ŞIRURI RECURENTE

ȚILICĂ,Daniela Prof.Colegiul Tehnic ”Gheorghe Asachi”, Bucureşti

Nici o cercetare umană nu se poate numi ştiință dacă nu trece prin demonstrația matematică (Leonardo Da Vinci)

Studiul şirurilor de numere reale definite prin relații de recurență poate constitui un exercițiu captivant pentru cei ce doresc să dobândească o imagine de ansamblu a matematicii ca parte a unui sistem aflat în permanentă evoluție şi interacțiune cu lumea înconjurătoare. Lucrarea prezintă câteva rezultate teoretice privind şirurile recurente: justificarea existenței şirurilor definite prin definite prin relații de recurență liniare omogene, algoritmul pentru determinarea termenului general al şirului definit printr-o astfel de relație, proprietăți interesante ce derivă din relațiile de recurență. De asemenea, sunt prezentate câteva exemple de şiruri celebre, definite prin relații de recurență de ordin doi şi aspecte practice ale integrării acestora în viața reală.

1. ARGUMENT

Bazele teoriei şirurilor recurente au fost puse în secolul al XVIII de către matematicienii Abraham De Moivre şi Daniel Bernoulli, de şi primul şir numeric în care relația între termenii succesivi poate fi exprimată printr-o relație matematică a apărut în 1202 în cartea *Liber abaci* (*Cartea abacului*) a lui Leonardo Fibonacci; şirul 1, 1, 2, 3, 5, 8, ..., în care fiecare termen este egal cu suma celor doi termeni precedenți a fost numit *şirul lui Fibonacci* abia în secolul XIX de către matematicianul francez Edouard Lucas. Leonard Euler a dedicat un capitol (13) şirurilor recurente în cartea sa *Introduction to the Analysis of Infinitesimales* (1748).

Pe lângă faptul că şirurile definite prin recurență reprezintă o parte specială a analizei matematice, acestea au aplicații practice neaşteptate. Oamenii încearcă permanent să înțeleagă natura şi legile acesteia, să simtă ritmurile cosmice, să înțeleagă de fapt mai profund viața, pentru a ajunge la o armonie cu mediul înconjurător. Şi cum *natura este o carte scrisă în limbaj matematic* (Leoanrdo Da Vinci), matematicienii tuturor timpurilor au încercat, şi de cele mai multe ori au reuşit, să modeleze fenomenele naturale, să găsească noi aplicații şi interpretări noțiunilor teoretice astfel descoperite.

Şirurile recurente apar în numeroase probleme de ştiință, pornind de la fizica clasică, chimie, matematică, până la cele mai moderne domenii ale cunoaşterii: sinergetica, teoria fractalilor, teoria haosului, în calculatoarele neuronale şi automatele celulare; sunt utilizate în generatorii pseudoaleatori de numere, precum şi în diverse procedee şi metode de optimizare.

Şirul lui Fibonacci, amintit anterior, se regăseşte în analiza algoritmului lui Euclid de determinare a celui mai mare divizor comun a două numere întregi, în rezolvarea problemei lui Hilbert, în teorema lui Zeckendorf.

Pe de altă parte, numerele lui Fibonacci se regăsesc în jurul nostru de la aranjamentele frunzelor în botanică până la structura galaxiilor, de la cochiliile spiralate ale moluştelor şi înmulțirea iepurilor până la structuri arhitectutale monumentale. Este motivul pentru care numerele lui Fibonacci au fost considerate a fi *modul de măsurare al Dinivității* sau *sistemul de numărare al naturii*.

Progresiile, şiruri în care fiecare termen, începând cu al doilea se obține din cel precedent prin adunarea (progresii aritmetice), respectiv înmulțirea cu un număr real nenul (geometrice) sunt des întâlnite în diferite domenii: benzile Liesegang în geologie, aranjarea dipolilor la antenele de televiziune, în muzică, peisagistică, sculptură, fotografie, origami şi chiar în economie.

În anul 1798, economistul englez Thomas Malthus a făcut o “profeție” îngrijorătoare. El a lansat ipoteza că populația globului creşte în progresie geometrică, în timp ce resursele alimentare cresc în progresie aritmetică. În ritmul acesta el a prevăzut că într-o zi oamenii nu vor mai avea practic ce să mănânce. Însă, datorită epidemiilor, războaielor şi catastrofelor naturale, precum şi datorită progresului economic, profeția lui Malthus nu s-a adeverit ... încă.

2. RELAŢII DE RECURENŢĂ DE ORDIN k

După cum se ştie, şirurile pot fi definite sintetic, analitic sau recurent. O relaţie de recurenţă este o formulă ce exprimă orice termen al şirului, de la un rang încolo, în funcţie de unul sau mai mulţi termeni precedenţi.

În general, determinarea termenului general al şirului este dificilă, de cele mai multe ori imposibilă. De aceea, exerciţiile cu şiruri recurente cer studiul convergenţei, eventual calcularea limitei. În cazul particular al recurenţelor liniare cu coeficienţi constanţi exprimate prin egalităţi se pot enunţa algoritmi pentru determinarea termenului general al şirului.

Fie $k \in \mathbf{N}^*$ şi fie şirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definit printr-o relaţie de recurenţă liniară omogenă de ordin k, în care diferenţa maximă a rangurilor termenilor ce intervin este k:

$x_{n+k} = a_1 x_{n+k-1} + a_2 x_{n+k-2} + ... + a_k x_n, \forall n \in \mathbf{N}$, $x_0, x_1, ..., x_{k-1} \in \mathbf{R}$, date. (1)

Existenţa unui şir ce verifică o astfel de relaţie de recurenţă este justificată prin următoarele rezultate teoretice. Se asociază relaţiei ecuaţia caracteristică:

$$t^k - a_1 t^{k-1} - ... - a_k = 0. \quad (2)$$

Lema 1: Dacă $t \in \mathbf{R}$ este soluţie a ecuaţiei caracteristice (2), atunci şirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $x_n = t^n$ verifică relaţia de recurenţă (1).

Lema 2: Dacă şirurile $(x_n^{(1)})_{n\in\mathbf{N}}$, $(x_n^{(2)})_{n\in\mathbf{N}}$, ..., $(x_n^{(k)})_{n\in\mathbf{N}}$ îndeplinesc condiţia de recurenţă şi sunt liniar independente, atunci orice soluţie $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ se exprimă ca o combinaţie liniară a şirurilor $(x_n^{(1)})_{n\in\mathbf{N}}$, $(x_n^{(2)})_{n\in\mathbf{N}}$, ..., $(x_n^{(k)})_{n\in\mathbf{N}}$, adică există $p_1, p_2, ..., p_k \in \mathbf{R}$ astfel încât

$$x_n = p_1 u_n^{(1)} + p_2 u_n^{(2)} + ... + p_k u_n^{(k)}, \forall n \in \mathbf{N}. \quad (3)$$

Lema 3: Există k şiruri liniar independente ce verifică relaţia de recurenţă.

- Dacă ecuaţia caracteristică are soluţii reale distincte $t_1, t_2, ..., t_k$, şirurile sunt:

$$u_n^{(1)} = t_1^n, u_n^{(2)} = t_2^n, ..., u_n^{(k)} = t_k^n. \quad (4)$$

- Dacă ecuaţia caracteristică are soluţii reale multiple: t_1 cu ordinul de multiplicitate l_1, t_2 cu ordinul de multiplicitate l_2, ..., t_m cu ordinul de multiplicitate l_m, unde $l_1 + l_2 + ... + l_m = k$, şirurile sunt:

$$\begin{aligned} &u_n^{(1,1)} = t_1^n, u_n^{(1,2)} = nt_1^n, ..., u_n^{(1,l_1)} = n^{l_1-1} t_1^n, \\ &u_n^{(2,1)} = t_2^n, u_n^{(2,2)} = nt_2^n, ..., u_n^{(2,l_2)} = n^{l_2-1} t_2^n, ..., \\ &u_n^{(m,1)} = t_m^n, u_n^{(m,2)} = nt_m^n, ..., u_n^{(m,l_m)} = n^{l_m-1} t_m^n. \end{aligned} \quad (5)$$

- Dacă ecuaţia caracteristică are solu□ii complexe, la fiecare două soluţii complexe conjugate $t_1 = r_1(\cos t + i \sin t)$, $t_2 = r_1(\cos t - i \sin t), r > 0, t \in [0, 2\pi)$, cu ordinul de multiplicitate l_1, li se asociază şirurile:

$$\begin{aligned} &u_n^{(1,1)} = r^n \cos nt, u_n^{(1,2)} = nr^n \cos nt, ..., u_n^{(1,l_1)} = n^{l_1-1} r^n \cos nt, \\ &u_n^{(2,1)} = r^n \sin nt, u_n^{(2,2)} = nr^n \sin nt, ..., u_n^{(2,l_1)} = n^{l_1-1} r^n \sin nt. \end{aligned} \quad (6)$$

Algoritm pentru determinarea termenului general al unui şir definit printr-o relaţie de recurenţă liniară omogenăde ordin k cu coeficienţi constanţi:

1. Se rezolvă ecuaţia caracteristică.
2. Se caută soluţia ca o combinaţie liniară de şiruri, în funcţie de tipul rădăcinilor (*Lema 2*).
3. Se determină coeficienţii, folosind relaţiile scrise pentru primii $k-1$ termeni.
4. Se scrie formula termenului general al şirului.

Propoziția 1: Fie şirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definit prin relația de recurență (1) şi $(d_n)_{n\in\mathbf{N}}$ şirul diferențelor a doi termeni consecutivi definit prin

$$d_n = x_{n+1} - x_n, n \in \mathbf{N}. \tag{7}$$

Atunci $(d_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este un şir recurent de ordin k.

Demonstrația este imediată. Se scriu relațiile de recurență pentru n, respectiv $n+1$ şi se scad termen cu termen. Se obține:

$$x_{n+k+1} - x_{n+k} = a_1(x_{n+k} - x_{n+k-1}) + ... + a_k(x_{n+1} - x_n),$$

relație ce se poate scrie:

$$d_{n+k} = a_1 d_{n+k-1} + a_2 d_{n+k-2} + ... + a_k d_n, \forall n \in \mathbf{N},$$

Deci şirul diferențelor verifică o relație de recurență de ordin k.

Propoziția 2: Fie şirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definit prin relația de recurență (1) şi $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ şirul sumelor parțiale definit prin

$$s_n = x_0 + x_1 + ... + x_n, n \in \mathbf{N}. \tag{8}$$

Atunci $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este un şir recurent de ordin $k+1$.

Demonstrația porneşte de la modul cum este definit şirul sumelor:

$$s_n = x_0 + x_1 + ... + x_{n-1} + x_n = s_{n-1} - x_n \Rightarrow x_n = s_n - s_{n-1}.$$

În relația de recurență se înlocuiesc termenii şirului prin diferența dintre două sume consecutive. Rezultă:

$$s_{n+k} - s_{n+k-1} = a_1(s_{n+k-1} - s_{n+k-2}) + ... + a_k(s_n - s_{n-1}) \Rightarrow$$

$$s_{n+k} = (1+a_1)s_{n+k-1} + (a_2 - a_1)s_{n+k-2} + ... - a_k s_{n-1}.$$

Înlocuind n cu $n+1$, se obține

$$s_{n+k+1} = (1+a_1)s_{n+k} + (a_2 - a_1)s_{n+k-1} + ... - a_k s_n.$$

Propoziția 3: Dacă ecuația caracteristică are numai rădăcini complexe ale unității, atunci şirul este periodic.

Demonstrație: Ecuația caracteristică este

$$t^k + t^{k-1} + ... + 1 = 0, \tag{9}$$

deci relația de recurență este

$$x_{n+k} + x_{n+k-1} + x_{n+k-2} + ... + x_n = 0, \tag{10}$$

iar pentru $n+1$ se obține:

$$x_{n+k+1} = x_n, \forall n \in \mathbf{N},$$

deci şirul este periodic de perioadă principală $k+1$.

Propoziția 4: Dacă ecuația caracteristică are coeficienți binomiali

$$x_{n+k} = C_k^1 x_{n+k-1} - C_k^2 x_{n+k-2} + ... + (-1)^{k-1} C_k^k x_n, \forall n \in \mathbf{N}, \tag{11}$$

atunci formula termenului general este polinomială.

Demonstrație: Ecuația caracteristică este

$$C_k^0 t^k - C_k^1 t^{n+k-1} + C_k^2 t^{n+k-2} - ... + (-1)^{k-1} C_k^k = 0 \Rightarrow (t-1)^k = 0,$$

deci toate rădăcinile sunt reale egale cu 1. Formula termenului general este

$$x_n = p_1 + p_2 n + ... + p_k n^{k-1}. \tag{12}$$

Observația 1:

Pentru $k = 3$ fie şirul definit prin

$$x_{n+3} = 3x_{n+2} - 3x_{n+1} + x_n, x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 4. \tag{13}$$

Ecuația caracteristică este:

$C_3^0 t^3 - C_3^1 t^2 + C_3^2 t - C_3^3 = 0 \Rightarrow (t-1)^3 = 0$, deci termenul general al şirului este de forma:

$x_n = p_1 + p_2 n + p_3 n^2$.

Folosind valorile pentru primii trei termeni ai şirului se obţin coeficienţii:

$p_1 = 0, p_2 = 0, p_3 = 1$.

Formula termenului general este polinomială: $x_n = n^2, n \in \mathbf{N}$ (şirul pătratelor numerelor naturale).

Conform *Propoziţei 2*, şirul sumelor parţiale $s_n = 0^2 + 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ va verifica şi el o relaţie de recurenţă de acelaşi tip:

$$s_{n+4} = 4s_{n+3} - 6s_{n+2} + 4s_{n+1} - s_n, \forall n \in \mathbf{N}^*. \quad (14)$$

În plus, efectuînd câteva calcule simple, descoperim proprietăţi interesante ale şirului pătratelor numerelor naturale.

$$x_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \Rightarrow x_{n+1} = x_n + 2n + 1, n \in \mathbf{N}, \quad (15)$$

deci şirul poate fi definit printr-o relaţie de recurenţă liniară neomogenă de ordinul întâi cu coeficienţi neconstanţi.

Scriind relaţia pentru $n+2$, respectiv $n+1$ şi scăzând relaţiile teremn cu termen, se obţine:

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n + 2, n \in \mathbf{N}, \quad (16)$$

deci şirul poate fi definit printr-o relaţie de recurenţă liniară neomogenă de ordinul doi cu coeficienţi constanţi.

Observaţia 2:

Pentru $k = 4$, şirul definit prin

$$x_{n+4} = 4x_{n+3} - 6x_{n+2} + 4x_{n+1} - x_n, x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 8, x_3 = 27 \quad (17)$$

este şirul cuburilor numerelor naturale $x_n = n^3, n \in \mathbf{N}$.

Procedând în mod analog, se obţine:

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n + 6n + 6, n \in \mathbf{N}, \quad (18)$$

deci şirul poate fi definit printr-o relaţie de recurenţă liniară neomogenă de ordinul doi cu coeficienţi neconstanţi;

$$x_{n+3} = 3x_{n+2} - 3x_{n+1} + x_n + 6, n \in \mathbf{N}, \quad (19)$$

deci şirul poate fi definit printr-o relaţie de recurenţă liniară neomogenă de ordinul trei cu coeficienţi constanţi;

$$x_{n+4} = 4x_{n+3} - 6x_{n+2} + 4x_{n+1} - x_n, n \in \mathbf{N}, \quad (20)$$

deci şirul poate fi definit printr-o relaţie de recurenţă liniară omogenă de ordinul patru cu coeficienţi constanţi.

Şirul sumelor parţiale $s_n = 0^3 + 1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ va verifica şi el o relaţie de recurenţă liniară:

$$s_{n+5} = 5s_{n+4} - 10s_{n+3} + 10s_{n+2} - 5s_{n+1} + s_n, \forall n \in \mathbf{N}. \quad (21)$$

3. RELAŢII DE RECURENŢĂ DE ORDIN 2

Există şiruriri definite prin recurenţe liniare de ordinul al doilea care au proprietăţi interesante şi aplicaţii practice neaşteptate. Iată în continuare câteva exemple dintre cele mai cunoscute.

Ş*irul lui Fibonacci* a fascinat matematicienii tuturor timpurilor, dar mai ales i-a inspirat pe gânditorii din toate disciplinele – biologi, fizicieni, pictori, sculptori muzicieni, arhitecţi, astronomi, istorici, psihologi şi chiar mistici.

În capitolul XII al *Cărţii abacului*, Leonardo Fibonacci propune următoarea problemă:

”Un om a pus o pereche de iepuri într-un loc înconjurat din toate părţile de un zid. Câte perechi de iepuri pot fi produse de această pereche într-un an, dacă presupunem că fiecare pereche dă naştere în fiecare lună la o nouă pereche, care începând cu a doua lună începe să se reproducă?”

Proprietatea generală că fiecare termen al şirului este egal cu suma celor doi termeni precedenţi se exprimă matematic (noţiune introdusă de către matematicianul Albert Girard):

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \forall n \in \mathbf{N}, f_0 = 0, f_1 = 1. \tag{22}$$

Folosind algoritmul propus anterior se determină formula termenului general al şirului

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \forall n \in \mathbf{N}. \tag{23}$$

Deşi *Cartea abacului* a apărut în 1202, denumirea ”Şirul lui Fibonacci” a fost dată abia în secolul XIX de către matematicianul Edouard Lucas. Acesta a studiat proprietăţile unui nou şir, dat de aceeaşi formulă, dar în care primii doi termeni au valori diferite, numit apoi Ş*irul lui Lucas*:

$$l_{n+2} = l_{n+1} + l_n, \forall n \in \mathbf{N}, l_0 = 2, l_1 = 1. \tag{24}$$

Formula termenului general este

$$l_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \forall n \in \mathbf{N}. \tag{25}$$

O proprietate interesantă leagă şirul lui Fibonacci de orice şir definit cu aceeaşi formulă, dar cu valori diferite pentru primii doi termeni.

Propoziţia 5: şirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definit prin

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \forall n \in \mathbf{N}, x_1, x_2 \in \mathbf{R} \tag{26}$$

are termenul general

$$x_n = x_1 f_{n-2} + x_2 f_{n-1}, \forall n \geq 2. \tag{27}$$

Demonstraţia se face folosind un al treilea şir $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definit cu aceeaşi formulă şi $a_1 = 0, a_2 = 1$. Se observă imediat că $a_{n+1} = f_n, \forall n \geq 1$ şi se caută $p, q \in \mathbf{R}$ astfel încât $x_n = pf_n + qa_n$. Înlocuind $n = 1$, respectiv $n = 2$ se obţin coeficienţii $p = x_1, q = x_2 - x_1$. Rezultă $x_n = x_1 f_n + (x_2 - x_1)a_n = x_1 f_n + (x_2 - x_1)f_{n-1} = x_1(f_{n-1} + f_{n-2}) + (x_2 - x_1)f_{n-1} = = x_1 f_{n-2} + x_2 f_{n-1}$.

Propoziţia 5: Fie şirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definit prin

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \forall n \in \mathbf{N}, x_1, x_2 \in \mathbf{R} \tag{28}$$

şi $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ cu proprietatea că există numărul real nenul r astfel încât

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = a_n x_{n+2} - r x_{n+3} + 3r - a_1, \forall n \in \mathbf{N}^*. \tag{29}$$

Atunci şirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este o progresie aritmetică de raţie r.

Demonstraţie: Scăzând relaţiile (29) pentru n, respectiv $n+1$ se obţine

$$a_{n+1}x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = a_{n+1}x_{n+3} - r x_{n+4} + 3r - a_1 - a_n x_{n+2} + r x_{n+3} - 3r + a_1$$

$$\Rightarrow a_{n+1}x_{n+1} - a_{n+1}x_{n+3} = -r x_{n+4} - a_n x_{n+2} + r x_{n+3}$$

$$\Rightarrow a_{n+1}x_{n+1} - a_{n+1}x_{n+3} = -r(x_{n+3} + x_{n+2}) - a_n x_{n+2} + r x_{n+3}$$

$$\Rightarrow a_{n+1}(x_{n+1} - x_{n+3}) = -rx_{n+3} - rx_{n+2} - a_n x_{n+2} + rx_{n+3} = -rx_{n+2} - a_n x_{n+2}$$
$$\Rightarrow a_{n+1}(-x_{n+2}) = (a_n + r)(-x_{n+2}) \Rightarrow a_{n+1} = a_n + r \Rightarrow a_{n+1} - a_n = r, \forall n \in \mathbf{N}^*$$

Rezultă că diferența între orice doi termeni consecutivi este constantă, deci şirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este o progresie aritmetică de rație r.

Propoziția 6: Fie şirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definit prin

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \forall n \in \mathbf{N}, x_1, x_2 \in \mathbf{R} \tag{30}$$

şi $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ o progresie aritmetică de rație r. Atunci

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = a_n x_{n+2} - rx_{n+3} + 3r - a_1, \forall n \in \mathbf{N}^*. \tag{31}$$

Demonstrația se poate face prin inducție matematică. Fie propoziția

$$P(n): \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = a_n x_{n+2} - rx_{n+3} + 3r - a_1, n \in \mathbf{N}^*.$$

Se verifică $P(1)$ adevărată:

$$a_1 f_1 = a_1 f_3 - rf_4 + 3r - a_1 \Leftrightarrow a_1 = a_1 \cdot 2 - r \cdot 3 + 3r - a_1 \Leftrightarrow a_1 = 2a_1 - a_1.$$

Se presupune $P(k)$ adevărată şi se demonstrează $P(k+1)$ adevărată, $k \in \mathbf{N}^*$.

$$P(k): \sum_{i=1}^{k} a_i x_i = a_k x_{k+2} - rx_{k+3} + 3r - a_1,$$

$$P(k+1): \sum_{i=1}^{k+1} a_i x_i = a_{k+1} x_{k+3} - rx_{k+4} + 3r - a_1.$$

Efectuând calcule se ob□ine:

$$\sum_{i=1}^{k+1} a_i x_i = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i + a_{k+1}x_{k+1} = a_k x_{k+2} - rx_{k+3} + 3r - a_1 + a_{k+1}x_{k+1} =$$
$$= a_k x_{k+2} - r(x_{k+4} - x_{k+2}) + a_{k+1}x_{k+1} + 3r - a_1 = a_k x_{k+2} - rx_{k+4} + rx_{k+2} + a_{k+1}x_{k+1} + 3r - a_1 =$$
$$= (a_k + r)x_{k+2} + a_{k+1}x_{k+1} - rx_{k+4} + 3r - a_1 = a_{k+1}x_{k+2} + a_{k+1}x_{k+1} - rx_{k+4} + 3r - a_1 =$$
$$= a_{k+1}(x_{k+2} + x_{k+1}) - rx_{k+4} + 3r - a_1 = a_{k+1}x_{k+3} - rx_{k+4} + 3r - a_1.$$

Din principiul inducției matematice rezultă $P(n)$ adevărată $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Propoziția 6: şirul $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ al cărui termen general este raportul a doi termeni consecutivi ai şirului lui Fibonacci

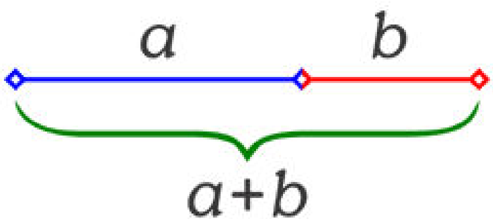
$$y_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}, \forall n \in \mathbf{N}^* \tag{32}$$

este convergent, iar limita sa este numărul irațional $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}6180339887....$, numit şi *numărul de aur*.

Demonstrația a fost făcută pentru prima dată de către matematicianul şi astronomul german Johannes Kepler.

Notația simbolică a numărului φ, provine de la inițiala sculptorului antic grec Fidias care a folosit *proporția de aur* în sculpturile sale. *Numărul de aur*, denumire dată de Leonardo da Vinci, a apărut în încercarea matematicienilor de a împărți un segment de dreaptă în medie şi extremă rație, iar fascinația numărului consta de fapt în armonia şi echilibrul raportului pe care îl reprezintă, raport care se regăseşte şi în legea creşterilor organice.

Numărul de aur φ este raportul care rezultă când un segment de dreaptă este împărțit în două părți, astfel încât raportul dintre întregul segment şi segmentul mai mare să fie egal cu raportul dintre segmentul mai mare şi cel mai mic rezultat.



Relația matematică se transcrie:

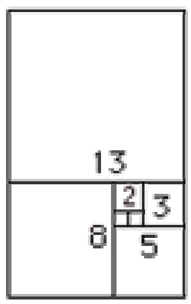
$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi , \qquad (33)$$

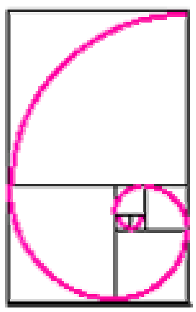
unde a este ”extremă rație” şi b este ”medie”.

Se poate obține o dispunere a numerelor Fibonacci într-un set de pătrate şi dreptunghiuri, acestea din urmă având ca lungime a laturilor două numere Fibonacci consecutive. Pornind de la două pătrate alăturate, cu laturile egale cu unitatea 1, se poate desena deasupra lor un altul cu latura 2 (= 1 + 1).

În continuare se poate alipi un alt pătrat cu latura 3, iar dedesubt unul cu latura 5, ş.a.m.d. De fapt avem de a face cu *dreptunghiuri de aur*, raportul laturilor acestora fiind egal cu numărul φ .

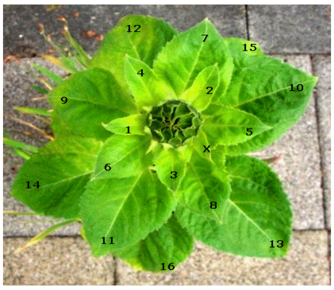
În fiecare pătrat se poate desena un sfert de cerc, dar astfel încât să se asigure continuitatea liniei, obținându-se un fel de spirală, care reprezintă o bună aproximație a celor întâlnite în natură, în lumea vie.





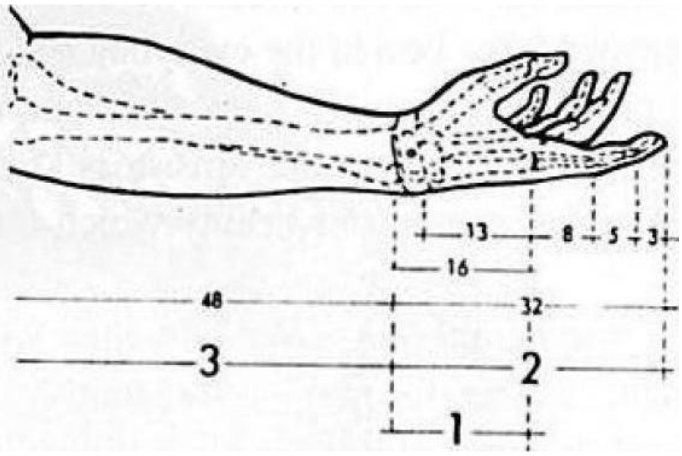
Secvența Fibonacci apare în structurile biologice, cum ar fi dispunerea ramurilor copacilor, aşezarea frunzelor în jurul tulpinii plantelor, spiralele cochiliilor, aranjamentul unui con de brad, desfăşurarea ramurilor unei ferigi, aspectul unui ananas.

Dacă se priveşte o plantă de sus în jos se observă că frunzele sale sunt astfel dispuse încât cele de deasupra nu le obturează pe cele de dedesubt. În acest fel fiecare frunză primeşte suficientă lumină solară şi permite apei de ploaie să alunece către tulpină şi să fie dirijată spre rădăcină – o altă armonie a naturii în concordanță cu secvența lui Fibonacci.

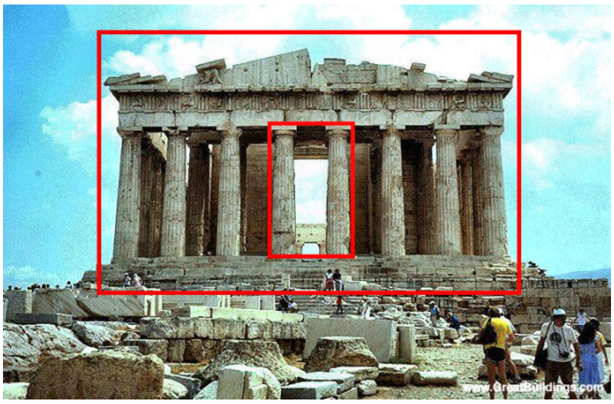


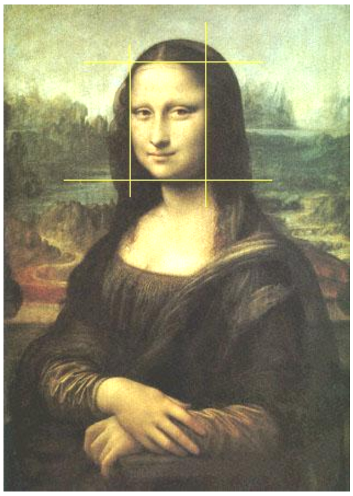
Fața umană este caracterizată din punct de vedere estetic prin câteva dimensiuni principale: distanța dintre ochi, distanța dintre gură şi ochi, distanța dintre nas şi ochi, dimensiunea gurii. In estetică se apreciază că fața este cu atât mai plăcută ochiului cu cât aceste dimensiuni respectă mai bine secvența lui Fibonacci.

Dacă privim mâinile unui om, constatăm alte coincidențe poate, ce ne amintesc de faimosul şir. Avem 2 mâini, cu 5 câte degete, fiecare având 3 falange separate prin două articulații. Coincidență sau nu, aspectul este interesant, cu atât mai mult cu cât dacă măsurăm lungimea oaselor degetelor, se pare că raportul dintre osul cel mai lung şi cel din mijloc, ca şi raportul dintre osul mijlociu şi cel mai scurt din vârf reprezintă proporția de aur *phi*. In medie, dimensiunile falangelor sunt: 2 cm, 3 cm, 5 cm, iar în continuare osul palmei are circa 8 cm (2, 3, 5, 8 sunt numere din secvența Fibonacci).



Dreptunghiu de aur, în care raportul laturilor este egal cu numărul de aur este considerat ca fiind deosebit de estetic şi ca urmare a fost şi este intens utilizat în arhitectură şi artă. Spre exemplu se consideră că fața Giocondei lui da Vinci se încadrează într-un astfel de dreptunghi, iar în construcția Parthenonului din Atena se regăsesc cel puțin două astfel de dreptunghiuri.





Numărul de aur este căutat în cele mai diverse şi neaşteptate situaţii, spre exemplu se încearcă găsească unei explicaţii din acest punct de vedere chiar şi pentru factorul de conversie 1,609, foarte apropiat de φ, care apare la transformarea distanţelor din mile în kilometri.

În muzică, numerele Fibonacci se utilizează deseori pentru realizarea acordajelor. Se crede că lucrarea *Muzică pentru instrumente de coarde, percuţie şi celestă*, a lui Bèla Bártok a fost structurată utilizând numerele Fibonacci.

Viitorul şi nevoia de cunoaştere şi înţelegere a oamenilor s-ar putea să confere acestor numere unice, noi aplicaţii şi interpretări, ajungând poate chiar şi pe terenul incert al fenomenelor paranormale.

Bibliografie

[1] D.M. Bătineţu, *Probleme de matematică pentru treapta a II-a de liceu*, Editura Albatros, Bucureşti (1979)
[2] M. Livio, *Secţiunea de aur*, Editura Humanitas, Bucureşti (2005)
[3] A.I. Markushevich, *Recursion sequences*, Mir Publishers, Moscow (1975)
[4] A. Vernescu, *Analiza matematică*, Editura Pantheon, Bucureşti (1992)