UNIVERSITATEA " OVIDIUS " CONSTANTA
FACULTATEA DE MATEMATICA
SPECIALIZAREA MATEMATICA

LUCRARE METODICO - STIINTIFICA PENTRU ACORDAREA GRADULUI DIDACTIC I

TEOREME DE MEDIE

CONSTANTA
2010

TEOREME DE MEDIE

Motivul pentru care am preferat aceasta tema la lucrarea stiintifico- metodica de gradul I este rolul deosebit de important pe care il au teoremele de medie in aprofundarea notiunilor de baza ale analizei matematice si pentru aplicatiile acestora in alte domenii de activitate.

De asemenea, m-am gandit la “ Teoreme de medie“ pentru ca tema are rezultate in mai multe domenii din fizica, chimie, economie, rezultate care au un suport matematic solid in teoremele clasice din calculul diferential si integral.

Se stie ca, notiunea de derivata este una dintre cele mai importante notiuni din analiza matematica. Ea a aparut din probleme precum tangenta la o curba, viteza unui mobil, evolutia unei populatii si exprima sugestiv variatia (evolutia sau involutia) unor fenomene modelate matematic prin functii reale.

La originea notiunii de derivata stau doua probleme. Prima problema este de fizica si se refera la viteza instantanee a unui mobil (Isaac Newton). A doua este de geometrie si se refera la tangenta la o curba plana.

In capitolul I, studiul incepe cu formularea rezultatelor importante ale teoremelor de medie din calculul diferential (teoremele lui Rolle, Lagrange, Cauchy) si este, in partea teoretica structurat in:

a) Teoreme clasice (Rolle, Lagrange, Cauchy);

b) Formula lui Pompeiu;

c) Consecinte ale teoremelor de medie.

Prin teoremele Fermat, Rolle si Lagrange, derivata transforma studiul unor proprietati functionale (de extrem, monotonie) in proprietati algebrice (zerourile si semnul derivatei).

De exemplu, teorema lui Lagrange reprezinta o generalizare a teoremei lui Rolle. Aceasta teorema are o importanta deosebita in momentul in care este nevoie sa se decida daca o functie este derivabila intr-un punct (in anumite conditii date), precum si in analiza monotoniei unei functii derivabile.

Teoremele de medie au consecinte in evaluari numerice oferind exemple de modelare a unor fenomene fizice, chimice, economice. De exemplu, o aplicatie a calculului diferential in fizica este:“Daca un cilindru are dimensiunile r=5cm si h=10cm, sa se gaseasca o aproximare a cresterii in volum cand r creste cu 0,2 cm si h descreste cu 0,1 cm“ .

Mai mult, se pun anumite intrebari legate de existenta unor exemple care sa indeplineasca anumite conditii din teoreme, dar nu toate conditiile.

Aplicatiile rezultatelor teoretice din calculul diferential sunt imediate in teoria sirurilor precum si in stabilirea unor inegalitati utile in evaluari ale unor functii importante. De exemplu:

1) $< \ln(n+1) - \ln n <$, n N^*;

3) $e > x + 1$;

In capitolul al II-lea prezentam rezultate importante de integrabilitate. Si aici definim cadrul teoretic (functii integrabile Riemann, inegalitatea mediei, formula de medie) formuland ulterior teoremele de medie pentru functii integrabile (prima si a doua teorema de medie).

Daca initial se punea problema aprofundarii notiunilor teoretice prin aplicatii imediate si destul de abstracte pentru nivelul elevilor, mai nou, motivatia elevilor este crescuta daca sunt prezentate extinderi ale notiunilor abstracte in alte domenii concrete le vietii (de exemplu, in fizica, biologie,economie,etc).

CUPRINS

Lucrarea este structurata pe doua segmente, respectiv segmentul stiintific si segmentul metodic.

A. SEGMENTUL STIINTIFIC

CAPITOLUL I: TEOREME DE MEDIE PENTRU FUNCTII DERIVABILE

B. SEGMENTUL METODIC

CAPITOLUL III: APLICATII ALE TEOREMELOR DE MEDIE PENTRU FUNCTII DERIVABILE

CAPITOLUL IV: APLICATII ALE TEOREMELOR DE MEDIE PENTRU FUNCTII INTEGRABILE

CAPITOLUL V: METODOLOGIA PREDARII MATEMATICII IN LICEU

CAPITOLUL I
TEOREME DE MEDIE PENTRU FUNCTII DERIVABILE

In acest capitol vom studia proprietatile remarcabile pe care le au functiile derivabile definite pe un interval. Sunt prezentate: teorema lui Rolle, teorema lui Rolle generalizata, reciproca teoremei lui Rolle, teorema lui Lagrange, reciproca teoremei lui Lagrange, teorema lui Lagrange generalizata, teorema lui Cauchy, teorema lui Cauchy generalizata, formula lui Pompeiu, consecinte ale teoremelor cresterilor finite, teoreme care sunt, fara indoiala, teoremele cele mai utile si mai intrebuintate ale calculului diferential.

I.1. Teoreme clasice

1.1.1. Teorema lui Rolle:

Fie o functie f **: [a,b]R, a,b R, a<b.**

Daca : 1) f **este continua pe intervalul inchis [a,b];**

2) f **este derivabila pe intervalul deschis (a,b);**

3) f **are valori egale la capetele intervalului,** f**(a) =** f**(b),**

atunci exista cel putin un punct c, c € (a,b) in care derivata se anuleaza, f'(c)=0.

I.1.1.3. Interpretare geometrica:

Teorema lui Rolle are o interpretare geometrica simpla.

Din f'(c)=0 rezulta ca tangenta la graficul functiei f in punctul (c,f(c)) este paralela cu axa Ox. Deci, daca toate cerintele teoremei lui Rolle sunt indeplinite, atunci, pe graficul functiei f exista cel putin un punct (c,f(c)) in care tangenta este paralela cu axa Ox.

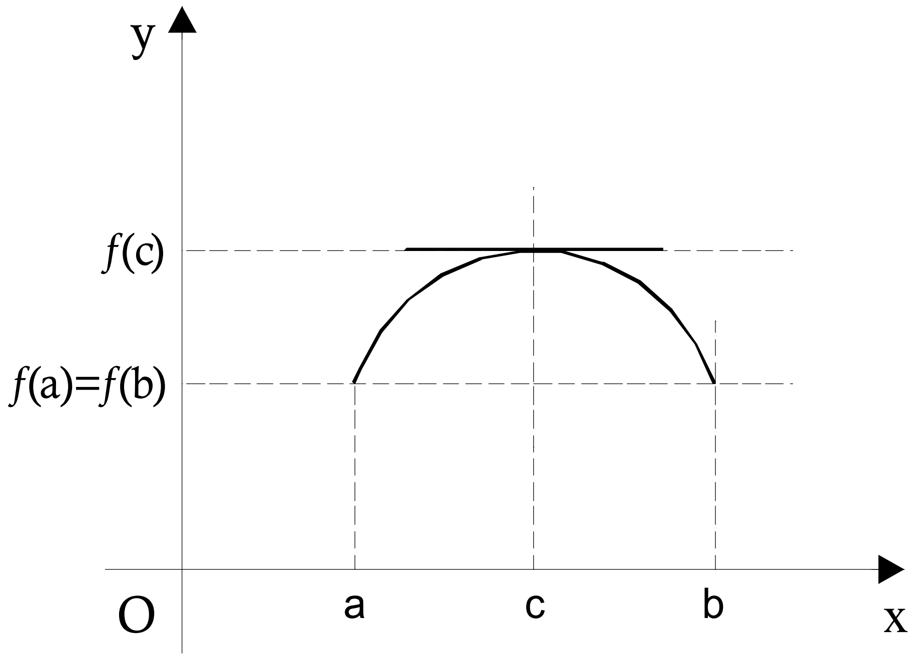


Figura 1.

Teorema lui Lagrange si teorema lui Cauchy

Datorita unor consideratii istorice, teorema lui Lagrange este cunoscuta sub numele de “prima teorema a mediei “ iar teorema lui Cauchy sub numele de “a doua teorema a cresterilor finite”.

Teorema lui Lagrange este o generalizare simpla a teoremei lui Rolle in care functia f nu mai ia obligatoriu valori egale la capetele a, b ale intervalului considerat.

Teorema lui Lagrange si teorema lui Cauchy

Datorita unor consideratii istorice, teorema lui Lagrange este cunoscuta sub numele de “prima teorema a mediei “ iar teorema lui Cauchy sub numele de “a doua teorema a cresterilor finite”.

Teorema lui Lagrange este o generalizare simpla a teoremei lui Rolle in care functia f nu mai ia obligatoriu valori egale la capetele a, b ale intervalului considerat.

I.1.2.1. **Teorema lui Lagrange:** **Fie o functie $f:[a,b]\to R$, $a<b$, $a,b\in R$. Daca:**

1. f este continua pe [a,b],

2. f este derivabila pe (a,b),

atunci exista cel putin un punct c € (a,b) astfel incat:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$ **(formula lui Lagrange).**

1.2.2. **Interpretare geometrica:**

Formula lui Lagrange scrisa sub forma $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ exprima faptul ca exista pe graficul functiei f cel putin un punct $C(c, f(c))$, $c\in(a,b)$, in care tangenta la graficul functiei este paralela cu coarda (AB), adica panta tangentei in acel punct sa fie egala cu panta coardei determinata de punctele $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ (vezi figura 1.).

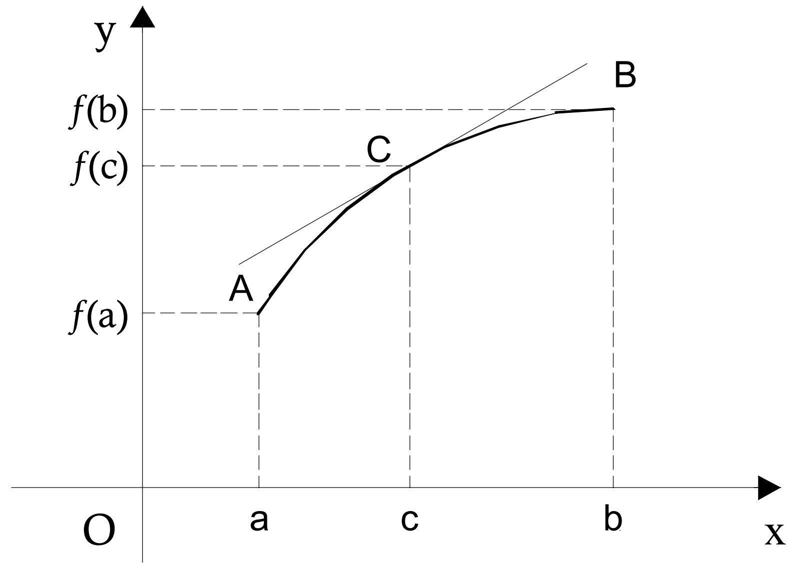
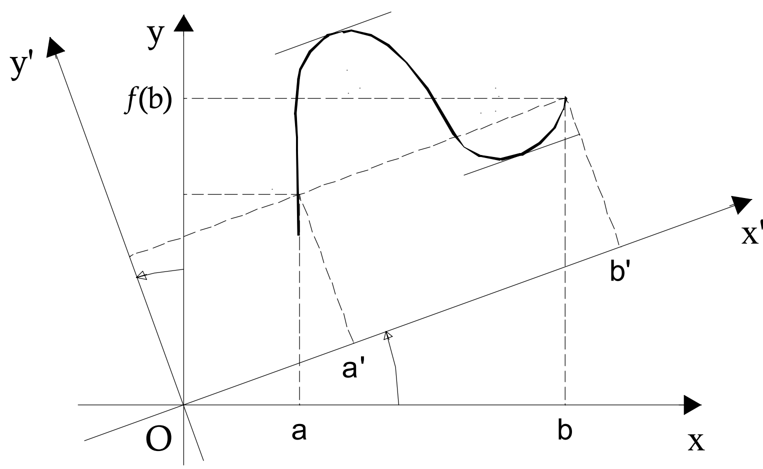


Figura 1.

Ca si in teoremele lui Fermat si Rolle avem asigurata numai existenta punctului intermediar c cu o anumita proprietate, fara nici o precizare asupra unicitatii acestui punct.

Se cuvine sa observam ca teorema lui Lagrange nu ar fi altceva decat teorema lui Rolle dupa o rotatie cu un unghi egal cu cel facut de coarda cu axa Ox (vezi figura 2).



Observatia 2.

Fie $f:[a,b]\to R$ o functie continua pe [a,b], derivabila pe (a,b). Se pune problema prin ce se mai caracterizeaza punctul intermediar c, $c\in(a,b)$?

Consideram punctele A(a, f(a)), B(b, f(b)) si C(x, f(x)). Aria triunghiului determinat de cele 3 puncte poate fi calculata si sub forma:

$$A_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \\ x & f(x) & 1 \end{vmatrix}\right\|.$$

Daca derivam relatia anterioara, obtinem:

$$A'_{\Delta ABC}=\begin{vmatrix} a' & f'(a) & 1' \\ b & f(b) & 1 \\ x & f(x) & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & f(a) & 1 \\ b' & f'(b) & 1' \\ x & f(x) & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \\ 1 & f'(x) & 0 \end{vmatrix}.$$

Punem conditia A'(x)=0 pentru puncte critice, iar punctul C(x, f(x)) este punct de extrem. Cum primii determinanti sunt egali cu 0 (au cate o linie nula) rezulta ca ultimul determinant este nul, adica:

$$\begin{vmatrix} a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \\ 1 & f'(x) & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Dezvoltand determinantul se obtine:

bf'(x)+f(a)-f(b)-af'(x)=0, $\quad$ f'(x)(b-a)=f(b)-f(a), de unde se obtine relatia cunoscuta:

$$f'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

I.1.2.10 Interpretare fizica: Presupunem ca x este timpul si $f(x)$ este coordonata unui punct, care se misca pe o dreapta la momentul x.

Expresia $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ reprezinta viteza medie a miscarii punctului in intervalul de timp de la a la b.

Formula lui Lagrange arata ca exista un punct x=c in care viteza instantanee este egala cu viteza medie in intervalul de timp [a,b].

I.1.3.1. **Teorema lui Cauchy:** **Fie f, g: [a,b] $\to$ R, a<b, a,b $\in$ R doua functii cu proprietatile:**

1. **f, g continue pe [a,b],**
2. **f, g derivabile pe (a,b),**
3. **$g'(x) \neq 0$, oricare ar fi x $\in$ (a,b).**

Atunci $g(a) \neq g(b)$ si exista cel putin un punct c $\in$ (a,b) astfel incat sa avem:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$ **(formula lui Cauchy).**

I.2. <u>Formula lui Pompeiu a teoremei cresterilor finite.</u>

Matematicianul roman Dimitrie Pompeiu a aratat ca formula cresterilor finite se poate scrie si sub o forma pe care o prezentam in continuare.

I.2.1. <u>Teorema.</u> Fie o functie $f : [a,b] \to R$, $a,b \in R$, $f(x)>0$, $\forall x \in [a,b]$ si care verifica ipotezele din teorema lui Lagrange.

Aplicand functiei $F(x)=\ln f(x)$, prima teorema a cresterilor finite (Lagrange), obtinem:

$$F(b) - F(a) = F'(c)\,(b-a),$$

$$\ln f(b) - \ln f(a) = [\ln f(c)]'(b-a), \quad (1) \quad \text{unde } c \in (a,b),$$

$$\ln f(b) - \ln f(a) = \frac{f'(c)}{f(c)}(b-a), \text{ de unde rezulta}$$

$$\frac{f(b)}{f(a)} = e^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}}, \text{ unde } c \in (a,b). \quad (2)$$

I.2.2.<u>Aplicatie:</u> Daca a si b sunt doua numere reale, positive, a < b, atunci are loc inegalitatea:

$$e^{\frac{b-a}{b}} < \frac{b}{a} \qquad (3)$$

Solutie: Intr-adevar, daca consideram $f : [a,b] \to R$, $f(x) = x$, relatia (2) devine:

$$\frac{b}{a} = e^{\frac{(b-a)}{c}}, \text{ unde } a<c<b,$$

si cum $\frac{1}{a} > \frac{1}{c} > \frac{1}{b}$, adica $\frac{1}{c} \in (\frac{1}{b}, \frac{1}{a})$, rezulta

$$\frac{b}{a} = e^{\frac{b-a}{c}} > e^{\frac{b-a}{b}}, \text{ deci}$$

$$\frac{b}{a} = e^{\frac{b-a}{b}}, \text{ adica tocmai inegalitatea (3).}$$

I.2.3. ***Observatie:*** La prima vedere s-ar parea ca formula (2) este o simpla consecinta a teoremei cresterilor finite, adevarata doar pentru functiile strict pozitive.

Adevarul este ca, formula (2) este echivalenta cu formula cresterilor finite.

Intradevar, sa presupunem (2) adevarata pentru $f > 0$ si sa consideram o functie oarecare (nu neaparat pozitiva), $g : [a,b] \to R$, care verifica conditiile din ipoteza cresterilor finite.

Punand $f(x) = e^{g(x)} > 0$ si aplicand formula (2), obtinem:

$e^{g(b)-g(a)} = e^{(b-a)g'(c)}$, $a < c < b$, de unde rezulta ca exista $c \in (a,b)$ astfel incat:

$g(b) - g(a) = (b-a)\, g'(c)$, adica formula cresterilor finite pentru g.

I.3. Consecinte ale teoremei cresterilor finite.

I.3.1. Functii cu derivata nula Daca o functie derivabila are derivata nula pe un interval, atunci ea este constanta pe acest interval.

I.3.2. Functii cu derivate egale. Daca doua functii derivabile au derivate egale pe un interval, atunci ele difera printr-o constanta pe acel interval.

I.3.3. Rolul derivatei intai. Intervale de monotonie. Puncte de extrem.

Fie $f: E \to R$, E – interval, o functie derivabila pe E.

1. Daca $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in E$, atunci f este crescatoare pe E.
2. Daca $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in E$, atunci f este descrescatoare pe E.
3. Daca $f'(x) > 0$, $\forall x \in E$, atunci f este strict crescatoare pe E.
4. Daca $f'(x) < 0$, $\forall x \in E$, atunci f este strict descrescatoare pe E.

I.3.4. Derivata unei functii intr-un punct.

I.3.4.1. Corolar: Fie $f: E \to R$, E – interval si $x_0 \in E$. Daca:

1. f este continua in x_0;
2. f este derivabila pe $E \setminus \{x_0\}$;
3. exista $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = l \in \overline{R}$, atunci f are derivata in x_0 si $f'(x_0) = l$.

Daca $l \in R$, atunci f este derivabila in x_0 si $f'(x_0) = l$.

III.2. Aplicatii numerice la prima teorema de medie

Exercitiul 1. Folosind teorema lui Lagrange, sa se determine eroarea care se face daca se inlocuieste $\sqrt{145}$ prin 12.

Solutie: Fie $f:(0,+\infty)\to R$, $f(x)=\sqrt{x}$, $\forall$ x>0, a=144, b=145.

Aplicand functiei f teorema lui Lagrange pe intervalul [144,145], rezulta ca exista $\theta\in(0,1)$ astfel incat:

$$f(a+1)-f(a)=1\ f'(a+\theta),\ \text{adica}$$

$$\sqrt{145}-\sqrt{144}=1\cdot\frac{1}{2\sqrt{144+\theta}},\ \text{cu } 0<\theta<1.$$

Deoarece $\frac{1}{\sqrt{144+\theta}}<\frac{1}{\sqrt{144}}=\frac{1}{12}$, rezulta ca: $12<\sqrt{145}<12+\frac{1}{24}$.

Cum $\frac{1}{24}<0{,}05$, avem $12<\sqrt{145}<12{,}05$.□

Concluzia: Eroarea comisa este mai mica decat $\frac{1}{24}$.

Exercitiul 2. Sa se calculeze valoarea aproximativa a lui cos 61°.

Solutie: Functia $f:R\to R$, $f(x)=\cos x$, $\forall x\in R$, verifica conditiile din teorema lui Lagrange.

Luam a=60°=$\frac{\pi}{3}$ si h=1°=$\frac{\pi}{180^\circ}$. Aplicand lui f formula cresterilor finite, obtinem:

$$\cos 61^\circ-\cos 60^\circ=1\cdot\frac{\pi}{180^\circ}\sin(60^\circ+\theta),\ \text{cu } 0<\theta<1. \quad (1)$$

Deoarece $\sin(60^\circ+\theta)>\sin 60^\circ$, rezulta ca:

$$-\sin(60^\circ+\theta)<-\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{si deci}$$

$$\cos 61^\circ-\cos 60^\circ<-\frac{\pi\sqrt{3}}{360^\circ},\ \text{sau } \cos 61^\circ<\frac{1}{2}-\frac{\pi\sqrt{3}}{360^\circ}. \quad (2)$$

Am obtinut astfel un majorant al lui cos 61°. Sa gasim acum un minorant al lui cos61°. Pentru aceasta, va fi suficient sa gasim un majorant al lui sin(60°+θ). In acest scop, aplicam din nou teorema cresterilor finite functiei sin(60°+θ) si obtinem:

$$\sin(60°+\theta) - \sin 60° = \theta \frac{\pi}{180°} \cos(60°+\theta_1\theta), \text{ cu } 0 < \theta_1 < 1.$$

Deoarece $0 < \theta < 1$ si $\cos(60°+\theta_1\theta) < \cos 60° = \frac{1}{2}$ rezulta:

$$\sin(60°+\theta) - \sin 60° < \frac{\pi}{360°} \text{ si deci:}$$

$$\sin(60°+\theta) < \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{360°}.$$

Tinand seama de (1), obtinem:

$$\cos 61° - \cos 60° > -\frac{\pi}{180°}[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{360°}], \qquad (3)$$

Din (2) si (3) deducem:

$$\frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{360°} - \frac{\pi^2}{180° \cdot 360°} < \cos 61° < \frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{360°}, \qquad (4)$$

Deoarece $0{,}0150 < \frac{\pi\sqrt{3}}{360°} < 0{,}0151$ si $\frac{\pi^2}{180° \cdot 360°} < \frac{1}{6480}$ (fiindca $\pi^2 < 10$), obtinem:

$\frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{2} < 0{,}4849$ si $\frac{1}{6480} < \frac{2}{10000}$, de unde rezulta ca:

$$0{,}4847 < \cos 61° < 0{,}4849, \qquad (5)$$

Relatiile (5) ne permit sa scriem:

$$\cos 61° \approx 0{,}4848 \text{ cu o eroare } \leq 0{,}0001. \square$$

III.3.Aplicatii ale teoremelor de medie in probleme de aproximare

1. Sa se calculeze valoarea aproximativa a lui $\sqrt{5}$.

Solutie: Tinand seama de formula din exercitiul 2, avem:

$$\sqrt{5}=\sqrt{4+1}=2\sqrt{1+\frac{1}{4}}\cong 2(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4})=2(1+\frac{1}{8})=2+\frac{1}{4}=2,25.$$

Eroarea comisa este in valoarea absoluta mai mica decat $\frac{1}{8}\cdot(\frac{1}{4})^2=\frac{1}{8\cdot 16}=\frac{1}{128}$. □

2.Sa se arate ca, pentru orice x$\in(0,\frac{\pi}{2})$ avem $\frac{2}{\pi}<\frac{\sin x}{x}<1$.

Solutie: Consideram functia $f:[0,\frac{\pi}{2}]\to$R, definita prin: $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, 0<x\le\frac{\pi}{2}\\ 1, x=0\end{cases}$.

Functia f este derivabila pe $[0,\frac{\pi}{2}]$, de unde rezulta ca este continua pe acest interval. Este suficient sa aratam ca este derivabila in x=0.

Aplicam regula lui L' Hospital si obtinem:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{2x}=-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$. Deci $f'(x)=0$.

Pentru orice x $\neq$ 0, avem:

$f'(x)=(\frac{\sin x}{x})'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x}{x^2}(x-tgx)<0$, deoarece x<tgx, daca 0<x<$\frac{\pi}{2}$.

Rezulta ca f este strict descrescatoare pe intervalul $(0,\frac{\pi}{2})$. Tinand seama ca f este si continua, deducem ca, pentru orice 0<x$\frac{\pi}{2}$, $f(0)>f(x)>f(\frac{\pi}{2})$, sau $\frac{2}{\pi}<\frac{\sin x}{x}<1$.□

Utilizand teorema lui Lagrange, sa se arate care este eroarea pe care o facem inlocuind $\sqrt{101}$ prin 10.

Solutie: Fie $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in R_+$; a=100, b=101.

Atunci $f(b) - f(a) = f'(a+\theta)$, $0 < \theta < 1$, adica $\sqrt{101} - \sqrt{100} = \frac{1}{2\sqrt{100+\theta}}$.

Cum functia $t \to \frac{1}{2\sqrt{100+t}}, t \in [0,1]$ este strict descrescatoare avem:

$$\frac{1}{2\sqrt{101}} < \sqrt{101} - \sqrt{100} < \frac{1}{2\sqrt{100}}.$$

Eroarea realizata este mai mica decat:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{100}} - \frac{1}{2\sqrt{101}}\right) < \frac{1}{400}.$$

Aplicand formula lui Lagrange functiei $f(x) = \ln x$ pe intervalul [n, n+1], $n \in N^*$, sa se demonstreze ca sirul cu termenul general:

$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n} - \ln n$ este convergent si limita sa este cuprinsa intre 0 si 1.

Solutii: Pe intervalul [k, k+1], $k \in N^*$, functia $f(x) = \ln x$ este continua, iar pe intervalul (k,k+1) este derivabila. Deci, in virtutea teoremei lui Lagrange exista $c_k \in (k,k+1)$ astfel incat:

$$f(k+1) - f(k) = \frac{1}{c_k} \text{ sau } \ln(k+1) - \ln k = \frac{1}{c_k}, \text{ iar de aici}$$

$$\frac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln k < \frac{1}{k} \text{ deoarece } k < c_k < k+1.$$

Punand aici k = 1,2,…n, avem inegalitatile:

$$\frac{1}{2} < \ln 2 - \ln 1 < 1,$$
$$\frac{1}{3} < \ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{2},$$
…………………..
$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$$

care, adunate membru cu membru dau:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots+\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} \qquad (1)$$

de unde $a_{n+1}\in(\frac{1}{n+1},1), \forall n\geq 1$.

Acum $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\ln\frac{n}{n+1}+\frac{1}{n+1}<0$, deoarece

$$\frac{1}{n+1}<\ln\frac{n+1}{n}\Leftrightarrow\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>e \text{, care este adevarata}$$

Prin urmare $a_{n+1}<a_n, \forall n\geq 1$, ceea ce arata ca sirul (a_n) este strict descrescator. Sirul (a_n) fiind monoton si negativ cu termenii in intervalul $(0,1)$, din teorema lui Weierstrasss obtinem concluzia.

Vom arata acum marginirea sirului.

Din prima inegalitate din (1) rezulta $a_{n+1}<1$, iar din a doua inegalitate din (1) rezulta:

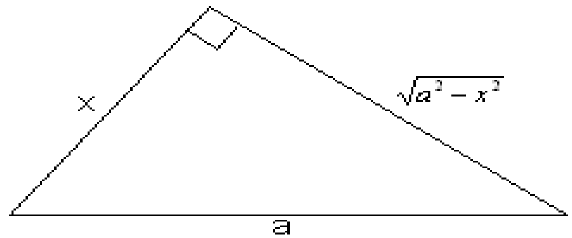
$$a_n>\ln(n+1)-\ln n>0 .$$

Deci $a_n\in(0,1), \forall n$. Conform teoremei lui Weierstrass sirul (a_n) este convergent si $\lim_{n\to\infty}a_n=c\in[0,1]$, unde $c\cong 0,577215\ldots$ se numeste constanta lui Euler si este un numar irational.

III.5.1. Aplicatii diverse.

Aplicatia 1. **Sa se determine maximul ariei triunghiurilor dreptunghice cu aceeasi ipotenuza, de lungime a.**

Solutie:



Daca a>0 este ipotenuza, atunci catetele sunt x si $\sqrt{a^2-x^2}$.

Aria unuia dintre triunghiurile considerate este:

$$S = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2},\ x \in (-a, a).$$

Am obtinut o functie S: (-a,a) $\rightarrow$R, S(x) $=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}$, a carei variatie o studiem cu ajutorul derivatei.

Avem: $$S'(x)=\frac{a^2-2x^2}{2\sqrt{a^2-x^2}} \text{ si } S'(x)=0.$$

Rezulta ca: $$x = \pm\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Intocmim tabelul de variatie de mai jos:

x	-a		$-\frac{a\sqrt{2}}{2}$		$\frac{a\sqrt{2}}{2}$		+a
S´(x)		− − − − −	0	+ + + +	0	− − − − −	
S(x)		↘	m	↗	$\frac{a^2}{4}$	↘	

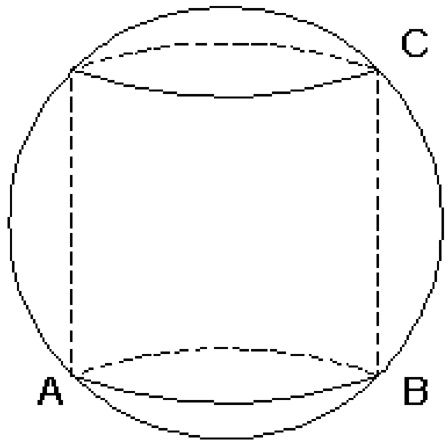
de unde obtinem valoarea maxima:

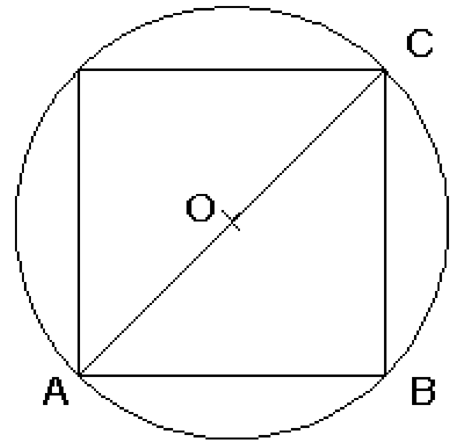
$$S_{max} = S\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right),$$

adica, $$S_{max} = \frac{a^2}{4}.$$

Valoarea maxima a ariei se atinge pentru triunghiul dreptunghic isoscel.

Aplicatia 2. **Sa se afle volumul maxim al cilindrilor inscrisi in sfera de raza r.**





Solutie: Daca notam BC=2x (inaltimea cilindrului), atunci raza bazei cilindrului este $\rho=\sqrt{r^2-x^2}$. Cum volumul V al cilindrului de raza ρ si inaltime h este V = $\pi\rho^2 h$, prin inlocuire gasim:

$$V = 2\pi x(r^2-x^2).$$

Am obtinut o functie V : $[-r,r]\to R$, V(x) = $2\pi x(r^2-x^2)$. a carei variatie o studiem cu ajutorul primei derivate.

Avem $V'(x) = 2\pi(r^2-3x^2)$ si $V'(x)=0$ implica x = $\pm\frac{r\sqrt{3}}{3}$.

Avem tabloul de variatie:

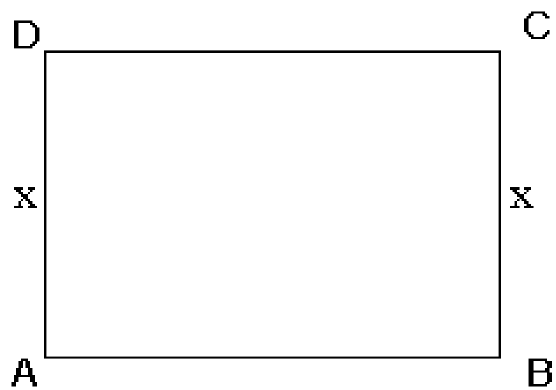
x	$-r$		$-\frac{r\sqrt{3}}{3}$		$\frac{r\sqrt{3}}{3}$		$+r$
$V'(x)$	$-$	$-\ -\ -\ -$	-0	$+\ +\ +\ +$	0	$-\ -\ -\ -\ -\ -$	
$V(x)$		$\searrow$	m	$\nearrow$	$\frac{4\pi\sqrt{3}\,r^3}{9}$	$\searrow$	

din care obtinem valoarea maxima:

$$V_{max} = V\left(\frac{r\sqrt{3}}{3}\right),\ \text{adica}\ V_{max} = \frac{4\pi\sqrt{3}r^3}{9}.$$

<u>Aplicatia 3.</u> Dintr-o sarma, avand lungimea L, sa se confectioneze un cadru drepunghiular care sa cuprinda o suprafata cu aria cea mai mare.

Solutie:



Notam cu x o dimensiune a cadrului cerut. Atunci cealalta dimensiune a cadrului este:

$$L_1 = \frac{L-2x}{2}.$$

Aria suprafetei determinata de cadru este modelata de functia:

$$f : [0, \frac{L}{2}] \to R,\ f(x) = x\,\frac{L-2x}{2},$$ functie derivabila.

Obtinem: $$f'(x) = \frac{L}{2} - 2x,\ x \in [0, \frac{L}{2}].$$

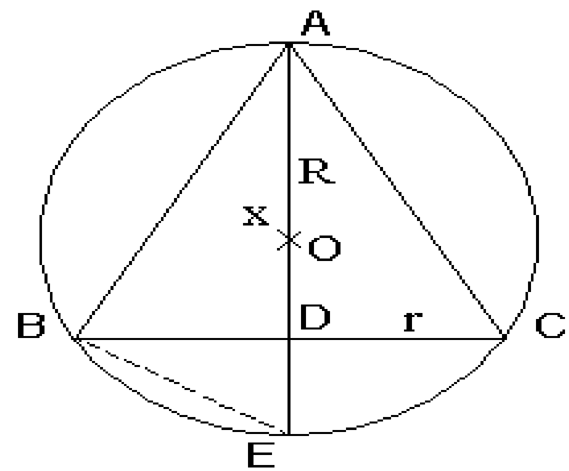
Tabelul de semn al derivatei este:

x	0		$\frac{L}{4}$		$\frac{L}{2}$
$f'(x)$	+	+ + + + + + + +	0	− − − − − − − −	−
$f(x)$		$\nearrow$	M	$\searrow$	

Se obtine ca $x = \frac{L}{4}$ este punct de maxim al functiei f. Pentru $x = \frac{L}{4}$ cadrul va avea forma patrata, deci maximul ariei se realizeaza pentru o forma patrata a cadrului.

Aplicatia 4. **Sa se determine conul cu volumul maxim inscris intr-o sfera de raza R.**

Solutie:



Fie x inaltimea conului inscris in sfera. Volumul conului este:

$$V(x) = \frac{\pi r^2 \cdot x}{3}, \text{ unde r este raza conului.}$$

Din triunghiul dreptunghic ABE, cu teorema inaltimii, se obtine egalitatea $BD^2 = AD.DE$, sau:

$$r^2 = x(2R-x).$$

Asadar, $V(x) = \frac{\pi x^2 (2r - x)}{3}$, iar volumul conului este modelat matematic de functia:

$$V : [0,2R] \rightarrow R,\ V(x) = \frac{2\pi R x^2 - \pi x^3}{3}.$$

Obtinem $V'(x) = \frac{4\pi R x - 3\pi x^2}{3}$, care are solutiile x=0 si $x=\frac{4R}{3}$.

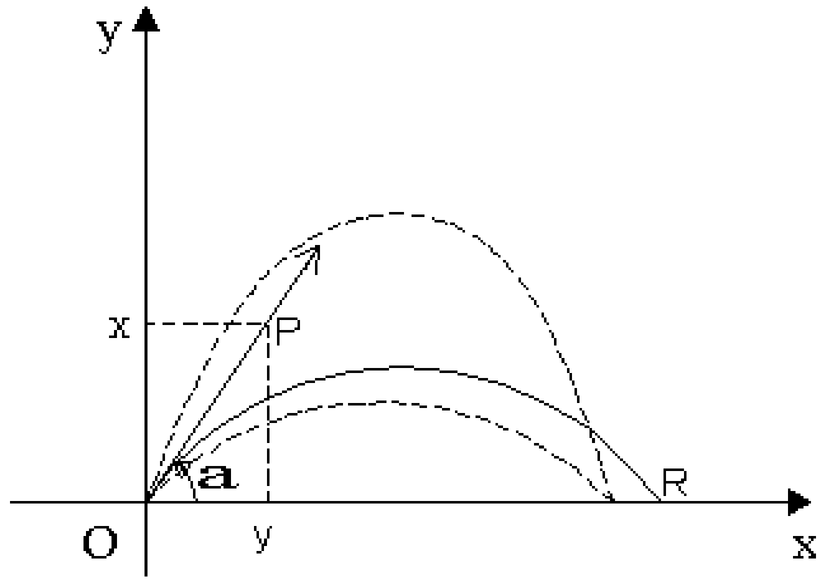
Stabilim tabelul de semn si de monotonie:

x	**0**		$\frac{4R}{3}$		2R
$f'(x)$	+ + + + +	+ + + +	0	− − − − − − − −	
$f(x)$	**0**	$\nearrow$	**M**	$\searrow$	**0**

Maximul volumului se obtine pentru $x=\frac{4R}{3}$ si este egal cu $V=\frac{32\pi R^3}{81}$.

<u>Aplicatia 5.</u> Sa se determine sub ce unghi α fata de orizontala trebuie aruncat un proiectil cu viteza initiala v_0, astfel incat sa atinga distanta maxima R.

Solutie:



Sub actiunea fortei gravitatiei, corpul descrie o parabola care taie orizontala in punctul R, dat de egalitatea: $R = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$.

Ecuatia traiectoriei este: $y = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}x - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\alpha}$.

Intr-adevar, fie (x,y) coordonatele punctului de pe traiectorie in care corpul a ajuns dupa t secunde. Proiectia vitezei pe orizontala este $v_0 \cos\alpha$, iar pe verticala este $v_0 \sin\alpha$.

Proiectia corpului pe orizontala are o miscare uniforma, $x = v_0 \cos\alpha t$; proiectia pe verticala este influentata si de actiunea gravitatiei, $y = v_0 \sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2$.

Eliminand pe t, se obtine y, y = $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}x - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\alpha}$.

Punctele in care traiectoria atinge orizontala se obtin rezolvand ecuatia:

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}x - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\alpha}$.=0. Se determina x = 0 si R = $\frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$.

Distanta R este deci functie (depinde) de unghiul α, R (α); deoarece unghiul α este cuprins intre 0 si $\frac{\pi}{2}$, functia R este definita pentru $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Pentru a afla maximul acestei functii calculam derivata (in raport cu argumentul α):

$R'(\alpha)$= $\frac{2v_0^2}{g}\cos 2\alpha$ si ii aflam radacinile (cuprinse intre 0 si $\frac{\pi}{2}$),

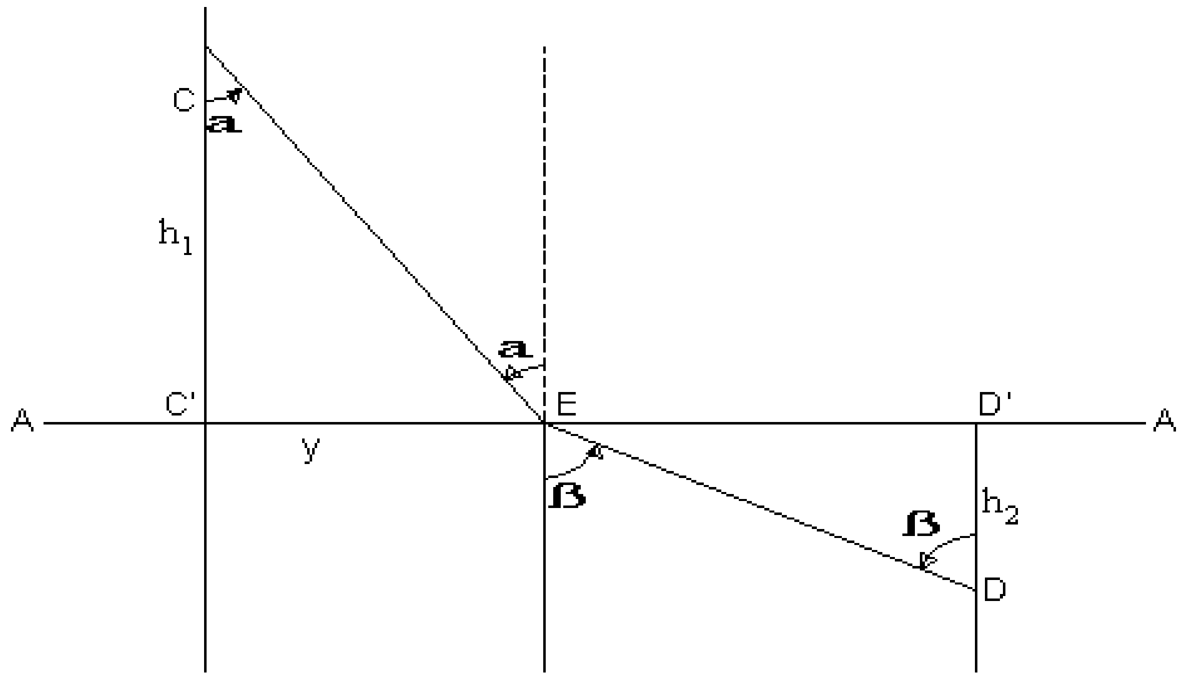
$\frac{2v_0^2}{g}\cos 2\alpha = 0$ sau cos2 α =0,deci 2 α = $\frac{\pi}{2}$, de unde α = $\frac{\pi}{4}$.

Derivata a doua $R''(\alpha)$= - $\frac{4v_0^2}{g}\sin 2\alpha$ este strict negativa pe $[0, \frac{\pi}{2}]$ si deci si in $\frac{\pi}{4}$.

Rezulta ca $\frac{\pi}{4}$ este un maxim. Asadar, pentru a realiza distanta maxima, corpul trebuie aruncat sub un unghi de 45 ° fata de orizontala.

<u>Aplicatia 6</u> **(consecinte ale teoremei lui Lagrange in rezolvarea problemelor de optica.)**

Dupa cum se stie din fizica, principiul lui Fermat afirma ca, pentru a ajunge dintr-un punct intr-altul, o raza de lumina se propaga dupa acea traiectorie pe care o parcurge in minimul de timp.



Fie AA' suprafata de separatie a doua medii omogene in care lumina se propaga cu vitezele v_1 si respectiv v_2. Sa se gaseasca traiectoria descrisa de o raza de lumina pentru a ajunge din punctul C in punctul D.

Fie C' si D' proiectiile lui C si D pe AA', $c = C'D'$, $h_1 = CC'$, $h_2 = DD'$, $x = C'E$. In fiecare din cele doua medii omogene, lumina se propaga in linie dreapta.

In primul mediu, lumina se propaga cu viteza v_1 si parcurge distanta CE in timpul T_1, $CE = v_1 T_1$ sau $T_1 = \frac{CE}{v_1}$.

In al doilea mediu, lumina se propaga cu viteza v_2 si parcurge distanta ED in timpul T_2, $ED = v_2 T_2$ sau $T_2 = \frac{ED}{v_2}$.

Timpul total este: $\mathrm{T} = \dfrac{CE}{v_1} + \dfrac{ED}{v_2}$.

Dar CE = $\sqrt{h_1^2 + x^2}$ si ED = $\sqrt{h_2^2 + (c-x)^2}$, deci:

$$\mathrm{T} = \frac{\sqrt{h_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{h_2^2 + (c-x)^2}}{v_2} .$$

Timpul T este deci o functie de x, T(x), $0 \le x \le c$. Pentru a afla minimul acestei functii, anulam derivata:

$$T'(\mathrm{x}) = \frac{x}{v_1\sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{c-x}{v_2\sqrt{h_2^2 + (c-x)^2}} = 0 .$$

Derivata se anuleaza pentru acele valori ale lui x pentru care

$$\frac{x}{v_1\sqrt{h_1^2 + x^2}} = \frac{c-x}{v_2\sqrt{h_2^2 + (c-x)^2}} .$$

Derivata a doua:

$$T''(\mathrm{x}) = \frac{h_1^2}{v_1\sqrt{(h_1^2 + x^2)^3}} + \frac{h_2^2}{v_2\sqrt{(h_2^2 + (c-x)^2)^3}}$$ este strict pozitiva pentru orice x,

deci punctele de extrem ale functiei T(x) sunt puncte de minim.

Dar $\sin\alpha = \dfrac{x}{CE} = \dfrac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}}$ iar $\sin\beta = \dfrac{c-x}{DE} = \dfrac{c-x}{\sqrt{h_2^2 + (c-x)^2}}$, astfel incat egalitatea care da punctele de minim se scrie:

$$\frac{\sin\alpha}{v_1} = \frac{\sin\beta}{v_2} .$$

Notand cu v_0 viteza luminii in vid, indicii de refractie n_1 si n_2 ai celor doua medii sunt $n_1 = \dfrac{v_0}{v_1}$ si $n_2 = \dfrac{v_0}{v_2}$, relatia obtinuta mai sus se scrie:

$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta$ si constituie una din legile refractiei, cunoscuta din fizica.

Capitolul II

Teoreme de medie pentru functii integrabile

II 1. Inegalitatea mediei

Teorema: **Daca $f:[a,b]\to R$ este continua, iar $m \le f(x) \le M, \forall x \in [a,b]$, atunci**

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Observatie: Valoarea medie a functiei continue $f:[a,b]\to R$ pe intervalul $[a,b]$ este numarul real: $M(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

II.1.3.Interpretare geometrica: Presupunem $f \ge 0$. Formula $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$ arata ca aria subgraficului lui f este cuprinsa intre ariile M(b-a) si m(b-a), adica intre aria dreptunghiului superior si cel al dreptunghiului inferior, adica aceasta arie este egala cu aria dreptunghiului de baze $M(f)$ si b-a, ca in figura de mai jos.

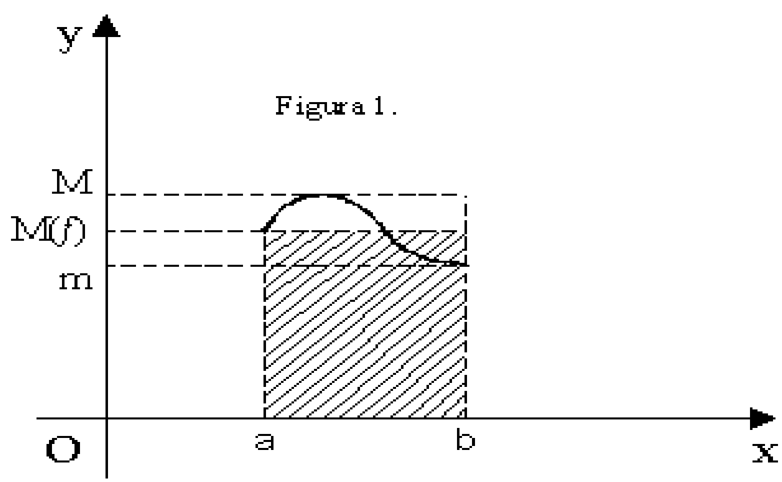


Figura 1.

I.1.4.Interpretare fizica: Din punct de vedere fizic, viteza medie a unui mobil este valoarea medie a vitezei, adica valoarea medie a lui v este egala cu

$$\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = \frac{distanta-parcursa}{durata-de-timp}.$$

II.1.5.Interpretare din punct de vedere al calculului diferential:

Din punct de vedere al calculului diferential, inegalitatea mediei se obtine din teorema lui Lagrange aplicata functiei:

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt \text{ pe intervalul } [a,b].$$

Avem F(b)-F(a) = (b-a)F'(c), $c \in (a,b)$ sau $\int_a^b f(t)dt = f(c)(b-a)$, $c \in (a,b)$.

Din $m \le f(c) \le M$ se deduce $m(b-a) \le f(c)(b-a) \le M(b-a)$.

Exemplul 1. Sa se determine valoarea medie a functiei $f:[0,\pi] \to R$, $f(x)=\sin x$.

Rezolvare: Valoarea medie este numarul:

$$M(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin x dx = -\frac{\cos x}{\pi}\Big|_0^\pi = -\left(\frac{\cos x}{\pi} - \frac{\cos 0}{\pi}\right),$$

de unde rezulta ca $M(f)=\frac{2}{\pi}$.

II.2. **Formula de medie (Cauchy – 1821)**

Teorema: **Daca f : [a,b] $\rightarrow$ R este continua, atunci $\exists \xi \in [a,b]$ astfel incat:**

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi).$$

II.2.2. Interpretare geometrica: Daca f este o functie continua si pozitiva pe [a,b], atunci exista cel putin un punct $\xi \in [a,b]$ astfel incat subgraficul lui f sa aiba aceeasi arie cu dreptunghiul de baza (b-a) si inaltime $f(\xi)$ (zona hasurata – figura de mai jos).

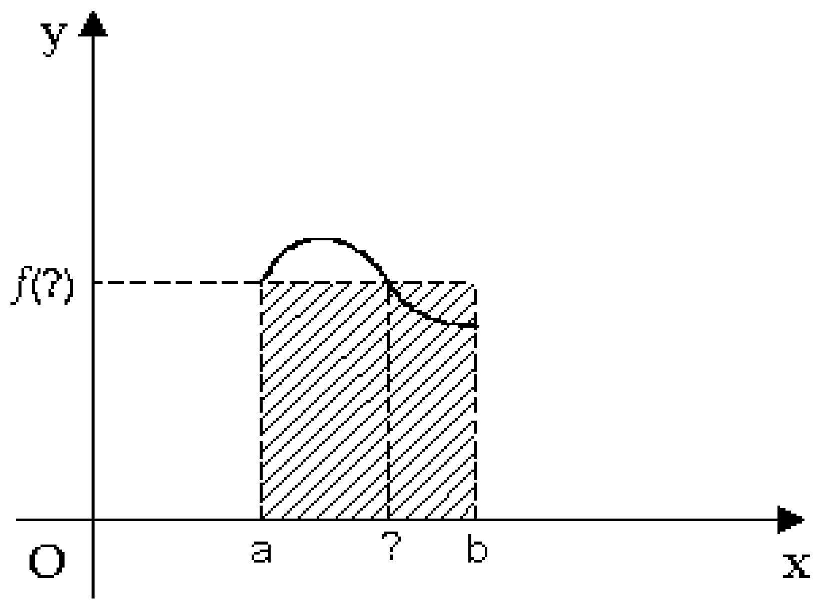


Figura 2

<u>Exercitiul :1.</u> Sa se calculeze $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \int_1^{1+x} \ln t\,dt$ **.**

Rezolvare: Conform teoremei de medie, exista $c_x \in [1,1+x]$ astfel incat $\int_1^{1+x} \ln t\,dt = x\ln c$,

deci $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \int_1^{1+x} \ln t\,dt = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln c = 0$.

<u>Exercitiul: 2.</u> Fie functia continua $f : [a,b] \to R$ **avand proprietatea ca** $3\int_0^1 f(x)dx = 1$ **.**

Sa se demonstreze ca exista $x_0 \in (0,1)$ **astfel incat** $f(x_0) = x_0^2$ **.**

Rezolvare: $$3\int_0^1 f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 f(x) = \frac{1}{3} \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx - \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = 0 \Rightarrow$$

$$\int_0^1 (f(x) - x^2)dx = 0 .$$

Atunci exista $x_0 \in (0,1)$ astfel incat $(f(x_0) - x_0^2)(1-0)=0$ si deci $f(x_0) = x_0^2$.

II.4.3. <u>Aplicatii - teorema de medie</u>

<u>Exercitiul 1.</u> Sa se determine valoarea medie a functiei $f : [0,3] \to R$, $f(x)=x^2-2x$ precizand si punctul ξ.

<u>Rezolvare:</u> $M(f)=\frac{1}{3-0}\int_0^3 (x^2-2x)dx = 0$. Ecuatia $f(\xi)=0$ cu $\xi^2-2\xi=0$ are solutiile $\xi_1=0 ; \xi_2=2$.

<u>Exercitiul 2.</u> (limita unei functii) Sa se calculeze $\lim_{x\to 0}\int_1^{1+x}\ln t\,dt$.

Rezolvare: Formula de medie pentru integrale ne permite sa scriem:

$$\int_1^{1+x}\ln t\,dt = x\ln\xi, \text{ unde } \xi\in[1,1+x].$$

De aici, rezulta ca $1\le\xi\le 1+x$, relatie care, prin logaritmare ne conduce la:

$$0\le\ln\xi\le\ln(1+x).$$

Inmultim aceasta relatie cu x>0 si obtinem:

$$0\le x\ln\xi\le x\ln(1+x)$$, iar daca x <0 vom obtine:

$$0\ge x\ln\xi\ge x\ln(1+x).$$

Trecand la limita in ultimele inegalitati deducem:

$$\lim_{x\to 0} x\ln\xi = 0 \text{ (criteriul clestelui).}$$

<u>Exercitiul 3.</u> (limita unui sir) Sa se calculeze $\lim_{n\to\infty} n^4\int_n^{n+1}\frac{x\,dx}{1+x^5}$.

Rezolvare: Conform formulei de medie pentru integrale, exista $\xi\in[n,n+1]$ astfel incat ($\xi=\xi(n)$)

$$\int_n^{n+1}\frac{x\,dx}{1+x^5}=\frac{\xi}{1+\xi^5}.$$

Dar $$\frac{n}{1+(n+1)^5}\le\frac{\xi}{1+\xi^5}\le\frac{n+1}{1+n^5}$$, relatie care, inmultita cu n^4 ne da:

$$\frac{n^5}{1+(n+1)^5}\le n^4\frac{\xi}{1+\xi^5}\le\frac{n^4(1+n)}{1+n^5}.$$

Cum sirurile externe au limita 1, deducem cu criteriul clestelui, ca limita ceruta este 1.

IV .1 Aplicatii diverse.

Exercitiul 1. **Fie $f:[a,b]\to R$ o functie continua pe [a,b] pentru care este satisfacuta egalitatea:**

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2}(b^2-a^2).$$

Sa se arate ca f are cel putin un punct fix in intervalul (a,b).

Solutie: Din egalitatea din enunt obtinem:

$$0=\int_a^b f(x)dx-\frac{1}{2}(b^2-a^2)=\int_a^b [f(x)-x]dx.$$

Aplicand teorema de medie in ultima integrala, rezulta ca exista un punct $c\in(a,b)$ astfel incat:

$$0=\int_a^b [f(x)-x]dx=[f(c)-c](b-a),\ \text{de unde obtinem ca}$$

$f(c)=c$, adica f are cel putin un punct fix in intervalul (a,b).

Exercitiul 2. **Fie $f:[a,b]\to R$ o functie continua. Sa se arate ca exista un punct $c\in(a,b)$, astfel incat:**

$$\int_a^b f(x)dx=(a+b-2c)f(c).$$

Solutie: Functia auxiliara: $h(x)=(b-x)\int_a^x f(t)dt+(x-a)\int_b^x f(t)dt$ este continua pe [a,b], derivabila pe (a,b) si $h(a)=h(b)=0$.

In baza teoremei lui Rolle, exista un punct $c\in(a,b)$ astfel incat $h'(c)=0$.

Derivand pe h si inlocuind pe x cu c obtinem egalitatea din enunt.

IV.2. Aplicatii ale teoremei a II-a de medie la calculul limitelor unor siruri

Exercitiul 1. **Sa se calculeze** $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx$.

Solutie: Aplicand teorema de medie pentru integrale, rezulta ca exista $c_n \in (n, n+p)$, astfel incat:

$$\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx = \sin c_n \int_n^{n+p}\frac{dx}{x} = \sin c_n \cdot \ln x\Big|_n^{n+p} = \sin c_n \cdot \ln\frac{n+p}{n},$$

si deci: $$\left|\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx\right| \le \ln\frac{n+p}{n}.$$

Dar, cum $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{n+p}{n} = 0$ rezulta $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x} = 0$.

Exercitiul 2. **Sa se calculeze** $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\frac{a}{n}}^{\frac{b}{n}}\frac{f(x)}{x}dx$, **unde** $f:[0,1]\to R$ **este o functie continua.**

Solutie: Aplicand teorema de medie rezulta ca exista $c_n \in (\frac{a}{n}, \frac{b}{n})$ ast:fel incat:

$$\int_{\frac{a}{n}}^{\frac{b}{n}}\frac{f(x)}{x}dx = f(c_n)\int_{\frac{a}{n}}^{\frac{b}{n}}\frac{dx}{x} = f(c_n)\ln x\Big|_{\frac{a}{n}}^{\frac{b}{n}} = f(c_n)\ln\frac{b}{a}.$$

Dar, din $\frac{a}{n} < c_n < \frac{b}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a}{n} \le \lim\limits_{n\to\infty} c_n \le \lim\limits_{n\to\infty}\frac{b}{n}$ rezulta:

$$0 \le \lim_{n\to\infty} c_n \le 0 \text{ si deci } \lim_{n\to\infty} c_n = 0.$$

Cum f este continua, rezulta ca:

$$\lim_{n\to\infty} f(c_n) = f(0).$$

Prin urmare,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{a}{n}}^{\frac{b}{n}}\frac{f(x)}{x}dx = f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

<u>Exercitiul 3.</u> **Sa se calculeze** $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_0^1 \frac{b\,dx}{\varepsilon x^k + a}, k > 0, a > 0.$

Solutie: Aplicand teorema de medie pentru integrale, rezulta ca exista $c_\varepsilon \in (0,1)$ astfel incat:

$$\int_0^1 \frac{b\,dx}{\varepsilon x^k + a} = \frac{b}{\varepsilon c_\varepsilon^k + a},$$

dar,

$$\frac{b}{\varepsilon + a} < \frac{b}{\varepsilon c_\varepsilon^k + a} < \frac{b}{a}.$$

Deci,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{b}{\varepsilon c_\varepsilon^k + a} = \frac{b}{a},$$

Adica:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^1 \frac{b\,dx}{\varepsilon x^k + a} = \frac{b}{a}.$$

<u>Exercitiul 4.</u> **Sa se calculeze** $\lim\limits_{n \to \infty} n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} x^{n+1} dx.$

Solutie:

$$n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} x^{n+1} dx = n^2 c_n^{c_n} \int_0^{\frac{1}{n}} x\,dx = n^2 c_n^{c_n} \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\frac{1}{n}} = -\frac{n^2}{2n^2} c_n^{c}\ .$$

Dar, din $0 \le c_n \le \frac{1}{n}$ rezulta $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = 0$ si deci $\lim\limits_{n \to \infty} c_n^{c_n} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} x^{n+1} dx = \frac{1}{2}.$

<u>Exercitiul 5.</u> **Fie $b_n \to \infty$ un sir de numere pozitive, iar $f: [0,+\infty] \to R$ o functie continua cu $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ (finit). Sa se calculeze limitele urmatoarelor siruri:**

1. $\mathbf{u}_n = \int_a^b \frac{f(b_n x)}{1+x} dx$;

2. $\mathbf{v}_n = \int_a^b \frac{f(b_n x)}{1+x^2} dx$, **$0<a<b<+\infty$.**

Solutie: Aplicand teorema de medie pentru integrale, rezulta ca exista $c_n \in (a,b)$ astfel ca

$$u_n = \int_a^b \frac{f(b_n x)}{1+x} dx = f(b_n c_n) \ln \frac{1+b}{1+a}.$$

Deoarece $a < c_n < b$ rezulta $ab_n < b_n c_n < bb_n$ si deci $\lim_{n\to\infty} b_n c_n = +\infty$ de unde se obtine:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = l \cdot \ln \frac{1+b}{1+a}.$$

La fel se procedeaza cu sirul v_n si se obtine

$$\lim_{n\to\infty} v_n = l\ (\text{arctg } b - \text{arctg } a).$$

IV.3. Inegalitati

<u>Exercitiul 1.</u> Fie f, F : [0,a] $\rightarrow$, a>0, unde f este o functie continua si crescatoare, iar F(x) = $\int_0^x f(t)dt$ pentru orice x $\in [0,a]$.

Sa se demonstreze inegalitatea:

$$\int_0^a F(t)dt \geq \frac{a^2}{2} f(0).$$

Solutie: Avem $\int_0^a F(x)dx = \int_0^a [\int_0^x f(t)dt]dx$.

Aplicand teorema de medie rezulta ca exista un punct c $_x \in (0, x)$ astfel incat:

$\int_0^x f(t)dt = xf(x)$ si egalitatea de mai sus devine:

$\int_0^a F(x)dx = \int_0^a [\int_0^x f(t)dt]dx = \int_0^a f(c_x)xdx \geq \int_0^a f(0)xdx = f(0) \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^a = \frac{a^2}{2} f(0)$, adica tocmai inegalitatea din enunt.

<u>Exercitiul 2.</u> Sa se arate ca 1< $\int_0^1 e^{x^2}dx < e$.

Solutie: Aplicand prima teorema de medie pentru integrale, rezulta ca exista c$\in (0,1)$ astfel incat $\int_0^1 e^{x^2}dx = e^{c^2}$ si, deci din 0<c<1, rezulta inegalitatea din enunt. (e $^{x^2}$ este strict crescatoare pe $(0,1)$).

Exercitiul 3. **Sa se arate ca pentru orice $x \in [0,1]$ are loc inegalitatea :**

$$\left| e^{-x^2} - \int_0^1 e^{-t^2} dt \right| \leq \sqrt{\frac{2}{e}}.$$

Solutie: Aplicand teorema de medie pentru integrale si tinand seama de faptul ca e^{-x^2} este strict descrescatoare, obtinem:

$$e^{-x^2} - \int_0^1 e^{-t^2} dt = e^{-x^2} - e^{-c^2} \qquad \text{cu } c \in (0,1) \text{ si}$$

$$e^{-1} - e^0 \leq e^{-x^2} - e^{-c^2} < e^0 - e^{-1} \Rightarrow -(1 - \frac{1}{e}) < e^{-x^2} - e^{-c^2} < 1 - \frac{1}{e}.$$

Deoarece $1 - \frac{1}{e} < \sqrt{\frac{2}{e}}$, rezulta ca: $-\sqrt{\frac{2}{e}} < e^{-x^2} - e^{-c^2} < \sqrt{\frac{2}{e}}$, adica relatia din enunt.

Exercitiul 4. **Sa se arate ca** $\quad \frac{1}{2} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} \leq \frac{\pi}{6}.$

Solutie: Aplicand teorema de medie pentru integrale, rezulta ca exista $c_n \in (0, \frac{1}{2})$ astfel incat:

$$\frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-c_n^{2n}}} \geq \frac{1}{2}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+x^2+x^4+\ldots+x^{2n-2})}} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \arcsin\frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}$$

V.3.Metode de verificare cunoştinţelor elevilor şi de evaluare a randamentului

Aspectele procesului de învăţământ legate de verificarea şi aprecierea cunoştinţelor elevilor sunt încadrate în docimologie - ştiinţa care are ca obiect studierea sistematică a examenelor, în special a sistemelor de notare, a comportării examinatorilor şi examinaţilor . În procesul de învăţământ examinarea are rol de verificare dar şi de întărire, precizare şi aprofundare a cunoştinţelor şi deprinderilor, de aceea este necesară la fiecare lecţie, la fiecare grupă de lecţii, la fiecare obiect.

Noţiunea de apreciere înseamnă acţiunea de a determina o valoare. Actul de evaluare începe odată cu examinarea cuiva, din momentul în care cineva răspunde la o întrebare. Deci examinarea şi aprecierea formează o unitate didactică, rezultatul lor fiind concretizat în notă.

O evaluare corectă poate fi făcută numai în condiţiile unor obiective precizate, din care să se desprindă exact ce trebuie să facă un elev pentru a dobândi realizarea lor.

Sub acest aspect se disting mai multe categorii de obiective:

a) *finalităţile sau scopurile generale ale educaţiei;*

b) *obiective intermediare, specifice,* raportate la învăţământ ca principal factor de realizare a scopurilor generale ale educaţiei.

Obiectivele specifice precizează contribuţia pe care fiecare obiect de studiu trebuie să o aibă la realizarea finalitatilor educaţiei. Între obiectivele specifice matematicii se înscriu:

- trezirea interesului şi plăcerii pentru studiul matematicii;
- înţelegerea noţiunilor; formarea priceperilor şi deprinderilor de bază;
- stimularea creativităţii în vederea deducerii unor noi rezultate pe baza celor demonstrate;
- formarea unei gândiri matematice exprimată printr-un comportament matematic adecvat;
- formarea unei motivaţii intrinseci în studiul matematicii.

c) *obiective educativ-operaţionale,* prin operaţionalizare înţelegându-se ,,enunţul procedurilor care permit a măsura, a produce sau a recunoaşte pentru altele un anumit comportament".

Evaluarea trebuie practicată în diferite momente ale procesului instructiv educativ:

- evaluarea partială (la începutul etapei de instruire) permite relevarea nivelului de pregătire al elevilor prin instruirea anterioară;

- evaluarea dinamică, de progres sau formativă (evaluare pe tot parcursul activității instructiv-educative) evidențiază dificultățile întâmpinate de elevi în învățare. Se poate interveni imediat şi eficient pentru remedierea neajunsurilor în realizarea unorobiective;

- evaluarea finală, sumativă, recapitulativă sau cumulativă (în finalul etapelor de instruire) relevă gradul de realizare a obiectivelor specifice disciplinei,,

Importanța evaluării rezidă în faptul că-i permite elevului să cunoască bine rezultatele efortului său de învățare, îl ajută să depăşească momentele critice, îi permite să progreseze în învățare.

Intre modalitățile cel mai frecvent utilizate pentru a măsura, aprecia şi evalua rezultatele obținute de elevi pe anumite perioade de timp, se înscriu testele. După scopul urmărit, principalele categorii de teste folosite în învățământ sunt:

- testele de inteligență;
- testele de aptitudini;
- testele de performanță.

Dintre acestea, testele de performanță sunt acelea care măsoară gradul de realizare a obiectivelor imediate şi a celor îndepărtate ale învățământului şi conțin volumul informațiilor necesare pentru evaluarea activității elevului şi implicit a profesorului.

Alcătuirea testelor reclamă o tehnică specială, un volum de muncă şi respectarea unor condiții ca:

- utilizarea întregii materii supuse verificării;
- stabilirea obiectivelor de realizat;
- reducerea materiei la teme elementare şi formularea unui număr corespunzator de cerințe (itemuri);
- prezentarea în mod accesibil elevilor;

- stabilirea întrebărilor la care trebuie să răspundă în mod obligatoriu pentru a se obține nota de trecere (performanța minim acceptată);

- folosirea unor întrebări de tipuri diferite pentru a dezvălui capacitatea elevului de a transfera cunoştințele sau a le organiza.

Dupa momentul în care se aplică, testele pot fi: inițiale, de progres (formative) şi finale.

- *Testele inițiale* se folosesc pentru a informa profesorul asupra cunoştințelor de care dispun elevii în vederea parcurgerii unei noi etape instructiv educative. Rezultatele nesatisfăcătoare la aceste teste impun organizarea unor activități de completare a lipsurilor observate.

- *Testele de progres* informează profesorul cu privire la posibilitățile elevilor de a se atinge obiectivele urmărite şi la dificultățile pe care le întâmpină în atingerea acestora. Testele de progres pot fi integrate în orice moment al unei lecții şi pot fi folosite pe tot parcursul noului an scolar.

- *Testele finale* se utilizează la sfârşitul unei teme, capitol sau an de studiu, în scopul de a evidenția măsurarea realizarii obiectivelor particulare ale unei teme, a obiectivelor specifice unui an de studiu.

Testele se elaborează pe baza obiectivelor particulare ale temei considerate şi stabilind pentru fiecare obiectiv o sarcina de lucru - un item - pe care elevul să o rezolve.

Un item se poate prezenta sub forma unei întrebări, unui exercițiu, deci o sarcină care corespunde unui obiectiv precis formulat.

Dupa modelul de alcătuire itemurile au fost clasificate in:

a) *itemuri inchise* — cuprind întrebări:

- cu răspuns corect - greşit;

- de selecție;

-de combinare (asociație): asociație simpla şi compusă.

b) *itemuri deschise* — extind aprecierea şi asupra posibilităților de argumentare a logicii gândirii.

Itemurile deschise se formulează prin:

- propoziții lacunare;

- desene lacunare;

- reprezentarea schematică a unor probleme.

c) *Itemuri constructive* - care se rezolvă printr-un efort mai mare din partea elevului. Acesta trebuie să formuleze în întregime pe baza unor operații de gândire ca: deducție, comparații, sistematizări, generalizări, etc.

Colegiul Comercial "Carol I" Constanta
Disciplina: Matematica. Analiza matematica.
Profesor: Ion Gabriela.
Unitatea de invatare: Functii derivabile.
Lectia: Teorema lui Lagrange.
Clasa : a XI-a D (3 ore / saptamana)

V.4. FISA DE LUCRU 1.

Exercitiul 1. Determinati punctul intermediar $c \in (4,5)$ prin aplicarea teoremei lui Lagrange functiei $f : [4,5] \to R$, $f(x) = 3x^2 - 5x + 7$.

Exercitiul 2. Fie functia $f:[1,2] \to R$, $f(x)=x+\ln x$. Sa se arate ca exista $c \in (1,2)$ astfel incat $1+\ln 2=f'(c)$ si sa se determine efectiv valoarea lui c.

Exercitiul 3. Fie $f: R \to R$, $f(x)=x^4+x^3+1$.

a) Aratati ca functia f indeplineste conditiile teoremei lui Lagrange pe intervalul [-1,0] si determinati punctul c corespunzator .

b) Folosind teorema lui Lagrange, demonstrati inegalitatea:

$$\sqrt{104} - \sqrt{100} < \frac{1}{5}.$$

Exercitiul 4. Rezolvati ecuatia: $3^x + 6^x = 5^x + 4^x$.

Exercitiul 5. Demonstrati ca $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Exercitiul 6. Sa se determine a si b astfel incat sa se poata aplica teorema lui Lagrange pentru functia

$$f:[-1,2] \to R,\ f(x)=\begin{cases} a - x^2, & x \in [-1,1) \\ \frac{b}{x}, & x \in [1,2] \end{cases}.$$

Exercitiul 7. a) Demonstrati ca $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$, $x > 0$.

b) Demonstrati ca $\lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = \infty$.

Colegiul Comercial "Carol I" Constanta
Disciplina: Matematica. Analiza matematica.
Profesor: Ion Gabriela.
Unitatea de invatare: Functii derivabile.
Lectia: Teorema lui Lagrange.
Clasa : a XI-a (3 ore / saptamana)

V.4. FIȘĂ DE LUCRU 2.

Exercitiul 1. Aplicați Teorema lui Lagrange funcției:

a) $f:[-1,1]\to \mathbf{R},\ f(x)=\dfrac{2x-1}{x+5}$.

b) $f:[0,2]\to \mathbf{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x^2}{2}, & x\in[0,1]\\ \dfrac{1}{x}, & x\in(1,2]\end{cases}$.

Exercitiul 2. Determinați abscisa unui punct c în care tangenta la graficul funcției

$$f:\mathbf{R}?\ \mathbf{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{2}, & x\le 0\\ \sqrt{x+1}, & x>0\end{cases}$$

să fie paralelă cu coarda care unește punctele de abscise $x_1=-4,\ x_1=3$.

Exercitiul 3. Să se determine $a,\ b\in \mathbf{R}$ astfel încât funcției

$$f:[-1,1]\to \mathbf{R},\ f(x)=\begin{cases}e^x, & x\in[-1,0]\\ ax+b, & x\in(0,1]\end{cases}$$

să i se poată aplica teorema lui Lagrange și să se aplice efectiv teorema.

Exercitiul 4. Fie $f:[a,b]\to \mathbf{R}$, funcție Rolle. Arătați că există $c\in(a,b)$ astfel încât $f'(c)=\dfrac{f(a)-f(c)}{c-b}$.

Exercitiul 5. Fie $f:[0,2]\to \mathbf{R}$, o funcție continuă pe $[0,2]$, de două ori derivabilă pe $(0,2)$ și $f(0)=0$, $f(1)=1,\ f(2)=2$. Arătați că există $c\in(0,2)$ astfel încât $f''(c)=0$.

Colegiul Comercial "Carol I" Constanta
Disciplina : Matematica. Analiza matematica.
Profesor : Ion Gabriela
Unitatea de invatare: Integrale definite.
Lectia: Teoreme de medie.
Clasa: a XII-a (3 ore / saptamana)

V.4 FISA DE LUCRU 3.

Exercitiul 1. Fie functia f:[-1,2] $\to$ [1,4], f(x)=x^2. Sa se gaseasca punctul $c \in (-1,2)$ astfel incat $\int_{-1}^{2} x^2 dx = 3$ f(c).

Exercitiul 2. Consideram functia f:[2,5] $\to$ R, f(x)= $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$. Sa se arate ca $\sqrt{3} < \int_{2}^{5} f(x)dx < \sqrt{6}$.

Exercitiul 3. Fie o functie continua f:[0,2] $\to$ R stfel incat $\int_{0}^{2} f(x)dx = 2$. Aratati ca exista un punct $c \in (0,2)$ astfel incat f(c)=c.

Exercitiul 4. Calculati urmatoarele limite:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{0}^{1} \frac{x^n}{1+x} dx$. b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{0}^{1} x^n e^x dx$. c) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{0}^{1} \frac{n-x}{n+x} dx$.

Exercitiul 5. Sa se cerceteze daca se poate aplica teorema de medie pentru functiile urmatoare si in caz afirmativ sa se aplice aceasta teorema:

a) f:[1, e] $\to$ R, f(x)=lnx.

b) f:[-1,1] $\to$ R, f(x)= $\frac{1}{1+x^2}$.

Exercitiul 6. Sa se arate ca $\lim\limits_{n\to\infty} (n^3 \int_{n}^{2n} \frac{x dx}{1+x^5}) = \frac{7}{24}$.

Exercitiul 7. Fie f:[0,1] $\to$ R o functie de doua ori derivabila cu f'' continua pe [0,1]. Sa se arate ca exista $c \in [0,1]$ astfel incat

$$\int_{0}^{1} f(x)dx = f(0) + \frac{1}{2} f'(0) + \frac{1}{6} f''(c).$$

V.5. PROBLEME DATE LA EXAMENE SI CONCURSURI

Exercitiul 1. Se considera functiile $f:(0,\infty)\rightarrow R$, $f(x)=x\cos\frac{\pi}{x}$ si $g:[0,\frac{\pi}{2}]\rightarrow R$, $g(x)=\cos x+x\sin x$.

a) Sa se arate ca $g(x)>1$, $\forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$;

b) Utilizand teorema lui Lagrange pentru functia f, sa se demonstreze inegalitatea $f(x+1)-f(x)>1$, pentru orice $x>2$;

c) Sa se arate ca $f(n)>n-2$, pentru orice $n\geq 3$. (variante Bac -2007)

Exercitiul 2. Se considera functiile $f:(0,\infty)\rightarrow R$, $f(x)=\ln\frac{x}{x+1}$ si $g:(0,\infty)\rightarrow R$, $g(x)=f'(x)$.

a) Sa se arate ca $g(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}, x>0$;

b) Sa se arate ca functia g este strict descrescatoare pe $(0,\infty)$;

c) Sa se arate ca $g(x)\geq 0,\forall x>0$;

d) Utilizand teorema lui Lagrange sa se arate ca $\forall n\in N^*$ exista $c_n\in(n,n+1)$ astfel incat $g(c_n)=f(n+1)-f(n)$;

e) Sa se arate ca $g(n+1)<f(n+1)-f(n)<g(n)$, $\forall n\in N^*$;

f) Utilizand metoda inductiei matematice, sa se arate ca:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+....+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1},\forall n\in N^*;$$

g) Sa se arate ca $\frac{n}{2(n+2)}<\ln\frac{2n+2}{n+2},\forall n\in N^*$. (variante Bac-2007)

Exercitiul 3. Se considera functia $f:R\rightarrow R$, $f(x)=x-\ln(e^x+1)$ si sirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin:

$$a_n=\frac{1}{e+1}+\frac{1}{e^2+1}+....+\frac{1}{e^n+1},\forall n\in N^*.$$

a) Sa se verifice ca $f'(x)=\frac{1}{e^x+1}, x\in R$;

b) Sa se arate ca functia f' este strict descrescatoare pe R;

c) Utilizand teorema lui Lagrange, sa se arate ca $\forall k\in[0,\infty)$ exista $c\in(k,k+1)$ astfel incat $f(k+1)-f(k)=\frac{1}{e^c+1}$;

d) Sa se arate ca $\frac{1}{e^{k+1}+1}<f(k+1)-f(k)<\frac{1}{e^k+1},\forall k\in[0,\infty)$;

e) Sa se arate ca sirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescator;

f) Sa se arate ca $f(n+1)-f(1)<a_n<f(n)-f(0)$, $\forall n\in N^*$;

g) Sa se arate ca sirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent si are limita un numar real din intervalul $[\ln(1+\frac{1}{e}),\ln 2]$. (variante Bac-2007)

Exercitiul 4. Se considera functia f $:(0,\infty)\to R$, f(x)= $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}$ si sirurile $(a_n)_{n\geq1},(b_n)_{n\geq1},(c_n)_{n\geq1}, a_n=\frac{1}{\sqrt[4]{1}}+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}+...+\frac{1}{\sqrt[4]{n}}, b_n=a_n-$ f(n), c $_n = a_n -$ f(n+1), $\forall n\in N, n\geq 1$.

a) Sa se calculeze f'(x), $x\in(0,\infty)$;

b) Sa se arate ca f' este strict descrescatoare pe intervalul $(0,\infty)$;

c) Utlizand teorema lui Lagrange, sa se arate ca $\forall k>0$, exista c $\in(k,k+1)$ astfel incat f(k+1)-f(k)= $\frac{1}{\sqrt[4]{c}}$;

d) Sa se arate ca $\frac{1}{\sqrt[4]{k+1}}<\frac{4}{3}(k+1)^{\frac{3}{4}}-\frac{4}{3}k^{\frac{3}{4}}<\frac{1}{\sqrt[4]{k}},\forall k\in(0,\infty)$;

e) Sa se arate ca sirul (b_n) este strict descrescator iar sirul (c_n) este strict crescator;

f) Sa se arate ca sirurile $(b_n)_{n\geq1},(c_n)_{n\geq1}$ sunt convergente;

g) Sa se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$. (variante Bac-2007)

Exercitiul 5. Se considera functia f $:(0,\infty)\to R$, f(x)=x ^{a}, $a\in R$.

a) Sa se calculeze f'(x), $x\in(0,\infty)$;

b) Sa se arate ca daca a>1, atunci f este convexa pe $(0,\infty)$;

c) Utilizand teorema lui Lagrange, sa se arate ca exista c(a) $\in(3,4)$ si d(a) $\in(5,6)$ astfel incat $4^a-3^a=a(c(a))^{a-1}$ si $6^a-5^a=a(d(a))^{a-1}$;

d) Sa se arate ca pentru orice functii g:R $\to(3,4)$ si h:R $\to(5,6)$, ecuatia x(g(x)) $^{x-1}$= $x(h(x))^{x-1}$, $x\in$ R are numai solutiile x=0 si x=1;

e) Sa se rezolve in numere reale ecuatia $3^x+6^x=4^x+5^x$; (variante Bac-2007)

Exercitiul 6. Se considera functia f $:(0,\infty)\to R$, f(x)=ln(lnx) si sirurile $(a_n)_{n\geq2}$ si $(c_n)_{n\geq2}$, $a_n=\frac{1}{2\ln2}+\frac{1}{3\ln3}+...+\frac{1}{n\ln n}, b_n=a_n-f(n), c_n=a_n-f(n+1),\forall n\in N, n\geq 2$.

a) Sa se calculeze f'(x);

b) Sa se arate ca f' este strict descrescatoare pe intervalul $(1,\infty)$;

c) Utilizand teorema lui Lagrange, sa se arate ca $\forall k\in(1,\infty)$, exista c $\in$(k,k+1) astfel incat f(k+1)-f(k)= $\frac{1}{c\ln c}$;

d) Sa se arate ca $\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)}<\ln(\ln(k+1))-\ln(\ln k)<\frac{1}{k\ln k},\forall k\in(1,\infty)$;

e) Sa se arate ca sirul $(b_n)_{n\geq2}$ si $(c_n)_{n\geq2}$ sunt convergente si au aceeasi limita;

f) Sa se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$; (variante Bac-2007)

BIBLIOGRAFIE

[1] Nicolescu M., Dinculeanu N., Marcus S. – Analiza matematica, EDP Bucuresti 1980;
[2] Gheorghiu N., Precupanu T. – Analiza matematica, EDP Bucuresti 1979;
[3] Precupanu T – Bazele analizei matematice –Ed . Universitatii “ Al. I. Cuza “ Iasi, 1993;
[4] Sburlan S. – Principiile fundamentale ale matematicii moderne . Lectii de analiza matematica- Ed. Academiei Romane, Bucuresti, 1991;
[5] Siretchi S. – Calculul diferential si integral – Ed. Stiintifica si Enciclopedica, Bucuresti 1985;
[6] Colojoara I. – Analiza matematica, Bucuresti, 1983;
[7] Stanasila O. - Analiza matematica, Ed. Didactica si pedagogica, Bucuresti, 1981;
[8] Teodorescu N, Olariu V. – Ecuatii diferentiale;
[9] Haimovici A. – Ecuatii diferentiale si integrale – EDP Bucuresti 1965;
[10] Popa C., Hiris V., Megan M. – Introducere in analiza matematica prin exercitii si probleme;
[11] Arsinte I. – Introducere elementara in analiza matematica – Bucuresti 1984;
[12] Nicolescu C. – Analiza matematica. Aplicatii- Ed. Albatros 1987;
[13] Barza I.- Introducere elementare de calcul integral – Bucuresti 1984;
[14] Donciu N., Flondor D. – Analiza matematica, culegere de probleme- Ed. All 1993;
[15] Mocanu P., Negoescu N., Hamburg P.- Analiza matematica-EDP Bucuresti-1992;
[16] Frunza V. – Teoria si metodologia curriculumului, 2003;
[17] Dragu A., Cristea S.- Psihologie si pedagogie scolara, editia a II-a revizuita si adaugita, 2003;
[18] Ganga M.- Matematica, manual pentru clasa a XI-a, Elemente de analiza matematica- Ed. Mathpress,2009;
[19] Ganga M.-Matematica, manual pentru clasa a XII-a, Elemente de analiza matematica-Ed. Mathpress,2009.