TEOREME ŞI FORMULE CAUCHY

1.Integrala curbilinie în planul complex

1.1. Teoremele Cauchy

În spatele unui nume
se poate ascunde o lume

Dacă AB este un arc de curbă plană, dat prin ecuaţiile parametrice

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t);\ t \in [a, b] \end{cases}$$

unde x(t), y(t) sunt funcţii de clasă $C^1[a, b]$ sau de clasă C^1 pe porţiuni, iar f(z) o funcţie continuă pe AB, atunci există integrala curbilinie

$$\int_{AB} f(z)dz = \int_{AB} U(x, y)dx - V(x, y)dy + i\int_{AB} V(x, y)dx + U(x, y)dy$$

Dacă extremităţile A şi B ale arcului coincid, atunci avem o curbă închisă şi putem scrie:

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = \oint_{\Gamma} Udx - Vdy + i\oint_{\Gamma} Vdx + Udy$$

Definiţia 1. Un domeniu $D \subset C(D \subset R^2)$ este simplu conex dacă orice curbă simplă închisă Γ conţinută în D are proprietatea că domeniul mărginit, Δ care are ca frontieră curba Γ, este inclus D. Un domeniu este multiplu conex dacă nu este simplu conex. Unui domeniu multiplu conex i se poate asocia un domeniu Δ simplu conex dacă se introduc un număr suficient de tăieturi. Astfel, dacă D este un domeniu triplu conex (fig.1) atunci sunt necesare şi suficiente două tăieturi T_1 şi T_2 pentru a obţine un domeniu Δ simplu conex, $\Delta = D - (T_1 ... T_2)$ (fig.1)

Teoremă (Cauchy) 1. Dacă $f: D \to C$ este o funcţie olomorfă pe domeniul simplu conex D, atunci

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0$$

oricare ar fi curba închisă Γ situată în întregime în D.

Consecinţă. Dacă A şi B sunt două puncte situate în domeniul D în care

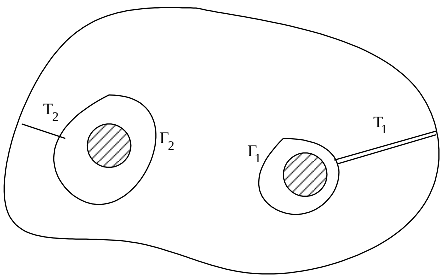

Figura 1.

f(z) este olomorfă, iar AMB şi $AM'B$ două arce de curbură ale căror puncte aparţin lui D, atunci

$$\int_{AMB} f(z)dz = \int_{AM'B} f(z)dz$$

Teorema (Cauchy pentru domenii multiplu conexe) 2.

Dacă Γ este o curbă situată în domeniul D multiplu conex ce traversează cele n tăieturi necesare pentru a obţine domeniul $\Delta = D - (T_1 \cup T_2 \cup ... \cup T_n)$, simplu conex, iar Γ_i, $i = \overline{1, n}$ o curbă ce traversează numai tăietura T_i o singură dată (în sens direct) atunci:

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{i=1}^{n} \oint_{\Gamma_i} f(z)dz$$

Menţionăm că $\int_{\Gamma_i} f(z_0)dz = K_i$ dacă Γ_i traversează tăietura T_i o singură dată în sens direct. Numărul K_i se numeşte *constantă ciclică*.

Dacă Γ_i traversează tăietura T_i de m_1 ori în sens direct şi de m_2 ori în sens invers, atunci

$$\oint_{\Gamma_i} f(z)dz = (m_1 - m_2)K_i$$

Definiţia 2. Funcţia $\Phi(z)$ este o primitivă a funcţiei f(z) într-un domeniu D, dacă $\Phi(z)$ este olomorfă în D şi $\Phi'(z) = f(z)$ în orice punct $z \in D$.

Fie f(z) = 0 o funcţie olomorfă de domeniul D şi $A(a) \in D$ un punct fix iar $M(z) \in D$ un punct oarecare. Atunci

$$\int_{AB} f(z)dz = F(z) \tag{1}$$

nu depinde de arcul de curbă situat în D şi care uneşte punctele A şi M.

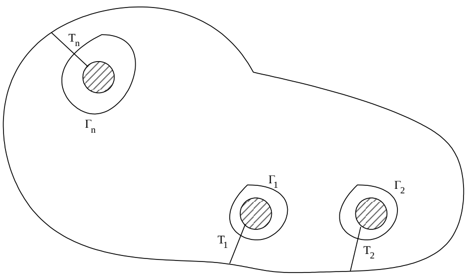

Figura 2.

Teorema 3. Dacă f(z) este o funcţie olomorfă pe domeniul simplu conex D, atunci ea admite primitive. O primitivă a lui f(z) este

$$F(z) = \int_{AM} f(z)dz$$

Funcţia F(z) este olomorfă în domeniul D. Dacă F(z) este o primitivă a funcţiei f(z), atunci şi $\Phi(z) = F(z) + C$ este o primitivă a lui f(z).

Formula integrală a lui Cauchy 4. Dacă f(z) este o funcţie olomorfă pe domeniul D, iar Γ o curbă simplă închisă, rectificabilă situată în domeniul D şi z_0 un punct din interiorul domeniului Δ mărginit de curba Γ, atunci

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0}dz \qquad \text{(fiC)}$$

Observaţia 1. Dacă punctul $z_0 \in \Gamma$, atunci

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0}dz = i\pi f(z_0),$$

dacă Γ admite tangentă unică în z_0. Această egalitate se numeşte *formula semireziduului.*

Dacă în z_0 curba Γ admite două semitangente care formează între ele unghiul φ, atunci

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0}dz = i\pi(\pi - \varphi)f(z_0)$$

şi se numeşte *valoarea principală a integralei* în sensul lui Cauchy pe curba Γ.

Observaţie 2. Dacă domeniul D este triplu conex (fig.3) atunci

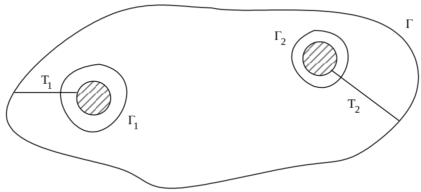

Figura 3

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\left[\oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}dz-\oint_{\Gamma_1}\frac{f(z)}{z-z_0}dz-\oint_{\Gamma_2}\frac{f(z)}{z-z_0}dz\right]$$

Generalizarea pentru un domeniu multiplu conex este evidentă.

Teoremă. Dacă f(z) este o funcţie olomorfă pe domeniul D, iar Γ o curbă simplă închisă, rectificabilă situată în domeniul D, iar z_0 un punct din interiorul domeniului Δ mărginit de curba Γ, atunci f(z) admite derivate de orice ordin în z_0 şi derivata de ordinul n este

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \qquad \text{(fiC(n))}$$

1.2. Cu “scara Cauchy ” calculaţi următoarele integrale (ce înţelegeţi prin “scara Cauchy ” ?)

1. $\int_C \frac{1}{z^2(z-3)(z+1)}dz$

a) $C:|z|=\frac{1}{2}$; b) $C:|z|=\pi$.

2. $\int_C \frac{e^{z^2+1}}{z^3}dz$

a) $C : |z - 2i| = 1$ b) $C : |z - 2i| = \frac{\pi}{2} + 1$

1.3. Calculaţi

a) $\int_C \frac{dz}{z - a}$; $C : |z| = R \neq |a|$.

b) $\int_{|z|=R} \frac{dz}{z^2 + 1}$; $R \neq 1$

1.4. Calculaţi

a) $\int_{OM} \cos dz$

b) $\int_{-i}^{i} \frac{dz}{z}$

în domeniul D = C – T unde $T : y = 0; \quad x > 0$. Curbele pe care apar integralele

în a) şi b) arată astfel:

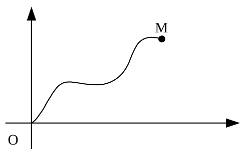

Figura 4.

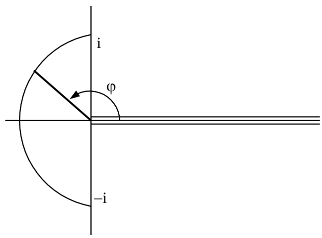

Figura 5.

c) $\int_{|z|=R} \frac{e^{iz}}{z^2 - \pi^2} dz$; $R \neq \pi$

1.5. Calculaţi integralele:

a) $\int_{|z|=R} \frac{ze^{i\frac{\pi}{2}z}}{z - 1} dz$; $R \neq 1$

b) $\int_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; a \neq b} \frac{\cosh \pi z}{z^2 + 1} dz$

c) $\int_{|z|=R} \frac{e^z}{z^k} dz;\ k \in N$

d) $\int_{|z|=R} \frac{e^{\pi z}}{z(z-i)} dz$

1.6. Fie $D = C - (T_1 \cup T_2)$ unde T_1 şi T_2 sunt tăieturile:

$x = 0, y \geq 1;\ x = 0, y \leq -1.$

Să se exprime: $F(z) = \int_1^z \frac{dz}{z^2+1}$

prin funcţiile elementare în domeniul D şi să se calculeze F(2+i) şi F(-1).

1.7. Fie funcţia $f(z) = \sqrt{4-z^2}$.

a) Determinaţi ramura f_k pentru care f_k (0)=2, în domeniul $D = C - (T_1 \cup T_2)$

unde $T_{1y} = 0, x \geq 2$ şi $T_{2y} = 0, x \leq -2.$

b) Calculaţi:

$\int_C \frac{dz}{(z-1)f_k(z)},$ unde $C: x^2 + y^2 - ax = 0$.

1.8. Calculaţi:

a) $\int_C \frac{\cos \pi z}{(z^2-4)^2} dz;\ \ C: x^2 + y^2 - ax = 0, |a| \neq 2$

b) $\int_C \frac{dz}{(z^2+1)^n};\ \ C: x^2 + y^2 - ay = 0, a > 1.$

1.9. Fie funcţia $f(z) = \sqrt[3]{z-1}$

a) Determinaţi ramurile f_k (z) pentru care f_k (0)=-1 în domeniul D=C-T, unde

$T: y = 0, x \geq 1.$

b) Calculaţi: $\int_{|z|=R} \frac{f_k(z)}{z^3} dz;\ \ R < 1.$

1.3. Aplicaţii

1. $I=\int_{|z|=r}\frac{e^z}{z^3}dz$

Soluţie. Conform formulei lui Cauchy:

$$I=\int_{|z|=r}\frac{e^z}{z^3}dz=\frac{2\pi i}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)=\frac{2\pi i}{2!}f''(0)\ \text{ unde } f(z)=e^z.\ \text{Deci}$$

$$I=\frac{2\pi i}{2}=\pi i$$

2. $\int_{|z-1|=R}\frac{e^z}{(z-1)^n}dz=\frac{2\pi i}{(n-1)!}f^{(n-1)}(1)=\frac{2\pi i}{(n-1)!}e$

3. Folosind formulele integrale ale lui Cauchy, să se găsească funcţia f(z) olomorfă pe domeniul $|z|<1$, care pe frontiera sa devine

$$\varphi(\theta)=\frac{a-\cos\theta+i\sin\theta}{a^2-2a\cos\theta+1},\ a>1,\ \theta=\arg z\ \textbf{\textit{(Whittaker – Watson).}}$$

Indicaţie. Punem funcţia căutată sub forma

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k,\ \text{unde } c_k=\frac{1}{k!}f^{(k)}(0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{f(z)dz}{z^{k+1}}.$$

Pe cercul $|z|=1$ avem $z=e^{i\theta}, dz=ie^{i\theta}d\theta.$

Observând că

$$f(z)\Big|_{|z|=1}=\varphi(\theta)=\frac{a-e^{-i\theta}}{(a-e^{-i\theta})(a-e^{i\theta})}=\frac{1}{a-e^{i\theta}}=\frac{1}{a-z}\Big|_{|z|=1}$$

obţinem

$$c_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{f(z)dz}{z^{k+1}}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{1}{a-z}\frac{dz}{z^{k+1}}=\frac{d^k}{dz^k}\left(\frac{1}{a-z}\right)\Big|_{z=0}=\frac{1}{a^{k+1}}.$$

şi

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{a^{k+1}}=\frac{1}{a}\frac{1}{1-\frac{z}{a}}=\frac{1}{a-z},\quad \left|\frac{z}{a}\right|<1.$$

Să se calculeze cu ajutorul formulelor lui Cauchy, integralele 2,3,4.

4. $I=\oint_C \frac{\cosh\frac{\pi z}{2}}{(z+i)^4}dz,\quad C:|z+2i|=2.$

Răspuns $I=\frac{2\pi i}{3!}\frac{d^3}{dz^3}\left(\cosh\frac{\pi z}{2}\right)\Big|_{z=-i}=\frac{\pi^4}{24}.$

5. $I=\oint_C \frac{z^{100}e^{i\pi z}}{z^2+1}dz,\quad C:4x^2+y^2-4=0.$

Răspuns $I=2\pi i\frac{z^{100}e^{i\pi z}}{z+i}\Big|_{z=i}+2\pi i\frac{z^{100}e^{i\pi z}}{z-i}\Big|_{z=-i}=-2\pi\sinh\pi.$

1.4. Aplicaţii Cauchy

Exerciţii

Calculaţi integralele următoare pe curbele precizate:

1.4.1. $\int_C \frac{1}{z(z-3)(z+1)}dz$ unde

a) $C:|z|=\frac{1}{2}$

b) $C:|z|=1{,}3$

c) $C:|z|=3\frac{1}{2}$

d) $C:|z-2|=\frac{2}{3}$

1.4.2. $\int_C \frac{1}{z^2(z-3)(z+1)}dz$ unde

a) $C:|z|=\frac{1}{2}$

b) $C:|z|=\pi$

1.4.3. $\int_C \frac{e^{z^2+1}}{z^3}dz$ unde

a) $C:|z-2i|=1$

b) $C:|z-2i|=\frac{\pi}{2}+1.$