonstrează la fel ca la integrale duble următoarele teoreme

Teorema 1. Dacă $f(x, y, z)$ este mărginită și integrabilă pe V atunci funcția

$$F(x, y, z) = \int_a^x du \int_b^y dv \int_c^z f(u, v, w)\, dw$$

este continuă pe V.

T e o r e m a 2. **Dacă $f(x, y, z)$ este continuă pe V, atunci funcţia**

$$F(x, y, z) = \int_a^x \mathrm{d}u \int_b^y \mathrm{d}v \int_c^z f(u, v, w)\, \mathrm{d}w$$

are:

α) **derivate parţiale de ordinul întîi continue în V**

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int_b^y \mathrm{d}v \int_c^z f(x, v, w)\, \mathrm{d}w\,,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int_a^x \mathrm{d}u \int_c^z f(u, y, w)\, \mathrm{d}w\,,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \int_a^x \mathrm{d}u \int_b^y f(u, v, z)\, \mathrm{d}v\,,$$

β) **derivate de ordinul doi, mixte, continue în V**

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} = \int_c^z f(x, y, w)\, \mathrm{d}w\,,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial z} = \int_a^x f(u, y, z)\, \mathrm{d}u\,,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z\, \partial x} = \int_b^y f(x, v, z)\, \mathrm{d}v\,,$$

γ) **derivata de ordinul trei mixtă**

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = f(x, y, z)\,,$$

continuă în V.

5. Schimbarea de variabile în integrale triple

Fie

$$x = f(u, v, w), \quad y = g(u, v, w), \quad z = h(u, v, w)\,, \quad (u, v, w) \in V' \tag{1}$$

o transformare reversibilă a volumului $V' \subset R^3$ în $V \subset R^3$, funcţiile f, g, h fiind continue cu derivatele parţiale de ordinul întîi continue în V', cu determinantul funcţional

$$\frac{\mathrm{D}(x, y, z)}{\mathrm{D}(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial h}{\partial u} \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial v} & \dfrac{\partial g}{\partial v} & \dfrac{\partial h}{\partial v} \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial w} & \dfrac{\partial g}{\partial w} & \dfrac{\partial h}{\partial w} \end{vmatrix}$$

diferit de zero în V'.

Ne propunem să arătăm că în urma schimbării de variabile (1) avem egalitatea

$$I = \iiint_V F(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z =$$

$$= \iiint_{V'} F[f(u, v, w),\ g(u, v, w),\ h(u, v, w)] \left| \frac{\mathrm{D}(f, g, h)}{\mathrm{D}(u, v, w)} \right| \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v\, \mathrm{d}w\,,$$

numită formula schimbării de variabile în integrale triple.

Vom demonstra această formulă efectuînd succesiv trei transformări, fiecare numai de cîte o variabilă, folosind de fiecare dată formula schimbării de variabile de la integrala definită. Să scriem integrala triplă astfel:

$$I = \iint \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \int_{z_1}^{z_2} F(x, y, z)\, \mathrm{d}z\,;$$

în integrala $\int_{z_1}^{z_2} F(x, y, z)\, \mathrm{d}z$ să efectuăm schimbarea de variabilă $z = h(u, v, w)$, noua variabilă de integrare fiind w, iar u, v rezultînd din celelalte relații, deoarece x și y sînt ficși. Aplicînd formula schimbării de variabile de la integrale simple avem

$$I = \iint \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \int_{w_1}^{w_2} F[x, y, h(u, v, w)] \left.\frac{\partial z}{\partial w}\right|_{x, y} \mathrm{d}w$$

unde am notat $\left.\frac{\partial z}{\partial w}\right|_{xy}$ derivata lui z în funcție de w, care se obține din relațiile (1) presupunînd pe x și y ficși. Să scriem acum pe I în modul următor

$$I = \iint \mathrm{d}x\, \mathrm{d}w \int_{y_1}^{y_2} F(x, y, h) \left.\frac{\partial z}{\partial w}\right|_{x, y} \mathrm{d}y\,,$$

iar în integrala $\int_{y_1}^{y_2} F(x, y, h) \left.\frac{\partial z}{\partial w}\right|_{x, y} \mathrm{d}y$ să efectuăm schimbarea de variabile $y = g(u, v, w)$, noua variabilă de integrare fiind v; de data aceasta x și w sînt considerați ficși în (1). Avem

$$I = \iint \mathrm{d}x\, \mathrm{d}w \int_{v_1}^{v_2} F(x, g, h) \left.\frac{\partial z}{\partial w}\right|_{x, y} \cdot \left.\frac{\partial y}{\partial v}\right|_{x, w} \mathrm{d}v$$

unde am notat $\left.\frac{\partial y}{\partial v}\right|_{x, w}$ derivata lui y ce rezultă din (1) în ipoteza că x și w sînt ficși.

Dacă scriem acum pe I în modul următor

$$I = \iint \mathrm{d}v\, \mathrm{d}w \int_{x_1}^{x_2} F(x, g, h) \left.\frac{\partial z}{\partial w}\right|_{x, y} \cdot \left.\frac{\partial y}{\partial v}\right|_{x, w} \mathrm{d}x$$

şi dacă în integrala simplă $\int_{x_1}^{x_2} F(x, g, h) \left.\frac{\partial z}{\partial w}\right|_{x,y} \cdot \left.\frac{\partial y}{\partial v}\right|_{x,w} \mathrm{d}x$ facem schimbarea de variabilă $x = f(u, v, w)$, noua variabilă de integrare fiind u, iar v, w sînt ficşi, obţinem

$$I = \iint \mathrm{d}v\,\mathrm{d}w \int_{u_1}^{u_2} F(f, g, h) \left.\frac{\partial z}{\partial w}\right|_{x,y} \cdot \left.\frac{\partial y}{\partial v}\right|_{x,w} \cdot \left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_{v,w} \mathrm{d}u$$

şi pentru că toate variabilele au fost schimbate

$$I = \iiint_{V'} F(f, g, h) \left.\frac{\partial z}{\partial w}\right|_{x,y} \cdot \left.\frac{\partial y}{\partial v}\right|_{x,w} \cdot \left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_{v,w} \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w\,.$$

Ne rămîn de calculat numai derivatele

$$\left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_{v,w}, \quad \left.\frac{\partial y}{\partial v}\right|_{x,w}, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial w}\right|_{x,y}$$

în ipotezele menţionate. Deoarece în $x = f(u, v, w)$, v, w sînt ficşi, rezultă că

$$\left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_{v,w} = \frac{\partial f}{\partial u}\,. \tag{2}$$

Vom calcula pe $\left.\frac{\partial y}{\partial v}\right|_{x,w}$ din primele două relaţii din (1) presupunînd pe x şi w ficşi. Dacă diferenţiem, avem

$$0 = \frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial f}{\partial v}\mathrm{d}v\,,$$

$$\mathrm{d}y = \frac{\partial g}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial g}{\partial v}\mathrm{d}v\,,$$

de unde, eliminînd pe $\mathrm{d}u$ între ele, obţinem

$$\left.\frac{\partial y}{\partial v}\right|_{x,w} = \frac{\mathrm{D}(f, g)}{D(u, v)} : \frac{\partial f}{\partial u}\,. \tag{2'}$$

În sfîrşit, pentru a calcula pe $\left.\frac{\partial z}{\partial w}\right|_{x,y}$ diferenţiem cele trei relaţii (1) considerînd pe x şi y constanţi

$$0 = \frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial f}{\partial v}\mathrm{d}v + \frac{\partial f}{\partial w}\mathrm{d}w,$$

$$0 = \frac{\partial g}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial g}{\partial v}\mathrm{d}v + \frac{\partial g}{\partial w}\mathrm{d}w,$$

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial h}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial h}{\partial v}\mathrm{d}v + \frac{\partial h}{\partial w}\mathrm{d}w,$$

din care eliminînd pe du şi dv obţinem

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial f}{\partial w}\,dw \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial w}\,dw \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} & \frac{\partial h}{\partial w}\,dw - dz \end{vmatrix} = 0$$

sau

$$\frac{D(f,g,h)}{D(u,v,w)}\,dw - \frac{D(f,g)}{D(u,v)}\,dz = 0$$

din care rezultă

$$\left.\frac{\partial z}{\partial w}\right|_{x,y} = \frac{D(f,g,h)}{D(u,v,w)} : \frac{D(f,g)}{D(u,v)}; \tag{2''}$$

înmulţind pe 2), 2'), 2'') avem

$$\left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_{v,w}\cdot\left.\frac{\partial y}{\partial v}\right|_{x,w}\cdot\left.\frac{\partial z}{\partial w}\right|_{x,y} = \frac{D(f,g,h)}{D(u,v,w)}$$

şi formula schimbării de variabile în integrale triple este demonstrată.

Expresia diferenţială

$$\left|\frac{D(f,g,h)}{D(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw$$

se numeşte elementul de volum în coordonatele curbilinii u, v, w. Am luat modulul determinantului funcţional, deoarece elementul de volum este pozitiv.

Observaţie

În urma unei schimbări de variabile, calculul unei integrale triple se poate uşura mult, domeniul de integrare sau funcţia de sub semnul integral putînd deveni mai simple.

Aplicaţii

1) Schimbare de variabile (coordonate polare în spaţiu)

$$x = \rho\sin\theta\cos\varphi,\quad y = \rho\sin\theta\sin\varphi,\quad z = \rho\cos\theta$$

transformă intervalul $J = \{(\rho,\theta,\varphi)\mid 0 \leqslant \rho \leqslant R,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi\}$ în sfera $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$. Determinantul funcţional al transformării este

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \rho\cos\theta\cos\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta \\ -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = \rho^2\sin\theta.$$

Expresia diferenţială $\rho^2\sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$ se numeşte elementul de volum în coordonate polare în spaţiu.

Exemplu

Să se calculeze integrala triplă

$$I = \iiint_V y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

V fiind semisfera $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$, $y \geqslant 0$. Folosind coordonatele polare în spaţiu obţinem

$$I = \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{R} \rho^4 \sin^3 \theta \sin^2 \varphi \,\mathrm{d}\rho,$$

$$I = \int_0^{\pi} \sin^3 \theta \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi} \sin^2 \varphi \mathrm{d}\varphi \int_0^{R} \rho^4 \mathrm{d}\rho =$$

$$= \left(\frac{\cos^3 \theta}{3} - \cos \theta\right)\Bigg|_0^{\pi} \cdot \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi} \cdot \frac{\rho^5}{5}\Bigg|_0^{R} = \frac{2\pi}{15} R^5.$$

2) Schimbarea de variabile (coordonate cilindrice)

$$x = r \cos u, \qquad y = r \sin u, \qquad z = v$$

transformă intervalul $J = \{(r, u, v) \mid 0 \leqslant r \leqslant R,\ 0 \leqslant u < 2\pi,\ 0 \leqslant v \leqslant h\}$ în cilindrul $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$. Determinantul funcţional al transformării este

$$\frac{\mathrm{D}(x, y, z)}{\mathrm{D}(r, u, v)} = \begin{vmatrix} \cos u & \sin u & 0 \\ -r \sin u & r \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Expresia diferenţială $r\mathrm{d}r\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ se numeşte elementul de volum în coordonate cilindrice.

Exemplu

Să se calculeze integrala triplă

$$I = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)\, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

unde V este definit de $x^2 + y^2 \leqslant az$, $0 \leqslant z \leqslant h$. Folosind coordonatele cilindrice avem $r^2 = av$, $0 \leqslant v \leqslant h$, deci

$$I = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}u \int_0^{h} \mathrm{d}v \int_0^{\sqrt{av}} (r^2 + v^2)\, r \mathrm{d}r = 2\pi \int_0^{h} \left[\frac{r^4}{4} + \frac{v^2 r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{av}} \mathrm{d}v =$$

$$= 2\pi \int_0^{h} \left[\frac{a^2 v^2}{4} + \frac{a v^3}{2}\right] \mathrm{d}v = 2\pi \left[a^2 \frac{v^3}{12} + \frac{a}{8} v^4\right]_0^{h},$$

$$I = \frac{\pi}{2}\left[\frac{a^2 h^3}{3} + \frac{a h^4}{2}\right].$$

6. Formula lui Gauss-Ostrogradski

Fie V un volum în spaţiu, mărginit de o suprafaţă S. Asupra volumului V şi a suprafeţei contur S vom face următoarele ipoteze:

a) O paralelă la axele de coordonate care trece prin interiorul lui V taie suprafaţa S numai în două puncte.

b) Volumul V se proiectează pe planul xOy după un domeniu D. Cilindrul proiectant al volumului V pe planul xOy cu generatoarele paralele cu axa Oz, generatoare care întîlnesc suprafaţa S după o curbă γ. Curba γ împarte suprafaţa S în două suprafeţe (deschise), suprafaţa S_1, $z_1 = \psi_1(x, y)$ şi suprafaţa S_2, $z_2 = \psi_2(x, y)$, $z_1 < z_2$.

Faţă de celelalte plane de coordonate, yOz, zOx, volumul V are aceleaşi proprietăţi.

c) Suprafaţa S are două feţe, faţa exterioară pentru care normala este normala exterioară $\overline{n}_e$, dirijată spre exteriorul volumului V, şi o faţă interioară cu normala, normala interioară $\overline{n}_i$, dirijată spre interiorul lui V.

d) Suprafaţa S este netedă sau formată dintr-un număr finit de porţiuni netede.

În aceste condiţii avem următoarea

Teoremă. Dacă $P(x, y, z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ sînt trei funcţii continue cu derivatele $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ continue pe V, are loc egalitatea

$$\iint_S P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

numită formula integrală a lui Gauss-Ostrogradski.

Demonstraţie. Avem

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\,\mathrm{d}z$$

unde am notat cu $z = \psi_1(x, y)$ şi $z = \psi_2(x, y)$ ecuaţiile suprafeţelor S_1 şi S_2 respectiv; în continuare putem scrie

$$I = \iint_D [R(x, y, \psi_2(x, y)) - R(x, y, \psi_1(x, y)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

însă

$$\int_D R(x, y, \psi_2(x,y))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{S_2} R(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1}$$

şi

$$-\iint_D R(x, y, \psi_1(x, y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{S_1} R(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,; \tag{1'}$$

pentru S_2 am luat faţa exterioară, care este şi faţa superioară a lui S; pentru S_1 am luat tot faţa exterioară a lui S care este însă faţă inferioară a lui S (normala exterioară a lui S pe porţiunea S_1 face cu axa Oz un unghi de cosinus negativ).

Dacă adunăm pe (1) şi (1′) obţinem

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_S R(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{2}$$

integrala de suprafaţă fiind luată pe *faţa exterioară* a lui S. În mod analog avem şi

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_S P(x, y, z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \tag{2'}$$

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_S Q(x, y, z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x, \tag{2''}$$

pentru S luînd în permanenţă faţa exterioară. Adunînd pe (2), (2′) şi (2″) obţinem formula

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Teorema este demonstrată.

Observaţii

1) Dacă luăm pe S faţa interioară, în formula lui Gauss-Ostrogradski integrala de suprafaţă o luăm cu semnul minus.

2) Dacă $\overline{\Phi}$ este cîmpul vectorial

$$\overline{\Phi} = (x, y, z) = \overline{i}P(x, y, z) + \overline{j}Q(x, y, z) + \overline{k}R(x, y, z),$$

atunci

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div}\overline{\Phi},$$

iar formula lui Gauss-Ostrogradski are şi următoarea formă vectorială

$$\oint\!\!\oint_S \overline{\Phi}\cdot\overline{n}_e\mathrm{d}\sigma = \iiint_V \operatorname{div}\overline{\Phi}\,\mathrm{d}v$$

şi se citeşte în modul următor: **Fluxul total al cîmpului $\overline{\Phi}$ prin suprafaţa închisă S este egal cu productivitatea totală a volumului V mărginit de suprafaţa S.**

Dacă $\overline{\Phi}$ este cîmpul de viteze al unui fluid, integrala

$$\iiint_V \operatorname{div}\overline{\Phi}\,\mathrm{d}v$$

ne dă cantitatea de fluid ce se creează în V, de aceea se spune că reprezintă *productivitatea* volumului V.

3) Formula lui Gauss-Ostrogradski se mai numeşte şi formula lui Green-Ostrogradski sau *formula fluxdivergență*

4) Dacă $\Phi = \text{grad } U$, atunci avem

$$\iint_S \text{grad } U \cdot \overline{n}_e \, d\sigma = \iiint_V \Delta U \, dv$$

unde $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ este *operatorul lui Laplace.*

Aplicație

Integrala de suprafață

$$I = \frac{1}{3}\iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$$

reprezintă volumul $\mathcal{V}$ mărginit de suprafața închisă S. Aplicînd formula lui Gauss-Ostrogradski obținem

$$I = \iiint_V dx dy dz = \mathcal{V}.$$

Exemple

1) Să se calculeze, transformînd-o într-o integrală triplă, integrala de suprafață

$$I = \iint_S xyz\ (x dy dz + y dz dx + z dx dy)$$

unde S este suprafața închisă, mărginită de triunghiul sferic determinat de $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ şi planele de coordonate.

Aplicăm formula lui Gauss-Ostrogradski; avem

$$I = \iiint_V (2xyz + 2xyz + 2xyz)\, dx dy dz = 6\iiint_V xyz dx dy dz\,;$$

folosim coordonatele polare în spațiu:

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\theta \sin\varphi, \quad z = \rho\cos\theta,$$

$$0 \leqslant \rho \leqslant R,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2},\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2},\ dx dy dz = \rho^2 \sin\theta d\rho d\theta\, d\varphi\,;$$

obținem

$$I = 6\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R \rho^5 \sin^3\theta \cos\theta \cos\varphi \sin\varphi \, d\rho =$$

$$= 6\,\frac{\sin^4\theta}{4}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\sin^2\varphi}{2}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\rho^6}{6}\bigg|_0^R = \frac{1}{8}R^6.$$

2) Să se calculeze integrala de suprafață

$$I = \iint_S xy^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}z + z^3 \mathrm{d}z\mathrm{d}x + y^2 z\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

unde S este suprafața elipsoidului $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Transformînd-o într-o integrală triplă cu formula lui Gauss-Ostrogradski, avem

$$I = 2\iiint_V y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Funcțiile $x = a\rho \sin\theta\cos\varphi$, $y = b\rho\sin\theta\sin\varphi$, $z = c\rho\cos\theta$ transformă intervalul tridimensional $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, în elipsoidul $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$.

Avem

$$\frac{\mathrm{D}(x, y, z)}{\mathrm{D}(\rho, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} a\sin\theta\cos\varphi & b\sin\theta\sin\varphi & c\cos\theta \\ a\rho\cos\theta\cos\varphi & b\rho\cos\theta\sin\varphi & -c\rho\sin\theta \\ -a\rho\sin\theta\sin\varphi & b\rho\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = abc\rho^2\sin\theta,$$

deci

$$I = 2ab^3c\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \rho^4\sin^3\theta\sin^2\varphi\mathrm{d}\rho =$$

$$= \frac{2}{5}ab^3c\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{8}{15}ab^3c\pi.$$

7. Integrale triple cu domeniul de integrare nemărginit

Ne propunem să studiem în ce condiții există integrala triplă

$$\iiint_V f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

unde V este un domeniu nemărginit din spațiu, iar $f(x, y, z)$ o funcție definită pe V.

Un domeniu $V \subset R^3$ se spune că este nemărginit dacă conține puncte exterioare oricărui interval tridimensional mărginit sau, ceea ce este același lucru, conține puncte exterioare oricărei sfere din spațiu. Să considerăm un șir infinit de sfere

$$K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_n \subset \ldots$$

cu centrul într-un punct oarecare O al spațiului, de raze respective

$$R_1 < R_2 < \ldots < R_n < \ldots$$

formînd un şir crescător divergent. Să considerăm subdomeniile V_n, $n = 1,2, \dots$ ale lui V definite astfel:

$$V_1 = V \cap K_1, \;\; V_2 = V \cap K_2, \dots, V_n = V \cap K_n, \dots$$

Avem

a) $V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n \subset \dots$

b) orice punct P al domeniului V aparţine unui subdomeniu V_n dacă se ia n convenabil.

Într-adevăr, dacă $OP < R_n$, atunci $P \in V_n$. Vom scrie acest fapt astfel:

$$\lim_{n\to\infty} V_n = V \text{ sau } V_n \to V.$$

Mai general, şirul de sfere (K_n) fiind dat, vom spune că un şir de subdomenii (V'_n) ale lui V tinde către V dacă există un număr N astfel încît să avem

$$V'_n \supset V_n = V \cap K_n$$

pentru orice $n > N$; vom scrie şi în acest caz

$$\lim_{n\to\infty} V'_n = V \text{ sau } V'_n \to V.$$

Fie acum un şir oarecare de subdomenii (V_n) ale domeniului V (construit în modul arătat mai sus) care îndeplineşte următoarele condiţii:

a) $V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n \subset \dots,$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} V_n = V,$

c) frontiera domeniului V_n, $n = 1,2, \dots$ este formată dintr-un număr finit de suprafeţe netede.

Fie $f(x, y, z)$ o funcţie definită în V, integrabilă pe orice subdomeniu V_n al lui V; la şirul de domenii (V_n) corespunde şirul de valori ale integralei triple

$$\iiint_{V_1} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \iiint_{V_2} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \dots, \iiint_{V_n} f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \dots;$$

folosind criteriul general al lui Cauchy de convergenţă a şirurilor, putem enunţa următorul

Criteriu de convergenţă. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca integrala

$$\iiint_V f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

să fie convergentă, este ca pentru orice număr $\varepsilon > 0$ să existe un număr $N(\varepsilon)$, astfel încît să avem, pentru orice $n > N(\varepsilon)$ şi orice $p \geqslant 1$

$$\left| \iiint_{V_{n+p}} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \iiint_{V_n} f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \right| < \varepsilon.$$

Aplicaţie

Dacă $f(x, y, z)$ în V îndeplineşte condiţia

$$|f(x, y, z)| \leqslant \frac{M}{(x^2 + y^2 + z^2 + a^2)^\alpha}, \ \alpha > \frac{3}{2}, \ M > 0,$$

atunci integrala

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dx dy dz$$

este convergentă.

Într-adevăr

$$\left|\iiint_{V_n} f(x, y, z)\, dx dy dz\right| \leqslant M \iiint_{V_n} \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2 + a^2)^\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant M \iiint_V \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2 + a^2)^\alpha}.$$

În coordonate polare în spaţiu avem

$$M \cdot \iiint_V \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2 + a^2)^\alpha} \leqslant M \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{\infty} \frac{\rho^2 d\rho}{(\rho^2 + a^2)^\alpha};$$

ultima integrală are sens dacă $\lim\limits_{\rho \to \infty} \rho^\beta \dfrac{\rho^2}{(\rho^2 + a^2)^\alpha} = A$ (finit) cu $\beta > 1$. Trebuie să avem $2\alpha - 2 - \beta \geqslant 0$, $\beta > 1$, deci $\alpha > \dfrac{3}{2}$.

Exemplu

Să se calculeze integrala triplă

$$I = \iiint_{V_\infty} \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2 + a^2)^2},$$

V_∞ fiind tot spaţiul.

În coordonate polare, $x = \rho \cos\varphi \sin\theta$, $y = \rho \sin\varphi \sin\theta$, $z = \rho \cos\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $0 \leqslant \rho < \infty$, $dx dy dz = \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$; avem

$$I = \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \frac{\rho^2 d\rho}{(\rho^2 + a^2)^2} = 4\pi \int_0^{\infty} \frac{\rho^2 d\rho}{(\rho^2 + a^2)^2},$$

însă

$$4\pi \int_0^{\infty} \frac{\rho^2 d\rho}{(\rho^2 + a^2)^2} = 4\pi \int_0^{\infty} \frac{d\rho}{a^2 + \rho^2} - 4\pi a^2 \int_0^{\infty} \frac{d\rho}{(a^2 + \rho^2)^2},$$

deci

$$I = \frac{2\pi}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{\rho}{a}\Big|_0^{\infty} - 2\pi \frac{\rho}{\rho^2 + a^2}\Big|_0^{\infty} = \frac{\pi^2}{|a|}.$$

8. Integrale triple de funcţii nemărginite în domeniul de integrare

Fie $f(x, y, z)$ o funcţie definită într-un domeniu închis şi mărginit $V \subset R^3$, în afara unui punct $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ interior acestui domeniu, punct în care $f(x, y, z)$ are limită infinită

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0 \\ y \to z_0}} |f(x, y, z)| = \infty.$$

Ne propunem să cercetăm în ce condiţii integrala triplă

$$\iiint_V f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

există şi este finită.

Să izolăm punctul $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ cu o suprafaţă închisă $S \subset V$ şi să notăm cu $\mathcal{V}_S$ domeniul mărginit de suprafaţa S.

Funcţia $f(x, y, z)$ este nemărginită în $\mathcal{V}_S$. Vom presupune că $f(x, y, z)$ este integrabilă în $V_S = V - \mathcal{V}_S$, oricare ar fi suprafaţa închisă $S \subset V$, care înconjură punctul M_0.

Se numeşte diametrul unui domeniu $V \subset R^3$ şi se notează d_V, marginea superioară a distanţei dintre două puncte ale sale

$$d_V = \sup_{P \in V,\ P' \in V} PP'.$$

Să considerăm un şir (oarecare) de suprafeţe

$$S_1, S_2, \ldots, S_n \ldots$$

care înconjură punctul M_0, situate în întregime în V; fie

$$\mathcal{V}_1 \supset \mathcal{V}_2 \supset \ldots \supset \mathcal{V}_n \supset \ldots$$

domeniile mărginite de aceste suprafeţe. Diametrele lor formează un şir monoton descrescător

$$d_{\mathcal{V}_1} > d_{\mathcal{V}_1} > \ldots > d_{\mathcal{V}_n} > \ldots$$

cu

$$\lim_{n \to \infty} d_{\mathcal{V}_n} = 0.$$

Vom scrie acest fapt astfel:

$$\lim_{n \to \infty} \mathcal{V}_n = M_0 \text{ sau } \mathcal{V}_n \to M_0.$$

Să considerăm acum subdomeniile V_n definite astfel:

$$V_n = V - \mathcal{V}_n.$$

Avem şirul de incluziuni

$$V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_n \subset \ldots$$

şi pentru că $\mathcal{V}_n \to M_0$ rezultă că $V_n \to V - \{M_0\}$.

La şirul (V_n) de subdomenii ale lui V corespunde şirul de integrale triple

$$\iiint_{V_1} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \iiint_{V_2} f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \ldots, \iiint_{V_n} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \ldots, (\alpha)$$

deoarece $f(x, y, z)$ este integrabilă pe V_n, $n = 1, 2, \ldots$

Aplicînd criteriul general al lui Cauchy şirului (α) obţinem următorul

Criteriu de convergenţă. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca integrala triplă

$$\iiint_V f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

să aibă sens este ca pentru orice număr $\varepsilon > 0$ să existe un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît să avem

$$\left|\iiint_{V_{n+p}} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \iiint_{V_n} f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right| < \varepsilon$$

oricare ar fi $n > N(\varepsilon)$ şi $p \geqslant 1$.

Aplicaţie

Dacă în domeniul mărginit V funcţia $f(x, y, z)$ îndeplineşte condiţia

$$|f(x, y, z)| \leqslant \frac{M}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^\alpha}, \quad M > 0, \quad \alpha < \frac{3}{2},$$

iar $(x_0, y_0, z_0) \in V$, atunci integrala triplă

$$\iiint_V f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

este convergentă.

Avem

$$\left|\iiint_{V_n} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right| \leqslant \iiint_{V_n} |f(x, y, z)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \leqslant$$

$$\leqslant M \iiint_V \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)]^\alpha};$$

fie V_R o sferă cu centrul în punctul (x_0, y_0, z_0) şi rază R aleasă astfel încît $V_R \supset V$; dacă efectuăm schimbarea de variabile

$$x = x_0 + \rho \sin\theta \cos\varphi,\ y = y_0 + \rho \sin\theta \sin\varphi,\ z = z_0 + \rho\cos\theta,$$

$$0 \leqslant \rho \leqslant R,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi,\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \rho^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi,$$

obţinem
$$\left|\iiint_V f(x, y, z)\,dxdydz\right| \leqslant M\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^R \frac{\rho^2 d\rho}{\rho^{2\alpha}};$$

ultima integrală are sens dacă $2\alpha - 2 < 1$, sau $\alpha < \frac{3}{2}$.

Exemplu

Să se calculeze integrala triplă
$$I = \iiint_{V_\infty} \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2+a^2)},$$
V_∞ fiind tot spaţiul. Dacă V_R este sfera cu centrul în origine şi rază R, putem scrie
$$I = \iiint_{V_R} + \iiint_{V_\infty - V_R} \tag{1}$$

Funcţia de sub semnul integral are limita infinită în punctul (0, 0, 0) însă
$$\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2+a^2)} \leqslant \frac{1}{a^2(x^2+y^2+z^2)^\alpha}$$
cu $\alpha = 1$, deci prima integrală din (1) are sens. În a doua integrală din (1) domeniul de integrare este infinit, însă
$$\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2+a^2)} \leqslant \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^\beta}$$
cu $\beta = 2$, deci şi această integrală are sens. În concluzie, integrala din enunţ are sens. În coordonate polare în spaţiu
$$x = \rho\sin\theta\cos\varphi,\quad y = \rho\sin\theta\sin\varphi,\quad z = \rho\cos\theta$$
$$0 \leqslant \rho < \infty,\quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi,\quad dxdydz = \rho^2\sin\theta\,d\rho d\theta d\varphi$$
avem
$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi} d\theta\int_0^{\infty}\frac{\rho^2\sin\theta\,d\rho}{\rho^2(\rho^2+a^2)} = 4\pi\int_0^{\infty}\frac{d\rho}{\rho^2+a^2} = \frac{2\pi^2}{|a|}.$$

§ 2. APLICAŢIILE INTEGRALELOR TRIPLE

Reamintim aplicaţiile întîlnite pînă acum şi dăm în continuare altele noi.

1. Volumul corpurilor

Volumul $\mathcal{V}$ al unui corp V este dat de integrala triplă
$$\mathcal{V} = \iiint_V dxdydz.$$

Exemple

1) Să se găsească volumul comun sferei $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ și cilindrului $x^2 + y^2 \leqslant r^2$, $(r < R)$.

Volumul este dat de

$$\mathcal{V} = \iiint_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \mathrm{d}z = 2\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

unde D este discul circular $x^2 + y^2 \leqslant r^2$. În coordonate polare

$$x = \rho\cos\theta,\quad y = \rho\sin\theta,$$

$$0 \leqslant \rho \leqslant r,\quad 0 \leqslant \theta < 2\pi$$

avem

$$\mathcal{V} = 2\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^r \sqrt{R^2 - \rho^2}\,\rho\mathrm{d}\rho =$$

$$= 4\pi\left[-\frac{1}{3}\,(R^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^r,$$

$$\mathcal{V} = \frac{4\pi}{3}\left[R^3 - (R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}\right] =$$

$$= \frac{4\pi}{3}(R^3 - h^3).$$

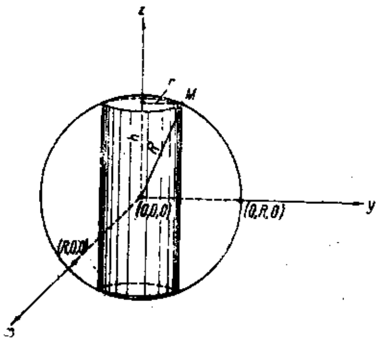

Fig. 108

2) Să se calculeze volumul închis de suprafața

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Funcțiile $x = a\rho\sin^3\theta\cos^3\varphi$, $y = b\rho\sin^3\theta\sin^3\varphi$, $z = c\rho\cos^3\theta$ transformă intervalul $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, în volumul mărginit de suprafața dată. Avem și

$$\frac{\mathrm{D}(x, y, z)}{\mathrm{D}(\rho, \theta, \varphi)} = 9\,abc\,\rho^2\sin^5\theta\cos^2\theta\,\cos^2\varphi\sin^2\varphi,$$

deci

$$\mathcal{V} = 9\,abc\int_0^1 \rho^2\mathrm{d}\rho \int_0^\pi \sin^5\theta\cos^2\theta\mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{4\pi}{35}\,abc.$$

2. Masa corpurilor

Masa unui corp K de densitate $\mu(x, y, z)$ și volum V este dată de integrala triplă

$$\mathfrak{M} = \iiint_V \mu(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Exemplu

Să se calculeze masa corpului neomogen definit de

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant\frac{z}{c},\quad 0\leqslant z\leqslant h,\quad c>0,$$

de densitate $\mu(x, y, z) = \lambda z$, (λ = constant). Avem

$$\mathfrak{M}=\lambda\iiint_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\lambda\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{c\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}^{h} z\mathrm{d}z\,,$$

$$\mathfrak{M}=\frac{\lambda}{2}\iint_D\left[h^2-c^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

unde D este discul eliptic $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant\frac{h}{c}$. Funcțiile

$$x=a\sqrt{\frac{h}{c}}\,\rho\cos\theta,\quad y=b\sqrt{\frac{h}{c}}\,\rho\sin\theta$$

transformă intervalul $0\leqslant\rho\leqslant 1$, $0\leqslant\theta<2\pi$ în D; avem și

$$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)}=\frac{abh}{c}\rho\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta,$$

deci

$$\mathfrak{M}=\frac{\lambda}{2}\cdot\frac{abh}{c}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1[h^2-h^2\rho^4]\,\rho\,\mathrm{d}\rho=\frac{\lambda}{3}\cdot\frac{abh^3}{c}\pi.$$

3. Centre de greutate

Fie K un corp de volum V și densitate $\mu(x, y, z)$. Fie Δ o diviziune a volumului V

$$\Delta=(\delta_1,\ \delta_2,\ \ldots,\ \delta_p)$$

și $v_1, v_2, \ldots, v_p$ volumele lui $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p$ respectiv. Masa părții δ_k din corpul K este

$$v_k\cdot\mu(x_k,\ y_k,\ z_k),$$

unde (x_k, y_k, z_k) este un punct P_k din δ_k. Dacă presupunem masa lui δ_k concentrată în punctul P_k, urmează că centrul de greutate al corpului K, reuniunea lui $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p$, are coordonatele

$$x_G = \frac{\sum_{k=1}^{p} x_k \mu(x_k, y_k, z_k) v_k}{\sum_{k=1}^{p} \mu(x_k, y_k, z_k) v_k},$$

$$y_G = \frac{\sum_{k=1}^{p} y_k \mu(x_k, y_k, z_k) v_k}{\sum_{k=1}^{p} \mu(x_k, y_k, z_k) v_k},$$

$$z_G = \frac{\sum_{k=1}^{p} z_k \mu(x_k, y_k, z_k) v_k}{\sum_{k=1}^{p} \mu(x_k, y_k, z_k) v_k}.$$

Observăm că atît la numărătorul cît și la numitorul lui x_G, y_G, z_G avem sume integrale care conduc la integrale triple relative la volumul V.

Astfel, dacă (Δ_n) este un șir de diviziuni ale volumului V cu $\nu(\Delta_n) \to 0$, cînd $n \to \infty$, avem

$$\lim_{\nu(\Delta_n)\to 0} \sum_{k=1}^{p} x_k \mu(x_k, y_k, z_k) v_k = \iiint_V x \mu(x, y, z) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$\lim_{\nu(\Delta_n)\to 0} \sum_{k=1}^{p} y_k \mu(x_k, y_k, z_k) v_k = \iiint_V y \mu(x, y, z) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$\lim_{\nu(\Delta_n)\to 0} \sum_{k=1}^{p} z_k \mu(x_k, y_k, z_k) v_k = \iiint_V z \mu(x, y, z) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$\lim_{\nu(\Delta_n)\to 0} \sum_{k=1}^{p} \mu(x_k, y_k, z_k) v_k = \iiint_V \mu(x, y, z) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

prin urmare centrul de greutate al corpului K de densitate $\mu(x, y, z)$ și volum V este dat de

$$x_G = \frac{\iiint_V x \mu(x, y, z) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint_V \mu(x, y, z) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z},$$

$$y_G = \frac{\iiint_V y \mu(x, y, z) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint_V \mu(x, y, z) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z},$$

$$z_G = \frac{\iiint_V z\mu(x, y, z)\, dxdydz}{\iiint_V \mu(x, y, z)\, dxdydz}.$$

Exemple

1) Să se calculeze centrul de greutate al corpului omogen definit de

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \leqslant 0, \quad x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \quad z \geqslant 0.$$

O reprezentare parametrică a volumului V al corpului dat este

$$x = a\rho \sin\theta \cos\varphi, \quad y = b\,\rho \sin\theta \sin\varphi, \quad z = c\,\rho\cos\theta$$

cu

$$0 \leqslant \rho \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2} \text{ şi } dxdydz = abc\,\rho^2 \sin\theta\, d\rho d\theta\, d\varphi.$$

Avem

$$x_G = \frac{\iiint_V x dxdydz}{\iiint_V dxdydz},$$

$$\iiint_V x dxdydz = a^2bc\int_0^1 \rho^3 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{16}\, a^2\, bc,$$

$$\iiint_V dxdydz = abc\int_0^1 \rho^2 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{\pi}{6}\, abc,$$

prin urmare $x_G = \frac{3}{8}\, a$; în mod analog $y_G = \frac{3}{8} b$, $z_G = \frac{3}{8}\, c$.

2) Să se găsească centrul de greutate al corpului omogen (fig. 109), definit de

$$x^2 + y^2 \geqslant az, \quad x^2 + y^2 \leqslant a^2, \quad z \geqslant 0, \quad a > 0.$$

Din motive de simetrie $x = y = 0$; rămîne de calculat z_G

$$z_G = \frac{\iiint_V z\, dxdydz}{\iiint_V dxdydz},$$

$$I_1 = \iiint_V z\, dxdydz = \iint_D dxdy \int_0^{\frac{x^2+y^2}{a}} z\, dz = \frac{1}{2a^2}\iint_D (x^2 + y^2)^2\, dxdy,$$

domeniul D este discul circular $x^2 + y^2 \leqslant a^2$. Punem $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, $0 \leqslant \rho \leqslant a$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, $dxdy = \rho d\rho d\theta$, deci

$$I_1 = \frac{1}{2a^2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \rho^5 d\rho = \frac{\pi}{6}a^4,$$

$$I_2 = \iiint_V dxdydz = \iint_D dxdy \int_0^{\frac{x^2+y^2}{a}} dz = \frac{1}{a}\iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy =$$

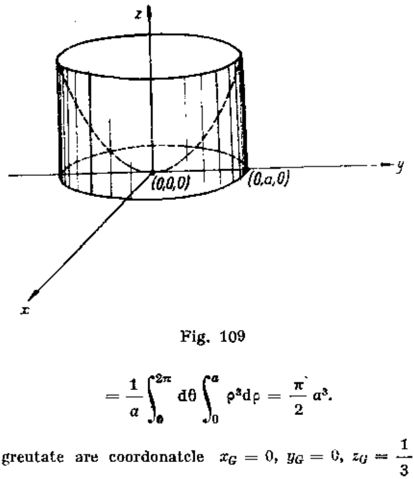

Fig. 109

$$= \frac{1}{a}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{2}a^3.$$

Centrul de greutate are coordonatele $x_G = 0$, $y_G = 0$, $z_G = \frac{1}{3}a$.

4. Momente de inerție

Dacă $M_1, M_2, \ldots, M_n$ sînt n puncte materiale de mase $m_1, m_2, \ldots, m_n$ respectiv, momentul de inerție I al acestor n puncte materiale față de un punct P (o dreaptă Δ, sau un plan Π) este suma

$$I = \sum_{k=1}^{n} m_k d_k^2, \tag{1}$$

unde d_k este distanța punctului M_k la punctul P (dreapta Δ, sau planul Π).

Să considerăm acum un corp K, neomogen, de densitate $\mu(x, y, z)$ care ocupă un domeniu V. La fel ca pentru corpurile plate (plăci, tole) avem următoarele rezultate *a)* **Momentul de inerţie al corpului K faţă de un punct $T(a, b, c)$ este dat de integrala triplă**

$$I_T = \iiint_V \mu(x, y, z)\,[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]\,dxdydz;$$

în particular, momentul de inerţie faţă de originea axelor $O(0, 0, 0)$ este

$$I_0 = \iiint_V \mu(x, y, z)\,(x^2 + y^2 + z^2)\,dxdydz.$$

b) **Momentele de inerţie ale corpului K faţă de axele de coordonate, Ox, Oy, Oz sînt date de integralele triple**

$$I_{Ox} = \iiint_V \mu(x, y, z)\,(y^2 + z^2)dxdydz,$$

$$I_{Oy} = \iiint_V \mu(x, y, z)\,(x^2 + z^2)\,dxdydz,$$

$$I_{Oz} = \iiint_V \mu(x, y, z)\,(x^2 + y^2)\,dxdydz.$$

c) **Momentele de inerţie ale corpului K faţă de planele de coordonate Oyz, Ozx, Oxy sînt date de integralele triple.**

$$I_{Oyz} = \iiint_V \mu(x, y, z)\,x^2\,dxdydz,$$

$$I_{Ozx} = \iiint_V \mu(x, y, z)\,y^2\,dxdydz,$$

$$I_{Oxy} = \iiint_V \mu(x, y, z)\,z^2\,dxdydz.$$

Exemple

1) Să se calculeze momentul de inerţie al solidului omogen definit de $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $0 \leqslant z \leqslant c$, faţă de axa Oz.

$$I_{Oz} = \iiint_V (x^2 + y^2)\,dxdydz = \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c (x^2 + y^2)\,dxdydz =$$

$$= \int_0^a dx \int_0^b c\,(x^2 + y^2)\,dy = c\int_0^a \left[x^2y + \frac{y^3}{3}\right]\Bigg|_0^b dx = c\int_0^a \left(bx^2 + \frac{b^3}{3}\right) dx$$

$$I_{Oz} = c\left(b\frac{x^3}{3} + \frac{b^3}{3}x\right)\Bigg]_0^a = \frac{abc}{3}\,(a^2 + b^2).$$

2) Să se calculeze momentul de inerție al conului eliptic omogen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant \frac{z^2}{c^2}$, $0 \leqslant z \leqslant h$, față de planul xOy.

$$I_{xOy} = \iiint_V z^2 \, dxdydz = \iint_D dxdy \int_{c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}^{h} z^2 dz =$$

$$= \frac{1}{3} \iint_D \left[h^3 - c^3 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right] dxdy,$$

unde D este discul eliptic

$$\frac{c^2}{a^2h^2} x^2 + \frac{c^2}{b^2h^2} y^2 \leqslant 1.$$

Dacă punem $x = \frac{ah}{c} \rho \cos\theta$, $y = \frac{bh}{c} \rho \sin\theta$,

$0 \leqslant \rho \leqslant 1$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, $dxdy = \frac{abh^2}{c^2} \rho \, d\rho d\theta$,

obținem

$$I_{xOy} = \frac{abh^2}{c^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 [h^3 - h^3\rho^3] \rho d\rho = \frac{abh^5}{c^2} \cdot \frac{3\pi}{5}.$$

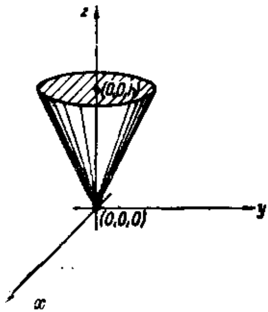

Fig. 110

5. Potențialul newtonian

Dacă masa atractivă este repartizată într-un volum V, expresia potențialului newtonian U se obține în mod asemănător cazului repartiției pe o suprafață și este dat de

$$U(x, y, z) = \iiint_V \frac{\mu(a, b, c) \, da db dc}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{\frac{1}{2}}},$$

iar forța de atracție newtoniană $\bar{F}$ este dată de

$$\bar{F}(x, y, z) = \gamma \operatorname{grad} U = \gamma \iiint_V \mu(a, b, c) \frac{\bar{r}}{r^3} da db dc \quad (\gamma = \text{const.}).$$

Exemplu

Să se calculeze forța de atracție exercitată de un con circular drept de înălțime h, avînd unghiul la vîrf α, asupra vîrfului său. Luăm conul cu vîrful în origine și avînd axa Oz (fig. 110),

$$\bar{F} = \bar{i}F_1 + \bar{j}F_2 + \bar{k}F_3 = \gamma' \iiint_V \frac{\bar{r} \, dxdydz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (\gamma' = \mu\gamma = \text{const.}).$$

Din motive de simetrie $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, deci

$$F_3 = \gamma' \iiint_V \frac{z\, dxdydz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ecuația conului este $x^2 + y^2 = \mathrm{tg}^2 \dfrac{\alpha}{2}\, z^2$. În coordonate polare avem $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, $z = u$, $0 \leqslant \rho \leqslant h\, \mathrm{tg} \dfrac{\alpha}{2}$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, $\dfrac{\rho}{\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}} \leqslant u \leqslant h$, $dxdydz = \rho\, d\rho\, d\theta du$, deci

$$F_3 = \gamma' \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{h\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}} \rho d\rho \int_{\rho\,\mathrm{cotg}\frac{\alpha}{2}}^{h} \frac{u\, du}{(\rho^2 + u^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$F_3 = \gamma' \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{h\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}} \left[- \frac{1}{(\rho^2 + u^2)^{\frac{1}{2}}} \right]_{\rho\,\mathrm{cotg}\frac{\alpha}{2}}^{h} \rho\, d\rho = 2\pi\gamma' \int_0^{h\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}} \left[\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\rho} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + h^2}} \right] \rho d\rho.$$

$F_3 = 2\pi\gamma' \left[h \sin \dfrac{\alpha}{2}\, \mathrm{tg}\, \dfrac{\alpha}{2} - h \sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 \dfrac{\alpha}{2}} + h \right] = 4\pi\gamma' h \sin^2 \dfrac{\alpha}{4}$, prin urmare $\overline{F} = \overline{k} F_3 = \overline{k} 4\pi\gamma' h \sin^2 \dfrac{\alpha}{4}$.

ECUAŢII DIFERENŢIALE

Capitolul I

ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDINUL ÎNTÎI

§ 1. GENERALITĂȚI

1. Ecuații diferențiale. Soluția generală. Soluții particulare

$y:[a,b]\rightarrow R$

D e f i n i ț i i. 1. Fie $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ o funcție reală definită pe $[a, b]\times Y$, $Y\subset R^{n+1}$, avînd argumente variabila reală $x\in[a, b]$ și funcția reală y împreună cu derivatele ei y', y'', …, $y^{(n)}$. Relația

$$F(x,\ y,\ y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

se numește ecuație diferențială de ordinul n, dacă se cere să se determine funcțiile $y = f(x)$, definite pe intervalul $[a, b]$, avînd derivate pînă la ordinul n inclusiv, în orice punct al intervalului $[a, b]$ astfel încît să avem

$$F(x,\ f(x),\ f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)) = 0$$

pentru orice $x\in[a,\ b]$.

2. Funcțiile reale $f(x)$ care îndeplinesc condițiile de mai sus se numesc soluții ale ecuației diferențiale (1).

Observație

Dacă $n = 1$, obținem *ecuațiile diferențiale de ordinul întîi* care sînt, conform definiției, relații de forma

$$F(x, y, y') = 0, \quad \text{(forma implicită)}$$

sau de forma

$$y' = f(x, y), \qquad \text{(forma explicită)}.$$

Exemple

1) $y' = y - x$ este o ecuație diferențială de ordinul întîi. Funcția $y = e^x + x + 1$, $x \in R$, este o soluție a ecuației. Funcția $y = Ce^x + x + 1$, $x \in R$, unde C este o constantă arbitrară este o familie de soluții ale ecuației date.

2) $y = xy' + e^{y'}$ este tot o ecuație diferențială de ordinul întîi însă sub forma implicită. Funcția $y = 2x + e^2$, $x \in R$, este o soluție a ecuației. Funcția $y = Cx + e^C$, $x \in R$, unde C este o constantă arbitrară este o familie de soluții ale ecuației date.

3) $y'' + y = x$ este o ecuație diferențială de ordinul doi. Funcția $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + x$, $x \in R$, C_1, C_2 două constante arbitrare, este o familie de soluții ale ecuației date.

În acest capitol ne vom ocupa numai de ecuații diferențiale de ordinul întîi.

Din exemplele prezentate mai sus se vede că ecuațiile diferențiale admit familii de soluții care depind de constante arbitrare. Vom demonstra la sfîrșitul acestui capitol că soluția generală a unei ecuații diferențiale de ordinul întîi depinde de o constantă arbitrară.

În cele ce urmează vom spune că funcția $\varphi(x, C)$ este *soluția generală* a ecuației diferențiale de ordinul întîi

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

studiată într-un domeniu $D \ni (x, y)$ dacă φ este soluție a ecuației (1) în D și dacă prin alegerea convenabilă a constantei C, funcția $\varphi(x, C)$ se transformă în orice soluție a ecuației (1) al cărei grafic se află în D.

Observații

1) Soluția generală a unei ecuații diferențiale se mai numește și *integrala generală* a ecuației considerate.

2) Soluția generală a unei ecuații diferențiale poate fi dată și implicit printr-o relație de forma

$$R(x, y, C) = 0;$$

de obicei, unei relații de această formă i se dă numirea de *integrală generală*, pentru a se distinge de $\varphi(x, C)$ care este numită *soluția generală*.

3) Soluția generală a unei ecuații diferențiale poate fi dată și parametric, printr-un sistem

$$x = \varphi(t, C), \; y = \psi(t, C).$$

Se numește soluție particulară a ecuației

$$F(x, y, y') = 0$$

o funcție $y = \varphi_1(x)$, $x \in [a, b]$ care se obține din soluția generală $y = \varphi(x, C)$ dînd o valoare particulară constantei arbitrare C.

Exemple

1) Ecuația $y = xy' + e^{y'}$ are ca soluție generală $y = xC + e^C$, $x \in R$. Funcția $y = x + e$, $x \in R$ este o soluție particulară ce se obține dînd constantei C valoarea 1.

2) Ecuația $y' - y + x = 0$ are ca soluție generală $y = Ce^x + x + 1$, $x \in R$. Funcția $y = 2e^x + x + 1$ este o soluție particulară ce se obține din soluția generală dînd constantei valoarea 2.

Observații

1) O soluție a unei ecuații diferențiale $F(x, y, y') = 0$ care nu conține o constantă arbitrară nu este în mod necesar o soluție particulară.

Exemplu

Ecuația $y'^2 + xy' - y = 0$ are soluția generală funcția $y = Cx + C^2$, $x \in R$. Soluțiile particulare sînt drepte; avem pentru $C = 1$, $y_1 = x + 1$, pentru $C = 2$, $y_2 = 2x + 4$ etc. Ecuația dată admite și soluția $y = -\dfrac{1}{4}x^2$, $x \in R$, după cum se verifică imediat. Această soluție nu este o soluție particulară, deoarece nu se obține din soluția generală dînd o valoare particulară constantei arbitrare C; spunem că este o *soluție singulară* a ecuației date. Asupra acestei noțiuni vom reveni mai tîrziu.

2) Graficul unei soluții a unei ecuații diferențiale este o curbă plană, numită *curbă integrală*.

2. Interpretarea geometrică a unei ecuații diferențiale de ordinul întîi

Să considerăm o ecuație diferențială sub forma explicită

$$y' = f(x, y),$$

funcția f fiind definită într-un domeniu D din planul xOy.

Fiecărui punct $(x_0, y_0) \in D$ îi corespunde o direcție de coeficient unghiular $y_0' = f(x_0, y_0)$; fiecărei direcții îi corespunde o dreaptă $y - y_0 = y_0'(x - x_0)$ ce trece prin punctul (x_0, y_0); prin urmare ecuația $y' = f(x, y)$ asociază fiecărui punct din D o direcție (o dreaptă); avem astfel în D definit un cîmp de direcții Φ, (fig. 111).

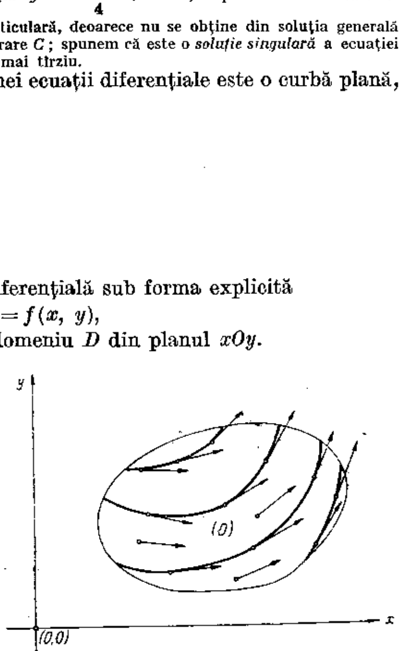

Fig. 111

Să presupunem acum că $y = \varphi(x)$, $(x, y) \in D$ este o soluție a ecuației (1); graficul soluției este o curbă integrală în D, care are proprietatea că în fiecare punct al curbei, tangenta la curbă are ca direcție, direcția cîmpului Φ ce trece prin punctul considerat.

Problema integrării ecuației diferențiale $y' = f(x, y)$ în D se reduce așadar la găsirea curbelor integrale în D, curbe care au proprietatea că în fiecare punct al lor sînt tangente la direcția cîmpului Φ.

Exemplu

Ecuația $y' = 1$, $x \in R$ definește un cîmp de direcții paralele cu prima bisectoare a axelor.

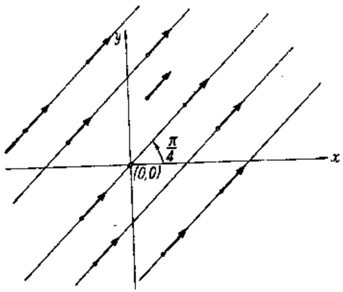

Fig. 112

Curbele integrale sînt drepte paralele cu prima bisectoare a axelor. Ecuația tuturor acestor drepte (fig. 112) este $y = x + C$, $x \in R$, C constantă arbitrară. Funcția $y = x + C$, $x \in R$ este soluția generală a ecuației $y' = 1$.

O dreaptă paralelă cu prima bisectoare a axelor este o soluție particulară a ecuației $y' = 1$.

3. Exemple de ecuații diferențiale de ordinul întîi ce apar în probleme practice

I. Ecuația fundamentală a dinamicii punctului material se scrie vectorial astfel

$$m \cdot \overline{\gamma} = \overline{F}, \tag{1}$$

$\overline{\gamma}$ fiind accelerația punctului de masă m, iar $\overline{F}$ rezultanta forțelor care lucrează asupra punctului considerat. Să luăm cazul cînd punctul material descrie o dreaptă, pe care o luăm ca axa Ox. Ecuația de mișcare (1) se scrie în această situație

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right), \tag{1'}$$

componenta X a forței $\overline{F}$, după Ox, depinzînd, în general, de poziția mobilului, de viteza lui și de timp. Aceasta este o ecuație diferențială de ordinul al doilea. Dacă X nu depinde de poziția punctului x, atunci ecuația (1) se scrie

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X\left(\frac{dx}{dt}, t\right)$$

și cu substituția $v = \frac{dx}{dt}$, ecuația se transformă în

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{m} X(v, t),$$

adică o ecuație diferențială de ordinul întîi. De aici mai rezultă că, reciproc, orice ecuație diferențială de ordinul întîi reprezintă o anumită mișcare a unui punct material.

II. Viteza de dezintegrare a radiului conținut într-un recipient este proporțională cu cantitatea de radiu din recipientul respectiv. Această lege ne permite să stabilim în orice timp $t > t_0$ cantitatea de radiu din recipient, dacă la timpul t_0 știm că a fost cantitatea λ_0. Dacă $\lambda(t)$ este cantitatea de radiu la timpul t, viteza de dezintegrare va fi dată de $-\frac{d\lambda}{dt}$, deci $\lambda(t)$ verifică ecuația diferențială de ordinul întîi

$$-\frac{d\lambda}{dt} = a\lambda(t),$$

a fiind factorul de proporționalitate. Soluția $\lambda(t)$ a acestei ecuații care pentru $t = t_0$ ia valoarea λ_0 este

$$\lambda(t) = \lambda_0 e^{-a(t-t_0)},$$

după cum se poate verifica imediat.

III. Să considerăm un circuit format dintr-un rezistor de rezistență R și o bobină de inductanță L, alimentate în serie de o tensiune electromotoare $e = E\cos\omega t$. Se cere să se studieze variația curentului în circuit la închiderea întrerupătorului K (fig. 113).

Conform teoremei lui Kirchoff avem

$$e = e_R + e_L$$

însă

$$e_R = Ri, \; e_L = L\frac{di}{dt},$$

deci relația căutată este

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E\cos\omega t$$

care este o ecuație diferențială de ordinul întîi.

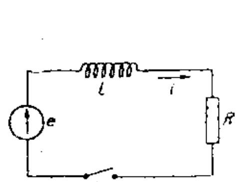

Fig. 113

IV. Să se găsească ecuația diferențială a curbelor plane care au curbura constantă și egală cu a.

Raza de curbură a unei curbe plane $y = y(x)$ este dată de

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

Punînd condiția ca $\frac{1}{R} = a$, obținem ecuația diferențială

$$y'' = a\ (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}};$$

cu substituția $y' = u$ obținem ecuația diferențială de ordinul întîi

$$u' = a\ (1 + u^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Aceste exemple arată importanța deosebită a ecuațiilor diferențiale în aplicațiile practice. Studiul fenomenelor naturii duce aproape totdeauna la ecuații diferențiale, la ecuații cu derivate parțiale, sau la sisteme de ecuații diferențiale. O parte din această vastă clasă de probleme o vom aborda în această ultimă parte a manualului.

4. Condiții inițiale. Problema lui Cauchy

a) Să considerăm ecuația diferențială

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

cu f continuă într-un domeniu plan D.

Vom da la sfîrșitul acestui capitol o *teoremă de existență și unicitate* care arată că există o soluție unică a ecuației (1), al cărei grafic trece printr-un punct $(x_0, y_0) \in D$. Problema determinării soluției ecuației (1) $y = \varphi(x)$, care pentru $x = x_0$ ia valoarea $y = y_0$ (al cărei grafic trece prin punctul (x_0, y_0)), se numește *problema lui Cauchy*, iar condiția ca pentru $x = x_0$ să ia valoarea $\varphi(x_0) = y_0$, dată, se numește *condiție inițială.*

Aplicație

Cea mai simplă ecuație diferențială este

$$y' = f(x),\ f \text{ continuă pe } [a, b]$$

de care ne-am ocupat în prima parte a acestui volum. Soluția generală este dată de

$$y = \int_{x_0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x + C \tag{2}$$

unde x_0 este un punct oarecare însă fix din $[a, b]$, iar C o constantă arbitrară. Dacă căutăm soluția care pentru $x = x_0$ să ia valoarea y_0, avem

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x)\ \mathrm{d}x. \tag{3}$$

Într-adevăr, pentru $x = x_0$, din (2) obținem

$$y_0 = C + \int_{x_0}^{x_0} f(x)\,dx = C,$$

deci $C = y_0$. Formula (3) ne arată că pentru orice punct $(x_0, y_0) \in [a, b] \times \times (-\infty, +\infty)$ există o soluție unică a ecuației date care satisface condiția inițială $y(x_0) = y_0$, sau, altfel spus, prin orice punct din intervalul $[a, b] \times (-\infty, +\infty) \subset R^2$ trece o curbă integrală a ecuației date și numai una.

Exemplu

Să se găsească soluția ecuației diferențiale $y' = x^2$ care trece prin punctul (1,1). Avem

$$y(x) = 1 + \int_1^x x^2 dx = 1 + \frac{1}{3} x^3 \Big|_1^x = \frac{2}{3} + \frac{x^3}{3},$$

deci soluția căutată este $y = \frac{2}{3} + \frac{x^3}{3}$, $x \in R$.

b) Să considerăm din nou ecuația diferențială

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

cu funcția $f(x, y)$ continuă într-un domeniu plan D. Conform celor spuse mai sus, prin fiecare punct M_0 al domeniului D trece o singură curbă integrală și numai una a ecuației date. ***Mulțimea soluțiilor obținute în acest fel se mai numește și soluția generală a ecuației** (1) **în domeniul** D.* Această definiție este mai restrictivă decît aceea dată la primul alineat și se obține din prima punînd anumite condiții funcției $\varphi(x, C)$.

c) Mulțimea soluțiilor unei ecuații diferențiale de ordinul întîi depinde de o constantă arbitrară, fapt ce îl vom demonstra la sfîrșitul acestui capitol. Putem arăta imediat însă că, invers, orice familie de curbe plane

$$\varphi(x, y, C) = 0, \qquad (x, y) \in D, \tag{2}$$

cu φ continuă și derivabilă parțial în D, verifică în D o ecuație diferențială de ordinul întîi. Avem, derivînd în raport cu x,

$$\varphi'_x + y' \varphi'_y = 0;$$

dacă eliminăm pe C între aceste două relații obținem

$$\Phi(x, y, y') = 0,$$

adică o ecuație diferențială de ordinul întîi. Această eliminare se face imediat dacă scriem ecuația (2) sub forma

$$g(x, y) = C, \tag{2'}$$

adică o rezolvăm în prealabil în raport cu C. Dacă derivăm pe (2′), constanta C se elimină și avem

$$g'_x + y' g'_y = 0 \tag{3}$$

care este ecuația diferențială verificată de familia (2'). Ecuația (2) se mai scrie sub forma simetrică

$$g'_x \, dx + g'_y \, dy = 0$$

care are avantajul că nu specifică dacă x sau y este variabila independentă.

Exemple

1) Să se găsească ecuația diferențială a familiei de curbe $y = Cx + f(C)$. Dacă derivăm în raport cu x avem $y' = C$; eliminînd pe C obținem ecuația diferențială de ordinul întîi

$$y = xy' + f(y').$$

2) Să se găsească ecuația diferențială a familiei de drepte ce trec prin origine. Ecuația tuturor dreptelor care trec prin origine este $y = Cx$, unde C este o constantă arbitrară. Dacă derivăm în raport cu x obținem $y' = C$, deci $xy' = y$ este ecuația diferențială căutată.

§ 2. ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDINUL ÎNTÎI REZOLVATE ÎN RAPORT CU y', INTEGRABILE PRIN METODE ELEMENTARE

1. Ecuații diferențiale care provin din anularea unei diferențiale totale exacte

Să considerăm ecuația diferențială de ordinul întîi sub forma simetrică

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0, \tag{1}$$

P și Q fiind două funcții continue pe un domeniu $D \subset R^2$.

Să observăm mai întîi că orice ecuație $y' = f(x, y)$ se poate pune sub această formă. Într-adevăr putem scrie

$$f(x, y) = -\frac{-f(x, y)\, Q(x, y)}{Q(x, y)}, \quad Q(x, y) \neq 0 \text{ în } D,$$

și dacă notăm $P(x, y) \equiv -f(x, y)\, Q(x, y)$, obținem

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

sau $P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0$. Invers, ecuația (1) se pune sub forma $y' = f(x, y)$, dacă $Q(x, y) \neq 0$ în D.

Să presupunem acum că funcțiile P și Q verifică identic în D relația

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{2}$$

În această situație, expresia diferențială

$$P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}x$$

este o diferențială totală, deci funcțiile $P(x, y)$ și $Q(x, y)$ sînt derivatele parțiale ale unei funcții $g(x, y)$

$$\mathrm{d}g = P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y$$

conform unui rezultat demonstrat anterior [vol. I, B, cap. VI, § 5, al. 4].

Teoremă. Fie ecuația diferențială

$$P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = 0, \tag{1}$$

unde $P(x, y)$, $Q(x, y)$ sînt funcții cu derivatele parțiale continue în domeniul $D \subset R^2$ care verifică pentru orice $(x, y) \in D$ relația

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{2}$$

Integrala generală a ecuației (1) este dată de

$$\int_{x_0}^{x} P(t, y_0)\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} Q(x, t)\,\mathrm{d}t = C,\ (x_0, y_0) \in D. \tag{3}$$

Demonstrație. Într-adevăr, deoarece P și Q îndeplinesc condiția (2) în D, ele sînt derivatele parțiale ale unei funcții $g(x, y)$

$$g(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} Q(x, t)\,\mathrm{d}t,$$

după cum am arătat la A, cap. III, § 1, al. 5. O dată determinat $g(x, y)$, integrala generală a ecuației (1) este dată de $g(x, y) = C$, adică de

$$\int_{x_0}^{x} P(t, y_0)\,\mathrm{d}t +$$

$$+ \int_{y_0}^{y} Q(x, t)\,\mathrm{d}t = C,$$

punctul $(x_0, y_0) \in D$ fiind ales astfel încît drumul de integrare ABM să fie în întregime în D, (fig. 114).

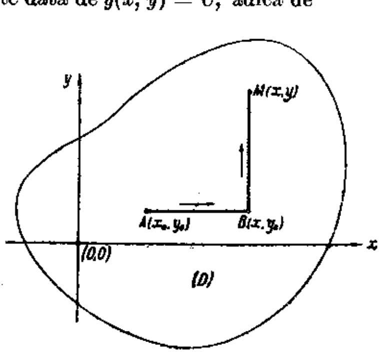

Fig. 114

Observație

Integrala generală (3) se obține prin două operații de integrare, operații care se mai numesc și *cuadraturi*.

Exemple

1) Să se integreze ecuația

$$(y^2 - x^2)\,dx + 2xy\,dy = 0, \quad (x, y) \in R^2.$$

Avem $P(x, y) = y^2 - x^2$, $Q(x, y) = 2xy$ și

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y\,, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y\,; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\,, \quad (x, y) \in R^2.$$

Aplicăm formula (3) cu $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, pentru a avea calcule mai simple. Integrala generală este dată de

$$-\int_0^x t^2 dt + \int_0^y 2xt\,dt = C$$

sau

$$xy^2 - \frac{x^3}{3} = C, \quad (x, y) \in R.$$

2) Să se integreze ecuația

$$\frac{y}{x+y}\,dx + \left(\frac{y}{x+y} + \ln(x+y)\right) dy = 0, \quad x + y > 0.$$

$$P(x, y) = \frac{y}{x+y}, \quad Q(x, y) = \frac{y}{x+y} + \ln(x+y),$$

Avem

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x+y} - \frac{y}{(x+y)^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{y}{(x+y)^2} + \frac{1}{x+y},$$

deci $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Integrala generală pentru $x + y > 0$ este dată de

$$\int_{x_0}^x \frac{y_0}{x+y_0}\,dx + \int_{y_0}^y \left(\frac{y}{x+y} + \ln(x+y)\right) dy = C,$$

deci

$$y_0 \ln(x+y_0)\Big|_{x_0}^{x} + y\ln(x+y)\Big|_{y_0}^{y} = C$$

sau $y \ln(x+y) = C, \quad x + y > 0.$

Să se determine curba integrală care trece prin punctul (1,1). Avem $\ln(1+1) = C$, deci $C = \ln 2$ și

$$y\ln(x+y) = \ln 2$$

este integrala particulară care trece prin punctul (1,1).

2. Ecuații cu variabile separate

Fie ecuația diferențială

$$P(x)\,dx + Q(y)\,dy = 0$$

unde $P(x)$ este continuă pe $[a, b]$ și $Q(y)$ este continuă pe $[c, d]$. Funcțiile P și Q îndeplinesc condiția $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ pentru orice $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$. O astfel de ecuație se numește „cu variabile separate" și integrala generală conform lui (3) este dată de

$$\int_{x_0}^{x} P(t)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(t)\,dt = C$$

cu (x_0, y_0) și $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$.

Exemple

1) Să se integreze ecuația

$$y' = \frac{y^2 + 1}{x^2 + 1}.$$

Funcția $\frac{y^2+1}{x^2+1}$ este definită pentru orice $(x, y) \in R^2$. Variabilele se pot separa

$$\frac{dy}{y^2 + 1} = \frac{dx}{x^2 + 1},$$

deci integrala generală este

$$\text{arc tg}\, y - \text{arc tg}\, x = C.$$

O integrală particulară care trece prin punctul (x_0, y_0) este dată de

$$\text{arc tg}\, y - \text{arc tg}\, y_0 = \text{arc tg}\, x - \text{arc tg}\, x_0.$$

2) Să se integreze ecuația

$$y' = \frac{y + 1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad (x, y) \in (-1, +1) \times (-1, +\infty).$$

În acest interval avem

$$\frac{dy}{y + 1} = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

sau $\ln(y + 1) = \text{arc sin}\, x + C$.

Observație

Ecuația are și soluția $y = -1$; se obține din integrala generală pentru $C \to -\infty$.

3. Factor integrant

Fie ecuația diferențială

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0, \tag{1}$$

cu $P(x, y)$, $Q(x, y)$ continue cu derivate parţiale de ordinul întîi continue într-un domeniu $D \subset R^2$. Dacă $P\,dx + Q\,dy$ nu este o diferenţială totală în D, ne propunem să căutăm o funcţie $\mu(x, y)$ astfel încît expresia

$$\mu(x, y)\,[P\,dx + Q\,dy]$$

să fie o diferenţială totală în D. Trebuie să avem

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu Q) = \frac{\partial}{\partial y}(\mu P)$$

sau

$$\mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) + Q\,\frac{\partial \mu}{\partial x} - P\,\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0. \tag{2}$$

D e f i n i ț i e. **Funcţia $\mu(x, y)$, definită în D şi cu derivate parţiale de ordinul întîi continue în D, care verifică ecuaţia (2), se numeşte f a c t o r i n t e g r a n t** al ecuaţiei (1).

Dacă înmulţim ecuaţia (1) cu $\mu(x, y)$, ecuaţia (1) se transformă într-o diferenţială totală. Relaţia (2) este o ecuaţie cu derivate parţiale; după cum vom vedea mai tîrziu la studiul ecuaţiilor cu derivate parţiale, integrarea ecuaţiei (2) revine la integrarea ecuaţiei (1) astfel încît *în general* nu am progresat cu nimic în rezolvarea problemei. Să observăm însă că nu avem nevoie decît de o soluţie particulară a ecuaţiei (2) şi că în anumite cazuri determinarea unei astfel de soluţii este posibilă.

De exemplu, dacă căutăm un factor integrant $\mu(x)$, funcţie numai de x, ecuaţia (2) se scrie în acest caz, deoarece $\dfrac{\partial \mu}{\partial y} = 0$,

$$\frac{1}{\mu}\cdot\frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \tag{3}$$

şi determinarea lui μ este posibilă dacă $\dfrac{1}{Q}\left(\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)$ este funcţie numai de x. Într-adevăr în (3) variabilele se separă şi obţinem pe μ printr-o cuadratură

$$\ln \mu = \int \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx.$$

În mod asemănător, dacă căutăm un factor integrant $\mu(y)$ funcţie numai de y, avem din (2)

$$\frac{1}{\mu}\,\frac{d\mu}{dy} = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

şi determinarea lui μ este posibilă, dacă $\dfrac{1}{P}\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)$ este funcţie numai de y. Dacă această condiţie este îndeplinită obţinem pe μ printr-o cuadratură

$$\ln \mu = \int \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dy.$$

Exemple

1) Să se integreze ecuația diferențială

$$(xy^2 - y^3)\,\mathrm{d}x + (1 - xy^2)\,\mathrm{d}y = 0,$$

știind că admite un factor integrant funcție numai de y.

Trebuie să avem

$$\frac{\partial}{\partial x}[\mu(1 - xy^2)] = \frac{\partial}{\partial y}[\mu(xy^2 - y^3)], \text{ cu } \frac{\partial\mu}{\partial x} = 0,$$

deci

$$-y^2\mu = \mu(2xy - 3y^2) + \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}y}(xy^2 - y^3)$$

sau

$$\frac{1}{\mu}\,\mathrm{d}\mu = -2\,\frac{\mathrm{d}y}{y}$$

cu o soluție

$$\mu(y) = \frac{1}{y^2}.$$

Ecuația dată înmulțită cu $\frac{1}{y^2}$ devine

$$(x - y)\,\mathrm{d}x + \left(\frac{1}{y^2} - x\right)\mathrm{d}y = 0,$$

care este o diferențială totală. Integrala generală este dată de

$$\int_{x_0}^{x}(x - y_0)\,\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y}\left(\frac{1}{y^2} - x\right)\mathrm{d}y = C$$

sau

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{y} - xy = C \tag{1}$$

într-un domeniu $D \subset R^2$ care nu întîlnește dreapta $y = 0$.

Observație

$y = 0$ este o soluție a ecuației și se obține pentru $C \to \infty$.

2) Să se integreze ecuația diferențială $(x^2 + y^2 + 2x)\,\mathrm{d}x + 2y\mathrm{d}y = 0$, știind că admite un factor integrant funcție numai de x. Avem

$$\frac{\partial}{\partial x}(2y\,\mu) = \frac{\partial}{\partial y}[(x^2 + y^2 + 2x)\,\mu], \quad \text{cu } \frac{\partial\mu}{\partial y} = 0,$$

deci

$$2y\,\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x} = 2y\,\mu \quad \text{sau} \quad \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x} = \mu$$

care are o soluție $\mu(x) = e^x$.

Înmulțind ecuația dată cu e^x, devine o diferențială totală,

$$e^x(x^2 + y^2 + 2x)\,\mathrm{d}x + 2ye^x\,\mathrm{d}y = 0, \qquad (x, y) \in R^2,$$

a cărei integrală generală este

$$\int_0^x (x^2 + 2x)\,e^x\,\mathrm{d}x + e^x \int_0^y 2y\,\mathrm{d}y = C$$

sau

$$(x^2 + y^2)\,e^x = C.$$

Să găsim integrala particulară care trece prin punctul (0,1). Această condiție ne dă $C = 1$, deci soluția căutată este $(x^2 + y^2)\,e^x = 1$.

4. Ecuații omogene

D e f i n i ț i e. Ecuațiile diferențiale de forma

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

unde $P(x, y)$ și $Q(x, y)$ sînt funcții omogene în x și y de același grad m, se numesc ecuații diferențiale omogene.

Avem

$$P(x, y) = x^m\,P\left(1, \frac{y}{x}\right), \quad Q(x, y) = x^m\,Q\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

deci

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{P\left(1, \frac{y}{x}\right)}{Q\left(1, \frac{y}{x}\right)} = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

prin urmare ecuațiile omogene au și forma următoare

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{1}$$

T e o r e m ă. Dacă într-o ecuație omogenă facem schimbarea de funcție $y = zx$, ecuația se transformă într-o ecuație cu variabile separate.

Demonstrație. Dacă punem $y = zx$, obținem

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + z$$

și ecuația (1) se transformă în

$$x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + z = f(z) \tag{2}$$

sau

$$\frac{dz}{f(z)-z}=\frac{dx}{x} \tag{2'}$$

care este o ecuație cu variabile separate. Presupunem pe $f\left(\frac{y}{x}\right)$ continuă și $f\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}\neq 0$ într-un domeniu D. Integrînd în (2') obținem integrala generală a ecuației (2)

$$\ln|x|+C=\int\frac{dz}{f(z)-z}=\Phi(z),$$

deci integrala generală a ecuației (1) este

$$\ln|x|+C=\Phi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{3}$$

Observații

1) Dacă z_0 este o rădăcină a ecuației $f(z)-z=0$, atunci $z=z_0$(constant) este de asemenea o soluție a ecuației (2) cum se verifică imediat, deoarece $\frac{dz}{dx}=0$. Rezultă de aici că dreapta $y=z_0x$ este soluție a ecuației (1), anume o *soluție singulară.*

2) Dacă în (3) înlocuim pe C cu $-\ln C$, atunci integrala generală (3) se scrie

$$x=Ce^{\Phi\left(\frac{y}{x}\right)}=C\,\Psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Reciproc, o familie de curbe $x=C\Psi\left(\frac{y}{x}\right)$ verifică o ecuație omogenă. Într-adevăr, avem de asemenea

$$1=C\Psi'\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{y'}{x}-\frac{y}{x^2}\right)$$

și dacă eliminăm pe C obținem

$$x\left(\frac{y'}{x}-\frac{y}{x^2}\right)=\frac{\Psi\left(\frac{y}{x}\right)}{\Psi'\left(\frac{y}{x}\right)}$$

adică

$$y'=\frac{\Psi\left(\frac{y}{x}\right)}{\Psi'\left(\frac{y}{x}\right)}+\frac{y}{x}=f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Exemple

1) Să se găsească integrala ecuaţiei

$$3xyy' = x^2 + y^2$$

care trece prin punctul (1,1). Ecuaţia dată este omogenă; facem schimbarea de funcţie $y = zx$, $y' = xz' + z$; ecuaţia se transformă în

$$3z\ (xz' + z) = 1 + z^2$$

unde se separă variabilele

$$\frac{3z\ dz}{1 - 2z^2} = \frac{dx}{x};$$

integrala generală este dată de

$$-\frac{3}{4}\ln|1 - 2z^2| = \ln|x| + C$$

sau, revenind la variabilele iniţiale

$$-\frac{3}{4}\ln\left|1 - 2\frac{y^2}{x^2}\right| = \ln|x| + C$$

pentru (1,1), $C = 0$, deci integrala particulară căutată este

$$3\ln|x^2 - 2y^2| - 2\ln|x| = 0.$$

2) Să se arate că ecuaţia $y^n\ y' = f\left(\frac{y^{n+1}}{x}\right)$ se poate integra prin cuadraturi. Facem schimbarea de funcţie $y^{n+1} = zx$, deci $(n + 1)\ y^n\ y' = z'x + z$ şi ecuaţia se transformă în

$$z'x + z = (n + 1)f(z)$$

care este o ecuaţie cu variabile separate.

5. Ecuaţii reductibile la ecuaţii omogene

Să considerăm o ecuaţie de forma

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right), \tag{1}$$

unde a, b, c, a', b', c' sînt constante.

a) Să presupunem că $c, c' = 0$, $(c^2 + c'^2 = 0)$; în aest caz ecuaţia (1) se scrie

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by}{a'x + b'y}\right)$$

care este o ecuaţie omogenă. Cu substituţia $y = zx$ se separă variabilele.

Exemplu

Să se integreze ecuația $\frac{dy}{dx} = \frac{y - 2x}{2y - x}$, $2y - x \neq 0$.
Facem schimbarea de funcție $y = zx$, $y' = z'x + z$, deci

$$z'x + z = \frac{z - 2}{2z - 1}, \quad \text{sau } z'x = \frac{-2z^2 + 2z - 2}{2z - 1},$$

unde se separă variabilele

$$-\int \frac{2z - 1}{2z^2 - 2z + 2}\, dz = \int \frac{dx}{x},$$

deci

$$\ln |x| + \frac{1}{2} \ln |z^2 - z + 1| = \ln C.$$

Revenind la variabilele inițiale obținem integrala generală

$$y^2 - xy + x^2 = C$$

care reprezintă o familie de elipse cu centrul în originea axelor.

b) Dacă $c^2 + c'^2 \neq 0$ și $ab' - a'b \neq 0$, dreptele

$$(D): ax + by + c = 0, \ (D'): a'x + b'y + c' = 0$$

se intersectează în punctul (x_0, y_0). Făcînd schimbarea de variabilă și de funcție (o translație)

$$u = x - x_0, \quad v = y - y_0$$

avem, înlocuind în (1), $x = u + x_0$ $y = v + y_0$

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{au + bv}{a'u + b'v}\right).$$

Ecuația s-a redus la tipul precedent ($c^2 + c'^2 = 0$), deci cu schimbare de funcție $v = zu$ se separă variabilele.

Exemplu

Să se integreze ecuația $\frac{dy}{dx} = -\frac{2(x - 2y + 1)}{5x - y - 4}$, $5x - y - 4 \neq 0$. Dreptele $x - 2y + 1 = 0$, $5x - y - 4 = 0$ se intersectează în punctul (1,1). Efectuăm translația $x = u + 1$, $y = v + 1$ și ecuația se transformă în $\frac{dv}{du} = -\frac{2u - 4v}{5u - v}$. Facem schimbarea de funcție $v = zu$, $v' = z'u + z$, și se separă variabilele

$$\frac{dz}{du} u + z = -\frac{2 - 4z}{5 - z} \text{ sau } \frac{(5 - z)dz}{z^2 - z - 2} = \frac{du}{u},$$

însă

$$\frac{5 - z}{z^2 - z - 2} = \frac{-2}{z + 1} + \frac{1}{z - 2}$$

deci

$$\ln|u| + \ln C = \int \frac{5-z}{z^2-z-2}\,\mathrm{d}z = -2\ln|z+1| + \ln|z-2|$$

sau

$$C\,|u| = \frac{|z-2|}{(z+1)^2};$$

dacă revenim la variabilele inițiale, $u = x - 1$, $z = \dfrac{y-1}{x-1}$, obținem integrala generală a ecuației date

$$y - 2x + 1 = C(y + x - 2)^2.$$

Să găsim integrala care trece prin punctul (1,2). Punînd această condiție în integrala generală avem $2 - 2 + 1 = C(2 + 1 - 2)^2$, deci $C = 1$; soluția căutată este parabola $(y + x - 2)^2 = y - 2x + 1$.

c) $c^2 + c'^2 \neq 0$, $ab' - ba' = 0$. În acest caz, dreptele

$$(D): ax + by + c = 0,\ (D'): a'x + b'y + c' = 0$$

sînt paralele. Din $ab' - ba' = 0$ rezultă $\dfrac{a'}{a} = \dfrac{b'}{b} = k$, deci

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{ax + by + c}{k(ax + by) + c'}\right); \tag{1}$$

dacă facem schimbarea de funcție $ax + by = z$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{b}\left(\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - a\right)$, ecuația se transformă în

$$\frac{1}{b}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - a\right) = f\left(\frac{z + c}{kz + c'}\right)$$

și se separă variabilele

$$\frac{\mathrm{d}z}{bf\left(\dfrac{z+c}{kz+c'}\right) + a} = \mathrm{d}x, \text{ dacă } bf\left(\frac{z+c}{kz+c'}\right) + a \neq 0.$$

Avem

$$x + C = \int \frac{\mathrm{d}z}{bf\left(\dfrac{z+c}{kz+c'}\right) + a} = \Phi(z).$$

Revenind la variabilele inițiale, integrala generală a ecuației (1) este

$$x + C = \Phi(ax + by).$$

Exemplu

Să se integreze ecuația $(x - 2y + 9)dx - (3x - 6y + 19)dy = 0$. Dreptele $x - 2y + 9 = 0$, $3x - 6y + 19 = 0$, sînt paralele; facem schimbarea de funcție $x - 2y = z$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{dz}{dx}$; avem

$$(z + 9) - (3z + 19)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{dz}{dx}\right) = 0$$

sau $\frac{3z + 19}{z + 1} dz = dx$, cu $z + 1 \neq 0$;

integrala generală este dată de

$$8 \ln |x - 2y + 1| + x - 3y = C;$$

$z + 1 = 0$ ne dă soluția $x - 2y + 1 = 0$, care verifică ecuația dată. Această soluție se obține din integrala generală pentru $C \to -\infty$.

6. Ecuații liniare de ordinul întîi

Definiție. O ecuație de forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\, y + Q(x) = 0, \tag{1}$$

unde P și Q sînt funcții continue pe un interval $[a, b]$, se numește ecuație diferențială liniară de ordinul întîi.

Ecuația

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\, y = 0$$

se numește ecuație liniară *omogenă* (cuvîntul omogen are aici alt sens decît cel dat anterior).

Teoremă. Soluția generală a ecuației liniare (1) este dată de

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\left[C - \int Q(x)\, e^{\int P(x)\,dx}\, dx\right], \quad x \in [a, b].$$

Demonstrație. Rezolvăm mai întîi ecuația liniară, omogenă

$$y' + P(x)\, y = 0, \quad x \in [a, b];$$

observăm că se separă variabilele; avem

$$\frac{dy}{y} = -P(x)\, dx, \quad \ln y = -\int P(x)\, dx + \ln C$$

sau

$$y = C\, e^{-\int P(x)\,dx}, \qquad x \in [a, b],$$

care este soluția generală a ecuației liniare și omogene.

Funcția $y_1 = e^{-\int P(x)\,dx}$ este o soluție particulară a ecuației omogene. Pentru a integra ecuația (1) să facem schimbarea de funcție

$$y = y_1 u, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} u + y_1 \frac{du}{dx}]$$

în ecuația (1); avem

$$\frac{dy_1}{dx} u + y_1 \frac{du}{dx} + P\, y_1 u + Q = 0$$

sau

$$u \underbrace{\left[\frac{dy_1}{dx} + P y_1\right]}_{0} + y_1 \frac{du}{dx} + Q = 0,$$

însă

$\frac{dy_1}{dx} + P y_1 \equiv 0$ pe $[a, b]$, deoarece y_1 este o soluție a ecuației omogene. Ne mai rămîne

$$y_1 \frac{du}{dx} + Q = 0,$$

de unde obținem imediat pe u, deoarece se separă variabilele

$$u(x) = C_1 - \int \frac{Q}{y_1} dx = C_1 - \int Q(x)\, e^{\int P(x)\,dx}\, dx,$$

deci

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\left[C_1 - \int Q(x)\; e^{\int P(x)\,dx}\, dx\right], \quad x \in [a, b],$$

care reprezintă soluția generală a ecuației liniare. Observăm că se obține prin două cuadraturi. Teorema este demonstrată.

Observații

1) Metoda folosită pentru integrarea ecuației liniare neomogene se numește metoda variației constantelor. Într-adevăr, în integrala generală a ecuației omogene $y = Cy_1$, C este o constantă arbitrară. Prin substituția $y = uy_1$, am considerat pe C funcție de x, $C = u(x)$ și l-am determinat pe u astfel încît $y = uy_1$ să verifice ecuația liniară.

2) Soluția generală a ecuației liniare neomogene se scrie

$$y = C_1\, e^{-\int P(x)\,dx} - e^{-\int P(x)\,dx}\int Q(x)\; e^{\int P(x)\,dx}\, dx$$

și este egală cu integrala generală a ecuației omogene plus o soluție particulară a ecuației neomogene (care se obține din soluția generală dacă luăm pe $C_1 = 0$).

3) Soluția generală a ecuației omogene este o funcție de forma

$$y = \varphi(x) + C\,\psi(x)\,, \tag{α}$$

adică o familie de curbe care depinde *liniar* de constanta arbitrară. Reciproc, orice familie de curbe care depinde liniar de o constantă arbitrară verifică o ecuație liniară de ordinul întîi.

Într-adevăr, $y' = \varphi'(x) + C\,\psi'(x)$ și dacă eliminăm pe C între această relație și relația (α) obținem

$$\frac{y-\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{y'-\varphi'(x)}{\psi'(x)}$$

care este o ecuație liniară de ordinul întîi.

4) Dacă cunoaștem o soluție particulară y_1 a ecuației liniare

$$y' + P(x)\,y + Q(x) = 0\,,$$

soluția generală se obține numai printr-o cuadratură. Într-adevăr, dacă facem schimbarea de funcție $y = z + y_1$, obținem

$$z' + y_1' + Pz + Py_1 + Q = 0\,,$$

însă

$$y_1' + Py_1' + Q \equiv 0\,, \quad \text{deci} \quad z' + P(x)\,z = 0\,,$$

care determină pe z printr-o cuadratură

$$\ln z = \int - P(x)\,\mathrm{d}x + \ln C\,,$$

deci

$$y = y_1 + C\,\mathrm{e}^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,,$$

care este soluția generală a ecuației liniare.

5) Fie $y = \varphi(x) + C\psi(x)$ soluția generală a unei ecuații liniare și y_1, y_2, y_3, trei soluții particulare corespunzînd la trei valori C_1, C_2, C_3, ale constantei arbitrare C

$$y_1 = \varphi(x) + C_1\psi(x), \quad y_2 = \varphi(x) + C_2\psi(x), \quad y_3 = \varphi(x) + C_3\psi(x);$$

eliminînd pe φ, ψ între ele, obținem relația

$$\frac{y_3 - y_2}{y_1 - y_2} = \frac{C_3 - C_2}{C_1 - C_2} = A \text{ (constant)}; \tag{1}$$

de aici rezultă că dacă se cunosc două soluții particulare y_1, y_2, soluția generală este dată de

$$y = y_2 + A\,(y_1 - y_2)\,, \quad (A = \text{constantă arbitrară}),$$

și se obține fără nici o cuadratură.

6) Fie Γ_1, Γ_2 două curbe integrale date pe $[a, b]$ și M_1, M_1', M_2, M_2' intersecțiile lor cu două paralele la axa Oy. Putem construi prin puncte

orice altă curbă integrală Γ, definită pe $[a, b]$, deoarece punctele M, M' de intersecție ale curbei Γ cu cele două drepte verifică relația

$$\frac{MM_2}{M_1 M_2} = \frac{M' M_2}{M_1' M_2},$$

relație care arată că dreptele $M_1 M_1'$, $M_2 M_2'$ și MM' sînt concurente. Luînd punctul M' fix, obținem curba integrală ce trece prin acest punct.

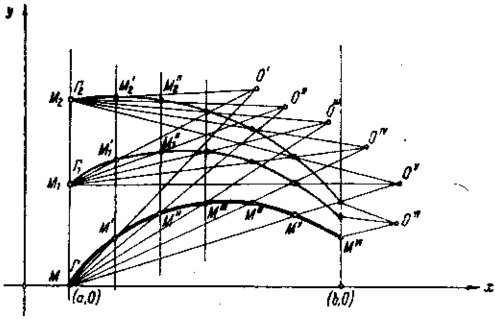

Fig. 115

În figura 115 am construit, prin procedeul de mai sus, curba integrală Γ, $x \in [a, b]$, ce trece prin punctul (a, O), soluțiile Γ_1 și Γ_2 fiind cunoscute pentru $x \in [a, b]$.

Exemple

1) Să se integreze ecuația

$$y' + 2xy = e^{-x^2}, \quad x \in R.$$

Integrăm ecuația omogenă $y' + 2xy = 0$; avem $\frac{dy}{y} = -2x\,dx$, $\ln y = -x^2 + \ln C$, deci $y = C e^{-x^2}$, unde C este o constantă arbitrară. Pentru integrarea ecuației neomogene folosim metoda variației constantelor

$$y = C(x)\, e^{-x^2},$$

$$\frac{dy}{dx} = \left[\frac{dC}{dx} - 2x\,C(x)\right] e^{-x^2}; \text{ înlocuim în ecuația dată}$$

$$\frac{dC}{dx} e^{-x^2} - 2x\, e^{-x^2} \cdot C + 2x\, e^{-x^2} C = e^{-x^2},$$

$$\frac{dC}{dx} = 1, \quad C(x) = x + C_1;$$

soluția generală căutată este $y = (x + C_1)\, e^{-x^2}$ $x \in R$.

2) Să se integreze ecuația liniară

$$xy' + y - x^2 \sin x = 0$$

pentru $x \in R - \{0\}$; avem

$$y' + \frac{1}{x} y - x \sin x = 0 .$$

Integrăm ecuația omogenă $y' + \frac{1}{x} y = 0$, $\ln|y| = -\ln|x| + \ln C$ sau $y = \frac{C}{x}$, $x \neq 0$. Pentru a integra ecuația neomogenă folosim metoda variației constantelor; avem $y = \frac{C(x)}{x}$ și $\frac{dy}{dx} = -\frac{C}{x^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{dC}{dx}$. Înlocuim în ecuația dată

$$-\frac{C}{x^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{dC}{dx} + \frac{C}{x^2} - x \sin x = 0$$

sau

$$C(x) = \int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C_1 ;$$

soluția generală este

$$y = \frac{1}{x} (2 \cos x + 2x \sin x - x^2 \cos x + C_1) , \quad x \in R - \{0\} .$$

7. Ecuații diferențiale de ordinul întîi reductibile la ecuații liniare

a) Ecuația Bernoulli

Definiție. O ecuație de forma

$$y' + P(x) y + Q(x) y^{\alpha} = 0 , \quad \alpha \text{ real} \neq 0, 1,$$

se numește o ecuație Bernoulli.

Teoremă. O ecuație Bernoulli

$$y' + P(x) y + Q(x) y^{\alpha} = 0 , \tag{1}$$

cu schimbarea de funcție $y^{1-\alpha} = z$, se transformă într-o ecuație liniară.

Demonstrație. Dacă împărțim cu y^{α} în (1) avem

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} + P(x) \frac{1}{y^{\alpha - 1}} + Q(x) = 0 .$$

Facem schimbarea de funcție $y^{1-\alpha} = z$; avem $(1 - \alpha) y^{-\alpha} y' = z'$; ecuația se transformă în

$$z' + (1 - \alpha) P(x) z + (1 - \alpha) Q(x) = 0 \tag{2}$$

care este o ecuație liniară. Teorema este demonstrată.

Soluția generală a ecuației (2) este

$$z = e^{-(1-\alpha)\int P(x)\,dx}\left[C - (1-\alpha)\int Q(x)\, e^{(1-\alpha)\int P(x)\,dx}\, dx\right];$$

soluția generală a ecuației (1) este dată de $y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

Exemplu

Să se integreze ecuația

$$\sqrt{x^3}\, y' - \sqrt{x} y + y^2 = 0; \quad x > 0.$$

Să se determine soluția particulară care trece prin punctul $A\,(1, 2)$.

Împărțim cu $\sqrt{x^3}$ ecuația dată

$$y' - \frac{1}{x}\, y + \frac{1}{\sqrt{x^3}}\, y^2 = 0.$$

Este o ecuație de tip Bernoulli. Facem substituția $\frac{1}{y} = z$, $-\frac{y'}{y^2} = z'$ și ecuația se transformă în ecuația liniară

$$z' + \frac{1}{x}\, z - \frac{1}{\sqrt{x^3}} = 0,$$

deci

$$z = e^{-\int \frac{1}{x}\,dx}\left(C + \int \frac{1}{\sqrt{x^3}}\, e^{\int \frac{1}{x}\,dx}\, dx\right) = \frac{1}{x}\left(C + \int \frac{dx}{\sqrt{x}}\right);$$

soluția generală a ecuației în z este

$$z = \frac{1}{x}\; C + 2\sqrt{x}),$$

deci soluția generală a ecuației date este $y = \dfrac{x}{C + 2\sqrt{x}}$, $x > 0$.

Pentru a determina soluția particulară cerută înlocuim coordonatele punctului $A\,(1, 2)$ în integrala generală și deteminăm astfel pe C

$$2 = \frac{1}{C + 2}, \; C = -\frac{3}{2};$$

soluția particulară este $y = \dfrac{2x}{-3 + 4\sqrt{x}}$, $x > \dfrac{9}{16}$.

b) Ecuația Riccati

Definiție. **O ecuație diferențială de forma**

$$y' + P(x)\, y^2 + Q(x)\, y + R(x) = 0$$

cu P, Q, R funcții continue pe un interval $[a, b]$ se numește o ecuație Riccati.

În general, ecuația Riccati nu poate fi integrată prin cuadraturi.

Avem însă următoarea

Teoremă. Dacă se cunoaște o soluție particulară y_1 a ecuației lui Riccati

$$y' + P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) = 0, \tag{1}$$

prin schimbarea de funcție $y = y_1 + \frac{1}{z}$ ecuația se transformă într-o ecuație liniară.

Demonstrație. Avem $y = y_1 + \frac{1}{z}$, $y' = y_1' - \frac{z'}{z^2}$ și ecuația se transformă în

$$y_1' - \frac{z'}{z^2} + P\left(y_1 + \frac{1}{z}\right)^2 + Q\left(y_1 + \frac{1}{z}\right) + R = 0$$

sau

$$(y_1' + Py_1^2 + Qy_1 + R) - \frac{1}{z^2}\left[z' - (2y_1 P + Q)z - P\right] = 0$$

și pentru că y_1 este o soluție a ecuației (1) ne mai rămîne

$$z' - (2y_1 P + Q)z - P = 0$$

care este o ecuație liniară în z. Teorema este demonstrată.

Exemplu

Să se integreze ecuația $xy' + y^2 - 4y + 3 = 0$ știind că are soluția $y_1 = 1$. Este o ecuație Riccati. Facem substituția

$$y = 1 + \frac{1}{z}, \quad y' = -\frac{z'}{z^2}$$

și ecuația se transformă în

$$-\frac{z'}{z^2}x + \left(1 + \frac{1}{z}\right)^2 - 4\left(1 + \frac{1}{z}\right) + 3 = 0$$

sau

$$\frac{dz}{dx} + \frac{2}{x}z - \frac{1}{x} = 0$$

cu soluția generală

$$z = e^{-\int \frac{2}{x}dx}\left(C + \int \frac{1}{x} e^{\int \frac{2}{x}dx} dx\right) = \frac{1}{x^2}\left(C + \frac{x^2}{2}\right).$$

Soluția generală a ecuației date este deci

$$y = 1 + \frac{2x^2}{2C + x^2}, \quad x \in R. \tag{1}$$

Să găsim soluția care trece prin punctul (1, 2); avem

$$2 = 1 + \frac{2}{2C + 1}, \quad C = \frac{1}{2};$$

soluția căutată este $y = 1 + \frac{2x^2}{1 + x^2}$, $x \in R$.

Observații

1) Integrala generală a unei ecuații Riccati este funcție omografică de constanta arbitrară. Într-adevăr, z fiind soluția unei ecuații liniare este de forma

$$z = \varphi(x) + C\psi(x),$$

deci

$$y = y_1 + \frac{1}{\varphi(x) + C\psi(x)} = \frac{y_1\varphi(x) + Cy_1\psi(x)}{\varphi(x) + C\psi(x)},$$

de unde rezultă că y este de forma

$$y = \frac{\varphi_1(x) + C\psi_1(x)}{\varphi(x) + C\psi(x)}.$$

Reciproc, o familie de curbe care depinde omografic de o constantă arbitrară verifică o ecuație de tip Riccati.

2) Dacă y_1, y_2, y_3, y_4 sînt patru soluții particulare corespunzînd la patru valori c_1, c_2, c_3, c_4 ale constantei arbitrare, avem

$$\frac{y_4 - y_1}{y_4 - y_2} : \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = \frac{c_4 - c_1}{c_4 - c_2} : \frac{c_3 - c_1}{c_3 - c_2} = A \text{ (constant)}$$

pentru că raportul anarmonic se păstrează printr-o transformare omografică.

3) Dacă se cunosc trei soluții particulare y_1, y_2, y_3 ale unei ecuații Riccati, din relația scrisă la observația precedentă rezultă imediat soluția generală

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} : \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = C$$

care se obține astfel fără nici o cuadratură.

Exemplu

Ecuația diferențială

$$(1 + x^3)y' - y^2 - x^2y - 2x = 0, \quad 1 + x^3 \neq 0$$

are soluțiile $y_1 = x^2$, $y_2 = x - 1$, $y_3 = -\frac{1}{x}$, deci soluția generală este dată de

$$\frac{y - x^2}{y - x + 1} : \frac{x^3 + 1}{x^3 - x + 1} = C \text{ sau } y = \frac{C(1 - x^2) + x^2}{1 - C(x + 1)}.$$

8. Ecuații algebrice în y'

Fie ecuația diferențială

$$A_0(x, y)(y')^n + A_1(x, y)(y')^{n-1} + \ldots + A_{n-1}(x, y)y' + A_n(x, y) = 0 \qquad (1)$$

care provine din anularea unui polinom în y' cu coeficienții $A_k(x, y)$ funcții continue de x, y într-un domeniu $D \subset R^2$ și cu $A_0(x, y) \neq 0$ în D.

Considerată ca o ecuație în y', ecuația dată are n rădăcini $f_k(x, y)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, funcții de x, y în D. Fiecare *rădăcină reală* ne dă o ecuație de forma

$$y' = f(x, y) \tag{2}$$

și orice soluție a ecuației (2) este soluție a ecuației (1).

Exemplu

Ecuația $yy'^2 - (1 + 2xy)y' + 2x = 0$, rezolvată în raport cu y' ne dă următoarele două ecuații: $y' = \frac{1}{y}$ și $y' = 2x$, cu soluțiile $y^2 = 2x + C$ și $y = x^2 + C$. Fiecare din aceste soluții verifică ecuația dată.

§ 3. ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDINUL ÎNTÎI NEREZOLVATE ÎN RAPORT CU y', INTEGRABILE PRIN METODE ELEMENTARE

1. Ecuația $y = f(y')$

Să considerăm ecuația diferențială de ordinul întîi $y = f(y')$, unde f este o funcție cu derivata continuă într-un interval $[a, b]$.

Teoremă. Soluția generală a ecuației

$$y = f(y')$$

este dată de

$$\begin{cases} y = f(p) \\ x = \displaystyle\int \frac{1}{p} f'(p)\,\mathrm{d}p + C. \end{cases}$$

Demonstrație. Să punem $y' = p$ și să luăm pe p variabilă independentă. Avem

$$y = f(p), \quad \mathrm{d}y = f'(p)\,\mathrm{d}p,$$

deci

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p, \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{p}\mathrm{d}y = \frac{1}{p} f'(p)\,\mathrm{d}p,$$

de unde obținem pe x printr-o cuadratură

$$x = \int \frac{1}{p} f'(p)\,\mathrm{d}p + C.$$

Soluția generală este dată de familia de curbe (Γ) de ecuații parametrice

$$(\Gamma)\begin{cases} x = \int \frac{1}{p} f'(p)\,\mathrm{d}p + C \\ y = f(p)\,. \end{cases}$$

Soluția generală este definită pe orice interval $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ pe care integrala $\int \frac{1}{p} f'(p)\,\mathrm{d}p$ are sens.

Exemplu

Să se integreze ecuația $y = y'^2 + \ln y'$, $y' > 0$.

Punem $y' = p$, deci $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p$, $\mathrm{d}x = \frac{1}{p}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{p}\left(2p + \frac{1}{p}\right)\mathrm{d}p$; pentru $p > 0$ avem

$$x = \int \left(2 + \frac{1}{p^2}\right)\mathrm{d}p = 2p - \frac{1}{p} + C\,.$$

Integrala generală a ecuației date este

$$\begin{cases} x = 2p - \frac{1}{p} + C \\ y = p^2 + \ln p, \qquad p > 0. \end{cases}$$

2. Ecuația $F(y, y') = 0$

Integrarea ecuației $F(y, y') = 0$ se reduce la o cuadratură dacă cunoaștem o reprezentare parametrică a curbei $F(u, v) = 0$, anume $u = \varphi(t)$, $v = \psi(t)$, $t \in [a, b]$. Într-adevăr, putem scrie, dacă φ, ψ sînt continue, iar φ are derivata continuă pe $[a, b]$,

$$y = \varphi(t),\ \ y' = \psi(t),\ \ \mathrm{d}x = \frac{1}{\psi(t)}\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

și

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,\mathrm{d}t + C\,.$$

Integrala generală este dată de familia de curbe (Γ) de ecuații parametrice

$$(\Gamma)\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,\mathrm{d}t + C\,, \\ y = \varphi(t)\,. \end{cases}$$

Soluția generală este definită pe orice interval $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ pe care integrala $\int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,\mathrm{d}t$ are sens.

Exemplu

Ecuația $y^2 + y'^2 = 1$ se poate integra dacă punem $y = \sin t$, $y' = \cos t$, $t \in R$. Avem

$$dx = \frac{1}{\cos t}\, dy = \frac{1}{\cos t} \cos t\, dt = dt, \quad x = t + C.$$

Integrala generală a ecuației date este

$$x = t + C, \quad y = \sin t, \quad t \in R.$$

3. Ecuația $x = f(y')$

Să considerăm ecuația diferențială de ordinul întîi $x = f(y')$, unde f este o funcție cu derivata continuă într-un interval $[a, b]$.

Teoremă. Soluția generală a ecuației

$$x = f(y')$$

este dată de

$$\begin{cases} x = f(p) \\ y = \int p f'(p)\, dp + C, \quad p \in [a, b]. \end{cases}$$

Demonstrație. Să punem $y' = p$ și să luăm pe p variabilă independentă. Avem

$$x = f(p), \quad dx = f'(p)\, dp,$$

deci

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad dy = p\, dx = p f'(p)\, dp,$$

de unde obținem pe y printr-o cuadratură

$$y = \int p f'(p)\, dp + C.$$

Integrala generală este dată de familia de curbe (Γ) de ecuații parametrice

$$(\Gamma) \begin{cases} x = f(p) \\ y = p f'(p)\, dp + C, \quad p \in [a, b]. \end{cases}$$

Exemplu

Să se integreze ecuația $x = y' + e^{y'}$. Punem $y' = p$,

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad dy = p\, dx = p(1 + e^p)\, dp,$$

$$y = \int (p + p e^p)\, dp = \frac{1}{2} p^2 + (p - 1) e^p + C.$$

Soluția generală a ecuației date este

$$x = p + e^p, \quad y = \frac{1}{2} p^2 + (p - 1) e^p + C, \quad p \in R.$$

4. Ecuația $F(x, y') = 0$

Integrarea ecuației $F(x, y') = 0$ se reduce la o cuadratură dacă cunoaștem o reprezentare parametrică a curbei $F(u, v) = 0$, anume $u = \varphi(t)$, $v = \psi(t)$, $t \in [a, b]$. Într-adevăr, dacă ψ este continuă și φ derivabilă continuu pe $[a, b]$, avem

$$x = \varphi(t), \quad \frac{dy}{dx} = \psi(t), \quad dy = \psi(t)\, \varphi'(t)\, dt,$$

deci

$$y = \int \psi(t)\, \varphi'(t)\, dt + C.$$

Integrala generală este dată de familia de curbe (Γ) de ecuații parametrice

$$(\Gamma) \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \int \psi(t)\, \varphi'(t)\, dt + C, \quad t \in [a, b]. \end{cases}$$

Exemplu

Să se integreze ecuația $x^3 + y'^3 - 3xy' = 0$. Punem $y' = xt$; obținem

$$x = \frac{3t}{1 + t^3}, \quad y' = \frac{3t^2}{1 + t^3}$$

și

$$dy = \frac{3t^2}{1 + t^3} dx = \frac{3t^2}{1 + t^3} \cdot \frac{3(1 + t^3) - 9t^3}{(1 + t^3)^2} dt = \frac{9(1 - 2t^3)t^2}{(1 + t^3)^3} dt,$$

deci

$$y = \int \frac{9(1 - t^3)}{(1 + t^3)^3} t^2\, dt = 9 \int \frac{d(t^3 + 1)}{(t^3 + 1)^3} - 6 \int \frac{d(t^3 + 1)}{(1 + t^3)^2},$$

$$y = -\frac{9}{2} \frac{1}{(t^3 + 1)^2} + 6 \frac{1}{1 + t^3} + C.$$

Soluția generală a ecuației date este

$$x = \frac{3t}{1 + t^3}, \quad y = -\frac{9}{2} \frac{1}{(t^3 + 1)^2} + \frac{6}{1 + t^3} + C, \quad t \neq -1.$$

5. Ecuații Lagrange

Definiție. Se numește ecuație Lagrange, o ecuație de forma

$$A(y')\,x + B(y')\,y + C(y') = 0,$$

cu A, B, C funcții continue cu derivate de ordinul întîi continue pe un interval $[a, b]$.

Se observă că ecuația lui Lagrange este liniară în x și y, cu coeficienții funcții de y'. Împărțind cu $B(y') \neq 0$, ecuația lui Lagrange are și următoarea formă:

$$y = \varphi(y')\,x + \psi(y'). \tag{1}$$

Integrarea ecuației lui Lagrange se reduce la integrarea unei ecuații liniare în modul următor. În (1) înlocuim pe y' cu p

$$y = \varphi(p)\,x + \psi(p),$$

apoi derivăm în raport cu x și ținem seamă că p este funcție de x

$$p = \frac{dy}{dx} = \varphi'(p)\,x\frac{dp}{dx} + \varphi(p) + \psi'(p)\frac{dp}{dx};$$

în această ecuație înlocuim pe $\frac{dy}{dx}$ cu p și observăm că este o ecuație liniară în x, p fiind considerat acum variabilă independentă. Avem, într-adevăr,

$$\frac{dp}{dx}\left[\varphi'(p)\,x + \psi'(p)\right] + \varphi(p) - p = 0$$

și pentru $\varphi(p) - p \neq 0$ rezultă ecuația liniară

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}\,x + \frac{\psi'(p)}{\varphi(p) - p} = 0;$$

prin integrare obținem pe x.

$$x = e^{-\int \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}dp}\left[C - \int \frac{\psi'(p)}{\varphi(p) - p}\, e^{\int \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}dp}\, dp\right],$$

care, împreună cu

$$y = x\,\varphi(p) + \psi(p), \quad p \in [a, b],$$

determină integrala generală, sub formă parametrică, a ecuației Lagrange (1).

Ne mai rămîne să considerăm cazul $\varphi(p) - p = 0$. Dacă $p = p_k$ este o soluție a ecuației $\varphi(p) - p = 0$, putem avea două situații:

a) $$\lim_{p \to p_k} |x| = +\infty$$

cînd dreapta

$$y = \varphi(p_k)\,x + \psi(p_k)$$

este o direcție asimptotică a curbelor integrale reprezentate de integrala generală;

b)
$$\lim_{p \to p_k} x = x_0 \text{ (finit)}$$

cînd dreapta $y = \varphi(p_k)\,x + \psi(p_k)$ reprezintă o soluție singulară a ecuației Lagrange.

Observație.

Integrala generală a unei ecuații Lagrange, după cum rezultă din cele de mai sus, este de forma

$$x = X_0(p) + CX_1(p),$$
$$y = Y_0(p) + CY_1(p).$$

Să considerăm două integrale particulare, anume cele obținute pentru $C = 0$ și $C = 1$

$$(\Gamma_0)\begin{cases} x = X_0(p) \\ y = Y_0(p) \end{cases}, \quad (\Gamma_1)\begin{cases} x = X_0(p) + X_1(p) = X(p) \\ y = Y_0(p) + Y_1(p) = Y(p), \end{cases}$$

unde parametrul p este coeficientul unghiular $\frac{dy}{dx}$ al tangentei.

Putem da o generare geometrică simplă a curbelor integrale pornind de la curbele Γ_0 și Γ_1. În două puncte $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$ situate pe cele două curbe Γ_0, Γ_1, și care corespund la același parametru p, tangentele la curbe sînt paralele, iar coordonatele unui punct $M(x, y)$ de pe o curbă integrală Γ sînt date de

$$x = X_0(p) + C(X(p) - X_0(p)),$$
$$y = Y_0(p) + C(Y(p) - Y_0(p)),$$

adică M împarte segmentul $M_0\,M_1$ într-un raport constant C, prin urmare curba Γ este locul geometric al punctelor M care împart, într-un raport dat C, segmentele care unesc punctele de pe Γ_0 și Γ_1 în care tangentele la curbele Γ_0 și Γ_1 respectiv sînt paralele între ele.

În figura 116 am construit curba Γ pentru $C = -\frac{1}{2}$.

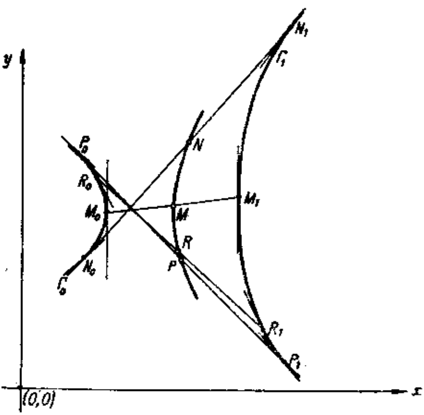

Fig. 116

Exemplu

Să se integreze ecuația Lagrange $y = xy'^2 + y'^3$.
Notăm $y' = p$, deci $y = xp^2 + p^3$; derivăm în raport cu x,

$$p = 2xp\frac{dp}{dx} + p^2 + 3p^2\frac{dp}{dx}$$

și obținem ecuația liniară

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2p}{p^2-p}x + \frac{3p^2}{p^2-p} = 0, \quad (p^2 - p \neq 0)$$

$$x = e^{-\int\frac{2}{p-1}dp}\left[C - \int\frac{2p^2}{p^2-p}e^{\int\frac{2}{p-1}dp}dp\right],$$

sau

$$(\Gamma)\begin{cases} x = \dfrac{1}{(p-1)^2}\left[C - \dfrac{2}{3}p^3 + p^2\right] \\ y = \dfrac{p^2}{(p-1)^2}\left[C - \dfrac{2}{3}p^3 + p^2\right]p^3, \end{cases}$$

care reprezintă soluția generală. Pentru $p^2 - p = 0$ avem două situații: *a)* $p = 0$, $y = 0$; dreapta $y = 0$ este o integrală singulară; *b)* pentru $p \to 1$ și $C \neq -\frac{1}{3}$, $|x| \to \infty$, deci dreapta $y = x + 1$ este direcția asimptotică a curbelor integrale care au $C \neq -\frac{1}{3}$. Dacă $C = -\frac{1}{3}$, curba integrală se descompune în dreapta $y = x + 1$ și o conică.

6. Ecuația Clairaut

Definiție. Se numește ecuație Clairaut o ecuație de forma

$$y = xy' + \psi(y'),$$

unde ψ este o funcție cu derivata continuă într-un interval $[a, b]$.

Ecuația Clairaut este o ecuație Lagrange particulară, anume cînd $\varphi(p) = p$.

Pentru integrarea ei procedăm la fel ca pentru ecuația Lagrange. Înlocuim pe y' cu p:

$$y = xp + \psi(p), \tag{1}$$

apoi derivăm în raport cu x și ținem seamă că p este funcție de x

$$p = p + (x + \psi'(p))\frac{dp}{dx}$$

sau

$$[x + \psi'(p)]\frac{dp}{dx} = 0.$$

Sînt două posibilități :

a) $$\frac{dp}{dx} = 0, \text{ deci } p = C,$$

de unde obținem, înlocuind în (1),

$$y = Cx + \psi(C),$$

care reprezintă *soluția generală* a ecuației Clairaut. Soluția generală a ecuației Clairaut este formată dintr-o familie de drepte ce se obține înlocuind în ecuația diferențială pe y' cu C.

b) $$x + \psi'(p) = 0,$$

pe care dacă o înlocuim în (1) obținem soluția

$$x = -\psi'(p),$$
$$y = -p\,\psi'(p) + \psi(p), \quad p \in [a, b],$$

și care reprezintă integrala singulară.

Observație

Soluția generală a ecuației Clairaut este o familie de drepte ce depind de un parametru C. Eliminînd pe C între ecuația

$$y = Cx + \psi(C)$$

și derivata în raport cu C

$$x + \psi'(C) = 0,$$

sau, ceea ce este același lucru, luînd pe C parametru, obținem curba

$$x = -\psi'(C),$$

$$y = -C\,\psi'(C) + \psi(C),$$

care este integrala singulară. Prin urmare integrala singulară este înfășurătoarea familiei de curbe reprezentată de integrala generală.

Exemple

1) Fie ecuația Clairaut

$$y = px + \frac{1}{p}.$$

Soluția generală este dată de familia de drepte

$$y = Cx + \frac{1}{C}. \tag{α}$$

Integrala singulară are ecuațiile parametrice

$$x = +\frac{1}{p^2}, \quad y = \frac{2}{p};$$

eliminînd pe p, obținem parabola

$$y^2 = 4x,$$

care este înfășurătoarea dreptelor reprezentate de soluția generală (fig. 117).

Rezolvînd în raport cu C ecuația (α) obținem

$$C^2x - Cy + 1 = 0.$$

Soluțiile C_1, C_2 sînt reale dacă $y^2 - 4x > 0$, deci dreptele reprezentate de integrala generală, nu intersectează parabola, care este o curbă convexă.

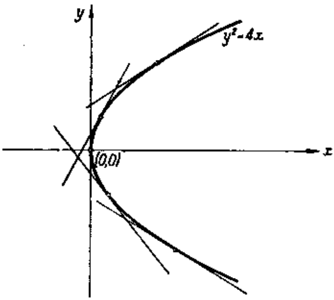

Fig. 117

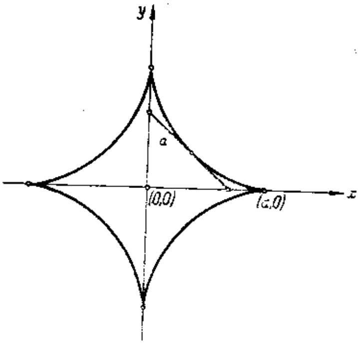

Fig. 118

2) Să se găsească curba avînd proprietatea: axele de coordonate determină pe tangentă un segment de lungime constantă a.

Ecuația tangentei la curbă $y = f(x)$, în punctul (x, y), este

$$Y - y = y'(X - x)$$

și taie axele de coordonate în punctele $\left(x - \frac{y}{y'}, 0\right)$, $(0, y - xy')$. Proprietatea geometrică enunțată conduce la ecuația diferențială

$$\left(x - \frac{y}{y'}\right)^2 + (y - xy')^2 = a$$

sau

$$y = xy' \pm \frac{ay'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

care este o ecuație Clairaut. Integrala generală este familia de drepte

$$y = Cx \pm \frac{aC}{\sqrt{1 + C^2}}.$$

Integrala singulară are ecuațiile parametrice

$$x = \mp \frac{\sqrt{1 + p^2} - \frac{p^2}{\sqrt{1 + p^2}}}{1 + p^2}\, a = \mp \frac{a}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$y = \pm \frac{ap^3}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dacă punem $p = \operatorname{tg} \varphi$, obținem pentru înfășurătoare ecuațiile $x = \mp a \cos^3 \varphi$, $y = \pm a \sin^3 \varphi$, care reprezintă o astroidă (fig. 118).

7. Ecuația $y = f(x, y')$

Notăm $y' = p$, deci

$$y = f(x, p) \tag{1}$$

și derivăm în raport cu x, ținînd seamă că p este funcție de x; obținem

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dx}, \tag{2}$$

care este o ecuație rezolvată în raport cu $\frac{dp}{dx}$. Dacă putem integra pe (2) avem

$$p = \varphi(x, C),$$

care, introdusă în (1), ne conduce la soluția generală căutată

$$y = f[x, \varphi(x, C)].$$

Exemplu

Fie ecuația $y = y'^2 - y'x + \frac{x^2}{2}$. Punem $y' = p$, deci $y = p^2 - px + \frac{1}{2} x^2$, derivăm în raport cu x și ținem seama că p este funcție de x:

$$p = 2p \frac{dp}{dx} - x \frac{dp}{dx} - p + x$$

sau

$$(2p - x)\left(1 - \frac{dp}{dx}\right) = 0 .$$

Avem două posibilități: *a)* $\frac{dp}{dx} = 1$, sau $p + C = x$, pe care dacă o introducem în ecuația dată obținem soluția generală

$$y = (x - C)^2 - x(x - C) + \frac{1}{2} x^2$$

sau

$$y = -Cx + C^2 + \frac{1}{2} x^2, \quad x \in R .$$

b) $x = 2p$, care cu $y = p^2 - px + \frac{1}{2} x^2$ ne dă

$$x = 2p, \quad y = p^2, \quad p \in R,$$

care este soluția singulară. Se observă că este înfășurătoarea familiei de parabole reprezentate de integrala generală.

8. Ecuația $x = f(y, y')$

Notăm $y' = p$, deci

$$x = f(y, p) \tag{1}$$

și derivăm în raport cu y, considerînd pe x și p funcție de y; avem

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy}, \tag{2}$$

deoarece

$$\frac{dx}{dy} = 1 : \frac{dy}{dx} = \frac{1}{p}.$$

Dacă putem integra pe (2), care este o ecuație diferențială în p și y, explicitată în raport cu $\frac{dp}{dy}$, obținem

$$p = \varphi(y, C); \tag{3}$$

dacă introducem pe (3) în (1), rezultă soluția generală căutată

$$x = f[y, \varphi(y, C)].$$

Exemplu

Fie ecuația $y'^3 - 4xy\,y' + 8y^2 = 0$. Înlocuind pe y' cu p, obținem $p^3 - 4xy\,p + 8y^2 = 0$. Avem

$$x = \frac{p^2}{4y} + \frac{2y}{p}; \tag{1}$$

derivăm în raport cu y și înlocuim pe $\frac{dx}{dy}$ cu $\frac{1}{p}$,

$$\frac{1}{p} = \frac{2p}{4y}\frac{dp}{dy} - \frac{p^2}{4y^2} + \frac{2}{p} - \frac{2y}{p^2}\cdot\frac{dp}{dy}$$

sau

$$(p^3 - 4y^2)\left[2y\frac{dp}{dy} - p\right] = 0.$$

Avem două cazuri de considerat: *a)* $2y\frac{dp}{dy} - p = 0$, unde se separă variabilele; dacă integrăm,

$$p = C\sqrt{y},$$

și dacă înlocuim pe p astfel obținut în ecuația dată, rezultă integrala generală

$$C^3 y^{\frac{3}{2}} - 4C\,x\,y^{\frac{3}{2}} + 8y^2 = 0$$

sau

$$8\sqrt{y} = 4Cx - C^3, \quad \text{sau} \quad y^2 = C_1(x - C_1)^2, \quad (4C_1 = C^2).$$

b) $4y^2 - p^3 = 0$; dacă • înlocuim în (1), obținem soluția

$$y = \frac{4}{27} x^3$$

care reprezintă integrala singulară. Într-adevăr, integrala generală este formată dintr-o familie de conice, în timp ce soluția singulară este o parabolă cubică. Prin eliminarea lui p între ecuațiile (1) și $4y^2 - p^3 = 0$ mai obținem și $y = -\frac{4}{27} x^3$ care nu este soluție.

§ 4. INTEGRAREA GRAFICĂ A ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE DE ORDINUL ÎNTÎI

1. Metoda liniei poligonale (Euler)

Fie ecuația diferențială

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

cu $f(x, y)$ continuă în intervalul $[a, \alpha] \times [b, \beta]$. Ne propunem să găsim, grafic, soluția ecuației (1) care trece prin punctul (a, b). Pentru aceasta împărțim intervalul $[a, \alpha]$ în n subintervale cu punctele $a = x_0 < x_1 < \dots$ $\dots < x_{n-1} < x_n = \alpha$, (fig. 119); ducem prin punctele de diviziune x_k (de

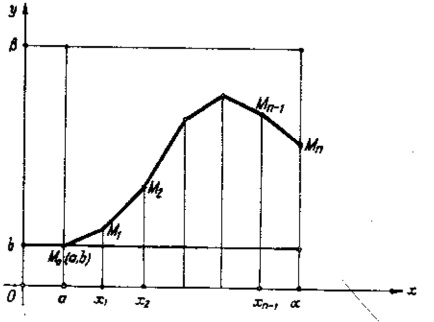

Fig. 119

pe axa Ox) paralele la axa Oy, și, începînd din punctul (a, b), ducem linia poligonală $M_0 M_1 \dots M_n$, unde segmentul $M_k M_{k+1}$ are coeficientul unghiular $y'_k = f(x_k, y_k)$. Linia poligonală $M_0 M_1 \dots M_n$ are așadar ecuația

$$f(x) = \begin{cases} b + (x - a) f(a, b), & a \leqslant x \leqslant x_1, \\ y_1 + (x - x_1) f(x_1, y_1), & x_1 \leqslant x \leqslant x_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ y_{n-1} + (x - x_{n-1}) f(x_{n-1}, y_{n-1}), & x_{n-1} \leqslant x \leqslant \alpha \end{cases}$$

unde

$$
\begin{aligned}
y_0 &= b\,,\\
y_1 &= b + (x_1 - a)\,f(a, b)\,,\\
y_2 &= y_1 + (x_2 - x_1)\,f(x_1, y_1)\,,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
y_n &= y_{n-1} + (\alpha - x_{n-1})\,f(x_{n-1}, y_{n-1})\,;
\end{aligned}
$$

ordonatele y_k se pot determina și prin citire pe grafic.

În punctul (a, b), dreapta $M_0 M_1$ este tangentă la curba integrală căutată, care trece prin acest punct. Pentru punctele următoare, deoarece linia poligonală (care aproximează soluția căutată) se depărtează de soluția exactă, dreptele $M_k M_{k+1}$ sînt paralele cu tangentele la curba integrală.

Exemplu

Să găsim curba integrală a ecuației $y' = 10\,(x^2 + y^2)$, $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ care trece prin origine. Curba integrală este simetrică față de origine; luăm $x_0 = 0$; $x_1 = 0{,}05$; $x_2 = 0{,}1$; $x_3 = 0{,}2$; $x_4 = 0{,}3$; $x_5 = 0{,}4$ și $x_6 = 0{,}5$. Avem succesiv

$$
\begin{aligned}
&(M_0)\ x_0 = 0;\ y_0 = 0;\ y_0' = 0,\\
&(M_1)\ x_1 = 0{,}05;\ y_1 = 0;\ y_1' = 0{,}025,\\
&(M_2)\ x_2 = 0{,}1;\ y_2 = 0{,}05 \times 0{,}025 = 0{,}00125;\ y_2' = 0{,}10,\\
&(M_3)\ x_3 = 0{,}2;\ y_3 = 0{,}00125 + 0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}011;\ y_3' = 0{,}40,\\
&(M_4)\ x_4 = 0{,}3;\ y_4 = 0{,}011 + 0{,}1 \times 0{,}4 = 0{,}051;\ y_4' = 0{,}90,\\
&(M_5)\ x_5 = 0{,}4;\ y_5 = 0{,}051 + 0{,}1 \times 0{,}9 = 0{,}141;\ y_5' = 1{,}80,\\
&(M_6)\ x_6 = 0{,}5;\ y_6 = 0{,}141 + 0{,}1 \times 1{,}80 = 0{,}321;\ y_6' = 3{,}54.
\end{aligned}
$$

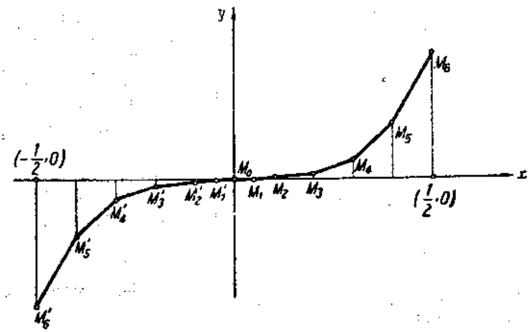

Fig. 120

Linia poligonală este trasată în figura 120. Punctele M_k' sînt simetricele punctelor M_k față de originea $M_0\,(0, 0)$.

2. Metoda izoclinelor

Fie ecuația diferențială

$$y' = f(x, y)$$

și să presupunem că putem construi ușor familia de curbe

$$f(x, y) = m, \tag{1}$$

unde m este un parametru real. Dacă $m = m_0$, obținem o curbă $f(x, y) = m_0$, care are proprietatea că pentru orice punct M de pe această curbă, curba integrală, care trece prin punctul M, are tangenta paralelă cu direcția fixă $y' = m_0$; din acest motiv, curbele (1) se numesc și curbe *izocline*.

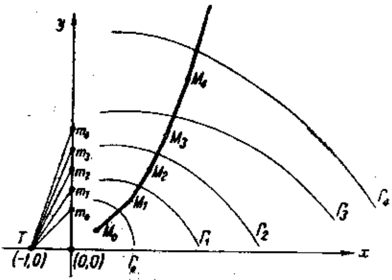

Fig. 121

Să construim curbele izocline $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$, corespunzătoare valorilor $m_0, m_1, m_2, \ldots$, (fig. 121). Pe axa Oy să luăm punctele $P_0, P_1, P_2, \ldots$ astfel încît $OP_0 = m_0$, $OP_1 = m_1$, $OP_2 = m_2$, ... și să considerăm punctul $T(-1,0)$ (fig. 121). Dreapta TP_k are coeficientul unghiular m_k, deci dreptele $TP_0, TP_1, TP_2, \ldots$ ne dau direcțiile $m_0, m_1, m_2, \ldots$.

Pentru a construi curba integrală a ecuației $y' = f(x, y)$ care trece prin punctul $M_0(a, b)$, procedăm în modul următor: ducem din punctul M_0 o paralelă la dreapta TP_0, pînă în punctul M_1, situat la jumătatea benzii dintre Γ_0 și Γ_1; din punctul M_1 ducem o paralelă la dreapta TP_1 pînă în punctul M_2 situat la jumătatea benzii dintre Γ_1 și Γ_2 ș.a.m.d.

Curba integrală căutată este aproximată de linia poligonală $M_0 M_1 M_2 \ldots$.

Observăm că în punctul de intersecție $N_k(x_k, y_k)$ al liniei poligonale cu izoclina Γ_k, dreapta $M_k M_{k+1}$ este tangentă la o curbă integrală a ecuației date, deoarece panta dreptei este $m_k = f(x_k, y_k) = y'_k$.

Exemplu

Să se construiască, folosind metoda izoclinelor, soluția ecuației $y' = x^2 + y^2$, $x \in (-2, +2)$, care trece prin punctul $(0, 0)$.

Curbele izocline sînt cercuri. Luăm

$$m_0 = 0{,}25, \ (\Gamma_0) \ x^2 + y^2 = 0{,}25,$$

$$m_1 = 1 \quad , (\Gamma_1) \ x^2 + y^2 = 1,$$

$$m_2 = 2 \quad , (\Gamma_2) \ x^2 + y^2 = 2,$$

$$m_3 = 4 \quad , (\Gamma_3)\ x^2 + y^2 = 4\,,$$
$$m_4 = 6 \quad , (\Gamma_4)\ x^2 + y^2 = 6\,,$$
$$m_5 = 9 \quad , (\Gamma_5)\ x^2 + y^2 = 9\,,$$
$$m_6 = 16 \quad , (\Gamma_6)\ x^2 + y^2 = 16\,.$$

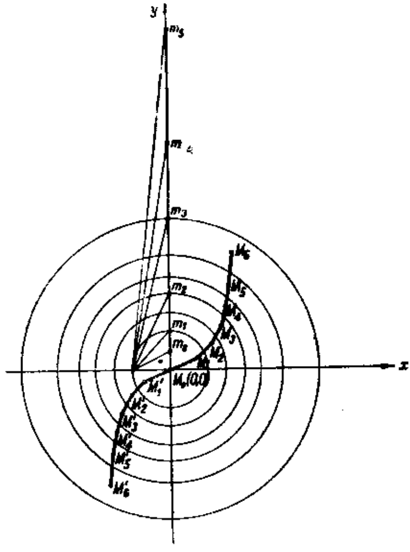

Fig. 122

În figura 122 este trasată linia poligonală care aproximează curba integrală care trece prin origine. Punctele M_k' sînt simetricele punctelor M_k față de origine.

§ 5. TRAIECTORII IZOGONALE ȘI ORTOGONALE

1. Traiectorii izogonale

D e f i n i ț i e. Fie (Γ) și (Γ′) două familii de curbe definite într-un domeniu $D \subset R^2$ astfel încît prin fiecare punct al domeniului D trece cîte o curbă din fiecare familie și numai una. Se spune că familia de curbe (Γ′) este izogonala familiei de curbe (Γ) în D, dacă în fiecare punct al

domeniului D, cele două curbe ale familiei, care trec prin punct, se taie sub un unghi constant.

Fie $(x_0, y_0) \subset D$ și C, C' cele două curbe ale familiilor (Γ) și (Γ') care trec prin punctul (x_0, y_0). Dacă m și m' sînt coeficienții unghiulari ai tangentelor la cele două curbe în punctul comun (x_0, y_0), atunci condiția ca familiile de curbe (Γ) și (Γ') să fie izogonale este ca unghiul θ al tangentelor celor două curbe să fie constant pentru orice $(x_0, y_0) \in D$, fapt care se scrie

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{m' - m}{1 + mm'} = \text{constant}.$$

Exemplu

Dreptele

$$(D):\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} x + a,$$

$$(D'):\ y = b$$

formează două familii de drepte izogonale. Fiecare dreaptă dintr-o familie taie toate celelalte drepte din cealaltă familie sub un unghi de 45°.

Problema care se pune în general este următoarea: **Fiind dată o familie de curbe (Γ) în D, să găsim familia de curbe (Γ') izogonală familiei (Γ), adică familia de curbe care intersectează familia (Γ) sub un unghi constant.** Răspunsul este dat de următoarea

Teoremă. Fie (Γ) o familie de curbe definită de ecuația diferențială

$$f(x, y, y') = 0, \quad (x, y) \in D.$$

Familia de curbe (Γ') care intersectează familia (Γ) după un unghi constant θ, cu $\operatorname{tg} \theta = k$, (constant), este definită de ecuația diferențială

$$f\left(x, y, \frac{y' - k}{1 + ky'}\right) = 0, \quad (x, y) \in D.$$

Demonstrație. Dacă $f(x, y, y') = 0$, $(x, y) \in D$, este ecuația diferențială a familiei Γ, o curbă C a familiei are în punctul (x, y) tangenta de coeficient unghiular y' definit de ecuația diferențială $f(x, y, y') = 0$. Curba C', izogonală familiei (Γ), care trece prin punctul (x, y), are tangenta în acest punct cu panta y_1' dată de

$$\frac{y_1' - y'}{1 + y' y_1'} = k,$$

de unde deducem

$$y_1' - y' = k + y' y_1' k, \quad \text{sau} \quad y' = \frac{y_1' - k}{1 + k y_1'},$$

prin urmare ecuația diferențială a curbelor C' izogonală familiei (Γ) se obține din ecuația diferențială a familiei (Γ), înlocuind pe y' cu $\frac{y' - k}{1 + ky'}$, sau

$$f\left(x, y, \frac{y' - k}{1 + k y'}\right) = 0, \quad (x, y) \in D.$$

Teorema este demonstrată.

Observație

Dacă familia (Γ) ne este dată prin ecuația $F(x, y, C) = 0$, *determinăm mai întîi ecuația diferențială a familiei și după aceea scriem ecuația diferențială a curbelor izogonale.*

Exemplu

Să găsim traiectoriile izogonale ale familiei de drepte $y = Cx$, care trec prin origine Ecuația diferențială a dreptelor $y = Cx$ este $y = y'x$, deci ecuația diferențială a traiectoriilor izogonale este

$$y = \frac{y' - k}{1 + ky'}\,x, \quad \text{sau} \quad y' = \frac{y + kx}{x - ky}$$

care este o ecuație omogenă. O integrăm trecînd în coordonate polare

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

deci

$$dx = dr\cos\theta - r\sin\theta\, d\theta,$$

$$dy = dr\sin\theta + r\cos\theta\, d\theta$$

și ecuația se transformă în

$$\frac{r'\sin\theta + r\cos\theta}{r'\cos\theta - r\sin\theta} = \frac{r\sin\theta + kr\cos\theta}{r\cos\theta - kr\sin\theta}$$

sau

$$kr' = r, \quad \frac{dr}{r} = \frac{1}{k}\,d\theta.$$

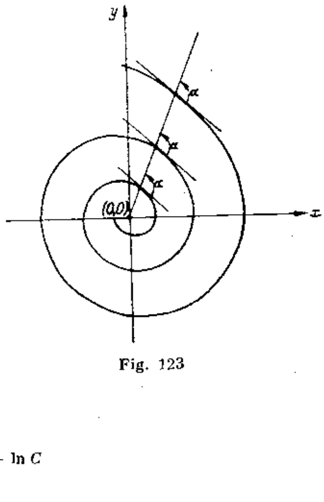

Fig. 123

Soluția generală este

$$\ln r = \frac{1}{k}\,\theta + \ln C$$

sau

$$r = C\,e^{\frac{\theta}{k}}$$

care reprezintă (fig. 123) o familie de spirale logaritmice.

2. Traiectorii ortogonale

Definiție. **Fie (Γ) și (Γ') două familii de curbe izogonale. Dacă unghiul θ sub care se taie două curbe oarecare ale celor două familii este egal cu $\frac{\pi}{2}$, familiile (Γ) și (Γ') se numesc ortogonale.**

Exemplu

Cercurile concentrice $x^2 + y^2 = a^2$ și mulțimea dreptelor ce trec prin origine, $y = bx$, (a, b, parametri), formează două familii de curbe ortogonale (fig. 124).

Determinarea familiei (Γ') de curbe ortogonale unei familii de curbe date (Γ) este dată de următoarea

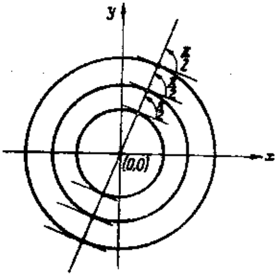

Fig. 124

Teoremă. Fie (Γ) o familie de curbe definită de ecuația diferențială

$$f(x, y, y') = 0, \quad (x, y) \in D.$$

Familia de curbe (Γ') care intersectează familia (Γ) după un unghi $\theta = \frac{\pi}{2}$ este definită de ecuația diferențială

$$f\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0, \quad (x, y) \in D.$$

Demonstrație. Avem

$$\frac{y_1' - y'}{1 + y' y_1'} = k$$

dacă $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, deci $|k| \neq +\infty$. Cînd $\theta \to \frac{\pi}{2}$, $|k| \to +\infty$, deci $1 + y' y_1' \to 0$ sau $y' \to -\frac{1}{y_1'}$. Teorema este demonstrată.

Observații

1) Ecuația diferențială a traiectoriilor ortogonale a unei familii de curbe (Γ) care depinde de un parametru, se obține din ecuația diferențială a familiei (Γ), înlocuind pe y' cu $-\frac{1}{y'}$.

În particular, dacă ecuația familiei este de forma

$$y' = f(x, y),$$

ecuația diferențială a traiectoriilor ortogonale este dată de

$$-\frac{1}{y'} = f(x, y).$$

2) Dacă ecuația diferențială a familiei de curbe (Γ) este dată în coordonate polare

$$F\left(\theta, r, \frac{dr}{d\theta}\right) = 0,$$

ecuația diferențială a traiectoriilor ortogonale (Γ') este dată de

$$F\left(\theta, \quad r, -r^2 \frac{d\theta}{dr}\right) = 0. \tag{1}$$

După cum se știe, avem $\operatorname{tg}\theta = \frac{r'}{r}$, unde θ este unghiul pe care îl face raza vectoare cu tangenta la curbă, deci condiția de ortogonalitate se scrie

$$1 + \frac{r'}{r} \cdot \frac{r_1'}{r} = 0, \text{ sau } r' = -\frac{r^2}{r_1'},$$

de unde rezultă ecuația (1).

Exemple

1) Să se găsească traiectoriile ortogonale ale familiei de hiperbole echilatere $x^2 - y^2 = C$.

Ecuația diferențială a familiei este $x - yy' = 0$. Dacă înlocuim pe y' cu $-\frac{1}{y'}$ obținem ecuația diferențială a traiectoriilor ortogonale, anume $x + \frac{y}{y'} = 0$ sau

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{\mathrm{d}y}{y} = 0, \quad x \neq 0, \quad y \neq 0,$$

care este o ecuație cu variabile separate. Integrala generală este $\ln|x| + \ln|y| = C$ sau $xy = C$, care este tot o familie de hiperbole echilatere, avînd însă asimptote axele de coordonate.

2) Să se găsească traiectoriile ortogonale ale familiei de lemniscate $r^2 = a^2 \cos 2\theta$.

Ecuația diferențială a lemniscatelor este

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{r^2}{\cos 2\theta}\right) = 0$$

sau

$$r' + r\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = 0.$$

Ecuația diferențială a traiectoriilor ortogonale se obține din (1), înlocuind pe r' cu $-\frac{r^2}{r'}$, adică

$$-\frac{r^2}{r'} + r\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = 0,$$

sau

$$r' - r\frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = 0,$$

unde se separă variabilele

$$\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

Soluția generală este dată de

$$\ln r - \frac{1}{2}\ln\sin 2\theta = \ln C$$

sau

$$r^2 = C^2 \sin 2\theta, \tag{2}$$

adică tot o familie de lemniscate, deoarece putem scrie pe (2) astfel:

$$r^2 = C^2 \cos 2\varphi, \quad \text{cu } \varphi = \frac{\pi}{4} - \theta.$$

§ 6. TEOREMA DE EXISTENȚĂ PENTRU ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDINUL ÎNTÎI. METODA APROXIMAȚIILOR SUCCESIVE

1. Teorema de existență

Enumerarea tipurilor de ecuații diferențiale de ordinul întîi făcută mai sus, ecuații cărora li se pot obține integrala generală printr-un număr finit de cuadraturi, arată că numai pentru un număr *foarte restrîns* de ecuații acest fapt este posibil. În general o ecuație $y' = f(x, y)$, luată la întîmplare, nu intră în nici unul din cazurile prezentate. Se impune așadar să dăm o metodă mai generală, care să permită determinarea unei soluții $y = \varphi(x)$ a ecuației

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (x, y) \in D, \tag{1}$$

care împreună cu derivata ei $\varphi'(x)$ să verifice ecuația (1). Astfel pusă, problema nu este destul de precisă și pentru a o preciza se cere să impunem condiții atît funcției $f(x, y)$ care este dată, cît și soluției $\varphi(x)$ pe care o căutăm.

Într-o anumită problemă practică, care conduce la o anumită ecuație diferențială, de cele mai multe ori nu ne interesează decît o anumită soluție, soluție care reprezintă fenomenul respectiv.

În teorema ce urmează vom stabili condițiile în care această soluție unică există și vom da și un mijloc de construcție efectivă a ei.

Teoremă. Fie

$$y' = f(x,y) \tag{1}$$

o ecuație diferențială de ordinul întîi care îndeplinește următoarele condiții:

α) Fie $P_0(x_0,y_0)$ un punct din plan. Funcția $f(x,y)$ este continuă în intervalul închis D definit de

$$|x - x_0| \leqslant a, \quad |y - y_0| \leqslant b.$$

β) **Funcția $f(x, y)$, pentru orice $(x, y_1) \in D$, $(x, y_2) \in D$, satisface neegalitatea**

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < A|y_2 - y_1|, \quad A > 0,$$

numită condiția lui Lipschitz.

În aceste situații există o funcție $\varphi(x)$ derivabilă pe intervalul $|x - x_0| \leqslant h$, $(h \leqslant a)$, soluție a ecuației (1)

$$\varphi'(x) = f[x, \varphi(x)], \quad x \in [x_0 - h, x_0 + h]$$

și care îndeplinește condiția $\varphi(x_0) = y_0$.

Demonstrație. *a)* Funcția $f(x, y)$ este continuă pe intervalul închis D, deci este mărginită pe D. Fie $M > 0$ astfel încît să avem

$$|f(x, y)| \leqslant \mathrm{M}, \quad (x, y) \in D.$$

Vom lua

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}.$$

După cum am mai spus, condiția ca, pentru $x = x_0$, funcția $\varphi(x)$ să ia valoarea y_0, se numește *condiție inițială* și este echivalentă cu faptul geometric : graficul soluției $y = \varphi(x)$, $|x - x_0| \leqslant h$, trece prin punctul (x_0, y_0).

b) Pentru determinarea soluției $y = \varphi(x)$ vom folosi *metoda aproximațiilor succesive*. Metoda constă în a construi din aproape în aproape un șir de funcții

$$y_0, y_1(x), \ldots, y_n(x), \ldots$$

șir care converge în mod uniform pe $|x - x_0| \leqslant h$ către o funcție $\varphi(x)$, funcție care îndeplinește condițiile din enunțul teoremei. Primul termen al șirului îl luăm numărul y_0 și se numește aproximația de ordinul zero. Al doilea termen al șirului de funcții, numit și aproximația de ordinul întîi, îl definim prin formula

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\,\mathrm{d}x, \quad x \in [x_0 - h, x_0 + h];$$

aproximația de ordinul doi $y_2(x)$ prin

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)\,\mathrm{d}x, \quad x \in [x_0 - h, x_0 + h],$$

și, în general, aproximația de ordinul n, prin

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})\,\mathrm{d}x, \; x \in [x_0 - h, x_0 + h];$$

obținem în modul acesta șirul de aproximații $y_0, y_1(x), \ldots, y_n(x), \ldots$ care au următoarele proprietăți :

I. Funcțiile $y_n(x)$ pentru orice $n = 1, 2, \ldots$ îndeplinesc condiția inițială $y_n(x_0) = y_0$, deoarece pentru $x = x_0$ integralele sînt nule.

II. Toți termenii șirului sînt funcții continue pe segmentul $[x_0 - h,\ x_0 + h]$. Într-adevăr, f este continuă pe D, deci toate integralele ce intervin sînt funcții continue pentru $x \in [x_0 - h,\ x_0 + h]$.

III. Pentru $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$, $y_n(x) \in [y_0 - b,\ y_0 + b]$, $n = 1, 2, \ldots$.

Vom demonstra prin recurență. Avem $|f(x, y_0)| \leqslant M$, deci

$$|y_1 - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(x,\ y_0)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f(x, y_0)|\,\mathrm{d}x\right| \leqslant M\,|x - x_0| \leqslant Mh \leqslant b,$$

deoarece $h = \left[\min\ a,\ \frac{b}{M}\right]$.

Să presupunem că și aproximația de ordinul $n - 1$ îndeplinește această condiție, deci $y_{n-1}(x) \in [y_0 - b,\ y_0 + b]$; de aici rezultă că $|f(x, y_{n-1})| \leqslant M$; putem scrie

$$|y_n(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(x,\ y_{n-1})\,\mathrm{d}x\right| \leqslant M\,|x - x_0| \leqslant Mh \leqslant b,$$

prin urmare pentru $x \in [x_0 - h,\ x_0 + h]$ toate aproximațiile aparțin intervalului $[y_0 - b,\ y_0 + b]$.

c) Vom arăta acum că șirul de funcții

$$y_0,\ y_1(x),\ \ldots,\ y_n(x),\ \ldots$$

converge uniform pe segmentul $[x_0 - h,\ x_0 + h]$ către o funcție continuă $\varphi(x)$, cînd $n \to \infty$. Convergența acestui șir este echivalentă cu convergența seriei de funcții

$$y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \ldots + (y_n - y_{n-1}) + \ldots, \tag{2}$$

deoarece, după cum se vede imediat, șirul sumelor parțiale ale seriei (2) este șirul (y_n),

$$y_0 + (y_1 - y_0) + \ldots + (y_n - y_{n-1}) = y_n.$$

Pentru a arăta că seria (2) converge uniform pe segmentul considerat este suficient să arătăm că ea este majorată de o serie numerică cu termenii pozitivi, convergentă. Să arătăm că avem pentru $x \in [x_0 - h,\ x_0 + h]$,

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leqslant M \cdot A^{n-1} \cdot \frac{|x - x_0|^n}{n!},\ n = 1,\ 2, \ldots \tag{3}$$

Vom demonstra neegalitatea (3) prin recurență. Avem

$$|y_1(x) - y_0| = \left|\int_{x^0}^{x} f(x, y_0)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant M\,|x - x_0|,$$

deci pentru $n = 1$ neegalitatea (3) este verificată. Presupunem că este adevărată pentru $n - 1$,

$$|y_{n-1}(x) - y_{n-2}(x)| \leqslant MA^{n-2} \cdot \frac{|x - x_0|^{n-1}}{(n-1)!}. \tag{4}$$

şi să arătăm că este adevărată şi pentru n; avem

$$|y_n - y_{n-1}| = \left|\int_{x_0}^{x} [f(x, y_{n-1}) - f(x, y_{n-2})]\, \mathrm{d}x\right|$$

şi dacă folosim condiţia lui Lipschitz (β) şi pe (4) obţinem

$$|y_n - y_{n-1}| \leqslant A\left|\int_{x_0}^{x} |y_{n-1} - y_{n-2}|\, \mathrm{d}x\right| \leqslant A\left|\int_{x_0}^{x} M \cdot A^{n-2} \frac{|x - x_0|^{n-1}}{(n-1)!}\, \mathrm{d}x\right|$$

sau

$$|y_n - y_{n-1}| \leqslant M \cdot A^{n-1}\left|\int_{x_0}^{x} \frac{|x - x_0|^{n-1}}{(n-1)!}\, dx\right| = MA^{n-1}\frac{|x - x_0|^n}{n!}.$$

Neegalitatea (3) este demonstrată. Deoarece $|x - x_0| \leqslant h$ avem de asemenea

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leqslant MA^{n-1}\frac{h^n}{n!} = \frac{M}{A}\cdot\frac{(Ah)^n}{n!}$$

pentru orice $x \in [x_0 - h,\ x_0 + h]$, de unde rezultă că seria

$$y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (y_n - y_{n-1})$$

este absolut şi uniform convergentă pe intervalul $[x_0 - h,\ x_0 + h]$, deoarece seria

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{M}{A}\,\frac{(Ah)^n}{n!} \tag{4'}$$

este convergentă. Într-adevăr, folosind criteriul raportului avem

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{M}{A}\cdot\frac{(Ah)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{A}{M}\cdot\frac{n!}{(Ah)^n} = \frac{Ah}{n+1} \to 0 \text{ cînd } n \to \infty.$$

Se poate observa că avem efectiv

$$\frac{M}{A}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(Ah)^n}{n!} = \frac{M}{A}\,(\mathrm{e}^{hA} - 1)$$

care dovedeşte de asemenea convergenţa seriei (4′), deci şi convergenţa absolută şi uniformă a seriei (3) pe intervalul considerat.

Rezultă de aici că limita şirului aproximaţiilor este o funcţie continuă $\varphi(x)$; la limită avem

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = y_0 + \lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})\,\mathrm{d}x = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi(x))\,\mathrm{d}x. \quad (5)$$

d) Să arătăm acum că soluţia găsită verifică ecuaţia diferenţială

$$y' = f(x, y).$$

Conform celor scrise mai sus, pentru orice $x \in [x_0 - h,\ x_0 + h]$ avem

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, \varphi(t)]\ \mathrm{d}t \quad (5')$$

şi pentru că f şi φ sînt continue, rezultă că φ este derivabilă, deci

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = f(x, \varphi), \quad x \in [x_0 - h,\ x_0 + h],$$

prin urmare φ este soluţie a ecuaţiei date. Soluţia φ verifică şi condiţia iniţială, deoarece pentru $x = x_0$ avem $\varphi(x_0) = y_0$, după cum rezultă din (5'), integrala fiind nulă.

e) Rămîne să mai arătăm că soluţia găsită este unică (în condiţia iniţială dată).

Să presupunem că mai există o soluţie $\psi(x)$ care satisface aceeaşi condiţie iniţială, deci

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \psi(x))\,\mathrm{d}x,$$

atunci $|y_n(x) - \psi(x)| = \left|\int_{x_0}^{x}[f(x, y_{n-1}(x)) - f(x,\ \psi(x))]\,\mathrm{d}x\right|$

sau, folosind condiţia lui Lipschitz,

$$|y_n(x) - \psi(x)| \leqslant A\left|\int_{x_0}^{x} |y_{n-1}(x) - \psi(x)|\,\mathrm{d}x\right|,$$

de unde obţinem prin recurenţă

$$|y_n(x) - \psi(x)| \leqslant M \cdot A^{n-1}\frac{|x - x_0|^n}{n!} \leqslant MA^{n-1}\cdot\frac{h^n}{n!},$$

de unde deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} y_n(x) = \psi(x)$, deci

$$\varphi(x) = \psi(x), \quad x \in [x_0 - h,\ x_0 + h].$$

Teorema este demonstrată.

Observații

1) Valoarea y_0 poate fi considerată arbitrară, de unde rezultă că soluția generală a ecuației diferențiale

$$y' = f(x, y), \quad (x, y) \in D$$

depinde de o constantă arbitrară.

2) Prin fiecare punct $(x, y) \in [x_0 - h, x_0 + h] \times [y_0 - b, y + b]$ trece o soluție a ecuației date și numai una; prin urmare *mulțimea* soluțiilor astfel obținute este integrala generală în D a ecuației diferențiale date, în sensul dat acestei noțiuni la B, cap. 1, § 1, al. 4, anume la punctul b.

3) În construcția aproximațiilor am luat pentru aproximația de ordinul zero valoarea inițială y_0. Această valoare poate fi înlocuită cu orice funcție $u(x)$ continuă pe $|x - x_0| \leqslant a$ și care îndeplinește condiția $|u(x) - y_0| \leqslant b$. Șirul aproximațiilor se construiește în mod asemănător, anume

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, u(x))\,\mathrm{d}x,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}(x))\,\mathrm{d}x$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

și limita șirului este tot soluția $\varphi(x)$.

2. Metoda aproximațiilor succesive

Fie $y' = f(x, y)$ o ecuație diferențială, care nu intră în nici unul din tipurile prezentate anterior.

Presupunem că în domeniul $D \subset R^2$, $f(x, y)$ îndeplinește condițiile teoremei de existență. Fie (x_0, y_0) un punct interior lui D. Într-un dreptunghi $[x_0 - h, \ x_0 + h] \times [y_0 - b, \ y_0 + b]$ situat în întregime în D putem construi șirul de funcții $y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots$ care, după cum am văzut, converge uniform către soluția ecuației date care trece prin punctul $(x_0, y_0) \in D$.

Avem așadar

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\,\mathrm{d}x,$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)\,\mathrm{d}x,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})\,\mathrm{d}x$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

În general nu putem calcula soluția exactă $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x),$$

ci ne mulțumim cu o aproximație $y_p(x)$, care este cu atît mai apropiată de soluția exactă cu cît p este mai mare. Metoda folosită se numește *metoda aproximațiilor succesive* și, după cum se vede, ne dă un procedeu de aproximare a soluției ecuației diferențiale $y' = f(x, y)$ care trece printr-un punct dat (x_0, y_0), adică ne dă un procedeu aproximativ de rezolvare a problemei lui Cauchy pentru ecuația $y' = f(x, y)$.

Exemple

1) Să se determine soluția ecuației diferențiale

$$y' = x + y^2, \quad (x, y) \in [-1, +1] \times [-1, +1],$$

care trece prin punctul (0, 0).

Este o ecuație Riccati. Folosim metoda aproximațiilor succesive.

În domeniul de definiție $|x + y^2| \leqslant 2$, deci în intervalul $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, aproximațiile $y_n(x)$ converg uniform către soluția exactă. Pentru $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ avem primele trei aproximații date de

$$y_1 = \int_0^x x\,dx = \frac{x^2}{2},$$

$$y_2 = \int_0^x \left(x + \frac{x^4}{4}\right) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{20},$$

$$y_3 = \int_0^x \left(x + \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{20} + \frac{x^{10}}{400}\right) dx$$

sau

$$y_3 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{20} + \frac{x^8}{160} + \frac{x^{11}}{4400}.$$

2) Să se găsească cu metoda aproximațiilor succesive soluția ecuației diferențiale $y' = y$ care trece prin punctul (0,1).

Soluția generală a ecuației date este $y = Ce^x$, deci soluția căutată este $y = e^x$. Să regăsim această soluție folosind metoda aproximațiilor succesive.

Avem pentru $(x, y) \in [-a, a] \times [-b + 1, b + 1]$, $M = b + 1$, $A = 1$, $h = 1$, deci pentru $x \in [-1, +1]$ putem aplica metoda aproximațiilor succesive. Avem

$$y_0 = 1,$$

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x dx = 1 + x,$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x (1 + x)\,dx = 1 + x + \frac{x^2}{2!},$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) dx = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

și în general

$$y_n(x) = 1 + \int_0^x \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right) dx,$$

$$y_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}, \quad x \in [-1, +1],$$

de unde rezultă imediat că soluția $\varphi(x)$ căutată este

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = e^x, \quad x \in [-1, +1].$$

Soluția obținută numai pentru $x \in [-1, +1]$ este, evident, valabilă și pentru $x \in R$.

S. A. Ceaplîghin a dat o altă metodă de calcul aproximativ al unei soluții a unei ecuații diferențiale $y' = f(x, y)$, metodă care diferă esențial de cea prezentată aici. Se găsește expusă în Cursul de calcul integral, de N. N. Luzin, pag. 467–480.

§ 7. INTEGRALE SINGULARE

1. Integrale singulare ale ecuației $y' = f(x,y)$

Definiție. Fie ecuația diferențială

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

cu $f(x, y)$ continuă într-un domeniu $D \subset R^2$. O soluție a ecuației (1) se spune că este o soluție singulară dacă condițiile din teorema de existență nu sînt îndeplinite în nici unul din punctele ei.

Din definiție rezultă că o funcție $y = \varphi(x)$, a cărei grafie este un arc de curbă $\Gamma \subset D$, este o soluție singulară dacă

1′) $\varphi(x)$ și $\varphi'(x)$ verifică identic ecuația (1) în D,

2′) în orice vecinătate a fiecărui punct al curbei Γ există cel puțin două curbe integrale, care trec prin acel punct. Avem mai multe cazuri de considerat:

a) Fie ecuația $y' = f(x,y)$ cu f continuă în D. Deoarece f este continuă, rămîne de studiat numai cazul cînd condiția lui Lipschitz nu este îndeplinită. Trebuie să avem

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leqslant A\,|y_2 - y_1|$$

pentru orice $(x, y_1) \in D$, $(x, y_2) \in D$. Dacă împărțim cu $y_2 - y_1 \neq 0$ obținem

$$\left|\frac{f(x, y_2) - f(x, y_1)}{y_2 - y_1}\right| \leqslant A,$$

de unde rezultă că de-a lungul curbelor trasate în D pentru care $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = +\infty$, condiția lui Lipschitz nu este îndeplinită.

Exemplu

Ecuația $y' = (y-1)^{\frac{2}{3}}$ are pe $y = 1$ integrală singulară. În ecuație se separă variabilele

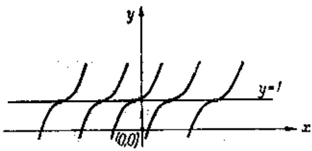

Fig. 125

$$\frac{dy}{(y-1)^{\frac{2}{3}}} = dx$$

și

$$(y-1)^{\frac{1}{3}} = x + C.$$

Integrala generală este familia de parabole cubice $y = 1 + (x + C)^3$, (fig. 125).

Ecuația diferențială are și soluția $y = 1$, după cum se verifică imediat. De-a lungul dreptei $y = 1$, $f(x, y) = (y-1)^{\frac{2}{3}}$ are derivata $f'_y = \frac{2}{3}(y-1)^{-\frac{1}{3}}$ infinită, deci $y = 1$ este o soluție singulară. Dreapta $y = 1$ este locul geometric al punctelor de inflexiune ale curbelor care formează integrala generală.

b) Fie ecuația diferențială

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

cu f continuă în $D \subset R^2$.

Ecuația (1) se poate scrie sub forma echivalentă

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)},$$

unde funcția este x. Condiția lui Lipschitz, de astă dată, se scrie

$$\left|\frac{1}{f(x_1, y)} - \frac{1}{f(x_2, y)}\right| = \left|\frac{f(x_2, y) - f(x_1, y)}{f(x_1, y)\, f(x_2, y)}\right| \leqslant A\,|x_2 - x_1|; \tag{2}$$

avem două cazuri de considerat

I. Dacă $f(x, y)$ se anulează de-a lungul unei curbe Γ situate în D, atunci de-a lungul acestei curbe condițiile din teorema de existență nu sînt îndeplinite. Într-adevăr, de-a lungul acestei curbe $\frac{1}{f(x, y)}$ nu este mărginită. În această situație avem două posibilități.

I$_1$) Fie $x = \varphi(y)$ (sau $y = \psi(x)$) ecuația curbei Γ; dacă funcția $\varphi(y)$ verifică ecuația (1) însă graficul curbei Γ nu întîlnește nici una din curbele definite de integrala generală în puncte cu ambele coordonate finite, atunci curba Γ nu este o soluție singulară a ecuației (1).

Exemplu

Ecuația $y' = (y-1)^{\frac{3}{2}}$ are soluție dreapta $y = 1$, însă este o dreaptă asimptotă a soluțiilor reprezentate de integrala generală. Separînd variabilele avem

$$(y-1)^{-\frac{3}{2}}\, dy = dx,$$

de unde obținem

$$-\frac{1}{2}(y-1)^{-\frac{1}{2}} = x + C$$

sau

$$y = 1 + \frac{1}{4(x+C)^2},$$

care reprezintă integrala generală. Soluția $y = 1$ se obține pentru $C \to \infty$. Din expresia integralei generale rezultă că soluțiile ecuației date se găsesc toate deasupra dreptei $y = 1$, și pentru $y \to 1 + 0$, $x \to -\infty$, prin urmare $y = 1$ nu este o integrală singulară.

I$_2$) Fie $x = \varphi(y)$ ecuația curbei Γ; dacă funcția $\varphi(y)$ verifică ecuația (1), iar graficul curbei Γ întîlnește curbele definite de integrala generală în puncte cu coordonatele finite, atunci curba Γ este o soluție singulară a ecuației (1).

Exemplu

Ecuația $\sqrt{x-a}\, y' = 1$ are dreapta $x = a$ integrală singulară. Avem, separînd variabilele,

$$(x-a)^{-\frac{1}{2}}\, dx = dy$$

de unde obținem

$$2(x-a)^{\frac{1}{2}} = y + C$$

care reprezintă o familie de parabole. Pentru $x \to a+$, $y \to -C$, deci $x = a$ este o soluție singulară (fig. 126).

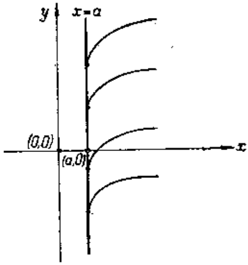

Fig. 126

II) Din neegalitatea (2) mai rezultă : dacă $\frac{1}{f(x,y)}$ este continuă în D, însă $f'_x(x,y)$ este nemărginită de-a lungul unei curbe $\Gamma \subset D$, atunci condiția lui Lipschitz nu este îndeplinită pentru ecuația

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)};$$

dacă, în plus, curba Γ este și o curbă integrală, atunci Γ este o curbă integrală singulară.

Exemplu

Ecuația diferențială $(x+1)^{\frac{2}{3}}\, y' = 2$ are dreapta $x = -1$ integrală singulară. Ecuația dată se scrie

$$\frac{dy}{dx} = 2\,(x+1)^{-\frac{2}{3}}$$

cu $f(x, y) = 2\,(x+1)^{-\frac{2}{3}}$, $f'_x(x, y) = -\frac{4}{3}\,(x+1)^{-\frac{5}{3}}$ și $\lim\limits_{x\to -1} |f'_x(x, y)| = +\infty$, deci $x = -1$ este integrală singulară, deoarece verifică ecuația $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}\,(x+1)^{\frac{2}{3}}$.

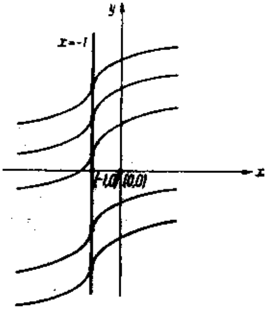

Fig. 127

Pentru a obține soluția generală a ecuației date separăm variabilele

$$dy = 2\,\frac{dx}{(x+1)^{\frac{2}{3}}}$$

și integrăm

$$y + C = 6\,(x+1)^{\frac{1}{3}};$$

soluția generală este familia de parabole cubice

$$x + 1 = \left(\frac{y+C}{6}\right)^3. \tag{α}$$

Dreapta $x + 1 = 0$ este locul punctelor de inflexiune ale curbelor (α) cînd C variază, (fig. 127).

2. Integrale singulare ale ecuației $F(x, y, y') = 0$

Teoremă. **Fie $F(x, y, p) = 0$, $(p = y')$, o ecuație diferențială de ordinul întîi cu F continuă și derivabilă parțial într-un domeniu $D \subset R^3$.**

Dacă ecuațiile

$$F(x, y, p) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial F(x, y, p)}{\partial p} = 0, \tag{1'}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} + p\,\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \tag{1''}$$

sînt compatibile în raport cu parametrul p, atunci curba Γ, definită de ecuațiile (1) și (1') (prin eliminarea parametrului p), este o soluție singulară a ecuației (1).

Demonstrație. Am văzut la alineatul precedent că pentru ecuația $p = f(x, y)$, $(y' = p)$, $(x, y) \in D$, dacă $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = +\infty$ de-a lungul unei curbe $\Gamma \subset D$ și dacă Γ este o integrală a ecuației $p = f(x, y)$, atunci Γ este o integrală singulară. Să observăm că pentru ecuația $p = f(x, y)$ avem

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y},$$

deci de-a lungul curbei Γ, $\left|\frac{\partial p}{\partial y}\right| = +\infty$. Dacă calculăm acum pe $\frac{\partial p}{\partial y}$ din ecuația (1) după regula de derivare a funcțiilor implicite, avem

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial p}},$$

prin urmare condiția $\left|\frac{\partial p}{\partial y}\right| = +\infty$ este echivalentă cu relația (1′)

$$\frac{\partial F(x, y, p)}{\partial p} = 0.$$

Eliminînd pe p între (1) și (1′) obținem relația

$$g(x, y) = 0, \tag{2}$$

numită *curba caracteristică* a familiei de curbe (1), unde p este considerat parametru.

Pentru ca ecuația $g(x, y) = 0$ să definească o curbă integrală Γ a ecuației (1), trebuie ca în fiecare punct al curbei coeficientul unghiular p al tangentei dat de

$$g'_x + p\, g'_y = 0 \tag{3}$$

să fie același cu coeficientul p din ecuațiile (1) și (1′).

Pentru calculul lui p din (3) trebuie să determinăm în prealabil pe $g(x, y)$. Putem evita acest lucru în modul următor. Rezultatul eliminării lui p între (1) și (1′) este evident

$$g(x, y) \equiv F(x, y, p(x, y)),$$

$p(x, y)$ fiind funcția ce rezultă din (1′). Avem

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}$$

şi pentru că de-a lungul curbei caracteristice conform lui (1′) avem $\frac{\partial F}{\partial p} = 0$, urmează că

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y},$$

deci relaţia (3) se transformă în

$$\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial y} = 0. \tag{3′}$$

În concluzie, curba, sau curbele Γ, definite de ecuaţia $g(x, y) = 0$, adică de sistemul

$$F(x, y, p) = 0, \quad F'_p(x, y, p) = 0,$$

unde p este considerat parametru, sînt soluţii singulare ale ecuaţiei $F(x, y, y') = 0$, dacă următoarele ecuaţii

$$F(x, y, p) = 0, \quad F'_p(x, y, p) = 0, \quad F'_x + pF'_y = 0$$

sînt compatibile în p. Teorema este demonstrată.

Aplicaţie

Ecuaţia Clairaut

$$y - xp - \varphi(p) = 0 \tag{α}$$

are soluţia singulară

$$x = -\varphi'(p), \quad y = \varphi(p) - p\,\varphi'(p), \tag{β}$$

Într-adevăr, condiţia (1″) din teoremă devine $-p + p = 0$, deci este identic satisfăcută. Soluţia singulară se obţine eliminînd pe p între ecuaţia (α) şi relaţia

$$-x - \varphi'(p) = 0$$

care conduce la soluţia (β), p fiind considerat parametru.

Exemple

1) Să găsim soluţiile singulare ale ecuaţiei

$$9(y - x) + 4y'^3 - 6y'^2 = 0.$$

Înlocuind pe y' cu p, cele trei ecuaţii (1), (1′), (1″) din teoremă se scriu

$$9(y - x) + 4p^3 - 6p^2 = 0,$$

$$12p^2 - 12p = 0,$$

$$-9 + 9p = 0.$$

Soluţia comună este $p = 1$, care ne dă integrala singulară

$$y - x = \frac{2}{9}.$$

Pentru $p = 0$ obținem funcția $y - x = 0$ care nu este soluție a ecuației date; ea este locul punctelor singulare.

2) Să găsim soluțiile singulare ale ecuației

$$y^2 + y'^2 = 1.$$

Înlocuind pe y' cu p, cele trei ecuații (1), (1'), (1'') din teoremă se scriu

$$p^2 + y^2 = 1, \quad 2p = 0, \quad 2yp = 0;$$

pentru $p = 0$, sistemul este compatibil. În această situație obținem soluțiile $y^2 = 1$ sau $y = 1$,

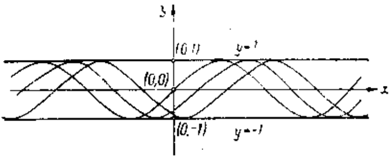

Fig. 128

$y = -1$. Ambele soluții sînt soluții singulare. Integrala generală este $y = \sin(x + C)$, iar cele două soluții sînt înfășurătoarele familiei de sinusoide (fig. 128).

3. Determinarea soluțiilor singulare folosind expresia integralei generale

Să considerăm ecuația diferențială

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

căreia i-am găsit integrala generală

$$\Phi(x, y, C) = 0. \tag{2}$$

Avem următoarea

T e o r e m ă. Dacă familia de curbe $\Phi(x, y, C) = 0$ are o înfășurătoare Γ, atunci curba Γ este o soluție singulară a ecuației $F(x, y, y') = 0$.

Demonstrație. În fiecare punct al înfășurătoarei, elementul de contact (x, y, y') coincide cu elementul de contact al uneia din curbele integrale ale familiei la care curba Γ este tangentă (fig. 129), și pentru că toate curbele integrale ale familiei (2) sînt soluții ale ecuației (1), rezultă că în fiecare punct al ei înfășurătoarea satisface ecuația (1). Curba Γ este o *soluție singulară*, deoarece de-a lungul ei teorema de uni-

Fig. 129

citate nu este satisfăcută; într-adevăr, prin fiecare punct al curbei Γ trec două soluţii ale ecuaţiei diferenţiale (1), anume curba Γ şi una din curbele integrale din familia (2) cu care Γ are tangenta comună. Teorema este demonstrată.

Pentru determinarea curbei Γ, eliminăm parametrul C între ecuaţia

$$\Phi(x, y, C) = 0 \tag{3}$$

şi ecuaţia

$$\frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial C} = 0, \tag{4}$$

după cum ştim că se procedează în geometria analitică. Rezultatul eliminării este o relaţie

$$g(x, y) = 0$$

care poate fi o soluţie singulară. Într-adevăr, tot din geometria analitică ştim că $g(x, y) = 0$ poate reprezenta înfăşurătoarea familiei de curbe definite de (1), dar poate fi şi locul punctelor singulare (puncte nodale, puncte de întoarcere etc.). Într-un punct singular însă este verificat sistemul

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0. \tag{5}$$

Prin urmare, după ce am determinat funcţia $g(x, y)$, prin eliminarea constantei C dintre ecuaţiile (3) şi (4), cercetăm dacă $g(x, y) = 0$ verifică sistemul (5). Dacă *nu-l verifică*, atunci $g(x, y) = 0$ reprezintă integrala singulară.

Aplicaţie

Ecuaţia lui Clairaut $y = xy' + \varphi(y')$ are integrala generală $y = xC + \varphi(C)$. Soluţia singulară se obţine eliminînd pe C între ecuaţiile

$$y = xC + \varphi(C),$$

$$x = -\varphi'(C)$$

care constituie şi reprezentarea parametrică a ecuaţiei singulare, identică cu aceea găsită la alineatul precedent. Relaţiile (5) nu sînt verificate

Exemple

1) Ecuaţia diferenţială Lagrange

$$y = x + \frac{8}{27}p^3 - \frac{4}{9}p^2$$

are integrala generală

$$(y - C)^2 = (x - C)^3.$$

Să găsim cu metoda de mai sus soluţiile singulare. Avem, luînd derivata logaritmică în raport cu C,

$$\frac{2}{y - C} = \frac{3}{x - C},$$

deci $C = 3y - 2x$. Dacă înlocuim în integrala generală obţinem

$$27\,(y - x)^3 + 4\,(y - x)^2 = 0$$

sau

$$(y - x)^2 \left[y - x + \frac{4}{27} \right] = 0.$$

Dreapta $y = x$ nu verifică ecuaţia dată ; ea reprezintă locul punctelor singulare. Dreapta $y = x - \dfrac{4}{27}$ este soluţia singulară, deoarece reprezintă înfăşurătoarea. Se observă că nu verifică sistemul (5).

2) Pentru ecuaţia $y'^2 + y^2 = 1$, am găsit la alineatul precedent că are soluţiile singulare $y = 1$ şi $y = -1$; să le regăsim cu metoda de mai sus. Integrala generală a ecuaţiei date este

$$y = \sin\,(x + C)\,;$$

dacă derivăm în raport cu C obţinem $\cos\,(x + C) = 0$; eliminînd pe C între aceste două ecuaţii obţinem $y^2 - 1 = 0$, adică $y = 1$ şi $y = -1$. Amîndouă sînt soluţii singulare, deoarece nu verifică relaţiile (5).

Capitolul II

ECUAŢII DIFERENŢIALE DE ORDIN SUPERIOR

§ 1. GENERALITĂȚI

1. Soluție generală. Soluții particulare

Am spus la începutul capitolului precedent că o ecuație diferențială este o relație de forma

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{1}$$

Se numeşte ordinul ecuaţiei diferenţiale (1), ordinul derivatei de ordin maxim care figurează în această ecuaţie.

Exemple

1) Ecuaţia $y''' - y' + y = \cos x$ este o ecuaţie diferenţială de ordinul trei.
2) Ecuaţia $y^{(n)} + y'' + y = x$ este o ecuaţie diferenţială de ordinul n.

O ecuaţie diferenţială se spune că este de *ordin superior* dacă ordinul său n este mai mare sau egal cu 2.

Se numeşte soluţie pe $[a, b]$ a ecuaţiei diferenţiale (1) o funcţie $y = \varphi(x)$, derivabilă de n ori pe $[a, b]$, care verifică ecuaţia (1)

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) = 0$$

pentru orice $x \in [a, b]$.

Exemple

1) $y'' - y = 0$ este o ecuaţie diferenţială de ordinul doi. Funcţia $y = e^x + 2e^{-x}$, $x \in R$, este o soluţie a ecuaţiei. Funcţia $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$, $x \in R$, unde C_1, C_2 sînt constante arbitrare, este tot o soluţie a ecuaţiei date.

2) Ecuaţia $x^3 y''' + 2xy' - 2y = 0$ este de ordinul trei. Funcţia $y = x + x\cos(\ln|x|) + 2x\sin(\ln|x|)$, $x \neq 0$ este o soluţie a ecuaţiei. Funcţia $y = C_1 x + C_2 x\cos(\ln|x|) + C_3 x \sin(\ln|x|)$, unde C_1, C_2, C_3 sînt constante arbitrare, este tot o soluţie a ecuaţiei date.

Din exemplele prezentate se vede că soluţiile unei ecuaţii diferenţiale de ordin superior conţin constante arbitrare.

În cele ce urmează vom spune că *funcţia* $\varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ *este soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale de ordinul* n

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

studiată într-un domeniu $D \ni (x, y)$, dacă φ este soluție a ecuației (1) și dacă prin alegerea convenabilă a constantelor $C_1 C_2, \ldots, C_n$, funcția $\varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ se transformă în orice soluție a ecuației (1) al cărei grafic se află în D.

Observații

1) Soluția generală a unei ecuații diferențiale de ordinul n poate fi dată și implicit printr-o relație de forma

$$R(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0;$$

de obicei, unei relații de această formă i se dă numirea de *integrală generală* pentru a se distinge de $\varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ care este numită *soluție generală.*

2) Soluția generală a unei ecuații diferențiale de ordinul n poate fi dată și parametric printr-un sistem

$$x = \varphi(t, C_1, C_2, \ldots, C_n),$$
$$y = \psi(t, C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

Se numește soluție particulară a ecuației (1) o funcție $y = \varphi^*(x)$, $x \in [a, b]$, $(x, y) \in D$, care se obține din soluția generală dînd valori particulare constantelor $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Graficul unei soluții particulare, a unei ecuații diferențiale (1), este o curbă plană, numită *curbă integrală.*

Exemplu

Ecuația diferențială $y'' - 2y' + y = 0$ are soluția generală dată de $y = C_1e^x + C_2xe^x$, $x \in R$. Funcția $y = e^x$ este o soluție particulară ce se obține din soluția generală luînd $C_1 = 1$ și $C_2 = 0$.

Am spus că integrala generală a unei ecuații diferențiale de ordinul n

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

depinde de n constante arbitrare, fapt pe care îl vom demonstra mai tîrziu. Putem arăta însă imediat că, invers, o familie de curbe plane

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0, \quad (x, y) \in D, \tag{1'}$$

cu Φ continuă și derivabilă parțial de n ori în D verifică în D o ecuație diferențială de ordinul n. Într-adevăr, derivînd în (1') obținem succesiv

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y' = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\, \partial y} y' + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y'' = 0, \tag{2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial^n \Phi}{\partial x^n} + n\frac{\partial^n \Phi}{\partial x^{n-1}\, \partial y} y' + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y^{(n)} = 0,$$

relații care împreună cu ecuația (1') formează un sistem de $n+1$ ecuații cu n necunoscute $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Dacă determinăm pe $C_1, C_2, \ldots, C_n$ din cele n ecuații (2) și le înlocuim în (1) obținem o relație de forma

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

adică o ecuație diferențială de ordinul n; prin urmare o familie de curbe care depinde de n parametri verifică în general o ecuație diferențială de ordinul n. De aici rezultă următoarea consecință.

Fie $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ o ecuație diferențială de ordinul n și $\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0$ o familie de curbe plane care depinde de n parametri $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Dacă între ecuația familiei $\Phi = 0$ și cele n ecuații ce se obțin derivînd, o dată, de două ori ș.a.m.d., de n ori ecuația $\Phi = 0$, eliminăm pe $C_1, C_2, \ldots, C_n$, și dacă rezultatul eliminării este ecuația diferențială $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, spunem că $\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0$ este integrala generală a ecuației diferențiale $F = 0$.

Exemple

1) Familia de curbe

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x, \quad x \in R,$$

verifică ecuația diferențială $y'' + y = 0$.

Dacă derivăm de două ori, obținem

$$y' = C_1 \cos x - C_2 \sin x,$$

$$y'' = -C_1 \sin x - C_2 \cos x,$$

deci $y'' + y = 0$.

2) Familia de curbe

$$y = e^x + C_0 + C_1 x + \ldots + C_{n-1} x^{n-1}, \quad x \in R$$

verifică ecuația diferențială de ordinul n

$$y^{(n)} = e^x.$$

Prin derivare obținem succesiv

$$y' = e^x + C_1 + 2C_2 x + \ldots + (n-1) C_{n-1} x^{n-2},$$

$$y'' = e^x + 2C_2 + 2.3\, C_3 x + \ldots + (n-1)(n-2) C_{n-1} x^{n-3},$$

$$y^{(n)} = e^x;$$

ultima relație este ecuația căutată, deoarece parametrii $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}$ s-au eliminat.

2. Integrale intermediare. Integrale prime

Fie

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

o ecuație diferențială de ordinul n și

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0 \tag{2}$$

integrala generală. Dacă derivăm o dată, de două ori, ş.a.m.d. de $n-k$ ori pe (2) şi eliminăm între aceste $n-k+1$ relaţii pe $C_{k+1}, C_{k+2}, \ldots, C_n$, obţinem o legătură de forma

$$\Psi(x, y, y', \ldots, y^{(n-k)}, C_1, C_2, \ldots, C_k) = 0,$$

care se numeşte o ***integrală intermediară*** a ecuaţiei (1).

O integrală intermediară are şi următoarea definiţie echivalentă:

Definiţie. Fie ecuaţia diferenţială de ordinul n

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{1}$$

Se numeşte o integrală intermediară a ecuaţiei date o ecuaţie diferenţială de ordin $n-k$, care conţine $k \geqslant 1$ constante arbitrare

$$\Psi(x, y, y', \ldots, y^{(n-k)}, C_1, C_2, \ldots, C_k) = 0 \tag{3}$$

şi care este verificată de integrala generală a ecuaţiei (1).

În particular, dacă $k = 1$, adică (3) este o relaţie de forma

$$\chi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, C) = 0,$$

se numeşte integrală primă.

Observaţii.

1) Cunoaşterea unei integrale intermediare simplifică rezolvarea ecuaţiei iniţiale; dacă

$$\Psi(x, y, y', \ldots, y^{(n-k)}, C_1, C_2, \ldots, C_k) = 0 \tag{3}$$

este o integrală intermediară a ecuaţiei (1), atunci integrarea ecuaţiei (1) se reduce la integrarea ecuaţiei (3) care este mai simplă, fiind de ordin mai mic, anume $n-k$.

Într-adevăr, integrala generală a ecuaţiei (3) conţine $n-k$ constante arbitrare şi dacă adăugăm la acestea cele k constante care intră în structura ecuaţiei (3), soluţia găsită va conţine n constante arbitrare, deci va fi integrala generală a ecuaţiei (1).

În particular, cunoaşterea a n integrale prime, distincte, ale ecuaţiei (1)

$$\Psi_i(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, C_i) = 0, \; i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

este echivalentă cu cunoaşterea soluţiei generale a ecuaţiei (1), deoarece din sistemul (4) putem deduce pe $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ în raport cu $x, C_1, C_2, \ldots, C_n$; în particular rezultă

$$y = (x, C_1, C_2, \ldots, C_n),$$

adică soluţia generală a ecuaţiei (1).

3. Condiții inițiale. Problema lui Cauchy.

Dacă ni se dă o ecuație diferențială de ordinul n

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

nu este totdeauna necesar să-i găsim soluția generală. Într-adevăr, dacă ecuația dată corespunde unui anumit fenomen fizic, pentru determinarea fenomenului fizic corespunzător este necesară o anumită soluție, care pe lîngă faptul că verifică ecuația diferențială, mai trebuie să îndeplinească anumite condiții, numite *condiții inițiale*, și care o determină în mod unic. În general ni se cere o soluție a ecuației date astfel încît pentru $x = x_0$, funcția y și derivatele ei $y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ să ia valori date dinainte $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$,

$$y(x_0) = a_0,\ y'(x_0) = a_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}; \tag{2}$$

problema determinării soluției $y(x)$ care îndeplinește condițiile inițiale (2) se numește problema lui Cauchy.

4. Exemple de ecuații diferențiale de ordin superior care apar în probleme practice

I. După cum am văzut, ecuația de mișcare a unui punct material de masă m care descrie o dreaptă, pe care luăm axa Ox, este

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right),$$

adică o ecuație diferențială de ordinul doi. Pentru a determina mișcarea unui punct, trebuie să ne fie dat la timpul $t = t_0$ atît viteza inițială $v_0 = v(t_0)$ cît și punctul de unde plecăm $x_0 = x(t_0)$.

II. Să considerăm un circuit liniar format dintr-un condensator de capacitate C, legat în serie cu un rezistor de rezistență R și o bobină de inductanță L.

Să se studieze regimul tranzitoriu la închiderea circuitului conectat la bornele unui generator $e = E = \text{const}$.

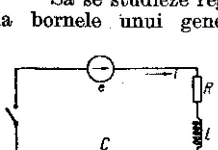

Fig. 130

Teorema lui Kirchoff ne dă, (fig. 130),

$$E = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\, dt,$$

însă

$$i(t) = \frac{dq}{dt},$$

de unde rezultă pentru determinarea lui q ecuația diferențială de ordinul doi

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=E.$$

Am notat cu $q\,(t)$ cantitatea de electricitate de pe plăcile condensatorului la momentul t.

III. Se dă o grindă verticală articulată la cele două capete (fig. 131), încărcată cu o sarcină uniform distribuită $q$kgf/cm cu forța și normală P. Lungimea grinzii este $2l$. Într-o secțiune a grinzii lucrează momentul

$$M\,(x, y)=\frac{1}{2}Ql\,\cos\frac{\pi}{2l}x+Py,$$

$$(Q=2ql),$$

care este o aproximare a expresiei $M_1=\frac{1}{2}q\,(l^2-x^2)+Py$. Ecuația diferențială a fibrei medii deformate este

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{P}{EI}y+\frac{1}{4}\frac{Ql}{EI}\cdot\cos\frac{\pi}{2l}x=0, \quad (\alpha)$$

unde E și I sînt constante.

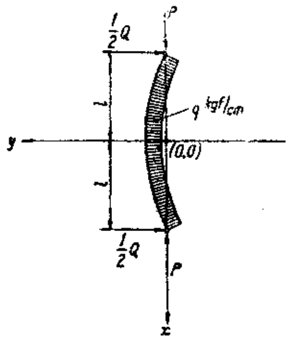

Fig. 131

Soluția generală a ecuației diferențiale (α) depinde de două constante arbitrare. Soluția căutată se obține observînd că $y\,(-l)=0$, $y\,(l)=0$ și este dată de

$$y\,(x)=\frac{1}{4}\frac{Ql}{EI\cdot\frac{\pi^2}{4l^2}-P}\cos\frac{\pi}{2l}x.$$

IV. Ecuația diferențială a tuturor conicelor din plan este

$$\frac{d^3}{dx^3}\left[\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{-\frac{2}{3}}\right]=0.$$

§ 2. ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDIN SUPERIOR INTEGRABILE PRIN CUADRATURI

1. Ecuația $y^{(n)}=0$

Cea mai simplă ecuație diferențială de ordinul n este

$$y^{(n)}=0;$$

soluţia ei generală este un polinom arbitrar de gradul $n-1$

$$y = C_0 + C_1 x + \ldots + C_{n-1} x^{n-1},\ x \in R. \tag{1}$$

Exemplu

Să se determine soluţia ecuaţiei $y''' = 0$, care îndeplineşte condiţiile iniţiale : $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$, $y''(1) = -1$.

Soluţia generală este $y(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2$, $x \in R$. Avem de asemenea

$$y'(x) = C_1 + 2C_2 x,\quad y''(x) = 2C_2,$$

de unde rezultă

$$C_0 + C_1 + C_2 = 1,$$
$$C_1 + 2C_2 = 0,$$
$$2C_2 = 1,$$

cu soluţia $C_2 = \frac{1}{2}$, $C_1 = -1$, $C_0 = \frac{1}{2}$. Soluţia particulară care satisface condiţiile iniţiale este aşadar

$$y(x) = \frac{1}{2} - x + \frac{1}{2} x^2,\qquad x \in R.$$

2. Ecuaţia $y^{(n)} = f(x)$

Teoremă. Fie ecuaţia diferenţială de ordinul n

$$y^{(n)} = f(x) \tag{1}$$

cu f continuă pentru $x \in [a, b]$.

Soluţia generală a ecuaţiei (1) este dată de

$$y(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1} f(t)\,\mathrm{d}t + C_0 + C_1 \frac{(x-x_0)}{1!} + \ldots$$
$$\ldots + C_{n-1} \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!},\qquad x \in [a, b]$$

unde $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}$ sînt constante arbitrare, iar x_0 este un punct oarecare, însă fix din $[a, b]$.

Demonstraţie. Soluţia generală se poate obţine prin n cuadraturi. Într-adevăr, putem scrie

$$y^{(n)} = \frac{\mathrm{d}y^{(n-1)}}{\mathrm{d}x} = f(x),$$

de unde obţinem

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x + C_{n-1};$$

în continuare

$$y^{(n-2)} = \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x \int_{x_0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x + C_{n-1}(x - x_0) + C_{n-2},$$

$$y^{(n-3)} = \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x \int_{x_0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x + C_{n-1}\frac{(x-x_0)^2}{2!} + C_{n-2}(x - x_0) + C_{n-3};$$

obținem astfel

$$y = \underbrace{\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x \ldots \int_{x_0}^{x}}_{\text{de } n \text{ ori}} f(x)\,\mathrm{d}x + C_{n-1}\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + C_1(x - x_0) + C_0.$$

Rămîne să mai arătăm că

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x \ldots \int_{x_0}^{x}}_{\text{de } n \text{ ori}} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1} f(t)\,\mathrm{d}t. \qquad (1')$$

Vom demonstra prin inducție completă. Pentru $n = 2$ avem

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x \int_{x_0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \iint_D f(t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,$$

unde D este triunghiul din figura 132; schimbînd ordinea de integrare obținem

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}t \int_{t}^{x} f(t)\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \int_{t}^{x} \mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x} (x-t) f(t)\,\mathrm{d}t,$$

deci formula (1') este adevărată pentru $n = 2$. Presupunem că este adevărată pentru $n - 1$ și să arătăm că este adevărată și pentru n.

Avem deci

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x \ldots \int_{x_0}^{x}}_{\text{de } n-1 \text{ ori}} f(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{(n-2)!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-2} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

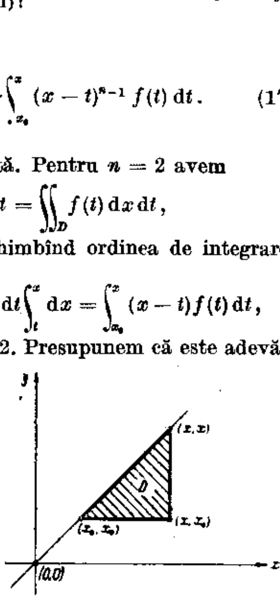

Fig. 132

Mai integrăm o dată în raport cu x; obținem

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x \ldots \int_{x_0}^{x}}_{\text{de } n \text{ ori}} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(n-2)!}\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x \int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-2} f(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{(n-2)!}\iint_D (x-t)^{n-2} f(t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{(n-2)!}\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \int_{t}^{x} (x-t)^{n-2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

deci formula este adevărată și pentru n. Teorema este demonstrată.

Exemplu

Să se găsească soluția ecuației

$$y''' = \cos x\,, \quad x \in R$$

care satisface condițiile inițiale $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = -1$.

Avem, integrînd succesiv,

$$y'' = \sin x + C_0\,,$$

$$y' = -\cos x + C_0 x + C_1\,,$$

$$y(x) = -\sin x + \frac{1}{2} C_0 x^2 + C_1 x + C_2\,,\ x \in R\,;$$

am obținut soluția generală. Soluția particulară $y_0(x)$ căutată se obține determinînd constantele C_0, C_1, C_2 din condițiile inițiale; avem

$$C_2 = 1\,, \quad -1 + C_1 = 2\,, \quad C_0 = -1\,,$$

deci

$$y_0(x) = -\sin x - \frac{1}{2} x^2 + 3x + 1\,, \quad x \in R\,.$$

3. Ecuația $F(x, y^{(n)}) = 0$

Teoremă. Fie ecuația diferențială $F(x, y^{(n)}) = 0$. Dacă se cunoaște o reprezentare parametrică a curbei $F(u, v) = 0$, $u = \varphi(t)$, $v = \psi(t)$, cu φ și ψ funcții continue cu derivate continue pe $[a, b]$, atunci integrala generală pe $[a, b]$ a ecuației se obține prin n cuadraturi.

Demonstrație. Fie

$$u = \varphi(t)\,, \quad v = \varphi(t)\,, \quad t \in [a, b]$$

o reprezentare parametrică a curbei $F(u, v) = 0$. Avem

$dx = \varphi'(t)dt$ $$x = \varphi(t)\,, \quad y^{(n)} = \psi(t)$$

sau

$$d(y^{(n-1)}) = y^{(n)}\,dx = \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt\,,$$

de unde obținem printr-o cuadratură

$$y^{(n-1)} = \int \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt + C_0 = \Phi_1(t) + C_0\,;$$

în continuare $d(y^{(n-2)}) = (\Phi_1(t) + C_0)\,\varphi'(t)\,dt$, deci

$$d(y^{(n-2)}) = \int \Phi_1(t)\,\varphi'(t)\,dt + C_0\,\varphi(t) + C_1\,.$$

Repetînd operația de n ori obținem pe y

$$y = \Phi(t) + P_{n-1}(\varphi(t))\,, \qquad t \in [a, b]\,,$$

care împreună cu $x = \varphi(t)$ ne dă integrala generală sub forma parametrică (am notat cu P_{n-1} un polinom arbitrar de grad $n-1$ în $\varphi(t)$). Teorema este demonstrată.

Observație

Dacă ecuația este explicită în raport cu x, adică

$$x = f(y^{(n)}),$$

atunci o reprezentare parametrică este dată de $y^{(n)} = t$, $x = f(t)$.

Exemplu

$x = y'' + \ln y''$, $y'' > 0$. Cu $y'' = t$, $x = t + \ln t$ obținem

$$y' = \int y''\,dx = \int t\left(1 + \frac{1}{t}\right) dt = \frac{1}{2}t^2 + t + C_0,$$

$$y = \int y'\,dx = \int\left(\frac{1}{2}t^2 + t\right)\left(t + \frac{1}{t}\right) dt + C_0 t + C_1,$$

integrala generală este așadar

$$\begin{cases} x = t + \ln t \\ y = \frac{1}{8}t^4 + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{4}t^2 + t + C_0 t + C_1, \quad t > 0. \end{cases}$$

4. Ecuația $F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$

Teoremă. Fie ecuația diferențială $F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$. Dacă se cunoaște o reprezentare parametrică a curbei $F(u, v) = 0$, $u = \varphi(t)$, $v = \psi(t)$ cu φ, ψ și φ' continue, iar $\psi(t) \neq 0$ pe $[a, b]$, atunci integrala generală se obține prin n cuadraturi.

Demonstrație. Dacă $u = \varphi(t)$, $v = \psi(t)$ este o reprezentare parametrică a curbei $F(u, v) = 0$ putem scrie

$$y^{(n-1)} = \varphi(t),\ y^{(n)} = \psi(t), \quad t \in [a, b]$$

sau

$$y^{(n-1)} = \varphi(t), \quad d(y^{(n-1)}) = \psi(t)\,dx = \varphi'(t)dt$$

deci

$$dx = \frac{\varphi'(t)\,dt}{\psi(t)},$$

de unde obținem printr-o cuadratură

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt + C_0 = \Phi(t) + C_0.$$

Avem așadar

$$\begin{cases} y^{(n-1)} = \varphi(t), \\ x = \Phi(t) + C_0 \end{cases} \qquad dx = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt$$

și am redus problema integrării la aceea rezolvată la alineatul precedent. În continuare avem

$$d(y^{(n-2)}) = \varphi(t)\,dx = \frac{\varphi(t)\,\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt,$$

deci printr-o cuadratură

$$y^{(n-2)} = \int \frac{\varphi(t)\,\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt + C_1$$

ș.a.m.d. Prin încă $n-2$ cuadraturi se obține integrala generală sub forma parametrică.

Exemplu

$y'''^2 + y''^2 = 1$. O reprezentare parametrică este $y'' = \sin t$, $y''' = \cos t$; avem

$$d(y'') = y'''\,dx, \quad \text{sau} \quad \cos t\,dt = \cos t\,dx,$$

deci

$$dx = dt, \quad x = t + C_0.$$

Obținem sistemul

$$\begin{aligned} y'' &= \sin t, \\ x &= t + C_0, \\ y'' &= \sin(x - C_0), \\ y' &= -\cos(x - C_0) + C_1, \\ y &= -\sin(x - C_0) + C_1 x + C_2, \quad x \in R, \end{aligned}$$

care reprezintă soluția generală a ecuației date.

5. Ecuația $F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$

Teoremă. Fie ecuația diferențială $F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$. Dacă se cunoaște o reprezentare parametrică a curbei $F(u, v) = 0$, $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, cu φ, ψ, ψ' continue pe $[a, b]$, atunci integrala generală se obține prin n cuadraturi.

Demonstrație. Fie $u = \varphi(t)$, $v = \psi(t)$, $t \in [a, b]$ o reprezentare parametrică a curbei $F(u, v) = 0$. Avem

$$y^{(n-2)} = \varphi(t), \quad y^{(n)} = \psi(t) \tag{1}$$

sau

$$d(y^{(n-1)}) = y^{(n)}\,dx, \quad d(y^{(n-2)}) = y^{(n-1)}\,dx$$

care se scriu

$$\frac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)}} = \frac{dy^{(n-2)}}{y^{(n-1)}}$$

și folosind pe (1)

$$y^{(n-1)}\,\mathrm{d}\,(y^{(n-1)}) = y^{(n)}\,\mathrm{d}\,(y^{(n-2)}) = \psi(t)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

deci

$$[y^{(n-1)}]^2 = \int \psi(t)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t + C_0$$

sau

$$y^{(n-1)} = \sqrt{\int \psi(t)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t + C_0}$$

care împreună cu $y^{(n-2)} = \varphi(t)$ determină pe y prin $n-1$ cuadraturi. Observăm că ecuația dată s-a redus la tipul studiat la alineatul precedent. Teorema este demonstrată.

Exemplu

$y''' y' = y''^2$. Ecuația se mai scrie

$$\frac{y'''}{y''} = \frac{y''}{y'}, \quad \text{sau} \quad \ln(y'') = \ln(y') + \ln C_0; \quad \text{obținem}$$

$$y'' = C_0 y', \quad \text{sau} \quad \mathrm{d}(y') = C_0\,\mathrm{d}(y),$$

unde se separă variabilele

$$\frac{\mathrm{d}y}{C_0 y + C_1} = \mathrm{d}x;$$

mai integrînd o dată, obținem soluția generală căutată,

$$\ln(C_0 y + C_1) = C_0 (x + C_2)$$

sau

$$C_0 y + C_1 = \mathrm{e}^{C_0 (x + C_2)}.$$

§ 3. ECUAȚII DE ORDIN SUPERIOR CĂRORA LI SE POATE MICȘORA ORDINUL

1. Ecuația $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$

Teoremă. O ecuație diferențială de ordinul n

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

în care lipsesc y și derivatele sale pînă la ordinul $k-1: y', y'', \ldots, y^{(k-1)}$, prin schimbarea de funcție

$$y^{(k)} = u$$

se transformă în ecuația diferențială de ordinul $n-k$:

$$F(x, u, u', \ldots, u^{(n-k)}) = 0. \tag{2}$$

Demonstrație. Dacă punem $y^{(k)} = u$ obținem relațiile

$$y^{(k+1)} = u', \quad y^{(k+2)} = u'', \ldots, y^{(n)} = u^{(n-k)}$$

pe care dacă le înlocuim în (1) obținem pe (2). Teorema este demonstrată.

Dacă reușim să integrăm pe (2), deci

$$u(x) = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}),$$

integrarea ecuației date (1) se reduce la integrarea ecuației de ordinul k

$$y^{(k)} = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})$$

care este de tipul studiat la B, cap. II, § 2, al. 2.

Exemplu

Să se găsească soluția ecuației

$$xy'''' - y''' = 2x^3$$

care îndeplinește condițiile inițiale $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$, $y''(1) = 0$, $y'''(1) = 0$.

Determinăm mai întîi soluția generală. Dacă punem $y''' = u$, ecuația în u obținută este liniară

$$xu' - u = 2x^3$$

cu soluția generală

$$u(x) = C_0 x + x^3;$$

revenind la funcția y obținem ecuația diferențială de ordinul trei

$$y''' = C_0 x + x^3$$

care este o *integrală primă* a ecuației date. Integrînd succesiv avem

$$y'' = \frac{1}{2} C_0 x^2 + \frac{1}{4} x^4 + C_1,$$

$$y' = \frac{1}{6} C_0 x^3 + \frac{1}{20} x^5 + C_1 x + C_2,$$

$$y = \frac{1}{24} C_0 x^4 + \frac{1}{120} x^6 + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3, \quad x \in R,$$

care este soluția generală a ecuației din enunț. Condițiile inițiale ne dau

$$y'''(1) = 0, \qquad C_0 + 1 = 0, \qquad C_0 = -1,$$

$$y''(1) = 0, \quad -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + C_1 = 0, \qquad C_1 = \frac{1}{4},$$

$$y'(1) = 1, \quad -\frac{1}{6} + \frac{1}{20} + \frac{1}{4} + C_2 = 1, \qquad C_2 = \frac{13}{15},$$

$$y(1) = 1, \quad -\frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{8} + \frac{13}{15} + C_3 = 1, \qquad C_3 = \frac{1}{20},$$

prin urmare soluția care îndeplinește condițiile inițiale este

$$y(x) = \frac{1}{120} x^6 - \frac{1}{24} x^4 + \frac{1}{8} x^2 + \frac{13}{15} x + \frac{1}{20}, \qquad x \in R.$$

2. Ecuația $F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$

Teoremă. Fie ecuația diferențială de ordinul n

$$F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{1}$$

Prin transformarea $y' = p$ și luînd pe y variabilă independentă i se reduce ordinul cu o unitate.

Demonstrație. Dacă punem $\frac{dy}{dx} = p$, obținem succesiv

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(p\frac{dp}{dy}\right) = \frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right)\cdot\frac{dy}{dx} = p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\frac{d^2p}{dy^2}.$$

Se observă că derivatele $\frac{d^ky}{dx^k}$ se obțin cu ajutorul lui $p, \frac{dp}{dy}, \ldots, \frac{d^{k-1}p}{dy^{k-1}}$, deci dacă le înlocuim în (1) obținem o ecuație de ordinul $n-1$, unde p este funcția, iar y variabila independentă.

Exemplu

Să se integreze ecuația $yy'' + y'^2 + y^2 = 0$. Avem $y' = p$, $y'' = p\frac{dp}{dy}$; ecuația se transformă în

$$yp\frac{dp}{dy} + p^2 + y^2 = 0$$

sau

$$\frac{dp}{dy} = -\frac{y^2 + p^2}{yp} \tag{α}$$

care este o ecuație omogenă. Punem $p = zy$, $\frac{dp}{dy} = y\frac{dz}{dy} + z$ și ecuația (α) devine

$$\frac{dy}{y} = -\frac{z\,dz}{1 + 2z^2}$$

cu soluția generală

$$y^4 = \frac{C_0}{1 + 2z^2},$$

sau, revenind la p,

$$y^2 = \frac{C_0}{y^2 + 2p^2}, \quad \text{sau} \quad p^2 = \frac{1}{2}\,\frac{C_0 - y^4}{y^2},$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{C_0 - y^4}}{y},$$

unde se separă varibilele

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{C_0 - y^4}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\,dx$$

cu integrala generală

$$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\,x + C_1 = \frac{1}{2}\,\text{arc sin}\,\frac{y^2}{\sqrt{C_0}}\,.$$

3. Ecuația $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, omogenă în $y, y', \ldots, y^{(n)}$

Teoremă. Fie ecuația diferențială de ordinul n

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

omogenă în $y, y', \ldots, y^{(n)}$. Prin schimbarea de funcție $\frac{y'}{y} = u$ i se reduce ordinul cu o unitate.

Demonstrație. Ecuația dată, fiind omogenă în $y, y', \ldots, y^{(n)}$, se poate scrie sub forma

$$F\left(x, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}, \ldots, \frac{y^{(n)}}{y}\right) = 0\,. \tag{α}$$

Făcînd substituția $y' = yu$, obținem succesiv

$$y'' = y'u + yu' = y\,(u^2 + u')\,,$$

$$y''' = y'(u^2 + u') + y\,(2uu' + u'') = y\,(u^3 + 3uu' + u'')\,;$$

se observă că $y^{(k)}$ se exprimă cu ajutorul lui y înmulțit cu o expresie în care apare funcția u și derivatele $u', u'', \ldots, u^{(k-1)}$, deci dacă înlocuim pe $y', \ldots, y^{(n)}$ în (α) obținem o ecuație de ordin $n - 1$ în u.

Teorema este demonstrată.

Exemplu

Să se integreze ecuația $x^2 yy'' = (y - xy')^2$.

Ecuația este omogenă și de gradul al doilea în raport cu y, y', y''. Dacă punem $y' = uy$ obținem $y'' = y\,(u + u')$ și ecuația se transformă în

$$x^2\,(u + u')\,u = (1 - xu)^2$$

sau

$$x^2 u' + 2xu - 1 = 0\,,$$

care este o ecuație liniară cu soluția generală

$$u = \frac{1}{x} + \frac{C_0}{x^2}\,.$$

Pe y îl obținem din $y' = y\left(\frac{1}{x} + \frac{C_0}{x^2}\right)$ prin separarea variabilelor

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + \frac{C_0}{x^2}; \quad \ln y = \ln x - \frac{C_0}{x} + C_1$$

sau

$$y = x e^{C_1 - \frac{C_0}{x}}, \quad x \neq 0,$$

care este soluția generală a ecuației date.

4. Ecuația $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$, omogenă în x, dy, x, $dy, \ldots, d^n y$

Ecuația $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$ fiind omogenă în toate argumentele x, y, dx, $dy, \ldots, d^n y$ se poate scrie sub forma

$$F\left(\frac{y}{x}, y', xy'', \ldots, x^{n-1} y^{(n)}\right) = 0.$$

T e o r e m ă. Ecuația diferențială de ordinul n

$$F\left(\frac{y}{x}, y', xy'', \ldots, x^{n-1} y^{(n)}\right) = 0$$

prin schimbarea de variabilă și de funcție $|x| = e^t$, $y = ux$ se transformă într-o ecuație diferențială căreia i se poate reduce ordinul cu o unitate.

Demonstrație. Dacă punem $|x| = e^t$, $y = ux$, obținem succesiv

$$\frac{y}{x} = u,$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u = x\frac{du}{dt}\frac{dt}{dx} + u = e^t \frac{du}{dt} e^{-t} + u = u' + u$$

$$x y'' = x\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = e^t e^{-t} \frac{d}{dt}(u + u') = u' + u''$$

. . . .

și se observă că toate produsele $x^k y^{(k+1)}$ nu conțin decît pe u și derivatele sale; dacă le înlocuim în ecuația din enunț, obținem

$$F(u, u' + u, u'' + u', \dots,) = 0,$$

adică o ecuație de tipul celei studiate la alineatul 2. Cu substituția $\frac{du}{dt} = p$, luînd pe p funcție și pe u variabilă independentă, îi putem reduce ordinul cu o unitate.

Teorema este demonstrată.

Exemplu

Să se integreze ecuația $x^2y'' + xyy' - y^2 = 0$. Scrisă sub forma $x^2\mathrm{d}^2y + xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - y^2\mathrm{d}x^2 = 0$ se observă că este omogenă în $x, y, \mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}^2y$, deci făcînd înlocuirile

$$y = ux, \qquad |x| = e^t$$

avem

$$y' = u + u', \quad xy'' = u' + u''$$

sau

$$e^{2t}(u' + u'') + e^{2t}u(u + u') - e^{2t}u^2 = 0$$

sau

$$u'' + u' + uu' = 0.$$

Punem $u' = p$, $u'' = pp'$ și ecuația se transformă în

$$pp' + p + up = p(p' + 1 + u) = 0;$$

avem două situații:

a) $p = 0$, deci $u' = 0$, $u = C_1$, care ne dă soluția $y = C_1x$;

b) $p' + 1 + u = 0$, $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}u} + 1 + u = 0$, unde se separă variabilele

$$\mathrm{d}p = -(1 + u)\,\mathrm{d}u,$$

$$p = -u - u^2 - A_1$$

sau

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u + u^2 + A_1 = 0,$$

care este o ecuație de tip Riccati cu soluția $u = k$, (k = const.), dată de

$$k^2 + k + A_1 = 0.$$

Ecuația Riccati admite deci două soluții reale $u_1 = k_1$, $u_2 = k_2$, dacă $1 - 4A_1 > 0$ În această situație u este dat de

$$\frac{u - k_1x}{u - k_2x} \cdot e^{(k_1 - k_2)x} = A_2$$

și

$$y = ux = \frac{k_1 \cdot e^{(k_1 - k_2)x} - A_2 k_2}{e^{(k_1-k_2)x} - A_2} x^2,$$

unde $k_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4A_1}$, $\quad k_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4A_1}$.

Pentru $A_1 = \frac{1}{4}$, ecuația Riccati admite soluția $u_1 = -\frac{1}{2}$. Cu substituția $u = -\frac{1}{2} + \frac{1}{z}$, $u' = -\frac{z'}{z^2}$ se transformă în ecuația liniară $z' - 1 = 0$, $z = x + B$, $u = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x+B}$ și

$$y = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{x+B}\right) x.$$

5. Ecuația $F(y,\ xy',\ x^2y'', \ldots, x^n y^{(n)}) = 0$

Teoremă. Fie ecuația diferențială de ordinul n

$$F(y, xy', \ldots, x^n y^{(n)}) = 0.$$

Prin schimbarea de variabilă $|x| = e^t$ i se poate reduce ordinul cu o unitate.

Demonstrație. Dacă punem $|x| = e^t$ obținem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}, \quad \text{însă} \frac{dt}{dx} = e^{-t},$$

deci

$$\frac{dy}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt}, \quad \text{sau} \quad x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = e^{-t}\frac{d}{dt}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right) = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right),$$

deci

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt};$$

. . . .

se observă că $x^k \frac{d^k y}{dx^k}$ se exprimă numai cu $\frac{dy}{dt}, \ldots, \frac{d^k y}{dt^k}$, prin urmare ecuația din enunț se transformă în

$$F\left(y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}, \ldots\right) = 0,$$

adică într-o ecuație în care nu apare t. Punînd $y' = p$, și luînd pe y variabilă independentă, i se reduce ordinul cu o unitate.

Exemplu

Să se integreze ecuația

$$xyy'' - 2xy'^2 + 4yy' = 0.$$

Facem substituția $|x| = e^t$; avem

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}, \quad x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$$

și ecuația se transformă în

$$y(y'' - y') - 2y'^2 + 4yy' = 0.$$

Punem acum $y' = p$, $y'' = p'p$,

$$y(pp' - p) - 2p^2 + 4yp = 0$$

sau

$$p\left[y\frac{dp}{dy} - 2p + 3y\right] = 0.$$

Avem două cazuri de considerat: *a*) $p = 0$, $y' = 0$, $y = C$;

b) $\frac{dp}{dy} - \frac{2}{y}p + 3 = 0$, care este o ecuație liniară

$$p = e^{\int \frac{2}{y} dy}\left(C^* - \int 3e^{-\int \frac{2}{y} dy} dy\right)$$

sau

$$p = y^2\left(C^* - \int \frac{3}{y^3} dy\right) = y^2\left(C^* + \frac{3}{y}\right)$$

sau

$$p = C^*y^2 + 3y, \quad p = \frac{dy}{dx},$$

deci

$$\frac{dy}{C^*y^2 + 3y} = dx,$$

$$x = C^{**} + \int \frac{dy}{C^*y^2 + 3y}.$$

6. Alte cazuri

a) **Prin derivarea ecuației diferențiale** date se poate obține o ecuație de ordinul superior care poate fi integrată.

Exemplu

Să se integreze ecuația $xy'' - (x+1)y' + y = 0$.
Derivăm și obținem

$$xy''' + y'' - (x+1)y'' - y' + y' = 0$$

sau

$$xy''' - xy'' = 0, \quad y''' - y'' = 0$$

care admite integrala primă

$$y'' = C_0 e^x.$$

Prin integrări succesive obținem

$$y' = C_0 e^x + C_1,$$

$$y = C_0 e^x + C_1 x + C_2;$$

funcția obținută verifică ecuația dată dacă $C_1 = C_2$, prin urmare soluția generală a ecuației din enunț este

$$y = C_0 e^x + C_1(x+1), \; x \in R$$

b) Ecuația diferențială $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ înmulțită cu dx este o diferențială totală

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\, dx = d\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}).$$

În acest caz, ecuația diferențială

$$\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = C \tag{1}$$

este o integrală primă a ecuației $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, iar integrarea s-a redus la integrarea ecuației (1) care este de ordin mai mic cu o unitate.

Exemplu

Ecuația $y'' + xy' + y = 0$ se scrie

$$\frac{d}{dx}(y' + xy) = 0,$$

deci admite integrala primă

$$y' + xy = C_1$$

care este o ecuație liniară în y; soluția generală a ecuației date este așadar

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}}\left(C_2 + C_1 \int e^{\frac{x^2}{2}}\, dx.\right)$$

c) Ecuaţia diferenţială $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ înmulţită cu un factor convenabil se transformă într-o diferenţială totală.

Exemplu

Ecuaţia $y''y + 2y^2y'^2 + y'^2 = \frac{2yy'}{x}$ dacă o împărţim cu yy', se scrie

$$\frac{y''}{y'} + 2yy' + \frac{y'}{y} = \frac{2}{x}.$$

Dacă înmulţim cu dx, ambii termeni sînt diferenţiale totale, deci ecuaţia admite integrala primă

$$\ln y' + y^2 + \ln y = \ln x^2 + \ln C_1$$

sau

$$yy' e^{y^2} = C_1x^2.$$

Ambii termeni înmulţiţi cu dx sînt din nou diferenţiale totale, astfel încît obţinem prin integrare

$$\frac{1}{2} e^{y^2} = \frac{1}{3} C_1x^3 + C_2;$$

am obţinut integrala generală a ecuaţiei date.

d) Printr-o schimbare convenabilă de variabile ecuaţia diferenţială se transformă într-una care aparţine tipurilor studiate mai sus.

Exemple

1) Să se integreze ecuaţia $(1 + x^2)^2y'' + 2x(1 + x^2)y' + y = 0$ cu substituţia $x = \operatorname{tg} t$ Avem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}, \quad \text{deci } \frac{dy}{dx} = \cos^2 t \cdot \frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\cos^2 t\, \frac{dy}{dt}\right) \cdot \cos^2 t = \cos^4 t\, \frac{d^2y}{dt^2} - 2\sin t \cos^3 t\, \frac{dy}{dt}$$

şi ecuaţia se transformă în

$$(1 + \operatorname{tg}^2 t)^2 (\cos^4 t y'' - 2 \sin t \cos^3 t y') + 2 \operatorname{tg} t (1 + \operatorname{tg}^2 t) \cos^2 t y' + y = 0$$

sau

$$y'' + y = 0.$$

O înmulţim cu y',

$$y'y'' + yy' = 0, \quad \frac{d}{dt}(y'^2) + \frac{d}{dt}(y^2) = 0;$$

am obţinut astfel integrala primă

$$y'^2 + y^2 = C_1.$$

În această ecuaţie se separă variabilele; prin integrare obţinem

$$y = \sqrt{C_1} \sin(t + C_2), \quad C_1 > 0.$$

Integrala generală a ecuației date este așadar,

$$x = \operatorname{tg} t,\ y = \sqrt{C_1} \sin (t + C_2), \quad C_1 > 0.$$

2) Să se integreze ecuația

$$x^4 y'' + 2x^3 y' - y = 0$$

cu substituția $x = \dfrac{1}{t}$. Avem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = -t^2 \frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = -t^2 \frac{d}{dt}\left(-t^2 \frac{dy}{dt}\right) = t^4 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2t^3 \frac{dy}{dt}$$

și ecuația se transformă în

$$\frac{1}{t^4}(t^4 y'' + 2t^3 y') + \frac{2}{t^3}(-t^2 y') - y = 0$$

sau

$$y'' - y = 0$$

cu integrala primă

$$y'^2 - y^2 = C_1,$$

deci

$$y = \sqrt{C_1} \operatorname{sh} (t + C_2), \quad C_1 > 0.$$

Soluția generală a ecuației date este

$$y = \sqrt{C_1} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{x} + C_2\right), \quad C_1 > 0.$$

§ 4. ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDINUL n, LINIARE ȘI OMOGENE

1. Proprietăți generale

Definiții. 1) O ecuație de forma

$$a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = f(x)$$

se numește ecuația diferențială de ordinul n, liniară și neomogenă.

2) O ecuație de forma

$$a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = 0$$

se numește ecuație diferențială de ordinul n, liniară și omogenă.

Observații

1) Vom presupune că funcțiile $a_0(x)$, $a_1(x), \ldots, a_n(x)$, $f(x)$ sînt continue într-un interval $[a, b]$ şi $a_0(x)$ nu se anulează în $[a, b]$.

De obicei se introduce operatorul liniar

$$L_n = a_0(x)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} + a_1(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + a_n(x)$$

care *aplicat* funcției y ne conduce la ecuația diferențială de ordinul n, liniară şi omogenă

$$L_n[y] = a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0.$$

Cu ajutorul acestui operator, ecuațiile liniare de ordinul n, omogene, se scriu $L_n[y] = 0$, iar acele neomogene $L_n[y] = f(x)$.

În acest paragraf ne vom ocupa de ecuații omogene.

Teoremă. Dacă y_1 şi y_2 sînt două soluții ale ecuației omogene

$$L_n[y] = 0,$$

atunci şi funcția $C_1y_1 + C_2y_2$, unde C_1, C_2 sînt două numere reale (sau complexe) oarecare, este de asemenea o soluție a ecuației omogene.

Demonstrație. Se observă că operatorul liniar L_n are următoarele proprietăți

a) $L_n[y_1 + y_2] = L_n[y_1] + L_n[y_2]$,

b) $L_n[Cy] = C\,L_n[y]$, C = constantă.

Într-adevăr

$$L_n[y_1 + y_2] = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)\frac{\mathrm{d}^{n-k}(y_1+y_2)}{\mathrm{d}x^{n-k}} = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)\frac{\mathrm{d}^{n-k}y_1}{\mathrm{d}x^{n-k}} + \sum_{k=0}^{n} a_k(x)\frac{\mathrm{d}^{n-k}y_2}{\mathrm{d}x^{n-k}} = L_n[y_1] + L_n[y_2].$$

În mod asemănător avem şi

$$L_n[Cy] = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)\frac{\mathrm{d}^{n-k}(Cy)}{\mathrm{d}x^{n-k}} = C\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\frac{\mathrm{d}^{n-k}y}{\mathrm{d}x^{n-k}},$$

deci

$$L_n[Cy] = C\,L_n[y].$$

Din proprietățile *a*) şi *b*) rezultă

$$L_n[C_1y_1 + C_2y_2] = L_n[C_1y_1] + L_n[C_2y_2] = C_1L_n[y_1] + C_2L_n[y_2]$$

şi pentru că y_1 şi y_2 sînt soluții, deci $L_n[y_1] = 0$, $L_n[y_2] = 0$, urmează $L_n[C_1y_1 + C_2y_2] = 0$. Teorema este demonstrată.

Din această teoremă rezultă că dacă funcțiile $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sînt n soluții ale ecuației liniare de ordinul n

$$a_0(x)\,y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = 0, \qquad (1)$$

atunci și funcția

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n, \qquad (2)$$

unde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sînt n constante arbitrare, este de asemenea soluție a ecuației (1).

Funcția $y(x)$ dată de (2), este soluție a ecuației (1) și conține n constante arbitrare, deci poate fi soluția generală a ecuației (1). Vom stabili în cele ce urmează condițiile pe care trebuie să le îndeplinească $y_1, y_2, \ldots, y_n$ într-un interval dat $[a, b]$ pentru ca $y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$ să reprezinte soluția generală a ecuației (1) în $[a, b]$.

2. Dependența liniară

Definiție. **Fie $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, n funcții pe un interval $[a, b]$. Se spune că aceste n funcții sînt liniar independente pe $[a, b]$ dacă nu există n numere $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, nu toate nule, astfel încît să avem**

$$\lambda_1y_1(x) + \lambda_2y_2(x) + \ldots + \lambda_ny_n(x) = 0$$

pentru orice $x \in [a, b]$.

Exemple

1) Funcțiile $\sin^2x$, $\cos^2 x$, $\cos2x$, $x \in R$ sînt liniar dependente pe R, deoarece pentru orice $x \in R$ avem

$$\sin^2x - \cos^2x + \cos 2x = 0.$$

2) Funcțiile $1, x, x^2, \ldots, x^n$, $x \in R$ sînt liniar independente pe R, deoarece condiția

$$\lambda_0 + \lambda_1x + \lambda_2x^2 + \ldots + \lambda_nx^n = 0$$

pentru orice $x \in R$ implică $\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2 = 0$.

Definiție. **Fie $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, n funcții derivabile continuu pînă la ordinul $n-1$ inclusiv pe un interval $[a, b]$. Determinantul următor**

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

se numește determinantul lui Wronski sau wronskianul funcțiilor $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Aceste definiții fiind date, putem enunța

Teorema 1. Dacă funcțiile $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$, derivabile continuu pînă la ordinul $n-1$ inclusiv pe $[a, b]$, sînt liniar dependente pe $[a, b]$, atunci wronskianul lor este nul în orice punct din $[a, b]$.

Demonstrație. Dacă funcțiile $y_k(x)$, $k = 1,2,\ldots, n$ sînt în dependență liniară pe $[a, b]$, atunci pentru orice $x \in [a, b]$ există $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, cu $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 \neq 0$ astfel încît să avem

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \ldots + \lambda_n y_n(x) = 0. \tag{1}$$

Dacă derivăm o dată, de două ori, ş.a.m.d. de $n-1$ ori pe (1) obținem

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1 y_1'(x) + \lambda_2 y_2'(x) + \ldots + \lambda_n y_n'(x) = 0\\ \lambda_1 y_1''(x) + \lambda_2 y_2''(x) + \ldots + \lambda_n y_n''(x) = 0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \lambda_1 y_1^{(n-1)}(x) + \lambda_2 y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + \lambda_n y_n^{(n-1)}(x) = 0.\end{array}\right\} \tag{2}$$

Pentru orice $x \in [a, b]$ ecuațiile (1) + (2) formează un sistem de n ecuații în $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, care admite şi alte soluții în afară de soluția banală $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$. Conform teoremei lui Rouché, determinantul sistemului

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots\ y_n\\ y_1' & y_2' & \ldots\ y_n'\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots\ y_n^{(n-1)}\end{vmatrix}$$

care este wronskianul funcțiilor $y_1, y_2, \ldots, y_n$, trebuie să fie nul în fiecare punct al intervalului $[a, b]$. Teorema este demonstrată.

Exemplu

Funcțiile $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, 1, definite pe R sînt în dependență liniară pe R. Wronskianul lor este nul pentru orice $x \in R$

$$\begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1\\ 2\sin x\cos x & -2\sin x\cos x & 0\\ 2\cos 2x & -2\cos 2x & 0\end{vmatrix} = 0$$

Teorema 2. Fie $y_1 y_2, \ldots, y_n, y$, $n+1$ funcții derivabile continuu de n ori pe un interval $[a, b]$. Dacă $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sînt liniar independente pe $[a, b]$ şi dacă wronskianul

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n & y\\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' & y'\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} & y^{(n)}\end{vmatrix} \tag{1}$$

este nul pentru orice $x \in [a, b]$, atunci y este o combinație liniară de funcțiile $y_1, y_2, \ldots, y_n$:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n,$$

$C_1, C_2, \ldots, C_n$ fiind constante.

Demonstrație. a) Wronskianul funcțiilor $y_1, y_2, \ldots, y_n, y$ este nul pe $[a, b]$ conform ipotezei din teoremă

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' & y' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0, \quad x \in [a, b].$$

Determinanții următori sînt nuli pe $[a, b]$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' & y' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ y_1^{(k)} & y_2^{(k)} & \ldots & y_n^{(k)} & y^{(k)} \end{vmatrix} = 0, \quad x \in [a, b], \tag{2}$$

$k = 0, 1, \ldots, n$, deoarece linia $k+1$ este egală cu linia $n+1$ (pentru $k = n$ este determinantul (1), prin ipoteză nul pe $[a, b]$).

Dezvoltînd determinanții (2) după ultima linie, obținem relațiile

$$\lambda_0(x)\, y^{(k)} + \lambda_1(x)\, y_1^{(k)} + \ldots + \lambda_n(x)\, y_n^{(k)} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \tag{3}$$

funcțiile $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ fiind aceleași pentru $k = 0, 1, \ldots, n-1$, și unde λ_0 este dat de

$$\lambda_0(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0, \quad x \in [a, b],$$

după cum rezultă din dezvoltarea determinanților (2); λ_0 este diferit de zero, deoarece, conform ipotezei din teoremă, funcțiile $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sînt liniar independente pe $[a, b]$.

b) Împărțind cu $-\lambda_0(x)$ relațiile (2), obținem, scriindu-le desfășurat,

$$\left.\begin{aligned} y &= \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \ldots + \mu_n y_n \\ y' &= \mu_1 y_1' + \mu_2 y_2' + \ldots + \mu_n y_n' \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(n-1)} &= \mu_1 y_1^{(n-1)} + \mu_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + \mu_n y_n^{(n-1)} \\ y^{(n)} &= \mu_1 y_1^{(n)} + \mu_2 y_2^{(n)} + \ldots + \mu_n y_n^{(n)} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\left(\text{am pus } \mu_k = -\frac{\lambda_k(x)}{\lambda_0(x)}\right).$$

Dacă derivăm prima ecuație din (4) avem

$$y' = \mu_1' y_1 + \mu_2' y_2 + \ldots + \mu_n' y_n + \mu_1 y_1' + \mu_2 y_2' + \ldots + \mu_n y_n'$$

şi dacă ţinem seama de a doua ecuaţie din (4) rezultă

$$\mu_1' y_1 + \mu_2' y_2 + \ldots + \mu_n' y_n = 0 .$$

În mod analog, dacă derivăm ecuaţia a doua din (4) şi ţinem seamă de a treia relaţie din (4) obţinem

$$\mu_1' y_1' + \mu_2' y_2' + \ldots + \mu_n' y_n' = 0 .$$

Continuînd în acelaşi mod, obţinem sistemul în $\mu_1', \mu_2', \ldots, \mu_n'$,

$$\left.\begin{array}{l} \mu_1' y_1 + \mu_2' y_2 + \ldots + \mu_n' y_n = 0 \\ \mu_1' y_1' + \mu_2' y_2' + \ldots + \mu_n' y_n' = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mu_1' y_1^{(n-1)} + \mu_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + \mu_n' y_n^{(n-1)} = 0 \end{array}\right\} \tag{5}$$

cu determinantul sistemului $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ diferit de zero în fiecare punct al intervalului $[a, b]$. Conform teoremei lui Rouché, sistemul omogen (5) în fiecare punct $x \in [a, b]$ nu admite decît soluţia banală

$$\mu_1'(x) = 0, \ \mu_2'(x) = 0, \ldots, \mu_n'(x) = 0 ,$$

de unde rezultă imediat

$$\mu_1 = C_1, \ \mu_2 = C_2, \ldots, \mu_n = C_n, \quad x \in [a, b];$$

revenind la prima ecuaţie din (4) urmează că putem scrie pentru orice $x \in [a, b]$

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n .$$

Teorema este demonstrată.

Teorema 2 are o consecinţă care poate fi considerată ca o reciprocă a teoremei 1.

Consecinţă. Fie $y_1, y_2, \ldots, y_n$, n funcţii derivabile de $n-1$ ori, continuu, pe un interval $[a, b]$; dacă wronskianul

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0$$

este nul pentru orice $x \in [a, b]$, atunci există un subinterval $[a_1, b_1] \subset \subset [a, b]$ astfel încît $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sînt liniar dependente pe $[a_1, b_1]$.

Demonstraţie. Dacă $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ este identic nul pe $[a, b]$ şi pentru că $y_1, y_2, \ldots, y_n$ nu sînt identic nule pe $[a, b]$, urmează că există un minor al determinantului W de forma

$$W(y_{\alpha_1}, y_{\alpha_2}, \ldots, y_{\alpha_p}) = \begin{vmatrix} y_{\alpha_1} & y_{\alpha_2} & \ldots & y_{\alpha_p} \\ y'_{\alpha_1} & y'_{\alpha_2} & \ldots & y'_{\alpha_p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y^{(p-1)}_{\alpha_1} & y^{(p-1)}_{\alpha_2} & \ldots & y^{(p-1)}_{\alpha_p} \end{vmatrix} \tag{1}$$

neidentic nul pe $[a, b]$, iar toți ceilalți minori de aceeași formă, de ordin superior, sînt identic nuli pe $[a, b]$; fie unul din aceștia

$$W(y_{\alpha_1}, y_{\alpha_2}, \ldots, y_{\alpha_{p+1}}) = \begin{vmatrix} y_{\alpha_1} & y_{\alpha_2} & \ldots & y_{\alpha_p} & y_{\alpha_{p+1}} \\ y'_{\alpha_1} & y'_{\alpha_2} & \ldots & y'_{\alpha_p} & y'_{\alpha_{p+1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y^{(p)}_{\alpha_1} & y^{(p)}_{\alpha_2} & \ldots & y^{(p)}_{\alpha_p} & y^{(p)}_{\alpha_{p+1}} \end{vmatrix} = 0,\ x \in [a, b].$$

Determinantul (1) nefiind identic nul pe $[a, b]$ există un subinterval $[a_1, b_1] \subset [a, b]$ în care el nu se anulează; pe acest subinterval y_{α_1}, $y_{\alpha_2}, \ldots, y_{\alpha_{p+1}}$, conform teoremei 2, sînt în dependență liniară; avem deci

$$y_{\alpha_1} = C_2\, y_{\alpha_2} + C_3\, y_{\alpha_3} + \ldots + C_p\, y_{\alpha_p},\quad x \in [a_1, b_1]$$

relație echivalentă cu

$$\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \ldots + \mu_n y_n = 0,\quad x \in [a_1, b_1]$$

unde μ_i nu sînt toți nuli.

3. Soluția generală a unei ecuații diferențiale liniare

Teoremă. Fie ecuația diferențială liniară de ordinul n, omogenă

$$L_n(y) \equiv y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = 0 \tag{1}$$

cu $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ funcții continue pe $[a, b]$.

Fie $y_1, y_2, \ldots, y_n$, n soluții ale ecuației date, definite pe $[a, b]$.

Dacă wronskianul funcțiilor $y_1, y_2, \ldots, y_n$, nu este identic nul pe $[a, b]$, atunci orice soluție a ecuației (1) pe $[a, b]$ este de forma

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n,\quad x \in [a, b], \tag{2}$$

unde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sînt constante.

Funcția y dată de (2) se numește soluția generală a ecuației (1) pe $[a, b]$.

Demonstrație. *a*) Să observăm mai întîi că dacă $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \not\equiv 0$ pe $[a, b]$, atunci $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ nu se anulează în nici un punct din $[a, b]$; într-adevăr avem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} W = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \ldots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} \tag{3}$$

după regula de derivare a unui determinant (vol. I, B, cap. IV, § 2, al. 1) și observăm că toți determinanții care intervin prin derivare sînt nuli, deoarece au două linii egale, cu excepția celui scris. Deoarece $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sînt soluții ale ecuației (1), avem

$$y_k^{(n)} + a_1(x)y_k^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y_k' + a_n(x)\, y_k \equiv 0,$$

deci pentru orice $x \in [a, b]$

$$y_k^{(n)} \equiv -a_1(x)\, y_k^{(n-1)} - \ldots - a_{n-1}(x)\, y_k' - a_n(x)\, y_k,$$

pe care dacă îi înlocuim în (3), anume în ultima linie, observăm că relația (3) se scrie astfel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_1\, y_1^{(n-1)} & -a_1\, y_2^{(n-1)} & \ldots & -a_1\, y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

sau

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x} = -a_1(x)\, W. \tag{4}$$

Funcțiile $y_1, y_2, \ldots, y_n$ fiind soluții ale ecuației (1) sînt derivabile de n ori pe $[a, b]$, deci W, care conține numai derivatele pînă la ordinul $n-1$, este o funcție continuă de x pe $[a, b]$. Fie $x_0 \in [a, b]$ un punct în care $W(x_0) \neq 0$. Integrînd în (4), obținem

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(x)\,\mathrm{d}x},\quad x \in [a, b], \tag{5}$$

de unde rezultă, $a_1(x)$ fiind continuă pe $[a, b]$, că $W(x)$ nu se anulează în nici un punct din $[a, b]$.

Într-adevăr, să presupunem că există puncte $x' \in [a, b]$ în care W se anulează. Alegem pe $x_0 < x'$ și astfel încît în intervalul (x_0, x'), W să nu se anuleze. Funcția W fiind continuă pe $[a, b]$ și $W(x_0) \neq 0$, trebuie să avem, conform lui (5),

$$\lim_{x \to x'} W(x) = \lim_{x \to x'} W(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(x)\,\mathrm{d}x},$$

însă

$$\lim_{x \to x'} W(x) = 0,$$

$$\lim_{x \to x'} W(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(x)\, dx} \neq 0,$$

deoarece $a_1(x)$ este continuă (deci mărginită) în punctul $x' \in [a, b]$. Contradicția de mai sus dovedește că nu există puncte $x' \in [a, b]$ pentru care $W(x)$ se anulează.

Un sistem de soluții $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ale ecuației (1), definit pe $[a, b]$ cu $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \not\equiv 0$ pe $[a, b]$, se numește un *sistem fundamental* de soluții ale ecuației (1).

b) Fie $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un sistem fundamental de soluții ale ecuației (1); avem

$$\begin{aligned} &y_1^{(n)} + a_1(x)\, y_1^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y_1' + a_n(x)\, y_1 = 0, \\ &y_2^{(n)} + a_1(x)\, y_2^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y_2' + a_n(x)\, y_2 = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &y_n^{(n)} + a_1(x)\, y_n^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y_n' + a_n(x)\, y_n = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

pentru orice $x \in [a, b]$.

Fie acum $y(x)$ o soluție oarecare definită pe $[a, b]$ a ecuației (1); avem de asemenea

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = 0. \tag{6'}$$

Eliminînd pe $a_1(x), \ldots, a_{n-1}(x)$, $a_n(x)$ din sistemul format de ecuațiile (6) + (6') obținem, pentru orice $x \in [a, b]$,

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' & \ldots & y^{(n)} \\ y_1 & y_1' & y_1'' & \ldots & y_1^{(n)} \\ y_2 & y_2' & y_2'' & \ldots & y_2^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_n & y_n' & y_n'' & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0,$$

de unde rezultă, aplicînd teorema 2, că pentru orice $x \in [a, b]$

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n,$$

$C_1, C_2, \ldots, C_n$ fiind constante. Teorema este demonstrată.

Observații

1) Dacă ecuația liniară (1) are forma

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = 0,$$

atunci relația (5), numită și formula lui Ostrogradski-Liouville, se scrie

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\, dx}$$

și se cere ca $a_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots, n$ să fie continue și $a_0(x) \neq 0$ pe $[a, b]$.

2) Dacă $y_1, y_2, \ldots, y_n$ formează un sistem fundamental de soluții pe $[a, b]$, funcția

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \quad x \in [a, b],$$

se numește *soluția generală* a ecuației (1) pe $[a, b]$. Vom arăta la alineatul 5 că această denumire este îndreptățită.

Exemple

1) Ecuația $y'' - y = 0$ are soluțiile particulare $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = e^{x}$. Ele formează un sistem fundamental pe R, deoarece

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{x} & e^{-x} \\ e^{x} & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2, \qquad x \in R.$$

Soluția generală a ecuației date este $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$, $x \in R$.

2) Ecuația $y'' + y = 0$ are soluțiile particulare $y_1 = \sin x$, $y_2 = \cos x$. Ele formează un sistem fundamental pe R, deoarece

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1, \ x \in R.$$

Soluția generală a ecuației date este $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$, $x \in R$.

Teorema prezentată are consecințe importante.

Consecința 1. n soluții $y_1, y_2, \ldots, y_n$ formează un sistem fundamental pe $[a, b]$, dacă și numai dacă sînt liniar independente pe $[a, b]$.

Demonstrație. Într-adevăr, conform consecinței de la teorema 2 (al. 2), wronskianul $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ fiind diferit de 0 pe $[a, b]$, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sînt liniar independente pe $[a, b]$.

Consecința 2. $n + 1$ soluții ale unei ecuații diferențiale de ordinul n definite pe un interval $[a, b]$ sînt liniar dependente pe $[a, b]$.

Demonstrație. Fie $y_1, y_2, \ldots, y_n$, n soluții din cele $n + 1$ date; sînt două posibilități:

a) Funcțiile $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sînt liniar dependente pe $[a, b]$; în acest caz $y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}$ sînt liniar dependente pe $[a, b]$, deoarece legătura liniară dintre n funcții este un caz particular al relației liniare între $n + 1$ funcții în care factorul constant care înmulțește pe y_{n+1} este nul.

b) Funcțiile $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sînt liniar independente pe $[a, b]$; în această situație ele formează un sistem fundamental, deci orice soluție y_{n+1} se scrie sub forma

$$y_{n+1} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \quad x \in [a, b],$$

cu $C_1, C_2, \ldots, C_n$ convenabil alese. Relația de mai sus se scrie însă

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n - y_{n+1} = 0, \quad x \in [a, b],$$

de unde rezultă că $y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}$ sînt liniar dependente pe $[a, b]$.

4. Construcția ecuației diferențiale liniare de ordinul n de sistem fundamental dat

Teoremă. Două ecuații diferențiale de ordinul n, omogene

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = 0,$$

$$y^{(n)} + b_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + b_{n-1}(x)\, y' + b_n(x)\, y = 0,$$

care au aceleași sistem fundamental de soluții pe un interval dat $[a, b]$, sînt identice pe $[a, b]$, adică

$$a_k(x) \equiv b_k(x),\ k = 1, 2, \ldots, n,\ x \in [a, b].$$

Demonstrație. Să presupunem $a_k(x) \not\equiv b_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, pe $[a, b]$. Dacă scădem cele două ecuații obținem

$$[a_1(x) - b_1(x)]\, y^{(n-1)} + [a_2(x) - b_2(x)]\, y^{(n-2)} + \ldots + [a_n(x) - b_n(x)]\, y = 0$$

anume o ecuație de ordinul $n-1$, care admite aceleași soluții ca și ecuațiile din enunț, adică admite n soluții liniar independente, ceea ce este în contradicție cu consecința 2 de la alineatul precedent. De aici rezultă că pe $[a, b]$ trebuie să avem $a_k(x) \equiv b_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, deci cele două ecuații sînt identice. Teorema este demonstrată.

Din această teoremă deducem că un sistem fundamental de soluții

$$y_1,\ y_2, \ldots, y_n,\quad x \in [a, b]$$

determină o ecuație diferențială liniară de ordinul n și numai una care admite pe $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sistem fundamental pe $[a, b]$. Această ecuație este

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' & \ldots & y^{(n)} \\ y_1 & y'_1 & y''_1 & \ldots & y_1^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n & y'_n & y''_n & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0, \tag{1}$$

după cum se poate verifica imediat. Într-adevăr, înlocuind pe y cu y_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ în (1), determinantul este nul, deoarece are două linii egale, deci ecuația (1) are soluțiile $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Ecuația (1) este efectiv de ordinul n, deoarece coeficientul lui $y^{(n)}$ este determinantul

$$\begin{vmatrix} y_1 & y'_1 & y''_2 & \ldots & y_1^{(n-1)} \\ y_2 & y'_2 & y''_2 & \ldots & y_2^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n & y'_n & y''_n & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

și este diferit de zero pe $[a, b]$, deoarece este wronskianul funcțiilor y_1, $y_2, \ldots, y_n$ care prin ipoteză formează un sistem fundamental.

Exemple

1) Funcțiile $y_1 = \sin x$, $y_2 = \cos x$, $x \in R$, au $W(y_1, y_2) = -1$, deci formează un sistem fundamental de soluții pe R.

Ecuația diferențială de ordinul doi determinată de y_1 și y_2 este

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ \sin x & \cos x & -\sin x \\ \cos x & -\sin x & -\cos x \end{vmatrix} = 0$$

sau

$$y'' + y = 0.$$

2) Funcțiile $y_1 = x$, $y_2 = x + 1$, $x \in R$ au $W(y_1, y_2) = -1$, deci formează un sistem fundamental de soluții pe R. Ecuația diferențială de ordinul doi determinată de y_1 și y_2 este

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ x & 1 & 0 \\ x + 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{sau} \quad y'' = 0.$$

Observații

1) După cum am văzut, la un sistem fundamental de soluții $y_1, y_2, \ldots, y_n$ corespunde o singură ecuație diferențială de ordinul n. Vom arăta mai tîrziu (B, cap. III, §2, al. 2) că o ecuație diferențială liniară de ordinul n are efectiv n soluții liniar independente. Acum putem să arătăm numai că, dat fiind un sistem fundamental de soluții $y_1, y_2, \ldots, y_n$, putem construi o infinitate de sisteme fundamentale. Într-adevăr, dacă $y_1, y_2, \ldots, y_n$ este un sistem fundamental de n funcții pe $[a, b]$, sistemul

$$\begin{aligned} Y_1 &= \lambda_{11}y_1 + \lambda_{12}y_2 + \ldots + \lambda_{1n}y_n \\ Y_2 &= \lambda_{21}y_1 + \lambda_{22}y_2 + \ldots + \lambda_{2n}y_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Y_n &= \lambda_{n1}y_1 + \lambda_{n2}y_2 + \ldots + \lambda_{nn}y_n, \end{aligned}$$

cu λ_{ij} parametri reali oarecari și matricea $\|\lambda_{ij}\|$ nesingulară, este tot un sistem fundamental. Funcțiile Y_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ sînt soluții, fiind combinații liniare de $y_1, y_2, \ldots, y_n$; avem și

$$W(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = |\lambda_{ij}| . W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0 \text{ pe } [a, b],$$

deci $Y_1, \ldots, Y_n$ formează un sistem fundamental pe $[a, b]$.

2) Dacă $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ sînt n funcții derivabile de n ori continuu pe un interval $[a, b]$, ele formează un sistem fundamental de soluții numai pe un subinterval $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ pe care

$$W(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) \neq 0.$$

Punctele pentru care $W(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = 0$ sînt *puncte singulare* pentru soluțiile ecuației

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' & \ldots & y^{(n)} \\ \varphi_1 & \varphi_1' & \varphi_1'' & \ldots & \varphi_1^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_n & \varphi_n' & \varphi_n'' & \ldots & \varphi_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0;$$

în aceste puncte coeficientul lui $y^{(n)}$ se anulează.

5. Soluția problemei lui Cauchy

Teoremă. Fie ecuația diferențială liniară de ordinul n, omogenă

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = 0 \tag{1}$$

avînd pe $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sistem fundamental de soluții pe $[a, b]$. Există o singură soluție $y(x)$ care în punctul $x_0 \in [a, b]$ satisface condițiile inițiale

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

$y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ fiind numere oarecare.

Demonstrație. Soluția generală pe $[a, b]$ a ecuației date este

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x). \tag{2}$$

Condițiile inițiale ne conduc la sistemul liniar în $C_1, C_2, \ldots, C_n$

$$\left.\begin{array}{l} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = y_0 \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0) = y_0' \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{array}\right\} \tag{3}$$

Determinantul sistemului (3) este

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1'^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)}. \end{vmatrix},$$

prin ipoteză diferit de zero în punctul $x_0 \in [a, b]$, deoarece $y_1, y_2, \ldots, y_n$ formează un sistem fundamental pe $[a, b]$, prin urmare, $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sînt unic determinate de (3) după regula lui Cramer.

Înlocuind pe $C_1, C_2, \ldots, C_n$, astfel determinate în (2), obținem soluția unică $y(x)$ căutată. Teorema este demonstrată.

Observație

Această teoremă ne arată că din soluția (2) putem construi orice soluție a ecuației liniare cu graficul situat în banda $D = [a, b] \times (-\infty, +\infty)$. Mulțimea acestor soluții este, după cum am mai spus, soluția generală a ecuației diferențiale (1) în D.

Acest fapt justifică numirea de *soluție generală* în D dată funcției

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n, \quad x \in [a,b].$$

Exemplu

Ecuația diferențială

$$2x^3y''' - 6x^2y'' + 12\,xy' - 12\,y = 0$$

are soluțiile particulare $y_1 = x$, $y_2 = x^2$, $y_3 = x^3$. Wronskianul

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = 2x^3$$

se anulează în punctul $x = 0$. Soluția generală a ecuației date este

$$y = C_1x + C_2x^2 + C_3x^3$$

pe orice interval $[a, b]$ care nu conține originea.

Ne propunem să determinăm soluția particulară care îndeplinește condițiile inițiale $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$, $y''(1) = -1$.

Avem

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0,$$
$$C_1 + 2C_2 + 3C_3 = 0,$$
$$2C_2 + 6C_3 = -1,$$

deci

$$C_1 = -\frac{1}{2}, \quad C_2 = 1, \quad C_3 = -\frac{1}{2};$$

soluția particulară care satisface condițiile inițiale este

$$y(x) = -\frac{1}{2}\,x + x^2 - \frac{1}{2}\,x^3.$$

6. Micșorarea ordinului unei ecuații liniare și omogene

Teoremă. **Fie ecuația diferențială liniară de ordinul n, omogenă**

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0.$$

Dacă cunoaștem o soluție particulară y_1 a ecuației date, prin schimbarea de funcție $y = y_1 z$, îi putem micșora ordinul cu o unitate.

Demonstrație. Făcînd schimbarea de funcție din enunț, obținem succesiv

$$y = y_1 z,$$
$$y' = y_1' z + y_1 z',$$
$$y'' = y_1'' z + 2 y_1' z' + y_1 z'',$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y^{(n)} = y_1^{(n)} z + C_n^1 y_1^{(n-1)} z' + \dots + C_n^n y_1 z^{(n)};$$

dacă înmulțim prima ecuație cu $a_n(x)$, a doua cu $a_{n-1}(x), \dots$, pe ultima cu $a_0(x)$ și adunăm, avem

$$z\,[a_0(x) y_1^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) y_1] +$$
$$+ z'\,[a_1(x) y_1 + 2a_2(x) y_1' + \dots + C_n^1 a_0(x) y_1^{(n-1)}] + \dots +$$
$$+ z^{(n)} a_0(x) y_1 = 0. \qquad (1)$$

Coeficientul lui z este nul pentru că y_1 este soluție a ecuației date. Cu o nouă schimbare de funcție $z' = u$, ecuația (1) se transformă într-o ecuație liniară și omogenă de ordinul $(n-1)$

$$A_0(x) u^{(n-1)} + A_1(x) u^{(n-2)} + \dots + A_{n-1}(x) u = 0.$$

Teorema este demonstrată.

Observație

Dacă cunoaștem k soluții particulare ale unei ecuații liniare, îi putem micșora ordinul cu k unități.

Exemplu

Să se integreze ecuația

$$x(x+1)y'' - (x-1)y' + y = 0.$$

Se observă că ecuația are soluția particulară $y = x - 1$. Facem substituția

$$y = (x-1)z;$$

avem

$$y' = z + (x-1)z',$$
$$y'' = 2z' + (x-1)z'',$$

pe care le înlocuim în ecuația dată

$$x(x+1)\,[2z' + (x-1)z''] - (x-1)\,[z + (x-1)z'] + (x-1)z = 0$$

sau

$$x(x+1)(x-1)z'' + (x^2 + 4x - 1)z' = 0,$$

$$\frac{z''}{z'} = -\frac{x^2 + 4 - 1}{x(x+1)(x-1)} = -\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x-1},$$

deci

$$\ln|z'| = \ln\left|\frac{1}{x}\right| + 2\ln|1+x| - 2\ln|x-1| + \ln C_1$$

sau

$$z' = C_1\frac{(x+1)^2}{x(x-1)^2}, \quad z = C_1\int\frac{(x+1)^2\,dx}{x(x-1)^2} + C_2,$$

$$z = C_1\int\left[\frac{1}{x} + \frac{4}{(x-1)^2}\right]dx + C_2 = C_1\left[\ln|x| - \frac{4}{x-1}\right] + C_2.$$

Soluția generală a ecuației date este așadar

$$y = C_1[(x-1)\ln|x| - 4] + C_2(x-1)$$

pe ori ce interval care nu conține originea.

§ 5. ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDINUL n, LINIARE ȘI NEOMOGENE

1. Soluția generală a unei ecuații neomogene

T e o r e m ă. Fie ecuația diferențială de ordinul n, liniară și neomogenă

$$L_n[y] = a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \quad (1)$$

cu coeficienții $a_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots, n$ și $f(x)$ continui, iar $a_0(x) \neq 0$ pe $[a, b]$. Soluția generală a ecuației (1) se obține adăugînd la soluția generală a ecuației omogene

$$L_n[y] = a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0,$$

o soluție particulară (oarecare) a ecuației neomogene (1).

Demonstrație. Fie $y_0(x)$ o soluție particulară a ecuației neomogene $[a, b]$. Să facem schimbarea de funcție

$$y(x) = y_0 + z.$$

Avem, ținînd seamă de liniaritatea operatorului L_n,

$$L_n[y_0 + z] = L_n[y_0] + L_n[z] = f(x),$$

însă

$$L_n[y_0] = f(x),$$

deoarece y_0 este o soluție a ecuației neomogene. Ne mai rămîne

$$L_n[z] = 0;$$

prin urmare, dacă $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ este un sistem fundamental de soluții al ecuației omogene pe $[a, b]$, urmează că soluția generală a ecuației neomogene este

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n + y_0, \quad x \in [a, b].$$

Teorema este demonstrată.

Observație

Dacă $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_m(x)$, $x \in [a, b]$, și dacă

$$y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{m0}$$

sînt soluții particulare ale ecuațiilor

$$L_n[y] = f_k(x), \; k = 1, 2, \ldots, m$$

respectiv, atunci funcția

$$y_{10} + y_{20} + \ldots + y_{m0}$$

este o soluție particulară a ecuației

$$L_n[y] = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_m(x).$$

Într-adevăr, avem

$$L_n[y_{0k}] = f_k(x),$$

deci

$$L_n[y_{10} + y_{20} + \ldots + y_{m0}] = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_m(x).$$

2. Metoda variației constantelor pentru determinarea unei soluții particulare a ecuației neomogene

Teoremă. Fie ecuația diferențială de ordinul n, liniară și neomogenă

$$L_n[y] = a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \quad (1)$$

cu $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$, $f(x)$ continue și $a_0(x) \neq 0$ pe $[a, b]$.

Fie $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un sistem fundamental de soluții pe $[a, b]$ ale ecuației omogene

$$L_n[y] = a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0. \quad (2)$$

O soluție particulară $y_0(x)$ a ecuației neomogene (1) pe $[a, b]$ este dată de

$$y_0 = y_1 \int C_1'(x)\,\mathrm{d}x + y_2 \int C_2'(x)\,\mathrm{d}x + \ldots + y_n \int C_n'(x)\,\mathrm{d}x, \tag{3}$$

unde $C_1'(x), C_2'(x), \ldots, C_n'(x)$ este soluția sistemului

$$\left.\begin{aligned}
&y_1 C_1'(x) + y_2 C_2'(x) + \ldots + y_n C_n'(x) = 0\\
&y_1' C_1'(x) + y_2' C_2'(x) + \ldots + y_n' C_n'(x) = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&y_1^{(n-2)} C_1'(x) + y_2^{(n-2)} C_2'(x) + \ldots + y_n^{(n-2)} C_n'(x) = 0\\
&y_1^{(n-1)} C_1'(x) + y_2^{(n-1)} C_2'(x) + \ldots + y_n^{(n-1)} C_n'(x) = \frac{f(x)}{a_0(x)}.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Dacă efectuăm cuadraturile (3), introducînd pentru fiecare cuadratură cîte o constantă arbitrară $A_1, \ldots, A_n$, respectiv

$$\int C_1'(x)\,\mathrm{d}x = A_1 + \varphi_1(x), \ldots, \int C_n'(x)\,\mathrm{d}x = A_n + \varphi_n(x),$$

și dacă le înlocuim în (2), obținem soluția generală a ecuației neomogene

$$y = A_1 y_1 + A_2 y_2 + \ldots + A_n y_n + y_1\varphi_1 + y_2\varphi_2 + \ldots + y_n\varphi_n.$$

Demonstrație. Fie $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un sistem fundamental de soluții ale ecuației omogene (2). Soluția generală a ecuației omogene va fi așadar

$$z = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n,$$

unde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sînt constante arbitrare. Dacă reușim să arătăm că funcția

$$y_0 = y_1\varphi_1 + y_2\varphi_2 + \ldots + y_n\varphi_n$$

cu $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ determinate pe $[a, b]$, după cum este precizat în enunțul teoremei, este o soluție particulară a ecuației neomogene, atunci, conform celor spuse la alineatul precedent, funcția

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n + y_0$$

este soluția generală a ecuației neomogene pe $[a, b]$. Ne rămîne așadar *numai să verificăm* că y_0 este o soluție a ecuației neomogene.

În acest scop să considerăm funcția

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + \ldots + C_n(x) y_n, \quad x \in [a, b], \tag{5}$$

care se obține din soluția generală a ecuației omogene înlocuind constantele $C_1, C_2, \ldots, C_n$, cu funcțiile necunoscute $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$, și să arătăm că funcția y dată de (5) cu $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ verificînd sistemul (4), este soluție a ecuației neomogene (1).

Dacă derivăm pe y dat de (5) obținem

$$y' = C_1y_1' + C_2y_2' + \ldots + C_ny_n' + C_1'y_1 + C_2'y_2 + \ldots + C_n'y_n,$$

însă, conform primei ecuații din (4), anume

$$C_1'y_1 + C_2'y_2 + \ldots + C_n'y_n = 0,$$

ne mai rămîne

$$y' = C_1y_1' + C_2y_2' + \ldots + C_ny_1'. \tag{5_1}$$

În continuare, dacă derivăm pe (5_1), obținem

$$y'' = C_1y_1'' + C_2y_2'' + \ldots + C_ny_n'' + C_1'y_1' + C_2'y_2' + \ldots + C_n'y_n',$$

însă conform ecuației a doua din (4), anume

$$C_1'y_1' + C_2'y_2' + \ldots + C_n'y_n' = 0,$$

ne mai rămîne

$$y'' = C_2y_1'' + C_2y_2'' + \ldots + C_ny_n''. \tag{5_2}$$

În mod asemănător obținem

$$y''' = C_1y_1''' + C_2y_2''' + \ldots + C_ny_n'''$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y^{(n-1)} = C_1y_1^{(n-1)} + C_2y_2^{(n-1)} + \ldots + C_ny_n^{(n-1)}.$$

În ceea ce privește derivata de ordinul n, obținută prin derivare din ultima relație, avem

$$y^{(n)} = C_1y_1^{(n)} + C_2y_2^{(n)} + \ldots + C_ny_n^{(n)} + C_1'y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-1)}$$

sau, ținînd seamă de ultima relație din (4),

$$y^{(n)} = C_1y_1^{(n)} + C_2y_2^{(n)} + \ldots + C_ny_n^{(n)} + \frac{f(x)}{a_0(x)}. \tag{5_3}$$

Dacă înmulțim acum pe y (dat de (5)) cu $a_n(x)$, pe y' (dat de (5_1)) cu $a_{n-1}(x)$ ş.a.m.d., pe $y^{(n)}$ (dat de (5_3)) cu $a_0(x)$, obținem prin însumare

$$L_n[y] = C_1L_n[y_1] + C_2L_n[y_2] + \ldots + C_nL_n[y_n] + f(x),$$

însă

$$L_n[y_k] = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

astfel încît ne mai rămîne

$$L_n[y] = f(x);$$

prin urmare y dat de (5) cu $C_1, C_2, \ldots, C_n$, verificînd sistemul (4) este soluție a ecuației (1).

Să observăm că determinantul sistemului (4) este $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$ pe $[a, b]$. Fie $C_1', C_2', \ldots, C_n'$ soluția sistemului (4) cu

$$C_k'(x) = (-1)^{n+k} \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_{k-1} & y_{k+1} & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_{k-1}' & y_{k+1}' & \cdots & y_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_{k-1}^{(n-1)} & y_{k+1}^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2, \ldots, y_n)} \cdot \frac{f(x)}{a_0(x)}, k=1, 2, \ldots, n.$$

Prin n cuadraturi obținem

$$C_k(x) = \int C_k'(x)\,\mathrm{d}x = \varphi_k(x) + A_k,\ k = 1, 2, \ldots, n,$$

unde $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sînt constante arbitrare.

Înlocuind pe $C_k(x)$ în (5) obținem

$$y(x) = y_1A_1 + \ldots + y_nA_n + \varphi_1 y_1 + \ldots + \varphi_n y_n,$$

care este soluția generală a ecuației neomogene. Funcția

$$y_0 = \varphi_1 y_1 + \varphi_2 y_2 + \ldots + \varphi_n y_n$$

este o soluție a ecuației liniare neomogene și este prin urmare soluția particulară căutată. Teorema este demonstrată.

Metoda folosită pentru a determina o soluție particulară a ecuației neomogene (1) se numește *metoda variației constantelor* și se datorește lui Lagrange.

Exemplu

Să se găsească soluția generală a ecuației

$$x^2y'' + 4xy' + 2y = \cos x.$$

Două soluții particulare ale ecuației omogene

$$x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$$

sînt

$$y_1 = \frac{1}{x}, \quad y_2 = \frac{1}{x^2}.$$

Avem de asemenea

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{x^2} \\ -\frac{1}{x^2} & -\frac{2}{x^3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{x^4},$$

deci pentru orice interval $I \subset R$ care nu conține punctul $x = 0$ soluția generală a ecuației omogene este

$$z = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2}.$$

Pentru determinarea soluției generale a ecuației neomogene folosim metoda variației constantelor. Avem

$$\frac{1}{x}C_1' + \frac{1}{x^2}C_2' = 0,$$

$$-\frac{1}{x^2}C_1' - \frac{2}{x^3}C_2' = \frac{\cos x}{x^2},$$

deci

$$C_1'(x) = \cos x, \quad C_2'(x) = -x\cos x$$

sau

$$C_1(x) = \int \cos x\,\mathrm{d}x = -\sin x + A_1,$$

$$C_2(x) = -\int x\cos x\,\mathrm{d}x = -x\sin x - \cos x + A_2$$

soluția generală a ecuației neomogene este

$$y = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} - \frac{\cos x}{x^2},$$

iar $-\dfrac{\cos x}{x^2}$ este o soluție particulară a ecuației neomogene.

§ 6. ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDINUL n, LINIARE, CU COEFICIENȚI CONSTANȚI

1. Ecuații omogene

O ecuație diferențială liniară

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = 0, \; a_0 \neq 0 \tag{1}$$

unde a_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ sînt constante reale, este o ecuație de ordinul n, cu coeficienți constanți, omogenă.

Pentru această clasă de ecuații putem determina totdeauna un sistem fundamental de soluții.

Anume, dacă căutăm soluții de forma

$$y = A\,e^{rx}, \quad A \neq 0,$$

obținem succesiv

$$y' = Are^{rx}, \quad y'' = Ar^2e^{rx}, \ldots, y^{(n)} = Ar^ne^{rx};$$

dacă le înlocuim în (1), avem

$$Ae^{rx}\left[a_0r^n + a_1r^{n-1} + \dots + a_{n-1}r + a_n\right] = 0;$$

deoarece prin ipoteză $A \neq O$, iar e^{rx} nu se anulează pentru $x \in R$, va trebui să avem

$$K_n(r) \equiv a_0r^n + a_1r^{n-1} + \dots + a_{n-1}r + a_n = 0.$$

Prin urmare numărul (real sau complex) r trebuie să fie rădăcină a *ecuației algebrice* (2) care se numește *ecuația caracteristică* a ecuației diferențiale (1).

Să observăm de la început că dacă ecuația caracteristică

$$a_0r^n + a_1r^{n-1} + \dots + a_{n-1}r + a_n = 0$$

are toate rădăcinile simple $r_1 \neq r_2 \neq \dots \neq r_n$, atunci soluțiile particulare

$$y_1 = e^{r_1x}, \quad y_2 = e^{r_2x}, \dots, y_n = e^{r_nx}$$

formează un sistem fundamental de soluții ale ecuației (1).

Într-adevăr, calculînd wronskianul lui $y_1, y_2, \dots, y_n$, obținem

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} e^{r_1x} & e^{r_2x} & \dots & e^{r_nx} \\ r_1e^{r_1x} & r_2^{r_2x} & \dots & r_ne^{r_nx} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_1^{n-1}e^{r_1x} & r_2^{n-1}e^{r_2x} & \dots & r_n^{n-1}e^{r_nx} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(r_1+r_2+\dots+r_n)x}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & \dots & r_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \dots & r_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

și se observă că este diferit de zero pentru orice $x \in R$, deoarece exponențiala nu se anulează pe R, iar determinantul scris este diferit de zero dacă $r_i \neq r_j$, $i \neq j$, întrucît este determinantul lui Vandermonde al numerelor $r_1, r_2, \dots, r_n$ prin ipoteză diferite între ele.

În cele ce urmează vom discuta forma soluției generale a ecuației (1) după natura rădăcinilor ecuației caracteristice.

2. Ecuația caracteristică are rădăcini distincte

a) *Ecuația caracteristică are rădăcini reale distincte*

T e o r e m a 1. Fie ecuația diferențială liniară de ordinul n cu coeficienți (reali) constanți

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}y' + a_ny = 0. \tag{1}$$

Dacă ecuația caracteristică

$$a_0r^n + a_1r^{n-1} + \ldots + a_{n-1}r + a_n = 0$$

are rădăcinile reale simple

$$r_1, r_2, \ldots, r_n,$$

atunci funcțiile

$$y_1 = e^{r_1x}, \quad y_2 = e^{r_2x}, \ldots, y_n = e^{r_nx}, \quad x \in R$$

formează un sistem fundamental de soluții pentru ecuația (1).

Soluția generală a ecuației (1) **este**

$$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} + \ldots + C_ne^{r_nx}, \quad x \in R.$$

Demonstrație. Dacă ecuația caracteristică are toate rădăcinile r_1 $r_2, \ldots, r_n$ simple, soluțiile particulare

$$e^{r_1x}, \quad e^{r_2x}, \ldots, e^{r_nx}$$

formează un sistem fundamental de integrale, pentru orice $x \in R$, după cum rezultă din expunerea făcută la alineatul precedent.

Soluția generală a ecuației date (1) va fi așadar

$$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} + \ldots + C_ne^{r_nx}, \quad x \in R.$$

Exemplu

Să se găsească soluția generală a ecuației

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0.$$

Să se determine soluția particulară care îndeplinește condițiile inițiale

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -1.$$

Ecuația caracteristică $r^3 - 2r^2 - r + 2 = 0$ are rădăcinile $r_1 = 1$, $r_2 = -1$, $r_3 = 2$; prin urmare soluția generală este

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{2x}, \quad x \in R.$$

Pentru a găsi soluția particulară, determinăm constantele C_1, C_2, C_3 prin condițiile inițiale date:

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0,$$
$$C_1 - C_2 + 2C_3 = 0,$$
$$C_1 + C_2 + 4C_3 = -1,$$

deci

$C_1 = \frac{1}{2}$, $C_2 = -\frac{1}{6}$, $C_3 = -\frac{1}{3}$. Soluția particulară căutată este

$$y = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{6}e^{-x} - \frac{1}{3}e^{2x}, \quad x \in R.$$

b) Ecuația caracteristică are rădăcini complexe distincte.

Teorema 2. Fie ecuația diferențială, liniară, de ordinul n cu coeficienți (reali) constanți

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = 0. \tag{1}$$

Dacă ecuația caracteristică

$$a_0r^n + a_1r^{n-1} + \ldots + a_{n-1}r + a_n = 0$$

are rădăcinile complexe, simple

$$r_1 = \alpha_1 + i\,\beta_1, \quad r_2 = \alpha_2 + i\,\beta_2, \ldots, r_m = \alpha_m + i\,\beta_m,$$

$$\bar{r}_1 = \alpha_1 - i\,\beta_1, \quad \bar{r}_2 = \alpha_2 - i\,\beta_2, \ldots, \bar{r}_m = \alpha_m - i\,\beta_m, \quad n = 2m,$$

atunci funcțiile

$$Y_1 = e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, \quad Y_1^* = e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x,$$

$$Y_2 = e^{\alpha_2 x}\cos\beta_2 x, \quad Y_2^* = e^{\alpha_2 x}\sin\beta_2 x,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Y_m = e^{\alpha_m x}\cos\beta_m x, \quad Y_m^* = e^{\alpha_m x}\sin\beta_m x$$

formează un sistem fundamental de soluții ale ecuației (1).

În acest caz, soluția generală a ecuației (1) este

$$y = e^{\alpha_1 x}(C_1\cos\beta_1 x + C_1^*\sin\beta_1 x) + e^{\alpha_2 x}(C_2\cos\beta_2 x + C_2^*\sin\beta_2 x) + \\ + \ldots + e^{\alpha_m x}(C_m\cos\beta_m x + C_m^*\sin\beta_m x)$$

unde C_k, C_k^*, $k = 1, 2, \ldots, m$ sînt $2m$ constante arbitrare.

Demonstrație. Deoarece ecuația caracteristică are toate rădăcinile simple, urmează că soluțiile

$$y_1 = e^{(\alpha_1 + i\beta_1)x}, \quad y_2 = e^{(\alpha_2 + i\beta_2)x}, \ldots, y_m = e^{(\alpha_m + i\beta_m)x},$$

$$\bar{y}_1 = e^{(\alpha_1 - i\beta_1)x} \quad \bar{y}_2 = e^{(\alpha_2 - i\beta_2)x}, \ldots, \bar{y}_m = e^{(\alpha_m - i\beta_m)x}$$

formează un sistem fundamental. Funcțiile $y_1, \bar{y}_1, \ldots, y_m, \bar{y}_m$ nu sînt reale, deoarece, după formulele lui Euler, avem

$$\begin{aligned} y_k &= e^{\alpha_k x}\cos(\beta_k x) + i\,e^{\alpha_k x}\sin(\beta_k x), \\ \bar{y}_k &= e^{\alpha_k x}\cos(\beta_k x) - i\,e^{\alpha_k x}\sin(\beta_k x). \end{aligned} \tag{1}$$

În practică interesează soluții reale, de aceea nu se ia (1) ca sistem fundamental, ci următoarele funcții, obținute prin combinații liniare (care după cum știm sînt de asemenea soluții), anume:

$$Y_1 = \frac{y_1 + \bar{y}_1}{2} = e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, \quad Y_1^* = \frac{y_1 - \bar{y}_1}{2i} = e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x,$$

$$Y_2 = \frac{y_2 + \bar{y}_2}{2} = e^{\alpha_2 x}\cos\beta_2 x, \quad Y_2^* = \frac{y_2 - \bar{y}_2}{2i} = e^{\alpha_2 x}\sin\beta_2 x,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Y_m = \frac{y_m + \bar{y}_m}{2} = e^{\alpha_m x}\cos\beta_m x, \quad Y_m^* = \frac{y_m - \bar{y}_m}{2i} = e^{\alpha_m x}\sin\beta_m x.$$

Sistemul Y_k, Y_k^*, $k = 1, 2, \ldots, m$, $(2m=n)$ formează tot un sistem fundamental, deoarece (*B*, cap. II, § 4, al. 4, observația 1) se obține printr-o combinație liniară între $y_1, \ldots, y_m, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_m$, cu determinantul

$| \lambda_{ij} | = D_1 . D_2 \ldots D_m = \frac{i^m}{2^m} \neq 0$, unde

$$D_k = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2i} & -\frac{1}{2i} \end{vmatrix} = \frac{i}{2}.$$

Exemple

1) Să se găsească soluția generală a ecuației

$$y'' + y = 0.$$

Ecuația caracteristică $r^2 + 1 = 0$ are rădăcinile $r_1 = i$, $r_2 = -i$. Funcțiile $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$ formează un sistem fundamental de integrale pe R.

Soluția generală pe R este

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

2) Să se găsescă soluția generală a ecuației

$$y'''' + y''' + 5y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Ecuația caracteristică $r^4 + r^3 + 5r^2 + 4r + 4 = (r^2 + 4)(r^2 + r + 1) = 0$ are rădăcinile

$$r_1 = 2i, \quad r_2 = -2i, \quad r_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad r_4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Funcțiile

$$y_1 = \cos 2x, \quad y_2 = \sin 2x, \quad y_3 = e^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x, \quad y_4 = e^{-\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x$$

formează un sistem fundamental de integrale. Soluția generală pe R este dată de

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + e^{-\frac{1}{2}x} \left(C_3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_4 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x\right).$$

Cele două teoreme enunțate mai sus pot fi grupate într-una singură care este o consecință a lor.

Consecință. Fie ecuația diferențială liniară de ordinul n cu coeficienți (reali) constanți

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0.$$

Dacă ecuația caracteristică

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n = 0$$

are rădăcinile complexe simple

$$\alpha_1 + i\,\beta_1, \qquad \alpha_2 + i\,\beta_2, \ldots, \alpha_m + i\,\beta_m,$$

$$\alpha_1 - i\,\beta_1, \qquad \alpha_2 - i\,\beta_2, \ldots, \alpha_m - i\,\beta_m,$$

și rădăcinile reale simple

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p;\ p + 2m = n,$$

atunci soluția generală pe R a ecuației date este

$$y = \sum_{k=1}^{m} e^{\alpha_k x}(C_k \cos\,\beta_k x + C_k^* \sin\,\beta_k x) + \sum_{h=1}^{p} D_h e^{\gamma_h x}$$

cu C_k, C_k^* D_h constante arbitrare.

Într-adevăr, dacă $\alpha_k + i\,\beta_k$, $\alpha_k - i\,\beta_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$ și γ_h, $h = 1, 2, \ldots, p$ sînt rădăcinile ecuației caracteristice și sînt toate simple, atunci funcțiile

$$Y_k = e^{\alpha_k x}\cos\,\beta_k x,\ Y_k^* = e^{\alpha_k x}\sin\,\beta_k x,\ k = 1, 2, \ldots, m$$

și

$$y_k = e^{\gamma_h x}, \quad h = 1, 2, \ldots, p$$

formează un sistem fundamental de soluții pe R ale ecuației date.

Exemplu

Să se găscască soluția generală a ecuației

$$y''' + y'' + y' + y = 0.$$

Ecuația caracteristică $r^3 + r^2 + r + 1 = (r + 1)(r^2 + 1) = 0$ are rădăcinile $r_1 = -1$, $r_2 = i$, $r_3 = -i$. Funcțiile $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = \cos x$, $y_3 = \sin x$ formează un sistem fundamental pe R. Soluția generală pe R este

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 \sin x + C_3 \cos x.$$

3. Ecuația caracteristică are rădăcini multiple

Teoremă. Fie ecuația diferențială liniară de ordinul n

$$L_n(y) = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \qquad (1)$$

cu coeficienți (reali) constanți.

Dacă ecuația caracteristică

$$K_n(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n = 0$$

are rădăcina $r = \alpha$ de ordinul $p + 1$ de multiplicitate, atunci funcția

$$y = C_0 e^{\alpha x} + C_1 x e^{\alpha x} + \ldots + C_p x^p e^{\alpha x}$$

este o soluție a ecuației (1).

Demonstrație. *a*) Fie $y = e^{rx}$; după cum am văzut la al. 1 al acestui paragraf, avem identitatea

$$L_n[e^{rx}] \equiv e^{rx} K_n(r);$$

să derivăm de m ori această identitate în raport cu r,

$$\frac{\partial^m}{\partial r^m} L_n\,[e^{rx}] = \frac{\partial^m}{\partial r^m}\,[e^{rx} K_n(r)];$$

observăm că operatorul L_n poate fi intervertit cu $\frac{\partial^m}{\partial r^m}$, deoarece L_n este un operator cu coeficienți constanți, iar e^{rx} are derivatele parțiale de orice ordin continue (teorema de intervertibilitate a derivării parțiale a lui A. Schwarz). Putem scrie deci

$$\frac{\partial^m}{\partial r^m} L_n\,[e^{rx}] = L_n\left[\frac{\partial^m e^{rx}}{\partial r^m}\right] = L_n[x^m e^{rx}]$$

însă

$$\frac{\partial^m}{\partial r^m}\,[e^{rx} K_n(r)] = r^m e^{rx} K_n(r) + C_m^1 r^{m-1} e^{rx} K_n'(r) + \ldots + C_m^m e^{rx} K_n^{(m)}(r),$$

după regula lui Leibniz. Avem, așadar, identitatea

$$L_n[x^m e^{rx}] \equiv e^{rx}\,[r^m k_n(r) + C_m^1 r^{m-1} K_n'(r) + \ldots + C_m^m K_n^{(m)}(r)]. \tag{2}$$

Să presupunem că $r = \alpha$ este o rădăcină a ecuației caracteristice $K_n(r) = 0$ de ordinul $p + 1$ de multiplicitate; în această situație

$$K_n(\alpha) = 0,\;\; K_n'(\alpha) = 0, \ldots,\; K_n^{(p)}(\alpha) = 0,\; K_n^{(p+1)}(\alpha) \neq 0, \tag{3}$$

de unde rezultă imediat din (2) că

$$y_1 = e^{\alpha x},\;\; y_2 = x e^{\alpha x}, \ldots,\; y_{p+1} = x^p e^{\alpha x}$$

sînt soluții ale ecuației (1); într-adevăr, pentru $m \leqslant p$ avem

$$L_n[x^m e^{\alpha x}] \equiv e^{\alpha x}\,[\alpha^m K_n(\alpha) + C_m^1\,\alpha^{m-1} K_n'(\alpha) + \ldots + C_m^m K_n^{(m)}(\alpha)] = 0$$

dacă ținem seamă de relațiile (3). O consecință imediată a acestui fapt este că funcția

$$y = C_0 e^{\alpha x} + C_1 x e^{\alpha x} + \ldots + C_p x^p e^{\alpha x},\; x \in R, \tag{4}$$

este o soluție a ecuației diferențiale; spunem că (4) este *contribuția* rădăcinii multiple $r = \alpha$ la soluția generală a ecuației (1). Se observă că introduce $p + 1$ constante arbitrare, adică un număr egal cu ordinul de multiplicitate al rădăcinii $r = \alpha$.

b) Soluțiile

$$e^{\alpha x},\;\; x\,e^{\alpha x}, \ldots,\; x^p e^{\alpha x}$$

sînt liniar independente, deoarece $1, x, x^2, \ldots, x^p$ sînt liniar independente [B, cap. II, § 4, al. 2, ex. 2]. Teorema este demonstrată.

c) Ne mai rămîne acum să facem discuţia şi după natura rădăcinii multiple $r = \alpha$.

***Avem două situaţii*:**

c_1) ***Rădăcina $r = \alpha$ de ordinul $p + 1$ de multiplicitate este reală.***

În această situaţie avem soluţiile particulare

$$y_1 = e^{\alpha x},\ y_2 = x\ e^{\alpha x}, \ldots,\ y_{p+1} = x^p e^{\alpha x}.$$

Exemplu

$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$. Ecuaţia caracteristică

$$r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = (r + 1)^3 = 0$$

are rădăcina triplă $r = -1$. Funcţiile $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = xe^{-x}$, $y_3 = x^2e^{-x}$ formează un sistem fundamental de integrale pe R. Soluţia generală este aşadar

$$y = (C_0 + C_1x + C_2x^2)\, e^{-x}, \quad x \in R.$$

c_2) ***Ecuaţia caracteristică are rădăcina complexă $r = \alpha + i\beta$, de ordinul $p + 1$ de multiplicitate.***

Ecuaţia (1) fiind cu coeficienţi reali urmează că ecuaţia caracteristică are şi rădăcina $\overline{r} = \alpha - i\beta$ tot de ordinul $p + 1$ de multiplicitate. Cele $2p + 2$ rădăcini vor da prin urmare soluţiile

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x}, \qquad y_2 = x\, e^{(\alpha+i\beta)x}, \ldots,\ y_{p+1} = x^p\, e^{(\alpha+i\beta)x},$$

$$\overline{y}_1 = e^{(\alpha-i\beta)x}, \qquad \overline{y}_2 = x\, e^{(\alpha-i\beta)x}, \ldots,\ \overline{y}_{p+1} = x^p\, e^{(\alpha-i\beta)x},$$

liniar independente. Ca şi în cazul discutat anterior, se ia ca sistem fundamental soluţiile următoare:

$$Y_1 = \frac{y_1 + \overline{y}_1}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x, \qquad Y_1^* = \frac{y_1 - \overline{y}_1}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

$$Y_2 = \frac{y_2 + \overline{y}_2}{2} = xe^{\alpha x}\cos\beta x, \qquad Y_2^* = \frac{y_2 - \overline{y}_2}{2i} = x\, e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Y_{p+1} = \frac{y_{p+1} + \overline{y}_{p+1}}{2} = x^p e^{\alpha x}\cos\beta x, \qquad Y_{p+1}^* = \frac{y_{p+1} - \overline{y}_{p+1}}{2i} = x^p e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Exemplu

$y'''' + 2y'' + y = 0$. Ecuaţia caracteristică $r^4 + 2r^2 + 1 = (r^2 + 1)^2 = 0$ are rădăcinile $r_1 = i$, $r_2 = -i$, duble.

Funcţiile $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$, $y_3 = x\cos x$, $y_4 = x\sin x$ formează un sistem fundamental de integrale pe R. Soluţia generală a ecuaţiei date este aşadar

$$y = (C_0 + C_1x)\cos x + (C_2 + C_3x)\sin x, \quad x \in R.$$

Rezultatele acestor două alineate pot fi rezumate în următoarea

Teoremă. Fie ecuaţia diferenţială liniară de ordinul n cu coeficienţi constanţi

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = 0.$$

Dacă ecuația caracteristică

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n = 0$$

are rădăcinile complexe

$$\alpha_1 + i\beta_1, \qquad \alpha_2 + i\beta_2, \ldots, \qquad \alpha_p + i\beta_p,$$
$$\alpha_1 - i\beta_1, \qquad \alpha_2 - i\beta_2, \ldots, \qquad \alpha_p - i\beta_p,$$

de ordine de multiplicitate $m_1, m_2, \ldots, m_p$ **și rădăcinile reale**

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_q$$

de ordine de multiplicitate, $s_1, s_2, \ldots, s_q$, **atunci soluția generală a ecuației diferențiale este**

$$y(x) = \sum_{k=1}^{p} e^{\alpha_k x}\left[P_{m_k-1}(x)\cos\beta_k x + Q_{m_k-1}(x)\sin\beta_k x\right] + \sum_{h=1}^{q} e^{\gamma_h x} R_{s_h-1}(x) \tag{1}$$

unde P_{m_k-1}, Q_{m_k-1}, R_{s_h-1} **sînt polinoame arbitrare în** x **de grade** respectiv m_k-1, m_k-1, s_h-1.

Demonstrație. Trebuie să arătăm că soluțiile particulare care constituie (1) sînt liniar independente în *ansamblul lor*.

Dacă exprimăm pe $\sin x$ și $\cos x$ prin exponențiale, expresia (1) dacă ar fi identic nulă [deci soluțiile ar fi liniar dependente] s-ar scrie în modul următor:

$$P_1(x)e^{r_1 x} + P_2(x)e^{r_2 x} + \ldots + P_t(x)e^{r_t x} \equiv 0, \tag{2}$$

cu $t > 1$, deci

$$P_1(x) + P_2(x)e^{(r_2-r_1)x} + \ldots + P_t(x)e^{(r_t-r_1)x} \equiv 0.$$

Dacă $P_1(x)$ are gradul h, derivînd de $h+1$ ori, ajungem la o expresie de forma (2) cu un termen mai puțin. Repetînd această operație de $t-1$ ori ajungem la

$$e^{\alpha x} \equiv 0,$$

ceea ce nu se poate, deci soluțiile care formează (1) sînt liniar independente pe R.

Exemplu

$y'''' - y''' - y' + y = 0$. Ecuația caracteristică

$$r^4 - r^3 - r + 1 = (r-1)^2(r^2+r+1) = 0$$

are rădăcina dublă $r = 1$ și rădăcinile complexe $r_{3,4} = -\dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Soluția generală a ecuației este

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x + e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_4\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), \qquad x \in R.$$

4. Ecuații neomogene

a) Pentru determinarea unei soluții particulare a ecuației neomogene

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x)$$

putem folosi metoda variației constantelor, care ne permite, cunoscînd soluția generală a ecuației omogene, să găsim o soluție particulară a ecuației neomogene prin n cuadraturi.

Exemplu

Să se integreze ecuația $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$, $x \neq k\pi$. $y'' + y = 0$ are ecuația caracteristică $r^2 + 1 = 0$ cu rădăcinile $r_1 = i$, $r_2 = -i$, deci soluția generală a ecuației omogene este

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

Pentru determinarea unei soluții a ecuației neomogene folosim metoda variației constantelor. Avem

$$C_1' \sin x + C_2' \cos x = 0,$$

$$C_1' \cos x - C_2' \sin x = \frac{1}{\sin x}$$

sau

$$C_1' = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad C_2' = -1,$$

$$C_1(x) = \ln |\sin x| + A_1, \qquad C_2(x) = -x + A_2.$$

Soluția generală a ecuației neomogene este așadar

$$y = A_1 \sin x + A_2 \cos x + \sin x \ln |\sin x| - x \cos x,$$

pe orice interval care nu conține punctele $x = k\pi$, k întreg.

b) Sînt cazuri frecvente în aplicații cînd putem găsi prin identificare soluția particulară, fără să folosim metoda variației constantelor, metodă care pentru $n > 2$ conduce la calcule numeroase. Enumerăm mai jos aceste cazuri:

b$_1$) **Funcția $f(x)$ este un polinom $P_m(x)$.** Soluția particulară va fi în acest caz tot un polinom de x, de același grad m, dacă $a_n \neq 0$. Luăm pentru y_0 un polinom arbitrar de grad m, $Q_m(x)$, calculăm derivatele $y_0', \ldots, y_0^{(n)}$, le introducem în ecuația diferențială

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = P_m(x) \tag{1}$$

și prin identificare determinăm pe $Q_m(x)$. Dacă $a_n = 0$, $a_{n-1} = 0, \ldots, a_{n-k} = 0$, $a_{n-k-1} \neq 0$, trebuie să luăm pentru $Q(x)$ un polinom de grad $m + k$ pentru a putea face identificarea.

Exemplu

Să se integreze ecuația

$$y^{(VI)} - y^{(IV)} = 1 + x.$$

Integrăm mai întîi ecuația omogenă $y^{(VI)} - y^{(IV)} = 0$. Ecuația caracteristică $r^6 - r^4 = r^4(r^2 - 1) = 0$ are rădăcina cuadruplă $r_1 = 0$ şi rădăcinile simple $r_2 = 1$, $r_3 = -1$; soluția ei generală este

$$y = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4e^x + C_5e^{-x}, \quad x \in R.$$

Pentru ecuația neomogenă căutăm o soluție particulară de forma $y_0 = Ax^4 + Bx^5$; avem $y^{(IV)} = 4!\,A + 5!\,Bx$, $y^{(V)} = 0$, $y^{(VI)} = 0$, deci

$$-4!\,A - 5!\,Bx \equiv 1 + x,$$

$$A = -\frac{1}{4!}, \quad B = -\frac{1}{5!};$$

soluția generală a ecuației neomogene este așadar

$$y = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4e^x + C_5e^{-x} - \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{5!}x^5, \quad x \in R.$$

Pentru determinarea lui y_0 metoda variației constantelor ar fi dus la calcule foarte lungi.

b_2) **Funcția $f(x)$ este de forma $e^{\alpha x} P_m(x)$.** Soluția particulară va fi în acest caz tot de această formă, cum se poate verifica imediat; luăm pentru y_0 o expresie de forma $y_0 = e^{\alpha x}Q_m(x)$, unde $Q_m(x)$ este un polinom arbitrar de grad m. Prin identificare determinăm coeficienții lui $Q_m(x)$.

Dacă α este o rădăcină de ordinul k a ecuației caracteristice, atunci se ia $y_0 = x^k e^{\alpha x} Q_m(x)$, pentru ca să se poată face identificarea.

Exemplu

Să se integreze ecuația

$$y'' - 3y' + 2y = e^{3x} + 2x + 1.$$

Ecuația caracteristică $r^2 - 3r + 2 = (r - 1)(r - 2) = 0$ are rădăcinile $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, deci ecuația omogenă are soluția generală

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x}, \quad x \in R.$$

Pentru ecuația neomogenă căutăm o soluție de forma

$$y_0 = Ae^{3x} + Bx + D,$$

deoarece partea a doua este suma unui polinom de gradul întîi şi a unei exponențiale. Avem

$$y_0' = 3Ae^{3x} + B, \quad y_0'' = 9Ae^{3x},$$

deci

$$9Ae^{3x} - 3(3Ae^{3x} + B) + 2(Ae^{3x} + Bx + D) \equiv e^{3x} + 2x + 1$$

sau

$$2A = 1, \quad 2B = 2, \quad -3B + 2D = 1,$$

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = 1, \quad D = 2,$$

prin urmare

$$y_0 = \frac{1}{2} e^{3x} + x + 2.$$

Soluția generală a ecuației neomogene este așadar

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2} e^{3x} + x + 2, \qquad x \in R.$$

b_3) **Funcția** $f(x)$ **este de forma :** $P_m(x) \cos \alpha x + Q_m(x) \sin \alpha x$.

Folosind formulele lui Euler, care exprimă pe $\cos \alpha x$ și $\sin \alpha x$ cu ajutorul exponențialei, expresia considerată va avea aceeași formă ca aceea studiată la punctul b_2), prin urmare soluția particulară va fi luată în modul următor

$$y_0 = P_m^*(x) \cos \alpha x + Q_m^*(x) \sin \alpha x \tag{δ}$$

cu $P^*(x)$ și $Q^*(x)$ polinoame arbitrare de grad m, care se determină prin identificare. Dacă $i\alpha$ și $-i\alpha$ sînt rădăcini multiple de ordinul k ale ecuației caracteristice, y_0 se ia de forma

$$y_0 = x^k P_m^*(x) \cos \alpha x + x^k Q_m^*(x) \sin \alpha x. \tag{δ'}$$

Expresia (δ) sau (δ') se menține *chiar dacă* unul din polinoamele $P_m(x)$ sau $Q_m(x)$ este de grad mai mic sau este identic nul, deoarece, în caz contrar, nu se poate face identificarea.

b_4) **Funcția** $f(x)$ **are forma** $P_m(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + Q_m(x) e^{\alpha x} \sin \beta x$.
În virtutea observației de la punctul b_3), soluția particulară y_0 va avea expresia

$$P_m^*(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + Q_m^*(x) e^{\alpha x} \sin \beta x$$

dacă $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$ nu sînt rădăcini ale ecuației caracteristice, sau va avea expresia

$$x^k P_m^*(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + x^k Q_m^*(x) e^{\alpha x} \sin \beta x$$

dacă $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$ sînt rădăcini multiple de ordinul k, ale ecuației caracteristice.

Exemplu

Să se găsească soluția ecuației

$$y''' - y'' + y' - y = \cos x$$

al cărei grafic are punctul (0, 0) punct de inflexiune, cu tangenta în (0,0) axa Ox.

Ecuația omogenă $y''' - y'' + y' - y = 0$ are ecuația caracteristică $r^3 - r^2 + r - 1 = (r^2 + 1)(r - 1) = 0$; soluția generală a ecuației omogene este

$$y = C_1 e^{x} + C_2 \sin x + C_3 \cos x, \qquad x \in R.$$

O soluție particulară a ecuației neomogene va fi de forma

$$y_0 = Ax \cos x + Bx \sin x;$$

derivăm

$$y_0' = A\cos x + B\sin x - Ax\sin x + Bx\cos x,$$

$$y_0'' = -2A\sin x + 2B\cos x - Ax\cos x - Bx\sin x,$$

$$y_0''' = -3A\cos x - 3B\sin x + Ax\sin x - Bx\cos x$$

şi identificăm

$$(-2A - 2B)\cos x + (-2B + 2A)\sin x \equiv \cos x,$$

$$A + B = -\frac{1}{2}, \quad A - B = 0, \quad A = -\frac{1}{4}, \quad B = -\frac{1}{4}.$$

Soluţia generală a ecuaţiei neomogene este

$$y = C_1e^x + C_2\sin x + C_3\cos x - \frac{1}{4}x\sin x - \frac{1}{4}x\cos x, \qquad x\in R.$$

Pentru a determina soluţia particulară trebuie să ţinem seama de condiţiile iniţiale:

$$y(0) = 0; \qquad C_1 + C_3 = 0,$$

$$y'(0) = 0; \qquad C_1 + C_2 - \frac{1}{4} = 0,$$

$$y''(0) = 0; \qquad C_1 - C_3 - \frac{1}{2} = 0,$$

$$C_1 = \frac{1}{4}, \qquad C_2 = 0, \qquad C_3 = -\frac{1}{4},$$

deci soluţia căutată este

$$y(x) = \frac{1}{4}e^x - \frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{4}x\sin x - \frac{1}{4}x\cos x, \qquad x\in R.$$

Aplicaţii

1) Am văzut (B, cap. II, § 1, al. 4) că într-un circuit format dintr-un rezistor de rezistenţa R, un capacitor de capacitate C şi o bobină de inductanţă L, circuit conectat la bornele unui generator $e = E =$ const., în regimul tranzitoriu este valabilă ecuaţia diferenţială

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E.$$

Ne propunem să studiem soluţiile acestei ecuaţii, L, R, C, E fiind considerate constante.

a) Ecuaţia omogenă

$$Lq'' + Rq' + \frac{q}{C} = 0$$

ne dă regimul liber. Ecuația caracteristică

$$Lr^2 + Rr + \frac{1}{C} = 0$$

are rădăcinile $r_1, r_2 = -\frac{R}{2L} \pm \left[\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}\right]^{\frac{1}{2}}$;

să notăm $\left|\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}\right| = \omega^2$.

a_1) Dacă r_1, r_2 sînt reale (circuit aperiodic), atunci

$$q = e^{-\frac{R}{2L}t}(C_1e^{\omega t} + C_2e^{-\omega t}) = e^{-\frac{R}{2L}t}(A \operatorname{ch} \omega t + B \operatorname{sh} \omega t)$$

sau

$$q = e^{-\frac{R}{2L}t} \cdot \alpha \operatorname{ch}(\omega t + \beta)$$

$$\text{cu } \alpha = (A^2 - B^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad A = C_1 + C_2, \qquad B = C_1 - C_2, \qquad \operatorname{th} \beta = \frac{B}{A}.$$

a_2) Dacă r_1, r_2 sînt imaginar conjugate (circuit periodic), atunci

$$q = e^{-\frac{R}{2L}t}[A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t] = e^{-\frac{R}{2L}t} \cdot \alpha_1 \cdot \cos(\omega t + \beta_1)$$

cu

$$A_1 = C_1 + C_2, \qquad B_1 = i(C_1 - C_2), \qquad \alpha_1 = [A_1^2 + B_1^2]^{\frac{1}{2}}, \qquad \operatorname{tg}\beta_1 = -\frac{B_1}{A_1},$$

iar perioada oscilațiilor $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

a_3) $r_1 = r_2$, deci $\omega = 0$ (circuit aperiodic critic)

$$q = e^{-\frac{R}{2L}t}(A_2 + B_2 t).$$

b) Ecuația neomogenă

$$Lq'' + Rq' + \frac{q}{C} = E$$

are soluția particulară $q_0 = CE$.

c) Dacă ținem seamă acum de condițiile inițială și finală

$$q(0) = 0, \qquad \lim_{t \to \infty} q(t) = CE$$

avem

$$A = A_1 = -CE, \quad B = B_1 = \frac{R}{2\omega L} A = -\frac{R}{2\omega L} CE;$$

soluția care îndeplinește condițiile date, în toate cele trei cazuri prezentate la punctul *a*), este, **respectiv,**

$$c_1)\qquad q = CE\left[1 - e^{-\tau t}\left(\operatorname{ch}\omega t + \frac{R}{2\omega L}\operatorname{sh}\omega t\right)\right],$$

$$c_2)\qquad q = CE\left[1 - e^{-\tau t}\left(\cos\omega t + \frac{R}{2\omega L}\sin\omega t\right)\right],$$

$$c_3)\qquad q = CE\left[1 - e^{-\tau t}\left(1 + \frac{R}{2\omega L}t\right)\right],\quad \tau = \frac{R}{2L},\qquad t \in [0,\ \infty).$$

2) Să se determine curba de încovoiere a unei plăci verticale de înălțime h, simplu rezemată la capete (fig. 133), supusă presiunii apei, al cărei nivel este în dreptul reazemului de sus.

Ecuația diferențială a fibrei medii deformate (curba de încovoiere) este

$$y'' = \frac{M(x)}{EI},$$

Luăm densitatea apei $\rho = 1$; presiunea apei este proporțională cu adîncimea, deci placa este încărcată cu o sarcină triunghiulară. Într-o secțiune x, avem momentul încovoietor

$$M(x) = \frac{1}{6}(x^3 - h^2x).$$

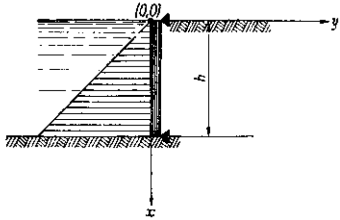

Fig. 133

Presupunînd placa de secțiune constantă și material omogen, deci $E =$ const., $I =$ const., ecuația diferențială se scrie

$$y'' = \frac{1}{6EI}(x^3 - h^2x)$$

cu soluția generală

$$y = C_0 + C_1x + \frac{1}{6EI}\left(\frac{x^5}{20} - \frac{h^2x^3}{6}\right),\quad x \in [0,\ h].$$

Constantele C_0 și C_1 se determină dacă ținem seamă că pentru $x = 0$ și $x = h$, $y = 0$, deci $y(0) = 0$, $y(h) = 0$, care constituie condițiile inițiale. Avem

$$y(0) = C_0 = 0,\quad y(h) = C_1 h - \frac{h^5}{6\ EI}\cdot\frac{7}{60} = 0.$$

Ecuația fibrei medii deformate este așadar

$$y(x) = \frac{1}{6EI}\left[\frac{x^5}{20} - \frac{h^2x^3}{6} + \frac{7h^4}{60}x\right],\quad x \in [0,\ h].$$

§ 7. ECUAŢIA LUI EULER

1. Transformarea unei ecuaţii Euler într-o ecuaţie cu coeficienţi constanţi

D e f i n i ţ i e. O ecuaţie diferenţială liniară de ordinul n de forma

$$a_0x^n y^{(n)} + a_1x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}xy' + a_n y = f(x) \tag{1}$$

cu $a_0, a_1, \dots, a_n$ constante (reale), iar $f(x)$ continuă pe un interval $[a, b]$ se numeşte ecuaţia lui Euler.

În punctul $x = 0$, coeficientul a_0x^n se anulează. Vom presupune că intervalul $[a, b]$ nu conţine originea care este un punct singular pentru ecuaţia Euler.

T e o r e m ă. O ecuaţie diferenţială Euler

$$a_0x^ny^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}xy' + a_ny = f(x) \tag{1}$$

prin substituţia $|x| = e^t$ se transformă în ecuaţie diferenţială liniară cu coeficienţi constanţi.

Demonstraţie. Punem $|x| = e^t$. Pentru $x > 0$, $x = e^t$ avem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}, \quad \frac{dy}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt}, \quad x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = e^{-t}\frac{d}{dt}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right) = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right),$$

deci

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = e^{-t}\frac{d}{dt}\left[e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)\right] =$$

$$= e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right)$$

sau

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}.$$

În mod analog, pentru $x < 0$, punem $x = -e^{-t}$, deci

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}, \quad \frac{dy}{dx} = -e^{-t}\frac{dy}{dt}; \quad x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}, \dots$$

adică acelaşi rezultat.

Se observă că toate produsele $x^k \dfrac{d^k y}{dx^k}$ se exprimă liniar cu ajutorul derivatelor $\dfrac{d^p y}{dt^p}$, $p = 1, 2, \ldots, k$, înmulțite cu factori numerici, deci dacă îi înlocuim în ecuația din enunț, ecuația se va transforma într-o ecuație cu coeficienți constanți, anume

$$b_0 \frac{d^n y}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + b_{n-1} \frac{dy}{dt} + b_n y = f(e^t), \tag{2}$$

$b_0, \ldots, b_n$ constante. Ecuația (2) a fost studiată la paragraful precedent. Ecuația omogenă

$$b_0 \frac{d^n y}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + b_{n-1} \frac{dy}{dt} + b_n y = 0$$

admite soluții de forma $e^{r_k t}$, unde r_k este o rădăcină a ecuației caracteristice. Revenind la ecuația inițială (1) și observînd că

$$e^{r_k t} = (e^t)^{r_k} = |x|^{r_k}$$

deducem că ecuația Euler, omogenă, admite soluții de forma $|x|^r$.

Acest rezultat simplifică mult determinarea soluției generale a unei ecuații Euler.

2. Soluția generală a unei ecuații Euler, omogenă

Fie ecuația Euler, omogenă

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0. \tag{1}$$

Dacă căutăm soluții de forma $y = A\,|x|^r$, $A = \text{const.}$, avem, succesiv,

$$y' = Ar\,|x|^{r-1},$$
$$y'' = A\,r\,(r-1)\,|x|^{r-2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y^{(n)} = A\,r(r-1)\ldots(r-n+1)\,|x|^{r-n},$$

derivate pe care dacă le înlocuim în (1), și observăm că se dă factor comun $A\,|x|^r$, obținem

$$A\,|x|^r K_n(r) = 0,$$

unde $K_n(r)$ este *ecuația caracteristică* a ecuației Euler

$$K_n(r) \equiv a_0 r(r-1)\ldots(r-n+1) + a_1 r(r-1)\ldots(r-n+2) + \ldots +$$
$$+ a_{n-1} r + a_n = 0.$$

Fie $r_1, r_2, \ldots, r_n$, rădăcinile ecuației caracteristice. După natura lor și ordinul lor de multiplicitate determinăm la fel ca și la ecuațiile diferențiale liniare cu coeficienți constanți sistemul fundamental de soluții ale ecuației Euler considerate. Discuția pe care o vom face se va desfășura în paralel cu discuția făcută la ecuațiile cu coeficienți constanți.

I. Ecuația caracteristică $K_n(r) = 0$ are rădăcinile $r_1, r_2, \ldots, r_n$ reale simple.

În acest caz, soluțiile

$$y_1 = |x|^{r_1}, \quad y_2 = |x|^{r_2}, \ldots, y_n = |x|^{r_n}$$

formează un sistem fundamental de soluții. Soluția generală a ecuației Euler este

$$y = C_1 |x|^{r_1} + C_2 |x|^{r_2} + \ldots + C_n |x|^{r_n}.$$

Exemplu

$x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$. Ecuația caracteristică $r(r-1) + 4r + 2 = (r+1)(r+2) = 0$ are rădăcinile $r_1 = -1$, $r_2 = -2$.

Funcțiile $y_1 = \dfrac{1}{x}$, $y_2 = \dfrac{1}{x^2}$ formează un sistem fundamental de integrale pe orice interval $[a, b]$ care nu conține originea.

Soluția generală a ecuației date este

$$y = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2}.$$

Să găsim soluția particulară care îndeplinește condițiile inițiale

$$y(1) = 0, \qquad y'(1) = 1. \qquad \text{Avem } C_1 + C_2 = 0, \qquad -C_1 - 2C_2 = 1,$$

deci $C_1 = 1$, $C_2 = -1$. Soluția particulară căutată este

$$y(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}.$$

II. Ecuația caracteristică $K_n(r) = 0$ are rădăcinile complexe simple.

În cazul ecuațiilor liniare cu coeficienți constanți, dacă $r = \alpha + i\beta$, $\bar{r} = \alpha - i\beta$ erau două rădăcini complexe conjugate, simple ale ecuației caracteristice, soluțiile introduse de aceste rădăcini erau

$$Y = e^{\alpha t} \cos \beta t, \quad Y^* = e^{\alpha t} \sin \beta t;$$

revenind la ecuația Euler, pentru a afla soluțiile corespunzătoare trebuie să înlocuim pe t cu $\ln|x|$, deci în această situație avem

$$Y = |x|^\alpha \cos(\beta \ln|x|), \quad Y^* = |x|^\alpha \sin(\beta \ln|x|).$$

Prin urmare, dacă ecuația caracteristică $K_n(r) = 0$ a unei ecuații Euler are rădăcinile complexe conjugate, simple

$$r_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \qquad r_2 = \alpha_2 + i\beta_2, \ldots, r_m = \alpha_m + i\beta_m,$$

$$\bar{r}_1 = \alpha_1 - i\beta_1, \qquad \bar{r}_2 = \alpha_2 - i\beta_2, \ldots, \bar{r}_m = \alpha_m - i\beta_m, \; n = 2m,$$

atunci funcțiile următoare

$$Y_1 = |x|^{\alpha_1} \cos(\beta_1 \ln|x|), \quad Y_1^* = |x|^{\alpha_1} \sin(\beta \ln|x|),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Y_m = |x|^{\alpha_m} \cos(\beta_m \ln|x|), \quad Y_m^* = |x|^{\alpha_m} \sin(\beta_m \ln|x|)$$

formează un sistem fundamental de integrale. Soluția generală în acest caz are forma

$$y(x) = \sum_{k=1}^{m} |x|^{\alpha_k} [C_k \cos(\beta_k \ln|x|) + C_k^* \sin(\beta_k \ln|x|)]$$

pe orice interval care nu conține originea, cu $C_1, C_1^*, \ldots, C_m, C_m^*$ constante arbitrare.

Exemplu

$x^2y'' + 2xy' + y = 0$. Ecuația caracteristică

$$r(r-1) + 2r + 1 = r^2 + r + 1 = 0 \text{ are rădăcinile } r_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Funcțiile

$$y_1 = |x|^{-\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln|x|\right), \quad y_2 = |x|^{-\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln|x|\right)$$

formează un sistem fundamental de integrale pe orice interval care nu conține originea. Soluția generală este

$$y = |x|^{-\frac{1}{2}} \left[C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln|x|\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln|x|\right)\right].$$

III. Ecuația caracteristică $K_n(r) = 0$ are rădăcina reală $r = \alpha$, de ordinul $p + 1$ de multiplicitate.

În cazul ecuațiilor liniare cu coeficienți constanți, dacă $r = \alpha$ ar fi fost o rădăcină reală de ordinul $p + 1$ de multiplicitate, atunci funcțiile următoare

$$e^{\alpha t}, \; t\,e^{\alpha t}, \ldots, t^p\,e^{\alpha t},$$

erau soluțiile introduse de această rădăcină; revenind la ecuația Euler, obținem, dacă înlocuim pe t cu $\ln|x|$

$$|x|^{\alpha}, \quad |x|^{\alpha} \ln|x|, \quad |x|^{\alpha} \ln^2|x|, \ldots, |x|^{\alpha} \ln^p|x|,$$

iar contribuția acestei rădăcini la soluția generală este

$$[C_0 + C_1 \ln|x| + C_2 \ln^2|x| + \ldots + C_p \ln^p|x|] \cdot |x|^{\alpha}.$$

Exemplu

$x^2y'' + 3xy' + y = 0$. Ecuația caracteristică $r(r-1) + 3r + 1 = (r+1)^2 = 0$ are rădăcina dublă $r = -1$. Funcțiile $y_1 = \frac{1}{x}$, $y_2 = \frac{1}{x} \ln|x|$ formează un sistem fundamental de integrale pe orice interval care nu conține originea. Soluția generală a ecuației date este

$$y = C_1 \frac{1}{x} + C_2 \frac{1}{x} \ln |x|.$$

IV. Ecuația caracteristică $K_n(r) = 0$ are rădăcinile $r = \alpha + i\beta$, $\bar{r} = \alpha - i\beta$ de ordinul $p + 1$ de multiplicitate.

În mod analog se deduce că funcțiile

$$Y_1 = |x|^\alpha \cos(\beta \ln|x|), \qquad Y_1^* = |x|^\alpha \sin(\beta \ln|x|),$$

$$Y_2 = |x|^\alpha \ln|x| \cos(\beta \ln|x|), \quad Y_2^* = |x|^\alpha \ln|x| \sin(\beta \ln|x|),$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

$$Y_{p+1} = |x|^\alpha \ln^p |x| \cos(\beta \ln|x|), \quad Y_{p+1}^* = |x|^\alpha \ln^p |x| \sin(\beta \ln|x|)$$

sînt soluțiile introduse de aceste rădăcini, iar contribuția lor la soluția generală este

$$[C_0 + C_1 \ln|x| + \ldots + C_p \ln^p |x|] \, |x|^\alpha \cos(\beta \ln|x|) +$$
$$+ [C_0^* + C_1^* \ln|x| + \ldots + C_p^* \ln^p |x|] \, |x|^\alpha \sin(\beta \ln|x|),$$

$C_0,\ C_0^*, \ldots, C_p,\ C_p^*$ fiind $2p + 2$ constante arbitrare.

Rezultatele obținute se pot rezuma în următoarea

Teoremă. Fie ecuația diferențială liniară de ordinul n

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0 \tag{1}$$

cu a_k numere reale.

Dacă ecuația caracteristică

$$a_0 r(r-1) \ldots (r-n+1) + a_1 (r-1) \ldots (r-n+2) + \ldots +$$
$$+ a_{n-1} r + a_n = 0$$

are rădăcinile complexe conjugate

$$\alpha_1 + i\beta_1,\ \alpha_2 + i\beta_2, \ldots, \alpha_p + i\beta_p,$$
$$\alpha_1 - i\beta_1,\ \alpha_2 - i\beta_2, \ldots, \alpha_p - i\beta_p$$

de ordine de multiplicitate $m_1, m_2, \ldots, m_p$, și rădăcinile reale

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_q,$$

de ordine de multiplicitate $s_1, s_2, \ldots, s_q$, atunci soluția generală a ecuației diferențiale (1) este

$$y(x) = \sum_{k=1}^{p} |x|^{\alpha_k} [P_{m_k-1}(\ln|x|) . \cos(\beta_k \ln|x|) +$$

$$+ Q_{m_k-1}(\ln|x|) \sin(\beta_k \ln x)] + \sum_{h=1}^{q} |x|^{\gamma_h} R_{s_h-1}(\ln|x|),$$

unde $P_{m_k-1},\ Q_{m_k-1},\ R_{s_h-1}$ sînt polinoame arbitrare în $\ln|x|$ de grade, respectiv $m_k - 1,\ m_k - 1,\ s_h - 1$.

Exemplu

$x^4y'''' + 3x^2y'' - 5xy' + 5y = 0$. Ecuația caracteristică

$$r(r-1)(r-2)(r-3) + 3r(r-1) - 5r + 5 = 0$$

are rădăcinile $r_1 = r_2 = 1$. $r_3 = 2 + i$, $r_4 = 2 - i$. Funcțiile

$$y_1 = x,\quad y_2 = x \ln |x|,\quad y_3 = x^2 \cos(\ln |x|),\quad y_4 = x^2 \sin(\ln |x|)$$

formează un sistem fundamental de integrale pe orice interval I care nu conține originea. Soluția generală a ecuației date este

$$y(x) = x(C_0 + C_1 \ln |x|) + x^2 [C_2 \cos(\ln |x|) + C_3 \sin(\ln |x|)].$$

Observație

Ecuațiile de forma

$$a_0(\alpha x + \beta)^n y^{(n)} + a_1(\alpha x + \beta)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(\alpha x + \beta) y' + a_n y = 0,$$

a_k, α, β numere reale, se integrează la fel ca și ecuațiile Euler, fie făcînd substituția $|\alpha x + \beta| = e^t$, fie căutînd direct soluții de forma $|\alpha x + \beta|^r$. Ele se numesc tot ecuații Euler.

Exemplu

$(2x+1)^2 y'' - 4(2x+1)y' + 8y = 0$. Căutăm soluții de forma $y = A|2x+1|^r$, $y' = 2Ar|2x+1|^{r-1}$, $y'' = 4Ar(r-1)|2x+1|^{r-2}$.

Dacă înlocuim obținem ecuația caracteristică

$$4r(r-1) - 8r + 8 = 4(r-1)(r-2) = 0.$$

Funcțiile $y_1 = 2x + 1$, $y_2 = (2x+1)^2$ formează un sistem fundamental de integrale pe orice interval I care nu conține punctul $x = -\dfrac{1}{2}$. Soluția generală a ecuației date este

$$y = C_1(2x+1) + C_2(2x+1)^2.$$

3. Ecuația Euler neomogenă

Pentru determinarea unei soluții particulare a unei ecuații Euler, neomogene, se folosește metoda variației constantelor.

Exemplu

Să se integreze ecuația $x^2y'' + 5xy' + 3y = \sin x$. Să se determine curba integrală care are în punctul $A(\pi, 0)$ tangenta paralelă cu prima bisectoare a axelor.

Ecuația omogenă $x^2y'' + 5xy' + 3y = 0$ are ecuația caracteristică

$$r(r-1) + 5r + 3 = (r+1)(r+3) = 0;$$

funcțiile $y_1 = \dfrac{1}{x}$, $y_2 = \dfrac{1}{x^3}$ formează un sistem fundamental de integrale pe orice interval care nu conține originea. Soluția generală a ecuației omogene este

$$y = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^3}.$$

Pentru determinarea unei soluții particulare a ecuației neomogene folosim metoda variației constantelor

$$\frac{C_1'}{x} + \frac{C_2'}{x^3} = 0,$$

$$-\frac{C_1'}{x^2} - 3\frac{C_2'}{x^4} = \frac{\sin x}{x^2},$$

deci

$$C_1' = -\frac{1}{2}\sin x, \quad C_2' = -\frac{1}{2}x^2 \sin x,$$

$$C_1(x) = -\frac{1}{2}\cos x, \quad C_2(x) = \frac{1}{2}x^2\cos x - x\sin x - \cos x.$$

Am găsit astfel o soluție particulară a ecuației neomogene:

$$y_0 = -\frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x^3}.$$

Soluția generală a ecuației date este

$$y = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^3} - \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x^3}. \tag{1}$$

Determinăm pe C_1 și C_2 prin condițiile inițiale $y(\pi) = 0$, $y'(\pi) = 1$,

$$\frac{C_1}{\pi} + \frac{C_2}{\pi^3} + \frac{1}{\pi^3} = 0; \quad \frac{1}{\pi^2}(1 - C_1) - \frac{3}{\pi^4}(1 + C_2) = 1,$$

deci

$$C_1 = \frac{1}{2}(\pi^2 - 1), \quad C_2 = -\frac{1}{2}(\pi^4 - \pi^2 + 2);$$

soluția particulară cerută în enunț se obține înlocuind în (1) constantele C_1 și C_2.

§ 8. INTEGRAREA CU AJUTORUL SERIILOR DE PUTERI

1. Ecuații diferențiale liniare cu coeficienții serii de puteri

Fie

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = 0 \tag{1}$$

o ecuație diferențială liniară de ordinul n cu coeficienții $a_k(x)$, $k = 0,1,\dots,n$, serii de puteri

$$a_k(x) = a_{0k} + a_{1k}x + \dots + a_{nk}x^n + \dots \tag{2}$$

cu raza de convergență diferită de zero.

Astfel de ecuații apar în multe probleme de fizică și tehnică.

Se pot obține soluții particulare și chiar soluția generală pornind de la o soluție de forma

$$y = x^r (c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + \ldots) \tag{3}$$

cu $r, c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ nedeterminați. Se derivează seria (3) de n ori, se introduc în (1) y și derivatele $y', \ldots, y^{(n)}$ astfel calculate, se grupează termenii după puterile crescătoare ale lui x, apoi se anulează toți coeficienții lui x, adică se cere ca seria (3) să fie soluție a ecuației date (1). Prin această operație se obține un *sistem infinit* de ecuații în $r, c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ sistem care poate fi rezolvat în anumite cazuri chiar cu metode elementare.

Fie

$$y_0 = x^r (\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n + \ldots) \tag{3'}$$

una din soluțiile astfel găsite. Toate operațiile de derivare și identificare sînt justificate, dacă seria $S(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n + \ldots$ obținută are o rază de convergență diferită de zero. Trebuie să determinăm așadar raza de convergență R a seriei $S(x)$. Dacă $R \neq 0$, pe mulțimea $(-R, R)$, (sau pe $(-R, R) - \{0\}$ dacă $r < 0$), funcția $y(x)$ definită ca suma seriei (3′) este o soluție a ecuației (1). În general, n din coeficienții $c_0, c_1, \ldots, c_p, \ldots$ rămîn nedeterminați. Impunînd *condiții inițiale* soluției pe care o căutăm, anume dacă cerem, de exemplu,

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ \ldots,\ y_0^{(n-1)}\ (x_0) = y_0^{(n-1)}$$

cu $x_0 \in (-R, R)$, obținem soluția problemei lui Cauchy. În caz contrar, coeficienții nedeterminați pot fi considerați arbitrari, obținînd astfel soluția generală a ecuației (1). Exemplul care urmează va lămuri aceste afirmații.

Exemplu

Să se găsească soluția $y(x)$ a ecuației

$$y'' + xy = 0$$

care îndeplinește condițiile inițiale $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Vom căuta pentru ecuația dată o soluție de forma

$$y = a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + \ldots + a_n x^{n+r} + \ldots$$

Derivăm

$$y' = a_0 r\, x^{r-1} + a_1 (r+1)\, x^r + \ldots + a_n (n+r)\, x^{n+r-1} + \ldots,$$

$$y'' = a_0 r (r-1)\, x^{r-2} + a_1 (r+1) r\, x^{r-1} + \ldots + a_n (n+r)(n+r-1)\, x^{n+r-2} + \ldots$$

și înlocuim în ecuația dată, grupînd în același timp termenii după puterile crescătoare ale lui x; trebuie să avem

$$a_0 r (r-1)\, x^{r-2} + a_1 r (r+1)\, x^{r-1} + a_2 (r+2)(r+1)\, x^r +$$

$$+ [a_0 + a_3 (r+3)(r+2)]\, x^{r+1} + \ldots + [a_n + a_{n+3} (r+n+3)(r+n+$$

$$+2)]\, x^{n+r+1} + \ldots \equiv 0,$$

deci

$$a_0 r(r-1)=0, \qquad a_1 r(r+1)=0,$$

$$a_2(r+2)(r+1)=0, \quad a_0+a_3(r+3)(r+2)=0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_n+(r+n+3)(r+n+2)\,a_{n+3}=0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

din primele două ecuaţii obţinem $r=0$; a_0 şi a_1 rămîn nedeterminaţi.

Din ecuaţia a treia obţinem $a_2=0$. Relaţia

$$a_n+(n+3)(n+2)\,a_{n+3}=0, \qquad n=0,1,\dots$$

ne determină toţi coeficienţii.

Pentru $n=3m$, $m=1,2,\dots$ obţinem

$$a_0=-2\,.\,3\,.\,a_3,$$

$$a_3=-5\,.\,6\,.\,a_6,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{3m-3}=-(3m-1)\,3m\,a_{3m},$$

care ne dă

$$a_{3m}=(-1)^m\frac{a_0}{2.3.5.6\dots(3m-1)\,3m}, \quad m=1,\,2,\,3,\dots$$

Pentru $n=2m+1$, $m=1,\,2,\dots$ obţinem

$$a_1=-\,3.4.\,a_4$$

$$a_4=-6.7\,.a_7$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{3m-2}=-\,3m\,(3m+1)\,a_{3m+1}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

care ne dă

$$a_{3m+1}=(-1)^m\frac{a_1}{3.4.6.7\dots3m\,(3m+1)}, \quad m=1,\,2.\,3,\dots$$

Pentru $n=3m+2$, $\quad a_2=0$, $\quad a_5=0,\dots,a_{3m+2}=0\dots$

Pentru $a_0=1$, $a_1=0$, obţinem soluţia

$$y_1(x)=1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{1.4.7\dots(3m-2)}{(3m)!}\,x^{3m},$$

iar pentru $a_0=0$, $a_1=1$ obţinem soluţia

$$y_2(x)=x+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{2.5\dots(3m-1)}{(3m+1)!}\,x^{3m+1}.$$

Se verifică imediat că ambele serii au raza de convergență infinită. Într-adevăr, pentru prima serie avem

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1.4\ldots(3m-2)}{(3m)!}\cdot\frac{(3m+3)!}{1.4\ldots(3m+1)} = \lim_{m\to\infty}(3m+3)(3m+2) = +\infty;$$

pentru seria a doua obținem în mod asemănător

$$\lim_{m\to\infty} \frac{2.5\ldots(3m-1)}{(3m+1)!}\cdot\frac{(3m+4)!}{2.5\ldots(3m+2)} =$$

$$= \lim_{m\to\infty}(3m+3)(3m+4) = +\infty.$$

Prin urmare, pentru orice $x \in R$, operațiile făcute sînt justificate. Soluția generală a ecuației date este

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad x \in R,$$

C_1 și C_2 fiind două constante arbitrare.

Condițiile inițiale

$$y(0) = 1, \qquad y'(0) = 1$$

determină pe C_1 și C_2, anume $C_1 = 1$, $C_2 = 1$.

Soluția particulară căutată este așadar

$$y = y_1 + y_2.$$

Capitolul III

SISTEME DE ECUAŢII DIFERENŢIALE

§ 1. PROPRIETĂŢI GENERALE

1. Generalităţi

Definiţie. 1) Relaţiile

$$\left.\begin{aligned} &F_1(t;x,x',\ldots,x^{(m)};\ y,y',\ldots,y^{(n)};\ z,z',\ldots,z^{(p)})=0\\ &F_2(t;x,x',\ldots,x^{(m)};\ y,y',\ldots,y^{(n)};\ z,z',\ldots,z^{(p)})=0\\ &F_3(t;x,x',\ldots,x^{(m)};\ y,y',\ldots,y^{(n)};\ z,z',\ldots,z^{(p)})=0\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

unde F_1, F_2, F_3 sînt trei funcţii definite pe $[a, b]\times X\times Y\times Z$, cu $X\subset R^{m+1}$, $Y\subset R^{n+1}$, $Z\subset R^{p+1}$, formează un sistem de trei ecuaţii diferenţiale cu trei funcţii necunoscute x, y, z, dacă se cere să se determine funcţiile $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ definite pe un acelaşi interval $[a, b]$, derivabile pînă la ordinul m, n, p respectiv, funcţii care împreună cu derivatele lor verifică ecuaţiile (1) pentru orice $t\in[a, b]$.

2) Un sistem de trei funcţii reale $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ care îndeplineşte aceste condiţii se spune că formează o soluţie a sistemului (1).

Observaţii

1) Dacă cel puţin unul din numerele m, n, p este mai mare decît 1, sistemul (1) se numeşte sistem de ordin superior; dacă $m=n=p=1$, atunci (1) este un sistem de ordinul întîi.

2) În mod asemănător se poate defini un sistem de s ecuaţii cu s funcţii necunoscute de ordin superior.

3) Dacă sistemul (1) este rezolvat în raport cu derivatele de ordinul cel mai înalt, adică este de forma

$$\left.\begin{aligned} x^{(m)}&=f_1(t;\ x,\ x',\ldots,\ x^{(m-1)};\ y,y',\ldots,\ y^{(n-1)};\ z,\ z',\ldots,\ z^{(p-1)})\\ y^{(n)}&=f_2(t;\ x,\ x',\ldots,\ x^{(m-1)};\ y,\ y',\ldots,\ y^{(n-1)};\ z,\ z',\ldots,\ z^{(p-1)})\\ z^{(p)}&=f_3(t;\ x,\ x',\ldots,\ x^{(m-1)};\ y,\ y',\ldots,\ y^{(n-1)};\ z,\ z',\ldots,\ z^{(p-1)})\end{aligned}\right\}\quad(1')$$

sistemul se numeşte *canonic* sau explicit.

Aplicaţie

Un sistem de n ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi, cu n funcţii necunoscute $y_1, y_2, \ldots, y_n$, explicit, este de forma

$$\frac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

$$\frac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, y_2, \ldots, y_n), \tag{2}$$

$$\frac{dy_n}{dt} = f_n(t, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

O soluţie a acestui sistem pe un interval $[a, b]$ este un sistem de n funcţii $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ derivabile pe intervalul $[a, b]$, care verifică sistemul (2) pentru orice $t \in [a, b]$.

Graficul unei soluţii

$$y_1 = \varphi_1(t), \quad y_2 = \varphi_2(t), \ldots, y_n = \varphi_n(t),$$

$t \in [a, b]$, reprezintă un arc de curbă în spaţiul cu n dimensiuni R^n.

2. Transformarea unui sistem de ordin superior într-un sistem de ordinul întîi

Teorema 1. Un sistem de ecuaţii diferenţiale de ordin superior poate fi transformat într-un sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi, prin introducerea de noi funcţii necunoscute.

Demonstraţie. Să considerăm sistemul (1′) de la alineatul precedent şi să introducem următoarele funcţii necunoscute

$$\frac{dx}{dt} = x_1, \quad \frac{dx_1}{dt} = x_2, \ldots, \frac{dx_{m-2}}{dt} = x_{m-1},$$

$$\frac{dy}{dt} = y_1, \quad \frac{dy_1}{dt} = y_2, \ldots, \frac{dy_{n-2}}{dt} = y_{n-1},$$

$$\frac{dz}{dt} = z_1, \quad \frac{dz_1}{dt} = z_2, \ldots, \frac{dz_{p-2}}{dt} = z_{p-1}.$$

Dacă observăm că $\frac{dx_k}{dt} = \frac{d^{k+1}x}{dt^{k+1}}$, $\frac{dy_k}{dt} = \frac{d^{k+1}y}{dt^{k+1}}$, $\frac{dz_k}{dt} = \frac{d^{k+1}z}{dt^{k+1}}$, sistemul (1′) se transformă în sistemul de ordinul întîi

$$\frac{dx_{m-1}}{dt} = f_1(t;\ x, x_1, \ldots, x_{m-1};\ y, y_1, \ldots, y_{n-1};\ z_1, z_2, \ldots, z_{p-1}),$$

$$\frac{dy_{n-1}}{dt} = f_2(t;\ x, x_1, \ldots, x_{m-1};\ y, y_1, \ldots, y_{n-1};\ z, z_1, \ldots, z_{p-1}),$$

$$\frac{dz_{p-1}}{dt} = f_3(t;\ x, x_1, \ldots, x_{m-1};\ y, y_1, \ldots, y_{n-1},\ z, z_1, \ldots, z_{p-1})$$

și

$$\frac{dx}{dt} = x_1, \quad \frac{dx_1}{dt} = x_2, \ldots, \frac{dx_{n-2}}{dt} = x_{m-1},$$

$$\frac{dy}{dt} = y_1, \quad \frac{dy_1}{dt} = y_2, \ldots, \frac{dy_{n-2}}{dt} = y_{n-1},$$

$$\frac{dz}{dz} = z_1, \quad \frac{dz_1}{dt} = z_2, \ldots, \frac{dz_{p-2}}{dt} = z_{p-1},$$

adică într-un sistem canonic de ordinul întîi cu $m + n + p$ ecuații.

Teorema este demonstrată. În general un sistem de s ecuații cu s funcții necunoscute, canonic (sau nu) de ordin $m_1, m_2, \ldots, m_s$ se transformă într-un sistem de $m_1 + m_2 + \ldots + m_s$ ecuații de ordinul întîi canonic (sau nu).

Teorema 2. Rezolvarea unui sistem de n ecuații diferențiale de ordinul întîi se poate reduce la rezolvarea unei ecuații diferențiale de ordinul n și invers.

Rezolvarea unei ecuații diferențiale de ordinul n se poate reduce la rezolvarea unui sistem de ecuații diferențiale de ordinul întîi.

Demonstrație. Să considerăm ecuația diferențială de ordinul n rezolvată în raport cu $y^{(n)}$

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{1}$$

Dacă introducem funcțiile

$$y_1 = y', \; y_2 = y_1', \ldots, \; y_{n-1} = y_{n-2}',$$

ecuația (1) se transformă în sistemul de n ecuații de ordinul întîi

$$\frac{dy_{n-1}}{dt} = f(t, y, y_1, \ldots, y_{n-1}),$$

$$\frac{dy_{n-2}}{dt} = y_{n-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2,$$

$$\frac{dy}{dt} = y_1.$$

Fie acum un sistem de n ecuații diferențiale de ordinul întîi

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= f_1(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dt} &= f_2(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dt} &= f(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

să derivăm prima ecuație din (2) de $(n-1)$ ori, să derivăm apoi pe toate celelalte ecuații din sistem de cîte $(n-2)$ ori fiecare; obținem astfel

$$n + (n-1)(n-1) = n^2 - n + 1$$

ecuații. Între aceste ecuații să eliminăm pe $y_2, y_3, \ldots y_n$ și toate derivatele lor, în total $(n-1)n = n^2 - n$ necunoscute.

Avem așadar $n^2 - n + 1$ ecuații și $n^2 - n$ necunoscute. Rezultatul eliminării este o relație între y_1 și derivatele ei pînă la ordinul n

$$y_1^{(n)} = \Phi(t, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}), \quad (3)$$

adică rezolvarea sistemului (2) s-a redus la rezolvarea ecuației (3). Teorema este demonstrată.

Observații

1) Teorema 1 arată că studiul sistemelor de ecuații diferențiale de ordin superior se reduce la studiul sistemelor de ecuații diferențiale de ordinul întîi, deoarece orice sistem de ordin superior este echivalent cu un sistem de ordinul întîi.

2) Din teorema 2 se deduce că orice rezultat privind un sistem de n ecuații diferențiale de ordinul întîi poate fi folosit și pentru studiul ecuațiilor diferențiale de ordin superior.

În paragraful ce urmează vom da o teoremă de existență pentru sisteme de ecuații diferențiale de ordinul întîi.

Folosind teorema 2 vom putea extinde rezultatele cuprinse în această teoremă de existență la ecuațiile diferențiale de ordin superior.

3) Din demonstrația teoremei 2 se mai deduce că dacă reușim să găsim soluția generală a ecuației diferențiale (3), atunci putem obține soluția generală a sistemului (2) numai prin derivări și operații algebrice.

Exemplu

Fie sistemul

$$\frac{dx}{dt} = x - y, \qquad \frac{dy}{dt} = x + y;$$

dacă derivăm prima ecuație obținem

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt};$$

între aceste trei ecuaţii eliminăm pe y şi $\frac{dy}{dt}$; avem

$$y = x - \frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = 2x - \frac{dx}{dt} \tag{α}$$

pe $\frac{dy}{dt}$ îl înlocuim în ecuaţia a treia. Rezultatul eliminării este ecuaţia diferenţială de ordinul doi liniară cu coeficienţi constanţi

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + 2x = 0,$$

cu soluţia generală

$$x = e^t (C_1 \cos t + C_2 \sin t);$$

pe y îl obţinem din prima relaţie (α), anume $y = x - \frac{dx}{dt}$, deci

$$x = e^t (C_1 \sin t - C_2 \cos t).$$

Soluţia generală a sistemului dat este

$$(\Gamma) \begin{cases} x = (C_1 \cos t + C_2 \sin t)\, e^t \\ y = (C_1 \sin t - C_2 \cos t)\, e^t, \quad t \in R, \end{cases}$$

şi este formată dintr-o familie de curbe (Γ) care depinde de două constante arbitrare.

§ 2. TEOREMA DE EXISTENŢĂ PENTRU SISTEME DE ECUAŢII DIFERENŢIALE

1. Problema lui Cauchy. Teorema de existenţă

Să considerăm un sistem de două ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi cu două funcţii necunoscute, explicit,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= g(t, x, y), \end{aligned} \tag{1}$$

cu f şi g funcţii continue într-un domeniu $D \subset R^3$.

Problema determinării unei soluţii $x(t)$, $y(t)$ a sistemului (1), care pentru $t = t_0$ ia valorile iniţiale x_0, y_0 $(t_0, x_0, y_0) \in D$, se numeşte **problema lui Cauchy.**

Rezolvarea problemei lui Cauchy revine, geometric, la determinarea în D a curbei integrale, soluţie a sistemului (1), care trece prin punctul $(t_0, x_0, y_0) \in D$.

Următoarea teoremă de existență ne dă condiții suficiente pentru care această soluție există și este unică, iar metoda folosită pentru demonstrarea ei, metoda aproximațiilor succesive, ne dă și un procedeu de construcție efectivă a ei.

T e o r e m ă. Fie

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = g(t, x, y) \tag{1}$$

un sistem de două ecuații diferențiale de ordinul întîi care îndeplinește următoarele condiții:

α) Fie (t_0, x_0, y_0) un punct din spațiul R^3; funcțiile $f(t, x, y)$, $g(t, x, y)$ sînt continue în intervalul închis D definit de

$$|t - t_0| \leqslant a, \quad |x - x_0| \leqslant b, \quad |z - z_0| \leqslant c.$$

β) Funcțiile f și g pentru orice (t, x_1, y_1), $(t, x_2, y_2) \in D$ satisfac condiția lui Lipschitz

$$|f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)| \leqslant A\,|x_2 - x_1| + B\,|y_2 - y_1|,$$

$$|g(t, x_1, y_1) - g(t, x_2, y_2)| \leqslant A\,|x_2 - x_1| + B\,|y_2 - y_1|,$$

$A > 0$, $B > 0$ și constante.

În aceste situații există o soluție a sistemului dat (1)

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

cu funcțiile φ și ψ derivabile pe un interval $|t - t_0| \leqslant h$, $(h \leqslant a)$ care pentru $t = t_0$ iau valorile x_0, y_0, respectiv

$$x_0 = \varphi(t_0), \quad y_0 = \psi(t_0).$$

Demonstrație. *a*) Funcțiile $f(t, x, y)$, $g(t, x, y)$ sînt continue pe intervalul închis D, deci sînt mărginite pe D. Fie $M > 0$ astfel încît să avem

$$|f(t, x, y)| \leqslant M, \quad |g(t, x, y)| \leqslant M, \quad (t, x, y) \in D.$$

Vom lua $h = \min\left\{a, \frac{b}{M}, \frac{c}{M}\right\}$. Pentru determinarea soluției

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

vom folosi *metoda aproximațiilor succesive* prezentată la demonstrarea teoremei de existență pentru ecuațiile diferențiale de ordinul întîi. Metoda constă în a construi din aproape în aproape două șiruri de funcții

$$x_0, \quad x_1(t), \ldots, x_n(t), \ldots$$

$$y_0, \quad y_1(t), \ldots, y_n(t), \ldots$$

și vom dovedi că fiecare șir converge în mod uniform către o funcție $\varphi(t)$, respectiv $\psi(t)$, funcții care îndeplinesc condițiile din enunțul teoremei.

Aproximația de ordinul zero pentru primul șir este x_0, iar pentru al doilea șir este y_0, adică valorile inițiale.

Aproximațiile următoare sînt definite astfel

$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, x_0, y_0)\,dt,$$

$$y_1(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} g(t, x_0, y_0)\,dt,$$

$$x_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, x_1(t), y_1(t))\,dt, \tag{2}$$

$$y_2(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t_1} g(t, x_1(t), y_1(t))dt,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, x_{n-1}(t), y_{n-1}(t))\,dt,$$

$$y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} g(t, x_{n-1}(t), y_{n-1}(t))\,dt.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

b) În modul acesta obținem următoarele două șiruri de funcții

$$x_0, \quad x_1(t), \ldots, x_n(t), \ldots$$
$$y_0, \quad y_1(t), \ldots, y_n(t), \ldots$$

care au următoarele proprietăți:

I. Aproximațiile $x_n(t)$, $y_n(t)$ pentru orice $n = 1, 2, 3, \ldots$ îndeplinesc condiția inițială

$$x_n(t_0) = x_0, \quad y_n(t_0) = y_0,$$

deoarece pentru $t = t_0$ integralele sînt nule.

II. Aproximațiile $x_n(t)$, $y_n(t)$ sînt funcții continue pe segmentul $[t_0 - h, t_0 + h]$. Într-adevăr, f și g sînt funcții continue pe D, deci toate integralele care intervin în (2) sînt funcții continue pentru $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$.

III. Dacă $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$, atunci $x_n \in [x_0 - b, x_0 + b]$, $y_n \in [y_0 - c, y_0 + c]$, $n = 1, 2, \ldots$. Vom demonstra prin recurență. Avem

$$|f(t, x_0, y_0)| \leqslant M, \quad |g(t, x_0, y_0)| \leqslant M,$$

deci

$$|x_1 - x_0| = \left|\int_{t_0}^{t} f(t, y_0, z_0)\,dt\right| \leqslant M\left|\int_{t_0}^{t} dt\right| = M|t - t_0| \leqslant Mh \leqslant b,$$

$$|y_1 - y_0| = \left|\int_{t_0}^{t} g(t, y_0, z_0)\,dt\right| \leqslant M\left|\int_{t_0}^{t} dt\right| = M|t - t_0| \leqslant Mh \leqslant c.$$

deoarece $h = \min\left\{a, \dfrac{b}{M}, \dfrac{c}{M}\right\}$.

Să presupunem acum că și aproximațiile de ordinul $n - 1$ îndeplinesc această condiție

$$x_{n-1}(t) \in [x_0 - b, x_0 + b], \quad y_{n-1}(t) \in [y_0 - c, y_0 + c];$$

de aici rezultă că $|f(t, x_{n-1}, y_{n-1})| \leqslant M$, $|g(t, x_{n-1}, y_{n-1})| \leqslant M$; putem scrie

$$|x_n(t) - x_0| = \left|\int_{t_0}^{t} f(t, x_{n-1}, y_{n-1})\, dt\right| \leqslant M\, |t - t_0| \leqslant Mh \leqslant b,$$

$$|y_n(t) - y_0| = \left|\int_{t_0}^{t} g(t, x_{n-1}, y_{n-1})\, dt\right| \leqslant M\, |t - t_0| \leqslant M \cdot h \leqslant c,$$

prin urmare pentru $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ toate aproximațiile aparțin intervalului $[x_0 - b, x_0 + b] \times [y_0 - c, y_0 + c]$.

c) Să arătăm acum că șirurile de funcții

$$x_0, \quad x_1(t), \ldots, x_n(t), \ldots$$

$$y_0, \quad y_1(t), \ldots, y_n(t), \ldots$$

converg uniform pe segmentul $[t_0 - h, t_0 + h]$ către funcțiile $\varphi(t)$, respectiv $\psi(t)$, cînd $n \to \infty$. Convergența acestor șiruri este echivalentă cu convergența seriilor de funcții

$$\begin{aligned} &x_0 + (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) + \ldots \\ &y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \ldots + (y_n - y_{n-1}) + \ldots, \end{aligned} \tag{3}$$

deoarece șirurile sumelor parțiale ale celor două serii sînt tocmai șirurile (x_n) și (y_n).

Pentru a arăta că seriile (3) converg uniform pe segmentul considerat este suficient să construim o serie numerică majorantă, cu termeni pozitivi, convergentă. Să arătăm că avem

$$\begin{aligned} &|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leqslant M(A + B)^{n-1} \cdot \frac{|t - t_0|^n}{n!}, \\ &|y_n(t) - y_{n-1}(t)| \leqslant M(A + B)^{n-1} \cdot \frac{|t - t_0|^n}{n!}, \end{aligned} \tag{4}$$

pentru orice $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$. Vom demonstra aceste neegalități prin recurență. Avem

$$|x_1(t) - x_0| = \left|\int_{t_0}^{t} f(t, x_0, y_0)\, dt\right| \leqslant \left|\int_{t_0}^{t} |f(t, x_0, y_0)|\, dt\right| \leqslant M\, |t - t_0|,$$

$$|y_1(t) - y_0| = \left|\int_{t_0}^{t} g(t, x_0, y_0)\, dt\right| \leqslant \left|\int_{t_0}^{t} |g(t, x_0, y_0)|\, dt\right| \leqslant M\, |t - t_0|,$$

deci pentru $n = 1$ neegalitățile (4) sînt verificate. Să presupunem că sînt adevărate pînă la $n - 1$ și să arătăm că sînt adevărate și pentru n; ne ocupăm de prima neegalitate; avem

$$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| = \left|\int_{t_0}^{t} [f(t, x_{n-1}, y_{n-1}) - f(t, x_{n-2}, y_{n-2})]\, dt\right|$$

și dacă folosim condiția lui Lipschitz (β) și pe (4) pentru $n - 1$, rezultă

$$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leqslant \left|\int_{t_0}^{t} [A\, |x_{n-1} - x_{n-2}| + B\, |y_{n-1} - y_{n-2}|]\, dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant (A + B)\left|\int_{t_0}^{t} M(A + B)^{n-2}\, \frac{|t - t_0|^{n-1}}{(n-1)!}\, dt\right|;$$

prin integrare obținem

$$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leqslant M(A+B)^{n-1} \cdot \frac{|t-t_0|^n}{n!};$$

în mod analog se procedează și pentru a doua neegalitate (4).

Deoarece $|t - t_0| \leqslant h$, din cele de mai sus deducem și neegalitățile

$$|x_n - x_{n-1}| \leqslant M(A+B)^{n-1} \cdot \frac{h^n}{n!},$$

$$|y_n - y_{n-1}| \leqslant M(A+B)^{n-1} \cdot \frac{h^n}{n!},$$

prin urmare seriile (3) sînt absolut și uniform convergente pe intervalul $[t_0 - h, t_0 + h]$, deoarece sînt majorate de seria cu termeni pozitivi, convergența

$$M(A+B)^{-1} \cdot \frac{[(A+B)h]^n}{n!}.$$

Conform rezultatelor demonstrate la șiruri de funcții, funcțiile $\varphi(t)$ și $\psi(t)$ definite astfel:

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \lim_{n\to\infty} x_n(t) = x_0 + \lim_{n\to\infty}\int_{t_0}^{t} f(t, x_{n-1}, y_{n-1})\, dt = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, \varphi(t), \psi(t))\, dt,\\
\psi(t) &= \lim_{n\to\infty} y_n(t) = y_0 + \lim_{n\to\infty}\int_{t_0}^{t} g(t, x_{n-1}, y_{n-1})\, dt = y_0 + \int_{t_0}^{t} g(t, \varphi(t), \psi(t))\, dt
\end{aligned} \tag{5}$$

sînt funcții continue pe $[t_0 - h, t_0 + h]$. Avem așadar

$$\left.\begin{aligned}
\varphi(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f[\tau, \varphi(\tau), \psi(\tau)]\, d\tau\\
\psi(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} g[\tau, \varphi(\tau), \psi(\tau)]\, d\tau
\end{aligned}\right\} \tag{5'}$$

deoarece f și g sînt continue, urmează că φ și ψ sînt și derivabile. Dacă derivăm pe (5′) după regula de derivare a integralei definite, obținem

$$\frac{d\varphi}{dt} = f(t, \varphi, \psi), \qquad \frac{d\psi}{dt} = g(t, \varphi, \psi)$$

pentru orice $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$, deci φ și ψ sînt soluțiile căutate. Funcțiile φ și ψ verifică condițiile inițiale, deoarece pentru $t = t_0$ în (5′) integralele sînt nule și

$$\varphi(t_0) = x_0, \quad \psi(t_0) = y_0.$$

d) Ne mai rămîne să arătăm că soluția $\varphi(t)$, $\psi(t)$ astfel găsită este unică (în condițiile inițiale date).

Să presupunem că mai există o soluție $u(t)$, $v(t)$ care satisface aceleași condiții inițiale, anume

$$u(t) + x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, u(t), v(t))\, dt,$$

$$v(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} g(t, u(t), v(t))\, dt;$$

vom avea

$$|x_n(t) - u(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} [f(t, x_{n-1}, y_{n-1}) - f(t, u(t), v(t))] \, dt \right|,$$

$$|y_n(t) - v(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} [g(t, x_{n-1}, y_{n-1}) - f(t, u(t), v(t))] \, dt \right|$$

şi folosind condiţia lui Lipschitz

$$|x_n(t) - u(t)| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} (A |x_{n-1} - u| + B |y_{n-1} - v|) \, dt \right|,$$

$$|y_n(t) - v(t)| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} (A |x_{n-1} - u| + B |y_{n-1} - v|) \, dt \right|,$$

de unde rezultă, prin recurenţă la fel ca la (c),

$$|x_n - u| \leqslant M (A + B)^{n-1} \cdot \frac{h^n}{n!},$$

$$|y_n - v| \leqslant M (A + B)^{n-1} \cdot \frac{h^n}{n!},$$

de unde deducem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = u(t)$; $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = v(t)$, deci

$$u(t) = \varphi(t), \quad v(t) = \psi(t), \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h],$$

ceea ce dovedeşte unicitatea. Teorema este demonstrată.

Pentru sisteme de n ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi, explicite, avem următoarea teoremă de existenţă, care se demonstrează în mod asemănător.

T e o r e m ă. Fie

$$\frac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

$$\frac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dy_n}{dt} = f_n(t, y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

un sistem de n ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi care îndeplineşte următoarele condiţii

α) Fie $(t_0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0})$ un punct din spaţiul R^{n+1}; funcţiile $f_k(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, sînt continue în intervalul închis D definit de

$$|t - t_0| \leqslant a, \quad |y_k - y_{k0}| \leqslant b_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

β) **Pentru orice $(t, y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{n1}) \in D$, $(t, y_{12}, y_{22}, \ldots, y_{n2}) \in D$, funcțiile f_k satisfac neegalitățile lui Lipschitz**

$$|f_k(t, y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{n1}) - f_k(t, y_{12}, y_{22}, \ldots, y_{n2})| \leqslant$$
$$\leqslant A_1 |y_{11} - y_{12}| + A_2 |y_{21} - y_{22}| + \ldots + A_n |y_{n1} - y_{n2}|$$

cu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ constante pozitive.

În aceste condiții există o s o l u ț i e a sistemului dat, anume

$$y_1 = \varphi_1(t), \quad y_2 = \varphi_2(t), \ldots, y_n = \varphi_n(t),$$

cu funcțiile φ_k derivabile pe un interval $|t - t_0| \leqslant h$, $(h \leqslant a)$ și care, pentru $t = t_0$, iau, respectiv, valorile

$$\varphi_k(t_0) = y_{k0}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Funcțiile $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ verifică și următorul s i s t e m d e e c u a ț i i i n t e g r a l e

$$\varphi_1(t) = y_{10} + \int_{t_0}^{t} f_1(t, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)\,dt,$$

$$\varphi_2(t) = y_{20} + \int_{t_0}^{t} f_2(t, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)\,dt,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_n(t) = y_{n0} + \int_{t_0}^{t} f_n(t, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)\,dt.$$

2. Consecințe ale teoremei de existență

a) În enunțul teoremei de existență $y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}$ sînt fixe, însă arbitrare, prin urmare avem următoarea

T e o r e m ă. Soluția unui sistem de n ecuații diferențiale de ordinul întîi

$$\frac{dy_k}{dt} = f_k(t, y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

cu f_k continue și cu derivate parțiale de ordinul întîi continue într-un domeniu $D \subset R^{n+1}$ depinde de n constante arbitrare.

Într-adevăr, dacă f_k sînt continue cu derivatele parțiale de ordinul întîi continue, atunci funcțiile f_k îndeplinesc condițiile lui Lipschitz în D, deci sînt îndeplinite condițiile teoremei de existență în D.

Mulțimea soluțiilor, definite de teorema de existență, în D, se numește integrala generală a sistemului (1) în D.

Mulțimea acestor soluții formează o familie de curbe, care depinde de n constante arbitrare.

O soluție a sistemului (1), care se obține din soluția generală dînd valori particulare constantelor arbitrare, se numește soluție particulară.

Exemplu

Sistemul

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{y^2}{x}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{x^2}{y}$$

cu substituția $x^2 = u$, $y^2 = v$ se transformă în

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 2v, \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 2u \qquad (\alpha)$$

din care se poate elimina cu ușurință v. Avem

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} = 2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 4u,$$

prin urmare u verifică ecuația diferențială de ordinul doi

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} - 4u = 0$$

cu soluția generală

$$u = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t},$$

iar pe v îl obținem din ecuațiile (α); avem

$$v = C_1 e^{2t} - C_2 e^{-2t}.$$

Soluția

$$x(t) = \sqrt{C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}},$$

$$y(t) = \sqrt{C_1 e^{2t} - C_2 e^{-2t}}, \quad t \in R$$

depinde de două constante arbitrare, prin urmare reprezintă soluția generală a sistemului dat. Dacă punem $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, obținem

$$x(t) = e^t, \quad y(t) = e^t, \quad t \in R,$$

care este o soluție particulară.

b) Am văzut că o ecuație diferențială de ordinul n

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \qquad (1)$$

cu introducerea a $n-1$ funcții

$$y_1 = y', \quad y_2 = y'', \ldots, y_{n-1} = y^{(n-1)}$$

se transformă în sistemul de n ecuații diferențiale de ordinul întîi

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dy}{dx}=y_1,\\&\frac{dy_1}{dx}=y_2,\\&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\&\frac{dy_{n-2}}{dx}=y_{n-1},\\&\frac{dy_{n-1}}{dx}=f(x,\ y,\ y_1,\ldots,y_{n-1}),\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

a cărui soluție generală depinde de n constante arbitrare. Deducem de aici că:

Soluția generală a unei ecuații diferențiale de ordinul n

$$y^{(n)}=f(x,\ y,\ y',\ \ldots,y^{(n-1)})$$

depinde de n constante arbitrare.

c) Fie sistemul (2) în care se transformă ecuația diferențială (1) de ordinul n. Din teorema de existență enunțată rezultă că dacă în punctul $x_0\in[a,\ b]$ ne dăm valorile

$$y_1(x_0)=y'(x_0)=y_0',\quad y_2(x_0)=y''(x_0)=y_0'',\ \ldots,y_{n-1}(x_0)=$$
$$=y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)},$$

atunci sistemul (2) are o soluție unică care îndeplinește aceste condiții inițiale. Revenind la ecuația diferențială (1) obținem următoarea

T e o r e m ă. Fie ecuația diferențială de ordinul n

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\ \ldots,y^{(n-1)})$$

cu f continuă cu derivate parțiale de ordinul întîi continue într-un domeniu $D=[a,b]\times Y,\ Y\subset R^n$.

Pentru orice $x_0\in[a,\ b]$ există o soluție $y=\varphi(x),\ x\in[a,\ b]$ a ecuației date, care îndeplinește condițiile inițiale

$$\varphi(x_0)=y_0,\quad \varphi'(x_0)=y_0',\ \ldots,\ \varphi^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$$

cu $y_0,\ y_0',\ \ldots,y_0^{(n-1)}$, numere (arbitrare) date, astfel încît $(y_0,y_0',\ldots,y_0^{(n-1)})\in\in Y$ și această soluție este unică. (Soluția problemei lui Cauchy).

A p l i c a ț i e

Ecuația diferențială liniară de ordinul n

$$a_0(x)\,y^{(n)}+a_1(x)\,y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)\,y'+a_n(x)\,y=0$$

îndeplinește condițiile din teorema de mai sus în $D=[a,b]\times R^n$ dacă $a_k(x),\ k=0,1,\ldots,n$ au derivate de ordinul întîi continue și $a_0(x)\neq 0$ pe $[a,b]$.

Exemple

1) Ecuațiile liniare cu coeficienți constanți

$$a_0\, y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

îndeplinesc condițiile din teoremă pentru $x \in R$, $Y = R^n$.

2) Ecuațiile Euler

$$a_0\, x^n y^{(n)} + a_1\, x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}\, xy' + a_n\, y = 0$$

îndeplinesc condițiile din teoremă pentru $Y = R^n$ și orice interval $[a,\ b]$ care nu conține originea.

d) **Teoremă. O ecuație diferențială liniară de ordinul n**

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = 0, \tag{1}$$

unde coeficienții $a_k(x)$ au derivate de ordinul întîi continue și $a_0(x) \neq 0$ pe un interval $[a, b]$, admite totdeauna un sistem fundamental de integrale pe $[a,\ b]$.

Demonstrație. Să considerăm n^2 numere μ_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ astfel încît determinantul $|\mu_{ij}| \neq 0$.

Conform aplicației de la punctul (*c*) există o soluție $y = \varphi_1(x)$, $x \in [a,\ b]$ a ecuației (1), care îndeplinește pentru $x = x_0 \in [a,\ b]$ condițiile inițiale

$$\varphi_1(x_0) = \mu_{11}, \quad \varphi_1'(x_0) = \mu_{12}, \ \ldots, \ \varphi_1^{(n-1)}(x_0) = \mu_{1n};$$

în mod asemănător există o soluție $y = \varphi_2(x)$, $x \in [a,\ b]$ a ecuației (1) care pentru $x = x_0 \in [a,\ b]$ îndeplinește condițiile inițiale

$$\varphi_2(x_0) = \mu_{21}, \quad \varphi_2'(x_0) = \mu_{22}, \ \ldots, \ \varphi_2^{(n-1)}(x_0) = \mu_{2n},$$

ș.a.m.d.; există o soluție $y = \varphi_n(x)$, $x \in [a,\ b]$ a ecuației (1) care pentru $x = x_0$ îndeplinește condițiile inițiale

$$\varphi_n(x_0) = \mu_{n1}, \quad \varphi_n'(x_0) = \mu_{n2}, \ \ldots, \ \varphi_n^{(n-1)}(x_0) = \mu_{nn}.$$

Am obținut astfel n soluții ale ecuației (1)

$$\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \ \ldots, \ \varphi_n(x),$$

definite pe $[a, b]$, cu wronskianul $w(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) \neq 0$ în punctul $x_0 \in$ $\in [a,\ b]$, deoarece valoarea sa în punctul x_0 este determinantul $|\mu_{ij}|$, prin ipoteză diferit de zero. Conform teoremei de la B, cap. II, §4, al. 3, funcțiile $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ formează un sistem de integrale ale ecuației (1) pe $[a,\ b]$. Teorema este demonstrată.

§ 3. SISTEME DE ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDINUL ÎNTÎI ŞI LINIARE

1. Sisteme liniare şi omogene

Definiție. 1) **Un sistem de forma**

$$\begin{aligned} L_1[y_1, y_2, \dots, y_n] &= a_{10}(t)\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} + a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 + \dots + a_{1n}(t)y_n = f_1(t),\\ L_2[y_1, y_2, \dots, y_n] &= a_{20}(t)\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} + a_{21}(t)y_1 + a_{22}(t)y_2 + \dots + a_{2n}(t)y_n = f_2(t),\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ L_n[y_1, y_2, \dots, y_n] &= a_{n0}(t)\frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}t} + a_{n1}(t)y_1 + a_{n2}(t)y_2 + \dots + a_{nn}(t)y_n = f_n(t) \end{aligned} \tag{1}$$

cu $a_{ij}(t)$, $f_i(t)$ funcții cu derivate de ordinul întîi continue şi $a_{i0}(t) \neq 0$ pe un interval $[a, b]$ se numeşte un sistem de n ecuații diferențiale liniare de ordinul întîi cu n funcții necunoscute $y_1, y_2, \dots, y_n$, neomogen.

2) **Dacă $f_i(t) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, $t \in [a, b]$, sistemul se numeşte omogen.**

Observații

1) Un sistem liniar este format din ecuații diferențiale, liniare în raport cu funcțiile necunoscute şi derivatele lor.

2) Un sistem de ecuații diferențiale liniare, de ordin superior, se transformă, prin mărirea convenabilă a funcțiilor necunoscute, într-un *sistem liniar* de ordinul întîi.

3) Dintr-un sistem de n ecuații diferențiale liniare de ordinul întîi în necunoscutele $y_1, y_2, \dots, y_n$, prin eliminarea funcțiilor $y_2, \dots, y_n$ şi a derivatelor lor, cum am arătat la B, cap. III, § 1, al. 2, se obține pentru y_1 *o ecuație diferențială liniară* de ordinul n. Această observație arată că o seamă de proprietăți ale ecuațiilor liniare le au şi sistemele de ecuații liniare. Expunerea care urmează va ține seamă de acest fapt.

4) Sistemul (1) scris mai sus este canonic, deoarece împărțind prima ecuație cu a_{10}, a doua ecuație cu a_{20} ş.a.m.d., a n-a ecuație cu a_{n0}, ecuațiile se scriu explicit în raport cu derivatele $\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}, \dots, \frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}t}$.

În acest alineat ne vom ocupa de sisteme omogene

$$L_1[y_1, y_2, \dots, y_n] = 0,\ L_2[y_1, y_2, \dots, y_n] = 0, \dots, L_n[y_1, y_2, \dots, y_n] = 0. \tag{2}$$

Definiție. Un sistem de n funcții

$$y_1(t),\ y_2(t), \ldots, y_n(t),$$

derivabile continuu pe intervalul $[a, b]$, formează o soluție a sistemului omogen (2) pe $[a, b]$ dacă verifică sistemul (2) pentru orice $t \in [a, b]$.

Exemplu

$$\frac{dx}{dt} + 2x - y = 0,\ \frac{dy}{dt} + 4x - 3y = 0.$$

Funcțiile $x = \frac{1}{4}e^{2t}$, $y = e^{2t}$, $t \in R$, formează o soluție a sistemului pe R.

Teoremă. Dacă

$$y_{11}(t),\ y_{12}(t), \ldots, y_{1n}(t),$$

$$y_{21}(t),\ y_{22}(t), \ldots, y_{2n}(t), \qquad t \in [a,\ b],$$

sînt două soluții ale sistemului omogen

$$L_k[y_1, y_2, \ldots, y_n] = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

atunci și funcțiile

$$C_1y_{11} + C_2y_{21},\ C_1y_{12} + C_2y_{22}, \ldots, C_1y_{1n} + C_2y_{2n},$$

unde C_1 și C_2 sînt două constante arbitrare, formează o soluție a sistemului dat pe $[a, b]$.

Demonstrație. Operatorii L_k sînt liniari, deci putem scrie

$$L_k[C_1y_{11} + C_2y_{21},\ C_1y_{12} + C_2y_{22}, \ldots, C_1y_{1n} + C_2y_{2n}] =$$

$$= C_1L_k[y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1n}] + C_2L_k[y_{21}, y_{22}, \ldots, y_{2n}] = 0,$$

deoarece

$$L_k[y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{in}] = 0,\ \ k = 1, 2, \ldots, n;\ i = 1,\ 2.$$

Teorema este demonstrată.

Observație

Dacă

$$y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1n},$$

$$y_{21}, y_{22}, \ldots, y_{2n},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$y_{n1}, y_{n2}, \ldots, y_{nn}$$

sunt n soluții ale sistemului omogen (2), atunci

$$\begin{gathered}C_1y_{11}+C_2y_{21}+\ldots+C_ny_{n1},\\ C_1y_{12}+C_2y_{22}+\ldots+C_ny_{n2},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ C_1y_{1n}+C_2y_{2n}+\ldots+C_ny_{nn},\end{gathered}$$

unde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sînt n constante arbitrare, este de asemenea o soluție a sistemului (2).

Definiție. 1) Fie următoarele n soluții

$$\left.\begin{array}{l}y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1n},\\ y_{21}, y_{22}, \ldots, y_{2n},\\ \ldots\ldots\ldots\\ y_{n1}, y_{n2}, \ldots, y_{nn},\end{array}\right\} \tag{1}$$

ale sistemului omogen

$$L_1[y_1, y_2, \ldots, y_n]=0, \ldots, L_n[y_1, y_2, \ldots, y_n]=0 \tag{2}$$

definite pe intervalul $[a, b]$.

Se spune că cele n soluții (1) formează un sistem fundamental de soluții ale sistemului (2) pe $[a, b]$ dacă determinantul următor

$$W(t)=\begin{vmatrix}y_{11} & y_{12}\cdots y_{1n}\\ y_{21} & y_{22}\cdots y_{2n}\\ \cdots & \cdots\cdots\\ y_{n1} & y_{n2}\cdots y_{nn}\end{vmatrix}$$

nu se anulează în nici un punct din intervalul $[a, b]$.

Determinantul $W(t)$ se numește wronskianul celor n soluții (1).

Observații

1) Dacă determinantul $W(t)$ nu se anulează în nici un punct în intervalul $[a, b]$, atunci sistemul de n ecuații liniare cu n necunoscute $c_1, c_2, \ldots, c_n$ dat de

$$\begin{gathered}c_1 y_{11}+c_2 y_{12}+\ldots+c_n y_{1n}=0,\\ c_1 y_{21}+c_2 y_{22}+\ldots+c_n y_{2n}=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ c_1 y_{n1}+c_2 y_{n2}+\ldots+c_n y_{nn}=0,\end{gathered}$$

nu admite pentru nici un $t_0 \in [a, b]$ decît soluția banală $c_1=c_2=\ldots=$ $=c_n=0$, cum rezultă imediat, aplicînd teorema lui Rouché.

Spunem că sistemul (1), cu $W(t) \neq 0$ pe $[a, b]$, este *liniar independent* pe $[a, b]$.

2) Se poate demonstra la fel ca și pentru ecuațiile diferențiale liniare de ordin superior, că dacă y_{ij}, $i, j = 1,2,\ldots,n$, sînt n soluții definite pe un interval $[a, b]$, ale sistemului (2) cu a_{jk} continue și $a_{j0} \neq 0$ pe $[a, b]$, și dacă wronskianul $W(t)$ al funcțiilor y_{ij} nu este identic nul pe $[a, b]$, atunci el nu se anulează în nici un punct pe $[a, b]$ și avem relația

$$W(t) = W(t_0)\cdot e^{-\int_{t_0}^{t}\left(\frac{a_{11}}{a_{10}}+\frac{a_{22}}{a_{20}}+\cdots+\frac{a_{nn}}{a_{n0}}\right)dt}, \quad t_0 \in (a, b), \quad W(t_0) \neq 0,$$

pentru $t \in [a, b]$.

2. Soluția generală a unui sistem omogen

T e o r e m ă. Fie sistemul de n ecuații diferențiale liniare de ordinul întîi și omogen.

$$\begin{aligned} &a_{10}(t)\frac{dy_1}{dt} + a_{11}(t)\,y_1 + \ldots + a_{1n}(t)\,y_n = 0,\\ &a_{20}(t)\frac{dy_2}{dt} + a_{21}(t)\,y_1 + \ldots + a_{2n}(t)\,y_n = 0,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &a_{n0}(t)\frac{dy_n}{dt} + a_{n1}(t)\,y_1 + \ldots + a_{nn}(t)\,y_n = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

cu $a_{ij}(t)$ derivabile continuu și $a_{i0}(t) \neq 0$ pe $[a, b]$.

Fie

$$\left.\begin{array}{l} y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1n},\\ y_{21}, y_{22}, \ldots, y_{2n},\\ \cdots\cdots\cdots\\ y_{n1}, y_{n2}, \ldots, y_{nn}, \end{array}\right\} \tag{2}$$

un sistem fundamental de soluții pe $[a, b]$.

Soluția generală a sistemului dat (1) pe $[a, b] \times R^n$ este dată de

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1 y_{11} + C_2 y_{21} + \ldots + C_n y_{n1},\\ y_2 &= C_1 y_{12} + C_2 y_{22} + \ldots + C_n y_{n2},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ y_n &= C_1 y_{1n} + C_2 y_{2n} + \ldots + C_n y_{nn}, \end{aligned} \tag{3}$$

unde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sînt constante arbitrare.

Demonstrație. Am definit la B, cap. III, § 2, al. 2, soluția generală a sistemului (1) în $D = [a, b] \times R^n$ ca mulțimea soluțiilor din D, definite de teorema de existență, astfel încît prin fiecare punct al domeniului D să treacă o soluție și numai una.

Dacă a_{ij} au derivate de ordinul întîi continue și $a_{i0} \neq 0$ pe $[a, b]$, atunci sîntem în condițiile teoremei de existență, deoarece sistemul se scrie

$$\frac{dy_k}{dt} = -\frac{a_{k1}}{a_{k0}} y_1 - \frac{a_{k2}}{a_{k0}} y_2 - \dots - \frac{a_{kn}}{a_{k0}} y_n$$

sau

$$\frac{dy_k}{dt} = f_k(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \text{ cu } f_k(t, y_1, \dots, y_n) = -\sum_{h=1}^{n} \frac{a_{kh}}{a_{k0}} y_k,$$

$k = 1, 2, \dots, n$, iar f_k sînt continue și au derivate de ordinul întîi continue pe $[a, b]$, deoarece toate funcțiile care le compun au aceste proprietăți, deci sînt mărginite și îndeplinesc condițiile lui Lipschitz pe $[a, b]$.

Rămîne să mai arătăm că putem dispune de constantele $C_1, C_2, \dots, C_n$, astfel încît pentru orice $t \in [a, b]$ și orice $(y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}) \in R^n$, să putem determina soluția $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ a sistemului (1) care îndeplinește condițiile inițiale

$$y_1(t_0) = y_{10}, \quad y_2(t_0) = y_{20}, \dots, y_n(t_0) = y_{n0}.$$

Impunînd aceste condiții soluției (3) obținem sistemul

$$\left.\begin{array}{l} C_1 y_{11}(t_0) + C_2 y_{21}(t_0) + \dots + C_n y_{n1}(t_0) = y_{10}, \\ C_1 y_{12}(t) \;\; + C_2 y_{22}(t_0) + \dots + C_n y_{n2}(t_0) = y_{20}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1 y_{1n}(t_0) + C_2 y_{2n}(t_0) + \dots + C_n y_{nn}(t_0) = y_{n0}, \end{array}\right\} \tag{4}$$

care este un sistem de n ecuații liniare cu n necunoscute $C_1\ C_2, \dots, C_n$, cu determinantul sistemului $W(t_0)$ prin ipoteză diferit de zero pentru orice $t_0 \in [a, b]$.

Rezolvînd sistemul (4) obținem, după regula lui Cramer, o soluție unică $C_1^*, C_2^*, \dots, C_n^*$, pe care dacă o înlocuim în (3) rezultă soluția căutată. Prin urmare din (3) putem obține soluția problemei Cauchy în $[a, b] \times R^n$, a sistemului de ecuații diferențiale (1). Teorema este demonstrată.

Observație

Rămîne să mai arătăm că un sistem de n ecuații liniare (1) are efectiv n soluții particulare liniar independente, soluție care formează deci un sistem fundamental.

Să considerăm n^2 numere μ_{ij}, $i, j = 1, 2, \dots, n$, astfel încît determinantul $|\mu_{ij}|$ să fie diferit de zero.

Să determinăm soluția $y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1n}$ a sistemului (1), care îndeplinește condițiile inițiale

$$y_{11}(t_0) = \mu_{11}, \quad y_{12}(t_0) = \mu_{12}, \dots, y_{1n}(t_0) = \mu_{1n}, \; t_0 \in [a, b];$$

în continuare să determinăm o a doua soluție a sistemului (1), $y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2n}$, care să îndeplinească condițiile inițiale

$$y_{21}(t_0) = \mu_{21}, \quad y_{22}(t_0) = \mu_{22}, \dots, y_{2n}(t_0) = \mu_{2n}$$

ş.a.m.d.; să determinăm o a n-a soluție a sistemului (1), $y_{n1}, y_{n2}, \dots, y_{nn}$ care să îndeplinească condițiile inițiale

$$y_{n1}(t_0) = \mu_{n1}, \; y_{n2}(t_0) = \mu_{n2}, \dots, y_{nn}(t_0) = \mu_{nn}.$$

Sistemul de soluții particulare astfel determinat este un sistem fundamental, deoarece wronskianul lor în punctul $t_0 \in [a, b]$ este determinantul $|\mu_{ij}|$ diferit de zero, deci, conform observației a doua de la acest paragraf, al. 2, punctul (c), $W(t)$ nu se anulează în nici un punct din $[a, b]$.

Exemplu

Sistemul

$$\frac{dx}{dt} + 2x - y = 0, \qquad \frac{dy}{dt} + 4x - 3y = 0$$

are soluțiile

$$x_1 = \frac{1}{4} e^{2t}; \quad y_1 = e^{2t}$$

$$x_2 = e^{-t}; \qquad y_2 = e^{-t}$$

care formează un sistem fundamental de integrale pe R.

Într-adevăr

$$w(t) = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} e^{2t} & e^{2t} \\ e^{-t} & e^{-t} \end{vmatrix} = -\frac{3}{4} e^{t} \neq 0, \quad t \in R$$

Soluția generală a sistemului este așadar

$$x(t) = \frac{1}{4} C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t},$$

$$y(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}, \qquad t \in R.$$

3. Construcția unui sistem de ecuații diferențiale de ordinul întîi, liniar, cînd se dă un sistem fundamental de soluții

Fie

$$\begin{matrix} y_{11}, & y_{12}, \ldots, y_{1n}, \\ y_{21}, & y_{22}, \ldots, y_{2n}, \\ \cdots & \cdots \\ y_{n1}, & y_{n2}, \ldots, y_{nn}, \end{matrix} \tag{1}$$

un sistem de n^2 funcții derivabile continuu pe un interval $[a, b]$, cu determinantul

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}$$

diferit de zero pentru orice $t \in [a, b]$. Sistemul de n ecuații diferențiale de ordinul întîi

$$L_k[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \begin{vmatrix} \frac{dy_k}{dt} & y_1 & y_2 \cdots y_n \\ \frac{dy_{1k}}{dt} & y_{11} & y_{12} \cdots y_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \frac{dy_{nk}}{dt} & y_{n1} & y_{n2} \cdots y_{nn} \end{vmatrix} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad (2)$$

admite ca sistem fundamental sistemul (1), cum se poate verifica imediat. Într-adevăr, orice sistem de n funcții

$$y_{p1}, \; y_{p2}, \ldots, y_{pn} \tag{3}$$

înlocuit în sistemul (2) îl verifică. Ecuația $L_k = 0$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) din (2), după înlocuirea soluției (3), este verificată, deoarece determinantul care o reprezintă are linia întîi și linia $p + 1$ egale, deci este nul.

Coeficientul lui $\frac{dy_k}{dt}$ este determinantul $W(t)$, prin ipoteză diferit de zero.

Exemplu

Să se formeze sistemul de două ecuații diferențiale de ordinul întîi care admite soluțiile

$$x_1 = t, \qquad y_1 = t^3,$$
$$x_2 = t^2, \qquad y_2 = 2t^3, \quad t \in (0, +\infty),$$

ca sistem fundamental. Ecuațiile sistemului sînt

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} & x & y \\ 1 & t & t^2 \\ 2t & t^2 & 2t^3 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \frac{dy}{dt} & x & y \\ 2t & t & t^3 \\ 6t^2 & t^2 & 2t^3 \end{vmatrix} = 0$$

sau

$$t^2 \frac{dx}{dt} - y = 0, \qquad t \frac{dy}{dt} + 2tx - 4y = 0;$$

wronskianul sistemului

$$w(t) = \begin{vmatrix} t & t^2 \\ t^2 & 2t^3 \end{vmatrix} = t^4$$

se anulează pentru $t = 0$. Prin urmare soluțiile date formează un sistem fundamental pentru sistemul (α) pe $(0, +\infty)$.

4. Sisteme liniare neomogene. Metoda variației constantelor

T e o r e m ă. Fie sistemul de n ecuații diferențiale liniare, neomogen

$$L_k[y_1, y_2, \ldots, y_n] = f_k(t), \qquad k = 1,2, \ldots, n, \tag{1}$$

cu $f_k(t)$ continue pe $[a, b]$.

Soluția generală a sistemului (1) se obține adăugînd la soluția generală a sistemului omogen

$$L_k[y_1, y_2, \ldots, y_n] = 0, \quad k = 1,2, \ldots, n, \tag{2}$$

o soluție particulară a sistemului neomogen (1).

Demonstrație. Fie

$$Y_1, \ Y_2, \ldots, Y_n$$

o soluție particulară pe $[a, b]$ a sistemului neomogen, deci

$$L_k[Y_1, Y_2, \ldots, Y_n] = f_k(t), \quad t \in [a, b].$$

Să facem schimbarea de funcții

$$y_1 = z_1 + Y_1, \ y_2 = z_2 + Y_2, \ldots, y_n = z_n + Y_n; \tag{3}$$

avem

$$L_k[z_1 + Y_1, z_2 + Y_2, \ldots, z_n + Y_n] = f_k(t) \quad k = 1,2, \ldots, n,$$

și dacă ținem seamă că operatorii L_k sînt liniari putem scrie

$$L_k[z_1, z_2, \ldots, z_n] + L_k[Y_1, Y_2, \ldots, Y_n] = f_k(t),$$

însă

$$L_k[Y_1, Y_2, \ldots, Y_n] = f_k(t), \quad t \in [a, b],$$

deci mai rămîne

$$L_k[z_1, z_2, \ldots, z_n] = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

adică integrarea sistemului neomogen (1) s-a redus la integrarea sistemului omogen (2) în urma schimbării de funcții (3).

Pentru determinarea unei soluții particulare a sistemului neomogen folosim *metoda variației constantelor.*

T e o r e m ă. Fie sistemul de n ecuații diferențiale liniare de ordinul întîi, neomogen

$$\begin{aligned} L_k[y_1, y_2, \ldots, y_n] &= a_{k0}(t)\frac{dy_k}{dt} + a_{k1}(t)y_1 + \ldots + a_{kn}(t)y_n = \\ &= f_k(x), \ k = 1,2, \ldots, n, \end{aligned} \tag{1}$$

cu coeficienții $a_{ki}(t)$, $f_k(t)$ continui și $a_{k0}(t) \neq 0$ pe $[a, b]$.

Fie

$$y_{k1}, y_{k2}, \ldots, y_{kn}, \; k = 1, 2, \ldots, n \tag{2}$$

un sistem fundamental de soluții pe $[a, b]$ al sistemului omogen

$$L_k[y_1, y_2, \ldots, y_n] = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

O soluție particulară $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ a sistemului neomogen (1) pe $[a, b]$ este dată de

$$Y_k = y_{1k}\int C_1'(t)\,\mathrm{d}t + y_{2k}\int C_2'(t)\,\mathrm{d}t + \ldots +$$

$$+ y_{nk}\int C_n'(t)\,\mathrm{d}t, \; k = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

unde $C_1'(t), C_2'(t), \ldots, C_n'(t)$ este soluția sistemului

$$\left.\begin{aligned} &y_{11}C_1'(t) + y_{21}C_2'(t) + \ldots + y_{n1}C_n'(t) = \frac{f_1(t)}{a_{10}(t)}, \\ &y_{12}C_1'(t) + y_{22}C_2'(t) + \ldots + y_{n2}C_n'(t) = \frac{f_2(t)}{a_{20}(t)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &y_{1n}C_1'(t) + y_{2n}C_2'(t) + \ldots + y_{nn}C_n'(t) = \frac{f_n(t)}{a_{n0}(t)}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Dacă efectuăm cuadraturile în (3), introducînd pentru fiecare cuadratură cîte o constantă arbitrară

$$\int C_1'(t)\,\mathrm{d}t = A_1 + \varphi_1(t), \ldots, \int C_n'(t)\,\mathrm{d}t = A_n + \varphi_n(t),$$

obținem soluția generală a sistemului neomogen

$$y_k = A_1y_{1k} + A_2y_{2k} + \ldots + A_ny_{nk} + y_{1k}\varphi_1 + y_{2k}\varphi_2 + \ldots + y_{nk}\varphi_n, \; k = 1, 2, \ldots, n.$$

Demonstrație. Fie

$$y_{1k}, y_{2k}, \ldots, y_{nk}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

un sistem fundamental de soluții pe $[a, b]$ al sistemului omogen; soluția generală a sistemului omogen este

$$y_k = C_1y_{k1} + C_2y_{k2} + \ldots + C_ny_{kn}, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

unde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sînt n constante arbitrare.

Să presupunem acum că C_k sînt funcții de t. Dacă derivăm pe y_k, în această ipoteză, și ținem seamă de condițiile (4), se constată că y_k verifică sistemul neomogen (1); într-adevăr, înlocuind în ecuația L_k (oarecare) din sistem, avem

$$a_{k0}\sum_{h=1}^{n} C_h\frac{\mathrm{d}y_{kh}}{\mathrm{d}t} + a_{k0}\sum_{h=1}^{n} y_{kh}\frac{\mathrm{d}C_h}{\mathrm{d}t} + \sum_{h=1}^{n} a_{kh}\left(\sum_{l=1}^{n} C_ly_{hl}\right) = f_k(t),$$

și dacă ținem seamă de relația k din (4) rămîne doar

$$\sum_{h=1}^{n} C_h L_k [y_{1h}, y_{2h}, \ldots, y_{nh}] = 0,$$

relație verificată identic pe $[a, b]$. Teorema este demonstrată.

Exemplu

$$t^2 \frac{dx}{dt} - y = t^2, \quad t \frac{dy}{dt} + 2tx - 4y = t^2, \quad t > 0.$$

Sistemul omogen are soluția generală (alineatul precedent)

$$x = C_1 t + C_2 t^2, \quad y = C_1 t^2 + 2C_2 t^3, \quad t > 0.$$

Pentru determinarea unei soluții particulare a sistemului neomogen folosim metoda variației constantelor. Avem

$$C_1' t + C_2' t^2 = 1,$$

$$C_1' t^2 + 2C_2' t^3 = t,$$

deci

$$C_1' = \frac{1}{t}, \quad C_2' = 0, \quad C_1 = \ln t + A_1, \quad C_2 = A_2.$$

Soluția generală a sistemului neomogen este

$$\begin{cases} x = A_1 t + A_2 t^2 + t \ln t, \\ y = A_1 t^2 + 2A_2 t^3 + t^2 \ln t, \quad t > 0. \end{cases} \tag{α}$$

O soluție particulară a sistemului neomogen rezultă din (α), anume

$$X = t \ln t, \quad Y = t^2 \ln t, \quad t > 0.$$

§ 4. SISTEME DE ECUAȚII DIFERENȚIALE LINIARE CU COEFICIENȚI CONSTANȚI

1. Sisteme omogene

Definiție. Un sistem de forma

$$\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dt} + a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \ldots + a_{1n} y_n = 0, \\ &\frac{dy_2}{dt} + a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \ldots + a_{2n} y_n = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{dy_n}{dt} + a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \ldots + a_{nn} y_n = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

unde a_{ij} sînt constante, se numește sistem de n ecuații diferențiale liniare cu n funcții necunoscute, cu coeficienți constanți, omogen.

a) Dacă derivăm prima ecuație de $n-1$ ori și toate celelalte ecuații de cîte $n-2$ ori fiecare și eliminăm între ecuațiile sistemului și ecuațiile astfel obținute (în număr de n^2-n+1) pe $y_2, y_3, \ldots, y_n$ și pe derivatele lor pînă la ordinul $n-1$ (în total n^2-n), obținem o ecuație diferențială liniară de ordinul n în y_1 cu coeficienți constanți. Dacă integrăm această ecuație, obținem pe y_1, funcție de n constante arbitrare. Celelalte funcții necunoscute le determinăm din ecuațiile sistemului și celelalte ecuații obținute prin derivări. Soluția generală a sistemului va depinde numai de cele n constante arbitrare care intervin în structura lui y_1.

Exemplu

Să se determine soluția generală a sistemului

$$\frac{dx}{dt} + x - y = 0, \quad \frac{dy}{dt} + y - 4z = 0, \quad \frac{dz}{dt} + 4z - x = 0.$$

Avem, derivînd o dată ecuațiile sistemului,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 4\frac{dz}{dt} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} + 4\frac{dz}{dt} - \frac{dx}{dt} = 0$$

deci

$$y = x + \frac{dx}{dt}, \quad z = \frac{1}{4}\left(y + \frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{4}\left(x + 2\frac{dx}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2}\right),$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{1}{4}\left(\frac{dx}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2}\right) + \frac{1}{4}\frac{d^2y}{dt^2};$$

mai derivăm o dată prima ecuație: $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^3x}{dt^3}$.

Avem așadar $z = \frac{1}{4}\left(x + 2\frac{dx}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2}\right)$

și

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{4}\left(\frac{dx}{dt} + 2\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^3x}{dt^3}\right);$$

pe z și $\frac{dz}{dt}$ îi înlocuim în ultima ecuație din sistem; rezultă

$$\frac{d^3x}{dt^3} + 6\frac{d^2x}{dt^2} + 9\frac{dx}{dt} = 0. \qquad (\alpha)$$

Am obținut ecuația diferențială de ordinul trei, verificată de funcția x. Ecuația (α) are ecuația caracteristică

$$r^3 + 6r^2 + 9r = r(r+3)^2 = 0.$$

Soluția generală a ecuației (α) este

$$x = C_1 + C_2 e^{-3t} + C_3 t e^{-3t}, \quad t \in R;$$

din $y = x + \frac{dx}{dt}$ obținem pe y

$$y = C_1 + (C_3 - 2C_2)\, e^{-3t} - 3C_3\, t e^{-3t}, \quad t \in R;$$

din $z = \frac{1}{4}\, y + \frac{1}{4} \frac{dy}{dt}$ rezultă și z

$$z = \frac{1}{4}\, C_1 + \frac{1}{4}\,(4\, C_2 - 5C_3)\, e^{-3t} + \frac{9}{4}\, C_3 t e^{-3t}, \quad t \in R.$$

Soluția generală a sistemului dat este așadar

$$\begin{cases} x = C_1 + C_2\, e^{-3t} + C_3 t\, e^{-3t}, \\ y = C_1 + (C_3 - 2C_2)\, e^{-3t} - 3C_3 t\, e^{-3t}, \\ z = \dfrac{1}{4}\, [C_1 + (4C_2 - 5C_3)\, e^{-3t} + 9\, C_3 t\, e^{-3t}], \quad t \in R. \end{cases}$$

b) Operațiile de eliminare pot fi lungi și complicate; putem să le evităm în modul următor:

Deoarece prin eliminare obținem întotdeauna o ecuație diferențială de ordinul n, liniară cu coeficienți constanți, care admite soluții de forma e^{rt}, atunci să căutăm, pentru sistemul dat (1), direct soluții de forma

$$y_1 = A_1\, e^{rt},\ y_2 = A_2\, e^{rt}, \ldots, y_n = A_n\, e^{rt}. \tag{2}$$

Dacă derivăm și înlocuim în (1), se dă factor în fiecare ecuație e^{rt}; îl înlăturăm; ne mai rămîne sistemul algebric, în $A_1, A_2, \ldots, A_n$, omogen,

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} + r)\, A_1 + a_{12}\, A_2 + \ldots + a_{1n}\, A_n = 0, \\ a_{21}\, A_1 + (a_{22} + r)\, A_2 + \ldots + a_{2n}\, A_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\, A_1 + a_{n2}\, A_2 + \ldots + (a_{nn} + r)\, A_n = 0, \end{aligned}\right\} \tag{2'}$$

căruia îi impunem să admită și alte soluții în afară de cea banală $A_1 = 0$, $A_2 = 0, \ldots, A_n = 0$. Conform teoremei lui Rouché trebuie să avem

$$\begin{vmatrix} a_{11} + r & a_{12} & \ldots & a_{1,\, n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} + r & \ldots & a_{2,\, n-1} & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n,\, n-1} & a_{nn} + r_n \end{vmatrix} = 0; \tag{3}$$

ecuația (3) se numește *ecuația caracteristică* a sistemului (1).

La fel ca pentru ecuații diferențiale liniare de ordinul n cu coeficienți constanți, determinarea soluției generale a sistemului (1) s-a redus la rezolvarea ecuației algebrice (3).

Vom avea următoarele situații:

I) $r = \alpha$ este o rădăcină reală simplă a ecuației caracteristice (3).

Sistemul admite o soluție de forma

$$y_1 = A_1 e^{\alpha t},\ y_2 = A_2 e^{\alpha t}, \ldots, y_n = A_n e^{\alpha t}.$$

Dacă înlocuim pe r cu α în sistemul algebric (2′), determinăm pe $A_2, A_3, \ldots, A_n$ în funcție de A_1; dacă luăm apoi $A_1 = 1$, obținem o soluție a sistemului dat (1).

II) $r = \alpha + i\beta$, $\bar{r} = \alpha - i\beta$ sînt două rădăcini imaginar conjugate, simple, ale ecuației caracteristice (3).

Soluția sistemului (1) relativă la acéste rădăcini este de forma

$$y_1 = (A_1 \cos \beta t + B_1 \sin \beta t)\, e^{\alpha t}, \ldots, y_n = (A_n \cos \beta t + B_n \sin \beta t)\, e^{\alpha t}$$

pe care dacă o înlocuim în sistemul (1), obținem, prin identificare, un sistem algebric care determină pe A_2, $B_2, \ldots, A_n$, B_n în funcție de A_1, B_1. Luînd $A_1 = 0$, $B_1 = 1$, apoi $A_1 = 1$, $B_1 = 0$ obținem două soluții ale sistemului (1).

III) $r = \alpha$ este o rădăcină reală a ecuației caracteristice (3) de ordinul $p + 1$ de multiplicitate.

Soluția sistemului (1) relativă la această rădăcină este de forma

$$\begin{aligned}
y_1 &= (A_{11} + A_{12} t + \ldots + A_{1,\,p+1} t^p)\, e^{\alpha t},\\
y_2 &= (A_{21} + A_{22} t + \ldots + A_{2,\,p+1} t^p)\, e^{\alpha t},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
y_n &= (A_{n1} + A_{n2} t + \ldots + A_{n,\,p+1} t^p)\, e^{\alpha t},
\end{aligned}$$

și toate constantele A_{ij} se determină în funcție de $A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{1,\,p+1}$ prin înlocuire în sistemul (1) și identificare.

IV) $r = \alpha + i\beta$, $\bar{r} = \alpha - i\beta$ sînt rădăcini ale ecuației caracteristice (3), amîndouă de ordinul $p + 1$ de multiplicitate.

Soluția sistemului (1) relativă la aceste rădăcini este de forma

$$\begin{aligned}
y_1 &= (A_{11} + A_{12} t + \ldots + A_{1,\,p+1} t^p)\, e^{\alpha t} \cos \beta t +\\
&\quad + (B_{11} + B_{12} t + \ldots + B_{1,\,p+1} t^p)\, e^{\alpha t} \sin \beta t,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
y_n &= (A_{n1} + A_{n2} t + \ldots + A_{n,\,p+1} t^p)\, e^{\alpha t} \cos \beta t +\\
&\quad + (B_{n1} + B_{n2} t + \ldots + B_{n,\,p+1} t^p)\, e^{\alpha t} \sin \beta t;
\end{aligned}$$

toate constantele A_{ij}, B_{ij} se determină în funcție de $A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{1,\,p+1}$, $B_{11}, B_{12}, \ldots, B_{1,\,p+1}$ prin înlocuire în sistemul (1) și identificare.

Exemplu

Să se integreze sistemul

$$\frac{dx}{dt} + 7x - y = 0, \ \frac{dy}{dt} + 2x + 5y = 0,$$

determinîndu-se soluţia $x(t)$, $y(t)$ care satisface condiţiile iniţiale $x(0) = 1$, $y(0) = -1$.

Ecuaţia caracteristică este

$$\begin{vmatrix} r+7 & -1 \\ 2 & r+5 \end{vmatrix} = r^2 + 12r + 37 = 0$$

cu rădăcinile $r_{1,2} = -6 \pm i$.

Sistemul are soluţii de forma

$$x(t) = (A_1 \cos t + A_2 \sin t)\, e^{-6t}, \quad y(t) = (B_1 \cos t + B_2 \sin t)\, e^{-6t};$$

înlocuind în prima ecuaţie din sistem, trebuie să avem

$$(A_2 + A_1 - B_1)\, e^{-6t} \cos t + (A_2 - A_1 - B_2)\, e^{-6t} \sin t \equiv 0$$

care dă

$$B_1 = A_1 + A_2, \quad B_2 = A_2 - A_1;$$

dacă luăm pe A_1 şi A_2 arbitrare, obţinem imediat soluţia generală a sistemului

$$\begin{cases} x(t) = (A_1 \cos t + A_2 \sin t)\, e^{-6t}, \\ y(t) = [(A_1 + A_2) \cos t + (A_2 - A_1) \sin t]\, e^{-6t}, \quad t \in R. \end{cases}$$

Soluţia particulară cerută se obţine impunînd condiţiile iniţiale; avem

$$x(0) = A_1 = 1, \quad y(0) = A_1 + A_2 = -1$$

de unde

$$x(t) = \cos t\, e^{-6t}, \quad y(t) = -\cos t e^{-6t}, \quad t \in R,$$

şi este soluţia care îndeplineşte condiţiile iniţiale.

2. Sisteme neomogene

Putem determina o soluţie particulară a unui sistem de ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întîi neomogen, cu coeficienţi constanţi

$$\frac{dy_k}{dt} + a_{k1} + a_{k2}y_2 + \ldots + a_{kn}y_n = f_k(t), \ k = 1,2,\ldots,n,$$

folosind metoda variaţiei constantelor. Dacă $f_k(t)$ au forme particulare, putem să procedăm într-un mod mai simplu, anume:

a) dacă $f_k(t)$ sînt polinoame de grad $\leqslant h$, vom căuta o soluţie particulară de forma

$$Y_1 = P_{1h}(t), \ Y_2 = P_{2h}(t), \ldots, Y_n = P_{nh}(t),$$

unde $P_{kh}(t)$ sînt polinoame arbitrare de grad h, ai căror coeficienţi îi determinăm prin identificare;

b) dacă $f_k(t)$ sînt funcții de forma

$$e^{\alpha t} Q_{kh}(t),$$

unde $Q_{kh}(t)$ sînt polinoame de grad $\leqslant h$, atunci căutăm o soluție particulară de forma

$$Y_1 = P_{1h}(t)\,e^{\alpha t},\quad Y_2 = P_{2h}(t)\,e^{\alpha t}, \ldots, Y_n = P_{nh}(t)\,e^{\alpha t},$$

dacă α nu este o rădăcină a ecuației caracteristice, sau de forma

$$Y_1 = t^m P_{1h}(t)\,e^{\alpha t}, \ldots, Y_n = t^m P_{nh}(t)\,e^{\alpha t},$$

dacă α este o rădăcină de ordinul m de multiplicitate a ecuației caracteristice;

c) dacă $f_k(t)$ sînt funcții de forma

$$e^{\alpha t} \cos \beta t\, Q_{kh}(t) + e^{\alpha t} \sin \beta t\, R_{kh}(t),$$

căutăm soluții de forma

$$Y_k = e^{\alpha t} \cos \beta t\, Q^*_{kh}(t) + e^{\alpha t} \sin \beta t\, R^*_{kh}(t),$$

dacă $\alpha + i\beta$ nu este rădăcină a ecuației caracteristice, sau de forma

$$Y_k = t^m e^{\alpha t} \cos \beta t\, Q^*_{kh}(t) + t^m e^{\alpha t} \sin \beta t\, R^*_{kh}(t),$$

dacă $\alpha + i\beta$ este rădăcină de ordinul m de multiplicitate a ecuației caracteristice.

Exemplu

Să se găsească soluția generală a sistemului

$$3\,\frac{dx}{dt} - x + 2y = t + 1,\quad 3\,\frac{dy}{dt} + 4x + y = 2t + 3.$$

Sistemul omogen

$$\frac{dx}{dt} - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y = 0,\quad \frac{dy}{dt} + \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}y = 0$$

are ecuația caracteristică

$$\begin{vmatrix} r - \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & r + \frac{1}{3} \end{vmatrix} = r^2 - \frac{1}{9} - \frac{8}{9} = (r - 1)(r + 1) = 0.$$

Soluția generală este de forma

$$x(t) = A_1 e^t + A_2 e^{-t}$$

$$y(t) = B_1 e^t + B_2 e^{-t},\quad t \in R;$$

înlocuind în prima ecuație trebuie să avem

$$3A_1 e^t - 3A_2 e^{-t} - A_1 e^t - A_2 e^{-t} + 2B_1 e^t + 2B_2 e^{-t} \equiv 0,$$

deci

$$2A_1 + 2B_1 = 0, \quad -4A_2 + 2B_2 = 0,$$
$$B_1 = -A_1, \quad B_2 = 2A_2$$

şi soluţia generală a sistemului omogen este

$$\begin{cases} x(t) = A_1 e^t + A_2 e^{-t} \\ y(t) = -A_1 e^t + 2A_2 e^{-t}, \quad t \in R' \end{cases}$$

cu A_1, A_2 constante arbitrare. Pentru sistemul neomogen căutăm o soluţie particulară de forma

$$X(t) = At + B, \quad Y(t) = Ct + D$$

pe care o înlocuim în ecuaţiile sistemului neomogen

$$3A - At - B + 2Ct + 2D = t + 1,$$

$$3C + 4At + 4B + Ct + D = 2t + 3,$$

şi identificăm

$$3A - B + 2D = 1, \quad -A + 2C = 1$$

$$3C + 4B + D = 3, \quad 4A + C = 2;$$

rezultă

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = \frac{2}{9}, \quad C = \frac{2}{3}, \quad D = \frac{1}{9};$$

soluţia particulară căutată este

$$X(t) = \frac{1}{3} t + \frac{2}{9}, \quad Y(t) = \frac{2}{3} t + \frac{1}{9}, \quad t \in R.$$

Soluţia generală a sistemului neomogen este

$$\begin{cases} x(t) = A_1 e^t + A_2 e^{-t} + \dfrac{1}{3} t + \dfrac{2}{9}, \\[2ex] y(t) = -A_1 e^t + 2A_2 e^{-t} + \dfrac{2}{3} t + \dfrac{1}{9}, \quad t \in R. \end{cases}$$

Să găsim o soluţie a sistemului dat care satisface condiţiile iniţiale

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$$

Avem

$$x(0) = A_1 + A_2 + \frac{2}{9} = 0, \quad y(0) = -A_1 + 2A_2 + \frac{1}{9} = 1,$$

deci

$$A_1 = -\frac{4}{9}, \quad A_2 = \frac{2}{9},$$

soluţia care îndeplineşte condiţiile iniţiale este

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{4}{9}e^{t} + \frac{2}{9}e^{-t} + \frac{1}{3}t + \frac{2}{9}, \\ y(t) = \frac{4}{9}e^{t} + \frac{4}{9}e^{-t} + \frac{2}{3}t + \frac{1}{9}, \quad t \in R \end{cases}$$

iar graficul ei este o curbă plană.

Aplicaţie

Un sistem liniar de forma

$$t\frac{dx}{dt} + a_1x + b_1y + c_1z = f(t),$$

$$t\frac{dy}{dt} + a_2x + b_2y + c_2z = g(t),$$

$$t\frac{dz}{dt} + a_3x + b_3y + c_3z = h(t),$$

a_i, b_i, c_i constante, se transformă cu schimbarea de variabilă $|t| = e^s$ într-un sistem cu coeficienţi constanţi. Dacă eliminăm pe y, z, prin derivări succesive, ecuaţia în x este de tip Euler.

Exemplu

Să se integreze sistemul

$$t\frac{dx}{dt} = y, \quad t\frac{dy}{dt} = -x.$$

Să se determine soluţia care satisface condiţiile iniţiale $x(1) = 2$, $y(1) = 1$.

Derivăm prima ecuaţie

$$\frac{dx}{dt} + t\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt}$$

şi ţinem seamă de a doua; obţinem ecuaţia Euler

$$t^2\frac{d^2x}{dt^2} + t\frac{dx}{dt} + x = 0.$$

Ecuaţia caracteristică este

$$r(r-1) + r + 1 = r^2 + 1 = 0,$$

prin urmare soluţia generală a ecuaţiei omogene este

$$x(t) = C_1\cos(\ln|t|) + C_2\sin(\ln|t|); \tag{1}$$

pe y îl obţinem din prima ecuaţie din sistemul dat

$$y(t) = -C_1\sin(\ln|t|) + C_2\cos(\ln|t|). \tag{1'}$$

Soluția generală a sistemului dat este

$$\begin{cases} x(t) = C_1 \cos(\ln|t|) + C_2 \sin(\ln|t|), \\ y(t) = -C_1 \sin(\ln|t|) + C_2 \cos(\ln|t|), \end{cases}$$

pe orice interval care nu conține originea.

Dacă impunem condițiile inițiale

$$x(1) = C_1 = 2, \quad y(1) = C_2 = 1$$

obținem soluția

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos(\ln|t|) + \sin(\ln|t|), \\ y(t) = -2\sin(\ln|t|) + \cos(\ln|t|). \end{cases}$$

§ 5. METODE DE INTEGRARE A SISTEMELOR DE ECUAȚII DIFERENȚIALE

1. Sisteme simetrice. Integrale prime

Un sistem de ecuații diferențiale de ordinul întîi, canonic,

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= f_1(t, y_1, \ldots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dt} &= f_2(t, y_1, \ldots, y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dt} &= f_n(t, y_1, \ldots, y_n), \end{aligned} \tag{1}$$

cu $f_k(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$ într-un domeniu $D \subset R^{n+1}$ se poate scrie și sub forma

$$\frac{dy_1}{f_1} = \frac{dy_2}{f_2} = \ldots = \frac{dy_n}{f_n} = \frac{dt}{1}. \tag{1'}$$

În general, un sistem de ecuații diferențiale de ordinul întîi poate avea și forma următoare

$$\frac{dx_1}{f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}, \tag{2}$$

unde

$f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nu se anulează simultan, adică $\sum\limits_1^n f_k^2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0$

într-un domeniu $D \subset R^n$.

Astfel de sistem (2) se numește *sistem simetric*.

Observații

1) Luînd pe x_n ca variabilă independentă, sistemul simetric (2) se transformă într-un sistem de $n-1$ ecuații cu $n-1$ necunoscute de ordinul întîi

$$\frac{dx_1}{dx_n} = \frac{f_1(x_1\, x_2, \ldots, x_n)}{f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}, \ldots, \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{f_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}. \tag{2'}$$

2) Dacă egalăm rapoartele (2) cu dt, adică introducem pe t ca variabilă independentă, atunci sistemul simetric se transformă într-un sistem de n ecuații diferențiale de ordinul întîi

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{2''}$$

Soluția generală a sistemului (2)

$$\frac{dx_1}{f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

(luînd pe x_n ca variabilă independentă, deci echivalent cu sistemul de $n-1$ ecuații cu $n-1$ necunoscute (2')) este

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(x_n, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}), \\ x_2 &= \varphi_2(x_n, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1} &= \varphi_{n-1}(x_n, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

sau, dacă rezolvăm sistemul (3) în raport cu $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$, soluția generală a sistemului (2) se mai scrie

$$\left.\begin{aligned} \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= C_1, \\ \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= C_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \psi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= C_{n-1}, \end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

unde $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$ sînt continue, cu derivate parțiale de ordinul întîi continue în $D \subset R^n$.

Orice relație din (3'), anume

$$\psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

se numește o integrală primă a sistemului (2). Din (3') rezultă că dacă cunoaștem $n-1$ integrale prime independente ale sistemului (2), cunoaștem soluția generală a sistemului (2).

În fine, să mai observăm că sistemul de funcții (3') reprezintă o familie de curbe în spațiul cu n dimensiuni. Prin fiecare punct $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in D \subset R^n$ trece o curbă integrală și numai una.

Mulțimea soluțiilor definite în D de relațiile (3') formează soluția generală a sistemului de ecuații diferențiale (2) în D.

2. Metoda combinațiilor integrabile

Fie sistemul de ecuații diferențiale de ordinul întîi simetric

$$\frac{dx_1}{f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \tag{1}$$

cu funcțiile $f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ continue și care nu se anulează simultan în $D \subset R^n$.

Avem egalitatea

$$\frac{dx_1}{f_1} = \frac{dx_2}{f_2} = \ldots = \frac{dx_n}{f_n} = \frac{\lambda_1 dx_1 + \lambda_2 dx_2 + \ldots + \lambda_n dx_n}{\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_n f_n} \tag{2}$$

pentru orice $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ fiind n funcții arbitrare, continue în D.

D e f i n i ț i e. Un sistem de n funcții $\lambda_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\ldots, \lambda_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ continue în D, care îndeplinesc condițiile

$$\lambda_1 dx_1 + \lambda_2 dx_2 + \ldots + \lambda_n dx_2 = d\,\Phi,$$

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_n f_n = 0,$$

pentru orice $(x_1, \ldots, x_n) \in D$, se numește o combinație integrabilă a sistemului (1) în D).

Funcția

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C$$

a cărei diferențială totală în D este $\lambda_1 dx_1 + \lambda_2 dx_2 + \ldots + \lambda_n dx_n$ este o *integrală primă* a sistemului (1). Într-adevăr, din (2) rezultă că trebuie să avem $\lambda_1 dx_1 + \lambda_2 dx_2 + \ldots + \lambda_n dx_n = 0$, în D, dacă

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_n f_n = 0, \text{ în } D,$$

(pentru ca ultima egalitate (2) să poată fi adevărată), deci relația $\lambda_1 dx_1 + \lambda_2 dx_2 + \ldots + \lambda_n dx_n = 0$ este o consecință a ecuațiilor sistemului. Funcția $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C$ este așadar o integrală primă a sistemului (1).

O b s e r v a ț i i

1) Găsirea a $n-1$ combinații integrabile este echivalentă cu cunoașterea a $n-1$ integrabile prime, deci cu determinarea integralei generale.

2) Dacă sistemul nu ne este dat sub forma simetrică, îl scriem sub această formă și după aceea căutăm combinații integrabile.

Exemple

1) Să se integreze sistemul

$$\frac{dx}{y-z}=\frac{dy}{z-x}=\frac{dz}{x-y}.$$

Avem combinațiile integrabile

$$xdx+ydy+zdz=0,$$
$$dx+dy+dz=0,$$

care ne dau integralele prime

$$x^2+y^2+z^2=C_1,$$
$$x+y+z=C_2,\qquad (x,y,z)\in R^3.$$

Soluția generală a sistemului este formată dintr-o familie de cercuri în spațiu care depinde de doi parametri.

2) Să se integreze sistemul

$$(y^2+z^2-x^2)\frac{dy}{dx}=-2xy,\quad (y^2+z^2-x^2)\frac{dz}{dx}=-2xz.$$

Sub formă simetrică se scrie

$$\frac{dx}{y^2+z^2-x^2}=\frac{dy}{-2xy}=\frac{dz}{-2xz}.$$

Avem combinația integrabilă

$$0\,.\,dx+zdy-ydz=0,$$

care ne dă integrala primă $z=C_1y$.

Prima ecuație a sistemului se mai scrie

$$2xy\frac{dx}{dy}+y^2+z^2-x^2=0$$

sau, ținînd seamă de integrala primă $z=C_1y$,

$$2xy\frac{dx}{dy}+y^2\ (1+C_1^2)-x^2=0\,;$$

dacă punem $x^2=u$ obținem ecuația liniară

$$\frac{du}{dy}-\frac{1}{y}\,u+y\,(1+C_1^2)=0$$

cu soluția generală

$$u=y\,(C_2-y\,(1+C_1^2)).$$

Integrala generală a sistemului dat este

$$\begin{cases} x^2=C_2y-y^2(1+C_1^2),\\ z=C_1y.\end{cases}$$

O b s e r v a ț i e

Dacă pentru sistemul

$$\frac{dy_k}{dt} = f_k(t, y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

am determinat p integrale prime

$$\Phi_i(y_1, y_2, \ldots, y_p, t) = C_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, p,$$

numărul funcțiilor necunoscute se reduce la $n-p$, iar integrarea sistemului este mai simplă.

3. Reducerea la o singură ecuație

Putem obține soluția generală a unui sistem reducînd integrarea lui la integrarea unei ecuații de ordin superior într-una din funcțiile necunoscute.

E x e m p l u

Să se integreze sistemul

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \omega^2 y, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 x;$$

eliminînd pe y obținem pentru x ecuația liniară cu coeficienți constanți de ordinul patru

$$\frac{d^4x}{dt^4} + \omega^4 x = 0.$$

Ecuația caracteristică $r^4 + \omega^4 = 0$ are rădăcinile

$$r_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\omega(1+i), \quad r_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\omega(1-i), \quad r_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\omega(-1+i), \quad r_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}\omega(-1-i).$$

Soluția generală a ecuației în x este

$$x(t) = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}\omega t}\left(A_1 \cos\frac{\sqrt{2}}{2}\omega t + A_2 \sin\frac{\sqrt{2}}{2}\omega t\right) + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\omega t}\left(A_3 \cos\frac{\sqrt{2}}{2}\omega t + A_4 \sin\frac{\sqrt{2}}{2}\omega t\right), \qquad t \in R; \tag{α}$$

pe y îl obținem din relația

$$y = \frac{1}{\omega^2}\,\frac{d^2x}{dt^2},$$

deci

$$\begin{aligned} y(t) = {} & e^{\frac{\sqrt{2}}{2}\omega t}\left(-A_1 \sin\frac{\sqrt{2}}{2}\omega t + A_2 \cos\frac{\sqrt{2}}{2}\omega t\right) + \\ & + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\omega t}\left(A_3 \sin\frac{\sqrt{2}}{2}\omega t - A_4 \cos\frac{\sqrt{2}}{2}\omega t\right), \qquad t \in R; \end{aligned} \tag{α'}$$

soluția generală a sistemului este dată de $(\alpha) + (\alpha')$.

4. Metoda aproximațiilor succesive

Fie

$$\frac{dy_k}{dt} = f_k(t, y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

un sistem de ecuații diferențiale pe care nu-l putem integra prin nici una din metodele prezentate. Să presupunem că în domeniul $D \subset R^{n+1}$, f_k îndeplinesc condițiile teoremei de existență.

Fie $(t_0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0})$ un punct interior lui D. Într-un interval $|t-t_0| \leqslant h$, $|y_k - y_{k0}| \leqslant a_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, situat în întregime în D, putem construi șirurile de funcții,

$$\begin{array}{llll}
y_{10}, & y_{11}, \ldots, & y_{1p}, & \ldots, \\
y_{20}, & y_{21}, \ldots, & y_{2p}, & \ldots, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
y_{n0}, & y_{n1}, \ldots, & y_{np}, & \ldots,
\end{array}$$

care, după cum am spus, converg uniform către soluția sistemului dat și care îndeplinesc condițiile inițiale $y_{kp}(t_0) = y_{k0}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $p = 1, 2, \ldots$

Avem

$$y_{11} = y_{10} + \int_{t_0}^{t} f_1(t, y_{10}, \ldots, y_{n0})dt, \ldots, y_{n1} = y_{n0} + \int_{t_0}^{t} f_n(t, y_{10}, \ldots, y_{n0})dt,$$

$$y_{12} = y_{10} + \int_{t_0}^{t} f_1(t, y_{11}, \ldots, y_{n1})dt, \ldots, y_{n2} = y_{n0} + \int_{t_0}^{t} f_n(t, y_{11}, \ldots, y_{n1})dt,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_{1p} = y_{10} + \int_{t_0}^{t} f_1(t, y_{1, p-1}, \ldots, y_{n, p-1})dt, \ldots, y_{np} = y_{n0} + \int_{t_0}^{t} f_n(t, y_{1, p-1}, \ldots, y_{n, p-1})dt$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

În general nu putem calcula soluția exactă, ci ne mulțumim cu o soluție aproximativă, $y_{1p}, y_{2p}, \ldots, y_{np}$, care este cu atît mai apropiată de soluția exactă cu cît p este mai mare. Procedeul de integrare prezentat se numește *metoda aproximațiilor succesive.*

Exemplu

Să se integreze sistemul

$$\frac{dx}{dt} = t^2 + y^2, \frac{dy}{dt} = t + x^2$$

definit în domeniul $D = [-1, +1] \times [-1, +1] \times [-1, +1]$, determinîndu-se aproximația a treia, în condițiile inițiale $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.

Avem $|t^2+y^2| \leqslant 2$, $|t+x^2| \leqslant 2$, pentru $(t, x, y) \in D$, deci în intervalul $\left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right] \ni t$ aproximaţiile converg uniform către soluţia exactă:

$$x_0 = 0, \qquad y_0 = 0,$$

$$x_1 = \int_0^t t^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{3} t^3, \qquad y_1 = \int_0^t t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} t^2,$$

$$x_2 = \int_0^t \left(t^2 + \frac{1}{4} t^4\right) \mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} + \frac{1}{20} t^5,$$

$$y_2 = \int_0^t \left(t + \frac{1}{9} t^6\right) \mathrm{d}t = \frac{t^2}{2} + \frac{1}{63} t^7,$$

$$x_3 = \int_0^t \left[t^2 + \left(\frac{t^2}{2} + \frac{1}{63} t^7\right)^2\right] \mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} + \frac{1}{20} t^5 + \frac{1}{63 \cdot 10} t^{10} + \frac{1}{63^2 \cdot 15} t^{15},$$

$$y_3 = \int_0^t \left[t + \left(\frac{t^3}{3} + \frac{1}{20} t^5\right)^2\right] \mathrm{d}t = \frac{t^2}{2} + \frac{1}{63} t^7 + \frac{1}{30 \cdot 9} t^9 + \frac{1}{20^2 \cdot 11} t^{11}.$$

Observaţie

Ecuaţia liniară de ordinul al doilea

$$y'' = p(x)\, y' + q(x)\, y$$

poate fi scrisă sub forma unui sistem, astfel;

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= z, \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &= p(x) z + q(x) y, \end{aligned} \tag{2}$$

iar condiţiile iniţiale $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$ se transformă în

$$y(x_0) = y_0, \quad z(x_0) = y_0'.$$

Soluţia sistemului (2) se scrie

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} z(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$z = y_0' + \int_{x_0}^{x} [p(x)z(x) + q(x)y(x)]\,\mathrm{d}x$$

sau

$$y = y_0 + (x - x_0) y_0' + \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x \int_{x_0}^{x} [p(x)y' + q(x)y]\mathrm{d}x,$$

formulă care permite să aplicăm metoda aproximațiilor succesive direct ecuației date fără să trecem prin sistem. Avem succesiv

$$y_1 = y_0 + (x - x_0)y_0' + \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x \int_{x_0}^{x} [p(x)y_0' + q(x)y_0]\mathrm{d}x,$$

$$y_2 = y_0 + (x - x_0)y_0' + \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x \int_{x_0}^{x} [p(x)y_1' + q(x)y_1]\mathrm{d}x,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_n = y_0 + (x - x_0)y_0' + \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x \int_{x_0}^{x} [p\,(x)y_{n-1}' + q(x)y_{n-1}]\,\mathrm{d}x$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

într-un interval $[a, b]$ în care $p\,(x)$ și $q\,(x)$ sînt continue.

Exemplu

Să aplicăm metoda aproximațiilor succesive pentru aproximarea soluției ecuației

$$y'' - x^2 y = 0$$

care satisface condițiile inițiale $y\,(0) = 1$, $y'\,(0) = 0$.
Avem

$$y_1 = 1 + \int_0^x \mathrm{d}x \int_0^x x^2\,\mathrm{d}x = 1 + \frac{x^4}{3 \cdot 4},$$

$$y_2 = 1 + \int_0^x \mathrm{d}x \int_0^x x^2 \left(1 + \frac{x^4}{3 \cdot 4}\right)\mathrm{d}x = 1 + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^8}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8}.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Se observă că procedeul ne conduce în cazul de față la soluția exactă, dată de seria de puteri

$$y\,(x) = 1 + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^8}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} + \ldots + \frac{x^{4n}}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \ldots (4n-1)\,(4n)} + \ldots,$$

serie cu raza de convergență infinită.

§ 6. APLICAȚII ALE SISTEMELOR DE ECUAȚII DIFERENȚIALE

1. Traiectoriile ortogonale ale unei familii de suprafețe

Fie familia de suprafețe

$$F\,(x, y, z) = C \tag{1}$$

cu F continuă cu derivate parțiale de ordinul întîi continue într-un domeniu $D \subset R^3$. Fie $\bar{r}$ vectorul de poziție al unei curbe netede Γ, definită în D, care intersectează una din suprafețele S ale familiei (1) în punctul $M(x, y, z)$, (fig. 134).

Dacă curba Γ este ortogonală suprafeței S din familie în punctul M, urmează că în acel punct tangenta la curbă este paralelă cu normala $\bar{n}$ la suprafața considerată S, deci

$$\mathrm{d}\bar{r} \times \bar{n} = 0. \tag{2}$$

Putem înlocui pe $\bar{n}$ cu grad F, deoarece, după cum știm, vectorul grad F este dirijat după normala la suprafață.

Ecuația (2) se scrie așadar

$$\mathrm{d}\bar{r} \times \operatorname{grad} F = 0$$

sau

$$\frac{\mathrm{d}x}{F'_x} = \frac{\mathrm{d}y}{F'_y} = \frac{\mathrm{d}z}{F'_z}, \tag{3}$$

deoarece doi vectori paraleli au componentele proporționale.

Sistemul (3) definește în D mulțimea curbelor ortogonale familiei de suprafețe (1).

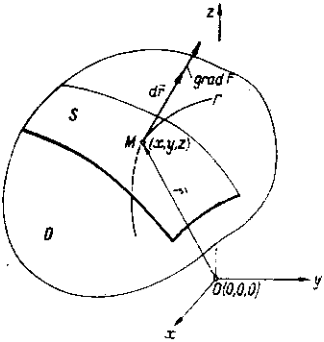

Fig. 134

Exemplu

Să determinăm curbele ortogonale familiei de sfere

$$x^2+y^2+z^2 = C, \quad (x, y, z) \in R^3.$$

Sistemul de ecuații diferențiale care determină curbele ortogonale este

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}z}{z}$$

și admite combinațiile integrabile

$$\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y + 0\ \mathrm{d}z = 0,$$

$$\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y - \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z + 0\ \mathrm{d}x = 0,$$

cu integralele prime

$$x = A_1 y, \qquad y = A_2 z, \qquad (x, y, z) \in R^3,$$

prin urmare curbele ortogonale sînt dreptele care trec prin origine.

2. Liniile de cîmp ale unui cîmp vectorial

Definiție. Fie $\bar{F}(x, y, z) = \bar{i}\, X(x, y, z) + \bar{j}\ Y(x, y, z) + \bar{k}\, Z(x, y, z)$ un cîmp vectorial definit într-un domeniu $D \subset R^3$, cu X, Y, Z continue în D.

Curbele (Γ) definite în D, tangente în fiecare punct $(x, y, z) \in D$ la vectorul $\overline{F}(x, y, z)$, se numesc liniile de cîmp ale cîmpului vectorial $\overline{F}$, în D.

Dacă $\bar{r}$ este vectorul de poziție al unui punct $M(x, y, z)$ de pe o curbă Γ_1 din familia (Γ), faptul că tangenta la curba Γ_1 în punctul M este paralelă cu vectorul $\overline{F}(M)$ se scrie

$$\overline{F} \times d\bar{r} = 0$$

sau

$$\frac{dx}{X(x, y, z)} = \frac{dy}{Y(x, y, z)} = \frac{dz}{Z(x, y, z)}, \quad (x, y, z) \in D. \tag{1}$$

Am obținut astfel sistemul de ecuații (1)′ sistem care definește în D liniile de cîmp ale cîmpului vectorial $\overline{F}$.

Exemplu

Se dă cîmpul $\overline{F} = \bar{r} \times \bar{a}$ definit pe R^3, cu $\bar{a} = \bar{i}a_1 + \bar{j}a_2 + \bar{k}a_3$. Să-i determinăm liniile de cîmp.

Avem

$$\overline{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \bar{i}\,X + \bar{j}\,Y + \bar{k}\,Z$$

$$\text{cu } X = a_3y - a_2z, \quad Y = a_1z - a_3x, \quad Z = a_2x - a_1y.$$

Sistemul de ecuații diferențiale care definește liniile de cîmp

$$\frac{dx}{a_3y - a_2z} = \frac{dy}{a_1z - a_3x} = \frac{dz}{a_2x - a_1y}$$

admite combinațiile integrabile

$$a_1dx + a_2dy + a_3dz = 0,$$

$$xdx + ydy + zdz = 0$$

și integralele prime

$$a_1x + a_2y + a_3z = C_1,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_2.$$

Liniile de cîmp sînt cercuri.

Capitolul IV

ECUAŢII CU DERIVATE PARŢIALE DE ORDINUL ÎNTÎI LINIARE ÎN RAPORT CU DERIVATELE PARŢIALE

§ 1. NOŢIUNI GENERALE

1. Generalităţi. Suprafeţe integrale

Definiţii. 1. **O relaţie de forma**

$$F\left(x_1,\ x_2, \ldots, x_n;\ u, \frac{\partial u}{\partial x_1},\ \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0, \tag{1}$$

unde F este o funcţie reală de $2n+1$ argumente, definită pe un domeniu $\Delta \subset R^{2n+1}$, se numeşte ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întîi, dacă se cere să se determine funcţia $u = \varphi(x_1,\ x_2, \ldots, x_n)$ cu derivate parţiale de ordinul întîi continue într-un domeniu $D \subset R^n$, astfel încît să avem

$$F\left(x_1,\ x_2, \ldots, x_n;\ \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1},\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right) = 0$$

pentru orice $(x_1,\ x_2, \ldots, x_n) \in D$.

2. **Funcţiile reale $\varphi(x_1,\ x_2, \ldots, x_n)$ care îndeplinesc condiţiile de mai sus se numesc soluţii ale ecuaţiei cu derivate parţiale (1) în D.**

Observaţii

1) Dacă F depinde şi derivatele de ordin superior ale lui u, anume

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n; u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial x_1^n},\ \frac{\partial^n u}{\partial x_2^n}, \ldots\right) = 0, \tag{2}$$

atunci o astfel de relaţie se numeşte *ecuaţie cu derivate parţiale de ordin superior*.

2) O soluţie $u = \varphi(x_1,\ x_2, \ldots, x_n)$, $(x_1,\ x_2, \ldots, x_n) \in D$ a ecuaţiei (1) se numeşte o *suprafaţă integrală* a ecuaţiei (1).

Exemple

1) Fie ecuația cu derivate parțiale $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0$.

Funcțiile $u_1=1$, $u_2=x-y$, $(x, y)\in R^2$ sînt soluții ale ecuației date. Funcția $u=\varphi(x-y)$, unde φ este o funcție arbitrară derivabilă continuu de argumentul $v=x-y$ este de asemenea o soluție a ecuației date.

Planul $u=1$ este o suprafață integrală a ecuației din enunț.

2) Fie ecuația cu derivate parțiale $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=u$. Funcțiile $u_1=x+y$, $u_2=$ $=x-y$, $(x, y)\in R^2$ sînt soluții ale ecuației date. Funcția $u=x\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, unde φ este o funcție arbitrară, derivabilă continuu, de argumentul $v=\frac{y}{x}$, este de asemenea o soluție a ecuației date. Planul $u=x+y$ este o suprafață integrală a ecuației din enunț.

2. Soluția generală. Problema lui Cauchy

Noi nu ne vom ocupa decît de ecuații diferențiale de ordinul întîi (1), iar dintre acestea numai de **ecuațiile liniare și omogene** care sînt de forma

$$P_1(x_1, x_2,\ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1}+P_2(x_1, x_2,\ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2}+\ldots$$
$$\ldots+P_n(x_1, x_2,\ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}=0, \tag{3}$$

precum și de **ecuațiile evasiliniare** care sînt de forma

$$P_1(x_1, x_2,\ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\ldots+P_n(x_1, x_2,\ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_n}=$$
$$=P_{n+1}(x_1, x_2,\ldots, x_n, u). \tag{4}$$

Ecuația din exemplul 1 este liniară și omogenă; ecuația din exemplul 2 este evasiliniară.

Din exemplele considerate rezultă că soluția unei ecuații cu derivate parțiale conține *funcții arbitrare*.

În general nu ne interesează soluții care conțin funcții arbitrare, ci o anumită soluție a ecuației date, soluție care îndeplinește anumite *condiții inițiale*. Aceste condiții inițiale trebuie să determine în mod unic soluția cerută.

Problema lui Cauchy pentru ecuația (3) are următorul enunț: **Să se determine soluția $u(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ a ecuației cu derivate parțiale**

$$P_1(x_1, x_2,\ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1}+P_2(x_1, x_2,\ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2}+\ldots$$
$$\ldots+P_n(x_1, x_2,\ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}=0,$$

care pentru $x_n = x_n^0$ să se reducă la o funcție dată $\psi(x_1, \ldots, x_{n-1})$

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^0) = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}).$$

Se poate demonstra că în anumite condiții impuse funcțiilor P_k și ψ, soluția problemei lui Cauchy este unică.

Să considerăm acum mulțimea soluțiilor ecuației (3) definite într-un domeniu $D \subset R^{n+1}$, $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ fiind o funcție arbitrară. Mulțimea acestor soluții în D o vom numi *soluția generală* a ecuației (3) în D.

După cum vom arăta în cele ce urmează, soluția generală depinde de o funcție arbitrară.

§ 2. ECUAȚII CU DERIVATE PARȚIALE DE ORDINUL ÎNTÎI LINIARE ȘI OMOGENE

1. Sistem caracteristic

Fie ecuația cu derivate parțiale de ordinul întîi liniară și omogenă

$$P_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + P_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots$$
$$\ldots + P_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \tag{1}$$

cu coeficienții $P_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ continui și care nu se anulează simultan într-un domeniu $D \subset R^n$.

D e f i n i ț i i. 1. **Sistemul simetric**

$$\frac{dx_1}{P_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{P_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \cdots = \frac{dx_n}{P_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \tag{2}$$

definit în D se numește sistemul caracteristic al ecuației cu derivate parțiale (1).

2. **Curbele integrale ale sistemului (2) se numesc curbe caracteristice ale ecuației cu derivate parțiale (1).**

Vom arăta în cele ce urmează că problema integrării ecuației diferențiale (1) se reduce la problema integrării sistemului caracteristic (2).

T e o r e m ă. Fie

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C$$

o integrală primă a sistemului caracteristic (2); funcția

$$u = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

este o soluție a ecuației cu derivate parțiale (1).

Demonstrație. Fie $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C$ o integrală primă a sistemului (2). Funcția φ este continuă și are derivate parțiale de ordinul întîi continue în D. Deoarece $\varphi = C$ este o integrală primă a sistemului (2), urmează că pentru orice punct $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ situat pe o curbă integrală a sistemului (1), φ se reduce la o constantă C, deci de-a lungul unei curbe integrale a sistemului (2), diferențiala lui φ este nulă

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \mathrm{d}x_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \mathrm{d}x_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \mathrm{d}x_n = 0. \tag{3}$$

Însă de-a lungul unei curbe integrale, diferențialele $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \ldots, \mathrm{d}x_n$, sînt proporționale cu $P_1, P_2, \ldots, P_n$, conform relațiilor (2), deci egalitatea (3) se scrie

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} P_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} P_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} P_n = 0, \tag{4}$$

valabilă pentru orice $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ situat pe o curbă integrală a sistemului (2). Această egalitate (4) fiind adevărată pentru orice constantă C, este adevărată pentru orice curbă integrală a sistemului (2) situată în D, de unde rezultă că este adevărată pentru orice $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$; prin urmare $u = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este o soluție a ecuației (1) în D. Teorema este demonstrată.

Exemplu

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} - z^2 \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$ Sistemul caracteristic

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}z}{-z^2}$$

admite combinațiile integrabile

$$\frac{1}{x} \mathrm{d}x - \frac{1}{y} \mathrm{d}y + 0 \cdot \mathrm{d}z = 0,$$

$$0 \cdot \mathrm{d}x + \frac{1}{y} \mathrm{d}y + \frac{1}{z^2} \mathrm{d}z = 0,$$

deci are următoarele integrale prime:

$$\frac{y}{x} = C_1, \qquad \frac{1}{z} - \ln y = C_2.$$

Funcțiile

$$u_1(x, y, z) = \frac{y}{x}, \quad (x \neq 0),$$

$$u_2(x, y, z) = \frac{1}{z} - \ln y, \quad z \neq 0, \quad y > 0,$$

sînt soluții ale ecuației din enunț.

O b s e r v a ț i e

Dacă funcțiile $P_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sînt continue și nu se anulează simultan în D, nu rezultă că integralele prime ale sistemului caracteristic sînt definite în D. În general sînt definite într-un subdomeniu D' al lui D.

Acest fapt apare clar în exemplul de mai sus. Funcțiile $P_1 = x$, $P_2 = y$, $P_3 = -z^2$ se anulează simultan în punctul $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Integralele prime $\frac{1}{z} - \ln y = C_1$, $\frac{y}{x} = C_2$ sînt definite numai pentru $z \neq 0$, $y > 0$, $x \neq 0$.

2. Soluția generală

T e o r e m ă. Fie ecuația cu derivate parțiale

$$P_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + P_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots$$
$$\ldots + P_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \tag{1}$$

cu coeficienții $P_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ continui și care nu se anulează simultan ntr-un domeniu $D \subset R^n$.

Fie

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_1,$$
$$\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_{n-1},$$

$n-1$ integrale prime (independente) ale sistemului caracteristic

$$\frac{dx_1}{P_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{P_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

Fie

$$\Phi(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1})$$

o funcție (oarecare) continuă cu derivate parțiale continue pe un domeniu $\Delta \subset R^{n-1}$.

Funcția $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dată de

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Phi[\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots$$
$$\ldots, \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$$

este o soluție a ecuației cu derivate parțiale (1).

Demonstrație. *a)* Să arătăm că $u = \Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})$ verifică ecuația (1). Avem

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_{n-1}}\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_{n-1}}\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_n} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2}\cdot\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_{n-1}}\cdot\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_n}. \tag{2}$$

Dacă înmulțim prima egalitate cu P_1, a doua egalitate cu P_2, în fine ultima egalitate cu P_n, adunînd pe coloane în (2) obținem

$$P_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + P_2\frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + P_n\frac{\partial u}{\partial x_n} =$$

$$= \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1}\left[P_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + P_2\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \ldots + P_n\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}\right] +$$

$$+ \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2}\left[P_1\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + P_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \ldots + P_n\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n}\right] +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_{n-1}}\left[P_1\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_1} + P_2\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_2} + \ldots + P_n\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_n}\right], \tag{3}$$

însă în (3) fiecare paranteză din partea a doua este nulă, deoarece $\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$ sînt soluții ale ecuației cu derivate parțiale (1), conform teoremei demonstrate la alineatul precedent; rezultă de aici că u este soluție a ecuației (1).

b) Reciproc, orice soluție $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a ecuației (1) este de forma

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}).$$

Într-adevăr, dacă $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este o soluție a ecuației (1) avem

$$P_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + P_2\frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + P_n\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0; \tag{4}$$

să scriem acum că $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ sînt de asemenea soluții ale ecuației (1),

$$\left.\begin{aligned} &P_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \ldots + P_n \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} = 0, \\ &P_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \ldots + P_n \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &P_1 \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_2} + \ldots + P_n \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_n} = 0. \end{aligned}\right| \tag{4'}$$

Ecuațiile (4) și (4′), pentru orice $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in D$, formează un sistem de n ecuații liniare și omogene în necunoscutele $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

Sistemul admite și alte soluții în afară de soluția banală, deoarece $P_1, P_2, \ldots, P_n$ nu se anulează simultan în D; urmează, conform teoremei lui Rouché, că determinantul sistemului

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} & \frac{\partial u}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial u}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix} \tag{5}$$

este nul pentru orice $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in D$. Să observăm că determinantul (5) este determinantul funcțional al funcțiilor $u, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$. Avem așadar

$$\frac{D(u, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = 0 \text{ pentru orice } (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D;$$

integralele prime $\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_k$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$ fiind independente în D, există un domeniu $D' \subset D$ în care

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})} \neq 0;$$

conform unei teoreme demonstrate (vol. I, B, cap. VII, §3, al. 1) $u, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ sînt în dependență funcțională

$$\Psi(u, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}) = 0$$

şi pentru $D'' \subset D'$ putem scrie

$$u = \Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}),$$

adică u este o funcţie de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$. Teorema este demonstrată.

Funcţia $u = \Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})$ se numeşte *soluţia generală* a ecuaţiei cu derivate parţiale (1).

Exemple

1) $a \dfrac{\partial z}{\partial x} + b \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, a, b constante.

Sistemul caracteristic

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b}$$

se reduce la o singură ecuaţie diferenţială, cu soluţia generală

$$bx - ay = C.$$

Soluţia generală a ecuaţiei din enunţ este

$$z = \varphi(bx - ay).$$

2) $x \dfrac{\partial u}{\partial x} + y \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0.$

Sistemul caracteristic

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{z\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

admite combinaţia integrabilă

$$\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} + 0 \cdot dz = 0,$$

cu integrala primă $\dfrac{x}{y} = C_1$. Pentru a mai determina o integrală primă observăm că putem scrie

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} = \frac{z\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

şi dacă punem $x^2 + y^2 = r^2$, $x\,dx + y\,dy = r\,dr$, obţinem

$$\frac{dr}{r} = \frac{z\,dz}{r},$$

deci

$$2r - z^2 = C_2$$

sau

$$2\sqrt{x^2 + y^2} - z^2 = C_2$$

care este a doua integrală primă. Soluția generală a ecuației date este

$$u = \Phi\left(\frac{x}{y},\ 2\sqrt{x^2+y^2} - z^2\right).$$

3) $x_1 \dfrac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \dfrac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + x_n \dfrac{\partial u}{\partial x_n} = 0$; sistemul caracteristic este

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \ldots = \frac{dx_n}{x_n}.$$

Avem următoarele $n-1$ integrale prime

$$\frac{x_2}{x_1} = C_1,\ \frac{x_3}{x_1} = C_2,\ \ldots,\ \frac{x_n}{x_1} = C_{n-1};$$

soluția generală a ecuației date este

$$u = \Phi\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right),$$

adică o funcție arbitrară, omogenă de grad zero.

3. Soluția problemei lui Cauchy

Fie ecuația cu derivate parțiale

$$P_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + P_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots$$

$$\ldots + P_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \tag{1}$$

cu funcțiile $P_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ continue și care nu se anulează simultan într-un domeniu $D \subset R^n$, și $M_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ un punct interior lui D.

Fie

$$\frac{dx_1}{P_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)} = \frac{dx_2}{P_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)}$$

sistemul caracteristic, căruia i-am găsit $n-1$ integrale prime independente

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= C_1, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= C_2, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= C_{n-1}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Să presupunem că

$$\left.\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})}\right|_{M_0} \neq 0.$$

După cum am spus la paragraful precedent, a rezolva problema lui Cauchy pentru ecuația (1) înseamnă a găsi soluția $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a ecuației (1) care îndeplinește condiția inițială, anume: pentru $x_n = x_n^0$ funcția u se reduce la o funcție dată $\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, adică

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^0) = \Psi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \tag{3}$$

Ψ fiind o funcție cu derivatele parțiale de ordinul întîi continue în D. Soluția căutată, după cum am arătat la alineatul precedent, va fi de forma

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})$$

şi problema se reduce la a determina funcția Φ, adică legătura între integralele prime $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$.

Fie U o vecinătate a punctului M_0, în care sistemul (2) se poate inversa în raport cu $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Dacă în (2) punem $x_n = x_n^0$, obținem

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^0) = C_1, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^0) = C_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^0) = C_{n-1}, \end{array}\right\} \tag{3'}$$

sistem care rezolvat în raport cu $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ ne dă

$$\begin{array}{l} x_1 = \omega_1(C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}), \\ x_2 = \omega_2(C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1} = \omega_{n-1}(C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}). \end{array} \tag{3''}$$

Teoremă. Soluția problemei lui Cauchy pentru ecuația (1) cu condiția inițială (3) este dată de

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Psi\,[\omega_1(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}), \omega_2(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}), \ldots$$
$$\ldots, \omega_{n-1}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})],$$

cu $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ **date de** (2).

Demonstrație. Trebuie să arătăm că funcția u din enunțul teoremei este soluție a ecuației cu derivate parțiale (1), apoi că verifică condiția inițială (2).

a) Faptul că u este soluție a ecuației (1) se observă imediat, deoarece u este de forma $\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})$ după cum rezultă din expresia ei.

b) Soluția verifică condiția inițială în vecinătatea U a punctului M_0. Într-adevăr, pentru $x_n = x_n^0$, conform relațiilor (3') avem

$$\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^0) = C_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1;$$

conform lui (3'') pentru $x_n = x_n^0$ şi $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^0) \in U$ avem de asemenea

$$\omega_k(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}) = x_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1;$$

înlocuind aceste rezultate în relaţia din enunţul teoremei, obţinem

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^0) = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}),$$

deci şi condiţia iniţială este îndeplinită. Teorema este demonstrată.

Observaţie

Din demonstraţie mai rezultă că soluţia problemei lui Cauchy *este unică* într-o vecinătate U a punctului M_0, în care condiţiile enunţate sînt îndeplinite.

Exemplu

Să se găsească soluţia ecuaţiei cu derivate parţiale

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

care îndeplineşte condiţia iniţială: pentru $x = 1$, $z = y + 1$.

Sistemul caracteristic este

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{2y}$$

cu integrala primă $\frac{y}{x^2} = C$.

Soluţia generală este $z = \varphi\left(\frac{y}{x^2}\right)$. Soluţia particulară căutată se obţine eliminînd pe x şi y între ecuaţiile

$$z = y + 1, \qquad x = 1, \qquad \frac{y}{x^2} = C,$$

deci

$$z = C + 1,$$

unde înlocuim apoi pe C cu $\frac{y}{x^2}$. Soluţia problemei lui Cauchy este aşadar

$$z = \frac{y}{x^2} + 1, \qquad (x, y) \in D \subset R^2,$$

D fiind un domeniu plan care nu întîlneşte dreapta $x = 0$.

§ 3. ECUAŢII CU DERIVATE PARŢIALE DE ORDINUL ÎNTÎI, CVASILINIARE

1. Soluţia generală

O ecuaţie diferenţială de ordinul întîi cvasiliniară este de forma

$$P_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + P_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots$$

$$\ldots + P_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = P_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, u).$$

Se observă că o astfel de ecuație este liniară numai în derivatele parțiale $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$ ale funcției necunoscute u, iar funcțiile P_k depind și de u.

Vom presupune că funcțiile $P_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)$ sînt continue, au derivatele parțiale de ordinul întîi continue și $\sum_1^{n+1} P_k^2(x_1, \ldots, x_n, u) \neq 0$ într-un domeniu $D \subset R^{n+1}$.

Teoremă. Integrarea ecuației cu derivate parțiale (1) se reduce la integrarea ecuației cu derivate parțiale liniare și omogene în $n+1$ variabile

$$P_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial V}{\partial x_1} + P_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial V}{\partial x_2} + \cdots$$
$$\cdots + P_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial V}{\partial x_n} + P_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial V}{\partial u} = 0. \tag{2}$$

Demonstrație. Să căutăm pentru ecuația cvasiliniară (1) o soluție dată *implicit* printr-o relație de forma

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = 0, \tag{3}$$

V fiind o funcție necunoscută pe care urmează să o determinăm.

În ipoteza că V este continuă și are derivate parțiale de ordinul întîi continue, cu $V'_u \neq 0$ în D, din (3) obținem derivatele parțiale ale lui u.

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = -\frac{\frac{\partial V}{\partial x_1}}{\frac{\partial V}{\partial u}}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n} = -\frac{\frac{\partial V}{\partial x_n}}{\frac{\partial V}{\partial u}},$$

pe care dacă le înlocuim în ecuația (1), rezultă

$$-P_1\frac{\frac{\partial V}{\partial x_1}}{\frac{\partial V}{\partial u}} - P_2\frac{\frac{\partial V}{\partial x_2}}{\frac{\partial V}{\partial u}} - \ldots - P_n\frac{\frac{\partial V}{\partial x_n}}{\frac{\partial V}{\partial u}} = P_{n+1}$$

sau

$$P_1\frac{\partial V}{\partial x_1} + P_2\frac{\partial V}{\partial x_2} + \ldots + P_n\frac{\partial V}{\partial x_n} + P_{n+1}\frac{\partial V}{\partial u} = 0.$$

Fie

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)$$

soluția generală a ecuației (2). Relația

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = 0$$

determină pe $u = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, soluție a ecuației cvasiliniare (1). Teorema este demonstrată.

Observații

1) Din raționamentele precedente rezultă că pentru determinarea soluțiilor unei ecuații cu derivate parțiale cvasiliniare

$$P_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + P_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = P_{n+1}$$

procedăm în modul următor:

a) Scriem ecuația cu derivate parțiale în $n+1$ variabile

$$P_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \ldots + P_n \frac{\partial V}{\partial x_n} + P_{n+1} \frac{\partial V}{\partial u} = 0\,;$$

b) Scriem sistemul caracteristic al acestei ecuații, anume

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{du}{P_{n+1}}\,;$$

c) Determinăm n integrale prime ale sistemului caracteristic

$$\begin{aligned} \varphi_1 (x_1, x_2, \ldots, x_n, u) &= C_1, \\ \varphi_2 (x_1, x_2, \ldots, x_n, u) &= C_2, \\ &\ldots \\ \varphi_n (x_1, x_2, \ldots, x_n, u) &= C_n; \end{aligned}$$

d) Soluția generală a ecuației omogene (2) este dată de

$$V (x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = \Phi (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n);$$

e) Soluția generală a ecuației cvasiliniare (1) este definită implicit de

$$V (x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = 0.$$

2) Toate rezultatele obținute au un caracter local, adică sînt valabile într-un subdomeniu D' al lui D în care condițiile din teoremă sînt îndeplinite, deoarece raționamentele fac apel la teoria funcțiilor implicite care știm că au un caracter local.

Exemple

1) Să se găsească soluția generală a ecuației

$$(1 + \sqrt{x - y + z}) \frac{\partial z}{\partial x} + 2 \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

Sistemul caracteristic este

$$\frac{dx}{1 + \sqrt{x - y + z}} = \frac{dy}{2} = \frac{dz}{1}\,;$$

avem combinația integrabilă

$$0 \cdot dx + \frac{1}{2} dy - dz = 0,$$

deci

$$y - 2z = C_1,$$

care este o integrală primă. Avem de asemenea

$$\frac{dx - dy + dz}{\sqrt{x - y + z}} = \frac{dz}{1}$$

care ne furnizează a doua integrală primă

$$z - 2\sqrt{x - y + z} = C_2.$$

Soluţia generală este dată de

$$\Phi(y - 2z,\ z - 2\sqrt{x - y + z}) = 0.$$

2) Să se găsească soluţia generală a ecuaţiei

$$x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = mu.$$

Sistemul caracteristic

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \ldots = \frac{dx_n}{x_n} = \frac{du}{mu}$$

admite integralele prime

$$\frac{x_1}{x_n} = C_1, \qquad \frac{x_2}{x_n} = C_2,\ \ldots,\ \frac{x_{n-1}}{x_n} = C_{n-1}, \qquad \frac{u}{x_n^m} = C_n,$$

deci soluţia generală este

$$\Phi\left(\frac{x_1}{x_n},\ \frac{x_2}{x_n},\ \ldots,\ \frac{x_{n-1}}{x_n},\ \frac{u}{x_n^m}\right) = 0;$$

dacă explicităm pe $\frac{u}{x_n^m}$, obţinem

$$u = x_n^m\, \varphi\left(\frac{x_1}{x_n},\ \frac{x_2}{x_n},\ \ldots,\ \frac{x_{n-1}}{x_n}\right)$$

adică o funcţie arbitrară, omogenă de grad m; acest rezultat constituie reciproca teoremei lui Euler relativă la funcţii omogene.

2. Soluţia problemei lui Cauchy

a) Fie ecuaţia cu derivate parţiale cvasiliniară

$$\begin{aligned} P_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + P_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots \\ \ldots + P_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = P_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) \end{aligned} \tag{1}$$

cu $P_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)$ cu derivate parţiale de ordinul întîi continue şi $\sum_{1}^{n+1} P_k^2(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) \neq 0$ într-un domeniu $D \subset R^{n+1}$, iar $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots$ $\ldots, x_n^0, u_0)$ un punct interior lui D. Fie

$$\frac{dx_1}{P_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)} = \frac{du}{P_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)}$$

sistemul caracteristic atașat ecuației (1), căruia i-am găsit n integrale prime independente

$$\left.\begin{aligned} \varphi_0(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) &= C_0, \\ \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) &= C_1, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) &= C_{n-1}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Să presupunem că

$$\left.\frac{D(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, u)}\right|_{M_0} \neq 0.$$

b) **Problema lui Cauchy** pentru ecuația (1) are următorul enunț:

Să se găsească soluția $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a ecuației (1) care pentru $x_n = x_n^0$ să se reducă la o funcție dată $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, adică

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^0) = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \qquad (3)$$

ψ fiind o funcție cu derivatele parțiale de ordinul întîi continue în D.

Vom impune ca soluția u să fie definită într-o vecinătate a punctului $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ și să ia în acest punct valoarea u_0.

$$u(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = u_0.$$

Soluția căutată, după cum am arătat la alineatul precedent, va fi definită de o relație de forma

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = \Phi(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) = 0, \qquad (4)$$

și problema se reduce la a determina funcția Φ, adică legătura între integralele prime $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$; în același timp relația (4) trebuie să definească în mod unic pe u în punctul M_0, adică

$$\left.\frac{\partial V}{\partial u}\right|_{M_0} \neq 0.$$

c) Fie W o vecinătate a punctului M_0, în care sistemul (2) se poate inversa în funcție de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, u$. Dacă în (2) punem $x_n = x_n^0$,

$$\left.\begin{aligned} \varphi_0(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^0, u) &= C_0, \\ \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^0, u) &= C_1, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^0, u) &= C_{n-1}, \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

sistem care rezolvat în raport cu $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, u$, dă în W

$$\left.\begin{aligned} u &= \omega_0(C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}), \\ x_1 &= \omega_1(C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}), \\ x_2 &= \omega_2(C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}), \\ &\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} &= \omega_{n-1}(C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}). \end{aligned}\right\} \qquad (5')$$

Teoremă. Soluția problemei lui Cauchy pentru ecuația (1), care îndeplinește condiția inițială (3) este dată de

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = \omega_0(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) -$$
$$- \psi[\omega_1(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}), \ldots, \omega_{n-1}(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})] = 0, \tag{6}$$

unde $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ sînt funcțiile din partea întîi din (2).

Demonstrație. *a)* Funcția u dată de (6) este o soluție a ecuației (1), deoarece este definită de o relație de forma (4).

b) Funcția u dată de (6) verifică condiția inițială (3), deoarece conform lui (5) și (5′) pentru $x_n = x_n^0$ avem

$$\omega_0(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})\big|_{x_n = x_n^0} = u$$

și

$$\omega_k(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})\big|_{x_n = x_n^0} = x_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

și din (6) rezultă pentru $x_n = x_n^0$

$$u - \psi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = 0, \quad (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^0) \in W.$$

Rămîne să mai arătăm că soluția definită de (6) este unică în $W' \subset W$, ceea ce este echivalent cu

$$\left.\frac{\partial V}{\partial u}\right|_{M_0} \neq 0,$$

conform unei teoreme de la funcțiile implicite [vol. *I*, B, cap. VII, § 1 al. 5].

Avem

$$\left.\frac{\partial V}{\partial u}\right|_{M_0} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial \omega_0}{\partial \varphi_i} \left.\frac{\partial \varphi_i}{\partial u}\right|_{M_0} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial \psi}{\partial \omega_k} \left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial \omega_k}{\partial \varphi_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial u}\right]\Bigg|_{M_0}$$

însă

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial \omega_0}{\partial \varphi_i} \left.\frac{\partial \varphi_i}{\partial u}\right|_{M_0} = 1, \text{ dacă derivăm prima relație din } (5');$$

în continuare $\left.\frac{\partial \psi}{\partial \omega_0}\right|_{M_0} = 0$, deoarece ψ nu depinde de ω_0; avem de asemenea

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial \omega_k}{\partial \varphi_i} \cdot \left.\frac{\partial \varphi_i}{\partial u}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial x_k}{\partial u}\right|_{M_0} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

conform celorlalte relații din (5′). Rezultă de aici că $\left.\frac{\partial V}{\partial u}\right|_{M_0} = 1$. Teorema este demonstrată.

Exemplu

Să se găsească soluția ecuației cu derivate parțiale

$$x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = u$$

care satisface condiţia iniţială

$$\text{pentru } x_n = 1, \quad u = x_1 x_2 \ldots x_{n-1}.$$

Sistemul caracteristic

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \ldots = \frac{dx_n}{x_n} = \frac{du}{u}$$

are integralele prime distincte

$$\frac{x_1}{x_n} = C_1, \quad \frac{x_2}{x_n} = C_2, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n} = C_{n-1}, \frac{u}{x_n} = C_n.$$

Dacă facem $x_n = 1$, obţinem

$$x_1 = C_1, \quad x_2 = C_2, \ldots, x_{n-1} = C_{n-1}, u = C_n;$$

soluţia problemei lui Cauchy este dată de

$$\frac{u}{x_n} - \frac{x_1 x_2 \ldots x_{n-1}}{x_n^{n-1}} = 0$$

sau

$$u = \frac{1}{x_n^{n-2}} x_1 x_2 \ldots x_{n-1}$$

în orice interval $I \subset R^n$ care nu conţine puncte ale planului $x_n = 0$.

3. Interpretarea geometrică a soluţiilor ecuaţiei

$$P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x,y,z)$$

a) Să considerăm vectorul $\overline{F}(x,y,z) = \overline{i}P(x,y,z) + \overline{j}Q(x,y,z) + \overline{k}R(x,y,z)$ definit într-un domeniu $D \subset R^3$ cu componentele P, Q, R continue, cu derivate parţiale de ordinul întîi continue şi $P^2 + Q^2 + R^2 \neq 0$ în D.

Fie $z = z(x, y)$ suprafaţa (S) definită în D, netedă, avînd în fiecare punct (x, y, z) al ei un plan tangent

$$(X - x)\frac{\partial z}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial z}{\partial y} = Z - z.$$

Ne propunem să găsim condiţia ca vectorul $\overline{F}(x, y, z)$ să se găsească în planul tangent la suprafaţa S în punctul (x, y, z). Trebuie să avem

$$\overline{F} \cdot \overline{n} = 0, \tag{1}$$

unde $\overline{n}$ este vectorul normal la suprafaţa S în punctul (x, y, z). Relaţia (1) se mai scrie

$$P(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} - R(x, y, z) = 0. \tag{1'}$$

Am demonstrat așadar următoarea

T e o r e m ă. Soluțiile ecuației cu derivate parțiale

$$P(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z),$$

cu P, Q, R funcții continue cu derivate parțiale de ordinul întîi continue și $P^2 + Q^2 + R^2 \neq 0$ într-un domeniu $D \subset R^3$, reprezintă suprafețele definite în D pentru care vectorul $\overline{F}$, în fiecare punct al lor, este situat în planul tangent la suprafață.

b) Să considerăm acum sistemul caracteristic asociat ecuației cu derivate parțiale (1), anume

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}. \tag{2}$$

Soluțiile sale

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(x, y, z) &= C_1, \\ \varphi_2(x, y, z) &= C_2, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

formează o familie de curbe în D, care depind de doi parametri C_1, C_2, numite *curbe caracteristice.*

Să observăm că sistemul (2) are următoarea interpretare geometrică [B, cap. III, § 6, al. 2] : în fiecare punct (x, y, z) al unei curbe integrale (Γ) a sistemului (2), vectorul $\overline{F}(x, y, z)$ este tangent la curba (Γ) în punctul considerat. Rezultă de aici următoarea

T e o r e m ă. Curbele integrale ale sistemului caracteristic (2) sînt situate pe suprafețele integrale ale ecuației cu derivate parțiale (1′).

Este evident acum în ce mod se obțin suprafețele integrale ale ecuației cu derivate parțiale (1′). Este suficient să extragem din familia de curbe caracteristice (numite și linii de cîmp) care depinde de doi parametri, o familie de curbe care depinde de un parametru; curbele acestei familii se vor găsi pe o suprafață S. Pentru ca suprafața obținută să fie netedă, adică să fie continuă cu un plan tangent variind continuu, este suficient ca între parametrii C_1, C_2 din (3) să avem o relație

$$\Phi(C_1, C_2) = 0,$$

Φ avînd derivate parțiale de ordinul întîi continue.

Eliminînd pe C_1 și C_2 între relațiile

$$\varphi_1(x, y, z) = C_1,$$

$$\varphi_2(x, y, z) = C_2,$$

$$\Phi(C_1, C_2) = 0,$$

obținem ecuația suprafeței integrale

$$\Phi[\varphi_1(x, y, t), \quad \varphi_2(x, y, z)] = 0.$$

c) Din acest punct de vedere, geometric, problema lui Cauchy se poate enunța și în modul următor:

Să se găsească suprafața integrală a ecuației cu derivate parțiale

$$P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x,y,t)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x,y,z)$$

care trece prin curba

$$x = x_0, \quad z = \psi(y).$$

Dacă

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y, z) &= C_1, \\ \varphi_2(x, y, z) &= C_2 \end{aligned} \tag{3}$$

sînt două integrale prime ale sistemului caracteristic (2), problema se reduce la găsirea legăturii între C_1 și C_2, astfel încît curbele caracteristice definite de (3) să se sprijine pe curba dată, ceea ce revine la a elimina pe x, y, z din următoarele 4 ecuații

$$\begin{gathered} \varphi_1(x, y, z) = C_1, \\ \varphi_2(x, y, z) = C_2, \\ x = x_0, \\ z = \psi(y). \end{gathered}$$

Rezultatul eliminării este o relație de forma

$$\Phi(C_1, C_2) = 0$$

în care dacă înlocuim pe C_1 și C_2 cu φ_1, φ_2, respectiv, obținem suprafața

$$\Phi[\varphi_1(x, y, z), \varphi_2(x, y, z)] = 0$$

care este *soluția problemei lui Cauchy*.

Observație

Curba $x = x_0$, $z = \psi(y)$ din enunțul problemei lui Cauchy se poate înlocui cu orice curbă, $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$ situată în D, cu *condiția să nu fie o curbă caracteristică*. Soluția problemei lui Cauchy se determină în mod analog, adică se elimină x, y, z între ecuațiile

$$\begin{gathered} \varphi_1(x, y, z) = C_1, \\ \varphi_2(x, y, z) = C_2, \\ F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0; \end{gathered}$$

rezultatul eliminării este o relație

$$\Phi(C_1, C_2) = 0$$

în care dacă înlocuim pe C_1 şi C_2 cu φ_1 şi respectiv φ_2 obținem ecuația

$$\Phi\ [\varphi_1(x, y, t),\ \varphi_2(x, y, z)] = 0$$

care este soluția problemei lui Cauchy.

Dacă curba $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$ este o *curbă caracteristică*, eliminarea nu se poate face, deci soluția problemei lui Cauchy nu este determinată.

Exemplu

Să se găsească suprafața integrală a ecuației

$$(cy - bz)\frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx)\frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay, \qquad a,\ b,\ c = \text{const.},$$

care conține dreapta $x = y$, $x = z$.

Sistemul caracteristic

$$\frac{\mathrm{d}x}{cy - bz} = \frac{\mathrm{d}y}{az - cy} = \frac{\mathrm{d}z}{bx - ay}$$

are integralele prime

$$ax + by + cz = C_1,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_2.$$

Soluția căutată se obține eliminînd pe x, y, z între ecuațiile

$$ax + by + cz = C_1,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_2,$$

$$x = y, \qquad x = z,$$

deci

$$x = \frac{C_1}{a + b + c}, \qquad x^2 = \frac{C_2}{3}$$

sau

$$3C_1^2 = (a + b + c)^2 C_2$$

în care apoi înlocuim pe C_1 şi C_2 cu expresiile lor în funcție de x, y, z. Soluția căutată este

$$3(ax + by + cz)^2 = (a + b + c)^2\ (x^2 + y^2 + z^2)$$

care reprezintă un con cu vîrful în origine.

BIBLIOGRAFIE

1. ANGHELUŢĂ, TH. *Curs de teoria funcţiilor de variabilă complexă.* Bucureşti, Editura tehnică, 1957.
2. BUDEANU, C., GHEORGHIU, M., HORTOPAN, V., ŞTEFĂNESCU, N. *Bazele teoretice ale electrotehnicii. Probleme.* Vol. I, 1958; vol. II, 1959, Bucureşti, Editura tehnică.
3. COŞNIŢĂ, C., TURTOIU, F. *Culegere de probleme de analiză matematică.* Bucureşti, Editura tehnică, 1962.
4. CIORĂNESCU, N. *Curs de algebră şi analiză matematică.* Bucureşti, Editura tehnică, 1955.
5. CIORĂNESCU, N., ROŞCULEŢ, M. *Culegere de probleme de algebră şi analiză matematică.* Bucureşti, Editura tehnică, 1959.
6. CIORĂNESCU, N. *Tratat de matematici speciale.* Bucureşti, Editura de stat didactică şi pedagogică, 1962.
7. CRISTESCU, R. *Matematici superioare.* Bucureşti, Editura didactică şi pedagogică, 1963.
8. DEMIDOVICI, P. B. *Culegere de probleme şi exerciţii de analiză matematică.* Bucureşti, Editura tehnică, 1956.
9. GHIUNTER, N. M., CUZMIN, R. O. *Culegere de probleme de matematici superioare.* Bucureşti, Editura tehnică, 3 vol., 1953.
10. GOURSAT, E. *Cours d'analyse mathématique.* Paris, Editura Gauthier-Villars, vol. I, 1933; vol. II, 1942; vol. III, 1923.
11. GUTMANN, M. *Probleme de calcul vectorial.* Bucureşti, Editura tehnică, 1961.
12. GHERMĂNESCU, M. *Culegere de probleme de ecuaţii diferenţiale.* Bucureşti, Editura didactică şi pedagogică, 1963.
13. HINCIN, I. A. *Curs scurt de analiză matematică.* Bucureşti, Editura tehnică, 1956.
14. IACOB, C. *Curs de matematici superioare.* Bucureşti, Editura tehnică, 1957.
15. IONESCU BUJOR, C., SACTER, O. *Exerciţii şi probleme de geometrie analitică şi diferenţială.* Vol. II, Bucureşti, Editura didactică şi pedagogică, 1963.
16. LUZIN, N. N. *Calculul integral.* Bucureşti, Editura tehnică, 1959.
17. LALESCU, TR. *Tratat de geometrie analitică.* Colecţia Numerus, Bucureşti, 1938.
18. MARINESCU, GH. *Teoria ecuaţiilor diferenţiale şi integrale.* Bucureşti, Editura didactică şi pedagogică, 1963.
19. NICOLESCU, M. *Calculul integral.* Bucureşti, Editura Victoriei, 1949.
20. NICOLESCU, M. *Analiză matematică.* Vol. I, 1957; vol. II, 1958, Bucureşti, Editura tehnică.
21. NICOLESCU, M. *Funcţii reale şi elemente de analiză funcţională.* Bucureşti, Editura didactică şi pedagogică, 1962.
22. NICOLESCU, M., DINCULEANU N., MARCUS, S. *Manual de analiză matematică.* Vol. I, 1962; vol. II, 1964, Bucureşti, Editura didactică şi pedagogică.
23. NATHANSON, P. I. *Teoria funcţiilor de variabilă reală.* Bucureşti, Editura tehnică, 1957.

24. PETROVSCHI, G. I. *Prelegeri asupra teoriei ecuațiilor diferențiale ordinare.* București, Editura tehnică, 1952.
25. PETROVSCHI, G. I. *Prelegeri asupra teoriei ecuațiilor diferențiale cu derivate parțiale.* București, Editura tehnică, 1953.
26. PICARD, E. *Traité d'analyse.* 3 vol. Paris, Editura Gauthier-Villars, 1922.
27. RACLIŞ, N. *Tratat elementar de matematici generale. Ecuații diferențiale.* București, 1945.
28. RÎJIC, M. I., GRADSTEIN, S. I. *Tabele de integrale, sume, serii și produse.* București, Editura tehnică, 1955.
29. ŞABAC, GH. I. *Matematici superioare.* Vol. I, București, Lit. Inst. Politehnic, 1953.
30. SMIRNOV, I. V. *Curs de matematici superioare.* Vol. I—V, București, Editura tehnică, 1953—1963.
31. STEPANOV, V. V. *Curs de ecuații diferențiale.* București, Editura tehnică, 1955.
32. TEODORESCU, N. *Metode vectoriale în fizica matematică.* Vol. I și II, București, Editura tehnică, 1954.
33. TEODORESCU, N. *Ecuații diferențiale.* București, Lit. Învățămîntului, 1955.
34. ŢINO, O., MURGULESCU, E., BĂRĂNESCU, V. *Curs de geometrie analitică.* București, Tip. Învățămîntului, 1957.
35. VRĂNCEANU, GH. *Geometrie analitică și proiectivă.* București, Editura tehnică, 1954.

CUPRINSUL

CALCULUL INTEGRAL

CAP. I. Integrala definită. Integrala nedefinită

CAP. IV. Integrale duble. Integrale de suprafață

CAP. V. Integrale triple

ECUAȚII DIFERENȚIALE

CAP. I. Ecuații diferențiale de ordinul întîi

CAP. II. Ecuații diferențiale de ordin superior

CAP. III. Sisteme de ecuații diferențiale