Ion C. Şcerbaţchi activează pe [illegible] pedagogic în instituţiile superioare de [illegible] ... Universitatea [illegible] a Moldovei.

Este absolvent al Institutului Pedagogic [illegible] din [illegible] (19..) [illegible] matematică (19..) [illegible] Matematică superioară a Universităţii [illegible] a Moldovei (1978).

Autor a circa 40 de articole ştiinţifice, [illegible] didactice şi a 7 cărţi [illegible], unele din ele: «Analyse numérique» C.P.U. Alger, [illegible] «Éléments de géométrie analytique et d'algèbre supérieure» U.T.M. Chişinău 199[illegible] «[illegible] de probleme de analiză matematică» U.T.M. Chişinău 199[illegible] «[illegible] l'analyse mathématique» U.T.M. Chişinău 1997, «Analiza [illegible] (probleme)» v. 1 şi 2, «Tehnica», Chişinău, 1998.

A activat mai mulţi ani în străinătate, a ţinut prelegeri la Institutul [illegible] de Industrie Uşoară din Boumerdes (1974-1978) şi la Universitatea din [illegible] Abbes (1985-1988) ale Republicii Algeria.

$\{x_n\}$

$\int_a^b f(x)\,dx$

$f'(x)$

CURS DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

ION ŞCERBAŢCHI

1

ION ŞCERBAŢCHI

CURS DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

1

$f(x)$

$\int_a^b f(x)\,dx$

$f'(x)$

Chişinău 2000

C.Z.U. 517.9 (075.8)

Ş. 32

Ion C. Şcerbaţchi, "Curs de analiză matematică", vol. 1; manual pentru studenţii instituţiilor de învăţământ superior şi a colegiilor cu profil tehnic, economic şi agrar.

Editura "Tehnica - Info", U. T. M.,

Chişinău, 2000, 430 p.

Recenzenţi: Dionisie Proca, doctor, conferenţiar la catedra "Matematică superioară" a U. T. M.;

Vladimir Dragan, doctor, conferenţiar la catedra "Matematică superioară" a U. T. M.

Referent ştiinţific: Ion Valuţă, prof. univ. la catedra "Matematică superioară" a U. T. M.

Redactor: Svetlana Dihor-Balaban

ISBN 9975-63-010-3

Lucicăi şi lui Octavian

şi în persoana lor –

tineretului studios

Prefaţă

Lucrarea reprezintă un ciclu de prelegeri ţinute de autor pe parcursul a circa trei decenii de activitate didactico-ştiinţifică la Universitatea Tehnică a Moldovei. Ea este destinată studenţilor instituţiilor superioare de învăţământ şi colegiilor cu profil tehnic, economic şi agrar. De asemenea poate fi utilă profesorilor de matematică şi liceenilor din clasele superioare.

Lucrarea conţine patru capitole ale cursului "Analiză matematică": Introducere în analiză matematică; Calculul diferenţial al funcţiei de o singură variabilă reală; Numere complexe, polinoame şi funcţii raţionale; Calculul integral al funcţiei de o singură variabilă reală, ce cuprinde: integrale nedefinite; integrale definite şi aplicaţiile lor geometrice şi mecanice; integrale improprii.

Lucrarea de asemenea conţine o gamă variată de exemple practice şi teoretice, care facilitează pătrunderea în esenţa noţiunilor de bază expuse în cele patru capitole.

Pentru o asimilare mai bună a materialului expus aici, este indispensabil de folosit în paralel lucrarea autorului "Analiză matematică (probleme)", volumul 1 ([20]).

În încheiere ţin să aduc sincere mulţumiri recenzenţilor conf. dr. Dionisie Proca şi Vladimir Dragan cât şi coordonatorului ştiinţific prof. univ. Ion Valuţă pentru citirea atentă a manuscrisului şi pentru un şir de observaţii şi sugestii preţioase, care au contribuit la îmbunătăţirea acestei lucrări. Sunt profund recunoscător colegilor mei de la catedra "Matematică superioară" a U. T. M. pentru susţinerea frecventă întru apariţia acestei lucrări.

Autorul

Capitolul 1
INTRODUCERE ÎN ANALIZĂ MATEMATICĂ
1.1. Mulţimi. Simbolurile logicii matematice

Noţiunea de *mulţime* este una din noţiunile de bază ale matematicii. Ea este o noţiune primară şi poate fi ilustrată prin exemple. Studenţii anului 1, mesele dintr-o sală de curs, cărţile dintr-o bibliotecă constituie exemple de mulţimi. Numerele reale cuprinse între 2 şi 3, numerele naturale pare sau impare constituie de asemenea exemple de mulţimi. Obiectele care compun o mulţime se numesc *elementele mulţimii*. Elementele unei mulţimi pot fi obiecte de orice natură. Cuvintele "totalitate", "familie", "sistem" etc. sunt sinonime ale cuvântului "mulţime". Mulţimea va fi notată tradiţional prin litere mari, iar elementele ei – prin litere mici (cu sau fără indici). O mulţime este dată prin enumerarea elementelor sale sau este definită printr-o proprietate, care caracterizează elementele ei. Întemeietorul teoriei mulţimilor este matematicianul german G. Cantor (1845-1918).

Dacă a este un element al mulţimii A, se scrie $a \in A$ sau $A \ni a$ şi se citeşte "elementul a aparţine mulţimii A" sau "mulţimea A conţine elementul a". Semnul $\in$ se numeşte *semn de apartenenţă*. Dacă b nu este element al mulţimii A, se scrie $b \notin A$ şi se citeşte "elementul b nu aparţine mulţimii A".

Fie A şi B două mulţimi. Dacă toate elementele mulţimii A sunt şi elemente ale mulţimii B, spunem că A este o *submulţime* a mulţimii B. Se scrie $A \subseteq B$ sau $B \supseteq A$ şi se citeşte "mulţimea A este inclusă în mulţimea B" sau "mulţimea B include mulţimea A". Semnul $\subset$ se numeşte *semn de incluziune*. Dacă mulţimea A nu este inclusă în mulţimea B, se scrie $A \not\subseteq B$ sau $B \not\supseteq A$ şi se citeşte "A nu este inclusă în B" sau "B nu include pe A". Mulţimea A se numeşte *submulţime strictă* a lui B şi se scrie $A \subset B$, dacă $A \subseteq B$ şi B conţine cel puţin un element ce nu aparţine lui A. Mulţimile A şi B *sunt egale*, dacă $A \subseteq B$ şi $B \subseteq A$ şi se scrie $A=B$.

Se numeşte *reuniunea* sau *suma* mulţimilor A şi B, mulţimea S a elementelor care aparţin cel puţin uneia din mulţimile A şi B. Se notează $A \cup B$ şi se citeşte "A reunit cu B". Semnul $\cup$ se numeşte *semn de reuniune*. Din definiţie rezultă că

$$S = A \cup B = B \cup A = \{x : x \in A \ \ sau \ \ x \in B\}.$$

Se numeşte *intersecţie* sau *produs* a mulţimilor A şi B, mulţimea I a elementelor care aparţin şi mulţimii A, şi mulţimii B. Se notează $I = A \cap B$ şi se citeşte "A intersectat cu B". Semnul $\cap$ se numeşte *semn de intersecţie*. Din definiţie rezultă că

$$I = A \cap B = B \cap A = \{x : x \in A \ \ şi \ \ x \in B\}.$$

Tradiţional se deosebesc două tipuri de mulţimi: *mulţimea vidă*, notată $\varnothing$, care nu conţine nici un element şi *mulţimea universală*, notată E, care conţine toate mulţimile considerate în studiul dat. Evident că mulţimea vidă este submulţime pentru orice altă mulţime.

Două mulţimi A şi B, care nu au nici un element comun, se numesc mulţimi *disjuncte*. În acest caz avem $A \cap B = \varnothing$.

Fie A, B două submulţimi ale unei mulţimi nevide E. Mulţimea D a elementelor care aparţin lui A şi nu aparţin lui B se numeşte *diferenţa* dintre A şi B. Se notează $D = A - B$ şi se citeşte "A minus B". Conform definiţiei avem

$$D = A - B = \{x : x \in A, \ x \notin B\}.$$

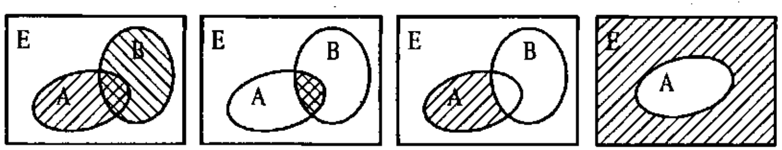
Observăm că $B - A \neq A - B$ şi dacă $A - B = \varnothing$, atunci sau $A = B$, sau $A \subset B$.

Diferenţa $E - A$ se numeşte *complementara* lui A în raport cu E şi se notează $C_E A$. Avem

$$C_E A = \{x : x \in E, \ x \notin A\}.$$

Atragem atenţia că A este o submulţime a mulţimii E.

Operaţiile de mai sus se ilustrează geometric astfel:



S = A∪B   I = A∩B   D = A-B $C_E A$

Următoarele proprietăţi se verifică imediat:

a) $C_E\varnothing = E$, $C_E E = \varnothing$, $C_E C_E A = A$, $A \cup C_E A = E$, $A \cap C_E A = \varnothing$;

b) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,
$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;

c) $C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$, $C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$,

adică operaţiile C_E, $\cap$ şi $\cup$ sunt distributive una în raport cu alta.

În propoziţiile matematice (definiţii, teoreme etc.) se repetă adesea unele cuvinte sau chiar expresii întregi. De aceea la notarea lor este comodă utilizarea simbolurilor logicii matematice.

Fixăm o mulţime A şi fie p o proprietate (o afirmaţie, o aserţiune) relativă la elementele $a \in A$, care poate să fie sau să nu fie adevărată. Notaţia $\{a \in A : p(a)\}$ desemnează mulţimea tuturor elementelor mulţimii A, care posedă proprietatea p. Negaţia proprietăţii p, notate *non p* sau $\overline{p}$ înseamnă că elementele mulţimii A nu posedă proprietatea p. Expresiile "a nu are proprietatea p" şi "a are proprietatea $non\,p = \overline{p}$" se consideră identice. Fixate A şi p, se pot defini două submulţimi remarcabile ale lui A, anume

$$A_p = \{a \in A : p(a)\} \quad \text{şi} \quad \overline{A}_p = \{a \in A : \overline{p}(a)\}.$$

Eliminăm situaţiile când nu se poate decide dacă un element din A are sau nu proprietatea p, adică adoptăm principiul terţiului exclus al logicii clasice. În aceste condiţii au loc următoarele relaţii $\overline{A}_p = A_{\overline{p}}$, $A_p \cap \overline{A}_p = \varnothing$, $A_p \cup \overline{A}_p = A$, adică $A_{\overline{p}} = C_A A_p = \overline{A}_p$.

În cazul când $A_p = A$, adică $\overline{A}_p = \varnothing$, proprietatea p are loc pentru orice element din A şi scriem pe scurt $\forall a \in A : p(a)$. Semnul $\forall$ (litera A inversată de la cuvântul englez *Any* – orice) se numeşte *cuantificator universal* (relativ la mulţimea A) şi se citeşte "oricare ar fi" sau "pentru toţi", "pentru orice", "pentru un element arbitrar" etc.

În cazul când $A_p \neq \varnothing$, scriem pe scurt $\exists a \in A : p(a)$. Semnul $\exists$ (litera E inversată de la cuvântul englez *Existence* –

existență) se numește *cuantificator existențial* și se citește "există cel puțin un" sau "se poate găsi un", "există" etc.

Fie din nou A o mulțime de referință și p, q – două proprietăți (afirmații, aserțiuni) relativ la elementele lui A. Se spune că *p implică q* și se scrie $p \Rightarrow q$, dacă $A_p \subseteq A_q$, adică: dacă elementul $a \in A$ are proprietatea p, atunci el are și proprietatea q. Aceasta revine la $\overline{A}_q \subseteq \overline{A}_p$, ceea ce înseamnă că $A_{\overline{q}} \subseteq A_{\overline{p}}$, adică $\overline{q} = nonq \Rightarrow \overline{p} = nonp$. De aici se obține principiul "reducerii" la absurd. Proprietățile p și q se consideră logic *echivalente sau egale*, dacă $A_p = A_q$, adică $A_p \subseteq A_q$ $(p \Rightarrow q)$ și $A_q \subseteq A_p$ $(q \Rightarrow p)$. Scriem în acest caz $p \Leftrightarrow q$ și citim "p este echivalent cu q" sau "p are loc dacă și numai dacă are loc q".

După proprietățile p și q pot fi formate alte proprietăți noi, de exemplu, $p \wedge q$ (se citește p și q), $p \vee q$ (se citește p sau q) definite prin relațiile $A_{p \wedge q} = A_p \cap A_q$, respectiv $A_{p \vee q} = A_p \cup A_q$. Aplicând legile lui De Morgan ((1806-1871) – logician și matematician scoțian): $C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$ și $C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$ rezultă $C_A A_{p \wedge q} = C_A A_p \cup C_A A_q$ și respectiv $C_A A_{p \vee q} = C_A A_p \cap C_A A_q$. Deci $\overline{A}_{p \wedge q} = \overline{A}_p \cup \overline{A}_q$ și $\overline{A}_{p \vee q} = \overline{A}_p \cap \overline{A}_q$ adică $non(p \wedge q) = \overline{p \wedge q} = nonp \vee nonq = \overline{p} \vee \overline{q}$ și $non(p \vee q) = \overline{p \vee q} = nonp \wedge nonq = \overline{p} \wedge \overline{q}$. În fine, cum complementarea mulțimii $\overline{A}_p = C_A A_p = A_{\overline{p}}$ este egală cu A_p, rezultă principiul dublei negații: $non(nonp) = p$, adică $\overline{\overline{p}} = p$.

Remarcăm că există o corespondență biunivocă remarcabilă între proprietățile relativ la elementele mulțimii de referință A și submulțimile lui A: fiecărei proprietăți p i se asociază submulțimea A_p a lui A și fiecărei submulțimi $B \subseteq A$ i se poate asocia proprietatea p, constând în apartenența la B și atunci avem $B = A_p$. În această corespondență "și" corespunde "intersecției", "sau" corespunde "reuniunii", "non" – "complementarei", "implică" – "incluziunii", "echivalența" – "egalității", "proprietatea falsă pentru orice element" – "submulțimii vide", "proprietatea adevărată pentru orice element" – mulțimii de referință A.

Observăm că propoziția "$\exists x \in A : p(x)$" revine la $A_p \neq \varnothing$ și negația logică a acestei propoziții este $A_p = \varnothing$, adică $\overline{A}_p = A$ sau $A_{\overline{p}} = A$. Deci am obținut propoziția $\forall x \in A : \overline{p}(x)$. În mod similar, propoziția $\forall x \in A : p(x)$, care înseamnă $A_p = A$, adică $A_{\overline{p}} = \varnothing$, se neagă prin $A_{\overline{p}} \neq \varnothing$, adică $\exists x \in M : \overline{p}(x)$.

Rezumând cele spuse mai sus, obținem: prin negație logică cuantificatorii $\exists, \forall$ trec unul în celălalt.

Pe parcurs la demonstrația unor teoreme vom folosi metoda inducției matematice la baza căreia stă un principiu matematic numit principiul inducției matematice. Acesta se formulează astfel: dacă o propoziție $P(n)$, $n \in N$, este adevărată pentru $n=1$ și din aceea că ea este adevărată pentru $n=k$ (unde k este un număr natural oarecare) rezultă că ea este adevărată și pentru numărul natural $n=k+1$, atunci propoziția $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural n.

1.2. Numere

Amintim unele proprietăți de bază ale sistemelor numerice.

După cum se știe numerele apar ca rezultat al numărării și măsurării mărimilor. Cea mai simplă clasă de numere este mulțimea numerelor naturale. Se notează

$$N = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}.$$

Operațiile cu numere naturale sunt cunoscute. Astfel, suma a două numere naturale este tot un număr natural:

$$a \in N,\ b \in N,\ a + b = c \Rightarrow c \in N.$$

Spunem că mulțimea numerelor naturale este închisă față de operația de adunare. Dacă însă se consideră operația inversă adunării, scăderea, apoi față de operația scăderii mulțimea numerelor naturale nu este închisă: *7-3=4*, însă *(3-7)* nu este număr natural.

Mulţimea $Z=\{0,\pm 1,\pm 2,...,\pm n,...\}$, $n\in N$, se numeşte *mulţimea numerelor întregi*, care este deja închisă faţă de operaţiile adunare şi scădere.

Mulţimea numerelor naturale N este închisă faţă de operaţia înmulţirii. Aceeaşi proprietate o are şi mulţimea numerelor întregi Z: dacă a şi b sunt două numere întregi oarecare, numărul $a\cdot b$ este un întreg. Ecuaţia

$$ax=b,\quad a\neq 0 \qquad (1)$$

cu a şi b - numere întregi, nu are soluţie în mulţimea numerelor întregi, decât dacă b este divizibil cu a, de unde rezultă că operaţia inversă înmulţirii, împărţirea, nu conduce întotdeauna la un număr întreg. Aceasta înseamnă că Z nu este închisă faţă de operaţia împărţirii. Mulţimea numerelor de forma $\frac{b}{a}$, cu a, b - întregi şi $a\neq 0$, adică mulţimea fracţiilor ordinare $\frac{b}{a}$ cu $b\in Z$, $a\in N$, constituie *mulţimea numerelor raţionale* şi se notează cu Q. Această mulţime este închisă faţă de operaţiile de adunare şi scădere, de înmulţire şi de împărţire. Orice număr raţional sau este întreg, sau poate fi reprezentat şi sub forma unei fracţii zecimale finite sau infinite periodice. Orice număr iraţional se reprezintă sub forma unei fracţii zecimale infinite neperiodice. Spre exemplu, numerele raţionale $5/4$ şi $1/6$ pot fi reprezentate în formă de fracţii zecimale astfel: $\frac{5}{4}=1,25$; $\frac{1}{6}=0,1666...=0,1(6)$; numerele iraţionale $\sqrt{2}$, π şi e – în formă de fracţii zecimale infinite neperiodice: $\sqrt{2}=1,41421356...$, $\pi=3,1415926535...$, $e=2,718281828459045...$.

Mulţimea numerelor raţionale Q reunită cu *mulţimea numerelor iraţionale I* formează *mulţimea numerelor reale R*, adică $R=Q\cup I$.

Observăm că $N\subset Z\subset Q\subset R$.

Între numerele reale şi punctele axei numerice *(o dreaptă pe care este fixat un punct 0, numit origine, o direcţie şi o unitate de măsură)* există o corespondenţă bijectivă. De aceea în loc de "număr" se spune deseori "punct" şi invers. De obicei, numerele reale pozitive sunt situate la dreapta de origine, iar numerele negative – la stânga de origine. Datorită acestei bijecţii mulţimilor de numere le corespund mulţimi de puncte. Astfel, *mulţimea numerelor reale se identifică cu mulţimea punctelor axei numerice.*

Convenim să completăm mulţimea numerelor reale cu simboluri noi numite minus infinit, notat cu $-\infty$ şi plus infinit, notat cu $+\infty$. Pe parcurs vom folosi frecvent şi simbolul ∞ (se citeşte "infinit") dacă nu ne interesează semnul (+) sau minus (-). Deseori vom scrie ∞ în loc de $(+\infty)$, dacă semnul (+) se subînţelege (a se vedea, în special, paragrafele *1.4.* şi *1.5.*).

Mulţimea extinsă $R\cup\{-\infty,+\infty\}$ se numeşte *dreaptă reală încheiată*. Pe această mulţime se introduce o relaţie de ordine, prelungind astfel ordinea din mulţimea R. Se adoptă relaţiile: $-\infty<+\infty$, $-\infty<x$ şi $x<+\infty$ pentru orice $x\in R$. Simbolurile $-\infty$ şi $+\infty$, care se mai numesc *numere improprii* (se numesc astfel deoarece nu respectă toate operaţiile cu numere reale), sunt supuse la următoarele reguli de calcul:

1. $-(+\infty)=+(-\infty)=-\infty$; $-(-\infty)=+(+\infty)=+\infty$;
2. $a\pm\infty=\pm\infty(a\in R)$; $+\infty+\infty=+\infty$; $-\infty-\infty=-\infty$;
3. $(+\infty)(+\infty)=(-\infty)(-\infty)=+\infty$; $(+\infty)(-\infty)=(-\infty)(+\infty)=-\infty$;
4. $a(-\infty)=\begin{cases}-\infty, \text{ dacă } a>0\\ +\infty, \text{ dacă } a<0;\end{cases}$ $a(+\infty)=\begin{cases}+\infty, \text{ dacă } a>0\\ -\infty, \text{ dacă } a<0;\end{cases}$
5. $\frac{a}{(+\infty)}=\frac{a}{(-\infty)}=0$;
6. $a^{+\infty}=\begin{cases}+\infty, \text{ dacă } a>1\\ 0, \text{ dacă } 0<a<1;\end{cases}$ $a^{-\infty}=\begin{cases}+\infty, \text{ dacă } 0<a<1\\ 0, \text{ dacă } a>1;\end{cases}$
7. $(\pm\infty)^m=\begin{cases}0, \text{ dacă } m<0\\ (\pm 1)^m\cdot\infty, \text{ dacă } m>0;\end{cases}$

8. $\frac{a}{0} = +\infty$, *dacă* $a > 0$, $\frac{a}{0} = -\infty$, *dacă* $a < 0$.

Operaţiile $(+\infty - \infty)$, $(-\infty + \infty)$, $\left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, $(0 \cdot (\pm\infty)) = (0 \cdot \infty)$, $((\pm\infty) \cdot 0) = (\infty \cdot 0)$, $(1^{\pm\infty}) = (1^{\infty})$, $(\pm\infty)^0 = (\infty^0)$ nu au sens. Tot fără sens sunt şi operaţiile (0^0) şi $\left(\frac{0}{0}\right)$ (a se vedea 1.4.1, 1.4.3 şi 1.5.3).

Reprezentarea numerelor reale pe axa numerică a fost efectuată pentru prima dată de matematicianul francez R. Descartes (1596-1650), care a pus bazele geometriei analitice.

Prezentăm mai jos câteva tipuri de mulţimi de numere reale, care vor fi folosite adesea de-a lungul expunerii. Fie a şi b două numere reale şi $a<b$.

1. Se numeşte *interval deschis sau interval* mulţimea punctelor x, care verifică dubla inegalitate $a<x<b$ şi se notează $]a, b[$. Deci $]a,b[= \{x : x \in R, a < x < b\}$.
2. Se numeşte *interval închis sau segment* mulţimea punctelor x, care verifică dubla inegalitate $a \le x \le b$ şi se notează $[a,b]$. Deci $[a, b] = \{x : x \in R,\ a \le x \le b\}$.
3. Mulţimea punctelor x, care satisfac inegalitatea dublă $a < x \le b$ sau $a \le x < b$, se numeşte *semiinterval deschis la stânga sau deschis la dreapta* şi se notează $]a, b]$ sau respectiv $[a, b[$. Deci $]a,b] = \{x : x \in R, a < x \le b\}$ şi $[a,b[= \{x : x \in R, a \le x < b\}$. Punctele a şi b se numesc *extremităţile*, iar $(b - a)$ – *lungimea* respectiv a intervalului, a segmentului sau a semiintervalelor.
4. Se numeşte *semidreaptă deschisă şi nemărginită la dreapta* sau *semiinterval infinit la dreapta* şi se notează $]a,+\infty[$ mulţimea $]a,+\infty[= \{x : x \in R, x > a\}$. Semidreapta închisă şi nemărginită la dreapta conţine şi punctul a, care se numeşte *extremitatea* semidreptei, şi se notează $[a, +\infty[$, adică $[a,+\infty[= \{x : x \in R, x \ge a\}$.

5. Se numeşte *semidreaptă deschisă şi nemărginită la stânga* sau *semiinterval infinit la stânga* şi se notează $]-\infty, a[$ mulţimea $]-\infty,a[= \{x : x \in R, x < a\}$. Semidreapta închisă şi nemărginită la stânga conţine şi punctul a, care se numeşte *extremitatea* semidreptei şi se notează $]-\infty, a]$, adică $]-\infty,a] = \{x : x \in R, x \le a\}$.
6. Dreapta întreagă R se notează $]-\infty, +\infty[$ şi se numeşte *interval infinit.*
7. Fie a un punct arbitrar de pe dreapta numerică şi δ un număr real pozitiv. Intervalul (deschis) $]a-\delta, a+\delta[$, centrat în punctul a, se numeşte δ – *vecinătate* a punctului a şi se notează $v(a, \delta)$. Dacă $v(a, \delta)$ nu conţine punctul a atunci ea se numeşte δ*- vecinătate perforată* a lui a şi se notează $\overline{v}(a, \delta)$. Evident că orice interval deschis $]c, b[$, care conţine punctul a conţine şi o δ– vecinătate a lui, unde $\delta = min\{a-c, b-c\}$.
8. Numim *vecinătate* a numărului impropriu $(+\infty)$ orice semiinterval infinit la dreapta, adică $]a, +\infty[$, unde $a \in R$. Se notează $v(a, +\infty)$.
9. Numim *vecinătate* a numărului impropriu $(-\infty)$ orice semiinterval infinit la stânga, adică $]-\infty, b[$, unde $b \in R$. Se notează $v(-\infty, b)$.
10. Numim *vecinătate* a simbolului ∞ mulţimea $v(\infty) =]-\infty,-a[\cup]a, -\infty[$, $a > 0, a \in R$.

Fie a un număr real. Se numeşte *valoare absolută* (sau *modul*) a numărului a şi se notează $|a|$ numărul real

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ dacă } a \ge 0 \\ -a, \text{ dacă } a < 0. \end{cases}$$

Valoarea absolută are următoarele proprietăţi:

1. $|a| \ge 0, \quad a \in R$;
2. $|a| = |-a|, \quad a \in R$;
3. $|a| \ge a$ şi $|a| \ge -a, \quad a \in R$;
4. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|, \quad a \in R, b \in R$;

5. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, $a \in R$, $b \in R$-$\{0\}$.

Aceste proprietăți rezultă imediat din definiția valorii absolute.

6. $|a| \le M \Leftrightarrow -M \le a \le M$, $a \in R$, $M > 0$.

Într-adevăr, $a \le |a| \le M \Rightarrow a \le M$ și $-a \le |a| \le M \Rightarrow -a \le M \Rightarrow a \ge -M$.

Prin urmare, $|a| \le M \Rightarrow -M \le a \le M$.

Invers. Fie $-M \le a \le M$. Avem

a) $a \ge 0 \Rightarrow |a| = a \Rightarrow |a| \le M$.

b) $a < 0 \Rightarrow |a| = -a$.

Înmulțind inegalitatea din stânga a inegalității duble $-M \le a \le M$ cu (-*1*), obținem $M \ge -a \ge -M \Rightarrow -a = |a| \le M$.

7. $|a \pm b| \le |a| + |b|$, $(a, b \in R)$. Într-adevăr,

a) $a \pm b \ge 0 \Rightarrow |a \pm b| = a \pm b$ și $a \le |a|$, $b \le |b|$, $-b \le |b| \Rightarrow a \pm b \le |a| + |b| \Rightarrow |a \pm b| \le |a| + |b|$;

b) $a \pm b < 0 \Rightarrow |a \pm b| = -(a \pm b)$ și $-a \le |a|$, $b \le |b|$, $-b \le |b| \Rightarrow -(a \pm b) \le |a| + |b| \Rightarrow |a \pm b| \le |a| + |b|$.

8. $|a \pm b| \ge |a| - |b|$, $(a, b \in R)$. Avem

a) $a = (a - b) + b \Rightarrow |a| = |(a - b) + b| \le |a - b| + |b|$, de unde $|a - b| \ge |a| - |b|$.

b) $a = (a + b) - b \Rightarrow |a| = |(a + b) + (-b)| \le |a + b| + |-b| =$
$= |a + b| + |b|$, de unde $|a + b| \ge |a| - |b|$

(în a) și b) am folosit proprietatea 7). Prin urmare, $|a \pm b| \ge |a| - |b|$.

9. $|a \pm b| \ge \big||a| - |b|\big|$. Conform proprietății 8 avem $|a \pm b| \ge |a| - |b|$ și $|a \pm b| = |-(a \pm b)| = |(\mp b) - a| \ge |\mp b| - |a| = |b| - |a|$.

Conform definiției, valoarea absolută a diferenței $|a| - |b|$ este egală cu $|a| - |b|$ sau $|b| - |a|$. Luând în considerare inegalitățile de mai sus, obținem $|a \pm b| \ge \big||a| - |b|\big|$.

Folosind principiul inducției matematice din proprietatea 7, obținem proprietatea

10. $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} |a_i|$, care se citește: modulul sumei mai multor numere reale nu întrece suma modulelor acestor numere reale.

1.3 Funcția. Diverse tipuri de funcții. Graficul funcției

1.3.1. Definiția funcției

Fie D și V două submulțimi ale mulțimii numerelor reale R. Dacă printr-un procedeu oarecare f facem să corespundă fiecărui element x din D un element unic y din V, atunci putem afirma că am definit *o funcție reală de o variabilă reală pe D cu valori din V*. Se notează $y=f(x)$, $x \in D$ ori $f: D \rightarrow V$. Elementul x se numește *argumentul funcției*, elementul y – *funcție*, mulțimea D – *domeniu de definiție* (*existență*), iar mulțimea V – *domeniu în care funcția ia valori*. Pe parcurs vom considera numai funcții reale de o variabilă reală, pe care le vom numi simplu: funcții. În cazul acesta vom folosi frecvent și notația simplă $y=f(x)$, fără a indica mulțimea D. Definiția funcției a fost formulată pentru prima dată de matematicianul rus N. Lobacevski (1792 - 1856) și de matematicianul francez S. F. Lacroix (1765 - 1843).

Așadar, prin funcție înțelegem tripletul (f, D, V). format din legea (procedeul) f, domeniul de definiție D și mulțimea V, în care funcția ia valori.

Dacă prin operația f unui element $x_0 \in D$ îi corespunde elementul $y_0 \in V$, spunem că y_0 este *valoarea funcției în punctul* x_0 și se notează $y_0=f(x_0)$.

Dacă D este mulţimea numerelor naturale N, atunci funcţia $y=f(x)$, $x \in N$, se scrie $y_n=f(n)$ sau $\{y_n\}$ şi se numeşte *şir*.

1.3.2. Funcţii egale şi funcţia identică

Reamintim că două funcţii $f : D_1 \to V_1$, $g : D_2 \to V_2$ sunt *egale*, dacă $D_1=D_2$, $V_1=V_2$ şi dacă $\forall x \in D_1 : f(x)=g(x)$. Funcţia $f : D \to D$, unde $D \subseteq R, D \neq \varnothing$ se numeşte *identică,* dacă $\forall x \in D : y = f(x) = x$ şi o vom nota I_D.

1.3.3. Funcţii surjective, injective şi bijective

Mulţimea valorilor lui $f(x)$, $x \in D$, conţinută în V se notează $f(D)$.

Dacă $f(D)=V$, spunem că funcţia *f este o surjecţie* (sau *f* este surjectivă). Într-o surjecţie $\forall y \in V, \exists x \in D : y = f(x)$. Spunem că funcţia $f : D \to V$ este *injectivă* (sau o injecţie) dacă

$$\forall x_1, x_2 \in D : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

sau echivalentul logic

$$\forall x_1, x_2 \in D : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

O funcţie care este în acelaşi timp injecţie şi surjecţie se numeşte *bijecţie* sau *funcţie biunivocă.*

Într-o bijecţie la fiecare $y \in V$ corespunde un $x \in D$ şi numai unul pentru care $y=f(x)$.

Exemple. Funcţia $y=2x+3$, $x \in R$

a) este surjectivă, deoarece pentru orice număr real y_0 avem $x_0 = \dfrac{y_0 - 3}{2} \in R$, astfel încât $y_0=2x_0+3$;

b) este injectivă, deoarece $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 3 = 2x_2 + 3 \Rightarrow x_1 = x_2$.

Prin urmare, această funcţie este şi bijectivă.

2. Funcţia $\sin : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ nu este o surjecţie, deoarece funcţia $y = \sin x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ primeşte numai valori pozitive: $[0,1]$.
3. Funcţia $y=x^2$, $x \in R$, nu este injectivă, deoarece pentru $x_1 = 2 \neq x_2 = -2$ avem $f(x_1) = f(x_2) = 4$.
4. Funcţia identică I_D este întotdeauna bijectivă.

1.3.4. Funcţii compuse şi inverse

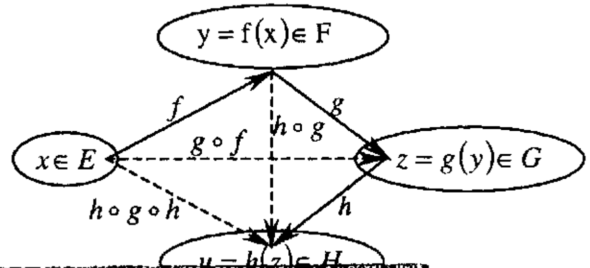
Indicăm acum câteva operaţii importante cu funcţii. Fie $f : D_1 \to V_1$, $g : D_2 \to V_2$ funcţii oarecare astfel încât $V_1 \subseteq D_2$. În această situaţie se poate defini o nouă funcţie asociată perechii de funcţii (f, g), anume $(g \circ f)$: $D_1 \to V_2$, adică fiecărui $x \in D_1$ i se asociază elementul $g(f(x)) \in V_2$, numită *compunerea lui f cu g* sau simplu *funcţie compusă* şi se notează $h = g \circ f$ (se aplică mai întâi *f* apoi *g*). În condiţiile de mai sus se poate întâmpla ca funcţia $(f \circ g)$ să nu fie definită.

Dacă $D_1=V_1=D_2=V_2$, atunci au sens ambele compuneri $(g \circ f)$ şi $(f \circ g)$, dar sunt în general diferite. Astfel, compunerea a două funcţii nu este comutativă însă întotdeauna este asociativă:

Fie $f : E \to F$, $g : F \to G$, $h : G \to H$, atunci

$$h \circ (g \circ f) = = (h \circ g) \circ f.$$

Demonstraţia rezultă din următoarea diagramă.



Într-adevăr,

1) $(g \circ f)(x) = g(y) = g(f(x))$ şi

$(h \circ (g \circ f))(z) = h(z) = h(g(y)) = h(g(f(x)))$;

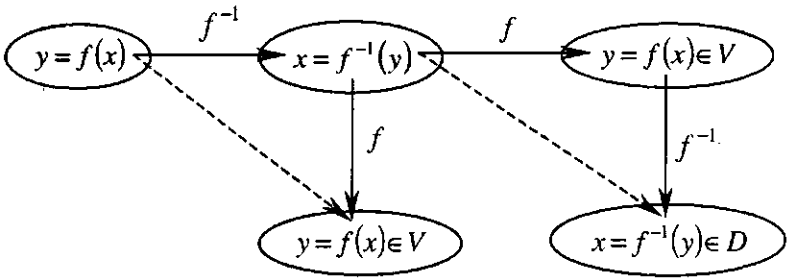
2) $(h \circ g)(y) = h(z) = h(g(y))$ şi $((h \circ g) \circ f)(x) = h(g(y)) = h(g(f(x)))$.

Din 1) şi 2) reiese egalitatea $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Fie $f : D \to V$ o bijecţie. Atunci $\forall y \in V, \exists x \in D : f(x) = y$. Deci se poate defini o nouă funcţie, notată $f^{-1} : V \to D$ şi numită *inversă* funcţiei *f*. Întrucât funcţia identică I_D este bijectivă, observăm că $(I_D)^{-1} = I_D$.

Dacă $f : D \to V$ este o funcţie oarecare, atunci $f \circ I_D = f$, $I_V \circ f = f$ şi dacă în plus funcţia *f* este biunivocă, atunci $f^{-1} \circ f = I_D$ şi $f \circ f^{-1} = I_V$.

Verificările necesare pentru aceste relaţii sunt imediate:



Exemplul 1. Fie $D = R - \{0,1\}$ şi $y = f(x) = 1 - x$, $x \in D$; $z = g(y) = \frac{1}{y}$; $y \in D$. Avem $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(1 - x) = \frac{1}{1 - x}$

şi $$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f\left(\frac{1}{y}\right) = 1 - \frac{1}{x}.$$

Prin urmare, $f \circ g \neq g \circ f$.

Are loc următoarea teoremă.

Teoremă. 1) Fie $f : E \to F$ şi $g : F \to G$ două funcţii. Dacă funcţia compusă $(g \circ f)$ este injectivă, atunci funcţia *f* este

injectivă. Dacă funcţia compusă $(g \circ f)$ este surjectivă, la fel este şi funcţia *g*.

2) Fie $f : D \to V$ şi $g : V \to D$ două funcţii astfel încât $g \circ f = I_D$ şi $f \circ g = I_V$. Atunci *f* şi *g* sunt bijective şi $g = f^{-1}$, $f = g^{-1}$. În particular, dacă *f* este bijectivă, la fel este şi f^{-1} şi în plus $(f^{-1})^{-1} = f$.

Demonstraţie. 1) Presupunem că funcţia compusă $(g \circ f)$ este injectivă şi vom demonstra că funcţia *f* este injectivă. Fie $x_1, x_2 \in D$ şi $f(x_1) = f(x_2)$. Aplicând funcţia *g* rezultă, $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ adică $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. Prin urmare, $x_1 = x_2$, adică *f* este injectivă.

Dacă funcţia compusă $(g \circ f)$ este surjectivă şi dacă *y* este un element oarecare din *V*, rezultă că există un element $x \in D$ astfel încât $(g \circ f)(x) = y$, adică $g(f(x)) = y$. Deci funcţia *g* este surjectivă.

2) Întrucât funcţia identică I_D este bijectivă, adică injectivă şi surjectivă, aplicând (1) obţinem că *f* este injectivă şi *g* este surjectivă. Similar, deoarece funcţia identică I_V este bijectivă, obţinem, aplicând din nou (1), că *f* este surjectivă şi *g* este injectivă. Prin urmare, *f* şi *g* sunt bijective.

Din relaţia $g \circ f = I_D$, compunând cu funcţia f^{-1} la dreapta rezultă $(g \circ f) \circ f^{-1} = I_D \cdot f^{-1}$, de unde $(g \circ f) \circ f^{-1} = f^{-1}$. În virtutea asociativităţii avem

$$g \circ (f \circ f^{-1}) = f^{-1} \Rightarrow g \circ I_V = f^{-1} \Rightarrow g = f^{-1}.$$

Similar, din relaţia $f \circ g = I_V$, compunând cu funcţia g^{-1} la dreapta, obţinem

$$(f \circ g) \circ g^{-1} = I_V \cdot g^{-1} \Rightarrow f \circ (g \circ g^{-1}) = g^{-1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f \circ I_D = g^{-1} \Rightarrow f = g^{-1}.$$

Dacă *f* este bijectivă, considerând $g = f^{-1}$, rezultă că $g \circ f = f^{-1} \circ f = I_D$ şi $f \circ g = f \circ f^{-1} = I_V$. Aplicând rezultatul din partea întâi a acestei teoreme pentru funcţiile *f* şi $g = f^{-1}$, obţinem că funcţia $g = f^{-1}$ este bijectivă şi $g^{-1} = f$, adică $(f^{-1})^{-1} = f$.

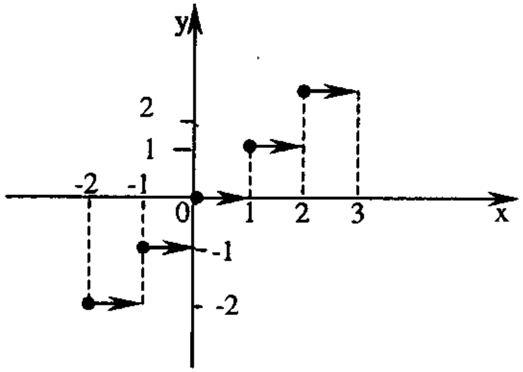
1.3.5. Graficul funcției

Corespondența $x \to f(x)$, stabilită de funcția f între domeniul de definiție D și mulțimea valorilor V se poate reprezenta prin perechi ordonate $(x, f(x))$.

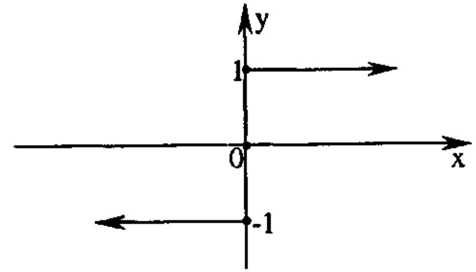
Se numește *graficul funcției* $y = f(x)$, $x \in D$, mulțimea G_f a perechilor $(x, f(x))$, deci $G_f = \{(x, f(x)) : x \in D\}$. Egalitatea $y=f(x)$, verificată de toate elementele (x, y) ale graficului funcției f și numai de acestea, se numește *ecuația* graficului funcției $f(x)$, $x \in D$.

Exemple.

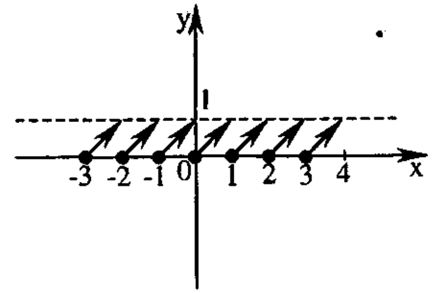
1. Funcția $y = E(x) = [x]$, $x \in R$, (de la cuvântul francez "entier"- întreg) – ceea ce înseamnă partea întreagă a lui x, adică cel mai mare număr întreg, care nu-l depășește pe x. Graficul acestei funcții are forma



2. Funcția $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x > 0 \\ 0, \text{ dacă } x = 0 \\ -1, \text{ dacă } x < 0 \end{cases}$ (de la cuvântul latin "signum" - semn), ceea ce înseamnă semnul lui x. Graficul are forma



3. Funcția $y = x - E(x) = \{x\}, x \in R$, ceea ce înseamnă partea fracționară a lui x.



4. Funcția Dirichlet (matematician german (1805-1859))

$$D(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x \in Q \\ 0, \text{ dacă } x \in R - Q = I \end{cases}.$$

Constatăm că această funcție nu poate fi reprezentată grafic. Într-adevăr, graficul ei constă din puncte ale axei OX, abscisele cărora sunt numere iraționale, și din puncte ale dreptei $y=1$, abscisele cărora sunt numere raționale. Întrucât pe orice interval al axei numerice, oricât de mic nu l-am lua, există atât puncte raționale, cât și puncte iraționale, de reprezentat grafic această funcție este imposibil.

1.3.6. Funcții pare și impare

Funcția $y = f(x)$, $x \in D$ se numește *pară*, dacă domeniul ei de definiție – mulțimea D – este simetric față de originea axei numerice și $\forall x \in D : f(-x) = f(x)$. Graficul funcției pare în sistemul ortogonal cartezian de coordonate XOY este simetric în raport cu axa ordonatelor OY.

Funcția $y = f(x)$, $x \in D$ se numește *impară*, dacă domeniul ei de definiție – mulțimea D – este simetric față de originea axei numerice și $\forall x \in D: f(-x) = -f(x)$. Graficul funcției impare în sistemul cartezian XOY este simetric în raport cu originea acestui sistem.

Ușor se verifică că

1) funcția Dirichlet $D(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x \in Q \\ 0, \text{ dacă } x \in R - Q = I \end{cases}$ este o funcție pară;

2) funcția constantă $y = f(x) = C$, $x \in R$ este o funcție pară;

3) funcția $y = \operatorname{sgn} x$, $x \in R$ este o funcție impară;

4) funcția $y = e^x$, $x \in R$ nu este nici pară, nici impară.

Următoarele proprietăți ale funcțiilor pare și impare rezultă imediat din definiția lor (a se consulta p. 26):

1) suma a două funcții pare (impare) este o funcție pară (impară);
2) produsul și câtul a două funcții pare sau impare, cu numitorul diferit de zero, este o funcție pară;
3) produsul și câtul unei funcții pare și a unei funcții impare, cu numitorul diferit de zero, este o funcție impară;
4) funcția modul a unei funcții pare sau impare este o funcție pară;
5) funcția $[f(x) + f(-x)]$, $x \in D$, este pară, iar funcția $[f(x) - f(-x)]$, $x \in D$, este impară, pentru orice funcție $y = f(x)$, $x \in D$, cu D simetric în raport cu originea axei numerice. Din proprietatea aceasta reiese următorul rezultat: orice funcție $y = f(x)$, $x \in D$, cu D simetric în raport cu originea axei numerice poate fi reprezentată sub formă de sumă a două funcții dintre care una este pară, iar cealaltă – impară. Într-adevăr, $f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$.

1.3.7. Funcții periodice

Funcția $y = f(x)$, $x \in D$, se numește *periodică*, dacă există un număr real $T>0$, astfel încât pentru orice $x \in D$ valorile $(x \pm T) \in D$ și $f(x+T) = f(x)$. Observăm că dacă funcția f este periodică, atunci $f(x-T) = f(x)$ și $f(x+kT) = f(x)$ pentru orice $k \in Z$. Într-adevăr, fie $x \in D$ și $x - T = x_1 \in D$. Atunci

$$f(x-T) = f(x_1) = f(x_1 + T) = f(x - T + T) = f(x) \text{ și}$$
$$f(x \pm 2T) = f((x \pm T) \pm T) = f(x \pm T) = f(x).$$

Similar $f(x \pm 3T) = f(x)$ etc. În general, pentru orice $k \in Z$, prin recurență, obținem că $f(x + kT) = f(x)$, dacă, bineînțeles, $(x + kT) \in D$, $k \in Z$.

Dacă există cel mai mic $T > 0$ cu proprietatea $f(x+T) = f(x)$, atunci numărul T se numește *perioada funcției f*.

Exemple. 1. Funcțiile trigonometrice: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x \in R$ sunt funcții periodice cu perioada $T = 2\pi$, iar $y = \operatorname{tg} x$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$, $y = \operatorname{ctg} x$, $x \neq \pi k$, $k \in Z$, sunt periodice cu perioada $T = \pi$.

2. Funcția $y = f(x) = x - E(x)$, $x \in R$ (partea fracționară a numărului x) este o funcție periodică cu perioada $T=1$. Într-adevăr,

a) Fie $x \in Z$, atunci $x+1 \in Z$ și $E(x)=x$, $E(x+1)=x+1$. Deci
$$f(x+T) = f(x+1) = (x+1) - E(x+1) = (x+1) - (x+1) = 0$$
$$\text{și } f(x) = x - E(x) = x - x = 0.$$
Prin urmare, $f(x+1) = f(x)$.

b) Fie $x \notin Z$, adică x nu este întreg. Atunci există un număr întreg $n \in Z$ astfel încât $n<x<n+1$ și deci $n+1<x+1<n+2$. În acest caz $E(x)=n$, $E(x+1)=n+1$ și obținem
$$f(x+T) = f(x+1) = (x+1) - E(x+1) = x + 1 - n - 1 =$$
$$= x - n = x - E(x) = f(x).$$

Arătăm că $T=1$ este cel mai mic număr real pozitiv, pentru care $f(x+T)=f(x)$. Fie $0<s<1$. Pentru $x=0$ avem $E(0)=0$ şi $E(s)=0$. Deci

$f(0+s)=f(s)=s-E(s)=s-0=s$ şi $f(0)=0-E(0)=0-0=0$,

adică $f(0+s)\neq f(0)$.

Prin urmare, funcţia $y=f(x)=x-E(x)$, $x\in R$ este periodică cu perioada $T=1$.

3. Funcţia Dirichlet $D(x)=\begin{cases} 1, \text{ dacă } x\in Q \\ 0, \text{ dacă } x\in R-Q=I \end{cases}$ este periodică, însă nu are perioadă. Într-adevăr, pentru orice $T>0, T\in Q$, numărul $(x\pm T)\in Q$, dacă $x\in Q$ şi numărul $(x\pm T)\in I$, dacă $x\in I$. Deci $D(x\pm T)=\begin{cases} 1, \text{ dacă } x\in Q \\ 0, \text{ dacă } x\in I \end{cases}$.

Prin urmare, $D(x+T)=D(x)$. Dacă însă $T>0, T\in I$, apoi numărul $(x\pm T)\in I$ pentru orice $x\in R$. Deci

$$D(x\pm T)=\begin{cases} 0, \text{ dacă } x\in Q \\ 0, \text{ dacă } x\in I \end{cases} \text{ şi } D(x+T)\neq D(x).$$

Întrucât nu există cel mai mic număr raţional şi pozitiv, funcţia $D(x)$ nu are perioadă.

1.3.8. Funcţii monotone şi mărginite

Funcţia $y=f(x)$, $x\in D$ se numeşte *crescătoare* (*descrescătoare*) pe D, dacă

$\forall x_1,x_2\in D,\quad x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\leq f(x_2)$ (*respectiv* $f(x_1)\geq f(x_2)$).

Funcţia $y=f(x)$, $x\in D$ se numeşte *strict crescătoare* (*strict descrescătoare*) pe D, dacă $\forall x_1,x_2\in D$, $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ (*respectiv* $f(x_1)>f(x_2)$). Observăm că în acest caz are loc relaţia $\forall x_1,x_2\in D$, $x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$, adică funcţia f este injectivă. Orice funcţie $y=f(x)$, $x\in D$ se numeşte *monotonă* (*strict monotonă*), dacă ea este crescătoare sau descrescătoare pe D (respectiv strict crescătoare sau strict descrescătoare pe D).

Exemple.

1. Funcţia $y=x^n$, $n\in N$, $x\in [0,+\infty[$ este strict crescătoare pe $[0,+\infty[$. Într-adevăr, dacă $0\leq x_1<x_2$ avem

$f(x_1)-f(x_2)=x_1^n-x_2^n=(x_1-x_2)(x_1^{n-1}+x_1^{n-2}x_2+\ldots+x_2^{n-1})$ şi

$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)-f(x_2)<0 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

2. Funcţia $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, \text{ dacă } x>0 \\ 0, \text{ dacă } x=0 \\ -1, \text{ dacă } x<0 \end{cases}$ este crescătoare pe mulţimea R (să se consulte graficul acestei funcţii).

3. Funcţia liniară $y=ax+b$, $a<0$ este strict descrescătoare pe mulţimea R. Într-adevăr,

$\forall x_1,x_2\in R,\ x_1<x_2 \Rightarrow ax_1>ax_2 \Rightarrow ax_1+b>ax_2+b \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$.

4. **Funcţia $y=x^2$, $x\in R$ nu este monotonă pe R. Într-adevăr,**

a) pe intervalul $[0,+\infty[$ această funcţie este strict crescătoare (vezi ex. 1 de mai sus);

b) pe intervalul $]-\infty,0]$ avem $\forall x_1,x_2\in]-\infty,0],\ x_1<x_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow |x_1|>|x_2| \Rightarrow x_1^2>x_2^2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$. Prin urmare, $y=x^2$, $x\in R$, nu este strict monotonă şi nici monotonă pe R.

Fie funcţia $y=f(x)$, $x\in D$ şi $x_0\in D$. Considerăm funcţia $g(x)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ definită pe mulţimea $V=D-\{x_0\}$.

Uşor se verifică următoarele criterii:

a) f este crescătoare pe $D \Leftrightarrow g\geq 0$ pe V;

b) f este strict crescătoare pe $D \Leftrightarrow g>0$ pe V;

c) f este descrescătoare pe $D \Leftrightarrow g\leq 0$ pe V;

d) f este strict descrescătoare pe $D \Leftrightarrow g<0$ pe V.

Fie $y=f(x)$, $x\in D$ este strict monotonă pe D, atunci f este injectivă şi funcţia $f:D\to f(D)$ este o bijecţie, adică există funcţia inversă f^{-1}, care de asemenea este strict monotonă pe $f(D)$. Deci obţinem următorul rezultat: *dacă f este strict crescătoare (strict descrescătoare)* pe D, atunci funcţia inversă f^{-1} este strict crescătoare (strict descrescătoare) pe $f(D)$.

Fie $f:D_1\to V_1$ şi $g:D_2\to V_2$ cu $V_1\subseteq D_2$. Atunci are loc următoarea teoremă.

Teoremă. a) Dacă f şi g sunt crescătoare, atunci funcţia compusă $(g\circ f)$ este crescătoare.

b) Dacă f şi g sunt descrescătoare, atunci $(g\circ f)$ este descrescătoare.

c) Dacă una din funcţiile f şi g este crescătoare, iar cealaltă este descrescătoare, atunci $(g\circ f)$ este descrescătoare.

Demonstraţiile acestor 3 cazuri sunt asemănătoare. De aceea demonstrăm unul din ele, spre exemplu, cazul c).

Presupunem că f este crescătoare, iar g este descrescătoare şi fie $x_1<x_2$ două valori oarecare din domeniul D_1. Avem
(f crescătoare) $\Leftrightarrow f(x_1)\le f(x_2)$, $f(x_1)\in V_1\subseteq D_2$, $f(x_2)\in V_2\subseteq D_2$
şi (g descrescătoare) $\Rightarrow g(f(x_1))\ge g(f(x_2))$.

Prin urmare, $\forall x_1,x_2\in D_1,\ x_1<x_2\Rightarrow (g\circ f)(x_1)\ge (g\circ f)(x_2)$, adică funcţia $(f\circ g)$ este descrescătoare.

Următoarele proprietăţi pot fi verificate imediat.

Fie $y=f(x)$, $x\in D$ şi $z=g(x)$, $x\in D$ două funcţii oarecare definite pe aceeaşi mulţime D. Vom numi *sumă, diferenţă, produs şi cât* ale acestor două funcţii respectiv funcţiile $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$, $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$ şi $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$, dacă $g(x)\neq 0$, $x\in D$. Atunci

Proprietatea 1. Funcţia $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ este crescătoare (descrescătoare) pe D, dacă f şi g sunt crescătoare (descrescătoare) pe D.

Proprietatea 2. Funcţia $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$ este crescătoare (descrescătoare) pe D, dacă f şi g sunt pozitive şi crescătoare (descrescătoare) pe D.

Proprietatea 3. Dacă f este pozitivă şi crescătoare (descrescătoare) pe D, atunci funcţia $\left(\frac{1}{f}\right)(x)=\frac{1}{f(x)}$ este descrescătoare (crescătoare) pe D.

Funcţia $y=f(x), x\in D$ se numeşte *mărginită superior* (*inferior*) pe D, dacă există un număr real M astfel încât $\forall x\in D: f(x)\le M$ (respectiv $f(x)\ge M$).

Dacă funcţia f este mărginită superior, adică $f(x)\le M$ pentru orice $x\in D$, atunci numărul M se numeşte *margine superioară* a lui $f(x)$. Evident că orice număr $K>M$ serveşte ca margine superioară pentru funcţia f, deoarece $\forall x\in D: f(x)\le M<K$. Cel mai mic număr M^*, care satisface inecuaţia $f(x)\le M^*$ pentru orice $x\in D$ se numeşte *margine superioară exactă* a funcţiei $f(x)$, $x\in D$.

Dacă funcţia f este mărginită inferior, adică $f(x)\ge m$ pentru orice $x\in D$, atunci numărul m se numeşte *margine inferioară* a lui f. Evident că orice număr $k<m$ serveşte ca margine inferioară pentru $f(x)$, deoarece $\forall x\in D: f(x)\ge m>k$. Cel mai mare număr m^*, care satisface inecuaţia $f(x)\ge m^*$ pentru orice $x\in D$ se numeşte *margine inferioară exactă* a funcţiei $f(x)$, $x\in D$.

Funcţia $y=f(x), x\in D$ se numeşte *mărginită pe D*, dacă ea este mărginită superior şi inferior pe acest domeniu. Aceasta înseamnă că funcţia $y=f(x), x\in D$ este mărginită pe D, dacă există două numere reale M_1 şi M_2 astfel încât $\forall x\in D: M_1\le f(x)\le M_2$. Notăm prin $M=\max(M_1,M_2)$. Deci

$-M \le M_1 \le f(x) \le M_2 \le M$, adică $|f(x)| \le M$ pentru orice $x \in D$.

Prin urmare, am obținut următoarea definiție: funcția $y = f(x)$, $x \in D$, se numește *mărginită*, dacă există un număr real $M>0$ astfel încât $\forall x \in D\ |f(x)| \le M$. Printr-o negație logică obținem: funcția $y = f(x), x \in D$ se numește *nemărginită superior (inferior)*, dacă $\forall M > 0, \exists x_1 \in D : f(x_1) > M$, (respectiv $f(x_1) < -M$).

Evident că suma, diferența și produsul a două funcții mărginite pe o mulțime D sunt funcții mărginite pe D.

Câtul a două funcții mărginite pe o mulțime D poate fi o funcție nemărginită pe D. Într-adevăr, fie $f(x) = \frac{x}{x+2}$ și $g(x) = \frac{x^2}{x+2}$ definite pe $]0,1]$. Observăm că $\forall x \in]0,1] : 0 < f(x) < \frac{1}{3}$ și $0 < g(x) < \frac{1}{3}$ adică funcțiile f și g sunt mărginite pe $]0,1]$. Raportul $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{x}$ este o funcție nemărginită superior pe $]0,1]$, deoarece pentru orice $M>0$ există $x_1 = \frac{1}{2M}$ astfel încât

$$\frac{f(x_1)}{g(x_1)} = \frac{1}{x_1} = 2M > M.$$

1.3.9. Moduri de definire a funcțiilor

Conform definiției funcția se consideră definită, dacă este dată o mulțime de valori, pe care le ia argumentul (variabila independentă), adică domeniul de definiție al funcției și regula (procedeul) după care se stabilește o corespondență între argumentul funcției și funcție (variabilă dependentă). În acest caz

nu se impun nici un fel de condiții caracterului acestei corespondențe.

a) În analiza matematică funcția se definește de obicei cu ajutorul unei formule, care indică ce fel de operații trebuie de efectuat asupra argumentului, pentru a obține valorile corespunzătoare ale funcției. Această formulă se numește *expresie analitică* a funcției, iar modul de definire al funcției cu ajutorul formulei se numește *mod analitic* de definire al funcției.

Exemple.

1. Volumul V al corpului mărginit de o sferă este o funcție de raza ei r. Expresia analitică este $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, unde $r \in]0,+\infty[$.

2. Formula $y = x - \sqrt{x^2+1}$ definește funcția y pentru orice valoare reală a argumentului x.

Notă. Nu orice expresie analitică definește o funcție. De exemplu, în domeniul numerelor reale expresia $\sqrt{4-x^2} + \sqrt{x^2-25}$ nu definește nici o funcție, deoarece

$$\begin{cases} 4-x^2 \ge 0 \\ x^2-25 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \le 4 \\ x^2 \ge 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| \le 2 \\ x > 5 sau x > -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \le x \le 2 \\ x > 5 sau x > -5 \end{cases} \Rightarrow \varnothing,$$

adică nu există valori reale ale lui x, pentru care expresia ar căpăta valori reale.

În particular, funcția poate fi definită cu ajutorul a mai multor formule (diferite formule pentru diferite porțiuni ale domeniului de definiție).

De exemplu,

$$y = f(x) = \begin{cases} 2x+3, \text{ dacă } x \le 1 \\ x^2+4, \text{ dacă } 1 < x < \frac{5\pi}{2} \\ 5\sin x, \text{ dacă } x \ge \frac{5\pi}{2} \end{cases}.$$

Domeniul de definiție al acestei funcții este mulțimea numerelor reale R, care este împărțită în 3 intervale:

pe $]-\infty,1]$, avem $y = 2x+3$,

pe $\left]1,\frac{5\pi}{2}\right[$, avem $y=x^2+4$,

pe $\left[\frac{5\pi}{2},+\infty\right[$, avem $y=5\sin x$.

În cazurile când funcţia este dată analitic şi nu se spune nimic despre formulă sau sensul problemei considerate, drept domeniu de definiţie al funcţiei se va lua domeniul valorilor admisibile ale expresiei analitice. De exemplu, pentru funcţia $y=\frac{4}{3}\pi x^3$ domeniul de definiţie al ei coincide cu domeniul valorilor admisibile, adică cu mulţimea R. Dacă însă y exprimă volumul, iar x raza unei sfere, apoi domeniul de definiţie al acestei funcţii $\left(V=\frac{4}{3}\pi r^3\right)$ este intervalul $]0,+\infty[$.

b) La studiul fenomenelor naturii ne întâlnim uneori cu mărimi variabile, dependenţa dintre care se stabileşte pe cale experimentală. În asemenea cazuri în baza datelor experimentale se compun tabele, în care se indică valorile funcţiilor, care corespund diferitelor valori particulare ale argumentului. Acest mod de definire se numeşte *tabelar*. El constă deci în aranjarea într-o anumită ordine a valorilor argumentului $x_1, x_2, ..., x_n$ şi a valorilor respective $y_1, y_2, ..., y_n$ ale funcţiei:

x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y	y_1	y_2	y_3	...	y_n

La fel sunt alcătuite, de exemplu, tabelele funcţiilor trigonometrice, tabelele logaritmilor etc.

c) În multe cazuri, mai ales la folosirea aparatelor de înregistrare automată, funcţia se defineşte direct printr-un grafic. Acest mod de definire al funcţiei se numeşte *modul grafic* de definire al funcţiei. De exemplu, curbele care apar pe benzile oscilografului pot reprezenta graficele diferitelor mărimi fizice ca funcţii de timp etc. Pe aceste grafice se pot citi valorile aproximative ale funcţiilor la orice moment de timp.

Aceste trei moduri de definire a funcţiei (analitic, tabelar şi grafic), fiind cele mai des întrebuinţate, nu epuizează însă toate

modurile posibile. În particular, putem defini funcţia descriind prin cuvinte ce valori capătă ea pentru diferite valori ale argumentului.

În maşinile electronice de calcul funcţia poate fi caracterizată prin algoritmul calculării valorilor ei.

Exemple. 1. Funcţia $y=E(x)=[x]$, $x\in R$ (ex. 1 din 1.3.5) se defineşte pe mulţimea R ca cel mai mare număr întreg, care nu-l depăşeşte pe x. În acest caz $E(0,7)=0$, $E(1)=1$, $E(3,2)=3$, $E(-1,2)=-2$.

2. Funcţia $f(x)=x-E(x)=\{x\}$, $x\in R$ (ex. 3 din 1.3.5) se defineşte pe R ca partea fracţionară a lui x. De exemplu,
$f(-2,56)=-2,56-E(-2,56)=-2,56-(-3)=-2,56+3=0,44$;
$f(1,37)=1,37-E(1,37)=1,37-1=0,37$;
$f(50)=50-E(50)=50-50=0$.

3. Funcţia $y=\operatorname{sgn}x$, $x\in R$ (ex. 2 din 1.3.5) se defineşte pe R ca semnul lui x. De exemplu, $\operatorname{sgn}(4)=+1$, $\operatorname{sgn}(-3)=-1$, $\operatorname{sgn}0=0$.

4. Funcţia Dirichlet: $y=D(x)$, $x\in R$ (ex. 4 din 1.3.5), care se defineşte în felul următor: $D(x)=1$ pentru toate numerele raţionale şi $D(x)=0$ pentru toate numerele iraţionale.

Notă. Definirea funcţiei prin unul din modurile indicate nu exclude posibilitatea de a o defini şi prin alte moduri. De exemplu,

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, \text{ dacă } x>0\\ 0, \text{ dacă } x=0\\ -1, \text{ dacă } x<0\end{cases},\qquad D(x)=\begin{cases}1, \text{ dacă } x\in Q\\ 0, \text{ dacă } x\in I\end{cases}.$$

1.3.10. Funcţii elementare

Se numesc *funcţii elementare principale*:

1. funcţia constantă: $y=c$, $c\in R$;
2. funcţia putere: $y=x^\alpha$, $\alpha\in R$, $x>0$;
3. funcţia exponenţială: $y=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$, $x\in R$;
4. funcţia logaritmică: $y=\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$, $x\in]0,+\infty[$;

5. funcțiile trigonometrice: $y=\sin x,\ x\in R$; $y=\cos x,\ x\in R$; $y=tgx,\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z$; $y=ctgx,\ x\neq k\pi,\ k\in Z$;

6. funcțiile trigonometrice inverse: $y=\arcsin x,\ |x|\leq 1$; $y=\arccos x,\ |x|\leq 1$; $y=arctgx,\ x\in R$; $y=arcctgx,\ x\in R$.

Vom numi *funcție elementară* funcția care poate fi prezentată cu ajutorul unei singure formule de tipul $y=f(x)$, unde funcția $f(x)$ este rezultatul unor combinații din funcții elementare principale realizate cu ajutorul unui număr finit de operații ca adunarea, scăderea, înmulțirea, împărțirea și operația compunerii funcțiilor. Din această definiție rezultă că funcțiile elementare fac parte din categoria funcțiilor definite în mod analitic. De aceea, domeniul lor de definiție coincide cu domeniul valorilor admisibile ale expresiei analitice respective.

Exemple de funcții elementare:

$$y=ax+b,\quad y=|x|=\sqrt{x^2},\quad y=ax^2,$$

$$y=\sqrt{1+4\sin^2 2x},\quad y=\sin\ln\left(1+\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right),\quad y=\frac{x+|x|}{\sqrt{1-x^3}}.$$

Funcția $y=f(n)=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n=n!$, $n\in N$, (se citește en factorial) nu este o funcție elementară, deoarece numărul de operații, care trebuie efectuate pentru a-l obține pe y, crește împreună cu n, așadar nu este un număr finit.

Remarcăm următoarele clase de funcții elementare.

1. Funcția polinom:

$$y=P_n(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k, n\in N.$$

Dacă $a_n\neq 0$, numărul n se numește *gradul polinomului.* Funcția liniară $y=ax+b$ este un caz particular al acestei funcții ($n=1$). Funcția liniară $y=ax+b$ și funcția $y=ax^2+bx+c$ au fost studiate detaliat în geometria analitică. Graficele lor reprezintă respectiv o dreaptă și o parabolă.

Funcția polinom are domeniul de definiție mulțimea numerelor reale R.

2. Funcția rațională: $y=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, unde $P_n(x)$, $Q_m(x)$ sunt polinoame de gradul n și respectiv de gradul m.

Evident că funcția rațională este definită pentru toate valorile lui x, cu excepția valorilor care transformă numitorul în zero.

Ca exemplu de funcție rațională servește funcția $y=\frac{a}{x}$, care exprimă o dependență inversă proporțională, studiată în licee și colegii. Graficul ei reprezintă o hiperbolă. Remarcăm că funcția polinom este un caz particular al funcției raționale.

3. Funcția irațională. Funcția $y=f(x)$ se numește *irațională* atunci când $f(x)$ este rezultatul unui număr finit de operații ca compunerea funcțiilor, adunarea, scăderea, înmulțirea, împărțirea și ridicarea la o putere cu exponentul rațional, dar cel puțin unul din ei nu este număr întreg. Câteva exemple de funcții iraționale: $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt[5]{\frac{x-1}{x^2+\sqrt[3]{x}}}$ etc.

4. Orice funcție, care nu este funcție rațională sau irațională, se numește *funcție transcendentă.*

Observăm că toate funcțiile trigonometrice directe și inverse, funcția logaritmică, funcția exponențială etc. sunt exemple de funcții transcendente.

1.4. Șiruri numerice

1.4.1. Definiția șirului. Șiruri infinit mari și infinit mici

O funcție $f:N\to R$ se numește *șir* de numere reale. Se notează $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{a_n\}$ etc. Numerele a_1, a_2, ..., a_n, ... ale șirului $\{a_n\}$ se numesc *termenii* șirului, iar numărul a_n – *termenul general* al șirului. Pe axa numerică șirul $\{a_n\}$ reprezintă o mulțime infinită de puncte $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ Şirul $\{a_n\}$ se numeşte *mărginit*, dacă funcţia respectivă $a_n = f(n), n \in N$, este mărginită, adică

$$\exists M > 0, \forall n \in N: |a_n| \leq M.$$

Deci toţi termenii şirului mărginit aparţin segmentului $[-M, M]$. Şirurile care nu sunt mărginite se numesc *şiruri nemărginite*. Dacă şirul este nemărginit, atunci pentru orice $M>0$ există termeni ai şirului, care se află în exteriorul intervalului $]-M, M[$. Şirul $\{a_n\}$ se numeşte *mărginit superior (inferior)*, dacă

$$\exists M, \forall n \in N: x_n \leq M, \text{ respectiv } x_n \geq M.$$

Numărul M se numeşte *majorant*, respectiv *minorant*, al şirului $\{a_n\}$. Deci dacă şirul $\{x_n\}$ este mărginit superior (inferior), atunci toţi termenii lui aparţin intervalului $]-\infty, M]$, respectiv intervalului $[M, +\infty[$.

Din aceste definiţii rezultă direct următoarele: dacă şirul este mărginit, el este mărginit superior şi inferior; şirul nemărginit poate fi mărginit superior sau inferior. Constatăm că

1. şirul $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\} = 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ este mărginit, deoarece $|a_n| \leq 1$ pentru orice $n \in N$;
2. şirul $\{q^n\}$ $q > 1$, este nemărginit, deoarece, punând $q = 1+\alpha$, unde $\alpha>0$, obţinem $q^n = (1+\alpha)^n > 1+n\alpha$ (a se consulta ex. 2 de mai departe) şi deci pentru valori suficient de mari pentru n, termenii lui vor fi mai mari decât orice număr natural dinainte dat. Dar acest şir este mărginit inferior, deoarece inegalitatea $q^n > 1$ este justă pentru orice valoare a lui $n \in N$;
3. şirul de forma $a_1=c, a_2=c, \ldots, a_n=c, \ldots$, unde $c \in R$, se numeşte *şir constant*. Se notează $\{c\}$. Evident că orice şir constant este mărginit.

Fie $\{a_n\}$ şi $\{b_n\}$ două şiruri. Şirul $\{s_n\}$, unde $s_n = a_n \pm b_n$, se numeşte *suma algebrică* a acestor două şiruri şi se notează $\{a_n \pm b_n\}$. Similar, şirul $\{a_n \cdot b_n\}$ se numeşte *produsul* şirurilor $\{a_n\}$ şi $\{b_n\}$;

şirul $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$, unde $b_n \neq 0$ pentru orice $n \in N$, se numeşte *câtul* acestor două şiruri.

Definiţia 1. Şirul $\{a_n\}$ se numeşte *şir infinit mare*, dacă pentru orice număr real $A>0$, există un număr natural $N(A)$, care, în general, depinde de A astfel încât pentru orice număr natural $n>N(A)$ se verifică inegalitatea $|a_n| > A$, ceea ce în simbolica logicii matematice se scrie astfel:

$$\{a_n\} - \text{infinit mare} \Leftrightarrow$$
$$\forall A > 0, \exists N(A) \in N, \forall n > N(A): |a_n| > A.$$

Se notează $a_n \to \infty$ (se citeşte: a_n tinde către infinit). Din punct de vedere geometric, aceasta înseamnă că pentru orice $A>0$ toţi termenii şirului $\{a_n\}$, excepţie făcând doar un număr finit de termeni, se află în exteriorul segmentului $[-A, A]$. Din definiţie rezultă că dacă $\{a_n\}$ este un şir infinit mare, atunci el este nemărginit. Afirmaţia inversă nu are loc: şirul $1, 2, 1, 3, 1, 4, \ldots, 1, n, 1, n+1, \ldots$ este nemărginit, însă acest şir nu este şir infinit mare, deoarece pentru $A>1$ inegalitatea $|a_n| > A$ nu este verificată de toţi termenii acestui şir de rang impar: dacă $n=2k-1$, $k \in N$ avem $a_n = 1 < A$.

Uneori trebuie să scoatem în evidenţă cazuri particulare, când un şir infinit mare $\{a_n\}$ îşi păstrează semnul pentru toate valorile lui $n \in N$ sau pentru toate valorile lui n, excepţie făcând un număr finit de termeni. Dacă şirul $\{a_n\}$ este infinit mare şi termenii lui, excepţie făcând un număr finit de termeni, sunt pozitivi, se spune că $\{a_n\}$ tinde către $+\infty$ şi se scrie $a_n \to +\infty$. Dacă termenii unui şirul infinit mare $\{a_n\}$, excepţie făcând doar un număr finit de termeni, sunt negativi, se spune că şirul $\{a_n\}$ tinde către $(-\infty)$ şi se scrie $a_n \to -\infty$.

Menţionăm că notaţiile $a_n \to +\infty$ şi $a_n \to -\infty$, spre deosebire de notaţia $a_n \to \infty$, se introduc numai atunci când vrem să subliniem că termenii şirului infinit mare $\{a_n\}$, începând cu un anumit rang (număr natural), păstrează semnul plus (+) sau respectiv semnul (-).

Aşadar, conform definiţiei 1, notaţia $a_n \to +\infty$ înseamnă: pentru orice număr real $A>0$ există un număr natural $N(A)$, astfel încât $a_n>A$ pentru orice $n>N(A)$, iar notaţia $a_n \to -\infty$, înseamnă: pentru orice număr real $A>0$ există un număr natural $N(A)$ astfel încât $a_n<-A$ pentru orice $n>N(A)$.

Exemple de şiruri infinit mari pot servi şirurile:

a) $\{a_n\}=\{n\}=1,2,3,\ldots,n,\ldots$, unde $a_n \to +\infty$;

b) $\{a_n\}=\{-n\}=-1,-2,-3,\ldots,-n,\ldots$, unde $a_n \to -\infty$;

c) $\{a_n\}=\left\{(-1)^{n+1}\cdot n\right\}=1,-2,3,-4,\ldots$, unde $a_n \to \infty$.

Definiţia 2. Şirul $\{x_n\}$ se numeşte *şir infinit mic*, dacă pentru orice număr real $\varepsilon>0$ există un număr natural $N(\varepsilon)$, care, eventual, depinde de ε, astfel încât pentru $n>N(\varepsilon)$ se verifică inegalitatea $|x_n|<\varepsilon$, ceea ce în simbolica logicii matematice se scrie astfel:

$$\{x_n\} \text{ - infinit mic} \Leftrightarrow$$
$$\forall \varepsilon>0, \exists N(\varepsilon)\in N,\ \forall n>N(\varepsilon): |x_n|<\varepsilon.$$

Se notează $x_n \to 0$ (se citeşte x_n tinde către zero). Vom analiza următoarele exemple.

Exemplul 1. Să se demonstreze că şirul $\{x_n\}=\left\{\frac{1}{n}\right\}$ este un şir infinit mic. Fie $\varepsilon>0$ un număr real oarecare. Din inegalitatea $x_n=\frac{1}{n}<\varepsilon$ obţinem $n>\frac{1}{\varepsilon}$. Notăm $N(\varepsilon)=E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)+1$. Atunci $\forall n>N(\varepsilon)\Rightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}$, de unde $\frac{1}{n}=x_n<\varepsilon$.

Conform definiţiei 2, şirul $\{x_n\}=\left\{\frac{1}{n}\right\}$ este infinit mic.

Exemplul 2. Să se demonstreze că şirul $\{q^n\}$ este infinit mare, dacă $|q|>1$ şi infinit mic, dacă $|q|<1$.

Demonstrăm mai întâi următoarea inegalitate $(1+\alpha)^n \geq 1+n\alpha$ pentru orice $n\in N$ şi $\alpha>-1, \alpha\in R$, care se mai numeşte *inegalitatea lui Jacques Bernoulli* (1654 - 1705 – matematician elveţian).

Folosim principiul inducţiei matematice:

a) pentru $n=1$, avem $1+\alpha=1+\alpha$;

b) presupunem că $(1+\alpha)^n \geq 1+n\alpha, \alpha>-1$. Avem

$$(1+\alpha)^{n+1}=(1+\alpha)(1+\alpha)^n \geq (1+\alpha)(1+n\alpha)=$$
$$=1+(n+1)\alpha+n\alpha^2 \geq 1+(n+1)\alpha, \alpha\geq -1.$$

Prin urmare, inegalitatea $(1+\alpha)^n \geq 1+n\alpha, \alpha>-1, \alpha\in R$ are loc pentru orice număr $n\in N$.

Fie $|q|>1$, atunci $|q|=1+\alpha$ cu $\alpha>0$. Folosind inegalitatea Bernoulli, avem $|q|^n=(1+\alpha)^n \geq 1+n\alpha>n\alpha$. Considerăm un număr real $A>0$. Pentru numărul natural $N(A)=E\left(\frac{A}{\alpha}\right)+1$, avem

$$\forall n>N(A)\Rightarrow n>\frac{A}{\alpha}\Rightarrow \alpha n>A \Rightarrow |q|^n=(1+\alpha)^n>n\alpha>A\Rightarrow$$
$$\Rightarrow |q|^n>A,$$

ceea ce înseamnă, conform definiţiei 1, că şirul $\{q^n\}$ este infinit mare.

Fie $|q|<1$. Dacă $q=0$, şirul constant $\{q^n=0\}$ este un şir infinit mic (imediat reiese din definiţia şirului infinit mic). Dacă $q\neq 0$ şi $|q|<1$, atunci $\frac{1}{|q|}>1$ şi $\frac{1}{|q|}=1+\beta$, unde $\beta>0$. Avem

$$\frac{1}{|q|^n}=(1+\beta)^n \geq 1+n\beta>n\beta,$$

adică $|q|^n<\frac{1}{n\beta}$.

Fie $\varepsilon>0$. Pentru $N(\varepsilon)=E\left(\frac{1}{\varepsilon\beta}\right)+1$, obținem

$$\forall n>N(\varepsilon) \Rightarrow n>\frac{1}{\varepsilon\beta} \Rightarrow n\beta>\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n\beta}<\varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |q|^n<\frac{1}{n\beta}<\varepsilon \Rightarrow |q|^n<\varepsilon,$$

ceea ce înseamnă, conform definiției 2, că șirul $\{q^n\}$, cu $|q|<1$ este infinit mic.

Legătura dintre șirurile infinit mare și infinit mic este stabilită de următoarea teoremă.

Teorema 1. Pentru ca șirul $\{x_n\}$, unde $x_n \neq 0$ pentru orice $n\in N$, să fie infinit mic, este necesar și suficient ca șirul $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ să fie infinit mare.

Demonstrație. Condiția este necesară. Fie $\{x_n\}$ un șir infinit mic și $x_n \neq 0$ pentru orice $n\in N$. Demonstrăm că șirul $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ este infinit mare. Considerăm un număr real $A>0$ și fie $\varepsilon=\frac{1}{A}>0$. Conform definiției 2, pentru acest $\varepsilon>0$ există un număr natural $N(\varepsilon)$, încât pentru orice $n>N(\varepsilon)$ avem $|x_n|<\varepsilon$, adică $|x_n|<\frac{1}{A}$, de unde $\left|\frac{1}{x_n}\right|>A$. Aceasta înseamnă, după definiția 1, că șirul $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ este infinit mare.

În mod similar se demonstrează că condiția este suficientă.

Teorema 2. Suma algebrică a două șiruri infinit mici este un șir infinit mic.

Demonstrație. Fie $\{x_n\}$ și $\{y_n\}$ două șiruri infinit mici. Să demonstrăm că șirul $\{x_n \pm y_n\}$ este un șir infinit mic. Șirul $\{x_n\}$ este infinit mic deci

$$\forall\varepsilon>0, \exists N_1(\varepsilon)\in N, \forall n>N_1(\varepsilon): |x_n|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Șirul $\{y_n\}$ este infinit mic deci

$$\forall\varepsilon>0, \exists N_2(\varepsilon)\in N, \forall n>N_1(\varepsilon): |y_n|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Fie $N(\varepsilon) = \max(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon))$, atunci

$$\forall\varepsilon>0, \forall n>N(\varepsilon): |x_n|<\frac{\varepsilon}{2} \text{ și } |y_n|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Folosind proprietatea 7 a valorilor absolute din 1.2, avem

$$|x_n \pm y_n| \leq |x_n|+|\pm y_n|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Prin urmare,

$$\forall\varepsilon>0, \exists N(\varepsilon)=\max(N_1(\varepsilon),N_2(\varepsilon)), \forall n>N(\varepsilon): |x_n \pm y_n|<\varepsilon.$$

Conform definiției 2, șirul $\{x_n \pm y_n\}$ este infinit mic.

Consecință. Suma algebrică a unui număr finit de șiruri infinit mici este un șir infinit mic.

Se aplică această teoremă consecutiv de mai multe ori.

Teorema 3. Produsul a două șiruri infinit mici este un șir infinit mic.

Demonstrație. Fie $\{x_n\}$ și $\{y_n\}$ două șiruri infinit mici. Să demonstrăm că șirul $\{x_n y_n\}$ este infinit mic. Șirul $\{x_n\}$ este infinit mic deci $\forall\varepsilon>0, \exists N_1(\varepsilon)\in N, \forall n>N_1(\varepsilon): |x_n|<\varepsilon$. Șirul $\{y_n\}$ este infinit mic deci

$$\varepsilon=1, \exists N_2(\varepsilon)\in N, \forall n>N_2(\varepsilon): |y_n|<1.$$

Să definim $N(\varepsilon)=\max(N_1(\varepsilon),N_2(\varepsilon))$. Atunci pentru $n>N(\varepsilon)$ au loc concomitent ambele inegalități: $|x_n|<\varepsilon$ și $|y_n|<1$.

Prin urmare, $\forall n > N(\varepsilon)$: $|x_n y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon$, ceea ce înseamnă, conform definiției 2, că șirul $\{x_n y_n\}$ este infinit mic.

Consecință. Produsul unui număr finit de șiruri infinit mici este un șir infinit mic.

Se aplică teorema 3 consecutiv de mai multe ori.

Teorema 4. Produsul dintre un șir mărginit și un șir infinit mic este un șir infinit mic.

Demonstrație. Fie $\{x_n\}$ un șir mărginit, iar șirul $\{y_n\}$ un șir infinit mic. Să demonstrăm că șirul $\{x_n y_n\}$ este infinit mic. Șirul $\{x_n\}$ este mărginit deci

$$\exists M > 0, \forall n \in N: |x_n| \le M.$$

Șirul $\{y_n\}$ este infinit mic deci

$$\forall \frac{\varepsilon}{M} > 0, \exists N(\varepsilon) \in N, \forall n > N(\varepsilon): |y_n| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Prin urmare, pentru orice $n > N(\varepsilon)$ avem $|x_n y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$, ceea ce înseamnă, conform definiției 2, că șirul $\{x_n y_n\}$ este infinit mic.

Consecință. Produsul dintre un șir infinit mic și un număr este un șir infinit mic, deoarece numărul poate fi considerat ca un șir constant și deci mărginit.

Teorema 5. Șirul constant $\{c\}$ este un șir infinit mic atunci și numai atunci când $c=0$.

Vom demonstra această teoremă prin metoda reducerii la absurd. Fie $\{c\}$ un șir infinit mic și presupunem că $c \neq 0$. Conform definiției 2, pentru $\varepsilon = \frac{|c|}{2} > 0$ există un număr natural $N(\varepsilon)$ astfel încât pentru orice $n > N(\varepsilon)$ se verifică inegalitatea $|c| < \varepsilon$, adică $|c| < \frac{|c|}{2}$, de unde $1 < \frac{1}{2}$. Din contrazicerea obținută

rezultă că $c=0$. Dacă însă $c=0$, atunci evident că șirul constant $\{0\} = 0, 0, \ldots, 0, \ldots$ este un șir infinit mic.

Notă. Despre comportarea raportului a două șiruri infinit mici și despre comportarea produsului unui șir infinit mic la un șir infinit mare nu se poate spune nimic precis. Dăm câteva exemple de acest fel.

1. a) Fie $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\} \to 0$ și $\{y_n\} = \left\{\frac{1}{n^2}\right\} \to 0$. Avem $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} = \left\{\frac{1}{n}\right\} \to 0$, adică acest șir este infinit mic, iar șirul $\left\{\frac{y_n}{x_n}\right\} = \{n\} \to +\infty$, adică el este infinit mare.

b) Fie $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\} \to 0$ și $\{y_n\} = \left\{\frac{2}{n}\right\} \to 0$. Obținem că șirul $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ nu este infinit mic.

2. a) Fie $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\} \to 0$ și $\{y_n\} = \{n\} \to +\infty$. Atunci șirul $\{x_n y_n\} = \{1\}$ nu este nici infinit mic nici infinit mare.

b) Fie $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\} \to 0$ și $\{y_n\} = \{n^2\} \to +\infty$. Atunci șirul $\{x_n y_n\} = \{n\} \to +\infty$, adică el este infinit mare.

c) Fie $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n^2}\right\} \to 0$ și $\{y_n\} = n \to +\infty$, atunci șirul $\{x_n y_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\} \to 0$ este infinit mic.

1.4.2. Șiruri convergente

Definiția 1. Șirul $\{a_n\}$ se numește *convergent*, dacă există un număr real a astfel încât șirul $\{a_n - a\}$ este infinit mic.

În cazul acesta numărul a se numeşte *limita şirului convergent* $\{a_n\}$ şi se notează $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (de la cuvântul latin "limes" - limită) sau $a_n \to a$, când $n \to \infty$ (se citeşte a_n tinde la a, când n tinde la infinit). Folosind definiţia 2 a şirului infinit mic din 1.4.1, obţinem definiţia ce urmează.

Definiţia 2. Şirul $\{a_n\}$ se numeşte *convergent*, dacă există un număr real a astfel încât pentru orice număr real $\varepsilon > 0$ există un număr natural $N(\varepsilon)$, care, în general, depinde de ε, astfel că pentru orice $n > N(\varepsilon)$ se verifică inegalitatea $|a_n - a| < \varepsilon$.

În acest caz numărul a se numeşte *limita şirului convergent* $\{a_n\}$. Se mai spune că *şirul convergent* $\{a_n\}$ *tinde către a.*

În simbolica logicii matematice $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ se scrie astfel:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in N, \forall n > N(\varepsilon): |a_n - a| < \varepsilon.$$

Având în vedere că

$$|a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow a_n \in v(a,\varepsilon),$$

obţinem

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in N, \forall n > N(\varepsilon): a_n \in v(a,\varepsilon).$$

Avem următoarea definiţie.

Definiţia 3. Şirul $\{a_n\}$ se numeşte *convergent*, dacă există un număr real a, astfel încât pentru orice număr real $\varepsilon > 0$ există un număr natural $N(\varepsilon)$, care, în general, depinde de ε, astfel încât în orice ε – vecinătate $v(a,\varepsilon)$ a punctului a se află toţi termenii şirului, excepţie făcând doar un număr finit de termeni. Numărul a se numeşte *limita* şirului $\{a_n\}$.

Definiţia 4. Şirul $\{a_n\}$ se numeşte *convergent*, dacă există un număr real a şi un şir infinit mic $\{x_n\}$ astfel încât $a_n = a + x_n$. Numărul a se numeşte *limita* şirului $\{a_n\}$.

Uşor se verifică că aceste definiţii sunt echivalente.

Un şir care nu este convergent se numeşte *divergent*.

Notă. 1. Din definiţia 3 a şirului convergent reiese că un număr finit de termeni ai şirului nu influenţează nici la convergenţa, nici la limita lui, adică convergenţa şi limita şirului nu se schimbă dacă adăugăm sau dacă omitem la şirul convergent un număr finit de termeni.

2. Din definiţia 4 reiese că orice şir infinit mic este convergent şi limita lui este egală cu zero.

3. Din definiţia 2 reiese că orice şir infinit mare $\{y_n\}$ nu este convergent, adică este divergent. Uneori se mai spune că acest şir are limită infinită şi se scrie $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$.

4. Din definiţia 1 reiese că orice şir constant $\{r\}, r \in R$ este convergent şi limita lui este egală cu r.

Exemple. 1. Şirul $\left\{a_n = \frac{n+1}{n}\right\}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, deoarece $a_n - a = \frac{n+1}{n} - 1 = \frac{1}{n}$ şi şirul $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ este infinit mic (vezi ex. 1 din 1.4.1).

2. Şirul $\left\{a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}\right\}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, deoarece $a_n - a = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ şi şirul $\left\{(-1)^n \cdot \frac{1}{n}\right\}$ este infinit mic ca produsul dintre un şir mărginit şi un şir infinit mic (teorema 4 din 1.4.1).

3. Similar exemplului precedent ne convingem că şirul $\left\{a_n = \frac{\sin n}{n}\right\}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

4. Şirul $\left\{a_n = (-1)^n\right\}$ este divergent. Într-adevăr, presupunem că acest şir este convergent. Atunci pentru $\varepsilon = \frac{1}{2}$ există un număr natural $N(\varepsilon)$ astfel încât pentru orice $n > N(\varepsilon)$ să

avem $|a_n - a| < \frac{1}{2}$. Termenii şirului $\{a_n = (-1)^n\}$ iau valorile 1 sau -1, deci $|1 - a| < \frac{1}{2}$ şi $|(-1) - a| < \frac{1}{2}$. De aici

$$2 = |1 - a + a + 1| = |(1 - a) + (a - (-1))| \le |1 - a| + |a - (-1)| =$$

$$= |1 - a| + |(-1) - a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

adică $2<1$. Contrazicerea obţinută demonstrează că şirul $\{a_n = (-1)^n\}$ este divergent.

Şirurile convergente au următoarele proprietăţi.

Teorema 1. Orice şir convergent posedă o singură limită.

Demonstraţie. Fie şirul $\{a_n\}$ convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$. Prin urmare, conform definiţiei 4, $a_n = a + x_n$ şi $a_n = b + y_n$, unde $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ sunt şiruri infinit mici. Deci $a + x_n = b + y_n$, de unde $x_n - y_n = b - a$. Conform teoremei 2 din 1.4.1, şirul $\{x_n - y_n\}$ este infinit mic ca diferenţa a două şiruri infinit mici şi, după teorema 5 din 1.4.1, avem $b-a=0$, adică $a=b$.

Teorema 2. Dacă şirul $\{a_n\}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, atunci şi şirul $\{|a_n|\}$ este convergent cu $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

Într-adevăr,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in N, \forall n > N(\varepsilon): |a_n - a| < \varepsilon.$$

Folosind proprietatea 9 a valorilor absolute din 1.2, avem $||a_n| - |a|| \le |a_n - a| < \varepsilon$. Prin urmare, şirul $\{|a_n|\}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

Teorema 3. Orice şir convergent este mărginit.

Demonstraţie. Fie $\{a_n\}$ convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Avem

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in N, \forall n > N(\varepsilon): |a_n - a| < \varepsilon.$$

Prin urmare,

$$|a_n| = |a - a + a_n| = |a + (a_n - a)| \le |a| + |a_n - a| < |a| + \varepsilon,$$

de unde $|a_n| < |a| + \varepsilon$ pentru orice $n > N(\varepsilon)$. Notând prin M cel mai mare dintre numerele $|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N(\varepsilon)}|, |a| + \varepsilon$, obţinem

$$\forall n \in N: |a_n| \le M,$$

ceea ce înseamnă că şirul $\{a_n\}$ este mărginit.

Teorema 4. Dacă şirul $\{a_n\}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \ne 0$, atunci începând cu un număr natural (rang) este definit şirul $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$, care este mărginit.

Demonstraţie. Fie $\varepsilon = \frac{|a|}{2} > 0$. Atunci există un număr natural $N(\varepsilon)$ astfel încât se verifică inegalitatea $|a_n - a| < \frac{|a|}{2}$, pentru orice $n > N(\varepsilon)$. Prin urmare,

$$|a| = |a - a_n + a_n| = |(a - a_n) + a_n| \le |a - a_n| + |a_n| =$$

$$= |a_n - a| + |a_n| < \frac{|a|}{2} + |a_n|,$$

de unde $|a_n| > |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2} > 0$ pentru orice $n > N(\varepsilon)$. Deci şirul $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ este definit începând cu numărul $N(\varepsilon) + 1$ şi $\left|\frac{1}{a_n}\right| < \frac{2}{|a|}$ pentru orice $n > N(\varepsilon)$. Aceasta înseamnă că şirul $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ în întregime este mărginit.

Teorema 5. Produsul dintre un şir $\{a_n\}$ mărginit inferior şi un şir $\{b_n\}$ infinit mare este un şir infinit mare.

Demonstraţie. Fie $\{a_n\}$ un şir mărginit inferior, adică $\exists$ K, $\forall$ n$\in$N: $a_n \geq K$.

Întrucât $|a_n| \geq a_n$, n $\in$N avem $\exists$ K, $\forall$ n$\in$N: $|a_n| \geq K$.

Şirul $\{b_n\}$ este infinit mare, ceea ce înseamnă că

$$\forall \frac{A}{|K|}, \exists N\left(\frac{A}{|K|}\right) \in N, \forall n > N\left(\frac{A}{|K|}\right): |b_n| > \frac{A}{K}.$$

Deci $\forall n \in N\left(\frac{A}{K}\right): |a_n| \cdot |b_n| = |a_n \cdot b_n| > A.$

Prin urmare,

$$\forall A > 0, \exists N(A), \forall n > N(A): |a_n b_n| > A,$$

ceea ce înseamnă că şirul $\{a_n b_n\}$ este un şir infinit mare. Teorema e demonstrată.

Din teoremele 3 şi 5 reiese următoarea *consecinţă:* produsul dintre un şir convergent $\{a_n\}$ cu $\lim a_n \neq 0$ şi un şir infinit mare este un şir infinit mare.

Un şir de numere $\{a_n\}$ este *crescător,* dacă

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \ldots$$

şi este *strict crescător,* dacă

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots.$$

Evident că şirul numerelor naturale *1, 2, 3, ..., n, ...*este strict crescător, iar şirul *1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, ...* este crescător.

Se spune că un şir de numere $\{a_n\}$ este *descrescător,* dacă

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \ldots$$

şi este *strict descrescător,* dacă

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > a_{n+1} > \ldots.$$

Şirul *-1, -3, -5, -7, ...* este strict descrescător.

Un şir crescător sau descrescător se numeşte *şir monoton.* Un şir strict crescător sau strict descrescător se numeşte *şir strict monoton.*

Fie $\{a_n\}$ un şir şi $k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$ un şir strict crescător de numere naturale. Şirul $a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_n}, \ldots$ se numeşte *subşir* al şirului iniţial. Se notează $\{a_{k_n}\}$, n$\in$N. Observăm că $k_n \geq n$, n $\in$N.

Teorema 6. Orice subşir al unui şir convergent este convergent şi are aceeaşi limită cu şirul iniţial.

Demonstraţie. Într-adevăr, dacă şirul $\{a_n\}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, atunci $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ N (ε)$\in$N, $\forall$n >N(ε): $|a_n - a| < \varepsilon$.

Fie $\{a_{k_n}\}$, n $\in$N un subşir al şirului $\{a_n\}$.

Avem $k_{N(\varepsilon)} \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |a_{k_n} - a| < \varepsilon$.

Prin urmare şirul $\{a_{k_n}\}$, n$\in$N este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$. Teorema este demonstrată.

Conform teoremei 3, orice şir convergent este mărginit. Afirmaţia inversă nu este justă: şirul $\{(-1)^n\}$ este mărginit, deşi el este divergent (ex. 4 de mai sus).

Un număr real *r* se numeşte *punct limită* al şirului $\{a_n\}$, dacă orice ε – vecinătate a lui conţine cel puţin un termen al şirului, diferit de *r*. Punctul limită poate să aparţină sau să nu aparţină şirului. Deci orice ε – vecinătate a punctului limită *r* conţine o infinitate de termeni ai şirului.

Exemplul 5. Şirul $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ are un singur punct limită, şi anume *r=0*, care nu aparţine şirului. Într-adevăr, în orice ε – vecinătate a lui *r=0*, adică în intervalul deschis $]-\varepsilon, \varepsilon[$ cu $\varepsilon > 0$ ce află toţi termenii şirului $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ cu $n > N(\varepsilon) = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$.

Exemplul 6. Şirul $\left\{(-1)^n\right\}$ are două puncte limită $r_1=1$ şi $r_2=-1$ şi ambele aparţin şirului. Într-adevăr, în orice ε – vecinătate a punctului $r_1=1$ se află toţi termenii şirului de rang par, iar în orice ε – vecinătate a punctului $r_2=-1$ se află toţi termenii şirului de rang impar.

Notă. 1.Orice şir mărginit are cel puţin un singur punct limită, care coincide cu limita acestui şir ([14], v. 1, p. 79);

2. Dacă şirul $\{a_n\}$ este divergent, atunci sau $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, sau acest şir are mai multe puncte limită ([3], p. 62).

Şirurile care au mai multe puncte limită se mai numesc *şiruri oscilante* ([3], p. 62).

Şirul $\left\{(-1)^n\right\}$ este un şir oscilant, deci el este divergent.

Teorema 7. Orice şir monoton şi mărginit este convergent.

Demonstraţie. În virtutea notei 1 de mai sus rămâne să arătăm că acest şir nu are decât un singur punct limită. Să presupunem că şirul este, de exemplu, crescător şi are două puncte limită r_1 şi r_2 cu $r_1<r_2$. Împărţim intervalul $]r_1,r_2[$ în intervalele $]r_1-\varepsilon,r_1+\varepsilon[$ şi $]r_2-\varepsilon,r_2+\varepsilon[$, care sunt disjuncte, considerând $\varepsilon=\dfrac{r_2-r_1}{3}>0$. Observăm că orice număr real, ce aparţine primului interval, este mai mic decât orice număr real, ce aparţine intervalului al doilea ($r_1<r_2$). Punctul r_1 este punct de limită, deci $\exists n_1\in N : a_{n_1}\in\,]r_1-\varepsilon,r_1+\varepsilon[$. Există un indice $n_2\in N$ pentru care $a_{n_2}\in\,]r_2-\varepsilon,r_2+\varepsilon[$, deoarece, în caz contrar, punctul r_2 nu ar fi punct limită şi $a_{n_1}<a_{n_2}$. În consecinţă, şirul, fiind crescător, avem $a_{n_2}>a_{n_1}\Rightarrow n_2>n_1$. Pentru $n>n_2$ intervalul $]r_2-\varepsilon,r_2+\varepsilon[$ nu poate conţine toţi termenii şirului, deoarece, în acest caz, în intervalul $]r_1-\varepsilon,r_1+\varepsilon[$ am avea un număr finit de termeni şi r_1 nu ar fi punct limită. Deci există $n_3>n_2$ şi $a_{n_3}\in\,]r_1-\varepsilon,r_1+\varepsilon[$. Întrucât $a_{n_2}\in\,]r_2-\varepsilon,r_2+\varepsilon[$, avem $a_{n_3}<a_{n_2}$. Am ajuns la o contrazicere cu faptul că şirul $\{a_n\}$ este crescător: $n_3>n_2\Rightarrow a_{n_3}>a_{n_2}$. Prin urmare, $r_1=r_2$ şi şirul este convergent.

Notă. Conform teoremelor 3 şi 7, obţinem următorul criteriu: *pentru ca şirul monoton să fie convergent este necesar şi suficient ca acest şir să fie mărginit.*

Vom considera două exemple de şiruri la cercetarea convergenţei cărora se foloseşte acest criteriu.

Exemplul 7. Fie şirul $\{x_n\}$, unde $x_n=\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}}$, $a>0$. Evident că acest şir este definit cu ajutorul formulei recurente: $x_1=\sqrt{a}$, $x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}$, $n\in N$. Pentru a stabili convergenţa acestui şir, conform criteriului, trebuie să demonstrăm că şirul este monoton (crescător) şi mărginit. Că şirul este monoton crescător, rezultă imediat: toţi termenii acestui şir sunt numere pozitive şi $a>0$, adică $x_n<x_{n+1}$ pentru orice $n\in N$. În continuare arătăm că şirul este mărginit superior de numărul $A=\max(a,2)$. Dacă $x_n\le a$, atunci şirul este mărginit de a. Dacă $x_n>a$, $n=2, 3, \ldots$, atunci

$$x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}\Rightarrow x_{n+1}^2=a+x_n<a+x_{n+1}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_{n+1}^2<x_{n+1}+x_{n+1}=2x_{n+1},$$

de unde $x_{n+1}<2$, pentru orice $n\in N$. Prin urmare, pentru orice $n\in N$ avem $x_{n+1}\le A$, unde $A=\max(a,2)$. Întrucât şirul este monoton crescător şi mărginit superior de A, acest şir este mărginit şi inferior, de exemplu, de numărul $x_1=\sqrt{a}$, adică şirul $\{x_n\}$ este mărginit. Conform criteriului, şirul $\{x_n\}$ este convergent. Notăm limita lui prin c. Evident că $\forall n\in N, x_n>0\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}x_n=c\ge 0$. Din relaţia $x_{n+1}^2=a+x_n$, avem că şirurile $\{x_{n+1}^2\}$ şi $\{a+x_n\}$ sunt identice şi au aceeaşi limită, adică $c^2 = a + c$ sau $c^2 - c - a = 0$, de unde $c_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$. Numărul $c_1 = \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2} < 0$ nu satisface condiţiei $c>0$. Deci $c = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

Exemplul 8. Fie şirul $\{x_n\}$ definit cu ajutorul formulei recurente $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, $n \in N$, unde x_1 şi a sunt orice numere reale pozitive.

Demonstrăm că acest şir este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$. Conform criteriului vom arăta că şirul este monoton (descrescător) şi mărginit. Observăm că din definiţia acestui şir reiese că toţi termenii lui sunt numere reale pozitive. Arătăm, mai întâi, că şirul $\{x_n\}$ este mărginit inferior de $\sqrt{a}$ pentru orice număr natural $n \geq 2$. Într-adevăr, din inegalitatea evidentă

$$\forall t > 0, \frac{(t-1)^2}{t} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{t^2 - 2t + 1}{t} \geq 0 \Leftrightarrow t - 2 + \frac{1}{t} \geq 0 \Leftrightarrow t + \frac{1}{t} \geq 2$$

şi formula recurentă $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{\sqrt{a}}{2}\left(\frac{x_n}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{x_n}\right)$ cu $t = \frac{x_n}{\sqrt{a}} > 0$, obţinem

$$x_{n+1} = \frac{\sqrt{a}}{2}\left(\frac{x_n}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{x_n}\right) = \frac{\sqrt{a}}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) \geq \frac{\sqrt{a}}{2} \cdot 2 = \sqrt{a}$$

pentru orice $n \in N$, adică $x_n \geq \sqrt{a}$ pentru orice număr natural $n \geq 2$.

Demonstrăm că şirul $\{x_n\}$ este monoton descrescător. Într-adevăr, $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{x_n^2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{(\sqrt{a})^2}\right) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$, adică $x_{n+1} \leq x_n$, $n=2, 3, \ldots$ şi deci

$$x_2 \geq x_3 \geq \ldots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \ldots$$

Observăm că şirul $x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ este mărginit superior, de exemplu, de numărul $x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{a}{x_1}\right)$. Prin urmare, acest şir este convergent şi $\left(x_n \geq \sqrt{a}\right) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n \geq \sqrt{a}$.

După cum se ştie, la convergenţa şirului şi la limita lui nu influenţează dacă adăugăm sau omitem un număr finit de termeni (a se consulta nota 1 după definiţia 2 de la începutul acestui paragraf).

Aşadar, am demonstrat că şirul iniţial $\{x_n\}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geq \sqrt{a}$.

Calculăm limita acestui şir. Notăm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$. Din formula recurentă $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ obţinem ecuaţia $c = \frac{1}{2}\left(c + \frac{a}{c}\right)$ sau $c^2 = a$, adică $c_{1,2} = \pm\sqrt{a}$. Numărul $c_1 = \sqrt{a}$ satisface condiţiilor problemei $\left(c \geq \sqrt{a}\right)$. Prin urmare, şirul $\{x_n\}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$.

Notă. 1. În ambele exemple am folosit următorul algoritm pentru calcularea limitei unui şir. Mai întâi cu ajutorul criteriului se demonstrează existenţa limitei unui şir, adică se stabileşte convergenţa lui. Apoi se calculează valoarea limitei, trecând în formula recurentă a şirului la limită, când $n\to\infty$ (evident că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = c$).

2. Formulele recurente se utilizează foarte des în matematica modernă de calcul, deoarece aplicarea lor se reduce la repetarea unora şi aceloraşi operaţii de calcul, mai ales când este vorba de aplicarea maşinilor de calcul.

Formula recurentă din exemplul 2 serveşte ca algoritm la calcularea rădăcinii pătrate din orice număr real pozitiv.

Dacă luăm $a=2$ şi $x_1=1$, atunci formula $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{2}{x_n}\right)$ ne dă următoarele rezultate pentru numărul iraţional $\sqrt{2}$ cu $x_1=1$:

$$x_2=\frac{1}{2}\left(x_1+\frac{2}{x_1}\right)=\frac{1}{2}(1+2)=\frac{3}{2}=1{,}5000...$$

$$x_3=\frac{1}{2}\left(x_2+\frac{2}{x_2}\right)=1{,}4166...$$

$$x_4=\frac{1}{2}\left(x_3+\frac{2}{x_3}\right)=1{,}41421568...$$

$$x_5=\frac{1}{2}\left(x_4+\frac{2}{x_4}\right)=1{,}414213562374...$$

$$x_6=\frac{1}{2}\left(x_5+\frac{2}{x_5}\right)=1{,}41421356237309504880168 96...$$

Observăm că prima aproximare x_2 conţine o cifră exactă a $\sqrt{2}$, x_3 conţine 3 cifre exacte, x_4 conţine 6, x_5 conţine 12, x_6 conţine 24, iar dacă trecem la aproximările x_7 şi x_8 obţinem deja 48 şi respectiv 60 cifre exacte pentru numărul $\sqrt{2}$.

1.4.3. Operaţii aritmetice cu şiruri convergente. Nedeterminări. Trecerea la limită în inegalităţi

Teorema 1. Fie $\{a_n\}$ şi $\{b_n\}$ două şiruri convergente şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=B$. Atunci

a) şirul $\{a_n\pm b_n\}$ este convergent şi

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\pm\lim_{n\to\infty}b_n=A\pm B;$$

b) şirul $\{a_n\cdot b_n\}$ este convergent şi

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right)\cdot\left(\lim_{n\to\infty}b_n\right)=A\cdot B;$$

c) şirul $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\frac{A}{B}$ cu condiţia că $B\neq 0$, $b_n\neq 0$ pentru orice $n\in N$.

Demonstraţie. Aplicând definiţia 4 din 1.4.1 pentru şirurile convergente $\{a_n\}$ şi $\{b_n\}$ cu $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$, avem $a_n=A+\alpha_n$, $b_n=B+\beta_n$, unde şirurile $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ sunt infinit mici.

a) Avem $a_n\pm b_n=(A\pm B)+(\alpha_n\pm\beta_n)$. Conform teoremei 2 din 1.4.1 şirul $\{\alpha_n\pm\beta_n\}$ este un şir infinit mic şi, prin urmare, după definiţia 4, obţinem că şirul $\{a_n\pm b_n\}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=A\pm B$.

b) Avem

$$a_n\cdot b_n=(A+\alpha_n)+(B+\beta_n)=AB+(A\beta_n+B\alpha_n+\alpha_n\beta_n).$$

După teorema 4 şi consecinţa din teorema 2 din 1.4.1 avem că şirul $(A\beta_n+B\alpha_n+\alpha_n\beta_n)$ este infinit mic. Prin urmare, şirul $\{a_n\cdot b_n\}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=A\cdot B$.

c) Avem

$$\frac{x_n}{y_n}-\frac{A}{B}=\frac{x_nB-Ay_n}{By_n}=\frac{(A+\alpha_n)B-A(B+\beta_n)}{By_n}=$$

$$=\frac{B\alpha_n-A\beta_n}{By_n}=\left(\alpha_n-\frac{A}{B}\cdot\beta_n\right)\cdot\frac{1}{y_n}.$$

Deoarece şirul $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ este mărginit (teorema 4 din 1.4.2), iar şirul $\left(\alpha_n - \frac{A}{B}\beta_n\right)$ este infinit mic (teoremele 2 şi 4 din 1.4.1), avem că şirul $\left\{\left(\alpha_n - \frac{A}{B}\beta_n\right)\cdot\frac{1}{y_n}\right\}$ este infinit mic (teorema 4 din 1.4.1). Prin urmare, şirul $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{A}{B}$.

Teorema este demonstrată.

Consecinţa 1. Dacă şirurile $\{a_n\}$ şi $\{b_n\}$ sunt convergente şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, atunci şirul $\{a_n - b_n\}$ este un şir infinit mic. Aplicăm punctul a) al teoremei.

Consecinţa 2. Dacă şirul $\{a_n\}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, atunci şirul $\{ra_n\}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty}(ra_n) = rA$ pentru orice număr real r. Aplicăm punctul b) al teoremei pentru şirurile convergente $\{a_n\}$ şi $\{r\}$.

Consecinţa 3. Suma algebrică şi produsul unui număr finit de şiruri convergente sunt şiruri convergente. Limitele lor sunt egale cu suma algebrică (respectiv produsul) limitelor şirurilor respective. Se aplică punctele a) şi b) ale teoremei de câteva ori.

Notă. Teorema reciprocă teoremei 1 nu este adevărată. Fie şirurile $\{(-1)^n\}$ şi $\{(-1)^{n+1}\}$ punctele limită ale cărora coincid: $r_1 = 1$ şi $r_2 = -1$. Deci aceste şiruri sunt divergente. Însă şirul-sumă $\{[(-1)^n + (-1)^{n+1}]\} = \{0\}$, ca un şir constant, este convergent cu limita egală cu zero, iar şirul-produs (sau şirul-cât) este $\{(-1)\}$ care, ca un şir constant, este de asemenea convergent şi limita lui este egală cu (-1).

Exemple.

1. Să se calculeze limita şirului $\{x_n\} = \left\{\frac{n^2+5n+4}{n(n+2)}\right\}$.

Avem

$$x_n = \frac{n^2+5n+4}{n(n+2)} = \frac{(n+2)^2+n}{n(n+2)} = \frac{n+2}{n} + \frac{1}{n+2} = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n+2}.$$

Prin urmare, şirul $\{x_n\}$ este reprezentat ca suma algebrică a trei şiruri: şirul constant $\{1\}$ este convergent şi limita lui este egală cu 1, iar şirurile $\left\{\frac{2}{n}\right\}$, $\left\{\frac{1}{n+2}\right\}$ sunt şiruri infinit mici. Conform teoremei 1, şirul-sumă $\{x_n\}$ este convergent şi limita lui este

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+5n+4}{n(n+2)} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n-2}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 1 + 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-2} = 1 + 0 + 0 = 1$$

2. Să se calculeze limita şirului $\{x_n\} = \left\{\frac{n+3}{3^n(n+2)}\right\}$.

Avem

$$x_n = \frac{n+3}{3^n(n+2)} = \frac{n+2+1}{3^n(n+2)} = \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^n\cdot(n+2)} = \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^n}\cdot\frac{1}{n+2}.$$

Deci şirul $\{x_n\}$ este reprezentat ca suma şi produsul şirurilor $\left\{\frac{1}{3^n}\right\}$, $\left\{\frac{1}{n+2}\right\}$. Uşor se constată că aceste şiruri sunt infinit mici (aplicăm, de exemplu, teorema 1 din 1.4.1 sau vezi ex. 1, 2 din 1.4.1). Prin urmare, conform teoremei 1 de mai sus, şirul $\{x_n\}$ este convergent şi limita lui

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{3^n(n+2)} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^n}\cdot\frac{1}{n+2}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n} + \left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}\right)\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}\right) = 0 + 0\cdot 0 = 0$$

3. Să se calculeze limita şirului $\{x_n\}$, dacă $x_n = \dfrac{a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \ldots + a_m n^m}{b_0 + b_1 n + b_2 n^2 + \ldots + b_k n^k}$, unde m, n, k sunt numere naturale, iar $a_m \in R - \{0\}$, $b_k \in R - \{0\}$.

Avem

$$x_n = \frac{n^m\left(\frac{a_0}{n^m} + \frac{a_1}{n^{m-1}} + \ldots + a_m\right)}{n^k\left(\frac{b_0}{n^k} + \frac{b_1}{n^{k-1}} + \ldots + b_k\right)} = \frac{1}{n^{k-m}} \cdot \frac{\frac{a_0}{n^m} + \frac{a_1}{n^{m-1}} + \ldots + a_m}{\frac{b_0}{n^k} + \frac{b_1}{n^{k-1}} + \ldots + b_k}.$$

Observăm că şirul $\left\{\dfrac{1}{n^s}\right\}$, unde s, un număr natural fixat, este infinit mic, conform teoremei 1 din 1.4.1, şi deci limita lui este egală cu 0. Prin urmare, aplicând teorema 1 de mai sus, obţinem că

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k-m}} \cdot \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_0}{n^m} + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1}{n^{m-1}} + \ldots + \lim\limits_{n\to\infty} a_m}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_0}{n^k} + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_1}{n^{k-1}} + \ldots + \lim\limits_{n\to\infty} a_k},$$

dacă $k - m \geq 0$.

Cazul 1: $m=k$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1 \cdot \frac{0+0+\ldots+a_k}{0+0+\ldots+b_k} = \frac{a_k}{b_k};$$

Cazul 2: $m<k$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \cdot \frac{0+0+\ldots+a_m}{0+0+\ldots+b_k} = 0 \cdot \frac{a_m}{b_k} = 0.$$

Dacă însă $k - m < 0$, adică $m > k$, atunci aplicând cazul precedent la şirul $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$, obţinem $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n} = 0$, adică şirul $\{x_n\}$ este un şir infinit mare (teorema 1 din 1.4.1).

Demonstrând teorema de mai sus asupra operaţiilor aritmetice cu şiruri convergente nu am considerat cazul când avem

numai şiruri infinit mari sau numai şiruri infinit mici, sau şiruri infinit mici şi şiruri infinit mari.

Să studiem mai detaliat aceste cazuri.

a) Nedeterminarea de forma $(\infty - \infty)$. Dacă ambele şiruri $\{a_n\}$ şi $\{b_n\}$ sunt şiruri infinit mari de acelaşi semn sau unul din ele este un şir infinit mare, iar celălalt este convergent, atunci suma lor $\{a_n + b_n\}$ este un şir infinit mare. Acest rezultat reiese direct din definiţia şirului infinit mare. Dacă şirurile $\{a_n\}$ şi $\{b_n\}$ sunt şiruri infinit mari de semne diferite, atunci şirul $\{a_n + b_n\}$ poate fi de orice natură, deci apriori avem o situaţie nedeterminată. Aceasta rezultă din exemplele de mai jos.

Exemple.

1) $\left.\begin{array}{l}\{a_n\} = \{n^3 + n^2\} \to +\infty \\ \{b_n\} = \{-n^3\} \to -\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \{a_n + b_n\} = \{n^2\} \to +\infty;$

2) $\left.\begin{array}{l}\{a_n\} = \{n^3 + 5\} \to +\infty \\ \{b_n\} = \{-n^3\} \to -\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \{a_n + b_n\} = \{5\} \to 5;$

3) $\left.\begin{array}{l}\{a_n\} = \{n^3\} \to +\infty \\ \{b_n\} = \left\{-n^3 + \frac{1}{n}\right\} \to -\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \{a_n + b_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\} \to 0;$

4) $\left.\begin{array}{l}\{a_n\} = \{n^3\} \to +\infty \\ \{b_n\} = \{-n^3 + (-1)^n\} \to -\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \{a_n + b_n\} = \{(-1)^n\}$

este divergent (nu are limită).

Exemplele acestea ne arată că suma a două şiruri infinit mari de semne diferite poate să fie un şir infinit mare; un şir convergent, care are ca limită, orice număr sau un şir divergent (nu are limită). În acest caz se spune că avem o "nedeterminare". Ea se numeşte *nedeterminare de forma* $(\infty - \infty)$. "A ridica" această nedeterminare înseamnă a rezolva în fiecare caz concret, ţinând seama de forma şirurilor $\{a_n\}$ şi $\{b_n\}$, problema despre comportarea şirului $\{a_n+b_n\}$.

b) Nedeterminarea de forma $(0\cdot\infty)$. Pornind din definiţia şirului infinit mare, se verifică uşor că produsul a două şiruri infinit mari sau produsul dintre un şir convergent cu limită diferită de zero şi un şir infinit mare este un şir infinit mare (a se consulta teorema 5 din 1.4.2). Dacă însă înmulţim un şir infinit mic cu un şir infinit mare, obţinem o "nedeterminare" de forma "$0\cdot\infty$" (vezi exemplul 2 de la sfârşitul punctului 1.4.1), care "se ridică", studiindu-se în ansamblu comportarea şirurilor-factori.

c) Nedeterminările de forma $\left(\frac{0}{0}\right)$ şi $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Uşor se demonstrează că

1) dacă $\{a_n\}\to a, a\neq 0$ şi $\{b_n\}\to\infty$, atunci $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}\to 0$ (a se consulta teorema 3 din 1.4.2 şi teoremele 1 şi 4 din 1.4.1).

2) dacă $\{a_n\}\to\infty$ şi $\{b_n\}\to b, b\neq 0$, atunci $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}\to\infty$ (a se consulta teorema 5 din 1.4.2).

Dacă însă şirurile $\{a_n\}$ şi $\{b_n\}$ sunt ambele şiruri infinit mici sau ambele sunt şiruri infinit mari, atunci şirul – cât $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ poate fi de orice natură. Deci obţinem "nedeterminări" de forma $\left(\frac{0}{0}\right)$ şi $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Că raportul a două şiruri infinit mici este o "nedeterminare", s-a arătat deja în exemplul 1 de la sfârşitul punctului 1.4.1 Că raportul a două şiruri infinit mari este o "nedeterminare" se va vedea din exemplele de mai jos. De acest fapt ne mai putem convinge, considerând raportul a două şiruri infinit mari ca produsul unui şir infinit mic cu un şir infinit mare, care, după cum se ştie, ne dă o "nedeterminare" de forma $(0\cdot\infty)$.

Exemple.

1) $\left.\begin{array}{l}\{a_n\}=\{n^2\}\to\infty\\ \{b_n\}=\{n^3\}\to\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}=\left\{\frac{1}{n}\right\}\to 0$ este un şir infinit mic, iar $\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\}=\{n\}\to\infty$ este un şir infinit mare;

2) $\left.\begin{array}{l}\{a_n\}=\{3n\}\to\infty\\ \{b_n\}=\{n\}\to\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}=\{3\}\to 3$ şi $\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\}=\left\{\frac{1}{3}\right\}\to\frac{1}{3}$. În acest caz am obţinut şiruri convergente, care au limite diferite.

3) $\left.\begin{array}{l}\{a_n\}=\{(-1)^n\cdot n\}\to\infty\\ \{b_n\}=\{n\}\to\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}=\{(-1)^n\}$ este un şir divergent (nu are limită).

Teorema 2. Dacă toţi termenii şirului convergent $\{a_n\}$ sunt nenegativi, adică $a_n\geq 0$, pentru orice $n\in N$, sau pozitivi, adică $a_n>0$, pentru orice $n\in N$, atunci limita lui $\{a_n\}$ este nenegativă, adică $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\geq 0$.

Demonstraţie. Fie $\{a_n\}$ convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ cu $a_n\geq 0$ (sau $a_n>0$) pentru orice $n\in N$. Presupunem că $a<0$. Pentru $\varepsilon=\frac{|a|}{2}>0$, există un număr natural $N(\varepsilon)$, astfel încât

$$\forall n>N(\varepsilon): |a_n-a|<\varepsilon\Leftrightarrow a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n<a+\frac{|a|}{2}=\frac{a}{2}<0\Rightarrow a_n<0,$$

ceea ce contrazice ipotezei teoremei. Prin urmare, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\geq 0$ şi teorema este demonstrată.

Consecinţă. Dacă termenii şirurilor convergente $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ satisfac condiţia $x_n\geq y_n$ (sau $x_n>y_n$) pentru orice $n\in N$, atunci

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n \ge \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Într-adevăr, şirul $\{a_n = x_n - y_n\}$ satisface ipoteza teoremei, deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n - \lim\limits_{n\to\infty} y_n \ge 0$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \ge \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Teorema 3. Dacă şirurile $\{x_n\}$, $\{z_n\}$ sunt convergente şi au limitele egale: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ şi dacă pentru orice $n \in N$ $x_n \le y_n \le z_n$ atunci şirul $\{y_n\}$ este convergent şi limita lui este egală cu a.

Demonstraţie. Pentru orice $\varepsilon > 0$, există numărul natural $N_1(\varepsilon)$, astfel încât

$$\forall n > N_1(\varepsilon): |x_n - a| < \varepsilon$$

şi numărul natural $N_2(\varepsilon)$ astfel încât $\forall n > N_2(\varepsilon): |z_n - a| < \varepsilon$. Notăm $N(\varepsilon) = \max(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon))$. Atunci

$$\forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \text{ şi } a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon.$$

Prin urmare,

$$\forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow |y_n - a| < \varepsilon,$$

ceea ce înseamnă că $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Notă. Folosind teoremele 1-3 şi definiţiile puterii reale, a funcţiilor $y = a^x, a > 0, a \ne 1$, $y = \log_a x, a > 1, a \ne 1, x > 0$, obţinem următorul rezultat.

Teorema 4. Dacă şirul $\{x_n\}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$, atunci

a) şirul $\{|x_n|^\alpha\}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n|^\alpha = |c|^\alpha$ pentru orice număr real $\alpha \ne 0$;

b) şirul $\{a^{x_n}\}, a > 0, a \ne 1$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = a^c$;

c) şirul $\{\log_a |x_n|\}$, unde $a > 0, a \ne 1$ şi $x_n \ne 0, c \ne 0$, pentru orice număr $n \in N$, este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty}(\log_a |x_n|) = \log_a |c|$;

d) dacă $\{y_n\}$ este convergent cu $y_n \ge 0$ pentru orice $n \in N$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b > 0$, atunci şirul $\{y_n^{x_n}\}$ este convergent şi limita lui este egală cu b^c.

Nu vom prezenta demonstraţia teoremei 4, deoarece ea se bazează pe teoria numerelor reale, care nu este expusă aici (vezi, de exemplu, demonstraţia acestor rezultate în [3]). Rezultatele a), b) şi c) ale teoremei 4 pot fi formulate în modul cuvenit şi în cazul când şirul $\{x_n\}$ este un şir infinit mare.

Referitor la punctul d) al teoremei 4 avem următoarele trei cazuri când nu se poate spune nimic în ceea ce priveşte convergenţa sau divergenţa şirului $\{y_n^{x_n}\}$:

1) Şirul $\{y_n\}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$, iar şirul $\{x_n\}$ este un şir infinit mare, adică $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Aici avem o nedeterminare de forma (1^∞);

2) Şirurile $\{y_n\}$ şi $\{x_n\}$ sunt şiruri infinit mici, adică $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. Aici avem o nedeterminare de forma (0^0);

3) Şirul $\{y_n\}$ este un şir infinit mare, iar şirul $\{x_n\}$ este infinit mic. În cazul acesta avem o nedeterminare de forma (∞^0).

Observăm că nedeterminările de forma (∞^0) şi (0^0) se obţin şi din cazul a) al teoremei 4, când $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, $\alpha = 0$ şi respectiv $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha = 0$.

În încheierea acestui paragraf vom demonstra că şirul $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ este convergent. Cercetăm, mai întâi, convergenţa şirului $\{y_n\}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$. Arătăm că şirul $\{y_n\}$ este monoton descrescător. Deoarece $y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $y_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$, avem

$$\frac{y_n}{y_{n+1}}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}}=\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}}}{\frac{(n+2)^{n+2}}{(n+1)^{n+2}}}=\frac{(n+1)^{2n+3}}{n^{n+1}(n+2)^{n+2}}=$$

$$=\frac{(n+1)^{2(n+1)}}{n^{n+1}(n+2)^{n+1}}\cdot\frac{n+1}{n+2}=\left[\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right]^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+2}=$$

$$=\left[1+\frac{1}{n(n+2)}\right]^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+2}\geq\left[1+\frac{1}{n(n+2)}\cdot(n+1)\right]\cdot\frac{n+1}{n+2},$$

(am aplicat inegalitatea Bernoulli: $(1+\alpha)^{n+1}\geq 1+(n+1)\alpha$ cu $\alpha=\frac{1}{n(n+2)}>0$). Observăm că $\frac{n+1}{n(n+2)}>\frac{1}{n+1}$. Într-adevăr,

$$\frac{n+1}{n(n+2)}>\frac{1}{n+1}\Leftrightarrow\frac{n(n+2)}{n+1}<(n+1)\Leftrightarrow\frac{\left(n^2+2n+1\right)-1}{n+1}<(n+1)\Leftrightarrow$$

$$(n+1)-\frac{1}{n+1}<(n+1).$$

Deci

$$\frac{y_n}{y_{n+1}}\geq\left[1+\frac{n+1}{n(n+2)}\right]\cdot\frac{n+1}{n+2}>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\cdot\frac{n+1}{n+2}=1.$$

Prin urmare, $y_n>y_{n+1}$, $n\in N$, adică şirul $\{y_n\}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ este monoton descrescător.

Deoarece toţi termenii şirului sunt numere pozitive: $y_n>0$ pentru orice $n\in N$, şirul este mărginit inferior de zero. Superior acest şir este mărginit, de exemplu, de numărul $y_1=(1+1)^2=4$. Întrucât şirul $\{y_n\}$ este monoton şi mărginit, el este convergent, conform teoremei 7 din 1.4.2.

Observăm că şirul iniţial $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ poate fi reprezentat ca câtul a două şiruri convergente $\left\{y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ şi $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}$ cu

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=1+0=1.$

Prin urmare, şirul $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ este convergent şi limita lui $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$. Notăm acest număr prin litera *e*. Această notaţie îi aparţine matematicianului, mecanicianului şi astronomului elveţian L. Euler (1707-1783). Numărul *e* este iraţional, adică reprezintă o fracţie zecimală infinită şi neperiodică: *2,718281828459045...* (vezi, de exemplu, [14], v. 1. p. 277), unde numărul *e* este calculat cu 600 semne zecimale după virgulă. Maşina electronică a efectuat aceste calcule circa într-o minută (a. 1970).

Numărul e joacă un rol important în analiza matematică, asemenea numărului 1, care este numărul – cheie în aritmetică sau numărul π pentru geometrie. Dintre toate funcţiile exponenţiale numai funcţia e^x are următoarele proprietăţi: tangenta la graficul acestei funcţii în punctul $(0,1)$ formează cu axa absciselor un unghi de $45°$; derivata de orice ordin de la funcţia e^x coincide cu ea însăşi. În studiile teoretice este foarte comod să se aleagă numărul e drept baza logaritmilor.

Logaritmii în baza e se numesc *logaritmi naturali* sau *logaritmi neperieni*, după numele matematicianului scoţian Napier John (1550-1617) şi se notează $\ln x$ în loc de $\log_e x$. În calculele practice e mai comod uneori să ne folosim de logaritmii în baza 10, care se numesc *logaritmi zecimali* sau *logaritmii lui Brigs*, după numele savantului englez Brigs (1556-1630). Logaritmii zecimali se notează $\lg x$ în loc de $\log_{10} x$. Legătura dintre aceşti logaritmi se efectuează prin formula $\ln x = A \cdot \lg x$, unde numărul iraţional

$$A = \frac{1}{\lg e} = \ln 10 \approx 2{,}3026 \text{ sau } \lg x = B \cdot \ln x,$$

unde numărul iraţional

$$B = \frac{1}{\ln 10} = \lg e \approx 0{,}4343.$$

1.5. Limita funcţiei

1.5.1. Definiţia limitei funcţiei. Exemple.

Fie funcţia $y=f(x)$, $x \in D$ şi fie $x_0 \in D$ sau $x_0 \notin D$. Considerăm un şir de puncte din D, diferite de x_0:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, \tag{1}$$

care converge către x_0, adică $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Valorile funcţiei f în punctele acestui şir formează un alt şir numeric:

$$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots \tag{2}$$

şi putem deci cerceta convergenţa lui.

Definiţia 1. Numărul A se numeşte *limita funcţiei f* în punctul x_0 sau când $x \to x_0$, dacă pentru orice şir (1) de valori ale argumentului x, diferite de x_0, convergent către x_0, şirul respectiv (2) al valorilor funcţiei converge către numărul A.

Se notează astfel: $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ sau $f(x) \to A$, când $x \to x_0$.

Această definiţie se mai numeşte *definiţia limitei funcţiei în limbajul "şirurilor" sau după H. Heine* (matematician german (1821-1881)).

Funcţia f poate avea într-un punct x_0 o singură limită. Aceasta rezultă din unicitatea limitei şirului numeric $\{f(x_n)\}$. Definiţia după Heine ne dă posibilitatea să obţinem din teoremele despre şirurile convergente teoremele corespunzătoare despre limitele funcţiilor.

Această definiţie ne mai dă posibilitatea să stabilim că unele funcţii nu au limită pentru o anumită valoare a argumentului. În acest scop e suficient să arătăm că există un şir de valori ale argumentului, ce converge către valoarea considerată a argumentului, pentru care şirul corespunzător al valorilor funcţiei nu are limită sau să arătăm că există două şiruri diferite de valori ale argumentului, ce converg către valoarea considerată a argumentului, pentru care şirurile corespunzătoare ale valorilor funcţiei au limite diferite.

Există şi o altă definiţie a limitei funcţiei.

Definiţia 2. Numărul A se numeşte *limita funcţiei f* în punctul x_0 (sau când $x \to x_0$), dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta > 0$, care, în general, depinde de ε (se scrie $\delta(\varepsilon)$) astfel încât pentru toate valorile lui $x \in D$, care verifică inegalitatea $0 < |x - x_0| < \delta$, se verifică inegalitatea $|f(x) - A| < \varepsilon$.

În limbajul logicii matematice aceasta se scrie astfel:

$$A = \lim_{x\to x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall x \in D : 0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Definiţia a doua a limitei funcţiei se numeşte *definiţie în limbajul "ε-δ"* sau *după A. Cauchy* (matematician francez (1789-1857)).

Reamintim că δ - *vecinătate* a punctului x_0 (se notează $v(x_0, \delta)$), se numeşte orice *interval deschis* $]x_0-\delta, x_0+\delta[$. Dacă excludem x_0 din $]x_0-\delta, x_0+\delta[$, atunci obţinem o *"vecinătate perforată"*, pe care o vom nota astfel: $\bar{v}(x_0, \delta)$.

Cu ajutorul acestor noţiuni definiţia limitei funcţiei după Cauchy poate fi enunţată în modul următor.

Definiţia 3. Numărul A se numeşte *limita funcţiei f* în punctul x_0 (sau când $x \to x_0$), dacă pentru orice ε – vecinătate $v(A, \varepsilon)$ a punctului A, există o δ - vecinătate perforată $\bar{v}(x_0, \delta)$ a punctului x_0, astfel încât pentru toate valorile argumentului din $\bar{v}(x_0, \delta)$ valorile respective ale funcţiei nu ies din $v(A, \varepsilon)$.

În simbolica logicii matematice definiţia 3 se scrie mai concis astfel:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\, v(A,\varepsilon), \exists \bar{v}(x_0,\delta):$$

$$\forall x \in \bar{v}(x_0,\delta) \Rightarrow f(x) \in v(A,\varepsilon).$$

Negaţia definiţiei 3 în limbajul simbolicii logicii matematice se scrie astfel:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \neq A \Leftrightarrow \exists\, v(A, \varepsilon_0), \forall \bar{v}(x_0, \delta): \exists x_1 \in \bar{v}(x_0, \delta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_1) \notin v(A, \varepsilon_0).$$

ceea ce înseamnă: numărul A *nu este limita funcţiei f* în punctul x_0, dacă există un număr $\varepsilon_0>0$, astfel încât pentru orice număr $\delta>0$, există un punct x_1 pentru care $x_1 \in \bar{v}(x_0, \delta)$, dar $f(x_1) \notin v(A, \varepsilon_0)$.

Teorema 1. Definiţiile 1 şi 2 sunt echivalente.

Demonstraţie. 1) Fie $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ în limbajul "şirurilor" sau după Heine şi vom demonstra că $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ în limbajul "ε-δ" sau după Cauchy. Să presupunem contrariul şi atribuim lui δ succesiv valorile

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots .$$

Atunci

pentru $\delta=1$ în D există un $x_1 \neq x_0$, astfel încât $|x_1 - x_0| < 1$, dar $|f(x_1) - A| \geq \varepsilon_0$;

pentru $\delta = \frac{1}{2}$ în D există un $x_2 \neq x_0$, astfel încât $|x_2 - x_0| < \frac{1}{2}$, dar $|f(x_2) - A| \geq \varepsilon_0$;

... ...

pentru $\delta = \frac{1}{n}$ în D există un $x_n \neq x_0$, astfel încât $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$, dar $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$,

... ...

În consecinţă, obţinem un şir de puncte

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

convergent către x_0, deoarece $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ şi şirul $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ este convergent cu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Prin urmare, conform definiţiei 1, şirul respectiv $\{f(x_n)\}$ de valori ale funcţiei converge către numărul A, adică pentru orice număr $\varepsilon>0$, în particular şi pentru $\varepsilon_0>0$, există un număr natural $N(\varepsilon_0)$, astfel încât

$$\forall n > N(\varepsilon_0): |f(x_n) - A| < \varepsilon_0.$$

Or, aceasta este imposibil, deoarece toate numerele x_n au fost alese astfel încât are loc inegalitatea $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$. Contradicţia obţinută demonstrează că presupunerea noastră este falsă, adică numărul A este limita funcţiei f în x_0 şi în sensul Cauchy.

2) Fie $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ în sensul Cauchy, adică

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon. \quad (1)$$

Vom arăta că A este limita funcţiei în sensul Heine. Fie $\{x_n\}$ un şir arbitrar de puncte, convergent către x_0 şi $x_n \neq x_0$ pentru orice $n \in N$. Aceasta înseamnă

$$\forall \delta > 0, \exists N(\delta) \in N, \forall n > N(\delta): 0 < |x_n - x_0| < \delta. \quad (2)$$

Fie $\varepsilon > 0$ oarecare. Conform relației (1) lui $\varepsilon > 0$ îi corespunde un $\delta > 0$ pentru care are loc relația (2). Atunci în virtutea definiției 2, va avea loc și inegalitatea $|f(x_n) - A| < \varepsilon$, deci șirul $\{f(x_n)\}$ este convergent și $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Prin urmare, $A = \lim_{x\to x_0} f(x)$, conform definiției 1. Teorema este demonstrată.

Vom analiza câteva exemple.

Exemplul 1. Fie $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$, $x \in D = R \setminus \{0\}$. Demonstrăm că $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Verificăm definiția 2. Avem: pentru orice $\varepsilon > 0$ considerăm $\delta = \varepsilon$ și deoarece $\left|x\sin\frac{1}{x}\right| \le |x|$, inegalitatea $0 < |x| < \delta$ implică inegalitatea $\left|x\sin\frac{1}{x}\right| \le |x| < \delta = \varepsilon \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$.

Deci $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Exemplul 2. Funcția constantă $f(x)=c$, posedă limită în orice punct $x_0 \in R$ al axei numerice. Într-adevăr, dacă (1) este un șir arbitrar de puncte convergent către x_0, atunci șirul (2) al valorilor respective ale funcției are forma

$$c, c, \ldots, c, \ldots$$

adică este un șir constant, care este întotdeauna convergent și $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} c = c$.

Prin urmare, conform definiției 1, $\lim_{x\to x_0} f(x) = c$, unde x_0 este un punct arbitrar.

Exemplul 3. Funcția $f(x) = \cos\frac{1}{x}$ nu are limită în punctul $x_0=0$. Într-adevăr, considerăm două șiruri convergente către 0:

$$\{x_n\} = \left\{\frac{1}{2\pi n}\right\} \text{ și } \{y_n\} = \left\{\frac{2}{(4n+1)\pi}\right\}.$$

Șirurile valorilor funcției au forma: $\{f(x_n)\} = \{\cos 2\pi n\} = \{1\}$, care este un șir constant deci convergent cu $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1$ și șirul $\{f(y_n)\} = \left\{\cos\frac{(4n+1)\pi}{2}\right\} = \left\{\cos\frac{\pi}{2}\right\} = \{0\}$, de asemenea este un șir constant și deci convergent cu $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = 0$.

Prin urmare, funcția $\cos\frac{1}{x}$ nu are limită în punctul $x_0=0$, deoarece, având două șiruri diferite de valori ale lui x, diferite de $x_0=0$, care sunt convergente către 0, am obținut că șirurile valorilor corespunzătoare ale funcției au limite diferite.

Similar se demonstrează că $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ nu are limită în $x_0=0$, considerând șirurile $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{\pi n}\right\}$ *și* $\{y_n\} = \left\{\frac{2}{(4n+1)\pi}\right\}$.

Exemplul 4. Să se demonstreze că funcția

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, \text{dacă } x > 0 \\ 0, \text{dacă } x = 0 \\ -1, \text{dacă } x < 0 \end{cases}$$

nu are limită când $x \to 0$.

Evident, această funcție, definită în R, ia numai 3 valori: -1, 0, 1.

Conform negației definiției 3, avem

$$\lim_{x\to 0} f(x) \ne A \Leftrightarrow \exists v(A, \varepsilon_0), \forall \bar{v}(0,\delta), \exists x_1 \in \bar{v}(0,\delta) \Rightarrow f(x_1) \notin v(A, \varepsilon_0)$$

Observăm că orice δ - vecinătate perforată a punctului zero $\bar{v}(0,\delta)$ conține atât numere pozitive, cât și numere negative.

Dacă A este diferit de numerele $-1, 0, 1$, atunci există o vecinătate $v(A, \varepsilon_0)$ a lui A, care nu conţine aceste trei numere, adică $\forall x \in \bar{v}(0,\delta) \Rightarrow f(x) \notin v(A,\varepsilon_0)$, ceea ce înseamnă că A nu este limita funcţiei sgn$x$ în punctul 0.

Dacă însă $A \in \{-1,0,1\}$ şi $\varepsilon = \varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, atunci în $v(A, \varepsilon_0)$ nu se conţin în acelaşi timp ambele numere -1 şi 1. Deci în orice $\bar{v}(0,\delta)$ există puncte x în care $f(x)=1$ şi puncte x în care $f(x)=-1$. Prin urmare, există un punct $x_1 \in \bar{v}(0,\delta)$ astfel încât $f(x_1) \notin v(A,\varepsilon_0)$, ceea ce înseamnă că $A \neq \lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

Exemplul 5. Arătăm că $\lim\limits_{x \to 0} |\operatorname{sgn} x| = 1$. Într-adevăr, pentru $x \in R-\{0\}$ avem $f(x)=|\operatorname{sgn} x| = 1$, adică funcţia este constantă. Prin urmare, pentru orice ε- vecinătate $v(1,\varepsilon)$ a punctului 1 avem

$$\forall x \in \bar{v}(0,\delta) \Rightarrow f(x) = 1 \in v(1,\varepsilon).$$

Aceasta înseamnă că $\lim\limits_{x \to 0} |\operatorname{sgn} x| = 1$.

Notă. Cu toate că funcţia $|\operatorname{sgn} x|$ este definită în punctul 0: $|\operatorname{sgn} 0| = 0$, însă această valoare a funcţiei nu are nici o influenţă asupra valorii limitei $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$. Prin urmare, nu trebuie să se confunde valoarea $f(x_0)$ a funcţiei în punctul x_0 cu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Trecem la definiţia limitelor laterale ale funcţiei.

Definiţia 4 *(în limbajul "şirurilor").* Numărul A se numeşte *limită la dreapta (la stânga)* a funcţiei $f(x)$ în punctul x_0, dacă pentru orice şir (1), convergent către x_0, elementele căruia sunt mai mari (respectiv mai mici) decât x_0, şirul respectiv (2) converge către A. Se notează astfel: $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = A$ (respectiv $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = A$).

Exemplul 6. Am demonstrat că funcţia $f(x)=$sgn$x$ nu are limită în punctul $x_0=0$. Arătăm că această funcţie posedă în $x_0=0$ limită la dreapta şi limită la stânga. Într-adevăr, dacă şirul (1) este un şir arbitrar de valori ale argumentului x convergent către zero şi elementele x_n ale căruia sunt mai mari decât zero $(x_n>0)$, atunci sgnx_n=1 pentru orice $n \in N$ şi deci şirul (2) este un şir constant $\{1\}$. Prin urmare, limita lui este egală cu 1. Deci $\lim\limits_{x \to 0+0} \operatorname{sgn} x = 1$. Similar se demonstrează că $\lim\limits_{x \to 0-0} \operatorname{sgn} x = -1$.

Poate fi enunţată o definiţie echivalentă a limitelor laterale în limbajul "ε-δ".

Definiţia 5. Numărul A se numeşte *limită la dreapta (la stânga)* a funcţiei $f(x)$ în punctul x_0, dacă pentru orice $\varepsilon>0$ există un $\delta>0$, care, în general, depinde de ε, astfel încât pentru toate valorile lui x, care verifică inegalităţile $x_0<x<x_0+\delta$ (respectiv $x_0-\delta<x<x_0$), să fie verificată inegalitatea $|f(x)-A| < \varepsilon$.

În simbolica logicii matematice avem:

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x : x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x)-A| < \varepsilon$$ şi

$$\lim_{x \to x_0-0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x : x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x)-A| < \varepsilon.$$

Aceste două definiţii (4 şi 5) sunt echivalente.

Limita la dreapta şi limita la stânga se mai numesc *limite laterale*.

Are loc următoarea teoremă.

Teorema 2. Funcţia $f(x)$ posedă în punctul x_0 limită atunci şi numai atunci când în punctul dat există limita la dreapta şi limita la stânga şi ele sunt egale. În acest caz limita funcţiei este egală cu limitele laterale.

Demonstraţie. Fie $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, adică

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Însă $\quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, x \neq x_0.$

Deci atât pentru $x_0-\delta<x<x_0$, cât şi pentru $x_0<x<x_0+\delta$ se verifică inegalitatea $|f(x)-A|<\varepsilon$, ceea ce înseamnă că $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A$.

Fie acum $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A$. Atunci, conform definiţiei 4, pentru orice $\varepsilon>0$ există numerele $\delta_1>0$ şi $\delta_2>0$, astfel încât pentru toate valorile lui x, care verifică inegalităţile

$$x_0-\delta_1<x<x_0 \text{ şi } x_0<x<x_0+\delta_2$$

se verifică inegalitatea $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Considerăm $\delta=min(\delta_1,\delta_2)$. Atunci

$$\forall\varepsilon>0, \exists\delta=\min(\delta_1,\delta_2), \forall x: 0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow$$
$$\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon,$$

ceea ce înseamnă, conform definiţiei 2, că $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

Pe lângă noţiunile de limită a funcţiei în punctul dat şi a limitelor laterale în punctul dat există noţiunile de limită în infinit (când argumentul tinde la infinit) şi la infinit (când numărul A este unul din simbolurile $-\infty$, $+\infty$, ∞).

Deci pentru cazul când unul sau ambele numere x_0 şi A din notaţia $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ nu sunt finite, avem următoarele definiţii în limbajul "ε-δ" (folosind simbolica logicii matematice):

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall A>0, \exists\delta(A)>0, \forall x: 0<|x-x_0|<\delta(A)\Rightarrow$ $\Rightarrow f(x)>A$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall A>0, \exists\delta(A)>0, \forall x: 0<|x-x_0|<\delta(A)\Rightarrow$ $\Rightarrow f(x)<-A$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall A>0, \exists\delta(A)>0, \forall x: 0<|x-x_0|<\delta(A)\Rightarrow$ $\Rightarrow|f(x)|>A$;

4) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists B(\varepsilon)>0, \forall x: x>B\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon$;

5) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists B(\varepsilon)>0, \forall x: x<-B\Rightarrow$ $|f(x)-A|<\varepsilon$;

6) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists B(\varepsilon)>0, \forall x: |x|>B\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon$;

7) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall A>0, \exists B>0, \forall x: |x|>B\Rightarrow|f(x)|>A$;

8) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall A>0, \exists B>0, \forall x: x>B\Rightarrow|f(x)|>A$;

9) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall A>0, \exists B>0, \forall x: x<-B\Rightarrow|f(x)|>A$;

10) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall A>0, \exists B>0, \forall x: |x|>B\Rightarrow f(x)>A$;

11) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall A>0, \exists B>0, \forall x: x>B\Rightarrow f(x)>A$;

12) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall A>0, \exists B>0, \forall x: x<-B\Rightarrow f(x)>A$;

13) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall A>0, \exists B>0, \forall x: x<-B\Rightarrow f(x)<-A$;

14) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall A>0, \exists B>0, \forall x: x>B\Rightarrow f(x)<-A$;

15) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall A>0, \exists B>0, \forall x: |x|>B\Rightarrow f(x)<-A$.

Notă. Propunem cititorului să descifreze în limbajul "ε-δ" următoa-rele relaţii $\lim\limits_{x\to x_0\pm 0} f(x)=A$, unde A este unul din simbolurile $-\infty$, $+\infty$, ∞.

Definiţia limitei funcţiei $f(x)$ în punctul x_0, adică $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, în limbajul "şirurilor" se extinde uşor şi în cazul când unul sau ambele din numerele x_0 şi A sunt înlocuite prin simbolurile: $-\infty$, $+\infty$, ∞. De exemplu, $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=A$ înseamnă: pentru orice şir infinit mare $\{x_n\}$ ale valorilor argumentului x, şirul valorilor corespunzătoare ale funcţiei $\{f(x_n)\}$ este convergent către A.

Analizăm următorul exemplu.

Exemplul 7. Fie funcţia $f(x)=\dfrac{1}{x}$. Arătăm că $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty$ şi

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$.

Într-adevăr, fie $\{x_n\}$ şirul valorilor argumentului x, termenii căruia $x_n \neq 0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Atunci şirul valorilor corespunzătoare ale funcţiei $\{f(x_n)\} = \left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ este un şir infinit mare (teorema 1 din 1.4.1). Deci $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$. Similar se arată că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Notă. Propunem cititorului să demonstreze că pentru această funcţie au loc următoarele relaţii: $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

1.5.2. Funcţii infinit mici şi infinit mari. Proprietăţi de bază

Definiţia 1. Funcţia $f(x)$, se numeşte *funcţie infinit mică* (sau simplu *infinit mic*) în punctul x_0 (sau când $x \to x_0$), dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

Analog se definesc funcţiile infinit mici când $x\to\infty$, $x\to-\infty$, $x\to+\infty$, $x\to x_0+0$, $x\to x_0-0$. Conform definiţiilor 1 şi 2 din 1.5.1 putem formula definiţia funcţiilor infinit mici în limbajul "şirurilor" (în sens Heine) sau "ε-δ" (în sens Cauchy).

Definiţia 2 (după Heine): funcţia $f(x)$, $x\in D$ se numeşte *infinit mic* în punctul x_0, dacă pentru orice şir $\{x_n\}$ de valori ale argumentului x, diferite de x_0, convergent către x_0, şirul respectiv $\{f(x_n)\}$ de valori ale funcţiei este infinit mic.

Definiţia 3 (după Cauchy): funcţia $f(x)$, $x\in D$ se numeşte *infinit mic* în punctul x_0, dacă pentru orice $\varepsilon>0$ există un $\delta>0$, care, în general, depinde de numărul ε, astfel încât pentru toate valorile lui $x\in D$ ce verifică inegalitatea $0<|x-x_0|<\delta$ se satisface inegalitatea $|f(x)|<\varepsilon$.

Cu ajutorul simbolicii logicii matematice scriem:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x\in D: 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)|<\varepsilon.$$

Are loc următoarea teoremă.

Teorema 1. Numărul A este egal cu limita funcţiei $f(x)$ în punctul x_0 atunci şi numai atunci când funcţia $\alpha(x)=f(x)-A$ este un infinit mic în punctul x_0.

Demonstraţie. Necesitatea. Fie $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, ceea ce înseamnă

$$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x: 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon.$$

Notând $f(x)-A$ prin $\alpha(x)$, observăm că funcţia $\alpha(x)$ este infinit mică, conform definiţiei 3.

Suficienţa. Fie funcţia $\alpha(x)=f(x)-A$ este infinit mică în x_0. Atunci, conform definiţiei 3, avem

$$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x: 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |\alpha(x)|<\varepsilon$$

sau $|f(x)-A|<\varepsilon$, ceea ce înseamnă că $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ (vezi definiţia 2 din 1.5.1).

Funcţiile infinit mici au aceleaşi proprietăţi ca şi şirurile infinit mici (a se consulta 1.4.1).

Teorema 2. Suma algebrică şi produsul unui număr finit de funcţii infinit mici în punctul x_0, precum şi produsul unei funcţii infinit mici în x_0 cu o funcţie mărginită, sunt funcţii infinit mici în punctul x_0.

Această teoremă rezultă direct din definiţia funcţiilor infinit mici în limbajul "şirurilor" şi din teoremele 2, 3, şi 4 din 1.4.1.

Cele spuse asupra funcţiilor infinit mici în punctul x_0 rămân valabile şi pentru funcţiile infinit mici în cazul când $x\to\infty$, $x\to-\infty$, $x\to+\infty$, $x\to x_0-0$, $x\to x_0+0$.

Definiţia 4. Funcţia $f(x)$ se numeşte *funcţie infinit mare* (sau simplu *infinit mare*) în x_0[*] (sau când $x\to x_0$), dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, unde A este unul din simbolurile ∞, $+\infty$, $-\infty$.

---

[*] Aici x_0, ca întotdeauna în teoria limitelor, poate fi considerat orice număr real sau unul din simbolurile $-\infty$, $+\infty$, ∞.

Prin analogie cu limitile laterale finite se definesc şi limitile laterale infinite: $\lim\limits_{x \to x_0 \pm 0} f(x) = A$, unde A este unul din simbolurile $-\infty$, $+\infty$, ∞.

Definiţia funcţiei infinit mare poate fi formulată în limbajul "ε-δ" (a se consulta cazurile 1 – 3, 7 – 15 din punctul precedent 1.5.1) şi în limbajul "şirurilor"(a se consulta ultimele aliniate din 1.5.1).

Teorema 3. Pentru ca funcţia $f(x)$, unde $f(x)\neq 0$, când $x\neq x_0$, să fie un infinit mic în punctul x_0 este necesar şi suficient ca funcţia $\frac{1}{f(x)}$ să fie un infinit mare în punctul x_0.

Demonstraţia teoremei rezultă direct din definiţia funcţiilor infinit mici şi infinit mari în limbajul "şirurilor" şi teorema respectivă despre legătura şirurilor infinit mici şi infinit mari (a se consulta teorema 1 din 1.4.1).

Exemplul 8. Funcţia $f(x)=x$ este o funcţie infinit mică când $x\to 0$, deci funcţia $\frac{1}{x}$ este o funcţie infinit mare când $x\to 0$.

Exemplul 9. Funcţia $f(x)=\frac{1}{x}$ este o funcţie infinit mică când $x\to\infty$, deci funcţia $\frac{1}{f(x)}=x$ este o funcţie infinit mare, când $x\to\infty$.

Exemplul 10. Funcţiile $f(x)=\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{x}\cdot\sin x$ şi $g(x)=\frac{1}{x}\cdot\sin\frac{1}{x}$ sunt funcţii infinit mici când $x\to\infty$, ca produsul unei funcţii infinit mici cu o funcţie mărginită.

1.5.3. Teoreme fundamentale despre limita funcţiei

În acest paragraf vom considera funcţii, care depind de acelaşi argument x şi au limite finite când $x\to x_0$, unde x_0 este un

număr finit sau unul din simbolurile $-\infty$, $+\infty$, ∞.

Vom prezenta demonstraţia doar pentru unul din aceste cazuri, deoarece demonstraţia în celelalte cazuri se efectuează în mod similar.

Reamintim că intervalul $]-\infty, a[$, $a\in R$, se numeşte *vecinătatea lui* $x_0=-\infty$, intervalul $]b, +\infty[$, $b\in R$, se numeşte *vecinătatea lui* $x_0=+\infty$ şi intervalul $]-\infty, -a[\ \cup\ ]a, +\infty[$, $a\in R$, se numeşte *vecinătatea lui* $x_0=\infty$.

Teorema 1. Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, atunci funcţia $f(x)$ este mărginită într-o vecinătate perforată a lui x_0.

Demonstraţie. Avem

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0,\ \forall x: 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow$$

$$|f(x)-A|<\varepsilon \Rightarrow A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon,$$

ceea ce înseamnă că $f(x)$ este mărginită superior de numărul $A+\varepsilon$, inferior de numărul $A-\varepsilon$ în $\bar{v}(x_0,\delta)$, adică $f(x)$ este mărginită în această vecinătate perforată a lui x_0.

Teorema 2. Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\neq 0$, atunci există o vecinătate perforată $\bar{v}(x_0,\delta)$ a punctului x_0 în care funcţia f ia numai valori pozitive, dacă $A>0$, sau numai valori negative, dacă $A<0$.

Demonstraţie. Pentru $A>0$, avem

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \varepsilon=A>0, \exists\delta>0,\ \forall x\in\bar{v}(x_0,\delta)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon=A \Leftrightarrow 0<f(x)<2A.$$

Dacă însă $A<0$, luăm $\varepsilon=-A>0$ şi obţinem existenţa vecinătăţii perforate $\bar{v}(x_0,\delta)$ a punctului x_0 pentru care

$$\forall x\in\bar{v}(x_0,\delta)\Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon=-A \Leftrightarrow 2A<f(x)<0.$$

Teorema 3. Dacă $f(x)\geq 0$ pentru orice $x\in\bar{v}(x_0,\delta_1)$ şi dacă există limita funcţiei f, când $x\to x_0$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\geq 0$.

Demonstrație. Presupunem că $A<0$, atunci, conform teoremei 2, există o vecinătate perforată $\bar{v}(x_0,\delta_2)$ a punctului x_0 pentru care

$$\forall x \in \bar{v}(x_0,\delta_2) \Rightarrow f(x)<0.$$

Prin urmare, $\forall x \in \bar{v}\,(x_0,\ \min(\delta_1,\delta_2)) \Rightarrow f(x)<0$, ceea ce contrazice ipoteza teoremei.

Teorema 4. Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|A|$.

Într-adevăr, avem

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0,$$

$$\forall x: 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon.$$

Folosind proprietatea 9 din 1.2 a valorii absolute, obținem

$$||f(x)|-|A||\le|f(x)-A|<\varepsilon,$$

ceea ce înseamnă că $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|A|$.

Teorema 5. Fie $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ și $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$, $A, B\in R$..

Atunci:

a) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$;

b) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$;

c) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$ cu condiția că $B\neq 0$.

Menționăm că punctele *a)* și *b)* ale teoremei sunt juste și în cazul unui număr finit de funcții, care au pentru $x\to x_0$ limite finite.

Această teoremă se demonstrează în baza teoremei corespunzătoare despre șiruri convergente (a se consulta teorema 1 din 1.4.3). Să demonstrăm, de exemplu, că

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\frac{A}{B}, \text{ dacă } B\neq 0.$$

În baza teoremei 2 de mai sus, deoarece $B\neq 0$, avem $g(x)\neq 0$ pentru orice x dintr-o vecinătate perforată a lui x_0. Fie șirul $\{x_n\}$, $x_n\neq x_0$, convergent și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$ Atunci în baza definiției limitei funcției în limbajul "șirurilor", șirurile $\{f(x_n)\}$, $\{g(x_n)\}$ sunt convergente și $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$, $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)=B$, $B\neq 0$. Aplicând teorema 1 din 1.4.3, avem că șirul $\left\{\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)}\right\}$ este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)}=\dfrac{A}{B}$. Conform definiției limitei în limbajul "șirurilor", avem $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$.

Drept consecință a acestei teoreme, obținem că $\lim\limits_{x\to x_0}[c\cdot f(x)]=c\cdot\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, adică factorul constant poate fi scos în afara semnului limitei.

Considerăm câteva exemple.

Exemplul 1. Să se arate că $\lim\limits_{x\to x_0} P_n(x)=P_n(x_0)$, unde $P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$, $n\in N$, $a_n\neq 0$, $a_0, a_1, \ldots, a_n\in R$.

Observăm (de exemplu, aplicând definiția lui Heine) că $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$. Deci $\lim\limits_{x\to x_0} x^2=\lim\limits_{x\to x_0}(x\cdot x)=x_0^2, \ldots, \lim\limits_{x\to x_0} x^n=x_0^n$.

Prin urmare, după teorema 5, avem

$$\lim_{x\to x_0} P_n(x)=\lim_{x\to x_0}(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n)=$$

$$=a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\ldots+a_nx_0^n=P_n(x_0).$$

Exemplul 2. Să se demonstreze că $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\dfrac{P_n(x_0)}{Q_m(x_0)}$,

unde $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – sunt polinoame de gradul n și respectiv m în raport cu variabila x și $Q_m(x_0)\neq 0$.

Într-adevăr, după cum rezultă din exemplul 1, avem $\lim\limits_{x\to x_0} P_n(x) = P_n(x_0)$ şi $\lim\limits_{x\to x_0} Q_m(x) = Q_m(x_0) \neq 0$. Conform teoremei 5, avem $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(x_0)}{Q_m(x_0)}$.

Teorema 6. Dacă $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$ pentru orice x dintr-o vecinătate perforată $\dot{v}(x_0, \delta_1)$ a lui x_0 şi $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

Demonstraţie. Avem

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0, \forall x \in \bar{v}(x_0, \delta_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\varphi(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow A - \varepsilon < \varphi(x) < A + \varepsilon;$$

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_3 > 0, \forall x \in \bar{v}(x_0, \delta_3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |g(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow A - \varepsilon < g(x) < A + \varepsilon$$

Notăm $\bar{V}(x_0, \delta_4) = \bar{V}(x_0, \delta_1) \cap \bar{V}(x_0, \delta_2) \cap \bar{V}(x_0, \delta_3)$ şi atunci pentru orice $x \in \bar{v}(x_0, \delta_4)$ se verifică relaţiile

$$A - \varepsilon < \varphi(x) < A + \varepsilon, \text{ şi } A - \varepsilon < g(x) < A + \varepsilon.$$

Prin urmare, pentru orice $x \in \bar{v}(x_0, \delta_4)$ avem

$$A - \varepsilon < \varphi(x) \leq f(x) \leq g(x) < A + \varepsilon, \text{ adică } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Am obţinut următorul rezultat: pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta_4 = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, astfel încât

$$0 < |x - x_0| < \delta_4 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon,$$

ceea ce înseamnă că $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

Teorema 7. *(schimbarea de variabilă în limita unei funcţii).* Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b$ şi $\lim\limits_{y\to b} F(y) = A$, atunci

$$\lim_{x\to x_0} F(f(x)) = \lim_{y\to b} F(y) = A.$$

Demonstraţie. Conform definiţiei limitei funcţiei în limbajul "şirurilor" avem: pentru orice şir $\{x_n\}$, $x_n \neq x_0$ convergent către x_0, şirul $\{f(x_n)\}$ al valorilor funcţiei $f(x)$ este convergent către b. Deoarece, conform ipotezei teoremei, $\lim\limits_{y\to b} F(y) = A$, avem că pentru şirul $\{y_n = f(x_n)\}$, convergent către b, şirul $\{F(y_n)\}$ al valorilor corespunzătoare ale funcţiei $F(y)$ este convergent către A. Prin urmare, $\lim\limits_{x\to x_0} F(f(x)) = A = \lim\limits_{y\to b} F(y)$. Această teoremă se mai numeşte *teorema despre limita unei funcţii compuse.*

Teorema 8. Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = C > 0$ şi $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$, atunci:

a) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)]^\alpha = C^\alpha$, $\alpha \in R$;

b) $\lim\limits_{x\to x_0} a^{g(x)} = a^b$, $a > 0$, $a \neq 1$;

c) $\lim\limits_{x\to x_0} \log_a |f(x)| = \log_a C$, $a > 0$, $a \neq 1$;

d) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)} = C^b$;

Demonstraţia acestei teoreme reiese din definiţia limitei funcţiei după Heine, teorema 4 din 1.4.3. şi proprietăţile funcţiilor de putere, exponenţială şi logaritmică.

Teorema 9 ***(Criteriul Cauchy).*** Funcţia $y = f(x)$, $x \in D \subseteq R$ are limită finită în punctul $x_0 \in R$ atunci şi numai atunci când pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $\forall x_1, \forall x_2 \in \bar{v}(x_0, \delta): |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Din lipsă de spaţiu nu vom prezenta demonstraţia acestei teoreme (a se consulta, de exemplu, [3], p. 122; [12], p. 113).

Notă. 1. Fie $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ şi $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, unde A şi B sunt unul din simbolurile $-\infty$, $+\infty$, ∞, iar x_0 este finit sau este unul din simbolurile $-\infty$, $+\infty$, ∞. În acest caz teorema 5 este valabilă, excepţie făcând următoarele "situații" sau "nedeterminări" de forma $(\infty - \infty)$, $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, care se obțin din teorema 5 (a, c). Operația calculării limitei în acest caz se numește *ridicarea nedeterminării.*

2. Fie $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, unde x_0 este finit sau este unul din simbolurile $-\infty$, $+\infty$, ∞. Teoremele 5 și 8 sunt juste și în acest caz, excepție făcând următoarele "situații", care se numesc *nedeterminări de forma:* $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, care reiese din teorema 5, c), și (0^0), care rezultă din teorema 8, d).

3. Fie $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ și $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, unde A este unul din simbolurile $-\infty$, $+\infty$, ∞, iar x_0 este finit sau este unul din simbolurile $-\infty$, $+\infty$, ∞. Teoremele 5 și 8 sunt valabile și în cazurile acestea, excepție făcând următoarele "situații" sau nedeterminări de forma: $(0 \cdot \infty)$, care rezultă din teorema 5, b), și (∞^0), care reiese din teorema 8, d).

4. Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1$ și $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$, unde A este unul din simbolurile $-\infty$, $+\infty$, ∞, iar x_0 este finit sau este unul din simbolurile $-\infty$, $+\infty$, ∞, atunci punctul d) din teorema 8 nu este valabil: în dependență de structura funcțiilor $f(x)$ și $g(x)$ funcția compusă $[f(x)]^{g(x)}$ în x_0 poate avea limită finită sau infinită ori nici finită, nici infinită. Această "situație" ori "nedeterminare" are forma (1^∞).

Rezumând cele spuse în nota de mai sus, obținem următoarele: teoremele 5 și 8 sunt valabile pentru orice funcții, excepție făcând următoarele șapte "situații" sau "nedeterminări" de forma

$$(\infty - \infty),\ (0 \cdot \infty),\ \left(\frac{0}{0}\right),\ \left(\frac{\infty}{\infty}\right),\ (1^\infty),\ (0^0) \text{ și } (\infty^0).$$

Observăm că cele șapte nedeterminări cu ajutorul transformărilor elementare pot fi reduse la nedeterminarea de forma $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Într-adevăr,

1. $(\infty - \infty)$: dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$, atunci

$$\lim_{x\to x_0}[f(x) - g(x)] = (\infty - \infty) = \lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{1/f(x)} - \frac{1}{1/g(x)}\right] =$$

$$= \lim_{x\to x_0}\left[\frac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)} \cdot \dfrac{1}{g(x)}}\right] = \left(\frac{0}{0}\right);$$

2. $(0 \cdot \infty)$: dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ *și* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$, atunci

$$\lim_{x\to x_0}[f(x) \cdot g(x)] = (0 \cdot \infty) = \lim_{x\to x_0}\left[f(x) \cdot \frac{1}{1/g(x)}\right] =$$

$$= \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)}{1/g(x)}\right] = \left(\frac{0}{0}\right);$$

3. $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$: dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ *și* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, atunci

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to x_0}\left[\frac{1/g(x)}{1/f(x)}\right] = \left(\frac{0}{0}\right).$$

În cazurile de mai sus x_0 poate fi considerat ca un număr finit sau unul din simbolurile $-\infty$, $+\infty$, ∞.

4) Fie $y = [f(x)]^{g(x)}$. Deci $\ln|y| = g(x) \cdot \ln|f(x)|$. Prin urmare, nedeterminările de forma (1^∞), (0^0), (∞^0) prin intermediul logaritmării: $\ln|y| = g(x) \cdot \ln|f(x)|$ se reduc la nedeterminarea

de forma $(0\cdot\infty)$, iar ultima, conform cazului 2, se reduce la forma $\left(\frac{0}{0}\right)$.

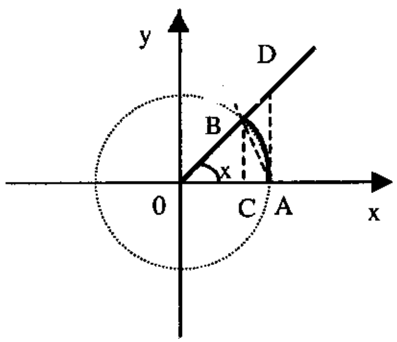
Notăm ca operaţia de calculare a limitei în aceste şapte cazuri se numeşte *ridicarea nedeterminării* de forma respectivă (a se consulta 1.4.3 - nedeterminările în cazul şirurilor).

1.5.4. Limite remarcabile.

Au loc următoarele teoreme.

Teorema 1 *(prima limită remarcabilă).* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Demonstraţie. Întrucât funcţia $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ este pară şi $x\to 0$, considerăm $x>0$. Fie $0<x<\frac{\pi}{2}$ şi $\overset{\cup}{AB}$ arcul circumferinţei $x^2+y^2=R^2$.



Avem $\sin x=\frac{BC}{OB}=\frac{BC}{R}$, $tgx=\frac{AD}{OA}=\frac{AD}{R}$. Din figură se vede că $S_{\Delta OAB}<S_{\sec \overset{\cup}{OAB}}<S_{\Delta OAD}$, unde aria triunghiului ΔOAB este egală cu

$$S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot AB\cdot\sin x=\frac{1}{2}R^2\sin x,$$

aria sectorului circular

$$S_{\sec \overset{\cup}{OAB}}=\frac{1}{2}\cdot R^2x$$

şi aria triunghiului dreptunghic ΔOAD este egală cu

$$S_{\Delta OAD}=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot AD=\frac{1}{2}\cdot R\cdot AD=\frac{1}{2}\cdot R\cdot Rtgx=\frac{1}{2}\cdot R^2\cdot tgx.$$

Deci $\frac{1}{2}\cdot R^2\sin x<\frac{1}{2}\cdot R^2x<\frac{1}{2}\cdot R^2tgx$ sau $sinx< x <tgx$.

Întrucât $sinx>0$, avem $1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$ sau $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$.
Observăm că $\lim\limits_{x\to 0}1=1$(ca o funcţie constantă). Arătăm că $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$. Într-adevăr, $(0<x<\pi/2)\Rightarrow sinx< x <tgx$ şi

$$0<1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}=2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}<2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}=\frac{x^2}{2}.$$

Observăm că $\lim\limits_{x\to 0}0=0$ (ca o funcţie constantă), $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{2}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot x)=0$ (am aplicat teorema 5 din 1.5.3). Conform teoremei 6 din 1.5.3, avem că $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)=0$, adică $\lim\limits_{x\to 0}1-\lim\limits_{x\to 0}\cos x=0$, de unde $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$.

Prin urmare, $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$ şi $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=\lim\limits_{x\to 0}1=1$.

Aplicând teorema 6 din 1.5.3, obţinem $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Notă. Observăm că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{sinx}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\frac{sinx}{x}}=\frac{1}{1}=1.$

Consecinţe.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x}{x}=1$. Într-adevăr, aplicând teorema 5 din 1.5.3, obţinem

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0}1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}=\frac{1}{1}=1.$$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$. Într-adevăr, aplicând teorema 7 din 1.5.3,

obţinem $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\left|\begin{array}{l}\arcsin x=y\Leftrightarrow\\ \sin y=x,\\ y\to\arcsin 0=0\end{array}\right|=\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=1.$

3) $$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{arctg}x}{x}=\left|\begin{array}{l}\mathrm{arctg}x=y\Leftrightarrow\\ x=\mathrm{tg}y,\\ y\to\mathrm{arctg}0=0\end{array}\right|=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\mathrm{tg}y}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\mathrm{tg}y}{y}}=\frac{\lim\limits_{y\to 0}1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\mathrm{tg}y}{y}}=\frac{1}{1}=1$$

(am aplicat teorema 7 din 1.5.3 şi consecinţa 1 de mai sus).

Notă. Dacă $x\to x_0\neq 0$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sin x}{x}\neq 1$. Într-adevăr, considerăm următoarele exemple:

1) $$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin x}{x}=\frac{\lim\limits_{x\to\pi/2}\sin x}{\lim\limits_{x\to\pi/2}x}=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to\pi/2}\sin x=\left|\begin{array}{l}x-\frac{\pi}{2}=y\\ x=y+\frac{\pi}{2}\\ y\to\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0\end{array}\right|=$$

$$=\frac{2}{\pi}\lim_{y\to 0}\sin(y+\frac{\pi}{2})=\frac{2}{\pi}\lim_{y\to 0}\cos y=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 0}\cos x=\frac{2}{\pi}\cdot 1=\frac{2}{\pi}$$ (am folosit teoremele 5 şi 7 din 1.5.3 şi formula $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$, demonstrată mai sus).

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\sin x=0$ (ca produsul unei funcţii infinit mici ($\frac{1}{x}\to 0$, când $x\to\infty$) cu o funcţie mărginită).

Teorema 2 *(a doua limită remarcabilă).* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

Demonstraţie. A fost deja demonstrat că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$, dacă n ia valori întregi pozitive (a se consulta sfârşitul paragrafului 1.4.3).

Presupunem că x, care tinde către infinit, ia orice valori reale atât pozitive, cât şi negative.

1) Fie $x\to+\infty$ şi $x\geq 1$. Avem $n\leq x<n+1$, unde $n\in N$. Au loc inegalităţile $\left(\frac{1}{n}\geq\frac{1}{x}>\frac{1}{n+1}\right)\Rightarrow 1+\frac{1}{n}\geq 1+\frac{1}{x}>1+\frac{1}{n+1}$

sau $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\geq\left(1+\frac{1}{x}\right)^x>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n,$$

adică $$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Întrucât $x\to+\infty$, avem $n\to+\infty$. Observăm că

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e\cdot(1+0)=e$$

şi

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{\substack{n\to+\infty\\(n+1)\to+\infty}}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}=e\cdot\frac{1}{1+0}=e.$$

Prin urmare, aplicând teorema 6 din 1.5.3, obţinem

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

2) Fie $x\to-\infty$, atunci considerând $t=-(x+1)$, avem

$$(x\to-\infty)\Rightarrow(t\to+\infty).$$

Deci

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\left|\begin{array}{l}x=-(t+1)\\ t=-(x+1)\\ t\to+\infty\end{array}\right|=\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-(t+1)}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-(t+1)}=$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\cdot\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right) = e\cdot(1+0) = e$$

(am aplicat teoremele 5 şi 7 din 1.5.3 şi partea 1 din demonstraţia acestei teoreme).

Teorema 2 este complet demonstrată.

Consecinţe.

1) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{m}{x}\right)^{x} = e^{m}$, $m\in R$. Dacă $m=0$ şi $m=1$, egalitatea este evidentă. Fie $m\neq 0$, $m\neq 1$. Atunci

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{m}{x}\right)^{x} = \left|\begin{array}{l}\frac{x}{m}=t\\ x=mt\\ t\to\infty\end{array}\right| = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{mt} = \lim_{t\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{m} =$$

$$= \left[\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{m} = e^{m}$$

(am folosit teoremele 7 şi 8 (a) din 1.5.3).

2) $\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$.

Într-adevăr,

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \left|\begin{array}{l}\frac{1}{x}=\alpha\\ x=\frac{1}{\alpha}\\ \alpha\to 0\end{array}\right| = \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}},$$

(am folosit teorema 7 din 1.5.3).

3) $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e = \frac{1}{\ln a}$, în particular $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \ln e = 1$.

Într-adevăr,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\log_a(1+x)\right) = \lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} =$$

$$= \log_a\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \log_a e = \frac{1}{\ln a},$$

(am folosit teorema 8(c) din 1.5.3 şi consecinţa 2 de mai sus).

4) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$, în particular $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$.

Într-adevăr,

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \left|\begin{array}{l}a^x-1=y\\ a^x=1+y\\ x=\log_a(1+y)\\ y\to 0\end{array}\right| = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\log_a(1+y)}{y}} =$$

$$= \frac{1}{\lim_{y\to 0}\frac{\log_a(1+y)}{y}} = \frac{1}{\frac{1}{\ln a}} = \ln a$$

(am folosit teoremele 7 şi 5(c) din 1.5.3 şi consecinţa 3 de mai sus).

5) $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x} = a$, $a\in R$.

Într-adevăr, dacă a=0 şi a=1, egalitatea este evidentă. Fie a≠0, a≠1. Atunci

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x} = \left|\begin{array}{l}(1+x)^a-1=y\\ (1+x)^a=1+y\\ a\ln(1+x)=\ln(1+y)\\ y\to 0\end{array}\right| = \lim_{\substack{y\to 0\\ (x\to 0)}}\frac{y}{x} =$$

$$= \lim_{\substack{y\to 0\\ (x\to 0)}}\left[\frac{y}{\ln(1+y)}\cdot\frac{\ln(1+y)}{x}\right] = \lim_{\substack{y\to 0\\ (x\to 0)}}\left[\frac{y}{\ln(1+y)}\cdot\frac{a\ln(1+x)}{x}\right] =$$

$$= \lim_{y\to 0}\left[\frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}}\right]\cdot \lim_{x\to 0}\left[a\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}\right]=\frac{1}{e}\cdot a\cdot e=a$$

(am folosit teoremele 7 şi 5(c) din 1.5.3 şi consecinţa 3 de mai sus)

Astfel, atât în cazul primei limite remarcabile, cât şi în cazul limitei a doua remarcabile şi în consecinţele lor se calculează limita funcţiilor respective, având cazurile exceptate $\left(\frac{0}{0}\right)$ (prima limită remarcabilă, consecinţele ei şi consecinţele 3, 4, 5 din a doua limită remarcabilă) şi (1^{∞}) (a doua limită remarcabilă şi consecinţele 1, 2 ale ei). Deci în toate aceste cazuri am ridicat nedeterminări de forma $\left(\frac{0}{0}\right)$ şi (1^{∞}).

1.5.5. Compararea funcţiilor infinit mici şi infinit mari

Fie $\alpha(x)$ şi $\beta(x)$ funcţii infinit mici în punctul x_0, adică $\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=\lim_{x\to x_0}\beta(x)=0$. A compara aceste două funcţii înseamnă a studia limita raportului lor $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, cu condiţia că $\beta(x)\neq 0$ într-o vecinătate perforată a lui x_0:

1) dacă $\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, atunci spunem că $\alpha(x)$ este *un infinit mic de ordin superior în raport cu* $\beta(x)$. Se notează $\alpha(x)=o(\beta(x))$;

2) dacă $\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$, atunci se spune că $\alpha(x)$ este *un infinit mic de ordin inferior în raport cu* $\beta(x)$;

3) dacă $\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A\neq 0$, atunci se spune că $\alpha(x)$ şi $\beta(x)$ sunt *infinit mici de acelaşi ordin.* În cazul când $A=1$, se spune că funcţiile $\alpha(x)$ şi $\beta(x)$ sunt *echivalente*. Se notează $\alpha(x)\sim\beta(x)$;

4) dacă $\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k}=A\neq 0, k\in R$, atunci spunem că $\alpha(x)$ este *un infinit mic de ordinul k în raport cu* $\beta(x)$ sau $\alpha(x)$ are *ordinul k de descreştere în raport cu* $\beta(x)$.

Exemple.

1. Funcţia infinit mică $\alpha(x)=\ln(1+x^3)$ în punctul $x_0=0$ este de ordin superior în raport cu funcţia infinit mică $\beta(x)=x^2$ în punctul $x_0=0$. Într-adevăr, $\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^3)}{x^3}\cdot x=1\cdot 0=0$ (am folosit consecinţa 3 din a doua limită remarcabilă din 1.5.4).

   Observăm că funcţia infinit mică $\beta(x)$ este de ordin inferior în raport cu $\alpha(x)$, deoarece $\lim_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}}=\left(\frac{1}{0}\right)=\infty$.

2. Funcţiile infinit mici $\alpha(x)=(3^x-1)$ şi $\beta(x)=2x$ în punctul $x_0=0$ au acelaşi ordin, deoarece $\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ln 3$, (am folosit consecinţa 4 din a doua limită remarcabilă din 1.5.4).

3. Folosind consecinţele 3 şi 4 din a doua limită remarcabilă (1.5.4), constatăm că funcţiile infinit mici $\alpha(x)=e^x-1$ şi $\beta(x)=\ln(1+x)$ în punctul $x_0=0$ sunt echivalente, deoarece

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{x}{\ln(1+x)}\right) = 1\cdot 1 = 1.$$

4. Funcţia infinit mică $\alpha(x)=2x^2$, când $x\to 0$, are ordinul $k=2$ de descreştere în raport cu funcţia infinit mică $\beta(x)=\sin x$ în $x_0=0$, deoarece $\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^2} = \lim_{x\to 0}\left(2\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x}{\sin x}\right) = 2\cdot 1\cdot 1 = 2$ (am folosit prima limită remarcabilă din 1.5.4).

Fie $f(x)$ şi $g(x)$ funcţii infinit mari în punctul x_0. A compara aceste două funcţii înseamnă a studia limita raportului lor $\frac{f(x)}{g(x)}$, cu condiţia că $g(x)\neq 0$ într-o vecinătate perforată a lui x_0:

1) Dacă $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, atunci spunem că $f(x)$ este *infinit mare de ordin superior în raport cu g(x).*

2) Dacă $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$, atunci spunem că $f(x)$ este *infinit mare de ordin inferior în raport cu g(x).* Se notează $f(x)=O(g(x))$.

3) Dacă $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = A\neq 0$, atunci spunem că *f(x) şi g(x) au acelaşi ordin.* Când $A = 1$, se spune că *funcţiile infinit mari f(x) şi g(x) sunt echivalente* şi se notează $f(x)\sim g(x)$.

4) Dacă $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{[g(x)]^k} = A\neq 0, k\in R$, atunci spunem că *f(x) este un infinit mare de ordinul k în raport cu g(x)* ori $f(x)$ are ordinul k de creştere în raport cu $g(x)$.

Pot fi formulate reguli analogice pentru compararea funcţiilor infinit mici şi infinit mari, când:

$$x\to -\infty,\ x\to +\infty,\ x\to\infty,\ x\to x_0-0,\ x\to x_0+0.$$

Exemple.

1. Fie $f(x)=\frac{1}{x^2}$ infinit mare în $x_0=0$ şi $g(x)=\frac{1+x}{x}$ infinit mare în $x_0 = 0$. Observăm că $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x(1+x)} = \frac{1}{0} = \infty$, adică $f(x)$ este de ordin superior în raport cu $g(x)$ sau funcţia infinit mare $g(x)$ este de ordin inferior în raport cu $f(x)$.

2. Fie $f(x)=P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$ şi $g(x)=a_nx^n$, $n\in N$, $a_n\neq 0$. Avem

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a_0}{a_nx^n}+\frac{a_1}{a_nx^{n-1}}+\frac{a_2}{a_nx^{n-2}}+...+\frac{a_{n-1}}{a_nx}+1\right) =$$
$$=0+0+0+...+0+1=1.$$

Prin urmare, funcţiile infinit mari $f(x)$ şi $g(x)$ sunt echivalente: $P_n(x)\sim a_nx^n$, când $x\to+\infty$.

3. Fie $f(x)=\left(\frac{3+2x}{x}\right)^2$ cu $\lim_{x\to 0}\left(\frac{3+2x}{x}\right)^2 = \lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{x}+2\right)^2 = \infty$ şi $g(x)=\frac{1}{x}\to\infty$, când $x\to 0$. Avem $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{[g(x)]^2} =$ $= \lim_{x\to 0}(3+2x)^2 = (3+0)^2 = 9\neq 0$. Prin urmare, funcţia infinit mare $f(x)$ are ordinul $k=2$ (de creştere) în raport cu funcţia infinit mare $g(x)$.

Deseori în practică pentru a compara funcţiile infinit mici sau infinit mari se folosesc funcţii universale sau funcţii standard. De exemplu, dacă $\alpha(x)$ este un infinit mic când $x\to x_0$, apoi în calitate de funcţie infinit mică de comparaţie se consideră funcţia universală $\beta(x)=(x-x_0)^n$, $n\in N$. Evident că $\lim_{x\to x_0}\beta(x) = \lim_{x\to x_0}P_n(x) = P_n(x_0) = 0$ (a se consulta ex. 1 din 1.5.3). Dacă $f(x)$ este un infinit mare, când $x\to x_0$, atunci în calitate de funcţie universală se ia funcţia $g(x)=\frac{1}{(x-x_0)^n}$, $n\in N$, dacă $x\to x_0$ şi funcţia x^n, $n\in N$, dacă $x\to\infty$.

Notă. Nu toate funcţiile infinit mici (mari) pot fi comparabile. De exemplu, funcţiile infinit mici $\alpha(x) = x$ şi $\beta(x) = x\cos\frac{1}{x}$, când $x \to 0$, nu sunt comparabile, deoarece $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ nu există (a se consulta exemplul 3 din 1.5.1).

Conform definiţiei echivalenţei a două funcţii infinit mici sau două funcţii infinit mari, obţinem următoarele proprietăţi.

a) Dacă $\alpha(x)$ este o funcţie infinit mică (mare), când $x \to x_0$, atunci $\alpha(x) \sim \alpha(x)$.

Într-adevăr, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\alpha(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} 1 = 1$

b) Dacă $\alpha(x)$ şi $\beta(x)$ sunt două funcţii infinit mici (mari), când $x \to x_0$ şi $\alpha(x) \sim \beta(x)$, atunci $\beta(x) \sim \alpha(x)$.

Într-adevăr, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}} = \frac{1}{1} = 1.$

c) Dacă $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ sunt funcţii infinit mici (mari), când $x \to x_0$ şi $\alpha(x) \sim \beta(x)$, $\beta(x) \sim \gamma(x)$, atunci $\alpha(x) \sim \gamma(x)$.

Într-adevăr, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\gamma(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\cdot\frac{\beta(x)}{\gamma(x)} = 1\cdot 1 = 1.$

d) Dacă $\alpha(x)$ şi $\beta(x)$ sunt două funcţii infinit mici (mari), când $x \to x_0$ şi $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0, c \in R$, atunci $\alpha(x) \sim c\cdot\beta(x)$.

Într-adevăr, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{c\cdot\beta(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\left[\frac{1}{c}\cdot\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\right] = \frac{1}{c}\cdot c = 1.$

Teorema 1. Pentru ca funcţiile infinit mici $\alpha(x)$ şi $\beta(x)$ în x_0 să fie echivalente este necesar şi suficient ca diferenţa lor $[\alpha(x) - \beta(x)]$ să fie un infinit mic de ordin superior în raport cu $\alpha(x)$ sau cu $\beta(x)$.

Demonstraţie. Fie $\alpha(x) \sim \beta(x)$, adică $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} =$

$= \lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1.$ Atunci $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\left[1-\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right] =$ $= 1 - 1 = 0$, adică $[\alpha(x) - \beta(x)]$ este de ordin superior în raport cu $\alpha(x)$, când $x \to x_0$.

În mod analog se constată că $[\alpha(x) - \beta(x)]$ este un infinit mic de ordin superior în raport cu $\beta(x)$.

Fie acum funcţia $[\alpha(x) - \beta(x)]$ un infinit mic de ordin superior în raport, de exemplu, cu $\alpha(x)$, adică $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$ sau $\lim\limits_{x\to x_0}\left[1-\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right] = 0$, de unde $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1$. Prin urmare, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}} = \frac{1}{1} = 1$ şi deci $\alpha(x) \sim \beta(x)$. Teorema este demonstrată.

Teorema 2. Fie $\alpha(x)$, $\alpha_1(x)$, $\beta(x)$, $\beta_1(x)$ funcţii infinit mici sau infinit mari, când $x \to x_0$ şi $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k$. Atunci $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = k$, adică limita raportului a doi infinit mici sau doi infinit mari nu se schimbă, dacă îi înlocuim cu funcţii infinit mici sau infinit mari echivalente.

Demonstraţie. Avem

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{\alpha_1(x)}{\alpha(x)}\cdot\alpha(x)}{\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}\cdot\beta(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha(x)}}{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} =$$

$$= \frac{1}{1}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1\cdot k = k,$$

ceea ce trebuia de demonstrat.

În particular, din teorema 2 rezultă:

a) dacă $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ şi $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta(x)} = k$;

b) dacă $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ şi $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta_1(x)} = k$.

Aşadar, la calcularea limitelor unor fracţii, în cazul când numărătorul şi numitorul sunt funcţii infinit mici sau infinit mari, este raţional deseori să înlocuim numărătorul sau numitorul cu o funcţie infinit mică sau infinit mare echivalentă celei date.

Teorema 3. Suma unui număr finit de funcţii infinit mici (infinit mari) de diferite ordine de descreştere (de creştere) este echivalentă cu termenul care are cel mai mic ordin de descreştere (cel mai mare ordin de creştere).

Demonstraţie. Este suficient de demonstrat teorema pentru suma algebrică a doi termeni. Fie $\alpha(x)$ şi $\beta(x)$ două funcţii infinit mici, când $x \to x_0$, de diferite ordine de descreştere în raport cu funcţia universală $\gamma(x) = x - x_0$. Admitem că

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{[\gamma(x)]^{k_1}} = A \neq 0 \quad \text{şi} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{\beta(x)}{[\gamma(x)]^{k_2}} = B \neq 0, \quad k_1 \neq k_2,$$

adică $\alpha(x) \sim A(x - x_0)^{k_1}$ şi $\beta(x) \sim B(x - x_0)^{k_2}$.

Presupunem că $k_1 < k_2$, adică $k_2 - k_1 > 0$. Atunci

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)+\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to x_0}\left(1 + \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right) = 1 + \lim_{x\to x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} =$$

$$= 1 + \lim_{x\to x_0} \frac{B(x - x_0)^{k_2}}{A(x - x_0)^{k_1}} = 1 + \frac{B}{A} \lim_{x\to x_0} (x - x_0)^{k_2 - k_1} = 1 + 0 = 1.$$

Aceasta înseamnă că $[\alpha(x) + \beta(x)] \sim \alpha(x)$.

Dacă $f(x)$ şi $g(x)$ sunt funcţii infinit mari în punctul x_0 şi k_1, k_2 ($k_1 < k_2$) ordinele de creştere ale lor în raport cu funcţia universală $\gamma(x) = \frac{1}{x - x_0}$, adică $f(x) \sim \frac{A}{(x - x_0)^{k_1}}$ şi $g(x) \sim \frac{B}{(x - x_0)^{k_2}}$ cu $A \neq 0$ şi $B \neq 0$, obţinem

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)+g(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\left[1 + \frac{f(x)}{g(x)}\right] = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} + 1 =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{A}{B}(x - x_0)^{K_2 - K_1} + 1 = 0 + 1 = 1.$$

Prin urmare, $[f(x)+g(x)] \sim g(x)$. Teorema este demonstrată.

Fie $f(x)$, $g(x)$ şi $\gamma(x)$ funcţii infinit mici sau funcţii infinit mari de acelaşi semn, când $x \to x_0$.

Definiţie. Dacă $f(x) = g(x) + \gamma(x)$, când $x \to x_0$, şi $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\gamma(x)}{g(x)} = 0$, atunci $g(x)$ se numeşte *partea principală a funcţiei* $f(x)$, când $x \to x_0$.

Exemple.

1. Parte principală a funcţiei $\sin x$ este funcţia x, când $x \to 0$. Într-adevăr, $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\sin x}{x} = 1$, de unde $\frac{\sin x}{x} = 1 + \alpha(x)$, unde $\alpha(x)$ este o funcţie infinit mică, când $x \to 0$ (a se consulta teorema 1 din 1.5.2). Prin urmare, $\sin x = x + \alpha(x) \cdot x$ şi $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x) \cdot x}{x} = \lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$.
2. Partea principală a polinomului
$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n, \ n \in N, \ a_n \neq 0$$
este funcţia $a_n x^n$, când $x \to +\infty$, deoarece
$$P_n(x) = a_n x^n + \left(a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0\right)$$
şi $$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{a_n x^n} =$$
$$= \frac{1}{a_n} \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \ldots + \frac{a_2}{x^{n-2}} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right) =$$
$$= 0 + 0 + \ldots + 0 + 0 + 0 = 0.$$

Din definiţie reiese că dacă $g(x)$ este partea principală a funcţiei $f(x)$, când $x \to x_0$, atunci $f(x) \sim g(x)$. Într-adevăr,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)+\gamma(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\left[1+\frac{\gamma(x)}{g(x)}\right]=1+0=1.$$

Reieşind din definiţia funcţiilor echivalente, cele două limite remarcabile şi consecinţele lor, obţinem următorul tabel de funcţii echivalente:

1) $\sin u(x) \sim u(x)$; 2) $\mathrm{tg}\, u(x) \sim u(x)$;

3) $\arcsin u(x) \sim u(x)$; 4) $\mathrm{arctg}\, u(x) \sim u(x)$;

5) $1-\cos u(x)=2\sin^2\left[\frac{u(x)}{2}\right]\sim\frac{1}{2}[u(x)]^2$;

6) $\log_a[1+u(x)]\sim\frac{u(x)}{\ln a}$, $a>0$, $a\neq 1$.

Caz particular: $\ln[1+u(x)]\sim u(x)$;

7) $\left[a^{u(x)}-1\right]\sim u(x)\cdot\ln a$, $a>0$, $a\neq 1$.

Caz particular: $e^{u(x)}-1\sim u(x)$

8) $\{[1+u(x)]^k-1\}\sim k\cdot u(x)$, $k\in R$.

În formulele 1) – 8) funcţia $u(x)$ este o funcţie infinit mică când $x\to x_0$, care, de regulă, coincide cu funcţia etalon $(x-x_0)^n, n\in N$.

9) $P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n\sim a_nx^n$, când $x\to+\infty$ şi $n\in N$, $a_n\neq 0$.

10) $P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n\sim a_ix^i$, când $x\to 0$ şi $a_0=a_1=...=a_{i-1}=0$, $1\le i<n$, $i\in N$, $n\in N$.

Formulele 1) – 10) şi teoremele 1 – 3 se aplică foarte des la ridicarea nedeterminărilor.

Exemplul 1. Să se calculeze limita

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)+\arcsin 3x-\mathrm{tg}(x^3)}{\sin 2x+(\mathrm{arctg}\,x)^2+(e^x-1)^5}.$$

Folosind formulele 1) – 10) şi teorema 3, avem

1) $\ln(1+x+x^2)\sim(x+x^2)\sim x$, când $x\to 0$;

2) $\arcsin(3x)\sim 3x$, când $x\to 0$;

3) $\mathrm{tg}(x^3)\sim x^3$, când $x\to 0$;

4) $\sin 2x\sim 2x$, când $x\to 0$;

5) $(\mathrm{arctg}\,x)^2\sim x^2$, când $x\to 0$;

6) $(e^x-1)^5\sim x^5$, când $x\to 0$.

Aplicând teoremele 2 şi 3, obţinem următoarea valoare a limitei iniţiale:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+3x-x^3}{2x+x^2+x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{4x+(-x^3)}{2x+x^2+x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{2x}=\lim_{x\to 0}2=2.$$

Prin urmare, limita iniţială este egală cu 2.

Exemplul 2. Să se calculeze limita

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[5]{2+7x}+\sqrt[3]{x^2}+2}{\sqrt{6+x^3}+4x}.$$

Avem

1) $\sqrt[5]{2+7x}\sim(7x)^{1/5}$, când $x\to+\infty$, deoarece

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[5]{2+7x}}{(7x)^{1/5}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[5]{\frac{2}{7x}+1}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{x}+1\right)^{1/5}=$$

$$=\left(\frac{2}{7}\cdot 0+1\right)^{1/5}=1$$ (am folosit teoremele 5 şi 8 din 1.5.3).

2) $\sqrt[3]{x^2}+2\sim\sqrt[3]{x^2}$, când $x\to+\infty$, deoarece

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2}+2}{\sqrt[3]{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}\right)=1+0=1.$$

3) $\sqrt[5]{2+7x}+\sqrt[3]{x^2}+2\sim(7x)^{1/5}+\sqrt[3]{x^2}\sim\sqrt[3]{x^2}$ (am aplicat teorema 3 de mai sus).

4) $\sqrt{6+x^3}+4x\sim x^{3/2}+4x\sim x^{3/2}=\sqrt{x^3}$ (similar punctului precedent).

Prin urmare, aplicând teorema 2 de mai sus, obţinem

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[5]{2+7x}+\sqrt[3]{x^2}+2}{\sqrt{6+x^3}+4x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[6]{\frac{x^4}{x^9}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[6]{x^5}}=\frac{1}{\infty}=0.$$

Exemplul 3. Să se calculeze $\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Aplicând teorema 8 din 1.5.3, avem

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}e^{\ln(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\ln\cos 2x}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{x^2}}.$$

Observăm că

$$\ln\cos 2x=\ln\left(1-2\sin^2 x\right)\sim\left(-2\sin^2 x\right)\sim\left(-2x^2\right),\ \text{când } x\to 0.$$

Deci $\quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(-2x^2\right)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}(-2)=-2.$

Prin urmare, $\quad \lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-2}=\dfrac{1}{e^2}.$

1.6. Funcţii continue

1.6.1. Continuitatea funcţiei într-un punct

Definiţia 1. Funcţia *f(x)*, definită în punctul x_0 şi într-o vecinătate oarecare a acestui punct, se numeşte *continuă în punctul* x_0, dacă $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ sau, ceea ce este acelaşi lucru,

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f\left(\lim_{x\to x_0}x\right).$$

Aşadar, din definiţia continuităţii funcţiei într-un punct reiese că simbolurile (semnele) funcţiei şi ale limitei se pot schimba cu locurile.

Remarcăm de asemenea că în cazul continuităţii funcţiei într-un punct, ea este definită într-o vecinătate obişnuită a acestui punct, nu într-o vecinătate perforată a lui ca în cazul definiţiei limitei funcţiei într-un punct.

Definiţia continuităţii funcţiei într-un punct poate fi exprimată în limbajul "şirurilor" sau "$\varepsilon-\delta$".

Definiţia 2. Funcţia *f(x)* se numeşte *continuă în punctul* x_0, dacă pentru orice şir $\{x_n\}$ de valori ale argumentului *x*, convergent către x_0, şirul respectiv $\{f(x_n)\}$ de valori ale funcţiei *f(x)* este convergent către $f(x_0)$.

Definiţia 3. Funcţia *f(x)* se numeşte *continuă în punctul* x_0, dacă pentru orice număr $\varepsilon>0$ există un număr $\delta>0$, care, în general, depinde de ε, astfel încât pentru toate valorile lui *x* ce satisfac inegalitatea $|x-x_0|<\delta$ se verifică inegalitatea $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

În simbolurile logicii matematice definiţia se scrie astfel:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x:|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

Vom aduce încă o definiţie a continuităţii funcţiei într-un punct, care nu este altceva decât o parafrazare a definiţiei 1.

Avem

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\Rightarrow\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{(x-x_0)\to 0}[f(x)-f(x_0)]=0.$$

Diferenţa $(x-x_0)$ se numeşte *creşterea argumentului x* în punctul x_0 şi se notează, de regulă, prin Δx, iar diferenţa $[f(x)-f(x_0)]$ se numeşte *creşterea funcţiei,* corespunzătoare creşterii Δx a argumentului *x* şi se notează $\Delta y=\Delta f(x)$. Deci $(x-x_0)=\Delta x$ şi $\Delta y=[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]$. Observăm că pentru o valoare fixată a punctului x_0, Δy este funcţie de argumentul Δx. Utilizând aceste notaţii, putem enunţa o altă definiţie a continuităţii funcţiei într-un punct.

Definiția 4. Funcția $y=f(x)$ se numește *continuă în punctul* x_0, dacă $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$, adică unei creșteri Δx infinit mică a argumentului îi corespunde o creștere Δy infinit mică a funcției.

Această definiție în unele cazuri este cu mult mai comodă pentru uzul practic decât celelalte.

Dacă $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$ (respectiv $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$), atunci funcția $f(x)$ se numește *continuă la stânga* (respectiv *la dreapta*) *în punctul* x_0. Funcția $f(x)$ este continuă în x_0, dacă și numai dacă, este continuă și la dreapta, și la stânga. Acest criteriu reiese imediat în baza teoremei 2 din 1.5.1.

Continuitatea la dreapta sau continuitatea la stânga se mai numește *continuitate laterală.*

Definiția modernă a noțiunii de continuitate a funcției i se datorează matematicianului francez *A. Cauchy* și matematicianului ceh *B. Bolzano* (1781–1848). O contribuție considerabilă în dezvoltarea noțiunii de continuitate a funcției îi revine matematicianului francez *G. Darboux* (1842–1917).

Exemplul 1. Să se cerceteze continuitatea funcției:

$$f(x)=\begin{cases} x-1, \text{ dacă } x\in\,]-\infty,0[\\ x+1, \text{ dacă } x\in[0,+\infty[\end{cases}$$

1) Fie $x_0\in\,]-\infty,0[$. Avem

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}(x-1)=\lim_{x\to x_0} x-\lim_{x\to x_0} 1=x_0-1=f(x_0),$$

adică funcția f este continuă în orice punct din intervalul $]-\infty,0[$.

2) Fie $x_0\in\,]0,+\infty[$. Avem

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}(x+1)=\lim_{x\to x_0} x+\lim_{x\to x_0} 1=x_0+1=f(x_0),$$

adică funcția f este continuă în orice punct al intervalului $]0,+\infty[$.

3) Fie $x_0=0$. Avem

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}(x-1)=\lim_{x\to 0-0} x-\lim_{x\to 0-0} 1=0-1=-1\neq f(0)=1$$

și $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0}(x+1)=\lim\limits_{x\to 0+0} x+\lim\limits_{x\to 0+0} 1=0+1=1=f(0).$

Observăm că $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=f(0)$, ceea ce înseamnă că funcția f este continuă la dreapta în punctul $x_0=0$.

Teorema 1. Fie funcțiile $f(x)$ și $g(x)$ continue în punctul x_0. Atunci funcțiile $[f(x)\pm g(x)]$, $[f(x)\cdot g(x)]$ și $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, cu condiția $g(x_0)\neq 0$, sunt funcții continue în x_0.

Demonstrație. Deoarece funcțiile $f(x)$ și $g(x)$ sunt continue în x_0, ele au limite în acest punct și sunt respectiv egale cu $f(x_0)$ și $g(x_0)$. Conform teoremei 5 din 1.5.3, limitele funcțiilor $[f(x)\pm g(x)]$, $[f(x)\cdot g(x)]$ și $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ există și sunt respectiv egale cu $f(x_0)\pm g(x_0)$, $f(x_0)\cdot g(x_0)$ și $\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$. Dar aceste numere coincid cu valorile funcțiilor respective în acest punct. Deci, în conformitate cu definiția 1, funcțiile $[f(x)\pm g(x)]$, $[f(x)\cdot g(x)]$ și $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ sunt continue în punctul x_0.

Notă. Teorema 1 poate fi generalizată asupra unui număr finit de funcții.

Teorema 2. Dacă funcția $u=\varphi(x)$ este continuă în punctul x_0, iar funcția $y=f(u)$ este continuă în punctul $u_0=\varphi(x_0)$, atunci funcția compusă $y=f(\varphi(x))$ este continuă în x_0.

Demonstrație. Conform ipotezei teoremei, $\varphi(x)$ este continuă în x_0, prin urmare, $\varphi(x)\to\varphi(x_0)$ când $x\to x_0$; funcția $y=f(u)$ este continuă în $u_0=\varphi(x_0)$, deci $f(u)\to f(u_0)$, când $u\to u_0$, adică $\varphi(x)\to\varphi(x_0)$.

Aplicând teorema despre limita funcției compuse (a se consulta teorema 7 din 1.5.3), obținem

$$\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x))=\lim_{u\to u_0} f(u).$$

În virtutea continuităţii funcţiilor $\varphi(x)$ în punctul x_0 şi $f(u)$ în u_0 avem $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0)$, $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=f(u_0)$. Prin urmare,

$$\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x))=\lim_{u\to u_0} f(u)=f(u_0)=f(\varphi(x_0)),$$

ceea ce înseamnă, conform definiţiei 1, că funcţia compusă $y=f(\varphi(x))$ este continuă în x_0. Teorema este demonstrată.

Conform teoremelor 2 şi 4 din 1.5.3 obţinem următoarele rezultate:

1) dacă f este o funcţie continuă în punctul x_0 şi $f(x_0)>0$ (sau $f(x_0)<0$), atunci într-o vecinătate a punctului x_0 funcţia f ia numai valori pozitive (respectiv negative);
2) dacă f este o funcţie continuă în punctul x_0, atunci funcţia modul $|f|$ este şi ea continuă în acest punct.

Considerăm câteva exemple.

Exemplul 2. Continuitatea funcţiilor raţionale.

Evident că funcţia constantă $f(x)=c$, $x\in R$, $c\in R$ este continuă în orice punct $x_0\in R$, deoarece

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} c=c=f(x_0).$$

De asemenea funcţia $f(x)=x$, $x\in R$ este continuă în orice punct $x_0\in R$.

În exemplele 1 şi 2 din 1.5.3 am arătat că

$$\lim_{x\to x_0} P(x)=\lim_{x\to x_0}\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n\right)=P_n(x_0)$$

şi $$\lim_{x\to x_0}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m}\right)=\frac{P_n(x_0)}{Q_m(x_0)},$$

cu condiţia că $Q_m(x_0)\neq 0$ şi $n\in N$, $m\in N$, $a_n\neq 0$, $b_m\neq 0$.

Aceasta înseamnă că funcţia - polinom şi funcţia raţională sunt continue în orice punct din domeniul lor de definiţie.

Spre exemplu, funcţia raţională $R(x)=\dfrac{P_3(x)}{Q_2(x)}=\dfrac{3x^3+x^2+1}{x^2-1}$ este continuă în toate punctele x, diferite de -1 şi 1.

Exemplul 3. Continuitatea funcţiilor trigonometrice.

Să considerăm funcţiile trigonometrice $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{cosec} x=\dfrac{1}{\sin x}$ şi $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$.

Să arătăm că funcţia $\sin x$ este continuă în orice punct $x_0\in R$. Într-adevăr, conform definiţiei 4, avem

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0]=\lim_{\Delta x\to 0}2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)=$$

$$=2\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right]=$$

$$=\lim_{\frac{\Delta x}{2}\to 0}\left(\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\left[\Delta x\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right]=0,$$

ca produsul dintre o funcţie infinit mică şi o funcţie mărginită.

Similar se demonstrează că funcţia $\cos x$ este continuă în orice punct $x_0\in R$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[\cos(x_0+\Delta x)-\cos x_0]=\lim_{\Delta x\to 0}(-2)\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\sin\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)=$$

$$=(-2)\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \left(\frac{\Delta x}{2}\to 0\right)}}\left[\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\frac{\Delta x}{2}\cdot\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right]=$$

$$=-\lim_{\frac{\Delta x}{2}\to 0}\left(\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\left[\Delta x\cdot\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right]=$$

$$=-\lim_{\Delta x\to 0}\left[\Delta x\cdot\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right]=0,$$

ca produsul dintre o funcţie infinit mică şi o funcţie mărginită.

Din continuitatea funcţiilor $\sin x$ şi $\cos x$, conform teoremei 1 de mai sus, rezultă că funcţiile $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\sec = \frac{1}{\cos x}$ sunt continue în toate punctele x, pentru care $\cos x \neq 0$, adică în toate punctele, cu excepţia punctelor $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$. La fel rezultă şi continuitatea funcţiilor $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ şi $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$ în toate punctele x, cu excepţia punctelor pentru care $\sin x = 0$, adică $x = \pi n$, $n \in Z$.

Exemplul 4. Continuitatea funcţiilor exponenţială şi logaritmică.

Să arătăm că funcţia $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ este continuă în orice punct $x_0 \in R$.

Într-adevăr,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0}\left(a^{x_0+\Delta x} - a^{x_0}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(a^{x_0} \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \cdot \Delta x\right) =$$

$$= a^{x_0} \cdot \ln a \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0.$$

Prin urmare, funcţia $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ este continuă în orice punct de pe axa numerică.

Similar, pentru funcţia $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, avem

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0}[\log_a(x_0 + \Delta x) - \log_a x_0] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}(\log_a \frac{x_0 + \Delta x}{x_0} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \left(\frac{\Delta x}{x_0} \to 0\right)}} \frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)}{\frac{\Delta x}{x_0}} \cdot \frac{\Delta x}{x_0} = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0,$$

ceea ce înseamnă că funcţia $\log_a x$ este continuă în orice punct din domeniul său de definiţie, adică $x > 0$.

Exemplul 5. În exemplul 5 din 1.5.1 am demonstrat că $\lim_{\Delta x \to 0}|\operatorname{sgn} x| = 1$. Observăm însă că $|\operatorname{sgn} 0| = 0$ şi, prin urmare, $\lim_{\Delta x \to 0}|\operatorname{sgn} x| \neq |\operatorname{sgn} 0|$, adică $\lim_{\Delta x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, ceea ce înseamnă că funcţia $f(x) = |\operatorname{sgn} x|$, $x \in R$, nu este continuă în punctul $x_0 = 0$.

1.6.2. Puncte de discontinuitate şi clasificarea lor

Dacă funcţia $f(x)$ este definită în vecinătatea punctului x_0 (în afară poate de însuşi punctul x_0) şi nu este continuă în punctul x_0, această funcţie se numeşte *discontinuă* în punctul x_0. În acest caz punctul x_0 se numeşte *punct de discontinuitate* al funcţiei $f(x)$.

În paragraful precedent am scos în evidenţă că funcţia $f(x)$ este continuă în punctul x_0, dacă şi numai dacă este continuă şi la dreapta şi la stânga, adică

$$\lim_{\Delta x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{\Delta x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Dacă x_0 este un punct de discontinuitate al funcţiei $f(x)$, avem următoarele cazuri.

Cazul 1. Limitele laterale ale funcţiei $f(x)$ în punctul x_0 sunt finite şi egale, însă nu coincid cu valoarea funcţiei în acest punct, adică

$$A = \lim_{\Delta x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{\Delta x \to x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0),$$

unde $f(x_0)$ este finită, sau infinită, sau nu există.

Asemenea puncte sa numesc *puncte de discontinuitate eliminabilă sau aparentă.* Acest termen "discontinuitate eliminabilă" sau "discontinuitate aparentă" este îndreptăţit prin faptul că este suficient de modificat funcţia numai în punctul x_0, considerând $f(x_0) = A$. Funcţia astfel definită este deja continuă în acest punct.

Exemplul 1. Fie funcţia

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ B, & \text{dacă } x = 0, \text{ unde } B \neq 1. \end{cases}$$

Observăm că această funcţie este continuă în orice punct $x\neq 0$, ca raportul a două funcţii continue pe R. În punctul $x_0=0$ avem

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Observăm că $\lim_{x\to 0}f(x)=1\neq f(0)=B$, adică $x_0=0$ este un punct de discontinuitate eliminabilă pentru funcţia $f(x)$.

Dacă considerăm $f(0)=1$, adică $B=1$, atunci discontinuitatea în $x_0=0$ dispare şi funcţia nou definită

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & \text{dacă } x\neq 0\\ 1, & \text{dacă } x=0\end{cases}$$

este deja continuă pe R.

Exemplul 2. Fie $f(x)=|\operatorname{sgn} x|=\begin{cases}1, \text{ dacă } x\neq 0\\ 0, \text{ dacă } x=0.\end{cases}$

În baza exemplelor 5 din 1.5.1 şi 5 din 1.6.1 uşor se obţine că această funcţie este continuă în orice punct $x_0\neq 0$, deoarece

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=1=f(x_0).$$

În punctul $x_0=0$ avem

$$1=\lim_{x\to 0-0}f(x)=\lim_{\Delta x\to 0+0}f(x)\neq f(x_0)=|\operatorname{sgn} 0|=0,$$

adică punctul $x_0=0$ este un punct de discontinuitate eliminabilă. Dacă considerăm $f(0)=1$, atunci pentru această funcţie modificată

$$f(x)=\begin{cases}|\operatorname{sgn} x|, & \text{dacă } x\neq 0\\ 1, & \text{dacă } x=0\end{cases}$$

discontinuitatea dispare şi ea devine deja continuă pe R.

Cazul 2. Limitele laterale ale funcţiei $f(x)$ în punctul x_0 sunt finite şi diferite, adică $\lim_{x\to x_0-0}f(x)\neq\lim_{\Delta x\to x_0+0}f(x)$.

În cazul acesta numărul $\left|\lim_{x\to x_0-0}f(x)-\lim_{\Delta x\to x_0+0}f(x)\right|$ se numeşte *saltul funcţiei* $f(x)$.

Punctele de discontinuitate din cazurile 1) şi 2) se numesc *puncte de discontinuitate de speţa 1.*

Exemplul 3. Fie funcţia

$$f(x)=\begin{cases}x, \text{ dacă } x<0\\ 3, \text{ dacă } x=0\\ 3+x, \text{ dacă } x>0.\end{cases}$$

Observăm că punctul $x_0=0$ este un punct de discontinuitate de speţa 1, deoarece

$$\lim_{x\to 0-0}f(x)=\lim_{x\to 0-0}x=0 \text{ şi } \lim_{x\to 0+0}f(x)=\lim_{x\to 0+0}(3+x)=3+0=3.$$

Saltul acestei funcţii în $x_0=0$ este egal cu 3 – 0 = 3.

Remarcăm că funcţia $f(x)$ este continuă la dreapta în punctul $x_0=0$, deoarece

$$\lim_{x\to 0+0}f(x)=\lim_{x\to 0+0}(3+x)=3=f(0).$$

Exemplul 4. După cum am arătat în exemplul 6 din 1.5.1 (a se consulta de asemenea graficul acestei funcţii din 1.3.5), funcţia

$$f(x)=\begin{cases}-1, \text{ dacă } x<0\\ 0, \text{ dacă } x=0\\ 1, \text{ dacă } x>0\end{cases}$$

are în punctul $x_0=0$ o discontinuitate de speţa 1, deoarece

$$\lim_{x\to 0-0}f(x)=\lim_{x\to 0-0}(-1)=-1 \text{ şi } \lim_{x\to 0+0}f(x)=\lim_{x\to 0+0}1=1.$$

Saltul acestei funcţii în $x_0=0$ este egal cu 1 – (–1) = 2.

Exemplul 5. Fie $f(x)=E(x)$ (a se consulta ex. 1 din 1.3.5).

Din graficul acestei funcţii avem că funcţia $E(x)$ este discontinuă în punctele $x_n=n$, $n\in Z$, deoarece

$$\lim_{x\to x_n-0}E(x)=n-1, \text{ iar } \lim_{x\to x_n+0}E(x)=n,\ n\in Z.$$

Aceasta înseamnă că punctele $x_n = n$, $n \in Z$, sunt puncte de discontinuitate de speţa 1 pentru funcţia $E(x)$. Saltul acestei funcţii în $x_n=n$, $n \in Z$, este egal cu $n-(n-1)=1$.

Observăm că

$$\lim_{x \to x_n + 0} E(x) = n = E(x_n),\ n \in Z,$$

adică funcţia $E(x)$ este continuă la dreapta în punctele $x_n = n$, $n \in N$.

Exemplul 6. Fie funcţia

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+3^{1/x}}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ B, & \text{dacă } x = 0, \end{cases}$$

unde B este orice număr real.

Arătăm că punctul $x_0 = 0$ este un punct de discontinuitate de speţa 1 pentru $f(x)$.

Într-adevăr, dacă şirul $\{x_n\}$ este un şir infinit mic şi termenii x_n, $n \in N$ sunt numere pozitive, atunci şirul $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ este un şir infinit mare şi $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{x_n} = +\infty$, deci şirul $\left\{1+3^{\frac{1}{x_n}}\right\}$ este de asemenea un şir infinit mare cu $\lim\limits_{n \to \infty}\left(1+3^{\frac{1}{x_n}}\right) = +\infty$. Prin urmare, şirul

$\left\{f(x_n) = \dfrac{1}{1+3^{\frac{1}{x_n}}}\right\}$ valorilor corespunzătoare ale funcţiei $f(x)$ este un şir infinit mic, adică $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x_n) = 0$. Prin urmare, $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = 0$.

Dacă însă şirul $\{x_n\}$ este un şir infinit mic şi termenii lui sunt numere negative, atunci şirul $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ este un şir infinit mare şi $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{x_n} = -\infty$. Prin urmare, $\lim\limits_{n \to \infty} 3^{\frac{1}{x_n}} = 0$ şi

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} \frac{1}{1+3^{1/x}} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

Saltul acestei funcţii în $x_0=0$ este egal cu $1 - 0 = 1$.

Constatăm că dacă $B = 1$, atunci funcţia $f(x)$ este continuă la stânga în punctul $x_0 = 0$, iar dacă $B = 0$, atunci funcţia $f(x)$ este continuă la dreapta în punctul $x_0 = 0$.

Cazul 3. Cel puţin una din limitele laterale ale funcţiei $f(x)$ este infinită sau nu există, când $x \to x_0$.

În acest caz punctul x_0 se numeşte *punct de discontinuitate de speţa 2.*

Exemplul 7. Fie funcţia

$$f(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ B, & \text{dacă } x = 0, \end{cases}$$

unde B este orice număr real.

Arătăm că punctul $x_0 = 0$ este un punct de discontinuitate de speţa 2 pentru funcţia $f(x)$.

Într-adevăr, în exemplul 3 din 1.5.1 am demonstrat că $\lim\limits_{x \to 0} \cos\dfrac{1}{x}$ nu există. Deci ambele limite laterale ale acestei funcţii nu există. Prin urmare, punctul $x_0=0$ este un punct de discontinuitate de speţa 2 pentru funcţia $f(x)$.

Exemplul 8. Fie funcţia Dirichlet

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in Q \\ 0, & \text{dacă } x \in R - Q = I. \end{cases}$$

Arătăm că orice punct $x_0 \in R$ este un punct de discontinuitate de speţa 2 pentru $D(x)$.

Într-adevăr, fie $x_0 \in R$. Considerăm şirul $\{r_n\}$ de numere raţionale, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x_0$.

Observăm că $D(r_n)=1$ pentru orice $n \in N$. Deci şirul $\{D(r_n)\}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} D(r_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$.

Considerăm acum şirul $\{i_n\}$ de numere iraţionale, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} i_n = x_0$. Avem $D(i_n)=0$ pentru orice $n \in N$. Deci şirul $\{D(i_n)\}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} D(i_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$.

Conform definiţiei limitei funcţiei după Heine, funcţia $D(x)$ nu are limită în punctul x_0. Prin urmare, limitele laterale ale funcţiei $D(x)$ nu există. Deci punctul x_0 este un punct de discontinuitate de speţa 2 pentru $D(x)$.

Exemplul 9. Fie funcţia

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, \text{dacă } x \neq 0 \\ B, \text{dacă } x = 0, \end{cases}$$

unde B este orice număr real.

Constatăm că funcţia $f(x)$ are o discontinuitate de speţa 2 în punctul $x_0 = 0$. Într-adevăr,

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} e^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0 \text{ şi}$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} e^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

Prin urmare, una din limitele laterale ale funcţiei $f(x)$ în $x_0 = 0$ este infinită.

Teoremă. Orice funcţie monotonă $y = f(x)$, $x \in D$, unde D este un interval închis sau deschis, nu are decât puncte de discontinuitate de speţa 1.

Demonstraţie. Fie x_1, x_2, x_3 trei puncte arbitrare ale mulţimii D. Presupunem că $x_1 < x_2 < x_3$. Funcţia f este definită pe D, de unde urmează că $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$ sunt finite. Să demonstrăm că limitele laterale $\lim\limits_{x\to x_2-0} f(x)$ şi $\lim\limits_{x\to x_2+0} f(x)$ sunt finite.

Fie, de exemplu, că funcţia f este crescătoare pe mulţimea D. Atunci $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$, dacă $x_1 < x < x_2$ şi $f(x_2) \le f(x) \le f(x_3)$, dacă $x_2 < x < x_3$, de unde obţinem prin trecerea la limită în inegalităţi că

$$f(x_1) \le \lim_{x\to x_2-0} f(x) \le f(x_2) \text{ şi } f(x_2) \le \lim_{x\to x_2+0} f(x) \le f(x_3),$$

adică limitele la stânga şi la dreapta în punctul arbitrar x_2 sunt finite.

În cazul când f este descrescătoare, teorema se demonstrează în mod asemănător.

Consecinţă. Dacă x_0 este un punct de discontinuitate de speţa 1 pentru funcţia f, monotonă pe D, atunci

a) limitele laterale $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ şi $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ există şi sunt finite;

b) inegalitatea dublă $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \le f(x_0) \le \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, dacă f este nedescrescătoare sau $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \ge f(x_0) \ge \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, dacă f este necrescătoare, conţine cel puţin o inegalitate strictă;

c) intervalul, determinat de oricare inegalitate strictă nu conţine nici o valoare a funcţiei f;

d) intervalele determinate de inegalitățile stricte ale mai multor puncte de discontinuitate ale funcției f nu se intersectează între ele.

Demonstrație. Conform teoremei, punctul x_0 este un punct de discontinuitate de speța 1. Deci a) reiese imediat.

b) Dacă f este nedescrescătoare, avem

$$\lim_{\substack{x\to x_0-0 \\ (x<x_0)}} f(x) \le f(x_0) \le \lim_{\substack{x\to x_0+0 \\ (x>x_0)}} f(x).$$

Întrucât x_0 este un punct de discontinuitate de speța 1, cel puțin una din aceste inegalități este strictă.

Similar se demonstrează că dacă f este necrescătoare, atunci inegalitatea dublă

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) \ge f(x_0) \ge \lim_{x\to x_0+0} f(x)$$

are cel puțin o inegalitate strictă.

c) Fie $x_0 \in D$ și f este nedescrescătoare. Atunci după b) cel puțin una din inegalitățile

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) \le f(x_0) \le \lim_{x\to x_0+0} f(x)$$

este strictă. Admitem că $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) < f(x_0)$ sau $f(x_0) < \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$.

Întrucât

$$\forall x \in D,\ x < x_0 \Rightarrow f(x) \le \lim_{x\to x_0-0} f(x) \text{ și}$$

$$\forall x \in D,\ x > x_0 \Rightarrow f(x) \ge \lim_{x\to x_0+0} f(x),$$

obținem că intervalul $\left]\lim\limits_{x\to x_1-0} f(x), f(x_0)\right[$ sau intervalul $\left]f(x_0), \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)\right[$ nu conțin nici o valoare a funcției f.

Similar se demonstrează și cazul când f este necrescătoare.

d) Fie x_0, x_1 două puncte de discontinuitate de speța 1 ale funcției f și $x_0 < x_1$. Dacă f este nedescrescătoare, avem

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) \le f(x_0) \le \lim_{x\to x_0+0} f(x) \le \lim_{x\to x_1-0} f(x) \le f(x_1) \le$$
$$\le \lim_{x\to x_1+0} f(x).$$

Prin urmare, intervalele ce corespund inegalităților stricte ale punctelor x_0 și x_1 nu se intersectează.

În mod asemănător se demonstrează și cazul când f este necrescătoare.

1.6.3. Funcții continue pe un interval

Vom spune că funcția $f(x)$ este *continuă pe intervalul* $]a,b[$, dacă ea este continuă în orice punct al acestui interval. Funcția $f(x)$ se numește *continuă pe segmentul* $[a,b]$, dacă ea este continuă pe intervalul $]a,b[$, continuă la dreapta în punctul a, adică $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a)$ și continuă la stânga în punctul b, adică $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = f(b)$.

Funcția $f(x)$ se numește *continuă pe porțiuni pe* $[a,b]$, dacă ea este continuă în toate punctele segmentului $[a,b]$ cu excepția unui număr finit de puncte, în care funcția posedă discontinuități de speța 1 și, pe lângă aceasta, funcția are limitele laterale finite în punctele a și b. Funcția se numește *continuă pe porțiuni pe axa numerică*, dacă ea este continuă pe porțiuni pe fiecare segment.

Remarcăm că funcția $E(x)$ este o funcție continuă pe porțiuni pe axa numerică.

Teorema 1. Funcția inversă a unei funcții $f: D \to R$, strict monotonă și continuă pe D, este o funcție strict monotonă și continuă pe mulțimea $f(D)$.

Demonstrație. Fie $f : D \to R$ o funcție strict crescătoare și continuă pe D și f^{-1} funcția inversă funcției f. Avem echivalența

$$x \to y = f(x) \Leftrightarrow y \to f^{-1}(y) = x.$$

Întrucât $f(x)$ este continuă în $x_0 \in D$, avem: pentru orice șir $\{x_n\}$, $x_n \in D$, convergent către x_0, șirul $\{y_n\} = \{f(x_n)\}$ al valorilor corespunzătoare ale funcției f este convergent către $y_0 = f(x_0)$.

Fie acum un șir $\{y_n\}$ strict crescător convergent către $y_0 = f(x_0)$. Funcția f, fiind biunivocă, șirului $\{y_n\}$ îi corespunde un șir unic $\{x'_n\}$, $x'_n \in D$. Să arătăm că șirul $\{x'_n\}$ este convergent către x_0. Șirul $\{x'_n\}$ este strict crescător și mărginit superior, deoarece termenii lui x'_n, $n \in N$, aparțin intervalului D. Deci $\{x'_n\}$ este convergent. Notăm $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = c \in D$. Deoarece f este continuă pe D, avem

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} f(x'_n) = y_0 = f(x_0).$$

Prin urmare, $f(x_0)=f(c)$ și cum f este biunivocă, obținem că $c=x_0$, adică funcția $f^{-1}(y)$ este continuă în punctul y_0.

Se procedează în mod asemănător și în cazul când funcția f este strict descrescătoare și deci șirul $\{y_n\}$ este strict descrescător.

Prin urmare, funcția f^{-1} este strict monotonă și continuă pe domeniul valorilor ei.

Teorema 2 *(Teorema 1 a lui Bolzano – Cauchy)*. Fie funcția $f(x)$ continuă pe segmentul $[a,b]$ și fie că $f(x)$ ia valori de semne opuse la extremitățile segmentului, adică $f(a)\cdot f(b) < 0$. Atunci există un punct $c \in]a,b[$, astfel încât $f(c) = 0$.

Demonstrație. Presupunem că $f(a) < 0 < f(b)$. Împărțim segmentul $[a,b]$ în jumătate cu ajutorul punctului $c = \dfrac{a+b}{2}$. Dacă $f(c) = 0$, teorema este demonstrată. Dacă însă $f(c) \neq 0$, atunci

pentru $f(c) < 0$ avem $f(c) < 0 < f(b)$ și deci pe segmentul $[c,b]$ se respectă condițiile teoremei. Pentru $f(c) > 0$ avem $f(a) < 0 < f(c)$ și pe segmentul $[a, c]$ se respectă condițiile teoremei. Notăm cu $[a_1, b_1]$ segmentul pe care se respectă condițiile teoremei. Astfel, avem $f(a_1) < 0 < f(b_1)$, $a \le a_1 < b_1 \le b$ și $b_1 - a_1 = \dfrac{b-a}{2}$. Împărțim $[a_1, b_1]$ în jumătate cu ajutorul punctului $c_1 = \dfrac{b_1 - a_1}{2}$. Dacă $f(c_1) = 0$, teorema este demonstrată. Dacă însă $f(c_1) \neq 0$, din cele două segmente obținute alegem segmentul care satisface condițiile teoremei și-l notăm prin $[a_2, b_2]$. Deci avem $f(a_2) < 0 < f(b_2)$, $a \le a_1 \le a_2 < b_2 \le b_1 \le b$ și $b_2 - a_2 = \dfrac{b_1 - a_1}{2} = \dfrac{b-a}{2^2}$.

Continuând acest proces, este posibil că la o anumită etapă se obține un punct de diviziune c_k, astfel încât $f(c_k) = 0$ și în acest caz teorema este demonstrată. În caz contrar, procesul continuă și obținem două șiruri de numere reale $\{a_n\}$ și $\{b_n\}$, astfel încât pentru orice $n \in N$ avem $f(a_n) < 0 < f(b_n)$, $a \le a_1 \le a_2 ... \le a_n < b$, și $b \ge b_1 \ge b_2 \ge ... \ge b_n > a$, $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$.

Prin urmare, șirurile $\{a_n\}$ și $\{b_n\}$ sunt monotone și mărginite și deci conform teoremei 7 din 1.4.2 sunt convergente. Notăm $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n + a_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b-a}{2^n} + a_n\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}(b-a)\cdot\frac{1}{2^n} + \lim_{n\to\infty} a_n = (b-a)\cdot 0 + x_0 = x_0.$$

Întrucât funcția f este continuă în punctul $x_0 \in [a,b]$, avem

$$[f(a_n) < 0 < f(b_n)] \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) \le 0 \le \lim_{n\to\infty} f(b_n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_0) \leq 0 \leq f(x_0) \Rightarrow f(x_0) = 0.$$

Teorema este demonstrată.

***Consecinţa 1** (Teorema a 2-a a lui Bolzano - Cauchy).* Fie funcţia $f(x)$ continuă pe segmentul $[a,b]$, $f(a)=A$, $f(b)=B$, iar C este un număr arbitrar, situat între A şi B. Atunci există un punct $c \in]a,b[$, astfel încât $f(c)=C$. Altfel spus, la trecerea de la o valoare la alta, o funcţie continuă ia orice valoare intermediară. Această proprietate a funcţiei continue pe interval se numeşte *proprietatea lui Darboux.*

Demonstraţie. Fie $A < B$ şi $A < C < B$. Considerăm funcţia auxiliară

$$\varphi(x) = f(x) - C,$$

care este continuă pe segmentul $[a,b]$ (ca diferenţa a două funcţii continue) şi ia valori de semne opuse la extremităţile segmentului:

$$\varphi(a) = f(a) - C = A - C < 0,$$

$$\varphi(b) = f(b) - C = B - C > 0.$$

În virtutea teoremei, există un punct $c \in]a,b[$, astfel încât $\varphi(c) = f(c) - C = 0$, de unde $f(c) = C$.

Consecinţa 2. Dacă funcţia $g(x)$ continuă pe $[a,b]$ nu se anulează în nici un punct din $[a,b]$, atunci această funcţie păstrează un semn constant pe tot segmentul $[a,b]$.

Demonstraţie. Presupunem că pe $[a,b]$ există două puncte x_1 şi x_2, astfel încât $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$. Atunci, conform teoremei, există un punct $c \in]x_1, x_2[$, astfel încât $f(c)=0$, ceea ce contrazice ipotezei.

Această consecinţă ne permite să stabilim o regulă practică pentru a afla semnul unei funcţii continue pe segment.

Aranjăm zerourile reale ale funcţiei $g(x)$, continue pe $[a,b]$, în ordine crescândă $a \leq x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n \leq b$ şi atunci pe fiecare din segmentele $[a,x_1]$, $[x_1,x_2]$, $[x_2,x_3]$, . . . , $[x_{n-1},x_n]$, $[x_n,b]$ funcţia $g(x)$, fiind continuă pe aceste segmente, are un

semn constant. Prin urmare, pentru a determina semnul funcţiei $g(x)$ pe aceste segmente, alegem un punct arbitrar ce aparţine lor şi calculăm valoarea funcţiei în acest punct.

Consecinţa 3. Dacă funcţia $f(x)$ este strict monotonă şi continuă pe $[a,b]$ şi dacă $f(a) \cdot f(b) < 0$, atunci ecuaţia $f(x)=0$ are pe intervalul $]a,b[$ o soluţie şi numai una.

Într-adevăr, din consecinţa 1 avem că pe intervalul $]a,b[$ există un punct c astfel încât $f(c)=0$ şi deci ecuaţia $f(x)=0$ are cel puţin o soluţie. Deoarece f este strict monotonă, oricare ar fi punctele x_1 şi x_2, $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, avem $f(x_1) < f(x_2)$ sau $f(x_1) > f(x_2)$ şi deci valorile x_1 şi x_2 nu pot fi ambele soluţii ale ecuaţiei $f(x)=0$.

Exemplul 1. Să se arate că orice polinom de grad impar are cel puţin o soluţie reală.

Într-adevăr, fie

$$f(x) = P_{2n-1}(x) = b_0 + a_1 x + a_3 x^3 + \ldots + a_{2n-1}x^{2n-1},\ a_{2n-1} \neq 0,\ n \in N.$$

Avem

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(b_0 + a_1 x + a_3 x^3 + \ldots + a_{2n-1}x^{2n-1}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x^{2n-1}\left(\frac{b_0}{x^{2n-1}} + \frac{a_1}{x^{2n-2}} + \frac{a_3}{x^{2n-4}} + \ldots + a_{2n-1}\right) =$$

$$= (-\infty)(0+0+0+\ldots+a_{2n-1}) = \begin{cases} -\infty, \text{ dacă } a_{2n-1} > 0 \\ +\infty, \text{ dacă } a_{2n-1} < 0 \end{cases}$$

şi $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(b_0 + a_1 x + a_3 x^3 + \ldots + a_{2n-1}x^{2n-1}\right) =$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^{2n-1} \cdot \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{b_0}{x^{2n-1}} + \frac{a_1}{x^{2n-2}} + \frac{a_3}{x^{2n-4}} + \ldots + a_{2n-1}\right) =$$

$$= (+\infty)(0+0+0+\ldots+a_{2n-1}) = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } a_{2n-1} > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } a_{2n-1} < 0. \end{cases}$$

Prin urmare, funcţia polinomială $f(x) = P_{2n-1}(x)$, $n \in N$, de grad impar, ia atât valori negative, cât şi valori pozitive.

Fie $f(a)<0$ şi $f(b)>0$. Atunci pe segmentul $[a,b]$, dacă $a<b$ sau $[b,a]$, dacă $b<a$ funcţia $f(x)$ satisface condiţiile teoremei: $f(x)$ este continuă pe $[a,b]$ sau pe $[b,a]$ şi $f(a)\cdot f(b)<0$. Prin urmare, există un punct $c\in\,]a,b[$ sau $c\in\,]b,a[$ astfel încât $f(c)=0$, ceea ce înseamnă că orice polinom de grad impar are cel puţin o rădăcină reală.

Exemplul 2. Fie $f(x)=x^4+3x-5$. Să se arate că acest polinom pe segmentul $[1,2]$ are o singură soluţie reală.

Arătăm că acest polinom este o funcţie strict crescătoare pe segmentul $[1,2]$. Într-adevăr, fie x_1, x_2 din $[1,2]$ şi $x_1<x_2$. Avem

$$(x_1<x_2)\Rightarrow(x_2-x_1)>0\Rightarrow f(x_2)-f(x_1)=$$
$$=(x_2^4-x_1^4)+3(x_2-x_1)=(x_2^2-x_1^2)(x_2^2+x_1^2)+3(x_2-x_1)=$$
$$=(x_2-x_1)[(x_2+x_1)(x_2^2+x_1^2)+3]>0\Rightarrow f(x_2)>f(x_1),$$

deoarece x_1, x_2 sunt numere pozitive şi $x_1<x_2$.

Observăm că $f(1)=1+3-5=-1<0$, $f(2)=2^4+3\cdot2-5=$ $=16+1=17>0$ şi funcţia $f(x)$ este continuă pe $[1,2]$. Aplicând consecinţa 3, obţinem că polinomul x^4+3x-5 pe segmentul $[1,2]$ are o singură soluţie reală.

Teorema 3. *(criteriul de continuitate al unei funcţii monotone).*

Funcţia $f:D\to R$, monotonă pe segmentul $D=[a,b]$, este continuă pe $[a,b]$ atunci şi numai atunci când mulţimea valorilor $f(D)$ ale acestei funcţii coincide cu segmentul $[f(a),f(b)]$, dacă f este nedescrescătoare, sau cu segmentul $[f(b),f(a)]$, dacă f este necrescătoare.

Demonstraţie. Condiţia este necesară.

În virtutea monotoniei funcţiei f pe segmentul $[a,b]$, toate valorile acestei funcţii sunt cuprinse între numerele $f(a)$ şi $f(b)$. Întrucât f este şi continuă pe $[a,b]$, conform teoremei 2, ea obţine

toate valorile intermediare între numerele $f(a)$ şi $f(b)$. Prin urmare, mulţimea valorilor funcţiei f, monotonă şi continuă pe $[a,b]$ coincide cu un segment, extremităţile căruia sunt numerele $f(a)$ şi $f(b)$. Observăm că $a<b$ implică $f(a)\le f(b)$, dacă f este nedescrescătoare, şi deci $f(D)=[f(a),f(b)]$ şi $f(a)\ge f(b)$, dacă f este necrescătoare, şi deci $f(D)=[f(b),f(a)]$.

Condiţia este suficientă.

Fie f monotonă pe $[a,b]$ şi mulţimea valorilor sale pe $[a,b]$ coincide cu un segment, extremităţile căruia sunt egale cu numerele $f(a)$ şi $f(b)$. Presupunem că f nu este continuă pe $[a,b]$. Aceasta înseamnă că f este discontinuă într-un punct $x_0\in[a,b]$. Aplicând consecinţa teoremei din 1.6.2, unul din intervalele $\left]\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x),f(x_0)\right[$, $\left]f(x_0),\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)\right[$, ce corespunde inegalităţii stricte, nu conţine nici o valoare a funcţiei f. Deoarece funcţia f este monotonă pe $[a,b]$, acest interval se conţine în segmentul cu extremităţile $f(a)$ şi $f(b)$.

Am obţinut o contrazicere, deoarece acest segment coincide cu mulţimea tuturor valorilor funcţiei f pe $[a,b]$.

Prin urmare, presupunerea nu este justă şi deci teorema este demonstrată.

Din lipsă de spaţiu vom enunţa fără demonstraţie următoarele rezultate importante.

Teorema 4. Dacă funcţia $f(x)$ este continuă pe segmentul $[a,b]$, atunci

a) $f(x)$ este mărginită pe $[a,b]$;

b) $f(x)$ atinge pe segmentul $[a,b]$ valoarea cea mai mare $M=\operatorname*{Sup}\limits_{[a,b]}f(x)$ (se citeşte supremum $f(x)$ pe $[a,b]$) şi valoarea cea mai mică $m = \operatorname*{Inf}_{[a,b]} f(x)$ (se citeşte infinum $f(x)$ pe $[a,b]$).

Demonstraţia acestor teoreme care se numesc *teoremele lui Weierstrass* (1815-1897 – matematician german), le puteţi găsi de exemplu în [2], [3], [7], [12], [16], [17].

1.6.4. Continuitatea uniformă

Definiţie. Funcţia $f(x)$, $x \in D$, se numeşte *uniform continuă* pe *D*, dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta > 0$, care, în genere, depinde numai de ε, astfel încât pentru orice două valori $x_1 \in D$, $x_2 \in D$, care verifică inegalitatea $|x_2 - x_1| < \delta$, avem $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$.

Aplicând această definiţie, obţinem că funcţia liniară $f(x) = ax + b$ este uniform continuă pe mulţimea *R*.

În prealabil să scriem inegalităţile din definiţia continuităţii uniforme a funcţiei $y = f(x)$ pe *D* sub o altă formă. Înlocuim x_1 cu x, iar x_2 cu $x + \Delta x$. Atunci $x_2 - x_1 = x + \Delta x - x = \Delta x$ reprezintă creşterea argumentului *x*, iar $f(x_2) - f(x_1) = f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta y$ reprezintă creşterea corespunzătoare a funcţiei $y = f(x)$.

Proprietatea de continuitate uniformă se va scrie astfel:

$$|\Delta y| = |f(x + \Delta x) - f(x)| < \varepsilon,$$

dacă $|\Delta x| < \delta$, unde x şi $(x + \Delta x)$ sunt două puncte oarecare cu $|\Delta x| < \delta$ din mulţimea *D*.

Aşadar, din definiţia continuităţii uniforme rezultă că numărul $\delta > 0$ depinde, în genere, de numărul ε şi nu depinde de punctele x şi $(x + \Delta x)$ din *D*, care satisfac numai condiţia $|\Delta x| < \delta$.

Drept exemplu să considerăm funcţia $f(x) = x^3$, $x \in R$. În acest caz avem

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 =$$

$$= \Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2)$$

Oricare ar fi valoarea lui *x*, expresia $\Delta y = \Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2)$ tinde evident către zero, dacă creşterea Δx a argumentului tinde către zero. Astfel se confirmă din nou că această funcţie este continuă pentru orice valoare a lui *x*. Prin urmare, ea va fi continuă, de exemplu, pe segmentul $[1,2]$. Să arătăm că ea este uniform continuă pe acest segment. Pentru orice $\varepsilon > 0$ trebuie să alegem un număr $\delta > 0$, astfel încât să fie satisfăcută inegalitatea

$$|\Delta y| = |\Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2)| < \varepsilon, \text{ dacă } |\Delta x| < \delta,$$

$$x \in [1, 2] \text{ şi } (x + \Delta x) \in [1, 2].$$

Avem

$$|\Delta y| = |3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3| \le 3x^2 \cdot |\Delta x| + 3 \cdot |x| \cdot \Delta x^2 + |\Delta x^3|.$$

Dar cea mai mare valoare a lui *x* pe $[1, 2]$ este 2, deci putem scrie

$$|f(x + \Delta x) - f(x)| \le 3x^2 \cdot |\Delta x| + 3 \cdot |x| \cdot \Delta x^2 + |\Delta x^3| \le$$

$$\le 12 \cdot |\Delta x| + 6 \cdot \Delta x^2 + |\Delta x^3|.$$

Presupunem că $\Delta x < 1$. Atunci

$$(\Delta x)^2 < |\Delta x| \text{ şi } |\Delta x^3| < |\Delta x|$$

şi putem continua astfel:

$$|f(x + \Delta x) - f(x)| \le 12 \cdot |\Delta x| + 6 \cdot \Delta x^2 + |\Delta x^3| <$$

$$< 12\,|\Delta x| + 6\,|\Delta x| + |\Delta x| = 19|\Delta x|.$$

Deci inegalitatea $|f(x + \Delta x) - f(x)| < \varepsilon$ va fi, desigur, satisfăcută dacă supunem pe $|\Delta x|$ condiţiei $19|\Delta x| < \varepsilon$. Deoarece am considerat $|\Delta x|<1$, urmează că Δx trebuie să satisfacă două inegalități: $|\Delta x|<1$ şi $|\Delta x|<\frac{\varepsilon}{19}$.

Aşadar, putem lua drept δ pe cel mai mic dintre numerele 1 şi $\frac{\varepsilon}{19}$. Pentru valori mici ale lui $\varepsilon>0$, şi anume $0<\varepsilon<19$, trebuie să luăm $\delta=\frac{\varepsilon}{19}$. În orice caz, este evident că valoarea lui δ astfel aflată pentru un $\varepsilon>0$ dat, va fi una şi aceeaşi pentru orice x din $[1,2]$. Aceasta înseamnă că funcția $f(x)=x^3$ este uniform continuă pe $[1,2]$.

Remarcăm deci următoarele. Fie funcția f continuă pe mulțimea D şi $x_0\in D$. Dacă păstrăm punctul x_0 fix, la numărul $\varepsilon>0$ dat corespunde un număr $\delta>0$, care se schimbă dacă ε se schimbă, dar care depinde şi de punctul x_0. Dacă însă numărul $\delta>0$ depinde numai de $\varepsilon>0$ şi nu depinde de punctul ales $x_0\in D$, atunci spunem că funcția *f*, continuă pe *D*, este şi uniform continuă pe *D*.

Observăm că dacă funcția $f(x)$, $x\in D$, este uniform continuă pe mulțimea *D*, atunci $f(x)$ este şi continuă pe *D*.

Într-adevăr, fie *f* o funcție uniform continuă pe *D*. Aceasta înseamnă că pentru orice număr $\varepsilon>0$, există un număr $\delta>0$, astfel încât pentru orice două valori x_1, x_2 din *D* avem

$$|x_2-x_1|<\delta \Rightarrow |f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon .$$

Considerăm un punct arbitrar $x_0\in D$. Pentru punctele $x_2=x\in D$ şi $x_1=x_0\in D$ avem

$$|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x_0)-f(x)|<\varepsilon ,$$

ceea ce înseamnă că *f* este continuă în punctul arbitrar $x_0\in D$.

Constatăm însă că nu orice funcție continuă pe o mulțime este uniform continuă pe această mulțime.

Pentru a considera un exemplu de acest fel, să convenim ce înseamnă că o funcție nu este uniform continuă pe această mulțime.

Se spune că funcția $f(x)$, $x\in D$, *nu este uniform continuă pe D*, dacă pentru un număr $\varepsilon_0>0$ şi orice număr $\delta>0$ există cel puțin două valori $x_1\in D$, $x_2\in D$ astfel încât $|x_2-x_1|<\delta$, dar $|f(x_2)-f(x_1)|\geq\varepsilon_0$.

Vom arăta, drept exemplu, că funcția $f(x)=\frac{1}{x}$, continuă pe intervalul $]0,1[$, ca raportul a două funcții continue, nu este uniform continuă pe acest interval. Într-adevăr, fie $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$ şi δ orice număr pozitiv. Pentru $x_1=\frac{1}{n+1}<\delta$ şi $x_2=\frac{1}{n}<\delta$ avem $0<x_1<x_2<1$ şi $|x_2-x_1|=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}<\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n}<\delta$, dar $|f(x_2)-f(x_1)|=|n-(n+1)|=1>\frac{1}{2}=\varepsilon_0$.

Prin urmare, funcția $f(x)=\frac{1}{x}$, continuă pe intervalul $]0,1[$, nu este uniform continuă pe acest interval.

Are loc următoarea teoremă.

Teoremă. Orice funcție continuă pe un segment este uniform continuă pe acest segment.

Demonstrația acestei teoreme, care este numită *teorema lui Cantor*, o puteți găsi, de exemplu, în [2], [3], [7], [12], [16], [17] etc.

Capitolul 2

CALCULUL DIFERENŢIAL AL FUNCŢIEI REALE DE O VARIABILĂ REALĂ

2.1. Derivata funcţiei

2.1.1. Funcţii derivabile

Vom studia funcţiile reale de o variabilă reală, iar în calitate de numere, dacă nu este specificat, vom considera numere reale.

Fie f o funcţie definită pe intervalul D şi $x_0 \in D$.

Definiţie. Se spune că funcţia $f:D \to R$ este *derivabilă în punctul* $x_0 \in D$, dacă raportul $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ are în punctul x_0 limită finită. Limita aceasta se numeşte *derivata funcţiei f în punctul* x_0.

Se notează astfel $f'(x_0)$ şi se citeşte "derivata funcţiei ef în raport cu x în punctul x_0" sau simplu "ef prim în x_0". Deci

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Dacă limita $f'(x_0)$ este egală cu infinit ($+\infty$ sau $-\infty$), spunem că *derivata funcţiei în punctul* x_0 *este infinită*. În această situaţie însă funcţia nu este derivabilă în punctul x_0.

Dacă notăm $\Delta x = x - x_0$, care se numeşte *creşterea argumentului* funcţiei $y=f(x)$, iar $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$, care se numeşte *creşterea respectivă a funcţiei*, derivata

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Pentru notarea derivatei funcţiei $y=f(x)$ în punctul x_0, paralel cu notaţiile $f'(x_0)$, $y'(x_0)$, propuse de J. Lagrange (1736 - 1813 - matematician şi mecanician francez) vom folosi şi notaţia

$\dfrac{df(x_0)}{dx}, \dfrac{dy(x_0)}{dx}$, propusă de G. Leibniz ((1646 - 1716) – matematician şi filosof german).

Notă. 1. Din cele spuse mai sus rezultă că funcţia derivabilă într-un punct trebuie să fie definită în acest punct. Dacă o funcţie nu este definită într-un punct, nu se pune problema derivabilităţii în acel punct.

2. Derivata într-un punct este un număr. Din definiţie rezultă şi metoda de calcul a derivatei. Operaţia calculării derivatei unei funcţii se numeşte *derivare*.

Cercetăm următoarele exemple.

Exemplul 1. Funcţia constantă $y=c$, $c \in R$, are derivata egală cu zero în orice punct $x_0 \in R$.

Într-adevăr,

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c-c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0,$$

pentru orice $x_0 \in R$.

Exemplul 2. Funcţia $y=x$, $x \in R$, are derivata egală cu *1* în orice punct $x_0 \in R$.

Într-adevăr,

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0+\Delta x - x_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1.$$

Exemplul 3. Funcţia $y=\sin x$, $x \in R$, este derivabilă în orice punct $x \in R$ şi $(\sin x)' = \cos x$.

Într-adevăr,

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x)-\sin(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot \sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \left(\frac{\Delta x}{2}\to 0\right)}} \left(\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right)\cdot \cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) =$$

$$= 1 \cdot \cos(x+0) = \cos x$$

(în virtutea continuităţii funcţiei $\cos x$ şi a primei limite remarcabile).

Exemplul 4. Funcţia $y=\cos x$, $x\in R$ este derivabilă în orice punct $x\in R$ şi $(\cos x)' = -\sin x$.

Într-adevăr

$$y'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(-2)\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right)\cdot\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=$$

$$=(-1)\cdot\sin(x+0)=-\sin x$$

(am folosit continuitatea funcţiei $\sin x$ şi prima limită remarcabilă).

Exemplul 5. Fie funcţia $y=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$.

Avem

$$y'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(a^x\cdot\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}\right)=a^x\cdot\ln a$$

(în virtutea unei consecinţe din a doua limită remarcabilă). Deci $(a^x)'=a^x\ln a$.

Exemplul 6. Funcţia $y=|x|$ nu este derivabilă în punctul $x_0=0$, deoarece limita $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nu există în punctul $x_0=0$.

Într-adevăr,

$$\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 0-0}\frac{-x-0}{x-0}=\lim_{x\to 0-0}(-1)=-1$$

$$\text{şi}\ \lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 0+0}\frac{x-0}{x-0}=\lim_{x\to 0+0}1=1$$

Prin urmare, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ nu există.

Exemplul 7. Funcţia $y=\sqrt[3]{x}$ nu este derivabilă în punctul $x_0=0$, deoarece

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\Delta x}-0}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}=\infty.$$

Teoremă. Dacă funcţia f este derivabilă într-un punct, atunci ea este continuă în acest punct.

Demonstraţie. Fie $f:D\to R$ derivabilă în $x_0\in D$. Pentru orice $x\neq x_0$, $x\in D$, avem identitatea

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0).$$

Observăm că

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=x_0-x_0=0\quad\text{şi}\quad\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0),$$

unde $f'(x_0)$ este un număr finit.

Prin urmare,

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}\left[f(x_0)+\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)\right]=$$

$$=f(x_0)+f'(x_0)\cdot 0=f(x_0),$$

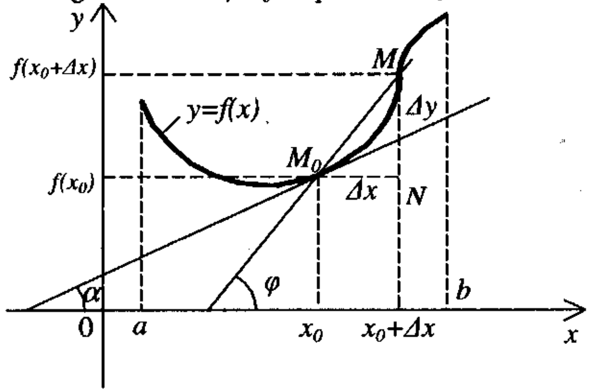
ceea ce înseamnă că funcţia f este continuă în punctul $x_0\in D$.

Notă. Teorema reciprocă acestei teoreme nu este valabilă. O funcţie continuă într-un punct poate şi să nu fie derivabilă în acest punct. În exemplul 6 de mai sus funcţia $y=|x|$ este continuă în punctul $x_0=0$, deşi ea nu este derivabilă în acest punct.

2.1.2. Sensul geometric şi sensul fizic al derivatei

Fie funcţia $y=f(x)$ definită pe $]a,b[$, fie punctele M_0 şi M ce aparţin graficului funcţiei f, care sunt corespunzătoare valorilor x_0 şi respectiv $(x_0+\Delta x)$ ale argumentului. Ducem dreapta M_0M, care se numeşte *secantă*. Fie φ unghiul de înclinaţie al secantei M_0M cu axa OX. Evident că φ depinde de Δx.

Definiţie. Dacă există limita finită $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \alpha$, când $\Delta x \to 0$ sau, echivalent, când $M \to M_0$, atunci dreapta ce trece prin punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ cu coeficientul unghiular $k = tg\,\alpha$ se numeşte *tangentă* la graficul funcţiei f în punctul M_0.



Aşadar, tangenta la graficul funcţiei $f(x)$ în punctul M_0 este poziţia limită a secantei M_0M când $\Delta x \to 0$ sau, echivalent, când $M \to M_0$, unde M aparţine graficului funcţiei $y=f(x)$.

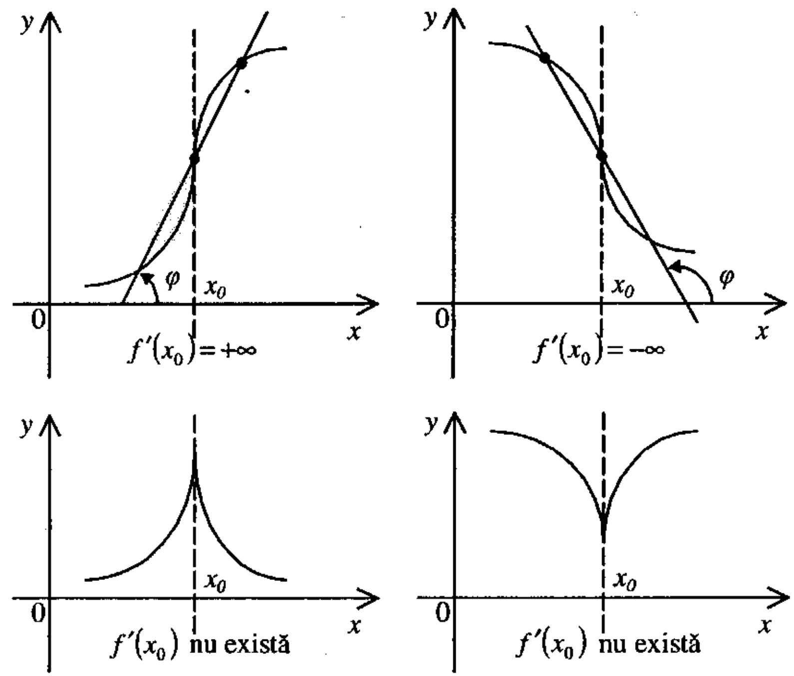
Vom arăta că coeficientul unghiular al tangentei la graficul funcţiei $f(x)$ în punctul M_0 coincide cu derivata funcţiei în acest punct, adică $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$.

Într-adevăr, din ΔM_0MN avem $M_0N = \Delta x$, $MN = \Delta y$ şi deci $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Prin urmare, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\alpha = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$, ceea ce înseamnă că $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$.

Dacă derivata este infinită ($+\infty$ sau $-\infty$), $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ sau $\alpha = -\dfrac{\pi}{2}$ şi tangenta la graficul acestei funcţii în punctul M_0 este paralelă cu axa OY.

Dacă $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ nu există, graficul funcţiei $y=f(x)$ nu are tangentă unică în punctul M_0.

Graficul funcţiei în aceste situaţii critice poate avea schematic următoarea formă:



Aşadar, derivata funcţiei $y=f(x)$ în punctul dat x_0 este egală cu coeficientul unghiular (panta) al tangentei dusă în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ la graficul acestei funcţii.

Din geometria analitică se ştie că ecuaţia dreptei ce trece prin punctul $M_0(x_0, y_0)$ are forma

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

unde k este coeficientul unghiular al dreptei.

Prin urmare, *ecuaţia tangentei, dusă în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ la graficul funcţiei $y=f(x)$, are forma*

$$y_{tg} - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{sau} \quad y_{tg} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

iar *ecuaţia normalei în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ la graficul funcţiei $y=f(x)$ are forma*

$$y_n - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad \text{sau} \quad y_n = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0),$$

dacă $f'(x_0) \neq 0$. *Dacă însă* $f'(x_0) = 0$, *ecuaţia tangentei are forma* $y=y_0$, *iar ecuaţia normalei -* $x=x_0$.

Trecem acum la sensul fizic al derivatei.

Fie M un punct material mobil, care descrie axa OY. La fiecare moment t, drumul parcurs pe axă este o funcţie $y=f(t)$, care caracterizează legea mişcării acestui punct. Punctul se mişcă uniform dacă legea mişcării este caracterizată de relaţia liniară în t

$$y(t)=y_0+v_0 \cdot t,$$

unde $y_0=f(t_0)$ şi v_0 sunt constante reale.

Drumul parcurs între două momente oarecare $t_1<t_2$ este egal cu $\Delta y=y(t_2)-y(t_1)=y_0+v_0 \cdot t_2-(y_0+v_0 \cdot t_1)=v_0(t_2-t_1)$.

Raportul $\frac{\Delta y}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = v_0$ se numeşte *viteza* punctului M în mişcarea rectilinie şi uniformă.

Prin urmare, într-o mişcare rectilinie şi uniformă viteza este constantă.

Fie acum o mişcare oarecare a punctului material M pe axa OY, mişcare caracterizată de legea $f(t)$. Să considerăm două momente $t_1<t_2$ precum şi raportul $\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta y}{\Delta t}$.

Dacă în intervalul $]t_1,t_2[$ vom considera o mişcare uniformă a unui alt punct material, care coincide cu punctul M în momentele t_1 şi t_2, atunci raportul $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ poate fi considerat ca *viteza medie* (v_m) a punctului M în intervalul de timp $]t_1,t_2[$. Acest raport (v_m) ne dă o caracterizare a mişcării între aceste două momente, caracterizare care va fi cu atât mai bună cu cât intervalul $]t_1,t_2[$ este mai mic. Suntem astfel conduşi a considera limita vitezei medii v_m, când $t_2 \to t_1$, adică

$$\lim_{t_2 \to t_1} \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} v_m.$$

Dacă această limită există şi este finită, ea este, prin definiţie, numită *viteza punctului M în momentul* t_1 sau, simplu, *viteza momentană* (v_{t_1}) în t_1. Deci

$$v_{t_1} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} v_m.$$

Aşadar, derivata funcţiei $y=f(x)$ în punctul x_0, din punct de vedere fizic, înseamnă viteza momentană a variaţiei funcţiei y pentru $x=x_0$.

Importanţa derivatei rezidă în faptul că la cercetarea unor procese şi fenomene arbitrare ale naturii, cu ajutorul ei poate fi estimată viteza variaţiei unor mărimi dependente.

2.1.3. Derivate laterale

Vom introduce noţiunile de derivate laterale utilizând noţiunile de limite laterale.

Definiţia 1. Fie $f:D \to R$ şi $x_0 \in D$. Se spune că funcţia f este *derivabilă la dreapta în punctul* x_0, dacă raportul

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},\ x>x_0,\ x \in D,$$

are limita la dreapta finită în punctul x_0. Această limită se numeşte *derivata la dreapta* a funcţiei f în punctul x_0 şi se notează $f'(x_0+0)$. Deci

$$f'(x_0+0) = \lim_{x \to x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Definiţia 2. Fie $f:D \to R$ şi $x_0 \in D$. Se spune că funcţia f este *derivabilă la stânga în punctul* x_0, dacă raportul

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},\ x<x_0,\ x \in D,$$

are limită la stânga finită în punctul x_0. Această limită se numeşte *derivata la stânga* a funcţiei f în punctul x_0 şi se notează $f'(x_0-0)$. Deci

$$f'(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Dacă derivata la stânga sau la dreapta a unei funcţii f într-un punct x_0 este infinită, funcţia nu este derivabilă la dreapta sau la stânga în punctul x_0.

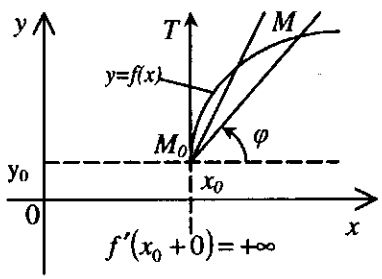
Exemplu. Funcţia $y=|x|$ în punctul $x_0=0$ are derivate laterale:

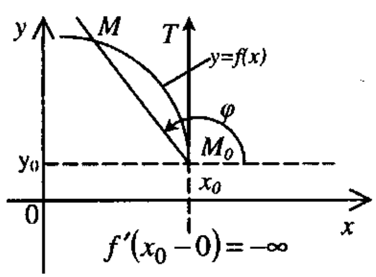
$f'(0+0)=1$ şi $f'(0-0)=-1$ (a se consulta exemplul 6 din 2.1.1).

Legătura dintre derivata funcţiei şi derivatele laterale ale ei este stabilită de următorul criteriu: *funcţia f este derivabilă într-un punct x_0 dacă şi numai dacă, ea este derivabilă la stânga şi la dreapta în punctul x_0 şi derivatele ei laterale sunt egale.* În acest caz, $f'(x_0-0)=f'(x_0+0)=f'(x_0)$.

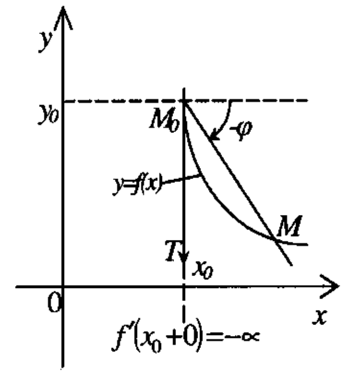
Geometric derivatele laterale caracterizează coeficientul unghiular al semitangentelor duse prin punctul dat la graficul funcţiei date.

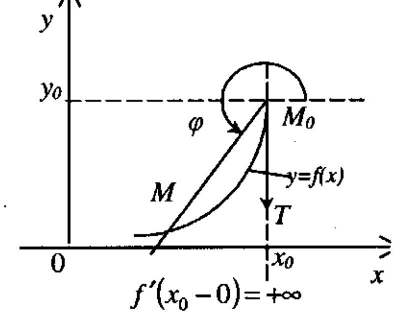
a) Dacă $f'(x_0+0)=+\infty$ sau $f'(x_0-0)=-\infty$, semitangenta M_0T este paralelă cu axa OY şi este situată deasupra punctului M_0:



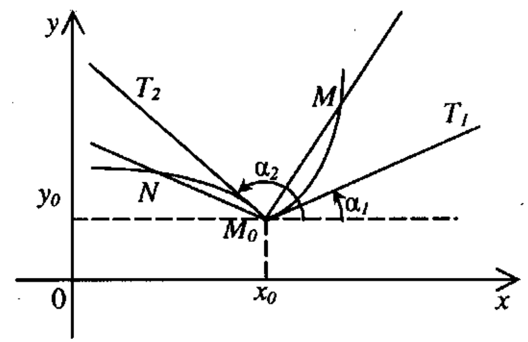


b) Dacă $f'(x_0+0)=-\infty$ sau $f'(x_0-0)=+\infty$, semitangenta M_0T este paralelă cu axa OY şi este situată sub punctul M_0:

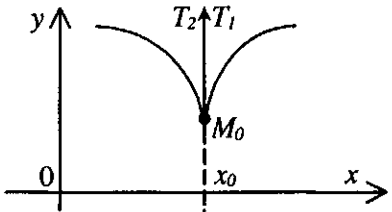


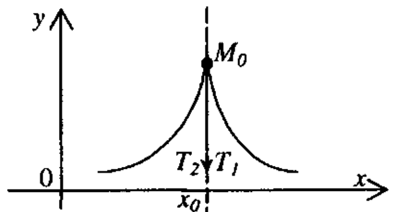


c) Dacă funcţia f are în punctul x_0 derivatele laterale diferite şi cel puţin una din ele este finită, punctul x_0 se numeşte *punct unghiular* al graficului funcţiei $f(x)$, iar cele două semitangente (M_0T_1 şi M_0T_2) formează între ele un unghi $\neq\pi$ sau $\neq 2\pi$:



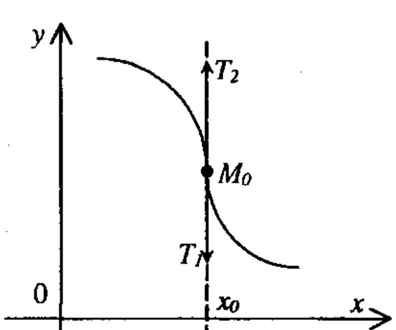
d) Dacă funcţia f are în punctul x_0 derivate laterale infinite şi diferite $f'(x_0+0)=+\infty$, $f'(x_0-0)=-\infty$ sau $f'(x_0+0)=-\infty$, $f'(x_0-0)=+\infty$, cele două semitangente (M_0T_1 şi M_0T_2) se suprapun una alteia; punctul x_0 se numeşte *punct de întoarcere* al graficului funcţiei $f(x)$:

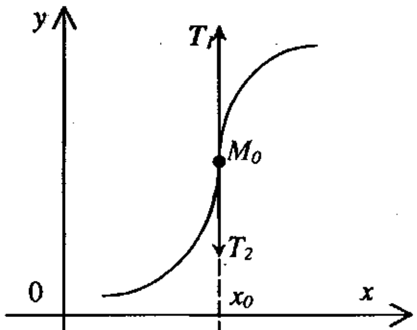




$f'(x_0+0)=+\infty, f'(x_0-0)=-\infty$ $\quad$ $f'(x_0+0)=-\infty, f'(x_0-0)=+\infty$

e) Dacă funcţia f are în punctul x_0 derivate laterale infinite şi egale, cele două semitangente (M_0T_1 şi M_0T_2) sunt în prelungire una alteia; punctul x_0 se numeşte *punct de inflexiune* al graficului funcţiei $f(x)$:





$f'(x_0+0)=f'(x_0-0)=-\infty$ $\quad$ $f'(x_0+0)=f'(x_0-0)=+\infty$

2.1.4. Operaţii aritmetice cu funcţii derivabile

Funcţia $f{:}D\to R$ se numeşte *derivabilă pe D,* dacă ea este derivabilă în orice punct $x\in D$.

Teorema 1. Dacă funcţiile $u(x)$ şi $v(x)$, $x\in D$, sunt derivabile într-un punct $x_0\in D$, atunci funcţia $[u(x)\pm v(x)]$ este derivabilă în acest punct şi $\quad [u(x)\pm v(x)]'_{x=x_0}=u'(x_0)\pm v'(x_0)$.

Într-adevăr,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{[u(x)\pm v(x)]-[u(x_0)\pm v(x_0)]}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}\right]\pm$$

$$\pm\lim_{x\to x_0}\left[\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}\right]=u'(x_0)\pm v'(x_0),$$

adică $\qquad [u(x)\pm v(x)]'_{x=x_0}=u'(x_0)\pm v'(x_0).$

Consecinţă. Dacă funcţiile $u(x)$ şi $v(x)$ sunt derivabile pe D, atunci suma algebrică a acestor funcţii este de asemenea derivabilă pe D şi $\qquad [u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x),\ x\in D$

Notă. 1. Teorema 1 poate fi extinsă asupra unui număr finit de funcţii derivabile într-un punct.

2. Teorema 1 rămâne valabilă şi în cazul când derivatele $u'(x_0)$ şi $v'(x_0)$ sunt infinite, cu condiţia că suma algebrică $u'(x_0)\pm v'(x_0)$ nu reprezintă o nedeterminare de forma $(\infty\text{-}\infty)$, adică în cazul când suma algebrică are sens.

Teorema 2. Dacă funcţiile $u(x)$ şi $v(x)$, $x\in D$ sunt derivabile într-un punct $x_0\in D$, atunci funcţia $u(x)\cdot v(x)$ este derivabilă în punctul $x_0\in D$ şi $\ [u(x)\cdot v(x)]'_{x=x_0}=u'(x_0)\cdot v(x_0)+u(x_0)\cdot v'(x_0)$.

Demonstraţie. Pentru $x_0\in D$, avem

$$\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)\cdot v(x)-u(x_0)\cdot v(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)\cdot v(x)-u(x_0)\cdot v(x_0)-u(x_0)\cdot v(x)+u(x_0)\cdot v(x)}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{u(x)\cdot v(x)-u(x_0)\cdot v(x)}{x-x_0}+\frac{u(x_0)\cdot v(x)-u(x_0)\cdot v(x_0)}{x-x_0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left[v(x)\cdot\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}+u(x_0)\cdot\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}\right]=$$

$$=v(x_0)\cdot u'(x_0)+u(x_0)\cdot v'(x_0),$$

deoarece funcţiile $u(x)$ şi $v(x)$, fiind derivabile în x_0, sunt şi continue în x_0, adică $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=v(x_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=u(x_0)$.

Prin urmare, $[u(x)\cdot v(x)]'_{x=x_0}=u'(x_0)\cdot v(x_0)+u(x_0)\cdot v'(x_0)$.

Consecinţa 1. Dacă $u_1(x)$, $u_2(x)$ ... $u_n(x)$, $x\in D$, $n\in N$, sunt derivabile într-un punct $x_0\in D$, atunci funcţia $u(x)=u_1(x)\cdot u_2(x)\cdot\ldots\cdot u_n(x)$ este derivabilă în x_0 şi

$$u'(x_0)=\sum_{k=1}^{n}u_1(x_0)\cdot u_2(x_0)\cdot\ldots\cdot u_k'(x_0)\cdot\ldots\cdot u_n(x_0). \qquad (1)$$

Demonstrăm această formulă aplicând principiul inducţiei matamatice.

Pentru $n=2$ formula (1) este valabilă.

Presupunem că formula (1) este adevărată pentru $(n-1)$ şi arătăm că este adevărată şi pentru n. Într-adevăr,

$$\begin{aligned}&[(u_1(x)\cdot u_2(x)\cdot\ldots\cdot u_{n-1}(x))\cdot u_n(x)]'_{x=x_0}=\\&=(u_1(x_0)\cdot u_2(x_0)\cdot\ldots\cdot u_{n-1}(x_0))\cdot u_n'(x_0)+\\&+(u_1(x_0)\cdot u_2(x_0)\cdot\ldots\cdot u_{n-1}(x_0))'_{x=x_0}\cdot u_n(x_0)=\\&=u_1(x_0)\cdot u_2(x_0)\cdot\ldots\cdot u_{n-1}(x_0)\cdot u_n'(x_0)+\\&+u_n(x_0)\cdot\sum_{k=1}^{n-1}u_1(x_0)\cdot\ldots\cdot u_k'(x_0)\cdot\ldots\cdot u_{n-1}(x_0)=\\&=\sum_{k=1}^{n}u_1(x_0)\cdot\ldots\cdot u_k'(x_0)\cdot\ldots\cdot u_n(x_0).\end{aligned}$$

Notă. Dacă $u_1(x)=u_2(x)=\ldots=u_n(x)=u(x)$, atunci $[u^n(x)]'_{x=x_0}=n\cdot u^{n-1}(x_0)\cdot u'(x_0)$.

Consecinţa 2. Dacă $u(x)$, $x\in D$ este derivabilă într-un punct $x_0\in D$, atunci funcţia $c\cdot u(x)$ este derivabilă în x_0 şi

$$(c\cdot u(x))'_{x=x_0}=c\cdot u'(x_0).$$

Consecinţa 3. Dacă funcţiile $u(x)$, $v(x)$, $x\in D$, sunt derivabile pe D, atunci funcţia $u(x)\cdot v(x)$ este de asemenea derivabilă pe D, şi $(uv)'=u'v+uv'$, $x\in D$.

Teorema 3. Dacă funcţiile $u(x)$, $v(x)$, $x\in D$, sunt derivabile într-un punct $x_0\in D$ şi $v(x_0)\neq 0$, atunci funcţia $\frac{u(x)}{v(x)}$ este derivabilă în x_0 şi

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'_{x=x_0}=\frac{u'(x_0)v(x_0)-u(x_0)v'(x_0)}{[v(x_0)]^2}.$$

Demonstraţie. Funcţia $v(x)$ ia în punctul x_0 valoarea $v(x_0)\neq 0$. Deoarece $v(x)$ este continuă în x_0, există o δ- vecinătate $v(x_0,\delta)$ a lui x_0 în care $v(x)\neq 0$ pentru orice x din $v(x_0,\delta)$. Pentru $x\in v(x_0,\delta)$ avem

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{u(x)}{v(x)}-\frac{u(x_0)}{v(x_0)}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)\cdot v(x_0)-u(x_0)\cdot v(x)}{(x-x_0)\cdot v(x)\cdot v(x_0)}=\\&=\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)\cdot v(x_0)-u(x_0)\cdot v(x)-u(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v(x)}{(x-x_0)\cdot v(x)\cdot v(x_0)}=\\&=\lim_{x\to x_0}\frac{[u(x)\cdot v(x)-u(x_0)\cdot v(x)]-[u(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v(x_0)]}{(x-x_0)\cdot v(x)\cdot v(x_0)}=\\&=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{v(x_0)}\cdot\frac{1}{v(x)}\left[v(x)\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}-u(x)\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}\right]=\\&=\frac{1}{v(x_0)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{1}{v(x)}\cdot\left[u'(x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}v(x)-v'(x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}u(x)\right]=\\&=\frac{u'(x_0)v(x_0)-u(x_0)v'(x_0)}{[v(x_0)]^2},\end{aligned}$$

deoarece funcţiile $u(x)$ şi $v(x)$, fiind derivabile în x_0, sunt şi continue în x_0.

Prin urmare,

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'_{x=x_0}=\frac{u'(x_0)v(x_0)-u(x_0)v'(x_0)}{[v(x_0)]^2}.$$

Consecinţă. Dacă funcţiile $u(x)$, $v(x)$, $x\in D$, sunt derivabile pe D şi $v(x)\neq 0$, $x\in D$, atunci funcţia $\frac{u(x)}{v(x)}$ este derivabilă pe D şi $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$ pentru orice $x\in D$.

Exemple.

1. Funcţia $y=x^n$, $n\in N$, $x\in R$, este derivabilă pe R şi $(x^n)' = n\cdot x^{n-1}$.

Într-adevăr, aplicând nota la consecinţa 1 din teorema 2 cu $u(x)=x$, avem $\quad (x^n)' = n\cdot x^{n-1}\cdot (x)' = n\cdot x^{n-1}\cdot 1 = n\cdot x^{n-1}$.

2. Funcţia $y=\mathrm{tg}x$, $x\in R-\left\{k\pi+\frac{\pi}{2}\right\}$, $k\in Z$, este derivabilă pe domeniul ei de definiţie şi

$$y' = (\mathrm{tg}x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'(\cos x)-(\sin x)(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

3. Funcţia $y=\mathrm{ctg}x$, $x\in R-\{k\pi\}$, $k\in Z$, este derivabilă pe domeniul ei de definiţie şi

$$y' = (\mathrm{ctg}x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'(\sin x)-(\cos x)(\sin x)'}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

2.1.5. Derivarea funcţiilor compuse şi inverse

Fie funcţia $u(x)$, $x\in D$, cu domeniul valorilor V şi funcţia $y=f(u)$, $u\in V$. Pentru funcţia compusă $F(x)=f(u(x))$, $x\in D$, avem următoarea teoremă.

Teorema 1. Dacă funcţia $u(x)$, $x\in D$, este derivabilă în punctul $x_0\in D$ şi funcţia $y=f(u)$ este derivabilă în punctul corespunzător $u_0=u(x_0)\in V$, atunci funcţia compusă $F(x)=f(u(x))$ este derivabilă în punctul x_0 şi $F'(x_0) = f'(u(x_0))\cdot u'(x_0)$.

Demonstraţie. Dăm lui x_0 o creştere Δx. Atunci funcţia u capătă o creştere Δu, iar funcţia $y=f(u)$ o creştere Δy. Avem

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\(\Delta u\to 0)}}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u(x_0))\cdot u'(x_0),$$

deoarece funcţia u, fiind derivabilă în x_0, este continuă în x_0 şi deci $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta u = 0$, adică $\Delta u\to 0$ când $\Delta x\to 0$.

Notă. Trebuie să avem în vedere că raţionamentele de mai sus sunt juste doar în cazul când pentru Δx suficient de mic creşterile corespunzătoare Δu sunt diferite de zero, în caz contrar identitatea $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$ îşi pierde sensul. Se poate demonstra că formula de derivare a funcţiei compuse rămâne justă şi în cazul acesta, dar aici omitem această demonstraţie (a se consulta [2], p. 122, [3], p. 156, [12], p. 175).

Consecinţă. Dacă funcţia $u:D\to V$ este derivabilă pe D şi funcţia f este derivabilă pe V, atunci funcţia compusă $f(u(x))$, $x\in D$, este derivabilă pe D şi $[f(u(x))]' = f'(u)\cdot u'(x)$, $x\in D$.

Notă. În teorema 1 a fost considerată o funcţie compusă, în care y depinde de x prin intermediul variabilei u. Sunt posibile dependenţe mult mai compuse, având două, trei şi mai multe variabile intermediare, însă în fiecare caz regula de derivare rămâne aceeaşi. De exemplu, dacă funcţiile:

$v=f_1(x)$: $D\to V_1$ este derivabilă pe D,
$u=f_2(v)$: $V_1\to V_2$ este derivabilă pe V_1,
$y=f_3(u)$: $V_2\to V_3$ este derivabilă pe V_2,

atunci funcţia compusă $y=f_3(f_2(f_1(x)))=F(x)$ este derivabilă pe D şi $y'(x)=y'(u)\cdot u'(v)\cdot v'(x)$ pentru orice $x\in D$.

Să aplicăm această formulă la calcularea derivatei funcţiei $y=\cos(x^2+1)^3$, care este o funcţie compusă: $y=\cos u$, $u=v^3$, $v=x^2+1$.

Observăm că toate funcţiile sunt derivabile pe R. Prin urmare,

$$y'(x)=y'(u)\cdot u'(v)\cdot v'(x)=-\sin u\cdot 3v^2\cdot 2x=-6x(x^2+1)^2\cdot\sin(x^2+1)^3,\ x\in R.$$

Teorema 2. Fie $y=f(x)$ continuă şi strict monotonă într-o δ-vecinătate a punctului x_0. Dacă $f(x)$ este derivabilă în x_0 şi $f'(x_0)\neq 0$, atunci funcţia inversă $x=f^{-1}(y)$ este derivabilă în punctul $y_0=f(y_0)$ şi

$$\frac{df^{-1}(y_0)}{dy}=\frac{1}{\dfrac{df(x_0)}{dx}}.$$

Demonstraţie. Fie $v(x_0,\delta)$ o vecinătate a punctului x_0 în care funcţia $y=f(x)$ este continuă şi strict monotonă. Atunci, conform teoremei 1 din 1.6.3, funcţia inversă $x=f^{-1}(y)$ este continuă şi strict monotonă pe mulţimea $f(v(x_0,\delta))$, care este imaginea vecinătăţii $v(x_0,\delta)$ a punctului x_0 şi conţine punctul y_0. Prin urmare, dacă $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=y-y_0$, $y=f(x)$, atunci

$$(\Delta x\to 0)\Leftrightarrow(\Delta y\to 0).$$

Pentru orice $\Delta x\neq 0$, $\Delta y\neq 0$ avem

$$\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}} \quad \text{şi} \quad \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}},$$

adică

$$\frac{df^{-1}(y_0)}{dy}=\frac{1}{\dfrac{df(x_0)}{dx}}.$$

Consecinţă. Dacă funcţia $f(x)$, $x\in D$, este strict monotonă şi derivabilă pe D şi $f'(x)\neq 0$ pentru orice $x\in D$. Atunci funcţia

inversă $f^{-1}(y)$ este derivabilă pe $f(D)=\{y:\ y=f(x),\ x\in D\}$ şi $\left[f^{-1}(y)\right]'=\dfrac{1}{f'(x)}$, $x\in D$, $y\in f(D)$, unde $y=f(x)$ şi $x=f^{-1}(y)$.

Să aplicăm teorema 2 la derivarea funcţiilor trigonometrice inverse.

1. Funcţia $x=\sin y$, $y\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ este strict crescătoare, continuă şi mulţimea valorilor este intervalul $]-1,1[$. În orice punct $y\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ această funcţie este derivabilă şi $x'(y)=(\sin y)'=\cos y\neq 0$. Conform teoremei 2, funcţia inversă $y=\arcsin x$ în raport cu variabila x este şi ea derivabilă pe intervalul $]-1,1[$ şi are loc egalitatea

$$y'(x)=(\arcsin x)'=\frac{1}{x'(y)}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

deoarece $\cos y=+\sqrt{1-\sin^2 y}$ pentru $y\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Prin urmare,

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x\in]-1,1[.$$

2. Funcţia $x=\cos y$, $y\in]0,\pi[$, este strict descrescătoare, continuă şi mulţimea valorilor ei este intervalul $]-1,1[$. De asemenea această funcţie este derivabilă pe $]0,\pi[$ şi $x'(y)=(\cos y)'=-\sin y\neq 0$ pentru orice $y\in]0,\pi[$. Conform teoremei 2, funcţia inversă $y=\arccos x$ în raport cu variabila x este derivabilă pe $]-1,1[$ şi are loc egalitatea

$$y'(x)=(\arccos x)'=\frac{1}{x'(y)}=\frac{1}{-\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

deoarece $\sin y=+\sqrt{1-\cos^2 y}$ pentru $y\in]0,\pi[$.

3. Funcţiile y=arctg$x$, x=tg$y$, $y\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $x\in]-\infty,+\infty[$ sunt reciproc inverse, deoarece funcţia x=tg$y$ este strict crescătoare pe $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Observăm că x=tg$y$ este derivabilă pe $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ şi $x'(y)=(\mathrm{tg}y)'=\frac{1}{\cos^2 y}\neq 0$ pentru orice $y\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Conform teoremei 2, avem

$$y'(x)=(\mathrm{arctg}x)'=\frac{1}{x'(y)}=\cos^2 y=\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 y}=\frac{1}{1+x^2},$$

pentru orice $x\in R$.

4. Funcţia y=arcctg$x$, $x\in R$, este inversă funcţiei x=ctg$y$, $y\in]0,\pi[$, care este strict descrescătoare şi derivabilă pe $]0,\pi[$ cu $x'(y)=(\mathrm{ctg}y)'=-\frac{1}{\sin^2 y}\neq 0$ pentru orice $y\in]0,\pi[$.

Prin urmare, după teorema 2, avem

$$y'(x)=(\mathrm{arcctg}x)'=\frac{1}{x'(y)}=-\sin^2 y=-\frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2 y}=-\frac{1}{1+x^2},$$

pentru orice $x\in R$.

5. Funcţia $y=\log_a x$, $x>0$, $a>0$, $a\neq 1$ este inversa funcţiei $x=a^y$, $y\in R$, care este strict descrescătoare pe R, dacă $0<a<1$, şi strict crescătoare pe R, dacă $a>1$.

De asemenea $x=a^y$ este derivabilă pe R cu $x'(y)=(a^y)'=a^y\ln a\neq 0$ pentru orice $y\in R$. În virtutea teoremei 2, avem

$$y'(x)=(\log_a x)'=\frac{1}{x'(y)}=\frac{1}{a^y\ln a}=\frac{1}{x\ln a},$$

pentru orice $x\in]0,+\infty[$.

Caz particular. Dacă $a=e$, avem $(\ln x)'=\frac{1}{x}$ pentru orice $x>0$.

6. Fie $y=x^r$, $x>0$, $r\in R$. Avem $y=x^r=e^{\ln x^r}=e^{r\ln x}$, care este o funcţie compusă: $y=e^u$, $u=r\ln x$. Observăm că funcţia $y=e^u$ este derivabilă pe R, iar funcţia $u=r\ln x$ este derivabilă pe $x\in]0,+\infty[$. Aplicând regula derivării funcţiei compuse (teorema 1), obţinem

$$y'(x)=(x^r)'=(e^u)'\cdot(r\ln x)'=e^u\cdot r\cdot\frac{1}{x}=r\cdot e^{r\ln x}\cdot\frac{1}{x}=r\cdot x^r\cdot\frac{1}{x}=r\cdot x^{r-1}.$$

2.1.6. Derivarea funcţiilor implicite şi parametrice

Fie două variabile x şi y valorile cărora sunt legate printr-o dependenţă reciprocă, pe care o vom nota prin $F(x, y)=0$.

Dacă funcţia $y=f(x)$, $x\in D$, transformă ecuaţia $F(x, y)=0$ în identitate în raport cu x, atunci funcţia $y=f(x)$ se numeşte *funcţie implicită*, definită de ecuaţia $F(x, y)=0$.

De exemplu, ecuaţia $x^2+y^2=a^2$ determină implicit următoarele funcţii elementare $y=\sqrt{a^2-x^2}$ şi $y=-\sqrt{a^2-x^2}$. Într-adevăr, în urma substituirii lui y în ecuaţia $x^2+y^2=a^2$ prin aceste valori, obţinem identitatea $x^2+a^2-x^2=a^2$.

Funcţiile $y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$ au fost obţinute în urma rezolvării ecuaţiei date. Dar nu întotdeauna este posibil de a exprima o funcţie implicită în formă explicită, cu alte cuvinte, nu întotdeauna este posibil de a exprima o funcţie sub forma $y=f(x)$*). De exemplu, funcţiile definite de ecuaţiile

$$y^6-\cos(xy)+x^5+x^3y=0 \quad \text{şi} \quad y-x-\sin(x+y)+e^{xy}=0$$

nu pot fi exprimate prin intermediul funcţiilor elementare, adică aceste ecuaţii nu pot fi rezolvate în raport cu x (nici în raport cu y).

Menţionăm că termenii "funcţie explicită" şi "funcţie implicită" caracterizează modul de definire al funcţiei date şi nu

*) Dacă o funcţie este definită printr-o ecuaţie de forma $y=f(x)$, atunci se spune că această funcţie este definită sub formă explicită sau că această funcţie este o funcţie explicită. Spre exemplu, ecuaţia $y-f(x)=0$ defineşte funcţia $y=f(x)$ sub formă implicită, adică $y=f(x)$ în cazul acesta este o funcţie implicită, unde $f(x)$ este o funcţie elementară.

natura ei. Fiecare funcţie explicită $y=f(x)$ poate fi exprimată şi sub formă implicită $f(x)-y=0$ (sau $y-f(x)=0$).

Problemele legate de existenţa funcţiei implicite, de continuitatea şi derivabilitatea ei, vor fi studiate mai târziu în capitolul 5. Indicăm însă în continuare regula de calculare a derivatei unei funcţii implicite, fără a o transforma într-o formă explicită, adică fără a o transforma sub forma $y=f(x)$.

Fie $y=f(x)$ definită implicit de ecuaţia $F(x, y)=0$. Derivăm ambele părţi ale identităţii $F(x, y)=0$ în raport cu x. Observăm că funcţia $F(x, y)$ prin intermediul lui $y= f(x)$ devine o funcţie compusă: $F(x, f(x))=\phi(x)$. Deci $\phi'(x)=\varphi(x, y')=0$. Din relaţia obţinută se determină y'.

Exemplul 1. Ecuaţia $x^2+y^2=a^2$ defineşte o funcţie implicită $y=f(x)$. Fără a determina această funcţie implicită, vom calcula derivata ei. Derivăm ambele părţi ale identităţii $x^2+y^2=a^2$ în raport cu x, presupunând că y este o funcţie de x. Conform regulii de derivare a funcţiei compuse, obţinem $2x+2yy'=0$, de unde $y' = -\dfrac{x}{y}$.

Remarcăm că dacă am fi derivat funcţiile explicite respective $y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$, am fi obţinut

$$y' = \pm\left[\left(a^2-x^2\right)^{1/2}\right]' = \pm\frac{1}{2}\left(a^2-x^2\right)^{\frac{1}{2}-1}\left(a^2-x^2\right)' =$$

$$= \pm\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\left(a^2-x^2\right)}}(0-2x) = (-x)\frac{1}{\pm\sqrt{\left(a^2-x^2\right)}} = \frac{-x}{y} = -\frac{x}{y},$$

adică acelaşi rezultat.

Notă. Din exemplul considerat, rezultă că pentru a calcula derivata funcţiei într-un punct dat x_0, trebuie să fie cunoscută şi valoarea funcţiei $y=f(x)$ pentru x_0, adică $y_0=f(x_0)$.

Exemplul 2. Formulele derivatelor funcţiilor trigonometrice inverse (a se consulta exemplele 1) - 4) din punctul precedent 2.1.5) pot fi demonstrate şi cu ajutorul regulilor de derivare ale funcţiilor compuse şi implicite.

Într-adevăr, dacă vrem să demonstrăm, de exemplu, că

$$y' = (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

procedăm astfel: întrucât funcţia $y=\arccos x$ înseamnă $x=\cos y$, unde $x\in]-1,1[$ *şi* $y\in]0, \pi[$, obţinem că funcţia $y=\arccos x$ poate fi considerată ca o funcţie implicită definită de ecuaţia $x=\cos y$. Derivăm ambele părţi ale acestei ecuaţii în raport cu x, considerând funcţia $\cos y$ ca o funcţie compusă având ca variabilă intermediară funcţia y.

Avem $1=(-\sin y)\cdot y'$, de unde

$$y' = \frac{-1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

deoarece $\sin y = +\sqrt{1-\cos^2 y}$, pentru orice $y\in]0,\pi[$, adică am obţinut acelaşi rezultat (a se consulta exemplul 2 din 2.1.5).

Analog se demonstrează şi celelalte formule.

Fie $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ două funcţii de o variabilă independentă t definite şi continue pe mulţimea $D\subseteq R$. Dacă $x=\varphi(t)$ este o funcţie strict monotonă, atunci există funcţia inversă $t=\varphi^{-1}(t)$, care este univocă, continuă şi strict monotonă. De aceea putem considera variabila y ca o funcţie compusă ce depinde de variabila x prin intermediul variabilei t, numită parametru: $y=\psi(\varphi^{-1}(x))$. În acest caz se spune că funcţia y de variabila x este definită parametric cu ajutorul funcţiilor $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ sau simplu: funcţia $y=f(x)$ se numeşte *funcţie parametrică* caracterizată (definită) de funcţiile $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t\in D$.

Să notăm că funcţia compusă $y=\psi(\varphi^{-1}(x))$ este continuă în virtutea teoremei despre continuitatea funcţiei compuse.

Exemplul 3. Fie funcţiile $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $t\in[0, 2\pi]$, definite şi continue pe acest segment. Dacă $t\in[0, \pi]$, funcţia $x=a\cos t$ este strict descrescătoare, iar pe $[\pi, 2\pi]$ ea este strict crescătoare. Prin urmare, pe $[0,\pi]$ aceste două funcţii definesc o funcţie parametrică $y=f_1(x)$, care este nenegativă pe acest segment ($y=b\sin t\geq 0$, pentru orice $t\in[0,\pi]$) şi pe $[\pi, 2\pi]$ aceste două funcţii definesc o altă funcţie parametrică $y=f_2(x)$, pentru care $y\leq 0$ pe acest segment ($y=b\sin t\leq 0$, pentru orice $t\in[\pi, 2\pi]$).

Dacă vom exprima variabila t prin variabila x din prima ecuaţie (deoarece funcţia inversă a funcţiei $x=a\cos t$ există pe fiecare din aceste două segmente) şi vom substitui-o în ecuaţia $y=b\sin t$, vom obţine dependenţa funcţională explicită în raport cu x. Procedăm astfel: avem $\frac{x}{a}=\cos t$ şi $\frac{y}{b}=\sin t$. Deci $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\cos^2 t+\sin^2 t=1$, adică $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Aceasta este ecuaţia canonică a elipsei. De aici găsim $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, $|x|\leq a$.

Prin urmare, funcţia parametrică pe segmentul $[0,\pi]$ are formă explicită $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, iar pe $[\pi,2\pi]$ - funcţia $y=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, unde $|x|\leq a$.

Deci putem conchide că atunci când t variază de la 0 la 2π, formulele $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ definesc două funcţii parametrice de variabila x, graficile cărora formează o elipsă, ecuaţia canonică a căreia este $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Dacă $a=b$, formulele $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $t\in[0, 2\pi]$ definesc două funcţii parametrice de variabila x, graficele cărora formează circumferinţa $x^2+y^2=a^2$: $y=\sqrt{a^2-x^2}$ şi $y=-\sqrt{a^2-x^2}$ pentru $x\in[-a,a]$.

Funcţiile definite parametric joacă un rol important la cercetarea mişcării unui punct material. Dacă punctul material M se deplasează în planul XOY, atunci coordonatele lui x şi y sunt

funcţii, ce depind de timpul t. Determinând aceste funcţii $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, vom defini complet caracterul mişcării punctului material M. Pentru fiecare interval de timp, pe care funcţia $x=\varphi(t)$ este strict monotonă, putem defini funcţia $y=\psi(\varphi^{-1}(x))$, graficul căreia este o curbă descrisă de M în acest interval de timp. În exemplul de mai sus punctul material a descris o elipsă (în caz particular – o circumferinţă).

Presupunem acum că funcţia parametrică $y=f(x)$ este dată de funcţiile derivabile $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ pe mulţimea $D\subseteq R$ şi $\varphi'(t)\neq 0$ pentru orice $t\in D$. Vom demonstra că funcţia parametrică este derivabilă pe mlţimea valorilor funcţiei $x=\varphi(t)$ şi $y'(x)=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$, $t\in D$, $x\in\varphi(D)=\{x:\ x=\varphi(t),\ t\in D\}$.

Întrucât funcţia $x=\varphi(t)$ posedă o funcţie inversă $t=\varphi^{-1}(x)$, conform teoremei despre derivarea funcţiei inverse avem $t'(x)=\frac{1}{x'(t)}=\frac{1}{\varphi'(t)}$.

Funcţia $y=\psi(\varphi^{-1}(x))$, ca o funcţie compusă, este derivabilă pe mulţimea $\varphi(D)$ şi

$$y'(x)=\psi'(t)\cdot t'(x)=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}=\frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Prin urmare, formula obţinută ne permite să calculăm derivata funcţiei date în mod parametric fără a găsi expresia explicită a dependenţei nemijlocite a funcţiei y în raport cu argumentul x.

Exemplul 4. Să se calculeze derivata funcţiei parametrice $y=f(x)$ caracterizată de funcţiile $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $t\in\,]0,\pi[$.

Avem

$$y'(x)=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{b\cos t}{(-a\sin t)}=\frac{-b\cos t}{a\sqrt{1-\cos^2 t}}=-\frac{b}{a}\frac{\cos t}{\sqrt{1-\cos^2 t}}.$$

Întrucât funcţia $cost = \frac{x}{a}$ pe $]0, \pi[$ posedă o funcţie inversă, avem $t = \arccos\frac{x}{a}$. Deci

$$y'(x) = \frac{-b\cos(\arccos\frac{x}{a})}{a\sqrt{1-\cos^2(\arccos\frac{x}{a})}} = -\frac{b\cdot\frac{x}{a}}{a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}},$$

$x \in]-a,a[$.

Dacă vom utiliza expresia explicită pentru funcţia parametrică $y = f(x)$, adică $y = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, vom obţine acelaşi rezultat:

$$y'(x)=\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)'=\frac{b}{a}\left[\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^{1/2}\right]'=\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{2}\left(a^2-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(a^2-x^2\right)'=$$

$$=\frac{b}{2a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\cdot(0-2x)=\frac{-bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}.$$

2.1.7. Derivarea funcţiilor hiperbolice

În multe aplicaţii ale analizei matematice se întâlnesc combinaţii de funcţii exponenţiale de tipul

$$\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right),\quad \frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right),\quad \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},\ \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\ \text{etc.}$$

Definiţii. 1. Se numeşte *sinus hiperbolic* şi se notează *shx* funcţia $shx = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$.

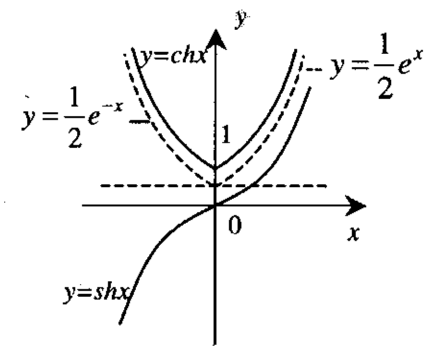
2. Se numeşte *cosinus hiperbolic* şi se notează *chx* funcţia $chx = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$.

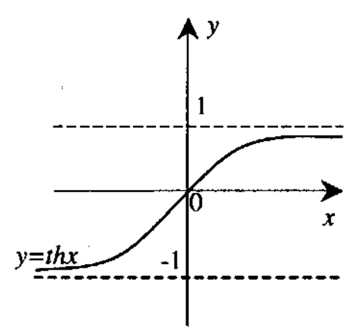
3. Se numeşte *tangentă hiperbolică* şi se notează *thx* funcţia $thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

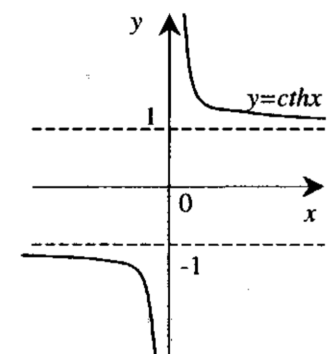
4. Se numeşte *cotangentă hiperbolică* şi se notează *cthx* funcţia $cthx = \frac{chx}{shx} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

Este evident că funcţiile hiperbolice *shx, chx, thx* sunt definite şi continue pe *R*, iar funcţia *cthx* este definită şi continuă pe *R-{0}*.

Graficile funcţiilor hiperbolice sunt următoarele:







Din definiţia funcţiilor hiperbolice rezultă câteva relaţii asemănătoare cu unele proprietăţi ale funcţiilor trigonometrice obişnuite *sinx, cosx, tgx, ctgx.*

Demonstrăm, mai întâi, următoarele formule

$$ch(x\pm y)=chx\cdot chy\pm shx\cdot shy, \qquad (1)$$

$$sh(x\pm y)=shx\cdot chy\pm chx\cdot shy, \qquad (2)$$

$$thx\cdot cthx=1. \qquad (3)$$

Avem

$$chx\cdot chy+shx\cdot shy=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}+\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}=$$

$$=\frac{e^{x+y}+e^{x-y}+e^{-x+y}+e^{-(x+y)}+e^{x+y}-e^{x-y}-e^{-x+y}+e^{-(x+y)}}{4}=$$

$$=\frac{2e^{x+y}+2e^{-(x+y)}}{4}=\frac{e^{x+y}+e^{-(x+y)}}{2}=ch(x+y).$$

Similar,

$$chx\cdot chy-shx\cdot shy=\frac{2e^{x-y}+2e^{-x+y}}{4}=\frac{e^{x-y}+e^{-(x-y)}}{2}=ch(x-y).$$

Deci $ch(x\pm y)=chxchy\pm shxshy$, adică formula (1).

Avem

$$shx\cdot chy+chx\cdot shy=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}+\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}=$$

$$=\frac{e^{x+y}+e^{x-y}-e^{-x+y}-e^{-(x+y)}+e^{x+y}-e^{x-y}+e^{-x+y}-e^{-(x+y)}}{4}=$$

$$=\frac{2e^{x+y}-2e^{-(x+y)}}{4}=\frac{e^{x+y}-e^{-(x+y)}}{2}=sh(x+y).$$

Similar,

$$shx\cdot chy-chx\cdot shy=\frac{2e^{x-y}-2e^{-x+y}}{4}=\frac{e^{x-y}-e^{-(x-y)}}{2}=sh(x-y).$$

Prin urmare, $sh(x\pm y)=shxchy\pm chxshy$, adică formula (2).

Imediat reiese că $thx\cdot cthx=1$, adică formula (3).

Din aceste formule, pentru $y=x$, obţinem

$ch(x-x)=ch^2x-sh^2x$, adică $ch^2x-sh^2x=1$,

$ch(x+x)=ch^2x+sh^2x$, adică $ch2x=ch^2x+sh^2x$,

$sh(x+x)=2sh\,x\,ch\,x$, adică $sh2x=2sh\,x\,ch\,x$.

De asemenea avem

$$1-th^2x=1-\frac{sh^2x}{ch^2x}=\frac{ch^2x-sh^2x}{ch^2x}=\frac{1}{ch^2x},$$

$$cth^2x-1=\frac{ch^2x}{sh^2x}-1=\frac{ch^2x-sh^2x}{sh^2x}=\frac{1}{sh^2x},$$

$$1+ch2x=1+ch^2x+sh^2x=ch^2x+ch^2x=2ch^2x,$$

$$ch2x-1=ch^2x+sh^2x-1=(ch^2x-1)+sh^2x=2sh^2x.$$

Denumirea de funcţii *"hiperbolice"* se explică prin faptul că funcţiile *sht* şi *cht* joacă acelaşi rol în reprezentarea parametrică a hiperbolei (echilatere) $x^2-y^2=1$ ca şi funcţiile trigonometrice *sint* şi *cost* (numite deseori şi circulare) în reprezentarea parametrică a circumferinţei $x^2+y^2=1$.

Într-adevăr, excluzând parametrul t din ecuaţiile $x=cost$ şi $y=sint$, obţinem ecuaţia canonică a circumferinţei: $x^2+y^2=\sin^2t+\cos^2t=1$, adică $x^2+y^2=1$.

Analog, excluzând parametrul t din ecuaţiile $x=cht$ şi $y=sht$, obţinem ecuaţia canonică a hiperbolei:

$$x^2-y^2=ch^2t-sh^2t=1, \text{ adică } x^2-y^2=1.$$

Din modul de definire al funcţiilor hiperbolice deducem că funcţia *chx* pentru orice $x\in R$ verifică inegalitatea $ch\,x\geq 1$, $x\in R$, iar funcţia $y=th\,x$, $x\in R$, verifică inegalitatea dublă $-1<thx<1$. Există valori ale lui x pentru care $|shx|>1$: $sh2>1$, $sh(-2)<-1$ etc. Funcţia *chx* este pară $(ch(-x)=chx,\ x\in R)$, iar funcţiile *shx, thx* şi *cthx* sunt impare $(sh(-x)=-shx,\ x\in R\ \ etc)$.

Funcţiile *shx* şi *thx* sunt funcţii strict crescătoare şi monotone pe R. Deci există funcţiile inverse respective. Notăm *arshy* (se citeşte *area sinus hiperbolic de y* de la expresia latină *area sinus hyperbolici*). Exprimăm funcţia $x=arshy$ în raport cu y.

Avem $y=shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{e^{2x}-1}{2e^x}$, adică $e^{2x}-2e^x y-1=0$.

Rezolvând ecuaţia pătrată în raport cu e^x, obţinem $e^x=y\pm\sqrt{1+y^2}$. Întrucât $e^x>0$, avem $e^x=y+\sqrt{1+y^2}$. Deci $x=arshy=\ln(y+\sqrt{1+y^2}),\ y\in R$.

Trecând la notaţiile obişnuite, am obţinut funcţia $y=arshx=\ln(x+\sqrt{1+x^2}),\ x\in R$, inversa funcţiei $y=shx,\ x\in R$.

Pentru funcţia inversă funcţiei $y=thx$, care se notează $x=arthy$ (se citeşte *area tangentă hiperbolică de y*), avem $y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$, de unde $(e^{2x}+1)y=e^{2x}-1$, adică $e^{2x}(1-y)=y+1$.

Obţinem $e^{2x}=\frac{y+1}{1-y}$ sau $x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}$ pentru $|y|<1$.

Trecând la notaţiile obişnuite, am obţinut funcţia $y=arthx=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\ |x|<1$, inversă funcţiei $y=thx,\quad x\in R$.

Funcţia $y=cthx$ este strict descrescătoare pe fiecare din intervalele $]-\infty,0[$ şi $]0,+\infty[$. Deci funcţia inversă pe aceste intervale există şi se notează $x=arcthy$ (se citeşte *area cotangentă hiperbolică de y*). Exprimăm această funcţie în raport cu y. Avem $y=cthx=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$, adică $e^{2x}\cdot y-y=e^{2x}+1$. Deci $e^{2x}\cdot(y-1)=y+1$, adică $e^{2x}=\frac{y+1}{y-1}$.

Prin urmare, $x=arcthy=\frac{1}{2}\ln\frac{y+1}{y-1}$, pentru $|y|>1$.

Trecând la notaţiile obişnuite, am obţinut funcţia $y=arcthx=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1},\ |x|>1$, inversă funcţiei $y=cthx,\ x\neq 0$.

Din grafic se vede că funcţia $y=chx,\ x\in R$ este strict descrescătoare pe $]-\infty,0[$ şi strict crescătoare pe $]0,+\infty[$. Deci ea are două funcţii inverse pe fiecare din aceste intervale. Exprimăm funcţiile acestea în raport cu y. Avem $y=chx=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\frac{e^{2x}+1}{2e^x}$, adică $e^{2x}-2ye^x+1=0$.

Rezolvând ecuaţia pătrată în raport cu e^x, obţinem $e^x=y\pm\sqrt{y^2-1}$, de unde $x=ln\left(y\pm\sqrt{y^2-1}\right),\ y\geq 1$.

Trecând la notaţiile obişnuite, am obţinut funcţia $y=archx=ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right),\ x\geq 1$, inversă funcţiei $y=chx$, $x\in]0,+\infty[$ şi $y=archx=\ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right),\ x\geq 1$, inversă funcţiei $y=chx,\ x\in]-\infty,0[$.

Notă. Avem următoarele relaţii:

1. $y=arshx\Rightarrow x=shy,\ x\in R,\ y\in R;$
2. $y=archx\Rightarrow x=chy,\ x\geq 1,\ y\in R;$
3. $y=arthx\Rightarrow x=thy,\ |x|<1,\ y\in R;$
4. $y=arcthx\Rightarrow x=cthy,\ |x|>1,\ y\neq 0.$

Din definiţia funcţilor hiperbolice directe şi inverse obţinem următoarele formule:

1. $(shx)'=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)'=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})'=\frac{1}{2}[e^x-e^{-x}\cdot(-1)]=$

$=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=chx,\ x\in R;$

2. $(chx)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)' = \frac{1}{2}\left[e^x + e^{-x}\cdot(-1)\right] =$

$= \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = shx,\ x \in R;$

3. $(thx)' = \left(\frac{shx}{chx}\right)' = \frac{(shx)' chx - shx(chx)'}{ch^2x} = \frac{ch^2x - sh^2x}{ch^2x} = \frac{1}{ch^2x},\ x \in R;$

4. $(cthx)' = \left(\frac{chx}{shx}\right)' = \frac{(chx)' shx - chx(shx)'}{sh^2x} = \frac{sh^2x - ch^2x}{sh^2x} = -\frac{1}{sh^2x},\ x \neq 0;$

5. $(arshx)' = \left[\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right]' = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)' =$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left[1 + \frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1+x^2\right)'\right] = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \times$$

$$\times \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)} \cdot \frac{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\ x \in R;$$

Mai raţional formula aceasta se demonstrează utilizând regula de derivare a funcţiei inverse. Într-adevăr,

$$y'(x) = (arshx)' = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{(shy)'} = \frac{1}{chy} = \frac{1}{\sqrt{1+sh^2y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\ x \in R.$$

În mod analog avem

6. $y'(x) = (archx)' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(chy)'} = \frac{1}{shy} = \frac{1}{-\sqrt{ch^2y-1}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$

$x>1$, $y \in]-\infty,\ 0[$, deoarece $sh\,y<0$ pentru orice $y \in]-\infty,\ 0[$ şi

$$y'(x) = (archx)' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(chy)'} = \frac{1}{shy} = \frac{1}{\sqrt{ch^2y-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$$

$x>1$, $y \in]0, +\infty[$, deoarece $sh\,y>0$ pentru orice $y \in]0, +\infty[$;

7. $y'(x) = (arthx)' = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{(thy)'} = ch^2x = \frac{1}{1-th^2y} = \frac{1}{1-x^2},\ |x|<1;$

8. $y'(x) = (arcthx)' = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{(cthy)'} = -sh^2x = -\frac{1}{cth^2y-1} =$

$= \frac{1}{1-cth^2y} = \frac{1}{1-x^2},\ |x|>1.$

Formulele 6, 7 şi 8 pot fi demonstrate derivând funcţiile explicite respective. De exemplu,

$$(arcthx)' = \left(\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}\right)' = \frac{1}{2}\left[\ln(x+1) - \ln(x-1)\right]' =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x+1}(x+1)' - \frac{1}{x-1}(x-1)'\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{x-1-x-1}{x^2-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(-2)}{x^2-1} = -\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{1-x^2},\ |x|>1,$$

adică am obţinut formula 8.

2.1.8. Derivarea logaritmică. Tabelul formulelor de derivare

Să calculăm mai întâi derivata funcţiei $y = \ln|x|,\ x \neq 0$. Am avut $y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$ pentru $x>0$ (a se consulta exemplul 5 din 2.1.5).

Pentru $x<0$ avem $y = \ln(-x)$, adică obţinem funcţia compusă $y = \ln u$, $u=-x$, $x<0$. Conform regulii de derivare a funcţiei compuse, avem $[\ln(-x)]' = \frac{1}{(-x)}\cdot(-x)' = \frac{1}{x}$. Prin urmare, funcţia

$$y = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & \textit{dacă } x > 0 \\ \ln(-x), & \textit{dacă } x < 0 \end{cases}$$

este derivabilă pe R-{0} şi $y' = (\ln|x|)' = \frac{1}{x}$.

Luând în considerare această formulă pentru orice $x \neq 0$, vom calcula derivata funcţiei $y = \ln|f(x)|$ sau, ceea ce este acelaşi lucru, derivata funcţiei compuse $y = \ln|u|$, $u=f(x)$, unde funcţia $f(x)$ nu se anulează în punctul dat şi este derivabilă în acest punct.

Derivând funcţia compusă $\ln|f(x)|$, obţinem

$$(\ln|f(x)|)' = \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Raportul $\frac{f'(x)}{f(x)}$ se numeşte *derivata logaritmică* a funcţiei $f(x)$. După cum rezultă din formula de mai sus, derivata logaritmică este egală cu derivata logaritmului modulului acestei funcţii.

Metoda derivării logaritmice constă în faptul, că mai întâi se află derivata logaritmică a funcţiei, apoi însăşi derivata ei conform formulei $f'(x) = (\ln|f(x)|)'\cdot f(x)$.

Exemplul 1. Să se calculeze derivata funcţiei $y = [u(x)]^{v(x)}$, unde $u(x)$, $v(x)$ sunt funcţii derivabile în punctul dat x şi $u(x)$ nu se anulează în acest punct.

Avem $\ln|y| = \ln\left|u(x)^{v(x)}\right| = v(x)\ln|u(x)|$ şi

$$\frac{y'}{y} = [v(x)\ln|u(x)|]', \text{ adică } y' = [v(x)\ln|u(x)|]'\cdot[u(x)]^{v(x)} =$$

$$= \left(v'(x)\ln|u(x)| + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right)\cdot[u(x)]^{v(x)} = [u(x)]^{v(x)}\cdot v'(x)\ln|u(x)| +$$

$$+ v(x)[u(x)]^{v(x)-1}\cdot u'(x).$$

Exemplul 2. Să se calculeze derivata funcţiei $y = \frac{(x-2)^5\cdot e^{\cos x}}{\sqrt[3]{x^2+1}}$.

Logaritmând, vom scrie

$$\ln|y| = 5\ln|x-2| + \cos x - \frac{1}{3}\ln(x^2+1),\ x \neq 2.$$

Derivând, vom obţine

$$\frac{y'}{y} = \frac{5}{x-2} - \sin x - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x,\ x \neq 2,$$

de unde $y' = y\left(\frac{5}{x-2} - \sin x - \frac{2}{3}\cdot\frac{x}{x^2+1}\right) =$

$$= \frac{(x-2)^5\cdot e^{\cos x}}{\sqrt[3]{x^2+1}}\cdot\left(\frac{5}{x-2} - \sin x - \frac{2}{3}\cdot\frac{x}{x^2+1}\right),\ x \neq 2.$$

În baza exemplelor considerate în punctele precedente 2.1.1 - 2.1.8 şi a regulilor de derivare putem alcătui următorul tabel.

Tabelul formulelor şi a regulilor de derivare

No	Funcţia $f(x)$ şi domeniul ei de definiţie	Derivata $f'(x)$ şi domeniul ei de definiţie
1	2	3
1	C *(const)*, $x \in R$	0, $x \in R$
2	x^r, $x>0$, dacă $r \in R$; $x \in R$, dacă $r \in N$	rx^{r-1}, $x>0$, dacă $r \in R$; $x \in R$, dacă $r \in N$
	Cazuri particulare	
	x, $x \in R$	1, $x \in R$
	$\frac{1}{x}$, $x \neq 0$	$-\frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$

1	2		3	
	$\sqrt{x}$,	$x\geq 0$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$,	$x>0$
3	a^x,	$a>0,\ a\neq 1,\ x\in R$	$a^x \ln a$,	$a>0,\ a\neq 1,\ x\in R$
	Caz particular			
	e^x,	$x\in R$	e^x,	$x\in R$
4	$\log_a\lvert x\rvert$,	$a>0,\ a\neq 1,\ x\neq 0$	$\frac{1}{x\ln a}$,	$a>0,\ a\neq 1,\ x\neq 0$
	Caz particular			
	$\ln\lvert x\rvert$,	$x\neq 0$	$\frac{1}{x}$,	$x\neq 0$
5	$\sin x$,	$x\in R$	$\cos x$,	$x\in R$
	$\cos x$,	$x\in R$	$-\sin x$,	$x\in R$
	$\operatorname{tg} x$,	$x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z$
	$\operatorname{ctg} x$,	$x\neq k\pi,\ k\in Z$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$,	$x\neq k\pi,\ k\in Z$
6	$\arcsin x$,	$\lvert x\rvert\leq 1$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,	$\lvert x\rvert<1$
	$\arccos x$,	$\lvert x\rvert\leq 1$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,	$\lvert x\rvert<1$
	$\operatorname{arctg} x$,	$x\in R$	$\frac{1}{1+x^2}$,	$x\in R$
	$\operatorname{arcctg} x$,	$x\in R$	$-\frac{1}{1+x^2}$,	$x\in R$
7	$\operatorname{sh} x$,	$x\in R$	$\operatorname{ch} x$,	$x\in R$
	$\operatorname{ch} x$,	$x\in R$	$\operatorname{sh} x$,	$x\in R$
	$\operatorname{th} x$,	$x\in R$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$x\in R$
	$\operatorname{cth} x$,	$x\neq 0$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$,	$x\neq 0$

1	2		3	
8	$\operatorname{arsh} x=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$,	$x\in R$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,	$x\in R$
	$\operatorname{arch} x=\ln\left(x\pm\sqrt{x^2-1}\right)$,	$x\geq 1$	$\pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$,	$x>1$
	$\operatorname{arth} x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$,	$\lvert x\rvert<1$	$\frac{1}{1-x^2}$,	$\lvert x\rvert<1$
	$\operatorname{arcth} x=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$,	$\lvert x\rvert>1$	$\frac{1}{1-x^2}$,	$\lvert x\rvert>1$
9	Regulile de derivare			
	a) $(u(x)\pm v(x))'=u'(x)\pm v'(x)$;			
	b) $[u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$;			
	c) $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}$,			$v(x)\neq 0$;
	d) $\left[y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)\right]\Rightarrow y'(x)=\frac{1}{x'(y)}$,			$x'(y)\neq 0$, $y'(x)\neq 0$;
	e) $[y=f(u),\ u=\varphi(x)]\Rightarrow y'(x)=[f(\varphi(x))]'=y'(u)\cdot u'(x)$;			
	f) $\left[y=f(x)\Leftrightarrow\begin{cases}y=\psi(t)\\x=\varphi(t)\end{cases}\right]\Rightarrow y'(x)=\frac{y'(t)}{x'(t)}$,			$x'(t)\neq 0$;
	g) $y=[u(x)]^{v(x)}\Rightarrow \ln\lvert y\rvert=v(x)\ln\lvert u(x)\rvert\Rightarrow$ $\Rightarrow y'=y\left[v'(x)\ln\lvert u(x)\rvert+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right]$,			$u(x)\neq 0$.

1	2	3
10	Ecuaţia tangentei la curba $y = f(x)$ în $M_0(x_0, y_0)$ are forma $$y_{tg} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$ Ecuaţia normalei la curba $y = f(x)$ în $M_0(x_0, y_0)$ are forma $$y_n = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \quad \text{dacă} \quad f'(x_0) \neq 0,$$ sau $x_n = x_0$, dacă $f'(x_0) = 0$.	

2.2. Funcţii diferenţiabile. Diferenţiala funcţiei

2.2.1 Funcţii diferenţiabile

Definiţie. Funcţia $y = f(x), x \in D$, se numeşte *diferenţiabilă* în punctul $x_0 \in D$, dacă creşterea funcţiei Δy în acest punct poate fi reprezentată în forma $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, unde A este un număr real ce nu depinde de Δx, iar $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

Teorema 1. Pentru ca funcţia $y = f(x), x \in D$ să fie diferenţiabilă în punctul $x_0 \in D$, este necesar şi suficient ca ea să fie derivabilă în acest punct.

Demonstraţie. Fie $y = f(x), x \in D$ diferenţiabilă în $x_0 \in D$. Deci $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, de unde $\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x), \Delta x \neq 0$. Trecând la limită când $\Delta x \to 0$, obţinem

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (A + \alpha(\Delta x)) = A + 0 = A,$$

ceea ce înseamnă că $f(x)$ este derivabilă în punctul $x_0 \in D$.

Invers. Fie $y = f(x), x \in D$, derivabilă în punctul x_0, adică derivata ei $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ este finită.

Conform teoremei 1 din 1.5.2, avem că funcţia $\alpha(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0)$ este un infinit mic când $\Delta x \to 0$, adică $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Funcţia $\alpha(\Delta x)$, fiind derivabilă în x_0, este continuă în acest punct (a se consulta teorema din 2.1.1). Deci

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = \alpha(0) = 0.$$

Prin urmare, avem

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

ceea ce înseamnă că funcţia $y = f(x), x \in D$ este diferenţiabilă în punctul $x_0 \in D$. Teorema este demonstrată.

Notă. Pentru funcţiile de o singură variabilă diferenţiabilitatea funcţiei într-un punct şi derivabilitatea funcţiei în acest punct sunt noţiuni echivalente.

2.2.2. Diferenţiala funcţiei

Fie funcţia $y = f(x), x \in D$ diferenţiabilă în punctul $x_0 \in D$, adică $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, unde $A \in R$ şi $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Observăm că termenul $A \cdot \Delta x$ este o funcţie infinit mică de acelaşi ordin în raport cu Δx (dacă $A \neq 0$) când $\Delta x \to 0$, deoarece $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{A \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} A = A \neq 0$. Termenul $\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$ este de asemenea un infinit mic când $\Delta x \to 0$, însă de ordin mai superior decât Δx, deoarece

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0.$$

Aşadar, termenul $A \cdot \Delta x$, dacă $A \neq 0$, constituie partea principală a creşterii funcţiei $y = f(x)$ (a se consulta 1.5.5).

Definiție. Se numește *diferențială* a funcției $y = f(x)$ în punctul x_0 partea principală liniară în raport cu Δx a creșterii funcției în acest punct.

Se notează dy. Deci $dy = A \cdot \Delta x$. Dacă $A = 0$, atunci $A \cdot \Delta x = 0$ și de aceea termenul $A \cdot \Delta x$ nu mai constituie partea principală a lui Δy, deoarece termenul $\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$ este, în genere, diferit de zero. Vom conveni însă și în acest caz să considerăm diferențiala funcției în punctul x_0 egală cu $A \cdot \Delta x$, adică $dy = 0$.

În virtutea teoremei din punctul precedent avem $A = f'(x_0)$ și deci $dy = f'(x_0)\Delta x$.

Dacă $y = f(x) = x$, atunci $dy = dx = (x)' \cdot \Delta x = \Delta x$.

Așadar, diferențiala dx a variabilei independente x coincide cu creșterea Δx a ei. Prin urmare,

$$dy = f'(x_0) \cdot dx. \qquad (1)$$

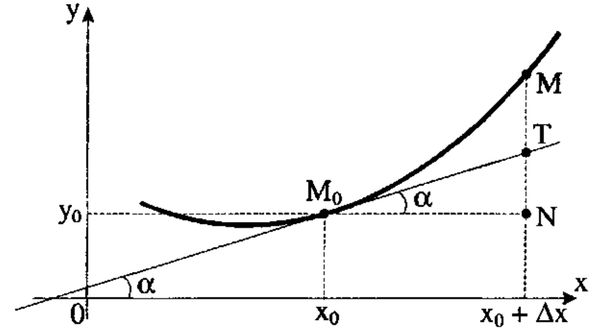
Să constatăm că folosind (1) derivata funcției $f'(x)$, $x \in D$ poate fi calculată ca raportul diferențialei dy a funcției $f(x)$ în punctul dat la diferențiala dx a variabilei independente, adică $f'(x) = \frac{dy}{dx}$. Prin urmare, simbolul derivatei $f'(x) = \frac{df(x_0)}{dx}$, introdus mai înainte, a devenit o fracție reală.

Operația calculării diferențialei funcției, se numește *diferențiere.*

Diferențiala funcției, ca și derivata funcției are o interpretare geometrică simplă.

Considerăm pe graficul funcției $y = f(x)$ punctele $M_0(x_0, y_0)$ și $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$. Fie MT tangenta la curba $y = f(x)$ în punctul M_0, iar α unghiul de înclinație al tangentei MT cu axa OX.

Din figură se vede că $M_0N = \Delta x$, $MN = \Delta y$ și $\frac{NT}{M_0N} = tg\alpha$ sau $NT = M_0N \cdot tg\alpha = \Delta x \cdot f'(x_0) = dy$.



Așadar, diferențiala $dy = NT$ a funcției $y = f(x)$ în punctul x_0 este egală cu creșterea "ordonatei" tangentei M_0T la graficul acestei funcții în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$, iar creșterea funcției Δy este egală cu creșterea "ordonatei" funcției în punctul x_0, corespunzătoare creșterii Δx a argumentului.

Fie $y = f(x)$ diferențiabilă în x_0. Atunci

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(x) \cdot \Delta x = dy + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

de unde

$$\frac{\Delta y}{dy} = 1 + \frac{\alpha(\Delta x)}{f'(x_0)} \text{ și } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = 1 + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) \cdot \frac{1}{f'(x_0)} = 1 + 0 = 1,$$

dacă $f'(x_0) \neq 0$. Prin urmare, $\Delta y \sim dy$, când $\Delta x \to 0$.

De aceea în multe probleme de calcul creșterea funcției în punctul dat este înlocuită prin diferențiala funcției în acest punct, adică $\Delta y \approx dy$. Eroarea absolută a acestei aproximări este egală cu $|\Delta y - dy|$ și este un infinit mic de ordin superior în raport cu Δx, când $\Delta x \to 0$. Deci $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y \approx dy = f'(x_0)\Delta x$, de unde obținem

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x, \qquad (2)$$

care se numește *formula centrală* a calculului aproximativ.

Considerăm următoarele exemple.

Exemplul 1. Fie $f(x)=\sin x$. Relaţia (2) are forma

$$\sin(x_0+\Delta x)\approx\sin x_0+\cos x_0\cdot\Delta x,\quad \textit{dacă}\quad \Delta x\to 0. \quad (3)$$

Dacă luăm $x_0=0$ şi $\Delta x=\alpha$, atunci formula (3) se transformă în formula

$$\sin\alpha\approx\alpha,\ \text{dacă}\ \alpha\to 0. \quad (4)$$

Aplicăm formula (3) pentru a calcula $\sin 46°$. Avem $\sin 46°=\sin(45°+1°)=\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{180})$. Deci $x_0=\frac{\pi}{4}$, $\Delta x=\frac{\pi}{180}$

şi $\sin 46°\approx\sin 45°+\cos 45°\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\frac{\pi}{180}\right)\approx 0{,}7104$.

Exemplul 2. Fie $f(x)=tgx$. Relaţia (2) are forma

$$tg(x_0+\Delta x)\approx tgx_0+\frac{1}{\cos^2 x_0}\cdot\Delta x,\quad \textit{dacă}\quad \Delta x\to 0. \quad (5)$$

Dacă luăm $x_0=0$ şi $\Delta x=\alpha$, atunci formula (5) se transformă în formula

$$tg\alpha\approx\alpha,\ \text{dacă}\ \alpha\to 0. \quad (6)$$

Exemplul 3. Fie $y=\sqrt[n]{x}$, (n=2, 3, 4,...). Relaţia (2) are forma

$$\sqrt[n]{x_0+\Delta x}\approx\sqrt[n]{x_0}+\frac{1}{n\sqrt[n]{x_0^{n-1}}}\cdot\Delta x,\quad \textit{dacă}\quad \Delta x\to 0. \quad (7)$$

Dacă luăm $x_0=1$ şi $\Delta x=\alpha$, atunci formula (7) se transformă în formula

$$\sqrt[n]{1+\alpha}\approx 1+\frac{1}{n}\cdot\alpha,\quad \textit{dacă}\quad \alpha\to 0. \quad (8)$$

Cazuri particulare. $\sqrt{1+\alpha}\approx 1+\frac{\alpha}{2}$, $\sqrt[3]{1+\alpha}=1+\frac{\alpha}{3}$, când $\alpha\to 0$.

Exemplul 4. Fie $f(x)=e^x$, $x_0=0$, $\Delta x=\alpha$. Atunci (2) are forma

$$e^{\alpha}\approx 1+\alpha,\ \text{dacă}\ \alpha\to 0. \quad (9)$$

Exemplul 5. Fie $f(x)=\ln(1+x)$, $x_0=0$, $\Delta x=\alpha$. Atunci din (2) obţinem formula

$$\ln(1+\alpha)\approx\alpha,\ \text{dacă}\ \alpha\to 0.$$

Problema calculării diferenţialei unei funcţii se reduce la calcularea derivatei, deoarece diferenţiala funcţiei se obţine prin înmulţirea derivatei la diferenţiala argumentului. Prin urmare, majoritatea teoremelor şi a formulelor, care au fost demonstrate în 2.1.1. – 2.1.8, sunt valabile şi pentru diferenţială.

Remarcăm unele din ele.

1. $d[u(x)\pm v(x)]=du(x)\pm dv(x)$; 2. $d[k\cdot f(x)]=k\cdot df(x), k\in R$;

3. $d[u(x)\cdot v(x)]=v(x)\cdot du(x)+u(x)\cdot dv(x)$;

4. $d\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]=\frac{v(x)\cdot du(x)-u(x)\cdot dv(x)}{v^2(x)},\quad \textit{dacă}\quad v(x)\neq 0.$

Să demonstrăm, de exemplu, ultima formulă. Avem

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\frac{v(x)\cdot u'(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)},\quad \textit{dacă}\quad v(x)\neq 0.$$

Deci

$$d\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]=\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'\cdot dx=\frac{v(x)\cdot[u'(x)dx]-u(x)\cdot[v'(x)\cdot dx]}{v^2(x)}=$$

$$=\frac{v(x)\cdot du(x)-u(x)\cdot dv(x)}{v^2(x)},\quad \textit{dacă}\quad v(x)\neq 0.$$

Să calculăm diferenţiala unei funcţii compuse. Fie

$$y=f(u),\ u=\varphi(x),\ x\in D,\ u\in\varphi(D).$$

Atunci funcţia $f(\varphi(x)), x\in D$, se numeşte *funcţie compusă.*

Conform derivării funcţiei compuse, avem

$$y'(x)=f'(u)\cdot u'(x).$$

Prin urmare,

$$dy = y'(x)\cdot dx = f'(u)[u'(x)\cdot dx] = f'(u)\cdot du = y'(u)\cdot du.$$

Aşadar, diferenţiala unei funcţii compuse se exprimă în acelaşi mod de parcă variabila intermediară u ar fi o variabilă independentă. Cu alte cuvinte, forma diferenţialei nu depinde de faptul, dacă argumentul funcţiei este o variabilă independentă sau o funcţie de o altă variabilă. Această proprietate importantă a diferenţialei, numită *forma invariantă* a diferenţialei, va avea o largă întrebuinţare în continuare.

2.3. Derivate şi diferenţiale de ordin superior

2.3.1. Derivate de ordin superior

Fie funcţia $y = f(x), x \in D$ derivabilă pe mulţimea $D_1 = D(f') \subseteq D$, adică există derivata ei $f'(x)$ în orice punct $x \in D_1$. Prin urmare, derivata $f'(x)$ a funcţiei f este o funcţie de variabila x, definită pe mulţimea D_1, care este o submulţime a mulţimii D, adică funcţia f, derivabilă pe D_1, generează o funcţie nouă f', definită pe $D_1 \subseteq D$. Dacă există derivata de la această funcţie nouă $f'(x), x \in D_1$, atunci ea se numeşte *derivata de ordinul doi* (sau derivata a doua) a funcţiei f în punctul $x \in D_1$. Se notează astfel: $y'', f''(x)$ (se citeşte igrec secund (doi) sau ef secund (doi) de x), $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}, \frac{d^2 y}{dx^2}$ (se citeşte de doi ef în raport cu de x la pătrat sau de doi igrec în raport cu de x la pătrat).

Prin urmare, prin definiţie,

$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f'(x)}{\Delta x}.$$

Se ştie că derivata funcţiei $f(x)$ în raport cu timpul t reprezintă viteza mişcării în momentul t, adică $f'(t) = v_t$. Derivata

de ordinul doi (secundă) a funcţiei $f(x)$ în raport cu timpul t va fi egală cu: $$f''(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = v'(t) = a(t),$$

unde $\frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$ reprezintă acceleraţia medie a mişcării punctului material pe intervalul de timp $]t, t+\Delta t[$.

Astfel, din punct de vedere al mecanicii, derivata de ordinul doi (secundă) reprezintă acceleraţia mişcării în momentul t.

Aşadar, derivata de ordinul doi de la funcţia $y = f(x), x \in D$, este o funcţie care depinde de $x \in D_1 \subseteq D$. Dacă această funcţie este derivabilă pe D_2, care este o submulţime a mulţimii D_1, atunci derivata de la derivata de ordinul doi a funcţiei f se numeşte *derivată de ordinul trei* (sau derivata a treia) şi se notează y''', $f'''(x)$, $f^{(3)}(x)$, $\frac{d^3 y}{dx^3}$, $\frac{df'''(x)}{dx^3}$.

Prin recurenţă se poate defini derivata de orice ordin $n \in N$: dacă funcţia $y = f(x), x \in D$ este derivabilă de $(n-1)$ ori pe $D_{n-1} \subseteq D$ şi dacă funcţia $f^{(n-1)}(x)$ este derivabilă pe D_{n-1}, care este o submulţime a mulţimii D, atunci derivata de la funcţia $f^{(n-1)}(x), x \in D_{n-1}$ în punctul x se numeşte *derivată de ordinul n* (sau derivata a n–a) a funcţiei $y = f(x), x \in D$, în punctul x. Se notează $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^n y}{dx^n}$, $\frac{df^{(n)}(x)}{dx^n}$. Astfel, prin definiţie: $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)' = f^{(n)}(x)$, $n = 2,3,4,\ldots$ (ordinul derivatei se ia în paranteză pentru a nu fi confundat cu exponentul puterii).

Derivatele de ordinul $n = 2,3,4,\ldots$ se numesc *derivate de ordin superior*, spre deosebire de derivata obişnuită, care se mai numeşte *derivată de ordinul întâi*.

Derivatele de ordin superior se mai notează cu ajutorul cifrelor romane: $y^{(2)} = y''$, $y^{(3)} = y'''$, $y^{(4)} = y^{IV}$, $y^{(5)} = y^{V}$ etc. În acest caz ordinul derivatei se scrie fără paranteze.

Notă. Dacă funcţia $y = f(x), x \in D$, are derivate de orice ordin pe D, se spune că ea este *indefinit derivabilă* pe D.

Exemple.

1. Un polinom $P_n(x)$ este indefinit derivabil pe R:

$$[P_n(x)]' = (a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n)' = a_1 + 2a_2x + \ldots + n\cdot a_n \cdot x^{n-1}, n \in N,$$
$a_n \neq 0$;

$$[P_n(x)]'' = 2a_2 + 3\cdot 2\cdot a_3x + 4\cdot 3\cdot a_4x^2 + \ldots + n\cdot(n-1)\cdot a_n \cdot x^{n-2}, n \in N,$$
$a_n \neq 0$;

... ...

$$[P_n(x)]^{(n)} = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 1\cdot a_n = a_n \cdot n!,\ a_n \neq 0.$$

$[P_n(x)]^{(n+k)} = 0$ pentru orice $k \in N$, adică toate derivatele de ordin superior gradului polinomului sunt identic nule.

2. Funcţia $y = \sin x, x \in R$, este indefinit derivabilă pe R:

$$(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$(\sin x)'' = \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left[\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right] =$$
$$= \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

şi, în general,

$$(\sin x)^{(n)} = \left[\sin\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)\right]' = \cos\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) =$$
$$= \sin\left[\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right] = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

3. Funcţia $y = \cos x, x \in R$ este indefinit derivabilă pe R:

$$(\cos x)' = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$(\cos x)'' = \left[\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right]' = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left[\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right] =$$
$$= \cos\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

şi, în general,

$$(\cos x)^{(n)} = \left[\cos\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)\right]' = -\sin\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) =$$
$$= \cos\left[\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right] = \cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

4. Funcţia $y = a^x, a > 1, a \neq 1, x \in R$ este indefinit derivabilă pe R: $\quad (a^x)' = a^x \cdot \ln a, \quad (a^x)'' = a^x \cdot (\ln a)^2$

şi, în general,

$$(a^x)^{(n)} = \left[a^x(\ln a)^{n-1}\right]' = (\ln a)^{n-1}\cdot(a^x)' = (\ln a)^{n-1}\cdot a^x \cdot \ln a =$$
$$= a^x(\ln a)^n.$$

Caz particular. Funcţia $y = e^x, x \in R$, este indefinit derivabilă pe R şi $(e^x)^{(n)} = e^x, n \in N$.

Notă. Importanţa numărului iraţional e se manifestă şi aici: dintre toate funcţiile exponenţiale $a^x, a > 0, a \neq 1, x \in R$, numai funcţia exponenţială $e^x, x \in R$ are proprietatea: derivatele de orice ordin ale acestei funcţii coincid cu însăşi funcţia.

5. Funcţia $\log_a|bx + c|, a > 0, a \neq 1, x \neq -\frac{c}{b}, b \neq 0$ este indefinit derivabilă pe domeniul ei de definiţie:

$$\left(\log_a|bx+c|\right)' = \frac{1}{(bx+c)\ln a}\cdot(bx+c)' = \frac{b}{(bx+c)\cdot\ln a};$$

$$\left(\log_a|bx+c|\right)'' = \left(\frac{b}{\ln a}\cdot\frac{1}{bx+c}\right)' = \frac{b}{\ln a}\cdot\left[(bx+c)^{-1}\right]' =$$

$$= \frac{b}{\ln a}(-1)(bx+c)^{-2}\cdot(bx+c)' = (-1)\cdot\frac{b^2}{\ln a}\cdot\frac{1}{(bx+c)^2},$$

$$(\log_a|ax+b|)''' = (-1)\cdot\frac{b^2}{\ln a}\left[(bx+c)^{-2}\right]' = (-1)^2\cdot\frac{b^2}{\ln a}\cdot\frac{2}{(bx+c)^3}\cdot b =$$

$$= (-1)^2\cdot\frac{1\cdot 2}{\ln a}\cdot b^3\cdot\frac{1}{(bx+c)^3} = (-1)^2\frac{2!}{\ln a}\cdot\left(\frac{b}{bx+c}\right)^3$$

şi, în general,

$$\left(\log_a|bx+c|\right)^{(n+1)} = \left[(-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{\ln a}\cdot\frac{b^n}{(bx+c)^n}\right]' =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{\ln a}\cdot(n-1)!\cdot b^n\cdot\left[(bx+c)^{-n}\right]' =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{\ln a}\cdot(n-1)!\cdot b^n\cdot(-n)\cdot b\cdot(bx+c)^{-n-1} =$$

$$= (-1)^n\cdot\frac{(n-1)!\cdot n}{\ln a}\cdot b^{n+1}\frac{1}{(bx+c)^{n+1}} = (-1)^n\cdot\frac{n!}{\ln a}\cdot\left(\frac{b}{bx+c}\right)^{n+1},$$

unde $n\in N$, $n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$ şi $1! = 0! = 1$.

Cazuri particulare.

$$\left(\log_a|x|\right)^{(n)} = (-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{\ln a}\cdot\frac{1}{x^n} \text{ şi } \left(\ln|x|\right)^{(n)} = (-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{x^n}\cdot(n-1)!.$$

Teorema 1. Dacă funcţiile $u = u(x)$, $v = v(x)$ sunt derivabile de n ori pe mulţimea D, atunci suma algebrică $[u(x)\pm v(x)]$ este de n ori derivabilă pe D şi $(u\pm v)^{(n)} = u^{(n)}\pm v^{(n)}, n\in N$.

Demonstraţie. Vom demonstra această formulă utilizând principiul inducţiei matematice. Formula este adevărată pentru $n=1$, deoarece avem $(u\pm v)' = u'\pm v'$ (a se consulta teorema 1 din 2.1.4).

Presupunem că formula este adevărată până la $(n-1)$, adică $(u\pm v)^{(n-1)} = u^{(n-1)}\pm v^{(n-1)}$ şi vom demonstra că $(u\pm v)^{(n)} = u^{(n)}\pm v^{(n)}$. Într-adevăr,

$$(u\pm v)^{(n)} = \left[(u\pm v)^{(n-1)}\right]' = \left[u^{(n-1)}\pm v^{(n-1)}\right]' = \left[u^{(n-1)}\right]'\pm\left[v^{(n+1)}\right]' =$$

$$= u^{(n)}\pm v^{(n)}$$

şi teorema este demonstrată.

Teorema 2. Dacă funcţiile $u = u(x)$, $v = v(x)$ sunt derivabile de n ori pe mulţimea D, atunci produsul $u(x)\cdot v(x)$ este derivabil de n ori pe D şi

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}\cdot v + n\cdot u^{(n-1)}\cdot v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}\cdot v'' + \ldots +$$

$$+\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot[n-(k-1)]}{k!}\cdot u^{(n-k)}\cdot v^{(k)} + \ldots + uv^{(n)},$$

relaţie care se numeşte *formula Leibniz.*

Demonstraţie. Folosim acelaşi procedeu ca în teorema 1 de mai sus. Formula este adevărată pentru $n=1$: $(uv)' = u'v + uv'$ (a se consulta teorema 2 din 2.1.4).

Presupunem că formula este adevărată până la $(n-1)$, adică

$$(uv)^{(n-1)} = u^{(n-1)}\cdot v + (n-1)u^{(n-2)}\cdot v' + \frac{(n-1)(n-2)}{2!}\cdot u^{(n-3)}\cdot v'' + \ldots +$$

$$+\frac{(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot[n-1-(k-1)]}{k!}u^{(n-1-k)}\cdot v^{(k)} + \ldots + u\cdot v^{(n-1)}.$$

Observăm mai întâi că fiecare din termenii ce intervin în această sumă conțin pe u și v derivați de ordinul $(n-1)$ cel mult. Funcțiile u și v, fiind derivabile de n ori pe D, urmează că fiecare funcție care se conține în termenii acestei sume mai este derivabilă cel puțin o dată. Avem deci

$$(uv)^{(n)}=\left[(uv)^{(n-1)}\right]'=\left[u^{(n-1)}\cdot v\right]'+(n-1)\left[u^{(n-2)}v'\right]'+$$
$$+\frac{(n-1)(n-2)}{2!}\left[u^{(n-3)}\cdot v''\right]'+\ldots+$$
$$+\frac{(n-1)(n-2)\ldots[n-1-(k-1)]}{k!}\left[u^{(n-1)-k}\cdot v^{(k)}\right]'+\ldots+\left[u\cdot v^{(n-1)}\right]'=$$
$$=u^{(n)}\cdot v+u^{(n-1)}\cdot v'+(n-1)\left[u^{(n-1)}v'+u^{(n-2)}v''\right]+$$
$$+\frac{(n-1)(n-2)}{2!}\left[u^{(n-2)}\cdot v''+u^{(n-3)}\cdot v'''\right]+\ldots+$$
$$+\frac{(n-1)(n-2)\ldots[n-1-(k-1)]}{k!}\cdot\left[u^{(n-k)}\cdot v^{(k)}+u^{(n-1-k)}\cdot v^{(k+1)}\right]+\ldots+$$
$$+u'\cdot v^{(n-1)}+u\cdot v^{(n)}=u^{(n)}\cdot v+n\cdot u^{(n-1)}\cdot v'+$$
$$+\left[(n-1)+\frac{(n-1)(n-2)}{2!}\right]\cdot u^{(n-2)}\cdot v''+\frac{(n-1)(n-2)}{2!}\cdot u^{(n-3)}\cdot v'''+\ldots+$$
$$+\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-1-k+1)}{k!}u^{(n-k)}\cdot v^{(k)}+$$
$$+\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-1-k+1)}{k!}u^{(n-1-k)}\cdot v^{(k+1)}+\ldots+$$
$$+u'\cdot v^{(n+1)}+u\cdot v^{(n)}=u^{(n)}\cdot v+n\cdot u^{(n-1)}\cdot v'+\frac{(n-1)\cdot n}{2!}u^{(n-2)}\cdot v''+$$
$$+\ldots+\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k)\cdot n}{k!}u^{(n-k)}\cdot v^{(k)}+\ldots+u\cdot v^{(n)}.$$

Pentru a înțelege mai bine procedura reducerii termenilor asemenea din această formulă, este bine să se antreneze în cazuri

concrete: de exemplu pentru $n=3$, 4 etc. (a se consulta [2] p. 128-129).

Consecință. Dacă $f(x), x\in D$, este derivabilă de n ori pe D, atunci funcția $c\cdot f(x), x\in D, c\in R$, este de asemenea derivabilă de n ori pe D și

$$\left(c\cdot f(x)\right)^{(n)}=c\cdot f^{(n)}(x), x\in D.$$

Remarcăm că coeficienții din formula Leibniz sunt aceeași ca și coeficienții binominali de ordinul n din binomul lui Newton pentru $n=1,2,3,\ldots$ (a se consulta 2.6.2 din capitolul 2), iar suma *ordinelor* derivatelor în fiecare termen este una și aceeași și este egală cu ordinul derivatei funcției $(u\cdot v)$, adică cu n.

Pentru a calcula acești coeficienți se folosește triunghiul lui B. Pascal ((1623-1662) – savant francez):

$$\begin{array}{lc}
 & 1 \\
n=1 & 1\quad 1 \\
n=2 & 1\quad 2\quad 1 \\
n=3 & 1\quad 3\quad 3\quad 1 \\
n=4 & 1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1 \\
n=5 & 1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1 \\
n=6 & 1\quad 6\quad 15\quad 20\quad 15\quad 6\quad 1
\end{array}$$

Acest triunghi de numere se construiește astfel: fiecare linie de numere începe și se termină cu 1, iar un element oarecare este egal cu suma elementelor care se află deasupra sa în linia precedentă. Linia n conține coeficienții binomiali de ordinul n.

Formula Leibniz se compune astfel:

$n=1$: $(uv)'=1\cdot u'v+1\cdot u\cdot v'=u'v+uv'$;

$n=2$: $(uv)''=1\cdot u''v+2u'v'+1\cdot u\cdot v''=u''v+2u'v'+uv''$;

$n=3$: $(uv)'''=u'''v+3u''v'+3u'v''+uv'''$ etc.

Nota 1. Dacă funcțiile $u=u(x)$, $v=v(x)$ sunt derivabile de n ori pe D, atunci și funcția $\dfrac{u(x)}{v(x)}$, $v(x)\neq 0, x\in D$, este de n ori derivabilă pe D.

Într-adevăr, $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$ şi funcţia din partea dreaptă este de $(n-1)$ ori derivabilă, deoarece asupra ei se efectuează operaţiile de adunare, scădere, înmulţire şi împărţire, care păstrează derivabilitatea. Prin urmare, şi funcţia din partea stângă, adică $\left(\frac{u}{v}\right)'$, este derivabilă de $(n-1)$ ori.

Aşadar, funcţia $\frac{u(x)}{v(x)}, v(x)\neq 0, x\in D$ este de n ori derivabilă pe D.

Aplicaţie. $\left(\frac{u}{v}\right)'' = \left(\left(\frac{u}{v}\right)'\right)' = \left(\frac{u'v-uv'}{v^2}\right)' =$

$$= \frac{(u'v-uv')'\cdot v^2-(u'v-uv')(v^2)'}{v^4} =$$

$$= \frac{\left[(u'v)'-(uv')'\right]v^2-(u'v-uv')\cdot 2v\cdot v'}{v^4} =$$

$$= \frac{(u''v+u'v'-u'v'-uv'')v-2u'\cdot v\cdot v'+2u(v')^2}{v^3} =$$

$$= \frac{u''v^2-uv\cdot v''-2u'v'\cdot v+2u(v')^2}{v^3},$$

unde u şi v sunt derivabile de două ori etc.

Nota 2. Folosind acelaşi principiu al inducţiei matematice, se arată că dacă funcţia $F(x)=f(u(x))$ este o funcţie compusă $u: D\to V$ şi $f: V\to R$ şi dacă funcţia u este derivabilă de n ori pe D, f este derivabilă de n ori pe V, atunci $F(x)=f(u(x))$ este derivabilă de n ori pe D.

Într-adevăr, avem $F'(x)=f'(u)\cdot u'(x), x\in D$. Funcţiile $f(u)$ şi $u(x)$, fiind derivabile de n ori respectiv pe V şi D, deci şi produsul $f'(u)\cdot u'(x)=f'(u(x))\cdot u'(x), x\in D$, este o funcţie derivabilă de $(n-1)$ ori. Prin urmare, funcţia $F(x)=f(u(x))$ este derivabilă de n ori.

Aplicaţie. Dacă $y=f(u(x)), x\in D$, atunci

$$y'(x)=f'(u)\cdot u'(x), x\in D;$$

$$y''(x)=\left[f'(u)\cdot u'(x)\right]' = f''(u)\cdot u'(x)\cdot u'(x)+f'(u)\cdot u''(x)=$$

$$= f''(u)\cdot\left[u'(x)\right]^2+f'(u)\cdot u''(x), x\in D;$$

$$y'''(x)=f'''(u)\cdot\left[u'(x)\right]^3+f''(u)\cdot 2u'(x)\cdot u''(x)+$$

$$+f''(u)\cdot u'(x)\cdot u''(x)+f'(u)\cdot u'''(x)=f'''(u)\cdot\left[u'(x)\right]^3+$$

$$+3f''(u)\cdot u'(x)\cdot u''(x)+f'(u)\cdot u'''(x), x\in D,$$

unde u şi v sunt derivabile de 3 ori etc.

Nota 3. Folosind acelaşi principiu al inducţiei matematice ca şi în punctele anterioare, stabilim că dacă funcţia $y=f(x), x\in D$, este strict monotonă pe D, derivabilă de n ori pe D şi $f'(x)\neq 0, x\in D$, atunci şi funcţia inversă $x=f^{-1}(y), y\in V=f(D)$, este strict monotonă pe V şi derivabilă de n ori pe V.

Într-adevăr, avem $x'(y)=\left[f^{-1}(y)\right]' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{y'(x)}$.

Funcţia din partea dreaptă este derivabilă de $(n-1)$ ori pe D, deoarece operaţia împărţirii păstrează derivabilitatea. Prin urmare, şi funcţia din partea stângă, adică funcţia $x'(y)=\left[f^{-1}(y)\right]'$, este derivabilă de $(n-1)$ ori pe V. Aşadar, funcţia $x=f^{-1}(y), y\in V$, este de n ori derivabilă pe V.

Aplicaţie. $x'(y)=\left[f^{-1}(y)\right]' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{y'(x)}$;

$$x''(y)=\left[(y'(x))^{-1}\right]' = (-1)(y'(x))^{-2}\cdot y''(x) = -\frac{y''(x)}{\left[y'(x)\right]^2};$$

$$x'''(y) = -\frac{y'''(x)\cdot\left[y'(x)\right]^2-y''(x)\cdot 2y'(x)\cdot y''(x)}{\left[y'(x)\right]^4} =$$

$$= \frac{2[y''(x)]^2 - y'(x) \cdot y'''(x)}{[y'(x)]^3},$$

unde $y = f(x)$ este derivabilă de 3 ori etc.

Nota 4. Propunem cititorului să demonstreze (demonstraţia este asemănătoare demonstraţiilor din notele anterioare 1) - 3)) că dacă funcţia $y = f(x), x \in D$, este definită parametric de două funcţii $y = \psi(t)$, $x = \varphi(t)$, derivabile de n ori pe mulţimea T şi $x'(t) \neq 0, t \in T$, atunci $y = f(x)$ este de n ori derivabilă pe D.

Aplicaţie. Avem $y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = F(t)$. Deci

$$y''(x) = \left(y_x'\right)_x' = (F(t))_x' = F'(t) \cdot t'(x) = \left[\frac{y'(t)}{x'(t)}\right]_t' \cdot \frac{1}{x'(t)} =$$

$$= \frac{y''(t) \cdot x'(t) - x''(t) \cdot y'(t)}{[x'(t)]^3}$$

(am folosit regulile de derivare ale funcţiilor compuse şi inverse), funcţiile $y(t)$ şi $x(t)$ fiind derivabile de două ori etc.

2.3.2. *Diferenţiale de ordin superior*

Fie funcţia $y = f(x), x \in D$, derivabilă de n ori pe D, adică şi diferenţiabilă de n ori pe D. Atunci diferenţiala ei există şi $dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx$, care o vom numi *diferenţială de ordinul întâi.* Observăm că dy depinde atât de punctul $x \in D$, cât şi de creşterea $\Delta x = dx$ a argumentului x al funcţiei $y = f(x)$. Presupunem că $dx = \Delta x$ din expresia pentru dy este constantă. Atunci dy este o funcţie care depinde numai de x şi este derivabilă pe D.

Diferenţiala funcţiei dy se numeşte *diferenţială de ordinul doi* (sau diferenţiala a doua) a funcţiei $y = f(x)$ şi se notează astfel: d^2y (se citeşte "de doi igrec").

Aşadar, conform definiţiei, $d^2y = d(dy)$, de unde, ţinând cont de expresia diferenţialei funcţiei, vom scrie

$$d^2y = (dy)' \cdot dx = (f'(x) \cdot dx)' \cdot dx = dx \cdot f''(x) \cdot dx =$$

$$= f''(x) \cdot (dx)^2 = f''(x) \cdot dx^2.$$

Se numeşte *diferenţială de ordinul trei* a funcţiei $y = f(x)$ diferenţiala funcţiei d^2y şi se notează prin d^3y. Conform definiţiei,

$$d^3y = d\left(d^2y\right) = d\left(f''(x) \cdot dx^2\right) = \left(f''(x)dx^2\right)' \cdot dx =$$

$$= f'''(x) \cdot dx \cdot dx^2 = f'''(x) \cdot dx^3.$$

Prin recurenţă obţinem că *diferenţiala de ordinul* n a funcţiei $y = f(x)$ se numeşte *diferenţiala funcţiei* $d^{n-1}y$ şi se notează $d^n y$.

Conform definiţiei, obţinem următoarea formulă pentru diferenţiala de ordinul n a funcţiei $y = f(x)$:

$$d^n y = d\left(d^{n-1}y\right) = d\left(f^{(n-1)}(x) \cdot dx^{n-1}\right) =$$

$$= \left(f^{(n-1)}(x) \cdot dx^{n-1}\right)' \cdot dx = f^{(n)}(x) \cdot dx^n, n \in N.$$

Din relaţia obţinută rezultă că derivata de ordinul n a funcţiei $y = f(x)$ este egală cu raportul dintre diferenţiala de ordinul n a funcţiei date şi puterea n a diferenţialei variabilei independente şi deci simbolul derivatei a n-a $\frac{d^n y}{dx^n}$, introdus mai înainte în 2.3.1, devine o fracţie reală – raportul diferenţialei de ordinul n către diferenţiala argumentului la puterea n.

Remarcăm următoarele proprietăţi ale diferenţialei de ordinul n: dacă funcţiile $u = u(x)$, $v = v(x)$, $x \in D$, sunt de n ori derivabile pe D, atunci

1. $d^n(u \pm v) = d^n u \pm d^n v$;

2. $d^n(c\cdot u)=cd^n u$, unde c este o constantă reală;

3. $d^n(u\cdot v)=d^n u\cdot v+n\cdot d^{n-1}u\cdot dv+\dfrac{n(n-1)}{2!}d^{n-2}u\cdot d^2v+\ldots+u\cdot d^n v$.

Proprietățile acestea rezultă imediat din formula $d^n y=y^{(n)}\cdot dx^n$.

Notă. Formulele $d^n y=y^{(n)}\cdot dx^n$ și $y^{(n)}=\dfrac{d^n y}{dx^n}$ pentru $n=2,3,\ldots$ sunt valabile numai în cazul dacă x este o variabilă independentă, adică forma diferențialelor de ordine superioare $(n\geq 2, n\in N)$ nu mai este invariantă.

Într-adevăr, fie $y=f(\varphi(t))$ o funcție compusă prin variabila intermediară x, adică $y=f(x), x=\varphi(t), t\in T$. Admitem că funcțiile $y=f(x)$, $x=\varphi(t)$ sunt de două ori derivabile respectiv pe mulțimile $V=\{x: x=\varphi(t), t\in T\}$ și T. Atunci, conform definiției,

$$d^2y=\left[f(\varphi(t))\right]''\cdot dt^2=\left[f'(x)\cdot x'(t)\right]'\cdot dt^2=$$
$$=\left[(f''(x)\cdot x'(t))\cdot x'(t)+f'(x)\cdot x''(t)\right]dt^2=$$
$$=f''(x)\cdot\left[x'(t)\cdot dt\right]^2+f'(x)\cdot\left[x''(t)\cdot dt^2\right]=f''(x)\cdot dx^2+f'(x)\cdot d^2x.$$

Dacă însă x este o variabilă independentă, adică $x=t\in T$, atunci $d^2x=x''\cdot dt^2=(t)''\cdot dt^2=0\cdot dt^2=0$ și $d^2y=f''(x)\cdot dx^2$.

Ușor se obțin următoarele formule:

1. $d^n\left(e^{ax}\right)=a^n\cdot e^{ax}\cdot dx^n, x\in R$.

2. $d^n \ln|1+x|=(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}, x\neq -1$

(a se consulta ex. 5 din 2.3.1).

2.4. *Teoreme despre funcții derivabile (diferențiabile)*

2.4. *Teoreme despre funcții derivabile (diferențiabile)*

2.4.1. *Teorema Fermat*

Are loc următoarea teoremă.

Teorema Fermat ((1601-1665) – matematician francez). Fie că funcția $y=f(x), x\in\,]a,b[$, posedă în punctul $x_0\in\,]a,b[$ valoarea cea mai mare sau valoarea cea mai mică. Dacă f este derivabilă în x_0, atunci $f'(x_0)=0$.

Demonstrație. Fie, pentru determinare, că funcția $y=f(x), x\in\,]a,b[$, posedă în punctul $x_0\in\,]a,b[$ valoarea cea mai mică, adică pentru orice $x\in\,]a,b[$ avem $f(x)\geq f(x_0)$. Deci pentru orice $x=(x_0+\Delta x)\in\,]a,b[$ creșterea $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\geq 0$.

De aceea, dacă $\Delta x>0$ (sau $x>x_0$), atunci $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\geq 0$ și, prin urmare, $\lim\limits_{\Delta x\to 0+0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\geq 0$, dar dacă $\Delta x<0$ (sau $x<x_0$), atunci $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\leq 0$ și deci $\lim\limits_{\Delta x\to 0-0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\leq 0$.

Conform ipotezei teoremei există

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Această egalitate este posibilă, dacă

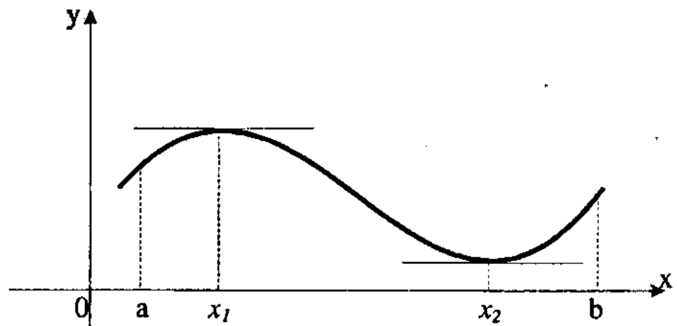
$$\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0,\ \text{adică}\ f'(x_0)=0.$$

Similar se cercetează cazul când funcția f posedă în $x_0\in\,]a,b[$ valoarea cea mai mare.

Teorema este demonstrată.

Reieșind din sensul geometric al derivatei, se poate da o interpretare geometrică acestei teoreme: dacă o funcție derivabilă (diferențiabilă) posedă în punctul x_0 al unui interval deschis $]a,b[$ valoarea cea mai mare sau valoarea cea mai mică, atunci în punctul

$M_0(x_0, f(x_0))$ tangenta la graficul funcţiei $y = f(x), x \in]a,b[$, este paralelă axei OX.



Notă. Teorema Fermat nu este valabilă dacă funcţia $y = f(x)$ este definită pe un segment $[a,b]$. Drept exemplu considerăm funcţia $f(x) = x, x \in [0,1]$. Observăm că funcţia este derivabilă pe acest segment şi $f'(x) = 1, x \in [0,1]$. De asemenea, ca o funcţie continuă pe $[0,1]$, conform teoremei Weierstrass (a se consulta teorema 4 din 1.6.3), această funcţie atinge valoarea cea mai mare (în punctul $x_1 = 1$) şi valoarea cea mai mică (în punctul $x_2 = 0$). Dar şi în punctul $x_1 = 1$, şi în punctul $x_2 = 0$ derivata funcţiei nu se anulează.

2.4.2. *Teorema Rolle*

Are loc următoarea teoremă.

Teorema Rolle ((1652-1719) – matematician francez). Fie funcţia $y = f(x), x \in [a,b]$:

1) continuă pe $[a,b]$;

2) derivabilă pe $]a,b[$;

3) $f(a) = f(b)$.

Atunci există un punct $c \in]a,b[$, astfel încât $f'(c) = 0$.

Demonstraţie. Deoarece funcţia f este continuă pe $[a,b]$, în virtutea teoremei Weierstrass (a se consulta teorema 4 din 1.6.3), ea posedă pe acest segment valoarea cea mai mare (s-o notăm prin M) şi valoarea cea mai mică (s-o notăm prin m), adică există două puncte $x_1 \in [a,b]$, $x_2 \in [a,b]$, astfel încât $f(x_1) = M$, $f(x_2) = m$ şi $m \le f(x) \le M$ pentru orice $x \in [a,b]$.

Sunt posibile două cazuri:

1) $M = m$. Aceasta înseamnă că $f(x) = m = M, x \in [a,b]$, adică f este o funcţie constantă pe $[a,b]$. Prin urmare, $f'(x) = 0$ pentru orice $x \in [a,b]$ şi teorema este demonstrată.

2) $m < M$. Deoarece $f(a) = f(b)$, cel puţin una din valorile m sau M nu este egală cu valoarea funcţiei la extremităţile segmentului $[a,b]$, adică există un punct $c \in]a,b[$, în care $f(x)$ ia valoarea m sau M. În acest caz funcţia f, fiind derivabilă în c şi aplicând teorema Fermat, avem $f'(c) = 0$. Teorema este complet demonstrată.

Teorema Rolle are de asemenea o interpretare geometrică: dacă funcţia $y = f(x), x \in [a,b]$, satisface condiţiile 1), 2) şi 3) din teorema Rolle, atunci există un punct $M_0(c, f(c)), c \in]a,b[$, în care tangenta la graficul funcţiei este paralelă cu axa OX.

Notă. Condiţiile 1), 2) şi 3) din teorema Rolle sunt esenţiale şi nici una din ele nu este de prisos. Pentru a ne convinge de aceasta este suficient să aducem exemple de funcţii, pentru care două condiţii ale teoremei sunt verificate, iar a treia să nu fie verificată şi derivatele cărora să nu se anuleze nici într-un punct.

Exemplul 1. Funcţia $f(x) = x, x \in [0,1]$, este continuă şi derivabilă pe $[0,1]$, adică verifică condiţiile 1) şi 2) ale teoremei Rolle. Condiţia 3) nu este verificată: $f(0) = 0 \ne f(1) = 1$. Observăm că nu există nici un punct din $]0,1[$ în care derivata ei să se anuleze, deoarece $f'(x)=1$ pentru orice $x\in[0,1]$. Deci $f(x)$ nu satisface teorema Rolle.

Exemplul 2. Fie $f(x)=\begin{cases} x, daca\ x\in[0,1[\\ 0, daca\ x=1 \end{cases}$.

Evident că această funcţie verifică condiţiile 2) şi 3). Condiţia 1) nu este verificată în punctul $x_0=1$, deoarece

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0} x=1\neq f(1)=0.$$

Bineînţeles, pentru această funcţie nu există un punct din $]0,1[$, în care derivata ei să se anuleze ($f(x)$ pe $[0,1[$ coincide cu funcţia din exemplul precedent).

Exemplul 3. Funcţia $f(x)=|x|, x\in[-1,1]$, este continuă şi $f(-1)=f(1)=1$, adică se verifică condiţiile 1) şi 3) ale teoremei Rolle. Condiţia 2) în punctul $x_0=0$ nu se verifică, deoarece $\lim\limits_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=-1$, iar $\lim\limits_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=1$ şi deci derivata funcţiei în punctul $x_0=0$ nu există. Pentru funcţia aceasta nu există nici un punct din intervalul $]-1,1[$ în care derivata ei să se anuleze.

Consecinţe din teorema Rolle.

1. Dacă funcţia $y=f(x), x\in[a,b]$, este continuă pe $[a,b]$, derivabilă pe $]a,b[$ şi $f(a)=f(b)=0$, atunci, conform teoremei Rolle, există un punct $c\in]a,b[$, astfel încât $f'(c)=0$. Cu alte cuvinte, ***între două valori, în care funcţia se anulează, există cel puţin o valoare în care derivata ei se anulează.***

2. Dacă funcţia $y=f(x), x\in[a,b]$, este continuă pe $[a,b]$, derivabilă de $(n-1)$ ori pe $]a,b[$ şi se anulează de n ori pe $[a,b]$, atunci există cel puţin un punct $x_0\in]a,b[$ în care derivata de ordinul $(n-1)$ a funcţiei $f(x)$ se anulează, adică $f^{(n-1)}(x_0)=0$.

Într-adevăr, întrucât $f(x)$ se anulează de n ori, conform consecinţei de mai sus, funcţia $f'(x)$ se anulează cel puţin de $(n-1)$ ori, adică există cel puţin $(n-1)$ puncte ale intervalului $]a,b[$ în care $f'(x)$ se anulează. Aplicăm din nou consecinţa 1 la funcţia $f'(x)$. Obţinem că funcţia $f''(x)$ se anulează cel puţin în $(n-2)$ puncte ale intervalului $]a,b[$ etc. Funcţia $f^{(n-1)}(x)$ are cel puţin un punct $x_0\in]a,b[$, în care $f^{(n-1)}(x_0)=0$.

3. Între două rădăcini reale consecutive ale derivatei axistă cel mult o rădăcină reală a funcţiei.

Demonstraţie. Fie c_1 şi c_2 două rădăcini reale consecutive ale derivatei, adică $f'(c_1)=f'(c_2)=0$. Să presupunem că între c_1 şi c_2 există două rădăcini reale diferite α şi β ale funcţiei, adică $f(\alpha)=f(\beta)=0$ şi $c_1<\alpha<\beta<c_2$. Conform teoremei Rolle, pe $]\alpha,\beta[$ există cel puţin un punct în care derivata se anulează, ceea ce e imposibil, deoarece c_1 şi c_2 sunt rădăcini reale consecutive ale derivatei. Prin urmare, între două rădăcini reale consecutive ale derivatei există cel mult o rădăcină reală a funcţiei şi anume: există numai o rădăcină reală a funcţiei f atunci când f ia valori de semne contrare în punctele c_1 şi c_2, adică $f(c_1)\cdot f(c_2)<0$.

Reieşind din această consecinţă, teorema Rolle permite să separăm rădăcinile reale ale ecuaţiei $f(x)=0$, dacă cunoaştem rădăcinile reale ale ecuaţiei $f'(x)=0$.

Fie $c_1<c_2<\ldots<c_k$ toate rădăcinile reale ale ecuaţiei $f'(x)=0$ aşezate în ordine crescătoare. Formăm şirul Rolle

$$f(-\infty), f(c_1), f(c_2),\ldots, f(c_k), f(+\infty).$$

Conform consecinţei 3, în fiecare interval

$$]-\infty,c_1[,]c_1,c_2[,\ldots,]c_k,+\infty[$$

există cel mult o rădăcină reală a funcţiei. Există numai o rădăcină reală, dacă la capetele intervalului funcţia ia valori de semne contrare.

Prin urmare, ecuaţia $f(x)=0$ are atâtea rădăcini reale, câte variaţii de semn prezintă şirul Rolle.

Remarcăm în încheiere că teorema reciprocă teoremei Rolle nu este valabilă. De exemplu, pentru funcţia $f(x)=x^3, x\in[-1,1]$, avem $f'(0)=0$, însă, de exemplu, condiţia 3) nu este verificată: $f(-1)=-1\neq f(1)=1$.

2.4.3. *Teorema Lagrange*

Are loc următoarea teoremă.

Teorema Lagrange. Fie funcţia $y=f(x), x\in[a,b]$:

1) continuă pe $[a,b]$;

2) derivabilă pe $]a,b[$.

Atunci există un punct $c\in]a,b[$, astfel încât $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Demonstraţie. Considerăm funcţia auxiliară

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

care verifică cele trei condiţii ale teoremei Rolle:

1) continuă pe $[a,b]$ ca o sumă algebrică de funcţii continue;

2) derivabilă pe $]a,b[$, deoarece

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}, x\in]a,b[;$$

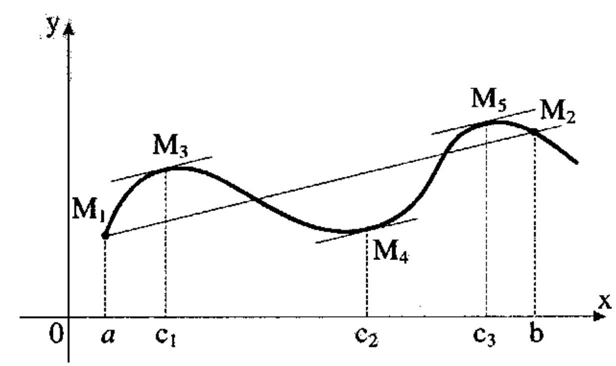
3) $F(a)=f(a)-f(a)-0=0$,

$$F(b)=f(b)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)=0,$$

adică $F(a)=F(b)=0$.

În virtutea teoremei Rolle, există un punct $c\in]a,b[$, astfel încât $F'(c)=0$, adică $f'(c)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$, de unde $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ şi teorema este demonstrată.

Vom determina sensul geometric al teoremei Lagrange. Mărimea $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ este coeficientul unghiular (panta) al secantei ce trece prin două puncte $M_1(a,f(a))$ şi $M_2(b,f(b))$ de pe graficul funcţiei $y=f(x)$, iar $f'(c)$ este coeficientul unghiular (panta) al tangentei la graficul funcţiei în punctul $M_3(c,f(c))$. Din teorema Lagrange rezultă existenţa unui punct c, astfel încât tangenta la graficul funcţiei $y=f(x)$ în punctul $M_3(c,f(c))$ să fie paralelă cu secanta M_1, M_2. Pot exista şi mai multe puncte la fel (M_4,M_5), însă întotdeauna cel puţin unul există.



Notă. Din teorema Lagrange obţinem

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a), c\in]a,b[$$

Avem $(a<c<b) \Rightarrow (0<c-a<b-a) \Rightarrow 0<\frac{c-a}{b-a}<1$.

Notăm $\frac{c-a}{b-a}=\theta$, de unde $c=a+\theta(b-a), \theta \in]0,1[$. Prin urmare,

$$f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a), \theta \in]0,1[,$$

care se numeşte *formula Lagrange* sau *formula creşterilor finite*, deoarece dacă considerăm $x=a$, $x+\Delta x=b$, avem

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\cdot\Delta x, \text{ unde } \theta \in]0,1[.$$

Remarcăm că spre deosebire de formula aproximativă $\Delta y \approx dy$ din 2.2.2., formula Lagrange ne dă valoarea exactă a lui Δy.

Consecinţe din teorema Lagrange

1. Dacă funcţia $y=f(x), x\in[a,b]$ satisface condiţiile teoremei Lagrange, atunci

$$(f \text{ este constantă}) \Leftrightarrow f'(x)=0, x\in]a,b[.$$

Într-adevăr, dacă f este constantă, atunci $f'(x)=0$ pentru orice $x\in[a,b]$.

Invers. Fie $f'(x)=0, x\in]a,b[$. Aplicând teorema Lagrange pe segmentul $[x_1,x_2]$, unde x_1, x_2 – două puncte oarecare ale segmentului $[a,b]$, obţinem

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)=0, c\in]x_1,x_2[\subset [a,b],$$

de unde $f(x_2)=f(x_1)$, ceea ce înseamnă că f este constantă pe $[a,b]$.

2. Fie că $y=f(x), x\in[a,b]$, satisface condiţiile teoremei Lagrange. Atunci

$$(f \text{ este crescătoare pe } [a,b]) \Leftrightarrow (f'(x)\geq 0, x\in]a,b[).$$

Într-adevăr, fie f crescătoare pe $[a,b]$, adică

$$\forall x_1,x_2\in[a,b], x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\leq f(x_2)$$

Fixăm un punct oarecare $x_0 \in]a,b[$. Atunci

$$\forall x\in]a,b[, x<x_0 \Rightarrow f(x)\leq f(x_0) \Rightarrow f(x)-f(x_0)\leq 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0 \text{ şi}$$
$$\forall x\in]a,b[, x>x_0 \Rightarrow f(x)\geq f(x_0) \Rightarrow f(x)-f(x_0)\geq 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0.$$

Trecând la limită, când $x\to x_0$, obţinem $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\geq 0$. Întrucât x_0 este arbitrar, avem $f'(x)\geq 0, x\in]a,b[$.

Invers. Fie $f'(x)\geq 0$ pentru orice $x\in]a,b[$. Vom demonstra că f este crescătoare pe $[a,b]$. Considerăm două valori $x_1<x_2$ din acest segment. Aplicând teorema Lagrange pe $[x_1,x_2]$, obţinem $f(x_2)-f(x_1)=f'(c)\cdot(x_2-x_1)$, unde $c\in]x_1,x_2[\subset]a,b[$.

Deoarece $f'(c)\geq 0$ şi $x_2-x_1>0$, avem $f(x_2)-f(x_1)\geq 0$ sau $f(x_2)\geq f(x_1)$, ceea ce înseamnă că f este crescătoare pe $[a,b]$.

Din consecinţă obţinem următorul rezultat: dacă $f(x)$ este derivabilă pe $]a,b[$ şi $f'(x)>0$ pentru orice $x\in]a,b[$, atunci f este strict crescătoare pe $[a,b]$.

Dacă însă f este strict crescătoare pe $[a,b]$, aceasta nu înseamnă că $f'(x)>0$ pentru orice $x\in]a,b[$. În calitate de exemplu considerăm funcţia $f(x)=x^3$ (parabola cubică), care este strict crescătoare pe R. Într-adevăr, dacă $x_1<x_2$, atunci

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2).$$

Observăm că $x_1 - x_2 < 0$ şi

$$(x_1 - x_2)^2 > 0 \Rightarrow x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 > 0 \Rightarrow x_1x_2 < \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 > 0.$$

Prin urmare, $f(x_1) - f(x_2) < 0$ sau $f(x_1) < f(x_2)$. Funcţia $f(x) = x^3$ este derivabilă pe R şi $f'(x) = 3x^2$. Deci $f'(0) = 0$, adică $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ pentru orice $x \in [-a, a], a \in R - \{0\}$.

3. Fie că $y = f(x), x \in [a,b]$, satisface condiţiile teoremei Lagrange. Atunci

(f este descrescătoare pe $[a,b]$) $\Leftrightarrow (f'(x) \leq 0, x \in]a,b[)$.

Demonstraţia este similară celeia din punctul precedent.

Din această consecinţă obţinem următorul rezultat: dacă $f(x)$ este derivabilă pe $]a,b[$ şi $f'(x) < 0, x \in]a;b[$, atunci f este strict descrescătoare pe $[a,b]$.

4. Fie $f(x)$ şi $g(x)$ derivabile pe intervalul I (închis sau deschis). Atunci

$(f'(x) = g'(x), x \in I) \Leftrightarrow$ ($F = f - g$ este constantă pe I).

Într-adevăr, funcţia $F(x) = f(x) - g(x)$ este derivabilă pe I şi $F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0, x \in I$.

Evident că $F(x)$ satisface condiţiilor teoremei Lagrange şi, conform consecinţei 1 a acestei teoreme, obţinem că funcţia $F(x)$ este o constantă pe I.

Invers. Dacă $F(x) = f(x) - g(x), x \in I$ este constantă, atunci $F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$, de unde $f'(x) = g'(x), x \in I$.

Exemple. 1. Să se demonstreze că funcţiile $f(x) = arctgx$ şi $g(x) = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, x \in R$, sunt egale.

Într-adevăr, avem $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, x \in R$, şi

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{1+x^2}}} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = \frac{\dfrac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}}{\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}} =$$

$$= \frac{1}{1+x^2}, x \in R.$$

În virtutea consecinţei 4 de mai sus $f(x) - g(x) = C = const.$ Dacă $x = 0$, atunci $f(0) - g(0) = 0$, adică $C=0$. Prin urmare, $f(x) = g(x), x \in R$.

2. Propunem cititorului să demonstreze că funcţiile $f(x) = \arcsin x$ şi $g(x) = arctg\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ sunt egale pentru orice $x \in]-1,1[$.

3. Fie $f(x) = \frac{1}{2}arctg\frac{2x}{1-x^2}$ şi $g(x) = arctgx$ definite pentru orice număr real $x \neq \pm 1$.

Observăm că

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{4x^2}{(1-x^2)^2}} \cdot \frac{2(1 - x^2 + 2x^2)}{(1-x^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{2(1+x^2)}{1} = \frac{1}{1+x^2} \text{ şi } g'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Deci $f'(x) = g'(x)$ pentru $x \neq \pm 1$.

În virtutea consecinţei 4 de mai sus avem $f(x) = g(x) + C$, pentru $x \neq \pm 1$, adică această identitate este valabilă pe intervalele $]-\infty, -1[$, $]-1,1[$ şi $]1, +\infty[$.

Este interesant faptul că valoarea constantei C pe aceste intervale este diferită.

Considerăm $x=0\in\left]-1,1\right[$. Avem $f(0)=g(0)+C$, adică $C=0$ şi $f(x)=g(x)$ pe intervalul $\left]-1,1\right[$. Dacă considerăm $x\to-\infty$, adică $x\in\left]-\infty,-1\right[$, atunci obţinem $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)+C$ sau $\frac{1}{2}\cdot 0=-\frac{\pi}{2}+C$, de unde $C=\frac{\pi}{2}$.

Prin urmare, am obţinut identitatea $\frac{1}{2}arctg\frac{2x}{1+x^2}-arctgx=\frac{\pi}{2}$ pentru $x\in\left]-\infty,-1\right[$. Similar, dacă $x\in\left]1,+\infty\right[$, avem $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)+C$, adică $\frac{1}{2}\cdot 0=\frac{\pi}{2}+C$, de unde $C=-\frac{\pi}{2}$. Am demonstrat identitatea $arctgx-\frac{1}{2}arctg\frac{2x}{1-x^2}=\frac{\pi}{2}$ pentru orice $x\in\left]1,+\infty\right[$.

4. Propunem cititorului să demonstreze identităţile

a) $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}, |x|\le 1$;

b) $arctgx+arcctgx=\frac{\pi}{2},\ x\in R$.

2.4.4. Teorema Cauchy

Teorema Cauchy. Fie $f(x)$ şi $g(x)$ continue pe $[a, b]$, derivabile pe $\left]a,b\right[$ şi $g'(x)\neq 0, x\in\left]a,b\right[$. Atunci există un punct $c\in\left]a,b\right[$, astfel încât

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Demonstraţie. Arătăm mai întâi că expresia $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ are sens, adică $g(b)\neq g(a)$. Într-adevăr, dacă admitem că $g(b)=g(a)$, atunci, conform teoremei Rolle, avem că $g'(\zeta)=0$ pentru un punct oarecare $\zeta\in\left]a,b\right[$. Am ajuns la o contrazicere cu ipoteza teoremei.

Trecem acum la demonstrarea teoremei. Considerăm funcţia auxiliară

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\left[g(x)-g(a)\right],$$

care satisface condiţiilor teoremei Rolle pe $[a,b]$:

1) $F(x)$ este continuă pe $[a,b]$ ca o sumă algebrică de funcţii continue;
2) $F(x)$ este derivabilă pe $\left]a,b\right[$, deoarece
$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(x), x\in\left]a,b\right[;$$
3) $F(a)=f(a)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\left[g(a)-g(a)\right]=0$ şi
$$F(b)=f(b)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\left[g(b)-g(a)\right]=$$
$$=f(b)-f(a)-\left[f(b)-f(a)\right]=0,$$

adică $F(a)=F(b)=0$. Conform teoremei Rolle, pentru $F(x)$ există un punct $c\in\left]a,b\right[$, astfel încât $F'(c)=0$, adică $f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(c)=0$, de unde $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Teorema este demonstrată.

Formula $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$ se numeşte *formula Cauchy*.

Notă. În încheierea acestui paragraf constatăm că teorema Rolle este un caz particular al teoremei Lagrange, iar teorema Lagrange este un caz particular al teoremei Cauchy.

Într-adevăr, dacă considerăm $g(x)=x$, $(g'(x)=1\neq 0)$ în teorema Cauchy, atunci formula Cauchy se transformă în formula Lagrange. Dacă considerăm $f(a)=f(b)$ în formula Lagrange, atunci obținem $f'(c)=0$, adică teorema Rolle.

2.5. Regula l'Hospital

Regula l'Hospital ((1661-1704) – matematician francez) se folosește pentru ridicarea nedeterminărilor. Există nedeterminări de forma $\left(\frac{0}{0}\right)$, $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, $(0\cdot\infty)$, $(\infty-\infty)$, (1^{∞}), (0^0) și (∞^0).

2.5.1. Regula l'Hospital pentru ridicarea nedeterminării de forma $\left(\frac{0}{0}\right)$

Teoremă. Fie funcțiile $f(x)$ și $g(x)$ continue în punctul x_0, derivabile într-o δ-vecinătate perforată $\overline{\vartheta}(x_0,\delta)$ a lui x_0, $g'(x)\neq 0$ pentru $x\in\overline{\vartheta}(x_0,\delta)$ și $f(x_0)=g(x_0)=0$. Dacă există limita (finită sau infinită) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, atunci există și limita $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ și ele sunt egale.

Demonstrație. Aplicăm teorema Cauchy pentru funcțiile $f(x)$ și $g(x)$ pe $[x_0,x]$, unde $x\in\overline{\vartheta}(x_0,\delta)$. Obținem $\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$, unde $c\in\,]x_0,x[$. Întrucât $f(x_0)=g(x_0)=0$, avem $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}, c\in\,]x_0,x[$. Observăm că $(x\to x_0)\Rightarrow(c\to x_0)$. Deci

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\substack{x\to x_0\\(c\to x_0)}}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{c\to x_0}\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Deoarece limita funcției nu se schimbă de la schimbarea variabilei (a se consulta teorema 7 din 1.5.3), avem $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{f'(x)}$, ceea ce trebuia de demonstrat.

Notă. 1. Teorema reciprocă nu este valabilă.

Fie $f(x)=\begin{cases}x^2\cdot\sin\frac{1}{x}, & dacă\ x\neq 0\\ 0, & dacă\ x=0\end{cases}$

și $g(x)=\sin x$, care satisfac condițiile ipotezei teoremei în vecinătatea punctului $x_0=0$. Avem

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)\cdot\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=1\cdot\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=0,$$

deoarece produsul dintre o funcție infinit mică și o funcție mărginită este o funcție infinit mică. Observăm că

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{2}{\cos x}\cdot\left(x\cdot\sin\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{\cos x}\cdot\cos\frac{1}{x}\right]=$$

$$=\frac{2}{1}\cdot 0-\frac{1}{1}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\cos\frac{1}{x}\right)=-\lim_{x\to 0}\left(\cos\frac{1}{x}\right)$$

Această limită nu există (a se consulta ex. 3 din 1.5.1).

2. Teorema este valabilă și în cazul când $x\to x_0-0$ sau $x\to x_0+0$.

3. Teorema rămâne valabilă dacă condiția: funcțiile $f(x)$ și $g(x)$ sunt continue în punctul x_0 și $f(x_0)=g(x_0)=0$ se înlocuiește cu

condiția $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0$. Într-adevăr, în acest caz se definesc suplimentar funcțiile $f(x)$ și $g(x)$ în x_0 pornind de la condițiile $f(x_0)=\lim_{x\to x_0} f(x)=0$, $g(x_0)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0$. Astfel, funcțiile $f(x)$ și $g(x)$ sunt deja continue în x_0 și devin egale cu zero în acest punct.

4. Dacă $f'(x_0)=g'(x_0)=0$ și funcțiile $f'(x)$, $g'(x)$ satisfac ipotezei teoremei, atunci regula l'Hospital se aplică din nou, adică avem formula $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}$ etc.

5. Dacă $g'(x_0)=0$, însă $f'(x_0)\neq 0$, atunci teorema se aplică la raportul $\frac{g(x)}{f(x)}$ și obținem $\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{g'(x)}{f'(x)}=0$. Deci

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}}=\infty.$$

6. Regula l'Hospital poate fi aplicată și în cazul când $x\to a$, unde a este unul din simbolurile $-\infty$, $+\infty$, ∞. Într-adevăr, notăm $x=\frac{1}{y}$. Atunci $x\to a \Leftrightarrow y\to 0$ și

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{y\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)}=\lim_{y\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)\cdot\left(\frac{1}{y}\right)'}{g'\left(\frac{1}{y}\right)\cdot\left(\frac{1}{y}\right)'}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)}{g'\left(\frac{1}{y}\right)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Aici a fost aplicată de două ori teorema 7 din 1.5.3.

Exemple.

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\frac{1+1}{1}=2.$$

Am aplicat de trei ori consecutiv regula l'Hospital, luând în considerare punctul 4 al notei de mai sus. Observăm că funcțiile de la numărător și funcțiile de la numitor satisfac ipoteza teoremei în orice vecinătate perforată a punctului $x_0=0$.

2. $$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{2}{x}\cdot\left(\frac{2}{x}\right)'}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{2}{x}\cdot\left(-\frac{2}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}2\cdot\cos\frac{2}{x}=2\cdot\cos 0=2\cdot 1=2.$$

Am aplicat regula l'Hospital, luând în considerare punctul 6 al notei de mai sus. Observăm că dacă considerăm $x=\frac{1}{y}$, atunci funcțiile

$$f(x)=f\left(\frac{1}{y}\right)=\sin\frac{2}{x}=\sin 2y \quad \text{și} \quad g(x)=g\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{x}=y$$

satisfac ipoteza teoremei în orice vecinătate perforată $\overline{\vartheta}(0,\delta)$ a punctului $y_0=0$.

2.5.2. Regula l'Hospital pentru ridicarea nedeterminării de forma $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Fie $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$ și $\lim_{x\to x_0} g(x)=\infty$, adică funcțiile $f(x)$ și $g(x)$ sunt funcții infinit mari, când $x\to x_0$. Prin urmare, funcțiile

$f_1(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ și $g_1(x)=\dfrac{1}{g(x)}$ sunt funcții infinit mici când $x\to x_0$.

$$\text{Deci}\quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{\dfrac{1}{f_1(x)}}{\dfrac{1}{g_1(x)}}=\lim_{x\to x_0}\frac{g_1(x)}{f_1(x)}=\left(\frac{0}{0}\right),$$

ceea ce înseamnă că nedeterminarea de forma $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ pentru funcțiile infinit mari $f(x)$ și $g(x)$, când $x\to x_0$, s-a redus la nedeterminarea de forma $\left(\frac{0}{0}\right)$ pentru funcțiile infinit mici $f_1(x)$ și $g_1(x)$, când $x\to x_0$.

Așadar, pentru ridicarea nedeterminării de forma $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, poate fi aplicată regula l'Hospital pentru ridicarea nedeterminării de forma $\left(\frac{0}{0}\right)$, impunându-le funcțiilor infinit mici $f_1(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ și $g_1(x)=\dfrac{1}{g(x)}$ anumite condiții de continuitate și derivabilitate.

Întrucât operațiile aritmetice asupra funcțiilor mențin continuitatea și derivabilitatea, putem formula regula l'Hospital pentru ridicarea nedeterminărilor de forma $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ în ipoteza teoremei din punctul precedent, fără a efectua transformările algebrice de mai sus. Are loc următoarea teoremă.

Teoremă *(regula l'Hospital pentru ridicarea nedeterminării de forma* $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$*).* Fie funcțiile $f(x)$ și $g(x)$

a) derivabile în orice punct dintr-o vecinătate perforată $\overline{\vartheta}(x_0,\delta)$ a punctului x_0,

b) $g'(x)\neq 0$ pentru orice punct din $\overline{\vartheta}(x_0,\delta)$,

c) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$.

Dacă există limita (finită sau infinită) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, atunci există și limita $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ și ele sunt egale.

Din lipsă de spațiu nu vom prezenta demonstrația acestei teoreme (a se consulta, de exemplu, [1], p. 123; [12], p. 204; [16], p. 233).

Notă. 1. Teorema rămâne valabilă și în cazul când $x\to x_0-0$, $x\to x_0+0$, $x\to a$, unde a este unul din simbolurile $-\infty$, $+\infty$, ∞.

2. Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g'(x)=\infty$ și funcțiile $f'(x)$, $g'(x)$ satisfac condițiile a) și b) ale teoremei, atunci existența limitei (finite sau infinite) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f''(x)}{g''(x)}$ implică existența limitei $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ și aceste două limite sunt egale.

Prin urmare, regula l'Hospital poate fi aplicată de mai multe ori, adică obținem $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f''(x)}{g''(x)}=\dots$.

3. Teorema reciprocă nu este valabilă. Într-adevăr, fie $f(x)=x-\sin x$ și $g(x)=2x+\sin x$. Observăm că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\infty$. Funcțiile $f(x)$ și $g(x)$ sunt derivabile pe R și $g'(x)=2+\cos x\neq 0$ pentru orice $x\in R$. Avem

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{2x+\sin x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1-(\sin x)\cdot\dfrac{1}{x}}{2+(\sin x)\cdot\dfrac{1}{x}}=\frac{1-0}{2+0}=\frac{1}{2},$$

deoarece produsul dintre o funcţie infinit mică ($\frac{1}{x} \to 0$, când $x \to \infty$) şi o funcţie mărginită $(\sin x)$ este o funcţie infinit mică.

Însă $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x-\sin x)'}{(2x+\sin x)'} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-\cos x}{2+\cos x}$ nu există.

Într-adevăr, pentru şirurile $\{x_n\} = \{2\pi n\}$ şi $\{y_n\} = \left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right\}$, care sunt şiruri infinit mari, când $n \to \infty$, şirurile respective ale valorilor funcţiei $F(x) = \frac{1-\cos x}{2+\cos x}$ sunt convergente către numere diferite:

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos x_n}{2+\cos x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos 2\pi n}{2+\cos 2\pi n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-1}{2+1} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

şi

$$\lim_{n\to\infty} F(y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos y_n}{2+\cos y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)}{2+\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos\frac{\pi}{2}}{2+\cos\frac{\pi}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-0}{2+0} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Exemple. 1. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^n}{x^n}$. Reamintim că intervalele de forma $]-\infty, a[$ şi $]b, +\infty[$, unde $a, b \in R$, se numesc respectiv vecinătatea lui $x_0 = -\infty$ (o vom nota $\vartheta(-\infty, a)$) şi vecinătatea lui $x_0 = +\infty$ (o vom nota $v(+\infty, b)$). Observăm că funcţiile $f(x) = \ln^n x$, $g(x) = x^n$, $n \in N, x > 0$, sunt derivabile de ordinul n în vecinătatea $v(+\infty, 1)$ a lui $x_0 = +\infty$ şi $g'(x) \neq 0$, $g''(x) \neq 0, \ldots\ g^{(n)}(x) \neq 0$ pentru orice $x \in v(+\infty, 1) =]1, +\infty[$. Aplicăm de n ori consecutiv regula l'Hospital. Avem

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^n x}{x^n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{n\cdot(\ln x)^{n-1}\cdot\frac{1}{x}}{n\cdot x^{n-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^{n-1}}{x^n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{(\ln x)^{n-2}}{x^n} = \ldots = \lim_{x\to+\infty} \frac{(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{n^{n-1}\cdot x^n} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(n-1)!}{n^{n-1}}\cdot\frac{1}{x^n} = 0.$$

Aceasta înseamnă că funcţia $f(x) = (\ln x)^n$ creşte mai încet decât funcţia $g(x) = x^n$, când $x \to +\infty$, adică $f(x)$ este infinit mare de ordin inferior în raport cu $g(x)$, când $x \to +\infty$ (vezi 1.5.5).

2. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^n}{a^x}, a > 1$. Observăm că funcţiile $f(x) = x^n$ şi $g(x) = a^x$ împreună cu derivatele lor până la ordinul n satisfac ipoteza teoremei. Deci, aplicând de n ori consecutiv regula l'Hospital, obţinem

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{a^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^n)'}{(a^x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{n\cdot x^{n-1}}{a^x\cdot\ln a} =$$

$$= \frac{n}{\ln a}\cdot\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{n-1}}{a^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \frac{n}{\ln a}\cdot\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^{n-1})'}{(a^x)'} = \frac{n(n-1)}{(\ln a)^2}\cdot\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{n-2}}{a^x} =$$

$$= \ldots = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{(\ln a)^n}\cdot\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{a^x} = \frac{n!}{(\ln a)^n}\cdot\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a^x} = 0.$$

Prin urmare, funcţia de putere cu exponent natural (x^n) creşte mai încet decât funcţia exponenţială $a^x, a > 1$, când $x \to +\infty$, adică $f(x)$ este infinit mare de ordin inferior în raport cu $g(x)$, când $x \to +\infty$ (vezi 1.5.5).

2.5.3. Alte nedeterminări

1. Nedeterminările de forma $(\infty-\infty)$ şi $(0\cdot\infty)$, cu ajutorul transformărilor algebrice, uşor se reduc la nedeterminările de forma $\left(\frac{0}{0}\right)$ sau $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ (a se consulta ultimele alineate din 1.5.3).

Exemplul 1. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\left(ctgx-\frac{1}{x}\right)$.

Avem

$$\lim_{x\to 0}\left(ctgx-\frac{1}{x}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}=$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(x\cos x-\sin x)'}{(x\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{\sin x+x\cos x}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\sin x+x\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=-\lim_{x\to 0}\frac{(x\sin x)'}{(\sin x+x\cos x)'}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x\cos x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x\cos x}{2\cos x-x\sin x}=-\frac{0+0}{2-0}=0.$$

Exemplul 2. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0+0}x^n\cdot\ln x,\ n\in N$. Avem

$$\lim_{x\to 0+0}x^n\cdot\ln x=(0\cdot(-\infty))=\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{x^{-n}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0+0}\frac{(\ln x)'}{(x^{-n})'}=$$

$$=\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-n}{x^{n+1}}}=-\frac{1}{n}\cdot\lim_{x\to 0+0}x^n=0.$$

2. Nedeterminările de forma (1^{∞}), (0^0) şi (∞^0) cu ajutorul transformării algebrice

$$|f(x)|^{g(x)}=e^{\ln|f(x)|^{g(x)}}=e^{g(x)\cdot\ln|f(x)|}$$ se reduc la o nedeterminare de forma $(0\cdot\infty)$, iar ultima se reduce la nedeterminările de forma $\left(\frac{0}{0}\right)$ sau $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, conform punctului precedent (a se consulta ultimele alineate din 1.5.3).

Exemplul 3. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-arctgx\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

Avem $\left(\frac{\pi}{2}-arctgx\right)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{\frac{1}{\ln x}\cdot\ln\left(\frac{\pi}{2}-arctgx\right)}$. Deci, în virtutea continuităţii funcţiei e^x pe R, obţinem

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-arctgx\right)^{\frac{1}{\ln x}}=(0^0)=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-arctgx\right)}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-arctgx\right)}{\ln x}}$$

La calcularea ultimei limite aplicăm de trei ori regula l'Hospital:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-arctgx\right)}{\ln x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}-arctgx}\right)\cdot\left(\frac{-1}{1+x^2}\right)}{\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{1+x^2}}{arctgx-\frac{\pi}{2}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}}{\frac{1}{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x^2}{1+x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{2x}=\lim_{x\to+\infty}(-1)=-1.$$

Prin urmare, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-arctgx\right)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{-1}=\frac{1}{e}$.

Aşadar, regula l'Hospital se foloseşte la ridicarea nedeterminărilor de orice formă. Remarcăm că în procesul aplicării acestei reguli se permite simplificarea expresiilor obţinute şi aplicarea limitelor deja cunoscute. De aceea, în practică, pentru a raţionaliza algoritmul calculării limitelor, se folosesc metode combinate.

Vom analiza câteva exemple de acest fel.

Exemplul 4. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xe^{2x}+xe^{x}-2e^{2x}+2e^{x}}{\left(e^{x}-1\right)^{3}}$.

Avem $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xe^{2x}+xe^{x}-2e^{2x}+2e^{x}}{\left(e^{x}-1\right)^{3}}=\left(\frac{0}{0}\right)=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}+2xe^{2x}+e^{x}+xe^{x}-4e^{2x}+2e^{x}}{3\left(e^{x}-1\right)^{2}\cdot e^{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{2x}+xe^{x}-3e^{2x}+3e^{x}}{3\left(e^{x}-1\right)^{2}\cdot e^{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x}+x-3e^{x}+3}{3\left(e^{x}-1\right)^{2}}=$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2\left(e^{x}+xe^{x}\right)+1-3e^{x}}{6\left(e^{x}-1\right)\cdot e^{x}}=\frac{1}{6}\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^{x}}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x}+1-e^{x}}{e^{x}-1}=$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)=\frac{1}{6}\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2\left(e^{x}+xe^{x}\right)-e^{x}}{e^{x}}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}(1+2x)}{e^{x}}=\frac{1}{6}(1+0)=\frac{1}{6}.$$

În exemplul dat am aplicat consecutiv de trei ori regula l'Hospital. După prima aplicare a regulii l'Hospital, am efectuat toate transformările algebrice, reducând termenii asemenea şi simplificând factorul comun e^{x} al expresiei. A doua oară am separat factorul e^{x} al expresiei date, calculând $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{e^{x}}$ prin alte

metode, de exemplu, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{e^{x}}=\frac{1}{e^{0}}=1$, deoarece funcţia $\frac{1}{e^{x}}$ este continuă pe R.

Exemplul 5. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\left(ctg^{2}x-\frac{1}{x^{2}}\right)$.

Avem $\lim\limits_{x\to 0}\left(ctg^{2}x-\frac{1}{x^{2}}\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos^{2}x}{\sin^{2}x}-\frac{1}{x^{2}}\right)=$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^{2}\cos^{2}x-\sin^{2}x}{x^{2}\sin^{2}x}\right)=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cos x+\sin x}{x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin^{2}x}\right).$$

Înainte de a aplica regula l'Hospital, am descompus expresia în doi factori. Observăm că limita primului factor se calculează în mod elementar:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x+\sin x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\cos x+\frac{\sin x}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}(\cos x)+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\cos 0+1=1+1=2.$$

Pentru a calcula limita factorului al doilea, aplicăm regula l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin^{2}x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{\sin^{2}x+2x\sin x\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin x(\sin x+2x\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{\sin x+2x\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\cos x+2\cos x-2x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{3\cos x-2x\sin x}=\frac{-1}{3-0}=-\frac{1}{3}.$$

Prin urmare, $\lim\limits_{x\to 0}\left(ctg^{2}x-\frac{1}{x^{2}}\right)=2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{2}{3}$.

2.6. Formula Taylor

Vom considera una din formulele principale ale analizei matematice cu multiple aplicaţii atât în analiza matematică, cât şi în alte discipline limitrofe.

2.6.1. *Formula Taylor pentru polinoame*

Fie funcţia polinomială de gradul n

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n,$$

$$n\in N,\ a_0,\ldots,a_n\in R \text{ şi } a_n\neq 0.$$

Vom studia relaţia dintre derivatele ei de ordinul k $(k=1,2,\ldots,n)$ şi coeficienţii $a_0,\ldots,a_n$.

Avem $f(x_0)=a_0$ şi

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+\ldots+na_n(x-x_0)^{n-1},$$

de unde $f'(x_0)=a_1$;

$$f''(x)=2a_2+3\cdot 2\cdot a_3(x-x_0)+\ldots+n(n-1)a_nx^{n-2},$$

de unde $f''(x_0)=2a_2$, adică $a_2=\frac{1}{2}f''(x_0)=\frac{1}{2!}f''(x_0)$;

... ...

$f^{(n)}(x)=[n(n-1)\cdots 2\cdot 1]\cdot a_n=n!\,a_n$ *), de unde $a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)$.

Prin urmare,

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\ldots+$$
$$+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n,$$

care se numeşte *formula Taylor* ((1685-1731) – matematician englez) *pentru polinoame* sau *polinomul Taylor pentru funcţia* $f(x)$. Dacă $x_0=0$, obţinem următorul polinom în raport cu x:

*) Reamintim că produsul $1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$ se notează cu $n!$ şi se citeşte "en factorial". Prin convenţie, $0!=1$, $1!=1$. Produsul numerelor impare $1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)$ se notează cu $(2n-1)!!$, iar produsul numerelor pare $2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)$ se notează $(2n)!!$.

$$P_n(x)=P_n(0)+P_n'(0)\cdot x+\frac{1}{2!}P_n''(0)x^2+\ldots+\frac{1}{n!}P_n^{(n)}(0)\cdot x^n,$$

care se numeşte *polinomul Mac Laurin* (1698-1746 - matematician scoţian) *pentru funcţia f(x)*.

2.6.2. *Binomul Newton*

Considerăm polinomul de gradul n

$$f(x)=(a+x)^n=A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_nx^n.$$

Conform formulei Taylor pentru polinoame din punctul precedent, avem $A_0=f(0)=a^n$, $A_k=\frac{1}{k!}f^{(k)}(0)$, $k=1,2,\ldots,n$.

Observăm că

$f'(x)=n(a+x)^{n-1}$, de unde $f'(0)=n\cdot a^{n-1}$,

$f''(x)=n(n-1)(a+x)^{n-2}$, de unde $f''(0)=n(n-1)a^{n-2}$,

... ...

$f^{(k)}(x)=n(n-1)\cdots(n-(k-1))(a+x)^{n-k}$, de unde

$f^{(k)}(0)=n(n-1)\cdots(n-(k-1))a^{n-k}$.

Deci $A_k=\frac{1}{k!}n(n-1)\cdots(n-(k-1))\cdot a^{n-k}$, $k=1,2,\ldots,n$.

Prin urmare, binomul Newton are forma

$$(a+x)^n=a^n+na^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}\cdot x^2+\ldots+$$
$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))}{k!}a^{n-k}\cdot x^k+\ldots+x^n \qquad (1)$$

Dacă a=1, obţinem

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\ldots+$$
$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{k!}x^k+\ldots+x^n \qquad (2)$$

Coeficienţii de pe lângă x^k (k = 0, 1,..., n) din formula (2) se numesc *coeficienţi binomiali* şi se notează $C_n^k (k = 0,1,2,\ldots,n)$. În analiza combinatorică C_n^k înseamnă numărul combinărilor din *n* elemente luate câte *k*. Deci formula (2) are forma

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^k x^k + \ldots +$$
$$+ C_n^n x^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k.$$

Remarcăm unele proprietăţi importante ale coeficienţilor binomiali:

1) Deoarece

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^{n-k},$$

avem că coeficienţilor binomiali din formulele (1) şi (2) egal depărtaţi de termenii extremi ai dezvoltării (C_n^0 şi $C_n^n x^n$) sunt egali între ei.

2) Coeficienţii binomiali cresc mai întâi, apoi descresc. Dacă exponentul puterii binomului este par, atunci coeficientul binomial al termenului din mijloc al dezvoltării este cel mai mare. Dacă însă exponentul puterii binomului este impar, atunci coeficienţii binomiali ai celor doi termeni de la mijlocul dezvoltării sunt egali între ei şi-s cei mai mari.

3) Dacă luăm $x = 1$ şi $x = -1$ atunci formula (2) se transformă în următoarele identităţi

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n = 2^n \quad \text{şi respectiv}$$
$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^k = 0.$$

Adunându-le şi scăzându-le parte cu parte obţinem alte două egalităţi

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = 2^{n-1} \quad \text{şi}$$
$$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = 2^{n-1}.$$

2.6.3. Formula Taylor pentru funcţii

Are loc următoarea teoremă.

Teorema Taylor. Fie funcţia $f(x)$ derivabilă până la ordinul *n* inclusiv într-o δ – vecinătate $v(x_0, \delta)$ oarecare a punctului x_0. Atunci pentru orice $x \in v(x_0,\delta)$ avem $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, unde $T_n(x)$ este polinomul Taylor pentru funcţia $f(x)$, iar $R_n(x)$ este o funcţie infinit mică de ordinul *n* în raport cu funcţia infinit mică $(x - x_0)$, când $x \to x_0$, adică $R_n(x) = o((x-x_0)^n)$.

Demonstraţie. Fie $f(x)$ derivabilă până la ordinul *n* inclusiv într-o δ – vecinătate $v(x_0, \delta)$ a punctului x_0. Polinomul Taylor pentru funcţia $f(x)$ are forma

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n \text{ pentru orice } x \in v(x_0,\delta).$$

Întrucât, în genere, $f(x)$ nu este o funcţie polinomială, notând diferenţa $f(x) - T_n(x)$ prin $R_n(x)$, avem

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \quad x \in v(x_0,\delta).$$

Observăm că

$$R_n(x_0) = f(x_0) - T_n(x_0) = f(x_0) - f(x_0) = 0$$
$$R_n'(x_0) = f'(x_0) - T_n'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$$
$$R_n''(x_0) = f''(x_0) - T_n''(x_0) = f''(x_0) - f''(x_0) = 0$$
$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$
$$R_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) - T_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_0) = 0.$$

Demonstrăm că $R_n(x) = o((x-x_0)^n)$, când $x \to x_0$. Într-adevăr, deoarece funcţiile $R_n(x)$ şi $(x-x_0)^n$ satisfac condiţiilor regulii l'Hospital pentru ridicarea nedeterminării de forma $\left(\frac{0}{0}\right)$ într-o δ – vecinătate $V(x_0,\delta)$ a punctului x_0, aplicăm regula l'Hospital de n ori consecutiv la calcularea limitei

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\ldots=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n)}(x)}{n(n-1)\cdots 1}=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n)}(x)}{n!}=\lim_{x\to x_0}0=0,$$

ceea ce înseamnă că $R_n(x)=o\left((x-x_0)^n\right)$, când $x\to x_0$. Teorema este demonstrată.

Formula

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+R_n(x),$$

se numeşte *formula Taylor pentru funcţia* $f(x)$, iar $R_n(x)$ – *restul formulei Taylor.*

Din teorema Taylor observăm că restul $R_n(x)$ este o funcţie infinit mică, când $x\to x_0$, de ordinul n în raport cu funcţia infinit mică $(x-x_0)$, când $x\to x_0$, adică $R_n(x)$ este un infinit mic de ordin superior în raport cu orice termen al polinomului Taylor.

Notând $x-x_0=\Delta x$ şi $\Delta y=f(x)-f(x_0)$, formula Taylor are următoarea formă:

$$\Delta y=y'(x_0)\Delta x+\frac{1}{2!}y''(x_0)\Delta x^2+\frac{1}{3!}y'''(x_0)\Delta x^3+\ldots+$$
$$+\frac{1}{n!}y^{(n)}(x_0)\Delta x^n+0(\Delta x^n).$$

Dacă $n=1$, adică funcţia este derivabilă într-o vecinătate a punctului x_0, atunci formula Taylor are forma

$$\Delta y=y'(x_0)\Delta x+0(\Delta x)=dy+0(\Delta x),$$

unde funcţia $0(\Delta x)$ este o funcţie infinit mică, când $\Delta x\to 0$, de ordin superior în raport cu Δx. Am obţinut condiţia de diferenţiabilitate a funcţiei (a se consulta definiţia din *2.1.1.* cu $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{0(\Delta x)}{\Delta x}=0$).

Deoarece

$$dy(x_0)=y'(x_0)\Delta x,\ d^2y(x_0)=y''(x_0)\Delta x^2,\ \ldots,\ d^ny(x_0)=y^{(n)}(x_0)\Delta x^n,$$

formula Taylor are forma

$$\Delta y=dy(x_0)+\frac{1}{2!}d^2y(x_0)+\frac{1}{3!}d^3y(x_0)+\ldots+\frac{1}{n!}d^ny(x_0)+0(\Delta x^n).$$

Aşadar, teorema Taylor permite de a aproxima orice funcţie, care satisface ipoteza teoremei, cu polinomul Taylor. În acest caz eroarea absolută este caracterizată de restul formulei Taylor.

Formula Taylor pentru $x_0=0$ se numeşte *formula Mac Laurin*:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+R_n(x).$$

Notă. 1. Restul $R_n(x)$ de forma $0\left((x-x_0)^n\right)$ din teorema Taylor se numeşte *restul în forma Peano* ((1858-1932) – matematician italian), iar formula Taylor (sau Mac Laurin) respectivă – formula Taylor (sau Mac Laurin) cu restul în forma Peano.

2. Restul $R_n(x)$ poate avea şi alte forme:

a) forma Lagrange

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\ \theta\in\,]0,1[;$$

b) forma Cauchy

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1},\quad \theta\in\,]0,1[.$$

În practică se foloseşte des formula Mac Laurin cu restul în forma Lagrange:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},$$
$$0<\theta<1.$$

3. Formula Lagrange sau formula creşterilor finite $\Delta y = y'(x_0 + \theta(x - x_0))\Delta x$ este un caz particular al formulei Taylor cu restul în forma Lagrange $(n = 0)$.

Vom considera câteva exemple de dezvoltare a unor funcţii elementare după formula Mac Laurin cu restul în forma Lagrange.

1. $f(x) = e^x$.

Deoarece funcţia e^x este indefinit derivabilă pe R şi

$$f^{(n)}(x) = (e^x)^{(n)} = e^x, n \in N,$$

avem $f(0) = e^0 = 1$, $f^n(0) = e^0 = 1$, $n \in N$.

Prin urmare,

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + R_n(x), x \in R,$$

unde $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}, \theta \in]0,1[$.

Din această formulă, schimbând x prin $(-x)$, obţinem următoarea formulă

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}x^n + R_n(x),$$

unde $R_n(x) = (-1)^{n+1}\frac{e^{-\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}, \theta \in]0,1[, x \in R$.

2. $f(x) = \sin x$ (a se consulta ex. 2 din 2.3.1).

Avem $f^{(n)}(x) = (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right), n \in N, x \in R$.

Deci $f(0) = \sin 0 = 0$ şi

$$f^{(n)}(0) = \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n = 2k \\ (-1)^{k+1}, & \text{dacă } n = 2k - 1, k \in N \end{cases}.$$

Prin urmare,

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \ldots + (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{(2k-1)!} \cdot x^{2k-1} + R_{2k-1}(x),$$

unde $R_{2k-1}(x) = R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{f^{(2k)}(\theta x)}{(2k)!} \cdot x^{2k} =$

$$= \frac{x^{2k}}{(2k)!} \cdot \sin\left(\theta x + 2k \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \frac{x^{2k}}{(2k)!} \cdot \sin(\theta x + k\pi), k \in N, x \in R.$$

3. $f(x) = \cos x$ (a se consulta ex. 3 din 2.3.1).

Avem $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right), n \in N, x \in R$.

Deci

$$f(0) = \cos 0 = 1, f'(0) = \cos(1 \cdot \frac{\pi}{2}) = 0, f''(0) = \cos(2 \cdot \frac{\pi}{2}) = -1, \ldots,$$

$$f^{(n)}(0) = \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, n = 2k - 1 \\ (-1)^k, n = 2k, k \in N \end{cases}.$$

Prin urmare,

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \ldots + (-1)^k \cdot \frac{1}{(2k)!}x^{2k} + R_{2k}(x),$$

unde $R_{2k}(x) = R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} = \frac{f^{(2k+1)}(\theta x)}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} =$

$$= \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot \cos\left(\Theta x + (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right), \Theta \in]0,1[, k \in N, x \in R.$$

$$= \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot \cos\left(\theta x + (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right), \theta \in]0,1[, k \in N, x \in R.$$

4. $f(x) = \ln|1 + x|, x \neq -1$ (a se consulta ex. 5 din 2.3.1, considerând $b = c = 1$).

Avem $f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}, n\in N, x\neq -1.$

Deci $f(0)=0$, $f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!, n\in N$.

Prin urmare,

$$\ln|1+x|=x-\frac{x^2}{2!}+\frac{2!x^3}{3!}-\frac{3!x^4}{4!}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\cdot\frac{x^n}{n!}+R_n(x)=$$

$$=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot x^n+R_n(x),\ x\neq -1,$$

unde $$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}=\frac{(-1)^n\cdot n!\cdot x^{n+1}}{(n+1)!(1+\theta x)^{n+1}}=$$

$$=\frac{(-1)^n}{n+1}\cdot\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}},\ \theta\in\,]0,1[,\ n\in N.$$

5. $f(x)=\ln|1-x|, x\neq 1$ (a se consulta ex. 5 din 2.3.1, considerând $b=-1, c=1$).

Avem

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\cdot\frac{(-1)^n}{(1-x)^n}=-\frac{(n-1)!}{(1-x)^n},\ n\in N,\ x\neq -1.$$

Deci $f(0)=0$, $f^{(n)}(0)=-(n-1)!$, $n\in N$.

Prin urmare,

$$\ln|1-x|=-\left[x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}\right]+R_n(x),\ x\neq 1,$$

unde

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}=-\frac{x^{n+1}}{(n+1)!\cdot(1-x\theta)^{n+1}},\theta\in\,]0,1[.$$

6. $f(x)=(1+x)^{\alpha}, \alpha\in R$.

Această funcţie este indefinit derivabilă pe R şi, prin recurenţă, uşor se stabileşte următoarea formulă

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n},\ n\in N.$$

Deci $f(0)=1$, $f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1)), n\in N$.

Prin urmare,

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots+$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n+R_n(x)\ x\in R,$$

unde $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}\cdot x^{n+1}$,

$\theta\in\,]0,1[$, $n\in N$.

Notă. Combinând formulele din exemplele de mai sus, se pot obţine alte formule:

a) $$shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}\left[1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}x^n+R_n'(x)-\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x^n}{n!}+R_n''(x)\right)\right]=$$

$$=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+R_{(2n-1)}(x),\ x\in R;$$

b) $$chx=\frac{e^x+e^x}{2}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+R_{2n}(x),\ x\in R;$$

c) $$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)=2\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\ldots+\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}\right)+$$

$+R_{2n-1}(x)$, $n\in N$ şi $|x|<1$. Din această formulă, aplicând substituţia $\dfrac{1+x}{1-x}=\dfrac{k+1}{k}$, obţinem $x=\dfrac{1}{2k+1}, k\in N$, şi deci

$$\ln\frac{k+1}{k}=2\left[\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{3(2k+1)^3}+\frac{1}{5(2k+1)^5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2k+1)^{(2n-1)}}\right]+$$

$$+R_n(x), n\in N, k\in N.$$

Menţionăm că restul $R_n(x)$ în forma Lagrange a formulelor de mai sus are o expresie mai complicată decât resturile din formulele componente.

2.6.4. *Aplicaţii*

1. Numărul e.

Ştiind că $e<3$ şi considerând $x=1$ în formula

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{\theta x},$$

obţinem $\quad e = 2 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!},\ \theta \in]0,1[$.

Pentru $n \geq 2$ avem $\frac{e^\theta}{n+1} < 1$ şi deci

$$\frac{e^\theta}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{e^\theta}{n+1} < \frac{1}{n!}.$$

Astfel, obţinem inegalitatea dublă

$$2 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} < e < 2 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!},$$

care ne permite să calculăm valoarea numărului iraţional e cu orice grad de exactitate. Pentru orice $n \geq 2$ eroarea comisă este mai mică decât numărul $\frac{1}{n!}$. De exemplu, dacă luăm $n=8$, avem $\frac{1}{8!} < \frac{1}{10^5}$ şi obţinem valoarea aproximativă a numărului e cu o precizie de $\frac{1}{10^5}$, adică cu cinci semne zecimale după virgulă: $e \approx 2{,}71828$.

2. Calcularea valorilor funcţiei.

Pentru a calcula valorile funcţiilor elementare e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\ln x$ se folosesc formulele Taylor pentru aceste funcţii. De exemplu, să calculăm valoarea aproximativă a numărului iraţional $\sin 20^\circ = \sin\frac{\pi}{9}$. Folosim formula aproximativă:

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{k+1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!},\ k \in N,\ x \in R.$$

Eroarea comisă $R_{2k-1}(x)$ se determină din inegalitatea

$$|R_{2k-1}(x)| = \left|\frac{x^{2k}}{(2k)!} \cdot \sin(\theta x + k\pi)\right| \leq \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Dacă folosim numai doi termeni din formula de mai sus, obţinem $\quad \sin 20^\circ = \sin\frac{\pi}{9} \approx \frac{\pi}{9} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^3 \approx 0{,}342$.

Pentru a determina gradul de exactitate, avem formula

$$|R_3(x)| = \left|R_3\left(\frac{\pi}{9}\right)\right| \leq \left(\frac{\pi}{9}\right)^4 \cdot \frac{1}{4!} = \frac{\pi^4}{9^4} \cdot \frac{1}{24} < 0{,}001 = \frac{1}{10^3}.$$

Aşadar, numărul $0{,}342$ reprezintă valoarea lui $\sin 20^\circ$ cu exactitatea de $\frac{1}{10^3}$, adică cu trei semne zecimale după virgulă.

3. Calcularea limitelor.

Pentru a ridica o nedeterminare de forma $\left(\frac{0}{0}\right)$, este necesar de a calcula limita raportului a două funcţii. Fie $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$. Descompunem, mai întâi, funcţiile $f(x)$ şi $g(x)$ după formula Taylor în vecinătatea punctului x_0 (dacă, bineînţeles, este posibil), limitându-ne la primii termeni diferiţi de zero, adică descompunerile au forma

$$f(x) = a(x-x_0)^n + 0\left((x-x_0)^n\right),\ a \neq 0$$

$$\text{şi } g(x) = b(x-x_0)^m + 0\left((x-x_0)^m\right),\ b \neq 0.$$

Atunci,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to x_0}\frac{a(x-x_0)^n + 0\left((x-x_0)^n\right)}{b(x-x_0)^m + 0\left((x-x_0)^m\right)} =$$

$$= \frac{a}{b} \lim_{x \to x_0} (x - x_0)^{n-m} = \begin{cases} 0, \text{ dacă } n > m \\ \frac{a}{b}, \text{ dacă } n = m. \\ \infty, \text{ dacă } n < m \end{cases}$$

Pentru a dezvolta după formula Taylor funcţiile $f(x)$ şi $g(x)$, pot fi folosite dezvoltările acestor funcţii după formula Mac Laurin.

Într-adevăr, $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{vmatrix} x - x_0 = t \\ x \to x_0 \\ t \to 0 \end{vmatrix} = \lim_{t \to 0} \frac{f(t + x_0)}{g(t + x_0)}$,

dacă $x_0 \in R$ şi

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{vmatrix} x = \frac{1}{t} \\ t \to 0 \end{vmatrix} = \lim_{t \to 0} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}.$$

Dacă avem a ridica nedeterminări de alte forme, atunci ele se reduc la nedeterminarea de forma $\left(\frac{0}{0}\right)$ (a se consulta ultimele alineate din 1.5.3).

Exemple. Să se calculeze următoarele limite:

1. $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.

Avem $\quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + 0(x^3)$,

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + 0(x^3),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + 0(x^3).$$

Deci $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + 0(x^3) - 1 + x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + 0(x^3) - 2x}{x - x + \frac{x^3}{3!} + 0(x^3)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + 0(x^3)}{\frac{x^3}{6} + 0(x^3)} = \lim_{x \to 0} 2 = 2$$

(a se compara cu ex. 1 din 2.4.1).

2. $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right) = (\infty - \infty) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2 \cdot \sin^2 x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left[\left(x - \frac{x^3}{6}\right) + 0(x^3)\right]^2 - x^2}{x^2 [x + 0(x)]^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 2 \cdot \frac{x^4}{6} + 0(x^4) - x^2}{x^2 (x^2 + 0(x^2))} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{x^4}{3} + 0(x^4)}{x^4 + 0(x^4)} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{x^4}{3}}{x^4} = -\frac{1}{3}.$$

3. $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = (1^\infty) = \lim_{x \to 0} e^{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x \to 0} \frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x}} =$

$$= e^{\lim_{x \to 0} \frac{\ln\left(\frac{x + 0(x)}{x}\right)}{x}} = e^{\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + 0(x^2))}{x}} = e^{\lim_{x \to 0} \frac{0(x^2)}{x}} = e^0 = 1$$

(vezi formula 8 din tabelul funcţiilor echivalente din (1.5.5).

2.7. *Extremele funcţiei*

Fie funcţia $y=f(x)$ definită pe domeniul D şi $x_0 \in D \subseteq R$.

Definiţia 1. Punctul x_0 se numeşte *punct de maxim (minim)* al funcţiei $y=f(x)$, dacă există o δ - vecinătate a lui x_0, astfel încât pentru orice valoare a lui $x \in D \cap v(x_0, \delta)$ se satisface inegalitatea $f(x) \leq f(x_0)$ (respectiv $f(x) \geq f(x_0)$).

Punctele de maxim şi de minim se mai numesc *puncte de extrem* ale funcţiei.

Valoarea funcţiei $f(x)$ într-un punct de maxim (de minim) se numeşte *maximul (minimul)* funcţiei sau *extremul* funcţiei.

Din definiţie rezultă că noţiunea de extrem are un caracter local în sensul că inegalitatea $f(x) \leq f(x_0)$ (sau $f(x) \geq f(x_0)$) poate să nu fie verificată de toate valorile variabilei x din domeniul de definiţie al funcţiei, dar trebuie să fie satisfăcută doar într-o δ - vecinătate a punctului x_0. De aceea maximul şi minimul funcţiei se numesc *maximul (minimul) local* al funcţiei sau *extremul local* al funcţiei.

Observăm că dacă x_0 este un punct de maxim (minim) al funcţiei f, atunci $f(x_0)$ este valoarea cea mai mare (cea mai mică) a funcţiei într-o δ - vecinătate a punctului x_0 (să nu se confunde cu valoarea cea mai mare şi valoarea cea mai mică a funcţiei $f(x)$ pe domeniul D, care are un caracter global (total) pe această mulţime D).

Evident, funcţia poate avea câteva maxime locale şi câteva minime locale, iar uneori e posibil ca valoarea unui minim local să fie mai mare decât valoarea unui maxim local.

Dacă notăm $x-x_0=\Delta x$ şi $f(x)-f(x_0)=\Delta y$, atunci punctele de extrem pot fi definite astfel.

Definiţia 2. Punctul x_0 se numeşte *punct de maxim (minim)* al funcţiei $f(x)$, dacă inegalitatea $\Delta y \leq 0$ (respectiv $\Delta y \geq 0$) este satisfăcută când $\Delta x \to 0$.

Fie funcţia $f(x)$ continuă pe $[a, b]$ şi x_1, x_2 două puncte consecutive de maxim ale funcţiei $f(x)$. Aplicând teorema Weierstrass (teorema 4 din 1.6.3), obţinem că $f(x)$ atinge valoarea cea mai mare M pe $[x_1, x_2]$, care coincide cu $max(f(x_1), f(x_2))$ şi valoarea cea mai mică m, adică există un punct $c \in]x_1, x_2[$, astfel

încât $f(x) \geq f(c)=m$ pentru orice x din $]x_1, x_2[$. Aceasta înseamnă că punctul $c \in]x_1, x_2[$ este un punct de minim al funcţiei. Prin urmare, între două puncte consecutive de maxim se găseşte numaidecât un punct de minim.

Analog, între două puncte consecutive de minim se află întotdeauna un punct de maxim.

Aşadar, dacă $f(x)$ este continuă pe $[a, b]$ şi posedă mai multe puncte discrete de maxim sau minim, atunci ele alternează între ele.

Această proprietate se foloseşte foarte des în practică la studiul funcţiilor.

***Teorema 1** (condiţie necesară de existenţa extremului funcţiei).* Dacă funcţia $f(x)$ este derivabilă în punctul x_0, care este un punct de extrem, atunci $f'(x_0)=0$.

Demonstraţie. Deoarece în punctul x_0 funcţia $f(x)$ admite un extrem (local), rezultă că există un interval $]x_0-\delta, x_0+\delta[$, astfel încât $f(x_0)$ coincide cu valoarea cea mai mare sau cu valoarea cea mai mică a funcţiei pe acest interval. Conform teoremei Fermat (vezi 2.4.1), avem $f'(x_0)=0$.

Teorema 1 admite următoarea interpretare geometrică. Dacă x_1, x_2 sunt puncte de extrem ale funcţiei $f(x)$ şi în punctele respective ale graficului funcţiei există tangente, atunci aceste tangente sunt paralele axei absciselor.

Rădăcinile ecuaţiei $f'(x)=0$ se numesc *puncte staţionare* ale funcţiei $f(x)$ (trecând prin punctele acestea, funcţia parcă "staţionează": în consecinţa 1 din teorema Lagrange (vezi 2.4.3) am stabilit următorul rezultat: funcţia f este constantă pe D dacă şi numai dacă $f'(x)=0, x \in D$).

Notă. Condiţia $f'(x)=0$ pentru funcţia $f(x)$, derivabilă în $x=x_0$, nu este suficientă ca x_0 să fie un punct de extrem al funcţiei $f(x)$. Într-adevăr, pentru funcţia $y=x^3$, derivabilă pe R, avem $f'(0)=0$ şi $x_0=0$ nu este punct de extrem: $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(\Delta x)-f(0)=(\Delta x)^3-0=(\Delta x)^3$. Deci dacă $\Delta x \to 0-0$, atunci $\Delta y<0$ şi dacă $\Delta x \to 0+0$, atunci $\Delta y>0$, adică Δy îşi schimbă semnul când $\Delta x \to 0$. Aceasta înseamnă, conform definiţiei 2, că punctul $x_0=0$ nu este punct de extrem pentru funcţia $y=x^3$.

Convenim să spunem că funcţia $\varphi(x)$ *îşi schimbă semnul plus în minus* când argumentul trece prin punctul x_0, dacă $\varphi(x)>0$ pentru $x<x_0$ şi $\varphi(x)<0$ pentru $x>x_0$.

În mod asemănător se defineşte schimbarea semnului minus al funcţiei $\varphi(x)$ în semnul plus, când argumentul trece prin punctul x_0. Dacă însă $\varphi(x)>0$ sau $\varphi(x)<0$ atât pentru $x<x_0$, cât şi pentru $x>x_0$, atunci spunem că $\varphi(x)$ *îşi păstrează semnul* când argumentul trece prin punctul x_0.

În aceste cazuri se consideră valorile lui x dintr-o δ- vecinătate suficient de mică a lui x_0.

***Teorema 2** (condiţie suficientă de existenţa extremului funcţiei).* Fie funcţia $f(x)$ derivabilă într-o δ- vecinătate a punctului x_0, exceptând doar însăşi punctul. Dacă derivata $f'(x)$ îşi schimbă semnul plus în minus când argumentul trece prin x_0, atunci x_0 este un punct de maxim pentru funcţia $f(x)$. Dacă derivata $f'(x)$, când argumentul trece prin punctul x_0, îşi schimbă semnul minus în plus, atunci x_0 este un punct de minim pentru $f(x)$. Dacă $f'(x)$ îşi păstrează semnul când argumentul trece prin x_0, atunci x_0 nu este punct de extrem al funcţiei $f(x)$.

Demonstraţie. Să presupunem, de exemplu, că derivata $f'(x)$ îşi schimbă semnul plus în minus când argumentul trece prin punctul x_0, adică există o δ- vecinătate a punctului x_0 pentru care $f'(x)>0$, dacă $x\in]x_0-\delta, x_0[$ şi $f'(x)<0$, dacă $x\in]x_0, x_0+\delta[$.

Conform consecinţei 2 a teoremei Lagrange (vezi 2.4.3), obţinem că $f(x)$ este crescătoare pe $]x_0-\delta_1, x_0[$ şi descrescătoare pe $]x_0, x_0+\delta_1[$ cu $\delta>\delta_1>0$.

Deci $x<x_0 \Rightarrow f(x)\le f(x_0)$ şi $x>x_0 \Rightarrow f(x)\le f(x_0)$, adică $f(x)\le f(x_0)$ pentru orice $x\in]x_0-\delta_1, x_0+\delta_1[$, ceea ce înseamnă că punctul x_0 este un punct de maxim pentru funcţia $f(x)$.

În mod analog se studiază cazul când $f'(x)$ îşi schimbă semnul minus în plus, dacă argumentul ei trece prin punctul x_0.

Rămâne de cercetat cazul când $f'(x)$ îşi păstrează semnul.

Fie, de exemplu, $f'(x)>0$ pentru orice x dintr-o δ- vecinătate a punctului x_0. Conform consecinţei 2 a teoremei Lagrange, funcţia $f(x)$ este crescătoare pe $]x_0-\delta_1, x_0+\delta_1[$ cu $\delta>\delta_1>0$, adică

$$x<x_0 \Rightarrow f(x)\le f(x_0) \quad \text{şi} \quad x>x_0 \Rightarrow f(x)\ge f(x_0),$$

pentru orice $x\in]x_0-\delta_1, x_0+\delta_1[$.

Conform definiţiei 1, punctul x_0 nu este punct de extrem al funcţiei $f(x)$ şi teorema este complet demonstrată.

Exemple. Să se afle punctele de extrem ale funcţiilor:

1. $y=f(x)=|x|=\begin{cases} x, & dacă \quad x\ge 0 \\ -x, & dacă \quad x<0. \end{cases}$

Observăm că $f(x)$ este continuă pe R. Avem $f'(x)=-1$, dacă $x<0$ şi $f'(x)=1$, dacă $x>0$.

Prin urmare, derivata $f'(x)$, când argumentul ei trece prin $x_0=0$, îşi schimbă semnul minus în plus, adică $x_0=0$ este un punct de minim pentru $f(x)$. Derivata $f'(x)$ în punctul $x_0=0$ nu există (a se consulta ex. 5 din 2.1.1).

Dacă $x\neq 0$, atunci $f'(x)$ nu-şi schimbă semnul, adică alte extreme funcţia nu are.

2. Funcţia $y=\sqrt[3]{x^2}$ este continuă pe R.

Observăm că $y'=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ pentru $x\neq 0$, adică funcţia este derivabilă pe $R-\{0\}$ şi $y'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\Delta x^2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}=\infty.$$

Trecând prin $x_0=0$, derivata $y'(x)$ îşi schimbă semnul minus în plus când x trece prin punctul $x_0=0$, deoarece $x<0 \Rightarrow$ $\Rightarrow y'=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}<0$ şi $x>0 \Rightarrow y'=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}>0$. Prin urmare, funcţia $y=\sqrt[3]{x^2}$ are minim în punctul $x_0=0$.

Pentru $x\neq 0$, derivata $y'=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ nu-şi schimbă semnul într-o δ- vecinătate suficient de mică a lui x. Deci alte puncte extrem funcţia nu are.

3. Fie $f(x)=\begin{cases} x^2 \cdot \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x=0. \end{cases}$

Observăm că $f(x)$ este continuă pe $R-\{0\}$ ca produsul a două funcţii continue. În punctul $x_0=0$ avem

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(x^2\cdot\sin\frac{1}{x}\right)=0=f(0),$$

deoarece produsul unei funcţii infinit mici cu o funcţie mărginită este o funcţie infinit mică. Deci $f(x)$ este continuă pe R. Funcţia este derivabilă pe $R-\{0\}$ şi

$$f'(x)=\left(x^2\cdot\sin\frac{1}{x}\right)'=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}.$$

Dacă $x=0$, avem

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^2\cdot\sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\Delta x\cdot\sin\frac{1}{\Delta x}\right)=0,$$

deoarece produsul unei funcţii infinit mici cu o funcţie mărginită este o funcţie infinit mică, adică $f(x)$ este derivabilă în $x_0=0$.

În cazul acesta teorema 2 nu poate fi aplicată. Într-adevăr, pentru $x\neq 0$, $x\to 0$ avem

$$f'(x)=2x\cdot\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} \quad \text{şi} \quad \lim_{x\to 0}\left(2x\cdot\sin\frac{1}{x}\right)=0.$$

Deci semnul lui $f'(x)$ pentru $x\neq 0$ şi $x\to 0$ este determinat de termenul $\cos\frac{1}{x}$, care "oscilează" între (-1) şi (+1), adică în orice δ- vecinătate a punctului $x_0=0$, atât la dreapta lui 0, cât şi la stânga lui 0 funcţia $\cos\frac{1}{x}$ îşi schimbă semnul de o infinitate de ori. Prin urmare, şi funcţia $f'(x)$ pentru $x\neq 0$ şi $x\to 0$ îşi schimbă de o infinitate de ori semnul atât la dreapta punctului $x_0=0$, cât şi la stânga lui.

Prin urmare, folosind teorema 2, nu putem stabili dacă punctul $x_0=0$ este un punct extrem pentru funcţia dată sau nu.

Folosind însă definiţiile 1 sau 2, constatăm că punctul $x_0=0$ nu este punct de extrem pentru funcţia dată.

Dacă însă vom considera o altă funcţie $g(x)=x^2\left(1+\sin\frac{1}{x}\right)$ pentru $x\neq 0$ şi $g(0)=0$, continuă şi derivabilă pe R, apoi, asemănător primului caz, uşor se stabileşte că teorema 2 nu poate fi aplicată nici în cazul acesta. Dar punctul $x_0=0$ pentru funcţia $g(x)$ este însă un punct de minim (aceasta se observă nemijlocit din caracterul funcţiei: $x^2\geq 0$ şi $0\leq 1+\sin\frac{1}{x}\leq 2$ pentru orice $x\in R$).

Din teorema 2 rezultă următoarea regulă de cercetare a funcţiei la extrem cu ajutorul primei derivate.

Vom numi punctele în care derivata (de ordinul întâi) sau se anulează, sau este infinită, sau nu există *puncte critice (de ordinul întâi)* ale funcţiei.

Regula 1 de cercetate a extremului funcţiei $y=f(x)$, $x\in D$, continue pe D cu ajutorul primei derivate:

1) aflăm punctele critice ale funcţiei $f(x)$, ce aparţin domeniului D;
2) aranjăm punctele critice pe axa numerică în ordine crescătoare;
3) pe fiecare din intervalele obţinute pe axa numerică considerăm câte un punct şi aflăm valoarea derivatei funcţiei în acest punct. Conform consecinţei 3 a teoremei Rolle (vezi 2.4.2) această valoare caracterizează complet semnul derivatei pe acest interval;
4) aflăm punctele critice în care derivata îşi va schimba semnul şi numai ele vor fi puncte de extrem pentru funcţia dată.

Exemplul 4. Să se cerceteze la extrem funcţia

$$y=f(x)=\sqrt[3]{x^2}(2+x).$$

Funcţia $f(x)$ este definită şi continuă pe R. Avem

$$y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(2+x) + x^{\frac{2}{3}} \cdot 1 =$$

$$= \frac{2(2+x)}{3\sqrt[3]{x}} + \sqrt[3]{x^2} = \frac{4+2x+3x}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{4+5x}{3\sqrt[3]{x}}.$$

1) Aflăm punctele critice:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4+5x = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{4}{5};$$

$$f'(x) = \infty \Rightarrow x_2 = 0.$$

Punctele critice $x_1 = -\frac{4}{5}$ şi $x_2=0$ aparţin domeniului de definiţie al funcţiei.

2) Axa numerică se împarte în următoarele trei intervale: $\left]-\infty, -\frac{4}{5}\right[$, $\left]-\frac{4}{5}, 0\right[$ şi $]0, +\infty[$.

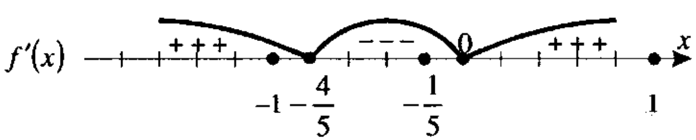
3) Considerăm câte o valoare pe fiecare din intervalele obţinute şi aflăm semnul derivatei pe acest interval:

$$f'(-1) = \frac{4-5}{3\sqrt[3]{-1}} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3} > 0,$$

$$f'\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{4-1}{3\sqrt[3]{-\frac{1}{5}}} < 0,$$

$$f'(1) = \frac{4+5}{3\sqrt[3]{1}} = 3 > 0.$$

4) Am obţinut următoarele:



Punctul $x_1 = -\frac{4}{5}$ este un punct de maxim şi maximul funcţiei $f_{\max}(x_1) = \sqrt[3]{\frac{16}{25}} \cdot \left(2 - \frac{4}{5}\right) = \frac{6}{5}\sqrt[3]{\frac{16}{25}} = \frac{12}{5}\sqrt[3]{\frac{2}{25}}$.

Punctul $x_2=0$ este un punct de minim şi minimul funcţiei $f_{\min}(x_2)=0$.

Teorema 3 *(condiţie suficientă de existenţă a extremului).* Fie funcţia $f(x)$ derivabilă până la ordinul n inclusiv într-o δ- vecinătate a punctului x_0, $f^{(n)}(x)$ continuă în x_0 şi

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0,$$

iar $f^{(n)}(x_0)\neq 0$.

Atunci dacă n este par, punctul x_0 este un punct de extrem al funcţiei şi anume: punct de maxim când $f^{(n)}(x_0)<0$ şi punct de minim când $f^{(n)}(x_0)>0$. Dacă n este impar, punctul x_0 nu este punct de extrem pentru funcţia $f(x)$.

Demonstraţie. Aplicând formula Taylor pentru $f(x)$ în vecinătatea punctului x_0, avem

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0)\cdot(x-x_0)^{n-1} + R_{n-1}(x),$$

unde restul Lagrange are forma $R_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n$,

$$c = x_0 + \theta(x-x_0), \quad \theta \in]0, 1[.$$

Ţinând seama de ipoteza teoremei, obţinem

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Întrucât $f^{(n)}(x)$ este continuă în punctul x_0, există o δ- vecinătate a punctului x_0 în care $f^{(n)}(x)$ îşi păstrează semnul, adică în toate punctele din această δ- vecinătate semnul lui $f^{(n)}(x)$ coincide cu semnul lui $f^{(n)}(x_0)$ (a se consulta teorema 2 din 1.5.3).

Prin urmare, dacă considerăm valorile lui x dintr-o δ - vecinătate suficient de mică a punctului x_0, obţinem că semnul lui $f^{(n)}(x)$ coincide cu semnul lui $f^{(n)}(x_0)$.

Fie n un număr par, atunci factorul $(x-x_0)^n$ este pozitiv pentru orice x din această δ - vecinătate a lui x_0. Prin urmare, funcţia

$$f(x)-f(x_0)=\frac{(x-x_0)^n}{n!}\cdot f^{(n)}(c)$$

îşi păstrează semnul în această δ - vecinătate a lui x_0, ceea ce înseamnă că punctul x_0 este un punct de extrem al funcţiei $f(x)$ şi anume:

a) dacă $f^{(n)}(x_0)>0$, atunci $f^{(n)}(c)>0$ şi $f(x)-f(x_0)=\Delta y>0$. Deci x_0 este un punct de minim al funcţiei $f(x)$;
b) dacă $f^{(n)}(x_0)<0$, atunci $f^{(n)}(c)<0$ şi $f(x)-f(x_0)= \Delta y<0$, adică x_0 este un punct de maxim pentru $f(x)$.

Fie acum n este impar. Atunci factorul $(x-x_0)^n$ îşi schimbă semnul în orice δ - vecinătate a punctului x_0: pentru $x<x_0$, avem $(x-x_0)^n<0$, iar pentru $x>x_0$, avem $(x-x_0)^n>0$. De aceea diferenţa $f(x)-f(x_0)$ nu-şi păstrează semnul în orice δ - vecinătate a punctului x_0, ceea ce înseamnă că x_0 nu este punct de extrem al funcţiei $f(x)$.

Teorema este demonstrată.

Consecinţă. Fie funcţia $f(x)$ derivabilă până la ordinul doi inclusiv într-o vecinătate a punctului x_0, $f'(x_0)=0$ şi $f''(x_0)\neq 0$, atunci

a) punctul x_0 este un punct de maxim, dacă $f''(x_0)<0$;

b) punctul x_0 este un punct de minim, dacă $f''(x_0)>0$.

Din teorema 3 rezultă următoarea regulă de cercetare a extremului funcţiei cu ajutorul derivatelor de ordin superior.

Regula 2 de cercetare a extremului funcţiei $f(x)$, $x\in D$, continue pe D cu ajutorul derivatelor de ordin superior:

1. aflăm punctele staţionare ale funcţiei $f(x)$ ce aparţin domeniului D;

2. aflăm valorile derivatelor de ordin superior în aceste puncte;

3. dacă prima dintre derivatele de ordin superior, care nu se anulează în punctul staţionar x_0, are

a) ordin par, atunci punctul x_0 este un punct de extrem al funcţiei şi anume: punct de maxim în cazul când valoarea derivatei în x_0 este un număr negativ şi punct de minim în caz contrar;
b) ordin impar, atunci punctul x_0 nu este punct de extrem al funcţiei.

Notă. Evident că regula 2 se aplică la o clasă mai restrânsă de funcţii: pentru ca să existe derivatele de ordin superior ale funcţiei date este necesar ca funcţia să fie derivabilă în orice punct din domeniul ei de definiţie.

Exemplul 5. Să se arate că punctul $x_0=0$ este un punct staţionar al funcţiei $f(x)=e^x+e^{-x}+2cosx$ şi să se cerceteze la extrem această funcţie în punctul $x_0=0$.

Avem $f'(x)=e^x-e^{-x}-2sinx$ şi $f'(0)=1-1-0=0$, adică $x_0=0$ este un punct staţionar pentru $f(x)$.

Calculăm derivatele de ordin superior ale funcţiei $f(x)$ şi ne oprim la prima derivată de ordin superior, care nu se anulează în punctul $x_0=0$.

Avem

$$f''(x)=e^x+e^{-x}-2\cos x \quad şi \quad f''(0)=0,$$

$$f'''(x)=e^x-e^{-x}+2\sin x \quad şi \quad f'''(0)=0,$$

$$f^{IV}(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x \quad şi \quad f^{IV}(0)=4.$$

Prin urmare, prima derivată de ordin superior, care nu se anulează în punctul $x_0=0$, are ordinul $(n=4)$ par. Deci x_0 este un punct de extrem al funcţiei $f(x)$ şi anume x_0 este un punct de minim, deoarece $f^{IV}(0)=4>0$.

Fie funcţia $y=f(x)$ definită şi continuă pe segmentul $[a, b]$. Conform teoremei Weierstrass (vezi teorema 4 din 1.6.3), funcţia $f(x)$ îşi atinge valoarea cea mai mare $\left(\underset{[a,b]}{Sup}\ f(x)\right)$ şi valoarea cea mai mică $\left(\underset{[a,b]}{Inf}\ f(x)\right)$. În cazul acesta valoarea cea mai mare (cea mai mică) a funcţiei $f(x)$ pe $[a, b]$ este egală cu una din valorile pe care le capătă funcţia $f(x)$ într-un punct critic oarecare, ce aparține intervalului $]a, b[$ sau cu una din valorile, pe care le capătă această funcție la extremitățile segmentului.

În încheierea acestui paragraf vom face câteva observații, care simplifică tehnica aflării extremelor.

1. Funcțiile $f(x)$ și $f(x)+C$, unde C este un termen constant, au extreme de același nume (sau numai maxime, sau numai minime) în unele și aceleași puncte.

2. Funcțiile $f(x)$ și $C{\cdot}f(x)$, unde C este un factor constant, au extreme de același nume, dacă $C>0$ și de nume diferite, dacă $C<0$ în unele și aceleași puncte.

3. Dacă într-un interval oarecare funcția $f(x)>0$, atunci funcțiile $f(x)$ și $\sqrt[2k]{f(x)}$ $(k\in N)$ au extreme de același nume în unele și aceleași puncte din intervalul considerat.

2.8. Convexitate și puncte de inflexiune

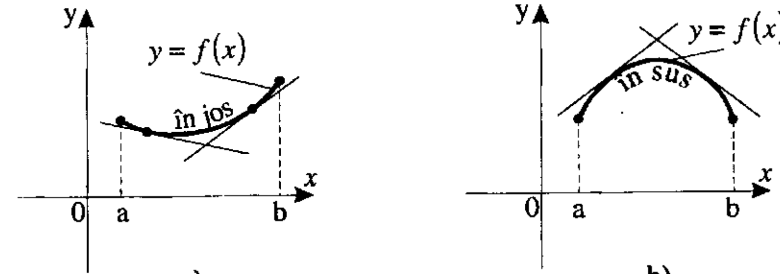
Fie $y=f(x)$ derivabilă pe intervalul $]a, b[$. Atunci există tangenta la graficul funcției $y=f(x)$ în fiecare punct $M(x, f(x))$ al acestui grafic $(a<x<b)$ și ea nu este paralelă cu axa OY, deoarece coeficientul unghiular al tangentei, egal cu $f'(x)$, este finit.

Definiție. Vom spune că graficul funcției $y=f(x)$ posedă pe intervalul $]a, b[$ o convexitate orientată în jos (în sus), dacă el este situat nu mai jos (respectiv nu mai sus) de orice tangentă la graficul funcției pe $]a, b[$. Curba cu o convexitate orientată în jos se numește *concavă*, iar cea cu convexitatea orientată în sus – *convexă*.

Astfel, de exemplu, în figura a) de mai jos graficul funcției $y=f(x)$ este concav pe intervalul $]a, b[$. În figura b) graficul funcției $y=f(x)$ este convex pe $]a, b[$.

Sensul convexității curbei este o caracteristică importantă a formei ei.

Vom arăta că derivatele de ordin superior ne dau indicații precise în aprecierea sensului convexității.



a) b)

***Teorema 1** (condiția suficientă a convexității).* Dacă funcția $y=f(x)$ este derivabilă de două ori pe intervalul $]a, b[$ și $f''(x)\geq 0$ (sau $f''(x)\leq 0$) în toate punctele $x\in]a, b[$, atunci graficul funcției este concav (respectiv convex) pe $]a, b[$.

Demonstrație. Fie $y=f(x)$ de două ori derivabilă pe $]a, b[$ și $c\in]a, b[$. Ecuația tangentei la graficul funcției $y=f(x)$ ce trece prin punctul c are forma $y_{tg}=y_0+f'(c)(x-c)$, pentru orice $x\in]a, b[$ și $y_0=f(c)$.

Descompunem funcția $y=f(x)$ în vecinătatea punctului c conform formulei Taylor cu restul în forma Lagrange, considerând $n=1$. Avem

$$y=f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+R_1(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+$$
$$+\frac{1}{2}f''(c+\theta(x-c))(x-c)^2,\quad \theta\in]0, 1[,\quad x\in]a, b[.$$

Scăzând aceste două egalități, obținem

$$y-y_{tg}=\frac{1}{2}(x-c)^2 f''(c+\theta(x-c)),\quad \theta\in]0, 1[,\quad x\in]a, b[.$$

Observăm că semnul diferenței $(y-y_{tg})$ coincide cu semnul lui $f''(c+\theta(x-c))$.

Dacă $f''(x)\geq 0$ pentru orice $x\in]a, b[$, atunci $f''(c+\theta(x-c))\geq 0$. Deci $y-y_{tg}\geq 0$, adică $y\geq y_{tg}$ pentru orice $x\in]a, b[$, ceea ce înseamnă că punctele graficului funcției $y=f(x)$, $x\in]a, b[$, sunt situate nu mai jos decât tangenta la curba $y=f(x)$ ce trece prin punctul $c\in]a, b[$.

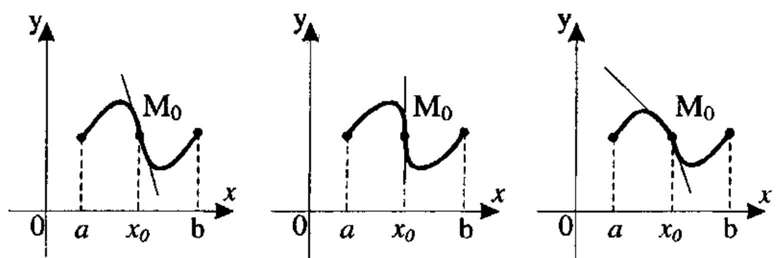
Întrucât punctul c este un punct arbitrar din $]a, b[$, am obţinut că graficul funcţiei $y=f(x)$ este concav pe $]a, b[$, adică convexitate cu orientare în jos pe acest interval.

Similar se obţine că dacă $f''(x)\leq 0$ pentru orice $x\in]a, b[$, atunci graficul funcţiei $y=f(x)$ este convex pe $]a, b[$ şi teorema este demonstrată.

Definiţie. Punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ se numeşte *punct de inflexiune* al graficului funcţiei $y=f(x)$, $x\in]a, b[$, dacă, trecând prin M_0, graficul funcţiei are convexitate de orientare diferită.

Evident, tangenta în punctul de inflexiune, dacă ea există, intersectează graficul funcţiei, deoarece de o parte a acestui punct graficul este situat sub tangentă, iar de cealaltă parte – deasupra ei.

În figurile de mai jos punctul M_0 este un punct de inflexiune al graficului funcţiei $y=f(x)$, $x\in]a, b[$, deoarece la stânga lui graficul posedă o convexitate orientată în sus, adică are o curbă convexă, iar la dreapta lui M_0 graficul posedă o convexitate în jos, adică are o curbă concavă.



$f'(x_0)$ *finită* $\qquad f'(x_0)=\infty \qquad f'(x_0)$ *nu există*

***Teorema 2** (condiţia necesară de inflexiune).* Fie că graficul funcţiei $y=f(x)$, $x\in]a, b[$, admite o inflexiune în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$. Fie funcţia $f(x)$ de două ori derivabilă în punctul x_0 şi $f''(x)$ continuă în x_0. Atunci $f''(x_0)=0$.

Demonstraţie. Presupunem contrariul, adică admitem că $f''(x_0)\neq 0$. Deoarece $f''(x)$ este continuă în x_0, adică $\lim\limits_{x\to x_0} f''(x)=f''(x_0)$, atunci, conform teoremei 2 din 1.5.3, funcţia $f''(x)$ păstrează semnul numărului $f''(x_0)\neq 0$ într-o δ- vecinătate a punctului x_0. Aceasta înseamnă că dacă $f''(x_0)>0$, atunci $f''(x)>0$ sau dacă $f''(x_0)<0$, apoi $f''(x)<0$ într-o δ- vecinătate a punctului x_0.

Conform teoremei 1 de mai sus, graficul funcţiei în această δ- vecinătate a punctului x_0 are o convexitate de o anumită orientare, adică punctul M_0 nu este un punct de inflexiune. Contradicţia obţinută demonstrează teorema.

Notă. Să remarcăm că nu orice punct $M_0(x_0, f(x_0))$ pentru care $f''(x_0)=0$ este un punct de inflexiune. Într-adevăr, graficul funcţiei $y=x^4$ nu posedă inflexiune în punctul $(0, 0)$, deşi $f''(x)=12x^2$ pentru $x=0$ se anulează.

Observăm că graficul funcţiei $y=x^4$ este concav pe $]-\infty, +\infty[$, deoarece $f''(x)=12x^2\geq 0$ pentru orice $x\in R$ (conform teoremei 1 de mai sus).

***Teorema 3** (condiţia suficientă de inflexiune).* Fie $f(x)$ de trei ori derivabilă într-o δ- vecinătate $v(x_0, \delta)$ a punctului x_0, $f''(x_0)=0$, $f'''(x_0)\neq 0$ şi $f'''(x)$ continuă în x_0. Atunci $M_0(x_0, f(x_0))$ este un punct de inflexiune pentru graficul funcţiei $y=f(x)$.

Demonstraţie. Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $y=f(x)$ ce trece prin punctul x_0 are forma

$$y_{tg}=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),$$

pentru orice $x\in v(x_0, \delta)$.

Dezvoltăm funcţia $f(x)$ în $v(x_0, \delta)$ după formula Taylor cu restul în forma Lagrange, considerând $n=2$. Avem

$$y=f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{1}{3!}f'''(c)(x-x_0)^3,$$

unde c se află între x_0 şi x, $x\in v(x_0, \delta)$.

Scăzând aceste egalităţi şi având în vedere că $f''(x_0)=0$, obţinem $y-y_{tg}=\frac{1}{3!}f'''(c)(x-x_0)^3$.

Întrucât $f'''(x)$ este continuă în x_0, adică $\lim\limits_{x\to x_0} f'''(x)=f'''(x_0)\neq 0$, conform teoremei 2 din 1.5.3, obţinem că există o δ - vecinătate $v(x_0, \delta_1)$ a punctului x_0 în care funcţia $f'''(x)$ păstrează semnul numărului $f'''(x_0)$.

Pentru orice x din $v(x_0, \delta_2)$ cu $\delta_2=min(\delta, \delta_1)$ avem

$$y - y_{tg} = \frac{1}{6} f'''(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0)^3, \quad \theta \in]0, 1[.$$

Deci semnul diferenței $(y-y_{tg})$, adică orientarea convexității, coincide cu semnul lui $(x-x_0)^3$. Avem

$$(x < x_0) \Rightarrow (x-x_0)^3 < 0 \text{ și } (x > x_0) \Rightarrow (x-x_0)^3 > 0.$$

Prin urmare, trecând prin punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ convexitatea graficului funcției $y=f(x)$ este de orientare diferită. Teorema este demonstrată.

Mulțimea punctelor în care $f''(x)$ se anulează, este infinită sau nu există se numesc *puncte critice (de ordinul doi)* ale funcției $f(x)$.

Teorema 4 *(condiția suficientă de inflexiune).* Dacă într-o δ- vecinătate a punctului critic (de ordinul doi) x_0 pentru funcția $f(x)$, funcția $f''(x)$ este continuă (poate cu excepția punctului x_0) și își schimbă semnul când argumentul ei trece prin acest punct, atunci x_0 este un punct de inflexiune.

Demonstrație. Deoarece $f''(x)$ are la dreapta și la stânga punctului x_0 valori de semn contrar, din teorema 1 de mai sus rezultă orientarea diferită a convexității graficului funcției la dreapta și la stânga punctului x_0. Aceasta și înseamnă că funcția f în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ posedă o inflexiune.

Exemple. Să se cerceteze la inflexiune următoarele funcții.

1. Fie $f(x)=3x^4-8x^3+6x^2+12,\ x\in R.$

Avem $f'(x)=12x^3-24x^2+12x=12(x^3-2x^2+x)$

și $f''(x)=12(3x^2-4x+1)$,

de unde $f''(x)=0 \Rightarrow 3x^2-4x+1=0 \Rightarrow x_1=\frac{1}{3},\ x_2=1.$

Axa numerică se împarte în trei intervale $]-\infty, \frac{1}{3}[$, $]\frac{1}{3}, 1[$ și $]1, +\infty[$. Pe fiecare din aceste intervale funcția $f''(x)$, în virtutea continuității ei, nu-și schimbă semnul. Deci

a) $f''(0)=12>0 \Rightarrow f''(x)>0,\ x\in]-\infty, \frac{1}{3}[$. Deci graficul funcției $y=f(x)$ pe $]-\infty, \frac{1}{3}[$ posedă o convexitate orientată în jos, adică curba este concavă;

b) $f''\left(\frac{1}{2}\right)=12\left(\frac{3}{4}-2+1\right)<0 \Rightarrow f''(x)<0,\ x\in]\frac{1}{3}, 1[$. Deci graficul funcției $y=f(x)$ pe $]\frac{1}{3}, 1[$ posedă o convexitate orientată în sus, adică curba este convexă;

c) $f''(2)=12(12-8+1)>0 \Rightarrow f''(x)>0,\ x\in]1, +\infty[$. Deci graficul funcției $y=f(x)$ pe $]1, +\infty[$ posedă o convexitate orientată în jos, adică curba este concavă.

Prin urmare, punctele $x_1=\frac{1}{3}$ și $x_2=1$ sunt puncte de inflexiune pentru curba $y=f(x),\ x\in R$, și funcția $y=f(x)$ este derivabilă în aceste două puncte până la ordinul doi inclusiv. Alte puncte de inflexiune pe R funcția inițială nu mai are.

2. Fie $y=f(x)=x+\sqrt[3]{x^5},\ x\in R.$

Avem $y'=f'(x)=1+\frac{5}{3}x^{2/3}=1+\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$ și

$$y''=f''(x)=\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{10}{9\sqrt[3]{x}}.$$

Observăm că funcția $y=f(x)$ are un singur punct critic $x_1=0$, în care $f''(x_1)$ este infinită.

Pentru $x<0$ avem $y''<0$ și curba $y=f(x)$ este convexă, iar pentru $x>0$ avem $y''(x)>0$, adică curba este concavă. Prin urmare, punctul $x_1=0$ este un punct de inflexiune pentru funcția $y=f(x)$. Alte puncte de inflexiune pe R funcția inițială nu mai are.

3. Fie $y=2-|x^3-1|$.

Avem $y=f(x)=\begin{cases} 2-\left(x^3-1\right)=3-x^3, & dacă \quad x\geq 1 \\ 2+\left(x^3-1\right)=1+x^3, & dacă \quad x<1. \end{cases}$

Deci $y'=\begin{cases} -3x^2, & dacă \quad x>1 \\ 3x^2, & dacă \quad x<1. \end{cases}$

Pentru $x_1=1$ avem

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-2}{\Delta x}.$$

Deci $(\Delta x\to 0-0)\Rightarrow(\Delta x<0)\Rightarrow(1+\Delta x<1)\Rightarrow f(1+\Delta x)=$

$$=1+(1+\Delta x)^3=2+3\Delta x+3\Delta x^2+\Delta x^3$$

$$\text{și } f'(1-0)=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{3\Delta x+3\Delta x^2+\Delta x^3}{\Delta x}=3.$$

Similar, $(\Delta x\to 0+0)\Rightarrow\Delta x>0\Rightarrow(1+\Delta x)>1\Rightarrow f(1+\Delta x)=$

$$=3-(1+\Delta x)^3=2-3\Delta x-3\Delta x^2-\Delta x^3$$

$$\text{și } f'(1+0)=\lim_{\Delta x\to 0+0}\left(-\frac{3\Delta x+3\Delta x^2+\Delta x^3}{\Delta x}\right)=-3.$$

Prin urmare, $f'(x)$ nu există în punctul $x_1=1$, însă există derivatele unilaterale, adică există semitangentele duse prin punctul $M_0(1, 2)$ la graficul funcției inițiale.

Calculăm derivata a doua a funcției $y=f(x)$.

Avem $f''(x)=\begin{cases} -6x, & dacă \quad x>1 \\ 6x, & dacă \quad x<1. \end{cases}$

Deoarece funcția $f'(x)$ nu există în punctul $x_1=1$, funcția $f''(x)$ de asemenea nu există în acest punct.

Însă funcția $f''(x)$, trecând prin punctul $x_1=1$, își schimbă semnul. Într-adevăr, dacă $x<1$, atunci $f''(x)=6x>0$ și dacă $x>1$, atunci $f''(x)=-6x<0$ într-o δ- vecinătate a punctului $x_1=1$.

Prin urmare, aplicând teorema 4 de mai sus, conchidem că $x_1=1$ este un punct de inflexiune pentru funcția $y=f(x)$. Alte puncte de inflexiune pe R funcția dată nu mai are.

Remarcăm că teorema 4 de mai sus este aplicabilă în aceste trei cazuri.

2.9. Asimptote. Schema generală de cercetare a funcției și de construire a graficului ei

Deseori se cere de cercetat forma graficului funcției $y=f(x)$ și deci și caracterul variației funcției la creșterea nelimitată (ca modul) a abscisei sau a ordonatei unui punct variabil de pe acest grafic sau a abscisei și ordonatei simultan. Un caz particular important este acela când curba cercetată la îndepărtarea punctului variabil al ei către infinit ($+\infty$ sau $-\infty$) se apropie nelimitat către o dreaptă.

Vom spune că *punctul variabil se deplasează pe curbă către infinit*, dacă distanța acestui punct de la originea coordonatelor crește nelimitată.

Definiție. Dreapta L se numește *asimptotă* a curbei (graficului funcției $y=f(x)$), dacă distanța d de la punctul variabil M al curbei până la această dreaptă tinde către zero, când punctul M se deplasează pe curbă către infinit.

Deosebim asimptote verticale (paralele cu axa ordonatelor) și oblice (neparalele cu axa ordonatelor).

1. *Asimptote verticale.*

Fie $x=a$ o asimptotă verticală a curbei (graficului) funcției $y=f(x)$. Conform definiției asimptotei, curba $y=f(x)$ se apropie nemărginit de dreapta $x=a$, adică $y=f(x)$ crește nemărginit, când $x\to a$. Prin urmare, se verifică cel puțin una din egalitățile

$$\lim_{x\to a-0}f(x)=\pm\infty \quad sau \quad \lim_{x\to a+0}f(x)=\pm\infty.$$

Invers, dacă cel puțin una din egalitățile de mai sus se verifică când $x\to a$, atunci distanța de la punctul variabil $M(x, f(x))$ până la dreapta $x=a$ este egală cu

$$d=\sqrt{(x-a)^2+(f(x)-f(x))^2}=|x-a| \quad și \quad \lim_{x\to a}d=0.$$

Deci dreapta $x=a$ este asimptota graficului funcției $y=f(x)$. Așadar, pentru ca dreapta $x=a$ să fie asimptotă verticală a funcției

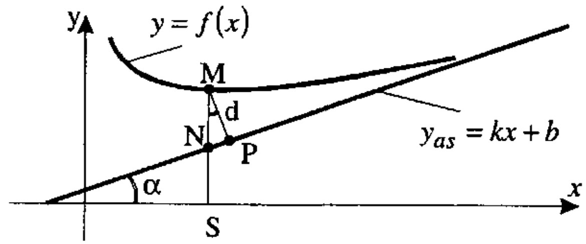
$y=f(x)$, este necesar şi suficient ca să se verifice cel puţin una din egalităţile $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\pm\infty$ *sau* $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\pm\infty$ ori, ceea ce este acelaşi lucru, punctul $x=a$ este un punct de discontinuitate de speţa 2 pentru $y=f(x)$.

2. *Asimptote oblice.*

Fie curba (graficul) $y=f(x)$ posedă asimptotă oblică, ecuaţia căreia are forma

$$y=kx+b \tag{1}$$

şi M este un punct oarecare de pe graficul funcţiei $y=f(x)$.



Coborâm din M perpendiculara MS pe axa OX şi perpendiculara MP pe asimptota NP, unde N este punctul de intersecţie al dreptei MS cu asimptota *(1)*. Observăm că

$$MN=y-y_{as}=f(x)-(kx+b) \quad \text{şi} \quad MP=d.$$

Din triunghiul dreptunghic ΔMNP avem $MP=MN\cos\alpha$, unde α este unghiul de înclinaţie ale asimptotei în raport cu axa OX.

Întrucât dreapta NP este asimptotă la graficul funcţiei $y=f(x)$, avem $d\to 0$, când punctul $M(x, f(x))$ se deplasează pe curbă către infinit (în cazul nostru $x\to+\infty$), adică $\lim\limits_{x\to+\infty} d = \lim\limits_{x\to+\infty} MP = 0$.

Deci $\lim\limits_{x\to+\infty} MN\cos\alpha = \cos\alpha\cdot \lim\limits_{x\to+\infty} MN = 0$, de unde $\lim\limits_{x\to+\infty} MN = 0$, deoarece $\cos\alpha\neq 0$ $\left(\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Prin urmare,

$$\left(\lim_{x\to+\infty} MN=0\right)\Rightarrow\left(\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+b)]=0\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)-(kx+b)=\alpha(x),$$

unde $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha(x)=0$.

Aşadar, dacă $y=kx+b$ este asimptotă a graficului funcţiei $y=f(x)$ pentru $x\to+\infty$, atunci

$$f(x)-(kx+b)=\alpha(x), \tag{2}$$

unde $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha(x)=0$.

Invers, dacă pentru două numere k şi b are loc relaţia

$$f(x)-(kx+b)=\alpha(x),$$

unde $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha(x)=0$, atunci dreapta $y=kx+b$ este asimptotă a graficului funcţiei $y=f(x)$ pentru $x\to+\infty$.

Aflăm numerele k şi b. Împărţim la x ambele părţi ale egalităţii (2) şi trecem la limită în ambele părţi când $x\to+\infty$. Obţinem $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}-k-b\cdot\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{x}\cdot\alpha(x)\right]$ sau $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}-k-b\cdot 0=0$, de unde

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}. \tag{3}$$

Cunoscându-l pe k, aflăm b din relaţia

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx-b)=\lim_{x\to+\infty}\alpha(x)=0,$$

de unde

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]. \tag{4}$$

Aşadar, dacă (1) este ecuaţia asimptotei la graficul funcţiei $y=f(x)$, pentru $x\to+\infty$, atunci numerele k şi b se determină cu ajutorul formulelor (3) şi (4). Invers, dacă numerele k şi b sunt determinate cu ajutorul formulelor (3) şi (4), atunci dreapta caracterizată de ecuaţia (1) este asimptotă la graficul funcţiei $y=f(x)$ când $x \to +\infty$.

Observăm că am efectuat cercetarea când $x \to +\infty$ (conform figurii), dar toate raţionamentele sunt adevărate şi pentru cazul când $x \to -\infty$.

Notă. 1. Dacă $k=0$, atunci asimptota $y=b$ se numeşte *asimptotă orizontală*. Deci dreapta $y=b$ este asimptotă orizontală a graficului funcţiei $y=f(x)$ pentru $x \to \pm\infty$ atunci şi numai atunci când $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b$.

2. Dacă cel puţin una din limitele (3) şi (4) nu există sau este infinită, atunci graficul funcţiei $y=f(x)$ nu are asimptotă oblică.

3. Asimptota poate să intersecteze curba (graficul funcţiei) chiar şi într-o mulţime infinită de puncte (vezi exemplul 2 de mai jos).

4. A afla asimptotele graficului funcţiei $y=f(x)$ înseamnă a studia comportamentul funcţiei $y=f(x)$ la infinit şi în infinit, adică următoarele trei cazuri: $x \to a$, $y=\pm\infty$ (asimptote verticale), $x \to \pm\infty$, $y \to b$ (asimptote orizontale) şi $x \to \pm\infty$, $y \to \pm\infty$ (asimptotele oblice sunt posibile).

Exemple. 1. Să se afle asimptotele hiperbolei ecuaţia canonică a căreia este $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Avem $y=\pm\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, $|x|\geq a$. Observăm că y creşte nemărginit $(y \to \pm\infty)$ atunci şi numai atunci când $x \to \pm\infty$. Deci această curbă nu are asimptote verticale şi orizontale. Aflăm asimptotele oblice.

Conform formulelor (3) şi (4), avem

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\pm\frac{b}{a}\right)\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\left(\pm\frac{b}{a}\right)\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{\frac{x^2-a^2}{x^2}}=\left(\pm\frac{b}{a}\right)\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}\cdot a^2}=$$

$$=\left(\pm\frac{b}{a}\right)\cdot\sqrt{1-0}=\pm\frac{b}{a}$$

şi $$b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\mp\frac{b}{a}x\right]=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\left(\pm\frac{b}{a}\right)\left(\sqrt{x^2-a^2}-x\right)\right]=(\infty-\infty)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\left(\pm\frac{b}{a}\right)\cdot\frac{-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x^2}\right]=\left(\pm\frac{b}{a}\right)\cdot 0=0.$$

Prin urmare, dreptele $y=\pm\dfrac{b}{a}x$ sunt asimptote oblice ale hiperbolei date atât pentru $x \to +\infty$, cât şi pentru $x \to -\infty$.

Remarcăm că dacă considerăm aparte aceste două funcţii $y_1=\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, $|x|\geq a$ şi $y_2=-\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, $|x|\geq a$, atunci obţinem următoarele:

a) pentru funcţia $y_1=\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, $|x|\geq a$, dreapta $y=\dfrac{b}{a}x$ este asimptotă oblică când $x \to +\infty$, iar dreapta $y=-\dfrac{b}{a}x$ este asimptotă oblică când $x \to -\infty$;

b) pentru funcţia $y_2=-\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, $|x|\geq a$ dreptele $y=\pm\dfrac{b}{a}x$ sunt asimptote oblice când $x \to -\infty$ şi respectiv $x \to +\infty$.

2. Să se afle asimptotele graficului funcţiei

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & dacă \quad x\neq 0\\ 1, & dacă \quad x=0.\end{cases}$$

Funcţia $f(x)$ este continuă pe R. Deci puncte de discontinuitate nu are. Prin urmare, graficul acestei funcţii nu are asimptote verticale.

Aplicând formulele (3) şi (4), obţinem

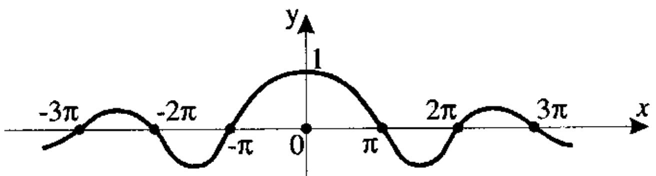
$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sin x}{x^2}=\lim_{x\leftarrow\pm\infty}\frac{1}{x^2}\cdot\sin x=0,$$

deoarece produsul unei funcţii infinit mici la o funcţie mărginită este o funcţie infinit mică şi

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\leftarrow\pm\infty}\frac{1}{x}\cdot\sin x=0$$

(din acelaşi motiv).

Prin urmare, dreapta $y=0$ (axa OX) este asimptotă orizontală a graficului funcţiei date.



Menţionăm că asimptota $y=0$ intersectează graficul funcţiei $y=f(x)$ într-o infinitate de puncte:

$$\frac{\sin x}{x}=0\Rightarrow\sin x=0\Rightarrow x=\pi k,\quad k=\pm1,\pm2,\ldots$$

3. Să se afle asimptotele graficului funcţiei $y=f(x)=\dfrac{2x^3+3x+5}{x(x-4)}$, $x\neq0$, $x\neq4$.

Întrucât punctele $x_1=0$ şi $x_2=4$ sunt puncte de discontinuitate de speţa 2, avem că dreptele $x=0$ (axa OY) şi $x=4$ sunt asimptote verticale ale graficului acestei funcţii.

Aplicând formulele (3) şi (4), obţinem

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^3+3x+5}{x^2(x-4)}=\lim_{x\leftarrow\pm\infty}\frac{x^3\left(2+\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right)}{x^3\left(1-\frac{4}{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\leftarrow\pm\infty}\frac{2+\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x^3}}{1-\frac{4}{x}}=\frac{2+0+0}{1-0}=2$$

$$\text{şi } b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^3+3x+5}{x(x-4)}-2x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^3+3x+5-2x^3+8x^2}{x(x-4)}=\lim_{x\leftarrow\pm\infty}\frac{8x^2+3x+5}{x^2-4x}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{8+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}{1-\frac{4}{x}}=\frac{8+0+0}{1-0}=8.$$

Prin urmare, dreapta $y=2x+8$ este o asimptotă oblică a graficului funcţiei iniţiale când $x\to\pm\infty$.

Propunem următoarea schemă de cercetare a comportamentului unei funcţii şi trasarea graficului ei:

1. a) se determină domeniul de definiţie al funcţiei;
   b) se studiază paritatea şi periodicitatea funcţiei;
   c) se află punctele de intersecţie ale graficului funcţiei cu axele de coordonate;
   d) se determină semnul funcţiei în domeniul ei de definiţie;
   e) se determină intervalele de continuitate şi punctele de discontinuitate ale funcţiei şi asimptotele ei verticale;
   f) se studiază comportarea funcţiei când argumentul creşte nemărginit (după modul) şi se află asimptotele orizontale şi oblice;
2. a) se află intervalele de monotonie ale funcţiei;
   b) se află punctele de maxim şi de minim, precum şi valorile maxime şi minime ale funcţiei;
3. a) se determină intervalele de convexitate şi de concavitate ale funcţiei;
   b) se calculează punctele de inflexiune ale graficului funcţiei.

În baza cercetărilor efectuate în punctele de mai sus, se trasează graficul acestei funcţii (uneori este comod de a schiţa elementele graficului funcţiei paralel cu cercetarea acestei funcţii).

Aşadar, algoritmul cercetării comportării unei funcţii şi construirii graficului ei este compus din trei compartimente. În compartimentul 1 sunt grupate acele întrebări, răspunsurile cărora ţin cont de însăşi funcţia şi de comportarea ei la infinit şi în infinit. În compartimentul 2 sunt grupate acele întrebări, răspunsurile cărora sunt legate de calcularea derivatei funcţiei şi de studierea semnului ei. În ultimul compartiment, al 3-lea, sunt grupate întrebările, răspunsurile cărora sunt legate de calcularea derivatelor de ordin superior şi de studierea semnelor acestor derivate (în special a celeia de ordinul doi). În afară de aceasta, răspunsurile la întrebările din compartimentul 3 permit de a verifica răspunsurile din compartimentul 2. De aceea acestea două se efectuează simultan.

Drept exemplu vom studia şi vom trasa graficul funcţiei $y=f(x)=\dfrac{x^3}{4(2-x)^2}$, utilizând schema de mai sus.

1. a) Ca funcţie definită în mod analitic, domeniul ei de definiţie coincide cu domeniul valorilor admisibile. Deci domeniul de definiţie este mulţimea tuturor numerelor reale diferite de 2, adică reuniunea semiintervalelor infinite: $]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$.

b) Funcţia nu este nici pară, nici impară, deoarece

$$f(-x)=-\frac{x^3}{4(2+x)^2}\neq f(x) \quad \text{şi} \quad f(-x)\neq -f(x).$$

Se observă că funcţia nu este periodică: $f(x+T)\neq f(x)$ pentru orice $T>0$.

c) Graficul funcţiei intersectează axele de coordonate în punctul $(0, 0)$, deoarece $f(x)=0 \Rightarrow x^3=0 \Rightarrow x=0$ şi $f(0)=0 \Rightarrow y=0$.

d) Funcţia este pozitivă pentru $x>0$, $x\neq 2$ şi negativă pe intervalul infinit $]-\infty, 0[$.

e) Funcţia este continuă în domeniul său de definiţie, ca funcţie raţională. Punctul $x=2$ este un punct de discontinuitate de speţa 2, deoarece $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=+\infty$.

Prin urmare, dreapta $x=2$ este asimptota verticală a graficului funcţiei.

f) Avem $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3}{4(2-x)^2}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=$

$$=\lim_{x\to\pm\infty} x\cdot\frac{1}{4\left(\frac{2}{x}-1\right)^2}=\left(\lim_{x\to\pm\infty} x\right)\cdot\frac{1}{4(0-1)^2}=\pm\infty.$$

Aflăm asimptota oblică $y=kx+b$, unde

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{4(2-x)^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{4\left(\frac{2}{x}-1\right)^2}=\frac{1}{4(0-1)^2}=\frac{1}{4}$$

$$\text{şi } b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3}{4(2-x)^2}-\frac{1}{4}x\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-4x+4x^2-x^3}{(2-x)^2}=\frac{1}{4}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4(x^2-x)}{(4-4x+x^2)}=$$

$$=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{4}{x^2}-\frac{4}{x}+1}=\frac{1-0}{0-0+1}=1.$$

Prin urmare, dreapta $y=\dfrac{1}{4}x+1$ este asimptotă oblică a graficului funcţiei.

2. Calculăm derivata funcţiei:

$$y'(x)=\frac{1}{4}\cdot\frac{3x^2(2-x)^2+2(2-x)\cdot x^3}{(2-x)^4}=\frac{1}{4}\cdot\frac{x^2(6-x)}{(2-x)^3}.$$

Punctele critice (de ordinul întâi) coincid cu punctele staționare, deoarece

$$y'(x)=\infty\Rightarrow(2-x)^3=0\Rightarrow x_1=2\notin D=[-\infty,\ 2]\cup]2,+\infty[.$$

Deci $y'(x)=0\Rightarrow x^2(6-x)=0\Rightarrow x_1=0$ *și* $x_2=6$.

Am obținut punctele *(0, 0)* și *(6,* $\frac{27}{8}$*)*.

Prin urmare, punctele staționare împart domeniul de definiție al funcției în următoarele intervale

$$]-\infty,0[,\quad]0,2[\quad]2,6[\quad \text{și}\quad]6,+\infty[.$$

În virtutea continuității funcției $f'(x)$ (ca o funcție rațională) pe aceste intervale, semnul ei pe aceste intervale este caracterizat de valoarea ei într-un punct intermediar din aceste intervale. Deci

$f'(-1)>0\Rightarrow f'(x)>0,\ x\in]-\infty,0[,$
$f'(1)>0\Rightarrow f'(x)>0,\ x\in]0,2[,$
$f'(3)<0\Rightarrow f'(x)<0,\ x\in]2,6[,$
$f'(7)>0\Rightarrow f'(x)>0,\ x\in]6,+\infty[.$

Prin urmare, funcția $y=f(x)$ crește pe semiintervalele infinite $]-\infty, 2[$ și $]6, +\infty[$ și descrește pe intervalul $]2, 6[$. Deci în punctul $x_1=0$ tangenta la graficul funcției coincide cu axa absciselor, iar punctul $x_2=6$ este punct de minim pentru $f(x)$ cu $y_{min}=\frac{27}{8}$.

3. Calculăm derivata a doua:

$$y''(x)=\frac{1}{4}\cdot\frac{(12x-3x^2)(2-x)^3+(6x^2-x^3)\cdot 3(2-x)^2}{(2-x)^6}=$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{(4x-x^2)(2-x)+6x^2-x^3}{(2-x)^4}=\frac{6x}{(2-x)^4}.$$

Punctele critice (de ordinul doi) sunt următoarele:

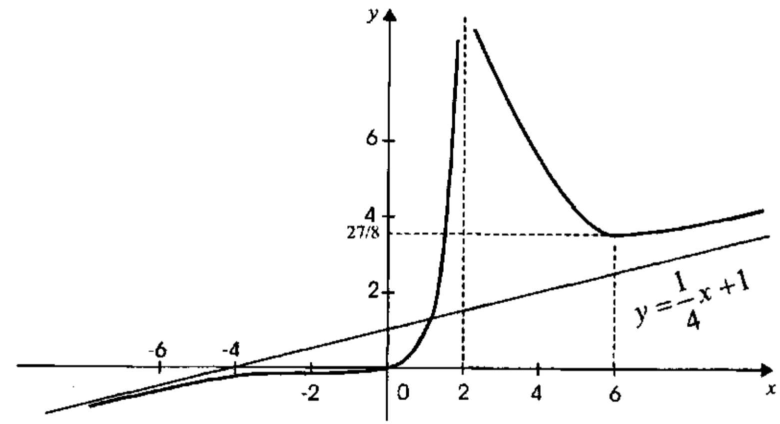
$$y''(x)=0\Rightarrow x_1=0\quad \text{și}\quad y''(x)=\infty\Rightarrow x_2=2\notin D.$$

Deci funcția dată are un singur punct critic (de ordinul doi): $x_1=0$, care este un punct de inflexiune, deoarece

$$x<0\Rightarrow y''(x)<0,\qquad x>0\Rightarrow y''(x)>0.$$

Prin urmare, pe semiintervalul infinit $]-\infty, 0[$ graficul funcției este convex, iar pe intervalele $]0, 2[$ și $]2, +\infty[$ graficul funcției este concav.

Ținând cont de datele de mai sus, trasăm graficul acestei funcții.



Observăm că graficul funcției intersectează asimptota lui în punctul $\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$.

Capitolul 3

NUMERE COMPLEXE. POLINOAME

3.1. Numere complexe

3.1.1. Definiția numărului complex. Operații cu numere complexe

Dacă ne-am mărgini numai la numerele reale, atunci, după cum se știe, operația de extragere a rădăcinii nu s-ar putea efectua întotdeauna: în cadrul numerelor reale, rădăcina de ordin par a unui număr negativ nu are sens. De aceea, chiar ecuația de gradul doi cu coeficienți reali nu are întotdeauna rădăcini reale. Această împrejurare conduce în mod firesc la extinderea noțiunii de număr, la introducerea unor numere noi de o natură mai generală și care cuprind numerele reale ca un caz particular. În legătură cu aceasta, este important să definim aceste numere și operațiile cu ele în așa fel încât pentru noile numere să rămână în vigoare legile de bază ale operațiilor cunoscute pentru numerele reale.

Știm că fiecare număr real este identificat cu un segment pe axa numerică sau cu un punct de pe această axă, dacă se convine să se așeze originea segmentului în originea axei numerice, iar direcția segmentului coincide cu direcția axei, dacă numărul real este pozitiv și direcția segmentului este opusă celeia a axei, dacă numărul real este negativ.

Dacă acum, în loc de a considera o axă numerică, vom considera întregul plan, raportat la axele de coordonate OX, OY, generalizând în mod convenabil noțiunea de număr, vom obține posibilitatea de a identifica mulțimea vectorilor, originea cărora coincide cu originea sistemului de coordonate format de axele OX și OY, sau mulțimea punctelor acestui plan cu mulțimea numerelor noi, pe care le vom numi numere complexe.

Definiție. Vom numi *numere complexe* perechile ordonate de numere reale x, y, pe care le vom nota provizoriu (x, y), perechi supuse la următoarele reguli de calcul:

A1 (egalitatea a două numere complexe)

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ și } y_1 = y_2;$$

A2 (unitatea obișnuită și unitatea imaginară)

$$(1,0) = 1, (0,1) = i;$$

A3 (înmulțirea numărului complex la un scalar (număr real))

$$k(x, y) = (x, y)k = (kx, ky), k \in R;$$

A4 (adunarea numerelor complexe)

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2);$$

A5 (înmulțirea numerelor complexe)

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Din A2 și A3 rezultă

$$k(1,0) = (k,0) = k \cdot 1 = k,$$

deci $(0,0) = 0$ și ținând seama de A1 urmează că

$$(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y = 0.$$

Din A2, A3 și A4 rezultă că orice număr complex $z = (x, y)$ se scrie sub forma

$$(x, y) = x(1,0) + y(0,1) = x \cdot 1 + y \cdot i = x + iy,$$

care se numește *formă algebrică a numărului complex.* În cazul acesta numărul real x se numește *partea reală* a numărului complex z și se notează astfel: $\operatorname{Re} z = x$ (de la cuvântul latin realis, ce înseamnă real), iar numărul real y se numește *partea imaginară* a numărului complex z și se notează: $\operatorname{Im} z = y$ (de la cuvântul latin imaginarius ce înseamnă imaginar).

Dacă $y = 0$, atunci numărul complex are forma $z = x + i0$. Îl vom scrie pe scurt $z = x$ și-l vom numi *număr real.* Dacă $y=0$ și $x=1$, obținem numărul real $z=1+i\cdot 0=1$, care se numește *unitate reală.* Dacă $x=0$ și $y=0$, numărul complex $z = 0 + i0$ se scrie pe scurt sub forma $z = 0$ și se numește *zero.* Dacă $x = 0$ și $y \neq 0$, atunci numărul complex $z = 0 + iy$ sau, pe scurt, $z = iy$. El se numește *pur imaginar.* În particular, dacă $x = 0$ și $y = 1$, obținem numărul complex $0 + i \cdot 1 = i$, care se numește *unitate imaginară.* Orice număr $z = x + iy$, unde $y \neq 0$ se numește *număr imaginar.*

Numerele complexe $x+iy$ şi $x-iy$ se numesc *numere complexe conjugate*. Dacă $z=x+iy$, atunci numărul conjugat $x-iy$ se notează prin $\bar{z}$.

Numărul $\sqrt{x^2+y^2}$ se numeşte *modulul* numărului complex $z=x+iy$ şi se notează $|z|$. Observăm că numerele complexe conjugate au aceleaşi module.

Adunarea a două numere complexe este comutativă şi asociativă, deoarece proprietăţile respective pentru numerele reale sunt valabile. Evident că numărul zero $(z=0)$ este un element neutru pentru operaţia de adunare, deoarece pentru orice număr complex $a+ib$, avem

$$(a+ib)+(0+i0)=(a+0)+i(b+0)=a+ib.$$

De asemenea orice număr complex $a+ib$ are opusul lui egal cu $(-a)+i(-b)$. Într-adevăr, din relaţia

$$(a+ib)+(x+iy)=0+i\cdot 0$$

rezultă $(a+x)+i(b+y)=0+i\cdot 0,$

adică $a+x=0$ şi $b+y=0.$

Deci $x=-a$, $y=-b$ şi numărul complex *opus* numărului $(a+ib)$ are forma $(-a)+i(-b)$.

O consecinţă a acestui fapt este că ecuaţia de forma

$$(a+ib)+(x+iy)=c+id$$

are o singură soluţie şi anume

$$x=c-a, y=d-b.$$

Numărul complex obţinut $(x+iy)=(c-a)+i(d-b)$ se numeşte *diferenţa* dintre numerele complexe $(c+id)$ şi $(a+ib)$ şi se notează astfel

$$(c+id)-(a+ib)=(c-a)+i(d-b).$$

Aşadar, a aduna (a scădea) două numere complexe în formă algebrică înseamnă a aduna (a scădea) părţile lor reale şi părţile lor imaginare.

Din A1,A2,A3 şi A5 rezultă

$$(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=(-1)\cdot(1,0),$$

adică $i\cdot i=(-1)\cdot 1$ sau $i^2=-1$.

Dacă efectuăm acum produsul $z_1\cdot z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)$ după regulile obişnuite ale algebrei, adică deschidem parantezele, şi, ţinând seama că $i^2=-1$, obţinem

$$(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1),$$

adică întocmai regula A5.

Se poate arăta că înmulţirea numerelor complexe este o operaţie închisă în mulţimea numerelor complexe, este comutativă şi asociativă, este distributivă în raport cu adunarea, deoarece proprietăţile respective pentru numerele reale sunt valabile.

Numărul complex $(1+i\cdot 0)=(1,0)=1$, adică unitatea reală şi în mulţimea numerelor complexe serveşte ca element neutru pentru operaţia înmulţirii, deoarece

$$(x+iy)\cdot 1=1\cdot(x+iy)=(x\cdot 1+iy\cdot 1)=x+iy.$$

Arătăm că orice număr complex $z=a+ib\neq 0+i\cdot 0$ are un invers. Într-adevăr, ecuaţia

$$(x+iy)\cdot(a+ib)=1+i\cdot 0$$

conduce la sistemul

$$xa-yb=1 \text{ şi } xb+ya=0$$

cu soluţia $x=\dfrac{a}{a^2+b^2}$ şi $y=\dfrac{-b}{a^2+b^2}$,

dacă $a^2+b^2\neq 0$, adică $z=a+ib\neq 0+i\cdot 0$.

Prin urmare, numărul complex z^{-1}, invers numărului complex $z=a+ib\neq 0+i\cdot 0$, are forma $z^{-1}=\dfrac{1}{a^2+b^2}(a-ib)$.

Împărţirea numerelor complexe este operaţia inversă a înmulţirii: a împărţi numărul complex $z_1 = x_1 + iy_1$ la numărul complex $z_2 = x_2 + iy_2 \neq 0$ înseamnă a afla numărul complex $z_3 = x_3 + iy_3$ astfel încât $z_1 = z_2 \cdot z_3$.

Se notează $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$ şi z_3 se numeşte *câtul de la împărţirea numărului* z_1 *la numărul* $z_2 \neq 0$.

Prin urmare,

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} \Leftrightarrow z_1 = z_2 \cdot z_3,\ z_2 \neq 0.$$

Împărţirea cu zero nu este definită. Spunem că nu are sens.

Evident că $z_2^{-1} = \dfrac{1}{z_2}$ şi $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \dfrac{1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}$.

Aşadar, a împărţi numărul z_1 la numărul $z_2 \neq 0$ înseamnă a înmulţi numărul z_1 cu numărul invers numărului z_2.

Observăm că

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{(x_1+iy_1)\cdot(x_2-iy_2)}{x_2^2+y_2^2} = \frac{(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2} =$$

$$= \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2};$$

dacă $x_2^2 + y_2^2 \neq 0$, adică $z_2 = x_2 + iy_2 \neq 0 + i \cdot 0$.

Prin urmare, împărţirea a două numere complexe poate fi obţinută prin înmulţirea numărătorului şi numitorului fracţiei $\dfrac{z_1}{z_2}(z_2 \neq 0)$ cu numărul complex conjugat numitorului,

adică $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2},$$

deoarece $$z_2 \cdot \left(\frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}\right) = z_2 \cdot \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = z_1.$$

Remarcăm următoarele proprietăţi cu numerele complexe conjugate:

1. $|\overline{z}| = |z|$;

2. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$;
3. $\overline{\overline{z}} = z$;
4. $\overline{(z_1 \pm z_2)} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$;
5. $\overline{(z_1 \cdot z_2)} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$;
6. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}},\ z_2 \neq 0$.

Proprietăţile 1, 2 şi 3 sunt imediate. Propunem cititorului demonstraţia celorlalte proprietăţi.

Ridicarea numărului complex $z = x + iy$ la o putere naturală n se efectuează ca un caz particular al înmulţirii numerelor complexe:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{\text{de } n \text{ ori}}.$$

În acest caz, în baza egalităţii $i^2 = -1$, obţinem

$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1)\cdot i = -i,$$
$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)\cdot(-1) = 1$$

şi, în caz general,

$$i^{4n} = i^{2\cdot 2n} = \left(i^2\right)^{2n} = (-1)^{2n} = 1,$$
$$i^{4n+1} = i^{4n} \cdot i^1 = i^1 = i,$$
$$i^{4n+2} = i^{4n} \cdot i^2 = i^2 = -1,$$
$$i^{4n+3} = i^{4n} \cdot i^3 = i^3 = -i,$$

pentru orice $n \in N$.

Notă. 1. Operaţiile aritmetice cu numere complexe se efectuează la fel ca şi operaţiile cu expresii algebrice obişnuite, dacă se consideră $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ sau în formă generală: $i^{4k} = \left(i^2\right)^{2k} = 1$, $i^{4k+1} = i^{4k} \cdot i = i$, $i^{4k+2} = i^{4k} \cdot i^2 = -1$, $i^{4k+3} = i^{4k} \cdot i^3 = -i$ pentru orice $k \in N$.

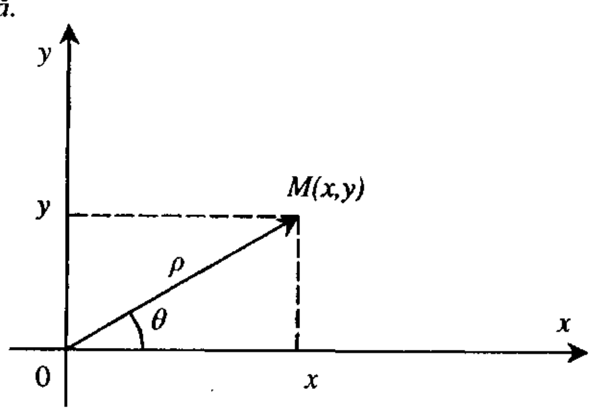
2. Dacă asupra numerelor complexe se efectuează un şir de operaţii aritmetice (adunarea, scăderea, înmulţirea, împărţirea şi ridicarea la o putere naturală) şi se obţine ca rezultat un număr oarecare $A + iB$,

atunci, efectuând aceleaşi operaţii cu numere complexe conjugate celor date, se va obţine numărul $A-iB$, conjugat cu numărul complex $A+iB$.

3.1.2. Forma trigonometrică şi forma exponenţială a numărului complex

Numărul complex $z=x+iy$ se reprezintă geometric printr-un punct M cu coordonatele x, y în planul XOY sau prin raza vector $\overrightarrow{OM}$. Planul care serveşte pentru reprezentarea geometrică a numerelor complexe se numeşte *plan complex*. Întrucât fiecare număr complex $z=x+iy$ este determinat de partea sa reală x şi partea sa imaginară y în mod unic, între numerele complexe şi punctele planului complex există o corespondenţă biunivocă sau o bijecţie.

Dacă $z_1=x_1+iy_1$ este un număr real, adică $y_1=0$ şi $z_1=x_1$, atunci punctul care îi corespunde este situat pe axa absciselor OX. De aceea, axa absciselor se numeşte *axă reală*. Dacă numărul complex $z_2=x_2+iy_2$ este un număr pur imaginar, adică $x_2=0$ şi $z_2=iy_2$, atunci punctul care-i corespunde este situat pe axa ordonatelor OY. De aceea, axa ordonatelor este numită *axă imaginară*.



Alegem pe planul complex XOY un sistem de coordonate polare în aşa fel ca polul să coincidă cu originea sistemului

cartezian dreptunghiular de coordonate, iar axa polară să fie orientată după sensul pozitiv al axei reale. Notăm raza polară a punctului $z=x+iy\neq 0$ prin ρ, iar unghiul polar prin θ. Lungimea segmentului OM se numeşte *modulul* numărului complex z şi se notează prin $|z|$, iar unghiul polar θ se numeşte *argumentul* numărului complex z şi se notează prin $\arg z$, dacă se ia valoarea principală a unghiului ($-\pi\leq\arg z\leq\pi$) şi prin $\operatorname{Arg}z$, dacă se ia valoarea generală a unghiului. Aşadar,

$$\rho=|z|,\ \operatorname{Arg}z=\arg z+2\pi k, k\in Z \text{ şi } -\pi\leq\arg z\leq\pi.$$

Deoarece $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$,

avem $$z=x+iy=\rho(\cos\theta+i\sin\theta).$$

Expresia $z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$ se numeşte *forma trigonometrică* a numărului complex z, iar expresia $z=x+iy$ se numeşte *forma algebrică* a numărului complex z.

Formula $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ se numeşte *formula Euler*. Evident, $e^{-ix}=\cos x-i\sin x$.

Cu ajutorul formulei Euler orice număr complex z poate fi reprezentat sub o nouă formă: $z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)=\rho\cdot e^{i\theta}$, care se numeşte *forma exponenţială* a numărului complex z.

Modulul numărului complex z şi argumentul lui se exprimă prin partea reală $\operatorname{Re}z=x$ a numărului z şi prin partea lui imaginară $\operatorname{Im}z=y$. Astfel,

$$|z|=\rho=\sqrt{x^2+y^2} \text{ şi } \arg z=\theta=arctg\frac{y}{x}+k\pi,$$

unde: $k=0$, dacă θ aparţine cadranelor unu şi patru;
$k=1$, dacă θ aparţine cadranului doi;
$k=-1$, dacă θ aparţine cadranului trei.

Dacă $x=0$, atunci pentru $y\neq 0$, $\arg z=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}y$, adică $\arg z=+\frac{\pi}{2}$, dacă $y>0$ şi $\arg z=-\frac{\pi}{2}$ dacă $y<0$.

Evident că $\arg z$ este determinat unic de numărul complex $z \neq 0$, iar Argz este determinat de numărul complex $z \neq 0$ cu exactitate de $2\pi\kappa$, $\kappa \in Z$, deoarece fiecare vector $\overrightarrow{OM}$ va coincide cu sine însuşi dacă-l rotim cu orice număr întreg de rotaţii complete într-o direcţie sau alta în jurul originii sistemului de coordonate.

Modulul numărului $z=0$ este egal cu zero: $|0|=0$. Argumentul acestui număr este nedeterminat. Drept argument al numărului $z=0$ poate fi acceptat orice unghi θ, deoarece are loc egalitatea

$$0 = 0(\cos\theta + i\sin\theta),\ \theta \in [-\pi, \pi].$$

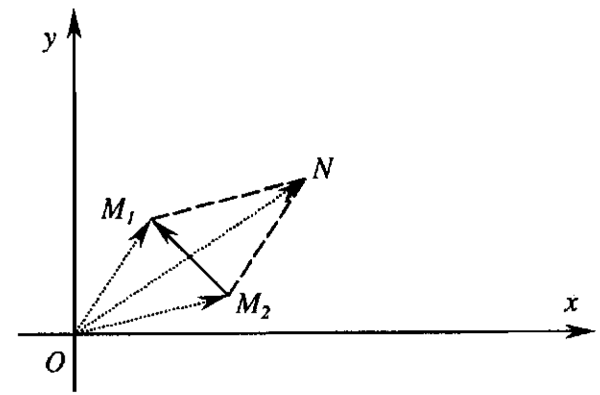
Dacă $z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ şi $z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, atunci $z_1 = z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$ şi $\arg z_1 = \arg z_2 + 2\pi\kappa$, $k \in Z$.

Evident că $|z| = |\bar{z}|$ şi $\arg z = -\arg \bar{z}$, unde $z = x + iy$, iar $\bar{z} = x - iy$, adică, dacă $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$, atunci $\bar{z} = |\bar{z}|(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) = |z|(\cos\theta - i\sin\theta)$.

De asemenea

$$z_1^{-1} = \frac{1}{z_1} = \frac{\bar{z}_1}{z_1\bar{z}_1} = \frac{\bar{z}_1}{|z_1|^2} = \frac{|z_1|(\cos\theta_1 - i\sin\theta_1)}{|z_1|^2} = \frac{1}{|z_1|}(\cos\theta_1 - i\sin\theta_1).$$

Fie $z_1 = x_1 + iy_1$ şi $z_2 = x_2 + iy_2$ două numere complexe în planul complex XOY. Ducând razele vectoare $\overrightarrow{OM_1}$ şi $\overrightarrow{OM_2}$ ale punctelor $M_1(x_1, y_1)$ şi $M_2(x_2, y_2)$, obţinem doi vectori $\overrightarrow{OM_1}$ şi $\overrightarrow{OM_2}$, care corespund numerelor complexe z_1 şi z_2. La adunarea numerelor complexe în forma algebrică se adună aparte părţile lor reale şi părţile lor imaginare, iar la compunerea vectorilor se adună coordonatele lor respective. Acest lucru ne permite să reprezentăm adunarea numerelor complexe prin compunerea unor vectori.



Vectorul $\overrightarrow{ON}$, care este diagonala paralelogramului construit pe vectorii $\overrightarrow{OM_1}$ şi $\overrightarrow{OM_2}$, reprezintă numărul complex $z_3 = z_1 + z_2$, iar vectorul $\overrightarrow{M_2M_1}$, care este cealaltă diagonală a acestui paralelogram, reprezintă numărul complex $z_4 = z_1 - z_2$.

Considerăm următoarele operaţii cu numere complexe în formă trigonometrică.

1. Înmulţirea numerelor complexe

Fie $z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ şi $z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, atunci $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) =$

$$= |z_1| \cdot |z_2|[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)] =$$

$$= |z_1| \cdot |z_2|[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)].$$

Caz particular.

a) $z_1 \cdot \bar{z}_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot |\bar{z}_1|[\cos(-\theta_1) + i\sin(-\theta_1)] =$

$= |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot |\bar{z}_1|(\cos\theta_1 - i\sin\theta_1) =$

$= |z_1|^2(\cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1) = |z_1|^2 = |\bar{z}_1|^2$

b) $z_1^2 = z_1 \cdot z_1 = |z_1|^2(\cos 2\theta_1 + i\sin 2\theta_1)$.

Aşadar, produsul a două numere complexe în formă trigonometrică este un număr complex modulul căruia este egal cu produsul modulelor factorilor, iar argumentul lui este egal cu suma argumentelor acestor factori.

2. Împărţirea numerelor complexe

Fie $z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ şi $z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, $z_2 \neq 0$, atunci

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{|z_1| \cdot |\bar{z}_2|[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]}{|z_2|^2} =$$

$$= \left|\frac{z_1}{z_2}\right|[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)], \text{ unde } z_2 \neq 0 .$$

Aşadar, la împărţirea a două numere complexe modulele se împart, iar argumentele se scad.

3. Ridicarea la o putere naturală

Ridicarea la o putere naturală $n(n \in N)$ a unui număr complex $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ se consideră ca înmulţirea de n ori a lui z cu el însuşi. Deci, prin recurenţă, obţinem

$$z^n = |z|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta), n \in N,$$

adică, pentru a ridica un număr complex la o putere naturală, modulul său trebuie ridicat la această putere, iar argumentul trebuie de înmulţit cu exponentul.

Dacă $|z| = 1$, atunci obţinem formula

$$z^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta, n \in N,$$

care se numeşte *formula Moivre* ((1667-1754) – matematician englez).

Dacă $n = 3$, atunci formula Moivre are forma

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta \text{ sau}$$

$$\cos^3\theta + i \cdot 3\cos^2\theta \cdot \sin\theta - 3\cos\theta \cdot \sin^2\theta - i\sin^3\theta = \cos 3\theta + i\sin 3\theta,$$

de unde, folosind condiţia de egalitate a două numere complexe, obţinem

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta,$$

$$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta,$$

formule bine cunoscute în trigonometrie.

4. Extragerea rădăcinii

Se numeşte *rădăcină de ordinul* n $(n = 2,3,4,\ldots)$ a unui număr complex $w = |w|(\cos\theta + i\sin\theta)$ un astfel de număr complex $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, care, ridicat la puterea n, coincide cu numărul dat şi se notează $z = \sqrt[n]{w}$ (se citeşte rădăcina de ordinul n din numărul complex w).

Aşadar, egalitatea

$$\sqrt[n]{|w|(\cos\theta + i\sin\theta)} = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

este echivalentă cu egalitatea

$$|z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = |w|(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Dar dacă două numere complexe sunt egale, modulele lor sunt egale, iar argumentele lor diferă printr-un multiplu de 2π. Deci $|z|^n = |w|$ şi $n\varphi = \theta + 2\pi k, k \in Z$, de unde $|z| = \sqrt[n]{|w|}$ şi $\varphi = \dfrac{\theta + 2\pi k}{n}$, unde $\sqrt[n]{|w|}$ este valoarea aritmetică a rădăcinii, iar k - un număr întreg oarecare.

Astfel, obţinem formula

$$\sqrt[n]{|w|(\cos\theta + i\sin\theta)} = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{\theta + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right), \quad (1)$$

adică pentru extragerea rădăcinii dintr-un număr complex w trebuie de extras rădăcina din modulul acestui număr, iar argumentul lui Arg w trebuie de împărţit la indicele rădăcinii.

În formula de mai sus, numărul k poate lua orice valori întregi, însă se poate arăta că nu există decât n valori distincte ale rădăcinii şi că ele corespund valorilor

$$k = 0,1,2,\ldots,n-1. \quad (2)$$

Pentru a demonstra aceasta, să observăm că rezultatele din formula (1) vor fi diferite pentru două valori k_1 şi k_2 atunci când diferenţa argumentelor

$$\frac{\theta+2\pi k_1}{n} \text{ şi } \frac{\theta+2\pi k_2}{n}$$

nu este multiplu de 2π şi că aceste rezultate vor fi identice, dacă aceste argumente diferă printr-un multiplu de 2π. Însă diferenţa (k_1-k_2) a două numere din şirul (2) este în valoare absolută mai mică decât n şi deci diferenţa

$$\frac{\theta+2\pi k_1}{n}-\frac{\theta+2\pi k_2}{n}=\frac{k_1-k_2}{n}\cdot 2\pi$$

nu poate fi multiplă de 2π. Prin urmare, celor n valori k din şirul (2) le corespund n valori distincte ale rădăcinii.

Fie acum k_2 un număr întreg, care nu face parte din şirul (2). Împărţindu-l cu n, putem să-l scriem sub forma $k_2=qn+k_1$, unde q este un număr întreg, iar k_1 - un număr din şirul (2). Deci

$$\frac{\theta+2\pi k_2}{n}=\frac{\theta+2\pi qn+2\pi k_1}{n}=\frac{\theta+2\pi k_1}{n}+2\pi q,$$

adică valorii k_2 îi corespunde aceeaşi valoare a rădăcinii ca şi pentru valoarea k_1 cuprinsă în şirul (2). Aşadar, rădăcina de ordinul n a unui număr complex are n valori distincte. Singura excepţie a acestei reguli este numărul zero, adică când $|w|=0$. În acest caz toate valorile rădăcinii sunt nule.

Cazuri particulare.

a) Dacă $w=A$ este un număr real pozitiv, adică $w=A(\cos 0+i\sin 0)$, atunci formula (1) are forma

$$\sqrt[n]{w}=\sqrt[n]{A}\left(\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n}\right),\ k=0,1,2,\dots,n-1.$$

Expresia $\left(\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n}\right)$, k = *0, 1, 2, ..., n-1* dă toate valorile rădăcinii de ordinul n din 1.

b) Dacă $w=A$ este un număr real negativ, adică $w=A(\cos\pi+i\sin\pi)$, atunci formula (1) are forma

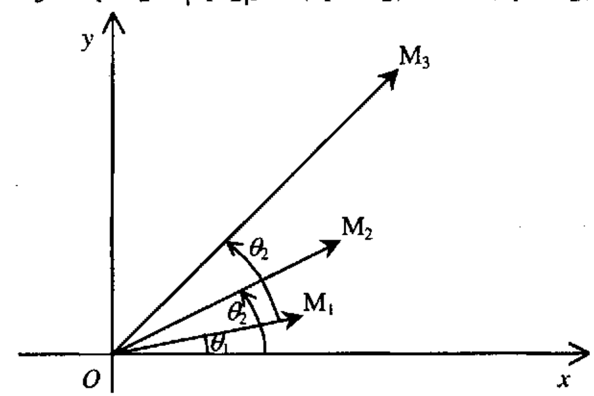
$$\sqrt[n]{w}=\sqrt[n]{|A|}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{n}\right),\ k=0,1,2,\dots,n-1.$$

Expresia din paranteze ne dă toate valorile rădăcinii de ordinul n din (-1).

Remarcăm că operaţiile înmulţirii şi împărţirii pot fi de asemenea interpretate geometric (despre interpretarea geometrică a adunării şi a scăderii am vorbit deja la începutul acestui paragraf).

Într-adevăr, numărul complex $z_1=|z_1|(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$ este reprezentat de raza vector $\overrightarrow{OM_1}$, iar numărul complex $z_2=|z_2|(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ este reprezentat de raza vector $\overrightarrow{OM_2}$.

Pentru a construi vectorul $\overrightarrow{OM_3}$, care reprezintă numărul complex $z_3=z_1\cdot z_2=|z_1z_2|[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$, trebuie



să rotim vectorul $\overrightarrow{OM_1}$ cu un unghi θ_2 în sens opus mişcării acelor de ceasornic, dacă $\theta_2>0$, şi în sensul mişcării acelor de ceasornic, dacă $\theta_2<0$, şi să "mărim" lungimea vectorului $\overrightarrow{OM_1}$ de $|z_2|$ ori.

Întrucât $i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$, înmulţirea oricărui număr z cu i poate fi privită ca operaţia rotirii vectorului, care reprezintă numărul z cu un unghi $\frac{\pi}{2}$ în sensul opus acelor de ceasornic.

Pentru a construi vectorul, care reprezintă numărul complex $z_4 = \frac{z_1}{z_2}$, trebuie să rotim vectorul $\overrightarrow{OM_1}$ cu un unghi θ_2 în sensul mişcării acelor de ceasornic, dacă $\theta_2 > 0$ şi în sens opus, dacă $\theta_2 < 0$ şi să micşorăm lungimea lui de $|z_2|$ ori.

Împărţirea numărului complex z la i poate fi privită ca operaţia rotirii vectorului, care reprezintă numărul z, cu un unghi $\frac{\pi}{2}$ în sensul mişcării acelor de ceasornic.

3.2. *Funcţii raţionale*

3.2.1. Polinoame. Noţiuni fundamentale

Expresia de forma

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n,$$

unde $a_0 \neq 0, a_1, \ldots, a_n$ sunt numere complexe, iar z este o variabilă complexă şi $n \in N$, se numeşte *polinom de gradul n*. Coeficientul a_0 se numeşte *coeficientul dominant* al polinomului. Două polinoame sunt egale, dacă coeficienţii respectivi (de pe lângă aceeaşi putere a variabilei z) sunt egali. Operaţiile principale cu polinoamele sunt bine cunoscute din algebra elementară. Amintim numai rezultatul principal în legătură cu operaţia împărţirii. Dacă $P_n(z)$ şi $S_m(z)$ sunt două polinoame de gradul n şi respectiv de gradul m şi $n \geq m$, atunci există două polinoame $Q_k(z)$ de gradul

$k = n - m$ şi $R_t(z)$ de gradul t, unde $0 \leq t < m$, astfel încât are loc identitatea

$$P_n(z) = S_m(z) \cdot Q_k(z) + R_t(z).$$

Procesul aflării polinoamelor $Q_k(z)$ (care se numeşte *câtul* de la împărţirea polinomului $P_n(z)$ la polinomul $S_m(z)$) şi $R_t(z)$ (care se numeşte *restul* acestei împărţiri) se numeşte *algoritmul Euclide* ((sec. 3 î.e.n.) – matematician grec).

Câtul $Q_k(z)$ şi restul $R_t(z)$ sunt polinoame bine determinate, astfel încât reprezentarea de mai sus a polinomului $P_n(z)$ cu ajutorul polinomului $S_m(z)$ este unică.

Spunem că polinomul $P_n(z)$ se împarte fără rest la polinomul $S_m(z)$, unde $m \leq n$, dacă restul acestei împărţiri este egal cu zero, adică $R_t(z) = 0$.

Convenim să numim *polinom de gradul zero* orice constantă complexă, adică orice număr complex.

Prin urmare, orice polinom $P_n(z)$ se împarte fără rest la orice polinom de gradul zero diferit de numărul zero.

Drept exemplu, observăm că câtul de la împărţirea polinomului $(x+2)$ la polinomul de gradul zero $S_0(z)=3$ este egal cu $\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right)$, iar restul este egal cu zero. Într-adevăr,

$$x + 2 = 3\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right).$$

Vom studia problema împărţirii polinomului $P_n(z)$ de gradul $n \geq 1$, $n \in N$, la polinomul de gradul întâi de forma $(z - a)$.

Valorile lui z, pentru care polinomul $P_n(z)$ se anulează, se numesc *rădăcinile* acestui polinom. Aşadar, rădăcinile polinomului $P_n(z)$ sunt soluţiile ecuaţiei algebrice de gradul n:

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

Teorema 1 (*teorema Bezout* ((1730 – 1783) - matematician francez)). De la împărţirea polinomului $P_n(z)$ la binomul $(z-a)$ se obţine un rest egal cu $P_n(a)$.

Demonstraţie. De la împărţirea polinomului $P_n(z)$ la polinomul de gradul întâi $(z-a)$ se obţine, conform algritmului Euclide, un polinom cât Q_{n-1} de gradul $(n-1)$ cu coeficientul dominant a_0 şi restul $R_0(z)$, adică $R_0(z)=C$, unde C - o constantă arbitrară. Deci

$$P_n(z)=Q_{n-1}(z)(z-a)+C.$$

Această egalitate este adevărată pentru toate valorile lui $z \neq a$ (împărţirea la z-a, pentru $z=a$ nu are sens). Deci

$$\lim_{z\to a} P_n(z)=\lim_{z\to a}[Q_{n-1}(z)(z-a)]+\lim_{z\to a} C \quad \text{sau} \quad \lim_{z\to a} P_n(z)=0+C,$$

adică, în virtutea continuităţii funcţiei polinomiale, avem $P_n(a)=C=R_0(t)$.

Consecinţă. Dacă numărul a este o rădăcină a polinomului $P_n(z)$, atunci $P_n(z)=Q_{n-1}(z)(z-a)$.

Aşadar, am obţinut următorul rezultat: pentru ca polinomul $P_n(z)$ să se împartă fără rest la binomul $(z-a)$, este necesar şi suficient ca numărul $z=a$ să fie o rădăcină a polinomului $P_n(z)$.

Deci, cunoscând o rădăcină a polinomului $P_n(z)$, avem $P_n(z)=Q_{n-1}(z)(z-a)$. Aflarea celorlalte rădăcini conduce la rezolvarea unei ecuaţii algebrice de gradul $(n-1)$: $Q_{n-1}(z)=0$ etc.

Pentru cele ce urmează, este necesar să cunoaştem răspunsul la următoarea întrebare: *orice ecuaţie algebrică are soluţii?* În cazul unei ecuaţii nealgebrice, răspunsul este negativ: într-adevăr, ecuaţia $e^z=0$, unde $z=x+iy$, nu are rădăcini, deoarece

$$e^z=e^x(\cos y+i\sin y)=0 \Leftrightarrow e^x=0 \text{ sau } \cos y+i\sin y=0$$

Însă $e^x \neq 0$ pentru orice număr real x şi numărul complex $(\cos y+i\sin y)$, $y\in R$, este diferit de zero, deoarece modulul lui este egal cu 1.

Însă pentru ecuaţii algebrice, întrebarea de mai sus are un răspuns afirmativ, care constă în următoarea teoremă de bază a algebrei.

Teorema 2. *(teorema Gauss (1777-1855) – matematician şi astronom german).* Orice ecuaţie algebrică de gradul $n\geq 1$ cu coeficienţi complecşi are cel puţin o rădăcină reală sau complexă.

Această teoremă din algebra superioară o acceptăm aici fără demonstraţie.

Pornind de la teorema 2 şi rezultatul din teorema 1, obţinem următoarea descompunere în factori a polinomului $P_n(z)$:

$$P_n(z)=a_0(z-z_1)\cdot(z-z_2)\cdot\ldots\ldots\cdot(z-z_n), \qquad (1)$$

adică orice polinom de gradul n se descompune în n factori liniari şi eventual un factor numeric astfel încât acest factor numeric poate fi considerat egal cu coeficientul dominant al polinomului, iar ceilalţi factori sunt binoame de forma $(z$-$a)$.

Dacă facem substituţia $z=z_s(s=1,2,\ldots,n)$, cel puţin unul din factorii descompunerii (1) se va anula, adică valorile $z=z_s$ sunt rădăcinile polinomului $P_n(z)$.

Nici o valoare $z\neq z_s$ nu poate fi rădăcină a lui $P_n(z)$, deoarece pentru o asemenea valoare nici unul dintre factorii din descompunerea (1) nu se anulează.

Dacă toate numerele $z_s(s=1,2,\ldots,n)$ din (1) sunt distincte, $P_n(z)$ are exact n rădăcini diferite. Dacă printre rădăcinile z_s unele sunt egale, numărul rădăcinilor distincte ale lui $P_n(z)$ va fi mai mic decât n.

Putem, aşadar, să formulăm următorul rezultat: un polinom de gradul n (sau o ecuaţie algebrică de gradul n) nu poate avea mai mult decât n rădăcini distincte.

O consecinţă directă a acestui rezultat este următoarea propoziţie: *dacă se ştie că un polinom de grad nu mai mare decât n are mai mult decât n rădăcini distincte, toţi coeficienţii acestui polinom şi termenul său liber sunt nuli, adică polinomul este identic nul.*

Să presupunem că valorile a două polinoame $P_n(z)$ şi $Q_m(z)$ cu $m\leq n$ coincid pentru mai mult decât n valori diferite ale lui z.

Atunci diferenţa lor $[P_n(z)-Q_m(z)]$ este un polinom de gradul nu mai mare decât n şi are mai mult decât n rădăcini distincte. Prin urmare, această diferenţă este identic nulă, adică polinoamele $P_n(z)$ şi $Q_m(z)$ au aceiaşi coeficienţi. Deci putem enunţa următorul rezultat: *dacă valorile a două polinoame de grade nu mai mari decât n coincid pentru mai mult decât n valori distincte ale lui z, toţi coeficienţii respectivi ai acestor polinoame şi termenii liberi sunt egali, adică polinoamele sunt identic egale.*

Această proprietate a polinoamelor se află la baza aşa-numitei *metode a coeficienţilor nedeterminaţi*, pe care o vom utiliza de multe ori în cele ce urmează. Practic, esenţa acestei metode constă în faptul că din identitatea a două polinoame decurge egalitatea coeficienţilor aceloraşi puteri ale lui z din aceste polinoame.

Remarcăm că descompunerea (1) a polinomului $P_n(z)$ în factori liniari este unică.

Dacă în descompunerea (1) a polinomului $P_n(z)$ printre rădăcinile $z_s (s=1,2,\dots,n)$ sunt şi egale, atunci, grupându-le, obţinem următoarea descompunere

$$P_n(z)=a_0(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(z-z_m)^{k_m}, \tag{2}$$

unde numerele $z_1, z_2, \dots, z_m$ sunt deja distincte şi $k_1+k_2+\ldots+k_m=n$.

Dacă în descompunerea lui $P_n(z)$, în forma de mai sus, există factorul $(z-z_i)^{k_i}$, $i=1, 2, \dots, m$, se spune că rădăcina $z=z_i$ este *o rădăcină a polinomului $P_n(z)$ de multiplicitatea k_i* şi, în general, o rădăcină $z=a$ a polinomului $P_n(z)$ se numeşte *rădăcină de multiplicitatea k ($k\in N$)*, dacă $P_n(z)$ se împarte fără rest la $(z-a)^k$ şi nu se împarte fără rest la $(z-a)^{k+1}$. Utilizând polinomul Taylor, această condiţie poate fi înlocuită cu următoarele condiţii: $P_n(a)=P_n'(a)=\ldots=P_n^{(k-1)}(a)=0$, iar $P_n^{(k)}(a)\neq 0$.

Rădăcina $z=a$ a polinomului $P_n(z)$, pentru $k=1$, se numeşte *rădăcină simplă a lui.*

Teorema 3. Dacă polinomul $P_n(z)$ cu coeficienţi reali are o rădăcină complexă $a+ib$, atunci el are şi o rădăcină complexă conjugată ei, adică numărul $(a-ib)$ de asemenea este o rădăcină a lui $P_n(z)$.

Demonstraţie. Dacă în polinomul $P_n(z)$ înlocuim rădăcina complexă $(a+ib)$ şi efectuăm toate operaţiile, obţinem un număr complex $M+iN$, adică $P_n(a+ib)=M+iN$.

Deoarece $P_n(a+ib)=0$, avem $M=N=0$.

Dacă însă în loc de z înlocuim numărul complex conjugat $(a-ib)$ şi efectuăm din nou toate operaţiile, atunci, în virtutea notei 2 din 3.1.1, obţinem $P_n(a-ib)=M-iN=0-i0=0$, adică numărul $(a-ib)$ de asemenea este rădăcină a polinomului $P_n(z)$. Teorema este demonstrată.

Aşadar, în descompunerile (1) sau (2), scrise fiecare pentru polinoame cu coeficienţi reali, rădăcina complexă figurează în pereche cu cea conjugată, având aceeaşi multiplicitate.

Fie polinomul

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,$$

unde $a_0\neq 0, a_1,\dots,a_n$ sunt numere reale. Atunci descompunerile (1) şi (2) au forma

$$P_n(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n) \tag{3}$$

$$\text{şi } P_n(x)=a_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_t)^{k_t}. \tag{4}$$

Înmulţind factorii liniari, ce corespund unei perechi de rădăcini complexe conjugate $(a+ib)$ şi $(a-ib)$, obţinem un trinom de gradul doi cu coeficienţi reali:

$$[x-(a+ib)][x-(a-ib)]=[(x-a)-ib][(x-a)+ib]=(x-a)^2+b^2=$$
$$=x^2-2ax+a^2+b^2=x^2+px+q,$$

unde $p=-2a$ şi $q=a^2+b^2$ sunt numere reale.

Aşadar, polinomul cu coeficienţi reali se descompune în factori cu coeficienţi reali de gradul întâi (liniari) şi de gradul doi (pătratici) de multiplicitatea respectivă, adică

$$P_n(x)=a_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_r)^{k_r}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{t_1}\times$$

$$\times (x^2+p_2x+q_2)^{t_2}\cdot \ldots \cdot (x^2+p_sx+q_s)^{t_s},$$

unde $k_1+k_2+\ldots+k_r+t_1+t_2+\ldots+t_s=n$.

3.2.2. *Funcţii raţionale*

Pe parcursul acestui paragraf vom considera numai polinoame cu coeficienţi reali. Raportul a două polinoame se numeşte *funcţie raţională*. Fără a restrânge generalitatea, se poate considera că aceste două polinoame nu au nici o rădăcină comună şi nici factori constanţi comuni, adică funcţiile raţionale se consideră întotdeauna ca fracţii ireductibile. Evident că domeniul de definiţie al unei funcţii raţionale este mulţimea numerelor reale, care nu sunt rădăcinile polinomului numitor. O funcţie raţională se numeşte *regulată* (subunitară), dacă gradul polinomului de la numărător este mai mic decât gradul polinomului de la numitor. În caz contrar, funcţia raţională se numeşte *neregulată* (supraunitară, echiunitară). Separând din funcţia neregulată partea ei întreagă (împărţind numărătorul la numitor), o putem reprezenta întotdeauna sub formă de sumă a unui polinom (câtul) şi a unei funcţii raţionale regulate (raportul dintre rest şi împărţitor). De aceea ne vom ocupa numai de funcţii raţionale regulate.

Se numesc *funcţii raţionale simple* (sau fracţii elementare) următoarele 4 tipuri de funcţii raţionale regulate:

1) $\dfrac{A}{x-a},\ x\neq a,\ A\neq 0;$

2) $\dfrac{A}{(x-a)^k},\ x\neq a,\ k=2,3,4\ldots,\ A\neq 0;$

3) $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q},\ p^2-4q<0,\ M^2+N^2\neq 0;$

4) $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k},\ p^2-4q<0,\ k=2,3,\ldots,\ M^2+N^2\neq 0.$

Următoarele teoreme ne vor arăta că orice funcţie raţională regulată poate fi reprezentată sub formă de sumă de funcţii simple (de tipurile 1-4).

Fie $f(x)=\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ o funcţie raţională regulată, adică $m<n$.

Putem considera că coeficientul dominant al polinomului $P_n(x)$ este egal cu unu (aceasta se poate obţine simplificând funcţia $f(x)$ prin acest coeficient).

Teorema 1. Fie $x=a$ o rădăcină reală de multiplicitatea k, $k\in N$, a polinomului $P_n(x)$, adică $P_n(x)=(x-a)^k\cdot S_{n-k}(x)$, unde $S_{n-k}(a)\neq 0$. Atunci funcţia regulată $f(x)=\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ poate fi reprezentată sub formă de sumă a două funcţii regulate în felul următor:

$$f(x)=\frac{A}{(x-a)^k}+\frac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1}\cdot S_{n-k}(x)}, \tag{1}$$

unde A este o constantă reală diferită de zero, iar $F_1(x)$ – un polinom gradul căruia este mai mic decât gradul numitorului $(x-a)^{k-1}\cdot S_{n-k}(x)$.

Demonstraţie. Scriem identitatea

$$f(x)=\frac{A}{(x-a)^k}+\frac{Q_m(x)-A\cdot S_{n-k}(x)}{(x-a)^k\cdot S_{n-k}(x)}, \tag{2}$$

care este valabilă pentru orice A.

Determinăm constanta A astfel încât polinomul $Q_m(x)-A\cdot S_{n-k}(x)$ să se împarte fără rest la $(x-a)$. Pentru aceasta, conform teoremei Bezout din 3.2.1, este necesar şi suficient să fie satisfăcută egalitatea $Q_m(a)-A\cdot S_{n-k}(a)=0$, de unde

$$A=\frac{Q_m(a)}{S_{n-k}(a)}.$$

Observăm că $S_{n-k}(a)\neq 0$ şi $Q_m(a)\neq 0$, deoarece s-a presupus că polinoamele $Q_m(x)$ şi $P_n(x)$ nu au rădăcini comune. Prin urmare, constanta A este determinată unic şi $A\neq 0$.

Pentru $A=\dfrac{Q_m(a)}{S_{n-k}(a)}$ avem că polinomul $Q_m(x)-A\cdot S_{n-k}(x)$ se împarte fără rest la *(x-a)*, adică

$$Q_m(x)-A\cdot S_{n-k}(x)=(x-a)\cdot F_1(x).$$

Deci $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\dfrac{A}{(x-a)^k}+\dfrac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1}\cdot S_{n-k}(x)}$.

Deoarece *m<n* şi gradul polinomului $S_{n-k}(x)$ este mai mic decât gradul polinomului $P_n(x)$, avem că gradul polinomului $F_1(x)$ este mai mic decât gradul polinomului $(x-a)^{k-1}\cdot S_{n-k}(x)$. Teorema este demonstrată.

Notă. Teorema 1 ne arată că, punând în evidenţă un termen de forma $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, care se numeşte *funcţie raţională simplă*, putem reduce exponentul factorului *(x-a)* din numitor cel puţin cu o unitate. Deci aplicând succesiv teorema 1 de *k* ori, obţinem următorul rezultat: dacă *x=a* este o rădăcină reală de multiplicitatea *k>1* a polinomului $P_n(x)$, atunci funcţia regulată $f(x)=\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ poate fi reprezentată sub forma:

$$f(x)=\frac{A_1}{(x-a)^k}+\frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}+\ldots+\frac{A_k}{x-a}+\frac{F_k(x)}{S_{n-k}(x)}, \tag{3}$$

unde $\dfrac{F_k(x)}{S_{n-k}(x)}$ este o funcţie regulată.

Asupra acestei funcţii putem din nou aplica teorema 1, dacă $S_{n-k}(x)$ are alte rădăcini reale. Constantele $A_1, A_2,\ldots, A_k$ se determină prin metoda coeficienţilor nedeterminaţi: aducând la numitorul comun şi obţinând o identitate dintre două polinoame, egalăm coeficienţii corespunzători de pe lângă $x^0, x^1, x^2, x^3,\ldots, x^{k-1}$ şi obţinem un sistem de *k* ecuaţii de gradul întâi pentru determinarea constantelor $A_1, A_2,\ldots, A_k$. Se poate proceda şi în alt mod: după ce am ajuns la o identitate dintre două polinoame, se dă variabilei *x* diferite valori particulare, de preferinţă de

început cu rădăcinile reale ale polinomului numitor $P_n(x)$. Se obţine din nou un sistem de ecuaţii liniare din care se află constantele $A_1, A_2,\ldots, A_k$.

Teorema 2. Dacă polinomul $P_n(x)=(x^2+px+q)^k\varphi_1(x)$, unde polinomul $\varphi_1(x)$ nu se împarte fără rest la polinomul (x^2+px+q) şi $p^2-4q<0$, atunci funcţia regulată $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ poate fi reprezentată sub formă de sumă a două funcţii regulate

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}+\frac{F_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}\cdot\varphi_1(x)}, \tag{4}$$

unde *M, N* sunt constante reale astfel că $M^2+N^2\neq 0$ şi gradul polinomului $F_1(x)$ este mai mic decât gradul polinomului $(x^2+px+q)^{k-1}\cdot\varphi_1(x)$.

Demonstraţia este asemănătoare celei din teorema 1. Avem următoarea identitate

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}+\frac{Q_m(x)}{(x^2+px+q)^k\cdot\varphi_1(x)}-\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}=$$

$$=\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}+\frac{Q_m(x)-(Mx+N)\cdot\varphi_1(x)}{(x^2+px+q)^k\cdot\varphi_1(x)}, \tag{5}$$

care are loc pentru orice *M* şi *N*. Determinăm *M* şi *N* astfel încât polinomul $Q_m(x)-(Mx+N)\cdot\varphi_1(x)$ să se împartă fără rest la (x^2+px+q). Pentru aceasta este necesar şi suficient ca ecuaţia $Q_m(x)-(Mx+N)\cdot\varphi_1(x)$ să posede aceleaşi rădăcini $(\alpha\pm\beta i)$ ca şi polinomul (x^2+px+q). Prin urmare,

$$Q_m(\alpha+\beta i)-[M(\alpha+\beta i)+N]\cdot\varphi_1(\alpha+\beta i)=0$$

sau $$M(\alpha+\beta i)+N=\frac{Q_m(\alpha+\beta i)}{\varphi_1(\alpha+\beta i)}=K+iL,$$

deoarece, conform ipotezei teoremei , $\varphi_1(\alpha+\beta i)\neq 0$. Egalând aceste două numere complexe, obţinem $M\alpha+N=K$ şi $M\beta=L$, de unde $M=\dfrac{L}{\beta}$ şi $N=\dfrac{K\beta-L\alpha}{\beta}$. Observăm că $\beta\neq 0$, deoarece trinomul x^2+px+q cu $p^2-4q<0$ are două rădăcini complexe $(\alpha\pm\beta i)$. Pentru aceste valori ale constantelor M şi N polinomul $Q_m(x)-(Mx+N)\cdot\varphi_l(x)$ are ca rădăcină numărul complex $\alpha+\beta i$ deci şi numărul complex conjugat $\alpha-\beta i$. Aceasta înseamnă că polinomul $Q_m(x)-(Mx+N)\cdot\varphi_l(x)$ se împarte fără rest la trinomul (x^2+px+q), adică

$$Q_m(x)-(Mx+N)\cdot\varphi_l(x)=(x^2+px+q)\cdot F_l(x).$$

Simplificând ultima fracţie din egalitatea (5) prin (x^2+px+q), obţinem egalitatea (4). Observăm că gradul polinomului $F_l(x)$ este mai mic decât gradul polinomului $\left(x^2+px+q\right)^{k-1}\cdot\varphi_1(x)$, deoarece $m<n$ şi gradul polinomului $\varphi_1(x)$ este mai mic decât m. Prin reducerea la absurd, se constată că $M^2+N^2\neq 0$. Teorema este demonstrată.

Notă. Teorema 2 ne arată că punând în evidenţă un termen de forma $\dfrac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}$, care este o funcţie raţională simplă, putem reduce exponentul factorului (x^2+px+q) din numitor cel puţin cu o unitate. Deci aplicând succesiv teorema 2 de k ori, obţinem

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\frac{M_1x+N_1}{\left(x^2+px+q\right)^k}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^{k-1}}+\ldots+\frac{M_kx+N_k}{x^2+px+q}+\frac{F_k(x)}{\varphi_1(x)},$$

unde $\dfrac{F_k(x)}{\varphi_1(x)}$ este o funcţie regulată, la care pot fi aplicate teoremele 1 sau 2 în dependenţă de faptul că rădăcinile polinomului numitor $\varphi_1(x)$, sunt reale sau complexe.

Aşadar, aplicând teoremele 1 şi 2 la o funcţie regulată $f(x)=\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}, m<n$, putem separa consecutiv toate funcţiile raţionale simple, care corespund tuturor rădăcinilor numitorului $P_n(x)$. Deci, dacă

$$P_n(x)=(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-a_t)^{k_t}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_sx+q_s)^{l_s},$$

atunci funcţia regulată $f(x)=\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ poate fi reprezentată sub forma

$$\begin{aligned}f(x)=&\frac{A_1}{(x-a_1)^{k_1}}+\frac{A_2}{(x-a_1)^{k_1-1}}+\ldots+\frac{A_{k_1}}{x-a_1}+\frac{B_1}{(x-a_2)^{k_2}}+\frac{B_2}{(x-a_2)^{k_2-1}}+\ldots+\\&+\frac{B_{k_2}}{x-a_2}+\ldots+\frac{C_1}{(x-a_t)^{k_t}}+\frac{C_2}{(x-a_t)^{k_t-1}}+\ldots+\frac{C_{k_t}}{x-a_t}+\frac{M_1x+N_1}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1}}+\\&+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1-1}}+\ldots+\frac{M_{l_1}x+N_{l_1}}{x^2+p_1x+q_1}+\ldots+\frac{K_1x+T_1}{\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{l_s}}+\\&+\frac{K_2x+T_2}{\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{l_s-1}}+\ldots+\frac{K_{l_s}x+T_{l_s}}{x^2+p_sx+q_s}.\end{aligned}\tag{6}$$

Constantele

$A_1,\ldots,A_{k_1}, B_1,\ldots,B_{k_2},\ldots,C_1,\ldots,C_{k_t}, M_1, N_1, M_2, N_2,\ldots,M_{l_1}, N_{l_1},\ldots,$ $K_1, T_1, K_2, T_2,\ldots, K_{l_s}, T_{l_s}$ se determină cu ajutorul metodei coeficienţilor nedeterminaţi: aducând fracţiile la numitorul comun (care este întocmai $P_n(x)$) şi egalând aceste două fracţii obţinem identitatea a două polinoame. De aceea egalând coeficienţii de pe lângă puterile lui x: x^0, x^1, x^2, ..., obţinem un sistem de ecuaţii liniare din care se determină constantele $A_1, A_2,\ldots, K_{l_s}, T_{l_s}$.

Se poate proceda şi în alt mod: deoarece polinoamele obţinute după egalitatea acestor două fracţii sunt identice, valorile lor sunt egale pentru orice valori particulare ale necunoscutei x. Dându-i lui x valori particulare (de preferinţă de început cu rădăcinile reale ale polinomului numitor $P_n(x)$), obţinem un sistem de ecuaţii liniare, din care aflăm constantele $A_1, A_2,\ldots, K_{l_s}, T_{l_s}$.

Aşadar, orice funcţie raţională regulată se reprezintă sub formă de o sumă de funcţii raţionale simple (de tipul 1-4).

Exemplu. Să se descompună funcţia raţională

$$f(x)=\frac{3x^4+14x^2+7x+15}{(x+3)(x^2+2)^2}$$

în funcţii raţionale simple.

Funcţia $f(x)$ este raţională regulată, deoarece gradul polinomului de la numărător (care este egal cu 4) este mai mic decât gradul polinomului de la numitor (care este egal cu 5).

Polinomul numitor $P_5(x)=(x+3)(x^2+2)^2$ este deja descompus în factori liniari şi pătratici. Avem un factor liniar $(x+3)$, ceea ce înseamnă că numărul $x_1=-3$ este o rădăcină simplă (k=1) a polinomului numitor şi un factor pătrat (x^2+2), care se repetă de două ori (k=2), ceea ce înseamnă că numerele complexe $(\pm i\sqrt{2})$ sunt rădăcini ale polinomului $P_5(x)$ de multiplicitatea k=2. Prin urmare, aplicând relaţia (6), avem

$$f(x)=\frac{A}{x+3}+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+2)^2}+\frac{M_2x+N_2}{x^2+2}$$

sau $$\frac{3x^4+14x^2+7x+15}{(x+3)(x^2+2)^2}=\frac{A(x^2+2)^2+(M_1x+N_1)(x+3)}{(x+3)(x^2+2)^2}+$$

$$+\frac{(M_2x+N_2)(x+3)(x^2+2)}{(x+3)(x^2+2)^2}.$$

Deci din egalitatea acestor două fracţii cu numitori comuni, obţinem egalitatea polinoamelor

$$3x^4+14x^2+7x+15=A(x^2+2)^2+(M_1x+N_1)(x+3)+$$

$$+(M_2x+N_2)(x+3)(x^2+2).$$

Metoda 1 (metoda coeficienţilor nedeterminaţi).

Avem

$$3x^4+14x^2+7x+15=A(x^4+4x^2+4)+M_1x^2+3M_1x+N_1x+3N_1+$$

$$+M_2x^4+2M_2x^2+3M_2x^3+6M_2x+N_2x^3+2N_2x+3N_2x^2+6N_2.$$

sau

$$3x^4+14x^2+7x+15=(A+M_2)x^4+(3M_2+N_2)x^3+$$

$$+(4A+M_1+2M_2+3N_2)x^2+(3M_1+N_1+6M_2+2N_2)x+$$

$$+(4A+3N_1+6N_2).$$

Egalând coeficienţii de pe lângă puterile necunoscutei x, obţinem următorul sistem de 5 ecuaţii liniare cu cinci necunoscute:

$$\left.\begin{array}{ll} x^4: & 3=A+M_2 \\ x^3: & 0=3M_2+N_2 \\ x^2: & 14=4A+M_1+2M_2+3N_2 \\ x: & 7=3M_1+N_1+6M_2+2N_2 \\ x^0: & 15=4A+3N_1+6N_2 \end{array}\right\}$$

Rezolvând acest sistem prin metoda substituţiei:

$$A=3-M_2,\ N_2=-3M_2,\ M_1=2+11M_2,\ N_1=1-33M_2$$

$$\text{şi } 15=4(3-M_2)+3(1-33M_2)+6(-3M_2),$$

adică $M_2=0$, obţinem $A=3, N_2=0, M_1=2, N_1=1, M_2=0$.

Metoda 2.

Întrucât avem identitatea

$$3x^4+14x^2+7x+15=A(x^2+2)^2+(M_1x+N_1)(x+3)+$$

$$+(M_2x+N_2)(x+3)(x^2+2),$$

valabilă pentru orice valori ale lui x, dăm lui x 5 valori particulare. Începem cu rădăcinile reale ale polinomului numitor $P_5(x)$, adică fie:

1) $x_1=-3$: $3(-3)^4+14(-3)^2+7(-3)+15=A\cdot 11^2+0+0$ sau

$363=121A$, de unde $A=\frac{363}{121}=3$.

Dăm următoarele valori particulare:

2) $x_2=0$: $15=3\cdot 4+3N_1+6N_2$ sau $3N_1+6N_2=3$, de unde $N_1=1-2N_2$

3) $x_3=1$: $39=3\cdot 9+4M_1+4N_1+12M_2+12N_2$ sau
$12=4M_1+4-8N_2+12M_2+12N_2$ adică $2=M_1+3M_2+N_2$.
4) $x_4=-1$: $25=3\cdot 9-2M_1+2N_1-6M_2+6N_2$ sau
$-2=-2M_1+2-4N_2-6M_2+6N_2$, adică
$2=M_1+3M_2-N_2$.
5) $x_5=-2$: $105=3\cdot 36-2M_1+N_1-12M_2+6N_2$ sau
$-3=-2M_1+1-2N_2-12M_2+6N_2$, adică
$2=M_1-2N_2+6M_2$.

Prin urmare, am obţinut următorul sistem:

$$\begin{cases} M_1+3M_2+N_2=2 \\ M_1+3M_2-N_2=2 \\ M_1+6M_2-2N_2=2 \end{cases}$$

Scăzând parte cu parte ecuaţiile 1 şi 2, avem $N_2=0$, iar din ecuaţiile 2 şi 3, având deja $N_2=0$, obţinem $M_2=0$ şi $M_1=2$. Deci

$$A=3,\ M_2=N_2=0,\ M_1=2,\ \text{şi } N_1=1-2N_2=1-0=1.$$

Remarcăm că în cazul acesta metoda 2 este mai raţională decât metoda 1.

Înlocuind valorile constantelor, obţinem următoarea dezvoltare a funcţiei raţionale regulate $f(x)$ în funcţii raţionale simple şi anume $f(x)=\dfrac{3}{x+3}+\dfrac{2x+1}{\left(x^2+2\right)^2}$.

Notă. Nu se poate spune cu siguranţă care din metodele aflării constantelor necunoscute din dezvoltarea funcţiei raţionale în funcţii raţionale simple este mai raţională. Totuşi, în cazul factorilor simpli liniari, cea mai raţională este metoda valorilor intermediare, valori care coincid cu rădăcinile reale ale polinomului-numitor. În cazul factorilor simpli pătratici cea mai raţională este metoda coeficienţilor nedeterminaţi. În exemple mai complicate – combinaţia lor sau alte procedee netradiţionale (a se consulta exemplul din capitolul 4, de la sfârşitul paragrafului 4.1.3).

Capitolul 4

CALCULUL INTEGRAL AL FUNCŢIEI DE O SINGURĂ VARIABILĂ REALĂ

4.1. Integrala nedefinită

4.1.1. Primitiva şi integrala nedefinită

Una din problemele fundamentale ale calculului diferenţial este aflarea derivatei unei funcţii date. Diverse probleme ale analizei matematice şi ale multiplelor sale aplicaţii în geometrie, mecanică şi tehnică conduc la problema inversă: fiind dată funcţia $f(x)$, să se afle o astfel de funcţie $F(x)$ încât derivata ei să fie egală cu funcţia $f(x)$, adică restabilirea funcţiei când este dată derivata sau diferenţiala acesteia.

Definiţia 1. Funcţia $F(x)$ se numeşte *primitiva* funcţiei $f(x)$ pe domeniul $D\subseteq R$, dacă ea este derivabilă pe D şi

$$\forall x\in D: F'(x)=f(x)$$

sau, ceea ce este acelaşi lucru,

$$\forall x\in D: dF(x)=f(x)dx.$$

Problema determinării primitivei unei funcţii date $f(x)$ se rezolvă neunivoc. Într-adevăr, dacă $F(x)$ este o primitivă pentru $f(x)$, adică $F'(x)=f(x)$, atunci $F(x)+C$, unde C este o constantă arbitrară reală, este de asemenea primitivă a funcţiei $f(x)$, deoarece $[F(x)+C]'=F'(x)+C'=f(x)+0=f(x)$. De exemplu, pentru funcţia $f(x)=4x^3$, funcţiile $F(x)=x^4$, $G_1(x)=x^4+1$, $G_2(x)=x^4-\sqrt{3}$ şi, în general, $G(x)=x^4+C$, unde C - orice număr real, sunt primitive pentru funcţia $f(x)$.

Aşadar, dacă funcţia $f(x)$ are o primitivă $F(x)$, atunci această funcţie are o infinitate de funcţii primitive, anume $F(x)+C$, unde C este o constantă arbitrară.

Are loc şi propoziţia inversă: dacă *F(x)* este o primitivă a funcţiei *f(x)*, atunci orice altă primitivă a ei se conţine în familia $\{F(x)+C\}$, adică are forma $F(x)+C$, unde C este un număr real. Într-adevăr, dacă $\Phi(x)$ este o altă primitivă a funcţiei $f(x)$ pe D, atunci avem $\Phi'(x)=F'(x)=f(x)$ pentru orice $x \in D$. În virtutea consecinţei 4 a teoremei Lagrange din 2.4.3, obţinem

$$\Phi(x)-F(x)=C=const,$$

adică $\Phi(x)=F(x)+C$ pentru orice $x \in D$.

Aşadar, totalitatea (familia) de funcţii $F(x)+C$, unde $F(x)$ este o primitivă a funcţiei $f(x)$ pe D, iar C o constantă arbitrară, epuizează mulţimea tuturor primitivelor funcţiei $f(x)$ pe D.

***Definiţia** 2.* Totalitatea (familia) de funcţii $F(x)+C$, unde *F(x)* este o primitivă a funcţiei $f(x)$ pe D, iar C o constantă arbitrară, se numeşte *integrală nedefinită a funcţiei* $f(x)$ *pe* D şi se notează astfel $\int f(x)dx$ (se citeşte "integrala ef de ics de ics").

În acest caz $f(x)$ se numeşte *funcţie de sub integrală*, $f(x)dx$ - *expresie de sub integrală*, simbolul $\int$ se numeşte *semnul integralei nedefinite*, iar variabila x - *variabilă de integrare*.

Aşadar, conform definiţiei,

$$\int f(x)dx = F(x)+C, \tag{1}$$

unde $F(x)$ este o primitivă oarecare a funcţiei $f(x)$, iar C - o constantă arbitrară. Remarcăm că constanta C din formula (1) poate fi reprezentată sub diferite forme: $C=\ln C_1$, unde $C_1>0$ sau $C=\frac{C_1}{a}$, unde $a \neq 0$, sau $C=C_1 \pm C_2$ etc.

În unele cazuri simbolul $\int f(x)dx$ va însemna şi orice element din mulţimea $\{F(x)+C\}$, adică o oarecare primitivă a funcţiei $f(x)$.

Restabilirea funcţiei, fiind dată derivata acesteia, sau, ceea ce este acelaşi lucru, determinarea integralei nedefinite, fiind dată funcţia de sub integrală, se numeşte *integrarea* acestei funcţii. Evident că integrala nedefinită nu depinde de variabila de integrare, ci depinde numai de funcţia de integrare.

Din punct de vedere geometric integrala nedefinită reprezintă o totalitate (o familie) de curbe fiecare fiind obţinută prin translaţia uneia din ele $(y=F(x))$ în sus sau în jos, adică în direcţia axei OY. În acest paragraf nu se va discuta întrebarea despre existenţa primitivelor (şi deci şi a integralelor nedefinite) pentru diferite clase de funcţii. Să notăm că în paragraful următor va fi demonstrată existenţa primitivei pe un segment (şi deci şi a integralei nedefinite) pentru orice funcţie continuă pe acest segment (teorema 1 din 4.2.4).

Remarcăm următoarele proprietăţi ale integralei nedefinite (dacă, bineînţeles, ea există).

Proprietatea 1. $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$.

Într-adevăr, conform formulei (1), avem

$$\left(\int f(x)dx\right)'=\left[F(x)+C\right]'=F'(x)+C'=f(x)+0=f(x).$$

Prin urmare, dacă la funcţia $f(x)$ se aplică mai întâi operaţia de integrare, apoi operaţia de derivare, se obţine funcţia $f(x)$ or derivata integralei nedefinite este egală cu funcţia de sub semnul integralei.

Proprietatea 2. $d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx$.

Deoarece $F'(x)=f(x)$, din formula (1) avem

$$d\left(\int f(x)dx\right)=d(F(x)+C)=dF(x)+dC=F'(x)dx+0dx=f(x)dx.$$

Astfel, diferenţiala integralei nedefinite este egală cu expresia de sub semnul integralei.

Proprietatea 3. $\int F'(x)dx = F(x) + C$.

*Demonstrație.*Evident că funcția F(x) este o primitivă a funcției F′(x).Prin urmare, conform definiției 2, obținem

$$\int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C,$$

adică integrala nedefinită a derivatei unei funcții este egală cu această funcție plus o constantă arbitrară.

Exemple.

1) $\int 0 \cdot dx = \int d0 = 0 + C = C$;

2) $\int 1 \cdot dx = \int dx = x + C$;

3) $\int (4x^3 + 3)dx = \int (x^4 + 3x)' dx = x^4 + 3x + C$;

4) $\int e^{2x}dx = \int \left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)' dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$;

5) $\int \frac{ln^3 x}{x}dx = \int \left(\frac{1}{4}ln^4 x\right)' dx = \frac{1}{4}ln^4 x + C, x > 0$;

6) $\int sin^3 x \cdot cos\, x dx = \int \left(\frac{1}{4}sin^4 x\right)' dx = \frac{1}{4}sin^4 x + C$;

7) $\int ctgx dx = \int \frac{cos\, x dx}{sin\, x} = \int (ln|sin\, x|)' dx = ln|sin\, x| + C =$

$= \ln|\sin x| + \ln C_1 = \ln(C_1|\sin x|), C_1 > 0, x \neq \pi k, k \in Z$.

Proprietatea 4. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$, adică integrala nedefinită a unei sume algebrice a două funcții este egală cu suma algebrică a integralelor nedefinite ale acestor funcții.

Într-adevăr, fie $\int f(x)dx = F(x) + C_1$ și $\int g(x)dx = G(x) + C_2$.

Observăm că funcția $[f(x) \pm g(x)]$ are ca primitivă funcția $F(x) \pm G(x)$, deoarece

$$[F(x) \pm G(x)]' = [F(x)]' \pm [G(x)]' = f(x) \pm g(x).$$

Deci

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = [F(x) \pm G(x)] + C = [F(x) \pm G(x)] + (C_1 \pm C_2) =$$

$$= [F(x) + C_1] \pm [G(x) + C_2] = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Evident că această proprietate prin recurență poate fi extinsă asupra unei sume finite de funcții, ce au primitive, adică

$$\int \left[\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\right]dx = \sum_{i=1}^{n} \int f_i(x)dx.$$

Proprietatea 5. $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$, $k \neq 0$, $k \in R$, adică factorul constant se scoate de sub semnul integralei nedefinite.

Demonstrație. Fie $\int f(x)dx = F(x) + C$. Atunci funcția $kF(x)$ este o primitivă a funcției $kf(x)$, deoarece

$$[kF(x)]' = k[F(x)]' = kf(x).$$

Deci

$$\int kf(x)dx = kF(x) + C = kF(x) + k \cdot C_1 = k[F(x) + C_1] = k\int f(x)dx.$$

Notă. Pentru $k = 0$ egalitatea $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ nu este adevărată, deoarece

$$\int 0 \cdot f(x)dx = \int 0 \cdot dx = 0 + C = C, \quad \text{iar } 0 \cdot \int f(x)dx = 0.$$

Conform definiției 2, operația de integrare, adică calcularea integralelor nedefinite, este reciproc inversă operației de derivare, adică calcularea derivatei unei funcții sau, ceea ce este același lucru, a operației de diferențiere, adică calcularea diferențialei acestei funcții (cu o exactitate de o constantă arbitrară C).

De aceea orice formulă, care exprimă derivata unei funcții, adică orice formulă de forma $F'(x) = f(x)$, poate fi reprezentată sub formă de integrală nedefinită:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Așadar, pentru a verifica corectitudinea unei formule, ce exprimă integrala nedefinită a unei funcții, este suficient să derivăm rezultatul și să obținem funcția de sub integrală.

Din definiția integralei nedefinite și a tabelului formulelor de derivare (vezi 2.1.8) rezultă următorul tabel.

Tabel al integralelor nedefinite a unor funcții elementare de bază:

1. $\int 0 \cdot dx = C$;
2. $\int dx = x + C$;
3. $\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$, $r \neq -1$, $r \in R$;
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$, $x \neq 0$;
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0$, $a \neq 1$.

   Caz particular: $\int e^x dx = e^x + C$;
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;
7. $\int \cos x dx = \sin x + C$;
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$, $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in Z$;
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$, $x \neq \pi k$, $k \in Z$;
10. $\int \mathrm{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$, $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in Z$;
11. $\int \mathrm{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$, $x \neq \pi k$, $k \in Z$;
12. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$, $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in Z$;
13. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$, $x \neq \pi k$, $k \in Z$;
14. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{x}{a} + C_1 = -\frac{1}{a} \mathrm{arcctg} \frac{x}{a} + C_2$, $a \neq 0$;

Caz particular:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \mathrm{arctg} x + C_1 = -\mathrm{arcctg} x + C_2;$$

15. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$, $a \neq 0$, $x \neq \pm a$;
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C_1 = -\arccos\frac{x}{a} + C_2$, $|x| < |a|$, $a \neq 0$;

    Caz particular:

    $$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C_1 = -\arccos x + C_2, \ |x| < 1;$$
17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C$, $a \neq 0$;
18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C$, $|x| > |a|$, $a \neq 0$;
19. $\int \mathrm{sh} x dx = \mathrm{ch} x + C$;
20. $\int \mathrm{ch} x dx = \mathrm{sh} x + C$;
21. $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth} x + C$, $x \neq 0$;
22. $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th} x + C$;
23. $\int \mathrm{th} x dx = \ln \mathrm{ch} x + C$;
24. $\int \mathrm{cth} x dx = \ln|\mathrm{sh} x| + C$, $x \neq 0$;

Să demonstrăm, de exemplu, formula 17.

Avem

$$\left[\ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)\right]' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} \left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)' =$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+a^2}}\cdot 2x\right)=$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}},$$

ceea ce trebuia de demonstrat.

Cu ajutorul acestor formule şi a proprietăţilor 1 – 5, pot fi calculate integralele nedefinite de la funcţii elementare cu mult mai complicate.

Exemplul 8. Să se calculeze integrala:

$$\int\left(5\cos x+7x^2-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2+2}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx.$$

Avem

$$\int\left(5\cos x+7x^2-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2+2}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx=$$

$$=5\int\cos x dx+7\int x^2dx-\int\frac{dx}{x}+4\int\frac{dx}{x^2+2}-\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=5\sin x+C_1+\frac{7}{3}x^3+C_2-\ln|x|+C_3+$$

$$+\frac{4}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C_4-\arcsin x+C_5=$$

$$=5\sin x+\frac{7}{3}x^3-\ln|x|+2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{2}-\arcsin x+C,$$

unde $C=C_1+C_2+C_3+C_4+C_5$.

Notă. Întrucât calcularea integralei nedefinite se reduce la calcularea unei primitive şi apoi se adaugă constanta arbitrară C, convenim pe parcurs, pentru a simplifica calculele, să omitem constantele arbitrare din integralele intermediare şi, în final, la primitiva concretă să adăugăm constanta arbitrară C.

Exemplul 9. Să se arate că pentru orice polinom de gradul n există primitiva lui, care este un polinom de gradul $(n+1)$. Într-adevăr,

$$\int P_n(x)dx=\int\left(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n\right)\cdot dx=$$

$$=a_0\int x^ndx+a_1\int x^{n-1}dx+\ldots+a_{n-1}\int xdx+a_n\int dx=$$

$$=\frac{a_0}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_1}{n}x^n+\ldots+\frac{a_{n-1}}{2}x^2+a_nx+C.$$

Menţionăm următoarele: derivata unei funcţii elementare este întotdeauna o funcţie elementară. Spre deosebire de aceasta, primitiva unei funcţii elementare nu întotdeauna poate fi reprezentată cu ajutorul unui număr finit de funcţii elementare, adică nu întotdeauna este o funcţie elementară. Asupra acestei întrebări vom reveni în paragraful 4.1.6.

Vom spune că integrala $\int f(x)dx$ *se exprimă cu ajutorul unui număr finit de funcţii elementare* sau, ceea ce este acelaşi lucru, funcţia *f(x)* poate fi integrată dacă primitiva funcţiei f este o funcţie elementară.

4.1.2. Metoda substituţiei şi integrarea prin părţi

Calcularea integralelor nedefinite prin utilizarea nemijlocită a proprietăţilor 1 – 5 şi a tabelului de integrale se numeşte *integrare directă.*

Funcţiile care se integrează direct nu epuizează nici funcţiile elementare de bază, nemaivorbind despre funcţiile compuse. De exemplu, printre integralele din tabel nu există integrale de la funcţiile elementare de bază $\ln x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$ etc.

Problema integrării este principial mai dificilă decât problema derivării. În calculul diferenţial sunt date definiţia constructivă a derivatei

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

şi un şir de teoreme, care ne dau regulile de derivare a sumei, produsului, câtului, funcţiilor: compuse, inverse, parametrice, implicite. În calculul integralei nedefinite nu avem o definiţie constructivă a integralei nedefinite, nu avem reguli de integrare a produsului, a câtului, a funcţiilor compuse, inverse şi implicite. Se dau numai unele metode, care permit integrarea câtorva clase de funcţii. Vom studia acum aceste metode.

În multe cazuri introducerea unei noi variabile de integrare ne permite să reducem calcularea integralei date la calcularea unei integrale din tabel, adică se poate trece la o integrare directă sau a unei integrale, care se poate calcula prin una din metodele deja cunoscute. Această metodă se numeşte *metoda substituţiei* sau *metoda schimbării de variabilă*, care se bazează pe derivarea funcţiei compuse.

Teorema 1. Fie funcţia $x=\varphi(t)$ monotonă şi derivabilă pe domeniul D şi fie V mulţimea de valori ale funcţiei φ, pe care e definită funcţia f. Dacă pe mulţimea V funcţia $f(x)$ admite primitivă, atunci pe mulţimea D e valabilă formula

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt. \tag{1}$$

Demonstraţie. Fie $F(x)$ primitiva funcţiei $f(x)$ pe V, adică $\int f(x)dx=\int F'(x)dx=F(x)+C$. În virtutea derivării funcţiei compuse $F(\varphi(t))$ pe D, avem

$$[F(\varphi(t))]_t'=F'(x)\cdot x_t'=f(x)\cdot x_t'=f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t).$$

Deci $\quad \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F(\varphi(t))+C.$

Deoarece $F(\varphi(t))=F(x)$, avem $\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$ şi teorema este demonstrată.

Formula (1) se numeşte formula *schimbării de variabilă* într-o integrală nedefinită.

Înlocuind, după formula (1), variabila de integrare x din $\int f(x)dx$ cu o funcţie de t: $x=\varphi(t)$, vom reduce calcularea

integralei $\int f(x)dx$ la calcularea integralei $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$. După calcularea acestei integrale trebuie să revenim din nou la variabila x, înlocuind variabila t prin funcţia $\varphi^{-1}(x)$, care există numai în cazul când $x=\varphi(t)$ este monotonă pe D (vezi ipoteza teoremei 1).

Schimbarea de variabilă în integrala nedefinită se face mai des după formula (1), citită de la dreapta la stânga, adică scrisă în forma

$$\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx=\int f(t)dt$$

unde $t=\varphi(x)$. În acest caz funcţia $\varphi(x)$, luată drept noua variabilă t, trebuie să fie de aşa natură, ca funcţia ei inversă $x=\varphi^{-1}(t)$ să satisfacă ipoteza teoremei 1.

Consecinţă. $\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$, unde $F(t)$ este o primitivă a funcţiei $f(t)$ şi $a\neq 0, a\in R, b\in R$.

Să notăm că alegerea reuşită a substituţiei prezintă, de obicei, dificultăţi. Pentru învingerea lor e necesară deprinderea bună a tehnicii derivării, cunoaşterea perfectă a integralelor din tabel şi posibilitatea de a aprecia ce ne va da fiecare substituţie în parte.

Exemple. Să se calculeze integralele date.

1. $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$, $a>0$, $|x|\le a$.

Facem substituţia: $x=a\sin t$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, care este o funcţie monotonă crescătoare (pentru existenţa funcţiei inverse $t=\arcsin\frac{x}{a}$) şi derivabilă pe $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Deci

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=|a|\sqrt{\cos^2 t}=|a|\cdot|\cos t|=a\cos t$$

deoarece $a>0$ şi $\cos t>0$ pentru orice $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Folosind formula (1), avem

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\left|\begin{array}{l}x=a\sin t\\ dx=a\cos t\,dt\\ a>0,t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\end{array}\right|=\int a\cos t\cdot a\cos t\,dt=$$

$$=a^2\int\cos^2 t\,dt=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{a^2}{2}\left(\int dt+\int\cos 2t\,dt\right)=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left[t+\int d\left(\frac{1}{2}\sin 2t\right)\right]=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=$$

$$=\frac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t)+C=\frac{a^2}{2}\left(t+\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}\right)+C=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)+C=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\left(a^2\arcsin\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}\right)+C.$$

2. $I_1=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$, $ax^2+bx+c\neq 0$, $a\neq 0$.

Avem

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)=$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{(-\Delta)}{4a^2}\right].$$

Facem substituţia $x+\frac{b}{2a}=t$, de unde $x=t-\frac{b}{2a}$.

Notăm $\frac{(-\Delta)}{4a^2}=\pm k^2$, unde semnul "+" se ia dacă expresia notată este pozitivă, adică $\Delta<0$, ceea ce înseamnă că trinomul pătrat are rădăcini complexe. Semnul "–" se ia când expresia este negativă, adică $\Delta>0$, ceea ce înseamnă că trinomul pătrat are rădăcini reale. Dacă însă trinomul pătrat are rădăcini reale duble, atunci $\Delta=0$ şi $k=\frac{(-\Delta)}{4a^2}=0$.

Folosind formula (1), obţinem

$$I_1=\int\frac{dx}{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm k^2\right]}=\left|\begin{array}{l}x+\frac{b}{2a}=t\\ x=t-\frac{b}{2a}\\ dx=dt\end{array}\right|=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2\pm k^2}.$$

Prin urmare,

a) dacă trinomul pătrat ax^2+bx+c are rădăcini complexe, atunci integrala

$$I_1=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2+k^2}$$

se reduce la formula (14) din tabel;

b) dacă trinomul pătrat are rădăcini reale distincte, atunci integrala

$$I_1=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2-k^2}$$

se reduce la formula (15) din tabel;

c) dacă trinomul pătrat are rădăcini reale duble, atunci integrala

$$I_1=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2}=\frac{1}{a}\int t^{-2}dt$$

se reduce la formula (3) din tabel.

3. $I_2=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $ax^2+bx+c>0$, $a\neq 0$.

Cu ajutorul transformărilor aplicate în exemplul precedent, obţinem următoarele:

$$I_2=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2\pm k^2}},\qquad \text{dacă } a>0$$

şi $$I_2=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int\frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}},\qquad \text{dacă } a<0.$$

Prin urmare,

a) dacă trinomul pătrat ax^2+bx+c are rădăcini complexe $(\Delta<0)$ şi $a>0$, atunci integrala

$$I_2=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+k^2}}$$

se reduce la formula (17) din tabel;

b) dacă trinomul pătrat ax^2+bx+c are rădăcini reale distincte, atunci

I) $I_2=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-k^2}}$, dacă $a>0$ şi deci integrala se reduce la formula (18) din tabel;

II) $I_2=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int\frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}}$, dacă $a<0$ şi deci integrala se reduce la formula (16) din tabel.

4. $I_3=\int\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx$, $ax^2+bx+c\neq 0$, $a\neq 0$.

Cu ajutorul transformărilor din exemplul 2 de mai sus, aplicând formula (1), obţinem

$$I_3=\int\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx=\frac{1}{a}\int\frac{(Mx+N)dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm k^2}=\left|\begin{array}{l}x+\frac{b}{2a}=t\\ x=t-\frac{b}{2a}\\ dx=dt\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{a}\int\frac{M\left(t-\frac{b}{2a}\right)+N}{t^2\pm k^2}dt=\frac{1}{a}\left[M\int\frac{tdt}{t^2\pm k^2}+\left(N-\frac{Mb}{2a}\right)\int\frac{dt}{t^2\pm k^2}\right].$$

Cercetăm următoarele cazuri:

a) dacă trinomul pătrat ax^2+bx+c are rădăcini complexe, atunci integrala

$$I_3=\frac{1}{a}\left[M\int d\left(\frac{1}{2}\ln\left(t^2+k^2\right)\right)+\left(N-\frac{Mb}{2a}\right)\int\frac{dt}{t^2+k^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{a}\left[\frac{M}{2}\ln\left(t^2+k^2\right)+\left(N-\frac{Mb}{2a}\right)\int\frac{dt}{t^2+k^2}\right]$$

se reduce la formula (14) din tabel;

b) dacă trinomul pătrat ax^2+bx+c are rădăcini reale distincte, atunci integrala

$$I_3=\frac{1}{a}\left[\frac{M}{2}\ln\left|t^2-k^2\right|+\left(N-\frac{Mb}{2a}\right)\int\frac{dt}{t^2-k^2}\right],$$

se reduce la formula (15) din tabel;

c) dacă trinomul pătrat ax^2+bx+c are rădăcini reale duble, atunci $k=0$ şi integrala

$$I_3=\frac{1}{a}\left[M\int\frac{tdt}{t^2+0}+\left(N-\frac{Mb}{2a}\right)\int\frac{dt}{t^2+0}\right]=$$

$$=\frac{1}{a}\left[M\ln|t|+\left(N-\frac{Mb}{2a}\right)\int t^{-2}dt\right],$$

se reduce la formula (3) din tabel.

5. $I_4=\int\frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, $ax^2+bx+c>0$, $a\neq 0$.

Substituţia $ax^2+bx+c=t$ reduce această integrală la integrala I_2 din exemplul 3 de mai sus şi formula (3) din tabel. Într-adevăr,

$$I_4=\int\frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\left|\begin{array}{l}ax^2+bx+c=t\\(2ax+b)dx=dt\end{array}\right|=\int\frac{\frac{M}{2a}(2ax+b)-\frac{Mb}{2a}+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=$$

$$=\frac{M}{2a}\int\frac{(2ax+b)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+\left(N-\frac{Mb}{2a}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=$$

$$=\frac{M}{2a}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}+\left(N-\frac{Mb}{2a}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=$$

$$=\frac{M}{2a}\int t^{-\frac{1}{2}}dt+\left(N-\frac{Mb}{2a}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

La calcularea primei integrale aplicăm formula (3) din tabel, iar integrala a doua este o integrală de tipul I_2 din exemplul 3 de mai sus.

Prin urmare,

$$I_4=\frac{M}{a}\sqrt{ax^2+bx+c}+\left(N-\frac{Mb}{2a}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

6. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$, $a\neq 0$.

Facem substituţia $\sqrt{x^2+a^2}+x=t$, de unde

$$dt=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}+1\right)dx=\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=t\cdot\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

Prin urmare, $\frac{dt}{t}=\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$ şi deci

$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C$, ceea ce demonstrează formula 17 din tabel.

Similar, pentru integrala $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$, $a\neq 0$, $|x|>|a|$, făcând

substituţia $\sqrt{x^2-a^2}+x=t$, obţinem $\frac{dt}{t}=\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

Prin urmare,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C,$$

ceea ce demonstrează formula (18) din tabel.

7. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$.

Avem

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}=\left|\begin{array}{l}x=\frac{1}{t}\\dx=-\frac{dt}{t^2}\end{array}\right|=-\int\frac{tdt}{\sqrt{t^2+1}}=-\int d\left(\sqrt{1+t^2}\right)=-\sqrt{1+t^2}+C=$$

$$=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C.$$

Trecem acum la cea de-a doua metodă tradiţională de calculare a integralelor nedefinite şi anume la integrarea prin părţi. Această metodă este bazată pe utilizarea formulei de derivare (sau diferenţiere) a produsului a două funcţii.

Teorema 2. Fie funcţiile $u=u(x)$ şi $v=v(x)$ derivabile pe domeniul D şi fie că funcţia $u'v$ posedă primitivă pe acest domeniu. Atunci funcţia uv' de asemenea posedă primitivă pe D şi

$$\int udv=uv-\int vdu \qquad (2)$$

sau $\int u(x)v'(x)dx=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)dx.$

Demonstraţie. Din egalitatea

$$d(uv)=vdu+udv$$

rezultă relaţia $udv=d(uv)-vdu$.

În baza proprietăţii 4 din 4.1.1, avem

$$\int udv=\int d(uv)-\int vdu.$$

Integrala din partea dreaptă există, deoarece $\int d(uv) = \int (uv)' dx = uv + C$ (a se consulta proprietatea 3 din 4.1.1), iar $\int v du$ există conform ipotezei teoremei: funcţia vu' posedă primitivă pe D.

Prin urmare, integrala $\int u dv$ există şi

$$\int u dv = uv - \int v du$$

sau, întrucât $du = u'dx$ şi $dv = v'dx$, obţinem

$$\int uv' dx = uv - \int vu' dx.$$

Teorema este demonstrată.

Formula (2) se numeşte *formula integrării prin părţi*. Această formulă reduce calcularea integralei $\int u dv$ la calcularea integralei $\int v du$, care poate fi mai simplă.

Considerăm următoarele exemple.

Exemplul 8. Să se calculeze integrala $\int x \cdot e^x dx$.

Notăm $u = x$ şi $dv = e^x dx$, de unde $du = dx$ şi $v = \int e^x dx = e^x$.

Prin urmare, folosind formula (2), obţinem

$$\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^x dx}_{dv} = \left| \begin{matrix} x = u \\ du = dx \\ e^x dx = dv \\ v = \int e^x dx = e^x \end{matrix} \right| = uv - \int v du = xe^x - \int e^x dx =$$

$$= xe^x - e^x + C = e^x (x - 1) + C.$$

Observăm că dacă am fi notat $u = e^x$ şi $dv = xdx$, şi deci $du = e^x dx$, $v = \int xdx = \frac{x^2}{2}$, am fi obţinut

$$\int xe^x \mathrm{d}x = \int \underbrace{e^x}_{u} \cdot \underbrace{xdx}_{dv} = \left| \begin{matrix} u = e^x \\ du = e^x dx \\ xdx = dv \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = uv - \int v du =$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot e^x - \int \frac{x^2}{2} e^x dx = \frac{x^2}{2} \cdot e^x - \frac{1}{2} \int x^2 e^x dx.$$

Prin urmare, calcularea integralei iniţiale se reduce la calcularea integralei $\int x^2 e^x dx$, care este cu mult mai complicată decât cea iniţială.

Notă. 1. Nu orice alegere a funcţiilor $u = u(x)$ şi $v = v(x)$ reduce integrala iniţială la o integrală mai simplă.

2. În procesul integrării prin părţi notăm $dv = g(x)dx$ şi obţinem $v = \int g(x)dx$ (în cazul de mai sus am avut $dv = e^x dx$ şi $v = \int e^x dx$ sau $dv = xdx$ şi $v = \int xdx$). Aici constanta C se consideră întotdeauna egală cu zero, deoarece pentru rezolvarea problemei este suficientă o singură primitivă, iar în rezultatul final pentru a avea întreaga familie de primitive se include constanta aditivă C.

Exemplul 9. Să calculăm $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ cu ajutorul formulei (2) a integrării prin părţi, cu toate că mai sus (exemplul 1) această integrală a fost calculată deja cu ajutorul formulei (1) a metodei substituţiei.

$$\text{Deci } I = \int \underbrace{\sqrt{a^2 - x^2}}_{u} \underbrace{dx}_{dv} = \left| \begin{matrix} u = \sqrt{a^2 - x^2} \\ du = -\dfrac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ dx = dv \\ v = \int dx = x \end{matrix} \right| = uv - \int v du =$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} - \int \frac{\left(-x^2\right)}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = x\sqrt{a^2-x^2} - \int \frac{a^2-x^2-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx =$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} - \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} =$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} - \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx + a^2 \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

Aici am folosit formula (16) din tabel.

Prin urmare,

$$I = \left(a^2 \arcsin\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2}\right) - I + C, \text{ adică}$$

$$2I = \left(a^2 \arcsin\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2}\right) + C,$$

de unde $\quad I = \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(a^2 \arcsin\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2}\right) + C_1.$

Exemplul 10. Uneori formula (2) ca, de altfel, şi formula (1), se aplică de mai multe ori mai ales în formule recurente.

Fie $I_n = \int \frac{dx}{\left(x^2+k^2\right)^n}$, $n \in N$, $k \neq 0$.

Dacă $n=1$, atunci $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+k^2}$ coincide cu formula 14 din tabel.

Fie $n>1$. Avem

$$I_n = \int \frac{dx}{\left(x^2+k^2\right)^n} = \frac{1}{k^2}\int \frac{k^2}{\left(x^2+k^2\right)^n}dx = \frac{1}{k^2}\int \frac{\left(x^2+k^2\right)-x^2}{\left(x^2+k^2\right)^n}dx =$$

$$= \frac{1}{k^2}\left[\int \frac{dx}{\left(x^2+k^2\right)^{n-1}} - \int \frac{x^2dx}{\left(x^2+k^2\right)^n}\right] = \frac{1}{k^2}\left[I_{n-1} - \int \frac{x^2dx}{\left(x^2+k^2\right)^n}\right].$$

Vom arăta ca integrala $\int \frac{x^2dx}{\left(x^2+k^2\right)^n}$ se reduce la o integrală de forma I_{n-1}. Într-adevăr,

$$\int \frac{x^2dx}{\left(x^2+k^2\right)^n} = \int \frac{x\cdot xdx}{\left(x^2+k^2\right)^n}.$$

Notăm $u = x$ şi $dv = \frac{xdx}{\left(x^2+k^2\right)^n}$, de unde $du = dx$ şi

$$v = \int \frac{xdx}{\left(x^2+k^2\right)^n} = \left| \begin{array}{l} x^2+k^2 = t \\ dt = 2xdx \\ xdx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^n} = \frac{1}{2}\int t^{-n}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-n+1}}{1-n} = \frac{1}{2(1-n)t^{n-1}} = \frac{1}{2(1-n)}\cdot\frac{1}{\left(x^2+k^2\right)^{n-1}}.$$

Aplicând formula (2), obţinem

$$\int \frac{x^2dx}{\left(x^2+k^2\right)^n} = uv - \int vdu = \frac{x}{2(1-n)}\cdot\frac{1}{\left(x^2+k^2\right)^{n-1}} -$$

$$- \int \frac{1}{2(1-n)}\cdot\frac{dx}{\left(x^2+k^2\right)^{n-1}} = \frac{x}{2(1-n)\left(x^2+k^2\right)^{n-1}} + \frac{1}{2n-2}\cdot I_{n-1}.$$

Prin urmare,

$$I_n = \frac{1}{k^2}\left[I_{n-1} - \frac{x}{2(1-n)\left(x^2+k^2\right)^{n-1}} - \frac{1}{2n-2}\cdot I_{n-1}\right] =$$

$$= \frac{1}{k^2}\left[\frac{2n-3}{2n-2}\cdot I_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)\left(x^2+k^2\right)^{n-1}}\right]. \tag{3}$$

Formulele de forma (3) se numesc *formule recurente.*

Să aplicăm formula recurentă (3) la calcularea integralei $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3}$.

Avem $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3} = \frac{1}{1}\left[\frac{3}{4}\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2} + \frac{x}{4\left(x^2+1\right)^2}\right] =$

$$=\frac{3}{4}\left[\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}+\frac{x}{2(x^2+1)}\right]+\frac{x}{4(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{3}{8}arctgx+\frac{3x}{8(x^2+1)}+\frac{x}{4(x^2+1)^2}+C.$$

Exemplul 11. Fie $\int e^x\cos xdx$. Notăm $e^x=u_1$ şi $cosxdx=dv_1$. Atunci $du_1=e^xdx$ şi $v_1=\int cosxdx=sinx$.

Deci

$$\int\underbrace{e^x}_{u_1}\underbrace{\cos xdx}_{dv_1}=\left|\begin{matrix}e^x=u_1\\ du_1=e^xdx\\ \cos xdx=dv_1\\ v_1=\sin x\end{matrix}\right|=u_1v_1-\int v_1du_1=e^x\sin x-\int\underbrace{e^x}_{u_2}\underbrace{\sin xdx}_{dv_2}=$$

$$=\left|\begin{matrix}e^x=u_2\\ du_2=e^xdx\\ \sin xdx=dv_2\\ v_2=-\cos x\end{matrix}\right|=e^x\sin x-\left(u_2v_2-\int v_2du_2\right)=e^x\sin x-$$

$$-\left(-e^x\cos x+\int e^x\cos xdx\right)=e^x(\sin x+\cos x)-\int e^x\cos xdx+C.$$

Prin urmare, $\int e^x\cos xdx=e^x(\sin x+\cos x)-\int e^x\cos xdx+C$,

de unde $\quad 2\int e^x\cos xdx=e^x(\sin x+\cos x)+C$,

adică $\quad \int e^x\cos xdx=\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+C_1$.

Similar pot fi calculate integralele de forma

$$I_1=\int e^{ax}\cos bxdx=\frac{e^{ax}(b\sin bx+a\cos bx)}{a^2+b^2}+C,$$

$$I_2=\int e^{ax}\sin bxdx=\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}+C.$$

Notă. Metoda integrării prin părţi este unica metodă la calcularea următoarelor integrale, pe care le vom împărţi în trei categorii.

1. Integrale în care funcţia de sub integrală conţine ca factor una din următoarele funcţii elementare de bază: $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\mathrm{arctg}x$, $\mathrm{arcctg}x$ la puterea $n=1,2,3\ldots$. Pentru a calcula aceste integrale se foloseşte formula (2) de n ori ($n=1,2,3\ldots$), considerând de fiecare dată în calitate de funcţia $u=u(x)$ funcţia respectivă. De exemplu, pentru a calcula $\int\mathrm{arctg}xdx$, se utilizează formula (2) o dată punând $u=\mathrm{arctg}x\ (dv=dx)$, iar pentru a calcula $\int(lnx)^3\cdot x^5dx$ se utilizează formula (2) de trei ori punând pe rând $u_1=(\ln x)^3$, $u_2=(lnx)^2$ şi $u_3=\ln x$.
2. Integrale de forma $\int x^n\cdot e^xdx$, $\int x^n\cdot\cos xdx$, $\int x^n\cdot\sin xdx$, $n\in N$. Aici de asemenea folosim formula (2) de n ori, notând de fiecare dată succesiv $u_1=x^n$, $u_2=x^{n-1}$, ..., $u_n=x$.
3. Integrale de forma $\int e^{ax}\cos bxdx$, $\int e^{ax}\sin bxdx$, $\int\sin(\ln x)dx$, $\int\cos(\ln x)dx$. Notând fiecare din integralele acestea prin I şi utilizând de două ori succesiv formula (2), obţinem o ecuaţie liniară în raport cu I. Rezolvând-o, căpătăm valoarea integralei respective (a se consulta ex. 11 de mai sus).

4.1.3. Integrarea funcţiilor raţionale

În 3.2.2 am constatat că orice funcţie raţională neregulată poate fi reprezentată sub formă de sumă a unui polinom (câtul de la împărţirea numărătorului la numitor) şi a unei funcţii raţionale regulate. Prin urmare, integrarea funcţiilor raţionale neregulate se reduce la integrarea unui polinom, care este o integrare directă (a se consulta ex. 9 din 4.1.1) şi a unei funcţii raţionale regulate. Pe de altă parte tot acolo (3.2.2), s-a demonstrat că orice funcţie raţională regulată poate fi reprezentată sub formă de sumă a funcţiilor raţionale simple de tipul 1-4 (a se vedea formula 6 din 3.2.2). Prin urmare, integrarea funcţiilor raţionale regulate se reduce la integrarea funcţiilor raţionale simple. Deci ne ocupăm de integrarea funcţiilor raţionale simple de tipul 1-4.

1. $$\int \frac{A}{x-a}dx = \left| \begin{matrix} x-a=t \\ dx=dt \end{matrix} \right| = A\int \frac{dt}{t} = A\ln|t| + C = A\ln|x-a| + C$$

(formula 4 din tabel).

2. $$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = \left| \begin{matrix} x-a=t \\ dx=dt \end{matrix} \right| = A\int \frac{dt}{t^k} = A\int t^{-k}dt =$$

$$= A \cdot \frac{1}{(1-k)\,t^{k-1}} + C = \frac{A}{1-k} \cdot \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C,\ k = 2,3,\ldots .$$

Aici am folosit formula 3 din tabel.

3. $$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx,\ \Delta = p^2 - 4q < 0.$$

Întrucât trinomul pătrat are rădăcini complexe, atunci conform ex. 4, a) din 4.1.2, avem

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \int \frac{(Mx+N)dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} = \int \frac{(Mx+N)dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{(-\Delta)}{4}} =$$

$$= \left| \begin{matrix} x+\frac{p}{2}=t \\ x=t-\frac{p}{2} \\ dx=dt \\ k^2=\frac{-\Delta}{4}>0 \end{matrix} \right| = \int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+k^2}dt = M\int \frac{tdt}{t^2+k^2} +$$

$$+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+k^2} = M\int d\left(\frac{1}{2}\ln\left(t^2+k^2\right)\right) + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{t}{k} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left(t^2+k^2\right) + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{t}{k} + C = \frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) +$$

$$+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}} + C = \frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) +$$

$$+\frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

4. $$\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^m}dx,\ \Delta = p^2-4q<0,\ m = 2,3,\ldots .$$

Facem substituţia $x^2 + px + q = t$, de unde $dt = (2x+p)dx$.

Deci

$$\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^m}dx = \int \frac{\frac{M}{2}(2x+p) - \frac{Mp}{2} + N}{\left(x^2+px+q\right)^m}dx =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{(2x+p)}{\left(x^2+px+q\right)^m}dx + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^m}.$$

Observăm că

$$\int \frac{(2x+p)}{\left(x^2+px+q\right)^m}dx = \left| \begin{matrix} x^2+px+q=t \\ dt=(2x+p)dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t^m} = \int t^{-m}dt =$$

$$= \frac{t^{-m+1}}{1-m} + C_1 = \frac{1}{(1-m)\left(x^2+px+q\right)^{m-1}} + C_1$$

şi $$\int \frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^m} = \int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q-p^2}{4}\right]^m} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x + \frac{p}{2} = t \\ dx = dt \\ k^2 = \frac{4q - p^2}{4} > 0 \end{array} \right| = \int \frac{dt}{(t^2 + k^2)^m} = I_m$$

(a se consulta formula recurentă a ex. 10 din 4.1.2).

Prin urmare,

$$\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^m} dx = \frac{M}{2(1-m)(x^2 + px + q)^{m-1}} + \left(N - \frac{Mp}{2} \right) \cdot I_m,$$

adică integrarea funcţiilor simple de tipul IV se reduce la formula recurentă a ex. 10 din 4.1.2, adică la formula

$$I_m = \frac{4}{4q - p^2} \left[\frac{2m-3}{2m-2} \cdot I_{m-1} + \frac{2x + p}{4(m-1)(t^2 + k^2)^{m-1}} \right],$$

unde $t = x + \frac{p}{2}$, $k^2 = \frac{4q - p^2}{4}$.

Aşadar, am stabilit că integrarea unei funcţii raţionale se reduce la integrarea unui polinom şi a unui număr finit de funcţii raţionale simple de tipul 1-4, integralele cărora se exprimă prin funcţii raţionale, logaritmi şi arctangente. Cu alte cuvinte, orice funcţie raţională se integrează în funcţii elementare.

Exemplu 1. Să se calculeze integrala

$$I = \int \frac{2x^5 + x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1}{x^4 + x^2} dx.$$

Observăm că funcţia de sub integrală este o funcţie raţională neregulată. Mai întâi o transformăm într-o funcţie raţională regulată. Pentru aceasta împărţim numărătorul la numitor:

$$\begin{array}{rrrrrr|l} -\,2x^5 & +x^4 & +3x^3 & +3x^2 & +x & +1 & x^4 + x^2 \\ \cline{7-7} 2x^5 & & +2x^3 & & & & 2x + 1 \\ \cline{1-3} & -\,x^4 & +x^3 & +3x^2 & +x & +1 & \\ & x^4 & & +x^2 & & & \\ \cline{2-6} & & x^3 & +2x^2 & +x & +1 & \end{array}$$

Deci $f(x) = (2x+1) + \frac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{x^4 + x^2} = (2x+1) + f_1(x)$.

Dezvoltăm funcţia raţională regulată $f_1(x)$ în funcţii raţionale simple:

$$\frac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Mx + N}{x^2 + 1}. \tag{1}$$

Constantele A, B, M şi N se determină folosind metodele tradiţionale: metoda coeficienţilor nedeterminaţi sau metoda valorilor intermediare (a se consulta 3.2.2).

Vom folosi aici un procedeu netradiţional: înmulţim ambele părţi ale identităţii (1) cu x^2. Obţinem identitatea

$$\frac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{(x^2 + 1)} = Ax + B + \frac{(Mx + N)x^2}{x^2 + 1}.$$

Pentru $x = 0$, avem

$$1 = 0 + B + 0, \text{ adică } B = 1.$$

Deci (1) are forma

$$\frac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{Mx + N}{x^2 + 1},$$

de unde $$\frac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{x^2(x^2 + 1)} - \frac{1}{x^2} = \frac{A}{x} + \frac{Mx + N}{x^2 + 1}$$

sau $$\frac{x^3 + 2x^2 + x + 1 - x^2 - 1}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Mx + N}{x^2 + 1},$$

adică $$\frac{x(x^2 + x + 1)}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Mx + N}{x^2 + 1}.$$

Am obţinut identitatea

$$\frac{x^2 + x + 1}{x(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Mx + N}{x^2 + 1}. \tag{2}$$

Înmulţim ambele părţi ale identităţii (2) cu x şi obţinem identitatea

$$\frac{x^2+x+1}{(x^2+1)}=A+\frac{(Mx+N)x}{x^2+1}.$$

Dacă considerăm $x=0$, avem

$$1=A+0, \text{ adică } A=1.$$

Deci (2) are forma

$$\frac{x^2+x+1}{x(x^2+1)}=\frac{1}{x}+\frac{Mx+N}{x^2+1},$$

de unde

$$\frac{x^2+x+1}{x(x^2+1)}-\frac{1}{x}=\frac{Mx+N}{x^2+1}$$

sau

$$\frac{x^2+x+1-x^2-1}{x(x^2+1)}=\frac{Mx+N}{x^2+1},$$

adică

$$\frac{1}{x^2+1}=\frac{Mx+N}{x^2+1}.$$

Prin urmare, $M=0$ şi $N=1$.

Aşadar, $f(x)=2x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2+1}$.

Integrând ambele părţi şi folosind proprietăţile 4 şi 5 ale integralei nedefinite şi formulele 2, 3, 4, şi 14 din tabel, obţinem

$$I=\int f(x)dx=x^2+x+\ln|x|-\frac{1}{x}+\operatorname{arctg}x+C.$$

Aşadar, integrala nedefinită a funcţiei raţionale poate fi calculată întotdeauna dezvoltând funcţia de sub integrală în funcţii raţionale simple de tipul 1-4. Însă uneori e mai bine de utilizat alte metode. Spre exemplu, integrala $\int\frac{x^2}{x^3+1}dx$ e mai uşor de calculat utilizând substituţia $x^3+1=t$, de unde $dt=3x^2dx$, adică $x^2dx=\frac{1}{3}dt$. Deci

$$\int\frac{x^2}{x^3+1}dx=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{3}\ln|t|+C=\frac{1}{3}\ln|x^3+1|+C.$$

Se vede uşor că dezvoltarea funcţiei raţionale regulate $\frac{x^2}{x^3+1}=\frac{x^2}{(x+1)(x^2-x+1)}$ are forma

$$\frac{x^2}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2-x+1},$$

de unde cu ajutorul metodei coeficienţilor nedeterminaţi obţinem $A=\frac{1}{3}$, $M=\frac{2}{3}$, $N=-\frac{1}{3}$ şi, prin urmare,

$$\int\frac{x^2}{x^3+1}dx=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{3}\int\frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1}=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{3}\ln(x^2-x+1)+C=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|(x+1)(x^2-x+1)|+C=\frac{1}{3}\ln|x^3+1|+C.$$

4.1.4. Integrarea unor expresii ce conţin funcţii trigonometrice

În paragraful precedent am studiat integrarea funcţiilor raţionale, adică a funcţiilor algebrice. În acest paragraf vom studia integralele unor clase de funcţii nealgebrice, în primul rând trigonometrice.

Vom introduce în prealabil notaţia $R(u,v)$ pentru funcţia raţională de două variabile u şi v, adică pentru funcţia, ce poate fi obţinută din două variabile u şi v, şi din câteva constante printr-un număr finit de operaţii de adunare, scădere, înmulţire şi împărţire. Considerăm $u=\sin x$, $v=\cos x$ şi funcţia de sub integrală de forma $f(x)=R(\sin x,\cos x)$. Vom arăta că cu ajutorul unei substituţii integrala $\int f(x)dx$ se reduce la o integrală de la o funcţie raţională (sau, cum se mai spune, poate fi raţionalizată) şi apoi această integrală se calculează utilizând metodele din paragraful precedent.

Fie $\int R(\sin x, \cos x)dx$, unde R este o funcţie raţională de două variabile $u=\sin x$ şi $v=\cos x$. Această integrală poate fi raţionalizată cu ajutorul substituţiei $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $-\pi<x<\pi$, de unde $x=2\operatorname{arctg}t$ şi $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$.

Într-adevăr,

$$\sin x=\sin\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

şi
$$\cos x=\cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=$$

$$=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Prin urmare,

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2t}{1+t^2}\cdot dt=\int R_1(t)dt,$$

unde $R_1(t)$ este o funcţie raţională în raport cu t.

Substituţia considerată permite să se integreze orice funcţie de forma $R(\sin x,\cos x)$. Din această cauză ea este numită *substituţie trigonometrică universală.* Însă în unele cazuri concrete substituţia universală $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ este însoţită de calcule anevoioase. De aceea ,vom considera în continuare unele substituţii particulare, care în cazuri concrete ne conduc la rezultat pe căi mai raţionale.

1. Substituţia $\sin x=t$. Această substituţie poate fi folosită la calcularea integralelor de forma $\int R(\sin x)\cos x dx$, unde funcţia raţională *R(sinx)* depinde numai de $\sin x$. În acest caz,

$$\int R(\sin x)\cos x dx=\left|\begin{array}{c}\sin x=t\\ dt=\cos x dx\end{array}\right|=\int R(t)dt.$$

2. Substituţia $\cos x=t$ poate fi folosită la raţionalizarea integralelor de forma $\int R(\cos x)\sin x dx$, unde funcţia raţională $R(\cos x)$ depinde numai de $\cos x$. În acest caz,
$$\int R(\cos x)\sin x dx=\left|\begin{array}{c}\cos x=t\\ dt=-\sin x dx\end{array}\right|=-\int R(t)dt.$$
3. Substituţia $\operatorname{tg}x=t$ poate fi utilizată la calcularea integralelor de forma $\int R(\operatorname{tg}x)dx$, unde funcţia raţională $R(\operatorname{tg}x)$ depinde numai de $\operatorname{tg}x$. În acest caz,
$$\int R(\operatorname{tg}x)dx=\left|\begin{array}{c}\operatorname{tg}x=t\\ x=\operatorname{arctg}t\\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2}\end{array}\right|=\int R(t)\cdot\frac{1}{1+t^2}\cdot dt=\int R_1(t)dt,$$
unde $R_1(t)$ este o funcţie raţională în raport cu t.
4. Dacă funcţia de sub integrală are forma $R(\sin x,\cos x)$, în care $\sin x$ şi $\cos x$ intră numai la puteri pare, se aplică aceeaşi substituţie ca în cazul precedent, adică $\operatorname{tg}x=t$, deoarece $\sin^2 x$ şi $\cos^2 x$ se exprimă raţional prin $\operatorname{tg}x$:
$$\cos^2 x=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\frac{1}{1+t^2},\ \sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\frac{1}{1+t^2}=\frac{t^2}{1+t^2}$$
şi
$$dx=\frac{dt}{1+t^2}.$$
Deci
$$\int R(\sin^{2m}x,\cos^{2n}x)dx=$$
$$=\int R\left[\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^m,\frac{1}{(1+t^2)^n}\right]\cdot\frac{dt}{1+t^2}=\int R_1(t)dt,$$
unde $R_1(t)$ este o funcţie raţională în raport cu t şi m, $n\in Z$.

5. Fie $\int \sin^m x \cos^n x dx$,

a) dacă cel puţin unul din numerele întregi m şi n este impar, de exemplu, pentru fixarea ideilor, admitem $n = 2p+1$, unde $p \in Z$, atunci

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int \sin^m x \cdot \cos^{2p} x \cdot \cos x \cdot dx =$$

$$= \int \sin^m x \cdot \left(1-\sin^2 x\right)^p \cdot \cos x dx = \left| \begin{array}{c} \sin x = t \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| =$$

$$= \int t^m \cdot \left(1-t^2\right)^p \cdot dt = \int R(t) dt,$$

unde $R(t)$ este o funcţie raţională în raport cu t;

b) numerele m, $n \in Z$ şi ambele sunt pare şi nenegative. Fie $m = 2p$, $n = 2q$, unde p, $q \in N$.

Atunci $\int \sin^{2p} x \cos^{2q} x dx = \int \left(\sin^2 x\right)^p \cdot \left(\cos^2 x\right)^q dx =$

$$= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^p \cdot \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^q dx = \frac{1}{2^{p+q}} \int (1-\cos 2x)^p \cdot (1+\cos 2x)^q dx.$$

Ridicând la putere şi deschizând parantezele, obţinem termeni, care conţin $\cos 2x$ la puteri pare şi impare. Termenii cu puteri impare se integrează conform cazului a) de mai sus, considerând $m = 0$. Exponenţii puterilor pare se vor micşora din nou după formula $\cos^2 2x = \dfrac{1+\cos 4x}{2}$. Continuând în aşa fel, vom ajunge la termeni de forma $\cos kx$, $k \in N$, care se integrează direct folosind proprietatea 7 şi formula 7 din tabel (vezi 4.1.1);

c) dacă cel puţin unul din numerele întregi pare $m=2p$ şi $n=2q$ este negativ, atunci substituţia $\mathrm{tg} x = t$, reduce integrala $\int \sin^{2p} x \cos^{2q} x dx$, $p, q \in Z$ la integrarea funcţiilor raţionale. Într-adevăr, avem $x = \mathrm{arctg} t$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$ şi

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \ \sin^2 x = 1-\cos^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Prin urmare,

$$\int \left(\sin^2 x\right)^p \left(\cos^2 x\right)^q dx = \int \left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^p \cdot \frac{dt}{\left(1+t^2\right)^{q+1}} dt = \int R(t) dt,$$

unde $R(t)$ este o funcţie raţională în raport cu t.

Notă. 1. În cazurile 3, 4 şi 5 c) poate fi utilizată şi substituţia *ctg x = t*, adică *x = arcctg t.*

2. Cazul 5 c) poate fi generalizat astfel: substituţia $\mathrm{tg} x = t$ (sau $\mathrm{ctg} x = t$) poate fi utilizată şi în cazul când $m \in R$, $n \in R$ şi $m+n = -2k$, unde $k \in N$.

Vom considera un exemplu de acest fel.

Să se calculeze integrala $\int \sqrt[3]{\dfrac{\cos^2 x}{\sin^8 x}} dx$.

Avem $m = -\dfrac{8}{3}$, $n = \dfrac{2}{3}$ şi $m+n = -\dfrac{6}{3} = -2$.

Deci

$$\int \sqrt[3]{\frac{\cos^2 x}{\sin^8 x}} dx = \left| \begin{array}{l|l} \mathrm{tg} x = t & \cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2} \\ x = \mathrm{arctg} t & \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} & \sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \sqrt[3]{\frac{\dfrac{1}{1+t^2}}{\left(\dfrac{t^2}{1+t^2}\right)^4}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{1+t^2}{t^{\frac{8}{3}}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int t^{-\frac{8}{3}} dt = \frac{t^{-\frac{8}{3}+1}}{-\frac{5}{3}} + C = -\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{t^{\frac{5}{3}}} + C = -\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\mathrm{tg}^5 x}} + C =$$

$$= -\frac{3}{5} \cdot \sqrt[3]{\mathrm{ctg}^5 x} + C = -\frac{3 \mathrm{ctg} x}{5} \sqrt[3]{\mathrm{ctg}^2 x} + C.$$

6. Examinăm în încheiere integralele de forma $\int \cos mx \cos nx dx$, $\int \sin mx \sin nx dx$, $\int \sin mx \cos nx dx$, $m \in R$, $n \in R$. Considerăm următoarele formule din trigonometrie

$$\cos(m+n)x = \cos mx \cos nx - \sin mx \sin nx,$$

$$\cos(m-n)x = \cos mx \cos nx + \sin mx \sin nx,$$

$$\sin(m+n)x = \sin mx\cos nx + \cos mx\sin nx,$$
$$\sin(m-n)x = \sin mx\cos nx - \cos mx\sin nx.$$

Adunând parte cu parte primele două egalităţi şi împărţind la doi; scăzând parte cu parte primele două egalităţi şi împărţind la doi şi, adunând parte cu parte ultimele două egalităţi şi împărţind la doi, obţinem următoarele formule:

$$\cos mx\cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x],$$
$$\sin mx\sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x],$$
$$\sin mx\cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x].$$

Prin urmare,

a) $\int\cos mx\cos nx dx = \frac{1}{2}\left[\int\cos(m+n)x dx + \int\cos(m-n)x dx\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right] + C$;

b) $\int\sin mx\sin nx dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right] + C$;

c) $\int\sin mx\cos nx dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(m+n)x}{m+n} + \frac{\cos(m-n)x}{m-n}\right] + C$;

dacă $m \pm n \neq 0$, adică $m \neq \pm n$, $m \in R$, $n \in R$.

Dacă însă $m = \pm n$ şi $n \neq 0$, avem

a) $\int\cos nx\cdot\cos nx dx = \int\cos^2 nx dx = \int\frac{1+\cos 2nx}{2}dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2nx}{2n} + C = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4n}\cdot\sin 2nx + C$;

b) $\pm\int\sin^2 nx dx = \pm\int\frac{1-\cos 2nx}{2}dx = \pm\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4n}\cdot\sin 2nx\right) + C$;

c) $\pm\int\sin nx\cos nx dx = \pm\int\sin nx\cdot\frac{d(\sin nx)}{n} = \frac{\pm 1}{2n}\cdot\sin^2 nx + C$.

Dacă $m = n = 0$, atunci integralele respective sunt egale cu

a) $\int 1\cdot 1\cdot dx = x + C$,

b) $\int 0\cdot 0\cdot dx = 0 + C = C$,

c) $\int 0\cdot 1\cdot dx = 0 + C = C$.

4.1.5. Integrarea unor clase de funcţii iraţionale

În acest paragraf vom considera unele funcţii iraţionale, integralele cărora prin intermediul unor substituţii se readuc la integrale de la funcţii raţionale, şi, prin urmare, integralele de acest fel, fiind raţionalizate, pot fi calculate.

1. Fie $I = \int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_2}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right]dx$,

unde R este o funcţie raţională în raport cu argumentele $x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_2}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}$, numerele $r_1, r_2, \ldots r_s$ sunt raţionale şi $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$. Condiţia $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$, adică $ad = bc$, înseamnă că numerele reale a şi b sunt proporţionale numerelor reale c şi d. Deci $ax + b = t(cx+d)$, adică $\frac{ax+b}{cx+d} = t$ şi parametrul $t = \frac{a}{c} = const$ nu depinde de x. Prin urmare, în acest caz $\left(\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0\right)$ funcţia de sub integrală este o funcţie raţională în raport cu x şi integrala de la această funcţie poate fi deja calculată.

Notăm prin m numitorul comun al fracţiilor $r_1, r_2, ... r_s$. Atunci $r_i = \frac{p_i}{m}$, $p_i \in Z$, $i = 1,2,...,s$ şi $m \in N$.

Facem substituţia $t^m = \frac{ax+b}{cx+d}$, de unde $x = \frac{d \cdot t^m - b}{a - c \cdot t^m}$ este o funcţie raţională în raport cu t. Deci şi funcţia $x'(t) = \left(\frac{d \cdot t^m - b}{a - c \cdot t^m}\right)'$ de asemenea este raţională în raport cu t.

Prin urmare,

$$I = \int R\left(\frac{d \cdot t^m - b}{a - c \cdot t^m}, t^{p_1}, t^{p_2}, ..., t^{p_s}\right) \cdot \left(\frac{d \cdot t^m - b}{a - c \cdot t^m}\right)' dt = \int R_1(t) dt,$$

unde $R_1(t)$ este o funcţie raţională în raport cu t şi $p_1, p_2, ..., p_s \in Z$, $m \in N$.

Integralele de forma

$$\int R\left[x, (ax+b)^{r_1}, (ax+b)^{r_2}, ..., (ax+b)^{r_s}\right] dx$$

$$\text{şi} \quad \int R\left(x, x^{r_1}, x^{r_2}, ..., x^{r_s}\right) dt,$$

unde numerele $r_1, r_2, ..., r_s$ sunt numere raţionale, sunt cazuri particulare ale integralei iniţiale. Deci substituţiile $t^m = ax+b$, unde m este numitorul comun al numerelor raţionale $r_1, r_2, ..., r_s$, raţionalizează prima integrală de mai sus, iar substituţia $t^m = x$ – pe a doua.

2. $I = \int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$, $ax^2+bx+c > 0$, $a \neq 0$ şi $b^2 - 4ac \neq 0$ se reduce la integrala unei funcţii raţionale de o nouă variabilă cu ajutorul următoarelor substituţii, numite *substituţiile Euler*. Observăm că dacă $a = 0$, atunci integrala I este deja raţionalizată în virtutea cazului precedent. Dacă $b^2 - 4ac = 0$, atunci trinomul pătrat ax^2+bx+c reprezintă un pătrat perfect şi I de asemenea e deja raţionalizată.

a) Fie $ax^2+bx+c > 0$ şi $a > 0$. Notăm $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t$,

de unde $ax^2+bx+c = ax^2 \pm 2\sqrt{a}x \cdot t + t^2$,

adică $bx + c = \pm 2\sqrt{a}x \cdot t + t^2$

sau $x = \frac{t^2 - c}{b \mp 2\sqrt{a} \cdot t} = \varphi(t)$.

Observăm că funcţia $\varphi(t)$ este raţională. De asemenea va fi raţională şi funcţia $\varphi'(t)$. Prin urmare,

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) \cdot dx =$$

$$= \int R\left[\left(\frac{t^2-c}{b \mp 2\sqrt{a} \cdot t}\right), \left(\pm\sqrt{a} \cdot \frac{t^2-c}{b \mp 2\sqrt{a} \cdot t} + t\right)\right] \cdot \varphi'(t) dt = \int R_1(t) dt,$$

unde $R_1(t)$ este o funcţie raţională în raport cu t.

b) Fie $ax^2+bx+c > 0$ şi $c > 0$. Notăm $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$. Atunci $ax^2+bx+c = x^2t^2 \pm 2xt \cdot \sqrt{c} + c$, de unde $x = \frac{\pm 2t\sqrt{c} - b}{a - t^2} = \varphi(t)$ este o funcţie raţională în raport cu t.

Prin urmare,

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx =$$

$$= \int R\left[\left(\frac{\pm 2t\sqrt{c} - b}{a - t^2}\right), \left(\frac{\pm 2t\sqrt{c} - b}{a - t^2} \cdot t \pm \sqrt{c}\right)\right] \cdot \varphi'(t) dt = \int R_1(t) dt,$$

unde $R_1(t)$ este o funcţie raţională în raport cu t.

c) Fie $ax^2+bx+c > 0$ şi m, n - rădăcinile reale distincte ale trinomului pătrat ax^2+bx+c. Notăm $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-m) \cdot t$. Deci $\sqrt{a(x-m)(x-n)} = (x-m) \cdot t$,

de unde $a(x-n) = (x-m) \cdot t^2$,

adică $x = \dfrac{a \cdot n - m \cdot t^2}{a - t^2} = \varphi(t)$ este o funcţie raţională.

Prin urmare,

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx =$$

$$= \int R\left[\frac{an - m\cdot t^2}{a-t^2}, t\left(\frac{an-m\cdot t^2}{a-t^2} - m\right)\right]\cdot \varphi'(t)dt = \int R_1(t)dt,$$

unde $R_1(t)$ este o funcţie raţională în raport cu t.

Notă. Observăm că pentru a raţionaliza . integrala $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ sunt suficiente doar substituţiile întâi şi a treia. Într-adevăr, dacă $b^2 - 4ac > 0$, atunci rădăcinile trinomului pătrat ax^2+bx+c sunt reale şi, prin urmare, e aplicabilă substituţia 3 a lui Euler. Dacă $b^2-4ac<0$, în acest caz $ax^2+bx+c = \frac{1}{4a}\left[(2ax+b)^2 + \left(4ac-b^2\right)\right]$ şi, prin urmare, semnul trinomului coincide cu semnul lui a. Pentru ca $\sqrt{ax^2+bx+c}$ să fie reală, este necesar ca trinomul ax^2+bx+c să fie pozitiv, adică $a>0$. Deci în acest caz e aplicabilă substituţia 1 a lui Euler.

Notăm că integrarea funcţiilor cu ajutorul substituţiilor Euler duce, de regulă, la expresii complicate şi necesită transformări cu un volum mare de lucru, de aceea ele urmează a fi aplicate doar în cazul, în care integrala dată nu poate fi calculată prin alte metode mai simple.

În încheiere vom indica o metodă de reducere a integralei $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$, cu ajutorul substituţiilor trigonometrice, la o integrală de forma $\int R_1(\sin t, \cos t)dt$, abordată în paragraful precedent.

Transformăm trinomul pătrat în felul următor:

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right).$$

Notăm $x + \frac{b}{2a} = t$. Atunci

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{at^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)}.$$

Examinăm toate cazurile posibile.

1. Fie $a>0$, $c - \frac{b^2}{4a} > 0$. Notăm $a = m^2$, $c - \frac{b^2}{4a} = n^2$. În acest caz vom avea

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx = \int R\left(t - \frac{b}{2a}, \sqrt{m^2t^2+n^2}\right)dt =$$

$$= \left| \begin{array}{c} t = \dfrac{n}{m}\operatorname{tg} z \\ dt = \dfrac{n}{m\cos^2 z}dz \end{array} \right| = \int R\left(\frac{m}{n}\operatorname{tg}z - \frac{b}{2a}, \frac{n}{\cos z}\right)\cdot\frac{n}{m\cos^2 z}dz =$$

$$= \frac{n}{m}\int R_1(\sin z, \cos z)dz.$$

2. Fie $a>0$, $c - \frac{b^2}{4a} < 0$. Atunci, notăm $a = m^2$, $x = t - \frac{b}{2a}$ şi $c - \frac{b^2}{4a} = -\left(\frac{b^2}{4a} - c\right) = -n^2$. Prin urmare,

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{m^2t^2 - n^2}$$

şi $I = \int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx = \int R\left(t - \frac{b}{2a}, \sqrt{m^2t^2-n^2}\right)dt =$

$$=\left|\begin{array}{l} t=\dfrac{n}{m}\cdot\dfrac{1}{\cos z}, \\ dt=\dfrac{n}{m}\cdot\dfrac{\sin z}{\cos^2 z}dz \end{array}\right|=\int R\left[\left(\frac{n}{m}\cdot\frac{1}{\cos z}-\frac{b}{2a}\right), n\cdot \operatorname{tg} z\right]\cdot\frac{n}{m}\cdot\frac{\sin z}{\cos^2 z}dz=$$

$$=\frac{n}{m}\int R_1(\sin z,\cos z)dz\,.$$

3. Fie $a<0$ şi $c-\dfrac{b^2}{4a}>0$. Notăm $a=-m^2$, $c-\dfrac{b^2}{4a}=n^2$ şi $x=t-\dfrac{b}{2a}$. Prin urmare, $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{n^2-m^2t^2}$

şi $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=\int R\left[\left(t-\dfrac{b}{2a}\right),\sqrt{n^2-m^2t^2}\right]dt=$

$$=\left|\begin{array}{l} t=\dfrac{n}{m}\cdot\sin z \\ dt=\dfrac{n}{m}\cos z dz \end{array}\right|=\int R\left[\left(\frac{n}{m}\sin z-\frac{b}{2a}\right), n\cos z\right]\cdot\frac{n}{m}\cos z dz=$$

$$=\frac{n}{m}\int R_1(\sin z,\cos z)dz\,.$$

4. Dacă $a<0$ şi $c-\dfrac{b^2}{4a}<0$, atunci $\sqrt{ax^2+bx+c}$ este un număr complex pentru orice valoare a lui x, deoarece $ax^2+bx+c<0$.

4.1.6. Exemple de integrale care nu se exprimă prin funcţii elementare

În paragrafele precedente s-au studiat clase de funcţii elementare, integralele cărora se exprimă prin funcţii elementare. Remarcăm că metodele şi procedeele de integrare studiate anterior nu epuizează toate clasele de funcţii elementare integrabile analitic. În acelaşi timp observăm că tehnica integrării e mai complicată în comparaţie cu tehnică derivării (diferenţierii). În acest caz sunt

necesare anumite deprinderi şi ingeniozitate, care se capătă în urma rezolvării unui mare număr de exerciţii.

Să menţionăm de asemenea că în timp ce operaţia de derivare (diferenţiere) nu lărgeşte clasa funcţiilor elementare, în cazul integrării situaţia e alta.

În practică se întâlnesc funcţii elementare, integralele cărora nu se exprimă prin funcţii elementare.

Aceste primitive joacă un rol mare nu numai în analiza matematică, ci şi în aplicaţiile sale. Ele sunt bine studiate, pentru ele sunt trasate grafice şi sunt compuse tabele de valori, ce facilitează utilizarea lor practică. Vom remarca unele din ele:

1. exponenta integrală: $Ei(x)=\int\dfrac{e^x}{x}dx$;
2. integrala Euler-Poisson[*)]: $\varphi(x)=\int e^{-x^2}dx$;
3. integralele Fresnel[**)]: $S(x)=\int \sin x^2dx$, $C(x)=\int\cos x^2dx$;
4. sinusul integral: $Si(x)=\int\dfrac{\sin x}{x}dx$;
5. cosinusul integral: $Ci(x)=\int\dfrac{\cos x}{x}dx$;
6. logaritmul integral: $Li(x)=\int\dfrac{dx}{\ln x}$;
7. sinusul hiperbolic integral: $Sh(x)=\int\dfrac{\operatorname{sh}x}{x}dx$;
8. cosinusul hiperbolic integral: $Ch(x)=\int\dfrac{\operatorname{ch}x}{x}dx$;
9. integralele eliptice:
   a) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$,

---

*) Poisson Simeon (1781-1840 – matematician şi mecanician francez);
**) Fresnel Augustin (1788-1827 – matematician francez)

b) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$,

c) $\int \frac{dx}{(1+hx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$,

unde $h \in R$ şi $0<k<1$.

Integrale eliptice cu ajutorul substituţiei $x=\sin\varphi$, $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$, se reduc la o combinaţie liniară a următoarelor integrale

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad \int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi \text{ şi}$$

$$\int \frac{d\varphi}{(1+h\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

unde $h \in R$, $0<k<1$ şi $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$, care se numesc *integrale eliptice de speţa 1 şi respectiv de speţa 2 şi 3 în forma Legendre* ((1752-1833) – matematician francez).

Liouville ((1809-1882) – matematician francez) a demonstrat că integralele eliptice nu se exprimă prin funcţii elementare.

4.2. Integrala definită

4.2.1 Integrala definită. Noţiuni fundamentale

Fie segmentul $[a,b]$. Se numeşte *diviziune* a segmentului $[a,b]$ o familie finită de puncte $d=(x_0, x_1, ..., x_k)$ din $[a,b]$ astfel încât

$$a=x_0<x_1<x_2<...<x_k=b, k\in N.$$

Segmentele $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1,2,...,k$ se numesc *segmente parţiale* ale acestei diviziuni, iar cea mai mare dintre lungimile segmentelor parţiale o vom numi *pasul* diviziunii d şi-l vom nota prin $\|d\|$ sau λ. Aşadar,

$$\|d\|=\lambda=\max(x_i-x_{i-1})=\max\Delta x_i.$$

Fie $d_1=(x_0,x_1,...,x_k)$ şi $d_2=(y_0,y_1,...,y_s)$ două diviziuni ale segmentului $[a,b]$. Se spune că d_2 este mai *fină* decât d_1, dacă orice punct al diviziunii d_1 este şi punct al diviziuni d_2, adică mulţimea $(x_0,x_1,...,x_k)$ este inclusă în mulţimea $(y_0,y_1,...,y_s)$. Dacă d_2 este mai fină decât d_1, vom scrie $d_1 \subset d_2$ sau $d_2 \supset d_1$.

Prin urmare, prin trecerea la o diviziune mai fină, pasul diviziunii nu creşte (se micşorează sau rămâne acelaşi).

Remarcăm că dacă $\|d_2\|<\|d_1\|$, aceasta nu înseamnă că d_2 este mai fină decât d_1, deoarece diviziunea d_2 poate fi formată din segmente parţiale mai mici decât ale diviziunii d_1, fără ca toate punctele diviziunii d_1 să aparţină diviziunii d_2. De exemplu, $d_1=\left(0,\frac{1}{2},1\right)$ are pasul $\|d_1\|=\frac{1}{2}$ şi $d_2=\left(0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right)$ are pasul $d_2=\frac{1}{3}$, însă d_2 nu este mai fină decât d_1 (punctul $\frac{1}{2}$ al diviziunii d_1 nu este punct al diviziunii d_2).

Diviziunea formată din mulţimea

$$(x_0,x_1,...,x_k)\cup(y_0,y_1,...,y_s)$$

ale cărei elemente sunt luate în ordine strict crescătoare, se numeşte *reuniunea* diviziunilor $d_1=(x_0,x_1,...,x_k)$ şi $d_2=(y_0,y_1,...,y_s)$ pe $[a,b]$ şi se notează $d_1\cup d_2$.

Exemplu. Fie $d_1=\left(1,\sqrt{2},\frac{3}{2},\sqrt{5},3\right)$ şi $d_2=\left(1,\sqrt{3},2,3\right)$ două diviziuni ale segmentului [*1*, *3*]. Atunci

$$d_1 \cup d_2 = \left(1, \sqrt{2}, \frac{3}{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, 3\right).$$

Evident că reuniunea $d_1 \cup d_2$ a două diviziuni este, ca regulă, mai fină decât fiecare din diviziunile d_1 şi d_2:

$d_1 \subset d_1 \cup d_2$ şi $d_2 \subset d_1 \cup d_2$.

Deci $\|d_1 \cup d_2\| \le \|d_1\|$ şi $\|d_1 \cup d_2\| \le \|d_2\|$.

Fie funcţia f definită pe $[a, b]$ şi $d = (x_0, x_1, \dots, x_k)$ o diviziune oarecare a lui $[a,b]$. Considerăm un sistem de k puncte $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$ astfel încât:

$$x_{i-1} \le \xi_i \le x_i,\ (1 \le i \le k),$$

numit *sistem de puncte intermediare asociat diviziunii d.*

Expresia de forma

$$f(\xi_1)(x_1 - a) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(\xi_k)(b - x_{k-1}) = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

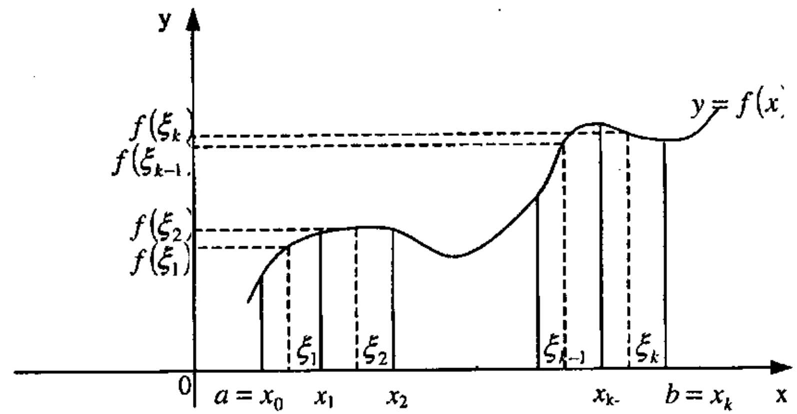
unde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, k$, se numeşte *sumă Riemann* (sau *sumă integrală*) asociată funcţiei f, diviziunii d şi punctelor intermediare $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ şi o vom nota astfel: $\sigma_d(f, \xi)$ sau σ_d. Evident că suma Riemann asociată funcţiei f definită pe $[a, b]$ depinde atât de diviziunea d a lui $[a, b]$, cât şi de alegerea punctelor intermediare.

Nota 1. Dacă funcţia f este pozitivă pe $[a,b]$, atunci suma Riemann (1826-1866) - matematician german) $\sigma_d(f, \xi)$ reprezintă suma ariilor dreptunghiurilor de bază $(x_i - x_{i-1}) = \Delta x_i$ şi înălţime $f(\xi_i)$, $(1 \le i \le k)$.

Prin urmare, suma Riemann σ_d aproximează aria mulţimii punctelor din planul XOY, denumită *trapez curbiliniu*

$$T_f = \{(x, y) \in R^2;\ a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\},$$

adică figura delimitată de axa OX, graficul funcţiei f şi dreptele $x = a$, $x = b$.



Nota 2. Fie că un punct material se deplasează sub acţiunea unei forţe F, orientate de-a lungul axei OX şi care are o mărime variabilă $|F| = f(x)$. Se pune problema de a determina lucrul mecanic A, efectuat de forţa F la deplasarea unei unităţi de masă de-a lungul axei OX din punctul $x = a$ în punctul $x = b$, $(a < b)$. Funcţia $f(x)$ se presupune continuă pe $[a,b]$.

Dacă mărimea forţei F ar fi constantă, atunci lucrul mecanic ar fi egal, conform definiţiei, cu produsul dintre mărimea forţei şi lungimea spaţiului parcurs. În cazul nostru forţa F este o mărime variabilă şi procedăm astfel. Fie $d = (x_0, x_1, \dots, x_k)$ o diviziune a segmentului $[a,b]$, $[x_{i-1}, x_i]$, $(i = 1, \dots, k)$ - segmentele parţiale şi ξ_i, $(i = 1, \dots, k)$ - punctele intermediare de pe aceste segmente. Forţa F, care acţionează pe segmentul parţial $[x_{i-1}, x_i]$, variază de la un punct la altul. Dar dacă lungimea Δx_i a acestui segment este mică, mărimea ei în punctele segmentului $[x_{i-1}, x_i]$ diferă puţin de mărimea ei în punctul ξ_i, adică $f(\xi_i)$, deoarece funcţia $f(x)$ este continuă pe $[a,b]$. De aceea e natural ca lucrul mecanic A_i efectuat de forţa F pe $[x_{i-1}, x_i]$ să fie considerat aproximativ egal cu lucrul efectuat pe acest segment de o forţă constantă de mărimea $f(\xi_i)$, adică

$$A_i \approx f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),\ i = 1, 2, \dots, k.$$

Raţionând la fel pentru fiecare segment parţial, obţinem valoarea aproximativă a lucrului mecanic A al forţei F pe întreg segmentul $[a,b]$:

$$A=\sum_{i=1}^{k}A_i\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\sigma_d(f,\xi).$$

Prin urmare, în cazul acesta suma Riemann $\sigma_d(f,\xi)$ a funcţiei f asociată diviziunii d aproximează lucrul mecanic efectuat de o forţă variabilă la deplasarea unui punct material dintr-o poziţie în alta.

Definiţia 1. O funcţie $f(x), x\in[a,b]$ se numeşte *integrabilă Riemann* (sau, simplu, *integrabilă*), dacă există un număr real I cu proprietatea: oricare ar fi $\varepsilon>0$, există $\delta>0$ (numărul δ, în genere, depinde de $\varepsilon>0$), astfel încât pentru orice diviziune $d=(x_0,x_1,...,x_n)$ a segmentului $[a,b]$ cu $\|d\|<\delta$ şi orice puncte intermediare ξ_i, $x_{i-1}\le\xi_i\le x_i, (1\le i\le n)$, are loc inegalitatea $|\sigma_d(f,\xi)-I|<\varepsilon$. Numărul real I se numeşte *integrală definită a funcţiei f pe segmentul* $[a,b]$ şi se notează $\int_a^b f(x)dx$ (se citeşte "integrala de la a la b a lui ef de ics de ics").

Evident că numărul I, dacă el există, depinde numai de funcţia f şi de segmentul $[a,b]$ şi nu depinde nici de modul de divizare al segmentului $[a,b]$, adică de diviziunea d, nici de alegerea punctelor intermediare pe segmentul parţial al diviziunii d.

Aşadar, integrala definită a funcţiei f pe segmentul $[a,b]$ este un număr egal cu limita sumei Riemann, când pasul diviziunii d a segmentului $[a,b]$ tinde către zero:

$$I=\int_a^b f(x)dx=\lim_{\|d\|\to0}\sum_{i=1}^{k}f(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{\lambda\to0}\sigma_d(f,\xi).$$

În acest caz numerele a şi b se numesc respectiv *limită inferioară* şi *limită superioară* de integrare, segmentul $[a,b]$ se numeşte *interval* de integrare, funcţia $f(x)$ se numeşte *funcţie de sub integrală*, expresia $f(x)dx$ - *expresie de sub integrală*, *x- variabilă de integrare.*

Aşadar, integrala definită a funcţiei f pe segmentul fixat $[a,b]$ este un număr real, unic determinat de f, spre deosebire de integrala nedefinită a lui f pe $[a,b]$, care este mulţimea tuturor primitivelor lui f pe $[a,b]$.

Reieşind din nota 1 şi nota 2 de mai sus, stabilim următoarele interpretări ale integralei definite:

1. *sensul geometric*: integrala definită a unei funcţii f negative şi continue pe $[a,b]$ este egală cu aria trapezului curbiliniu, mărginit de graficul funcţiei f, dreptele $x=a$, $x=b$ şi axa OX;
2. *sensul mecanic al integralei definite*: dacă punctul material se deplasează sub acţiunea unei forţe F, orientată în direcţia axei OX, de mărime variabilă, ce depinde de abscisa x a punctului M, adică $|F|=f(x)$ (funcţia f se consideră continuă pe $[a,b]$), atunci $\int_a^b f(x)dx$ este egală cu lucrul efectuat de forţa F la deplasarea punctului material M în direcţia axei OX din punctul $x=a$ în punctul $x=b$.

Vom considera următoarele exemple.

Exemplul 1. Fie $f(x)=c, x\in[a,b]$. Vom arăta că funcţia f este integrabilă pe $[a,b]$ şi $\int_a^b f(x)dx=c(b-a)$.

Se observă că oricare ar fi diviziunea $d=(x_0=a, x_1,...,x_n=b)$ a lui $[a,b]$ şi oricare ar fi punctele intermediare ξ_i asociate acestei diviziuni, avem

$$\sigma_d(f,\xi)=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}c(x_i-x_{i-1})=c\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=c(b-a).$$

Deci luând $I=c(b-a)$, avem $|\sigma_d(f,\xi)-I|=0<\varepsilon$, oricare ar fi numărul real pozitiv ε.

Prin urmare, conform definiției 1, funcția $f(x)=c,\ x\in[a,b]$ este integrabilă pe $[a,b]$ și $\int_a^b f(x)dx=c(b-a)$.

Exemplul 2. Să se arate că funcția $f(x)=\cos x,\ x\in R$ este integrabilă pe orice segment $[a,b]\subset R$ și

$$\int_a^b \cos x dx=\sin b-\sin a.$$

Fie $d=(a=x_0,\ x_1,...,x_n=b)$ o diviziune a segmentului $[a,b]$ și fie $\xi_i\in[x_{i-1},x_i],\ (1\le i\le n)$ punctele intermediare arbitrare.

Aplicând teorema Lagrange la funcția $f(x)=\sin x$ pe fiecare segment parțial $[x_{i-1},x_i],\ (1\le i\le n)$, obținem punctele $c_i\in\,]x_{i-1},x_i[$ astfel încât

$$\sin x_i-\sin x_{i-1}=(x_i-x_{i-1})\cos c_i,\quad (1\le i\le n).$$

Ținând seama de aceste egalități putem scrie:

$$\sigma_d(f,\xi)=\sum_{i=1}^n(\cos\xi_i)(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^n(x_i-x_{i-1})(\cos c_i+\cos\xi_i-\cos c_i)=$$

$$=\sum_{i=1}^n(\cos c_i)(x_i-x_{i-1})+\sum_{i=1}^n(\cos\xi_i-\cos c_i)(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^n(\sin x_i-\sin x_{i-1})+$$

$$+\sum_{i=1}^n(\cos\xi_i-\cos c_i)(x_i-x_{i-1})=(\sin b-\sin a)+\sum_{i=1}^n(\cos\xi_i-\cos c_i)(x_i-x_{i-1}).\quad (1)$$

Aplicând acum teorema Lagrange la funcția $g(x)=\cos x$ pe $[\xi_i,c_i]$ (sau $[c_i,\xi_i]$), obținem punctele $\theta_i\in\,]\xi_i,c_i[$ (sau $\theta_i\in\,]c_i,\xi_i[$) astfel încât

$$\cos\xi_i-\cos c_i=(\xi_i-c_i)\sin\theta_i,\quad (1\le i\le n).$$

Deci

$$|\cos\xi_i-\cos c_i|=|(\xi_i-c_i)\sin\theta_i|\le|\xi_i-c_i|\le|x_i-x_{i-1}|\le\|d\|.$$

Prin urmare,

$$\left|\sum_{i=1}^n(\cos\xi_i-\cos c_i)(x_i-x_{i-1})\right|\le\left|\sum_{i=1}^n\|d\|(x_i-x_{i-1})\right|=$$

$$=\|d\|\sum_{i=1}^n(x_i-x_{i-1})=\|d\|\cdot(b-a).\quad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă

$$|\sigma_d(f,\xi)-(\sin b-\sin a)|=$$

$$=\left|\sum_{i=1}^n(\cos\xi_i-\cos c_i)(x_i-x_{i-1})\right|\le\|d\|\cdot(b-a).\quad (3)$$

Pentru orice $\varepsilon>0$, luăm $\delta(\varepsilon)=\dfrac{\varepsilon}{b-a}$, atunci conform relației (3), pentru orice diviziune d, astfel încât $\|d\|<\delta(\varepsilon)$, avem

$$|\sigma_d(f,\xi)-(\sin b-\sin a)|<\frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a)=\varepsilon.$$

Aceasta arată că funcția $f(x)=\cos x$ este integrabilă pe $[a,b]\subset R$ și

$$I=\int_a^b\cos x dx=\sin b-\sin a.$$

Exemplul 3. Să se arate că funcția Dirichlet

$$D(x)=\begin{cases}1, \text{ dacă } x\in Q\\ 0, \text{ dacă } x\in R-Q\end{cases}$$

definită pe $[0,1]$ nu este integrabilă pe acest segment.

Fie $d=(x_0=0,\ x_1,...,x_k=1)$ o diviziune a segmentului $[0,1]$ și fie $\xi_i',\xi_i''\in[x_{i-1},x_i],(1\le i\le k)$ două sisteme de puncte intermediare alese astfel încât

fiecare $\xi_1',\xi_2',...,\xi_k'$ este rațional

și fiecare $\xi_1'',\xi_2'',...,\xi_k''$ este irațional.

Atunci $D(\xi_i')=1$ și $D(\xi_i'')=0,\ (1\le i\le k)$.

Deci

$$\sigma_d(D,\xi')=1 \text{ și } \sigma_d(D,\xi'')=0.\quad (4)$$

Dacă funcţia $D(x), x \in [0,1]$, ar fi integrabilă, atunci ar exista numărul real A, care ar verifica condiţiile definiţiei 1. În particular, pentru $\varepsilon = \frac{1}{4} > 0$ ar exista un $\delta > 0$, astfel încât pentru orice diviziune $d = (x_0, x_1, ..., x_k)$ a lui $[0,1]$ cu $\|d\| < \delta$ să avem

$$|\sigma_d(D,\xi') - A| < \varepsilon \text{ şi } |\sigma_d(D,\xi'') - A| < \varepsilon. \quad (5)$$

Din relaţiile (4) şi (5) rezultă

$$|1 - A| = |\sigma_d(D,\varsigma') - A| < \varepsilon \quad \text{şi} \quad |0 - A| = |\sigma_d(D,\xi'') - A| < \varepsilon,$$

ceea ce conduce la contradicţia

$$1 = |1 - A + A| = |(1 - A) + A| \le |1 - A| + |A| < 2\varepsilon = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Aşadar, funcţia Dirichlet definită pe $[0,1]$, nu este integrabilă pe acest segment.

Teorema 1. Pentru o funcţie $f(x), x \in [a,b]$ următoarele propoziţii sunt echivalente:

(α) f este integrabilă pe $[a,b]$,

(β) există un număr real I, astfel încât oricare ar fi şirul de diviziuni $\{d_n\} = \left\{\left(x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, ..., x_{k_n}^{(n)}\right)\right\}, n \in N$, ale segmentului $[a,b]$ cu $\lim\limits_{n\to\infty}\|d_n\| = 0$ şi oricare ar fi punctele intermediare $x_{i-1}^{(n)} \le \xi_i^{(n)} \le x_i^{(n)}, (1 \le i \le k_n, n \in N)$, şirul valorilor sumei Riemann $\left\{\sigma_{d_n}\left(f, \xi^{(n)}\right)\right\}, n \in N$, converge către I.

Demonstraţie. $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$. Presupunem că funcţia f este integrabilă şi vom arăta că are loc afirmaţia (β).

Fie $\{d_n\} = \left\{\left(a = x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, ..., x_{k_n}^{(n)} = b\right)\right\}, n \in N$, un şir de diviziuni ale segmentului $[a,b]$, astfel încât

$$\lim_{n\to\infty}\|d_n\| = 0 \quad (6)$$

şi fie punctele intermediare $\xi_i^{(n)} \in \left[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}\right], (1 \le i \le k_n, n \in N)$.

Funcţia f, fiind integrabilă pe $[a,b]$, există un număr real I cu proprietatea: pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$, astfel încât oricare ar fi diviziunea d cu $\|d\| < \delta$ şi, oricare ar fi punctele intermediare ξ_i, are loc inegalitatea

$$|\sigma_d(f,\xi) - I| < \varepsilon. \quad (7)$$

Din relaţia (6) rezultă că există un număr natural $N(\varepsilon)$, astfel încât

$$\forall n > N(\varepsilon): \|d_n\| < \delta.$$

Deci, ţinând seama de relaţia (7), obţinem

$$\forall n > N(\varepsilon): \left|\sigma_{d_n}(f,\xi) - I\right| < \varepsilon,$$

adică

$$\lim_{\|d_n\|\to 0}\sigma_{d_n}(f,\xi) = I.$$

Arătăm acum că $(\beta) \Rightarrow (\alpha)$. Să presupunem că f verifică condiţia (β) şi să demonstrăm că f este integrabilă pe $[a,b]$, mai precis, că numărul I, care figurează în afirmaţia (β), coincide cu integrala definită a lui f.

Dacă numărul I din (β) nu ar fi integrala definită a lui f, atunci ar exista un număr $\varepsilon_0 > 0$, astfel încât oricare ar fi $\delta > 0$, există o diviziune

$$d^* = \left(x_0^*, x_1^*, ..., x_k^*\right)$$

a lui $[a, b]$ cu $\|d^*\| < \delta$ şi există punctele intermediare $x_{i-1}^* \le \xi_i^* \le x_i^*$, $(1 \le i \le k)$ astfel încât $\left|\sigma_{d^*}(f,\xi^*) - I\right| \ge \varepsilon_0$. Luând în particular $\delta = \frac{1}{n}, n \in N$, obţinem un şir de diviziuni $d_n = \left(x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, ..., x_{k_n}^{(n)}\right)$ a lui $[a,b]$ cu

$$\|d_n\| < \frac{1}{n} \quad (8)$$

şi un sistem de puncte intermediare

astfel încât

$$x_{i-1}^{(n)} \le \xi_i^{(n)} \le x_i^{(n)}, (1 \le i \le k)$$

$$\left|\sigma_{d_n}\left(f, \xi^{(n)}\right) - I\right| \ge \varepsilon_0, n \in N. \qquad (9)$$

Din inegaliatatea (8) rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\|d_n\| = 0$, iar din inegaliatatea (9) avem că şirul valorilor sumei Riemann $\{\sigma_{d_n}(f, \xi^{(n)})\}$, $n \in N$, nu converge către I, ceea ce contrazice ipoteza afirmaţiei (β).

Teorema este demonstrată.

Teorema 2. Dacă funcţia f este integrabilă pe $[a,b]$, atunci ea este mărginită pe acest segment.

Demonstraţie. Presupunem că funcţia f, integrabilă pe $[a,b]$, nu este mărginită pe acest segment. Considerăm o diviziune arbitrară $d = (x_0 = a, x_1, ..., x_n = b)$ a segmentului $[a,b]$. Conform presupunerii, funcţia f este nemărginită. Deci există cel puţin un segment parţial al acestei diviziuni în care f este nemărginită. Admitem că acest segment parţial este $[a, x_1]$. Fixând pe segmentele parţiale

$$[x_1, x_2], [x_2, x_3], ..., [x_{n-1}, b]$$

punctele intermediare $\xi_2, \xi_3, ..., \xi_n$, scriem suma

$$f(\xi_2)(x_2 - x_1) + f(\xi_3)(x_3 - x_2) + ... + f(\xi_n)(b - x_{n-1}) =$$

$$= \sum_{i=2}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=2}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Această sumă nu este o sumă integrală, deoarece lipseşte termenul ce corespunde segmentului parţial $[a, x_1]$ pe care funcţia f este nemărginită.

Deoarece f este nemărginită pe $[a, x_1]$, punctul intermediar ξ_1 care corespunde acestui segment poate fi ales astfel încât valoarea absolută a produsului $f(\xi_1)(x_1 - a) = f(\xi_1)\Delta x_1$ să fie mai mare decât orice număr dinainte dat. În particular, punctul ξ_1 poate

fi ales în aşa fel încât suma $f(\xi_1)\cdot\Delta x_1 + \sum\limits_{i=2}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ adică suma integrală $\sigma_d(f,\xi) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ a funcţiei f pe $[a,b]$, să fie în valoarea absolută mai mare decât orice număr dinainte dat.

Întrucât pentru orice diviziune d a segmentului $[a,b]$ se vor găsi valori ale sumei integrale oricât de mari în valoare absolută, rezultă că nu există o limită finită a sumei integrale a funcţiei f pe $[a,b]$ când pasul diviziunii tinde către zero.

Contradicţia obţinută confirmă justeţea teoremei.

Nota 3. La definirea integralei definite $\int\limits_a^b f(x)dx$ se presupunea că limita inferioară a este mai mică decât limita superioară b. Să extindem definiţia integralei asupra cazului când $a > b$. Anume, dacă f este o funcţie integrabilă pe segmentul $[b,a]$, vom admite, prin definiţie, că

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx .$$

Lucrul acesta este normal, deoarece dacă la calcularea sumelor Riemann pentru integralele $\int\limits_a^b f(x)dx$ şi $\int\limits_b^a f(x)dx$, $a > b$ se consideră aceleaşi diviziuni d_n şi aceleaşi puncte intermediare ξ_i asociate diviziunilor d_n, atunci sumele integrale (Riemann) corespunzătoare se vor deosebi numai prin semn, ceea ce înseamnă că la limită se va obţine egalitatea de mai sus.

În cazul când $a = b$, de asemenea se adoptă prin definiţie că $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$ pentru orice funcţie $f(x)$.

4.2.2. Sumele Darboux

Fie f o funcţie mărginită pe segmentul $[a,b]$, iar m şi M – marginea inferioară exactă, respectiv marginea superioară exactă a valorilor ei pe acest segment, adică $m \le f(x) \le M$ pentru orice

$x \in [a,b]$ şi numărul m este cel mai mare, iar numărul M este cel mai mic, care satisfac inegalităţile duble.

Considerăm o diviziune $d = (x_0 = a, x_1, ..., x_n = b)$ a lui $[a,b]$ în segmente parţiale $[x_{i-1}, x_i]$, $(1 \le i \le n)$. Funcţia f, fiind mărginită pe $[a,b]$, este mărginită pe aceste segmente. Notăm prin m_i şi M_i marginea inferioară exactă şi marginea superioară exactă a funcţiei f pe $[x_{i-1}, x_i]$, $(1 \le i \le n)$. Formăm sumele

$$s = s_d = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i \text{ şi } S = S_d = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i .$$

Aceste sume depind numai de diviziunea segmentului $[a,b]$ în segmente parţiale.

Suma s se numeşte *sumă inferioară*, iar suma S se numeşte *sumă superioară ale lui Darboux.*

Dacă funcţia f este continuă pe $[a,b]$, atunci m_i şi M_i coincid respectiv cu valoarea cea mai mică şi valoarea cea mai mare a funcţiei f pe segmentul parţial $[x_{i-1}, x_i]$, $(1 \le i \le n)$. În acest caz sumele Darboux reprezintă două valori ale sumei integrale (Riemann) a funcţiei f pe $[a,b]$.

Să deducem unele proprietăţi ale sumelor Darboux.

1. Dacă funcţia f este mărginită pe $[a,b]$, adică $\forall x \in [a,b]: m \le f(x) \le M$, unde m este marginea inferioară exactă, iar M este marginea superioară exactă a lui f, atunci $m(b-a) \le s \le S \le M(b-a)$ pentru orice diviziune d a segmentului $[a,b]$.

Într-adevăr, fie $d = (x_0 = a, x_1, ..., x_n = b)$ o diviziune a lui $[a,b]$ şi notăm prin m_i şi M_i respectiv marginea inferioară exactă şi marginea superioară exactă a funcţiei f pe segmentul parţial $[x_{i-1}, x_i]$, $(1 \le i \le n)$.

Deoarece $m \le m_i \le M_i \le M$ pentru orice $i = 1,2,...,n$, avem
$m(x_i - x_{i-1}) \le m_i(x_i - x_{i-1}) \le M_i(x_i - x_{i-1}) \le M(x_i - x_{i-1})$.

Deci

$$\sum_{i=1}^{n} m(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} M(x_i - x_{i-1})$$

sau $m(b-a) \le s \le S \le M(b-a)$, ceea ce trebuia de demonstrat.

2. Dacă funcţia f este definită şi mărginită pe $[a,b]$, atunci între sumele Darboux şi suma Riemann există următoarea relaţie
$$s \le \sigma \le S .$$

Într-adevăr, fie $d = (x_0 = a, x_1, ..., x_n = b)$ o diviziune a segmentului $[a,b]$ în segmente parţiale $[x_{i-1}, x_i]$, $(1 \le i \le n)$. Avem
$$\forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]: m_i \le f(\xi_i) \le M_i, (1 \le i \le n),$$
unde m_i şi M_i sunt marginile inferioară exactă şi superioară exactă ale funcţiei f pe $[x_{i-1}, x_i]$. Dacă înmulţim cu $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} > 0$ şi însumăm inegalitatea de mai sus, obţinem $s \le \sigma \le S$.

Să observăm că pentru o diviziune dată d avem o infinitate de valori ale sumei integrale (Riemann), însă numai două sume Darboux: s şi S.

3. Fie funcţia f definită şi mărginită pe $[a,b]$. Dacă diviziunea d_2 este mai fină decât diviziunea d_1, atunci $s_{d_1} \le s_{d_2} \le S_{d_2} \le S_{d_1}$, adică sumele inferioare nu descresc (pot doar să se mărească), iar sumele superioare nu cresc (pot doar să se micşoreze), dacă trecem de la o diviziune la o alta mai fină.

Demonstraţie. Dacă $[x_{i-1}, x_i]$ este un segment parţial al diviziunii d_1, atunci punctele x_{i-1}, x_i aparţin şi diviziunii $d_2 \supset d_1$, însă pe $[x_{i-1}, x_i]$ pot exista şi alte puncte ale diviziunii d_2:
$$t_0 = x_{i-1} < t_1 < t_2 < ... < t_r = x_i .$$

Dacă $m_{i1}, m_{i2}, ..., m_{ir}$ şi $M_{i1}, M_{i2}, ..., M_{ir}$ sunt respectiv marginile inferioare exacte şi marginile superioare exacte ale funcţiei f pe segmentele
$$[x_{i-1}, t_1], [t_1, t_2] ... [t_{r-1}, x_i],$$
atunci $m_i \le m_{ik} \le M_{ik} \le M_i$ pentru orice $i=1, 2, ..., n$ şi $k=1, 2, ..., r$.

Deci

$$m_i(t_k - t_{k-1}) \le m_{ik}(t_k - t_{k-1}) \le M_{ik}(t_k - t_{k-1}) \le M_i(t_k - t_{k-1})$$

şi, însumând ultima relaţie după indicele $k = 1,2,\ldots,r$, obţinem

$$m_i \sum_{k=1}^{r}(t_k - t_{k-1}) \le \sum_{k=1}^{r} m_{ik}(t_k - t_{k-1}) \le \sum_{k=1}^{r} M_{ik}(t_k - t_{k-1}) \le \sum_{k=1}^{r} M_i(t_k - t_{k-1})$$

sau

$$m_i(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{k=1}^{r} m_{ik}(t_k - t_{k-1}) \le \sum_{k=1}^{r} M_{ik}(t_k - t_{k-1}) \le M_i(x_i - x_{i-1}),$$

deoarece lungimea segmentului $[x_{i-1}, x_i]$ este egală cu suma lungimilor segmentelor $[x_{i-1}, t_1]$, $[t_1, t_2]$ ... $[t_{m-1}, x_i]$.

Însumând acum ultima relaţie după indicele $i = 1,2,\ldots,n$, obţinem

$$s_{d_1} \le s_{d_2} \le S_{d_2} \le S_{d_1},$$

ceea ce trebuia de demonstrat.

4. Fie f definită şi mărginită pe $[a, b]$. Atunci orice sumă inferioară Darboux nu depăşeşte nici o sumă superioară Darboux.

Într-adevăr, fie d_1 şi d_2 două diviziuni oarecare ale segmentului $[a,b]$. Vom demonstra că $s_{d_1} \le S_{d_2}$ şi $s_{d_2} \le S_{d_1}$. Pentru aceasta considerăm diviziunea $d = d_1 \cup d_2$. Deoarece d este mai fină decât d_1 şi d_2, conform proprietăţii precedente, avem

$$s_{d_1} \le s_d \le S_d \le S_{d_1} \quad \text{şi} \quad s_{d_2} \le s_d \le S_d \le S_{d_2}.$$

Din aceste două relaţii obţinem $s_{d_1} \le s_d \le S_d \le S_{d_2}$ şi deci $s_{d_1} \le S_{d_2}$. Similar, avem $s_{d_2} \le s_d \le S_d \le S_{d_1}$ şi deci $s_{d_2} \le S_{d_1}$.

5. Fie f definită şi mărginită pe $[a,b]$ şi $d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots$ un şir de diviziuni ale segmentului $[a,b]$, astfel încât $d_1 \subset d_2 \subset \ldots \subset d_n \subset \ldots$ şi $\|d_1\| \ge \|d_2\| \ge \ldots \ge \|d_n\| \ge \ldots$ cu $\lim_{n\to\infty}\|d_n\| = 0$. Atunci şirurile $\{S_{d_n}\}$ şi $\{s_{d_n}\}$ sunt convergente şi $\lim_{\|d_n\|\to 0} s_{d_n} = l \le \lim_{\|d_n\|\to 0} S_{d_n} = L$, $n \in N$.

Într-adevăr, conform proprietăţilor precedente 1 şi 3 şirurile $\{S_{d_n}\}$ şi $\{s_{d_n}\}$ sunt mărginite şi monotone. Aplicând teorema 7 din 1.4.2 şi consecinţa din teorema 2 din 1.4.3, obţinem

$$\lim_{\substack{\|d_n\|\to 0\\(n\to\infty)}} s_{d_n} = l \le \lim_{\substack{\|d_n\|\to 0\\(n\to\infty)}} S_{d_n} = L.$$

6. Fie funcţia f definită şi mărginită pe $[a,b]$ şi $d = (x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b)$ – o diviziune a lui $[a,b]$. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ punctele ξ_i de pe segmentele parţiale $[x_{i-1}, x_i]$, $(1 \le i \le n)$ pot fi alese astfel încât suma integrală (Riemann) σ să verifice inegalitatea $0 \le S - \sigma < \varepsilon$. Punctele ξ_i pot fi alese astfel încât suma integrală (Riemann) să verifice inegalitatea $0 \le \sigma - s < \varepsilon$, unde s şi S - sumele Darboux.

Demonstraţie. Fie $d = (x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b)$ o diviziune a lui $[a,b]$ în segmente parţiale $[x_{i-1}, x_i]$, $(1 \le i \le n)$. Notăm prin M_i şi m_i marginea superioară exactă şi marginea inferioară exactă a funcţiei f pe $[x_{i-1}, x_i]$. Deoarece M_i este cel mai mic număr cu proprietatea $\forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]: f(\xi_i) \le M_i$ şi m_i este cel mai mare număr cu proprietatea $\forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]: f(\xi_i) \ge m_i$, avem: pentru orice $\varepsilon > 0$ există ξ_i' şi ξ_i'', astfel încât $f(\xi_i') > M_i - \dfrac{\varepsilon}{b-a}$ şi

$$f(\xi_i'') < m_i + \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \text{sau} \quad 0 \le M_i - f(\xi_i') < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \text{şi}$$

$$0 \le f(\xi_i'') - m_i < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Înmulţind cu $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ aceste relaţii obţinem:

$$0 \le f(\xi_i'')\Delta x_i - m_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_i, \quad 0 \le M_i \Delta x_i - f(\xi_i')\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_i$$

şi însumându-le după indicele $i (i = 1,2,\ldots,n)$ avem $0 \le \sigma'' - s < \varepsilon$ şi $0 \le S - \sigma' < \varepsilon$, ceea ce trebuia de demonstrat.

Teorema 1 (criteriul Darboux de integrabilitate). Pentru ca funcţia f definită şi mărginită pe $[a,b]$ să fie integrabilă pe acest segment, este necesar şi suficient ca

$$\lim_{\|d\|\to 0}(S_d - s_d) = 0,$$

ceea ce înseamnă că pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta > 0$, care în general depinde de ε, astfel încât pentru orice diviziune d a segmentului $[a,b]$ cu $\|d\| < \delta$ să fie verificată inegalitatea $|S_d - s_d| = S_d - s_d < \varepsilon$.

Demonstraţie. Condiţia este necesară. Fie f mărginită şi integrabilă pe $[a,b]$, adică există integrala definită $I = \int_a^b f(x)dx$. Aceasta înseamnă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$, astfel încât pentru orice diviziune d a segmentului $[a,b]$, ce satisface condiţia $\|d\| < \delta$, indiferent de alegerea punctelor intermediare ξ_i, asociate diviziunii d, are loc inegalitatea

$$|\sigma_d(f,\xi) - I| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{1}$$

Pentru aceste diviziuni d ale segmentului $[a,b]$, conform proprietăţii 6 a sumelor Darboux, există două valori ale sumei integrale $\sigma_d'(f,\xi')$ şi $\sigma_d''(f,\xi'')$, astfel încât $S_d - \sigma_d'(f,\xi') < \frac{\varepsilon}{4}$ şi $\sigma_d''(f,\xi'') - s_d < \frac{\varepsilon}{4}$. Observăm că valorile sumei integrale $\sigma_d'(f,\xi')$ şi $\sigma_d''(f,\xi'')$ verifică inegalitatea (1).

Prin urmare,

$$S_d - s_d =$$

$$= |[S_d - \sigma_d'(f,\xi')] + [\sigma_d'(f,\xi') - I] + [I - \sigma_d''(f,\xi'')] + [\sigma_d''(f,\xi'') - s_d]| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon,$$

ceea ce înseamnă că $\lim_{\|d\|\to 0}(S_d - s_d) = 0$.

Condiţia este suficientă. Fie $\lim_{\|d\|\to 0}(S_d - s_d) = 0$, conform proprietăţilor 5 şi 4 ale sumelor Darboux, avem

$$s_d \le \lim_{\|d\|\to 0} s_d = l \le \lim_{\|d\|\to 0} S_d = L \le S_d.$$

De aceea $0 \le (L - l) \le S_d - s_d < \varepsilon$ pentru orice număr $\varepsilon > 0$. Deci $L = l$. Notăm prin $I = L = l$ şi obţinem inegalitatea

$$s_d \le I \le S_d \tag{2}$$

pentru orice diviziune d a segmentului $[a,b]$ cu $\|d\| \to 0$. Dar dacă S_d şi s_d corespund aceleiaşi diviziuni d a lui $[a,b]$, atunci, conform proprietăţii 2 a sumelor Darboux, avem

$$s_d \le \sigma_d(f,\xi) \le S_d. \tag{3}$$

Din inegalităţile (2) şi (3) obţinem

$$|I - \sigma_d(f,\xi)| \le S_d - s_d.$$

Conform condiţiei, $\lim_{\|d\|\to 0}(S_d - s_d) = 0$, ceea ce înseamnă că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$, astfel încât pentru orice diviziune d a segmentului $[a,b]$ cu $\|d\| < \delta$ avem $|I - \sigma_d(f,\xi)| \le S_d - s_d < \varepsilon$, adică funcţia f este integrabilă pe $[a,b]$.

Teorema este demonstrată.

Notă. Pe parcurs vom utiliza o altă formă a criteriului Darboux de integrabilitate. Notăm variaţia $M_i - m_i$ a funcţiei $f(x)$ pe $[x_{i-1}, x_i]$, $(1 \le i \le n)$ prin ω_i şi obţinem

$$S_d - s_d = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i.$$

Deoarece $m_i \le M_i$ şi $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} > 0$, rezultă că fiecare termen din ultima sumă este nenegativ. Deci criteriul de integrabilitate a funcţiei f mărginită pe $[a,b]$ poate fi formulat astfel: *pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta > 0$, care, în general, depinde de ε, astfel încât $\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$ pentru orice diviziune d a segmentului $[a,b]$ cu $\|d\| < \delta$.*

Cu ajutorul criteriului Darboux de integrabilitate vom evidenţia unele clase de funcţii integrabile.

***Teorema** 2.* Orice funcţie continuă pe un segment este integrabilă pe acest segment.

Demonstraţie. Deoarece funcţia f este continuă pe $[a,b]$, atunci, conform teoremei lui Cantor (vezi 1.6.4), funcţia f este uniform continuă pe $[a,b]$. Vom demonstra mai întâi *următoarea propoziţie*: pentru orice $\varepsilon>0$ există un $\delta>0$, astfel încât, dacă d este o diviziune oarecare a lui $[a,b]$ cu $\|d\|<\delta$, variaţia ω_i a funcţiei f pe fiecare din aceste segmente parţiale $[x_{i-1},x_i]$, $(1\le i\le n)$ este mai mică decât ε.

Într-adevăr, deoarece f este uniform continuă pe $[a,b]$, avem: pentru orice $\varepsilon>0$ există un $\delta>0$, astfel încât pentru orice două puncte c_1 şi c_2 din $[a,b]$, ce verifică inecuaţia $|c_1-c_2|<\delta$, să avem inegalitatea $|f(c_1)-f(c_2)|<\varepsilon$. Fie d o diviziune a segmentului $[a,b]$ cu $\|d\|<\delta$. Întrucât f este continuă pe $[a,b]$, pe fiecare din segmentele parţiale $[x_{i-1},x_i]$ cu $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}<\delta$ pot fi indicate două puncte c_1 şi c_2, astfel încât $f(c_1)$ coincide cu valoarea cea mai mică m_i, iar $f(c_2)$ coincide cu valoarea cea mai mare M_i a segmentului $[x_{i-1},x_i]$ (vezi teorema 4 din 1.6.3). Deoarece $|c_1-c_2|\le(x_i-x_{i-1})=\Delta x_i<\delta$, rezultă $|f(c_2)-f(c_1)|<\varepsilon$. Dar $f(c_2)-f(c_1)=M_i-m_i=\omega_i$, deci $\omega_i<\varepsilon$.

Trecem acum la demonstraţia teoremei.

Fie $\varepsilon>0$. Conform propoziţiei demonstrate mai sus pentru numărul pozitiv $\dfrac{\varepsilon}{b-a}$ există un număr pozitiv δ, astfel încât la divizarea segmentului $[a,b]$ în segmente parţiale $[x_{i-1},x_i]$, $(1\le i\le n)$ de lungimea $\Delta x_i<\delta$ variaţiile ω_i ale funcţiei f sunt mai mici decât $\dfrac{\varepsilon}{b-a}$.

Deci $S_d-s_d=\sum\limits_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i\le\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_i=$

$$=\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon,\ \text{pentru } \Delta x_i<\delta.$$

Conform criteriului de integrabilitate Darboux funcţia f este integrabillă pe $[a,b]$.

Teorema 3. Orice funcţie monotonă pe un segment este integrabilă pe acest segment.

Demonstraţie. Dacă f este constantă, atunci (exemplul 1 din 4.2.1) funcţia f este integrabilă pe $[a,b]$.

Considerăm cazul când f nu este constantă. În acest caz $|f(a)-f(b)|>0$. Presupunem că f este crescătoare şi pentru orice $\varepsilon>0$ notăm $\delta=\dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. Fie $d=(x_0,x_1,\dots,x_n)$ o diviziune a lui $[a,b]$ astfel încât $\|d\|<\delta$. Funcţia f fiind crescătoare, avem $f(x_{i-1})=m_i$, $f(x_i)=M_i$, unde m_i şi M_i – respectiv marginea inferioară exactă şi marginea superioară exactă a funcţiei f pe segmentul parţial $[x_{i-1},x_i]$, $(1\le i\le n)$, de unde

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})]\Delta x_i\le$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})]\cdot\|d\|=\|d\|\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})]=\|d\|[f(b)-f(a)]<$$

$$<\delta\cdot[f(b)-f(a)]=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\cdot[f(b)-f(a)]=\varepsilon.$$

Deci, conform criteriului Darboux de integrabilitate, funcţia f este integrabilă pe $[a,b]$.

Dacă însă funcţia f este descrescătoare, demonstraţia este similară celeia de mai sus, cu o singură deosebire că $\delta = \frac{\varepsilon}{f(a)-f(b)}$ şi $m_i = f(x_i)$, $M_i = f(x_{i-1})$.

4.2.3 Proprietăţile fundamentale ale integralei definite

În paragraful acesta se presupune existenţa tuturor integralelor definite ce intră în formulele demonstrate.

Menţionăm următoarele proprietăţi ale integralelor definite.

1. Un factor constant poate fi scos în faţa integralei, adică

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx,\ k \in R.$$

Într-adevăr, pentru orice diviziune $d = (x_0 = a, x_1, ..., x_n = b)$ a segmentului $[a,b]$ şi orice alegere a punctelor intermediare ξ_i, asociate diviziunii d, avem $\sum_{i=1}^{n} kf(\xi_i)\Delta x_i = k\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, de unde

$$\int_a^b kf(x)dx = \lim_{\|d\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} kf(\xi_i)\Delta x_i = k\lim_{\|d\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = k\int_a^b f(x)dx,$$

ceea ce trebuia de demonstrat.

2. Integrala definită a unei sume algebrice de două funcţii este egală cu suma algebrică a integralelor definite ale acestor funcţii, adică $\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$.

Într-adevăr, pentru orice diviziune $d = (x_0 = a, x_1, ..., x_n = b)$ a segmentului $[a,b]$ şi orice alegere a punctelor intermediare ξ_i, asociate acestei diviziuni, avem

$$\sum_{i=1}^{n}[f_1(\xi_i) \pm f_2(\xi_i)]\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\Delta x_i \pm \sum_{i=1}^{n} f_2(\xi_i)\Delta x_i.$$

Deoarece

$$\lim_{\|d\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f_1(x)dx \quad \text{şi} \quad \lim_{\|d\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f_2(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f_2(x)dx,$$

rezultă că $\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \lim_{\|d\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}[f_1(\xi_i) \pm f_2(\xi_i)]\Delta x_i =$

$$= \lim_{\|d\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\Delta x_i \pm \lim_{\|d\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f_2(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx,$$

ceea ce trebuia de demonstrat.

Notă. Proprietatea 2 este valabilă pentru orice număr finit de termeni.

Deşi proprietăţile 1 şi 2 au fost demonstrate pentru cazul $a < b$, ele rămân în vigoare şi pentru $a \geq b$.

3. Dacă pe segmentul $[a,b]$, funcţiile $f_1(x)$ şi $f_2(x)$ satisfac condiţia $f_1(x) \leq f_2(x)$, atunci $\int_a^b f_1(x)dx \leq \int_a^b f_2(x)dx$.

Într-adevăr, considerăm funcţia $\varphi(x) = f_2(x) - f_1(x)$, care este nenegativă pe $[a,b]$. Fie $d = (x_0 = a, x_1, ..., x_n = b)$ o diviziune a lui $[a,b]$ şi ξ_i punctele intermediare, asociate acestei diviziuni. Atunci suma integrală (Riemann)

$$\sigma_d(\varphi,\xi) = \sum_{i=1}^{n}\varphi(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f_2(\xi_i)\Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\Delta x_i$$

este nenegativă, deoarece $f_2(\xi_i) \geq f_1(\xi_i)$ şi $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} > 0$. Observăm că şi limita ei, când $\|d\| \to 0$, este de asemenea nenegativă, adică

$$\lim_{\|d\|\to 0}\sigma_d(\varphi,\xi) = \int_a^b \varphi(x)dx \geq 0.$$

Într-adevăr, presupunem contrariul, adică fie $I = \int_a^b \varphi(x)dx < 0$. Atunci, conform definiţiei integralei definite, avem: pentru $\varepsilon = \frac{1}{2}|I| > 0$, există $\delta > 0$, astfel încât pentru $\|d\| < \delta$ valorile sumei integrale $\sigma_d(f,\xi)$ satisfac inegalitatea $|\sigma(f,\xi) - I| < \varepsilon = \frac{1}{2}|I|$, adică $I - \frac{I}{2}|I| < \sigma_d(f,\xi) < I + \frac{I}{2}|I|$.

Prin urmare, $\sigma_d(f,\xi) < I + \frac{I}{2}|I| = \frac{I}{2}I < 0$. Contrazicerea obținută demonstrează că $\int_a^b \varphi(x)dx \geq 0$, adică $\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx \geq 0$.

În virtutea proprietății 2 de mai sus, obținem $\int_a^b f_2(x)dx \geq \int_a^b f_1(x)dx$, ceea ce trebuia de demonstrat.

4. $\int_a^b dx = b - a$ pentru orice numere reale a și b.

Observăm că egalitatea este satisfăcută în cazul când $a=b$. Fie $a < b$, atunci

$$\int_a^b dx = \int_a^b 1 \cdot dx = \lim_{\|d\| \to 0} \sigma_d(1,\xi) = \lim_{\|d\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = \lim_{\|d\| \to 0} (b-a) = b - a.$$

Dacă însă $a > b$, atunci, conform notei din 4.2.1, avem

$$\int_a^b dx = -\int_b^a dx = -(a-b) = b - a.$$

5. Pentru orice funcție $f(x)$, definită pe segmentul $[a,b]$, are loc inegalitatea $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

Într-adevăr, aplicând proprietatea 3 la inegalitatea dublă

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|, \quad x \in [a,b],$$

avem
$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

sau
$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Consecință. Dacă $|f(x)| \leq k$ pentru orice $x \in [a,b]$, atunci

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq k(b-a).$$

Într-adevăr, din inegalitatea $|f(x)| \leq k$ și proprietățile 5, 3, 1 și 4, obținem

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b kdx = k\int_a^b dx = k(b-a),$$

ceea ce trebuia de demonstrat.

6. Dacă $f(x)$ este definită pe segmentul $[a,b]$ și M, m sunt respectiv valorile cea mai mare și cea mai mică a funcției f pe $[a,b]$, atunci

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Într-adevăr, conform ipotezei, avem $m \leq f(x) \leq M$, $x \in [a,b]$. Aplicând consecutiv proprietățile 3, 1 și 4 la această inegalitate dublă, obținem

$$\int_a^b mdx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M\,dx \quad \text{sau} \quad m\int_a^b dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq M\int_a^b dx,$$

adică $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$, ceea ce trebuia de demonstrat.

7. Pentru orice numere reale a, b, c are loc egalitatea

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Demonstrație. Fie $a<c<b$ și compunem suma integrală (Riemann) pentru funcția f, definită pe segmentul $[a,b]$. Deoarece limita sumei integrale $\sigma_d(f,\xi)$ când $\|d\|\to 0$ nu depinde de modul de împărțire a lui $[a,b]$ în segmente parțiale, vom împărți $[a,b]$ în segmente parțiale astfel încât punctul c să fie punct de diviziune. Descompunem $\sigma_d(f,\xi)$ pe $[a,b]$ în două sume integrale $\sigma'_{d_1}(f,\xi)$, ce corespunde segmentului $[a,c]$ și $\sigma''_{d_2}(f,\xi)$, ce corespunde segmentului $[c,b]$.

Avem $\sigma_d(f,\xi)=\sigma'_{d_1}(f,\xi)+\sigma''_{d_2}(f,\xi)$, unde $d=d_1\cup d_2$. Trecând la limită când $\|d\|\to 0$, adică $\|d_1\|\to 0$ și $\|d_2\|\to 0$, obținem $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx$.

Dacă însă $a<b<c$, atunci, în baza celor demonstrate mai sus, avem

$$\int\limits_a^c f(x)dx=\int\limits_a^b f(x)dx+\int\limits_b^c f(x)dx,$$

de unde $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx-\int\limits_b^c f(x)dx$. Întrucât $\int\limits_c^b f(x)dx=-\int\limits_b^c f(x)dx$, rezultă $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx$.

În mod analog se demonstrează această proprietate și pentru orice altă amplasare a punctelor *a, b, c*.

8. *Teorema generalizată despre medie.*

Dacă funcțiile f și g sunt continue pe $[a,b]$ și funcția g își păstrează semnul constant pe $[a,b]$, atunci există cel puțin un punct ξ pe $[a,b]$ încât $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int\limits_a^b g(x)dx$.

Demonstrație. Dacă $g(x)=0$, pentru orice $x\in[a,b]$, atunci afirmația teoremei este evidentă. Fie $g(x)\neq 0$ și presupunem, de

exemplu, că $g(x)\geq 0$ pentru orice x din $[a,b]$. Conform teoremei Weierstrass, funcția continuă f atinge pe $[a,b]$ valoarea cea mai mare și valoarea cea mai mică (să le notăm respectiv prin M și m), adică

$$m\leq f(x)\leq M,\ x\in[a,b].$$

Înmulțind cu $g(x)\geq 0$, obținem inegalitatea dublă

$$m\cdot g(x)\leq f(x)\cdot g(x)\leq M\cdot g(x).$$

Aplicând proprietățile 3 și 1, avem

$$m\cdot\int\limits_a^b g(x)dx\leq\int\limits_a^b f(x)dx\leq M\cdot\int\limits_a^b g(x)dx. \qquad (1)$$

Vom arăta mai întâi că $\int\limits_a^b g(x)dx>0$.

Deoarece $g(x)\neq 0,\ x\in[a,b]$, există un punct $x_0\in[a,b]$, astfel încât $g(x_0)>0$. În baza continuității lui g în punctul x_0, avem $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0:|x-x_0|<\delta\Rightarrow|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon$.

În particular, dacă $\varepsilon=\dfrac{g(x_0)}{2}$, obținem $|g(x)-g(x_0)|<\dfrac{g(x_0)}{2}$, de unde $g(x_0)-\dfrac{g(x_0)}{2}<g(x)<g(x_0)+\dfrac{g(x_0)}{2}$, adică $g(x)>\dfrac{g(x_0)}{2}>0$, pentru orice x ce satisface condiția $|x-x_0|<\delta$. Considerăm $[\alpha,\beta]$, astfel încât $\beta-\alpha<\delta$ și $x_0\in[\alpha,\beta]$. Deci $g(x)>0$, pentru orice $x\in[\alpha,\beta]$ și $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$. Aplicând consecutiv proprietățile 7, 3, 1 și 4, obținem

$$\int\limits_a^b g(x)dx=\int\limits_a^\alpha g(x)dx+\int\limits_\alpha^\beta g(x)dx+\int\limits_\beta^b g(x)dx\geq\int\limits_\alpha^\beta g(x)dx\geq\int\limits_\alpha^\beta\frac{g(x_0)}{2}dx=$$

$$=\frac{g(x_0)}{2}\int\limits_\alpha^\beta dx=\frac{g(x_0)}{2}(\beta-\alpha)>0,$$

deoarece $g(x_0)>0$ și $\beta>\alpha$.

Prin urmare, am arătat că $\int_a^b g(x)dx > 0$. Împărţind la numărul $\int_a^b g(x)dx > 0$, relaţia (1) se transformă în următoarea relaţie

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M .$$

Funcţia *f*, fiind continuă pe $[a,b]$, ia toate valorile intermediare între *m* şi *M*. Deci există un punct $\xi \in [a,b]$, astfel încât

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = f(\xi)$$

sau, ceea ce este acelaşi lucru, $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$.

Dacă însă $g(x) \leq 0$ pe $[a,b]$, atunci $-g(x) \geq 0$ şi deci, conform celor demonstrate în prima parte a teoremei, există un punct $\xi \in [a,b]$, astfel încât $\int_a^b f(x)[-g(x)]dx = f(\xi)\int_a^b [-g(x)]dx$, de unde, în baza proprietăţii 1, rezultă că $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$.

Deci teorema generalizată despre medie este complet demonstrată.

Consecinţă (teorema despre medie). Dacă funcţia f este continuă pe $[a,b]$, atunci există cel puţin un punct $\xi \in [a,b]$, astfel

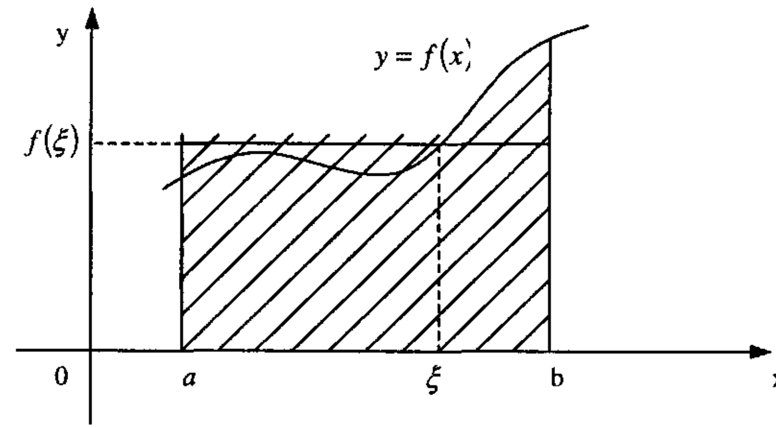
încât $$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Într-adevăr, considerăm funcţia auxiliară $g(x)=1$ pentru orice $x \in [a,b]$, care este pozitivă şi continuă pe $[a,b]$. Conform teoremei de mai sus şi a proprietăţii 4, avem $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)\int_a^b 1 \cdot dx = f(\xi)(b-a)$. Formula obţinută se numeşte *formula valorii medii*, iar mărimea

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

se numeşte *valoarea medie a funcţiei f pe* $[a,b]$.

Formula valorii medii admite următoarea interpretare geometrică: valoarea integralei definite pentru $f(x) \geq 0$ este egală cu aria unui dreptunghi de înălţime $f(\xi)$ şi bază $(b-a)$ sau aria trapezului curbiliniu mărginit de graficul funcţiei f (nenegativă şi continuă pe $[a,b]$), de dreptele $x=a$, $x=b$ şi de axa *OX* este egală cu aria unui dreptunghi cu baza $(b-a)$ şi cu înălţimea egală cu valoarea funcţiei f într-un oarecare punct "mediu" ξ al segmentului $[a,b]$.



Subliniem că formula $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$ are loc şi în cazul când $a > b$, adică pentru funcţia f continuă pe segmentul $[b,a]$. În acest caz avem $b \le \xi \le a$.

9. Schimbarea valorilor funcţiei integrabile într-un număr finit de puncte ale unui segment nu influenţează asupra mărimii integralei definite pe acest segment.

Justeţea acestei afirmaţii rezultă din integrabilitatea funcţiei date şi a funcţiei modificate, precum şi din faptul că pentru orice diviziune arbitrar de fină a segmentului de integrare există valori ale sumei integrale pentru aceste funcţii, care coincid între ele. Pentru construirea acestor sume e suficient să alegem punctele ξ_i în aşa fel ca ele să nu coincidă cu punctele în care aceste funcţii sunt diferite (integrala definită doar nu depinde nici de modul de divizare al segmentului de integrare, nici de alegerea punctelor intermediare ξ_i pe segmentele parţiale asociate diviziunii date).

Notă. Proprietăţile 7 şi 9 ne vor permite în viitor să calculăm integralele definite ale unor funcţii, care au un număr finit de puncte de discontinuitate de speţa I pe segmentul de integrare şi să reducem această operaţie la calcularea integralei definite de la o funcţie continuă (a se consulta ex. 2 din 4.2.4).

4.2.4. Formula Newton-Leibniz

Exemplele cercetate în 4.2.1 ne arată că calculul direct al integralelor definite ca limite ale sumelor integrale e legat de mari complicaţii. Chiar şi în cazul unor funcţii simple (constantă sau $\cos x$, $\sin x$, vezi exemplele 1 şi 2 din 4.2.1), această metodă cere calcule complicate. Calculul integralelor definite ale funcţiilor mai complicate conduce la dificultăţi şi mai mari. De aceea în mod natural apare problema: să se afle o metodă convenabilă din punct de vedere practic pentru calcularea integralelor definite. Această metodă, descoperită de Newton ((1643-1727)- matematician, mecanician şi astronom englez) şi de Leibniz, exprimă legătura

care are loc între operaţia de integrare şi operaţia de derivare şi reprezintă conţinutul acestui paragraf.

Fie funcţia f definită şi integrabilă pe segmentul $[a,b]$, adică există $\int_a^b f(t)dt$. Considerăm un punct intermediar x pe $[a,b]$. Funcţia f, fiind integrabilă pe $[a,b]$, este integrabilă pe $[a,x] \subseteq [a,b]$, pentru orice $x \in [a,b]$, adică există $\int_a^x f(t)dt,\ x \in [a,b]$. În acest caz integrala definită $\int_a^x f(t)dt$ devine funcţie de limita superioară variabilă x. Notăm această funcţie prin $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt,\ x \in [a,b]$.

Are loc următoarea teoremă de existenţă a primitivelor unei funcţii continue - una din teoremele fundamentale ale analizii matematice.

Teorema 1 *(existenţa primitivei unei funcţii continue).* Pentru orice funcţie f continuă pe $[a, b]$, funcţia $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt,\ x \in [a,b]$ este continuă pe $[a, b]$ şi reprezintă o primitivă a lui f, care se anulează în punctul $x = a$.

Demonstraţie. Fie funcţia f continuă pe $[a, b]$ şi deci integrabilă pe acest segment (teorema 2 din 4.2.2) şi fie $x \in [a,b]$. Atunci f, fiind continuă pe $[a,x]$ este integrabilă pe acest segment. Deci există funcţia

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt,\ x \in [a,b].$$

Vom arăta că funcţia $\Phi(x), x \in [a,b]$ este o primitivă a funcţiei $f(x), x \in [a,b]$, adică $\Phi'(x) = f(x)$ pentru orice $x \in [a,b]$. Într-adevăr, fie $x \in [a,b]$ şi $(x + \Delta x) \in [a,b]$. Atunci funcţia Φ va obţine creşterea

$$\Delta\Phi = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt.$$

Aplicând proprietăţile 7 şi 8 ale integralelor definite din 4.2.3, obţinem

$$\Delta\Phi = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(\xi)\cdot\Delta x,$$

unde ξ este cuprins între x şi $(x+\Delta x)$.

Deci $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} f(\xi) = f(x)$, deoarece ξ este cuprins între x şi $(x+\Delta x)$, iar funcţia f este continuă pe $[a,b]$ şi deci continuă şi pe $[x, x+\Delta x]$, dacă $\Delta x > 0$ sau pe $[x+\Delta x, x]$, dacă $\Delta x < 0$. Observăm că

$$\Phi(a) = \int_a^a f(t)dt = 0.$$

Întrucât funcţia f este continuă pe $[x, x+\Delta x]$ sau $[x+\Delta x, x]$, după cum $\Delta x > 0$ sau $\Delta x < 0$, ea atinge valorile cea mai mare M_x şi cea mai mică m_x pe acest segment, adică $m_x \le f(\xi) \le M_x$. Deci $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta\Phi = \lim\limits_{\Delta x\to 0} f(\xi)\Delta x = 0$, ceea ce înseamnă că funcţia Φ este continuă în punctul $x\in[a,b]$. Prin urmare, funcţia Φ este continuă pe $[a,b]$ ($\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta\Phi = 0$) şi este o primitivă a funcţiei f pe $[a,b]$ ($\Phi'(x) = f(x), x\in[a,b]$). Teorema este demonstrată.

Notă. Dacă funcţia f este cotinuă pe $[a, b]$, atunci, conform teoremei 1, există funcţia $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$, care este continuă pe $[a, b]$ şi este o primitivă a funcţiei f pe $[a, b]$. Deci pentru funcţia f există integrala ei nedefinită şi

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C,\ x\in[a, b],$$

unde C este o constantă arbitrară reală.

Teorema 2. Dacă funcţia f este continuă pe $[a,b]$ şi $F(x)$ este o primitivă a ei pe $[a,b]$, atunci

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Demonstraţie. Fie funcţia $F(x)$ o primitivă a funcţiei $f(x)$ pe $[a,b]$. Conform teoremei 1 de mai sus, funcţia $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt,\ x\in[a,b]$ este de asemenea o primitivă a funcţiei f pe $[a,b]$. Deoarece diferenţa a două primitive ale aceleiaşi funcţii este o constantă (vezi 4.1.1), rezultă că există un număr $C\in R$ astfel încât

$$\Phi(x) = F(x) + C, \text{ adică } \int_a^x f(t)dt = F(x) + C,\ x\in[a,b].$$

Dacă $x = a$, avem $\int_a^a f(t)dt = F(a) + C$ sau $F(a) + C = 0$, de unde $C = -F(a)$. Dacă $x = b$, atunci $\int_a^b f(t)dt = F(b) + C$, adică

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Prin urmare,

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

ceea ce trebuia de demonstrat.

Formula obţinută se numeşte *formula Newton – Leibniz.* În loc de $F(b) - F(a)$ se foloseşte frecvent notaţia $F(x)\Big/_a^b$ sau $[F(x)]_a^b$ şi se citeşte: *"ef de ics luat între a şi b"*. Formula Newton – Leibniz este valabilă şi pentru $a \ge b$.

Menţionăm că atât Leibniz, cât şi Newton au dezvoltat independent unul de altul calculul integral până la un nivel aproape de cel contemporan. Din istoria matematicii aflăm că mult timp pentru calculul fiecărei integrale definite se elaborau metode speciale. Numai după ce a fost demonstrată această formulă a început dezvoltarea calculului integral ca ramură independentă a matematicii. De aceea formula Newton – Leibniz se mai numeşte *formula fundamentală a calculului integral.*

În încheiere dăm câteva exemple.

Exemplul 1. Să se calculeze integrala $\int_0^1 (5x^4+3x^2+2x-1)dx$.

Deoarece una din primitivele funcţiei $f(x)=5x^4+3x^2+2x-1$ pe $[0,1]$ este funcţia $F(x)=x^5+x^3+x^2-x$, aplicăm formula Newton – Leibniz şi obţinem

$$\int_0^1 (5x^4+3x^2+2x-1)dx=(x^5+x^3+x^2-x)\Big/_0^1=(1+1+1-1)-0=2.$$

Dacă în locul funcţiei primitive $F(x)$ luăm oricare altă funcţie primitivă $F_1(x)=x^5+x^3+x^2-x+C$, unde C este un număr real, rezultatul, după cum e şi natural, va fi acelaşi:

$$\int_0^1 (5x^4+3x^2+2x-1)dx=((x^5+x^3+x^2-x)+C)\Big/_0^1=$$

$$=(1+1+1-1+C)-(0+C)=2.$$

Exemplul 2. Funcţia $F(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x\le 2 \\ 3-x, & 2<x\le 3 \end{cases}$ este discontinuă pe segmentul $[0,3]$ în punctul $x_1=2$, deoarece $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2-0} x^2=4$, $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2+0}(3-x)=3-2=1$ şi $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ nu există. Prin urmare, punctul $x_1=2$ este o discontinuitate de speţa 1 pentru funcţia $f(x)$.

Folosind nota după proprietatea 9 din 4.2.3, putem reduce calculul integralei definite $\int_0^3 f(x)dx$ de la funcţia $f(x)$ la aplicarea formulei Newton – Leibniz:

$$\int_0^3 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx=\int_0^2 x^2dx+\int_2^3 g(x)dx=\frac{x^3}{3}\Big/_0^2+\int_2^3(3-x)dx=$$

$$=\frac{8}{3}+\left(3x-\frac{x^2}{2}\right)\Big/_2^3=\frac{8}{3}+\left(9-\frac{9}{2}-6+2\right)=\frac{19}{6},$$

unde funcţia modificată $g(x)=\begin{cases} f(x), & x\in]2,3] \\ 1, & x=2, \end{cases}$ este deja continuă pe $[2,3]$.

4.2.5 Integrarea prin substituţie

În acest paragraf vom extinde metoda integrării prin substituţie obţinută în 4.1.2, teorema 1, la calculul integralelor nedefinite.

Teoremă ([12], v. 1, p. 474; [14], 1, p. 342). Dacă

1) funcţia $f(x)$ este continuă pe segmentul $[a,b]$;
2) funcţia $x=g(t)$ este definită şi continuă împreună cu derivata ei $g'(t)$ pe segmentul $[\alpha,\beta]$, şi pentru $\alpha\le t\le\beta$ avem $a\le g(t)\le b$;
3) $g(\alpha)=a$ şi $g(\beta)=b$,

atunci

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt.$$

Demonstraţie. Observăm că funcţia compusă $f(g(t))$ are sens şi este continuă pe $[\alpha,\beta]$. Întrucât funcţia f este integrabilă pe $[a,b]$, conform formulei Newton – Leibniz, avem

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big/_a^b = F(b) - F(a),$$

unde $F(x)$ este o primitivă a funcţiei $f(x)$ pe $[a,b]$. Deoarece în acest caz funcţia $F(g(t))$ este o primitivă a funcţiei $f(g(t))\cdot g'(t)$, şi este continuă pe $[\alpha,\beta]$, avem, conform aceleiaşi formule a lui Newton - Leibniz, că

$$\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = F(b) - F(a),$$

ceea ce înseamnă că $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$.

Teorema este demonstrată.

Formula de mai sus se numeşte *formula integrării prin substituţie*. Teorema rămâne valabilă şi în cazul când $a \geq b$.

Considerăm următoarele exemple.

Exemplul 1. Să se arate că dacă funcţia f este pară pe segmentul $[-a,a]$ şi este integrabilă pe acest segment, atunci

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$

Într-adevăr, conform proprietăţii 7 din 4.2.3 şi a notei 3 din 4.2.1, avem

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = -\int_0^{-a} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx.$$

Pe de altă parte, considerând $x = -t,\ t \in [0,a]$, avem

$$-\int_0^{-a} f(x)dx = \left| \begin{array}{l} x=-t,\ dx=-dt \\ x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=-a \Rightarrow t=a \end{array} \right| = -\int_0^a f(-t)(-dt) = \int_0^a f(t)dt = \int_0^a f(x)dx,$$

deoarece funcţia f este pară pe $[-a,a]$, adică $f(-x) = f(x),\ x \in [-a,a]$.

Deci $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

Exemplul 2. Să se arate că dacă funcţia f este impară şi integrabilă pe segmentul $[-a,a]$, atunci $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.

Într-adevăr, similar cazului precedent, avem

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx \quad \text{şi}$$

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = -\int_0^{-a} f(x)dx = \left| \begin{array}{l} x=-t \\ dx=-dt \\ t\in[0,a] \Rightarrow x \in [0,-a] \end{array} \right| = -\int_0^a f(-t)(-dt) = \int_0^a f(-t)dt =$$

$$= -\int_0^a f(t)dt = -\int_0^a f(x)dx,$$

deoarece funcţia f este impară pe [-*a*, *a*], adică $f(-x) = -f(x)$, $x \in [a, b]$.

Deci

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = -\int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = 0.$$

Exemplul 3. Fie funcţia f integrabilă pe orice segment al axei numerice şi fie f periodică cu perioada *T*, adică $f(x+T) = f(x)$ pentru orice $x \in R$. Să se arate că

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

pentru orice $a \in R$, adică integrala definită de la o funcţie periodică cu perioada *T* pe un segment, lungimea căruia este egală cu *T*, nu depinde de poziţia acestui segment pe axa numerică.

Într-adevăr, conform proprietăţii 7 din 4.2.3, avem

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx.$$

Pe de altă parte,

$$\int_T^{a+T} f(x)dx = \left| \begin{matrix} x = t+T \\ dx = dt \\ x = T \Rightarrow t = 0 \\ x = a+T \Rightarrow t = a \end{matrix} \right| = \int_0^a f(t+T)dt = \int_0^a f(t)dt =$$

$$= \int_0^a f(x)dx = -\int_a^0 f(x)dx.$$

Prin urmare,

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx - \int_a^0 f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

Exemplul 4. Să se calculeze $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$.

Să considerăm substituţia $x = 2\sin t$. Avem

$$x = 0 \Rightarrow 2\sin t = 0 \Rightarrow \sin t = 0 \Rightarrow t = 0; \quad x = 2 \Rightarrow 2\sin t = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin t = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}.$$

Deci funcţia $x = 2\sin t$ este continuă împreună cu derivata ei pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Când t variază de la $t=0$ până la $t = \frac{\pi}{2}$, valorile funcţiei $x = 2\sin t$ nu depăşesc limitele segmentului $[0,2]$. Aplicând formula integrării prin substituţie, avem

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = \left| \begin{matrix} x = 2\sin t \\ dx = 2\cos t\,dt \\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{matrix} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2 t} \cdot 2\cos t\,dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sqrt{1-\sin^2 t} \cdot 2\cos t dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 t dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt =$$

$$= 2\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big/_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(\frac{\pi}{2} + 0 - 0 - 0\right) = \pi.$$

Exemplul 5. Să se calculeze integrala

$$\int_1^4 \sqrt{x(\sqrt{x}-1)}\,dx.$$

Avem $\int_1^4 \sqrt{x(\sqrt{x}-1)}\,dx = \int_1^4 \sqrt{x} \cdot \sqrt{\sqrt{x}-1}\,dx$. Notăm $\sqrt{\sqrt{x}-1} = t$ şi obţinem $t \geq 0$, $\sqrt{x} = t^2+1$ şi $x = (t^2+1)^2$. Deci $dx = 4t(t^2+1)dt$. Pentru $x_i = 1$ avem $t_1 = 0$, iar pentru $x_2 = 4$ avem $t_2 = 1$. Deci dacă $t \in [0,1]$, atunci $1 \leq x = (t^2+1)^2 \leq 4$. Aplicând formula integrării prin substituţie, obţinem

$$\int_1^4 \sqrt{x(\sqrt{x}-1)}\,dx = \left| \begin{matrix} \sqrt{x} = t^2+1 \\ x = (t^2+1)^2 \\ dx = 4t(t^2+1)dt \\ x = 1 \Rightarrow t = 0 \\ x = 4 \Rightarrow t = 1 \end{matrix} \right| = \int_0^1 (t^2+1) \cdot t \cdot 4t(t^2+1)dt =$$

$$= 4\int_0^1 t^2(t^2+1)^2 dt = 4\int_0^1 (t^6+2t^4+t^2)dt = 4\left(\frac{t^7}{7} + \frac{2}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3\right)\Big/_0^1 =$$

$$= 4\left(\frac{1}{7} + \frac{2}{5} + \frac{1}{3}\right) = \frac{4 \cdot 92}{105} = \frac{368}{105}.$$

Remarcăm că în unele cazuri e necesar să se facă mai întâi substituţia $\varphi(x) = t$ (ex. 5), de unde apoi determinăm substituţia

$x=g(t)$ cerută în teorema 1. Constatăm că, spre deosebire de integrala nedefinită, unde în rezultatul final se revine la variabila inițială, în integrala definită nu revenim la ea. Prin urmare, pentru calcularea integralei definite cu ajutorul substituției se fac în unele cazuri mai multe substituții consecutive până ajungem la o integrală, care poate fi calculată direct și procesul se încheie.

Remarcăm de asemenea că dacă aplicăm formula integrării prin substituție într-o integrală definită, trebuie să verificăm respectarea condițiilor 1) – 3) din teorema 1. Dacă nu se respectă aceste condiții, schimbarea de variabilă după formula indicată ne poate duce la absurd.

Exemplul 6. Avem $\int_0^{\pi} dx = x\Big/_0^{\pi} = \pi - 0 = \pi$. Pe de altă parte,

$$\int_0^{\pi} dx = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x\left(tg^2 x + 1\right)}.$$

Substituția $tgx = t$ ne conduce formal la următorul rezultat:

$$\int_0^{\pi} dx = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x\left(tg^2 x + 1\right)} = \left| \begin{array}{l} tgx = t \\ dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x} \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = \pi \Rightarrow t = 0 \end{array} \right| = \int_0^0 \frac{dt}{t^2+1} = 0.$$

Prin urmare, *π=0*. Contrazicerea obținută se explică prin faptul că în cazul de față nu poate fi aplicată substituția $tgx = t$: observăm că dacă x variază de la 0 până la $\frac{\pi}{2}$, variabila t variază de la 0 până la $(+\infty)$, iar dacă x variază de la $\frac{\pi}{2}$ până la π, variabila t variază de la $(-\infty)$ până la 0, adică funcția $t = tg\, x$ este discontinuă în punctul $x = \frac{\pi}{2}$.

4.2.6 Integrarea prin părți

Are loc următoarea teoremă.

Teoremă. Dacă funcțiile $u = u(x)$ și $v = v(x)$ sunt continue împreună cu derivatele lor $u'(x)$ și $v'(x)$ pe segmentul $[a,b]$ sau $[b,a]$, atunci

$$\int_a^b udv = (uv)\Big/_a^b - \int_a^b vdu,$$

unde $dv = v'(x)dx,\ du = u'(x)dx$ și $(uv)\Big/_a^b = u(b)\cdot v(b) - u(a)\cdot v(a)$.

Această formulă se numește *formula integrării prin părți* într-o integrală definită.

Demonstrație. Dacă integrăm identitatea $(uv)' = u'v + uv'$ în limitele de la $x = a$ până la $x = b$, obținem $\int_a^b (uv)'dx = \int_a^b (u'v)dx + \int_a^b (uv')dx$. Deoarece funcțiile $(uv)', (u'v)$ și (uv') sunt continue ca produsul a două funcții continue (pentru $(u'v), (uv')$) sau ca suma a două funcții continue (pentru $(uv)'$), cele trei integrale din identitatea de mai sus există. Conform formulei Newton – Leibniz, avem

$$\int_a^b (uv)'dx = (uv)\Big/_a^b = u(b)\cdot v(b) - u(a)\cdot v(a),$$

deoarece funcția uv este o primitivă pentru funcția $(uv)'$.

Prin urmare, $(uv)\Big/_a^b = \int_a^b u'v\,dx + \int_a^b uv'\,dx = \int_a^b vdu + \int_a^b udv$,

de unde $$\int_a^b udv = (uv)\Big/_a^b - \int_a^b vdu,$$

ceea ce trebuia de demonstrat.

Exemplul 1. Să se calculeze integrala $\int_0^{\pi/2} x\cos x dx$.

Notând $x=u$, $\cos x dx = dv$, avem $du=dx$, $v=\int \cos x dx = \sin x$ şi, aplicând formula integrării prin părţi, obţinem

$$\int_0^{\pi/2} x\cos x dx = \left| \begin{array}{l} x=u,\ du=dx \\ \cos x dx = dv \\ v=\int\cos x dx = \sin x \end{array} \right| = (uv)\Big/_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} v du = (x\sin x)\Big/_0^{\pi/2} -$$

$$- \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \frac{\pi}{2}\cdot 1 - 0 + (\cos x)\Big/_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} + 0 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi-2}{2}.$$

Exemplul 2. Să se demonstreze că $\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$

pentru $n = 0,1,2,...$ şi să se calculeze integrala $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$.

Avem

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \left| \begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}-t \\ dx=-dt \\ x=0 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=0 \end{array} \right| = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right]^n (-dt) = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^n x dx =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx.$$

Trecem acum la calcularea integralei I_n. Aplicând formula integrării prin părţi, obţinem

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x \cdot \sin x dx = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin^{n-1} x}_{u} \cdot \underbrace{d(-\cos x)}_{dv} =$$

$$= (\sin^{n-1} x)\cdot(-\cos x)\Big/_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-\cos x)\cdot(n-1)\sin^{n-2} x\cdot \cos x dx = 0 - 0 +$$

$$+ (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\cdot\cos^2 x dx = (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\cdot(1-\sin^2 x)dx =$$

$$= (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x dx - (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,$$

de unde $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$, $n = 2,3,...$ Observăm că

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^0 dx = \int_0^{\pi/2} dx = x\Big/_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{şi } I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = -\cos x\Big/_0^{\pi/2} = -(0-1) = 1$$

Prin urmare, dacă $n = 2k+1, k \in N$, adică n este impar, obţinem

$$I_{2k+1} = \frac{2k+1-1}{2k+1}\cdot I_{2k+1-2} = \frac{2k}{2k+1}\cdot I_{2k-1} = \frac{2k}{2k+1}\cdot\frac{2k-2}{2k-1}\cdot I_{2k-3} = ... =$$

$$= \frac{(2k)\cdot(2k-2)\cdot ...\cdot 2}{(2k+1)\cdot(2k-1)\cdot ...\cdot 1}\cdot I_1 = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}\cdot 1 = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!},$$

iar dacă $n = 2k, k \in N$, adică n este par, avem

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k}\cdot I_{2k-2} = \frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k-3}{2k-2}\cdot I_{2k-4} = ... =$$

$$= \frac{(2k-1)(2k-3)\cdot ...\cdot 1}{(2k)(2k-2)\cdot ...\cdot 2}\cdot I_0 = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!},$$

unde reamintim că

$(2k)!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot(2k)$ şi $(2k-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot ...\cdot(2k-1)$, $k \in N$.

4.3. Integrale improprii

Introducând noţiunea de integrală definită ca limita sumei integrale, am presupus, că segmentul de integrare este finit, iar funcţia de sub integrală este mărginită pe acest segment. Dacă cel puţin una din aceste condiţii nu este respectată, definiţia integralei definite dată în paragraful precedent îşi pierde sensul. Să studiem unele generalizări posibile ale noţiunii de integrală definită.

4.3.1. Integrale improprii de speţa 1 (cu limite de integrare infinite)

Definiţie. Fie f o funcţie definită pe $[a,+\infty[$, integrabilă (după Riemann) pe $[a, A]$ pentru orice $A>a$. Dacă limita $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$ există şi este finită, atunci ea se numeşte *integrală improprie de speţa 1* şi se notează $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Deci, prin definiţie,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx. \tag{1}$$

În acest caz se spune că integrala $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *are sens* sau că este *convergentă*. Dacă însă limita $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$ nu există sau este infinită se spune că integrala $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *nu are sens* sau că *este divergentă*.

Exemplul 1. Integrala $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ este convergentă, deoarece

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty}\left(arctgx\Big/_0^A\right) =$$

$$= \lim_{A\to+\infty}(arctgA - arctg0) = \lim_{A\to+\infty}(arctgA) =$$

$$= arctg(+\infty) = \frac{\pi}{2}.$$

Exemplul 2. Integrala $\int_0^{+\infty} e^x dx$ este divergentă, deoarece

$$\int_0^{+\infty} e^x dx = \lim_{A\to+\infty}\left(e^x\Big/_0^A\right) = \lim_{A\to+\infty}\left(e^A - 1\right) = +\infty.$$

Exemplul 3. Integrala $\int_0^{+\infty}\cos x\,dx$ este divergentă, deoarece

$\int_0^{+\infty}\cos x\,dx = \lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A\cos x\,dx = \lim\limits_{A\to+\infty}\left(\sin x\Big/_0^A\right) = \lim\limits_{A\to+\infty}\sin A$ - nu există ($\sin A$, când $A\to\infty$ oscilează între 1 şi (-1)) (a se consulta ex. 3 din 1.5.1).

Exemplul 4. Integrala $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^r}$, unde $a>0$, este convergentă pentru $r>1$ şi divergentă pentru $r\le 1$.

Într-adevăr, dacă $r\neq 1$, avem

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^r} = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A x^{-r}dx = \lim_{A\to+\infty}\frac{1}{1-r}\left(\frac{1}{x^{r-1}}\right)\Big/_a^A =$$

$$= \frac{1}{1-r}\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{A^{r-1}} - \frac{1}{a^{r-1}}\right) = \begin{cases}\dfrac{1}{(r-1)a^{r-1}}, \text{ dacă r} > 1\\ +\infty, \text{ dacă r} < 1\end{cases}$$

Dacă însă $r=1$, avem

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A\frac{dx}{x} = \lim_{A\to+\infty}(\ln x)\Big/_a^A = \lim_{A\to+\infty}(\ln A - \ln a) = +\infty.$$

Prin urmare, integrala $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^r}$ cu $a > 0$ este convergentă pentru $r > 1$ şi divergentă pentru $r \le 1$.

În mod analog se defineşte integrala improprie pe intervalul $]-\infty, b]$:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{B \to -\infty} \int_{B}^{b} f(x)dx. \tag{2}$$

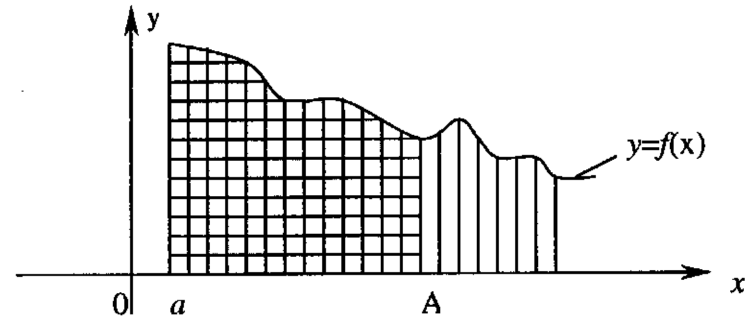
În fine, integrala improprie de speţa 1 cu ambele limite de integrare infinite poate fi definită ca suma a două integrale improprii de speţa 1 de forma (1) şi (2), adică

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx, \tag{3}$$

unde c este un număr arbitrar, cu condiţia că există ambele integrale din partea dreaptă a egalităţii. Spunem că integrala $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ este convergentă, dacă ambele integrale din partea dreaptă a egalităţii (3) sunt convergente şi divergentă, dacă ea nu este convergentă.

Din definiţiile date mai sus ale integralelor improprii convergente cu limite de integrare infinite rezultă că aceste integrale nu sunt limitele unor sume integrale, ci limitele unor integrale definite cu limita superioară sau inferioară variabilă, când aceste limite de integrare tind spre infinit.

Dacă funcţia f este nenegativă şi integrabilă pe $[a, A]$ pentru orice $A > a$, atunci $\int_a^A f(x)dx$ este egală cu aria trapezului curbiliniu mărginit de axa OX, graficul funcţiei $y = f(x)$ şi de dreptele $x = a$, $x = A$.



Dacă A creşte, dreapta $x = A$, care mărgineşte acest trapez curbiliniu, se mişcă la dreapta.

În cazul când integrala improprie $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ este convergentă (are sens) e natural să considerăm mărimea ei drept aria unei fâşii infinite mărginită jos de axa OX, sus – de graficul funcţiei $y = f(x)$ şi la stânga – de dreapta $x = a$.

În mod analog se raţionează asupra sensului geometric al integralelor improprii de forma

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx \text{ şi } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

Reieşind din proprietăţile limitei unei funcţii şi din definiţia integralelor improprii de speţa 1 ca limita integralei definite, unele proprietăţi ale integralei definite se generalizează asupra integralelor improprii. Ne vom opri asupra unora din ele, demonstrându-le pentru integralele improprii de forma $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. În mod analog se demonstrează că aceste proprietăţi au loc şi pentru integralele improprii de forma $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ şi $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

1. Formula Newton – Leibnitz pentru integralele improprii de speţa 1: dacă funcţia f *este continuă pe* $[a,+\infty[$ şi F este o funcţie primitivă a ei pe $[a,+\infty[$, atunci

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big/_a^{+\infty} = F(+\infty)-F(a), \text{ unde } F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x).$$

Într-adevăr,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\left(F(x)\Big/_a^A\right) = \lim_{A\to+\infty}(F(A)-F(a)) =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} F(A)-F(a) = F(+\infty)-F(a) = F(x)\Big/_a^{+\infty}.$$

2. *Proprietatea liniară a integralei improprii:* dacă integralele improprii $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ şi $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ sunt convergente, atunci, pentru orice numere reale m şi n integrala improprie

$$\int_a^{+\infty}[m\cdot f(x)+n\cdot g(x)]dx$$

este convergentă şi are loc formula

$$\int_a^{+\infty}[m\cdot f(x)+n\cdot g(x)]dx = m\int_a^{+\infty} f(x)dx + n\int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

Într-adevăr,

$$\int_a^{+\infty}[m\cdot f(x)+n\cdot g(x)]dx = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A[m\cdot f(x)+n\cdot g(x)]dx =$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left[m\int_a^A f(x)dx + n\int_a^A g(x)dx\right] =$$

$$= m\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx + n\lim_{A\to+\infty}\int_a^A g(x)dx = m\int_a^{+\infty} f(x)dx + n\int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

Consecinţa 1. Dacă integrala $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ este convergentă şi este egală cu numărul I, atunci integrala $\int_a^{+\infty} cf(x)dx$, unde c este un număr real, este şi ea convergentă şi este egală cu cI.

Constatăm că dacă integrala $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ este divergentă, atunci integrala $\int_a^{+\infty} cf(x)dx$, unde $c\neq 0, c\in R$, este de asemenea divergentă.

Într-adevăr, presupunând că integrala $\int_a^{+\infty} cf(x)dx$ este convergentă, am avea, înmulţind funcţia de sub integrală cu $\frac{1}{c}$, că integrala $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ este convergentă, ceea ce contrazice condiţia.

Consecinţa 2. Dacă integralele $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ şi $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ sunt convergente şi respectiv egale cu I_1 şi I_2, atunci integrala $\int_a^{+\infty}[f(x)\pm g(x)]dx$ este de asemenea convergentă şi este egală cu $I_1 \pm I_2$.

Remarcăm că dacă una din integralele $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ sau $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ este divergentă (de exemplu, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$), iar cealaltă este convergentă, atunci şi integrala $\int_a^{+\infty}[f(x)\pm g(x)]dx$ este divergentă, deoarece în caz contrar ar fi convergentă integrala $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ca sumă a două integrale convergente: $\int_a^{+\infty}[f(x)+g(x)]dx$ şi $-\int_a^{+\infty} g(x)dx$. Dacă însă ambele integrale $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ şi $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ sunt divergente, atunci despre convergenţa integralei $\int_a^{+\infty}[f(x)\pm g(x)]dx$, în general, nu se poate spune nimic: în unele cazuri ea poate fi convergentă, în altele – divergentă.

3. Fie f o funcţie continuă pe $[a,+\infty[$.

Atunci integralele $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ şi $\int_{a_1}^{+\infty} f(x)dx$ cu $a_1 > a$ au aceeaşi natură: ambele sunt convergente sau ambele sunt divergente.

Într-adevăr, aceasta rezultă din faptul că $\int_a^{A} f(x)dx = \int_a^{a_1} f(x)dx + \int_{a_1}^{A} f(x)dx$ pentru orice $A > a_1$ şi astfel integralele parţiale $\int_a^{A} f(x)dx$ şi $\int_{a_1}^{A} f(x)dx$ diferă între ele prin unul şi acelaşi număr.

Notă. În virtutea proprietăţii 3, pe parcurs în integrala improprie de forma $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ vom subînţelege că $a>0$.

4. *Integrarea în inegalităţi:* dacă integralele improprii $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ şi $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ sunt convergente şi $f(x)\le g(x)$ pentru orice $x\in[a,+\infty[$, atunci $\int_a^{+\infty} f(x)dx \le \int_a^{+\infty} g(x)dx$.

Într-adevăr, deoarece $\int_a^{A} f(x)dx \le \int_a^{A} g(x)dx$ pentru orice $A > a$, avem

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^{A} f(x)dx \le \lim_{A\to+\infty}\int_a^{A} g(x)dx,$$

ceea ce înseamnă că

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \le \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

5. *Integrarea prin părţi într-o integrală improprie:* dacă funcţiile $u=u(x), v=v(x)$ sunt continue împreună cu derivatele lor pe $[a,+\infty[$, atunci

$$\int_a^{+\infty} udv = (uv)\Big/_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} vdu.$$

Această formulă trebuie de înţeles astfel: dacă oricare două din expresiile $\int_a^{+\infty} udv, (uv)\Big/_a^{+\infty}$ şi $\int_a^{+\infty} vdu$ au sens (adică limitele respective sunt finite), atunci are sens (are limită finită) şi a treia expresie.

Într-adevăr, deoarece $\int_a^{A} udv = (uv)\Big/_a^{A} - \int_a^{A} vdu$ pentru orice $A\in[a, +\infty[$, avem că

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^{A} udv = \lim_{A\to+\infty}\left((uv)\Big/_a^{A}\right) - \lim_{A\to+\infty}\int_a^{A} vdu,$$

de unde $\int_a^{+\infty} udv = (uv)\Big/_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} vdu$.

6. *Metoda substituției într-o integrală improprie:* dacă funcția $f(x)$ este continuă pe $[a,+\infty[$, funcția $x=\varphi(t)$ și derivata ei $\varphi'(t)$ sunt continue pe $[t_0,+\infty[$, astfel încât $a=\varphi(t_0)\le\varphi(t)<\varphi(+\infty)=+\infty$, pentru orice $t\in[t_0,+\infty[$, atunci $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_{t_0}^{+\infty} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$. În această formulă ambele integrale sunt sau convergente, sau divergente.

Într-adevăr, deoarece $\int_{a=\varphi(t_0)}^{A=\varphi(t_1)} f(x)dx = \int_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, pentru orice $t_1>t_0$, avem

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^{A=\varphi(t_1)} f(x)dx = \lim_{t_1\to+\infty}\int_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

ceea ce înseamnă că $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_{t_0}^{+\infty} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

4.3.2. Teoreme despre convergența integralelor improprii de speța I

Teorema 1. Pentru ca integrala $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ să fie convergentă, este necesar și suficient ca pentru orice $\varepsilon>0$ să existe un număr $A>a$, astfel încât, oricare ar fi numerele $M>A, N>A$, să avem $\left|\int_M^N f(x)dx\right|<\varepsilon$.

Demonstrație. Pentru ca integrala $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ să fie convergentă, este necesar și suficient ca funcția $\varphi(A)=\int_a^A f(x)dx,\ A\in[a,+\infty[$ să posede limită finită, când $A\to+\infty$. În virtutea teoremei 9 din 1.5.3, existența limitei finite $\lim_{A\to+\infty}\varphi(A)=c, c\in R$ este echivalentă cu condiția: pentru orice $\varepsilon>0$, există un număr $A>0$ (o vecinătate a punctului $x_0=+\infty$), astfel încât, oricare ar fi numerele $M>A, N>A$, avem

$$|\varphi(N)-\varphi(M)| = \left|\int_a^N f(x)dx - \int_a^M f(x)dx\right| =$$

$$= \left|\int_a^N f(x)dx + \int_M^a f(x)dx\right| = \left|\int_M^N f(x)dx\right| < \varepsilon$$

Teorema este demonstrată.

Teorema 2. Fie funcția f continuă și nenegativă pe $[a,+\infty[$. Pentru ca integrala $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ să fie convergentă, este necesar și suficient ca integralele $\int_a^A f(x)dx$, unde $A\in[a,+\infty[$, să fie mărginite (superior).

Demonstrație. Considerăm funcția

$$\varphi(A)=\int_a^A f(x)dx,\quad A\in[a,+\infty[.$$

Întrucât $f(x)\ge 0$ pentru orice $x\in[a,+\infty[$ funcția $\varphi(A)$ este monoton crescătoare pe $[a,+\infty[$. Într-adevăr, dacă $a\le A_1<A_2<+\infty$, atunci $\int_{A_1}^{A_2} f(x)dx\ge 0$ (proprietatea 3 din 4.2.3) și $\varphi(A_2)=\int_a^{A_2} f(x)dx = \int_a^{A_1} f(x)dx + \int_{A_1}^{A_2} f(x)dx \ge \int_a^{A_1} f(x)dx = \varphi(A_1)$.

Observăm că integrala $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ este convergentă atunci şi numai atunci când există limita finită $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^{A} f(x)dx = \lim\limits_{A\to+\infty}\varphi(A)$, iar $\lim\limits_{A\to+\infty}\varphi(A)$ există atunci şi numai atunci când funcţia monotonă crescătoare $\varphi(A)$ este şi mărginită superior, ceea ce înseamnă că integralele $\int_a^{A} f(x)dx,\ A\in[a,+\infty[$ sunt mărginite superior (teorema 7 din 1.4.2 poate fi generalizată pentru cazul unei funcţii monotone şi mărginite [17], [12], [7]).

Teorema 3 (*criteriul general de comparaţie*). Dacă funcţiile f şi g sunt continue pe $[a,+\infty[$ şi satisfac condiţia $0\le f(x)\le g(x)$ pentru orice $x\in[a,+\infty[$, atunci

a) din convergenţa integralei $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ rezultă convergenţa integralei $\int_a^{+\infty} f(x)dx$;

b) din divergenţa integralei $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ rezultă divergenţa integralei $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

Demonstraţie. a) Fie $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ convergentă. Conform teoremei 2, integralele parţiale $\varphi(A)=\int_a^{A} g(x)dx,\ A\in[a,+\infty[$ sunt mărginite (superior) de numărul M, adică $\int_a^{A} g(x)dx\le M$ pentru orice $A\in[a,+\infty[$.

Din relaţia $f(x)\le g(x)$ pentru orice $x\in[a,+\infty[$ rezultă (a se vedea proprietatea 3 din 4.2.3) că

$$\int_a^{A} f(x)dx\le \int_a^{A} g(x)dx\le M,$$

adică integralele $\int_a^{A} f(x)dx,\ A\in[a,+\infty[$ sunt mărginite superior de M. Conform teoremei 2, aceasta înseamnă că $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ este convergentă.

b) Fie $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ divergentă. Dacă presupunem că $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ este convergentă, atunci, în virtutea cazului precedent, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ este convergentă, ceea ce contrazice condiţia teoremei. Prin urmare, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ este divergentă şi teorema este complet demonstrată.

Consecinţă. Fie că funcţiile f şi g sunt continue şi nenegative pe $[a,+\infty[$. Dacă $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k>0$, atunci integralele $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ şi $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ au aceeaşi natură, adică ambele sunt sau convergente, sau divergente.

Demonstrație. Într-adevăr, din $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k>0$ rezultă, conform teoremei 2 din 1.5.3, că funcțiile f și g sunt diferite de zero pentru x suficient de mare. Pe de altă parte,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k \Leftrightarrow \forall\varepsilon\in\left]0,k\right[,\exists M>a:\forall x>M \Rightarrow\left|\frac{f(x)}{g(x)}-k\right|<\varepsilon\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k-\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}<k+\varepsilon\Leftrightarrow(k-\varepsilon)g(x)<f(x)<(k+\varepsilon)g(x).$$

Fie $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$ convergentă. Conform teoremei 3 a) și proprietății 2 din 4.3.1, avem: inegalitatea $(k-\varepsilon)g(x)<f(x)$ implică că integrala $\int\limits_a^{+\infty}(k-\varepsilon)g(x)dx=(k-\varepsilon)\int\limits_a^{+\infty}g(x)dx$ este convergentă, adică este convergentă și integrala $\int\limits_a^{+\infty}g(x)dx$.

Dacă însă integrala $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$ este divergentă, atunci inegalitatea $f(x)<(k+\varepsilon)g(x)$ implică că integrala $\int\limits_a^{+\infty}(k+\varepsilon)g(x)dx=(k+\varepsilon)\int\limits_a^{+\infty}g(x)dx$ este divergentă, adică este divergentă și integrala $\int\limits_a^{+\infty}g(x)dx$.

Teorema 4 (*criteriul particular de comparație*). Fie funcția f continuă și nenegativă pe $[a,+\infty[$. Dacă $f(x)\le\dfrac{c}{x^p}$ pentru orice $x\in[a,+\infty[$ și $c\in R$, $p\in R$, $p>1$, atunci integrala $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$ este convergentă. Dacă însă există un număr $c>0$, astfel încât

$f(x)\ge\dfrac{c}{x^p}$ pentru orice $x\in[a,+\infty[$ și $p\le1$, atunci integrala $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$ este divergentă.

Demonstrația acestui criteriu reiese din teorema 3 de mai sus, exemplul 4) și proprietatea 3 cu nota respectivă din 4.3.1 (e suficient de considerat $g(x)=\dfrac{c}{x^p}$).

Consecință. Fie funcția f continuă și nenegativă pe $[a,+\infty[$. Dacă pentru $p>1$ există limita finită $\lim\limits_{x\to+\infty}x^pf(x)=c$, atunci integrala $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$ este convergentă.

Dacă însă pentru $p\le1$ există limita finită $\lim\limits_{x\to+\infty}x^pf(x)=c>0$, atunci integrala $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$ este divergentă.

Într-adevăr, din relația $\lim\limits_{x\to+\infty}x^pf(x)=c, c\in R, p>1$ rezultă că funcția $x^pf(x)$ este mărginită într-o vecinătate a lui $x_0=+\infty$ (a se vedea teorema 1 din 1.5.3). Aceasta înseamnă că există un număr c_0, astfel încât $x^pf(x)\le c_0$ pentru orice x suficient de mare, de unde $f(x)\le\dfrac{c_0}{x^p}$. Aplicând prima parte a teoremei 4 de mai sus, obținem că integrala $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$ este convergentă.

Dacă însă $\lim\limits_{x\to+\infty}x^pf(x)=c>0, p\le1$, atunci, conform definiției limitei funcției în sens Cauchy, pentru orice $0<\varepsilon<c$, avem $c-\varepsilon<x^pf(x)<c+\varepsilon$ pentru x suficient de mare, de unde

$f(x) > \frac{c-\varepsilon}{x^p}$. Aplicând partea a doua a teoremei 4, obținem că $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ este divergentă.

Teoremele 2 - 4 de mai sus au fost demonstrate pentru funcții nenegative. Dacă însă funcțiile $f(x) \leq 0$ și $g(x) \leq 0$ pentru orice $x \in [a, +\infty[$, atunci natura integralelor $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ se caracterizează aplicând teoremele de mai sus la funcțiile auxiliare nenegative $F(x) = -f(x)$ și $G(x) = -g(x)$ pe intervalul $[a, +\infty[$.

Să cercetăm acum cazul când funcția *f*, continuă pe $[a, +\infty[$, își schimbă semnul de o infinitate de ori pe $[a, +\infty[$.

Drept exemplu de asemenea funcții servește funcția

$$f(x) = x \sin x, \quad x \in]-\infty, +\infty[,$$

care își schimbă semnul de o infinitate de ori în orice interval $[a, +\infty[$ sau $]-\infty, b]$, unde $a \in R, b \in R$.

Definiție. Fie că funcția *f*, definită pe $[a, +\infty[$, își schimbă semnul de o infinitate de ori pe $[a, +\infty[$. Dacă integrala $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ este convergentă, spunem că integrala $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ este *absolut convergentă*. Dacă însă integrala $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ este convergentă, iar integrala $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ este divergentă, spunem că integrala $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ este *semiconvergentă* (*sau condițional convergentă*).

***Teorema** 5.* O integrală absolut convergentă este și convergentă.

Demonstrație. În virtutea teoremei 1 din acest paragraf, avem următoarele: integrala $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$, fiind convergentă, urmează că pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $A > a$, astfel încât pentru orice numere $M > A, N > A$ avem $\left|\int_M^N |f(x)|dx\right| < \varepsilon$. Însă $\left|\int_M^N f(x)dx\right| \leq \left|\int_M^N |f(x)|dx\right| < \varepsilon$, de unde rezultă că $\left|\int_M^N f(x)dx\right| < \varepsilon$. Aceasta înseamnă că $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ este convergentă și teorema este demonstrată.

Notă. Teorema reciprocă teoremei 5 nu este valabilă. Considerăm $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$. Avem

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \left| \begin{array}{l} \frac{1}{x} = u \\ du = -\frac{dx}{x^2} \\ v = \int \sin x dx = -\cos x \end{array} \right| = (uv)\Big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} v du =$$

$$= \left[(-\cos x)\cdot\frac{1}{x}\right]\Big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx =$$

$$= -\lim_{x \to +\cos} (\cos x)\cdot\frac{1}{x} + \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Observăm că $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ pentru orice $x \in [1, +\infty[$. Deoarece $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ este convergentă $(r = 2 > 1)$, rezultă că $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| dx$ este convergentă (teorema 3), deci şi $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx$ este de asemenea convergentă.

Prin urmare, $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ este convergentă.

Constatăm că a stabili convergenţa acestei integrale folosind formula Newton-Leibniz este un lucru dificil, deoarece primitiva funcţiei $\frac{\sin x}{x}$ nu se exprimă în funcţii elementare (vezi 4.1.6).

Vom arăta că $\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx$ este divergentă.

Într-adevăr, din inegalitatea $|\sin x|\geq \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ pentru orice $x\in[1,+\infty[$, obţinem $\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx\geq\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}dx$.

Observăm că integrala $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\ln x\Big/_1^{+\infty}=+\infty$ este divergentă. Arătăm că $\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}dx$ este convergentă. Avem

$$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}dx=\left|\begin{matrix}\frac{1}{x}=u, & du=\frac{-dx}{x^2}\\ dv=\cos 2x dx, & v=\frac{1}{2}\sin 2x\end{matrix}\right|=(uv)\Big/_1^{+\infty}-\int_1^{+\infty}vdu=$$

$$=\frac{\sin 2x}{2x}\Big/_1^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x^2}.$$

Dar $\frac{\sin 2x}{2x}\Big/_1^{+\infty}=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}(\sin 2x)\frac{1}{x}-\frac{\sin 2}{2}=0-\frac{\sin 2}{2}=-\frac{\sin 2}{2}$ şi integrala $\int_1^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x^2}dx$ este convergentă, deoarece $\int_1^{+\infty}\frac{|\sin 2x|}{x^2}dx\leq\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ este convergentă (teorema 3 şi exemplul 4) din 4.3.1). Prin urmare, integrala

$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}dx$ este convergentă şi deci $\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx$ ca sumă a unei integrale divergente şi a unei integrale convergente este divergentă.

Aşadar, $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ este semiconvergentă.

În încheierea acestui paragraf să cercetăm convergenţa integralei $\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin^{\alpha}x dx, \alpha>0$. Deoarece $|e^{-x}\sin^{\alpha}x|\leq e^{-x}$ pentru orice $x\in[0,+\infty[$, putem scrie

$$\int_0^{+\infty}|e^{-x}\sin^{\alpha}x|dx\leq\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=-e^{-x}\Big/_0^{+\infty}=0+1=1.$$

Prin urmare, $\int_0^{+\infty}|e^{-x}\sin^{\alpha}x|dx$ este convergentă şi deci $\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin^{\alpha}x dx$ este absolut convergentă, adică şi convergentă.

În mod analog se stabileşte că $\int_0^{+\infty}e^{-x}\cos^{\alpha}x dx, \alpha>0$ este absolut convergentă. În general, integralele de forma $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|x|}\cdot P(\sin x)dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|x|}\cdot Q(\cos x)dx$, unde $P(\sin x), Q(\cos x)$ sunt polinoame în raport respectiv cu $\sin x$ şi $\cos x$, sunt absolut convergente.

4.3.3. Integrale improprii de speţa 2 (de la funcţii nemărginite)

În acest paragraf ne punem problema să generalizăm noţiunea de integrală şi să extindem astfel operaţia de integrare asupra unor funcţii nemărginite.

Definiția 1. Fie funcția f definită pe $[a, b[$. Vom spune că punctul $x = b$ este un punct singular, dacă f este nemărginită pe $[a, b[$, dar este mărginită pe orice segment $[a, b-\varepsilon]$ inclus în $[a, b[$, unde $\varepsilon > 0$ ([14], partea a 2-a).

Definiția 2. Fie $x = b$ un punct singular pentru funcția $f(x)$, $x \in [a, b[$ și fie această funcție integrabilă pe orice segment $[a, b-\varepsilon]$, unde $\varepsilon > 0$ și $a < b - \varepsilon < b$. Dacă există limita finită

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, \tag{1}$$

atunci această limită se numește *integrală improprie de speța 2* și se notează

$$\int_a^b f(x)dx. \tag{2}$$

În acest caz se spune că integrala improprie

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

are sens sau este *convergentă*. Dacă însă limita (1) nu există sau este infinită, atunci se spune că integrala improprie (2) *nu are sens* sau este *divergentă*.

În mod analog, dacă $x = a$ este punct singular pentru funcția $f(x)$, $x \in]a, b]$, și f este integrabilă pe orice segment $[a + \varepsilon, b]$, unde $\varepsilon > 0$ și $a < a + \varepsilon < b$, atunci integrala improprie se definește astfel:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx. \tag{3}$$

Dacă această limită există și este finită, atunci integrala improprie (3) se numește *convergentă* sau că *are sens*. Dacă integrala (3) nu este convergentă, atunci se spune că ea este *divergentă* sau că *nu are sens*.

Dacă funcția $f(x)$ este nemărginită într-o vecinătate a unui punct interior $c \in [a, b]$ și c este un punct singular al funcției f pe $[a, c[$ și $]c, b]$, atunci, prin definiție, integrala improprie este egală cu

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon \to 0+0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx. \tag{4}$$

Integrala improprie (4) se numește *convergentă*, dacă fiecare dintre integralele improprii $\int_a^c f(x)dx$, $\int_c^b f(x)dx$ sunt convergente. Spunem că integrala improprie (4) este divergentă dacă ea nu este convergentă.

Integrala improprie a funcției $f(x)$, $x \in]a, b[$, unde $x = a$, $x = b$ sunt puncte singulare ale funcției f pe $]a, b[$, se definește cu ajutorul egalității

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \int_{a+\varepsilon}^c f(x)dx + \lim_{\varepsilon \to 0+0} \int_c^{b-\varepsilon} f(x)dx, \tag{5}$$

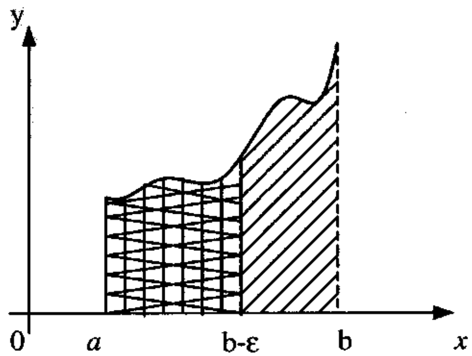
unde c este un punct arbitrar al intervalului $]a, b[$. Dacă fiecare integrală improprie $\int_a^c f(x)dx$, și $\int_c^b f(x)dx$ este convergentă, în acest caz se spune că integrala improprie (5) este *convergentă* sau *are sens* (evident că mărimea ei nu depinde de alegerea punctului $c \in]a, b[$). Se spune că integrala $\int_a^b f(x)dx$ din (5) este divergentă dacă ea nu este convergentă.

În mod analog se definește integrala improprie în raport cu segmentul $[a, b]$ a funcției care are un număr $n \geq 3$, $n \in N$, de puncte singulare ce aparțin $[a, b]$.

Integralele improprii de forma (2), (3), (4) și (5) se numesc *integrale improprii de speța* 2 ale funcției $f(x)$.

Constatăm că integralele improprii de speța 2 în raport cu un segment finit $[a, b]$, ca și integralele improprii de speța 1 (cu limitile infinite de integrare), nu sunt limitele unor sume integrale, ci limitele unor integrale definite cu limitele superioare sau inferioare variabile.

Integralele improprii de speţa 2 au o interpretare geometrică: dacă funcţia f este continuă şi nenegativă, de exemplu, pe $[a, b[$ (punctul $x=b$ este un punct singular al funcţiei) şi



integrala improprie $\int_a^b f(x)dx$ (de forma (2)) este convergentă, atunci mărimea ei poate fi considerată drept aria unei fâşii mărginită jos de segmentul $[a, b]$ al axei OX, la stânga şi la dreapta de dreptele $x=a$, $x=b$, sus – de graficul funcţiei $y=f(x)$, $x\in[a, b[$.

Exemplul 1. Integrala $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^r}$, unde $r>0$, este o integrală improprie de forma (3) (punctul $x=a$ este un punct singular pentru funcţia $f(x)=\frac{1}{(x-a)^r}$) pe $]a, b]$. Pentru a cerceta convergenţa sau divergenţa acestei integrale, vom considera integrala definită

$$\int_{a+\varepsilon}^{b} \frac{dx}{(x-a)^r} = \frac{1}{1-r}\cdot(x-a)^{-r+1}\Big/_{a+\varepsilon}^{b} = \frac{1}{1-r}\left[\frac{1}{(b-a)^{r-1}} - \frac{1}{\varepsilon^{r-1}}\right],$$

dacă $r\neq 1$.

Dacă însă $r=1$, avem

$$\int_{a+\varepsilon}^{b} \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a|\Big/_{a+\varepsilon}^{b} = \ln|b-a| - \ln\varepsilon .$$

Trecând la limita pentru $\varepsilon\to 0+0$, obţinem

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_{a+\varepsilon}^{b}\frac{dx}{(x-a)^r} = \begin{cases}\infty, & \text{dacă } r\geq 1\\ \text{A}, & \text{dacă } r<1,\end{cases}$$

unde $A=\frac{1}{1-r}\cdot\frac{1}{(b-a)^{r-1}}$.

Aşadar, integrala improprie $\int_{a+\varepsilon}^{b}\frac{dx}{(x-a)^r}$ este convergentă pentru $r<1$ şi divergentă pentru $r\geq 1$.

Exemplul 2. Integrala $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^4}$ este o integrală improprie de forma (4), deoarece punctul $x=0$ este un punct singular pentru funcţia $f(x)=\frac{1}{x^4}$ pe segmentul $[-1, 1]$. Deci

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^4} = \int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^4} + \int_{0}^{1}\frac{dx}{x^4} = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_{-1}^{0-\varepsilon}\frac{dx}{x^4} + \lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_{0+\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x^4}.$$

Calculăm fiecare limită în parte:

a) $$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_{-1}^{0-\varepsilon}\frac{dx}{x^4} = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(-\frac{1}{3x^3}\right)\Big/_{-1}^{-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\varepsilon^3}-1\right) = +\infty .$$

Prin urmare, integrala improprie $\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^4}$ este divergentă.

b) $$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_{0+\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x^4} = -\frac{1}{3}\lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(\frac{1}{x^3}\right)\Big/_{\varepsilon}^{1} = -\frac{1}{3}\lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(1-\frac{1}{\varepsilon^3}\right) = +\infty .$$

Deci integrala improprie $\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^4}$ este divergentă.

Aşadar, integrala improprie $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^4}=+\infty$. Aceasta înseamnă că $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^4}$ este divergentă.

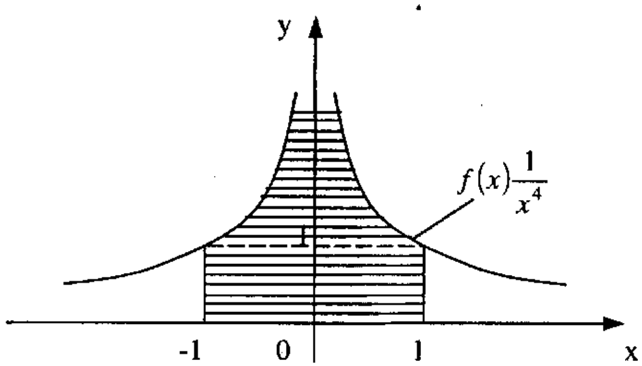
Constatăm că dacă am calcula această integrală ca o integrală definită (fără a ţine cont de discontinuitatea funcţiei $f(x)=\frac{1}{x^4}$ în punctul $x=0$), am obţine un rezultat greşit.

Într-adevăr,

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^4}=\left(-\frac{1}{3x^3}\right)\Big/_{-1}^{1}=-\frac{1}{3}(1+1)=-\frac{2}{3},$$

ceea ce este imposibil (a se consulta figura de mai jos).

Nu vom dezvolta mai departe teoria integralelor improprii de speţa 2, deoarece toate proprietăţile integralelor improprii de speţa 1 din 4.3.1 şi teoremele despre convergenţa acestor integrale din 4.3.2 sunt valabile şi pentru integralele improprii de speţa 2.



Demonstraţia acestor rezultate se simplifică şi prin faptul că are loc următorul rezultat: cu anumite restricţii asupra funcţiilor de

integrare, integralele improprii de speţa 2 se reduc la integralele improprii de speţa 1.

Într-adevăr, fie funcţia $f(x)$ continuă pe $[a,b[$ şi $x=b$ este un punct singular al ei. Aceasta înseamnă că există integrala definită $\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx$ pentru orice $\varepsilon>0$. Dar

$$\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx=\left|\begin{array}{l} x=b-\frac{1}{t},\ dx=\frac{dt}{t^2} \\ \frac{1}{b-a}\le t\le\frac{1}{\varepsilon}\end{array}\right|=\int_{1/(b-a)}^{1/\varepsilon}f\left(b-\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t^2}.$$

Presupunem că integrala improprie de forma (2)

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0+0}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx$$

este convergentă. Aceasta înseamnă că limita

$$\lim_{\varepsilon\to0+0}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx=\lim_{\substack{\varepsilon\to0+0\\ \left(\frac{1}{\varepsilon}\to+\infty\right)}}\int_{1/(b-a)}^{1/\varepsilon}f\left(b-\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t^2}$$

există şi este finită. Deci integrala improprie de speţa 1

$$\int_{1/(b-a)}^{+\infty}f\left(b-\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t^2}=\lim_{\frac{1}{\varepsilon}\to+\infty}\int_{1/(b-a)}^{1/\varepsilon}f\left(b-\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t^2}$$

este convergentă şi aceste două integrale improprii (de speţa 1 şi de speţa 2) sunt egale. Evident că dacă integrala improprie $\int_{1/(b-a)}^{+\infty}f\left(b-\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t^2}$ este convergentă, atunci şi integrala improprie $\int_a^b f(x)dx$ de asemenea este convergentă.

Aşadar, convergenţa uneia din integralele improprii $\int_a^b f(x)dx$ şi $\int_{1/(b-a)}^{+\infty} f\left(b-\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t^2}$ implică convergenţa celeilalte integrale şi aceste două integrale sunt egale.

În încheiere enunţăm câteva rezultate din 4.3.1 şi 4.3.2 pentru integralele improprii de speţa 2.

1.* *Formula Newton-Leibniz pentru integralele improprii de speţa 2:* dacă funcţia f este continuă pe $[a, b[$, punctul $x=b$ este un punct singular al ei şi $F(x)$ este o primitivă a funcţiei f pe $[a, b[$, atunci

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big/_a^b = F(b)-F(a),$$

unde $F(b)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0+0} F(b-\varepsilon)$.

2.* *Metoda substituţiei într-o integrală improprie de speţa 2*: dacă

a) funcţia f este continuă pe $[a, b[$ şi b este un punct singular al ei;

b) funcţia $x=\varphi(t)$ şi derivata ei sunt continue pe $[\alpha, \beta[$ şi $a=\varphi(\alpha)\le\varphi(t)<b=\lim\limits_{t\to\beta}\varphi(t)$ pentru orice $t\in[\alpha, \beta[$,

atunci $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

În această formulă aceste două integrale improprii au aceeaşi natură: sau ambele sunt convergente şi deci egale între ele, sau ambele sunt divergente.

Teorema 4* (*criteriul particular de comparaţie*). Fie funcţia f continuă pe $[a, b[$ şi b este un punct singular al ei pe $[a, b[$. Dacă

$$|f(x)|\le\frac{c}{(x-a)^p} \quad \text{şi} \quad 0<p<1,$$

atunci integrala improprie

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

este absolut convergentă. Dacă

$$|f(x)|\ge\frac{c}{(x-a)^p}, \text{ unde } c>0 \text{ şi } p\ge 1,$$

atunci integrala improprie

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

este divergentă.

Notă. 1. Uneori metoda substituţiei într-o integrală improprie o transformă pe ea într-o integrală obişnuită (definită). De exemplu, integrala $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ este o integrală improprie, deoarece punctul $x=1$ este un punct singular al funcţiei $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pe $[0, 1[$.

Avem

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\left|\begin{array}{l} x=sint, \quad dx=costdt \\ \forall t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow 0\le x=sint<1=\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}} sint \end{array}\right|=\int_0^{\pi/2}\frac{costdt}{\sqrt{1-sin^2t}}=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t dt}{\cos t}=\int_0^{\pi/2}1\cdot dt.$$

Integrala $\int_0^{\pi/2}1\cdot dt$ este o integrală obişnuită, deoarece funcţia $g(x)=1$ este continuă pe $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Prin urmare, $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^{\pi/2}dt=\frac{\pi}{2}$, ceea ce înseamnă că integrala improprie este convergentă.

2. Atragem atenţie că nu toate proprietăţile referitoare la integralele definite (Riemann) sunt valabile şi pentru integralele improprii. Aşa, de exemplu, produsul a două funcţii integrabile după Riemann pe un segment oarecare este o funcţie integrabilă după Riemann

pe acest segment. În cazul integralelor improprii proprietatea similară nu este valabilă.

De exemplu, fie $f(x)=g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$. Evident că $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ este o integrală improprie de speţa 2, deoarece $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ este continuă pe $]0,1]$ şi $x=0$ este un punct singular al ei.

În virtutea teoremei 4* de mai sus cu $a=0, b=1$, constatăm că această integrală este convergentă, deoarece $\rho=\frac{1}{2}<1$. Pe de altă parte,

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\int_0^1 \frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to 0+0}(\ln x)\Big/_{\varepsilon}^{1}=$$
$$=-\lim_{\varepsilon\to 0+0}(\ln\varepsilon)=+\infty,$$

ceea ce înseamnă că această integrală este divergentă.

4.4. *Aplicaţiile geometrice ale integralei definite*

4.4.1. *Calcularea ariilor figurilor plane în coordonate carteziene dreptunghiulare*

Dacă funcţia $f(x)$ este nenegativă şi continuă pe $[a,b]$, atunci, reieşind din sensul geometric al integralei definite (nota 1 din 4.2.1), aria*) trapezului curbiliniu, mărginit de curba $y=f(x)$, axa OX şi dreptele $x=a$ şi $x=b$, este egală cu

$$S=\int_a^b f(x)dx.$$

*) Despre noţiunile de arie a unei figuri arbitrare plane, volum al unui corp, arie a unei porţiuni de suprafaţă, precum şi despre teoremele respective, vezi, de exemplu, [12].

Dacă funcţia $f(x)$ este nepozitivă şi continuă pe $[a,b]$, atunci

$$\int_a^b f(x)dx\le 0.$$

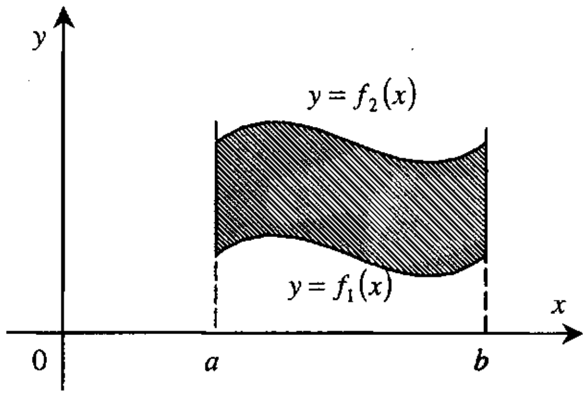
Modulul acestei integrale este egal cu aria trapezului curbiliniu respectiv. Deci aria trapezului curbiliniu

$$S=\left|\int_a^b f(x)dx\right|.$$

Dacă funcţia $f(x)$, continuă pe $[a,b]$, îşi schimbă semnul de un număr finit de ori pe $[a,b]$, descompunem integrala definită pe $[a,b]$ în suma integralelor pe segmente parţiale, unde $f(x)$ îşi păstrează semnul. Integrala va fi pozitivă pe acele segmente parţiale, unde $f(x)\ge 0$ şi negativă, unde $f(x)\le 0$. Integrala pe $[a,b]$ va reprezenta suma algebrică a ariilor trapezelor curbilinii situate deasupra şi sub axa OX. Pentru a obţine suma ariilor în sensul obişnuit, trebuie să aflăm suma modulelor integralelor pe segmentele parţiale indicate mai sus sau să calculăm integrala $S=\int_a^b |f(x)|dx$.

Dacă se cere să se calculeze aria unui domeniu mărginit de graficele funcţiilor $f_1(x), f_2(x)$, care sunt continue pe $[a,b]$ şi de dreptele $x=a$, $x=b$, cu condiţia că $f_1(x)\le f_2(x)$ pentru orice $x\in[a,b]$, vom avea

$$S=\int_a^b f_2(x)dx-\int_a^b f_1(x)dx=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx.$$



Să calculăm acum aria unui trapez curbiliniu în cazul când curba $y=f(x), x\in[a,b]$ este definită prin ecuații în formă parametrică

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad t\in[\alpha,\beta],$$

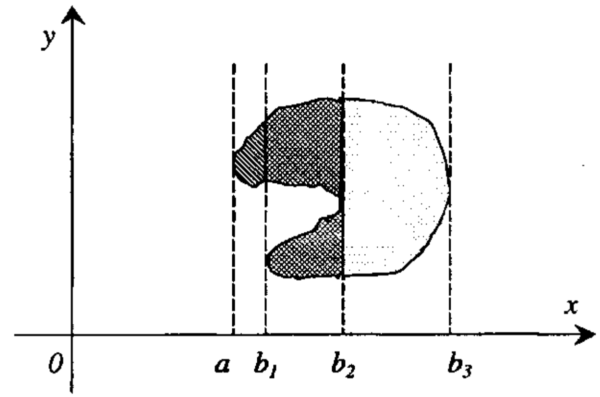
unde funcția $f(x)$ este continuă pe $[a,b]$, iar funcțiile $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$, $\psi(t)$ sunt continue pe $[\alpha,\beta]$ și $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$.

Avem că aria trapezului curbiliniu respectiv se calculează după formula

$$S=\left|\int_a^b f(x)dx\right|=\left|\int_a^b ydx\right|=$$

$$=\left|\begin{array}{c} x=\varphi(t) \\ dx=\varphi'(t)dt \\ a=\varphi(\alpha)\le\varphi(t)\le\varphi(\beta)=b, \\ \alpha\le t\le\beta \end{array}\right|=\left|\int_\alpha^\beta \psi(t)\cdot\varphi'(t)dt\right|.$$

Notă. Dacă figura plană nu reprezintă figura plană considerată în exemplele de mai sus, atunci, în cazul când este posibil, această figură complicată se descompune în mai multe figuri de tipul celor pomenite mai sus, după cum este prezentat în figura de mai jos.



Această descompunere se poate efectua cu ajutorul unor drepte paralele cu axa *OY* sau cu ajutorul unor drepte paralele cu axa *OX*. Se calculează aria fiecărei figuri parțiale și rezultatele se adună.

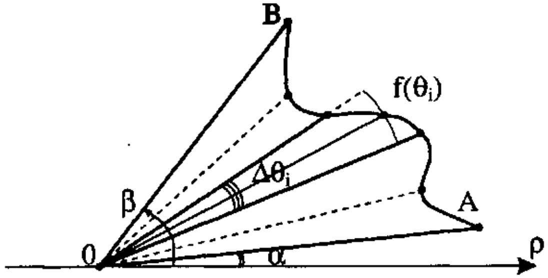
4.4.2. Calcularea ariei unui sector curbiliniu în coordonate polare

Fie curba L caracterizată în coordonatele polare prin ecuația $\rho=f(\theta)$, $\theta\in[\alpha,\beta]$, unde funcția $f(\theta)$ este continuă și nenegativă pe segmentul $[\alpha,\beta]$. Figura plană mărginită de curba L, de două raze, ce formează cu axa polară unghiurile α și β (ecuațiile acestor două raze în raport cu sistemul polar sunt respectiv $\theta=\alpha$ și $\theta=\beta$), se numește *sector curbiliniu.* Vom arăta că aria acestui sector curbiliniu este egală cu

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2 d\theta=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\theta)\cdot d\theta.$$

Într-adevăr, divizăm segmentul $[\alpha,\beta]$ în n segmente intermediare cu ajutorul punctelor

$$\alpha=\theta_0<\theta_1<\ldots<\theta_{i-1}<\theta_i<\ldots<\theta_n=\beta.$$



Pe fiecare din segmentele parțiale $[\theta_{i-1},\theta_i]$ $(1\le i\le n)$ alegem un punct arbitrar $\xi_i(\theta_{i-1}\le\xi_i\le\theta_i)$ și construim sectoare circulare de rază $\rho=f(\xi_i)$. Astfel, obținem o figură în "trepte", formată de aceste sectoare circulare, aria căreia este egală aproximativ cu aria S a sectorului curbiliniu, adică

$$S\approx\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}f^2(\xi_i)\Delta\theta_i,$$

unde $\Delta\theta_i=\theta_i-\theta_{i-1}$. Observăm că această sumă este o sumă integrală pentru funcția $\frac{1}{2}f^2(\theta)$, $\theta\in[\alpha,\beta]$. Deoarece funcția $\frac{1}{2}f^2(\theta)$ este o funcție continuă pe $[\alpha,\beta]$, limita acestei sume integrale, când pasul diviziunii $\lambda=\max\Delta\theta_i\to0$, există și coincide cu integrala definită $\int_\alpha^\beta\frac{1}{2}f^2(\theta)d\theta$.

Prin urmare, aria sectorului curbiliniu este egală cu această integrală definită, adică

$$S=\frac{1}{2}\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f^2(\xi_i)\Delta\theta_i=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\theta)d\theta.$$

4.4.3. Calcularea lungimii unui arc de curbă

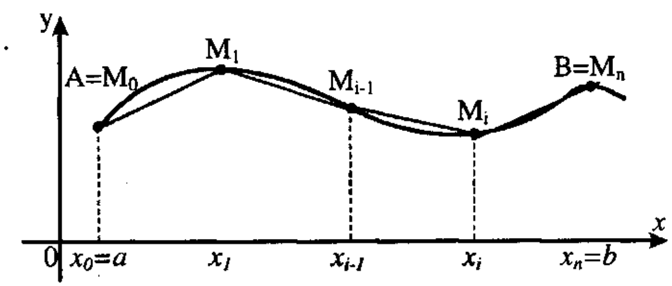
În geometria elementară se introduc noțiunile de lungimea unui segment de dreaptă; a unei linii frânte (se mai numește *linie poligonală*) ca suma lungimilor segmentelor ei; a unei circumferințe ca limita perimetrelor poligoanelor regulate înscrise în ea, când numărul laturilor acestor poligoane creșe nemărginit etc.

Bazându-ne pe noțiunea de lungime a unui segment, vom da acum definiția lungimii unui arc de curbă plană în așa fel ca această definiție să includă definițiile deja cunoscute ca niște cazuri particulare.

Fie $\overset{\smile}{AB}$ arcul unei curbe plane neînchise, care nu se intersectează cu ea însăși, caracterizată de ecuația $y=f(x)$, $x\in[a,b]$. Divizăm arcul $\overset{\smile}{AB}$ în n părți arbitrare cu ajutorul punctelor

$$A=M_0,M_1,M_2,\dots,M_{i-1},M_i,\dots,M_n=B$$

în direcția de la A la B. Unim punctele vecine prin coarde și obținem astfel o linie frântă (linie poligonală) înscrisă în arcul $\overset{\smile}{AB}$, lungimea căreia o notăm prin P_n. Observăm că numărul P_n depinde de modul de divizare a arcului $\overset{\smile}{AB}$ și de numărul punctelor de divizare. Cu cât lungimile coardelor sunt mai mici, cu atât linia frântă $M_0M_1...M_n$ se deosebește mai puțin ca formă de arcul $\overset{\smile}{AB}$.



Notăm prin l_i lungimea segmentului $M_{i-1}M_i$ al liniei frânte, iar prin μ lungimea maximală a segmentelor liniei frânte, adică $\mu = \max l_i$.

Definiția 1. Numărul L se numește limita lungimilor P_n ale liniilor frânte, când $\mu \to 0\left(L = \lim\limits_{\mu\to 0} P_n\right)$, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $\delta > 0$, astfel încât pentru orice linie frântă cu $\mu < \delta$ se verifică inegalitatea

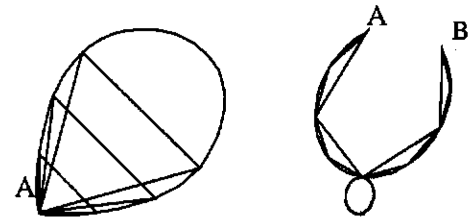
$$|L - P_n| < \varepsilon .$$

Dacă există limita $L = \lim\limits_{\mu\to 0} P_n$ și este finită, atunci numărul L se numește *lungimea arcului* $\overset{\cup}{AB}$. În acest caz arcul $\overset{\cup}{AB}$ se numește *rectificabil.*

Din definiția de mai sus rezultă că L nu depinde de alegerea liniilor frânte înscrise în arcul dat, lungimile segmentelor cărora tind către zero. De asemenea avem: dacă arcul $\overset{\cup}{AB}$ este împărțit prin punctul C în două arce $\overset{\cup}{AC}$ și $\overset{\cup}{CB}$ și dacă oricare două din arcele $\overset{\cup}{AC}$, $\overset{\cup}{CB}$ și $\overset{\cup}{AB}$ sunt rectificabile, atunci este rectificabil și arcul al treilea și

$$L_{\overset{\cup}{AB}} = L_{\overset{\cup}{AC}} + L_{\overset{\cup}{CB}} .$$

Constatăm că dacă arcul $\overset{\cup}{AB}$ este închis sau se intersectează, atunci definiția de mai sus a lungimii arcului $\overset{\cup}{AB}$ nu are sens, deoarece în asemenea cazuri (vezi figurile de mai jos) dacă lungimile tuturor segmentelor (coardelor) liniilor frânte înscrise în curbă tind către zero, aceasta încă nu înseamnă că aceste linii frânte se apropie ca formă de curba dată.



Definiția 2. Convenim să numim curba închisă, care se intersectează pe sine însăși *curbă rectificabilă,* dacă ea poate fi împărțită într-un număr finit de arce rectificabile de felul celor considerate mai sus. În acest caz se constată că *lungimea* unei asemenea curbe este egală cu suma lungimilor arcelor "simple" din care ea este formată.

Presupunem acum că funcția $f(x)$ și derivata ei sunt continue pe $[a,b]$ și vom demonstra că lungimea L a arcului $\overset{\cup}{AB}$, caracterizat prin ecuația $y = f(x)$, $x \in [a,b]$, se exprimă prin formula

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx .$$

Într-adevăr (a se vedea figura dinaintea definiției 1), notăm prin $(x_i, f(x_i))$ coordonatele punctului $M_i (i = 0,1,...,n)$. Deci pentru abscisele acestor puncte avem

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = b .$$

Atunci lungimea l_i a segmentului $M_{i-1}M_i$ al liniei frânte $M_0...M_n$ este egală cu

$$l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2} .$$

Conform formulei Lagrange (din 2.4.3), avem

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1}),\ x_{i-1} < c_i < x_i .$$

Deci

$$l_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + [f'(c_i)]^2 \Delta x_i^2} = \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\, \Delta x_i ,$$

unde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(1 \le i \le n)$.

În consecință, lungimea P_n a liniei frânte $M_0 ... M_n$ este egală cu

$$P_n = \sum_{i=1}^{n} l_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,\Delta x_i .$$

Partea dreaptă a egalității de mai sus reprezintă o sumă integrală a funcției $\sqrt{1+[f'(x)]^2}$, care este continuă pe $[a,b]$. Prin urmare, există limita acestei sume integrale când $\lambda = \max \Delta x_i \to 0$ și este egală cu integrala definită

$$\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx .$$

Observăm că $l_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} \ge \Delta x_i$, adică

$$\lambda = \max \Delta x_i \le \mu = \max l_i .$$

Deci dacă $\mu \to 0$, atunci $\lambda \to 0$.

Așadar,

$$L = \lim_{\mu \to 0} P_n = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+[f'(c_i)]^2}\,\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx . \qquad (1)$$

Notă. 1. Pentru calcularea lungimii arcului, când curba $\overset{\frown}{AB}$ este definită în mod parametric prin ecuațiile $x = \varphi_1(t)$, $y = \varphi_2(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, unde $\varphi_1(t)$, $\varphi_1'(t)$, $\varphi_2(t)$ sunt continue pe $[\alpha,\beta]$ și $a = \varphi_1(\alpha)$, $b = \varphi_1(\beta)$, urmează în formula (1) să se efectueze substituția $x = \varphi_1(t)$, $dx = \varphi_l'(t)dt$. În consecință, obținem

$$L = \int_a^b \sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx = \left| \begin{array}{c} x = \varphi_1(t) \\ dx = x_t' \cdot dt \\ a = \varphi_1(\alpha), b = \varphi(\beta) \end{array} \right| =$$

$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{1+\left[\frac{y'(t)}{x'(t)}\right]^2} \cdot x_t' \cdot dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt . \qquad (2)$$

2. Pentru calcularea lungimii arcului, în cazul când curba $\overset{\frown}{AB}$ este definită în coordonate polare prin ecuația $\rho = f(\theta)$, unde $f(\theta)$, $f'(\theta)$ sunt continue pe segmentul $[\alpha,\beta]$, iar valorile $\theta = \alpha$ și $\theta = \beta$ corespund punctelor A și B, urmează să se treacă de la coordonatele polare la cele carteziene rectangulare. Astfel, obținem ecuațiile parametrice ale curbei $\overset{\frown}{AB}$: $x = \rho\cos\theta = f(\theta)\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta = f(\theta)\sin\theta$, unde parametrul $\theta \in [\alpha,\beta]$. Deoarece

$$x'(\theta) = \rho' \cdot \cos\theta - \rho\sin\theta \text{ și } y'(\theta) = \rho' \cdot \sin\theta + \rho\cos\theta,$$

obținem

$$\sqrt{[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2} = \sqrt{(\rho')^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \rho^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} =$$

$$\sqrt{(\rho')^2 + \rho^2} .$$

Formula (2) se transformă în formula

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2}\,d\theta . \qquad (3)$$

3. Formula (2) poate fi generalizată în cazul unei curbe $\overset{\frown}{AB}$ în spațiu. Fie curba $\overset{\frown}{AB}$ caracterizată de ecuațiile parametrice în spațiu

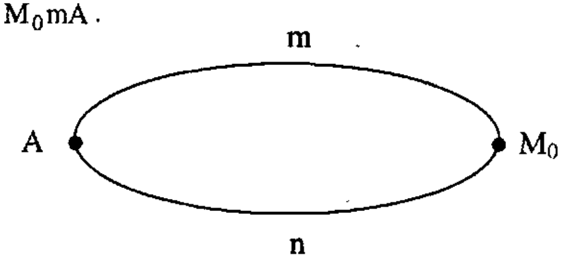
$$x = \varphi_1(t),\ y = \varphi_2(t),\ z = \varphi_3(t),\ t \in [\alpha,\beta],$$

astfel încât dacă parametrul t variază de la α la β, punctul corespunzător al curbei se deplasează în direcția de la A la B. În acest caz dacă funcțiile $\varphi_i(t)$, $\varphi_i'(t)$ $(i=1, 2, 3)$ sunt continue pe $[\alpha,\beta]$, atunci curba $\overset{\frown}{AB}$ în spațiu este rectificabilă și lungimea ei L se calculează după formula

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(x_t'\right)^2 + \left(y_t'\right)^2 + \left(z_t'\right)^2}\,dt \cdot \qquad (4)$$

4. Formulele (1) - (4) sunt valabile și pentru curbe închise. Într-adevăr, fie, de exemplu, că curba închisă este caracterizată de ecuațiile parametrice $x = \varphi_1(t)$, $y = \varphi_2(t)$, $t \in [\alpha,\beta]$ și $\varphi_1(t)$, $\varphi_1'(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_2'(t)$ sunt continue pe $[\alpha,\beta]$.

Fixând o valoare t_0 a parametrului t din segmentul $[\alpha,\beta]$, împărţim curba închisă prin punctul corespunzător $M_0(t_0)$ în două arce $\overset{\cup}{AnM_0}$ şi $\overset{\cup}{M_0mA}$.



În acest caz, conform formulei (2), obţinem

$$L_{AnM_0}=\int_{\alpha}^{t_0}\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt \quad \text{şi} \quad L_{M_0mA}=\int_{t_0}^{\beta}\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt.$$

Prin urmare,

$$L=L_{AnM_0}+L_{M_0mA}=\int_{\alpha}^{t_0}\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt+$$

$$+\int_{t_0}^{\beta}\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt. \qquad (5)$$

Drept exemplu, să calculăm lungimea circumferinţei cu centrul în punctul $C(x_0,y_0)$ de raza r.

Ecuaţia canonică a acestei circumferinţe în coordonate carteziene rectangulare are forma

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2.$$

Forma parametrică a ei este $x-x_0=r\cos t$, adică $x=x_0+r\cos t$, $t\in[0,2\pi]$ şi $y-y_0=r\sin t$, adică $y=y_0+r\sin t$, $t\in[0,2\pi]$, deoarece $(r\cos t)^2+(r\sin t)^2=r^2$ pentru orice $t\in[0,2\pi]$.

Aplicând formula (5), obţinem

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{(-r\sin t)^2+(r\cos t)^2}\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}r\cdot dt=r\cdot t\Big|_0^{2\pi}=r\cdot(2\pi-0)=2\pi r.$$

Am obţinut, bineînţeles, cunoscuta formulă din geometria elementară.

4.4.4. Calcularea ariei unei suprafeţe de rotaţie

Să considerăm o suprafaţă generată prin rotaţia unei curbe în jurul unei axe. O asemenea suprafaţă se numeşte *suprafaţă de rotaţie*.

Definiţie. Se numeşte *aria suprafeţei de rotaţie* a unei curbe în jurul unei axe limita către care tind ariile suprafeţelor de rotaţie generate de liniile frânte (poligonale) înscrise în această curbă atunci când cele mai mari dintre lungimile segmentelor acestor linii frânte tind către zero.

Pentru anumite restricţii asupra curbei date o asemenea limită (finită) există.

Are loc următoarea teoremă.

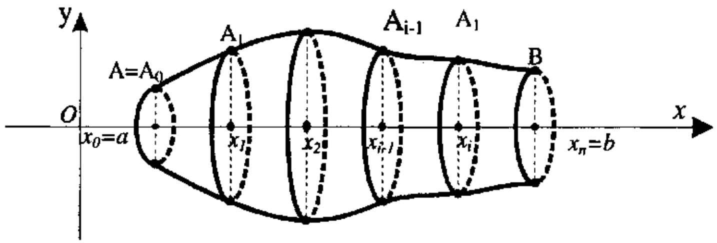
Teoremă. Dacă arcul $\overset{\cup}{AB}$ al unei curbe plane situat în planul XOY şi caracterizat de ecuaţia $y=f(x)$, $x\in[a,b]$, unde funcţia f este nenegativă şi continuă împreună cu derivata sa pe $[a,b]$, se roteşte în jurul axei OX, atunci aria suprafeţei de rotaţie există şi se calculează după formula

$$\sigma_{OX}=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

sau, mai pe scurt, $$\sigma_{OX}=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx.$$

Demonstraţie. Împărţim arcul $\overset{\cup}{AB}$ al curbei $y=f(x)$, $x\in[a,b]$ în direcţia de la A la B cu ajutorul punctelor $A=A_0,A_1,\dots,A_{i-1},A_i,\dots,A_n=B$ în n părţi şi înscriem în acest arc linia frântă $A_0,A_1,\dots,A_n$. Fie $x_0=a<x_1<\dots<x_{i-1}<x_i<\dots<x_n=b$

abscisele vârfurilor acestei linii frânte. La rotația liniei frânte $A_0, A_1, \dots, A_n$ în jurul axei OX se obține o suprafață, care constă din suprafețele laterale ale n trunchiuri de con.



Segmentului parțial $[x_{i-1}, x_i]$ îi corespunde trunchiul de con, care are razele cercurilor de la bază $f(x_{i-1})$ și $f(x_i)$, iar generatoarea lui este coarda $A_{i-1}A_i$ care are lungimea l_i. Aria suprafeței laterale a acestui trunchi de con este egală cu

$$2\pi \cdot \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \cdot l_i$$

unde $l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}$.

Aplicând teorema Lagrange la funcția $f(x)$ pe $[x_{i-1}, x_i]$, obținem

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(t_i)(x_i - x_{i-1}) = f'(t_i)\Delta x_i,$$

unde $t_i \in]x_{i-1}, x_i[$ și $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Deci $l_i = \sqrt{1 + [f'(t_i)]^2}\,\Delta x_i$

și aria suprafeței laterale a trunchiului de con este egală cu

$$\pi[f(x_{i-1}) + f(x_i)] \cdot \sqrt{1 + [f'(t_i)]^2}\,\Delta x_i.$$

Sumăm aceste arii ale suprafețelor parțiale și obținem aria suprafeței laterale generată de linia frântă $A_0, A_1, \dots, A_n$ în jurul axei OX:

$$S_n = \pi \sum_{i=1}^{n} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \cdot \sqrt{1 + [f'(t_i)]^2}\,\Delta x_i.$$

Transformăm această sumă în felul următor

$$S_n = \pi \sum_{i=1}^{n} [(f(x_{i-1}) - f(t_i)) + (f(x_i) - f(t_i)) + 2f(t_i)] \cdot \sqrt{1 + (f'(t_i))^2}\,\Delta x_i =$$

$$= \pi \sum_{i=1}^{n} [(f(x_{i-1}) - f(t_i)) + (f(x_i) - f(t_i))] \cdot \sqrt{1 + (f'(t_i))^2}\,\Delta x_i +$$

$$+ 2\pi \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\sqrt{1 + (f'(t_i))^2}\,\Delta x_i. \qquad (1)$$

Calculăm limita

$$\lim_{\lambda = \max \Delta x_i \to 0} S_n = \lim_{\max M_{i-1}M_i \to 0} S_n,$$

care, în virtutea definiției, coincide cu aria σ_{OX} a suprafeței de rotație a arcului $\overset{\smile}{AB}$ în jurul axei OX.

Vom arăta mai întâi că limita primului termen al egalității (1), când $\lambda \to 0$, este egală cu zero. Într-adevăr, funcția $f(x)$ este uniform continuă pe $[a,b]$ și deci, conform teoremei Cantor, pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $\delta > 0$, astfel încât pentru $\lambda < \delta$ se satisfac inegalitățile

$$|f(x_{i-1}) - f(t_i)| < \frac{\varepsilon}{2M(b-a)} \text{ și } |f(x_i) - f(t_i)| < \frac{\varepsilon}{2M(b-a)},$$

unde $(b-a)$ este lungimea segmentului $[a,b]$, care este egală cu $\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i$ și M este valoarea cea mai mare a funcției continue $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ pe segmentul $[a,b]$, care există în virtutea teoremei Weierstrass.

Deci pentru diviziunea d a segmentului $[a,b]$ în segmente parțiale $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, astfel încât $\lambda = \|d\| < \delta$, avem

$$\left| \sum_{i=1}^{n} [(f(x_{i-1}) - f(t_i)) + (f(x_i) - f(t_i))] \cdot \sqrt{1 + (f'(t_i))^2}\,\Delta x_i \right| \le$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\left(\left|f(x_{i-1})-f(t_i)\right|+\left|f(x_i)-f(t_i)\right|\right)\cdot\sqrt{1+(f'(t_i))^2}\,\Delta x_i <$$

$$<\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\varepsilon}{2M(b-a)}+\frac{\varepsilon}{2M(b-a)}\right]\cdot M\cdot\Delta x_i =$$

$$=\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\varepsilon.$$

Prin urmare,

$$\pi\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(f(x_{i-1})-f(t_i)\right)+\left(f(x_i)-f(t_i)\right)\right]\cdot\sqrt{1+(f'(t_i))^2}\,\Delta x_i=0.$$

Termenul al doilea din egalitatea (1) reprezintă o sumă integrală a funcţiei $2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}$ şi deci dacă $\lambda=\max\Delta x_i\to 0$, acest termen converge, în virtutea continuităţii funcţiei $2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}$ la integrala $2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$.

Aşadar, trecând la limită în egalitatea (1), când $\lambda\to 0$, obţinem

$$\sigma_{OX}=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx \qquad (2)$$

şi teorema este demonstrată.

Notă. 1. Dacă suprafaţa este obţinută prin rotaţia în jurul axei OX a unei curbe $\overset{\smile}{AB}$, caracterizată de ecuaţiile sale parametrice $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $\alpha\leq t\leq\beta$, unde $\psi(t)\geq 0$ pentru orice $t\in[\alpha,\beta]$, $\varphi(t)$ variază de la a la b o dată cu variaţia lui t de la α la β, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ şi funcţiile $\varphi(t)$, $\psi(t)$ sunt continue pe $[\alpha,\beta]$ împreună cu derivatele lor, atunci, efectuând schimbarea de variabilă $x=\varphi(t)$ în integrala (2), obţinem

$$\sigma_{OX}=2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt. \qquad (3)$$

2. Dacă curba $\overset{\smile}{AB}$ e definită printr-o ecuaţie în coordonate polare $\rho=f(\theta)$, $\theta\in[\alpha,\beta]$, unde $f(\theta)$ admite o derivată continuă pe $[\alpha,\beta]$, atunci acest caz se reduce la cazul precedent considerând ecuaţiile parametrice $x=\rho(\theta)\cdot\cos\theta$, $y=\rho(\theta)\cdot\sin\theta$, $\theta\in[\alpha,\beta]$ şi formula (3) se transformă în formula

$$\sigma_{OX}=2\pi\int_\alpha^\beta \rho(\theta)\sin\theta\cdot\sqrt{(\rho(\theta))^2+(\rho'(\theta))^2}\,d\theta. \qquad (4)$$

3. Dacă în teorema de mai sus schimbăm cu locurile variabilele x şi y, atunci formula (2) se transformă în formula

$$\sigma_{OY}=2\pi\int_a^b f(y)\sqrt{1+(f'(y))^2}\,dy=2\pi\int_a^b x\sqrt{1+(x')^2}\,dy. \qquad (5)$$

Exemplu. Să se calculeze aria suprafeţei sferice de rază r.

Suprafaţa sferică poate fi considerată ca o suprafaţă generată prin rotaţia semicircumferinţei $y=\sqrt{r^2-x^2}$, $x\in[-r,r]$, în jurul axei OX. Ecuaţiile parametrice ale semicircumferinţei $y=\sqrt{r^2-x^2}$, $x\in[-r,r]$ sunt:

$$x=r\cos t,\ y=r\sin t,\ t\in[0,\pi].$$

Aplicând formula (3), avem

$$\sigma_{OX}=2\pi\int_0^\pi y\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt=$$

$$=2\pi\int_0^\pi r\sin t\sqrt{r^2\sin^2 t+r^2\cos^2 t}\,dt=2\pi r^2\int_0^\pi \sin t\,dt=$$

$$=2\pi r^2(-\cos t)\Big|_0^\pi=4\pi r^2.$$

4.4.5. Calcularea volumului unui corp după ariile secţiunilor transversale ale acestuia

În acest paragraf vom presupune că cititorul este familiarizat cu calculul volumului unor corpuri uzuale ca: paralelipiped, prismă, piramidă, cilindru, con, trunchi de con. Pornind de la volumul cilindrului, vom defini ce înseamnă că un corp oarecare are volum şi vom deduce o formulă de calcul al volumului unor astfel de corpuri.

Fie F o figură plană situată în planul α. Din fiecare punct al figurii F ridicăm o perpendiculară pe planul α şi depunem pe această perpendiculară un segment de lungime *h*. Considerăm aceste segmente pe una şi aceeaşi parte a planului α. Mulţimea tuturor punctelor ale acestor segmente formează un corp în spaţiu pe care îl vom numi *cilindru drept* cu baza *F* şi înălţimea *h*. Drept exemple de cilindri de acest fel pot servi prisma dreaptă, cilindrul circular drept etc.

Dacă figura *F* este cuadrabilă, adică are arie, atunci e natural să considerăm drept volum al cilindrului drept cu baza F şi înălţimea *h* produsul dintre aria bazei şi înălţimea lui.

Pe parcurs vom considera numai corpuri cilindrice, bazele cărora sunt cuadrabile. Reuniunea unor astfel de corpuri cilindrice bazele cărora nu au puncte interioare comune formează un corp pe care îl vom numi *corp cilindric pe porţiuni*. Evident că volumul corpului cilindric pe porţiuni este egal cu suma volumelor corpurilor cilindrice componente.

Definiţie. Fie C un corp oarecare. Considerăm şirul $\{G_n\}$, $n \in N$, de corpuri cilindrice pe porţiuni care se conţin în interiorul lui C şi şirul $\{H_n\}$, $n \in N$, de corpuri cilindrice pe porţiuni care conţin corpul C în interiorul său. Spunem că corpul C este cubabil, adică are volum, dacă

$$\lim_{n\to\infty} V(G_n) = \lim_{n\to\infty} V(H_n) = A,$$

unde $V(G_n)$ şi $V(H_n)$ sunt respectiv volumele corpurilor cilindrice pe porţiuni G_n şi H_n, $n \in N$. În acest caz volumul corpului C este egal cu A, adică $V(C) = A$.

Din definiţie rezultă că orice cilindru drept cu baza cuadrabilă este cubabil, de asemenea este cubabil şi orice corp cilindric pe porţiuni. Remarcăm că volumul corpului C nu depinde de şirurile considerate $\{G_n\}$ şi $\{H_n\}$, $n \in N$.

Menţionăm următoarele proprietăţi ale volumelor corpurilor geometrice:

1. dacă două corpuri sunt identice, atunci volumele lor sunt egale;
2. dacă corpul C_1 reprezintă o parte a corpului C_2, atunci
$$V(C_1) \le V(C_2);$$
3. dacă, de exemplu, corpul C este împărţit de un plan paralel cu unul din planele de coordonate ale sistemului cartezian *XYZO* în două corpuri C_1 şi C_2, atunci $V(C) = V(C_1) + V(C_2)$.

Fie C un corp geometric mărginit. Presupunem că acest corp este situat între două plane $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ care sunt paralele cu planul de coordonate *YOZ* şi fiecare din aceste două plane are puncte comune cu suprafaţa corpului *C*. Presupunem de asemenea că aria figurii obţinute prin intersecţia corpului dat de către orice plan ce trece prin punctul $x \in [a, b]$ şi este perpendicular pe segmentul $[a, b]$ este o funcţie continuă în raport cu variabila $x \in [a, b]$. Notăm această funcţie prin $S(x)$. Deci $S(x)$ este continuă pe $[a, b]$. Atunci corpul C este cubabil şi volumul lui este egal cu

$$V(C) = \int_a^b S(x)dx. \qquad (1)$$

Demonstrăm această propoziţie în felul următor: trasăm planele $x = x_0 = a$, $x = x_1$, ..., $x = x_{i-1}$, $x = x_i$, ..., $x = x_n = b$.

Aceste plane împart corpul C în n părţi: $C_1, C_2, ..., C_n$. Funcţia $S(x)$, fiind continuă pe $[a, b]$, este continuă pe orice segment parţial $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, ..., n$. Notăm prin m_i valoarea cea mai mică, iar prin M_i valoarea cea mai mare a funcţiei $S(x)$ pe $[x_{i-1}, x_i]$.

Avem $m_i = S(\xi_i)$ şi $M_i = S(t_i)$, unde ξ_i şi $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Pe fiecare corp $C_i (i = 1, ..., n)$ construim două suprafeţe cilindrice, înălţimile cărora sunt $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots n$, iar bazele cărora sunt respectiv secţiunile corpului C_i cu planele $x = \xi_i$ şi $x = t_i$. Notăm primul cilindru drept prin G_i, iar al doilea prin H_i.

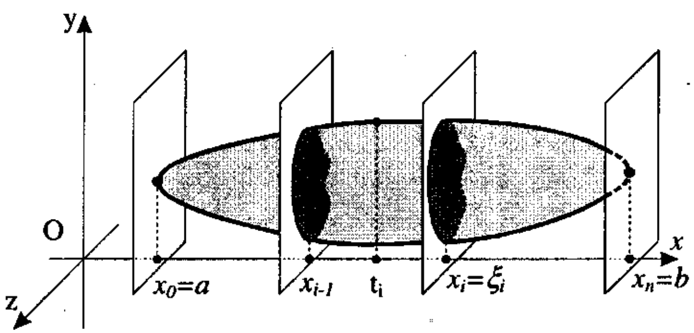
Observăm că

$$V(G_i)=S(\xi_i)\cdot(x_i-x_{i-1})=m_i\Delta x_i$$

$$\text{şi } V(H_i)=S(t_i)\cdot(x_i-x_{i-1})=M_i\Delta x_i.$$

Cilindrul drept G_i ("cel mai mic") se conţine în corpul C_i, iar cilindrul drept H_i ("cel mai mare") conţine corpul C_i. Reuniunea cilindrilor G_i, $(i=1,..,n)$ formează un corp cilindric pe porţiuni care se conţine în corpul C, iar reuniunea cilindrilor H_i, $(i=1,..,n)$ formează un corp cilindric pe porţiuni, care conţine corpul C. Volumele acestor corpuri cilindrice pe porţiuni sunt respectiv

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i \quad \text{şi} \quad \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n} S(t_i)\Delta x_i.$$



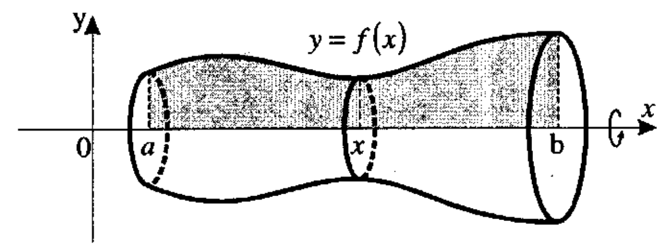
Aceste două sume reprezintă sumele Darboux pentru funcţia continuă $S(x)$ pe $[a,b]$. Deci

$$\lim_{\lambda=\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i=\lim_{\lambda=\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i=\int_a^b S(x)dx.$$

Prin urmare, conform definiţiei,

$$V(C)=\int_a^b S(x)dx.$$

Să considerăm pe planul XOY o curbă caracterizată prin ecuaţia $y=f(x)$, unde $f(x)$ este nenegativă şi continuă pe segmentul $[a,b]$. Dacă vom roti trapezul curbiliniu mărginit de această curbă, de dreptele $x=a$, $x=b$ şi axa OX în jurul axei OX, vom obţine un corp de rotaţie.



Acest corp de rotaţie satisface toate condiţiile expuse la deducerea formulei (1). Avem $S(x)=\pi y^2=\pi f^2(x)$, deoarece orice secţiune a corpului de rotaţie cu planul $x=x_0$, $x_0\in[a,b]$, perpendicular pe axa OX, este un cerc de raza $r=f(x_0)$.

Aplicând formula (1), aflăm volumul corpului de rotaţie:

$$V_{OX}=\pi\int_a^b f^2(x)dx$$

sau, mai pe scurt,

$$V_{OX}=\pi\int_a^b y^2dx. \qquad (2)$$

Fie acum că trapezul curbiliniu al funcţiei nenegative şi continue $y=f(x)$ de baza $[a,b]$ se roteşte în jurul axei OY. Împărţim $[a,b]$ în n segmente parţiale cu ajutorul punctelor

$$x_0=a<x_1<x_2<...<x_{i-1}<x_i<...<x_n=b.$$

Considerăm trapezul curbiliniu parţial mărginit de graficul funcţiei $y = f(x)$, de dreptele $x = x_{i-1}$, $x = x_i$ şi de axa *OX*. Presupunem că acest trapez curbiliniu este un dreptunghi cu baza $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ şi înălţimea $h_i = f(x_i)$. Dacă rotim acest dreptunghi în jurul axei *OY*, vom obţine un corp volumul căruia este egal cu $2\pi x_i \cdot h_i \cdot \Delta x_i$. Deci volumul corpului obţinut la rotaţia trapezului curbiliniu parţial al funcţiei $y = f(x)$ de baza $[x_{i-1}, x_i]$ în jurul axei *OY* este egal cu $\Delta V_i \approx 2\pi x_i \cdot f(x_i) \cdot \Delta x_i$.

Sumând volumele acestor corpuri parţiale, obţinem următoarea formulă pentru volumul acestui corp de rotaţie

$$V_{OY} = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i \approx 2\pi \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) \Delta x_i .$$

Suma din partea dreaptă reprezintă o sumă integrală a funcţiei $x f(x)$, care este continuă pe $[a, b]$.

Prin urmare, $\int_a^b x f(x) dx$ există şi

$$V_{OY} = 2\pi \int_a^b x f(x) dx = 2\pi \int_a^b xy dx . \qquad (3)$$

Notă. 1. Dacă schimbăm cu locurile variabilele *x* şi *y* în formula (2) obţinem următoarele: volumul corpului de rotaţie al unui trapez curbiliniu mărginit de dreptele *y=c*, *y=d*, graficul funcţiei $x = \varphi(y)$ nenegativă şi continuă pe [*c*, *d*] şi axa *OY* în jurul axei *OY* se calculează cu ajutorul formulei

$$V_{OY} = \pi \int_c^d x^2 dy = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy . \qquad (4)$$

2. Aplicând formula (1) obţinem următoarele: volumul corpului de rotaţie al figurii mărginită de graficele funcţiilor $f_1(x)$, $f_2(x)$, de dreptele *x=a* şi *x=b* în jurul axei *OX* se calculează cu ajutorul formulei

$$V \quad \pi \int_a^b f_2^2(x) dx - \pi \int_a^b f_1^2(x) dx = \pi \int_a^b \left[f_2^2(x) - f_1^2(x) \right] dx , \qquad (5)$$

unde $f_1(x)$, $f_2(x)$ sunt continue pe $[a,b]$ şi $f_2(x) \geq f_1(x) \geq 0$ pentru orice $x \in [a,b]$.

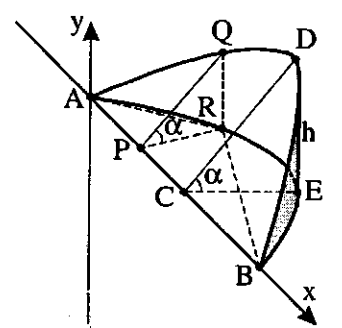
Exemplul 1. Să se calculeze volumul "trunchiului de cilindru" tăiat într-un semicilindru circular drept de raza *r* de un plan care trece prin diametrul bazei şi formează unghiul α cu planul bazei.

Să luăm diametrul *AB* drept axa *OX*, iar punctul *A* drept origine.

Notăm cu *r* raza bazei cilindrului drept şi cu α unghiul format de secţiunea superioară a trunchiului de cilindru cu baza sa.

Secţiunea transversală, perpendiculară pe diametrul $AB = 2r$, este triunghiul dreptunghic ΔPQR, iar aria sa se exprimă prin formula

$$S(x) = \frac{1}{2} PR \cdot QR = \frac{1}{2} PR \cdot PR \cdot \mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{2} PR^2 \mathrm{tg}\alpha .$$



Triunghiul ΔARB este dreptunghic (se sprijină pe diametrul cercului) şi *PR* este înălţimea coborâtă din vârful *R* pe baza *AB*.

Această înălţime este media geometrică între segmentele $AP = x$ şi $PB = 2r - x$ ale diametrului *AB*. Deci

$$PR^2 = AP \cdot PB = x(2r - x) \quad \text{şi} \quad S(x) = \frac{1}{2} x(2r - x) \cdot \mathrm{tg}\alpha .$$

Aplicând formula (1), obţinem pentru volumul "trunchiului de cilindru" următoarele:

$$V=\int_0^{2r}S(x)dx=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\int_0^{2r}x(2r-x)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\left(rx^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2r}=\frac{2}{3}r^3\operatorname{tg}\alpha.$$

Având în vedere că înălţimea h a acestui corp, din triunghiul dreptunghic ΔCDE este egală cu $r\operatorname{tg}\alpha$, obţinem

$$V=\frac{2}{3}r^2h.$$

Exemplul 2. Să se calculeze volumul mărginit de suprafaţa sferică de raza r.

Considerăm acest corp drept un corp de rotaţie generat la rotaţia semicircumferinţei $y=\sqrt{r^2-x^2}$, $x\in[-r,r]$ în jurul axei OX.

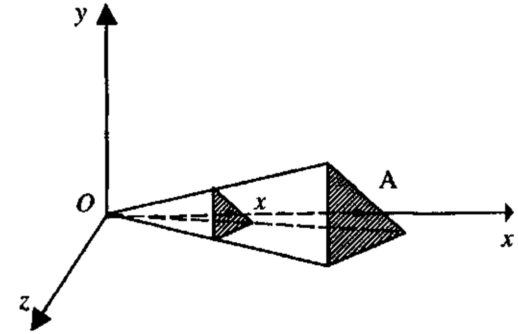
Deci volumul acestui corp se va calcula după formula (2):

$$V=\pi\int_{-r}^{r}\left(r^2-x^2\right)dx=\pi r^2x\Big|_{-r}^{r}-\frac{\pi}{3}x^3\Big|_{-r}^{r}=$$

$$=\pi r^2(r+r)-\frac{\pi}{3}\left(r^3+r^3\right)=2\pi r^3-\frac{2}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

Exemplul 3. Să se calculeze volumul piramidei, aria bazei căreia este *S*, iar înălţimea ei este *H*.

Considerăm un sistem cartezian de coordonate *OXYZ* cu originea în vârful piramidei şi direcţia pozitivă a axei *OX* orientată după înălţimea piramidei.



Fie x un punct arbitrar pe segmentul $[0,H]$. Secţiunea piramidei, perpendiculară pe segmentul *OA* în punctul *x*, este un poligon asemenea cu poligonul bazei şi are aria $S(x)$, care se raportă la aria *S* a bazei după cum x^2 se raportă la H^2. Deci

$$\frac{S(x)}{S}=\frac{x^2}{H^2},\quad \text{de unde } S(x)=\frac{S}{H^2}x^2.$$

Aplicând formula (1), obţinem că volumul *V* al piramidei este egal cu

$$V=\int_0^H S(x)dx=\int_0^H\frac{S}{H^2}x^2dx=\frac{S}{3H^2}x^3\Big|_0^H=\frac{1}{3}SH.$$

4.5. Aplicaţiile mecanice ale integralei definite

4.5.1. Calcularea lucrului mecanic

Fie $F=F(x)$ o forţă, care este considerată ca o funcţie continuă pe segmentul $[a,b]$, şi *M* un punct material, care se mişcă pe segmentul $[a,b]$ sub acţiunea forţei *F*. Reieşind din sensul mecanic al integralei definite (nota 2 din 4.2.1), avem că lucrul mecanic, efectuat de forţa F (care acţionează în direcţia mişcării) pentru deplasarea punctului material *M* din poziţia $x=a$ în poziţia $x=b$ de-a lungul acestui segment, este egal cu

$$A=\int_a^b F(x)dx. \qquad (1)$$

În calitate de forța F poate fi considerată:

- forța de acțiune a unui arc elastic;
- forța de acțiune a unei surse magnetice asupra unui corp magnetic;
- forța de interacțiune între două încărcături electrice;
- forța de atracție universală între două corpuri etc.

Exemplul 1. Forța de acțiune reciprocă între două încărcături electrice e_1 și e_2 situate la distanța x una de alta, se determină după formula

$$F=k\cdot\frac{e_1e_2}{x^2},$$

unde k este o constantă.

Presupunem că încărcătura e_1 este situată în originea O a axei OX. Să se determine lucrul mecanic al forței F la deplasarea încărcăturii e_2 din punctul M_1 situat la distanța r_1 de încărcătura e_1 în punctul M_2, care este situat la distanța $r_2>r_1$ de încărcătura e_1.

Conform formulei (1), avem

$$A=\int_a^b F(x)dx=\int_{r_1}^{r_2}\frac{ke_1e_2}{x^2}dx=-ke_1e_2\cdot\frac{1}{x}\Big/_{r_1}^{r_2}=ke_1e_2\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right).$$

Dacă $r_2=+\infty$ și $e_2=1$, obținem

$$A=\int_{r_1}^{+\infty}F(x)dx=-ke_1 1\cdot\frac{1}{x}\Big/_{r_1}^{+\infty}=-ke_1\left(0-\frac{1}{r_1}\right)=\frac{ke_1}{r_1}$$

Această mărime se numește *potențialul câmpului* creat de sarcina electrică e_1.

Exemplul 2. Să se calculeze lucrul și viteza necesare pentru lansarea unui corp cu masa m de pe suprafața Pământului vertical în sus la înălțimea h.

Conform legii atracției universale, forța care acționează asupra corpului dat este $F=k\frac{m\cdot m_p}{x^2}$, unde m_p este masa Pământului, iar x este distanța de la corp până la centrul Pământului. Deci $F=\frac{k\cdot m\cdot m_p}{x^2}=\frac{\gamma}{x^2}$, $x\in[r,r+h]$, unde r - raza Pământului, iar h - orice număr real pozitiv. Dacă $x=r$, adică corpul se găsește pe Pământ, atunci forța $F(r)=\frac{\gamma}{r^2}$ este egală cu greutatea acestui corp, adică $P=mg$, unde g este accelerația căderii libere. Prin urmare, $\frac{\gamma}{r^2}=mg$, de unde $\gamma=mgr^2$ și

$F(x)=\frac{mgr^2}{x^2}$, $x\in[r,r+h]$.

Așadar, conform formulei (1), obținem

$$A=\int_r^{r+h}F(x)dx=mgr^2\int_r^{r+h}\frac{dx}{x^2}=-mgr^2\cdot\frac{1}{x}\Big/_r^{r+h}=mgr^2\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r+h}\right)=$$
$$=\frac{mgr^2h}{r(r+h)}=\frac{mgrh}{r+h}.$$

Ieșirea corpului în spațiul interplanetar nu e altceva decât lansarea lui la o înălțime infinită: $h=+\infty$.

În cazul acesta avem

$$A=\int_r^{+\infty}F(x)dx=-mgr^2\frac{1}{x}\Big/_r^{+\infty}=-mgr^2\left(0-\frac{1}{r}\right)=\frac{mgr^2}{r}=mgr.$$

Acest lucru se efectuează din contul variației energiei cinetice a corpului. De aceea energia cinetică $\frac{mv^2}{2}$ a corpului în momentul inițial trebuie să fie nu mai mică decât acest lucru, adică viteza inițială v a acestui corp urmează să verifice inegalitatea: $\frac{mv^2}{2}\geq mgr$, de unde

$v\geq\sqrt{2gr}\approx\sqrt{2\cdot10\cdot6400000}=8000\sqrt{2}\approx11200(m/s)=11{,}2km/s.$

Dacă viteza iniţială $v = 11{,}2 km/s$, atunci traiectoria mişcării acestui corp va fi o parabolă. Dacă $v > 11{,}2 km/s$, traiectoria lui va fi o hiperbolă. Dacă însă $v < 11{,}2 km/s$, corpul dat sau se va mişca pe o traiectorie eliptică, sau va cădea pe Pământ, sau va deveni satelit artificial al Pământului.

4.5.2. Centrul de greutate al liniei plane materiale (numită cablu)

Din cursul de fizică este cunoscut că dacă în planul XOY avem un sistem de n puncte materiale $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \ldots, M_n(x_n, y_n)$, ale căror mase sunt respectiv $m_1, m_2, \ldots, m_n$, atunci coordonatele centrului de greutate $C(x_c, y_c)$ al sistemului se calculează cu ajutorul formulelor

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i},$$ unde $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ se numeşte *masa sistemului*, iar mărimile $M_{OY} = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i$ şi $M_{OX} = \sum_{i=1}^{n} y_i m_i$ se numesc *momentele statice* ale sistemului în raport cu axele de coordonate OY şi OX. În fizică se mai întâlnesc şi expresii de forma $I_{OY} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 m_i$, $I_{OX} = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 m_i$, $I_O = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + y_i^2) m_i$, care se numesc *momente de inerţie ale sistemului* în raport cu axele de coordonate şi ale originii sistemului cartezian de coordonate XOY.

Dacă aceste puncte materiale reprezintă arce de curbe plane omogene, atunci masele lor $m_i (i = 1, \ldots, n)$ sunt proporţionale cu lungimile arcelor lor.

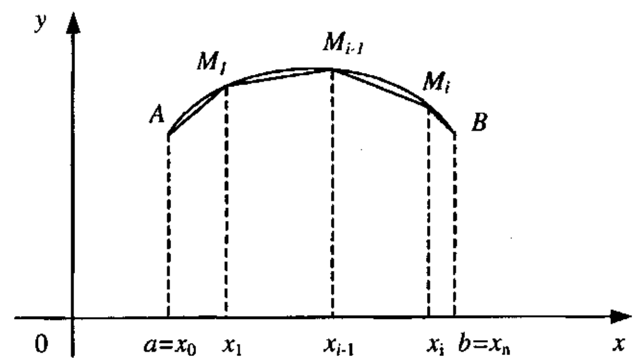
Pentru a afla centrul de greutate, putem proceda astfel: grupăm după voie punctele sistemului, descompunându-l în sisteme parţiale şi aflăm centrele de greutate ale acestora. Apoi calculăm centrul de greutate al sistemului format de aceste centre

de greutate, considerând că în fiecare dintre ele este concentrată întreaga masă a sistemului parţial respectiv.

În cele ce urmează vom studia nu sisteme de puncte, ci cazul când masa este continuu repartizată într-o linie plană (cablu), adică această linie este neomogenă.

Fie $\overset{\smile}{AB}$ un arc de curbă materială neomogenă caracterizată prin graficul funcţiei $y = f(x)$, care este continuă cu derivata sa pe $[a,b]$ şi densitatea liniară $\gamma = \gamma(x)$ care este o funcţie pozitivă şi continuă pe $[a,b]$.

Împărţim arcul $\overset{\smile}{AB}$ în n arce parţiale cu ajutorul punctelor
$$A = M_0, M_1, \ldots, M_{i-1}, M_i, \ldots, M_n = B$$



şi notăm lungimile acestor arce respectiv prin $\Delta l_1, \Delta l_2, \ldots, \Delta l_i, \ldots, \Delta l_n$.

Întrucât funcţia $f(x)$, $x \in [a,b]$ este continuă împreună cu derivata sa pe $[a,b]$, lungimea Δl_i a arcului $\overset{\smile}{M_{i-1}M_i}$ se exprimă cu o mică eroare, prin lungimea coardei $M_{i-1}M_i$. Deci

$$\Delta l_i \approx M_{i-1}M_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}.$$

Aplicând teorema Lagrange la funcţia $f(x)$, continuă pe segmentul parţial $[x_{i-1}, x_i]$, obţinem

$$\Delta l_i \approx \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f'(t_i)(x_i - x_{i-1}))^2} =$$
$$= \sqrt{1 + (f'(t_i))^2}(x_i - x_{i-1}) = \sqrt{1 + (f'(t_i))^2}\Delta x_i,$$

unde $t_i \in]x_{i-1}, x_i[$.

Dacă presupunem că arcul parțial $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ este omogen cu densitatea $\gamma = \gamma(t_i)$, atunci masa acestui arc se exprimă prin formula aproximativă

$$m_i \approx \gamma(t_i) \cdot \Delta l_i \approx \gamma(t_i) \cdot \sqrt{1 + (f'(t_i))^2} \cdot \Delta x_i.$$

Această egalitate aproximativă este cu atât mai aproape de egalitatea exactă, cu cât $\lambda = \max \Delta x_i$ este mai mic. Urmând principiul general de mai sus, referitor la determinarea centrului de greutate, am descompus arcul $\overset{\frown}{AB}$ în n arce parțiale. Fiecare din arcele parțiale se înlocuiește printr-un singur punct material, în care presupunem concentrată întreaga masă m_i a acestui arc parțial.

În felul acesta obținem următoarele:

a) masa totală a arcului $\overset{\frown}{AB}$ este $M = \sum_{i=1}^{n} m_i \approx \sum_{i=1}^{n} \gamma(t_i) \cdot \sqrt{1 + (f'(t_i))^2}\Delta x_i$.

Întrucât partea dreaptă reprezintă suma integrală (Riemann) a funcției $\gamma(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}$, care este continuă pe $[a,b]$, deci există $\int_a^b \gamma(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$ și

$$M = \int_a^b \gamma(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx; \qquad (1)$$

b) pentru momentele statice avem următoarele :

$$M_{OY} \approx \sum_{i=1}^{n} t_i \cdot \gamma(t_i) \cdot \sqrt{1 + (f'(t_i))^2}\Delta x_i,$$

$$M_{OX} \approx \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \cdot \gamma(t_i) \cdot \sqrt{1 + (f'(t_i))^2}\Delta x_i.$$

Sumele respective reprezintă sume integrale ale funcțiilor $x\gamma(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}$ și $f(x)\gamma(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}$, care sunt continue pe $[a,b]$. Prin urmare, obținem următoarele formule pentru calcularea momentelor statice ale liniei plane (ale cablului):

$$M_{OY} = \int_a^b x\gamma(x)\sqrt{1 + (y')^2}dx, \qquad (2)$$

$$M_{OX} = \int_a^b y\gamma(x)\sqrt{1 + (y')^2}dx; \qquad (3)$$

c) similar punctului precedent, avem că momentele de inerție ale unei linii plane (cablu) se calculează după formulele

$$I_{OY} = \int_a^b x^2\gamma(x)\sqrt{1 + (y')^2}dx, \qquad (4)$$

$$I_{OX} = \int_a^b y^2\gamma(x)\sqrt{1 + (y')^2}dx, \qquad (5)$$

$$I_O = I_{OX} + I_{OY} = \int_a^b (x^2 + y^2)\gamma(x)\sqrt{1 + (y')^2}dx; \qquad (6)$$

d) coordonatele centrului de greutate ale liniei plane (ale cablului) sunt:

$$x_c = \frac{M_{OY}}{M} = \frac{\int_a^b x\gamma(x)\sqrt{1 + (y')^2}dx}{\int_a^b \gamma(x)\sqrt{1 + (y')^2}dx}, \qquad (7)$$

$$y_c = \frac{M_{OX}}{M} = \frac{\int_a^b y\gamma(x)\sqrt{1+(y')^2}\,dx}{\int_a^b \gamma(x)\sqrt{1+(y')^2}\,dx}. \tag{8}$$

Constatăm că dacă linia materială este omogenă, adică $\gamma = const$, atunci

$$x_c = \frac{1}{L}\int_a^b x\sqrt{1+(y')^2}\,dx, \tag{9}$$

$$y_c = \frac{1}{L}\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx, \tag{10}$$

unde L este lungimea arcului liniei materiale.

Din formula (10) observăm că dacă $f(x) \geq 0$ ($f(x) \not\equiv 0$) pentru orice $x \in [a,b]$, atunci $y_c > 0$ (a se consulta 4.2.3, proprietatea 8).

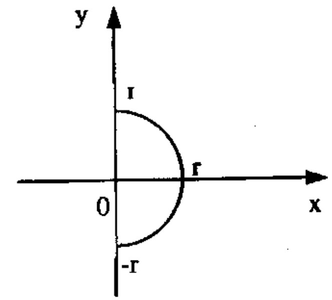
Presupunem că $f(x) \geq 0$ ($f(x) \not\equiv 0$) pentru orice $x \in [a,b]$. Înmulţind ambele părţi ale egalităţii (10) la numărul $2\pi L$, obţinem $2\pi y_c L = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx$. În partea dreaptă a egalităţii avem aria suprafeţei laterale a corpului de rotaţie generat la rotaţia arcului $\overset{\smile}{AB}$ în jurul axei OX, când acest arc nu intersectează axa OX (a se consulta formula (2) din 4.4.4), iar în partea stângă avem produsul dintre lungimea circumferinţei descrisă de centrul de greutate al arcului, care se roteşte în jurul axei OX şi lungimea acestui arc.

Prin urmare, am demonstrat următoarea teoremă a lui P. Guldin (matematician elveţian (1577-1643)).

Teorema 1 (Guldin). Aria suprafeţei laterale a unui corp de rotaţie generat prin rotaţia unui arc de curbă plană în jurul unei axe, care se află în planul ei şi nu se intersectează cu ea, este egală cu produsul dintre lungimea arcului, care se roteşte şi lungimea circumferinţei descrisă în cursul acestei rotaţii de centrul de greutate al arcului.

Exemplul 1. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al arcului circumferinţei $x^2 + y^2 = r^2$, situată în cadranele 1 şi 4, considerând densitatea liniară $\gamma = const = 1$.

Lungimea acestui arc de circumferinţă este egal cu $L = \frac{2\pi r}{2} = \pi r$. Întrucât arcul este simetric în raport cu axa OX avem că centrul de greutate se află pe această axă, adică $y_c = 0$.



Aplicând formula (9), avem

$$x_c = \frac{1}{L}\int_0^r x\sqrt{1+(y')^2}\,dx = \left|\begin{matrix} x = r\cos t \\ y = r\sin t \\ t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{matrix}\right| = \frac{1}{\pi r}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\cos t\sqrt{1+\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)^2}\cdot x'_t dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t}\,dt = \frac{r}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt =$$

$$= \frac{r}{\pi}(\sin t)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2r}{\pi}.$$

Prin urmare, centrul de greutate al acestui arc omogen are coordonatele $x_c = \frac{2r}{\pi}$, $y_c = 0$.

Să aplicăm acum teorema 1 a lui Guldin. Dacă în calitate de axă de rotaţie luăm axa OX, atunci teorema nu poate fi aplicată, deoarece axa OX intersectează acest arc şi $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$ îşi schimbă semnul pe $[0,r]$. Dacă în calitate de axă luăm axa OY, care trece prin extremităţile acestui arc, dar nu-l intersectează înăuntrul lui, avem: $x=\sqrt{r^2-y^2}\geq 0$ pentru orice $y\in[-r,r]$ şi suprafaţa corpului de rotaţie este o suprafaţă sferică de raza r. Deci aria acestei suprafeţe este egală cu $S=4\pi r^2$. Aplicând teorema 1, avem $2\pi x_c\cdot L=S$ *sau* $2\pi x_c\cdot\pi r=4\pi r^2$, de unde $x_c=\dfrac{4\pi r^2}{2\pi\cdot\pi r}=\dfrac{2r}{\pi}$.

Exemplul 2. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al arcului de circumferinţă $x^2+y^2=r^2$, situat în cadranul 1, considerând $\gamma=const=1$.

Lungimea acestui arc de circumferinţă este egal cu $L=\dfrac{2\pi r}{4}=\dfrac{\pi r}{2}$. Să aflăm coordonatele centrului de greutate aplicând teorema 1 a lui Guldin.

Dacă luăm în calitate de axă de rotaţie axa OX (care nu intersectează acest arc, ci trece prin extremitatea lui), atunci suprafaţa corpului de rotaţie este o semisferă de raza r. Deci aria acestei suprafeţe este egală cu $S=\dfrac{1}{2}4\pi r^2=2\pi r^2$ (a se consulta exemplul din 4.4.4). Deci $S=2\pi y_c L$ şi $y_c=\dfrac{S}{2\pi L}=\dfrac{2\pi r^2}{2\pi\cdot\dfrac{\pi r}{2}}=\dfrac{2r}{\pi}$.

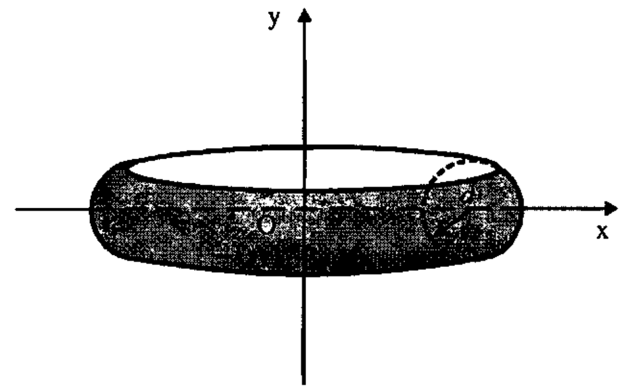
Similar, dacă considerăm că axa de rotaţie este axa OY, atunci $S=\dfrac{1}{2}4\pi r^2=2\pi r^2=2\pi\cdot x_c\cdot L$, de unde $x_c=\dfrac{2\pi r^2}{2\pi\dfrac{\pi r}{2}}=\dfrac{2r}{\pi}$.

Propunem cititorului să calculeze coordonatele centrului de greutate folosind formulele (9) şi (10).

Exemplul 3. Să se calculeze aria suprafeţei de rotaţie, care se obţine dacă o circumferinţă de raza r se roteşte în jurul unei drepte situată în planul circumferinţei la distanţa a de la centrul ei, unde $a>r$, adică axa de rotaţie nu intersectează circumferinţa. Acest corp de rotaţie se numeşte *tor*.

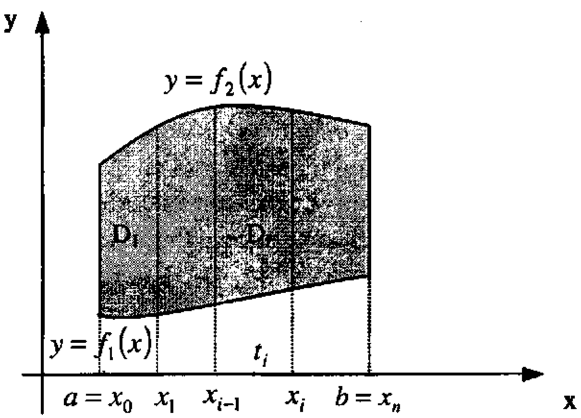
Lungimea circumferinţei este egală cu $L=2\pi r$. Alegem axa OY la distanţa a de la centrul circumferinţei de raza r. Centrul de greutate al circumferinţei omogene $(\gamma=const=1)$ coincide cu centrul ei geometric, adică $x_c=a$ şi $y_c=0$. Aplicând teorema Guldin, obţinem că aria acestui corp de rotaţie este egală cu $S=2\pi x_c L=2\pi a\cdot 2\pi r=4\pi^2 ar$.

Propunem cititorului să calculeze aria suprafeţei laterale a torului, reieşind din formula (5) din 4.4.4.



4.5.3 Centrul de greutate al figurii plane materiale (numită placă)

Fie D un domeniu plan material mărginit de dreptele $x=a$, $y=b$ şi graficele funcţiilor $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, care sunt nenegative, continue pe $[a,b]$ şi $f_1(x)\leq f_2(x)$ pentru orice $x\in[a,b]$. Notăm prin $\gamma=\gamma(x)$ densitatea de suprafaţă, unde $\gamma(x)$ este pozitivă şi continuă pe $[a,b]$.



Urmând principiul general din punctul precedent, descompunem domeniul D în n fâşii verticale $D_1, \ldots, D_i, \ldots, D_n$ prin dreptele $x = x_0 = a,\ x = x_1, \ldots, x = x_{i-1},\ x = x_i, \ldots, x = x_n = b$, paralele cu axa OY. Înlocuim fiecare fâşie D_i printr-un dreptunghi, care are înălţimea $f_2(t_i) - f_1(t_i)$, unde $t_i = \dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}$ şi baza $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Dacă presupunem că acest dreptunghi este omogen cu $\gamma = \gamma(t_i)$, atunci masa fâşiei $D_i (i = 1, \ldots, n)$ este egală cu $\Delta m_i \approx \gamma(t_i) \cdot [f_2(t_i) - f_1(t_i)] \Delta x_i$.

Deoarece centrul de greutate al dreptunghiului omogen coincide cu punctul de intersecţie al diagonalelor lui, avem $(x_i)_c = t_i, (y_i)_c = \dfrac{f_1(t_i) + f_2(t_i)}{2}$. Pentru a calcula centrul de greutate al domeniului D, înlocuim fiecare fâşie prin centrul de greutate al dreptunghiului respectiv, considerând concentrată în el întreaga masă Δm_i.

Aplicând formulele respective din punctul precedent referitor la aceste puncte $((x_i)_c, (y_i)_c),\ i = 1, 2, \ldots, n$, obţinem următoarele

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i)_c \Delta m_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i} \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i \gamma(t_i) [f_2(t_i) - f_1(t_i)] \cdot \Delta x_i}{\sum_{i=1}^{n} \gamma(t_i) [f_2(t_i) - f_1(t_i)] \Delta x_i},$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i)_c \Delta m_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i} \approx \frac{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} [f_2(t_i) + f_1(t_i)] \gamma(t_i) \cdot [f_2(t_i) - f_1(t_i)] \cdot \Delta x_i}{\sum_{i=1}^{n} \gamma(t_i) \cdot [f_2(t_i) - f_1(t_i)] \Delta x_i} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \gamma(t_i) \cdot [f_2^2(t_i) - f_1^2(t_i)] \cdot \Delta x_i}{\sum_{i=1}^{n} \gamma(t_i) \cdot [f_2(t_i) - f_1(t_i)] \Delta x_i}.$$

În numărătorii şi numitorul comun ai acestor fracţii avem sume integrale ale funcţiilor $x\gamma(x) \cdot [f_2(x) - f_1(x)]$, $\gamma(x) \cdot [f_2^2(x) - f_1^2(x)]$ şi $\gamma(x) \cdot [f_2(x) - f_1(x)]$, care sunt continue pe $[a, b]$. Trecând la limită când $\lambda = \max \Delta x_i \to 0$, obţinem formulele

$$x_c = \frac{\int_a^b x\gamma(x) \cdot [f_2(x) - f_1(x)] dx}{\int_a^b \gamma(x) \cdot [f_2(x) - f_1(x)] dx}, \tag{1}$$

$$y_c = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b \gamma(x) \cdot [f_2^2(x) - f_1^2(x)] dx}{\int_a^b \gamma(x) \cdot [f_2(x) - f_1(x)] dx}. \tag{2}$$

Constatăm că masa domeniului D este egală cu

$$M = \int_a^b \gamma(x) \cdot [f_2(x) - f_1(x)] dx, \tag{3}$$

iar momentele statice ale figurii materiale D se calculează după formulele

$$M_{OX} = \frac{1}{2}\int_a^b \gamma(x)\cdot\left[f_2^2(x) - f_1^2(x)\right]dx, \tag{4}$$

$$M_{OY} = \int_a^b x\gamma(x)\cdot\left[f_2(x) - f_1(x)\right]dx. \tag{5}$$

Dacă figura materială D este omogenă, adică $\gamma(x) = const$, atunci coordonatele centrului de greutate ale ei se calculează după formulele

$$x_c = \frac{1}{S}\int_a^b x\cdot\left[f_2(x) - f_1(x)\right]dx, \tag{6}$$

$$y_c = \frac{1}{2S}\int_a^b \left[f_2^2(x) - f_1^2(x)\right]dx, \tag{7}$$

unde S este aria domeniului D.

Din formulele (6) şi (7) rezultă următoarele: dacă figura plană omogenă este simetrică în raport cu axa OX, atunci $y_c = 0$. Pentru figura simetrică în raport cu axa OY, avem $x_c = 0$, iar pentru figura simetrică în raport cu originea sistemului cartezian de coordonate XOY, avem $x_c = y_c = 0$.

Considerăm în formula (7) că $f_2(x) > f_1(x) \geq 0$, atunci $y_c > 0$ (a se consulta 4.2.3 proprietatea 8). Înmulţim ambele părţi ale egalităţii (7) cu numărul $2\pi S$, obţinem

$$2\pi y_c \cdot S = \pi\int_a^b \left[f_2^2(x) - f_1^2(x)\right]dx.$$

În partea dreaptă a acestei egalităţi am obţinut volumul corpului, care se obţine prin rotaţia domeniului D în jurul axei OX (a se vedea formula (5) din 4.4.5). În partea stângă avem produsul dintre lungimea circumferinţei descrisă de rotaţia centrului de greutate al acestei figuri plane în jurul axei OX şi aria acestei figuri.

Astfel, are loc următoarea teoremă, a doua, a lui Guldin.

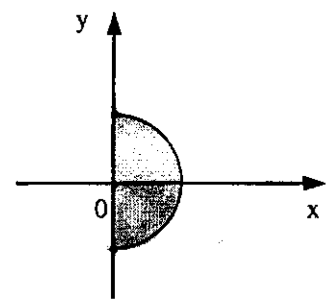
Teoremă. Volumul corpului obţinut prin rotirea unei figuri plane în jurul unei axe ce se află în planul ei şi nu o intersectează

este egal cu produsul dintre aria figurii plane care se roteşte şi lungimea circumferinţei descrisă în cursul acestei rotaţii de centrul ei de greutate.

Exemplul 1. Să se calculeze centrul de greutate al semicercului omogen de rază r.

Să luăm drept baza semicercului axa OY, iar centrul lui coincide cu originea O a sistemului cartezian de coordonate XOY.

Deoarece figura este simetrică în raport cu axa OX, avem $y_c = 0$, adică centrul de greutate se află pe această axă. Rămâne să calculăm x_c. Pentru aceasta vom folosi teorema 2 a lui Guldin. Corpul obţinut prin rotirea semicercului în jurul axei OY este



mărginit de o sferă de raza r. Deci volumul acestui corp este $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Aria S a figurii plane care se roteşte este $\frac{\pi r^2}{2}$. Deci

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 2\pi x_c S \Rightarrow \frac{4}{3}\pi r^3 = 2\pi x_c \frac{\pi r^2}{2} \Rightarrow \frac{4}{3}\pi r^3 = \pi^2 r^2 x_c,$$

de unde $x_c = \frac{4r}{3\pi}$.

Dacă comparăm acest rezultat cu rezultatul exemplului 1 din 4.5.2, obţinem următoarele: centrul de greutate al semicircumferinţei ($y_c = 0, x_c = \frac{2r}{\pi}$, ex. 1 din 4.5.2) este mai apropiat de ea decât centrul de greutate al semicercului ($y_c = 0,\ x_c = \frac{4r}{3\pi}$) pe care-l mărgineşte.

Exemplul 2. Să se calculeze volumul torului omogen (a se consulta exemplul 3 din 4.5.2.).

Observăm că aria figurii care se roteşte în jurul axei *OX* este πr^2. Deoarece centrul de greutate al cercului omogen se află în centrul său, avem $x_c = a$. Deci lungimea circumferinţei descrisă de centrul de greutate în jurul axei *Oy* este egală cu $2\pi a$. Conform teoremei 2 a lui Guldin, obţinem

$$V_{OX} = 2\pi a \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 a r^2 .$$

Exemplul 3. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al figurii omogene mărginită de parabola $y^2 = x$ şi dreapta $x = 4$.

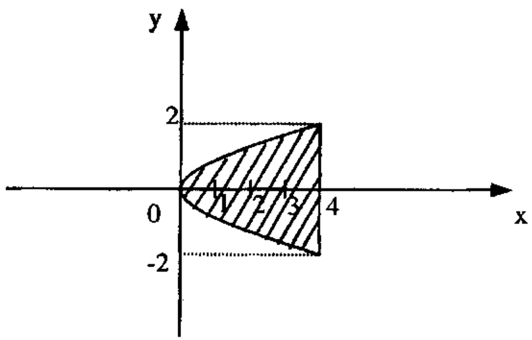


Figura considerată este simetrică în raport cu axa *OX*. Deci centrul ei de greutate se află pe această axă, adică $y_c = 0$. Aflăm mai întâi aria acestei figuri:

$$S = 2\int_0^4 y dx = 2\int_0^4 \sqrt{x} dx = \frac{4}{3} x^{3/2} \Big/_0^4 = \frac{32}{3} .$$

Prin urmare, conform formulei 6, avem

$$x_c = \frac{1}{S}\int_0^4 x[f_2(x) - f_1(x)]dx = \frac{1}{S}\int_0^4 x\left[\sqrt{x} - \left(-\sqrt{x}\right)\right]dx = \frac{2}{S}\int_0^4 x\sqrt{x} dx =$$

$$= \frac{3}{16}\cdot\frac{2}{5}\cdot x^{\frac{5}{2}} \Big/_0^4 = \frac{3}{40}\cdot 32 = \frac{12}{5} = 2{,}4 .$$

Acest exemplu arată că teorema 2 a lui Guldin nu rămâne în vigoare când axa *OX* intersectează figura dată.

Într-adevăr, deoarece $y_c = 0$, avem $V_{OX} = 2\pi y_c \cdot S = 0$, ceea ce contrazice condiţiei $V_{OX} \neq 0$.

Apropo, conform formulei (2) din 4.4.5, avem

$$V_{OX} = \pi\int_0^4 y^2 dx = \pi\int_0^4 x dx = \frac{\pi}{2} x^2 \Big/_0^4 = 8\pi .$$

/ / /

Bibliografie

1. Piscunov N., Calculul diferenţial şi integral, Vol. 1 şi 2, Chişinău, 1991, 1992.
2. Şipaciov V., Matematica superioară, Chişinău, 1992.
3. Marcel Roşculeţ, Analiză matematică, Bucureşti, 1989.
4. Mariana Craiu, Vasile V. Tănase, Analiză matematică, Bucureşti, 1980.
5. Valter Olariu, Analiză matematică, Bucureşti, 1981.
6. Smirnov I., Curs de matematici superioare, Vol. 1 - 4, Bucureşti, 1953 - 1956.
7. Ignatieva A., Krasnoşciokova T., Smirnov V., Curs de matematică superioară, Chişinău, 1971.
8. Kada Allab., Elements d'Analyse, OPU, Alger, 1984.
9. Ion Şcerbaţchi, Introduction à l'analyse matématique, Chişinău, 1997.
10. Patrick Sylvestorre – Baron, Curs de mathématique en sciences économiques (analyse), PU de Lyon, 1982.
11. Jacques Douchet et Bruno Zwahlen, Calcul différentiel et intégral, Vol. 1 et 2, Lausanne, 1992, 1993.
12. Кудрявцев Л., Курс математического анализа, Т. 1, 2, Москва, 1981.
13. Зорич В., Математический анализ, Т. 1, 2, Москва, 1981, 1982.
14. Ильин В., Позняк Э., Основы математического анализа, Ч. 1, 2, Москва, 1971, 1973.
15. Мордкович А.Г., Солодовник А.С., Математический анализ, Москва, 1990.
16. S. Miron, Curs de analiză matematică, Chişinău, 1992.
17. Фихтенгольц Г., Курс дифференциального и интегрального исчисления, Т. 1, 2, Москва, 1969.
18. Кудрявцев В., Демидович Б., Краткий курс высшей математики, Москва, 1989.
19. Рождественский Б., Лекции по математическому анализу, Москва, 1972.
20. Ion C. Şcerbaţchi, Analiză matematică (probleme), Vol. 1, Chişinău, 1998.

Cuprins