CULEGERI DE PROBLEME DE MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ

SERIE

G. ȚIȚEICA

PROBLEME DE GEOMETRIE

G. ȚIȚEICA

PROBLEME DE GEOMETRIE

Ediția a VI-a

Seria
culegeri de probleme de matematică și fizică

EDITURA TEHNICĂ
București

Cartea conţine circa 1 400 de probleme, cu indicaţii şi răspunsuri, grupate în două categorii.

Prima categorie cuprinde probleme din geometria studiată în şcoala medie, iar a doua — probleme cu un nivel mai ridicat, din capitolele „Transversale“, „Rapoarte anarmonice şi armonice“, „Pol şi polară“, „Inversiune“, „Omografie şi involuţie“ şi „Conice“.

Lucrarea este adresată elevilor, candidaţilor la admitere în învăţămîntul superior, studenţilor din primul an şi cadrelor didactice din învăţămîntul de cultură generală şi din învăţămîntul tehnic.

PREFAȚĂ LA EDIȚIA A VI-a

Această nouă ediție era de mult așteptată. Ea nu prezintă schimbări importante față de ediția precedentă. Nu s-a adăugat și nu s-a scos nici o problemă, în schimb acolo unde s-a simțit nevoia s-au lămurit mai bine enunțurile și soluțiile. La unele probleme s-a introdus o a doua soluție pentru a înfățișa un alt punct de vedere. În acest fel se deschide un orizont mai larg în studierea unei probleme, ceea ce poate duce uneori la descoperirea de proprietăți noi ale unei figuri.

GH. D. SIMIONESCU

PREFAȚĂ LA EDIȚIA A IV-a

În dorința de a răspîndi cît mai mult gustul pentru matematici, Gazeta Matematică și-a propus, între altele, și publicarea de culegeri de probleme. Prima culegere a apărut în 1901 și cuprinde probleme de aritmetică, geometrie, algebră și trigonometrie, fiind întocmită de I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu și V. Cristescu. Mai tîrziu s-a considerat că este mai bine ca cele patru părți să se separe și astfel au apărut în biblioteca Gazetei Matematice patru culegeri de probleme, revizuite și cu un material mai bogat.

Culegerea de probleme de geometrie (separată) de G. Țițeica, cuprinzînd 1 111 probleme, s-a tipărit în 1929. Față de culegerea din 1901 — partea de geometrie — s-au adăugat 319 probleme noi. Considerînd partea de geometrie a culegerii din 1901 ca primă ediție, cartea apărută în 1929 o considerăm ca a doua ediție a culegerii de probleme de geometrie.

Deși lucrul este cunoscut, vreau să subliniez încă o dată aici că apariția acestor culegeri se datorește numai dragostei celor de la Gazeta Matematică pentru tineret și dorinței lor de a-l ajuta, tipărind cărți în limba română. Drepturile de autor erau cedate Societății „Gazeta Matematică“.

În mod special „Culegerea de probleme de geometrie“ ilustrează concepția înaltă a lui G. Țițeica despre datoriile omului de știință față de societate. Marele geometru cu renume mondial nu a considerat ca o scădere pentru el alcătuirea unei culegeri de probleme de geometrie elementară; dealtfel a dat și o culegere de probleme pentru geometria analitică.

O caracteristică a culegerii de probleme de geometrie este că ea cuprinde foarte mult material adunat din revistele noastre (mai ales în ediția a doua revăzută de regretatul N. Botea).

A treia ediție a culegerii prezintă unele modificări importante față de primele două. Astfel, numărul problemelor a fost sporit de la 1111 la 1414, deci s-au adăugat 303 probleme noi. Aproape tot materialul nou adăugat a fost adunat din revistele noastre mai vechi sau mai noi: Gazeta Matematică (G.M.), Revista Matematică din Timișoara (R.M.T.), Gazeta Matematică și Fizică (G.M.F. Seria A sau B), Revista Matematică și Fizică (R.M.F.), precum și din subiectele date la *concursurile Gazetei Matematice (C.G.M.), Olimpiade matematice etc. Menţionez faptul că multe probleme au fost luate din „Suplimentul cu exerciţii" al Gazetei Matematice, dar nu s-a indicat sursa.*

O modificare importantă s-a făcut şi în împărţirea materialului. În primul rînd culegerea a fost împărţită în două părţi: partea întîi cuprinde aproximativ capitolele de geometrie ce se predau în învăţămîntul mediu, iar partea a doua, cu un nivel mai ridicat, cuprinde capitolele „Transversale", „Rapoarte anarmonice şi armonice", „Pol şi polară", „Inversiune", „Omografie şi involuţie" şi „Conice". S-au introdus capitole noi: „Cercul" (lungimea şi aria lui, arcul de cerc, sectorul de cerc) (XIV), „Construcţii de expresii algebrice" (XV), „Proiecţii (XVII) şi „Probleme diverse" (XXII); deocamdată, fiecare din acestea are un număr mic de probleme. Alte capitole au fost divizate precum urmează: vechiul capitol „Unghiuri şi triunghiuri" în două capitole, capitolul „Relaţii metrice" în două capitole şi capitolul „Rapoarte anarmonice, pol şi polară, inversiune" în trei capitole. În felul acesta ediţia a treia are 28 de capitole, faţă de 20 cît cuprindea ediţia a doua.

La unele capitole s-au introdus probleme mai simple pentru ca tinerii începători să găsească material mai accesibil, care să-i încurajeze la rezolvarea problemelor mai dificile. Sînt totuşi capitole care prezintă greutăţi mai mari şi este bine ca cititorii să fie preveniţi de la început asupra acestui lucru. Ne referim la capitolele V, VI, IX, X, XI.

Ceea ce deosebeşte net ediţia a treia de cele precedente este introducerea figurilor (în număr de 397) la „Răspunsuri şi indicaţii". Acest lucru a fost considerat util de către Societatea de Ştiinţe Matematice şi Fizice din România, care a iniţiat revizuirea şi retipărirea culegerii. Trebuie să arătăm că uneori enunţul unei probleme lasă posibilitatea mai multor cazuri de figuri. Acolo unde a fost absolută nevoie s-au considerat toate cazurile, dar la cea mai mare parte din răspunsuri raţionamentul s-a făcut pe o anumită figură, urmînd ca cititorul să reia raţionamentul pentru alt caz de figură, ceea ce nu mai constituie o greutate. La unele probleme s-au înlocuit cu totul soluţiile din vechea ediţie, ca de exemplu la problemele 135 158, 342, 427 din partea întîi, 1 155 din partea a doua etc. La alte probleme s-au adăugat, pe lîngă soluţia existentă, soluţii noi, ca de exemplu la problemele 170, 232, 320, 327, 349, 351, 397, 453, 502, 505 etc.

La prezentarea ediţiei a treia, restructurată, am avut colaborarea preţioasă a lui D. Flondor, lector la Institutul Politehnic Bucureşti, care s-a ocupat cu redactarea capitolelor, I, II, III, X, XI, XII, XIII, XVIII, XIX, XX, XXI, XXVI, XXVII şi XXVIII. Această nouă ediţie — a patra — a culegerii de probleme de geometrie a fost necesară, deoarece cartea era cerută stăruitor din toate colţurile ţării.

Din punct de vedere al conţinutului nu s-a introdus material nou faţă de ediţia a treia, s-a căutat numai să se remedieze unele lipsuri. Astfel, în afară de corectarea unor erori mărunte, a fost necesar ca la unele probleme să se introducă precizări fie în enunţ, fie în soluţie, pentru a le face mai clare. Tot în acest scop au fost refăcute cîteva figuri.

Acum, cînd ediţia a patra a fost dată la tipar, s-au împlinit 60 de ani de la apariţia primei ediţii a culegerii de probleme de geometrie, timp în care s-a verificat continuu utilitatea ideii marelui nostru geometru G. Ţiţeica de a veni în ajutorul tineretului prin alcătuirea acestei culegeri. Astăzi grija pentru tineret este permanentă şi constituie una dintre preocupările importante ale forurilor conducătoare ale partidului şi ale statului nostru. Una dintre dovezi o constituie şi mulţimea de cărţi originale sau traduse în limba română, editate pentru a uşura studiul acelora care vor să se instruiască şi să-şi desăvîrşească pregătirea. Chiar şi această culegere este o mărturie în acest sens: greutăţile de tipărire de altădată au făcut *ca primele trei ediții să se succeadă la intervale de 28—27 ani. La primele două ediții soluțiile nu au putut fi însoțite de figuri, cum ar fi fost normal într-o culegere de probleme de geometrie, din cauza costului mult prea mare. Acum, pentru ca tineretul să aibă la îndemînă cărțile care îi sînt necesare, noua ediție urmează la numai trei ani după cea precedentă.*

Este o datorie de onoare pentru cei tineri să răspundă printr-o pregătire temeinică acum și printr-o muncă neprecupețită mai tîrziu, în folosul patriei noastre socialiste.

15. XII. 1961

GH. D. SIMIONESCU
Conf. Institutul Politehnic
București

CUPRINS

ENUNȚURI

PARTEA ÎNTÎI

PARTEA A DOUA

RĂSPUNSURI ȘI INDICAȚII

Capitolul I

UNGHIURI

1. Trei semidrepte OA, OB, OC formează în O unghiuri egale BOC, COA, AOB. Să se găsească valoarea comună a acestor unghiuri, exprimată printr-o fracție de unghi drept. Să se arate că prelungirea OA' a semidreptei OA împarte unghiul BOC în două părți egale.

2. Să se demonstreze că bisectoarele a două unghiuri adiacente suplimentare sînt perpendiculare.

3. Să se calculeze unghiul format de bisectoarele a două unghiuri adiacente oarecare. Ce se întîmplă cînd unghiurile adiacente sînt complementare sau suplimentare?

4. Să se demonstreze că bisectoarele a două unghiuri opuse la vîrf sînt în prelungire.

5. Să se demonstreze că bisectoarele celor patru unghiuri formate de două drepte concurente sînt două drepte perpendiculare.

6. Fie OA', OB' perpendiculare pe OA, OB. Să se arate că unghiurile AOB și $A'OB'$ sînt egale sau suplimentare.

7. Fie OC bisectoarea unghiului AOB și OM o dreaptă oarecare. Să se arate că unghiul COM este semisuma sau semidiferența unghiurilor AOM și BOM.

8. Două unghiuri egale AOB și COD cu același vîrf au o parte comună, unghiul COB. Să se arate că:

a) $\sphericalangle AOC = \sphericalangle BOD$;

b) bisectoarea unghiului BOC este și bisectoarea unghiului AOD;

c) reciproc, dacă unghiul BOC este interior unghiului AOD și dacă $\sphericalangle AOB = \sphericalangle COD$, ele au aceeași bisectoare.

9. Să se demonstreze că dacă două unghiuri egale AOB, $A'OB'$ au laturile OA și OA' în prelungire iar OB și OB' sînt de o parte și de alta a dreptei AA', atunci cele două unghiuri sînt opuse la vîrf.

10. Se consideră un unghi drept XOY; OX este bisectoarea unui unghi AOB, iar OY bisectoarea unui unghi COD. Să se arate că unghiurile AOC și BOD sînt suplimentare ($\sphericalangle BOD < 180°$). Ce se întîmplă dacă OA și OC se confundă?

11. Din punctul O se duc semidreptele OA, OB, OC, OD în ordinea indicată aici, astfel ca $\sphericalangle AOB = \sphericalangle COD = \alpha$. Să se afle unghiul format de bisectoarele unghiurilor AOC și BOD.

12. Se dau două unghiuri adiacente $\sphericalangle AOB = \alpha$ și $\sphericalangle BOC = \beta$ și se duc trisectoarele lor (dreptele care împart fiecare unghi în trei părți egale). Să se calculeze unghiurile făcute de fiecare trisectoare a unghiului AOB cu fiecare trisectoare a unghiului BOC. Caz particular cînd unghiurile adiacente sînt suplimentare.

13. Se dă un unghi xOy și o semidreaptă (D), interioară unghiului, trecînd prin vîrful lui. Să se demonstreze că dacă simetricele dreptei (D) față de cele două laturi Ox, Oy sînt în prelungire, unghiul xOy este drept.

14. O rază de lumină SO este reflectată de o oglindă plană după direcția OS'. Se rotește apoi oglinda cu un unghi α și fie OS'' raza reflectată. Să se arate să unghiul razelor reflectate este 2α. (Proprietate folosită la construirea sextantului și a altor aparate de fizică.)

15. Să se arate că dacă notăm cu $n°$ valoarea unui unghi în grade sexagesimale și cu c^g valoarea aceluiași unghi în grade centesimale, formulele care permit trecerea de la un fel de unități la altul sînt

$$c^g = \frac{10}{9} n°; \quad n° = \frac{9}{10} c^g.$$

16. Cîți radiani are unghiul de $15°$? Dar unghiul de $34°22'38''$? Dar unghiul de 42^g?

17. Cîte grade sexagesimale au unghiurile de 0,6 rad; $\frac{5\pi}{3}$ rad; $\frac{\pi}{24}$ rad?

18. Să se afle unghiul a cărui măsură în grade centesimale este mai mare cu 8 decît măsura sa în grade sexagesimale.

19. Care sînt unghiurile suplimentare a căror diferență este un unghi drept?

20. Care este unghiul al cărui supliment este de n ori complementul său?

Aplicații: $n = 4$; $n = 5$.

TRIUNGHIURI

21. Să se demonstreze că într-un triunghi isoscel medianele, bisectoarele, înălțimile, corespunzătoare laturilor egale, sînt egale.

22. Pe latura Ox a unui unghi xOy se iau două segmente $\overline{OA}$, $\overline{OA'}$; pe Oy se iau segmentele $\overline{OB}$, $\overline{OB'}$ egale respectiv cu $\overline{OA}$, $\overline{OA'}$. Dreptele AB', BA' se intersectează în I. Să se arate că OI este bisectoarea unghiului xOy.

23. Fie A', B' simetricele punctelor A, B în raport cu un punct O, adică O este mijlocul segmentelor $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$. Să se demonstreze că $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$ sînt egale.

24. Să se demonstreze că dacă A', B', C' sînt simetricele vîrfurilor triunghiului ABC față de punctul O, triunghiul $A'B'C'$ este egal cu triunghiul ABC.

25. Să se demonstreze că dacă A', B' sînt simetricele punctelor A, B față de dreapta xy, adică dacă această dreaptă este perpendiculară pe segmentele $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, în mijloacele lor, atunci $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.

26. Să se demonstreze că simetricele a trei puncte în linie dreaptă, față de un punct O sau față de o dreaptă xy, sînt trei puncte în linie dreaptă *(aliniate)*.

27. Să se demonstreze că *mediatoarele* laturilor unui triunghi (perpendicularele ridicate pe laturile triunghiului în mijloacele lor) sînt concurente.

28. Să se demonstreze că bisectoarele unghiurilor unui triunghi sînt concurente.

29. Să se demonstreze că bisectoarele suplimentelor a două unghiuri ale unui triunghi și bisectoarea unghiului al treilea sînt concurente.

30. Dacă pe laturile unui triunghi echilateral ABC se iau, în același sens, lungimile $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'}$, să se demonstreze că triunghiul $A'B'C'$ este echilateral.

31. Dacă pe laturile unui poligon regulat $A_1A_2...A_n$, adică avînd laturile și unghiurile egale, se iau în același sens lungimile $\overline{A_1A_1'} = \overline{A_2A_2'} = ... = \overline{A_nA_n'}$, să se demonstreze că poligonul $A_1'A_2'...A_n'$ este și el regulat.

32. În două triunghiuri ABC, $A'B'C'$ avem

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}, \quad \sphericalangle A = \sphericalangle A', \quad \overline{AC} < \overline{A'C'}.$$

Să se arate că $\sphericalangle B < \sphericalangle B'$.

33. Fie $\overline{AD}$ cea mai lungă, $\overline{BC}$ cea mai scurtă latură a patrulaterului $ABCD$. Să se arate că

$$\sphericalangle ABC > \sphericalangle ADC, \quad \sphericalangle BCD > \sphericalangle BAD.$$

34. Dacă O este interior triunghiului ABC, să se demonstreze că

$$\frac{\overline{BC}+\overline{CA}+\overline{AB}}{2} < \overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC} < \overline{BC}+\overline{CA}+\overline{AB}.$$

35. Să se demonstreze că dacă M, N, P se află pe laturile $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ ale triunghiului ABC iar nu pe prelungiri, avem

$$\frac{1}{2}(\overline{BC}+\overline{CA}+\overline{AB}) < \overline{AM}+\overline{BN}+\overline{CP} < \frac{3}{2}(\overline{BC}+\overline{CA}+\overline{AB}).$$

36. O înălțime a unui triunghi este mai mică decît semisuma laturilor care pleacă din același vîrf. Consecință: suma înălțimilor unui triunghi este mai mică decît perimetrul triunghiului.

37. Să se demonstreze că o mediană a unui triunghi este mai mică decît semisuma laturilor care pleacă din același vîrf.

38. Să se demonstreze că suma medianelor unui triunghi este mai mică decît perimetrul triunghiului, dar este mai mare decît jumătatea lui.

39. În triunghiul ABC, $\sphericalangle A$ este egal cu $\sphericalangle B + \sphericalangle C$. Să se arate că $\overline{BC}$ este îndoitul medianei care pleacă din A.

40. Se dă unghiul xOy și o dreaptă (D). Să se găsească pe (D) un punct egal depărtat de laturile unghiului.

41. Se dă unghiul xOy și un punct P. Să se ducă prin P o dreaptă care să intersecteze pe Ox și Oy în A și B, astfel încît $\overline{OA} = \overline{OB}$.

42. Se dau trei puncte A, B, C. Să se ducă prin C o dreaptă egal depărtată de A și B.

43. Să se găsească pe o dreaptă xy un punct M așa ca suma depărtărilor sale la două puncte date A, B să fie cea mai mică.

44. Să se găsească pe xy un punct M așa ca diferența depărtărilor la două puncte A, B să fie cea mai mare.

45. Se dă un unghi xOy și în interiorul lui două puncte oarecare A, B. Să se găsească un punct M pe Ox și alt punct N pe Oy, astfel ca drumul $AMNB$ să fie cel mai scurt posibil.

46. Să se construiască bisectoarea unui unghi al cărui vîrf este inaccesibil.

47. Într-un triunghi ABC avînd toate unghiurile ascuțite, iar înălțimea $\overline{AD}$ egală cu baza $\overline{BC}$, se construiește pe $\overline{CD}$ ca latură

pătratul $CDEF$ și pe $\overline{BD}$ ca latură pătratul $BDGH$. Să se demonstreze că drepturile BF și CH sînt înălțimile (prelungite) triunghiului ABC.

Capitolul III

DREPTE PARALELE. PARALELOGRAME. PATRULATERE

48. Să se demonstreze că o paralelă la baza unui triunghi isoscel formează cu celelalte două laturi un triunghi isoscel.

49. Să se demonstreze că o paralelă la una din laturile unui triunghi echilateral formează cu celelalte două laturi un triunghi echilateral.

50. Prin mijlocul M al unui segment $\overline{AB}$, mărginit de două drepte paralele, se duce un alt segment $\overline{CD}$, mărginit de aceleași drepte. Să se arate că M este și mijlocul lui $\overline{CD}$.

51. Să se demonstreze că înălțimile unui triunghi se intersectează într-un punct *(ortocentru)*.

52. Unghiurile opuse A și C ale patrulaterului $ABCD$ sînt drepte. Dreptele AD, CB și AB, CD se intersectează respectiv în E și F. Să se arate că dreptele BD și EF sînt perpendiculare.

53. Să se demonstreze că dreapta care unește mijloacele B', C' ale laturilor $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ ale unui triunghi ABC este paralelă cu latura $\overline{BC}$ și egală cu jumătatea ei.

54. Să se demonstreze că în triunghiul ABC paralela dusă prin mijlocul C' al lui $\overline{AB}$ trece prin mijlocul B' al laturii $\overline{AC}$.

55. Pe prelungirile laturilor $\overline{BC}$ și $\overline{CA}$ ale triunghiului echilateral ABC luăm punctele D și E astfel încît $\overline{CD} = \overline{AE} = \overline{AB}$. Dreapta DE intersectează pe $\overline{AB}$ în F. Să se arate că $\overline{AF} = \frac{1}{3}\,\overline{AB}$.

56. Se ia un unghi $xOy = \alpha$, iar pe latura Ox un punct A. Se descrie un arc de cerc cu centrul în A astfel încît să intersecteze dreapta Oy în două puncte B, C. Fie B', C' proiecțiile punctelor B, C pe Ox. Să se determine valoarea unghiului α astfel ca să avem

$$\overline{BB'} = \overline{AC'} \quad \text{și} \quad \overline{CC'} = \overline{AB'}.$$

57. Se prelungesc medianele $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ ale triunghiului ABC cu $\overline{B'B''} = \overline{BB'}$, $\overline{C'C''} = \overline{CC'}$. Punctele A, B'', C'' sînt în linie dreaptă (aliniate sau *coliniare*).

58. Să se determine locul mijlocului segmentului $\overline{OM}$, cînd O este fix, iar M descrie o dreaptă dată xy.

59. Să se demonstreze că mijloacele laturilor unui patrulater sînt vîrfurile unui paralelogram.

60. Să se demonstreze că într-un patrulater segmentele care unesc mijloacele laturilor opuse și mijloacele diagonalelor se intersectează în părți egale.

61. În ce caz paralelogramul din problema 59 este dreptunghi, romb, pătrat?

62. Să se demonstreze că într-un trapez dreapta care unește mijloacele laturilor neparalele este paralelă cu bazele, trece prin mijloacele diagonalelor, este egală cu semisuma bazelor și partea cuprinsă între diagonale este egală cu semidiferența bazelor.

63. Să se demonstreze că mijlocul ipotenuzei unui triunghi dreptunghic este egal depărtat de cele trei vîrfuri ale triunghiului.

64. Să se demonstreze că dacă în triunghiul ABC avem $\sphericalangle A =$ unghi drept, $\sphericalangle B = \frac{2}{3}$ unghi drept, atunci $\overline{BC} = 2\overline{AB}$.

65. Să se construiască numai cu rigla și compasul unghiurile de 15°, 75°, 105°.

66. Să se demonstreze că dacă B_1, C_1 sînt picioarele înălțimilor $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$ în triunghiul ABC și A' mijlocul laturii $\overline{BC}$, atunci triunghiul $A'B_1C_1$ este isoscel.

67. Să se demonstreze că medianele unui triunghi se intersectează într-un punct *(centru de greutate)*.

68. Două echere dreptunghice egale ABC și $A'B'C'$ se așază în pozițiile din fig. 16 de la „Răspunsuri și indicații". Să se demonstreze că:

a) HB' este înălțimea în triunghiul $CC'B'$;
b) MA' este mediană în triunghiul $CC'A'$;
c) LB' este bisectoare în triunghiul $CB'C'$.

69. Se dau trei drepte Ox, Oy, Oz. Pe Ox se dă un punct A. Să se arate că există:

a) un triunghi cu un vîrf în A avînd dreptele date ca înălțimi;
b) un triunghi cu un vîrf în A avînd dreptele date ca mediane;
c) un triunghi cu un vîrf în A avînd dreptele date ca bisectoare ale unghiurilor interioare sau exterioare;
d) un triunghi avînd mijlocul unei laturi în A și dreptele date ca perpendiculare pe mijloacele laturilor.

70. Pe laturile $\overline{AB}$ și $\overline{AC}$ ale triunghiului ABC se construiesc în afară, pătratele $ABDE$ și $ACFG$, vîrfurile D și F fiind opuse lui A. Să se arate că:

a) EG este perpendiculară pe mediana care pleacă din A și este îndoitul ei;

b) al patrulea vîrf I al paralelogramului, care are două vîrfuri opuse în E și G și al treilea în A, este așezat pe înălțimea care pleacă din A;

c) $\overline{CD}$ și $\overline{BF}$, perpendiculare pe $\overline{BI}$, $\overline{CI}$ și egale cu ele, se intersectează tot pe înălțimea din A.

71. Să se demonstreze că suma distanțelor unui punct oarecare de pe baza unui triunghi isoscel la cele două laturi este constantă. Se va considera și cazul cînd punctul este situat pe prelungirea bazei.

72. Să se demonstreze că suma distanțelor unui punct mobil în interiorul unui triunghi echilateral la laturile acestui triunghi este constantă.

73. Să se demonstreze că picioarele perpendicularelor duse din vîrful A al triunghiului ABC pe bisectoarele unghiurilor B și C sînt patru puncte coliniare.

74. Se dă un segment de dreaptă fix $\overline{AB}$ și un segment de lungime constantă $\overline{MN} = l$ care alunecă pe o dreaptă (D). Să se determine poziția segmentului $\overline{MN}$ de pe dreapta (D) astfel ca dreptele AM și BN să fie paralele. Discuție.

75. Să se demonstreze că dacă un patrulater convex are două unghiuri opuse egale, bisectoarele celorlalte două unghiuri sînt paralele și reciproc, dacă bisectoarele a două unghiuri opuse sînt paralele, celelalte două unghiuri opuse sînt egale.

76. Se dă linia poligonală $ABCD$ și se notează cu B', C' mijloacele segmentelor $\overline{AC}$, $\overline{BD}$. Fie (Δ_a), (Δ_c) paralelele duse prin A și C la $\overline{BB'}$, iar (Δ_b), (Δ_d) paralelele duse prin B și D la $\overline{CC'}$. Să se arate că $M \equiv (\Delta_a, \Delta_b)$; $N \equiv (BB', CC')$; $P \equiv (\Delta_c, \Delta_d)$ sînt coliniare.

77. Se dă un triunghi dreptunghic ABC și fie Bx și Cy prelungirile catetelor $\overline{AB}$, $\overline{AC}$.

a) Să se arate că ducînd trisectoarele unghiurilor xBC și yCB două din ele sînt perpendiculare și două paralele.

b) Trisectoarele paralele intersectează celelalte două trisectoare în D și E. Să se arate că $BCDE$ este un romb.

78. Pe laturile opuse $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ ale unui paralelogram se construiesc în afară două triunghiuri echilaterale ABM, CDP, iar pe laturile opuse $\overline{BC}$, $\overline{DA}$ se construiesc înăuntru triunghiurile echilaterale BCN, DAQ. Să se arate că figura $MNPQ$ este un paralelogram ale cărui laturi sînt egale cu diagonalele paralelogramului $ABCD$.

79. B', C' fiind mijloacele laturilor $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ în triunghiul ABC, luăm de la B' spre C, $\overline{B'D} = \overline{AC'}$. Să se arate că perpendiculara coborîtă din D pe bisectoarea interioară a unghiului A trece prin mijlocul laturii $\overline{BC}$.

80. Să se demonstreze că bisectoarele interioare ale unghiurilor unui paralelogram formează un dreptunghi; diagonalele acestuia sînt paralele la laturile paralelogramului.

81. Se consideră un punct M în planul paralelogramului $ABCD$. Fie N simetricul lui M față de A, P simetricul lui N față de B și Q simetricul lui P față de C.

a) Să se arate că dreapta MQ trece prin punctul D și că D este mijlocul segmentului $\overline{MQ}$.

b) Unde trebuie să se afle punctul M pentru ca $MNQP$ să fie trapez?

82. Fie $\overline{AC}$ diagonala mare a rombului $ABCD$ și A_1, A_2, C_1, C_2 proiecțiile punctelor A și C pe laturile opuse.

a) Să se demonstreze că dreptele A_1C_1, A_2C_2, AC și BD sînt concurente.

b) Să se determine mărimea unghiului A al rombului astfel ca dreptele A_1C_1 și A_2C_2 să fie perpendiculare pe $\overline{AD}$ și $\overline{AB}$.

83. Perpendicularele duse pe bisectoarele interioare AI, BI, CI ale unui triunghi ABC, în punctul lor comun I, intersectează laturile triunghiului: perpendiculara pe AI în (B_1, C_1), perpendiculara pe BI în (C_2, A_2), perpendiculara pe CI în (A_3, B_3). Dacă P_1, P_2, P_3 sînt punctele comune dreptelor (BB_3, CC_2), (CC_1, AA_3), (AA_2, BB_1), atunci dreptele AP_1, BP_2, CP_3 sînt concurente.

84. În triunghiul ABC luăm simetricele A_1, B_1, C_1 ale unui punct O_1 față de mijloacele A', B', C' ale laturilor. Să se arate că dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sînt concurente într-un punct O_2 și că, dacă G este centrul de greutate al triunghiului, avem $\overline{GO_1} = 2\overline{GO_2}$.

85. Un patrulater convex $ABCD$ are laturile $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$ și $\sphericalangle BAD = 90°$. Se notează $\sphericalangle ABC = \alpha$.

a) Să se arate că dacă patrulaterul îndeplinește aceste condiții, atunci $60° < \alpha \leqslant 90°$.

b) În cazul $\alpha = 75°$ să se construiască patrulaterul numai cu rigla și compasul.

86. Se dă o dreaptă (D) și două puncte A, B de o parte și de alta a ei. Se cere drumul cel mai scurt de la A la B, străbătînd de-a lungul lui (D) o lungime dată d.

87. În ce caz linia care unește mijloacele laturilor neparalele ale unui trapez trece prin punctul comun diagonalelor?

88. Se rotește triunghiul dreptunghic ABC în jurul vîrfului unghiului drept A pînă ce ipotenuza, în noua ei poziție $B'C'$, trece prin extremitatea catetei $\overline{AB} < \overline{AC}$. Să se demonstreze că, dacă $\overline{AC'}$ intersectează pe BC în D, avem $\sphericalangle ADB = 3 \sphericalangle C$.

89. În triunghiul ABC, $\overline{AA_1}$ este înălțime, AA' bisectoare. Să se arate că dacă $\overline{AB} < \overline{AC}$, avem $\sphericalangle A'AA_1 = (\sphericalangle B - \sphericalangle C)/2$.

90. Dacă în triunghiul ABC avem $\overline{BC} = 2\overline{AC}$, atunci mediana $\overline{AA'}$ este bisectoarea unghiului format de latura $\overline{AB}$ și de mediana $\overline{AA_1}$ a triunghiului $A'AC$.

91. Laturile opuse $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ ale patrulaterului $ABCD$ se întîlnesc în E; $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ în F. Se iau pe prelungirile dreptelor ABE, DCE, BCF, ADF, segmentele $\overline{EH} = \overline{AB}$, $\overline{EK} = \overline{CD}$, $\overline{FL} = \overline{BC}$, $\overline{FM} = \overline{DA}$. Să se demonstreze că figura $HKLM$ este paralelogram.

92. Fie O un punct fix și (Δ) o dreaptă dată. Dintr-un punct A situat pe (Δ) se duce $\overline{AM}$ egal cu $\overline{AO}$ și perpendicular pe OA. Se cere locul lui M cînd A variază pe dreapta dată.

93. În patrulaterul $ABCD$ vîrfurile A, B, C sînt fixe, iar vîrful D descrie o dreaptă. Să se găsească locul mijlocului segmentului $\overline{MN}$ care unește mijlocul lui $\overline{AB}$ cu mijlocul lui $\overline{CD}$.

94. Fie AA' o *ceviană* (adică o dreaptă care unește un vîrf cu un punct al laturii opuse) în triunghiul ABC, I mijlocul ei. Dreptele BI, CI intersectează laturile opuse în M și N, iar dreptele paralele duse din A' la $\overline{AC}$ și $\overline{AB}$ intersectează pe BM și CN în P și Q. Să se demonstreze că figura $MNPQ$ este un paralelogram.

95. Se dă un triunghi ABC și $A_1B_1C_1$ *triunghiul* său *ortic*. Să se demonstreze că triunghiul format de paralelele duse prin mijloacele laturilor $\overline{A_1B_1}$, $\overline{B_1C_1}$, $\overline{C_1A_1}$ respectiv la $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ este egal cu *complementarul* lui ABC (triunghiul format de mijloacele laturilor lui ABC).

Capitolul IV

CERCUL: ARCE, COARDE, TANGENTE

96. Să se demonstreze că dacă două coarde egale ale unui cerc se intersectează în M, atunci $\overline{AM} = \overline{CM}$, $\overline{BM} = \overline{DM}$, punctele A și C fiind de o parte și de alta a diametrului dus prin M.

97. Pe prelungirea unei coarde $\overline{AB}$, în cercul (O) se ia $\overline{BC}$ egal cu raza cercului și se duce diametrul COE, E fiind punctul pe cerc cel mai depărtat de C. Să se arate că $\sphericalangle AOE = 3 \sphericalangle ACO$.

98. Să se demonstreze că cea mai mică coardă care trece prin punctul M, interior cercului (O), este perpendiculară pe $\overline{MO}$.

99. Coarda $\overline{CD}$, paralelă cu diametrul $\overline{AB}$ al cercului (O), se proiectează în $\overline{EF}$ pe acest diametru. Să se arate că $\overline{AE} = \overline{BF}$.

100. Să se demonstreze că tangentele duse la un cerc, din două puncte egal depărtate de centru, sînt egale.

101. Să se demonstreze că centrul unui cerc tangent la laturile unui unghi se găsește pe una din bisectoarele unghiului.

102. Să se demonstreze că un trapez isoscel se poate înscrie totdeauna într-un cerc.

103. Să se demonstreze că într-un patrulater convex, circumscris unui cerc, suma a două laturi opuse este egală cu suma celorlalte două.

104. Să se demonstreze că dacă între laturile triunghiului ABC avem relația $\overline{AB} + \overline{AC} = 3\overline{BC}$, dreapta care unește mijloacele laturilor AB și AC este tangentă cercului înscris în triunghiul ABC.

105. Să se afle locul mijloacelor coardelor paralele cu o direcție dată, într-un cerc dat.

106. Să se afle locul mijloacelor coardelor egale cu o coardă dată, într-un cerc dat.

107. Să se afle locul centrelor cercurilor care trec prin două puncte date.

108. Să se afle locul centrelor cercurilor tangente la un cerc dat, într-un punct dat al acelui cerc.

109. A este un punct fix, P un punct mobil pe cercul (O). Să se afle locul mijlocului M al segmentului $\overline{AP}$.

110. Triunghiul isoscel OAB are vîrful O în centrul unui cerc dat, iar baza $\overline{AB}$ intersectează cercul în C și D. Să se arate că $\overline{AC} = \overline{BD}$.

111. Două cercuri (O_1) și (O_2) se intersectează în A. Pe primul cerc luăm punctul B, pe al doilea punctul C, așa ca unghiul BAC să fie drept. Să se afle locul mijlocului ipotenuzei $\overline{BC}$

112. În triunghiul ABC, A', B', C' sînt mijloacele segmentelor $\overline{AH}$, $\overline{BH}$, $\overline{CH}$ cuprinse între vîrfuri și ortocentru, iar A_1, B_1, C_1 punctele diametral opuse vîrfurilor în cercul circumscris. Să se arate că $\overline{A_1A'}$, $\overline{B_1B'}$, $\overline{C_1C'}$ se întîlnesc în centrul de greutate.

113. Cercul înscris în triunghiul ABC atinge laturile în A', B', C', iar cercurile exînscrise relative la unghiurile A, B, C le atinge în A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2; A_3, B_3, C_3. Să se arate că $\overline{B'B_1} = \overline{C'C_1} = \overline{BC}$; $\overline{C'C_2} = \overline{A'A_2} = \overline{CA}$; $\overline{A'A_3} = \overline{B'B_3} = \overline{AB}$.

114. Aceleaşi date ca în problema precedentă. Să se exprime segmentele $\overline{AC'}$, $\overline{BA'}$, $\overline{CB'}$ şi $\overline{A_1A'}$, $\overline{B_2B'}$, $\overline{C_3C'}$ în funcţie de laturi.

115. Un romb are $\sphericalangle A = 45°$. Se măsoară pe înălţimea din B a rombului, faţă de latura AB, un segment $\overline{BE} = \overline{AB}$. Să se arate că: a) $\overline{AE} = \overline{BD}$; b) C, D, E sînt coliniare; c) fie B' piciorul înălţimii $\overline{BE}$; cercul BCE trece prin centrul cercului înscris în triunghiul ABB'.

116. Dintr-un punct O, luat pe ipotenuza $\overline{BC}$ a unui triunghi dreptunghic isoscel ABC, ca centru, se descrie un cerc care intersectează laturile $\overline{BA}$, $\overline{CA}$ prelungite, dincolo de A, în M şi N, iar dincolo de B şi C în M' şi N'. Să se arate că $\overline{MB} + \overline{NA} = \overline{M'B} + \overline{N'A}$ şi $\overline{MA} + \overline{NC} = \overline{M'A} + \overline{N'C}$.

117. Să se demonstreze că în două cercuri concentrice coardele cercului exterior, tangente cercului interior, sînt egale.

118. Într-un cerc se duc două diametre perpendiculare $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$. O dreaptă variabilă ce trece prin C intersectează diametrul $\overline{AB}$ (sau prelungirea lui) în M şi cercul în N. Să se afle locul geometric al intersecţiei paralelei la $\overline{CD}$, dusă prin M, cu tangenta la cerc în N.

119. Prin unul din punctele comune a două cercuri se duce o dreaptă paralelă cu linia centrelor. Să se arate că segmentul de pe această dreaptă, mărginit de cele două cercuri, este de două ori mai mare decît distanţa centrelor.

120. Prin punctele comune A şi B a două cercuri (O) şi (O') se duc două drepte paralele CAC', DBD', C şi D fiind pe cercul (O), iar C' şi D' pe cercul (O'). Să se arate că lungimile CAC' şi DBD' sînt egale.

121. Prin unul din punctele comune A a două cercuri (O), (O'), se duc două drepte egal înclinate (dar nu paralele între ele) pe $\overline{OO'}$, care intersectează cercurile în B, B' şi C, C'. Să se arate că $\overline{BB'} = \overline{CC'}$.

122. Se dau două cercuri. Prin punctele lor de intersecţie se duc două secante paralele, care formează un paralelogram cu vîrfurile pe cele două cercuri. Se cere locul geometric al mijloacelor laturilor acestui paralelogram şi al punctului de intersecţie a diagonalelor lui, cînd secantele, rămînînd paralele, trec necontenit prin punctele de intersecţie a cercurilor date.

123. Se descriu cercuri pe laturile unui patrulater $ABCD$, ca diametre. Să se demonstreze că coarda comună cercurilor descrise pe $\overline{AB}$ și $\overline{BC}$ este paralelă cu coarda comună cercurilor descrise pe $\overline{CD}$ și $\overline{DA}$.

124. Într-un triunghi ABC luăm pe latura $\overline{BC}$, de la B spre C, lungimea $\overline{BA_1} = \overline{BA}$ și de la C spre B lungimea $\overline{CA_2} = \overline{CA}$. Să se arate că cercul circumscris triunghiului AA_1A_2 este concentric celui înscris triunghiului ABC. Cum trebuie luate lungimile $\overline{BA_1} = \overline{BA}$, $\overline{CA_2} = \overline{CA}$, pentru ca cercul circumscris triunghiului AA_1A_2 să fie concentric celui exînscris unghiului A?

125. Să se afle locul vîrfurilor unghiurilor drepte ale căror laturi sînt tangente la un cerc.

126. Să se afle locul vîrfurilor unghiurilor de mărime constantă ale căror laturi sînt tangente la un cerc.

127. Se consideră punctele M așa ca tangenta MT dusă la un cerc fix O să aibă o lungime dată. Prin M se duce o dreaptă MP înclinată pe MT cu un unghi dat. Să se arate că MP rămîne tangentă la un cerc.

128. Se dau două drepte paralele (D), (D') și un punct fix A pe (D). Prin A se duce o dreaptă variabilă care intersectează pe (D') în A'. În acest punct se ridică perpendiculara pe AA', care intersectează pe (D) în B. Se unește B cu simetricul A_1 al lui A față de A'. Să se găsească locul proiecției M a punctului A pe $\overline{BA_1}$ cînd $\overline{AA'}$ se rotește în jurul lui A.

129. Un segment de lungime constantă se mișcă rezemîndu-și extremitățile pe două drepte perpendiculare Ox și Oy. Să se afle locul mijlocului M al segmentului.

130. Pe o dreaptă (D) se dă un punct fix A și altul mobil M. Fie B un alt punct fix exterior lui (D). Se ia simetrica dreptei $\overline{MB}$ față de (D) și simetrica aceleiași drepte $\overline{MB}$ față de AB. Se cere locul punctului P comun acestor două simetrice.

131. Să se demonstreze că dacă bisectoarele interioare ale unui patrulater convex sînt concurente, patrulaterul poate fi circumscris unui cerc.

132. Printr-un punct să se ducă o secantă, care să determine într-un cerc dat o coardă de lungime dată l. Discuție.

133. Prin vîrfurile B, C ale unui triunghi ABC se duce un cerc, care intersectează laturile $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ în D și E, așa ca cercul ADE să fie egal cu cercul $BCDE$. Presupunînd că B și C sînt fixe, iar A mobil pe cercul ABC care trece prin B și C, se cere: a) locul punctelor D și E; b) locul centrului cercului ADE; c) să se arate că DE rămîne tangentă la un cerc.

134. Se dau două cercuri (O) și (C), al doilea trecînd prin O; M este un punct mobil pe (C) iar A, B punctele comune cercurilor. Dreptele MA, MB intersectează cercul (O) în A' și B'. Să se arate că $\overline{AA'} = \overline{BB'}$ și să se găsească locul punctului P comun dreptelor $A'B'$ și MO, cînd M descrie cercul (C).

135. În două puncte A, A' diametral opuse într-un cerc (O) se duc tangentele At, $A't'$. Pe diametrul paralel la aceste tangente se ia un punct B. Dreapta AB intersectează cercul a doua oară în C. Tangenta în C la cerc intersectează pe $A't'$ în D. Să se arate că:

a) figura $ABDO$ este un paralelogram;
b) patrulaterul $OBCD$ este inscriptibil.

Capitolul V

MĂSURA UNGHIURILOR

136. Să se demonstreze că proiecțiile unui punct M al unui cerc, pe laturile unui dreptunghi înscris în acel cerc, sînt astfel încît una din ele este ortocentrul triunghiului format de celelalte trei.

137. Într-un cerc se duc două coarde perpendiculare $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$. Fie M un punct al cercului, situat pe arcul BD sau AC. Să se arate că unghiurile AMD și BMC sînt complementare.

Care este legătura dintre aceleași unghiuri, dacă M se află pe arcul AD sau BC?

138. Se dă un cerc (O) și o coardă $\overline{AD}$. Să se ducă prin punctul D o coardă $\overline{DC}$ care să întîlnească diametrul $\overline{OA}$ în B, iar cercul în C, astfel ca triunghiul ABC să fie isoscel $(\overline{AB} = \overline{AC})$.

139. Se dă un cerc (O) și un triunghi înscris ABC. Se duce diametrul $\overline{OA}$ și înălțimea $\overline{AD}$ și se proiectează punctele B și C pe acest diametru, în E și F. Dreptele DE și DF prelungite întîlnesc pe $\overline{AC}$ și $\overline{AB}$ respectiv în G și H. Să se demonstreze că punctele A, D, G, H sînt *conciclice* (se află pe același cerc).

140. Să se afle locul vîrfului unghiului drept ale cărui laturi trec prin două puncte date A și B.

141. Să se afle locurile geometrice descrise de ortocentrul H al triunghiului ABC și de punctul I de întîlnire al bisectoarelor, cînd latura $\overline{BC}$ este fixă, iar A descrie un cerc ce trece prin punctele B și C.

142. Să se afle locurile descrise de punctele de întîlnire ale bisectoarelor exterioare, luate două cîte două, cînd triunghiul ABC variază în condițiile problemei precedente.

143. Să se afle locul mijlocului M al unei coarde variabile într-un cerc (O) și care trece printr-un punct fix A.

144. Se dă un cerc (O), un punct fix A și un unghi constant MAN înscris. Să se afle locul geometric al intersecției dreptei AN cu perpendiculara ridicată în punctul M pe dreapta AM.

145. Să se afle locul simetricului M al unui punct fix A, de pe ~~un cerc~~ dat (O), față de un punct mobil P al acestui cerc.

146. Se dă un cerc (O) și un diametru $\overline{AB}$. Dintr-un punct M de pe cercul (O), ca centru, se descrie un alt cerc tangent la $\overline{AB}$ în punctul T. Să se arate că tangentele duse din A și B la cercul (M) sînt paralele.

147. Să se demonstreze că o secantă care trece prin punctul de contact a două cercuri tangente determină pe cele două cercuri arce opuse egale în grade.

148. Prin punctul de contact a două cercuri tangente (O), (O') se duc două secante care intersectează pe (O) în B, C și pe (O') în B', C'. Să se arate că BC și $B'C'$ sînt paralele.

149. Două cercuri (O) și (O') fiind tangente interior în A și (Δ) fiind o dreaptă oarecare în plan, care intersectează cele două cercuri respectiv în punctele B, C și D, E, dreptele AD și AE sînt egal înclinate pe bisectoarea unghiului BAC.

150. Să se demonstreze că înălțimea AA' și dreapta AO, care unește vîrful A al triunghiului ABC cu centrul cercului circumscris, sînt egal înclinate pe bisectoarea unghiului A (sînt *ceviene izogonale*).

151. Fie ABC un triunghi oarecare și AE, AF două drepte izogonale. Se proiectează vîrful B al triunghiului pe una din izogonale, de exemplu pe AE, în B_1; fie apoi D_1 proiecția piciorului F al celeilalte izogonale pe AC, iar A_1 proiecția lui A pe BC. Să se arate că punctele A_1, B_1, D_1 sînt coliniare.

152. Se dă un patrulater inscriptibil $ABCD$ și se notează cu E punctul comun laturilor $\overline{AD}$ și $\overline{BC}$. Perpendicularele în C și D respectiv pe $\overline{CB}$ și $\overline{DA}$ se intersectează în I. Să se arate că dreapta EI este perpendiculară pe $\overline{AB}$.

153. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil, A', C' proiecțiile vîrfurilor A și C pe diagonala $\overline{BD}$; B', D' proiecțiile vîrfurilor B și D pe diagonala $\overline{AC}$. Să se demonstreze că patrulaterul $A'B'C'D'$ are laturile sale paralele cu laturile lui $ABCD$.

154. Prin punctele A și B comune cercurilor (O) și (O') se duc secantele CAC', DBD', care intersectează cercul (O) în C, D, iar cercul (O') în C', D'. Să se arate că CD și $C'D'$ sînt paralele.

155. Fie A, B punctele comune a două cercuri. Prin A se duce o secantă care intersectează cercurile în C, D. Să se demonstreze că arcele AC și AD, din cele două cercuri, așezate de aceeași parte a secantei, au, în grade, suma constantă. Să se deducă de aici că unghiul CBD este constant și egal cu suplimentul unghiului format de tangentele duse în A la cele două cercuri.

156. Să se demonstreze că diametrele AOC și $AO'D$ a două cercuri (O), (O') care se intersectează în A și B întîlnesc aceste cercuri în C și D, care sînt coliniare cu B.

157. Se consideră trei puncte A, B, C coliniare și un alt punct exterior M. Să se demonstreze că punctul M aparține cercului care trece prin centrele cercurilor BMC, CMA, AMB.

158. Trei cercuri (O_1), (O_2), (O_3) se intersectează două cîte două în trei puncte A, B, C situate pe o dreaptă. Fie CD coarda comună cercurilor (O_2) și (O_3). Prin D se duc două drepte; una trece prin intersecția M a cercurilor (O_1), (O_3) și intersectează cercul (O_1) în A', iar cealaltă trece prin punctul N comun cercurilor (O_1), (O_2) și intersectează cercul (O_1) în B'. Să se demonstreze că coardele $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CD}$ sînt paralele.

159. Se consideră trapezul isoscel avînd baza mică $\overline{DC}$ egală cu laturile neparalele $\overline{DA}$, $\overline{CB}$. Fie E intersecția bazei mari $\overline{AB}$ cu diametrul cercului circumscris, corespunzător vîrfului D. Să se arate că:

a) triunghiul ADE este isoscel;

b) dacă se ia pe baza mare $\overline{EF} = \overline{AE}$, dreapta CF intersectează cercul circumscris în punctul diametral opus lui A.

160. Se dă un triunghi dreptunghic ABC și fie Bx și Cy prelungirile catetelor $\overline{AB}$, $\overline{AC}$. Fie D punctul de intersecție al trisectoarelor unghiurilor xBC și yCB care sînt perpendiculare [1]. Tangenta în D la cercul ABC intersectează dreptele Ax și Ay în E și F. Să se arate că D este mijlocul segmentului $\overline{EF}$.

161. Se dă un cerc (I) tangent interior unui cerc (O), în punctul A. Prin I se duce un diametru perpendicular pe diametrul comun, care intersectează cercul (I) în B, C, iar cercul (O) în D, E (C și E de aceeași parte a lui OA). Dreapta AE intersectează cercul (I) în F, iar dreapta AC intersectează cercul (O) în P; FI și PO se întîlnesc în G. Să se arate că $\overline{IG} = \overline{OA}$ și că $\overline{GD}$ este paralelă cu $\overline{OA}$.

162. Să se arate că dacă laturile $\overline{AB}$ și $\overline{AD}$ ale unui paralelogram invariabil trec prin două puncte fixe P, Q, atunci diagonala $\overline{AC}$ trece și ea printr-un punct fix.

---

[1] Vezi problema 77.

163. Un cerc (O) este tangent laturilor unghiului xAy. Se duce o tangentă variabilă BC așa ca cercul (O) să rămînă exînscris triunghiului ABC. Să se arate că perimetrul triunghiului ABC este constant și că $\sphericalangle BOC =$ const.

164. În triunghiul ABC, $\sphericalangle A = 90°$. Se iau pe $\overline{BC}$ și $\overline{AB}$ două puncte M, N așa ca $\sphericalangle BAM = \sphericalangle BCN$. Să se arate că triunghiul BMN este dreptunghic.

165. Prin vîrful A al pătratului $ABCD$ se duce o dreaptă arbitrară care intersectează laturile $\overline{BC}$ și $\overline{CD}$ în E și F, iar diagonala $\overline{BD}$ în G. Să se arate că CG este tangentă în C cercului CEF.

166. Tangenta în B la cercul (O) circumscris triunghiului ABC intersectează pe AC în D. Cercul (O_1) circumscris lui BCD intersectează pe AB în E. Să se arate că:

a) triunghiul BDE este isoscel;
b) cercul circumscris lui ACE este tangent dreptei DE;
c) dreapta AO este perpendiculară pe DE.

167. Fie $\overline{AB}$ și $\overline{AC}$ respectiv o coardă și un diametru al aceluiași cerc (O), M un punct pe $\overline{AB}$, D piciorul perpendicularei lăsate din M pe $\overline{AC}$ și E una din intersecțiile dreptei MD cu cercul (O). Să se demonstreze că cercurile DCE și BEM sînt tangente.

168. Dacă $\overline{BB'}$ și $\overline{CC'}$ sînt două înălțimi în triunghiul ABC, iar H punctul lor comun, să se arate că AHA' este a treia înălțime.

169. Fie $A'B'C'$ triunghiul format de picioarele înălțimilor triunghiului ABC (triunghiul ortic) și H punctul lor comun. Să se arate că H, A, B, C sînt centrele cercului înscris și al cercurilor exînscrise triunghiului $A'B'C'$.

170. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Să se arate că dreptele AO, BO, CO sînt respectiv perpendiculare pe laturile $\overline{B'C'}$, $\overline{C'A'}$, $\overline{A'B'}$ ale triunghiului ortic (teorema lui Nagel).

171. Fie P un punct arbitrar pe latura $\overline{BC}$ a triunghiului ABC, b și c proiecțiile lui pe $\overline{AC}$ și $\overline{AB}$. Fie $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ cele trei înălțimi care se întîlnesc în H. Din B' și C' se duc perpendiculare pe $\overline{AP}$, care intersectează pe $\overline{AA'}$ în β și γ. Să se demonstreze că dreapta $b\beta$ este perpendiculară pe $\overline{AB}$, iar $c\gamma$ pe $\overline{AC}$.

172. Pe înălțimea $\overline{AA'}$ a unui triunghi oarecare ABC se ia un punct M, care se proiectează pe laturile $\overline{AC}$ și $\overline{AB}$ respectiv în N și P.

a) Să se arate că $\sphericalangle BMC = \sphericalangle PA'N + \sphericalangle A$.

b) Să se determine poziția punctului M astfel ca $\sphericalangle PA'N = \sphericalangle A$.

c) Dacă E și F sînt mijloacele segmentelor $\overline{MB}$ și $\overline{MC}$, să se afle locul geometric al punctului K de intersecție al perpendicularelor duse din E și F respectiv pe $\overline{AB}$ și $\overline{AC}$, cînd M se mișcă pe înălțimea AA'.

d) Să se arate că distanța de la punctul K la latura $\overline{BC}$ este jumătatea segmentului $\overline{MH}$ (H fiind ortocentrul).

173. Se dă un cerc fix (O) și un cerc variabil (O') care intersectează cercul (O) în două puncte C și D, fixe sau mobile. În cercul (O') se ia o coardă $\overline{AB}$ paralelă cu o direcție dată. Se duc coardele ACE, ADF, BCE', BDF', punctele E, F, E', F' fiind pe (O). Să se găsească locul punctului comun dreptelor EF, $E'F'$ și al punctului comun dreptelor EE', FF'.

174. Se dau două drepte Ax, Ay și un punct O. Un cerc trecînd prin A și O intersectează laturile Ax, Ay în C și D. Prin O se duc două cercuri, unul tangent în C la Ax, altul tangent în D la Ay. Aceste cercuri se mai intersectează în E. Să se arate că punctele C, D, E sînt coliniare.

175. Într-un triunghi ABC ($\overline{AB} < \overline{AC}$) se descrie din A ca centru, cu $\overline{AB}$ ca rază, un cerc care intersectează pe $\overline{BC}$ în D și pe $\overline{AC}$ în E. Cercul ADE intersectează din nou pe $\overline{BC}$ în F. Să se arate că $\overline{AF}$ este bisectoarea unghiului A.

176. Într-un cerc (O) avem un diametru fix $\overline{AB}$ și un punct P mobil pe cerc. Coarda $\overline{PQ}$ fiind dusă perpendicular pe $\overline{AB}$, să se arate că bisectoarele unghiului OPQ trec prin două puncte fixe.

177. În triunghiul ABC latura $\overline{BC}$ este fixă, iar A este mobil pe cercul (O), ce trece prin B și C. Bisectoarele unghiului A intersectează cercul în D și E, iar latura $\overline{BC}$ respectiv în G și F. Se cere locul intersecției dreptelor DF și EG.

178. Fie $ABCD$ un patrulater oarecare. Notăm cu M și N picioarele perpendicularelor coborîte din D și C pe dreptele paralele (Δ_1) și (Δ_2) ce trec respectiv prin punctele A și B. Să se găsească locul geometric al mijlocului P al segmentului $\overline{MN}$, cînd dreptele (Δ_1) și (Δ_2) se rotesc în jurul punctelor A și B.

179. Un triunghi ABC are punctele fixe B_1 și C_1, picioarele înălțimilor care pleacă din B și C, iar segmentul $\overline{BC}$ este de lungime constantă. Să se afle locul geometric al vîrfurilor A, B și C.

180. Fie ABC un triunghi oarecare, O centrul cercului său circumscris, P un punct oarecare din plan și M mijlocul lui $\overline{OP}$. Transversalele unghiulare AP, BP, CP intersectează a doua oară cercul (O) respectiv în punctele A_1, B_1, C_1, iar paralela dusă prin O la AP intersectează cercul AOP în A_2. Analog găsim punctele B_2 și C_2. Să se arate că:

a) triunghiurile $A_1B_1C_1$ și $A_2B_2C_2$ sînt simetrice față de punctul M;

b) perechile de cercuri (BPC, B_2OC_2); (CPA, C_2OA_2); (APB, A_2OB_2) sînt concentrice.

181. Se dă coarda $\overline{AB}$ în cercul (O); fie M un punct oarecare pe cerc și C extremitatea diametrului perpendicular pe $\overline{AB}$, situată de aceeași parte cu M. Pe $\overline{AM}$ luăm $\overline{AM'} = \overline{BM}$. Să se arate că triunghiul CMM' este isoscel. În ce caz este echilateral?

182. Pe coarda $\overline{AB}$ a unui cerc se proiectează în N un punct M al cercului, iar pe tangenta în M la cerc se proiectează în a, b, punctele A, B. Să se arate că cercul Nab este tangent la coarda $\overline{AB}$.

183. Fie A și B punctele de intersecție a două cercuri. Prin punctul A se duce o secantă variabilă care intersectează cercurile în C și D. Să se arate că dreapta PQ, care unește proiecțiile punctului B pe tangentele în C și D la cercurile date, rămîne tangentă la cercul descris pe $\overline{AB}$ ca diametru.

184. Să se demonstreze că dacă trei cercuri trec fiecare prin cîte un vîrf al triunghiului ABC și se intersectează două cîte două pe laturile acestui triunghi, ele trec toate trei prin același punct.

185. Dintr-un punct fix P se duc tangentele PM, PN la un cerc variabil care trece prin două puncte date A și B. Să se arate că cercul PMN, M și N fiind punctele de contact ale tangentelor, trece printr-un punct fix, diferit de P.

186. Pe cercul (O) se ia un punct A. O dreaptă fixă ce trece prin A intersectează din nou cercul în S. P fiind un punct fix în plan, se cere locul punctului M de întîlnire a dreptei PS cu cercul (O), cînd centrul acestuia descrie o dreaptă trecînd prin A.

187. Se dă un cerc (O), pe el un punct fix A și un alt punct fix P în planul cercului. Fie (Δ) o dreaptă variabilă ce trece prin P. Perpendiculara dusă din A pe (Δ) intersectează cercul (O) a doua oară în M. Se cere locul simetricului punctului M față de dreapta (Δ).

188. Din vîrful D al pătratului $ABCD$, cu $\overline{DA}$ ca rază, se descrie în interiorul pătratului arcul AC. Tot în interior se descrie, pe $\overline{AD}$ ca diametru, un semicerc. Se ia pe arcul AC un punct arbitrar P care se proiectează în Q pe $\overline{AB}$, iar PD intersectează semicercul în R. Să se arate că $\overline{PQ} = \overline{PR}$.

189. Pe laturile unui triunghi ABC se construiesc, în afară, triunghiuri echilaterale. Să se demonstreze că centrele acestor triunghiuri formează un triunghi echilateral.

190. Dacă triunghiurile echilaterale din problema precedentă sînt $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$, să se arate că AA', BB', CC' sînt concurente.

191. Fie A un punct fix luat pe latura Ox a unghiului xOy. Se duce un cerc oarecare (C) tangent la Ox și Oy; fie D punctul de contact cu Oy. Din A se duce la acest cerc a doua tangentă care îl atinge în E. Să se arate că oricare ar fi cercul (C) dreapta DE trece printr-un punct fix.

192. Pe cercul (O) avem un punct fix A și un punct mobil P. Se cere locul punctului M unde bisectoarea unghiului POA intersectează cercul POA.

193. Același enunț ca în problema precedentă, dar A nu este pe cercul (O).

194. Unui cerc (O) i se duce o tangentă AB mărginită de alte două tangente paralele. Să se arate că unghiul AOB este drept.

195. Prin vîrfurile B, C ale triunghiului ABC se duc două drepte paralele care intersectează cercul ABC în D și E. Să se găsească locul punctului M de întîlnire a dreptelor BD și AE.

196. Să se găsească locul geometric al punctelor de întîlnire ale laturilor neparalele ale trapezelor isoscele înscrise într-un cerc dat care au ca diagonală o coardă dată a cercului.

197. Trei cercuri egale, care au un punct comun H, se mai intersectează două cîte două în punctele A, B, C. Să se demonstreze că și cercul circumscris triunghiului ABC este egal cu cercurile date [1].

198. Se dă un cerc (O), două coarde concurente $\overline{BC}$ și $\overline{B'C'}$ și P intersecția lor, Q al doilea punct de intersecție al cercurilor PCC' și PBB', (O_1) și (O_2) centrele lor. Să se demonstreze că unghiul OQP este drept și că $\overline{OO_1} = \overline{O_2B}$.

199. Se dă o dreaptă OD pe care avem un punct fix O și un punct A în plan. Se duce prin A o secantă variabilă care întîl-

[1] „Problema piesei de 5 lei" găsită de G. Țițeica întîi experimental, la un concurs al Gazetei Matematice pe cînd desena cercuri pe o foaie de hîrtie cu o piesă de 5 lei.

nește pe OD în B. Cercul tangent în B dreptei OD și avînd centrul O' pe OA intersectează secanta în alt punct C. Să se demonstreze că tangenta în C dusă la cercul precedent trece printr-un punct fix.

200. Se consideră un punct M mobil pe latura Ox a unghiului fix xOy și un alt punct fix N în același plan. Fie P proiecția punctului M pe Oy și Q proiecția punctului O pe dreapta MN. Să se arate că dreapta PQ trece printr-un punct fix.

201. Fie A', B', C' simetricele vîrfurilor A, B, C ale unui triunghi ABC în raport cu mijloacele laturilor $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$. Să se arate că cercurile $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$ trec prin același punct și să se demonstreze apoi că acest punct este ortocentrul triunghiului ABC.

202. Să se afle locul proiecției punctului de întîlnire al înălțimilor unui triunghi ABC, în care latura $\overline{BC}$ este fixă și A constant, pe mediana ce pleacă din A.

203. Într-un triunghi ABC se duce bisectoarea AA'. Cercurile circumscrise triunghiurilor ABA', ACA' intersectează laturile $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ în M și N. Să se demonstreze că $\overline{BN} = \overline{CM}$.

204. Se dau patru puncte A, B, C, D nesituate pe un cerc, din care trei nu sînt în linie dreaptă. Un cerc care trece prin trei din aceste puncte conține în interior pe al patrulea, sau îl lasă în afară. Din cele patru cercuri care se pot duce prin cîte trei din punctele A, B, C, D, cîte lasă pe al patrulea în afară și cîte înăuntru?

205. Într-un patrulater convex circumscris unui cerc dat, cele două coarde de contact ale laturilor opuse sînt perpendiculare. Să se arate că acest patrulater este inscriptibil.

206. Într-un cerc (O) se duc două diametre $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$. Se iau de la A spre D și de la C spre B, respectiv arcele egale AM și CN. Să se arate că tangentele în punctele A, D, M, N se intersectează în patru puncte situate pe același cerc.

207. Se consideră patrulaterul inscriptibil $ABCD$. Fie A_1, D_1 proiecțiile vîrfurilor A, D pe dreapta BC și B_1, C_1 proiecțiile vîrfurilor B, C pe dreapta AD. Să se arate că:

a) patrulaterul $A_1B_1C_1D_1$ este inscriptibil;

b) centrele cercurilor ABC, BB_1A_1, CC_1D_1 și $A_1B_1C_1$ formează un paralelogram.

Fie, acum, A_1, C_1 proiecțiile vîrfurilor A, C pe diagonala BD și B_1, D_1 proiecțiile vîrfurilor B, D pe diagonala AC. Să se arate că cele două proprietăți se păstrează cu aceeași enunțare.

208. Fie un patrulater inscriptibil, E intersecția perpendicularei în A pe $\overline{AD}$ cu $\overline{BC}$ și F intersecția perpendicularei în A pe $\overline{AB}$ cu $\overline{CD}$. Să se arate că EF trece prin centrul cercului circumscris patrulaterului.

209. În patrulaterul inscriptibil $ABCD$, vîrful A este fix, vîrfurile B și C descriu respectiv două drepte trecînd prin A, iar diagonala BD trece printr-un punct fix E. Să se demonstreze că dacă unghiul ABC este constant, dreapta CD trece printr-un punct fix.

210. $ABCD$ fiind un patrulater inscriptibil, se duce un cerc care trece prin A și B, un al doilea prin B și C, un al treilea prin C și D și un al patrulea prin D și A. Aceste patru cercuri se intersectează succesiv în patru puncte L, M, N, P, afară de A, B, C, D. Să se demonstreze că patrulaterul $LMNP$ este inscriptibil.

211. Cercurile (BC) și (CB) care trec prin vîrfurile B și C ale triunghiului ABC sînt tangente respectiv la laturile AC și AB *(cercuri adjuncte)*. Ele întîlnesc din nou laturile AB, AC în M_1 și M_2. Să se arate că:

a) tangentele în M_1 și M_2 la cercurile (BC) și (CB) se intersectează într-un punct M al cercului AM_1M_2;

b) tangentele în B și C la cercurile (BC) și (CB) se intersectează în Q pe cercul circumscris lui ABC.

212. Se dă un triunghi echilateral ABC. Să se găsească locul punctelor M pentru care $\overline{MA} = \overline{MB} + \overline{MC}$.

213. Se dă patrulaterul $ABCD$ și prin D se duce o transversală ce intersectează pe AB în P și pe BC în Q. Se cere locul geometric al lui M, al doilea punct de intersecție al cercurilor APD și DCQ.

214. Se dă un cerc (O) și o dreaptă (D) și se consideră toate cercurile tangente la cercul (O) și la dreapta (D). Să se arate că dreapta care unește punctele de contact cu (O) și cu (D) trece printr-un punct fix.

215. Să se ducă un cerc egal depărtat [1] de trei puncte date.

216. Să se ducă un cerc egal depărtat de patru puncte date.

217. Se dau două puncte fixe A și B și pe dreapta AB un punct variabil C. Un cerc de centru O trece prin A și C, iar altul cu centrul O_1 trece prin B și C. Cercurile (O) și (O_1) se intersectează a doua oară în punctul M. Știind că centrele O și O_1 descriu respectiv două drepte fixe (Δ) și (Δ_1), se cere:

a) locul punctului M;

[1] Dacă A este un punct, (O) un cerc și AO intersectează cercul în B, $\overline{AB}$ este *distanța* de la A *la cerc*.

b) să se arate că secanta comună cercurilor (O) și (O_1) trece printr-un punct fix.

218. Se dă un unghi xAy și dintr-un punct O luat pe Ax, cu $\overline{OA}$ ca rază, se descrie un cerc care intersectează pe Ay în B, iar tangenta în B la acest cerc intersectează pe Ax în C. Se cere locul centrului cercului circumscris triunghiului ABC, cînd O variază pe Ax.

219. Să se demonstreze că într-un patrulater complet $ABCDEF$, cercurile circumscrise celor patru triunghiuri formate de laturile patrulaterului *(cercurile lui Miquel)* se întîlnesc într-un punct *(punctul lui Miquel)*.

220. Să se demonstreze că punctul lui Miquel și centrele cercurilor lui Miquel sînt cinci puncte conciclice.

221. Să se demonstreze că punctul lui Miquel M, din problemele precedente, se găsește pe diagonala EF, dacă patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil.

222. Se dă o dreaptă (D) și un punct A nesituat pe dreaptă. Prin A și printr-un punct M al dreptei (D) se duce un cerc tangent în M la (D). Se mai duce un alt cerc tangent în A la AM și avînd centrul său C pe (D). Se cere locul punctului al doilea de intersecție al celor două cercuri, cînd M descrie dreapta (D).

223. Prin vîrfurile A și C ale unui triunghi ABC se duc tangentele AS și CS la cercul circumscris. Din S, intersecția acestor tangente, se duc două secante paralele respectiv cu laturile $\overline{AB}$ și $\overline{BC}$, care intersectează cercul și laturile $\overline{BC}$ și $\overline{AB}$ respectiv în M, N, P și M', N', P'. Să se demonstreze că P și P' sînt mijloacele coardelor $\overline{MN}$ și $\overline{M'N'}$ și să se găsească locul punctelor P și P' cînd vîrfurile A și C sînt fixe, iar B descrie cercul circumscris.

224. Fie ABC un triunghi înscris în cercul (O) și A', A'' punctele unde bisectoarele unghiului A întîlnesc cercul (O). Se notează cu P' și Q' proiecțiile lui A' pe $\overline{AB}$ și $\overline{AC}$ și cu P'' și Q'' proiecțiile lui A'' pe $\overline{AB}$ și $\overline{AC}$. Prin P' și Q' se duc paralele la $\overline{AA'}$, care întîlnesc pe BC în B_1 și C_1, iar prin P'' și Q'' se duc paralele la AA'', care întîlnesc pe $\overline{BC}$ în B_2 și C_2. Să se arate că $\overline{BC} = \overline{B_1C_1} = \overline{B_2C_2}$.

225. Se consideră cele patru triunghiuri formate de patru drepte dintr-un plan. Să se arate că fiecare triunghi are unghiurile egale cu unghiurile triunghiului format de centrele cercurilor circumscrise celorlalte trei.

226. Se consideră un patrulater complet $ABCDEF$. Fie K, L, M, N, P, Q mijloacele laturilor $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ și ale diagonalelor $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ al căror punct de întîlnire este G. Să se demonstreze că cercurile circumscrise triunghiurilor EKM, FLN şi GPQ au un punct comun (E este punctul comun laturilor $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ iar F al laturilor $\overline{AD}$, $\overline{BC}$).

227. Se consideră patru drepte şi cele patru cercuri circumscrise triunghiurilor formate de aceste patru drepte. Prin fiecare punct de întîlnire al acestor drepte se duc diametrele cercurilor care trec prin acel punct. Să se arate că cele doisprezece diametre astfel obţinute se întîlnesc trei cîte trei în opt puncte situate pe un cerc care trece şi prin punctul comun celor patru cercuri considerate.

228. Se consideră *patrulaterul ABCD ortodiagonal* (avînd diagonalele perpendiculare) şi inscriptibil. Fie K, L, M, N proiecţiile punctului P în care se întîlnesc diagonalele, pe laturile $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ şi $\overline{DA}$; K', L', M', N' mijloacele acestor laturi, iar O centrul cercului $ABCD$.

Să se demonstreze că:

a) dreptele PK, PL, PM, PN sînt bisectoarele unghiurilor patrulaterului $KLMN$;

b) patrulaterul $KLMN$ este inscriptibil şi circumscris unui cerc cu centrul P;

c) dreptele KM', MK', LN', NL' trec prin punctul P;

d) cercul $KLMN$ trece şi prin punctele K', L', M', N' (cercul celor opt puncte ale patrulaterului ortodiagonal inscriptibil);

e) centrul ω al cercului celor opt puncte se află la mijlocul segmentului $\overline{OP}$.

229. Să se demonstreze că trei antiparalele cu laturile unui triunghi, egale, înscrise în unghiurile acestui triunghi, determină pe laturi şase puncte conciclice *(cercul lui Tucker)*.

230. Să se demonstreze că dacă se circumscriu cercuri triunghiurilor formate de fiecare latură a unui pentagon şi prelungirile laturilor adiacente, cele cinci puncte de întîlnire ale cercurilor alăturate sînt conciclice *(pentagrama lui Miquel)*.

Capitolul VI

PROPRIETĂŢI ALE TRIUNGHIULUI ÎN LEGĂTURĂ CU CERCUL CIRCUMSCRIS

231. Fie A_1, B_1, C_1 intersecţiile înălţimilor $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ ale triunghiului ABC cu cercul circumscris (O). Să se arate că A_1, B_1, C_1 sînt simetricele ortocentrului H în raport cu laturile $\overline{BC}$,

$\overline{CA}$, $\overline{AB}$. Să se deducă apoi că dreptele OA, OB, OC sînt perpendiculare pe laturile $\overline{B'C'}$, $\overline{C'A'}$, $\overline{A'B'}$ ale triunghiului ortic.

232. Să se demonstreze că într-un triunghi ABC, punctul H de întîlnire al înălțimilor, mijlocul M al laturii $\overline{BC}$ și punctul A_2 diametral opus lui A, în cercul circumscris, sînt coliniare.

233. O fiind centrul cercului circumscris triunghiului ABC și păstrînd aceleași notații ca în problema precedentă, să se arate că distanța $\overline{OM}$ este jumătatea distanței $\overline{AH}$.

234. Cu ajutorul proprietății precedente să se arate că medianele unui triunghi sînt concurente (dreapta OH se numește *dreapta lui Euler*).

235. Fie ABC un triunghi, A', B', C' picioarele înălțimilor, care se întîlnesc în H; A'', B'', C'' mijloacele laturilor; A_1, B_1, C_1 mijloacele segmentelor $\overline{AH}$, $\overline{BH}$, $\overline{CH}$. Să se demonstreze că cele nouă puncte precedente sînt conciclice *(cercul lui Euler* sau *cercul celor nouă puncte)*.

236. Să se demonstreze că cercul lui Euler al triunghiului ABC trece prin simetricele centrului cercului circumscris (O), față de laturile triunghiului $A'B'C'$, format de mijloacele laturilor lui ABC *(triunghi median* sau *complementar)*.

237. Fie A_1 punctul unde simediana AK a unui triunghi oarecare ABC întîlnește cercul circumscris triunghiului și A_2, A_3 picioarele bisectoarelor interioară și exterioară ale unghiului A. Să se demonstreze că dreptele A_1A_2 și A_1A_3 sînt dreptunghiulare. *(Simediana* este simetrica medianei față de bisectoare, adică *izogonala medianei)*.

238. Fie B' și C' mijloacele laturilor $\overline{AC}$ și $\overline{AB}$ ale unui triunghi ABC. Prin aceste puncte se duc două drepte $B'P$, $C'Q$ paralele între ele. Fie M punctul de intersecție a cercului ce trece prin A și B', tangent la $B'P$, cu cercul care trece prin A și C', tangent la $C'Q$. Să se arate că punctul M se găsește pe cercul $A'B'C'$, A' fiind mijlocul lui $\overline{BC}$.

239. Să se demonstreze reciproca teoremei precedente, adică: M fiind un punct al cercului $A'B'C'$, tangentele în B' și C' la cercurile AMB' și AMC' sînt paralele.

240. Înălțimea AA' a triunghiului ABC întîlnește din nou cercul circumscris în D. Să se arate că dacă O este centrul cercului circumscris triunghiului, simetricele dreptelor OB, OC, OD respectiv în raport cu AB, AC, BC sînt trei drepte paralele.

241. Fie α mijlocul segmentului ce unește vîrful A al triunghiului ABC cu ortocentrul său; A', B', C' mijloacele laturilor triunghiului. Fie de asemenea D și E centrele cercurilor $A\alpha B'$ și $A\alpha C'$.

Să se arate că $DEC'B'$ este paralelogram și că $\overline{B'D}$ este paralel cu $\overline{\alpha A'}$ și egal cu jumătatea lui.

242. Fie A', B', C' mijloacele laturilor triunghiului ABC. Se proiectează vîrfurile B, C în B_1, C_1 pe o dreaptă (D) care trece prin A. Să se demonstreze că locul punctului de întîlnire al dreptelor B_1C' și C_1B', cînd dreapta (D) se rotește în jurul lui A, este cercul celor nouă puncte al lui ABC.

243. Să se demonstreze că H fiind ortocentrul triunghiului ABC, cercul BHC întîlnește pe $\overline{AB}$ în punctul M simetric cu A față de înălțimea vîrfului C.

244. Fie H ortocentrul triunghiului ABC, iar O_a, O_b, O_c centrele cercurilor lui Carnot BHC, CHA, AHB. Să se arate că triunghiurile ABC, $O_aO_bO_c$ sînt egale, au același cerc al celor nouă puncte și aceeași dreaptă a lui Euler.

245. Să se demonstreze că cercul circumscris *triunghiului anticomplementar* (triunghi format ducînd prin fiecare vîrf al triunghiului o paralelă la latura opusă) al triunghiului ABC este tangent la cercurile BHC, CHA, AHB din problema precedentă.

246. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC și $A_1B_1C_1$ triunghiul său complementar. Să se demonstreze că centrele cercurilor lui Euler ale triunghiurilor BIC, CIA, AIB sînt situate pe bisectoarele triunghiului complementar $A_1B_1C_1$.

247. Fie A' B', C' punctele în care înălțimile triunghiului ABC întîlnesc a doua oară cercul circumscris, A_1, B_1, C_1 punctele diametral opuse punctelor A', B', C', iar A_2, B_2, C_2 respectiv intersecțiile perechilor de drepte (BB_1, CC_1), (CC_1, AA_1), (AA_1, BB_1). Să se arate că O este centrul cercului lui Euler al triunghiului $A_2B_2C_2$.

248. Fie A' mijlocul distanței $\overline{AH}$ dintre vîrful A al triunghiului ABC și punctul H de întîlnire al înălțimilor, A'' mijlocul lui $\overline{BC}$ și O centrul cercului circumscris. Să se demonstreze că $\overline{A'A''}$ trece prin mijlocul segmentului $\overline{HO}$, adică este un diametru al cercului celor nouă puncte.

249. În triunghiul ABC, $\sphericalangle A = 90°$, $\overline{AC} > \overline{AB}$. Un cerc de centru A și de rază $\overline{AC}$ intersectează pe BC în C'. Să se arate că în triunghiul ABC' centrul cercului celor nouă puncte se află pe $\overline{BC'}$.

250. În vîrfurile B, C ale unui triunghi dat ABC se ridică perpendiculare pe $\overline{BC}$, care intersectează cercul circumscris în D și E. Fie P un punct mobil pe cercul ABC, H și H' ortocentrele triunghiurilor ABC și PDE. Se cere locul mijlocului segmentului $\overline{HH'}$.

251. Să se demonstreze că simetricele înălțimilor unui triunghi ABC, în raport cu trei drepte trecînd prin vîrfurile respective și avînd aceeași direcție, se întîlnesc într-un punct al cercului circumscris triunghiului ABC.

252. Să se demonstreze reciproca teoremei precedente, adică: D fiind un punct al cercului circumscris triunghiului ABC și A', B', C' picioarele înălțimilor, să se arate că bisectoarele unghiurilor DAA', DBB' și DCC' sînt paralele.

253. Fie ABC un triunghi înscris într-un cerc (O), $A'B'C'$ triunghiul format ducînd prin A, B, C tangente la cercul (O). Prin B' și C' se duc paralele la $\overline{BC}$; prima intersectează pe $\overline{AB}$ în γ, a doua pe $\overline{AC}$ în β. Să se arate că punctele β și γ se găsesc pe diametrul cercului (O), perpendicular pe $\overline{BC}$.

254. Fie (BC), (CB) cercurile ce trec prin vîrfurile B și C ale triunghiuiui ABC și sînt tangente respectiv la laturile $\overline{AC}$, $\overline{AB}$, iar (CA), (AC) și (AB), (BA) cercurile analoge (cercurile adjuncte). Să se arate că cercurile (AB), (BC), (CA) trec prin același punct Ω *(primul punct* sau *punctul retrograd al lui Brocard)*, iar cercurile (BA), (CB), (AC) au de asemenea un punct comun Ω' *(al doilea punct* sau *punctul direct al lui Brocard)*.

255. Să se demonstreze că cercurile adjuncte (BA), (CA) și cercul BOC au un punct comun, O fiind cent ul cercului circumscris lui ABC.

256. O dreaptă intersectează laturile unui triunghi ABC în punctele A', B', C'. Paralelele duse din vîrfurile triunghiului la secantă întîlnesc cercul circumscris în A'', B'', C''. Să se demonstreze că dreptele $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ se întîlnesc într-un punct M al cercului circumscris.

257. Dintr-un punct M al cercului circumscris unui triunghi ABC se coboară perpendicularele MD, ME, MF pe $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$. Să se arate că punctele D, E, F sînt coliniare *(dreapta lui Simson* a punctului M în raport cu triunghiul ABC*)*.

258. Fie M un punct pe cercul circumscris triunghiului ABC. Să se demonstreze că proiecțiile D, E, F ale punctului M, făcute în același sens și sub același unghi φ, pe laturile triunhghiului ABC, se găsesc pe o dreaptă. *(Dreapta lui Simson generalizată*, de unghi φ, a punctului M în raport cu ABC).

259. Perpendiculara coborîtă din M, situat pe cercul circumscris triunghiului ABC, pe latura $\overline{BC}$, întîlnește din nou cercul în M'. Să se demonstreze că dreapta lui Simson DEF a punctului M în raport cu ABC este paralelă cu AM'.

260. Într-un cerc (O) se dau două coarde $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$. Se proiectează un punct M al cercului pe dreptele AB, AD, CB, CD respectiv în punctele A', B', C', D'. Să se demonstreze că dreptele $A'B'$ și $C'D'$ se întîlnesc pe dreapta BD, iar $A'C'$ și $B'D'$ pe dreapta AC.

261. Prin vîrfurile triunghiului ABC se duc trei drepte paralele AA', BB', CC'. Să se demonstreze că simetricele acestor drepte, respectiv față de bisectoarele unghiurilor A, B. C *(izogonalele celor trei ceviene paralele)* se întîlnesc într-un punct al cercului circumscris lui ABC (izogonalul punctului de la infinit al direcției cevienelor paralele).

262. Să se demonstreze reciproca precedentei, adică să se arate că M fiind un punct al cercului circumscris triunghiului ABC, izogonalele cevienelor AM, BM, CM sînt trei drepte paralele.

263. Dreapta lui Simson DEF a unui punct M în raport cu triunghiul ABC trece prin mijlocul N al segmentului ce unește pe M cu ortocentrul H al triunghiului. Să se demonstreze că laturile și înălțimile corespunzătoare determină pe această dreaptă trei segmente cu mijlocul în N.

264. Să se arate că dacă proiecțiile D, E, F ale unui punct M pe laturile $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ ale unui triunghi ABC sînt coliniare, atunci M se află pe cercul circumscris triunghiului.

265. Să se demonstreze că dreptele lui Simson în raport cu triunghiul ABC, a două puncte M și N, fac între ele un unghi egal cu acela a cărui măsură pe cercul circumscris lui ABC este jumătatea arcului MN.

266. Dreptele lui Simson ale extremităților unui diametru al cercului circumscris triunghiului ABC se întîlnesc într-un punct al cercului lui Euler. Să se demonstreze că dreapta lui Simson a acestui punct în raport cu triunghiul median $A'B'C'$ al lui ABC este paralelă cu diametrul considerat.

267. Se consideră două triunghiuri înscrise în același cerc (O) și un punct P mobil pe cercul (O). Să se demonstreze că dreptele lui Simson ale punctului P în raport cu cele două triunghiuri fac între ele un unghi constant.

268. Pe un cerc (O) se iau patru puncte A, B, C, M. Să se demonstreze că cercurile descrise pe coardele $\overline{AM}$, $\overline{BM}$, $\overline{CM}$ ca diametre se întîlnesc două cîte două în trei puncte coliniare (teorema lui Salmon).

269. Pe coardele $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $\overline{MC}$ ale cercului (O) se descriu segmente de cerc capabile de același unghi φ. Cele șase cercuri astfel formate se întîlnesc două cîte două în șase puncte care se găsesc trei cîte trei pe două drepte.

270. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC și H ortocentrul lui, $\overline{MN}$ o coardă a cercului circumscris, perpendiculară pe $\overline{BC}$ în D; M', N' mijloacele lui $\overline{HM}$ și $\overline{HN}$; M_1 și N_1 intersecțiile lui DM' și DN' cu $\overline{AC}$. Se cere să se arate că MM_1 și NN_1 sînt paralele.

271. Trei drepte paralele cu o direcție dată și trecînd prin vîrfurile A, B, C ale triunghiului ABC intersectează cercul circumscris în A', B', C'. Să se arate că perpendicularele duse din A', B' și C' pe $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ și $\overline{AB}$ sînt concurente și că proiecțiile A_1, B_1, C_1 ale punctelor A', B', C' pe aceleași laturi sînt coliniare.

272. Trei drepte paralele, duse prin vîrfurile unui triunghi ABC, întîlnesc cercul circumscris în A'', B'', C''. Să se demonstreze că dreptele ce unesc un punct M al cercului circumscris cu punctele A'', B'', C'' întîlnesc laturile $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ în punctele A', B', C', care se găsesc pe o dreaptă paralelă cu direcția paralelelor duse (teorema lui Aubert).

273. Să se găsească dreptele lui Simson în raport cu triunghiul ABC ale următoarelor puncte:

a) vîrfurile triunghiului;
b) punctele diametral opuse vîrfurilor;
c) punctele de intersecție ale înălțimilor cu cercul circumscris;
d) picioarele bisectoarelor interioare pe cercul ABC;
e) picioarele bisectoarelor exterioare pe cercul ABC.

274. Se consideră un triunghi ABC înscris într-un cerc de centru O. Fie M un punct pe cercul (O) și DEF dreapta lui Simson a punctului M în raport cu ABC. Să se arate că unghiurile de bază ale triunghiurilor isoscele OAM, OBM, OCM sînt egale cu unghiurile pe care dreapta DEF le face cu laturile triunghiului ABC.

275. Să se demonstreze că dreapta lui Simson xy a unui punct M de pe cercul circumscris triunghiului în raport cu un triunghi este dreapta lui Simson a punctului M în raport cu o infinitate de triunghiuri înscrise în același cerc.

276. Să se găsească pe cercul circumscris unui triunghi ABC un punct I așa ca dreapta lui Simson a lui I în raport cu triunghiul ABC să aibă o direcție dată (D).

277. Pe cercul (O) circumscris triunghiului ABC, se iau două puncte B', C' și se caută punctul A' a cărui dreaptă Simson în raport cu ABC este perpendiculară pe $B'C'$. Să se arate că triunghiurile ABC și $A'B'C'$ (numite triunghiuri S) se bucură de următoarele proprietăți:

a) avem, în mărime și semn, relația

$$\text{arc } AA' + \text{arc } BB' + \text{arc } CC' = 0;$$

b) dreapta lui Simson a fiecărui vîrf al triunghiului $A'B'C'$ în raport cu ABC, este perpendiculară pe latura opusă;

c) dreptele lui Simson ale vîrfurilor lui $A'B'C'$ în raport cu ABC și ale vîrfurilor lui ABC în raport cu $A'B'C'$ trec prin același punct care se află la mijlocul distanței NN' dintre ortocentrele celor două triunghiuri.

278. Fie (ABC, $\alpha\beta\gamma$) și (ABC, $\alpha'\beta'\gamma'$) două perechi de triunghiuri S înscrise în același cerc. Să se demonstreze că triunghiurile $\alpha\beta\gamma$ și $\alpha'\beta'\gamma$ sînt triunghiuri S unul față de celălalt.

279. Să se demonstreze că dreapta lui Simson a unui punct M, în raport cu triunghiurile $\alpha\beta\gamma$ înscrise în același cerc cu triunghiul ABC, față de care sînt triunghiuri S, păstrează o direcție fixă.

280. Fie M și N punctele în care dreapta (D) întîlnește cercul (O) circumscris triunghiului ABC. Se proiectează vîrfurile triunghiului ABC în A', B', C' pe (D). Să se demonstreze că perpendicularele coborîte din A', B', C' respectiv pe laturile $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ trec prin același punct ω [*ortopolul* dreptei (D) în raport cu triunghiul ABC], care se găsește la întîlnirea dreptelor lui Simson ale punctelor M și N.

281. Fie M și N punctele în care o dreaptă (D) intersectează cercul circumscris triunghiului ABC, iar A', B', C' proiecțiile de unghi φ ale vîrfurilor lui ABC pe (D). Să se demonstreze că proiectantele de unghi $\pi-\varphi$ ale punctelor A', B', C' făcute în același sens, respectiv pe laturile $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$, trec prin același punct I [*izopolul* de unghi φ al dreptei (D) față de ABC] care aparține dreptelor lui Simson de unghi $\pi-\varphi$ ale punctelor M și N în raport cu ABC.

282. Se consideră într-un plan un cerc (O), un punct H și o dreaptă (D), fixe. Se cere locul ortopolului dreptei (D) față de triunghiul ABC, variabil, care este înscris în cercul (O) și are punctul H drept ortocentru.

283. Să se determine locul ortopolului unei drepte fixe (D) față de triunghiul ABC, cînd latura BC este fixă, iar unghiul A constant.

284. O dreaptă (D) intersectează cercul circumscris triunghiului ABC în M și N. Se proiectează punctele B, C pe (D) în B', C' iar M, N pe BC în M', N'. Ortopolul dreptei (D) față de triunghiul ABC se găsește pe cercul circumscris patrulaterului $B'C'M'N'$. Să se enunțe și să se demonstreze o proprietate analogă pentru izopol.

285. Se consideră două triunghiuri $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ înscrise în același cerc (O). Să se demonstreze că dacă dreptele lui Simson de unghi φ ale vîrfurilor primului triunghi față de celălalt trec printr-un punct, atunci dreptele lui Simson de unghi $\pi-\varphi$ ale celui de-al doilea triunghi față de primul trec prin același punct.

286. Fie $ABCDEF$ un patrulater complet. Să se arate că ortocentrele triunghiurilor formate de cîte trei din laturile patrulaterului se găsesc pe o dreaptă *(dreapta lui Aubert)*.

287. I fiind centrul cercului înscris în triunghiul ABC, A' mijlocul arcului BC din cercul circumscris triunghiului, să se arate că $\overline{A'B} = \overline{A'C} = \overline{A'I}$.

288. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil. Să se demonstreze că centrele cercurilor înscrise în triunghiurile ABC, BCD, CDA, DBA sînt vîrfurile unui dreptunghi.

289. Să se demonstreze că într-un patrulater inscriptibil perpendicularele coborîte din mijlocul fiecărei laturi (sau a unei diagonale) pe latura opusă (sau pe cealaltă diagonală) trec prin același punct *(anticentrul patrulaterului inscriptibil)*.

290. Să se demonstreze că anticentrul unui patrulater inscriptibil aparține:

a) dreptelor lui Simson ale vîrfurilor în raport cu triunghiurile formate prin unirea vîrfurilor rămase ale patrulaterului;

b) cercurilor celor nouă puncte ale celor patru triunghiuri formate de cîte trei vîrfuri ale patrulaterului.

291. Se consideră un triunghi ABC și se duce prin ortocentrul său H o dreaptă care întîlnește laturile $\overline{AB}$ și $\overline{AC}$ în punctele M și N. Fie O punctul de întîlnire al perpendicularelor ridicate în M și N respectiv pe laturile $\overline{AB}$ și $\overline{AC}$, iar P punctul de întîlnire al dreptei AO cu cercul circumscris triunghiului ABC. Să se arate că O este centrul cercului înscris în triunghiul MNP și că, dacă MN se rotește în jurul lui H, dreptele PM și PN trec prin cîte un punct fix.

292. Să se demonstreze că paralelele duse din centrul I al cercului înscris unui triunghi ABC la dreptele MA_1, MB_1, MC_1 care unesc un punct M al cercului circumscris cu punctele A_1, B_1 C_1, unde bisectoarele interioare sau exterioare intersectează cercul circumscris, întîlnesc laturile triunghiului în trei puncte coliniare.

293. Să se demonstreze că cele două drepte, determinate în problema precedentă, de bisectoarele interioare și exterioare corespunzătoare aceluiași punct de pe cercul circumscris, sînt paralele.

294. Vîrfurile unui triunghi dreptunghic ABC împart cercul circumscris în trei arce. Se duc tangente la fiecare din aceste arce astfel ca lungimile acestora, cuprinse între prelungirile laturilor să aibă mijloacele în punctele de contact. Să se arate că punctele de contact sînt vîrfurile unui triunghi echilateral (teorema lui Pollock).

295. O dreaptă oarecare, care trece prin ortocentrul H al triunghiului ABC, intersectează laturile $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ respectiv în A_a, B_b, C_c. Să se demonstreze că dacă H_a, H_b, H_c sînt simetricele lui H în raport cu aceleaşi laturi, dreptele H_aA_a, H_bB_b, H_cC_c sînt concurente într-un punct M al cercului circumscris ABC.

296. Să se demonstreze că simetricele unui diametru (d) al cercului (O) circumscris triunghiului ABC, în raport cu laturile triunghiului complementar $A_1B_1C_1$, sînt concurente în ω, ortopolul dreptei (d).

297. Fie a, b, c proiecțiile vîrfurilor triunghiului ABC pe o dreaptă (Δ), iar α, β, γ simetricele punctelor a, b, c, în raport cu laturile triunghiului complementar al lui ABC. Să se demonstreze că centrul cercului circumscris triunghiului $\alpha\beta\gamma$ aparține cercului celor nouă puncte.

298. Să se demonstreze că ortopolul φ al unei drepte (Δ) în raport cu triunghiul ABC aparține unuia din cercurile tritangente triunghiului format de simetricele lui (Δ) în raport cu laturile triunghiului complementar.

Capitolul VII

TRANSLAȚIE. SIMETRIE. ROTAȚIE

299. Să se demonstreze că dacă prin fiecare punct M al unui cerc (O) se duce cîte un segment $\overline{MN}$ de lungime constantă, într-o direcție determinată și totdeauna în același sens, locul lui N este un alt cerc (O').

300. Aceeași problemă ca mai sus în care se înlocuieşte cercul (O) cu o curbă oarecare (C). Să se arate că locul geometric este o curbă (C'), de aceeași formă cu (C).

301. Să se demonstreze că dacă prin vîrfurile A, B, C ale unui triunghi se duc segmente paralele $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'}$ în același sens și dacă H și H' sînt punctele de întîlnire ale înălțimilor triunghiurilor ABC, $A'B'C'$, atunci $\overline{HH'}$ este egal și paralel cu $\overline{AA'}$.

302. Două segmente egale $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$ sînt paralele, însă sensul de la A la B este contrar sensului de la A' la B'. Să se găsească centrul de rotație care aduce pe A în A' și pe B în B'.

303. Două segmente egale $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$ sînt astfel situate că $\overline{AA'}$ și $\overline{BB'}$ sînt paralele. Să se găsească centrul de rotație care aduce pe A în A' și pe B în B'.

304. Două segmente egale $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$ sînt așezate oricum în plan. Să se găsească centrul de rotație care aduce pe A în A' și pe B în B'. Să se arate că dacă patrulaterul $ABB'A'$ este convex, centrul de rotație nu se poate găsi în interiorul patrulaterului.

305. Să se demonstreze că dacă două coarde egale $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ ale unui cerc se intersectează în M, atunci $\overline{AM} = \overline{CM}$ și $\overline{BM} = \overline{DM}$, segmentele $\overline{AM}$ și $\overline{CM}$ fiind cele mai mici pe fiecare coardă.

306. Să se demonstreze că două figuri simetrice în raport cu un punct se pot suprapune printr-o rotație.

307. Să se demonstreze că două figuri simetrice ale unei figuri date în raport cu două centre de simetrie se pot suprapune printr-o translație.

308. Să se demonstreze că două simetrii succesive în raport cu două drepte paralele se pot înlocui printr-o translație.

309. Să se demonstreze că două simetrii succesive în raport cu două drepte concurente se pot înlocui printr-o rotație.

310. În general trecerea de la o figură (F) la o figură (F') prin două simetrii succesive nu este o operație comutativă. Să se afle pentru ce unghi al axelor de simetrie operația devine comutativă.

311. Două triunghiuri egale, dar orientate în sens contrar, pot fi aduse să coincidă printr-o translație, urmată de o simetrie? În cîte moduri?

312. În ce caz simetricele unui punct M, în raport cu laturile triunghiului ABC, sînt trei puncte coliniare?

313. Fie ABC un triunghi echilateral. Se rotește o figură succesiv împrejurul lui A, B, C, în același sens, cu 60°. Să se găsească centrul rotației care aduce figura inițială să coincidă cu cea finală.

314. Se dă un punct fix A și o dreaptă xy. Se unește A cu un punct B al dreptei xy și se construiește triunghiul echilateral ABC. Să se afle locul lui C cînd B se mișcă pe xy.

Să se studieze și cazul cînd dreapta xy se înlocuiește cu un cerc.

315. Se rotește un pătrat $ABCD$ în jurul punctului A și fie $AB'C'D'$ noua poziție, iar α unghiul de rotație. Se cere:

a) locul geometric al intersecției dreptelor BB', DD' cînd α variază;

b) să se arate că dreptele BB', CC' și DD' sînt concurente.

316. Triunghiul ABC, de mărime constantă, se mişcă în planul său, dreptele AB, AC trecînd respectiv prin punctele fixe P şi Q. Să se demonstreze că latura BC rămîne tangentă la un cerc.

317. Se dau trei drepte Ox, Oy şi (D). Să se găsească pe Ox un punct A şi pe Oy un punct B astfel ca dreapta (D) să fie mediatoarea segmentului $\overline{AB}$.

318. Să se construiască un triunghi isoscel cunoscînd vîrful A şi ştiind că vîrfurile B, C se află respectiv pe dreptele (D_1) şi (D_2), iar baza $\overline{BC}$ este paralelă cu direcţia dată (Δ).

319. Într-un cerc se duc două coarde $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$. Să se găsească pe cerc un punct M astfel ca, MA şi MB intersectînd pe CD, în F şi G, segmentul $\overline{FG}$ să aibă o lungime dată.

320. Se dă un punct fix P, două drepte paralele (D_1) şi (D_2) şi o dreaptă oarecare (D). Să se ducă prin P o dreaptă care să intersecteze pe (D_1), (D_2) şi (D) în A, B şi C, astfel ca $\overline{AB} = \overline{PC}$.

321. Să se construiască un triunghi echilateral ABC care are vîrful A dat, iar vîrfurile B şi C să fie aşezate:

a) pe două drepte paralele date (D), (D');

b) pe o dreaptă (D) şi un cerc (ω) date.

322. Să se construiască un triunghi echilateral care să aibă vîrfurile sale pe trei drept paralele date sau pe trei cercuri concentrice.

323. Într-un cerc dat să se înscrie un triunghi ABC cunoscînd mijloacele α, β, γ ale arcelor BC, CA, AB.

324 Se dau două cercuri şi două puncte A şi B pe unul din cercuri. Să se găsească pe cercul ce trece prin A şi B un punct P astfel ca, M şi N fiind intersecţiile lui PA şi PB cu celălalt cerc, $\overline{MN}$ să aibă o lungime dată.

325. Pe o dreaptă dată (D), să se găsească un punct P astfel ca distanţa $\overline{PA}$ la o altă dreaptă dată (D') să fie egală cu distanţa lui P la un punct fix O al dreptei (D).

326. Aceeaşi problemă, înlocuindu-se dreapta (D') printr-un cerc de centru C şi rază R.

327. Se dă o dreaptă PQ şi două puncte A şi B de aceeaşi parte a acestei drepte. Să se găsească pe PQ un punct I astfel ca $\sphericalangle BIQ = 2 \sphericalangle AIP$.

328. Într-un triunghi ABC, $\overline{AC}$ este împărţită în segmentele $\overline{AD}$ şi $\overline{DC}$. Să se găsească pe $\overline{AB}$ un punct P aşa ca segmentele $\overline{AD}$ şi $\overline{DC}$ să fie văzute din P sub unghiuri egale.

329. Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic, în care $\overline{AB}$ este latura perpendiculară pe baze. Paralela dusă la bază prin intersecţia I a diagonalelor trapezului întîlnește latura $\overline{AB}$ în E. Să se demonstreze că dreapta EI este bisectoarea unghiului CED.

330. Se dau două cercuri (C) și (C') și o dreaptă (Δ). Să se ducă o secantă comună, paralelă cu (Δ), care să determine în cele două cercuri coarde egale.

331. Fie $\overline{AB}$ un segment de dreaptă invariabil, $\overline{A'B'}$ o nouă poziție a acestui segment. Să se arate că printr-o translație de-a lungul direcției $\overline{AB}$ și prin două rotații efectuate respectiv în jurul punctelor A și B, se poate duce segmentul $\overline{AB}$ în poziția $\overline{A'B'}$.

332. Pe laturile Ox și Oy ale unui unghi se iau segmentele $\overline{OA}$ și $\overline{OB}$. Să se determine două drepte perpendiculare (D_1) și (D_2), trecînd prin O, astfel ca proiecțiile lui $\overline{OA}$ pe (D_1) și ale lui $\overline{OB}$ pe (D_2) să fie egale.

333. Două puncte P și Q fiind însemnate pe un biliard poligonal $XYZU... T$ de n laturi, se cere să se determine punctul M al laturii XY către care trebuie îndreptată o bilă ce se află în punctul P, pentru ca să treacă prin Q, după ce se va reflecta pe laturile succesive XY, YZ, ZU...

334. Să se demonstreze că dacă în planul unui triunghi echilateral ABC se ia un punct I oarecare, cu cele trei segmente $\overline{IA}$, $\overline{IB}$, $\overline{IC}$ se poate totdeauna forma un triunghi (D. Pompei).

Capitolul VIII

CONSTRUCȚII GRAFICE

335. Să se ducă la un cerc o tangentă paralelă cu o dreaptă dată.

336. Să se ducă o secantă paralelă cu o dreaptă dată, care să determine într-un cerc dat o coardă de lungime dată.

337. Se dă un cerc și două drepte paralele. Să se construiască tangentele la cerc care determină între cele două paralele un segment de lungime dată l. Cîte soluții sînt?

338. Să se ducă o tangentă la un cerc (C), astfel încît coarda determinată pe ea de un alt cerc (C') să fie egală cu o lungime dată.

339. Să se construiască un cerc de centru dat O și intersectînd un cerc (O') la extremitățile unui diametru.

340. Să se construiască un cerc de rază dată R, tangent la un cerc (O), într-un punct dat A.

341. Să se construiască un cerc de rază dată R, tangent unei drepte date și trecînd printr-un punct dat A.

342. Să se construiască un cerc de rază dată R, tangent la un cerc (O), de rază r și la o dreaptă dată (D).

343. Să se construiască un cerc de rază dată r, tangent la două cercuri date (O) și (O').

344. Să se construiască un cerc de rază R, tangent la două drepte date Ox, Oy.

345. Să se construiască un cerc de rază dată R care să determine pe două drepte date coarde de lungimi date.

346. Să se găsească un punct din care să se vadă două cercuri date sub unghiuri drepte.

347. Să se construiască un cerc care să treacă printr-un punct dat A și să fie tangent la o dreaptă dată (D), într-un punct B.

348. Să se construiască un cerc care să treacă printr-un punct A și să fie tangent la un cerc (O), într-un punct B.

349. Într-un cerc (O) se dă o coardă $\overline{AB}$ și un punct C pe cerc. Să se ducă prin C o coardă care să fie împărțită în două părți egale de $\overline{AB}$.

350. Fiind date trei puncte A, B, C, care nu sînt în linie dreaptă, să se găsească cu compasul un punct D, așa ca $\overline{AD}$ să fie egal și paralel cu $\overline{BC}$.

351. Să se construiască un cerc tangent la o dreaptă (D), într-un punct dat A și la un cerc (O).

352. Să se construiască un cerc tangent la o dreaptă dată (D) și la un cerc (O) într-un punct A.

353. Să se construiască un cerc, tangent la un cerc dat (O), avînd centrul pe o dreaptă dată (D) și trecînd printr-un punct A al acestei drepte.

354. Să se construiască un cerc tangent la o dreaptă dată (D), avînd centrul pe o dreaptă dată (D') și trecînd printr-un punct A al acestei drepte.

355. Pe prelungirea diametrului $\overline{AB}$ al unui cerc (O), să se găsească un punct așa ca tangentele duse de la el la cerc să aibă o lungime dată.

356. Se dă o dreaptă (Δ) și două puncte A, B. Să se determine pe dreapta (Δ) un punct C astfel ca bisectoarea unghiului format de dreapta (Δ) și CA să treacă prin B. Discuție.

357. Din vîrfurile unui triunghi ABC ca centre să se descrie cercuri tangente între ele două cîte două.

358. Să se construiască trei cercuri egale, tangente între ele două cîte două și tangente interior la un cerc dat (O).

359. Să se construiască un triunghi dreptunghic cînd se cunoaște raza cercului înscris și înălțimea coborîtă din vîrful unghiului drept. Discuție.

360. Să se construiască un triunghi ABC, cunoscînd picioarele A', B', C' ale înălțimilor.

361. Să se construiască un triunghi ABC în care cunoaștem baza $\overline{BC}$, unghiul A și $\overline{AB} + \overline{AC}$.

362. Să se construiască un triunghi ABC în care cunoaștem latura $\overline{BC}$, unghiul B și $\overline{AB} \pm \overline{AC}$.

363. Să se construiască un triunghi ABC, cunoscînd unghiurile și perimetrul.

364. Se dă o dreaptă (D) și două puncte fixe A, B. Să se așeze pe dreapta (D) un segment $\overline{MN}$ de lungime dată, astfel ca dreptele AM și BN să fie paralele.

365. Fiind date trei puncte A, B, C care nu sînt în linie dreaptă și o dreaptă arbitrară AD dusă prin A, să se găsească pe AD un punct E, așa ca CE să fie tangentă cercului ABE.

366. Să se construiască un segment, de lungime dată l, care să aibă extremitățile pe două drepte date (D_1) și (D_2) și să fie paralel cu o altă dreaptă (Δ).

367. Se dau într-un plan două drepte (D) și (D'). Să se așeze un cerc (C) de rază dată R, cu centrul pe dreapta (D) și un al doilea cerc (C'), de rază R', cu centrul pe dreapta (D') astfel încît ele să fie tangente (interior sau exterior), iar tangenta lor comună să aibă o direcție dată (Δ).

368. Să se construiască un triunghi ABC, avînd un vîrf A dat, celelalte două vîrfuri pe două cercuri (O), (O') date și cunoscînd punctul G de intersecție al medianelor.

369. Să se construiască un triunghi ABC, cunoscînd punctul G de intersecție al medianelor și știind că vîrful A și piciorul M al medianei $\overline{AG}$ se găsesc pe un cerc (O), iar vîrfurile B, C se găsesc pe două cercuri date.

370. Printr-un punct A să se ducă o tangentă AT și o secantă AMN la un cerc (O), astfel ca arc $TM =$ arc MN.

371. Să se construiască un paralelogram, cunoscînd lungimea unei laturi și unghiul diagonalelor. Se mai știe că latura de lungime dată se găsește pe o dreaptă dată (Δ) și că celelalte două vîrfuri ale paralelogramului sînt situate pe două cercuri (O), (O').

372. Se dă un unghi drept xOy și pe latura Ox se ia un punct fix A. Fie C centrul unui cerc tangent în O la Oy, așezat în partea opusă cu A față de O. Să se determine poziția unui punct N pe Oy astfel ca perpendiculara dusă din N pe NA să fie tangentă la cercul (C).

373. Să se înscrie într-un cerc (O) un triunghi, așa ca două din laturile sale să fie tangente la un al doilea cerc (O'), a treia latură avînd o direcție dată.

374. Să se înscrie în cercul (O) un triunghi ABC, astfel ca laturile $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ să treacă prin două puncte date M și N, iar unghiul B să aibă o mărime cunoscută.

375. Să se construiască un triunghi ABC, știind că laturile sale trec prin trei puncte date L, M, N, că vîrfurile B, C se găsesc pe un cerc trecînd prin M și N și cunoscînd mărimea unghiului A.

376. Se dau două cercuri concentrice și se cere să se construiască un triunghi, ale cărui unghiuri sînt cunoscute și care să aibă unul din vîrfuri pe un cerc, iar celelalte două pe al doilea cerc.

377. Dintre toate triunghiurile echilaterale, ale căror laturi trec prin puncte date A, B, C, să se construiască cel de perimetru maxim.

378. Se dă cercul (O) și dreapta (Δ). Să se construiască numai cu echerul triunghiul echilateral ABC, care are vîrful A pe (Δ) și cu vîrfurile B, C pe cercul (O) tangent laturilor $\overline{AB}$ și $\overline{AC}$.

379. Să se înscrie într-un cerc un patrulater, cînd se cunoaște punctul de intersecție al diagonalelor și cele două unghiuri pe care le formează laturile opuse ale patrulaterului.

380. Să se ducă într-un patrulater o transversală, pe care laturile patrulaterului să determine trei segmente egale.

381. Să se construiască un triunghi dreptunghic ABC cunoscînd ipotenuza $\overline{BC}$ și segmentul $\overline{B'C}$ determinat pe $\overline{AC}$ de bisectoarea unghiului B.

382. Să se construiască un triunghi dreptunghic, cînd pe hîrtie sînt însemnate picioarele înălțimii, bisectoarei și medianei duse din vîrful unghiului drept.

383. Să se construiască un trapez $ABCD$, cunoscîndu-i laturile.

384. Să se construiască un trapez căruia i se cunosc bazele și diagonalele.

385. Să se construiască un triunghi, cînd se cunosc două laturi și mediana care pleacă din vîrful lor comun.

386. Să se construiadscă un triunghi cunoscînd lungimea medianei și a înălțimii ce pornesc din A, cum și raza cercului circumscris. Discuție.

387. Să se construiască un triunghi cunoscîndu-i medianele.

388. Să se construiască un triunghi ABC cunoscînd unghiul A, mediana $\overline{AA'}$ și diferența $\overline{AB}-\overline{AC}$.

389. Să se construiască un triunghi ABC cunoscînd latura $\overline{BC}$, piciorul A' al înălțimii $\overline{AA'}$ și știind că $\sphericalangle BAC = 2\sphericalangle ABC$.

390. Să se construiască un triunghi ABC cunoscînd latura $\overline{AB}$, unghiul ABC și unghiul $A'AC$, A' fiind mijlocul lui $\overline{BC}$.

391. Să se construiască un triunghi ABC cunoscînd picioarele A_1, A_2, A_3 ale înălțimii, bisectoarei și medianei duse din vîrful A al triunghiului, cum și distanța d de la vîrful A la orotcentrul H al triunghiului.

392. Se dau două cercuri (O), (O') situate de aceeași parte a unei drepte xy. Să se determine pe xy un punct A așa ca AB fiind o tangentă la (O), AB' la (O'), să avem $\sphericalangle xAB = \sphericalangle yAB'$.

393. Să se construiască un triunghi ABC cunoscînd vîrfurile B, C și centrul ω al cercului celor nouă puncte.

394. Să se construiască un triunghi ABC cunoscînd centrul O al cercului circumscris, mijlocul uneia din laturi și mijlocul lui $\overline{AH}$, H fiind ortocentrul triunghiului.

395. Să se construiască un pătrat $ABCD$ cunoscînd un vîrf A și știind că extremitățile diagonalei $\overline{BD}$ se găsesc pe două drepte paralele date.

396. Să se construiască un triunghi ABC cunoscînd diferența $\overline{BD}-\overline{DC}$ a proiecțiilor laturilor $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ pe $\overline{BC}$, înălțimea relativă la această latură și diferență $\sphericalangle C - \sphericalangle B$.

397. Se dă un cerc (O) și un punct exterior. A. Să se ducă prin A o dreaptă care să intersecteze cercul în două puncte M și N așa ca $\overline{AM} = \overline{MN}$.

398. Se dau două cercuri concentrice și un punct A pe cercul exterior. Să se ducă prin A o secantă care să determine în cercul exterior o coardă de trei ori mai mare decît coarda determinată în cercul interior.

399. Se dau două cercuri (O_1) și (O_2) și o dreaptă (D). Să se găsească pe (O_1) un punct A și pe (O_2) un punct B, astfel ca dreapta (D) să fie mediatoarea segmentului $\overline{AB}$.

400. Să se construiască un triunghi ABC cunoscînd vîrful A, punctul G de întîlnire al medianelor și centrul ω al cercului celor nouă puncte.

401. Să se construiască un triunghi ABC cunoscînd latura a, raza R a cercului circumscris şi unghiul α pe care tangenta în vîrful A, la cercul circumscris, îl face cu dreapta lui Euler a triunghiului.

402. Să se construiască un triunghi ABC cunoscînd distanţa d dintre centrul O al cercului circumscris şi ortocentrul H, raza R a cercului circumscris şi unul din unghiurile triunghiului.

403. Să se construiască un triunghi cunoscînd mijlocul M al laturii $\overline{BC}$, mijlocul N al segmentului $\overline{AH}$, mărimea segmentului $\overline{AH}$ şi unghiul C al triunghiului ABC.

404. Să se construiască un triunghi ABC, cunoscînd mijloacele a două laturi şi piciorul unei înălţimi.

405. Să se construiască un triunghi ABC cunoscînd vîrful A, punctul de întîlnire H a înălţimilor şi dreapta lui Simson (Δ) a mijlocului M al arcului BC.

406. Să se înscrie într-un dreptunghi dat $ABCD$ un alt dreptunghi care să aibă un vîrf în punctul M dat pe latura $\overline{AB}$.

407. Să se construiască un patrulater $ABCD$ fiind date segmentele care unesc mijloacele laturilor opuse, unghiul α pe care-l fac aceste segmente şi două laturi consecutive $\overline{CB}$, $\overline{CD}$.

408. Să se construiască un patrulater cunoscînd mijloacele a trei laturi şi un segment paralel şi egal cu cea de a patra latură.

409. Să se construiască un patrulater cunoscînd laturile şi segmentul care uneşte mijloacele a două laturi opuse.

410. Să se construiască un patrulater $ABCD$ cunoscînd unghiurile şi diagonalele.

411. Să se circumscrie un pătrat unui patrulater dat.

412. Să se ducă prin două puncte A, B un cerc tangent la o dreaptă xy.

413. Să se construiască un paralelogram $ABCD$ cunoscînd două vîrfuri opuse A, C şi ştiind că celelalte două vîrfuri se găsesc pe un cerc dat (O).

414. Să se construiască un triunghi ABC cunoscînd unghiul A şi lungimile medianelor care pleacă din extremităţile laturii $\overline{BC}$.

415. Să se construiască un triunghi ABC cunoscînd laturile $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ şi ştiind că $\sphericalangle C = 2 \sphericalangle B$.

416. Să se construiască un triunghi ABC cunoscînd laturile $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ şi ştiind că $\sphericalangle C = 3 \sphericalangle B$.

417. Să se construiască un triunghi cunoscînd înălţimea, bisectoarea şi mediana care pleacă din A.

418. Să se construiască un pentagon cunoscînd mijloacele laturilor.

419. Să se construiască un poligon avînd desenate în plan perpendicularele (α_1), (α_2), ..., (α_n) ridicate pe mijloacele laturilor.

Capitolul IX

SEGMENTE PROPORȚIONALE. FIGURI ASEMENEA

420. Dintr-un punct O se duc secantele OAA', OBB', OCC',... care intersectează două drepte paralele în A, A'; B, B'; C, C',... Să se arate că $\overline{OA}:\overline{OA'} = \overline{OB}:\overline{OB'} = \overline{OC}:\overline{OC'} = ...$; $\overline{AB}:\overline{A'B'} = \overline{BC}:\overline{B'C'} = ...$

421. Se unește un punct variabil M al unei drepte (D) cu un punct fix O și se ia pe $\overline{OM}$ un punct N așa ca $\overline{ON}:\overline{NM} = k$. Se cere locul descris de punctul N.

422. Să se demonstreze că dacă în două triunghiuri ABC, $A'B'C'$ laturile $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ sînt paralele cu laturile $\overline{B'C'}$, $\overline{C'A'}$, $\overline{A'B'}$, atunci dreptele AA', BB', CC' se intersectează într-un punct.

423. Pe dreapta care unește un punct fix A cu un punct P, mobil pe un cerc (O), se ia un punct M așa ca $\overline{AM}:\overline{MP} = k$. Să se determine locul lui M.

424. Un triunghi ABC este înscris într-un cerc; vîrfurile B, C sînt fixe, iar A mobil. Să se determine locul punctului de întîlnire al medianelor.

425. În triunghiul ABC se duce o paralelă $B'C'$ la latura $\overline{BC}$. Să se arate că cercurile ABC și $AB'C'$ sînt tangente.

426. Fiind date două puncte A, B pe o dreaptă, se știe că există două puncte C, D care împart pe $\overline{AB}$ în raportul dat $m:n$. În ce raport este împărțit $\overline{AB}$ de mijlocul O al lui $\overline{CD}$? Punctul O se află între A și B sau în afară?

427. Se dau două drepte paralele și un punct P între ele. Să se ducă prin P o dreaptă care să intersecteze paralelele în M și N, așa ca $\overline{PM}-\overline{PN}$ să fie egală cu o lungime dată l.

428. Două triunghiuri ABC, ABD au aceeași bază. Dintr-un punct E al bazei $\overline{AB}$ se duc paralele la $\overline{AC}$ și $\overline{AD}$ care întîlnesc laturile $\overline{BC}$ și $\overline{BD}$ respectiv în F și G. Să se demonstreze că FG este paralelă cu CD.

429. Fie D mijlocul laturii $\overline{BC}$ a triunghiului ABC. Bisectoarea unghiului ABD intersectează pe $\overline{AB}$ în E, iar aceea a unghiului ADC intersectează pe $\overline{AC}$ în F. Să se arate că $\overline{EF}$ este paralelă cu BC.

430. Fiind date trei puncte necoliniare A, B, C și o dreaptă (D), să se ducă prin punctele date trei drepte paralele, care să determine pe (D) două segmente egale. Cîte soluții sînt?

431. Fie M și N două *puncte izotomice* pe latura $\overline{BC}$ a triunghiului ABC (puncte simetrice în raport cu mijlocul laturii $\overline{BC}$). Paralelele duse prin M și N la latura $\overline{AC}$ intersectează latura $\overline{AB}$ în M' și N', iar paralelele duse prin M și N la latura $\overline{AB}$ intersectează latura $\overline{AC}$ în M'' și N''. Se cere locul geometric al intersecției dreptelor $M'M''$ și $N'N''$ cînd punctele M și N, rămînind izotomice, poziția lor se schimbă pe $\overline{BC}$.

432. Fie $\overline{CD}$ o coardă perpendiculară pe diametrul $\overline{AB}$ al unui cerc. Se unește un punct E al coardei $\overline{CD}$ cu A și B. Dreptele AE și BE intersectează cercul în F și G. Să se arate că în patrulaterul $CGDF$ produsele laturilor opuse sînt egale.

433. Prin extremitățile A și B ale segmentului $\overline{AB}$ se duc dreptele paralele Ax, By. O dreaptă oarecare, ce trece printr-un punct M al segmentului $\overline{AB}$, intersectează pe Ax și By respectiv în P și Q. Fie Q' simetricul lui Q față de punctul B, iar N punctul unde dreapta PQ' întîlnește dreapta AB. Să se arate că punctele M și N sînt conjugate față de A și B.

434. Se împart laturile $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ ale unui triunghi ABC, în același sens, în același raport k, prin punctele M, N. Dacă P este un punct fix al planului, care este locul centrului de greutate al triunghiului MNP cînd k variază?

435. Fie C și D proiecțiile pe o dreaptă dată a două puncte variabile A și B, E proiecția intersecției O a dreptelor AD și BC. $\overline{AC}$ și $\overline{BD}$ rămînînd constante să se demonstreze că și $\overline{OE}$ este constantă.

436. Să se determine pe diagonala $\overline{AC}$ a patrulaterului $ABCD$ un punct P astfel ca ducînd paralelele $\overline{PM}$ și $\overline{PN}$ respectiv la $\overline{BC}$ și $\overline{AD}$ (M fiind pe $\overline{AB}$ și N pe $\overline{CD}$), să avem $\overline{PM} \times \overline{AD} = \overline{PN} \times \overline{BC}$.

437. Se dă un romb $ABCD$, avînd lungimea laturii a. Prin vîrful A se duce o secantă oarecare, care intersectează prelungirile laturilor $\overline{CB}$, $\overline{CD}$ respectiv în E și F. Să se demonstreze că

$$\frac{1}{\overline{CE}} + \frac{1}{\overline{CF}} = \frac{1}{a}.$$

Ce modificări trebuie aduse acestei relații dacă:

a) E se află chiar pe latura $\overline{BC}$;

b) F se află pe $\overline{CD}$?

438. Se consideră o rețea plană de pătrate, de latură a. Se întreabă dacă există drepte din plan, care trecînd prin vîrful unui pătrat să nu mai întîlnească nici un alt vîrf al vreunui pătrat din rețea. De asemenea, dacă rețeaua este formată din triunghiuri echilaterale.

439. Printr-un punct D al bazei $\overline{BC}$ a unui triunghi ABC se duc dreptele DE, DF paralele la $\overline{AB}$, $\overline{AC}$. Prin A se duce o secantă care intersectează pe DE și DF în G și H. Să se arate că BH și CG sînt paralele.

440. Fie O centrul cercului circumscris, H punctul de întîlnire al înălțimilor, G punctul de întîlnire al medianelor unui triunghi ABC. Să se arate că O, H, G sînt coliniare (dreapta lui Euler) și că $\overline{GH} = 2\overline{OG}$.

441. Aceleași notații ca în problema precedentă; O' este centrul cercului celor nouă puncte. Să se arate că punctele O, G, O', H formează o diviziune armonică.

442. Se consideră un punct M în planul triunghiului ABC. Dintr-un punct oarecare N de pe un cerc situat în același plan cu triunghiul, se duc drepte paralele cu laturile $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ și cu transversalele unghiulare AM, BM, CM, intersectînd cercul în punctele A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2. Să se arate că dreptele A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 au un punct comun.

443. Trei triunghiuri ABC, CDE, EFG au laturile $\overline{AC}$, $\overline{CE}$, $\overline{EG}$ în prelungire, laturile $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ paralele și $\overline{BC}$, $\overline{DE}$, $\overline{EG}$ de asemenea paralele. Să se arate că pentru ca punctele B, D, F să fie coliniare, condiția necesară și suficientă este de $\overline{CD}$ să fie media geometrică a laturilor $\overline{AB}$ și $\overline{EF}$.

444. Fie M un punct oarecare pe înălțimea AA' a triunghiului ABC, iar H ortocentrul. Să se demonstreze că proiecțiile segmentului $\overline{HM}$ pe laturile $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ sînt invers proporționale cu acele laturi.

445. Fie H ortocentrul unui triunghi, A', B', C' picioarele înălțimilor și a, b, c proiecțiile lui H pe $\overline{B'C'}$, $\overline{C'A'}$, $\overline{A'B'}$. Să se arate că triunghiurile abc și ABC sînt asemenea.

446. Fie A' proiecția vîrfului A pe ipotenuza triunghiului dreptunghic ABC, B' și C' centrele cercurilor înscrise în triunghiurile ABA' și ACA'. Să se arate că triunghiurile $A'B'C'$ și ABC sînt asemenea.

447. Se consideră un punct D în planul triunghiului ABC. Să se demonstreze că *triunghiul metaarmonic* $A'B'C'$ (format prin întîlnirea cevienelor AD, BD, CD cu cercul ABC) și *triunghiul* *podar* $A''B''C''$ (format de proiecțiile lui D pe laturile lui ABC) ale punctului D în raport cu ABC sînt asemenea.

448. Fie A', B', C' punctele ce împart laturile triunghiului ABC în același raport k și în același sens. Fie a, b, c, mijloacele laturilor triunghiului ABC și a', b', c' mijloacele laturilor triunghiului $A'B'C'$. Să se arate că punctele b, c, a' ; c, a, b' ; a, b, c' sînt coliniare și să se deducă de aici că triunghiurile $A'B'C'$, ABC au același punct de întîlnire a medianelor.

449. Punctele A', B', C' împart laturile $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ ale unui triunghi în același raport α. Punctele A_1, B_1, C_1 împart segmentele $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ în același raport β. Să se arate că triunghiurile ABC, $A_1B_1C_1$ au același centru de greutate.

450. Pe laturile triunghiului ABC se construiesc trei triunghiuri asemenea și cu aceeași orientare în plan: BCa, CAb, ABc. Să se demonstreze că triunghiurile ABC, abc au același centru de greutate.

451. Fie M_1 și M_2 două puncte reciproce în triunghiul ABC; $A_1B_1C_1$ triunghiul format de punctele în care AM_1, BM_1, CM_1 întîlnesc laturile triunghiului dat; $A_2B_2C_2$ triunghiul format de punctele în care AM_2, BM_2, CM_2 întîlnesc laturile triunghiului median. Să se arate că triunghiurile $A_1B_1C_1$ și $A_2B_2C_2$ sînt omotetice, centrul de omotetie fiind centrul de greutate al triunghiului ABC. (Două *puncte* M_1 și M_2 se numesc *reciproce*, dacă, unindu-le cu fiecare vîrf, dreptele obținute intersectează latura opusă în puncte simetrice față de mijlocul ei).

452. Să se determine locul punctelor astfel ca raportul distanțelor la două puncte fixe să fie constant.

453. Să se construiască un triunghi cunoscînd baza, unghiul de la vîrf și raportul celorlalte două laturi.

454. Să se construiască un triunghi cunoscînd baza, bisectoarea unghiului opus și raportul celorlalte două laturi.

455. Să se construiască un triunghi ABC cunoscînd unghiul A, raportul $\overline{AC}:\overline{AB} = k$ și lungimea bisectoarei $\overline{AA'}$.

456. Să se construiască un triunghi ABC cunoscînd vîrful A, punctul G de întîlnire a medianelor și ortocentrul H.

457. Să se construiască un triunghi ABC cunoscînd $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ și raportul $\overline{AM}:\overline{BC} = k$, M fiind mijlocul lui $\overline{BC}$.

458. Să se construiască un triunghi ABC cunoscînd unghiul A, raportul $\overline{AB}:\overline{AC} = k$ și lungimea medianei $\overline{AM}$.

459. Să se construiască un triunghi ABC cunoscînd latura $\overline{BC} = a$, raportul $\overline{AB}:\overline{AC} = k$ și una din înălțimi. Discuție.

460. Să se înscrie într-un triunghi ABC un paralelogram $DEFG$ avînd vîrfurile D, E pe $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, iar vîrfurile F, G pe $\overline{BC}$ şi ştiind că este asemenea cu un paralelogram dat $PQRS$.

461. Să se construiască un paralelogram cînd cunoaştem raportul diagonalelor şi distanţelor unui vîrf la mijloacele laturilor opuse.

462. Un triunghi ABC are un vîrf fix în A, altul B mobil pe o dreaptă (D). Să se afle locul vîrfului C, ştiind că triunghiul ABC rămîne asemenea cu un triunghi dat.

463. Un triunghi ABC are vîrfurile, B, C pe două drepte date (D_1) şi (D_2), iar latura BC este paralelă cu o dreaptă dată (Δ). Să se afle locul vîrfului A, ştiind că triunghiul ABC rămîne asemenea cu un triunghi dat.

464. Să se afle locul geometric al mijloacelor distanţelor dintre picioarele perpendicularelor coborîte din punctele unei drepte date, pe alte două drepte date.

465. Să se demonstreze că distanţele de la un punct al medianei AM pînă la laturile AB, AC sînt în raport invers cu aceste laturi, iar raportul distanţelor de la un punct al simedianei la AB, AC este egal cu raportul acestor laturi.

466. Fiind dat un unghi xOy şi un punct A, să se construiască un triunghi ABC avînd un vîrf în A, celelalte două pe Ox şi Oy şi ştiind că este asemenea cu un triunghi dat $A'B'C'$.

467. Printr-un punct dat A să se ducă o dreaptă care să intersecteze laturile Ox, Oy ale unui unghi în B, C, aşa ca $\overline{AB} : \overline{AC} = k$.

468. Se dau trei drepte concurente Ox, Oy, Oz şi un punct A nesituat pe nici una din ele. Să se ducă prin A o secantă, pe care cele trei drepte să determine două segmente egale.

469. Aceleaşi date ca mai sus. Să se ducă prin A o secantă, astfel ca cele trei drepte să determine pe ea două segmente care să fie într-un raport dat $m : n$.

470. Pe latura $\overline{AB}$ a unui triunghi ABC se ia $\overline{AD}$ arbitrar, pe prelungirea lui $\overline{BC}$ se ia $\overline{CE} = \overline{AD}$. Să se arate că F fiind punctul unde $\overline{DE}$ întîlneşte latura $\overline{AC}$, avem $\overline{DF} : \overline{FE} = \overline{BC} : \overline{AB}$.

471. Să se arate că punctele A, B, C, D, care divid în acelaşi raport dreptele ce unesc vîrfurile a două paralelograme $A_1B_1C_1D_1$ şi $A_2B_2C_2D_2$, sînt vîrfurile unui paralelogram.

472. Fie A_1, B_1, C_1, D_1 punctele care împart în raportul $m:n$ laturile $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, ale patrulaterului $ABCD$; fie, de asemenea M, N, P, Q, mijloacele laturilor $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DB}$ şi

M_1, N_1, P_1, Q_1 mijloacele laturilor $\overline{A_1B_1}$, sî $\overline{B_1C_1}$, $\overline{C_1D_1}$, $\overline{D_1A_1}$. Să se arate că figurile MM_1PP_1 şi NN_1QQ_1 nt paralelograme.

473. Se dă patrulaterul $ABCD$. Pe laturile lui se construiesc triunghiurile asemenea şi cu aceeaşi orientare în plan $AA'B$ şi $CC'D$, cu vîrfurile în exterior, iar $BB'C$ şi $DD'A$ cu vîrfurile în interior. Să se demonstreze că $A'B'C'D'$ este un paralelogram.

474. Să se construiască un patrulater cunoscînd lungimile diagonalelor şi poziţia punctelor car împart laturile în raportul $m : n$.

475. O paralelă la latura $\overline{BC}$ a unui triunghi ABC intersectează laturile $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ în D şi E. Dreptele BE şi CD se întîlnesc în F. Să se arate că AF trece prin mijlocul M al laturii $\overline{BC}$.

476. Să se construiască un triunghi ABC cunoscînd lungimile înălţimilor α, β, γ .

477. Fie $ABCD$ un trapez înscris într-un cerc şi M un punct oarecare pe cerc. Să se demonstreze că proiecţiile A_1, B_1, C_1, D_1 ale punctului M pe laturile neparalele şi pe diagonalele trapezului sînt patru puncte conciclice.

478. Fie (a, a') şi (b, b') perechile de laturi opuse ale unui patrulater inscriptibil. Să se arate că:

a) dacă $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$, atunci punctul M de întîlnire a diagonalelor se află la mijlocul uneia din acestea;

b) dacă a este diametrul cercului circumscris, iar a' latura pătratului înscris în acest cerc, atunci punctul M, care este la mijlocul unei diagonale, se află pe cealaltă la două treimi faţă de unul din vîrfuri.

479. Paralela dusă prin punctul de intersecţie O al diagonalelor unui trapez întîlneşte laturile neparalele în E şi F. Să se arate că O este mijlocul segmentului $\overline{EF}$.

480. Se dă unghiul xOy şi un punct fix A în planul lui. O dreaptă variabilă ce trece prin A întîlneşte pe Ox şi Oy respectiv în M şi N. Perpendicularele în M şi N pe MN întîlnesc pe Oy şi Ox în Q şi P. Se cere locul geometric al intersecţiei dreptei PQ cu perpendiculara dusă din O pe MN.

481. Fie ABC un triunghi, (Δ) o dreaptă a planului şi a, b, c proiecţiile vîrfurilor A, B, C pe (Δ). Să se demonstreze că perpendicularele din a, b, c pe laturile $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ sînt concurente (teorema ortopolului).

482. Se consideră în acelaşi plan un triunghi ABC şi o dreaptă (Δ). Cum trebuie alese trei puncte A_1, A_2, A_3 pe (Δ)

pentru ca perpendicularele coborîte din aceste puncte respectiv pe $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ să fie concurente?

483. Fie a, b, c proiecțiile vîrfurilor A, B, C ale unui triunghi pe o dreaptă (D) din același plan. Prin a, b, c se duc drepte respectiv paralele cu laturile $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$. Să se arate că triunghiul $A'B'C'$ format de aceste drepte este egal cu triunghiul ABC.

484. Fiind date pe o dreaptă (D) segmentele $\overline{AB} = \overline{BC}$, să se ducă printr-un punct M, numai cu rigla, o paralelă la (D).

485. Fiind date două drepte paralele (D) și (D'), să se ducă printr-un punct M, numai cu rigla, o paralelă la (D) și (D').

486. Fiind dat pe o foaie de desen un paralelogram $ABCD$, să se ducă, numai cu rigla, o paralelă la o dreaptă dată, printr-un punct dat.

487. Fiind dat un paralelogram și un segment de dreaptă arbitrar $\overline{AB}$, să se găsească cu rigla pe $\overline{AB}$ un punct C, așa ca $\overline{AB} = \overline{BC}$.

488. Pe o foaie de desen se dă un pătrat $ABCD$. Să se construiască, numai cu rigla, perpendiculara dintr-un punct pe o dreaptă.

489. Pe o foaie de desen se dă un pătrat și două puncte O, P. Să se determine, numai cu rigla, punctul de intersecție al unei drepte Px, dusă prin P, cu cercul de centru O și de rază $\overline{OP}$, care însă nu este construit.

490. Pe o foaie de desen se află construit un triunghi cu punctul de întîlnire al înălțimilor și punctul de întîlnire al medianelor. Să se găsească, numai cu rigla, centrul cercului circumscris triunghiului.

491. Cunoscîndu-se un paralelogram și segmentele egale $\overline{ab}$ și $\overline{a'b'}$ așezate respectiv pe laturile Ox, Oy ale unghiului xOy, să se ducă, numai cu rigla, bisectoarea unghiului xOy.

492. Să se demonstreze că produsul a două laturi $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ ale unui triunghi ABC este egal cu produsul diametrului cercului circumscris prin înălțimea $\overline{AA'}$.

493. Fie P un punct pe cercul circumscris unui triunghi ABC și L, M, N proiecțiile lui P pe $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$. Să se demonstreze că $\overline{PA} \cdot \overline{PL} = \overline{PB} \cdot \overline{PM} = \overline{PC} \cdot \overline{PN}$.

494. Să se construiască un triunghi ABC, cunoscînd unghiul α pe care bisectoarea $\overline{AD}$ îl face cu $\overline{BC}$ și sumele $\overline{AB} + \overline{BD}$ și $\overline{AC} + \overline{CD}$.

495. Să se construiască un triunghi ABC în care bisectoarea unghiului A trece prin centrul cercului celor nouă puncte, cunoscînd lungimile $\overline{AB_1}$, $\overline{AC_1}$, determinate pe laturile unghiului A de cercul ce trece prin B, C și prin ortocentrul triunghiului.

496. Să se construiască un pătrat cunoscînd un vîrf și știind că alte două se găsesc pe două cercuri date.

497. Se dă unghiul AOB și punctul P în interiorul lui. Să se ducă prin P două drepte simetrice față de PO, astfel ca unind intersecțiile lor D și E cu AO și BO, DE să aibă o direcție dată.

498. Două cercuri (O) și (O') sînt tangente interior. Cum sînt situate centrele de asemănare?

499. Fiind date două segmente arbitrare $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$, să se găsească un punct O așa ca triunghiurile AOB și $A'O'B'$ să fie asemenea; A, A', pe de o parte, și B, B' pe de altă parte, sînt puncte omoloage.

500. Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic în care $\overline{AB}$ este latura perpendiculară pe baze. Paralela dusă la baze, prin intersecția I a diagonalelor trapezului întîlnește latura $\overline{AB}$ în E. Să se demonstreze că dreapta EI este bisectoarea unghiului CED.

501. Să se demonstreze că într-un patrulater complet cercurile circumscrise triunghiului formate de cîte trei laturi trec prin același punct (punctul lui Miquel).

502. Se consideră toate cercurile tangente unei drepte xy într-un punct A. Se cere locul punctelor de contact al tangentelor la aceste cercuri, paralele cu o altă dreaptă dată.

503. Să se determine locul punctelor de contact al tangentelor paralele la o direcție fixă, duse la cercurile tangente la două drepte date Ox, Oy.

504. Într-un triunghi ABC latura $\overline{BC}$ este fixă, iar unghiul A constant. $A'B'C'$ fiind triunghiul ortic, se cere locul geometric al ortocentrului triunghiului $A'B'C'$.

505. În triunghiul dreptunghic ABC ipoteza $\overline{BC}$ este fixă, iar vîrful A este variabil. Se prelungește $\overline{BA}$ cu $\overline{AD} = \overline{BA}$ se unește mijlocul M al lui $\overline{BC}$ cu D, iar MD intersectează pe $\overline{AC}$ în N. Se cere locul lui N.

506. Fie un triunghi ABC și D, E, F punctele de contact ale laturilor cu cercul înscris. Pe laturile $\overline{BA}$ și $\overline{CA}$ ducem către vîrful A o lungime $\overline{BP} = \overline{CQ} = \overline{BC}$. Paralelele duse prin E și F la FD și ED se intersectează în D_1. Să se demonstreze că D_1 se află pe dreapta PQ.

507. O dreaptă variabilă intersectează laturile unui unghi xOy în A și B, așa ca $\overline{OA} : \overline{OB} = k$. Să se arate că AB rămîne paralelă cu o direcție fixă.

508. Pe dreapta variabilă AB din problema precedentă se ia un punct M, așa ca $\overline{AM} : \overline{MB} = m$. Se cere locul lui M.

509. Se dau două puncte fixe A, B pe laturile Ox, Oy ale unui unghi xOy și se iau pe Ox, Oy două puncte variabile A', B, astfel ca să avem $\overline{AA'} : \overline{BB'} = k$. Să se afle locul punctului I care împarte segmentul $\overline{A'B'}$ în raportul dat $\overline{IA'} : \overline{IB'} = m$.

510. Se dă un unghi xOy și două puncte A, B fixe în interiorul (sau exteriorul) unghiului, astfel ca distanța de la A la Ox să fie egală cu distanța de la B la Oy. Fie M un punct variabil pe bisectoarea unghiului xOy; MA intersectează pe Ox în P, MB intersectează pe Oy în Q. Să se arate că dreapta PQ păstrează o direcție fixă. Cum trebuie luate punctele A și B pentru ca proprietatea să se păstreze cînd M se mișcă pe o dreaptă oarecare ce trece prin O?

511. Fie P un punct variabil pe bisectoarea unghiului A a unui triunghi ABC și L, M, N proiecțiile lui pe $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$. MN intersectează pe $\overline{BC}$ în X. Să se arate că D fiind mijlocul lui $\overline{BC}$, raportul $\overline{DL} : \overline{DX}$ este constant.

512. Să se demonstreze că dacă A_1, B_1, C_1 sînt intersecțiile bisectoarelor triunghiului ABC cu cercul său circumscris și A_2, B_2, C_2 punctele de contact ale laturilor cu cercul înscris, atunci dreptele A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sînt concurente.

513. O dreaptă oarecare întîlnește laturile $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ ale unui triunghi ABC în D și E; paralela dusă prin A la DE intersectează pe BE în F. Pe DE și AF se iau două puncte G și H, așa ca $\overline{DG} \cdot \overline{DE} = \overline{AH} \cdot \overline{AF}$. Se duce BG, care întîlnește pe AF în I. Să se demonstreze că $\overline{DG^2} = \overline{AI} \cdot \overline{AH}$.

514. Se consideră un punct P mobil pe cercul O și un diametru fix $\overline{AB}$. Care este locul geometric al intersecției M a dreptelor KB și LP, K fiind un punct pe AP astfel încît $\frac{\overline{KA}}{\overline{KP}} = m$(const), iar L un punct fix al diametrului $\overline{AB}$?

515. Fie cercurile (C) și (C') de centre O și O'. Se consideră cercul (C'') ce trece prin O și O'. Fie N și N' intersecțiile dreptelor MO și MO' cu (C) și (C'), M fiind un punct pe (C''). Să se arate că P, intersecția cercurilor MOO', MNN', este fix, cînd M descrie cercul (C'').

516. Se consideră două cercuri cu centrele O și O_1 care se intersectează în C şi D şi sînt tangente la o dreaptă (Δ), respectiv în A şi B. Dreapta AD intersectează cercul (O_1) în E, iar BD intersectează cercul (O) în F. Dintr-un punct oarecare P, situat pe dreapta (Δ) se duce o paralelă la EF pe care se ia $\overline{PG} = \overline{OA}$ și $\overline{PH} = \overline{O_1B}$. Să se demonstreze că dreptele EH și FG se intersectează pe dreapta (Δ).

517. Se dă un triunghi ASB, o dreaptă SH care întîlneşte pe $\overline{AB}$ în H şi o paralelă la $\overline{AB}$, variabilă, care intersectează pe AS în A', pe SB în B'. Prin B se duce o secantă care intersectează pe SH în C, pe SA în D și pe $A'B'$ în P. Pe paralela la SH, dusă prin P, se ia un punct Q așa ca PQ să fie împărțit de paralela SR la AB în raportul $\overline{PR} : \overline{RQ} = \overline{HA} : \overline{HB}$. Să se demonstreze că dreapta QD împarte pe $\overline{CA}$ într-un raport independent de H şi de $\overline{BC}$.

518. Să se arate că în problema precedentă locul lui Q, cînd $\overline{BC}$ variază, $\overline{A'B'}$ şi H fiind fixe, este o paralelă la $\overline{BC}$.

519. Să se demonstreze că în problema **517** locul lui Q, cînd $\overline{BC}$ şi $\overline{A'B'}$ rămîn fixe, iar H variază, este o paralelă la $\overline{SA}$.

520. Să se găsească locul lui Q din problema **517**, cînd $\overline{BC}$ şi H sînt fixe, iar $\overline{A'B'}$ variază.

521. Din extremitatea M a unei raze mobile $\overline{OM}$ a unui cerc (O) se coboară MN perpendiculară pe un diametru fix $\overline{AB}$. Se ia apoi pe $\overline{OM}$ punctul P, ca $\overline{OP} : \overline{MN} = k$. Se cere locul punctului P.

522. Să se înscrie într-un triunghi ABC un paralelogram $ADEF$, ale cărui vîrfuri D, E, F sînt pe laturile $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, ştiind că raportul laturilor este $\overline{AD} : \overline{AE} = k$.

~~**523.**~~ Se dă un punct M pe diagonala AC a unui patrulater oarecare $ABCD$. Se duce MP paralelă la AB și întîlnind latura $\overline{BC}$ în P, MQ paralelă la CD și întîlnind pe $\overline{AD}$ în Q. Să se demonstreze că

$$\frac{\overline{MP}}{\overline{AB}} + \frac{\overline{MQ}}{\overline{CD}} = 1.$$

524. Într-un paralelogram $ABCD$ perpendiculara dusă pe latura $\overline{AB}$, prin mijlocul său I, intersectează diagonalele $\overline{BD}$, $\overline{CA}$ în M şi N. Fie $\overline{OH}$ perpendiculara dusă din punctul O de intersecție a diagonalelor pe $\overline{AB}$. Să se arate că

$$\frac{1}{\overline{IM}} + \frac{1}{\overline{IN}} = \frac{2}{\overline{OH}}.$$

525. Fie $ABCD$ un trapez cu bazele $\overline{BC}$ și $\overline{AD}$, iar punctul O, comun diagonalelor. Paralela prin O la baze intersectează laturile $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$ în E și F. Să se demonstreze că $\overline{EF}$ este media armonică a celor două baze [1].

526. Diagonalele unui patrulater $ABCD$ se intersectează în punctul O. Bisectoarea unghiului AOB intersectează laturile opuse $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$ respectiv în E și F. Să se arate că

$$\frac{\frac{1}{\overline{OE}}}{\frac{1}{\overline{OF}}} = \frac{\frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OB}}}{\frac{1}{\overline{OC}} + \frac{1}{\overline{OD}}}$$

527. Să se înscrie într-un triunghi ABC un alt triunghi $A'B'C'$, asemenea cu un triunghi dat $A_1B_1C_1$ și astfel ca vîrful A' să fie dat pe $\overline{BC}$.

528. Să se înscrie într-un triunghi ABC un triunghi ale cărui laturi sînt paralele cu laturile unui triunghi dat mnp.

529. Să se înscrie într-un patrulater $ABCD$ dat un patrulater $a'b'c'd'$ asemenea cu un alt patrulater dat $A'B'C'D'$.

530. Să se construiască un patrulater $ABCD$ în care cunoaștem laturile $\overline{BC}$ și $\overline{CD}$, suma $\sphericalangle B + \sphericalangle D = \alpha$ a unghiurilor B și D și rapoartele $\overline{AB} : \overline{AD} = k$, $\overline{AC} : \overline{AD} = k'$.

531. Prin mijlocul A' al laturii $\overline{BC}$ a unui triunghi ABC se duce o dreaptă arbitrară care intersectează laturile $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ în B', C' și paralela la $\overline{BC}$, dusă prin, A, în D'. Să se arate că $\overline{A'B'} : \overline{A'C'} = \overline{D'B'} : \overline{D'C'}$, cu alte cuvinte că A', D' sînt *conjugate armonic* în raport cu $\overline{B'C'}$.

532. Prin punctele E și F situate pe laturile $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ ale paralelogramului $ABCD$ se duc dreptele EG și FH paralele la AD și AB care se întîlnesc în I. Să se arate că dreptele BF, DE și CI se întîlnesc într-un punct.

533. Laturile opuse $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$ ale unui patrulater se intersectează în E, iar $\overline{AD}$ și $\overline{BC}$ în F. Să se arate că mijloacele diagonalelor $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{EF}$ sînt coliniare (dreapta lui Newton).

534. Să se arate că laturile opuse ale unui hexagon înscris într-un cerc se intersectează două cîte două în trei puncte coliniare (teorema lui Pascal).

---

[1] Numărul x este *media armonică* a lui a și b dacă

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

535. Să se demonstreze că diagonalele unui patrulater $ABCD$ circumscris unui cerc și diagonalele patrulaterului $EFGH$, format de punctele de contact, trec prin același punct (Newton).

536. Să se demonstreze că dacă se prelungesc laturile opuse ale unui patrulater inscriptibil $ABCD$ și se duc bisectoarele celor două unghiuri astfel formate, punctul de intersecție al acestor două drepte și mijloacele diagonalelor patrulaterului dat sînt coliniare.

537. În patrulaterul $ABCD$ se presupune că diagonalele $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ sînt egale. Să se demonstreze că cercurile care trec prin punctul I, comun diagonalelor, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, apoi prin punctele A și B, pe de o parte, și C și D, pe de altă parte, se întîlnesc încă într-un punct O care se proiectează pe laturile $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ în mijloacele lor M și N. Să se arate că $\overline{OM} : \overline{ON} = \overline{AB} : \overline{CD}$.

538. Să se găsească un punct M în planul unui triunghi ABC așa că, A', B', C' fiind proiecțiile lui pe laturile $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$, să avem

$$\overline{MA} : \overline{MC'} = \overline{MB} : \overline{MA'} = \overline{MC} : \overline{MB'}.$$

539. Să dă un triunghi ABC. Să se determine pe laturile $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ punctele P și Q, așa încît

$$\overline{BP} = \overline{PQ} = \overline{QC}.$$

540. Se dau două drepte (D_1) și (D_2) și un punct fix A. Să se construiască triunghiul ABC, cu vîrful B pe dreapta (D_1) și vîrful C pe (D_2), cunoscînd direcția laturii BC și unghiul A.

Capitolul X

RELAȚII METRICE

541. În triunghiul dreptunghic ABC se înscrie un pătrat $MNPQ$. Vîrfurile M, N se află pe ipotenuza $\overline{BC}$, iar P, Q pe laturile $\overline{AB}$, $\overline{AC}$. Să se arate că $\overline{MN}^2 = \overline{BM} \cdot \overline{NC}$.

542. Să dă dreptunghiul $ABCD$. Perpendiculara din A pe diagonala $\overline{BD}$ intersectează latura $\overline{BC}$ în F. Să se arate că $\overline{AB}^2 = \overline{BF} \cdot \overline{BC}$.

543. O tangentă BC la un cerc (O) de rază R, pe care îl atinge în A, este mărginită de două tangente paralele ale aceluiași cerc. Să se demonstreze că $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = R^2$.

544. Să se demonstreze că dacă într-un triunghi ABC medianele vîrfurilor B, C sînt perpendiculare, există relația

$$5\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2.$$

545. (O), (O') sînt două cercuri tangente între ele și tangente la o dreaptă AA' în punctele A și A'. Să se arate că, R, R' fiind razele cercurilor, avem $\overline{AA'}^2 = 4R \cdot R'$.

546. Un triunghi oarecare ABC are laturile $\overline{AB} = 13$ m, $\overline{BC} = 21$ m și înălțimea $\overline{AD} = 12$ m. Se ridică perpendiculara în A pe AB; aceasta întîlnește latura $\overline{BC}$ în E. Să se afle perimetrul triunghiului ACE.

547. Să se demonstreze că dacă proiecția D a vîrfului A al triunghiului ABC pe latura BC se face între B și C și dacă $\overline{AD}^2 = \overline{BD} \cdot \overline{DC}$, atunci $\sphericalangle A = 90°$.

548. Să se demonstreze că, dacă proiecția D a vîrfului A pe latura $\overline{BC}$ a triunghiului ABC se face pe prelungirea lui $\overline{BC}$ și dacă $\overline{AD}^2 = \overline{DB} \cdot \overline{DC}$, atunci punctul H de întîlnire a înălțimilor este simetricul lui A în raport cu $\overline{BC}$.

549. Fie A' piciorul înălțimii $\overline{AA'}$ în triunghiul ABC, iar H punctul comun înălțimilor. Să se arate că

$$\overline{BA'} \cdot \overline{A'C} = \overline{A'H} \cdot \overline{AA'}.$$

550. Se dă o dreaptă (D) și un punct fix A exterior dreptei (D). Fie M un punct variabil pe dreapta (D), iar $\overline{AN}$ un segment de lungime constantă, perpendicular pe AM. Să se arate că cercul cu centrul în M și cu raza $\overline{MN}$ trece prin două puncte fixe.

551. Se dă un triunghi ABC și înălțimea $\overline{AD}$. Se iau apoi segmentele $\overline{BE} = \overline{DC}$ și $\overline{CF} = \overline{BD}$ perpendiculare respectiv pe $\overline{AB}$ și $\overline{AC}$.

a) Să se arate că triunghiul AEF este isoscel.

b) Fie B' și C' proiecțiile lui B și C respectiv pe $\overline{AE}$ și $\overline{AF}$. Să se arate că

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}} = \left(\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\right)^2.$$

552. Fie D piciorul înălțimii dusă din A în triunghiul ABC, iar E și F proiecțiile lui D pe $\overline{AB}$ și $\overline{AC}$. Să se demonstreze că $\overline{EF}$ este egal cu semiperimetrul triunghiului ortic.

553. Se dau trei puncte A, B, C pe un cerc (O) de rază R. Să se arate că dacă $\overline{MA}^2 = \overline{MB} \cdot \overline{MC}$, atunci și inversul său M'

[*inversul* M' al lui M în raport cu (O) este un punct de pe raza $\overline{OM}$, de aceeași parte a lui (O), astfel ca $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = R^2$] în raport cu (O) satisface relația $\overline{M'A}^2 = \overline{M'B} \cdot \overline{M'C}$.

554. Se dă un punct A pe cercul (O) și două puncte inverse B, C. Să se arate că dacă M satisface relația $\overline{MA}^2 = \overline{MB} \cdot \overline{MC}$, atunci și inversul M' al punctului M satisface relația $\overline{M'A}^2 = \overline{M'B} \cdot \overline{M'C}$.

555. Se dau trei puncte A, B, C pe un cerc (O) și un alt punct M așa ca $\overline{MA}^2 = \overline{MB} \cdot \overline{MC}$. Tangenta în A întîlnește dreapta BC în O'; fie M' inversul lui M în raport cu cercul (O') descris din O' ca centru cu $\overline{O'A}$ ca rază. Să se arate că $\overline{M'A}^2 = \overline{M'B} \cdot \overline{M'C}$.

556. Să se demonstreze că în orice paralelogram $ABCD$ suma pătratelor laturilor este egală cu suma pătratelor diagonalelor.

557. În orice patrulater $ABCD$ suma pătratelor laturilor este egală cu suma pătratelor diagonalelor, plus de patru ori pătratul segmentului care unește mijloacele diagonalelor (Euler).

558. Să se demonstreze că într-un trapez oarecare $ABCD$ suma pătratelor diagonalelor este egală cu suma pătratelor laturilor neparalele, plus de două ori produsul bazelor.

559. Fie ABC, DBC două triunghiuri echilaterale, simetrice în raport cu $\overline{BC}$, P un punct pe cercul descris din D ca centru cu $\overline{DB}$ ca rază. Să se arate că $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$ sînt laturile unui triunghi dreptunghic.

560. Un patrulater $ABCD$ are una din diagonalele sale $\overline{BD}$ fixă, cealaltă, $\overline{AC}$, de lungime constantă se mișcă paralel cu o direcție dată. Să se găsească locul vîrfurilor A, C știind că suma pătratelor laturilor patrulaterului este constantă.

561. Fie A, B, C, D vîrfurile unui pătrat și M, N, P, Q mijloacele laturilor. Să se demonstreze că dacă O este un punct oarecare din plan, expresia

$$\sum \overline{OA}^2 - \sum \overline{OM}^2$$

are ca valoare aria pătratului.

562. Se consideră pătratul $ABCD$, cercul (O) înscris în acest pătrat și un punct M mobil pe cercul (O). Să se arate că suma

$$S = \overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 + \overline{MD}^2$$

este constantă și să se exprime cu ajutorul laturii pătratului.

563. Dacă suma a două unghiuri opuse într-un patrulater este de 90° și dacă notăm, cu a, b, c, d laturile parcurse în același sens, iar cu δ, δ' diagonalele, atunci există relația

$$a^2c^2 + b^2d^2 = \delta^2\delta'^2.$$

564. Dacă se ia un punct mobil M pe ipotenuza unui triunghi dreptunghi, să se arate că există relația

$$\overline{MB}^2 \cdot \overline{AC}^2 + \overline{MC}^2 \cdot \overline{AB}^2 = \overline{MA}^2 \cdot \overline{BC}^2.$$

565. Să se demonstreze că dacă un triunghi echilateral are vîrfurile pe trei drepte paralele, care au între ele distanțele a, b, latura triunghiului are valoarea

$$l = 2\sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{3}}.$$

566. Să se demonstreze că M fiind un punct oarecare pe baza BC a unui triunghi ABC, între B și C, avem *relația lui Stewart*:

$$\overline{AB}^2 \cdot \overline{MC} + \overline{AC}^2 \cdot \overline{MB} = \overline{AM}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{MB} \cdot \overline{MC} \cdot \overline{BC}.$$

567. Să se demonstreze că diferența pătratelor laturilor $\overline{AB}$ ș $\overline{AC}$ ale unui triunghi ABC este egală cu diferența pătratelor proiecțiilor $\overline{A'B}$, $\overline{A'C}$ pe $\overline{BC}$.

568. Fie α, β γ trei puncte luate respectiv pe laturile $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ ale triunghiului ABC. Să se demonstreze că relația

$$\overline{B\alpha}^2 - \overline{C\alpha}^2 + \overline{C\beta}^2 - \overline{A\beta}^2 + \overline{A\gamma}^2 - \overline{B\gamma}^2 = 0$$

exprimă condiția necesară și suficientă pentru ca perpendicularele în α, β, γ pe laturile pe care se găsesc să treacă prin același punct.

569. Să se demonstreze că într-un triunghi înălțimile sînt concurente.

570. G fiind punctul de întîlnire al medianelor triunghiului ABC, să se arate că

$$3(\overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2) = \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2.$$

571. Să se demonstreze că G fiind punctul de întîlnire a medianelor triunghiului ABC și M un punct oarecare în plan, avem

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = 3\overline{MG}^2 + \overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2.$$

572. O fiind centrul cercului circumscris de rază R, G punctul de întîlnire al medianelor triunghiului ABC avînd ca laturi $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{AB} = c$, să se demonstreze că

$$\overline{GO}^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2).$$

573. H fiind punctul de întîlnire a înălțimilor din problema precedentă, să se arate că

$$\overline{HO}^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

574. Se dau trei triunghiuri $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$. Să se arate că există un punct M, așa încît

$$\overline{MA}_1^2 + \overline{MB}_1^2 + \overline{MC}_1^2 = \overline{MA}_2^2 + \overline{MB}_2^2 + \overline{MC}_2^2 = \overline{MA}_3^2 + \overline{MB}_3^2 + \overline{MC}_3^2.$$

575. Fie O centrul unui pătrat $ABCD$ și M un punct oarecare în planul lui. Să se arate că

$$\overline{MA}^4 + \overline{MB}^4 + \overline{MC}^4 + \overline{MD}^4 = 4\overline{MO}^4 + 8\overline{AB}^2 \cdot \overline{MO}^2 + \overline{AB}^4.$$

Cînd M se află pe cercul înscris pătratului, avem

$$\overline{MA}^4 + \overline{MB}^4 + \overline{MC}^4 + \overline{MD}^4 = 24R^4.$$

576. Se consideră două triunghiuri ABC, $A'B'C'$ simetrice în raport cu o dreaptă. Să se demonstreze că perpendicularele coborîte din A', B', C' respectiv pe laturile $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ sînt concurente.

577. Se proiectează vîrfurile triunghiului ABC în punctele A', B', C' pe o dreaptă oarecare (Δ) din plan. Să se demonstreze că perpendicularele coborîte din A', B', C' respectiv pe $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ sînt concurente într-un punct ω [ortopolul dreptei (Δ) în raport cu triunghiul ABC].

578. Să se demonstreze că dacă perpendicularele coborîte din vîrfurile triunghiului ABC pe laturile triunghiului $A'B'C'$ sînt concurente, atunci și perpendicularele coborîte din vîrfurile lui $A'B'C'$ pe laturile lui ABC sînt concurente *(triunghiurile ABC și $A'B'C'$ se numesc ortologice)*.

579. Două *triunghiuri* ABC, $A'B'C'$ sînt *omologice* (dreptele AA', BB', CC' se întîlnesc într-un punct I, *centrul de omologie*). Perpendicularele în A pe $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ întîlnesc pe $\overline{A'B'}$, $\overline{A'C'}$ respectiv în A_c, A_b. Analog, perpendicularele duse în B și C pe dreptele (BA, BC), (CB, CA) determină pe $(B'A', B'C')$, $(C'B', C'A')$ punctele (B_c, B_a), (C_a, C_b). Să se arate că perpendicularele coborîte din A, B, C pe dreptele A_bA_c, B_cB_a, C_aC_b sînt concurente.

580. Dacă se convine să se considere pozitive segmentele luate pe laturile triunghiului ABC într-un anumit sens și negative cele luate în sens contrar, să se arate că relația din problema **568** se poate pune sub forma

$$\overline{a\alpha} \cdot \overline{BC} + \overline{b\beta} \cdot \overline{CA} + \overline{c\gamma} \cdot \overline{AB} = 0.$$

a, b, c fiind mijloacele laturilor triunghiului.

581. Se proiectează punctul F din planul triunghiului ABC pe laturi în α, β, γ. Cercul circumscris triunghiului $\alpha\beta\gamma$ intersectează din nou laturile lui ABC în α', β', γ'. Să se arate că perpendicularele în α', β', γ' pe laturile $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ sînt concurente.

582. Prin vîrful A al triunghiului ABC se duc două drepte simetrice în raport cu bisectoarea unghiului A (ceviene izogonale) care întîlnesc latura BC în M și N. Să se arate că

$$\frac{\overline{CM}\cdot\overline{CN}}{\overline{BM}\cdot\overline{BN}}=\frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2}\quad \textit{(teorema lui Steiner)}.$$

583. Să se arate că simediana AN (izogonala medianei AM) a triunghiului ABC împarte pe $\overline{BC}$ în raportul.

$$\frac{\overline{NB}}{\overline{NC}}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}.$$

584. Fie P și Q două puncte situate pe cevienele izogonale AM și AN, iar P', P'' și Q', Q'' proiecțiile lor pe $\overline{AB}$ și $\overline{AC}$. Să se arate că

$$\overline{PP'}\cdot\overline{QQ'}=\overline{PP''}\cdot\overline{QQ''}.$$

585. Să se arate că dacă relația din problema precedentă este satisfăcută, dreptele AP, BQ sînt egal înclinate pe bisectoarea unghiului A.

586. Fie M un punct oarecare în planul triunghiului ABC. Să se arate că simetricele dreptelor AM, BM, CM în raport cu bisectoarele unghiurilor A, B, C trec prin același punct N (inversul sau izogonalul punctului M).

587. Să se demonstreze că simedianele unui triunghi ABC trec prin același punct K *(punctul lui Lemoine)*.

588. Să se demonstreze că distanțele mutuale dintre izogonalele (paralele) cevienelor unui punct de pe cercul circumscris unui triunghi sînt egale respectiv cu segmentele determinate de laturile triunghiului pe dreapta lui Simson a punctului considerat.

589. Locul mijloacelor antiparalelelor la latura $\overline{BC}$ a triunghiului ABC este simediana AK. Această dreaptă este de asemenea locul punctelor prin care trec antiparalelele la laturile unghiurilor B și C egale între ele. Să se deducă de aici că antiparalelele duse prin K întîlnesc laturile triunghiului în șase puncte situate pe un cerc cu centrul în K *(cel de-al doilea cerc al lui Lemoine)*.

590. Să se demonstreze că dacă se împart în același raport dreptele AK, BK, CK, ce unesc vîrfurile triunghiului ABC cu punctul lui Lemoine K, antiparalelele duse prin punctele de diviziune întîlnesc laturile triunghiului în șase puncte conciclice.

591. Prin punctul lui Lemoine K al triunghiului ABC se duc paralelele A_bA_c, B_cB_a, C_aC_b la laturi. Să se arate că punctele A_b, A_c, B_c, B_a, C_a, C_b se găsesc pe un cerc cu centrul în mijlocul segmentului $\overline{OK}$, ce unește centrul cercului circumscris cu punctul lui Lemoine *(primul cerc al lui Lemoine)*.

592. Se divid înălțimile $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ ale triunghiului ABC în părți proporționale, plecînd de la vîrfuri espre laturi. Să se demonstreze că proiecțiile punctelor de diviziune A'', B'', C'' pe cele două laturi ce corespund înălțimii considerate sînt șase puncte A_b, A_c, B_c, B_a, C_a, C_b conciclice.

593. Se proiectează picioarele A', B', C' ale înălțimilor triunghiului ABC pe laturi, în punctele A_b, A_c, B_c, B_a, C_a, C_b. Să se demonstreze că aceste puncte sînt conciclice *(cercul lui Taylor)*.

594. Fie M și M_1 două puncte inverse în raport cu triunghiul ABC iar X, Y, Z; X_1, Y_1 Z_1, proiecțiile acestor puncte pe laturile triunghiului. Să se arate că aceste șase puncte se află pe un cerc cu centrul în mijlocul ω al segmentului $\overline{MM_1}$.

595. Păstrînd notațiile problemei precedente, să se arate că:

a) dacă din punctele X, Y, Z ca centre descriem cercuri care trec prin punctul M_1, ele intersectează respectiv laturile $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ în punctele A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 care se află pe un același cerc cu centrul în M;

b) dacă din punctele X, Y, Z, ca centre, descriem cercuri care trec prin punctul M, ele intersectează laturile corespunzătoare $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{BA}$ în punctele A_1', A_2', B_1', B_2', C_1', C_2', care se află pe un același cerc cu centrul în M_1 și egal cu precedentul.

596. I fiind centrul cercului înscris în triunghiul ABC, să se demonstreze că proiecția pe bisectoarea din A a unui punct arbitrar P al cercului BIC este centrul cercului circumscris triunghiului podar al punctului P, în raport cu triunghiul ABC.

597. Să se demonstreze că toate triunghiurile dreptunghice care au laturile în progresie aritmetică sînt asemenea.

598. Se dă un pătrat $ABCD$. Pe laturile $\overline{BC}$ și $\overline{CD}$ se iau respectiv punctele M și N, așa ca unghiul MAN să fie de $45°$. Pe $\overline{BC}$, în sensul BC, se mai ia un punct P, așa ca $\overline{BM}$ să fie egal cu $\overline{CP}$. Să se demonstreze că

$$\overline{BP} \cdot \overline{DN} = \overline{AB} \cdot \overline{CM}.$$

599. Să se afle locul punctelor M așa ca diferența pătratelor distanțelor a două puncte date A, B, să fie constantă.

600. Se dă un patrulater $ABCD$ în care $\overline{AB} = \overline{CD}$. Se cere locul punctului M care satisface relația

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = \overline{MC}^2 + \overline{MD}^2.$$

601. Se dă un patrulater convex $ABCD$. Să se demonstreze că dacă există un singur punct pe una din diagonalele $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, care să se bucure de proprietatea că produsul distanțelor sale la două laturi opuse ale patrulaterului să fie egal cu produsul distanțelor la celelalte laturi opuse, atunci orice punct luat pe una din diagonale se bucură de aceeași proprietate.

602. Triunghiurile ABC, $A'B'C'$ au același punct de întîlnire al medianelor G, iar $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ trec prin C, A, B și intersectează laturile opuse în C'', A'', B''. Să se arate că A'', B'', C'' împart în același raport laturile $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$.

Capitolul XI

RELAȚII METRICE ÎN CERC

603. Printr-un punct fix din planul unui cerc se duc două coarde, variabile, perpendiculare. Să se demonstreze că suma pătratelor acestor coarde este constantă.

604. Se dau două cercuri concentrice. Printr-un punct variabil de pe unul din cercuri se duc două coarde perpendiculare în celălalt cerc. Să se demonstreze că suma pătratelor acestor coarde este constantă.

605. În interiorul unui cerc (O) de rază, R, se ia un punct P prin care se duc două coarde perpendiculare $\overline{AB}$, $\overline{CD}$. Să se demonstreze relația

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} \leqslant 2(2R^2 - \overline{OP}^2).$$

606. Fie A și B punctele de contact ale unei tangente comune cercurilor (O) și (O_1). Din O, O_1 se duc ON și O_1M tangente respectiv la (O_1) și (O). Să se arate că

$$\overline{O_1A}^2 - \overline{OB}^2 = \overline{O_1M}^2 - \overline{ON}^2.$$

607. Să se demonstreze că dacă două cercuri sînt tangente exterioare, atunci tangenta lor comună exterioară este media proporțională între diametrele lor.

608. Să se demonstreze că dacă un trapez isoscel este circumscris unui cerc, atunci diametrul cercului este media proporțională între bazele trapezului.

609. Să se demonstreze că în două cercuri ortogonale tangenta comună este media proporțională între distanța centrelor și coarda comună și reciproc.

610. Unind un punct mobil A, luat pe un cerc, cu două puncte fixe M și N, egal depărtate de centru, așezate pe același diametru și ducînd coardele AMB și ANC, să se arate că $\frac{1}{MB^2}+\frac{1}{NC^2} = \text{const.}$

611. Fie M un punct pe latura $\overline{BC}$ a unui triunghi ABC, $\overline{MP}$ proiecția segmentului $\overline{AM}$ pe $\overline{BC}$. Din A ca centru, cu $\overline{AC}$ și $\overline{AM}$, ca raze, se descriu arce de cerc care intersectează pe BC în C' și M'. Presupunînd $\overline{AC} < \overline{AM} < \overline{AB}$, să se demonstreze relațiile:

$$\overline{AB^2} - \overline{AC^2} = \overline{BC} \cdot \overline{BC'}; \quad \overline{AB^2} - \overline{AM^2} = \overline{BM} \cdot \overline{BM'};$$

$$\overline{AM^2} - \overline{AC^2} = \overline{CM} \cdot \overline{C'M}.$$

612. Să se demonstreze că diferența pătratelor a două laturi $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ ale unui triunghi este egală cu de două ori produsul laturii a treia prin proiecția $\overline{MP}$ a medianei $\overline{AM}$ pe $\overline{BC}$.

613. Să se construiască un triunghi ABC cunoscînd latura $\overline{BC}$, piciorul A' al înălțimii $\overline{AA'}$ pe această latură și știind că $\sphericalangle BAC = 2\sphericalangle ABC$.

614. Să se demonstreze că într-un patrulater înscris într-un cerc, produsul diagonalelor este egal cu suma produselor laturilor opuse (teorema lui Ptolomeu).

615. Folosind problema 612, să se afle locul punctelor M așa ca diferența pătratelor distanțelor la două puncte date A, B să fie constantă.

616. Se dă o dreaptă (D), două puncte A și B nesituate pe dreaptă și un segment de lungime cunoscută $\overline{MN} = l$. Să se așeze segmentul $\overline{MN}$ pe dreapta (D) astfel ca să fie văzut din A și B sub unghiuri egale. Discuție.

617. Se dă un cerc (O) de rază R înscris într-un unghi. Se construiesc două cercuri (O') și (O'') tangente lui (O) și laturilor unghiului și două cercuri (O_1) și (O_2) tangente la cercurile (O') și (O), respectiv (O) și (O''), și la una din laturile unghiului.

a) Să se demonstreze relaţia

$$\sqrt{r} + \sqrt{r'} = \sqrt{R},$$

r şi r' fiind razele cercurilor (O_1) şi (O_2).

b) Dacă A_1 şi A_2 sînt punctele de tangenţă ale cercurilor (O_1) şi (O_2) cu latura unghiului, să se demonstreze că $\overline{A_1A_2} = 2R$.

618. Se dă un segment de dreaptă $\overline{AB}$. P fiind un punct oarecare de pe $\overline{AB}$, se duc de aceeaşi parte a lui $\overline{AB}$ semicercurile care au respectiv ca diametre $\overline{AP}$ şi $\overline{PB}$. Se construieşte tangenta lor comună MN.

a) Dreptele AM şi BN se intersectează în I. Să se afle locul geometric al punctului I, cînd punctul P se mişcă pe $\overline{AB}$.

b) Segmentul $\overline{AB} = a$ fiind dat, să se determine printr-o construcţie grafică punctul P, astfel ca tangenta comună MN să aibă o lungime dată l.

c) Ce relaţie trebuie să existe între l şi a pentru ca să fie posibilă construcţia? Care este valoarea maximă pe care o poate avea segmentul $\overline{MN}$?

619. Se dau două cercuri de centre A şi B. Rezele lor sînt R şi r, iar distanţa dintre centrele lor este $\overline{AB} = d$. Se duce cercul de diametru $\overline{CD}$, C şi D fiind puncte de contact ale unei tangente comune exterioare.

a) Să se demonstreze că dacă cercurile sînt exterioare, şi numai în acest caz, cercul de diametru $\overline{CD}$ intersectează linia centrelor în două puncte. Care trebuie să fie poziţia relativă a primelor două cercuri pentru ca cercul al treilea să fie tangent la linia centrelor?

b) Fie M şi N punctele unde cercul al treilea intersectează pe $\overline{AB}$. Să se demonstreze că

$$\overline{AM} \cdot \overline{AN} = R^2; \qquad \overline{BM} \cdot \overline{BN} = r^2.$$

620. Se dă un triunghi ABC avînd $\sphericalangle A > 90°$.

a) Să se construiască pe latura $\overline{BC}$ punctele M pentru care

$$\overline{AM}^2 = \overline{BM} \cdot \overline{MC}.$$

Să se arate că există totdeauna două soluţii M_1 şi M_2, iar cevienele AM_1 şi AM_2 sînt izogonale.

b) Fie D şi E picioarele medianei şi înălţimii din vîrful A. Să se demonstreze că $\overline{M_1D} = \overline{M_2E}$.

621. Fără a mai ține seama de condiția $\sphericalangle A > 90°$, să se construiască un triunghi în care cele două puncte M_1 și M_2 din problema precedentă să fie confundate. Să se demonstreze că într-un astfel de triunghi:

a) $b + c = a\sqrt{2}$;

b) r, h_a, r_a sînt în progresie geometrică. (Notațiile sînt cele obișnuite.

622. Se dă patrulaterul $ABCD$ și se notează: $E \equiv (AB; CD)$; $F \equiv (AD; BC)$; $I \equiv (AC; BD)$. Fie (Δ_1) dreapta ortocentrelor celor patru triunghiuri formate de laturile patrulaterului $ABCD$ și (Δ_2), (Δ_3) dreptele analoge în patrulaterele $IAED$ și $IAFB$. Ce condiție trebuie să îndeplinească patrulaterul $ABCD$ pentru ca dreptele (Δ_1), (Δ_2), (Δ_3) să fie concurente?

623. Se dă triunghiul isoscel ABC $(\overline{AB} = \overline{AC})$ și fie M un punct mobil pe $\overline{BC}$. Cercurile AMB, AMC intersectează laturile AC, AB a doua oară în punctele B_1, C_1. Să se arate că suma segmentelor $\overline{BC_1}$ și $\overline{CB_1}$ este constantă.

624. Se dă cercul (O) și punctul exterior P. Fie α un punct mobil pe cercul dat (O). Cercul (K) ce trece prin P și α intersectează a doua oară cercul (O) în β. Dreapta $\alpha\beta$ intersectează tangenta în P la cercul (K) în punctul M. Să se afle locul punctului M.

625. Să se afle locul geometric al proiecției ortocentrului unui triunghi ABC pe mediana corespunzătoare vîrfului A, știind că punctele B și C sînt fixe și că suma pătratelor medianelor triunghiului este constantă.

626. Să se afle locul punctului M așa ca puterea lui în raport cu un cerc (O) de rază R să fie egală cu pătratul distanței sale la un punct dat A.

627. Să se afle locul punctelor M, care au puteri egale în raport cu două cercuri date (O), (O') de raze R, R'.

628. Fie ABC un triunghi oarecare, O centrul cercului circumscris. Pe medianele $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ $\overline{CC'}$ ca diametre se descriu cercurile de centre O_a, O_b, O_c. Să se demonstreze că:

a) cercurile (O_a), (O_b), (O_c) au ca centru radical ortocentrul triunghiului ABC;

b) axele radicale ale cercurilor (O_a, O), (O_b, O), (O_c, O) întîlnesc laturile $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ în trei puncte coliniare.

629. Să se afle locul geometric al centrelor cercurilor care trec printr-un punct fix A și sînt ortogonale unui cerc dat.

630. Se dau două perechi de puncte A, B și A', B' precum și o dreaptă (D). Să se ducă un cerc prin A și B și alt cerc prin A', B', astfel încît secanta lor comună să fie dreapta (D).

Să se discute condițiile de posibilitate ale problemei.

631. Se dau două cercuri (O) și $O')$. Să se ducă o secantă comună cercurilor (O) și (O') care să determine în acestea coarde egale și așa fel ca secanta comună:

a) să fie paralelă cu o direcție dată (Δ);

b) să treacă printr-un punct dat P.

Discuție.

632. Fie O punctul comun al diagonalelor unui patrulater ortodiagonal $ABCD$ și M, N, P, Q proiecțiile lui O respectiv pe $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$. Să se demonstreze că:

a) patrulaterul $MNPQ$ este inscriptibil;

b) laturile opuse ale acestui patrulater se întîlnesc pe diagonalele patrulaterului $ABCD$.

633. Există vreun punct care să aibă puteri egale în raport cu trei cercuri (O), (O'), (O'')?

634. Se dau două cercuri fixe cu centrele O_1 și O_2, de raze respectiv r_1 și r_2. Să se afle locul geometric al centrului O al unui al treilea cerc, de rază dată r, astfel ca tangentele comune exterioare, la perechile de cercuri (O), (O_1) și (O), (O_2) să fie egale. Ce condiție trebuie să îndeplinească raza r a cercului (O) pentru ca locul geometric de mai sus să fie chiar mediatoarea segmentului $\overline{O_1O_2}$?

635. Fiind date trei cercuri (O_1), (O_2), (O_3), de raze r_1, r_2, r_3, să se arate că există un cerc (O) de rază r, astfel ca tangentele lui comune cu cele trei cercuri (O_1), (O_2), (O_3) să fie egale.

636. Să se demonstreze că centrul ω al unui cerc, care intersectează ortogonal[1] două cercuri date (O), $O')$, se găsește pe axa radicală a acelor cercuri.

637. Să se demonstreze că două cercuri oarecare (C), (C'), care intersectează ortogonal două cercuri date (O), (O'), au drept axă radicală linia centrelor OO'.

638. Se dau două cercuri fixe (O') și (O'') și se consideră toate cercurile (C) ortogonale lor. Să se demonstreze că axele radicale ale cercurilor (C) cu un cerc fix (O) oarecare trec printr-un punct fix.

---

[1] Unghiul a două cercuri este unghiul tangentelor într-un punct comun. Două *cercuri* se numesc *ortogonale* cînd se intersectează în unghi drept.

639. Să se demonstreze că dacă avem două cercuri ortogonale, orice diametru al unuia din cercuri este împărțit armonic de punctele lui de intersecție cu al doilea cerc.

640. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Laturile AB, AC întîlnesc a doua oară cercul BOC respectiv în B_1 și C_1. Fie D punctul de intersecție al dreptelor BC și B_1C_1. Să se arate că cercul descris pe OD ca diametru este ortogonal cu cercul tangent în A dreptei AD şi cu centrul pe B_1C_1.

641. Fie G punctul de întîlnire a medianelor unui triunghi ABC. Dreapta AG întîlneşte cercul ABC în D. Să se demonstreze că avem relația

$$9\overline{AG}\cdot\overline{GD} = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2.$$

642. Să se determine locul centrelor cercurilor care intersectează două cercuri date (O), (O') în cîte două puncte diametral opuse.

643. Fie A un punct fix pe un cerc (O), $\overline{BC}$ o coardă variabilă așa ca $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 =$ const. Se cere locul mijlocului M al coardei $\overline{AB}$.

644. Să se determine locul punctelor M, așa ca între distanțele $\overline{MA}$, $\overline{MB}$ la două puncte fixe A, B să avem relația

$$\alpha\overline{MA}^2 + \beta\overline{MB}^2 = K^2 \qquad (\alpha,\ \beta \text{ fiind pozitive}).$$

645. Să se determine locul punctelor M, așa ca

$$\alpha\overline{MA}^2 - \beta\overline{MB}^2 = K^2.$$

646. Să se determine locul punctelor M din planul triunghiului ABC, astfel ca să avem

$$\alpha\overline{MA}^2 + \beta\overline{BM}^2 + \gamma\overline{MC}^2 = K^2,$$

α, β, γ, K fiind constante oarecare.

647. Se consideră triunghiul ABC de laturi $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{AB} = c$. Se cere locul lui M din planul său, astfel ca

$$b\overline{MB}^2 + c\overline{MC}^2 - a\overline{MA}^2 = abc.$$

648. Să se demonstreze că produsul a două laturi $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ într-un triunghi ABC este egal cu pătratul bisectoarei interioare a unghiului A, plus produsul segmentelor pe care această bisectoare le determină pe latura a treia $\overline{BC} = a$.

649. Într-un patrulater $ABCD$, laturile opuse AB, CD se întîlnesc în P și sînt perpendiculare. Să se demonstreze că suma pătratelor celorlalte două laturi este egală cu suma pătratelor diagonalelor.

650. Aceleași date ca la problema precedentă. Să se demonstreze că suma pătratelor celor două laturi perpendiculare este egală cu de patru ori pătratul segmentului care unește mijloacele celorlalte două laturi.

651. Aceleași date ca la problema **649.** Să se arate că suma pătratelor diagonalelor este egală cu de două ori suma pătratelor segmentelor care unesc mijloacele laturilor opuse.

652. Aceleași date ca la problema **649**, patrulaterul $ABCD$ fiind înscris într-un cerc. Să se demonstreze că diferența dintre pătratul sumei diagonalelor și pătratul sumei celor două laturi opuse, care nu sînt perpendiculare, este egală cu îndoitul produsului celorlalte două laturi.

653. Fie $\overline{CD}$ o coardă perpendiculară pe diametrul $\overline{AB}$ al unui cerc. Prin C și D se duc coardele $\overline{CM}$, $\overline{DN}$ paralele. Se presupune că coarda $\overline{CM}$ întîlnește cercul în M, pe arcul AD, iar AN îl întîlnește în N, pe arcul BC. Să se demonstreze că

$$\frac{\overline{AM}+\overline{AN}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BM}+\overline{BN}}{\overline{BC}}.$$

654. Într-un cerc este înscris patrulaterul $ABCD$. Fie M mijlocul arcului CD și A', B' punctele unde dreptele AM și BM întîlnesc latura CD. Să se arate că există relația

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{B'C}}{\overline{BC}}\cdot\frac{\overline{A'D}}{\overline{AD}}.$$

655. Într-un patrulater inscriptibil $ABCD$ ale cărui diagonale sînt prependiculare, să se arate că

$$(\overline{AB}-\overline{AD})(\overline{CB}-\overline{CD})=\overline{BD}(2R-\overline{AC}),$$

$2R$ fiind diametrul cercului circumscris.

656. Două triunghiuri echilaterale ABC, $A'B'C'$ sînt înscrise în două cercuri concentrice. Fie P un punct pe cercul ABC; P', altul pe cercul $A'B'C'$. Să se demonstreze că

$$\overline{PA'^2}+\overline{PB'^2}+\overline{PC'^2}=\overline{P'A^2}+\overline{P'B^2}+\overline{P'C^2}.$$

657. Se consideră un patrulater $ABCD$ și un punct P în planul său. Să se demonstreze că suma puterilor punctului P în raport cu cercurile descrise pe cele patru laturi și pe cele două diagonale ca diametre este egală cu de două ori suma puterilor P în raport cu cercurile descrise pe segmentele care unesc mijloacele laturilor opuse și mijloacele diagonalelor.

658. Se consideră un patrulater $ABCD$ înscris într-un cerc (O) de rază R. Diagonalele AC şi BD se întîlnesc în H. Pe aceste diagonale, ca coarde, se descriu cercuri de aceeaşi rază r, (ω_1), (ω_2) simetrice în raport cu AC, (ω_3) şi (ω_4) simetrice în raport cu BD. Să se arate că există două cercuri cu centrul în H şi tangente celor patru cercuri.

659. Să se arate că pătratul distanţei dintre două puncte inverse în raport cu un cerc este egal cu suma puterilor acestor puncte în raport cu acelaşi cerc.

660. Fiind dat un triunghi ABC, să notăm cu D al doilea punct de intersecţie al cercurilor (CA) şi (BA) ce trec prin punctele A şi C, A şi B şi sînt tangente respectiv la AB şi AC. Să se arate că AD este simediana unghiului A în triunghiul ABC şi că simetricul punctului A în raport cu D este pe cercul circumscris triunghiului ABC.

661. Să se arate că diferenţa puterilor unui punct în raport cu două cercuri date este egală cu de două ori produsul distanţei centrelor celor două cercuri prin distanţa punctului dat la axa radicală a cercurilor.

662. Dacă A', A'' sînt punctele unde un cerc dus arbitrar prin vîrful A al triunghiului ABC intersectează latura opusă, M punctul unde acelaşi cerc intersectează din nou cercul circumscris triunghiului ABC, iar A_1 punctul de intersecţie al dreptelor AM şi BC, avem

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} = \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{A''B}}{\overline{A''C}}.$$

Să se deducă de aici teorema lui Steiner (problema 582).

663. Dacă suma puterilor unui vîrf al unui triunghi, în raport cu cercurile descrise din celelalte două vîrfuri ca centre, este aceeaşi pentru cele trei vîrfuri ale triunghiului, centrul radical al celor trei cercuri este acelaşi, oricare ar fi cele trei cercuri. Să se arate că acest centru radical este simetricul ortocentrului în raport cu centrul cercului circumscris.

664. Se consideră un triunghi ABC, cu medianele $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$. Din fiecare vîrf, ca centru, se descrie un cerc avînd ca rază latura opusă. Din fiecare mijloc A_1, B_1, C_1, ca centru, se descrie un cerc trecînd prin vîrful opus. Să se arate că aceste două sisteme de cercuri au acelaşi centru radical.

665. O fiind centrul cercului circumscris, I centrul cercului înscris unui triunghi ABC, R şi r razele lor, să se arate că avem relaţia (lui Euler)

$$\overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr.$$

666. Se consideră două cercuri interioare de centre O, I și de raze R, r. Să se arate că dacă avem relația

$$\overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr,$$

atunci există o infinitate de triunghiuri înscrise în cercul (O, R) și circumscrise cercului (I, r).

667. Se consideră cele două cercuri (O) și (I) din problema precedentă, ABC un triunghi înscris în (O) și circumscris lui (I), X, Y, Z punctele de tangență și I_a, I_b, I_c centrele cercurilor exînscrise triunghiului ABC. Să se arate că centrul de asemănare S al triunghiurilor omotetice XYZ și $I_aI_bI_c$ și ortocentrul H_i al triunghiului XYZ sînt fixe, cînd triunghiul ABC variază în condițiile problemei.

668. Se dă un triunghi ABC. Fie O centrul cercului circumscris, I centrul cercului înscris și α punctul de tangență al acestuia cu latura BC. Dreptele AO și AI intersectează cercul circumscris respectiv în A' și A''. Să se demonstreze că dreptele $A'I$, $A''\alpha$ se întîlnesc pe cercul circumscris.

669. Fie A', B', C' mijloacele laturilor $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ ale triunghiului ABC. Cercul descris pe AA' ca diametru intersectează cercul ABC în A'' și fie B'', C'' punctele analoge. Să se arate că AA'', BB'', CC'' întîlnesc laturile opuse în trei puncte coliniare.

670. Într-un triunghi ABC cercurile descrise pe înălțimile $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$ ca diametre intersectează cercul circumscris în A_2, B_2, C_2, iar cercul (O') circumscris triunghiului $A_1B_1C_1$ în A_3, B_3, C_3. Să se arate că dreptele AA_2, A_1A_3: BB_2, B_1B_3; CC_2, C_1C_2 se intersectează în α, β, γ, care sînt coliniare.

671. Fie A', B', C' picioarele înălțimilor unui triunghi ABC, B_1 și C_1 proiecțiile punctelor B și C pe dreapta $B'C'$, iar B_a, C_a proiecțiile punctelor B', C' pe latura BC. Să se arate că:

a) punctele B_a, C_a, B_1, C_1 se află pe un cerc (Γ_a), al cărui centru este mijlocul segmentului $\overline{B_1C_1}$;

b) cercul (Γ_a) împreună cu cele două anaolge au ca centru radical centrul cercului circumscris triunghiului ABC;

c) cercurile descrise pe segmentele $\overline{A'B'}$ și $\overline{A'C'}$ ca diametre sînt tangente cercului (Γ_a).

672. Fie D, E, F punctele de contact ale cercului înscris în triunghiul ABC respectiv cu laturile BC, CA și AB. Să se arate că dreptele AD, BE, CF trec printr-un același punct N (*punctul lui Gergonne* al triunghiului).

673. Să se arate că dreptele care unesc vîrfurile triunghiului ortic $A'B'C'$ al unui triunghi ABC cu punctele în care medianele lui ABC intersectează a doua oară cercul lui Euler concură în izogonalul punctului lui Gergonne al triunghiului ortic.

674. Să se arate că centrul I al cercului înscris într-un triunghi ABC este intersecția dreptelor care unesc mijloacele laturilor cu mijloacele trasversalelor unghiulare AN, BN, CN ale punctului N al lui Gergonne.

675. Să se arate că perpendicularele duse din punctul lui Gergonne N al triunghiului ABC, pe cele trei bisectoare interioare, întîlnesc laturile triunghiului în șase puncte situate pe un cerc, concentric cu cercul înscris (I) *(cercul lui Adams)*.

676. Fie A', B', C', picioarele înălțimilor triunghiului ABC; M, N, P punctele unde $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ intersectează laturile $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$. Să se demonstreze că punctele M, N, P sînt coliniare (axul ortic).

677. Fie AA', BB', CC' înălțimile unui triunghi ABC care se întîlnesc în H. Să se demonstreze că

$$\overline{HA}\cdot\overline{HA'}=\overline{HB}\cdot\overline{HB'}=\overline{HC}\cdot\overline{HC'}.$$

678. Să se arate că cercurile, care admit înălțimile AA', BB' CC' ale triunghiului ABC drept coarde și intersectează ortogonal cercul circumscris, au dreapta OH, care unește centrul cercului circumscris cu ortocentrul, ca axă radicală comună.

679. Să se deducă din problema precedentă că tangentele în vîrfurile unui triunghi, la cercul circumscris triunghiului, întîlnesc laturile opuse în trei puncte coliniare.

680. Fie P_a, P_b, P_c picioarele cevienelor punctului P în raport cu triunghiul ABC. Să se arate că perpendicularele coborîte din ortocentrul H pe cevienele AP, BP, CP întîlnesc cercurile descrise respectiv pe segmentele $\overline{AP_a}$, $\overline{BP_b}$, $\overline{CP_c}$ ca diametre, în perechile de puncte X, X'; Y, Y'; Z, Z' ce se găsesc pe același cerc cu centrul în P.

681. Să se arate că perpendicularele coborîte din ortocentrul H al triunghiului ABC pe cevienele unui punct Q întîlnesc respectiv cercurile descrise pe laturile $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$, ca diametre, în perechile de puncte X, X'; Y, Y'; Z, Z' ce aparțin aceluiași cerc.

682. R_a, R_b, R_c fiind picioarele cevienelor unui punct R în triunghiul ABC, să se arate că cercurile descrise pe segmentele $\overline{AR_a}$, $\overline{BR_b}$, $\overline{CR_c}$, ca diametre, întîlnesc respectiv cercurile descrise pe laturile $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ ca diametre, în perechile de puncte X, X'; Y, Y'; Z, Z' situate pe un același cerc.

683. Să se arate că cercurile descrise pe cele trei diagonale ale unui patrulater complet ca diametre, luate două cîte două, au aceeași axă radicală.

684. Să se arate că punctele de întîlnire ale înălțimilor celor patru triunghiuri determinate de patru drepte în plan sînt coliniare.

685. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC, I centrul cercului înscris și I_1 centrul cercului înscris în triunghiul complementar. Să se demonstreze că perpendicularele duse din I pe IA, IB, IC intersectează respectiv laturile opuse ale triunghiului ABC în trei puncte situate pe o dreaptă, care formează cu laturile triunghiului un patulater, în care dreapta lui Newton este perpendiculară pe dreapta OI_1.

686. Să se demonstreze că cercul descris pe segmentul cuprins între centrele S, S' de asemănare a două cercuri (O), (O'), ca diametru, are aceeași axă radicală cu fiecare din aceste cercuri, anume axa radicală a acestora.

687. Pe semicercul cu diametrul $\overline{AB}$ se înscrie patrulaterul $ABCD$ și se notează cu E, F, G mijloacele lui $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$. Perpendiculara din E pe dreapta BF intersectează tangenta în B la semicerc în P, iar perpendiculara din G pe dreapta AF intersectează tangenta în A la semicerc, în Q. Să se demonstreze că dreapta PQ este paralelă cu CD.

688. Două cercuri egale (O), (O') se întîlnesc în punctele A, B. Un cerc (C), tangent coardei $\overline{AB}$ în punctul A, intersectează cele două cercuri în M și N. Să se arate că dreapta MN trece prin mijlocul P al segmentului $\overline{OO'}$.

689. Fie $ABCD$ un dreptunghi înscris într-un cerc (O), P un punct pe cerc, Q un punct pe latura $\overline{CD}$. Se proiectează Q în E și F pe PA, PB. QE întîlnește pe $\overline{AD}$ în G, QF pe $\overline{BC}$ în H. Să se arate că GH trece prin P.

690. Fie M mijlocul unui arc AB al unui cerc, P un punct oarecare pe arcul AB; să se arate că

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} + \overline{PM}^2 = \overline{MA}^2.$$

691. Se dă un cerc cu centrul O și un punct exterior P. Polara lui P față de cerc[1] întîlnește pe PO în A. Fie B mijlocul lui PA și Δ perpendiculara în B pe PO. Se consideră un punct M mobil pe cerc, care se proiectează în N pe Δ. Să se demonstreze că raportul $\overline{PM}^2 : \overline{MN}$ rămîne constant cînd M se mișcă pe cerc.

---

[1] *Polara* unui punct exterior, față de un cerc, este dreapta care unește punctele de contact ale tangentelor duse din acel punct la cerc.

692. Cercul (O') de rază R' este tangent interior în A cercului (O) de rază R. Coarda BC a cercului (O) atinge cercul (O') în D. AB, AC intersectează cercul (O') în E, F. Să se demonstreze că

$$\frac{\overline{AE}\cdot\overline{AF}}{\overline{AD}^2}=\frac{R'}{R}.$$

693. Să se construiască un cerc care să treacă prin două puncte A, B și să fie tangent unui cerc (O).

694. Să se găsească pe o dreaptă (D) un punct M, așa ca suma distanțelor $\overline{MA}$, $\overline{MB}$ la două puncte fixe, A, B să fie dată l $(l > \overline{AB})$.

695. Să se construiască un triunghi ABC, cunoscînd $\overline{AB}+\overline{AC}=l$, latura $\overline{BC}$ și înălțimea $\overline{AA'}$.

696. Să se construiască, numai cu rigla, axa radicală a două cercuri care nu se intersectează.

697. Fie O mijlocul segmentului $\overline{AB}$, C un punct între O și B. Pe $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ ca diametre se descriu două semicercuri de aceeași parte al lui $\overline{AB}$. Perpendiculara în O pe $\overline{AB}$ intersectează primul semicerc în D, pe al doilea în E. Se dă $\overline{CB}=a$, $\overline{DE}=b$. Să se găsească diametrele semicercurilor $(a > b)$.

698. În pentagonul $ABCDE$ lungimile laturilor sînt date, vîrfurile A, B fixe, iar unghiurile C și E egale. Să se găsească locul vîrfului D.

699. Să se construiască expresia

$$x=a\left(\frac{b}{c}\right)^{12}.$$

700. Să se construiască două cercuri, cunoscînd triunghiul ABC format din axa lor radicală BC, o tangentă interioară CA și o tangentă exterioară AB.

701. Să se găsească centrul unui cerc numai cu ajutorul compasului.

702. Să se construiască pentagonul $ABCDE$, cel mai general, care are laturile paralele cu diagonalele.

703. Pe laturile $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ ale unui triunghi ABC se iau lungimile $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ proporționale cu două lungimi date. Să se arate că mijlocul lui $\overline{B'C'}$ descrie o dreaptă și că cercurile circumscrise triunghiurilor $AB'C'$ au aceeași axă radicală.

704. În patrulaterul inscriptibil $ABCD$, perpendiculara dusă din C pe $\overline{AD}$ intersectează perpendiculara dusă din D pe $\overline{BC}$ în I, iar perpendiculara din C pe $\overline{AB}$ intersectează perpendiculara dusă

din B pe $\overline{CD}$ în K. Să se arate că IK trece prin intersecția H a diagonalelor.

705. Dacă P este un punct al unei drepte TT', al cărei ortopol în raport cu un triunghi ABC din plan este S, să se arate că puterea lui S în raport cu cercul circumscris triunghiului podar XYZ al punctului P în raport cu ABC este constantă (teorema lui Lemoine).

706. Să se arate că ortopolurile laturilor unui patrulater complet, în raport cu triunghiurile formate din celelalte trei laturi ale patrulaterului, sînt coliniare.

Capitolul XII

POLIGOANE REGULATE

707. Se consideră un triunghi echilateral ABC înscris într-un cerc și un punct M mobil pe cerc. Să se demonstreze că

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = \text{const.}$$

708. Se dă hexagonul regulat $ABCDEF$. Cercul cu centrul în A, cu raza $\overline{AD}$ și cercul cu centrul în D, cu raza $\overline{BD}$, se întîlnesc în M și N. Cercurile cu centrele în M și N cu razele $\overline{MD}$ și $\overline{ND}$ se intersectează a doua oară în P. Să se arate că dacă O este centrul hexagonului, punctul P este mijlocul segmentului $\overline{AO}$. Să se deducă de aici construcția mijlocului distanței între două puncte numai cu compasul (fără riglă)

709. Pe tangenta în A la un cerc se ia $\overline{AB}$ egală cu raza. Să se ducă din B o secantă BCD care să intercepteze o coardă $\overline{CD}$ egală cu $\overline{AB}$, apoi să se demonstreze că $\overline{BC}$ și $\overline{BD}$ sînt egale cu laturile decagoanelor regulate, convex și stelat, înscrise în acel cerc.

710. Pe laturile unui hexagon regulat se construiesc, în afara lui, pătrate. Să se arate că vîrfurile acestor pătrate, care nu sînt și ale hexagonului, sînt vîrfurile unui dodecagon regulat.

711. Fie l_{12} și l'_{12} laturile dodecagonului regulat și ale dodecagonului regulat stelat, obținut unind vîrfurile primului din 5 în 5, iar l_4 latura pătratului, toate poligoanele fiind înscrise în același cerc. Să se arate că $l'_{12} - l_{12} = l_4$.

712. Se face un nod dintr-o bandă de hîrtie, care are lățimea uniformă și se netezește bine hîrtia. Să se arate că figura care se obține astfel este un pentagon regulat.

713. Dacă notăm cu K raportul perimetrelor a două poligoane regulate, înscris și circumscris, cu același număr de laturi și cu K' raportul perimetrelor poligoanelor, înscris și circumscris, cu un număr dublu de laturi, să se demonstreze că există relația

$$K' = \frac{\sqrt{K+1}}{2}.$$

714. Fiind dat un cerc de rază l, să se calculeze latura poligonului regulat înscris cu 24 de laturi.

715. Să se demonstreze că două diagonale ale unui pentagon regulat, care nu pleacă din același vîrf, se intersectează în medie și extremă rație.

716. Să se înscrie într-un cerc dat (O) un triunghi echilateral, numai cu echerul.

717. Să se demonstreze că într-un heptagon regulat $ABCDEFG$ avem

$$\frac{1}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}}.$$

718. Fie $ABCD$ un pătrat cu centrul O. Să se arate că centrele cercurilor înscrise în cele opt triunghiuri AOB, BOC, COD, DOA, ABC, BCD, CDA, DAB sînt vîrfurile unui octogon regulat. Să se găsească latura b a acestui octogon în funcție de latura pătratului dat.

719. Să se găsească, numai cu compasul, latura pătratului înscris într-un cerc dat (O).

720. Într-un cerc se iau coardele $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ respectiv egale cu laturile triunghiului echilateral și ale hexagonului regulat, înscrise în cerc și se unesc mijloacele M și N ale arcelor AB, BC. Să se demonstreze că porțiunea din dreapta MN cuprinsă în unghiul ABC este egală cu latura dodecagonului regulat înscris în cerc.

721. Să se demonstreze că apotema pentagonului regulat este egală cu semisuma razei cercului circumscris și a laturii decagonului înscris în acel cerc.

722. Să se demonstreze că coarda care subîntinde un arc de trei ori mai mare decît acela care corespunde laturii decagonului înscris este egală cu suma dintre raza cercului și latura decagonului.

723. Să se demonstreze că raza unui cerc este medie geometrică între laturile dodecagoanelor regulate înscrise în cerc, convex și stelat.

724. Să se înscrie într-un pătrat $ABCD$, dat prin vîrfurile sale, numai cu compasul, un triunghi echilateral, avînd un vîrf în A și celelalte două M, N pe $\overline{BC}$ și $\overline{CD}$

725. Să se demonstreze că latura unui poligon convex cu 20 de laturi este egală cu $1/\sqrt{2}$ înmulțit cu diferența dintre latura decagonului stelat, regulat și aceea a pentagonului regulat, înscrise în același cerc.

726. Se consideră un poligon regulat cu un număr nepereche de laturi, $A_1, A_2 \ldots A_{2n+1}$. Fie A' punctul diametral opus lui A_{2n+1} pe cercul (O) circumscris poligonului. Să se arate că între lungimile $\overline{A'A_1} = a_1$, $\overline{A'A_2} = a_2, \ldots, \overline{A'A_n} = a_n$ și raza R a cercului (O) avem relația

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots \pm a_n = R.$$

727. Se unesc, din două în două, vîrfurile unui poligon P cu $2n$ laturi. Să se arate că poligonul Q cu n laturi, care se obține, este în același timp convex sau stelat și de aceeași speță cu P.

728. Să se calculeze succesiv cu o aproximație de 0,001 m raza și apotema poligoanelor regulate cu 4, 8, 16 laturi, avînd toate 4 m ca perimetru. Se poate spune, fără a continua calculele, de cîte ori va trebui să se dubleze numărul laturilor, pentru ca să se obțină o rază și o apotemă care să difere între ele cu mai puțin de 0,001 m?

Capitolul XIII

ARII

729. Să se arate că în orice triunghi înălțimile sînt invers proporționale cu laturile pe care sînt perpendiculare.

730. Să se arate că aria S a unui triunghi dreptunghic, în funcție de lungimile m_b, m_c ale medianelor corespunzătoare celor două catete, este dată de formula

$$S = \frac{2}{15}\sqrt{(4m_b^2 - m_c^2)(4m_c^2 - m_b^2)}.$$

731. În triunghiul dreptunghi ABC, $\sphericalangle A = 90°$, se duce înălțimea AD și se proiectează punctul D pe $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ în E și F. Se notează $\overline{DE} = \alpha$, $\overline{DF} = \beta$. Să se arate că aria S a triunghiului ABC este dată de formula

$$S = \frac{(\alpha^2 + \beta^2)^2}{2\alpha\beta}.$$

732. Fie a, b, S lungimile laturilor şi aria unui paralelogram, iar s aria dreptunghiului format din bisectoarele interioare ale unghiurilor paralelogramului. Să se demonstreze că

$$\frac{S}{s}=\frac{2ab}{(a-b)^2}.$$

733. Să se arate că pătratul construit pe tangenta comună a cercurilor descrise pe catetele unui triunghi dreptunghic ca diametre este echivalent cu triunghiul dat.

734. Să se demonstreze că a, b, c fiind laturile triunghiului ABC, R raza cercului circumscris, S aria, avem

$$S=a\cdot b\cdot c:4R.$$

735. $2p$ fiind perimetrul unui triunghi ABC, r raza cercului înscris, să se arate că

$$S=p\cdot r.$$

736. Să se arate că în orice triunghi există relaţia

$$S=p'\cdot R,$$

p' fiind semiperimetrul triunghiului ortic.

737. r_a, r_b, r_c fiind razele cercurilor exînscrise triunghiului ABC, să se arate că

$$S=(p-a)\,r_a=(p-b)\,r_b=(p-c)\,r_c.$$

738. Pe laturile unui triunghi ca diametre se descriu cercuri. Fie t_1, t_2, t_3 tangentele lor comune, luate cîte două. Să se arate că

$$(a+b+c)\,t_1\cdot t_2\cdot t_3=2S^2,$$

a, b, c fiind laturile, S aria triunghiului.

739. Să se demonstreze că în orice triunghi

$$h_a+h_b+h_c>6r,$$

notaţiile fiind cele obişnuite.

740. Să se demonstreze că între razele cercului înscris şi ale cercurilor exînscrise avem relaţia

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}.$$

741. Să se demonstreze că

$$S=\sqrt{rr_ar_br_c}.$$

742. În triunghiurile ABC, $A'B'C'$ de arii S, S' avem $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$; să se demonstreze că

$$S : S' = \overline{AB} \cdot \overline{AC} : \overline{A'B'} \cdot \overline{A'C'}.$$

743. În triunghiurile ABC, $A'B'C'$ de arii S, S' avem $\sphericalangle A + \sphericalangle A' = 180°$; să se demonstreze că

$$S : S' = \overline{AB} \cdot \overline{AC} : \overline{A'B'} \cdot \overline{A'C'}.$$

744. Pe laturile a, b, c ale unui triunghi ABC se iau segmentele:

$$\overline{CA_1} = \overline{CA'} = a_1; \ \overline{AB_1} = \overline{AB'} = b_1; \ \overline{BC_1} = \overline{BC'} = c_1,$$

unde A_1, B_1, C_1 sînt situate pe laturi în același sens, iar A' B' C' pe prelungiri. Să se demonstreze că aria cuprinsă între triunghiurile $A'B'C'$ și $A_1B_1C_1$ este dată de expresia

$$2S\left(\frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} + \frac{c_1}{c}\right),$$

unde S este ara triunghiului ABC.

745. Fie $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ două diametre perpendiculare ale unui cerc (O) de rază R. Din C ca centru, cu $\overline{CA}$ ca rază, se descrie arcul AB. Să se calculeze aria cuprinsă între acest carc și arcul ADB.

746. Fie $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ înălțimile unui triunghi ABC, A'', B'', C'' proiecțiile unui punct M interior triunghiului pe laturile $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$. Să se demonstreze că

$$\frac{\overline{MA''}}{\overline{AA'}} + \frac{\overline{MB''}}{\overline{BB'}} + \frac{\overline{MC''}}{\overline{CC'}} = 1.$$

747. Fie H punctul de întîlnire a înălțimilor AA', BB', CC' ale triunghiului ABC; să se demonstreze că

$$\frac{\overline{BA'} \cdot \overline{CA'}}{\overline{AA'^2}} + \frac{\overline{CB'} \cdot \overline{AB'}}{\overline{BB'^2}} + \frac{\overline{AC'} \cdot \overline{BC'}}{\overline{CC'^2}} = 1.$$

748. Paralelele duse prin vîrfurile A, B, C la laturile opuse ale unui triunghi întîlnesc cercul circumscris triunghiului în A', B' C'. Să se arate că mediatoarele triunghiului $A'B'C'$ trec prin vîrfurile triunghiului ABC. Între laturile acestor triunghiuri există relația

$$abc = (a' + b' + c')\, R^2.$$

749. Fie în plan două puncte fixe O, P și două drepte (Δ_1) și (Δ_2) care trec prin O. Din P ducem paralela la (Δ_1) și (Δ_2), care intersectează respectiv pe (Δ_2) și (Δ_1) în A_2 și A_1, iar picioarele perpendicularelor din P pe (Δ_1) și (Δ_2) sînt respectiv B_1 și B_2. Să se demonstreze că

$$S = \overline{OA_1} \cdot \overline{OB_1} + \overline{OA_2} \cdot \overline{OB_2}$$

este independentă de alegerea dreptelor (Δ_1) și (Δ_2).

750. Se dă un triunghi ABC și se duce prin A o paralelă la $\overline{BC}$, pe care se iau punctele D și E astfel ca $\sphericalangle ABD = \sphericalangle C$ și $\sphericalangle ACE = \sphericalangle B$ (triunghiurile ABD și ACE exterioare lui ABC). Să se arate că:

a) $\overline{AB} + \overline{AC} = \sqrt{\overline{BC}\,(\overline{BD} + \overline{DE} + \overline{EC})}$;

b) notînd cu S aria trapezului $BDEC$, cu s aria triunghiului ABC și cu h înălțimea ce pleacă din A în triunghiul ABC, avem

$$4Ss = h^2\,(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2).$$

751. Fie T punctul de tangență a două cercuri cu centrele O_1 și O_2 și cu razele r_1 și r_2. Un al treilea cerc, cu centrul O pe tangenta comună a cercurilor (O_1) și (O_2) și cu raza $\overline{OT} = r$, întîlnește din nou aceste cercuri respectiv în A și B. Se cere:

a) Să se arate că, dacă cercurile date sînt exterioare, aria triunghiului ABT este dată de expresia

$$S = \frac{2r^3 r_1 r_2 (r_1 + r_2)}{(r^2 + r_1^2)(r^2 + r_2^2)}.$$

Ce schimbare intervine dacă cercurile sînt tangente interior?

b) Dreapta AB intersectează din nou cercul (O_1) în M, iar cercul (O_2) în N. Să se arate că triunghiul TMN este asemenea cu triunghiul OO_1O_2.

c) Să se calculeze lungimile coardelor $\overline{MT}$ și $\overline{NT}$ în funcție de razele celor trei cercuri.

d) Să se calculeze distanța de la punctul T la dreapta AB.

752. Să se arate că suma distanțelor unui punct interior unui triunghi echilateral la laturile acestuia este constantă.

753. Să se arate că suma distanțelor unui punct M interior unui poligon regulat la laturile acestuia este constantă.

754. O paralelă la latura $\overline{BC}$ a unui triunghi ABC întîlnește latura $\overline{AB}$ în D, latura $\overline{AC}$ în E; dreptele BE și CD se intersectează în F. Să se demonstreze că triunghiurile AFD și AFE sînt echivalente.

755. Să se împartă un paralelogram în trei părți echivalente prin drepte care pornesc dintr-un vîrf al lui.

756. Prin punctul D luat pe baza $\overline{BC}$ a triunghiului ABC se duc dreptele DE și DF, paralele la $\overline{AB}$ și $\overline{AC}$ și intersectînd aceste laturi în E și F. Să se demonstreze că aria triunghiului AEF este medie proporțională între ariile triunghiurilor BDF și CDE.

757. Fie M un punct arbitrar luat pe latura $\overline{BC}$ a paralelogramului $ABCD$, N un punct luat pe $\overline{AM}$. Să se demonstreze că triunghiurile DMN și BCN sînt echivalente.

758. Să se demonstreze prin metoda ariilor auxiliare teorema transversalelor (Menelaus)[1] și teorema segmentelor determinate pe laturile unui triunghi de trei drepte concurente, care pleacă de la vîrfuri (Ceva)[2].

759. Se consideră un paralelogram $ABCD$ și un punct exterior O, cuprins între prelungirile laturilor $\overline{AD}$ și $\overline{BC}$. Dreptele OA și CD, OB și CD, OB și AC se întîlnesc respectiv în E, F și G. Să se demonstreze că aria patrulaterului $AEFG$ este echivalentă cu suma ariilor triunghiurilor BGC, CFO, DEO.

760. În interiorul unui trapez $ABCD$ ale cărui diagonale AC, BD se întîlnesc în O, prin extremitățile bazei mici CD se duc două drepte paralele care întîlnesc baza mare în punctele E, F și diagonalele BD, AC în G și H. Să se demonstreze că aria pentagonului $EGOHF$ este egală cu suma ariilor triunghiurilor AHD, DOC, CGB.

761. Pe bisectoarea unghiului drept xOy se iau trei puncte A, B, C, așa ca $\overline{AB} = \overline{BC}$. Se proiectează A și C în A' și C' pe Oy, iar în B se ridică o perpendiculară pe dreapta OB care întîlnește pe Ox în B'. Să se demonstreze că aria triunghiului $AB'C$ este echivalentă cu aria trapezului $AA'C'C$.

762. Fie α, β, γ centrele pătratelor construite în afară pe laturile $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ ale triunghiului ABC. Dreptele $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ întîlnesc latura $\overline{BC}$ în P și Q. Să se demonstreze că

$$\text{aria } \triangle \alpha PQ = \text{aria } \triangle B\gamma Q + \text{aria } \triangle\Delta C\beta P.$$

763. Să se calculeze aria limitată într-un semicerc de două coarde paralele, prima egală cu latura exagonului, a doua cu aceea a triunghiului echilateral.

764. Se dă un triunghi ABC și un punct M în planul său. Dreptele AM, BM, CM intersectează laturile opuse în D, E, F. Să se demonstreze prin considerații de arii că

$$\frac{\overline{MD}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{ME}}{\overline{BE}} + \frac{\overline{MF}}{\overline{CF}} = 1.$$

---

[1] Vezi problema 1090.
[2] Vezi problema 1097.

765. Se descriu pe catetele $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ ale triunghiului dreptunghic ABC două semicercuri exterioare triunghiului. Să se arate că aria cuprinsă între aceste semicercuri și semicercul BAC este echivalentă cu aria triunghiului ABC *(lunulele lui Hipocrat)*.

766. Din punctul de contact O a două cercuri tangente egale (A) și (B) ca centru, se descrie un cerc tangent cercurilor (A) și (B); apoi între cercul (O) astfel descris și cele două cercuri (A), (B) se înscriu alte două cercuri (C) și (D). Să se calculeze, în funcție de raza R a cercului (O), aria S a rombului $ACBD$.

767. Un cerc trece prin vîrful A al triunghiului ABC, atinge în P latura $\overline{BC}$ și întîlnește laturile $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ în D și E. Să se demonstreze că $\overline{BC} : \overline{DE} = \overline{AB} \cdot \overline{AC} : \overline{PA}^2$.

768. Să se găsească distanțele x, y, z ale unui punct M, interior unui triunghi ABC, la laturile $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$, știind că ariile triunghiurilor MBC, MCA, MAB sînt proporționale cu trei numere date α, β, γ.

769. Se împarte un triunghi ABC în două părți echivalente, în trei moduri deosebite, prin drepte paralele la laturile triunghiului. Să se găsească raportul dintre aria triunghiului abc format de aceste drepte și aria triunghiului dat.

770. Se iau pe laturile $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ ale unui triunghi ABC trei puncte A', B', C', așa ca

$$\overline{AC'} : \overline{AB} = \overline{BA'} : \overline{BC} = \overline{CB'} : \overline{CA} = m.$$

Să se determine raportul ariilor triunghiurilor $B'AC'$, $C'BA'$, $A'CB'$ la aria triunghiului ABC.

771. Aceleași date ca în problema precedentă. Să se găsească aria triunghiului $A'B'C'$.

772. Pe laturile unui triunghi ABC, ca baze, se construiesc, în afară, triunghiurile isoscele BCA', CAB', ABC', asemenea. Să se arate că dreptele AA', BB', CC' sînt concurente.

773. Vîrful A al unui triunghi ABC este fix, iar vîrfurile B și C se mișcă pe două drepte paralele (Δ_1) și (Δ_2). Fie D și E intersecțiile lui AC și AB respectiv cu (Δ_1) și (Δ_2). Să se demonstreze că dacă aria triunghiului ABC este constantă, lungimile $\overline{BD}$ și $\overline{CE}$ sînt constante și reciproc.

774. Fie a, b, c, $2p$ laturile și perimetrul unui triunghi ABC; B_a, C_a punctele de contact cu $\overline{BC}$ ale celor două cercuri exînscrise care ating laturile $\overline{AB}$ și $\overline{AC}$; C_b, A_b și A_c, B_c punctele analoge pe $\overline{CA}$ şi $\overline{AB}$. Să se arate că se poate construi un triunghi cu segmentele $\overline{B_aC_a}$, $\overline{C_bA_b}$, $\overline{A_cB_c}$ ca laturi și să se găsească aria S a acestui triunghi.

775. Fie a, b, c cele trei laturi ale triunghiului ABC ($b > c$). Se împarte triunghiul în două părți echivalente printr-o perpendiculară IK pe baza $\overline{BC}$. Se cere să se calculeze distanța $\overline{CK}$ la piciorul acestei perpendiculare și să se dea o construcție geometrică.

776. Să se demonstreze pe figură că aria octogonului regulat înscris este medie proporțională între aria pătratului înscris și aceea a pătratului circumscris.

777. Se consideră un sfert de cerc AOB și un punct oarecare P pe arcul AB. Tangenta în P la cerc intersectează razele AO, OB respectiv în S și T. Se duce PE perpendiculară pe $\overline{OA}$ și se cere să se arate că aria triunghiului AOB este medie proporțională a ariilor triunghiurilor SOT și OPE.

778. Se dă un triunghi dreptunghic ABC și înălțimea $\overline{AD}$. Se ia pe $\overline{AD}$ punctul M așa ca $\overline{AM} = \overline{BC}$, pe $\overline{CA}$ punctul N așa ca $\overline{CN} = \overline{AB}$, pe $\overline{BA}$ punctul P așa ca $\overline{BP} = \overline{AC}$, pe $\overline{MA}$ un punct R așa ca $\overline{MR} = \overline{AD}$. Se cere să se găsească expresia ariei triunghiului MNP în funcție de laturile $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{AB} = c$.

779. Aceleași date ca în problema precedentă. Să se demonstreze că aria triunghiului MNP este îndoitul ariei triunghiului BCR.

780. Aceleași date. În ce caz punctele M, N, P, R sînt coliniare?

781. Să se ducă prin vîrful A al unui triunghi ABC o dreaptă așa ca proiectînd vîrfurile B, C în B', C' pe această dreaptă, triunghiurile ABB', ACC' să fie echivalente.

782. Într-un triunghi isoscel ABC se dă înălțimea principală h și raza r a cercului înscris. Să se găsească laturile, valoarea comună h' a celor două înălțimi egale, raza R a cercului circumscris și aria S.

783. Prin vîrful B al triunghiului ABC se duce o paralelă la latura $\overline{CA}$. Pe această paralelă se ia $\overline{BD} = \overline{BA}$. De asemenea, prin C se duce o paralelă la $\overline{BA}$ și se ia $\overline{CE} = \overline{CA}$. Dreptele BE, CD întîlnesc laturile $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ respectiv în N, P. Să se demonstreze că triunghiurile ABN, BCP, pe de o parte, și ACP, BCN, pe de altă parte, sînt echivalente.

784. Aceleași date. Dreptele BN, CP se întîlnesc în O, iar AO intersectează latura $\overline{BC}$ în S. Să se demonstreze că dacă

$\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$, avem aria $\triangle APC$: aria $\triangle ANB = b : c$, aria $\triangle ASC$: aria $\triangle ASB = b^2 : c^2$, aria $\triangle NOC$: aria $\triangle POB = b^3 : c^3$.

785. Să se ducă cu echerul printr-un punct M al bazei BC a unui triunghi ABC, o dreaptă MN care să-l împartă în două părţi echivalente.

786. Într-un triunghi ABC se prelungesc laturile, care se întîlnesc în fiecare vîrf, cu cîte o lungime egală cu latura opusă. Se cere aria hexagonului care se formează astfel.

787. Fie AD, AE două drepte egal înclinate pe bisectoarea unghiului A al unui triunghi ABC, limitate la latura $\overline{BC}$. Să se demonstreze că

$$\frac{\overline{AD}^2}{\overline{AE}^2} = \frac{\overline{DB} \cdot \overline{DC}}{\overline{EB} \cdot \overline{EC}}; \quad \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{\overline{BD} \cdot \overline{BE}}{\overline{CD} \cdot \overline{CE}}.$$

788. Prin vîrful A al unui triunghi ABC se duc două drepte Ax, Ay perpendiculare: Ax interioară triunghiului, Ay exterioară. Să se exprime aria triunghiului ABC cu ajutorul celor patru distanţe ale vîrfurilor B, C la dreptele Ax, Ay.

789. Printr-un punct M interior cercului (O) se duc două coarde $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ perpendiculare una pe alta. Cum trebuie să se ducă aceste coarde pentru ca suma ariilor triunghiurilor MAC, MBD să fie cea mai mică posibilă?

790. Să se determine lungimea $\overline{AP}$, luată pe tangenta în A la un cerc (O), aşa ca dreapta PO să întîlnească cercul în B, unde ducînd tangenta BC şi mărginind-o la tangenta AP, să se formeze patrulaterul $OACB$, echivalent triunghiului OAP.

791. Într-un paralelogram se uneşte mijlocul fiecărei laturi cu extremităţile laturii opuse. Să se găsească raportul dintre aria octogonului interior convex astfel format şi aceea a paralelogramului dat.

792. În triunghiul ABC se dau trei drepte AA', BB', CC' care se întîlnesc într-un punct O. Se ia simetricul α al lui A în raport cu A', apoi simetricul α' al lui A' în raport cu A şi se fac operaţii analoge cu B şi B', C şi C'. Să se demonstreze că

$$\text{aria } \triangle\alpha\beta\gamma = 3 \text{ aria } \triangle ABC + 4 \text{ aria } \triangle A'B'C',$$

$$\text{aria } \triangle\alpha'\beta'\gamma' = 6 \text{ aria } \triangle ABC + \text{aria } \triangle A'B'C'.$$

793. Se dă un pătrat de latură a; se descrie un cerc concentric cu pătratul, care determină pe laturile lui coarde egale cu raza cercului. Să se evalueze perimetrul şi aria octogonului format de partea comună celor două figuri.

794. Să se construiască un triunghi echivalent cu un pentagon $ABCDE$.

795. Să se construiască un pătrat echivalent cu un pentagon $ABCDE$.

796. Să se construiască dodecagonul regulat echivalent unui triunghi dat.

797. Să se găsească aria dodecagonului regulat înscris într-un cerc de rază R.

798. Fie A, B, C, D, E, F vîrfurile consecutive ale unui hexagon regulat înscris într-un cerc (O) de rază R, PQ o dreaptă care coincide la început cu latura AB. Se cere să se găsească punctul planului împrejurul căruia ar trebui să se rotească dreapta PQ pentru a aduce punctul P din A în O, iar punctul Q din B în D. Să se calculeze apoi aria descrisă de segmentul $\overline{PQ}$ în această mișcare de rotație.

799. Un triunghi ABC are vîrful A fix, iar B și C se mișcă pe două paralele astfel că aria lui rămîne constantă. Să se arate că BC se rotește în jurul unui punct fix.

870. Un trapez $ABCD$, cu bazele $\overline{AD}$ și $\overline{BC}$ are aria constantă și vîrfurile A și B fixe. Să se găsească locul geometric al mijlocului laturii $\overline{CD}$, cînd bazele se rotesc în jurul punctelor A și B.

801. Fie ABC un triunghi oarecare și M, N intersecțiile laturii BC cu dreptele AM, AN izogonale în raport cu unghiul BAC. Fie P intersecția dreptei AN cu cercul ABC, Q și R proiecțiile lui P pe laturile $\overline{AC}$ și $\overline{AB}$. Să se demonstreze că:

a) produsul $\overline{AM} \cdot \overline{QR}$ reprezintă îndoitul ariei triunghiului ABC;

b) triunghiurile MCQ și MBR sînt echivalente.

802. Fiind date patru puncte A, B, A', B' într-un plan orientat[1] se cere locul punctului M, așa ca

$$\text{aria } \triangle MAB + \text{aria } \triangle MA'B' = \text{aria } \triangle MBA' + \text{aria } \triangle MB'A.$$

803. Să se arate cu ajutorul problemei precedente că într-un patrulater complet mijloacele diagonalelor sînt coliniare.

804. Fie $A_1A_2B'C''$, $B_1B_2C'A''$, $C_1C_2A'B''$ dreptunghiuri de arie egală înscrise în triunghiul ABC. Să se arate că:

a) perpendicularele ridicate pe mijloacele dreptelor $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ sînt concurente;

---

[1] Se convine să se considere aria triunghiului PQR pozitivă sau negativă, după cum, alegînd un sens pozitiv de parcurgere a perimetrului triunghiului, un punct M îl parcurge în acest sens sau în sens contrar.

b) perpendicularele ridicate pe mijloacele dreptelor $A'C''$, $B'A''$, $C'B''$ sînt concurente;

c) perpendicularele ridicate pe mijloacele dreptelor A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sînt concurente;

d) perpendicularele ridicate pe mijloacele dreptelor A_1C_2, B_1A_2, C_1B_2 sînt concurente;

e) cele patru puncte obținute mai sus sînt coliniare.

Capitolul XIV

CERCUL: LUNGIMEA ȘI ARIA LUI; ARC DE CERC, SECTOR

805. Se dă un segment de dreaptă AB și pe el două puncte oarecare M, N. Să se arate că suma lungimilor cercurilor cu diametrii $\overline{AM}$, $\overline{MN}$, $\overline{NB}$ este cît lungimea cercului cu diametrul AB. Să se generalizeze pentru mai multe segmente pe aceeași dreaptă.

Să se enunțe proprietatea corespunzătoare în cazul cînd segmentele formează o linie poligonală.

806. Să se arate că dacă pe două cercuri diferite se iau două arce de aceeași lungime, atunci unghiurile la centru corespunzătoare, în cele două cercuri, sînt invers proporționale cu razele cercurilor.

807. Două linii poligonale $A_1A_2A_3...A_n$ și $B_1B_2B_3...B_n$ au laturile $(\overline{A_1A_2}, \overline{B_1B_2})$; $(\overline{A_2A_3}, \overline{B_2B_3})$; ... proporționale. Pe A_1A_2 și B_1B_2 se construiesc arce de cerc avînd la centru unghiuri egale (α), pe $\overline{A_2A_3}$ și $\overline{B_2B_3}$ se construiesc de asemenea arce avînd la centru unghiuri egale (β) etc. Să se demonstreze că raportul perimetrelor poligoanelor curbilinii $A_1A_2...A_n$ și $B_1B_2...B_n$ nu depinde de unghiurile α, β, γ...

808. Dacă trei cercuri sînt două cîte două tangente, care este raportul între suma lungimilor acestor cercuri și perimetrul triunghiului format de centrele lor?

809. Dacă p_{12} este perimetrul dodecagonului regulat înscris într-un cerc, să se exprime lungimea cercului cu ajutorul lui p_{12}.

810. Dacă un același cerc este înscris și circumscris la două poligoane regulate cu același număr de laturi, să se arate că lungimea sa este medie proporțională între lungimea cercului circumscris poligonului exterior și lungimea cercului înscris în poligonul interior.

811. Dacă două cercuri sînt tangente interior unui al treilea cerc și dacă suma razelor lor este egală cu raza celui de-al treilea, să se arate că arcul cuprins între punctele de contact, pe cercul mare, este egal cu suma arcelor respective pe cercurile interioare, cuprinse între punctul lor de întîlnire cel mai apropiat de cercul mare și punctele de contact cu cercul mare.

812. Să se arate că dacă se descriu două semicercuri egale pe diametrul unui semicerc dat și dacă se înscrie un cerc în spațiul cuprins între cele trei semicercuri, diametrul acestui cerc este în raportul 2/3 față de diametrul unuia din cercurile egale.

813. Să se arate că aria unui sector circular este echivalentă cu aria unui triunghi care are lungimea arcului de cerc al sectorului ca bază și raza ca înălțime.

814. În două cercuri diferite, să se arate că două sectoare echivalente au unghiurile invers proporționale cu pătratele razelor.

815. Trei cercuri egale sînt astfel situate încît fiecare trece prin centrele celorlalte două. Să se exprime, în funcție de raza lor comună R, aria triunghiului curbiliniu cuprins între cele trei cercuri.

816. Trei cercuri egale, de rază R, sînt tangente două cîte două în A, B, C. Să se afle aria triunghiului curbiliniu ABC.

817. Se dau trei cercuri (O), (O_1), (O_2), de raze R, R_1, R_2 și un sector de unghi α, în cercul (O). Să se determine în cercurile (O_1) și (O_2) cîte un sector, astfel ca suma unghiurilor lor să fie egală cu α, iar suma ariilor să fie egală cu aria sectorului dat în cercul (O). Ce condiții trebuie să satisfacă razele?

818. Fie C un punct pe dreapta AB, între punctele A și B. Pe $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{CB}$ se descriu semicercuri situate de aceeași parte a dreptei AB. Să se demonstreze că aria cuprinsă între aceste semicercuri este echivalentă cu aria cercului descris pe $\overline{CD}$ ca diametru, D fiind punctul unde perpendiculara în C, pe AB, întîlnește semicercul cel mare.

819. Se descriu semicercuri, în interior, pe fiecare latură a unui pătrat. Să se calculeze aria celor patru frunze astfel formate.

820. Din fiecare vîrf al unui pătrat se descriu arce de cerc cu raza cît latura. Se formează astfel un patrulater curbiliniu. Să se afle aria lui.

821. Să se împartă o coroană circulară, cuprinsă între două cercuri de raze r și R, în trei coroane echivalente. Generalizare.

822. Extremitățile A, B ale unei coarde de lungime constantă alunecă pe un cerc (O). Un punct C luat pe $\overline{AB}$ astfel încît $\overline{AC} = a$,

$\overline{CB} = b$, descrie un cerc (O'). Să se calculeze aria coroanei cuprinse între cele două cercuri.

823. Se iau punctele B și D la egală distanță de extremitățile arcului unui cadran (sfert de cerc) AOC și se duc, pe OC, perpendicularele BG și DH. Să se demonstreze că figura mixtilinie $BGHD$ este echivalentă cu sectorul OBD.

824. Se dau două cercuri (O), (O') de raze R și $R/3$, tangente exterioare în C. Se duce tangenta comună exterioară AA'. Să se calculeze aria triunghiului curbiliniu ACA'.

825. Se dă un unghi xOy și un cerc (C_1), de rază R, tangent laturilor acestui unghi. Se duce cercul (C_2), tangent cercului (C_1) și laturilor unghiului, apoi (C_3) tangent lui (C_2) și laturilor unghiului etc., razele acestor cercuri fiind din ce în ce mai mici. Să se afle limita sumei ariilor tuturor cercurilor (C_1), (C_2),..., (C_n), cînd n crește indefinit.

Capitolul XV

CONSTRUCȚII DE EXPRESII ALGEBRICE

826. Fiind date segmentele a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, să se construiască segmentul x dat de relația $x = \frac{a_1a_2a_3}{b_1b_2}\cdot$ Generalizare pentru

$$x = \frac{a_1a_2 \dots a_n}{b_1b_2 \dots b_{n-1}} \cdot$$

827. Fiind date trei segmente de lungime a, b, c, să se determine segmentul x, știind că $x = ab^2/c^2$.

828. Care sînt construcțiile grafice care dau media geometrică a două segmente a, b? Să se facă toate pe aceeași figură și să se verifice rezultatele.

829. Să se construiască segmentul x dat de $x = \sqrt[4]{abcd}$, unde a, b, c, d sînt patru segmente date.

830. Fiind date segmentele a, b, să se găsească grafic segmentul $x = \frac{ab}{\sqrt{a^2 - b^2}}\cdot$

Să se construiască grafic segmentul x din următoarele expresii algebrice:

831. $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Generalizare. Aplicație la extragerea rădăcinii pătrate a unui număr.

832. $x = \sqrt[4]{a^4 - b^4}$.

833. $x = \sqrt[4]{a^4 + b^4}$.

834. $x = \sqrt[4]{a^4 + b^4 - c^4}$.

835. Să se găsească diferite metode pentru construcția mediei armonice a două segmente a, b:

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

836. Să se construiască segmentul x dat de relația

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Generalizare.

(Construcția poate servi la determinarea, într-un circuit electric, a rezistenței echivalente a unor rezistențe date, puse în derivație.)

837. Să se determine segmentul x dat de relația

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Generalizare.

838. Să se construiască grafic două segmente cînd se cunosc suma și produsul lor sau diferența și produsul lor.

839. Să se rezolve grafic sistemul $x^2 + y^2 = a^2$, $xy = b^2$.

840. Să se determine pe cale grafică rădăcinile ecuației bipătrate $x^4 - 4a^2x^2 - a^4 = 0$ și să se discute condițiile de posibilitate.

Capitolul XVI

PLANE, DREPTE, UNGHIURI TRIEDRE

841. Printr-un punct M să se ducă o dreaptă care să întîlnească două drepte (D), (D') date în spațiu. Să se studieze diferitele cazuri care se pot prezenta.

842. Să se arate că se pot construi drepte care să întîlnească trei drepte date în spațiu.

843. Fiind date patru puncte, care nu sînt situate în același plan, cîte plane se pot duce care să conțină cîte trei din aceste puncte?

844. După cîte drepte se intersectează planele din problema precedentă?

845. Să se determine locul punctelor din spațiu egal depărtate de două puncte date A și B.

846. Să se determine locul punctelor din planul (P) egal depărtate de două puncte A și B, nesituate în planul (P).

847. Să se găsească pe o dreaptă oarecare din spațiu un punct egal depărtat de două puncte date A și B.

848. Să se determine locul geometric al punctelor egal depărtate de trei puncte A, B, C care nu sînt coliniare.

849. Dacă patru puncte A, B, C, D nu sînt situate în același plan, să se demonstreze că există un punct O egal depărtat de ele.

850. Să se găsească un punct într-un plan dat (P) egal depărtat de trei puncte date A, B, C care nu sînt situate în planul (P) și nici nu sînt coliniare.

851. Se dă într-un plan (P) o dreaptă fixă AB și o dreaptă mobilă (D), paralelă cu AB. Se cere locul piciorului perpendicularei coborîte dintr-un punct dat O, din spațiu, pe dreapta (D).

852. O dreaptă (D) se rotește într-un plan (P) în jurul punctului A situat pe (D). Se cere locul proiecției punctului dat O, din spațiu, pe dreapta (D).

853. Un triunghi ABC dreptunghic în A se rotește în jurul unei catete $\overline{AB}$. Care este locul vîrfului C?

854. Fiind date două puncte A, B, de aceeași parte a unui plan (P), să se determine un punct M, pe planul dat, așa ca $\overline{AM} + \overline{MB}$ să aibă cea mai mică valoare posibilă.

855. Se dă o dreaptă (D) și două puncte A, B, nesituate în același plan cu dreapta. Să se găsească pe dreapta (D) un punct M așa ca suma $\overline{AM} + \overline{MB}$ să aibă cea mai mică valoare.

856. Să se determine locul punctelor din spațiu egal depărtate de două drepte paralele.

857. Să se determine locul punctelor din spațiu egal depărtate de două drepte concurente.

858. Să se determine locul punctelor din spațiu egal depărtate de trei drepte situate în același plan, care nu sînt concurente.

859. Se dau două plane (P) și (Q), iar în planul (Q) trei drepte neconcurente. Se cer punctele din planul (P) egal depărtate de cele trei drepte.

860. Trei plane se întîlnesc, în general, într-un singur punct. Să se studieze cazurile care se mai pot prezenta.

861. Două drepte (D), (D') nu sînt situate în același plan. Să se ducă o dreaptă care să le întîlnească și care să fie paralelă cu o a treia dreaptă dată (Δ).

862. Se dau în spațiu o dreaptă (Δ) și două puncte oarecare P și Q. Se iau simetricele P' ale punctului P față de fiecare

punct al dreptei (Δ), apoi simetricele Q' ale fiecărui punct al dreptei (Δ) față de Q. Să se arate că toate punctele P' și Q' sînt situate în același plan (R), paralel cu (Δ).

863. Se dau trei plane paralele (P), (R), (Q) și punctele A, B în planul (P), iar C, D în planul (Q). Dreptele AC, BC, BD, AD întîlnesc planul (R) în punctele E, F, G, H.

a) Să se arate că figura $EFGH$ este un paralelogram. Notînd cu d_1 și d_2 distanțele dintre planele (P), (R), respectiv (R), (Q), ce relație trebuie să existe între $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, d_1 și d_2 pentru ca paralelogramul să devină dreptunghi, romb, pătrat?

b) Ce se întîmplă cu paralelogramul $EFGH$, cînd segmentele $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$, rămînînd în planele respective, capătă mișcări de translație?

864. Se dau două plane (P), (Q), o dreaptă (D) nesituată în aceste plane și un punct O în planul (P). Să se așeze un segment $\overline{AB}$, de lungime dată, cu extremitățile A și B respectiv în planele (P) și (Q), astfel ca să fie paralel cu dreapta (D), iar A să fie la o distanță dată a de O. Discuție.

865. Se dau două drepte (D) și (D') situate într-un plan (P) și o a treia dreaptă (Δ) paralelă cu planul (P). Prin dreapta (Δ) să se ducă un plan care să întîlnească dreptele (D) și (D') în punctele A și B astfel ca segmentul $\overline{AB}$ să aibă o lungime dată.

Sînt cazuri în care problema nu este posibilă? Sînt cazuri în care problema este nedeterminată?

866. Să se construiască o dreaptă perpendiculară pe două drepte date (D) și (D') nesituate în același plan, pe care le întîlnește (perpendiculara comună celor două drepte).

867. Să se arate că porțiunea perpendicularei comune a două drepte (D) și (D'), cuprinsă între punctele ei de intersecție cu acele drepte, este cea mai scurtă distanță între un punct al dreptei (D) și un punct al dreptei (D').

868. Fiind date punctele A, B, C, D, nesituate în același plan, se unește A cu B, B cu C, C cu D, D cu A și se formează astfel un patrulater strîmb. Să se arate că mijloacele laturilor sînt vîrfurile unui paralelogram.

869. În ce caz se poate duce printr-o dreaptă (D) un plan perpendicular pe o altă dreaptă (D')?

870. Să se demonstreze că dacă două drepte (D) și (D') sînt perpendiculare, fără să fie situate în același plan, perpendicularele coborîte din punctele dreptei (D) pe dreapta (D') formează un plan.

871. Se dă un plan (P) și o dreaptă (D) care întîlnește planul în A, fără a fi perpendiculară pe el. Să se ducă prin A, în planul (P), o perpendiculară pe dreapta (D).

872. Să se demonstreze că un plan paralel la două laturi opuse ale unui patrulater strîmb determină pe celelalte două segmente proporționale.

873. Să se ducă printr-o dreaptă dată (D) un plan perpendicular pe un plan dat (P).

874. Să se determine locul puunctelor egal depărtate de două plane paralele.

875. Să se determine locul punctelor egal depărtate de două plane oarecare.

876. Să se arate că perpendicularele coborîte dintr-un punct M pe fețele unui diedru fac un unghi egal sau suplimentar cu unghiul plan al diedrului dat.

877. Un plan P intersectează laturile AB, BC, CD, DA ale unui patrulater strîmb în L, M, N, P. Să se demonstreze că

$$\overline{AL} \cdot \overline{BM} \cdot \overline{CN} \cdot \overline{DP} = \overline{BL} \cdot \overline{CM} \cdot \overline{DN} \cdot \overline{AP}.$$

878. Să se găsească locul geometric al dreptelor care trec printr-un punct O și care fac unghiuri egale cu dreptele Ox, Oy.

879. Să se găsească locul geometric al dreptelor care trec printr-un punct O și care fac unghiuri egale cu două plane date (P) și (P').

880. În planul (P) se dau cercul (O) și două puncte A, B în care se ridică perpendicularele (Δ) și (Δ_1) pe planul (P). Pe dreapta (Δ) se ia punctul C, iar pe dreapta (Δ_1) punctul D, astfel încît $\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{m}{n}$. Să se construiască pe cercul (O) un punct M astfel încît unghiurile sub care se văd din M segmentele $\overline{AC}$ și $\overline{BD}$ să fie egale. Discuție.

881. Se dă un plan (P), o dreaptă (D) cuprinsă în plan, un punct A exterior planului și un unghi α. Să se determine poziția unui triunghi echilateral ABC care are latura $\overline{BC}$ cuprinsă în planul (P) și paralelă dreptei (D), iar latura $\overline{AB}$ face unghiul α cu planul (P).

882. Să se determine locul punctelor egal depărtate de trei plane care se intersectează după trei drepte paralele.

883. Să se determine locul punctelor egal depărtate de fețele unui triedru.

884. Să se găsească locul punctelor egal depărtate de trei drepte paralele care nu sînt situate în același plan.

885. Să se găsească locul punctelor egal depărtate de muchiile unui triedru.

886. Să se arate că figura simetrică a unui triedru, în raport cu un punct O din spațiu, este un triedru care are elementele sale egale cu ale celui dat, dar nu i se suprapune.

887. Să se arate că figura simetrică a unui triedru, în raport cu o dreaptă, este un triedru egal cu cel dat.

888. Se unește un punct O din spațiu cu vîrfurile A, B, C ale unui triunghi situat în planul (P). Un plan (Q) intersectează muchiile OA, OB, OC în a, b, c. Să se demonstreze că bc și BC, ca și CA, ab și AB se intersectează în trei puncte A', B', C' colinare.

889. Să se demonstreze cu ajutorul problemei precedente următoarea teoremă de geometrie plană: dacă dreptele care unesc vîrfurile A cu A', B cu B', C cu C' a două triunghiuri ABC, $A'B'C'$ sînt concurente, atunci laturile $(BC, B'C')$; $(CA, C'A')$; $(AB, A'B')$ se întîlnesc în trei puncte coliniare. (Triunghiurile ABC și $A'B'C'$ se numesc omologice).

890. Să se demonstreze că cele trei plane duse prin muchiile unui triedru, perpendicular pe fețele opuse, se intersectează după o aceeași dreaptă.

891. Prin vîrful unui triedru se duce în planul fiecărei fețe cîte o perpendiculară pe muchia opusă. Să se demonstreze că cele trei perpendiculare sînt situate în același plan.

892. Să se demonstreze că dacă un triedru are două unghiuri drepte, fețele opuse sînt cadranți (unghiul unei fețe este de 90°) și reciproc, dacă două fețe sînt cadranți, triedrul este bidreptunghic. Într-un asemenea triedru fața a treia măsoară unghiul diedru opus.

893. Se unește un punct O cu vîrfurile unui patrulater plan $ABCD$. Cum trebuie să se ducă planul (P), așa ca punctele a, b, c, d de intersecție cu OA, OB, OC, OD să formeze un paralelogram?

894. Aceleași date. Cum trebuie ales punctul O astfel ca figura $abcd$ să fie un dreptunghi?

895. Aceleași date. Cum trebuie ales punctul O în spațiu pentru ca figura $abcd$ să fie un romb?

896. Aceleași date. Cum trebuie ales punctul O în spațiu pentru ca figura $abcd$ să fie un pătrat?

897. Se intersectează un triedru, cu vîrful în O, printr-un plan care întîlnește muchiile A, B, C. Se ia un punct M în planul triunghiului ABC prin care se duc paralele la muchiile OA, OB, OC pînă întîlnesc fețele OBC, OCA, OAB respectiv în P, Q, R. Notînd $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$, $\overline{OC} = c$, $\overline{MP} = x$, $\overline{MQ} = y$, $\overline{MR} = z$, să se găsească valoarea sumei

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}.$$

898. Se dă un plan (P) și un punct O exterior planului. Fie A piciorul perpendicularei dusă din O pe plan, iar B și C alte două puncte în același plan. Fie un punct D pe dreapta OA și E, F proiecțiile lui D pe OB și OC. Să se arate că:

a) patrulaterul $BCFE$ este inscriptibil:

b) pentru ca triunghiul DEF să fie echilateral, trebuie ca

$$\overline{OB} = \overline{OC} \text{ și } \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{BC}}.$$

899. Se intersectează un unghi triedru printr-un plan (P) care întîlnește muchiile în punctele A, B, C. Să se găsească locul punctului de întîlnire G al medianelor triunghiului ABC, cînd planul (P) se mișcă, A rămînînd fix.

900. Aceleași date. Locul punctului G cînd planul (P) variază, latura $\overline{BC}$ rămînînd fixă.

901. Un plan intersectează muchiile unui triedru tridreptunghic în A, B, C. Să se demonstreze că proiecția vîrfului O al triedrului pe planul dat este ortocentrul H al triunghiului ABC.

902. Aceleași date ca în problema precedentă. Să se demonstreze că pătratul ariei triunghiului ABC este egal cu suma pătratelor ariilor triunghiurilor OBC, OCA, OAB.

903. Fie A, B, C trei puncte respectiv pe muchiile Ox, Oy, Oz ale unui triedru. Dacă AB trece printr-un punct fix I și BC trece printr-un punct fix J, atunci AC trece printr-un punct fix K. Punctele I, J, K sînt coliniare.

904. Două drepte (Δ), (Δ'), nesituate în același plan, sînt intersectate de un plan (P) în două puncte, M și M'. Care este minimul segmentului $\overline{MM'}$ cînd planul (P) se mișcă, rămînînd paralel cu el însuși?

905. Se dă un plan (P), o dreaptă (Δ) în acest plan și două puncte A, B exterioare planului. Se cere să se găsească pe (Δ) un punct X, astfel ca dreptele AX și BX să fie egal înclinate pe plan.

906. Fie (Δ) și (Δ') două drepte perpendiculare în spațiu, AB perpendiculara lor comună. Se duce un segment $\overline{CD}$ de lungime constantă, sprijinit cu extremitățile pe (Δ) și (Δ'). Se cere locul geometric al centrului sferei circumscrise tetraedrului $ABCD$ și al mijloacelor segmentelor ce unesc mijloacele muchiilor opuse ale tetraedrului.

907. Se consideră un patrulater strîmb $ABCD$ și un punct O. Să se demonstreze că planele duse prin O și prin fiecare din laturile patrulaterului întîlnesc laturile opuse în puncte situate în același plan.

908. Se consideră un patrulater strîmb și un plan (P). Să se arate că planele duse prin fiecare din laturile patrulaterului și prin punctele de întîlnire ale planului (P) cu latura opusă trec printr-un același punct.

909. Se consideră în planul (P) un patrulater inscriptibil $ABCD$ și un punct O exterior planului. Să se demonstreze că există relația

$$\overline{OA}^2(BCD) + \overline{OC}^2(ABD) = \overline{OB}^2(ACD) + \overline{OD}^2(CAB),$$

unde (BCD) este aria triunghiului BCD etc.

910. Fie ABC și $A'B'C'$ două triunghiuri situate în două plane diferite (P) și (P'). Se presupune că planele duse respectiv prin A, B, C, perpendiculare pe $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$, se intersectează după o dreaptă (Δ). Să se arate că:

a) triunghiul $A_1B_1C_1$, proiecția triunghiului ABC pe planul (P), este ortologic cu triunghiul $A'B'C'$;

b) orice triunghi ABC, care se bucură față de triunghiul $A'B'C'$ de proprietatea presupusă, se poate obține cu ajutorul unui triunghi ortologic oarecare al lui $A'B'C'$;

c) reciproc, planele duse prin $A'B'C'$ perpendiculare pe BC, CA, AB se intersectează după o aceeași dreaptă (Δ').

Capitolul XVII

PROIECȚII

911. Să se demonstreze că trei puncte coliniare au ca proiecții, pe un plan, de asemenea trei puncte coliniare.

912. Trei puncte coliniare A, B, C se proiectează în a, b, c pe planul (P). Să se demonstreze că $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{ab} : \overline{bc}$.

913. Trei puncte coliniare A, B, C se proiectează în a, b, c pe o dreaptă (Δ). Să se demonstreze că $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{ab} : \overline{bc}$.

914. Se proiectează un triunghi oarecare ABC din spațiu pe un plan (P). Să se demonstreze că proiecția centrului de greutate G al triunghiului ABC este centrul de greutate al triunghiului proiectat $A'B'C'$.

915. Să se demonstreze că dacă o figură din spațiu se proiectează pe două plane care se întîlnesc (P, Q), după două drepte (D) și (D'), atunci figura din spațiu este o dreaptă (Δ). Care este cazul de excepție?

916. Să se demonstreze că două drepte paralele (D) și (D') au ca proiecții pe un plan (P), în general, două drepte (d) și (d') paralele.

917. Două plane (P) și (P') se intersectează după o dreaptă AB. Să se demonstreze că proiecția pe planul (P) a unei drepte CD, perpendiculare pe planul (P'), este o dreaptă perpendiculară pe AB.

918. Printr-o dreaptă dată (Δ) să se ducă un plan (P) pe care proiecțiile a două drepte date (D_1) și (D_2) să fie paralele.

919. Se dă un patrulater strîmb $ABCD$. Să se arate că se pot găsi plane pe care patrulaterul dat să se proiecteze după un paralelogram.

920. Să se demonstreze că proiecția pe un plan (P) a unui unghi drept AOB, în care latura AO este paralelă cu planul (P), este iarăși un unghi drept.

921. Să se demonstreze că dacă proiecția unui unghi drept AOB din spațiu, pe un plan (P), este iarăși un unghi drept aob, atunci una din laturile OA, OB este paralelă cu planul.

922. Se proiectează pe un plan (P) un unghi drept AOB, ale cărui laturi nu sînt paralele cu planul (P). Să se arate în ce caz unghiul obținut aob este ascuțit și în ce caz este obtuz.

923. Se consideră două drepte oarecare (D_1) și (D_2) în spațiu. Să se afle locul geometric al punctelor care se proiectează într-un punct dat O_1 pe (D_1) și în alt punct dat O_2 pe (D_2).

924. Să se arate că dacă într-un tetraedru $ABCD$ muchiile AB și BD sînt perpendiculare și de asemenea AC și CD sînt perpendiculare, piciorul înălțimii din vîrful A se află pe cercul circumscris triunghiului BCD.

925. Să se determine un plan pe care un triunghi oarecare ABC se proiectează ortogonal după un triunghi echilateral. Să se construiască.

Capitolul XVIII

POLIEDRE : PROPRIETĂȚI

926. Să se demonstreze că într-un paralelipiped diagonalele se întîlnesc în același punct.

927. Să se demonstreze că un segment, care trece prin centrul O al unui paralelipiped și este mărginit la două fețe opuse, este împărțit în două părți egale de O.

928. Să se demonstreze că diagonalele unui paralelipiped dreptunghic sînt egale.

929. Să se demonstreze că un paralelipiped cu diagonalele egale este dreptunghic.

930. Să se demonstreze că într-un paralelipiped dreptunghic pătratul unei diagonale este egal cu suma pătratelor celor trei dimensiuni ale sale.

931. Să se demonstreze că planele perpendiculare pe muchiile unui tetraedru, duse prin mijloacele lor, se întîlnesc într-un punct.

932. Să se demonstreze că perpendicularele ridicate pe fețele unui tetraedru, în centrele cercurilor circumscrise acelor fețe, se întîlnesc în același punct.

933. Să se demonstreze că dreptele, care unesc mijloacele muchiilor opuse ale unui tetraedru, se întîlnesc într-un punct G.

934. Să se demonstreze că dreptele [1], care unesc vîrfurile unui tetraedru $ABCD$ cu punctele de întîlnire ale medianelor fețelor opuse, se întîlnesc în același punct G.

935. Să se demonstreze că punctul G din problema precedentă este același cu cel din problema 933.

936. Se ridică într-un punct al bazei unei piramide regulate o perpendiculară care întîlnește fețele laterale, sau prelungirile lor, într-un număr oarecare de puncte. Să se demonstreze că suma distanțelor acestor puncte la piciorul perpendicularei este constantă.

937. Să se demonstreze că planele bisectoare ale diedrelor interioare ale unui tetraedru se întîlnesc într-un punct.

938. Să se arate cum poate obține un tetraedru $ABCD$, avînd muchiile opuse $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$, $\overline{AC}$ și $\overline{BD}$ egale.

939. Să se arate cum se poate obține un tetraedru $ABCD$, avînd muchiile opuse $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$, $\overline{AC}$ și $\overline{BD}$, $\overline{AD}$ și $\overline{BC}$ egale.

940. Să se arate cum se poate obține un tetraedru în care două muchii opuse sînt perpendiculare.

941. Să se demonstreze că dacă un tetraedru are două perechi de muchii opuse perpendiculare și muchiile care compun a treia pereche sînt perpendiculare.

942. Să se demonstreze că într-un tetraedru $ABCD$ cu muchiile opuse perpendiculare [2], perpendicularele coborîte din vîrfuri pe fețele opuse, adică înălțimile tetraedrului, se întîlnesc în același punct.

---

[1] Aceste drepte se numesc *medianele* tetraedrului.

[2] Un astfel de tetraedru se numește *ortogonal*.

943. În ce caz perpendicularele ridicate pe fețele BCD, CAD, ABD, ABC ale unui tetraedru $ABCD$, în punctele de întîlnire A', B', C', D' ale înălțimilor, se întîlnesc în același punct?

944. Să se demonstreze că într-un tetraedru ortogonal suma pătratelor muchiilor opuse este aceeași pentru toate perechile de muchii opuse.

945. Să se demonstreze că perpendicularele comune ale muchiilor opuse într-un tetraedru ortogonal se întîlnesc în punctul comun înălțimilor tetraedrului.

946. Să se demonstreze că într-un tetraedru ortogonal $ABCD$ suma diedrelor și a unghiurilor ce fac muchiile cu fețele, este egală cu 12 unghiuri drepte.

947. Să se demonstreze că dacă într-un tetraedru $ABCD$ ariile fețelor sînt egale, atunci fiecare muchie este egală cu muchia opusă.

948. Se dă în spațiu un punct O și un cerc de centru ω pe care se găsesc vîrfurile A, B, C, D, ale unui patrulater convex. Să se demonstreze relația

$$\overline{AB}\cdot\overline{BD}\cdot\overline{AD}\cdot\overline{OC}^2+\overline{BC}\cdot\overline{CD}\cdot\overline{BD}\cdot\overline{OA}^2=$$

$$=\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{OD}^2+\overline{AC}\cdot\overline{CD}\cdot\overline{AD}\cdot\overline{OB}^2.$$

949. Să se demonstreze teorema lui Ptolomeu, relativă la un patrulater inscriptibil, cu ajutorul problemei precedente.

950. Să se demonstreze cu ajutorul relației din problema 948 că într-un patrulater inscriptibil raportul diagonalelor este egal cu raportul dintre sumele produselor laturilor care pleacă din extremitățile fiecărei diagonale.

951. Fie A', B', C', D' punctele de întîlnire ale înălțimilor triunghiurilor BCD, CDA, ADB, ABC care sînt fețele tetraedrului $ABCD$. Să se demonstreze că planele care proiectează dreptele AA', BB', CC', DD' pe fețele BCD, CDA, ADB, ABC se întîlnesc în același punct.

952. Se consideră un tetraedru $OABC$ ale cărui muchii sînt prelungite indefinit și un plan variabil (P), paralel cu fața ABC și tăind muchiile OA, OB, OC în A', B', C'. Fie α, β, γ mijloacele laturilor $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$. Să se arate că printre toate planele (P) există unul (P_1), așa ca dreptele $A'\alpha$, $B'\beta$, $C'\gamma$ să fie paralele.

953. Aceleași date. Să se arate că pentru un plan (P) diferit de (P_1), dreptele $A'\alpha$, $B'\beta$, $C'\gamma$ se întîlnesc în punctul M.

954. Aceleași date. Să se găsească locul geometric al punctului M, cînd planul variază.

955. Fie $SABCD$ o piramidă avînd drept bază un dreptunghi $ABCD$. Se proiectează A, D în A', D' pe muchiile SC, SB. Să se demonstreze că triunghiurile SBC, $SA'D'$ sînt asemenea.

956. Fie G punctul de întîlnire a medianelor unui tetraedru $ABCD$. Se consideră sfera care trece prin A și este tangentă în G planului BGC. Să se demonstreze că, E fiind punctul unde DG întîlnește din nou această sferă, avem

$$\overline{AG}^2 = \overline{DG} \cdot \overline{GE}.$$

957. Să se demonstreze că planul bisector al unui diedru. într-un tetraedru, împarte muchia opusă în segmente proporționale cu ariile fețelor adiacente.

958. Dacă suma fețelor fiecărui triedru dintr-un tetraedru $ABCD$ este egală cu două unghiuri drepte, atunci muchiile opuse sînt egale două cîte două.

959. Se iau pe muchiile AD, BD, AC, BC ale unui tetraedru regulat $ABCD$ punctele E, F, G, H. În ce caz figura $EFGH$ este un pătrat?

960. Fie $SABC$ un tetraedru, M, N, P, Q punctele de întîlnire a medianelor triunghiurilor ABC, SBC, SCA, SAB. Prin aceste puncte se ridică perpendiculare pe fețele corespunzătoare și se iau pe ele lungimile $\overline{MS_1}$, $\overline{NA_1}$, $\overline{PB_1}$, $\overline{QC_1}$, așa ca

$$\overline{MS_1} : \text{aria } \triangle ABC = NA_1 : \text{aria } \triangle SBC = PB_1 : \text{aria } \triangle SCA =$$
$$= QC_1 : \text{aria } \triangle SAB.$$

Să se arate că medianele tetraedrelor $SABC$ și $S_1A_1B_1C_1$ se întîlnesc în același punct.

961. Să se demonstreze că, într-un tetraedru, pătratul unei mediane este egal cu a treia parte din suma pătratelor muchiilor care pleacă din același vîrf cu mediana, mai puțin a noua parte din suma pătratelor celorlalte muchii.

962. Să se demonstreze că într-un tetraedru suma pătratelor medianelor este egală cu 4/9 din suma pătratelor muchiilor.

963. Să se demonstreze că pătratul distanței dintre mijloacele a două muchii opuse ale unui tetraedru este egală cu a patra parte a diferenței dintre suma pătratelor muchiilor neconsiderate și dintre suma pătratelor celor două muchii considerate.

964. Să se demonstreze că suma pătratelor distanțelor dintre mijloacele muchiilor opuse, luate două cîte două, este egală cu a patra parte din suma pătratelor muchiilor tetraedrului.

965. Se dă diagonala unui cub. Să se găsească printr-o construcție plană latura cubului.

966. Să se intersecteze cu un plan un diedru, așa fel ca intersecțiile lui cu cele două fețe ale diedrului să formeze un unghi drept.

967. Se consideră un tetraedru $SABC$. Dîndu-se baza ABC, se cere să se determine vîrful S astfel ca triunghiurile SAB, SBC, SCA să fie echivalente.

Capitolul XIX

POLIEDRE: ARII, VOLUME

968. Știind că cele trei dimensiuni a, b, c ale unui paralelipiped dreptunghic sînt proporționale cu trei numere date α, β, γ și cunoscînd volumul V al paralelipipedului, să se determine dimensiunile a, b, c.

969. Să se calculeze aria totală S a unui paralelipiped dreptunghic, cunoscînd diagonala d și suma s a celor trei dimensiuni a, b, c.

970. Să se calculeze volumul piramidei $OABC$, care se obține luînd segmentele $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$, $\overline{OC} = c$ pe muchiile unui triedru tridreptunghi.

971. Să se găsească volumul unei prisme drepte, a cărei bază este un hexagon regulat de latură a și a cărei înălțime este egală cu b.

972. Să se calculeze volumul V, aria laterală s și aria totală S a unei piramide regulate, avînd ca bază un hexagon regulat de latură a și înălțimea b.

973. Să se calculeze volumul V și aria totală S a unei piramide regulate a cărei bază este un hexagon regulat cu latura a și a cărei muchie este egală cu $2a$.

974. Să se calculeze volumul tetraedrului regulat a cărui muchie este egală cu a.

975. Se dau trei drepte paralele xx', yy', zz', nesituate în același plan. Se ia pe prima dreaptă un segment $\overline{AB}$ de lungime dată și pe celelalte două cîte un punct C, D. Să se demonstreze că volumul tetraedrului $ABCD$ este independent de poziția segmentului $\overline{AB}$ pe xx' și de aceea a punctelor C și D pe yy' și zz'.

976. O prismă oblică $ABCDA'B'C'D'$ are ca bază un trapez $ABCD$. Să se demonstreze că volumul său este egal cu produsul semisumei fețelor paralele $ADD'A'$, $BCC'B'$ prin distanța dintre planele acelor fețe.

977. O piramidă are baza un pătrat, iar fețele laterale triunghiuri echilaterale. Să se găsească latura bazei cunoscînd volumul V.

978. În piramida triunghiulară $OABC$, muchiile OA, OB, OC sînt perpendiculare două cîte două. Presupunînd că se dau lungimile $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$, $\overline{OC} = c$, să se găsească aria triunghiului ABC, precum și distanța de la vîrful O la fața ABC.

979. Se dă piramida triunghiulară $SABC$, așa ca $\overline{SA} = \overline{SB} = \overline{SC} = a$, $\sphericalangle ASB = 60°$; $\sphericalangle ASC = 90°$; $\sphericalangle BSC = 120°$. Să se calculeze:

a) laturile triunghiului de bază ABC;

b) aria totală a piramidei;

c) volumul piramidei.

980. Bazele unui trunchi de piramidă fiind B și b, să se calculeze aria secțiunii făcute printr-un plan paralel cu bazele și egal depărtate de ele.

981. Fie a, b, c, laturile unui triunghi ABC. Să se calculeze volumul V al piramidei $SABC$, știind că $\sphericalangle BSC = \sphericalangle CSA = \sphericalangle ASB = 90°$.

982. Fie un tetraedru $VABC$ căruia îi desfacem fețele laterale și le așezăm prin rotație pe planul bazei ABC, formînd triunghiurile BCV_a, ACV_b, ABV_c. Să se arate că perpendicularele duse din V_a, V_b, V_c respectiv pe BC, CA, AB sînt concurente. Folosind aceeași metodă, să se arate că înălțimile unui triunghi oarecare sînt concurente.

983. Să se demonstreze că suma distanțelor unui punct variabil, din interiorul unui tetraedru regulat, la fețele tetraedrului este constantă.

984. Se dă un hexagon regulat $Aa'Bb'Cc'$ cu latura a. Se ridică în a', b', c', pe planul hexagonului, perpendiculare pe care se iau lungimile $\overline{a'A'} = \overline{b'B'} = \overline{c'C'} = h$, și se duc dreptele AA', $A'B$, BB', $B'C$, CC', $C'A$. Să se evalueze volumul solidului definit de construcția indicată.

985. Aceleași date. Să se calculeze h, așa ca toate fețele solidului să fie triunghiuri echilaterale și să se determine volumul solidului în acest caz.

986. Un romb $ABCD$, ale cărui diagonale sînt $\overline{AC} = 2a$, $\overline{BD} = a$, este baza unei prisme drepte nelimitate. Pe muchiile acestei prisme se iau în același sens $\overline{AA'} = 3a$, $\overline{BB'} = 4a$, $\overline{CC'} = a$. Să se calculeze volumul cuprins între planul $A'B'C'$ și baza prismei.

987. Aceleași date. Să se găsească aria totală a solidului.

988. Pe un triunghi ABC ca bază se construiește o prismă dreaptă indefinită. Se mărginește această prismă între două plane paralele care intersectează muchiile prismei după segmente egale cu h. Să se găsească aria laterală a prismei obținute.

989. Muchiile unei piramide regulate $SABCD$ cu baza un pătrat $ABCD$ sînt intersectate de un plan, paralel cu baza, în A', B', C', D'. Să se găsească distanța planului de vîrful S, pentru ca solidul să fie împărțit în două părți echivalente.

Se cunoaște $\overline{AB} = a$, $\overline{SA} = m$.

990. Să se demonstreze că volumul unui tetraedru $ABCD$ este echivalent cu a șasea parte din volumul unei prisme a cărei bază este un paralelogram, avînd laturile egale și paralele cu două muchii opuse $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$ ale tetraedrului și a cărei înălțime este egală cu cea mai scurtă distanță dintre cele două muchii.

991. Se dau două segmente $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ de lungimi cunoscute, pe două drepte nesituate în același plan. Să se demonstreze că volumul tetraedrului $ABCD$ nu depinde de poziția segmentelor pe dreptele date.

992. Fie $\overline{AB}$ cea mai scurtă distanță între două muchii opuse ale unui tetraedru; C, D, E, F mijloacele celorlalte muchii. Să se demonstreze că volumul tetraedrului este egal cu două treimi din produsul lungimii $\overline{AB}$ prin aria paralelogramului $CDEF$.

993. Fie tetraedrul $ABCD$ și a, b, c, d lungimile înălțimilor duse din vîrfurile A, B, C, D; fie O un punct oarecare în interiorul tetraedrului, α, β, γ, δ distanțele punctului O la fețele BCD, CDA, DBA, ABC. Să se demonstreze relația

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} = 1.$$

994. Pe muchiile SA, SB, SC ale tetraedrului $SABC$ se iau punctele A', B', C'. Să se demonstreze că

$$\text{vol. } SABC : \text{vol. } SA'B'C' = \overline{SA} \cdot \overline{SB} \cdot \overline{SC} : \overline{SA'} \cdot \overline{SB'} \cdot \overline{SC'}.$$

995. Se dă o piramidă dreaptă $SABCD$ cu baza $ABCD$ un dreptunghi. Un plan oarecare intersectează această piramidă în A', B', C', D'. Să se demonstreze că

$$\frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SC'}} = \frac{1}{\overline{SB'}} + \frac{1}{\overline{SD'}}.$$

996. Fie $SABC$ un tetraedru în care muchiile opuse sînt egale două cîte două. Să se găsească volumul acestui tetraedru, cunoscînd $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{AB} = c$.

997. Se dă un tetraedru regulat $ABCD$. Se duce prin A un plan paralel la BD. Să se determine poziția acestui plan, așa ca tetraedrul să fie împărțit în două părți echivalente.

998. Dintr-un cub cu latura egală cu a, se scot opt tetraedre, obținute în modul următor: fiecare din ele are ca vîrf unul din vîrfurile cubului și ca bază secțiunea făcută în cub prin mijlocul fiecăreia din muchiile care pleacă din vîrful considerat. Să se calculeze volumul V și aria S a solidului care rămîne.

999. Se dă o prismă dreaptă de înălțime h care are drept baze două hexagoane regulate, cu latura a. Printr-un punct I, luat pe dreapta care unește centrele bazelor și situat la distanța b de una din ele, se duce un plan paralel cu bazele, care împarte prisma în alte prisme. Să se afle volumele acestor două prisme.

1000. Se dau două poligoane convexe oarecare, situate în plane paralele. Se unesc vîrfurile acestor poligoane astfel încît fețele laterale să fie plane, iar solidul obținut (un prismatoid) să fie convex. Să se demonstreze că b, b' fiind ariile bazelor, b'' aria poligonului obținut făcînd în solid o secțiune paralelă cu bazele și egal depărtată de ele, h distanța între cele două baze, volumul solidului are ca expresie

$$V = \frac{h(b + b' + 4b'')}{6}.$$

1001. Un solid are forma unui acoperiș de casă; baza este un dreptunghi $ABCD$, o muchie EF este paralelă cu AD și BC. Să se evalueze volumul solidului, cunoscînd dimensiunile $\overline{AB} = m$, $\overline{BC} = n$ ale dreptunghiului, $\overline{EF} = k$ și distanța comună h a punctelor E și F la planul $ABCD$.

1002. O grămadă de nisip are drept baze două dreptunghiuri, situate în plane paralele. Să se găsească volumul grămezii, cunoscînd dimensiunile A, B ale bazei mari, a, b ale bazei mici și distanța h dintre cele două baze.

1003. Într-o grămadă de nisip se cunosc dimensiunile, a, b ale bazei mici, distanța h dintre cele două baze și se mai știe că fețele laterale sînt înclinate cu 30° pe planul bazei mari. Să se găsească volumul grămezii.

1004. Fie b aria bazei unei piramide, h înălțimea, b' aria secțiunii făcute printr-un plan paralel cu baza, la o distanță de vîrf egală cu a treia parte a înălțimii. Să se demonstreze că volumul piramidei este dat de formula

$$V = \frac{h(b + 3b')}{4}.$$

1005. Fie h înălțimea unei piramide, b' aria unei secțiuni făcute printr-un plan paralel cu baza, dus la o distanță egală cu două treimi din înălțime. Să se demonstreze că volumul piramidei este dat de formula

$$V = \frac{3hb'}{4}.$$

1006. Fie b aria uneia din bazele unui trunchi de piramidă, h înălțimea, b' aria unei secțiuni făcute printr-un plan paralel cu bazele, la o distanță de baza b egală cu două treimi din înălțime. Să se demonstreze că volumul trunchiului de piramidă este dat de formula

$$V = \frac{h(b + 3b')}{4}.$$

1007. Fie b aria uneia din bazele unui prismatoid, h înălțimea, b' aria unei secțiuni făcute printr-un plan paralel cu bazele la o distanță egală cu două treimi din înălțime. Să se demonstreze că volumul prismatoidului are drept expresie

$$V = \frac{h(b + 3b')}{4}.$$

Capitolul XX

CORPURI ROTUNDE: PROPRIETĂȚI

1008. Să se determine locul intersecției a două plane perpendiculare care trec prin două drepte paralele.

1009. Să se demonstreze că trei drepte paralele, nesituate în același plan, sînt generatoarele unui singur cilindru de rotație.

1010. Să se demonstreze că trei drepte, care pleacă dintr-un punct O și care nu sînt situate în același plan, pot fi privite ca generatoarele a patru conuri de rotație.

1011. Să se găsească un punct M, depărtat de două puncte A, B cu lungimile date $\overline{MA} = a$, $\overline{MB} = b$, și de un plan cu lungimea c.

1012. Să se ducă prin punctul O al dreptei Ox o dreaptă care să întîlnească o dreaptă oarecare (D), dată în spațiu, și să facă cu Ox unghiul α.

1013. Să se afle locul vîrfurilor unghiurilor drepte ale căror laturi trec prin două puncte date A, B.

1014. Să se demonstreze că planul, care trece printr-o tangentă a bazei unui con și prin generatoarea punctului de contact, nu are comun cu conul decît punctele situate pe acea generatoare.

1015. Dacă un con este tangent unei sfere de-a lungul unui cerc, planul tangent la sferă într-un punct al cercului de contact este tangent conului.

1016. Să se construiască o sferă de rază dată, tangentă la trei plane date.

1017. Printr-un punct M din spațiu se duc două drepte care întîlnesc o sferă de centru O și de rază R în A, B și C, D. Să se demonstreze că

$$\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MC} \cdot \overline{MD} = \overline{MO^2} - R^2.$$

1018. Să se determine locul punctelor M așa ca suma pătratelor distanțelor la două puncte fixe A, B să fie constantă.

1019. Să se determine locul punctelor M așa ca diferența pătratelor distanțelor la două puncte fixe A, B să fie constantă.

1020. Să se determine locul punctelor care au puteri egale în raport cu trei sfere date.

1021. Să se demonstreze că există un singur punct care să aibă puteri egale în raport cu patru sfere date.

1022. Să se determine locul centrelor cercurilor determinate pe o sferă (O) de planele care trec printr-o dreaptă dată (D).

1023. Să se determine locul centrelor cercurilor determinate pe o sferă (O) de planele care trec printr-un punct A.

1024. Fiind date două sfere (O), (O'), se duc razele mobile $\overline{OM}$, $\overline{O'M'}$, paralele și în același sens. Să se demonstreze că MM' trece printr-un punct fix S.

1025. Fiind date două sfere (O), (O'), se duc razele $\overline{OM}$, $\overline{O'M'}$ paralele, însă îndreptate în sensuri contrare. Să se arate că MM' trece printr-un punct fix S'.

1026. Să se găsească locul centrelor sferelor care intersectează două sfere date (O), (O') de raze R, R', după cercuri mari.

1027. Care este condiția ca două cercuri date în spațiu să aparțină unei aceleiași sfere?

1028. Un hexaedru oarecare are cele șase fețe ale sale compuse din patrulatere inscriptibile. Să se demonstreze că se poate circumscrie o sferă acestui hexaedru.

1029. Fie A, B două puncte și (C) un cerc, situate pe o sferă de centru (O). Un plan mobil dus prin A și B intersectează cercul (C) în A', B'. Să se demonstreze că punctele A, B, A', B' sînt situate pe un cerc și că planul cercului mare, care trece prin A' și B', se rotește în jurul unui diametru al sferei (O).

1030. Fie M un punct mobil pe cercul de bază al unui con oblic cu vîrful în S. Se ia pe generatoarea SM un punct m, așa ca $\overline{SM} \cdot \overline{Sm} = k^2$. Să se demonstreze că m descrie un cerc.

1031. Să se demonstreze că dacă un con intră într-o sferă printr-un cerc, iese prin alt cerc.

1032. Se învîrtește un triedru tridreptunghic în jurul vîrfului său S. Muchiile acestui triedru intersectează din nou o sferă dată, (O), care trece prin S, în A, B, C. Să se demonstreze că planul ABC trece printr-un punct fix.

1033. Să se demonstreze că dacă într-un triunghi sferic ABC avem $\overline{AB} = \overline{AC}$, unghiurile B, C sînt egale.

1034. Să se demonstreze că arcul de cerc mare, care unește vîrful unui triunghi sferic isoscel, cu mijlocul bazei, este perpendicular pe bază.

1035. Fie A, B, C, D vîrfurile unui patrulater sferic, L, M, N, L', M', N' mijloacele arcelor BC, CA, AB, AD, BD, CD. Să se demonstreze că arcele de cercuri mari LL', MM', NN' se întîlnesc în același punct.

1036. Într-un triunghi sferic ABC, baza BC este fixă iar vîrful A mobil așa ca arc $AB +$ arc $AC =$ un semicerc mare. Se cere locul lui A.

1037. Un patrulater sferic $ABCD$ este inscriptibil. Să se demonstreze că suma a două unghiuri opuse este egală cu suma celorlalte două.

1038. Într-un triunghi sferic ABC baza BC este fixă, iar vîrful A mobil așa ca $\sphericalangle B + \sphericalangle C - \sphericalangle A = 2k$. Se cere locul vîrfului A.

1039. Planele duse printr-un punct M, perpendiculare pe muchiile unui triedru, S, întîlnesc aceste muchii în A, B, C. Să se construiască o sferă, trecînd prin A, B și C, astfel ca planul triunghiului $A'B'C'$, format de celelalte puncte de intersecție ale ei cu muchiile triedrului să treacă prin M. Să se găsească locul punctelor principale ale triunghiului $A'B'C'$, cînd M descrie dreapta SM.

1040. Printr-un punct S al unei sfere se duc coardele SA, SB, SC perpendiculare două cîte două. Să se caute, cînd triedrul se rotește în jurul lui S, locul: a) al cercului circumscris; b) al punctului de întîlnire al înălțimilor; c) al centrului cercului celor nouă puncte; d) al cercului celor nouă puncte, din triunghiul ABC.

1041. Se dau trei sfere. Care este locul vîrfului comun a trei conuri circumscrise sferelor, avînd același unghi la vîrf?

CORPURI ROTUNDE: ARII, VOLUME

1042. Într-o sferă cu raza R şi cu centrul O se înscrie un con drept, de înălţime $3R/2$. Să se determine un plan paralel la baza conului, intersectînd sfera şi conul după două cercuri, ale căror arii să difere cu πa^2.

1043. Fiind date două sfere (O), (O'), cu razele R şi R', tangente exterioare în punctul C, şi conul circumscris, să se evalueze aria laterală S a trunchiului de con care are ca baze cercurile de contact ale conului cu sferele.

1044. Aceleaşi date. În ce caz aria S este maximă, razele R şi R' fiind variabile, dacă suma lor $R + R'$ este constantă?

1045. Se cunoaşte aria laterală $2\pi S$ şi lungimea generatoarei $2a$, ale unui trunchi de con şi se ştie că generatoarele fac unghiuri de $60°$ cu baza mare. Să se găsească razele R, r ale bazelor.

1046. Se sapă o groapă în formă de con circular drept, cu vîrful în jos, de rază R şi adîncime h. Pămîntul scos se aşază în jurul gropii în formă inelară, avînd secţiunea un triunghi isoscel cu baza $2a$ şi înălţimea i. Să se stabilească relaţia ce există între R, a, h şi i. (Nu se va lua în considerare afînarea pămîntului după săpătură.)

1047. Se dă o piramidă triunghiulară. Să se demonstreze că

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4},$$

unde R este raza sferei înscrise în piramidă, iar h_1, h_2, h_3, h_4 sînt distanţele de la vîrful piramidei la feţele opuse.

1048. Să se găsească volumul V, produs de un triunghi ABC care se roteşte în jurul uneia din laturile sale, în funcţie de $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{AB} = c$.

1049. Să se exprime volumul din problema precedentă cu ajutorul ariei S a lui ABC şi lungimii cercului descris, în rotire, de punctul de întîlnire G al medianelor.

1050. Se roteşte un triunghi ABC, succesiv, în jurul celor trei laturi ale sale. Care din volumele produse este mai mare?

1051. Se roteşte un triunghi ABC în jurul tangentei în A la cercul circumscris. Să se exprime aria născută de $\overline{BC}$ cu ajutorul laturilor a, b, c ale triunghiului.

1052. Aceleași date. Să se găsească volumul născut de $\triangle ABC$.

1053. Se dă un patrulater $ABCD$, în care $\sphericalangle BAD = 90°$, $\overline{AB} = \overline{AD} = a$, $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{BD}$. Să se calculeze volumul născut din rotația patrulaterului în jurul laturii $\overline{AB}$.

1054. Se consideră un pătrat $ABCD$ cu latura a. Se duce diagonala AC. O paralelă la latura BC întîlnește dreptele AB, AC, CD respectiv în L, M, N.

a) Să se determine poziția acestei paralele, astfel ca rotind pătratul în jurul laturii CD, volumul născut prin rotirea triunghiului ALM să fie egal cu volumul născut prin rotirea triunghiului MNC.

b) Aceeași problemă cînd se înlocuiește diagonala AC cu sfertul de cerc, cuprins în pătrat, cu centrul în D și de rază a.

1055. Se rotește hexagonul regulat $ABCDEF$ de latură a în jurul laturii AB. Se cer volumele produse de patrulaterele $ABCF$ și $CDEF$.

1056. Se consideră o sferă și un punct F fix. Prin punctul F se duc trei plane variabile, care sînt două cîte două perpendiculare. Să se demonstreze că suma ariilor celor trei cercuri de secțiune, prin cele trei plane de mai sus, este constantă.

1057. Să se demonstreze că suma ariilor pe care le determină un plan paralel cu un altul, pe care sînt așezate trei sfere de raze diferite, este maximă atunci cînd planul trece prin centrul de greutate al triunghiului ale cărui vîrfuri sînt centrele celor trei sfere. Discuție.

1058. Un trunchi de con este circumscris unei sfere. Să se arate că raportul ariilor acestor corpuri este egal cu raportul volumelor lor (pentru trunchiul de con se va lua aria totală).

1059. Un plan intersectează o sferă după un cerc, căruia i se circumscrie un hexagon regulat. Să se găsească raza R a sferei, cunoscînd latura a a hexagonului și raportul $k > 1$ al ariilor zonelor determinate de planul dat pe sferă.

1060. Să se demonstreze că aria totală a cilindrului circumscris unei sfere este medie proporțională între aria sferei și aria totală a conului echilateral [1] circumscris. Să se arate că aceeași relație subzistă între volume.

1061. Un punct C, luat pe un semicerc descris pe $\overline{AB}$ ca diametru, împarte semicercul în două arce ADC, CEB. Să se arate că raportul volumelor născute de segmentele circulare $ADCA$ și $CEBC$ este egal cu acela al pătratelor zonelor produse de arcele ADC, CEB, cînd figura se rotește în jurul dreptei AB.

---

[1] Con echilateral este un con circular drept avînd generatoarea cît diametrul bazei.

1062. Aceleași date. Se dă un punct H pe $\overline{AB}$. Să se determine punctul C pe semicerc, așa ca raportul volumelor născute de segmentele $ADCA$, $CEBC$ să fie egal cu $\overline{AH} : \overline{HB}$.

1063. Un triunghi ABC se rotește în jurul bisectoarei unghiului AA'; să se demonstreze că

$$\text{aria } AB : \text{aria } AC = \text{vol. } ABA' : \text{vol. } ACA' = \overline{AB}^2 : \overline{AC}^2.$$

1064. În ce punct M al unui semicerc de diametru $\overline{AB}$ trebuie să se ducă tangenta $A'MB'$, limitată la tangentele în A și B ale semicercului, pentru ca rotind figura în jurul lui $\overline{AB}$, volumul născut de porțiunea planului cuprinsă între AA', $A'M$ și arcul MA și volumul născut de porțiunea cuprinsă între BC', $B'M$ și arcul MB, să fie în raportul $a : b$?

1065. Două cercuri egale (O), (O') sînt tangente exterioare în C. Se duce tangenta exterioară comună AA'. Să se demonstreze că rotind figura în jurul lui OC', volumul născut de triunghiul rectiliniu ACA' este îndoitul volumului născut de triunghiul mixtiliniu ACA'.

1066. Să se calculeze baza $2x$ și valoarea comună y a laturilor egale ale unui triunghi isoscel, cunoscînd aria a^2 a triunghiului și aria totală πb^2 a conului, obținut rotind triunghiul în jurul înălțimii sale.

1067. Care trebuie să fie înălțimea x a unui con a cărui rază a bazei este R, pentru ca volumul său să fie echivalent cu al sferei avînd înălțimea drept diametru?

1068. Aceleași date. Care este volumul interior sferei și exterior conului?

1069. Un triunghi dreptunghic ABC, în care se cunoaște ipotenuza $\overline{BC} = a$, rotindu-se succesiv în jurul catetelor $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, dă naștere la volume al căror raport este dat egal cu m/n. Să se găsească catetele $\overline{AB}$ și $\overline{AC}$.

1070. Aceleași date. Să se găsească raza unei sfere a cărei arie este echivalentă cu a solidului născut prin rotirea triunghiului ABC în jurul lui $\overline{BC}$.

1071. Fie h distanța dintre bazele unui segment sferic, r raza secțiunii făcute în sferă printr-un plan egal depărtat de bazele segmentului. Să se demonstreze că volumul segmentului este dat de expresia

$$V = \pi h\left(r^2 - \frac{h^2}{12}\right).$$

1072. Se consideră toate sferele care trec printr-un cerc dat. Să se demonstreze că două plane, egal depărtate de planul cercului, determină în sferele pe care le intersectează segmente avînd acelaşi volum.

1073. Să se demonstreze că o sferă de rază R, descrisă dintr-un punct al unei sfere S ca centru, determină pe această sferă o zonă, a cărei arie este aceeaşi, oricare ar fi sfera S.

1074. Într-un triunghi sferic ABC, de arie constantă, baza BC este fixă; să se găsească locul vîrfului A.

1075. Se prelungesc laturile $\overline{DA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ ale unui patrulater sferic, respectiv dincolo de A, de B, de C, de D. Se descrie din A ca pol un arc de cerc mare, mărginit la prelungirea lui $\overline{DA}$ și latura $\overline{AB}$ și se fac operații analoge în B, C, D. Să se arate că cele patru triunghiuri sferice, obținute prin construcția precedentă, adăugate patrulaterului primitiv, dau o arie echivalentă cu jumătatea ariei sferei.

1076. Se dă un poliedru convex, avînd M muchii, F fețe și V vîrfuri. Să se demonstreze formula lui Euler:

$$M - V = F - 2.$$

1077. Să se găsească suma unghiurilor tuturor poligoanelor care formează fețele unui poliedru, cunoscînd numai numărul vîrfurilor poliedrului.

1078. Se construiește un poliedru oarecare, avînd fețele compuse numai din patrulatere, și două categorii de vîrfuri; unele din care pleacă trei muchii, altele din care pleacă patru muchii. Să se arate că, oricare ar fi poliedrul, numărul vîrfurilor din care pleacă trei muchii este totdeauna egal cu opt.

1079. Să se demonstreze că dacă înălțimea unui con circumscris unei sfere este îndoitul diametrului $2R$ al acestei sfere, atunci aria totală a conului este îndoitul ariei sferei și volumul conului este îndoitul volumului sferei.

Capitolul XXII

PROBLEME DIVERSE

1080. Se dă unghiul xOy. Pe laturile Ox, Oy se iau respectiv punctele A și B astfel ca $\overline{OA} + \overline{OB} = c$, lungime constantă dată. Se cere locul centrului cercului circumscris triunghiului OAB.

1081. Pe două drepte fixe, care se întîlnesc în punctul O, se iau respectiv punctele A și B, astfel încît $\overline{OA} + \overline{OB} = \text{const}$.

Se descriu cercurile cu centrele în A și B, avînd ca raze respectiv lungimile $\overline{OB}$ și $\overline{OA}$. Se cer locurile geometrice descrise de punctele M și N de intersecție ale celor două cercuri.

1082. Fie ABC un triunghi oarecare, cu toate unghiurile ascuțite și H ortocentrul său. Pe direcțiile înălțimilor, în sens opus față de vîrfurile triunghiului, se iau segmentele $\overline{HA'} = \overline{BC}$; $\overline{HB'} = \overline{CA}$; $\overline{HC'} = \overline{AB}$ (A' este pe AH etc.). Să se arate că:

a) laturile triunghiului $A'B'C'$ sînt egale cu dublul medianelor triunghiului ABC;

b) aria triunghiului $A'B'C'$ este de trei ori aria triunghiului ABC;

c) dreptele $A'H$, $B'H$, $C'H$ trec prin mijloacele laturilor $\overline{B'C'}$, $\overline{C'A'}$, $\overline{A'B'}$;

d) laturile triunghiului $A'B'C'$ sînt perpendiculare pe medianele triunghiului ABC.

Ce modificare trebuie adusă enunțului, dacă unul din unghiuri (de exemplu $\sphericalangle A$) este obtuz?

1083. a) Ce condiții trebuie să îndeplinească două triunghiuri ABC și $A'B'C'$ pentru ca patrulaterele $ABA'B'$, $BCB'C'$, $CAC'A'$ să fie inscriptibile?

b) Fiind dat un triunghi ABC, să se arate cum poate fi construit un triunghi $A'B'C'$ îndeplinind condițiile de mai sus.

1084. Să se construiască un triunghi, cunoscînd mijlocul M al laturii $\overline{BC}$, vîrful A și punctul A' de tangență al cercului înscris în triunghi cu latura $\overline{BC}$.

1085. Să se construiască un triunghi cunoscînd mijlocul M al laturii $\overline{BC}$, mijlocul N al segmentului $\overline{AH}$ și punctul A' de tangență al cercului înscris cu latura $\overline{BC}$.

1086. Să se construiască două cercuri de raze date R și r, astfel ca distanța dintre centrele lor să fie egală cu coarda lor comună.

1087. Se dau în spațiu trei puncte A, B, C și un plan (P). Să se găsească un punct O, situat în planul (P), astfel ca să fie vîrful unui con de rotație, cu axa perpendiculară pe plan și care să treacă prin A, B, C.

1088. Fiind dat un triunghi ABC cu toate unghiurile ascuțite, să se demonstreze că se poate găsi în spațiu un punct O, astfel încît triedrul $OABC$ să fie tridreptunghic.

1089. Se dă un tetraedru oarecare $ABCD$ și un plan (P). Să se construiască o piramidă triunghiulară regulată $OMNP$, cu vîrful O în planul (P), echivalentă cu tetraedrul $ABCD$.

Capitolul XXIII

TRANSVERSALE

1090. O transversală intersectează laturile BC, CA, AB ale unui triunghi ABC, în A', B', C'. Să se demonstreze că

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1 \text{ (teorema lui Menelaus).}$$

1091. Să se demonstreze că tangentele la cercul circumscris triunghiului ABC în vîrfurile A, B, C întîlnesc laturile opuse în trei puncte T_1, T_2, T_3 coliniare.

1092. Fie AT_1, BT_2, CT_3 tangentele în A, B, C la cercul circumscris triunghiului ABC, T_1, T_2, T_3 fiind punctele unde aceste tangente intersectează pe BC, CA, AB. Se consideră aceste tangente ca pozitive, dacă întîlnesc laturile în direcțiile BC, CA, AB și negative, dacă le întîlnesc în sensul contrar. Să se arate că avem totdeauna

$$\frac{1}{\overline{AT_1}} + \frac{1}{\overline{BT_2}} + \frac{1}{\overline{CT_3}} = 0.$$

1093. Să se arate că picioarele a două bisectoare interioare și piciorul bisectoarei exterioare al celui de-al treilea unghi sînt trei puncte coliniare.

1094. Să se demonstreze că în triunghiul dreptunghic ABC, punctele în care cercul exînscris unghiului B atinge ipotenuza $\overline{BC}$ și cateta $\overline{CA}$ sînt coliniare cu punctul în care cercul înscris triunghiului atinge cateta $\overline{AB}$.

1095. Printr-un punct O se duce o secantă arbitrară care întîlnește laturile unui triunghi ABC în A', B', C'. Se iau simetricele A_1, B_1, C_1 ale punctelor A', B', C' în raport cu punctul dat O. Să se demonstreze că dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sînt concurente.

1096. Se dă unghiul drept xOy. Pe latura Oy se dau punctele fixe A, B, iar pe Ox se ia un punct M variabil. Fie P, Q proiecțiile vîrfului O pe dreptele MA și MB. Să se arate că dreapta PQ trece printr-un punct fix.

1097. Se unesc vîrfurile A, B, C ale unui triunghi cu un punct O din plan. Dreptele AO, BO, CO întîlnesc laturile BC, CA, AB respectiv în punctele A', B', C'; să se demonstreze că

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1 \text{ (teorema lui Ceva).}$$

1098. O transversală întîlnește laturile triunghiului ABC în A', B', C'. Fie A_1, B_1, C_1 conjugatele armonice ale lui A', B', C' în raport cu B și C, C și A, A și B. Să se demonstreze că dreptele AA_1, BB_1, CC_1 se întîlnesc într-un punct.

1099. Să se demonstreze că dacă într-un triunghi ABC se duce prin mijlocul E al laturii $\overline{AC}$ o paralelă la bisectoarea unghiului B, această paralelă întîlnește laturile $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ în două puncte F, G, așa că $\overline{AF} = \overline{CG}$.

1100. Să se demonstreze că dreptele, ce unesc vîrfurile unui triunghi ABC cu punctele de tangență α, β, γ ale cercului înscris cu laturile opuse, trec prin același punct N (punctul lui Gergonne).

1101. Se consideră un punct P în planul triunghiului ABC și fie A', B', C' picioarele cevienelor punctului P, iar A'', B'', C'' respectiv simetricele punctelor A', B', C' în raport cu mijloacele laturilor pe care se găsesc. Să se arate că cevienele AA'', BB'', CC'' trec prin același punct Q (reciprocul sau izotomicul punctului P).

1102. Fie A', B', C', punctele de tangență ale cercurilor (I_a), (I_b), (I_c) exînscrise triunghiului ABC, respectiv cu laturile $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$. Să se arate că cevienele AA', BB', CC' trec prin același punct N' (*punctul lui Nagel* al triunghiului).

1103. Fie A' punctul de tangență al unui cerc înscris sau exînscris triunghiului ABC, cu latura $\overline{BC}$, iar A'' punctul diametral opus lui A' în acest cerc. Să se arate că AA'', BB'', CC'' sînt concurente, B'' și C'' fiind analogele lui A''.

1104. Se dau două axe dreptunghiulare Ox, Oy și un punct A așezat pe bisectoarea unghiului drept. Fie A_1 și A_2 proiecțiile lui A respectiv pe Ox și Oy, iar M și N punctele în care o dreaptă variabilă, ce trece prin A, întîlnește aceleași axe. Să se arate că dreptele MA_2, NA_1 și perpendiculara din O pe MN sînt concurente.

1105. Un cerc întîlnește laturile $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ ale unui triunghi ABC în punctele α, α'; β, β'; γ, γ'. Să se demonstreze că dacă cevienele $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ sînt concurente, atunci și cevienele $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$ sînt concurente.

1106. Fie I punctul comun dreptelor care unesc vîrfurile unui triunghi ABC, cu punctele α, β, γ, unde cercul înscris atinge laturile opuse (punctul lui Gergonne). Să se demonstreze că

$$\frac{\overline{I\alpha}}{\overline{IA}}\cdot\frac{\overline{I\beta}}{\overline{IB}}\cdot\frac{\overline{I\gamma}}{\overline{IC}}=-\frac{r}{4R}.$$

1107. Dreptele care unesc vîrfurile A, B, C ale unui triunghi cu un punct O din plan întîlnesc laturile opuse respectiv în α, β, γ. Să se demonstreze relația (lui Van Aubel)

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{O\alpha}}=\frac{\overline{\beta A}}{\overline{\beta C}}+\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}}.$$

1108. Se consideră într-un plan trei cercuri de centre O_1, O_2, O_3 și de raze R_1, R_2, R_3. Fie S_1, S_1', centrele de asemănare directă și inversă a cercurilor (O_2) și (O_3), S_2 și S_2' ale cercurilor (O_3), (O_1), iar S_3, S_3' ale cercurilor (O_1), (O_2). Să se demonstreze că:

a) punctele S_1, S_2, S_3 sînt coliniare (D'Alembert);

b) grupurile de puncte (S_1', S_2', S_3), (S_1', S_2, S_3'), $(S_1, S_2', S_3'$, sînt coliniare;

c) dreptele O_1S_1', O_2S_2', O_3S_3' sînt concurente;

d) grupurile de drepte $(O_1S_1', O_2S_2, O_3S_3)$, $(O_1S_1, O_2S_2', O_3S_3)$, $(O_1S_1, O_2S_2, O_3S_3')$ sînt concurente.

1109. Să se demonstreze că într-un patrulater complet mijloacele diagonalelor sînt coliniare.

1110. Să se demonstreze că dacă dreptele AA', BB', CC' care unesc vîrfurile triunghiurilor ABC, $A'B'C'$ se întîlnesc într-un punct O, laturile BC și $B'C'$, CA și $C'A'$, AB și $A'B'$ se întîlnesc în trei puncte α, β, γ coliniare (triunghiuri omologice).

1111. Să se demonstreze că dacă punctele α, β, γ, unde se întîlnesc laturile BC și $B'C'$, CA și $C'A'$, AB și $A'B'$ ale triunghiurilor ABC și $A'B'C'$, sînt coliniare, dreptele AA', BB', CC' sînt concurente (Desargues).

1112. Fie α, β, γ trei puncte arbitrare luate respectiv pe laturile $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ ale unui triunghi ABC, iar A', B', C' mijloacele acestor laturi. Dreptele $\alpha B'$, $\alpha C'$ întîlnesc laturile $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ în C'', B'', iar dreapta $B''C''$ intersectează pe $\overline{BC}$ în A_1. Plecînd de la punctele β și γ, se vor obține prin construcții analoge punctele B_1, C_1, situate pe $\overline{AC}$ și $\overline{AB}$. Să se demonstreze că dacă α, β, γ sînt coliniare, sau dacă $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ sînt concurente, atunci punctele A_1, B_1, C_1 sînt coliniare.

1113. Fie P un punct oarecare în planul unui triunghi ABC. Dreptele AP, BP, CP intersectează laturile $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ în a, b, c. Să se demonstreze că dreptele ce unesc mijloacele laturilor $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ cu mijloacele segmentelor $\overline{bc}$, $\overline{ca}$, $\overline{ab}$ sînt concurente.

1114. Prin piciorul H al înălțimii AH a triunghiului ABC se duc perpendicularele HD, HE pe laturile AB, AC și paralelele HF, HG la aceleași laturi (D, G pe $\overline{AB}$; E, F pe $\overline{AC}$). Să se arate că dreptele DE, GF se întîlnesc într-un punct pe $\overline{BC}$.

1115. O transversală intersectează laturile unui triunghi ABC în punctele α, β, γ. Dreptele $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ formează un triunghi $A_1B_1C_1$. Să se arate că dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sînt concurente.

1116. Fie (F_1) și (F_2) două figuri omotetice, cu centrul de omotetie în O_3; (F_1) și (F_3) de asemenea omotetice, cu centrul de omotetie în O_2. Se știe că (F_2) și (F_3) sînt omotetice; fie O_1 centrul lor de omotetie. Să se demonstreze că O_1, O_2, O_3 sînt coliniare.

1117. Două transversale (Δ), (Δ') intersectează laturile $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ ale unui triunghi în punctele (M, M'), (N, N'), (P, P'). Să se demonstreze că dreptele NP', PM', MN' întîlnesc laturile $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ în trei puncte M'', N'', P'' coliniare.

1118. Fie abc un triunghi înscris în triunghiul ABC. Dreptele ce unesc punctele A, B, C cu mijloacele laturilor triunghiului abc întîlnesc laturile triunghiului în α, β, γ. Să se găsească condiția ca aceste trei puncte să fie coliniare. Să se deducă apoi că $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ sînt concurente, dacă [illegible], Bb, Cc sînt concurente.

1119. Fie ABC un triunghi și A', B', C' punctele ce împart laturile $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ în raportul [illegible] $: n$, adică astfel ca $\overline{BA'} : \overline{A'C} = \overline{CB'} : \overline{B'A} = \overline{AC'} : \overline{C'B} = m : n$. Fie de asemenea A_1, B_1, C_1 intersecțiile dreptelor (BB', CC'), (CC', AA'), (AA', BB'); se duc prin A_1, B_1, C_1 paralele respectiv cu AA', BB', CC'. Aceste paralele intersectează pe $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ în A'', B'', C''. Să se demonstreze că

$$\overline{BA'} = \overline{CA''}, \ \overline{AC'} = \overline{BC''}, \ \overline{CB'} = \overline{AB''}.$$

1120. Dreptele AA', BB', CC' din problema precedentă se intersectează formînd triunghiul $A_1B_1C_1$. Să se arate că triunghiurile ABC, $A_1B_1C_1$ au același punct de întîlnire al medianelor.

1121. Se dau un triunghi și o dreaptă, pe care sînt notate trei puncte. Să se așeze dreapta pe triunghi astfel ca ea să intersecteze laturile triunghiului în punctele notate.

1122. Să se construiască numai cu rigla o dreaptă care să treacă printr-un punct M și prin intersecția a două drepte (D), (D'), care nu se întîlnesc în cadrul foii de desen.

1123. Să se ducă cu rigla, printr-un punct dat M, o paralelă la două drepte paralele date.

1124. Dreptele (D), (Δ), pe de o parte, și (D'), (Δ'), pe de altă parte, se întîlnesc în A și A', în cadrul foii de desen, iar dreptele (D), (D'), pe de o parte și (Δ), (Δ'), pe de alta, nu se întîlnesc pe foaie. Să se construiască dreapta care trece prin punctul de intersecție a dreptelor (D), (D') și prin acela a dreptelor (Δ), (Δ'), (admițînd că această dreaptă are o porțiune pe foaia de desen).

1125. Să se demonstreze că, dacă se prelungesc laturile opuse $\overline{AB}$ și $\overline{DE}$, $\overline{BC}$ și $\overline{EF}$, $\overline{CD}$ și $\overline{FA}$ ale unui hexagon $ABCDEF$ înscris într-un cerc, punctele lor de intersecție G, H, I sînt coliniare.

1126. Fie un pentagon $ABCDE$ înscris într-un cerc și fie γ intersecția tangentei în A cu latura CD, α intersecția dreptelor AB, DE, iar β intersecția dreptelor BC, AE. Să se demonstreze că punctele α, β, γ sînt coliniare.

1127. Se consideră un patrulater $ABCD$ înscris într-un cerc. Să se arate că:

a) tangentele în C și D întîlnesc respectiv dreptele AD, BC, în γ, β, iar dreapta $\beta\gamma$ trece prin intersecția α a dreptelor AB, CD;

b) a și c fiind celelalte vîrfuri ale patrulaterului complet format de A, B, C, D, diagonala ac trece prin punctul de întîlnire b al tangentelor în B și D și prin punctul de întîlnire d al tangentelor în A și C.

1128. Să se demonstreze că dacă două triunghiuri ABC, $A'B'C'$, înscrise într-un cerc, sînt omologice și dacă se ia un punct I pe cerc, punctele de întîlnire α, β, γ ale dreptelor BC și IA', CA și IB', AB și IC' se găsesc pe aceeași dreaptă, ce trece prin centrul de omologie D (Aubert).

1129. Se dă un triunghi ABC înscris într-un cerc (O). O dreaptă (D) intersectează laturile triunghiului în A', B', C'. Se unește un punct I al dreptei (D) cu vîrfurile A, B, C. Dreptele IA, IB, IC intersectează cercul (O) în A'', B'', C''. Să se arate că $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ se intersectează într-un punct de pe cercul (O).

1130. Într-un triunghi oarecare ABC, fie A_1, B_1, C_1 și A_2, B_2, C_2 picioarele înălțimilor și medianelor. Se consideră intersecțiile

$M \equiv (A_1B_2,\ A_2B_1)$, $N \equiv (B_1C_2,\ B_2C_1)$, $P \equiv (C_1A_2,\ C_2A_1)$. Să se demonstreze că punctele M, N, P se află pe dreapta lui Euler a triunghiului.

1131. Într-un triunghi ABC se proiectează picioarele A', B', C' ale înălțimilor pe laturile adiacente. Se obțin trei perechi de puncte α și α', β și β', γ și γ'. Să se demonstreze că dreptele $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ întîlnesc laturile BC, CA, AB în trei puncte A_1, B_1, C_1 coliniare.

1132. Fie A', B', C' picioarele înălțimilor triunghiului ABC. Se notează cu A'_b, A'_c proiecțiile lui A' pe BB' și CC'; B'_c, B'_a și C'_a, C'_c sînt punctele analoge. Să se arate că $A'_bA'_c$, $B'_cB'_a$, $C'_aC'_b$ întîlnesc laturile triunghiului în trei puncte coliniare.

1133. Fie B' și C' centrele cercurilor ce trec prin A, B și A, C și sînt tangente în B și C la latura $\overline{BC}$ a triunghiului ABC. Să se arate că tangenta în A la cercul circumscris și $B'C'$ se intersectează pe BC.

1134. Fie α, β, γ trei puncte luate pe laturile $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ ale triunghiului ABC. Ducem prin A simetrica dreptei $A\alpha$ în raport cu bisectoarea unghiului A, care întîlnește pe BC în α' și fie β', γ' punctele analoge. Să se arate că:

a) dacă punctele α, β, γ sînt coliniare, atunci și punctele α', β', γ' sînt coliniare;

b) dacă dreptele $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ sînt concurente, atunci și dreptele $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$ sînt concurente.

1135. Se consideră un punct M pe cercul (O) circumscris triunghiului ABC. Să se demonstreze că proiecțiile A', B', C' ale punctului M pe laturile BC, CA, AB sînt coliniare (dreapta lui Simson).

1136. Să se demonstreze că pe dreapta lui Simson a punctului în care simediana întîlnește cercul circumscris triunghiului, laturile triunghiului determină două segmente egale.

1137. Se consideră două puncte O, O' în planul triunghiului ABC. Să se demonstreze că dreptele care unesc vîrfurile A, B, C respectiv cu punctele de întîlnire a dreptelor OB și $O'C$, OC și $O'A$, OA și $O'B$ sînt concurente.

1138. Prin centrul I al cercului înscris în triunghiul ABC se duc perpendicularele ID, IE, IF pe laturi și pe prelungirile acestora se iau către exterior lungimile egale $\overline{Da} = \overline{Eb} = \overline{Fc}$. Să se demonstreze că dreptele Aa, Bb, Cc sînt concurente (Kariya).

1139. Pe razele OA', OB' și OC', care unesc centrul cercului înscris unui triunghi ABC cu punctele de contact, se iau segmentele $\overline{O\alpha} = \overline{O\beta} = \overline{O\gamma}$. Să se arate că centrele cercurilor $AO\alpha$, $BO\beta$, $CO\gamma$ sînt coliniare.

1140. Fie ABC, $A_1B_1C_1$ două triunghiuri înscrise în cercul (O); A', B', C' mijloacele laturilor $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$. Să se arate că dacă AA_1, BB_1, CC_1 sînt concurente sau întîlnesc laturile triunghiului ABC în trei puncte coliniare, centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor OA_1A', OB_1B', OC_1C' sînt coliniare.

1141. Se consideră două triunghiuri ABC, $A'B'C'$. Fie α, β, γ punctele de întîlnire ale dreptelor AA', BB', CC' respectiv cu BC, CA, AB, iar α', β', γ' punctele de întîlnire ale dreptelor BC şi $B'C'$, CA şi $C'A'$, AB şi $A'B'$. Să se arate că, dacă punctele α, β, γ sînt coliniare, atunci dreptele $A'\alpha$, $B'\beta$, $C'\gamma$ sînt concurente.

1142. Fie ABC şi $A'B'C'$ două triunghiuri echilatere de acelaşi centru, cu vîrfurile notate în acelaşi sens de rotaţie. Să se arate că triunghiurile sînt de trei ori omologice şi anume în ordinele

$$\frac{ABC}{A'C'B'}; \quad \frac{ABC}{C'B'A'}; \quad \frac{ABC}{B'C'A'} \quad \text{(D. Barbilian).}$$

1143. Se dă un triunghi ABC înscris într-un cerc (O) şi o transversală (Δ) care întîlneşte laturile BC, CA, AB respectiv în punctele α, β, γ situate în exteriorul cercului. Se consideră cercurile ce au ca centre punctele α, β, γ şi sînt ortogonale cu cercul (O); aceste cercuri întîlnesc laturile BC, CA, AB respectiv în punctele (a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2), a_1, b_1, c_1 fiind exterioare cercului (O), iar a_2, b_2, c_2 interioare acestui cerc. Să se demonstreze că:

a) grupurile de puncte (a_1, b_1, c_1), (a_1, b_2, c_2), (a_2, b_1, c_2), (a_2, b_2, c_1) sînt coliniare;

b) grupurile de drepte (Aa_2, Bb_2, Cc_2), (Aa_2, Bb_1, Cc_1), (Aa_1, Bb_2, Cc_1), (Aa_1, Bb_1, Cc_2) sînt concurente.

1144. Să se demonstreze că dacă paralelele duse prin vîrfurile triunghiului ABC la laturile triunghiului $A'B'C'$ sînt concurente într-un punct P, atunci şi paralelele duse prin vîrfurile lui A', B', C' la laturile lui ABC se întîlnesc într-un punct P' (*triunghiurile* ABC, $A'B'C'$ se numesc *metaparalele* sau *paralelogice*).

1145. Se consideră două triunghiuri ABC, $A'B'C'$ în acelaşi plan. Să se demonstreze că dacă proiectantele de acelaşi unghi φ ale vîrfurilor lui ABC pe laturile lui $A'B'C'$ sînt concurente, atunci şi proiectantele de unghi $\pi-\varphi$ ale vîrfurilor lui $A'B'C'$ pe laturile lui ABC sînt concurente (*triunghiurile* ABC, $A'B'C'$ se numesc *izologice*).

1146. Fiind date două triunghiuri ABC, $A'B'C'$ în același plan, să se arate că dacă paralelele duse prin A, B, C, la laturile $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ întîlnesc laturile opuse în trei puncte coliniare α, β, γ, atunci și paralelele duse prin A', B', C' respectiv la BC, CA, AB întîlnesc laturile opuse $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ în trei puncte coliniare α', β', γ' (*triunghiurile* ABC, $A'B'C'$ se numesc *izoliniare*).

1147. I fiind centrul cercului înscris în triunghiul ABC, o dreaptă ce trece prin I intersectează cercurile BIC, CIA, AIB respectiv în A_1, B_1, C_1. Să se demonstreze că:

a) proiecțiile A_1', B_1', C_1' ale punctelor A_1, B_1, C_1 pe laturile BC, CA, AB sînt coliniare;

b) tangentele în A_1, B_1, C_1 respectiv la cercurile BIC, CIA, AIB formează un triunghi omologic cu ABC.

1148. Două drepte trecînd prin centrul cercului I, în triunghiul ABC, întîlnesc cercurile BIC, CIA, AIB în punctele A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2. Să se demonstreze că dreptele A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 formează un triunghi omologic cu ABC.

1149. Să se demonstreze că o dreaptă (d) dusă arbitrar printr-un punct oarecare P, din planul triunghiului ABC intersectează cercurile BPC, CPA, APB respectiv în punctele P_1, P_2, P_3, ale căror proiecții de unghi α, pe laturile triunghiului, sînt coliniare.

1150. Într-un patrulater $ABCD$, punctele B și C sînt fixe, iar A, D și intersecția I a diagonalelor descriu trei drepte paralele între ele. Se cere:

a) să se arate că latura AD trece printr-un punct fix;

b) locul geometric al intersecției dreptelor AB și CD.

1151. Unei sfere îi este circumscris un patrulater strîmb. Să se demonstreze că punctele de tangență se află într-un plan.

Capitolul XXIV

RAPOARTE ANARMONICE ȘI ARMONICE, FASCICULE

1152. Să se demonstreze că dacă ρ este valoarea raportului anarmonic $(ABCD)$, format de patru puncte coliniare A, B, C, D, celelalte cinci rapoarte distincte formate de aceleași puncte $(ACBD)$, $(ADBC)$, $(ABDC)$, $(ACDB)$, $(ADCB)$ au respectiv valorile

$$1-\rho;\quad \frac{\rho-1}{\rho};\quad \frac{1}{\rho};\quad \frac{1}{1-\rho};\quad \frac{\rho}{\rho-1}.$$

1153. Să se demonstreze că dacă într-o diviziune armonică $(ABCD)$ avem $\overline{AB}=\overline{AC}\sqrt{2}$, atunci $\overline{AC}=\overline{BD}$.

1154. Să se demonstreze că patru puncte A, B, C, D coliniare, care satisfac relațiile

$$\overline{AB} = \overline{CD}, \quad \overline{AC} = \overline{AB}\sqrt{2}$$

formează o diviziune armonică.

1155. Avînd o diviziune armonică $(ABCD)$, în care O este mijlocul lui $\overline{AB}$, există relația

$$\overline{DC} \cdot \overline{DO} = \overline{DB} \cdot \overline{DA}.$$

Să se deducă apoi că

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{BD}^2}{\overline{BC}^2} = \frac{\overline{AD}^2}{\overline{AC}^2}.$$

1156. Fie A, B, C, D patru puncte coliniare și fie M, N mijloacele segmentelor $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$. Să se arate că relația $\overline{MN}^2 = \overline{MA}^2 + \overline{NC}^2$ reprezintă condiția necesară și suficientă pentru ca diviziunea $(ABCD)$ să fie armonică.

1157. Pe o dreaptă (Δ) se dau patru puncte A, B, A', B' și se cere să se găsească pe această dreaptă două puncte P și Q care să împartă armonic segmentele $\overline{AB}$ și $\overline{A'B'}$.

1158. Fie O un punct luat în planul unui patrulater complet $ABCDEF$ (AB, CD se intersectează în E, AD și BC în F). Dreptele OA, OC intîlnesc laturile BC, CD în α, β și OC intîlnește laturile AB, AD în α', β'. Să se demonstreze că dreptele $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ se intîlnesc pe EF.

1159. Fiind date două drepte Ox, Oy și un punct P în plan, dacă se duce o secantă variabilă PMN care intersectează pe Ox în M și pe Oy în N și dacă se ia Q conjugatul armonic al lui P în raport cu M și N, să se arate că locul punctului Q este o dreaptă care trece prin O (polara lui P în raport cu unghiul xOy).

1160. Dacă prin punctul P se duc transversalele PMN și $PM'N'$ care intersectează pe Ox în M și M', pe Oy în N și N', să se arate că dreptele MN' și $M'N$ se intîlnesc în Q pe polara lui P în raport cu unghiul xOy.

1161. Să se demonstreze că într-un patrulater complet două diagonale împart armonic pe a treia.

1162. Se dă triunghiul ABC și o paralelă (Δ) la $\overline{BC}$. Unim punctul M, mobil pe (Δ), cu B și C; dreptele MC și MB intersectează laturile $\overline{AB}$ și $\overline{AC}$ respectiv în N și P. Se cere locul geometric al intersecției dreptelor AM și NP.

1163. Se consideră un cerc și o dreaptă (Δ) perpendiculară pe diametrul $\overline{AB}$ al cercului, în punctul I. Fie M un punct variabil pe cerc; dreptele MA și MB intîlnesc pe (Δ) respectiv în P și Q.

Dreapta AQ întîlnește cercul în N. Să se afle locul proiecției H a punctului A pe MN.

1164. Polarele unui punct în raport cu cele trei unghiuri ale uuni triunghi ABC întílnesc laturile opuse în trei puncte coliniare. Să se arate că punctul de întîlnire a două polare este coliniar cu al treilea vîrf al triunghiului și cu punctul considerat.

1165. Dîndu-se două cercuri ortogonale (O) și (O'), dacă un diametru al unuia din cercuri întîlnește pe celălalt, să se arate că atunci punctele de intersecție formează o diviziune armonică.

1166. Se dau două cercuri ortogonale (C) și (C'), cu centrele O și O', care se intersectează în A și B. Prin O se duce o dreaptă care intersectează cercul (C) în M și N și cercul (C') în P și Q [N în interiorul cercului (C'), P în interiorul cercului (C)]. Perpendiculara din O' pe MN întîlnește cercul (C') în punctele E și F.

a) Să se demonstreze că dreapta care unește un capăt al diametrului $\overline{EF}$ cu un capăt al diametrului $\overline{MN}$ trece sau prin A sau prin B.

b) Fie T unul din punctele în care cercul de diametru PQ intersectează cercul (C). Să se demonstreze egalitatea de unghiuri

$$\sphericalangle MTP = \sphericalangle PTN = \sphericalangle NTQ.$$

1167. O dreaptă (Δ) întîlnește laturile triunghiului ABC în punctele α, β, γ. O fiind un punct în plan, dreptele AO, BO, CO întîlnesc pe (Δ) în α', β', γ'. Să se demonstreze relația

$$\frac{\overline{\alpha'\beta}}{\overline{\alpha'\gamma}} \cdot \frac{\overline{\beta'\gamma}}{\overline{\beta'\alpha}} \cdot \frac{\overline{\gamma'\alpha}}{\overline{\gamma'\beta}} = 1.$$

1168. Cercul înscris în triunghiul ABC atinge latura $\overline{BC}$ în D. Printr-un punct A' al laturii $\overline{BC}$ se duce tangenta $A'\alpha$ la cerc, α fiind punctul de contact. Dreapta $A\alpha$ întîlnește pe $\overline{BC}$ în D'. Să se demonstreze relația

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{D'B}}{\overline{D'C}} = \frac{\overline{A'B^2}}{\overline{A'C^2}}.$$

1169. Fie A', B', C' picioarele cevienelor unui punct P în raport cu triunghiul ABC. Tangentele, diferite de laturi, duse prin A', B', C', la cercul înscris, îl întîlnesc în α, β, γ. Să se demonstreze că cevienele $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ sînt concurente.

1170. Se dă un fascicul armonic $P(ABCD)$, punctele A, B, C, D fiind pe o dreaptă care intersectează fasciculul în ordinea A, C, B și D. Se ia un punct M pe raza PD și se unește cu punctele C

și B; razele exterioare PA și PD rămîn fixe, iar cele interioare PC și PB variază.

Fie PC_1 și PB_1 una din noile poziții ale razelor PC și PB; ele intersectează pe MC și MB în punctele N și R. Să se arate că dreapta NR trece prin A.

1171. Se unesc extremitățile A și B ale unui diametru al cercului (O) cu două puncte C și D de pe acest cerc. Se duce prin O o transversală oarecare care intersectează dreptele AC, BD, BC și AD respectiv în punctele E, F, G, H. Să se demonstreze că fiecare din segmentele $\overline{EF}$ și $\overline{GH}$ se vede din punctele C și D sub unghiuri egale.

1172. Se dă un patrulater $ABCD$ și se notează cu O, E, F intersecțiile diagonalelor și ale perechilor de laturi opuse. Să se demonstreze că triunghiul complementar al triunghiului OEF este omologic cu fiecare din cele patru triunghiuri ce se obțin din patrulaterul $ABCD$, lăsînd cîte un vîrf la o parte.

1173. Cercul care trece prin cele trei puncte de intersecție ale diagonalelor unui patrulater complet este ortogonal cercurilor descrise pe cele trei diagonale ca diametre. Să se deducă de aici că aceste trei cercuri au aceeași axă radicală.

1174. Să se demonstreze că dacă dreptele AA', BB', CC', care unesc vîrfurile triunghiurilor ABC, $A'B'C'$, se întîlnesc într-un punct O, laturile BC și $B'C'$, CA și $C'A'$, AB și $A'B'$ se întîlnesc în trei puncte α, β, γ coliniare.

Reciproc, dacă punctele α, β, γ sînt coliniare, dreptele AA', BB', CC' se întîlnesc în același punct (triunghiuri omologice).

1175. Se consideră un triunghi ABC și o transversală $\alpha\beta\gamma$ care întîlnește pe BC în α, pe CA în β, pe AB în γ. Dreptele $B\beta$ și $C\gamma$ se intersectează în A', $C\gamma$ și $A\alpha$ în B', $A\alpha$ și $B\beta$ în C'. Să se demonstreze că dreptele $A'\alpha$, $B'\beta$, $C'\gamma$ se întîlnesc într-un punct.

1176. Pe latura $\overline{BC}$ a triunghiului ABC ca diametru se descrie un cerc care intersectează în A_1 și A_2 înălțimea AA', punctul A_1 fiind de aceeași parte cu A față de $\overline{BC}$. Fie B_1, B_2; C_1, C_2 punctele analoge cu A_1, A_2. Să se arate că:

a) intersecțiile I, K, L ale perechilor de drepte (B_1C_1, B_2C_2) (C_1A_1, C_2A_2), (A_1B_1, A_2B_2) se găsesc respectiv pe $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$;

b) punctele I, K, L sînt coliniare:

c) intersecțiile M, N, P ale perechilor de drepte (B_1C_2, C_1B_2), (C_1A_2, C_2A_1), (A_1B_2, B_1A_2) se găsesc respectiv pe $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$;

d) dreptele AM, BN, CP sînt concurente.

1177. Să se demonstreze că dreptele care unesc, două cîte două, vîrfurile a două triunghiuri omologice cu un triunghi ABC și circumscrise acestuia, formează un triunghi omologic cu ABC.

1178. Să se demonstreze că dacă un hexagon este înscris într-un cerc, laturile opuse AB și DE, BC și EF, CD și FA se întîlnesc în trei puncte α, β, γ coliniare (teorema lui Pascal).

1179. Fie $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ două diametre ale cercului (O), iar C și D două puncte pe cerc. Dreptele AD, BC se intersectează în M, $A'C$ și $B'D$ în N. Să se demonstreze că punctele M, N, O sînt coliniare.

1180. Să se demonstreze că în orice triunghi ABC, dreapta $B'C'$ care unește picioarele înălțimilor BB' și CC', dreapta $B''C''$ care unește picioarele bisectoarelor BB'' și CC'' și dreapta B_1C_1 care unește punctele de contact B_1, C_1 ale cercului înscris, cu laturile AC, AB se întîlnesc în același punct.

1181. Se consideră un cerc (O) și o dreaptă fixă $x'x$ tangentă la cerc în C. Se unește O cu un punct M pe tangenta $x'x$. OM intersectează cercul în punctul N situat între O și M. Fie P conjugatul armonic al lui O în raport cu M și N, Q proiecția lui P pe $x'x$. Să se arate că dreapta NQ trece printr-un punct fix, cînd M variază pe $x'x$.

1182. Se consideră două cercuri ortogonale (C), (C'), Un diametru DD' al cercului (C) întîlnește pe (C') în două puncte A, B, care se unesc cu un punct oarecare M al cercului (C). Fie E și F punctele de intersecție ale cercului (C) cu MA și MB. Să se demonstreze că AB și EF sînt perpendiculare.

1183. Se dau două drepte Ox, Oy; pe Ox se iau două puncte mobile A, B, așa ca $\overline{OA} = \overline{OB}$, pe Oy alte două puncte fixe C, D. Se cere locul punctului M de întîlnire a dreptelor AC, BD.

1184. Se intersectează un patrulater complet $ABCDEF$ printr-o transversală care întîlnește cele trei diagonale AC, BD, EF în M, N, P. Fie M' conjugatul armonic al lui M în raport cu A și C, N' al lui N în raport cu B și D, P' al lui P în raport cu E și F. Să se arate că M', N', P' sînt coliniare.

1185. Se dau două puncte oarecare O, P în planul unui triunghi ABC. Se ridică în O, pe OP, perpendiculara (Δ), care întîlnește laturile BC, CA, AB în A', B', C'. Dreptele PA', PB', PC' întîlnesc în α, β, γ perpendicularele duse în O pe OA, OB, OC. Să se demonstreze că punctele α, β, γ sînt coliniare.

1186. Se consideră un patrulater complet $ABCDEF$. Fie I punctul de întîlnire a diagonalelor AC, BD; dreapta IE intersectează laturile DA, BC în M și N. Dreptele MB, MC întîlnesc diagonalele AC, BD în α, β; ND, NA întîlnesc aceleași diagonale în α', β'. Să se demonstreze că α, β, și F; α', β' și F; α, β' și E; α', β și E sînt cîte trei puncte coliniare.

1187. Aceleaşi date ca în problema precedentă. Să se demonstreze că dreptele MB și NA, MC și ND se întîlnesc pe dreapta IF.

1188. Aceleași date. Dreapta IF întîlnește laturile AB, CD în M' și N'. Să se arate că atît dreptele MM', BD, NN' cît și dreptele $M'N$, AC, MN' se întîlnesc în cîte un punct pe EF.

1189. Fie B_1, C_1 mijloacele laturilor $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ ale triunghiului ABC, P un punct oarecare pe latura $\overline{BC}$. Dreptele PB_1, PC_1 întîlnesc pe AB, AC în B_2 și C_2. Să se demonstreze că B_2C_2 este paralelă la AP și că intersectează pe BC într-un punct Q, așa că

$$\overline{QC} : \overline{QB} = \overline{PC^2} : \overline{PB^2}.$$

1190. Se consideră o dreaptă (Δ) în planul unui triunghi ABC și un punct O pe (Δ). Să se demonstreze că simetricele dreptelor OA, OB, OC în raport cu (Δ) întîlnesc respectiv laturile BC, CA, AB în punctele A', B', C' coliniare.

1191. Se dau două drepte (Δ), (Δ'), trei puncte A, B, C pe (Δ) și trei puncte A', B', C' pe (Δ'), Fie α, β, γ punctele de întîlnire ale dreptelor BC' și CB', CA' și AC', AB' și BA'. Să se arate că α, β, γ sînt coliniare.

1192. Fie O un punct în planul triunghiului ABC, iar α, β, γ punctele în care laturile acestuia sînt întîlnite de o transversală (Δ). Să se demonstreze că:

a) perpendicularele duse prin O la $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$ întîlnesc pe (Δ) respectiv în punctele α', β', γ', astfel ca dreptele $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$ sînt concurente;

b) O' fiind proiecția lui O pe (Δ), perpendicularele în O' pe $O'A$, $O'B$, $O'C$ întîlnesc respectiv pe $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$ în punctele a, b, c coliniare.

1193. Se consideră în același plan două triunghiuri ABC, $A'B'C'$ și un punct M. Să se demonstreze că dacă dreptele MA', MB', MC' întîlnesc respectiv laturile BC, CA, AB în punctele α, β, γ coliniare, atunci și dreptele MA, MB, MC întîlnesc respectiv laturile $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ în punctele α', β', γ' coliniare.

1194. Se consideră cinci cercuri (O_1), (O_2), (O_3), (ω), (ω') în același plan. Fie T triunghiul format de axele radicale (Δ_1), (Δ_2), (Δ_3) ale cercului (ω) și cercurilor (O_1), (O_2), (O_3), iar T' triunghiul format de axele radicale (Δ_1'), (Δ_2'), (Δ_3') ale cercului (ω') și cercurile (O_1), (O_2), (O_3). Să se demonstreze că triunghiurile T, T' sînt omologice.

1195. Dacă vîrfurile A_1, A_2, A_3 ale unui triunghi variabil se deplasează respectiv pe trei drepte fixe (D_1), (D_2), (D_3) ce trec prin același punct ω și dacă două laturi A_1A_2, A_2A_3 trec prin cîte un punct fix O_{12}, O_{23}, atunci a treia latură A_3A_1 trece printr-un punct fix O_{31}, ce se află pe dreapta $O_{12}O_{23}$.

1196. Se consideră pe un cerc șase puncte oarecare A, a, B, b, C, c. Să se demonstreze că dreptele lui Pascal ale hexagoanelor înscrise $AaBbCc$, $AbBcCa$, $AcBaCb$ se întîlnesc în același punct.

1197. Se consideră patru cercuri (O_1) (O_2), (O_3), (O_4) cu centrele coliniare și care au un punct comun P, nesituat pe linia centrelor. O dreaptă (Δ) ce trece prin P intersectează din nou cercurile în punctele A, B, C, D. Să se demonstreze că, oricare ar fi dreapta (Δ), raportul anarmonic $(ABCD)$ rămîne constant.

1198. Se consideră patru sfere (O_1), (O_2), (O_3), (O_4) cu centrele coliniare și care au un punct comun P exterior liniei centrelor. O dreaptă (Δ) ce trece prin P intersectează din nou sferele în punctele A, B, C, D. Să se demonstreze că, oricare ar fi dreapta (Δ), raportul anarmonic $(ABCD)$ rămîne constant.

1199. Să se demonstreze că raportul anarmonic al fasciculului format de patru plane care trec printr-o dreaptă oarecare (Δ) și prin vîrfurile A, B, C, D ale unui tetraedru este egal cu raportul anarmonic al celor patru puncte de intersecție α, β, γ, δ ale dreptei (Δ) cu fețele tetraedrului, respectiv opuse vîrfurilor A, B, C, D.

Capitolul XXV

POL ȘI POLARĂ

1200. Fiind dat un triunghi care are un unghi obtuz, să se demonstreze că există un cerc astfel că fiecare latură este polara vîrfului opus față de acest cerc. (*Triunghiul* se numește *conjugat* față de cerc).

1201. Se consideră un cerc de centru O și de rază R și un punct A fix, în același plan. Să se determine locul geometric al punctului ω, centrul cercului circumscris triunghiului ABC, conjugat față de cercul (O).

1202. Prin vîrfurile unui triunghi ABC se duc tangente la cercul circumscris. Tangentele în B, C se întîlnesc în P; fie D punctul de intersecție a dreptei AC cu o paralelă dusă prin B la tangenta în A. Să se demonstreze că dreapta care unește vîrful A cu mijlocul M al segmentului $\overline{BD}$ trece prin P.

1203. Pe diametrul AB al unui cerc O se ia $\overline{OM} = \overline{ON}$. Se unesc punctele M, N, O cu un punct oarecare P al cercului, prin drepte care intersectează din nou cercul în M', N', O'. Să se demonstreze că $M'N'$, tangenta în O' și diametrul AB se întîlnesc în același punct.

1204. Să se demonstreze că într-un triunghi ABC simediana vîrfului A trece prin punctul de intersecție a tangentelor în B și C la cercul circumscris triunghiului.

1205. Pe un cerc se dau trei puncte A, B, C și mijloacele A', B', C' ale arcelor BC, CA, AB. Tangentele în A și A' la cerc se întîlnesc în A_1, cele din B și B' în B_1, cele din C și C' în C_1. Să se demonstreze că punctele A_1, B_1, C_1 sînt coliniare.

1206. Să se construiască un triunghi cunoscînd poziția unui vîrf, poziția piciorului bisectoarei corespunzătoare și știind că celelalte două vîrfuri sînt pe un cerc dat.

1207. Să se construiască un triunghi ABC, cunoscînd vîrful A, mijlocul M al lui $\overline{BC}$, lungimea lui $\overline{BC}$, precum și direcția bisectoarei ce pleacă din A.

1208. Să se înscrie într-un cerc dat un patrulater, cunoscînd două puncte prin care trec două laturi opuse și punctul de întîlnire al celorlalte două.

1209. Fie ABC un triunghi dat, O_9 centrul cercului celor nouă puncte, T_a, T_b, T_c intersecțiile tangentelor în A, B, C la cercul (O) circumscris triunghiului ABC, cu laturile BC, CA, AB. Să se arate că polarele punctelor A, B, C în raport cu cercul (O_9), trec prin T_a, T_b, T_c. Să se deducă apoi că dacă α, β, γ sînt polii laturilor BC, CA, AB în raport cu cercul (O_9), atunci $A\alpha$, $B\alpha$, $C\gamma$ sînt concurente.

1210. Fie abc triunghiul obținut ducînd prin vîrfurile triunghiului ABC tangente la cercul circumscris lui. Din O se duc paralele la BC, CA, AB, ce intersectează tangenta într-un punct M, al cercului (O), în α, β, γ. Să se demonstreze că:

a) dreptele $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ sînt concurente într-un punct S;

b) dacă două vîrfuri ale triunghiului ABC sînt fixe, S descrie o dreaptă.

1211. Se dă un cerc (C) și două puncte fixe în plan, A, B. Prin A se duce o secantă care întîlnește cercul (C) în punctele M și N; dreptele BM, BN intersectează cercul în M', N'. Să se demonstreze că dreapta $M'N'$ trece printr-un punct fix, cînd secanta AMN variază.

1212. Un cerc tangent laturii $\overline{BC}$ a triunghiului ABC în mijlocul său M și trecînd prin vîrful A, întîlnește laturile AB, AC în

B', C'. Fie T, T' punctele de întîlnire ale laturii BC cu dreapta $B'C'$ și tangenta în A a cercului $AB'C'$. Să se demonstreze că $\overline{TM} = \overline{MT'}$.

1213. Să se demonstreze că două triunghiuri polar reciproce [1] în raport cu un cerc sînt omologice.

1214. Se consideră o dreaptă (Δ) perpendiculară pe linia centrelor cercurilor (O) și (O') și un punct P variabil pe (Δ). Se cere locul punctului Q comun polarelor lui P în raport cu (O) și (O').

1215. Să se determine locul punctelor astfel ca polarele în raport cu trei cercuri date să fie concurente.

1216. Diagonalele AB, CD ale patrulaterului armonic $ABCD$ [2] sînt drepte conjugate [3] în raport cu cercul circumscris.

1217. Să se demonstreze că într-un patrulater armonic avem relația

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}.$$

1218. H fiind punctul de întîlnire al diagonalelor AB, CD ale unui patrulater armonic, să se demonstreze relațiile

$$\frac{\overline{HA}}{\overline{HB}} = \left(\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}\right)^2 = \left(\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}\right)^2; \quad \frac{\overline{HC}}{\overline{HD}} = \left(\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}\right)^2 = \left(\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}\right)^2.$$

1219. Fie I, J mijloacele coardelor $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ care sînt diagonalele unui patrulater armonic $ABCD$. Să se demonstreze că:

a) dreptele IC, ID sînt simetrice în raport cu AB, iar JA, JB sînt simetrice în raport cu CD;

b) avem relațiile

$$\overline{IA}^2 = \overline{IB}^2 = \overline{IC} \cdot \overline{ID}; \quad \overline{JC}^2 = \overline{JD}^2 = \overline{JA} \cdot \overline{JB};$$

c) $\sphericalangle\, CID = 2 \sphericalangle\, CAD$; $\sphericalangle\, AJD = 2 \sphericalangle\, ACB$;

d) $$\frac{\overline{IC}}{\overline{ID}} = \left(\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}\right)^2 = \left(\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}\right)^2; \quad \frac{\overline{JA}}{\overline{JB}} = \left(\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}\right)^2 = \left(\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}\right)^2;$$

e) $\overline{JA} + \overline{JB} = \overline{IC} + \overline{ID}$.

1220. Să se demonstreze că dacă supunem pe unul din două triunghiuri ortologice unei translații, așa ca centrele lor de orto-

---

[1] Două triunghiuri se numesc *polar reciproc* cînd laturile unuia sînt polarele vîrfurilor celuilalt.

[2] Patrulaterul $ABCD$ înscris în cercul (O) se numește *armonic*, cînd pentru un punct M al cercului (O) fasciculul $M(ABCD)$ este armonic.

[3] Două drepte se numesc *conjugate* în raport cu un cerc atunci cînd una din ele trece prin polul celeilalte.

logie să coincidă, atunci triunghiurile ortologice devin polar reciproce față de un cerc cu centrul în centrul comun de ortologie.

1221. Fiind dat un triunghi ABC și un punct O în planul său, să se demonstreze că perpendicularele duse din O pe dreptele OA, OB, OC întîlnesc respectiv laturile BC, CA, AB în punctele α, β, γ coliniare.

1222. Să se demonstreze că dacă un hexagon este circumscris unui cerc, dreptele care unesc vîrfurile opuse trec prin același punct *(teorema lui Brianchon)*.

1223. Să se demonstreze că într-un patrulater circumscris unui cerc, dreptele care unesc punctele de contact ale laturilor opuse trec prin punctul de întîlnire a diagonalelor.

1224. Se consideră triunghiul ABC circumscris unui cerc de centru O și o tangentă T la acest cerc. Să se demonstreze că perpendicularele duse din O pe dreptele OA, OB, OC întîlnesc tangenta T în punctele A_1, B_1, C_1, astfel că dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sînt concurente.

1225. Se consideră două grupuri de cîte trei drepte concurente Ia, Ib, Ic și $I'a'$, $I'b'$, $I'c'$ și fie α_1, β_1, γ_1 și α_2, β_2, γ_2 respectiv intersecțiile perechilor de drepte $(Ib, I'c')$, $(Ic, I'a')$, $(Ia, I'b')$, $(Ic, I'b')$, $(Ia, I'c')$, $(Ib, I'a')$. Să se demonstreze că dreptele $\alpha_1\alpha_2$, $\beta_1\beta_2$, $\gamma_1\gamma_2$ sînt concurente.

1226. Se dau trei drepte (a), (b), (c), paralele cu dreapta (D), trei drepte (a'), (b'), (c') paralele cu o altă dreaptă (D') și fie α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2 respectiv intersecțiile perechilor de drepte (b, c'), (c, a') (a, b'), (c, b'), (a, c'), (b, a'). Să se demonstreze că dreptele $\alpha_1\alpha_2$, $\beta_1\beta_2$, $\gamma_1\gamma_2$ sînt concurente.

1227. Cu cinci drepte luate cîte patru se pot forma cinci patrulatere complete. Să se demonstreze că cele cinci drepte ale lui Newton ale acestor patrulatere trec prin același punct.

1228. Se dau două drepte paralele (D) și (D') și un triunghi ABC. Să se găsească pe (D) un punct P, așa ca dreptele PA, PB, PC să intersecteze dreapta (D') în trei puncte a, b, c, astfel încît $\overline{ab} = \overline{bc}$.

1229. Se dau două drepte paralele xx', yy' și un cerc (O). Dintr-un punct M mobil pe xx' se duc tangentele la cerc care întîlnesc dreapta yy' în A și B. Să se demonstreze că dreapta MP, care unește punctul M cu mijlocul P al segmentului $\overline{AB}$, trece printr-un punct fix.

1230. Fie $ABCD$ un patrulater înscris într-un cerc (O). Laturile AB, CD se întîlnesc în E, AD și BC în F, iar diagonalele AC și BD în G. Să se demonstreze că triunghiul EFG este conjugat în raport cu cercul (O).

1231. Se consideră două cercuri ortogonale (O), (O') și un punct P pe cercul (O). Dreptele PO și PO' intersectează cercul (O) în A și B, iar AB întîlnește cercul (O') în C și D. Să se demonstreze ca tangentele în C și D la cercul (O') se întîlnesc în P.

1232. Fie E centrul unui cerc (C) ce trece prin două puncte fixe A și B. Polara unui punct fix P în raport cu cercul (C) intersectează dreapta EP în M. Să se arate că perpendiculara pe $\overline{MP}$, dusă prin mijlocul său, intersectează pe $\overline{AB}$ într-un punct fix, cînd cercul (C) variază.

1233. Pe bisectoarea unghiului A a triunghiului ABC se iau două puncte oarecare M și N. Să se arate că:

a) proiecțiile lui A pe BM, BN, CM, CN sînt pe un cerc (Γ);

b) polarele lui A față de cercurile (Γ) trec prin intersecția D a laturii BC cu bisectoarea exterioară a unghiului A;

c) cercurile (Γ) sînt ortogonale cercului descris pe $\overline{AD}$ ca diametru.

1234. Se dau o sferă (O) și un plan (P). Un plan variabil (π) trece printr-un punct M al lui (P) și intersectează sfera după un cerc (C). Se cere locul centrului sferei circumscrise conului care are cercul (C) ca bază și centrul sferei (O) ca vîrf: a) cînd M este fix; b) cînd M este mobil în planul (P).

1235. Se dau o sferă, un cerc (A) situat pe această sferă și un punct B în spațiu. Prin punctul B se duce un plan variabil (P) care intersectează sfera după un cerc (C).

a) Cum trebuie ales planul pentru ca cercurile (A) și (C) să fie tangente?

b) Care este locul polului planului (P) în acest caz?

1236. Se dau o sferă și două cercuri (A) și (A') pe această sferă. Să se găsească locul polilor planelor (P) care intersectează sfera după cercuri (C) tangente cercurilor date (A) și (A').

Capitolul XXVI

INVERSIUNE

1237. Fie A, B două puncte fixe pe un cerc (O). Se iau pe cerc două puncte mobile M, N, așa ca $\overline{AM} = \overline{BN}$. Se cere locul punctului de intersecție a dreptelor AM și BN.

1238. Se unește un punct oarecare M cu vîrfurile triunghiului ABC. Să se arate că perpendicularele coborîte din punctul de întîlnire H al înălțimilor, pe dreptele MA, MB, MC, întîlnesc laturile BC, CA, AB în trei puncte A_1, B_1, C_1, situate pe o dreaptă (D) perpendiculară pe MH.

1239. Să se demonstreze că perpendicularele coborîte din vîrfurile unui triunghi pe dreptele, ce unesc ortocentrul cu mijloacele laturilor, întîlnesc laturile în trei puncte situate pe o dreaptă perpendiculară pe dreapta lui Euler.

1240. Cercurile (O) și (O') sînt inverse în raport cu cercul (ω). Să se arate că inversul cercului descris pe segmentul cuprins între centrele de asemănare ale cercurilor (O) și (O'), ca diametru, este axa radicală a acelor cercuri.

1241. Să se demonstreze teoremele lui Ptolomeu prin inversiune.

1242. Se consideră patru puncte O, A, B, C pe un cerc. Să se demonstreze că cercurile descrise pe $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ ca diametre se întîlnesc din nou, două cîte două, în trei puncte coliniare (Salmon).

1243. Se consideră un triunghi ABC înscris într-un cerc (O). Fie A', B', C' simetricele punctelor A, B, C în raport cu punctul O, A'', B'', C'' simetricele punctelor A, B, C respectiv în raport cu mediatoarele laturilor opuse. Să se demonstreze că:

a) cercurile $OA'A''$, $OB'B''$, $OC'C''$ au un al doilea punct comun I;

b) dacă latura BC este fixă iar unghiul A constant, locul lui I este un cerc.

1244. Se consideră un hexagon $ABCDEF$ înscris într-un cerc de centru O. Să se demonstreze că cele trei cercuri, care trec prin O și prin mijloacele a două laturi opuse, au un al doilea punct comun.

1245. Trei cercuri au un punct comun O și se întîlnesc din nou, două cîte două, în alte trei puncte A, B, C. Perpendicularele duse prin O pe coardele OA, OB, OC întîlnesc respectiv cercurile OBC, OCA, OAB în punctele α, β, γ. Să se arate că punctele O, α, β, γ se găsesc pe un același cerc.

1246. Se consideră un cerc (O) și două cercuri (O'), (O'') tangente cercului (O) care se întîlnesc în A și B. Un cerc variabil (ω) tangent la (O') și (O'') intersectează pe (O) în M și N. Se cere locul centrului cercului circumscris triunghiului AMN.

1247. Se consideră un cerc (O), o dreaptă (Δ) și un punct D in interiorul cercului. Se cere locul geometric al ortocentrului H al triunghiului ABC care are vîrfurile B și C pe cercul (O), vîrful A pe dreapta (Δ) și în care D este piciorul înălțimii coborîte din A pe $\overline{BC}$.

1248. Se consideră toate triunghiurile ABC care au același vîrf A și același punct de întîlnire I a bisectoarelor. Fie I_a, I_b, I_c centrele cercurilor exînscrise. Cercul II_bI_c intersectează în M mediana triunghiului IBC care pleacă din I, apoi cercul IBC întîlnește în N mediana care pleacă din I a triunghiului II_bI_c. Să se demonstreze că toate cercurile IMN au aceeași axă radicală.

1249. Să se demonstreze că cercul celor nouă puncte al unui triunghi este tangent cercurilor înscris și exînscrise (Feuerbach).

1250. Fie I centrul cercului înscris într-un triunghi ABC. Să se demonstreze că cercul tangent cercurilor circumscrise triunghiurilor BCI, CAI, ABI este tangent cercului circumscris triunghiului $I_aI_bI_c$, format de centrele cercurilor exînscrise.

1251. Fie (Γ) cercul tangent interior cercurilor exînscrise (Γ_a), (Γ_b), (Γ_c) ale triunghiului ABC și fie (ω_a), (ω_b), (ω_c) cercurile tangente exterior la două din cercurile (Γ_a), (Γ_b), (Γ_c) și interior la al treilea. Să se demonstreze că dacă (Γ') este cercul tangent interior la (ω_a), (ω_b), (ω_c), cercurile (Γ) și (Γ') sînt tangente.

1252. Se consideră un triunghi ABC și un punct fix P pe latura $\overline{BC}$. Cercul APC intersectează din nou latura $\overline{AB}$ într-un punct D. Să se arate că dacă $\overline{BC}$ se rotește în jurul lui P, cercul BPD rămîne tangent unui cerc fix.

1253. Se consideră un patrulater convex $ABCD$ ale cărui diagonale se întîlnesc în L. Cercurile ABL și CDL se întîlnesc în L și M, cercurile ADL și BCL în L și N. Dreapta LM întîlnește din nou cercurile ADL și BCL în P și Q respectiv, iar LN cercurile ABL și CDL respectiv în R și S. Se cere:

a) să se arate ce devine figura printr-o inversiune avînd polul în L;

b) să se deducă apoi că LM și LN sînt conjugate armonic față de diagonalele AC și BD;

c) să se arate că avem

$$\overline{MA} \cdot \overline{RB} = \overline{MB} \cdot \overline{RA} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{MR}$$

și patru grupe de relații analoge.

1254. Se consideră un triunghi oarecare ABC. Se cere:

a) să se arate că linia centrelor cercurilor ce trec printr-un punct fix M de pe $\overline{BC}$ și sînt tangente în B și C la $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ trece printr-un punct fix N, cînd punctul A se mișcă pe o dreaptă (Δ);

b) să se arate că MN rămîne paralelă cu ea însăși, cînd M se mișcă pe $\overline{BC}$;

c) să se găsească locul celui de-al doilea punct comun celor două cercuri.

1255. Se dau cercurile (O_1), (O_2), (O_3), care trec prin două puncte I_1 și I_2. O secantă dusă prin I_1 intersectează cercurile în A_1, A_2, A_3. Se cere locul lui A_4, conjugatul armonic al lui A_3 în raport cu A_1 și A_2.

1256. Se dau trei puncte coliniare A, B, C și se consideră toate cercurile (O) ce trec prin punctele B și C. Se cere să se găsească:

a) locul punctului de contact T al unuia din cercurile (O) cu un cerc (O'), tangent în A la BC și tangent cercului (O);

b) locul intersecțiilor dreptelor AT și BT respectiv cu cercurile corespunzătoare din familiile (O) și (O').

1257. Punctele A, B, C nefiind coliniare, prin A și B, pe de o parte, A și C, pe de altă parte, se duc două cercuri ortogonale care se mai intersectează în P. Care este locul lui P?

1258. Se consideră toate sferele care trec prin vîrfurile unui triunghi ABC și toate conurile circumscrise corespunzătoare, ce au vîrfurile într-un punct fix D al laturii $\overline{BA}$. Se cere locul cercurilor de contact și locul centrelor acestor cercuri.

1259. Se dau trei puncte A, B, C și se iau inversele lor A', B', C' în raport cu un pol de inversiune M. Se cere locul punctului M, pentru ca triunghiul $A'B'C'$ să fie isoscel sau echilateral.

1260. Se dă o sferă (S) și două puncte A, B. Se consideră sferele (Σ) trecînd prin punctele A, B și tangente la (S). Se cere locul punctului M de contact între (Σ) și (S).

1261. Se consideră două plane (P), (Q) care nu sînt perpendiculare, un punct C și o sferă (Σ) care trece prin punctul C, este tangentă în M planului (P) și are centrul ω în planul (Q). Se cere:

a) locul lui M;

b) să se arate că locul punctului ω este o elipsă (E), situată în planul (Q);

c) să se arate că conul care are ca vîrf punctul C și curbă directoare (E) este de rotație.

1262. Să se demonstreze că dacă o sferă este tangentă la trei sfere fixe (S_1), (S_2), (S_3), locul punctului de contact pe fiecare din ele se compune din cercuri (teorema lui Dupuis).

Capitolul XXVII

OMOGRAFIE, INVOLUȚIE

1263. Se dau două perechi de puncte A, B și A', B', precum și o dreaptă (D). Să se ducă un cerc prin A, B și alt cerc prin A', B', astfel încît secanta lor comună să fie dreapta (D). Să se discute condițiile de posibilitate ale problemei.

1264. Se consideră într-un plan două drepte (L), (L') și un punct P. O secantă dusă prin P întîlnește pe (L) și (L') în m și m'. Să se arate că m și m' descriu pe (L), (L') diviziuni omografice, să se găsească relația omografică ce le leagă și să se caute punctele limită.

1265. Se consideră un cerc și două tangente fixe la acest cerc (L) și (L'); o tangentă variabilă la cerc întîlnește pe (L), (L') în punctele m, m'. Să se demonstreze că punctele m, m' descriu pe (L), (L') diviziuni omografice și să se afle punctele limită.

1266. Un unghi de mărime α se rotește în jurul vîrfului său, O, fix. M și N fiind punctele unde laturile lui intersectează o dreaptă din plan, iar I și J picioarele oblicelor duse prin O și înclinate de unghiul α pe acea dreaptă, să se demonstreze că produsul $\overline{IN} \cdot \overline{JM}$ este constant.

1267. Se consideră într-un plan o dreaptă (L) și două puncte A și B nesituate pe dreaptă. Un cerc oarecare trecînd prin A și B întîlnește pe (L) în două puncte m, m'. Punctele m, m' sînt puncte omoloage a două diviziuni în involuție. Se cer punctele duble și punctul central.

1268. Se consideră într-un plan două drepte (D), (L) și un cerc tangent dreptei (L). Printr-un punct variabil A, luat pe (D), se duc tangente la cerc, care întîlnesc pe (L) în punctele m, m'. Să se arate că punctele m, m' descriu pe (L) diviziuni în involuție și să se găsească punctul central și punctele duble.

1269. Fie (Δ) o dreaptă paralelă cu baza BC a triunghiului isoscel ABC. Se consideră un punct M variabil pe (Δ). Dreptele BM, CM întîlnesc respectiv pe AC, AB în punctele N și P. Dacă se iau ca sensuri pozitive ale segmentelor $\overline{BP}$ și $\overline{CN}$, respectiv $\overline{BA}$ și $\overline{CA}$, să se demonstreze că

$$\frac{1}{\overline{BP}} + \frac{1}{\overline{CN}} = \text{const.}$$

1270. Se dau într-un plan un cerc (C) și o dreaptă (L). Se ia pe această dreaptă un punct oarecare m, se consideră polara (Δ) a acestui punct în raport cu cercul și se ia punctul m', unde se întîlnesc (L) și (Δ). Să se arate că dacă m descrie dreapta (L), punctele m, m' descriu divizuni în involuție pe (L). Să se determine punctul central și punctele duble.

1271. Fie P un punct variabil pe cercul circumscris unui triunghi echilateral OAB. Dreptele BP, AP întîlnesc pe OA, OB respectiv în M, N. Să se demonstreze relația

$$\overline{AM} \cdot \overline{BN} = \overline{OA}^2.$$

1272. Se iau trei puncte o, o', a pe un cerc și se duce tangenta (L) în punctul a. M fiind un punct variabil pe cerc, oM, $o'M$ întîlnesc dreapta (L) în punctele m și m'. Să se demonstreze că

$$\frac{1}{\overline{am}} - \frac{1}{\overline{am'}} = \text{const.}$$

1273. Fie L o dreaptă paralelă cu latura BC a triunghiului ABC, circumscris cercului (I). O tangentă variabilă la acest cerc întîlnește pe AB, AC în a, a'. O fiind punctul de tangență al laturii BC cu cercul, dreptele Oa, Oa' întîlnesc pe (L) în m și m'. Să se demonstreze că mărimea segmentului $\overline{mm'}$ este constantă.

1274. Se dau două axe dreptunghiulare orientate Ox, Oy, un punct A pe Ox și un cerc tangent la Oy în punctul O. Prin A se duce o dreaptă oarecare care întîlnește cercul în B, B'; tangentele în aceste puncte intersectează pe Oy în punctele M, M'. Să se demonstreze că produsul $\overline{OM} \cdot \overline{OM'}$ are o valoare constantă.

1275. Fie A, A' două puncte conjugate armonic în raport cu două puncte B, B' și fie a, b mijloacele segmentelor $\overline{AA'}$ și $\overline{BB'}$. Să se demonstreze că conjugatul armonic al lui a în raport cu B, B' coincide cu conjugatul armonic al lui b în raport cu A, A' și acest punct este punctul central al involuției definite prin perechile de puncte (A, A'), (B, B').

1276. Se dau două cercuri (C) și (C') tangente la o aceeași dreaptă (Δ). Tangentele duse printr-un punct P la (C) întîlnesc pe (Δ) în punctele m, m' și prin aceste puncte se duc tangente cercului (C') care se întîlnesc în punctul P'. Să se demonstreze că dacă punctul P descrie o dreaptă (D) și punctul P' descrie o dreaptă (D').

1277. Se consideră un cerc (I) înscris în triunghiul ABC. O tangentă oarecare la cerc întîlnește laturile BC, CA, AB respectiv în a, b, c, și fie a', b', c' izotomicele punctelor a, b, c. Să se demonstreze că punctele a', b', c' se găsesc pe o dreaptă care se rotește în jurul punctului lui Nagel, cînd tangenta abc variază.

1278. Să se demonstreze că dacă laturile unui patrulater complet sînt tangente unui cerc, dreapta lui Newton trece prin centrul cercului.

1279. Polarele unui punct M, în raport cu unghiurile A, B, C ale unui triunghi ABC, întîlnesc laturile opuse în trei puncte α, β, γ coliniare. Să se demonstreze că dacă punctul M descrie cercul circumscris triunghiului, dreapta $\alpha\beta\gamma$ trece prin punctul lui Lemoine al triunghiului.

1280. Printr-un punct I ales arbitrar pe latura AB a triunghiului ABO se duc paralele la OA, OB care întîlnesc respectiv dreptele OB, OA în M, M'. Să se găsească locul ortocentrului H al triunghiului OMM'.

1281. Se consideră un triunghi echilateral ABC și fie (γ) cercul înscris, iar (γ_a), (γ_b), cercurile exînscrise în unghiurile A, B. O tangentă oarecare la (γ) întîlnește pe CA, CB în punctele a, b; din punctul a se duce cercului (γ_b) tangenta diferită de CA, iar din punctul b se duce cercului (γ_a) tangenta diferită de CB. Să se arate că aceste tangente se întîlnesc într-un punct m, situat pe a patra tangentă (T), comună cercurilor (γ_a), (γ_b).

1282. Fie ABC un triunghi înscris în cercul de centru O și MN un diametru al acestui cerc, care întîlnește laturile BC, CA, AB respetiv în punctele A', B', C'. Se iau simetricele A_1, B_1, C_1 ale punctelor A', B', C', în raport cu punctul O. Să se demonstreze că dreptele AA_1, BB_1, CC_1 trec prin același punct situat pe cercul (O).

1283. Se dau cinci puncte fixe A, B, C, P, Q pe un cerc şi se uneşte un punct M variabil pe cerc cu punctele P şi Q. Dreapta MP întîlneşte pe AB în punctu p, iar dreapta MQ întîlneşte pe AC în punctele q. Să se arate că dreapta pq trece printr-un punct fix.

1284. O transversală (Δ) intersectează laturile BC, CA, AB ale unui triunghi ABC respectiv în punctele α, β, γ; fie A', B', C' simetricele punctelor A, B, C în raport cu un punct O situat pe (Δ).

a) Să se demonstreze că dreptele $A'\alpha$, $B'\beta$, $C'\gamma$ trec printr-un punct M.

b) Să se găsească locul geometric al punctului M, cînd punctul O se deplasează pe transversala fixă (Δ).

1285. Să se demonstreze că dacă prin vîrful comun O a două fascicule de drepte în involuție se duce un cerc, dreptele ce unesc punctele, situate pe cerc, a două raze omoloage trec printr-un punct fix (teorema lui Frégier).

1286. Fie P un punct situat pe latura BC a unui triunghi ABC. O secantă arbitrară dusă prin P întîlneşte cercul circumscris triunghiului în punctele N, N'. Dreptele AN, AN' intersectează latura BC în punctele M, M'. Să se demonstreze că dacă secanta se rotește în jurul lui P, cercul circumscris triunghiului AMM' trece printr-un punct fix diferit de A.

1287. O secantă oarecare întîlneşte perechile de laturi opuse ale unui patrulater complet în trei perechi de puncte în involuţie (Desargues). Să se demonstreze că dacă se uneşte un punct O cu perechile de vîrfuri opuse ale unui patrulater complet, se obţin trei perechi de drepte care sînt în involuţie.

1288. Să se demonstreze dacă un patrulater complet este înscris într-un cerc, o secantă oarecare întîlneşte perechile de laturi opuse și cercul în patru perechi de puncte, care sînt omoloage într-o involuție (teorema lui Desargues).

Dacă un patrulater complet este circumscris unui cerc, dreptele, care unesc un punct oarecare O cu perechile de vîrfuri opuse și tangentele duse din O la cerc, formează patru perechi de drepte care sînt raze omoloage a două fascicule în involuție.

1289. Se consideră un triunghi ABC și o dreaptă (Δ) care întîlnește laturile BC, CA, AB în punctele a, b, c. Se iau pe (Δ) trei puncte a', b', c'. Să se demonstreze că condiția necesară și suficientă pentru ca dreptele Aa', Bb', Cc' să fie concurente este ca perechile de puncte (a, a'), (b, b'), (c, c') să fie în involuție.

1290. Se consideră un triunghi ABC. Printr-un punct oarecare P din plan se duc dreptele $P\alpha$, $P\beta$, $P\gamma$, $P\alpha'$, $P\beta'$, $P\gamma'$, respectiv paralele cu BC, CA, AB, Aa', Bb', Cc'. Condiția necesară și suficientă ca dreptele Aa', Bb', Cc' să fie concurente este ca perechile de drepte $(P\alpha, P\alpha')$, $(P\beta, P\beta')$, $(P\gamma, P\gamma')$ să fie în involuție. Să se deducă teorema triunghiurilor metaparalele.

1291. Se consideră un punct O în planul unui triunghi ABC. Un cerc oarecare (ω), care trece prin O, întîlnește cercurile OBC, OCA, OAB respectiv în punctele A', B', C'; dreptele OA', OB', OC' întîlnesc laturile BC, CA, AB respectiv în punctele a, b, c, iar dreptele OA, OB, OC intersectează cercul (ω) în punctele A_1, B_1, C_1. Să se demonstreze că:

a) punctele a, b, c sînt coliniare;

b) dreptele A_1A', B_1B', C_1C' sînt concurente.

1292. Se consideră un triunghi ABC înscris într-un cerc (O) și o dreaptă (Δ) care întîlnește laturile BC, CA, AB respectiv în punctele a, b, c. Se iau pe (Δ) două puncte p, q, conjugate în raport cu cercul și fie a', b', c' conjugate armonice ale punctelor a, b, c în raport cu punctele p, q. Să se demonstreze că dreptele Aa', Bb', Cc' trec prin același punct situat pe cercul (O).

1293. Se consideră un triunghi ABC înscris într-un cerc (O) și o dreaptă (Δ) care întîlnește laturile BC, CA, AB respectiv în punctele A_1, B_1, C_1. D fiind un punct pe cercul (O), dreptele DAe$_1$ DB_1, DC_1 întîlnesc din nou cercul în punctele A_2, B_2, C_2. Să se arate că dreptele AA_2, BB_2, CC_2 se întîlnesc într-un punct M, situat pe dreapta (Δ).

1294. Se dau trei drepte în spațiu (D), (L), (L'), astfel ca două oarecare să nu fie situate în același plan. Prin dreapta (D) se duce un plan oarecare, ce întîlnește pe (L), (L') în punctele m, m'. Să se arate că m, m' descriu pe (L), (L') diviziuni omografice și să se găsească relația omografică ce le leagă.

Capitolul XXVIII

SECȚIUNI CONICE

1295. Să se demonstreze că suma distanțelor unui punct la focarele unei elipse este mai mică sau mai mare decît axa mare, după cum punctul este interior sau exterior elipsei.

1296. Să se demonstreze că diferența distanțelor unui punct la focarele unei hiperbole este mai mare sau mai mică decît axa transversă după cum punctul este interior sau exterior curbei.

1297. Să se demonstreze că depărtarea unui punct la focarul unei parabole este mai mică sau mai mare decît depărtarea acelui punct la directoare, după cum punctul este interior sau exterior parabolei.

1298. Care este cea ma˙ ˏcurtă și cea mai lungă distanță, de la centrul unei elipse la un punct al curbei?

1299. Să se demonstreze c˘ două elipse, care au axele mari egale și care au un focar comun, nu se pot intersecta decît în două puncte.

1300. Să se determine locul centrelor cercurilor tangente la două cercuri date.

1301. Se consideră familia de cercuri tangente dreptei AB în punctul fix C. Prin punctele fixe A și B se duc tangente la aceste cercuri. Se cere locul punctului de întîlnire a acestor tangente.

1302. Se se determine locul punctelor egal depărtate de un cerc (O) și de o dreaptă (Δ).

1303. Să se determine locul punctelor astfel ca suma sau diferența distanțelor la un punct fix și la o dreaptă fixă să fie o constantă.

1304. Să se determine locul centrului cercului înscris într-un sector circular AOB, în care una din raze OA este fixă, iar cealaltă, OB, mobilă.

1305. Se dă un cerc (O) și o tangetă fixă (Δ) la acest cerc. Într-un punct variabil M al cercului se duce tangenta care intersectează tangenta fixă (Δ) în N. Se cere locul geometric al intersecției perpendicularei în N pe (Δ) cu raza OM a cercului.

1306. Fie $ABCD$ un trapez isoscel. Se cere locul punctului E, unde se întîlnesc laturile neparalele CB și DA, cînd A este fix, iar B se mișcă pe cercul cu centrul în punctul fix C și cu raza $\overline{EB}$.

1307. Să se demonstreze că coarda comună a două parabole, avînd aceeași directoare, este mediatoarea segmentului care unește cele două focare.

1308. Fie M un punct mobil pe o parabolă. Tangenta în M intersectează tangenta la vîrf în P. Paralela din M la axa parabolei intersectează o perpendiculară fixă pe axă, în N. Să se arate că NP trece printr-un punct fix.

1309. Să se demonstreze că punctele de întîlnire a două parabole, care au același focar, se găsesc pe bisectoarele unghiului format de cele două directoare ale parabolelor.

1310. Să se demonstreze că:

O tangentă la o elipsă face unghiuri egale cu razele vectoare ale punctului de contact.

O tangentă la o hiperbolă este bisectoarea unghiului format de razele vectoare ale punctului de contact.

1311. Să se demonstreze că o tangentă la o parabolă face unghiuri egale cu raza vectoare a punctului de contact și cu paralela la axă, dusă prin acest punct.

1312. Să se demonstreze că o elipsă și o hiperbolă, care au aceleași focare, se intersectează în unghi drept.

1313. Să se demonstreze că două parabole, care au același focar și axele îndreptate în sens contrar, se intersectează în unghi drept.

1314. Să se demonstreze că locul simetricului φ al focarului F al unei elipse (sau hiperbole), în raport cu tangentele, este un cerc descris din celălalt focar F' ca centru, cu lungimea $2a$ a axei mari (sau axei transversale) ca rază.

1315. Să se demonstreze că locul proiecțiilor focarelor pe tangentele la o elipsă (sau hiperbolă) este cercul (principal) descris pe axa mare (sau axa transversală) ca diametru.

1316. Locul simetricului φ al focarului F al unei parabole, în raport cu tangentele, este (Δ), directoarea parabolei.

Locul proiecțiilor focarului F al unei parabole, pe tangentele ei, este tangenta la vîrf.

1317. Să se arate că într-o parabolă:

a) punctul de întîlnire a tangentei într-un punct M cu axa și proiecția lui M pe axă sînt simetrice în raport cu vîrful parabolei;

b) subnormala este constantă.

1318. Fie F focarul unei parabole, M un punct mobil pe ea și A un punct fix pe axa de simetrie. Să se găsească locul geometric al intersecției dreptei MF cu paralela dusă prin A la tangenta în M.

1319. AB și AC fiind două drepte perpendiculare, se duce o dreaptă oarecare AR și paralela fixă CR la AB; apoi se ia pe AR un punct M, astfel ca depărtarea sa MQ la AB să fie egală cu CR. Se cere locul punctului M.

1320. Să se demonstreze că hiperbola are ca asimptote perpendicularele Ox, Oy coborîte din centrul O pe tangentele FH', FH, duse printr-unul din focare la cercul director, relativ la celălalt focar F'.

1321. Să se demonstreze că perpendiculara coborîtă din focarul unei parabole, pe o tangentă la curbă, este medie proporțională între raza vectoare a punctului de contact și jumătatea parametrului p.

1322. Se duce din mijlocul semiaxei OB' o paralelă la axa mare AA' a unei elipse. Această paralelă intersectează elipsa în punctele M și N. Să se arate că tangenta în M este paralelă coardei BN.

1323. Să se arate că tangenta într-un punct la o parabolă întîlnește directoarea și coarda dusă prin focar, perpendiculară pe axă, în puncte egal depărtate de focar.

1324. Dacă proiecția P a unui punct M al unei parabole, pe axă, este mijlocul subnormalei $\overline{QN}$ a unui punct M', atunci depărtarea lui M la axă es' egală cu normala punctului M'.

1325. Să se ducă o tangentă, printr-un punct dat, la elipsă sau la hiperbolă.

1326. Să se ducă la elipsă sau la hiperbolă o tangentă paralelă cu o dreaptă dată.

1327. Să se ducă la parabolă o tangentă:

a) printr-un punct dat;

b) paralelă cu o dreaptă dată.

1328. Să se determine punctele de intersecție a unei drepte (D) cu o elipsă (sau hiperbolă) cunoscînd focarele F, F' și axa mare AA' (respectiv axa transversală).

1329. Cunoscînd focarul F și directoarea unei parabole, să se determine punctele sale de întîlnire cu o dreaptă (D).

1330. Tangentele PM, PM', duse la elipsă sau hiperbolă printr-un punct exterior P, fac unghiuri egale cu dreptele PF, PF' ce unesc pe P cu focarele (Poncelet). Să se demonstreze că dreptele PF, PF' sînt respectiv bisectoarele unghiurilor MFM', $MF'M'$, M și M' fiind punctele de contact.

1331. Tangentele PM, PM' duse dintr-un punct exterior P la o parabolă fac unghiuri egale cu dreapta care unește acest punct cu focarul și cu paralela dusă la axă prin punctul P. Să se demonstreze că dreapta care unește punctul P cu focarul este bisectoarea unghiului format de razele vectoare ale punctelor de contact M, M'.

1332. Pe două tangente PM, PM' la o elipsă sau hiperbolă de focare F, F', se iau lungimile $\overline{PQ}$, $\overline{PQ'}$ respectiv egale cu $\overline{PF}$, $\overline{PF'}$. Să se demonstreze că $\overline{QQ'}$ este egal cu axa mare a elipsei sau cu axa transversală a hiperbolei.

1333. Tangenta într-un punct M, variabil pe cercul de centru O și rază R, întîlnește o dreaptă fixă (D) în punctul N. Bisectoarele unghiurilor formate de această tangentă cu dreapta (D) întîlnesc diametrul MO în punctele P și Q. Să se arate că punctele P și Q descriu două parabole omofocale, tangente în P și Q bisectoarelor NP și NQ.

1334. Să se determine locul centrelor elipselor ale căror axe mari au aceeași lungime, care au un focar comun și sînt tangente unei drepte date.

1335. Să se determine centrul unei elipse cînd se cunosc un focar F, un punct al elipsei M și lungimile axelor.

1336. Să se demonstreze că produsul distanțelor focarelor unei conice (elipsă sau hiperbolă) la o tangentă este constant.

1337. Se cere locul vîrfurilor unghiurilor drepte circumscrise unei conice.

1338. Să se demonstreze că dacă extremitățile unui segment $\overline{AB}$, de lungime constantă, alunecă pe două drepte perpendiculare Ox și Oy, un punct M oarecare al acestui segment descrie o elipsă ale cărei axe sînt îndreptate după Ox și Oy și au ca lungimi $2a$, $2b$, dublul distanțelor MA, MB, de la punct la extremitățile segmentului.

1339. Dacă extremitățile unui segment $\overline{AB}$, de lungime constantă, alunecă pe două drepte fixe oaracare Ox și Oy, să se arate că un punct oarecare M, legat invariabil de $\overline{AB}$ în planul axelor, descrie o elipsă.

1340. Conicele pot fi definite ca locul punctelor astfel ca raportul distanțelor lor la un punct, numit, focar, și la o dreaptă, numită directoare, să fie constant. Să se demonstreze că acest raport (excentricitate), egal cu c/a, este mai mic ca unitatea la elipsă, mai mare ca unitatea la hiperbolă și egal cu unitatea la parabolă.

1341. Să se demonstreze că dreapta FI care unește un focar al unei conice cu punctul unde o coardă oarecare MN întîlnește directoarea corespunzătoare lui F, este bisectoarea unghiului razelor vectoare FM și FN, sau a suplimentului acestui unghi, după cum punctele M și N aparțin la două ramuri diferite sau unei aceleiași ramuri.

1342. Să se demonstreze că, dacă dintr-un punct I al directoarei se duc tangente IT, IT' la o conică, coarda de contact TT' trece prin focarul F corespunzător și este perpendiculară pe dreapta IF.

1343. Se dau două conice bitangente în A și B. Să se arate că polarele unui punct oarecare din plan, în raport cu cele două conice, se întîlnesc pe dreapta AB.

1344. Fie d un diametru al cercului (O) circumscris triunghiului ABC și fie P_a, P_b, P_c parabolele tangente dreptei (d) cu focarele în vîrfurile A, B, C și axele poralele respectiv cu laturile opuse BC, CA, AB. Să se demonstreze că:

a) directoarele celor trei parabole se întîlnesc într-un punct M al cercului circumscris;

b) polarele punctului M în raport cu cele trei parabole sînt concurente.

1345. Se consideră un triunghi ABC. O dreaptă dusă prin mijlocul M al laturii $\overline{BC}$ intersectează laturile $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ respectiv în P și Q. Să se demonstreze că conicele, tangente în P și Q respectiv la laturile $\overline{AB}$ și $\overline{AC}$, intersectează latura $\overline{BC}$ în două puncte izotomice.

1346. Să se demonstreze că curba polar reciprocă a unui cerc (C) de centru C, în raport cu un cerc director (O), este o conică cu focarul în O și avînd ca directoare corespunzătoare, polara (Δ) a punctului C în raport cu cercul (O), iar ca excentricitate, raportul d/r dintre distanța centrelor $\overline{OC}$ și raza cercului (C).

1347. Dintr-un punct A se duc tangentele AM, AM' la o conică, se ia punctul N unde dreapta MM' întîlnește una din directoare (Δ) și se notează cu F focarul corespunzător acestei directoare. Să se arate că:

a) dreptele FA, FN sînt perpendiculare;

b) FA este o bisectoare a unghiului MFM'.

1348. Se consideră pe o conică, avînd ca focar punctul F și ca directoare corespunzătoare dreapta (Δ), două puncte variabile M, M', astfel ca unghiul ascuțit format de FM, FM' să fie constant. Să se demonstreze că:

a) înfășurătoarea dreptei MM' se compune din două conice avînd ca focar punctul F și ca directoare corespunzătoare dreapta (Δ);

b) locul punctului de întîlnire a tangentelor în punctele M, M' se compune din două conice, avînd ca focar punctul F și ca directoare corespunzătoare, pe (Δ).

1349. Să se demonstreze că locul punctelor din care se pot duce unei parabole două tangente, făcînd între ele un unghi constant, este o hiperbolă, avînd același focar și aceeași directoare ca parabola.

1350. Se consideră un triunghi ABC circumscris unei parabole de focar F. Să se arate că:

a) perpendicularele coborîte din A, B, C respectiv pe dreptele FA, FB, FC se întîlnesc într-un punct I;

b) cercul circumscris triunghiului ABC trece prin F.

1351. Să se demonstreze că dacă un triunghi T este circumscris unei parabole, punctul de întîlnire a înălțimilor se găsește pe directoare (Steiner).

1352. Să se demonstreze că dacă prin focarul F al unei conice se duce o secantă variabilă ce întîlnește conica în punctele m, n, valoarea absolută a cantității

$$\frac{1}{\overline{Fm}} - \frac{1}{\overline{Fn}}$$

este constantă.

1353. Focarele unei conice înscrise într-un triunghi sînt puncte inverse în raport cu triunghiul. Să se deducă de aici că focarul unei parabole înscrisă într-un triunghi se găsește pe cercul circumscris.

1354. Să se demonstreze că unghiul sub care se vede, din focarul unei conice, porțiunea de tangentă cuprinsă între două tangente fixe, este constant.

1355. Fie H ortocentrul triunghiului ABC, înscris într-un cerc (O) și A_1 mijlocul lui $\overline{AH}$. Mediana AA' intersectează a doua oară cercul (O) în A_2, iar dreptele $A'A_1$, OA_2 se întîlnesc în M. Locul lui M, cînd BC este fixă iar unghiul A constant, este o elipsă.

1356. Prin focarul F al unei parabole se duce o perpendiculară (Δ) pe axa parabolei. Fie P proiecția pe (Δ) a unui punct M, mobil pe parabolă, și N, un punct luat pe MF, astfel ca $\overline{NM} = \overline{MP}$. Să se arate că PN trece printr-un punct fix.

1357. Fie M un punct pe o parabolă cu focarul F, M_1 proiecția lui M pe directoarea parabolei, iar M_2 proiecția lui M_1 pe raza vectoare FM. Se cere locul lui M_2 cînd M descrie parabola.

1358. Se consideră în același plan un punct F și o dreaptă (D). Se cere înfășurarea mediatoarei segmentului care unește pe F cu un punct ce descrie dreapta (D).

1359. Se dă o conică (Γ) și două drepte (D) și (Δ). Tangentele duse din punctul M, variabil pe (D), intersectează dreapta (Δ) în P și Q. Se cere locul geometric al intersecției tangentelor, diferite de PM și QM, duse din P și Q la conica (Γ).

1360. Se dau două cercuri oarecare. Să se arate că secantele pe care cele două cercuri determină segmente egale sînt tangente unei parabole.

1361. Un dreptunghi $ABCD$ variază rămînînd înscris într-un cerc, iar una din laturile sale trece printr-un punct fix. Să se arate că latura opusă trece de asemenea printr-un punct fix, iar celelalte două laturi înfășoară o elipsă sau o hiperbolă, după cum punctul fix se află în interiorul sau în exteriorul cercului.

1362. Să se arate că laturile unui triunghi dreptunghic și simetricele bisectoarelor unghiului drept în raport cu centrul cercului circumscris sînt cinci tangente ale unei aceleiași parabole.

1363. Pe o foaie de hîrtie se desenează o dreaptă (D) și un punct fix F. Se îndoaie hîrtia în toate modurile posibile așa ca F să vină pe (D). Care este înfășurata liniei de îndoitură?

1364. Să se demonstreze că ortopolul φ al unui diametru (d) al cercului (O), circumscris triunghiului ABC, este focarul unei parabole înscrise în triunghiul median $A_1B_1C_1$ și avînd ca directoare pe (d).

1365. Să se demonstreze că punctul lui Feuerbach φ al unui triunghi ABC este focarul unei parabole înscrise în triunghiul median $A_1B_1C_1$ și avînd ca directoare dreapta OI care unește centrele cercurilor circumscris și înscris în triunghiul ABC.

1366. Să se demonstreze că triunghiurile median $A_1B_1C_1$ și ortic $A'B'C'$ ale unui triunghi ABC sînt circumscrise unei aceleiași parabole, avînd ca directoare dreapta OH' care unește ortocentrele celor două triunghiuri.

1367. Se consideră două triunghiuri ABC, $A'B'C'$ înscrise într-un cerc (O) și un punct F pe cerc. Se cere locul geometric al punctului de întîlnire a directoarelor parabolelor înscrise în triunghiurile ABC și $A'B'C'$ și avînd punctul F ca focar, cînd F descrie cercul (O).

1368. Să se demonstreze că dacă o parabolă este conjugată în raport cu un triunghi, focarul parabolei se găsește pe cercul celor nouă puncte și directoarea trece prin centrul cercului circumscris.

1369. Se consideră două diviziuni asemenea descrise pe două drepte (L), (L'), al căror punct de întîlnire O nu coincide cu omologul său. Să se demonstreze că dreapta care unește două puncte omoloage oarecare m, m' înfășoară o parabolă tangentă dreptelor

(L), (L'), punctele de contact fiind omoloagele p, q' ale punctului O.

1370. Să se demonstreze că locul vîrfului M al unui triunghi MFF', care are o latură fixă FF' și ale cărei laturi MF și MF' au ca medie geometrică mediana vîrfului M, este o hiperbolă echilateră ale cărei focare sînt F, F'.

1371. A și A' fiind două puncte fixe, să se demonstreze că locul punctului M din plan, astfel ca diferența unghiurilor MAA' și $MA'A$ să fie egală cu un unghi drept, este o hiperbolă echilateră, avînd segmentul $\overline{AA'}$ ca axă transversă.

1372. Se consideră o hiperbolă echilateră H avînd vîrfurile A, A' și cercul (O) descris pe $\overline{AA'}$ ca diametru. Să se arate că aceste două curbe sînt omologice, avînd centrul de omologie în A' și axa de omologie, tangenta comună AL în A.

1373. Să se deducă din problema precedentă un mijloc simplu pentru a găsi intersecția unei drepte (Δ) cu o hiperbolă echilateră H, ale cărei vîrfuri sînt cunoscute.

1374. Se dau două puncte A, B ale unei hiperbole și se consideră segmentul $\overline{AB}$ ca diagonala unui paralelogram ale cărui laturi sînt paralele cu asimptotele. Să se demonstreze că a doua diagonală trece prin centrul curbei.

1375. Să se demonstreze că locul centrelor hiperbolelor, care trec prin două puncte date A, B și ale căror direcții asimptotice sînt date, este a doua diagonală a paralelogramului, ce are ca primă diagonală pe AB și ale cărui laturi sînt paralele cu direcțiile asimptotice.

1376. O dreaptă oarecare întîlnește o hiperbolă în punctele A, B și asimptotele în punctele C, D. Să se arate că segmentele $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ au același mijloc.

1377. Să se arate că tangenta la o hiperbolă întîlnește asimptotele în două puncte simetrice în raport cu punctul de contact.

1378. Fie A, B punctele de contact ale tangentelor duse dintr-un punct P la o parabolă. Să se arate că dreapta se unește punctul P cu mijlocul I al lui $\overline{AB}$ este paralelă cu axa curbei.

1379. Să se demonstreze că locul centrelor hiperbolelor echilatere, circumscrise unui triunghi, este cercul celor nouă puncte.

1380. Să se demonstreze că o hiperbolă echilateră, circumscrisă unui triunghi ABC, trece prin ortocentru.

1381. Să se demonstreze că dacă un triunghi dreptunghic este înscris într-o hiperbolă echilateră, tangenta în vîrful unghiului drept este perpendiculară pe ipotenuză.

1382. Fie M și N intersecțiile unei hiperbole echilatere cu două drepte mobile ce trec printr-un punct P al ei. Să se demonstreze că, dacă dreptele considerate sînt egal înclinate pe asimptotele hiperbolei, atunci dreapta MN este un diametru al hiperbolei.

1383. Să se demonstreze că locul centrelor hiperbolelor echilatere, conjugate în raport cu un triunghi, este cercul circumscris triunghiului.

1384. Să se demonstreze că dreptele AB și AC, care unesc două puncte fixe B și C ale unei hiperbole echilatere cu un punct A variabil pe curbă, determină pe o asimptotă X un segment $\overline{cb}$ de lungime constantă.

1385. Să se demonstreze că fiecare asimptotă a unei hiperbole echilatere este o dreaptă a lui Simson pentru orice triunghi înscris în această curbă.

1386. Să se demonstreze că inversele punctelor unui diametru (d) al cercului (O), circumscris unui triunghi ABC, în raport cu acest triunghi, se găsesc pe o hiperbolă echilateră, avînd ca centru ortopolul φ al diametrului și ca asimptote dreptele lui Simson ale punctelor M, N, unde (d) intersectează cercul (O).

1387. Care este înfășurătoarea dreptei ce unește polii unei drepte ce trece printr-un punct fix în raport cu două conice fixe din plan?

1388. Se cere locul geometric al intersecției unei drepte (D), ce trece îrintr-un punct fix, cu diametrul conjugat direcției (D) față de o parabolă dată.

1389. Tangenta într-un punct M al unei parabole intersectează directoarea acestei parabole în N. F fiind focarul parabolei, să se afle locul geometric al intersecției dreptei MF cu paralela dusă prin N la axa parabolei.

1390. Pe o dreaptă (D) se dau două puncte fixe A și B și un punct mobil M. Pe perpendiculara ridicată în M pe (D) se iau segmentele constante $\overline{MP}$ și $\overline{MQ}$. Se cere locul geometric al intersecției dreptelor AP și BQ.

1391. Fie (C_1) și (C_2) parabolele care sînt tangente în A unei drepte date și care trec prin două puncte date B și C. Intersecțiile P_1 și P_2 ale paralelelor duse prin A la axele celor două parabole, cu dreapta BC, sînt două puncte simetrice față de punctul de intersecție M al dreptei BC cu tangenta dată. Să se demonstreze că distanța de la punctul M la P_1 este medie proporțională între distanțele lui M la B și C.

1392. Fie M_1 și M_2 două puncte situate pe o conică. Dreapta M_1M_2, tangenta în M_1 și tangenta în M_2, intersectează tangenta într-un punct O al conicei în punctele T, T_1, T_2. Să se arate că diviziunea OTT_1T_2 este armonică.

1393. Să se demonstreze că produsul distanțelor unui punct oarecare al unei hiperbole la asimptote este constant.

1394. Să se demonstreze că o tangentă oarecare la hiperbolă formează, cu asimptotele, un triunghi de aria constantă.

1395. Să se demonstreze că înfășurătoarea dreptelor care fac cu două drepte fixe Ox, Oy un triunghi de arie constantă se compune din două hiperbole conjugate, avînd ca asimptote cele două drepte fixe.

1396. O dreaptă (Δ) întîlnește o hiperbolă (H) într-un punct M și asimptotele Ox, Oy în punctele P, P'. Să se arate că dacă dreapta (Δ) se mișcă paralel cu ea însăși, produsul $\overline{MP} \cdot \overline{MP'}$ păstrează o valoare constantă.

1397. Se consideră o dreaptă care intersectează o hiperbolă echilateră, de centru O, în două puncte M, M' și asimptotele sale în P, P'. Fie I mijlocul segmentelor $\overline{MM'}$, $\overline{PP'}$, iar A,A' punctele de întîlnire a diametrului OI cu hiperbola. Să se arate că dreapta IM este tangentă cercului MAA'.

1398. Să se demonstreze că un cerc care trece prin două puncte A, A', diametrul opuse pe o hiperbolă echilateră, intersectează această curbă în două puncte ce sînt extremitățile unui diametru al cercului care păstrează, cînd cercul variază, o aceeași direcție perpendiculară pe tangentele în A și A' la hiperbolă.

1399. Să se demonstreze că hiperbola echilateră poate fi considerată ca locul punctelor M, astfel ca diferența unghiurilor A și A' din triunghiul MAA' să fie constantă, A și A' fiind extremitățile unui diametru al curbei.

1400. Se consideră două puncte fixe A, A' pe o parabolă, o dreaptă (Δ) paralelă cu axa și un punct oarecare O, în plan. M fiind un punct variabil pe parabolă, să se demonstreze că paralelele duse prin O la AM, $A'M$ întîlnesc pe (Δ) în punctele P, P', astfel că segmentul $\overline{PP'}$ are o valoare constantă.

1401. Să se construiască axele unei elipse cînd se cunosc două diametre conjugate MON, $M'ON'$ în mărime și poziție.

1402. Se dă o conică (C), un punct P și o dreaptă (Δ). Prin P se duce o secantă variabilă care întîlnește conica (C) în punctele a, b și dreapta (Δ) în punctul c. Se cere locul geometric al punctului m, conjugat armonic cu c în raport cu a și b.

1403. Se consideră conicele care au ca focare două puncte date F, F' *(conice omofocale)*; acestor conice se duc tangente paralele cu o direcție (D). Se cere locul punctelor de contact.

1404. Să se arate că conicele unui fascicul punctual[1] determină o involuție pe o dreaptă oarecare (D) (Desargues—Sturm).

Să se deducă de aici propozițiile lui Pappus:

a) cele trei perechi de puncte, unde o dreaptă oarecare intersectează laturile opuse ale unui patrulater, se corespund într-o involuție;

b) conicele circumscrise unui patrulater divid armonic cele trei diagonale.

1405. Să se demonstreze teorema lui Pascal cu ajutorul problemei precedente.

1406. Să se demonstreze că, dacă un triunghi ABC este înscris într-o conică (Γ) și circumscris altei conice (Γ'), există o infinitate de triunghiuri care se bucură de aceeași proprietate (teorema închiderii a lui Poncelet).

1407. Să se demonstreze că tangentele duse dintr-un punct P conicelor unui fascicul tangențial[2] descriu fascicule în involuție, ale căror raze duble sînt tangentele duse prin P conicelor fasciculului ce trec prin acest punct (Plücker).

1408. Să se demonstreze că polarele unui punct fix P, în raport cu conicele unui fascicul punctual, trec printr-un punct fix.

1409. Să se demonstreze că locul centrelor conicelor unui fascicul tangențial este dreapta lui Newton a patrulaterului circumscris comun, care trece prin mijloacele diagonalelor.

1410. Să se demonstreze că locul centrelor conicelor unui fascicul punctual este o conică (conica celor nouă puncte).

1411. Să se arate că cercurile ortoptice ale conicelor unui fascicul tangențial trec prin două puncte fixe.

Să se deducă de aici că cercurile descrise pe cele trei diagonale ale unui patrulater au aceeași axă radicală.

1412. Toate conicele care trec prin punctele comune a două hiperbole echilatere sînt hiperbole echilatere.

Să se deducă de aici că hiperbolele echilatere circumscrise unui triunghi trec prin ortocentru și, reciproc, conicele care trec prin vîrfurile unui triunghi și prin ortocentru sînt hiperbole echilatere.

1413. Să se demonstreze că dacă ABC este un triunghi înscris într-o conică de centru D și dacă P este un punct oarecare al acestei conice, paralelele duse dreptelor AP, BP, CP prin punctul D,

---

[1] Se înțelege prin *fasciculul punctual* totalitatea conicelor care trec prin patru puncte date.

[2] Se înțelege prin *fasciculul tangențial* totalitatea conicelor înscrise într-un patrulater.

întîlnesc laturile triunghiului complementar $A'B'C'$, al lui ABC, în trei puncte A_1, B_1, C_1 coliniare.

1414. Se dă un unghi xOy, o dreaptă fixă (Δ) şi un punct fix A pe Ox. Pe (Δ) se ia un punct variabil M. Dreapta AM intersectează pe Oy în punctul N; prin N se duce o dreaptă de înclinare α pe Ox și fie H punctul de întîlnire a acestei drepte cu OM. Să se găsească:

a) locul punctului H cînd α este constant; să se arate că este o hiperbolă;

b) înfășurătoarea asimptotelor acestor hiperbole, cînd α variază.