Şirul lui Rolle

$$f : I \to R, -a, b \in I, a < b$$

$$f - cont. - pe - [a,b]$$

$$f - deriv. - (a,b)$$

$$f(a) = f(b)$$

$$\Rightarrow (\exists) - cel - putin - un - punct - C \in [a,b] a.î. - f_c` = 0$$

Consecinţe

$$f_a = f_b = 0 \Rightarrow (\exists) - cel - putin - o - răădăcin - a - derivatei$$

Intre două rădăcini ale derivatei există cel mult o rădăcină a funcţiei

$$f_{c1} \bullet f_{c2} \leq 0$$

Teorema lui Cauchy

$$f, g : [a,b] \to R$$

$$1. f, g - cont. - pe - [a,b]$$

$$2. f, g - deriv. - pe - (a,b)$$

$$3. g`(x) \neq 0, (\forall) x \in (a,b)$$

$$4. g(b) - g(a) \neq 0$$

$$\Rightarrow exista - C \in (a,b) a.î.$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f`(c)}{g`(x)}$$

Teorema lui Lagrange

$$f \xrightarrow{cont.} [a,b]$$

$$f - derivat. - pe - (a,b)$$

$$\Rightarrow (\exists) - C \in (a,b) a.î.$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f`(c)$$

Consecinţe ale teoremei lui Lagrange

1. monotonie

$$f`(x) \geq 0, x \in I \Rightarrow f - crescatoare - pe - I$$

$$f`(x) \leq 0, x \in I \Rightarrow f - descrescatoare - pe - I$$

	X_1
F `x	++++++++0---------------------
F(x)	$f(x_1)$

2.

$$f,g - f`(x) = g`(x) - x \in I \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x) = g(x) + k, a.î. - (\forall)x \in I$$

$$f`(x) - g`(x) = 0$$
$$[f(x) - g(x)]` = 0$$

3.

$$f : I, cont - pe - I$$
$$f` : I \setminus \{x_0\} \Rightarrow şi$$
$$dacă - există - \lim_{x \to x_0} f`(x) = f`(x_0)$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \lhd x_0}} f`(x) = f_s`(x_0)$$
$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \rhd x_0}} f`(x) = f_d`(x_0)$$

Teorema lui Fermat

$$f : I \to R$$

$$f - deriv. - \text{în} - x_0$$

$$x_0 \in I, x_0 - extrem \Rightarrow f`(x_0) = 0 \Rightarrow$$

$$1. x_0 - punct - de - \min im \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_m) \le f(x)$$

$$2. x_0 - punct - de - \max im \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_m) \ge f(x)$$

Consecințe

- zerourile derivatei = puncte critice
- punctele de extrem se află printre punctele critice

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0 - x_0 \to \min im \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f`(x_0) \le 0$$

$$\Rightarrow f`(x_0) = 0$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0 - x_0 \to \max im \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f`(x_0) \ge 0$$

Proprietatea lui Darboux

$$f:[a,b]\rightarrow R$$

$$f(a)\leq f(b)-dacă-$$

$$f(a)\leq\lambda\leq f(b)\Rightarrow(\exists)C\in(a,b)a.î.\lambda=f(c)$$