

## Teorema lui Cauchi

### □ ENUNȚUL TEOREMEI

Fie  $f$  și  $g$  două funcții,  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , cu proprietățile:

- a)  $f$  și  $g$  continue pe  $[a, b]$
- b)  $f$  și  $g$  derivabile pe  $(a, b)$
- c)  $g'(x) \neq 0$

atunci  $f(a) = f(b)$  și  $(\exists)$  cel puțin un punct  $c \in (a, b)$  a.i.

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

### □ DEMONSTRATIA TEOREMEI

**P.p.a. ca  $g(a) = g(b)$**   
 **$g$  continua pe  $[a, b]$**   
 **$g$  der. pe  $(a, b)$**  }  $\Rightarrow (\exists)$  cel puțin un punct  $c \in (a, b)$  a.i.  $g'(c) = 0$

dar  $g'(x) \neq 0 \Rightarrow$  contradicție.

$$\Rightarrow g(a) \neq g(b).$$

Fie  $h(x) = f(x) + k \cdot g(x)$ ;  $k$  - constanta reală a.i.  $h(a) = h(b)$

$$\Rightarrow f(a) + k \cdot g(a) = f(b) + k \cdot g(b)$$

$$\Rightarrow f(a) - f(b) = k \cdot g(b) - k \cdot g(a)$$

$$\Rightarrow f(a) - f(b) = k(g(b) - g(a))$$

$$\Rightarrow k = -\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{h \text{ continua pe } [a,b]} \\ \mathbf{h \text{ derivabila pe } (a,b)} \\ \mathbf{h(a) = h(b)} \end{array} \right\} \Rightarrow (\exists) \text{ cel puțin un punct } \mathbf{c \in (a,b) \text{ a.i. } h'(c) = 0};$$

$$\mathbf{h'(x) = f'(x) + k \cdot g'(x)}$$

$$\mathbf{h'(c) = f'(c) + k \cdot g'(c)}$$

$$\Rightarrow \mathbf{f'(c) + k \cdot g'(c) = 0}$$

$$\Rightarrow \mathbf{k = -\frac{f'(c)}{g'(c)}}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathbf{f(b) - f(a)}}{\mathbf{g(b) - g(a)}} = \frac{\mathbf{f'(c)}}{\mathbf{g'(c)}}$$

## □ INTERPRETARE GEOMETRICA

Pantele celor doua drepte sunt proportionale cu pantele tangentelor duse la graficul functiei in punctul  $c$  corespunzator.

## □ APLICATII

1. Sa se aplice TEOREMA LUICAUCHY in cazul functiilor :

$$f : [-2,5] \rightarrow \mathbf{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+3} & ; -2 \leq x < 1 \\ \frac{x}{4} + \frac{7}{4} & ; 1 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

$$g : [-2,5] \rightarrow \mathbf{R} \quad g(x) = x.$$

Functia f este continua pe  $[-2,1)$  si  $[1,5]$  ca functie elementara.

Se pune problema in  $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1; x < 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1; x < 1} \sqrt{x+3} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1; x > 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1; x > 1} \frac{x+7}{4} = 2$$

$$f(1) = 2 \Rightarrow f \text{ este continua pe } [-2,5]$$

Functia f este derivabila pe  $[-2,1)$  si  $[1,5]$  ca functie elementara .

Se pune problema in  $x = 1$

$$f'_s(1) = \lim_{x \rightarrow 1; x < 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{1}{4}$$

$$f'_d(1) = \lim_{x \rightarrow 1; x < 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow f$  este derivabila pe  $[-2,5]$ .

Functia g este continua si derivabila pe  $[-2,5]$  ca f. elementara.

$$g'(x) = 1 \neq 0$$

$$\frac{\text{t.cauchy}}{\Rightarrow} (\exists) \text{ cel puțin un } c \in (-2,5) \text{ a.i. } \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(5) - f(-2)}{g(5) - g(-2)}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x-3}} & ; x \in (-2,1) \\ \frac{1}{4} & ; x \in [1,5) \end{cases}$$

$$g'(x) = 1$$

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{2}{7}$$

$$\text{Cazul 1 : } x \in (-2,1)$$

$$\Rightarrow f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{c-3}} ; g'(c) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{c-3}} = \frac{2}{7}$$

$$4\sqrt{c-3} = 7 \Rightarrow 16(c-3) = 49 \Rightarrow c = \frac{97}{16} \in (-2,1)$$

$$\text{Cazul 2 : } x \in (1,5)$$

$$\Rightarrow f'(c) = \frac{1}{4} ; g'(c) = 1 \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{2}{7} \text{ (F)}$$

$$\Rightarrow c = \frac{97}{16}$$

**2. Sa se aplice Teorema lui Cauchy pentru functiile**

**$f, g : [1, e] \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \ln(x)$  si  $g(x) = 2x - 1$ , determinand punctul**

**c corespunzator. Similar pentru functiile  $f, g : \left[ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right] \rightarrow \mathbf{R}$**

**$f(x) = \sin(x)$  si  $g(x) = \cos(x)$ .**

**•  $f : [1, e] \rightarrow \mathbf{R}$   $f(x) = \ln(x)$**

**$g : [1, e] \rightarrow \mathbf{R}$   $g(x) = 2x - 1$**

**f si g sunt continue pe  $[1, e]$  ca functii elementare**

**f si g sunt derivabile pe  $(1, e)$  ca functii elementare**

$$g'(x) = (2x - 1)' = 2$$

**t. cauchy  $\Rightarrow$  ( $\exists$ ) cel putin un punct  $c \in (1, e)$  a.i.  $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(e) - f(1)}{g(e) - g(1)} = \frac{1}{2e - 2}$**

$$f'(x) = \frac{1}{x} ; g'(x) = 2$$

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{1}{2c} = \frac{1}{2e - 2} \Rightarrow 2c = 2(e - 1) \Rightarrow c = e - 1.$$

**•  $f : \left[ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right] \rightarrow \mathbf{R}$   $f(x) = \sin(x)$**

**$g : \left[ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right] \rightarrow \mathbf{R}$   $g(x) = \cos(x)$**

**f si g sunt continue pe  $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$  ca f elementare**

**f si g sunt der. pe  $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$  ca f elementare**

$$g'(x) = -\sin(x); \sin(x) \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi$$

**t. cauchy**  $(\exists)$  cel putin un punct  $c \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right)$   
 $\Rightarrow$

$$\text{a.i. } \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f\left(\frac{\pi}{3}\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{g\left(\frac{\pi}{3}\right) - g\left(\frac{\pi}{6}\right)} = -1$$

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{\cos(c)}{-\sin(c)} = -\text{ctg}(c) = -1 \Rightarrow c = \frac{\pi}{4}$$

**3. Sa se studieze valabilitatea teoremei lui Cauchy si sa se determine valoarea punctului c :**

$$f : [0,3] \rightarrow \mathbf{R} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - x^2 + 1, & x \in (1,3] \\ -x + \frac{4}{3}, & x \in [0,1] \end{cases}$$

$$g : [0,3] \rightarrow \mathbf{R} \quad g(x) = x$$

**Functia f este continua si derivabila pe [0,1) si (1,3] ca functie elementara.**

**Se pune problema in  $x = 1$ .**

*Continuitatea*

$$\lim_{x \rightarrow 1; x < 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1; x < 1} -x + \frac{4}{3} = 1/3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1; x > 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1; x > 1} \frac{x^3}{3} - x^2 + 1 = 1/3$$

**$f(1) = 1/3 \Rightarrow f$  este continua pe  $[0,3]$ .**

*Derivabilitatea*

$$f'_s(1) = \lim_{x \rightarrow 1; x < 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -1$$

$$f'_d(1) = \lim_{x \rightarrow 1; x > 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1; x > 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{3(x - 1)} = -1$$

**$\Rightarrow f$  este der. pe  $(0,3)$ .**

**Functia g este continua si derivabila pe  $[0,3]$  ca functie elementara.**

$$g'(x) = 1 \xrightarrow{\text{t. cauchy}} (\exists) \text{ cel putin un punct } c \in (0,3)$$

$$\text{a.i. } \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(3) - f(0)}{g(3) - g(0)} = -1/9$$

$$f'(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \in (1,3) \\ -1 & x \in (0,1) \end{cases}$$

$$g'(x) = 1$$

**Cazul 1 :  $x \in (1,3)$**

$$f'(c) = c^2 - 2c ; g'(c) = 1 \Rightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = c^2 - 2c = -1/9$$

$$\Rightarrow 9c^2 - 18c + 1 = 0$$

$$\Delta = 288 \Rightarrow c_1 = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{3} \in (1,3)$$

**Cazul 2 :  $x \in (0,1)$**

$$f'(c) = -1 \quad g'(c) = 1 \Rightarrow -1 = -1(A)$$

$$\Rightarrow c = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{3}$$