XXIII. **1090.** Se duce $Aa \| Bb \| Cc \| A'B'C'$, care întîlnesc o dreaptă arbitrară (D) în a, b, c; transversala intersectează pe (D) în m. Avem evident $(mb : mc) \cdot (mc : ma) \cdot (ma : mb) = 1$. Însă $mb : mc = \overline{A'B} : \overline{A'C}$ etc. **1091.** Avem $\overline{T_1A} : \overline{T_1B} = \overline{AC} : \overline{AB}$, $\overline{T_1C} : \overline{T_1A} = \overline{AC} : \overline{AB}$, deci $\overline{T_1C} : \overline{T_1B} = \overline{AC}^2 : \overline{AB}^2$ și se aplică teorema reciprocă a transversalelor. **1092.** Fie $\overline{BC} = a < \overline{CA} = b < \overline{AB} = c$; atunci $\overline{AT_1}$, $\overline{CT_3}$ sînt pozitive, $\overline{BT_2}$ negativă. Se observă că $\overline{T_1B} : c^2 = \overline{T_1C} : b^2 = a : (c^2 - b^2)$ și deoarece $\overline{T_1A} : \overline{T_1B} = b : c$, rezultă $1 : \overline{T_1A} = (c^2 - b^2) : (abc)$. **1093.** Fie ABC triunghiul, D' piciorul bisectoarei exterioare din A, E, F picioarele bisectoarelor interioare din B, C. Avem $\overline{D'B} : \overline{D'C} = \overline{AB} : \overline{AC}$; $\overline{EC} : \overline{EA} = -\overline{BC} : \overline{BA}$; $\overline{FA} : \overline{FB} = -\overline{CA} : \overline{CB}$, care se înmulțesc și se observă că relația lui Menelaus este satisfăcută. **1094.** Fie M, N punctele de tangență a cercului exînscris unghiului B cu $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, P punctul de contact al cercului înscris cu $\overline{AB}$. Avem $\overline{MB} = p$, $\overline{MC} = \overline{NC} = \overline{AP} = p - a$, $\overline{NA} = p - c$, $\overline{BP} = p - b$, de unde $(\overline{MB} : \overline{MC}) \times (\overline{NC} : \overline{NA}) \cdot (\overline{PA} : \overline{PB}) = [p(p-a)] : [(p-b)(p-c)] = 1$ în orice triunghi dreptunghic **.1905.** AA_1 și BB_1 se intersectează în O_1 (fig. 330). Va trebui să se arate că O_1, C_1, C sînt coliniare. Se va aplica teorema transversalelor triunghiului $AB'C'$ intersectat de transversala CBA' și lui AA_1C' intersectat de BB_1O_1. Se va deduce prin înmulțire și înlocuiri de segmente egale $(\overline{O_1A} : \overline{O_1A_1}) \cdot (\overline{C_1A_1} : \overline{C_1B'}) \cdot (\overline{CB'} : \overline{CA}) = 1$, deci O_1, C_1, C sînt coliniare. **1096.** Triunghiul AMB intersectat de transversala PQ (fig. 331), care întîlnește pe

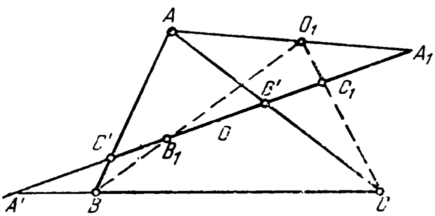

Fig. 330

$\overline{AB}$ în R_1 dă $(\overline{RA}:\overline{RB})\cdot(\overline{QB}:\overline{QM})\cdot(\overline{PM}:\overline{PA})=1$, dar din triunghiurile dreptunghice OMB, OMA avem $\overline{QB}:\overline{QM}=\overline{OB}^2:\overline{OM}^2$ şi $\overline{PM}:\overline{PA}=\overline{OM}^2:\overline{OA}^2$. Înlocuind aceste rapoarte, obţinem $\overline{RA}:\overline{RB}=\overline{OA}^2:\overline{OB}^2=\text{const}$, deci R este fix. **1097.** Triunghiul $AA'C$ intersectat de transversala BOB' dă $(\overline{BA'}:\overline{BC}):(\overline{B'C}:\overline{B'A})\times$

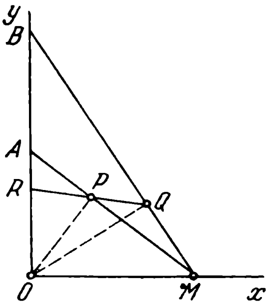

Fig. 331

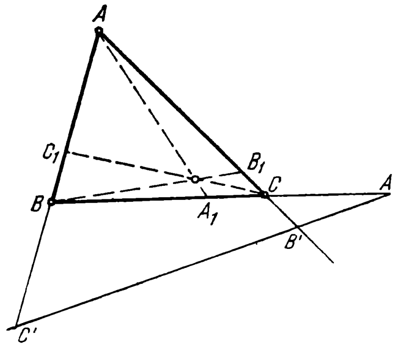

Fig. 332

$\times(\overline{OA}:\overline{OA'})=1$, iar triunghiul $AA'B$ intersectat de COC' dă $(\overline{CA'}:\overline{CB})\cdot(\overline{C'B}:\overline{C'A})\cdot(\overline{OA}:\overline{OA'})=1$. Împărţin parte cu parte, observînd că $\overline{BC}=-\overline{CB}$. **1098.** Avem (fig. 332) $(\overline{A'B}:\overline{A'C})\times$ $\times(\overline{B'C}:\overline{B'A})\cdot(\overline{C'A}:\overline{C'B})=1$, însă $\overline{A'B}:\overline{A'C}=-\overline{A_1B}:\overline{A_1C}$ etc., deci $(\overline{A_1B}:\overline{A_1C})\cdot(\overline{B_1C}:\overline{B_1A})\cdot(\overline{C_1A}:\overline{C_1B})=-1$. **1099.** Se aplică teorema transversalelor triunghiului ABC, intersectat de FGE şi se observă că $\overline{EA}=-\overline{EC}$ şi $\overline{FB}=\overline{GB}$, deci $\overline{FA}=-\overline{GC}=\overline{CG}$. **1100.** Avem $\overline{A\beta}=\overline{A\gamma}$; $\overline{B\gamma}=\overline{B\alpha}$; $\overline{C\alpha}=\overline{C\beta}$ şi relaţia lui Ceva este verificată. **1101.** Avem $\overline{A''B}=\overline{A'C}$, $\overline{B''C}=\overline{B'A}$, $\overline{C''A}=\overline{C'B}$, $\overline{A''C}=\overline{A'B}$, $\overline{B''A}=\overline{B'C}$, $\overline{C''B}=\overline{C'A}$ şi se aplică teorema lui Ceva, ţinînd seama de semne. **1102.** Caz particular al problemei precedente. Cevienele $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ sînt izotomicele cevienelor punctului lui Gergonne (probl. 1100). **1103.** Fie I centrul cercului înscris şi α proiecţia lui pe $\overline{BC}$, I_a centrul cercului exînscris relativ la vîrful A. $\alpha A''$ care uneşte două puncte omoloage ale cercurilor I_a, I trece prin A, care este centrul de omotetie al acestor cercuri. Dar $A\alpha$, $B\beta$ $C\gamma$ sînt concurente (probl. 1100) (G. M. XVI). **1104.** În triunghiul dreptunghic OMN trebuie să avem $(\overline{A_1M}:\overline{A_1O})\cdot(\overline{A_2O}:\overline{A_2N})\times$ $\times(\overline{DN}:\overline{DM})=-1$, unde D este piciorul perpendicularei din O pe MN. Însă $\overline{OA_1}=\overline{OA_2}$, iar din $\Delta AA_1M\sim\Delta AA_2N$, deducem

$\overline{A_1M}:\overline{A_2A}=\overline{AM}:\overline{AN}=\overline{OM}:\overline{ON}$ și $\overline{AA_1}:\overline{NA_2}=\overline{AM}:\overline{AN}=$ $=\overline{OM}:\overline{ON}$, care prin înmulțire dau $\overline{A_1M}:\overline{NA_2}=\overline{OM}^2:\overline{ON}^2$; în sfîrșit $\overline{DN}:\overline{DM}=\overline{ON}^2:\overline{OM}^2$. Înlocuind în relația lui Ceva, aceasta se verifică. **1105.** Avem $\overline{A\beta}\cdot\overline{A\beta'}=\overline{A\gamma}\cdot\overline{A\gamma'}$ și două relații analoage, pe care le înmulțim parte cu parte (fig. 333). **1106.** Teorema lui Menelaus aplicată triunghiului $AB\alpha$, intersectat de transversala $CI\gamma$, dă $(\overline{I\alpha}:\overline{IA})\cdot(\overline{CB}:\overline{C\alpha})\cdot(\overline{\gamma A}:\overline{\gamma B})=1$ și alte două asemănătoare, obținute prin permutări circulare. Cele trei egalități înmulțite, ținînd seama că $(\overline{\alpha B}:\overline{\alpha C})\cdot(\overline{\beta C}:\overline{\beta A})\cdot(\overline{\gamma A}:\overline{\gamma B})=-1$, conduc la relația $(\overline{I\alpha}:\overline{IA})\cdot(\overline{I\beta}:\overline{IB}):(\overline{I\gamma}:\overline{IC})=-(\overline{C\alpha}:\overline{CB})\times$

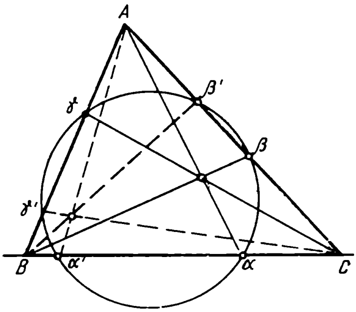

Fig. 333

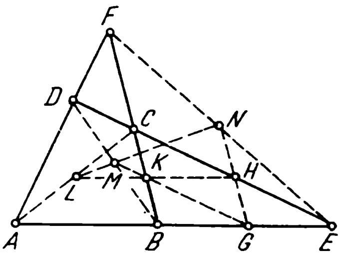

Fig. 334

$\times(\overline{A\beta}:\overline{AC})\cdot(\overline{B\gamma}:\overline{BA})$. Însă $\dfrac{\overline{C\alpha}}{\overline{CB}}=\dfrac{p-c}{a}$ etc., care înlocuite în relația precedentă ne dau relația din enunț. **1107.** Triunghiul $AC\alpha$ intersectat de transversala $BO\beta$ și triunghiul $AB\alpha$ intersectat de $CO\gamma$ ne dau relațiile $(\overline{\beta A}:\overline{\beta C})\cdot(\overline{BC}:\overline{B\alpha})\cdot(\overline{O\alpha}:\overline{OA})=1$ și $(\overline{\gamma A}:\overline{\gamma B})\times$ $\times(\overline{CB}:\overline{C\alpha})\cdot(\overline{O\alpha}:\overline{OA})=1$. Deducem $\overline{\beta A}:\overline{\beta C}+\overline{\gamma A}:\overline{\gamma B}=\overline{OA}(\overline{B\alpha}+$ $+\overline{\alpha C}):\overline{O\alpha}\cdot\overline{BC}=\overline{OA}:\overline{O\alpha}$. **1108.** În triunghiul $O_1O_2O_3$ avem $\overline{S_1O_2}:\overline{S_1O_3}=R_2:R_3$ și $\overline{S_1'O_2}:\overline{S_1'O_3}=-R_2:R_3$. **1109.** Fie $ABCDEF$ patrulaterul (fig. 334), L, M, N mijloacele diagonalelor $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{EF}$, iar G, H, K mijloacele segmentelor $\overline{BE}$, $\overline{EC}$, $\overline{CB}$. Trebuie să arătăm că $(\overline{MG}:\overline{MK})\cdot(\overline{LK}:\overline{LH})\cdot(\overline{NH}:\overline{NG})=1$. Se observă că segmentele care intră în această relație sînt jumătățile segmentelor determinate de transversala ADF pe laturile triunghiului BCE. **1110.** Se consideră triunghiurile OBC, OCA, OAB intersectate respectiv de transversalele $\alpha B'C'$, $\beta C'A'$, $\gamma A'B'$ (fig. 335) și se deduce $(\overline{\alpha B}:\overline{\alpha C})\cdot(\overline{\beta C}:\overline{\beta A})\cdot(\overline{\gamma A}:\overline{\gamma B})=1$. **1111.** Fie O punctul comun dreptelor BB', CC'. Se va aplica teorema precedentă triunghiurilor $\gamma BB'$ și $\beta CC'$. Triunghiurile ABC, $A'B'C'$, cărora li se aplică proprietatea precedentă și cea de față se zic omologice, O este centrul de omologie, $\alpha\beta\gamma$ axa de omologie. În cazul particular, cînd $A'B'C'$ este înscris în ABC (este triunghiul pedal al lui O), $\alpha\beta\gamma$ se numește polara triliniară a lui O în raport cu ABC. **1112.** Din triunghiul ABC intersectat de transversalele $A_1C''B''$, $\alpha B'C''$, $\alpha C'B''$ (fig. 336), se deduce că

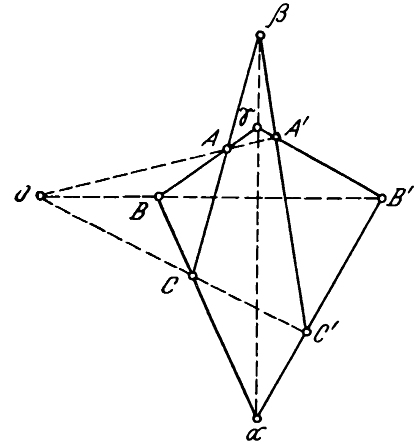

Fig. 335

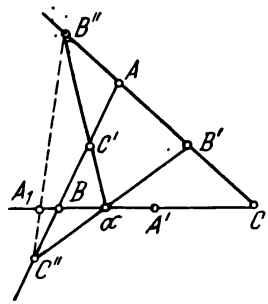

Fig. 336

$\overline{\alpha C}^2:\overline{\alpha B}^2=\overline{A_1C}:\overline{A_1B}$ și la fel $\overline{\beta A}^2:\overline{\beta C}^2=\overline{B_1A}:\overline{B_1C}$; $\overline{\gamma B}^2:\overline{\gamma A}^2 = \overline{C_1B}:\overline{C_1A}$ și deci $(\overline{A_1B}:\overline{A_1C})\cdot(\overline{B_1C}:\overline{B_1A})\cdot(\overline{C_1A}:\overline{C_1B}) = (\overline{\alpha B}\cdot\overline{\beta C}\cdot\overline{\gamma A})^2:(\overline{\alpha C}\cdot\overline{\beta A}\cdot\overline{\gamma B})^2$ (G.M. XIII). **1113.** Fie α, β, γ mijloacele segmentelor $\overline{bc}$, $\overline{ca}$, $\overline{ab}$ și A', B, C' mijloacele laturilor $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ (fig. 337). Se observă că $A'\alpha$, $B'\beta$, $C'\gamma$ trec prin A_1, B_1, C_1, mijloacele segmentelor $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$ (probl. 539) și deci triunghiurile $A_1B_1C_1$, $A'B'C'$ sînt omotetice cu ABC, iar AA', BB', CC' sînt concurente. **1114.** Fie M, M' punctele unde DE, CF intersectează pe BC. Triunghiul ABC intersectat de transversalele DE și GF dă rapoartele $\overline{MB}:\overline{MC}=\overline{M'B}:\overline{M'C}=\overline{HB}^2:\overline{HC}^2$, deci M și M' se confundă. **1115.** Fie α', β', γ' punctele unde AA_1, BB_1, CC_1 intersectează laturile $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$. Relația lui Menelaus aplicată triunghiului ABC intersectat de transversala $\alpha\beta\gamma$ și relația lui Ceva aplicată aceluiași triunghi pentru cevienele lui A_1 arată că α și α' sînt conjugate față de B și C. Analog pentru β și β' față de C, A și γ, γ' față de A, B. Apoi se aplică problema 1098. **1116.** Fie $\overline{A_1B_1}$ un segment al figurii (F_1), $\overline{A_2B_2}$ omoteticul său în (F_2) și $\overline{A_3B_3}$ în (F_3) (fig. 338). Triunghiurile $A_1O_2O_3$, $B_1O_2O_3$ intersectate de transversalele A_2A_3C, B_2B_3C' dau $\overline{CO_3}:\overline{CO_2}=$

$= (\overline{A_3A_1}:\overline{A_3O_2})\cdot(\overline{A_2O_3}:\overline{A_2A_1})$ și $\overline{C'O_3}:\overline{C'O_2} = (\overline{B_3B_1}:\overline{B_3O_2})\cdot(\overline{B_2O_3}:\overline{B_2B_1})$. Dar $\overline{A_3A_1}:\overline{A_3O_2}=\overline{B_3B_1}:\overline{B_3O_2}$ și $\overline{A_2O_3}:\overline{A_2A_1}=\overline{B_2O_3}:\overline{B_2B_1}$,

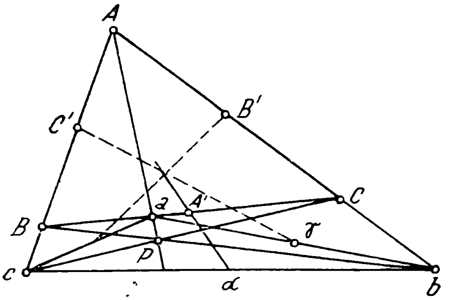

Fig. 337

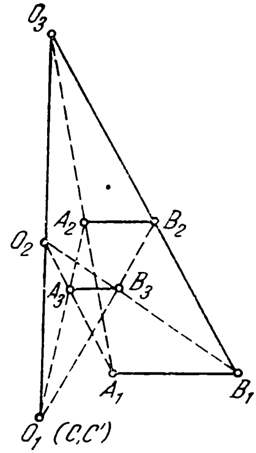

Fig. 338

deci C și C' coincid și se confundă cu O_1. **1117.** Triunghiul ABC, intersectat de NP', PM', MN' (fig. 339) ne dă, notînd cu M'', N'', P'' intersecțiile acestor secante cu $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$, relațiile $(\overline{M''B}:\overline{M''C})\times\times(\overline{NC}:\overline{NA})\cdot(\overline{P'A}:\overline{P'B})=1$; $(\overline{P''C}:\overline{P''A})\cdot(\overline{PA}:\overline{PB})\cdot(\overline{M'B}:\overline{M'C})=1$;

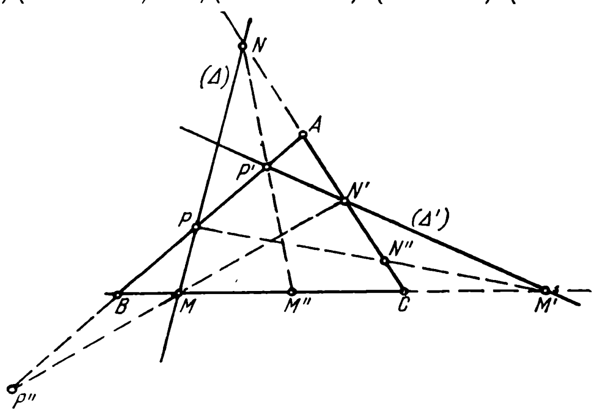

Fig. 339

$(\overline{N''A}:\overline{N''B})\cdot(\overline{MB}:\overline{MC})\cdot(\overline{N'C}:\overline{N'A})=1$. Înmulțind aceste relații și ținînd seama de relațiile date de transversalele MNP, $M'N'P'$, găsim că relația lui Menelaus este satisfăcută de punctele M'', N'', P''. **1118.** Fie m, n, p mijloacele segmentelor $\overline{bc}$, $\overline{ca}$, $\overline{ab}$ și

a', b', c' intersecțiile dreptelor bc, ca, ab cu $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$. Triunghiurile Bca', Cba' intersectate de transversala $Am\alpha$ dau $(\overline{\alpha C}:\overline{\alpha a'})\times \times (\overline{ma'}:\overline{mb})\cdot(\overline{Ab}:\overline{AC})=1$ și $(\overline{\alpha a'}:\overline{\alpha B})\cdot(\overline{AB}:\overline{Ac})\cdot(\overline{mc}:\overline{ma'})=1$. Înmulțind aceste relații, se obține $(\overline{\alpha C}:\overline{\alpha B})\cdot(\overline{AB}:\overline{AC})\cdot(\overline{Ab}:\overline{Ac})=1$. Înmulțind această relație cu celelalte două analoge, se obține $(\overline{aB}:\overline{aC})\cdot(\overline{bC}:\overline{bA})\cdot(\overline{cA}:\overline{cB})\cdot(\overline{\alpha B}:\overline{\alpha C})\cdot(\overline{\beta C}:\overline{\beta A})\cdot(\overline{\gamma A}:\overline{\gamma B})=1$. **1119.** Din triunghiul $AC'C$ intersectat de transversala BB' se deduce că $\overline{A_1C}:\overline{A_1C'}=m(m+n):n^2$ și deci $\overline{A_1C}:\overline{CC'}=m(m+n):(m^2+ + mn+n^2)$. La fel se găsește că $\overline{B_1C}:\overline{CC'}=n(m+n):(m^2+ + mn+n^2)$ și deci $\overline{B_1C}:\overline{A_1C}=n:m=\overline{CA'}:\overline{CA''}=\overline{CA'}:\overline{BA'}$. Rezultă că $\overline{A'B}=\overline{A''C}$ (G.M. XX). **1120.** Deoarece $\overline{B_1C}:\overline{A_1C}= =\overline{C_1A}:\overline{B_1A}=\overline{A_1B}:\overline{C_1B}=n:m$ (probl. 1119), rezultă (probl. 448) că triunghiurile ABC, $A_1B_1C_1$ au același punct de întîlnire a medianelor. **1121.** Fie ABC triunghiul și $A'B'C'$ transversala. Triunghiul $AB'C'$ intersectat de transversala $A'BC$ dă $(\overline{A'C'}:\overline{A'B'})\cdot(\overline{CB'}: :\overline{CA})\cdot(\overline{BA}:\overline{BC'})=1$, de unde $\overline{BC'}:\overline{CB'}=k=$ const. Ducînd $\overline{BI}\ \#\ \overline{C'B'}$ și dreapta CI care intersectează pe $\overline{AB}$ în P, se observă că $\overline{BC'}:\overline{CB'}=\overline{B'I}:\overline{B'C}=\overline{AP}:\overline{AC}=k$. Deci $\overline{AP}=k\cdot\overline{AC}$ (G.M.XII). **1122.** Printr-un punct arbitrar O se duc trei drepte (fig. 340): prima intersectează pe (D) și (D') în A și A', a doua în B și B', a treia intersectează pe MA și MA' în C și C'. BC și $B'C'$ se întîlnesc în L. LM este dreapta căutată, căci ABC și $A'B'C'$ sînt omologice.

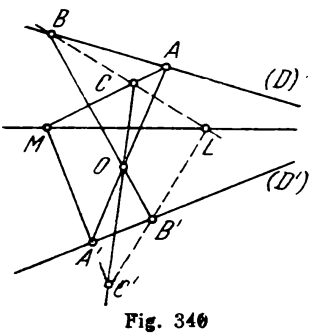

Fig. 340

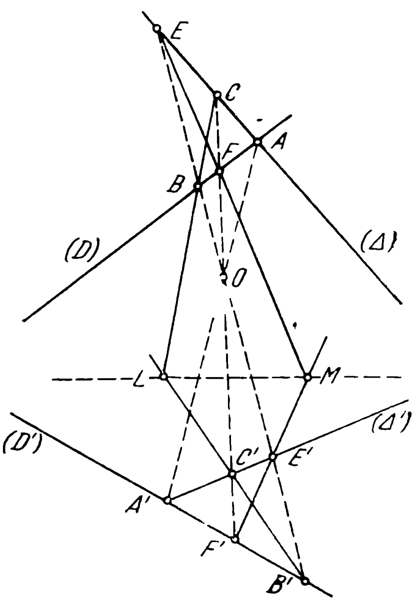

Fig. 341

Altă soluție. Prin M se duc două drepte arbitrare EF și GH, care taie pe (D) în E și G și pe (D') în F și H ; se construiește punctul $P \equiv (EH, FG)$. Din P se duce altă dreaptă care taie pe (D) și (D') respectiv în I și K. Fie $N \equiv (EK, HI)$. Punctele M și N se găsesc pe polara lui P față de unghiul $[(D), (D')]$, deci MN trece prin intersecția celor două drepte. **1123.** Aceeași construcție ca în problema precedentă. **1124.** Pe AA' se ia un punct O (fig. 341) prin care se duc două drepte: prima intersectează pe (D), (D') în B, B', pe (Δ), (Δ') în E și E' ; a doua intersectează pe (D), (D')

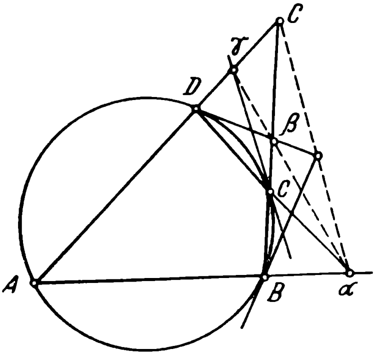

Fig. 342

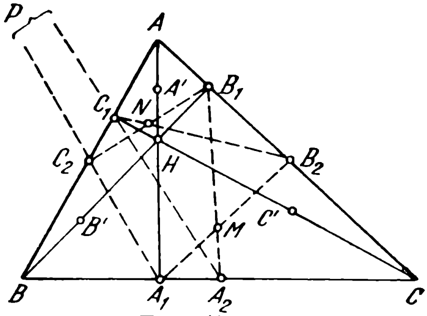

Fig. 343

în F, F', pe (Δ), (Δ') în C, C' ; BC și $B'C'$ se întîlnesc în L; EF și $E'F'$ se întîlnesc în M. LM este dreapta căutată, căci triunghiurile ABC, $A'B'C'$, pe de o parte, AEF și $A'E'F'$, pe de altă parte, sînt omologice. **1125.** Se aplică teorema transversalelor triunghiului obținut prelungind dreptele AB, CD, EF, relativ la secantele BC, DE și FA. Aceasta se numește *teorema lui Pascal.* **1126.** Se obține din teorema lui Pascal cînd două vîrfuri alăturate ale hexagonului sînt confundate. **1127.** Caz particular al teoremei lui Pascal (fig. 342). **1128.** Se aplică teorema lui Pascal (probl. 1125) hexagoanelor $IA'ABCC'$, $IB'BCAA'$, $IC'CABB'$. Cele trei drepte ale lui Pascal corespunzătoare sînt $\alpha D\gamma$, $\beta D\alpha$ și $\gamma D\beta$. **1129.** Fie M intersecția lui AA'' cu cercul (O). Se aplică teorema lui Pascal (probl. 1125) hexagonului $B''BCAA''M$ și se deduce că MB'' trece prin B'. La fel se arată că și MC'' trece prin C' (G. M. VII). **1130.** Teorema lui Pascal aplicată hexagonului $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ (fig. 343), înscris în cercul celor nouă puncte, arată că M, N, P sînt coliniare. A', B', C' fiind punctele euleriene ale înălțimilor, teorema lui Pascal aplicată hexagonului $A_1B_2B'B_1A_2A'$ arată că punctul M, centrul O_9 al cercului lui Euler și ortocentrul H sînt coliniare (G.M. XXXII). **1131.** Din triunghiul ABC intersectat de $A_1\alpha'\alpha$ (fig. 344) se deduce $\overline{A_1B}:\overline{A_1C}=\overline{A'B^2}:\overline{A'C^2}$ și alte două relații analoge. Se va ține seama pe urmă că AA', BB', CC' se întîlnesc într-un punct. *Altă soluție.* Punctele α, α', β, β', γ, γ' se găsesc pe cercul lui Taylor al lui ABC (probl. 593) și se aplică teorema lui Pascal hexagonului format de aceste puncte. **1132.** Fie H intersecția înălțimilor. Se va observa că în cercul $A'HC'B$ punctul A' are ca dreaptă a lui Simson în raport cu triunghiul $BC'H$, dreapta $A'_bA'_c$. Deci, $A'_bA'_c$ trece prin proiecțiile lui A' pe AB și AC. Se va aplica apoi problema

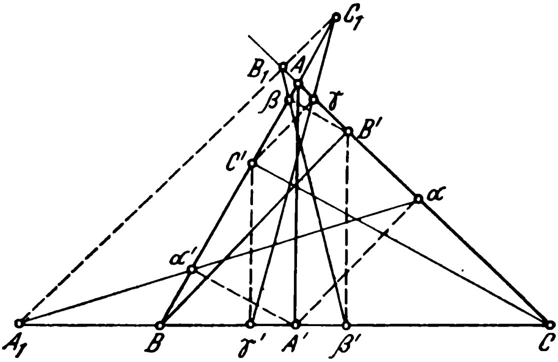

Fig. 344

precedentă (G.M. VII). **1133.** Fie α intersecția dreptelor $B'C'$ și BC, iar O centrul cercului ABC. Se observă cu $\overline{\alpha B}:\overline{\alpha C}=\overline{BB'}:\overline{CC'}$. Dar $\overline{BB'}:\overline{CO}=\overline{AB}:\overline{AC}$ și $\overline{AO}:\overline{CC'}=\overline{AB}:\overline{AC}$. Deci $\overline{\alpha B}:\overline{\alpha C}=$ $=\overline{AB}^2:\overline{AC}^2$, ceea ce arată că $A\alpha$ este tangentă la cercul (O) (probl. 1091) (G.M.XI). **1134.** Se pleacă de la relația $\overline{\alpha C}\cdot\overline{\alpha' C}:\overline{\alpha B}\times$ $\times\,\overline{\alpha' B}=\overline{AC}^2:\overline{AB}^2$ (probl. 582) și cele două analoge. Se înmulțesc parte cu parte, ținînd seama de ipoteze. Cele două puncte de concurență se numesc puncte *inverse* sau *izogonale*. **1135.** Fie α, β, γ intersecțiile dreptei MO cu laturile lui ABC. În triunghiul MBC cevienele MO și MA' sînt izogonale, deci $\overline{\alpha B}\cdot\overline{A'B}:\overline{\alpha C}\cdot\overline{A'C}=$ $=\overline{MB}^2:\overline{MC}^2$. Înmulțim parte cu parte această relație cu cele două analoge. **1136.** Fie P un punct al cercului circumscris triunghiului ABC și Q, R, S proiecțiile sale pe laturile $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$. Triunghiul ARS intersectat de transversala BC ne dă $(\overline{QS}:\overline{QR})\cdot(\overline{CR}:\overline{CA})\times$ $\times(\overline{BA}:\overline{BS})=1$ sau $\overline{QS}:\overline{QR}=(\overline{AC}\cdot\overline{BS}):(\overline{AB}\cdot\overline{CR})$. Triunghiurile dreptunghice PBS și PCR fiind asemenea, avem $\overline{BS}:\overline{CR}=\overline{PS}:\overline{PR}$, deci $\overline{QS}:\overline{QR}=(\overline{AC}\cdot\overline{PS}):(\overline{AB}\cdot\overline{PR})$. Dacă punem condiția ca $\overline{QS}=\overline{QR}$, atunci obținem $\overline{PS}:\overline{PR}=\overline{AB}:\overline{AC}$, care este proprietatea caracteristică a simedianei (G.M. XXVIII). **1137.** Fie α, β, γ (fig. 345) cele trei puncte unde cele trei ceviene întîlnesc laturile opuse vîrfurilor prin care trec, iar abc, $a'b'c'$ triunghiurile pedale ale punctelor O, O'. Dreptele $A\alpha$, Bb, Cc' sînt concurente, deci $(\overline{\alpha B}:\overline{\alpha C})\cdot(\overline{bC}:\overline{bA})\cdot(\overline{c'A}:\overline{c'B})=-1$.

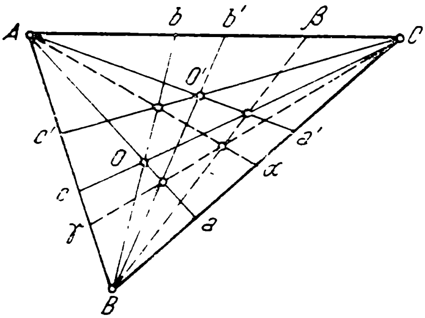

Fig. 345

Analog obținem alte două relații, pe care înmulțindu-le parte cu parte și ținînd seama că grupurile de drepte (Aa, Bb, Cc), (Aa', Bb', Cc') sînt concurente, deducem $(\overline{\alpha B}:\overline{\alpha C})\times\times(\overline{\beta C}:\overline{\beta A})\cdot(\overline{\gamma A}:\overline{\gamma B})=-1$ și $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ sînt concurente. **1138.** Fie α, β, γ punctele unde dreptele Aa, Bb, Cc întîlnesc laturile $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ (fig. 346). Paralela dusă prin a la $\overline{BC}$ întîlnește laturile $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ în B_1, C_1 și fie C_2, A_2, A_3, B_3 punctele analoge. Segmentele $\overline{A_2b}$, $\overline{A_3c}$ sînt simetrice în raport cu bisectoarea unghiului A, deci $\overline{A_2b}=\overline{A_3c}$ și analog $\overline{B_3c}=\overline{B_1a}$; $\overline{C_1a}=\overline{C_2b}$. Apoi observăm că $\overline{\alpha B}:\overline{\alpha C}=\overline{aB_1}:\overline{aC_1}$; $\overline{\beta C}:\overline{\beta A}=\overline{bC_2}:\overline{bA_2}$; $\overline{\gamma A}:\overline{\gamma B}=\overline{cA_3}:\overline{cB_3}$ și facem produsul parte cu parte, ținînd seama

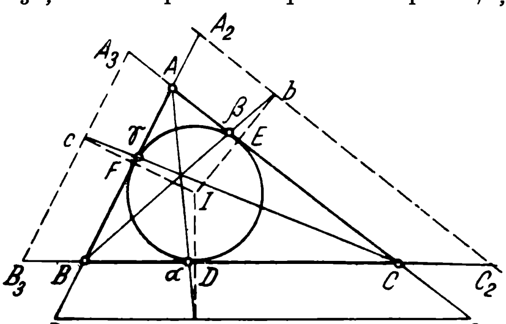

Fig. 346

de semn. **1139.** Fie A_1 intersecția perpendicularei în A pe AO cu perpendiculara în α pe $O\alpha$, B_1 și C_1 punctele analoge. Se observă că dacă A_1, B_1, C_1 sînt coliniare, și centrele cercurilor din enunț sînt coliniare. Triunghiul format de $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$ are ca vîrfuri O_a, O_b, O_c centrele cercurilor exînscrise triunghiului ABC. Triunghiul $A_1'B_1'C_1'$, format de αA_1, βB_1, γC_1, este omotetic cu ABC, centrul de omotetie fiind O. Triunghiurile $O_aO_bO_c$, $A_1'B_1'C_1'$ sînt omologice și deci A_1, B_1, C_1 sînt coliniare (G. M. XI). **1140.** Fie

T_1, T_2, T_3 punctele unde tangentele în A_1, B_1, C_1 intersectează pe $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ și A_2, B_2, C_2 intersecțiile lui AA_1, BB_1, CC_1 cu $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$, iar D, E proiecțiile punctelor B, C pe AA_1. Se observă că $\overline{AB}\cdot\overline{A_1B}=2R\cdot\overline{BD}$ și $\overline{AC}\cdot\overline{A_1C}=2R\cdot\overline{CE}$ (probl. 492) și deci $\overline{A_1B}:\overline{A_1C}=\overline{AC}\cdot\overline{A_2B}:\overline{AB}\cdot\overline{A_2C}$. Dar $\overline{T_1B}:\overline{T_1C}=(\overline{A_1B}:\overline{A_1C})^2$, deci $\overline{T_1B}:\overline{T_1C}=\overline{AC}^2\cdot\overline{A_2B}^2\cdot\overline{AB}^2\cdot\overline{A_2C}^2$. Rezultă astfel că $(\overline{T_1B}:\overline{T_1C})\times(\overline{T_2C}:\overline{T_2A})\cdot(\overline{T_3A}:\overline{T_3B})=(\overline{A_2B}^2:\overline{A_2C}^2)\cdot(\overline{B_2C}^2:\overline{B_2A}^2)\times(\overline{C_2A}^2:\overline{C_2B}^2)=+1$. Deci T_1, T_2, T_3 sînt coliniare și atunci și centrele cercurilor OA_1A', OB_1B', OC_1C', care sînt mijloacele lui $\overline{OT_1}$, $\overline{OT_2}$, $\overline{OT_3}$, sînt coliniare (G. M. XVI). **1141.** Fie a, b, c vîrfurile triunghiului format de dreptele AA', BB', CC'. Triunghiul $aB'C'$ intersectat de transversala $BC\alpha'$ dă relația $(\overline{\alpha'B'}:\overline{\alpha'C'})\times(\overline{CC'}:\overline{Ca})\cdot(\overline{Ba}:\overline{BB'})=1$. Înmulțind parte cu parte această egalitate cu celelalte două analoge, ce se obțin prin permutări circulare și observînd că triunghiurile ABC, abc sînt omologice, deducem $(\overline{\alpha'B'}:\overline{\alpha'C'})\cdot(\overline{\beta'C'}:\overline{\beta'A'})\cdot(\overline{\gamma'A'}:\overline{\gamma'B'})=-1$. **1142.** Unghiul de

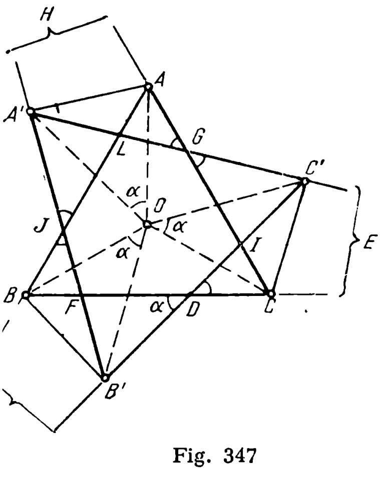

Fig. 347

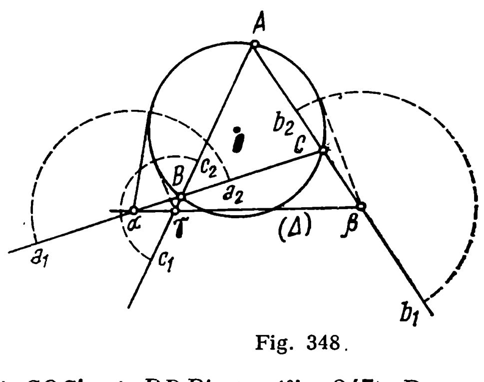

Fig. 348

rotire $\alpha=\sphericalangle AOA'=\sphericalangle BOB'=\sphericalangle COC'=\sphericalangle BDB'$ etc. (fig. 347). Rezultă $\overline{AA'}=\overline{BB'}=\overline{CC'}$. Latura $\overline{BC}$ este intersectată de $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ respectiv în D, E, F; CA este intersectată de $C'A'$, $A'B'$, $B'C'$ în G, H, I, iar AB este intersectată de $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ în J, K, L. Pentru a arăta că ABC și $A'C'B'$ sînt omologice, trebuie demonstrat că D, H, L sînt coliniare. Se va demonstra întîi că triunghiurie ALG, BFJ, CID sînt egale, deci $\overline{AG}=\overline{BJ}=\overline{CD}$ și $\overline{AL}=\overline{BF}=\overline{CI}$.

Apoi trebuie să avem relația lui Menelaus $(\overline{DB}:\overline{DC})\cdot(\overline{HC}:\overline{HA})\times$ $\times(\overline{LA}:\overline{LB})=1$. Însă ABC intersectat de $A'B'$ dă $(\overline{FB}:\overline{FC})\times$ $\times(\overline{HC}:\overline{HA})\cdot(\overline{JA}:\overline{JB})=1$, de unde $\overline{HC}:\overline{HA}=(\overline{FC}\cdot\overline{JB}):(\overline{FB}\cdot\overline{JA})$. Introducînd în relația de mai sus și ținînd seama de segmentele egale, aceasta se verifică. Raționament asemănător pentru omologiile în celelalte ordine indicate. **1143.** Avem (fig. 348) $\overline{\alpha a_1^2}=\overline{\alpha B}\cdot\overline{\alpha C}$ și $\overline{a_1 B}=\overline{a_1\alpha}+\overline{\alpha B}=\sqrt{\overline{\alpha B}\cdot\overline{\alpha C}}+\overline{\alpha B}=\sqrt{\overline{\alpha B}}\left(\sqrt{\overline{\alpha C}}+\sqrt{\overline{\alpha B}}\right)$ și $\overline{a_1 C}=\sqrt{\overline{\alpha C}}\left(\sqrt{\overline{\alpha B}}+\sqrt{\overline{\alpha C}}\right)$, deci $\overline{a_1 B_1}:\overline{a_1 C}=\sqrt{\overline{\alpha B}:\overline{\alpha C}}$ și analog $\overline{a_2 B}:\overline{a_2 C}=$ $=-\sqrt{\overline{\alpha B}:\overline{\alpha C}}$. **1144.** Paralelele duse prin punctele A', B', C' (fig. 349) respectiv la BC, CA, AB întîlnesc laturile corespunză-

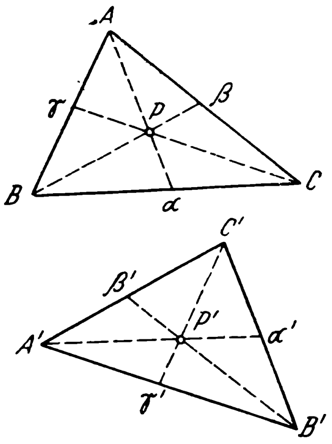

Fig. 349

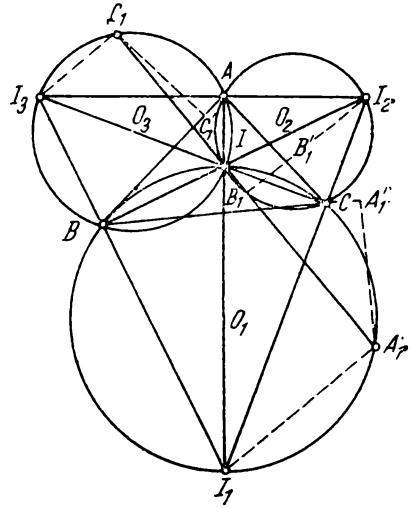

Fig. 350

toare ale triunghiului $A'B'C'$ în α', β', γ' și fie α, β, γ triunghiul pedal al lui P în raport cu ABC. Observăm că $\triangle\alpha'A'B'\sim\triangle\alpha CP$ și $\triangle\alpha'A'C'\sim\triangle\alpha BP$. Se deduce $\overline{\alpha'A'}:\overline{\alpha C}=\overline{\alpha P}:\overline{\alpha'B'}$, $\overline{\alpha'A'}:\overline{B\alpha}=$ $=\overline{\alpha P}:\overline{C'\alpha'}$; deci $\overline{\alpha'B'}:\overline{\alpha'C'}=\overline{\alpha C}:\overline{\alpha B}$. **1145.** Generalizarea precedentei. Soluție analogă. Un caz particular îl constituie triunghiurile ortologice (probl. 578). **1146.** Fie $A'_1B'_1C'_1$ triunghiul format de dreptele $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, iar $A_1B_1C_1$ triunghiul format de $A'\alpha'$, $B'\beta'$, $C'\gamma'$. Avem $\triangle A'B'\alpha'\sim\triangle CB_1'\alpha$ și $\triangle C'\alpha'A'\sim$ $\sim\triangle C_1'\alpha B$. Scriind relațiile de asemănare, obținem $\overline{\alpha'B'}:\overline{\alpha'C'}=$ $=\overline{\alpha B_1'}\cdot\overline{\alpha B}:\overline{\alpha C_1'}\cdot\overline{\alpha C}$ (G.M. XXV). **1147.** a) Fie I_1, I_2, I_3 centrele cercurilor exînscrise (fig. 350). Dreptele I_1A_1, I_2B_1, I_3C_1 sînt paralele, deci izogonalele lor în raport cu unghiurile lui $I_1I_2I_3$ sînt concurente într-un punct M al cercului $I_1I_2I_3$ (probl. 261). Punctul M considerat ca făcînd parte din triunghiul $I_1I_2I_3$ are ca omoloage în triunghiurile asemenea BCI_1, CAI_2, ABI_3 respectiv punctele A_1, B_1, C_1. Fie M_1, M_2, M_3 proiecțiile lui M pe laturile lui $I_1I_2I_3$. Aceste puncte se găsesc (probl. 257) pe dreapta lui Simson a punctului M. Din asemănarea triunghiurilor I_1BC, $I_1I_2I_3$ deducem $\overline{M_1I_2}:\overline{M_1I_3}=\overline{A_1'B}:\overline{A_1'C}$, punctele M_1 și A_1' fiind omoloage. Făcînd produsul parte cu parte dintre această egalitate și cele două analoge și ținînd seama de teorema lui Menelaus, deducem că punctele A_1', B_1', C_1' sînt coliniare. *b*) Se va observa că dacă M_1', M_2', M_3' sînt punctele în care tangenta în M la cercul $I_1I_2I_3$ întîlnește laturile acestui triunghi, iar A', B', C' sînt punctele în care tangentele în A_1, B_1, C_1 la cercurile BIC, CIA, AIB întîlnesc laturile lui ABC, punctele A_1 și M_1' considerate ca făcînd parte din triunghiurile asemenea I_1BC și $I_1I_2I_3$ sînt puncte omoloage și se va continua ca mai sus. **1148.** Generalizarea ultimei proprietăți a problemei precedente. În locul tangentei în M se va considera dreapta MN care unește două puncte ale cercului $I_1I_2I_3$ (G. M. XXXI). **1149.** Fie A_1, B_1, C_1 punctele în care dreapta (d) intersectează laturile triunghiului și fie A', B', C' punctele unde laturile triunghiului ABC sînt întîlnite de dreapta(d') care trece prin P și face unghiul α cu dreapta (d). Proiecțiile de unghi α ale punctelor P_1, P_2, P_3 pe dreptele BC, CA, AB sînt

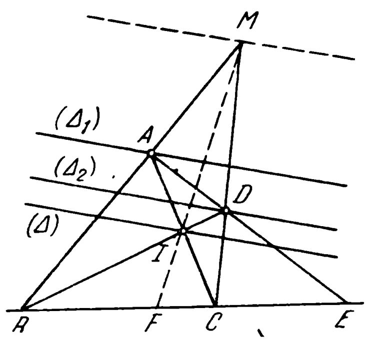

Fig. 351

punctele A'', B'', C'', unde aceste laturi intersectează din nou cercurile PP_1A', PP_2B', PP_3C'. Avem relația $\overline{A_1B}:\overline{A_1C}=(\overline{A'B}\cdot\overline{A''B}):$ $:(\overline{A'C}\cdot\overline{A''C})$ (probl. 662). Facem produsul, parte cu parte, a acestei egalități cu cele două analoge. **1150.** Fie (Δ) dreapta pe care se mișcă I și $(\Delta_1)\,||\,(\Delta_2)\,||\,(\Delta)$ dreptele pe care se mișcă respectiv A și D (fig. 351). Un astfel de patrulater se obține luînd I arbitrar pe (Δ) ; A și D rezultă din intersecția lui CI și BI cu (Δ_1) și (Δ_2). a) Triunghiul BIC intersectat de ADE (E pe BC) ne dă $(\overline{EB}:\overline{EC})\cdot(\overline{AC}:\overline{AI})\times$ $\times(\overline{DI}:\overline{DB})=1$, însă din cauza paralelismului dreptelor (Δ), (Δ_1), (Δ_2) rapoartele $\overline{AC}:\overline{AI}$ și $\overline{DI}:\overline{DB}$ sînt constante, deci $\overline{EB}:\overline{EC}=$

$= \text{const}$ şi E este fix. b) Fie M intersecţia $(AB, CD) \cdot MI$ intersectează pe BC în F, conjugatul lui E faţă de B şi C, deci F este fix. Scriind relaţia lui Menelaus pentru triunghiul ABC, intersectat de transversala MIF, se găseşte că raportul $\overline{MA}:\overline{MB} = \text{const}$, deci M descrie o paralelă la (Δ_1) (R.M.T. XIV). **1151.** Fie $ABCD$ patrulaterul strîmb, M,N,P,Q punctele de tangenţă. Avem $\overline{AM}=\overline{AQ}$; $\overline{BM}=\overline{BN}$, $\overline{CN}=\overline{CP}$, $\overline{DP}=\overline{DQ}$. Relaţia lui Menelaus pentru spaţiu (probl. 877) se verifică ţinînd seama de egalităţile de mai sus şi de semnele segmentelor, deci M,N,P,Q se află în acelaşi plan.

XXIV. **1152.** Se demonstrează relaţia lui Euler $\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AC} \cdot \overline{DB} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = 0$. De aici se deduce $(ABCD)+(ACBD)=1$. Apoi se observă că $(ABCD) \cdot (ABDC)=1$. **1153.** Avem $\overline{AC}:\overline{AD} = -\overline{BC}:\overline{BD}$, de unde $\overline{AC}:(\overline{AB}+\overline{BD}) = -(\overline{BA}+\overline{AC}):\overline{BD}$ şi se ţine seama de relaţia dată. **1154.** Se va deduce din relaţiile date $\overline{AD}:\overline{AB} = \sqrt{2}+1$; $\overline{CB}:\overline{CD} = 1-\sqrt{2}$. **1155.** Se ştie că O fiind mijlocul lui $\overline{AB}$, avem $\overline{OB}^2 = \overline{OC} \cdot \overline{OD}$, din care scăzînd $\overline{OD}^2$ deducem $(\overline{OB} + \overline{OD})(\overline{OB} - \overline{OD}) = \overline{OD}(\overline{OC} - \overline{OD})$, dar $\overline{OB} = -\overline{OA}$, deci $\overline{OB} + \overline{OD} = \overline{OD} - \overline{OA} = \overline{AD}$; $\overline{OB} - \overline{OD} = \overline{DB}$ etc. Relaţia devine $\overline{AD} \cdot \overline{DB} = \overline{OD} \cdot \overline{DC}$ şi se ţine seama de semne. Asemănător se arată că $\overline{AC} \cdot \overline{CB} = \overline{OC} \cdot \overline{CD}$ şi prin împărţire se deduce $\overline{OD}:\overline{OC} = \overline{BD}^2:\overline{BC}^2 = \overline{AD}^2:\overline{AC}^2$ (G. M. XIII). **1156.** $\overline{MA}^2 = \overline{MN}^2 - \overline{NC}^2 = (\overline{MN} + \overline{NC})(\overline{MN} - \overline{NC}) = \overline{MC} \cdot \overline{MD}$. **1157.** Fie I mijlocul lui $\overline{PQ}$. Avem $\overline{IP}^2 = \overline{IA} \cdot \overline{IB} = \overline{IA'} \cdot \overline{IB'}$ şi I are puteri egale faţă de două cercuri oarecare trecînd unul prin A şi B, altul prin A' şi B'. Deci I se află la intersecţia axei radicale a acestor cercuri cu (Δ), iar P şi Q se află la intersecţia cu (Δ) a cercului cu centrul I, ortogonal celor două cercuri. Problema nu este întotdeauna posibilă. **1158.** Se observă că $(BC\alpha F) = (EC\beta D)$, deci $\alpha'(BC\alpha F) = \beta'(EC\beta D)$, însă aceste fascicule au raza $\alpha' C \beta'$ comună (fig. 352).

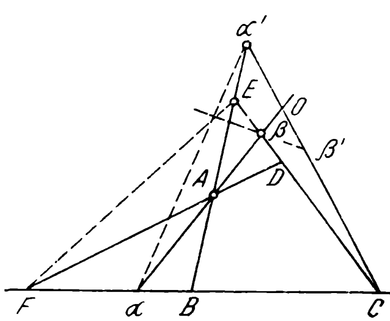

Fig. 352

1159. Fasciculul $O(PMQN)$ este armonic, OP, OM, ON sînt fixe, deci OQ este o dreaptă fixă. Această dreaptă se numeşte *polara* lui P în raport cu unghiul xOy. **1160.** Fie P_1 conjugatul armonic al lui P în raport cu M şi N, P_1' în raport cu M' şi N'. P_1 şi P_1' se găsesc pe polara lui P în raport cu xOy și se mai găsesc pe polara lui P în raport cu unghiul MQN, deci OP_1QP_1' este polara lui P în raport cu xOy. **1161.** În patrulaterul complet $ABCDEF$ (fig. 353), AC și BD se întîlnesc în L, AC și EF în M, BD și EF în N; LM este polara lui N în raport cu BAD, deci M, N sînt conjugate armonic în raport cu E și F etc. **1162.** Fie E și F intersec-

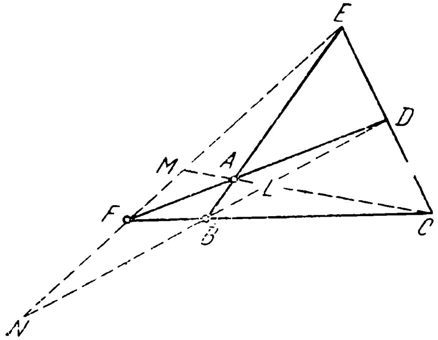

Fig. 353

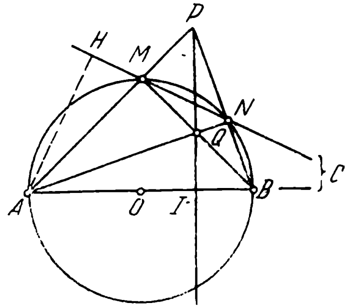

Fig. 354

țiile dreptei AM cu PN și BC. Avem $(AMEF)=-1$, dar M fiind pe paralela (Δ), $\overline{FA}:\overline{FM}=\text{const}$, deci $\overline{EA}:\overline{EM}=\text{const}$ și E descrie o paralelă la (Δ). **1163.** În triunghiul APQ punctul B este ortocentru (fig. 354). Punctele P, B, N sînt coliniare. Punctul

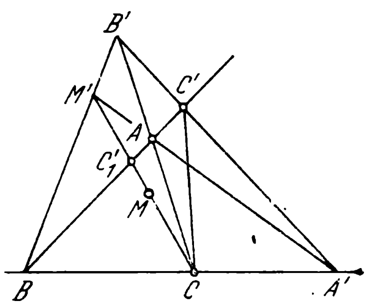

Fig. 355

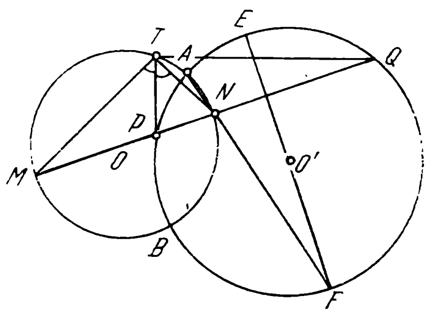

Fig. 356

C unde se întîlnesc AB și MN este conjugatul lui I în raport cu A și B (probl. 1161). C este fix, iar H se află pe cercul descris pe $\overline{AC}$ ca diametru. **1164.** Fie AA', BB', CC' polarele lui M în raport cu A, B, C (fig. 355). MC intersectează pe AB în C_1' și fie M' conjugatul armonic al lui M în raport cu C și C_1'. Se va observa că AM' şi BM' sînt polarele lui M în raport cu A şi B, deci două polare se intersectează pe MC. Din patrulaterul $M'BCA$ se vede că diagonalele $M'C$ şi $A'B'$ intersectează AB armonic în C_1' şi C'. Se deduce imediat că CC' este polara lui M în raport cu C. **1165.** Fie A, B intersecţia diametrului ce trece prin O cu cercul (O) şi C, D cu cercul (O'), iar T, T' intersecţiile celor două cercuri. Avem $\overline{OT}^2=\overline{OC}\cdot\overline{OD}$, dar $\overline{OT}=\overline{OA}=\overline{OB}$, deci $\overline{OB}^2=$ $=\overline{OC}\cdot\overline{OD}$, şi C, D sînt conjugate faţă de A, B. **1166.** a) Fasciculul $A(MNPQ)$ (fig. 356) este armonic iar $\sphericalangle MAN=90°$, deci AM, AN sînt bisectoarele unghiului PAQ, deci AN trece prin F. Analog BN trece prin E. b) Cercul de diametru $\overline{PQ}$ este evident ortogonal cu cercul (O). Rezultă că fasciculul $T(MNPQ)$ este armonic şi TM, TN sînt bisectoarele unghiului drept PTQ, de unde $\sphericalangle MTP=\sphericalangle PTN=\sphericalangle NTQ=45°$. **1167.** Fasciculul $A(CBa\alpha)$ intersectat de secantele (Δ) şi BC ne dă $(\beta\gamma\alpha'\alpha)=(CBa\alpha)$ sau $(\overline{\alpha'\beta}\cdot\overline{\alpha\gamma}):(\overline{\alpha'\gamma}\cdot\overline{\alpha\beta})=(\overline{aC}\cdot\overline{\alpha B}):(\overline{aB}\cdot\overline{\alpha C})$. Înmulţind parte cu parte această egalitate şi cele două analoge şi ţinînd seama de teorema transversalelor (probl. 1090) şi teorema cevienelor concurente (probl. 1097), se deduce relaţia cerută. **1168.** Dreapta $A'\alpha$ întîlneşte laturile AB, AC respectiv în C', B' (fig. 357). O tangentă variabilă T la cerc întîlneşte tangentele fixe BC, CA, AB, $A'\alpha$ în punctele a, b, c, α' şi raportul anarmonic (b, c, a, α') este constant. Deci$(bca\alpha')=$ $=(CBDA')$. Fasciculul $A(CBA'D')$ intersectat de transversalele $B'C'$ şi BC dă $(B'C'A'\alpha)=(CBA'D')$. Deci $(CBDA')=(CBA'D')$ care echivalează cu relaţia căutată. **1169.** Se înmulţesc, parte cu parte, relaţia din problema precedentă şi celelalte două analoge. Se ţine seama de reciproca teoremei lui Ceva şi de problema 1097. **1170.** Avem $M(AB_1C_1D)=M(ABCD)=P(BACD)$.

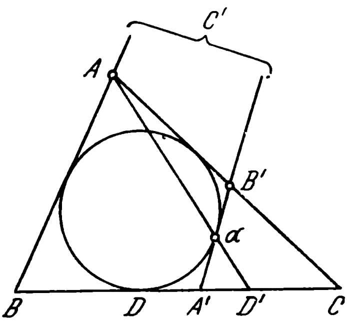

Fig. 357

Cele două fascicule au raza PMD comună, deci celelalte puncte de intersecţii ale razelor omoloage sînt coliniare (G.M. XIX). **1171.** Diametrul $\overline{EF}$ intersectează cercul în M şi N. Avem $C(MEFN)=D(MEFN)=D(NEFM)$, dar unghiurile perechilor de raze (CM, CN), (DN, DM) şi (CM, CE), (DN, DF) sînt respectiv egale, deci fasciculele sînt superposabile. Rezultă $\sphericalangle(CE, CF)=$ $=\sphericalangle(DF, DE)$ (G. M. XXI). **1172.** Fie $O'E'F'$ triunghiul complementar al lui OEF (fig. 358); H, G intersecțiile diagonalelor AB și BD cu EF. Se știe că H și G sînt conjugate față de E și F. Fie $M\equiv(AD, OE)$; $N\equiv(AB, OF)$; $P\equiv(AB, F'O')$; $Q\equiv(AD, E'O')$; $R\equiv(BD, F'E')$. Din patrulaterul complet $OMANEF$ se deduce că diagonala MN trece prin G, conjugatul lui H față de E și F, deci M, N, G sînt coliniare. În patrulaterul complet $EFNMOG$ se observă că P, Q, R sînt mijloacelor celor trei diagonale, deci sînt coliniare. Dar P, Q, R sînt intersecțiile laturilor triunghiurilor ABD, $O'E'F'$; rezultă că ele sînt omologice în ordinea $(O'E'F'; ADB)$. Analog pentru celelalte (G. M. XLVI). **1173.** Fie $ABCDEF$ patrulaterul complet, (O_1), (O_2), (O_3) cercurile descrise pe diagonalele $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{EF}$ ca diametre, G, H, O intersecțiile diagonalelor, (O_4) cercul circumscris triunghiului GHO. Diagonalele acestui patrulater împărțindu-se armonic (probl. 1161), rezultă că (O_4) este ortogonal lui (O_1), (O_2), (O_3). Pentru că O_1, O_2, O_3 sînt coliniare (probl. 533 și 1109) și pentru că axele radicale ale cercurilor (O_1), (O_2), (O_3) sînt concurente în O_4, rezultă că cercurile (O_1), (O_2), (O_3) au aceeași axă radicală ce trece prin O_4 și este perpendiculară pe $O_1O_2O_3$ (G. M. XI). **1174.** Fie D, D' punctele unde laturile AB și $A'B'$ întîlnesc dreapta OCC'. Fasciculul $O(AB\gamma D)$ intersectat de secantele AB, $A'B'$ dă $(AB\gamma D)=(A'B'\gamma D')$ și deci $C(AB\gamma D)=C'(A'B'\gamma D')$. Aceste fascicule au o rază comună, deci celelalte se întîlnesc două cîte două în trei puncte coliniare. Reciproc, din $C(AB\gamma D)=C'(A'B'\gamma D')$ deducem $(BA\gamma D)=(B'A'\gamma D')$. **1175.** *Prima metodă.* Se observă că fasciculele $\alpha(C'BA'\beta)$, $\beta(A'C'B'\gamma)$ sînt armonice și au raza $\alpha\beta\gamma$ comună. *A doua metodă.* Triunghiurile $\alpha\beta C$, $A'B'C'$ sînt omologice. **1176.** Fie H punctul de întîlnire a înălțimilor. Se observă că $C'H$ este bisectoarea unghiului $A_1C'A_2$ și deci $(AHA_1A_2)=(BHB_1B_2)=(CHC_1C_2)=-1$. a) și c) rezultă din aceste egalități. b) Triunghiurile ABC, $A_1B_1C_1$ sînt omologice și deci I, K, L sînt coliniare. d) Din patrulaterul complet $B_2C_2B_1C_1IM$ se deduce că $(IMCB) = -1$ și deci AM, BN, CP sînt concurente (G. M. XIII). **1177.** Fie $A'B'C'$, $A''B''C''$ triunghiuri circumscrise triunghiului ABC și omologice

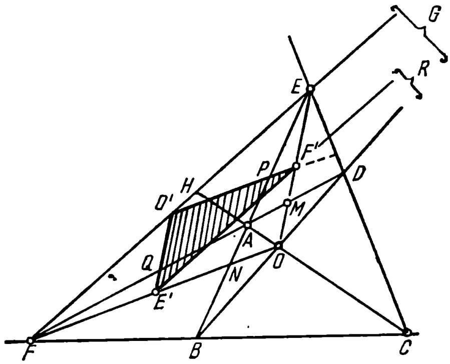

Fig. 358

cu acesta (fig. 359), centrele de omologie fiind M și N (triunghiurile $A'B'C'$, $A''B''C''$ se numesc triunghiuri *antipedale* ale punctelor M și N în raport cu ABC). Avem $(AA_1MA')=(AA_2NA'')=-1$, notînd cu A_1, A_2 punctele de întîlnire a laturii BC cu dreptele AA', AA''. Dreapta $A'A''$ întîlnește deci latura BC într-un punct al dreptei MN. **1178.** Avem $B(ACDE)=$ $=F(ACDE)$. Primul fascicul intersectat de secanta DE și al doilea intersectat de CD dau $(\alpha GDE)=(\gamma CDH)$, unde G este intersecția dreptelor DE și BC, iar H a dreptelor CD și FE. Diviziunile anarmonice egale avînd punctul D comun, dreptele $\alpha\gamma$, CG și EH sînt concurente, adică β se află pe $\alpha\gamma$. **1179.** *Prima metodă.* Fie C', D' diametral opuse lui C, D. Se va observa că $C(DA'C'B)=$ $=D(D'ACB')$ deoarece au unghiuri egale, deci $C(DA'C'B)=$ $=D(CB'D'A)$ care au raza CD comună. *A doua metodă.* Se aplică teorema lui Pascal hexagonului $AA'CBB'D$. **1180.** Fie I centrul cercului înscris (fig. 360); se va observa că $(B''AB_1B')=$ $=\overline{B''B_1}\cdot\overline{AB'}:\overline{B''B'}\cdot\overline{AB_1}=\overline{IB_1}\cdot\overline{AB'}:\overline{BB'}\cdot\overline{AB_1}$; $(C''AC_1C')=$ $=\overline{C''C_1}\cdot\overline{AC'}:\overline{C''C'}\cdot\overline{AC_1}=\overline{IC_1}\cdot\overline{AC'}:\overline{CC'}\cdot\overline{AC_1}$; se va deduce $(B''AB_1B')=(C''AC_1C')$, căci $AB':BB'=AC'\cdot CC'$. **1181.** Se observă că CO este paralelă cu raza PQ a fasciculului $Q(MNPO)$; NQ trece, prin urmare, prin simetricul C' al lui C în raport cu O. **1182.** Punctele D, D', A, B formează o diviziune armonică (problema 1167) și deoarece $MD\perp MD'$, acestea sînt bisectoarele unghiului AMB; D și D' sînt, prin urmare, mijloacele celor două arce determinate în cercul (C) de coarda $\overline{EF}$. **1183.** Se duce $ME \parallel Qx$, care intersectează pe Oy în E. $M(ODEC)$ este armonic. Locul

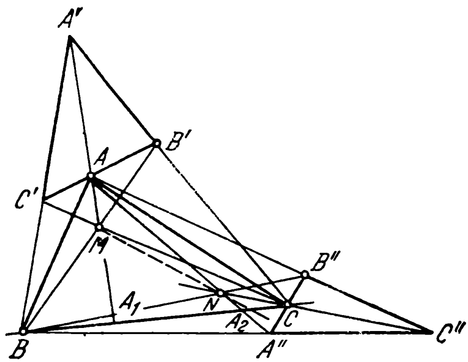

Fig. 359

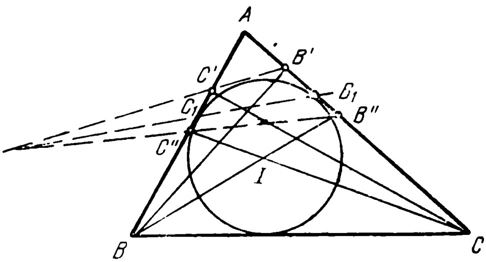

Fig. 360

este o paralelă la Ox. **1184.** Diagonalele AC, BD intersectează pe EF în S, T (fig. 361), conjugate armonic în raport cu E și F; diagonalele BD, EF intersectează pe AC în R, S conjugate în raport cu A și C. Fie I, K, L mijloacele diagonalelor $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{EF}$. Avem $\overline{IM}\cdot\overline{IM'} = \overline{IA}^2 = \overline{IR}\cdot\overline{IS}$, deci $\overline{SM}:\overline{M'R} = \overline{IS}:\overline{IM'}$ și $\overline{RM}:\overline{M'S} = \overline{IR}:\overline{IM'}$ și de aici $\overline{MS}\cdot\overline{M'S}:\overline{MR}\cdot\overline{M'R} = \overline{IS}:\overline{IR}$. Se găsesc alte două egalități plecînd de la N și P. Înmulțindu-le și ținînd seamă că I, K, L sînt coliniare (probl. 1109), rezultă că și M', N', P' sînt coliniare. **1185.** Se va observa că $O(\alpha\beta\gamma P) = O(ABCA')$ ca avînd aceleași unghiuri; $O(ABCA') = A(OBCA') = P(OC'B'A') = P(A'B'C'O)$, deci $O(\alpha\beta\gamma P) = P(A'B'C'O)$. **1186.** Triunghiurile AID, BMC avînd vîrfurile pe trei drepte care se întîlnesc în E,

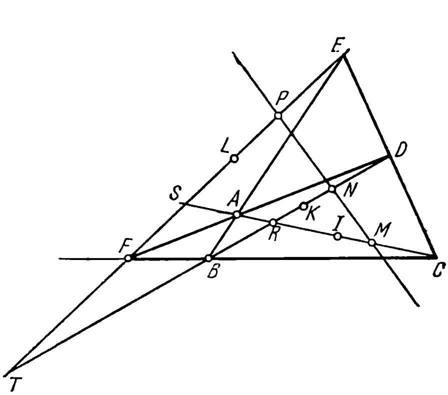

Fig. 361

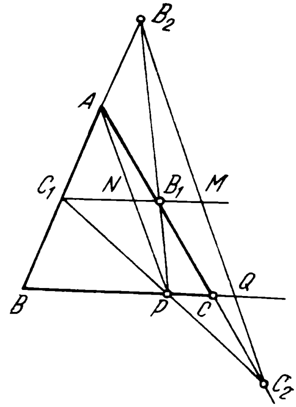

Fig. 362

sînt omologice, deci α, β, F sînt coliniare; analog pentru α', β', F. Din patrulaterul complet $ABIMDE$ se vede că $E\alpha$, ED sînt conjugate armonic în raport cu EI și EB; din $ABNICE$, $E\beta'$ și ED sînt conjugate în raport cu EI și EB. Deci $E\alpha$ și $E\beta'$ sînt confundate. Același lucru pentru $\beta\alpha'E$. **1187.** MB și NA, MC și ND se întîlnesc pe polara lui E în raport cu FA și FB (probl. 1160). **1188.** Patrulaterele complete $ABCDEF$, $AM'IMEF$, $INCN'EF$ au diagonala a treia EF comună și diagonalele AC, AI, IC pe o aceeași dreaptă; diagonalele MM', BD, NN' trec prin conjugatul armonic al punctului comun diagonalelor AC și EF, în raport cu E și F. **1189.** B_1C_1 întîlnește pe B_2C_2 și pe AP în M și N (fig. 362). În patrulaterul complet $PC_1AB_1B_2C_2$ mijloacele diagonalelor $\overline{C_1B_1}$, $\overline{AP}$ și $\overline{C_2B_2}$ sînt coliniare, deci M este mijlocul lui B_2C_2; $P(C_1NB_1M)$ este armonic, deci $B_2C_2 \| PA$. AM intersectează pe BC în R, așa că $\overline{PQ}=\overline{QR}$. Deoarece $A(C_1NB_1M)$ este armonic, rezultă $(BPCR)= -1$, deci $\overline{QC} : \overline{QB} = \overline{PC}^2 : \overline{PB}^2$ (probl. 426). **1190.** Avem $O(A'BB'C) = Q(AB'BC')$, căci aceste fascicule sînt simetrice în raport cu (Δ) (fig. 363).

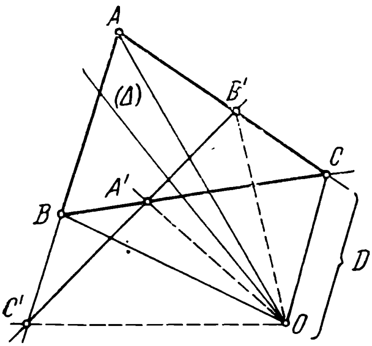

Fig. 363

D fiind punctul de întîlnire a dreptelor OB și AC, avem $O(A'BB'C') = O(AB'DC) = B(AB'DC) = B'(CDB'A)$ sau $O(A'BB'C') = B(CDB'A)$. Aceste două fascicule au raza OB comună. **1191.** Intersectăm fasciculul $C'(A'ABC)$ cu secantele CA', CB'. Obținem $(A'\beta DC) = (B'E\alpha C)$, de unde $B(A'\beta DC) = A(B'E\alpha C)$ și aceste fascicule au raza ABC comună. **1192.** Fie E intersecția dreptelor $B\beta'$ și AC, iar F intersecția dreptelor $O'B$ și AC (fig. 364, a). Fasciculul $B(\beta AEC)$ intersectat de dreptele

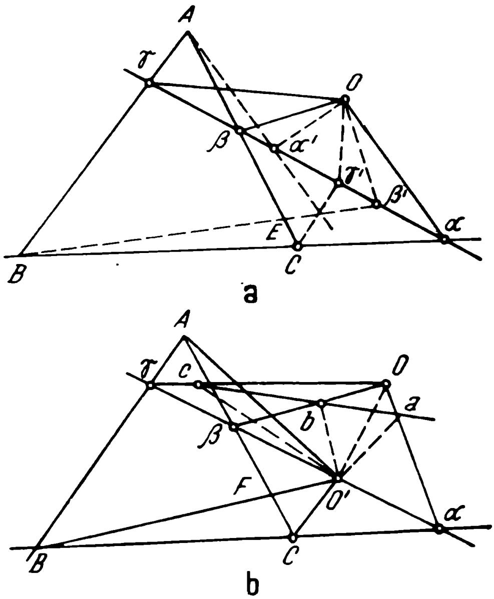

Fig. 364

AC și (Δ) dă $(\beta EAC)=(\beta\gamma\beta'\alpha)=(\beta'\alpha\beta\gamma)=O(\beta'\alpha\beta\gamma) = O(\beta\alpha'\beta'\gamma')$. Dreptele $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$ sînt deci concurente. b) $O'(Oabc) =$

$=O'(\beta AFC)=B(\beta AFC)=(\beta\gamma O'\alpha)=(O'\alpha\beta\gamma)=O(O'\alpha\beta\gamma)$ (fig. 364, *b*). **1193.** Fie D și E punctele de întîlnire a dreptei MC cu AB și $\alpha\beta\gamma$ și D' intersecția dreptelor MC' și $A'B'$. Fasciculul $C(AM\gamma\alpha)$ intersectat de dreptele AB și $\alpha\beta$ dă $(AD\gamma B)=(\beta E\gamma\alpha)=M(\beta E\gamma\alpha)=$ $=(B'\gamma'D'A')$ și deci $M(AD\gamma B)=C'(B'\gamma'D'A')$ și în aceste două fascicule razele omoloage $M\gamma$ și $C'D'$ se confundă. **1194.** (Δ_2), (Δ_3) se întîlnesc în centrul radical al cercurilor (O_2), (O_3), (ω), punct situat pe axa radicală a cercurilor (O_2) și (O_3). Dreptele (Δ_2) și (Δ_3) se întîlnesc pe aceeași axă radicală. Centrul de omologie este centrul radical al cercurilor (O_1), (O_2), (O_3). **1195.** Considerăm două poziții ale triunghiului variabil: $A_1A_2A_3$ și $A_1'A_2'A_3'$ (fig. 365). Dreptele A_3A_1, $A_3'A_1'$ se întîlnesc (probl. 1110 și 1174) într-un punct O_{31} situat pe dreapta $O_{12}O_{23}$. Lăsînd pe $A_1A_2A_3$ fix și făcînd pe $A_1'A_2'A_3'$ să varieze, se vede că $A_3'A_1'$ trece prin același punct O_{31}. **1196.** Fie D, D', E, E', F, F' respectiv intersecțiile perechilor de drepte (Aa, bC), (Bb, cA), (Bc, aA), (Ca, bB), (Cb, cB),

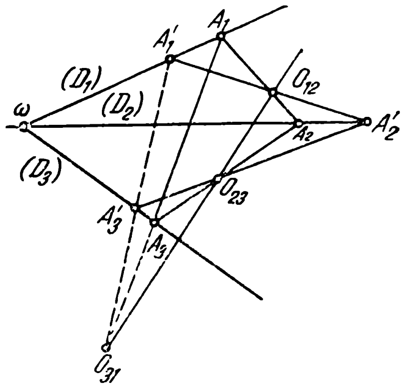

Fig. 365

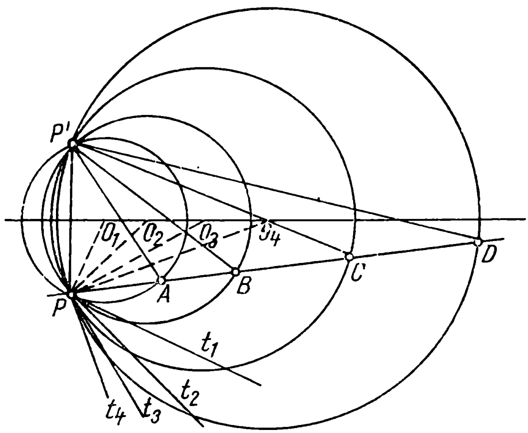

Fig. 366

(Ac, aC). Trebuie să se demonstreze că triunghiurile DEF, $D'E'F'$ sînt omologice. Aplicînd teorema lui Pascal hexagonului $AcBbCa$, se deduce că dreptele DE și $D'E'$, EF și $E'F'$, FD și $F'D'$ se întîlnesc în trei puncte coliniare. **1197.** Simetricul P' al lui P (fig. 366) față de linia centrelor aparține de asemenea celor patru cercuri. Ducem tangentele Pt_1, Pt_2, Pt_3, Pt_4 cercurilor date. Fasciculele $P'(ABCD)$ și $P(t_1t_2t_3t_4)$ au același raport anarmonic deoarece unghiurile razelor omoloage sînt egale. Într-adevăr, $\sphericalangle PP'A = \sphericalangle t_1PA$, $\sphericalangle PP'B = \sphericalangle t_2PB$, de unde $\sphericalangle AP'B = \sphericalangle t_2Pt_1$ etc. Însă al doilea fascicul este fix, deci are raport anarmonic constant. Se va observa în plus că $P(t_1t_2t_3t_4) = P(O_1O_2O_3O_4)$, deoarece unul se obține din celălalt printr-o rotire de $90°$. **1198.** Fie P' simetricul lui P față de linia centrelor; el aparține celor patru sfere. Planul determinat de PP' și $PABCD$ intersectează sferele după cercurile $PP'A$, $PP'B$, $PP'C$, $PP'D$ de centre ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, proiecțiile lui O_1, O_2, O_3, O_4 pe aceste plan. După problema precedentă avem $P'(ABCD) = P(\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4)$, dar $(\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4) = (O_1O_2O_3O_4)$, deci $P'(ABCD) = P(O_1O_2O_3O_4) = \text{const.}$ **1199.** Fie E, F intersecțiile lui $B\alpha$, $A\beta$ cu muchia CD (fig. 367). Planele $(\Delta)A$, $(\Delta)B$, $(\Delta)C$, $(\Delta)D$ intersectează muchia CD respectiv în F, E, C, D, deci $(\Delta)(ABCD) = (FECD)$. Pe de altă parte, raportul anarmonic $(\alpha\beta\gamma\delta)$ este egal cu acela al planelor $AB\alpha$, $AB\beta$, $AB\gamma$, $AB\delta$, iar acestea intersectează dreapta CD respectiv în E, F, D, C. Deci $(\alpha\beta\gamma\delta) = (EFDC) = (FECD)$, de unde $(\Delta)(ABCD) = (\alpha\beta\gamma\delta)$.

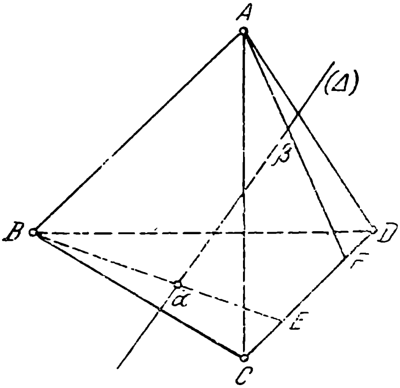

Fig. 367

XXV. **1200.** H fiind ortocentrul triunghiului ABC și A', B', C' picioarele înălțimilor, avem $\overline{HA} \cdot \overline{HA'} = \overline{HB} \cdot \overline{HB'} = \overline{HC} \cdot \overline{HC'}$ (problema 677) și aceste produse sînt pozitive. Cercul cu centrul în H și cu pătratul razei egal cu valoarea comună a acestor produse. **1201.** Fie (Δ) polara lui A, B un punct pe (Δ), C conjugatul lui B în raport cu O, α și β mijloacele laturilor $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ (fig. 368). Triunghiurile ABO, $\alpha\beta\omega$ au laturile paralele; ele sînt omotetice, raportul de omotetie fiind -2. Deci $\overline{2\alpha\omega} = \overline{OA}$. Fie A' punctul de întîlnire a dreptelor (Δ) și OA și să ducem $\omega E \perp OA$. Avem $\overline{\alpha\omega} = \overline{A'E}$ și deci $2\overline{A'E} = \overline{OA}$. Punctul E este fix și locul lui ω este o dreaptă $(D) \perp OA$. **1202.** Tangenta în A și AM întîlnesc pe BC în E și F; $A(EBFC)$ este armonic, deci diviziunea $(EBFC)$ este armonică, prin urmare, AF este polara lui E și trece prin P. **1203.** $M'N'$ și tangenta în O' se întîlnesc în I (fig. 369); se duce coarda $O'O''\perp AB$, care intersectează pe $M'N'$ în C. Se va observa că fasciculul $P(O''M'O'N')$ este armonic, căci $AB \| PO''$ dă $\overline{MO}=\overline{ON}$. Fasciculul $O'(CM'IN')$ este și el armonic, deoarece are unghiurile

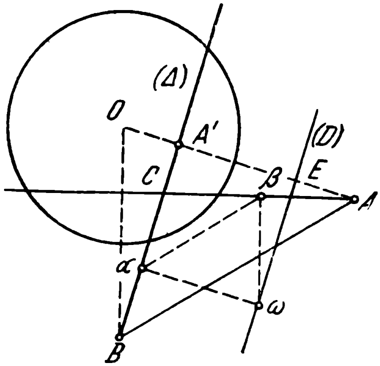

Fig. 368

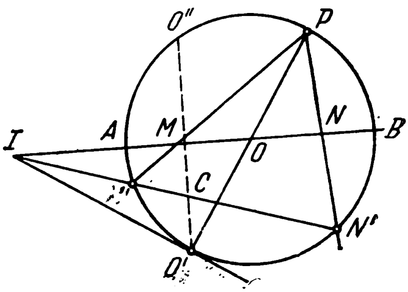

Fig. 369

sale egale cu ale celui precedent. Polara lui I este deci $O'CO''$ și I se găsește pe diametrul $AB\perp O'O''$. **1204.** Fie AN simediana, AT tangenta în A (T pe BC) la cercul (O) circumscris lui ABC, P intersecția tangentelor în B și C. Mediana împarte în părți egale paralelele la BC, iar simediana AN antiparalelele la BC mărginite la AB, AC. O antiparalelă este perpendiculară pe OA, deci paralelă cu AT. Deoarece o paralelă la AT este împărțită în părți egale de AB, AN, AC, fasciculul $A(TNBC)$ este armonic și polara lui T trece prin polul P al dreptei BC. **1205.** Se orbervă că AA', BB', CC' se intersectează într-un punct, deci polii lor sînt coliniari. **1206.** Fie A' piciorul bisectoarei date, A'' piciorul celeilalte bisectoare; el se va găsi pe polara lui A' în raport cu cercul dat și pe perpendiculara în A pe AA'. $A'A''$ determină pe cerc vîrfurile B și C (G.M.VI). **1207.** Fie A' și A'' picioarele bisectoarelor ce pleacă

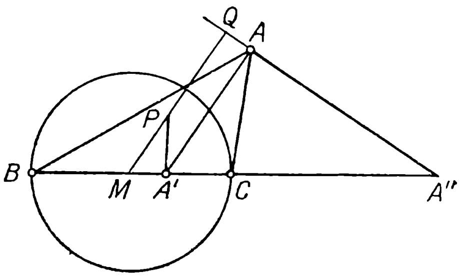

Fig. 370

din A și P polul dreptei AA'' față de cercul cu centrul M și raza MB (fig. 370). Se va observa că $\sphericalangle PA'M = 90°$, deoarece dacă $Q=(MP, AA'')$, atunci $\overline{MP}\cdot\overline{MQ}=\overline{MA'}\cdot\overline{MA''}$ și $MP\perp AA''$. A' este intersecția cercului descris pe $\overline{PM}$ ca diametru cu AA' (G.M.IX). **1208.** Fie M și N punctele date pe AB și CD, iar P intersecția dreptelor AD, BC; PN intersectează pe AB în M' și polara lui P în raport cu cercul, în Q. Se va observa că M' este cunoscut ca fiind conjugatul armonic al lui N în raport cu PQ (G.M.VIII). **1209.** Fie A'' mijlocul lui $\overline{AH}$, A_1 proiecția lui A pe $\overline{BC}$ și A' mijlocul lui $\overline{BC}$ (fig. 371). Se știe că $A'A'' \perp AT_a$ și deci A'' este ortocentrul triunghiului $AA'T_a$. Rezultă că polara lui A în raport cu cercul (O_9) trece prin T_a. Dreapta $A\alpha$ este polara lui T_a în raport cu (O_9) și cum T_a, T_b, T_c sînt coliniare (probl. 1091), $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ sînt concurente (G.M.XVI). **1210.** Fie A' proiecția lui M pe BC, B', C' analogele lui A'. Deoarece A', B', C' sînt coliniare (probl. 257), rezultă că polarele lor $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ concură în polul dreptei lui Simson în raport cu cercul (O). Dacă două din vîrfuri sînt fixe, dreapta lui Simson a lui M trece printr-un punct fix și deci locul lui S este o dreaptă(G.M.XXI). **1211.** $M'N'$ intersectează pe AB în D și pe AMN în I (fig. 372). Polara lui B în raport cu cercul dat este aceeași cu polara lui B în raport cu unghiul MIM'; ea intersectează pe AB în E. D este conju-

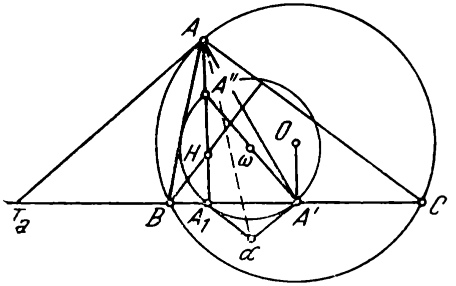

Fig. 371

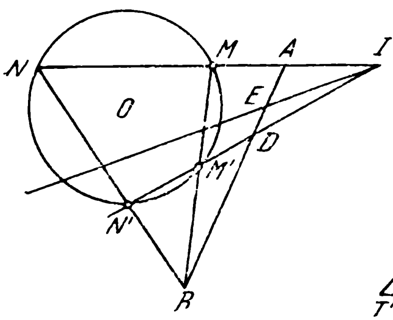

Fig. 372

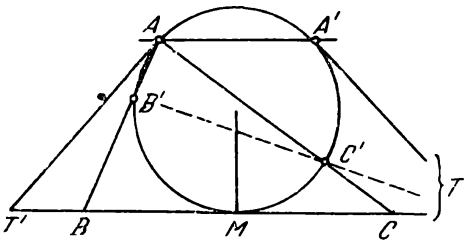

Fig. 373

gatul armonic al lui A în raport cu E și B, deci este fix. **1212.** Ducem tangenta TA' cercului $AB'C'$ și fie I punctul de la infinit pe dreapta BC (fig. 373). Avem $A(BCMI) = -1$. Deoarece coarda $B'C'$ a cercului $AB'C'$ trece prin polul T al coardei $A'M$, punctele B', C', M, A' formează un grup armonic pe cercul $AB'C'$ și proiectîndu-le din punctul A pe dreapta BC, avem $A(BCMA')=-1$. Rezultă că dreptele AI, AA' coincid și deci $AA' \| BC$, iar $AA'TT'$ este un trapez isoscel. **1213.** Fie ABC, $A'B'C'$ cele două triunghiuri, iar α, β, γ, a, b, respectiv punctele de întîlnire a dreptelor $(BC, B'C')$, $(CA, C'A')$, $(AB, A'B')$, $(AB, C'A')$, $(AB,$

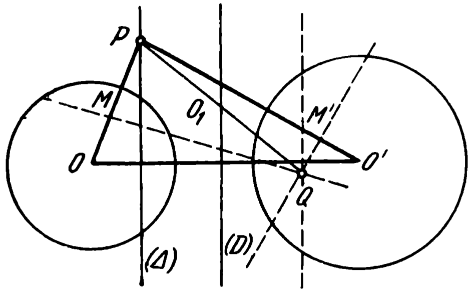

Fig. 374

$B'C')$. Punctele α, b, C', B' au ca polare dreptele AA', AC', AB, AC. Deci $(\alpha bC'A') = A(A'C'BC)$ sau intersectînd fasciculul cu $A'C'$, $(\alpha bC'B')=(\beta aC'A')$. Dreptele $\alpha\beta$, ab, $A'B'$ sînt concurente și astfel α, β, γ sînt coliniare. **1214.** OP, $O'P$ se întîlnesc cu polarele lui P în raport cu (O), (O') în punctele M, M' și avem $\overline{OM}\cdot\overline{OP}=R^2$; $\overline{O'M'}\cdot\overline{O'P}=R'^2$ (fig. 374). Cercul de diametru $\overline{PQ}$ este ortogonal cu (O) și (O'). Centrul său O_1 descrie axa radicală (D) a cercurilor (O) și (O'). Deci Q descrie o dreaptă simetrică cu (Δ) în raport cu (D). **1215.** Fie M un punct al locului, M' punctul de întîlnire a polarelor. Cercul descris pe $\overline{MM'}$ ca diametru este ortogonal celor trei cercuri, deci este fix. Acesta este locul punctelor M și M'. **1216.** Fie P punctul comun al tangentelor în A și B la cerc (fig. 375). Fasciculele $A(PBCD)$, $B(PACD)$ sînt armonice și au o rază comună. Se deduce că P se află pe dreapta CD. **1217.** Fie Q polul dreptei CD (fig. 375). Cercul cu centrul în Q și care trece prin C, D este ortogonal cu cercul în care este înscris patrulaterul și întîlnește pe AB în E și F, conjugate armonic cu punctele A, B. Cercul (Q) este locul geometric (probl. 452) al punctelor M, astfel ca $\overline{MA}:\overline{MB}=\overline{EA}:\overline{EB}=\overline{FA}:\overline{FB}$. Deci $\overline{CA}:\overline{CB}=\overline{DA}:\overline{DB}$. **1218.** Va trebui să dovedim că CD este simediană (probl. 583) în triunghiurile CAB, DAB, iar AB este simediană în triunghiurile ACD, BCD (fig. 375). Fie P polul coardei AB față de cercul circumscris. Diametrul cercului ce trece prin P întîlnește cercul în E,

F, iar pe AB în I. $\sphericalangle ACF=\sphericalangle FCB$ şi punctele I, P sînt conjugate armonic cu E, F. Fascuculul $C(EFIP)$ este armonic şi cum $CE \perp CF$, aceste drepte sînt bisectoarele unghiului ICP. Deci $\sphericalangle ICF = \sphericalangle FCP$, care arată că CD este simediană în triunghiul CAB. **1219.** a) $\triangle CAI \sim \triangle CDB$ şi $\triangle ADI \sim \triangle CDB$ (fig. 375). Deci $\triangle ACI \sim \triangle DAI$ şi $\sphericalangle AIC=\sphericalangle AID$. b) Din triunghiurile asemenea ACI, DAI deducem $\overline{IA}^2=\overline{IC}\cdot\overline{ID}$. c) Din $\sphericalangle CIB=\sphericalangle CAD$ şi $\sphericalangle DIB=\sphericalangle CAD$ rezultă $\sphericalangle CID=2\sphericalangle CAD$. d) H fiind punctul comun diagonalelor AB, CD, IH este bisectoarea unghiului CID şi deci $\overline{IC} : \overline{ID}=\overline{HC} : \overline{HD}$. e) Dreptele CI şi AJ întîlnesc din nou cercul în D' şi B'. Avem $\overline{ID} = \overline{ID'}$, $\overline{JB} = \overline{JB'}$ şi $\overline{AB'}=\overline{CD'}$.

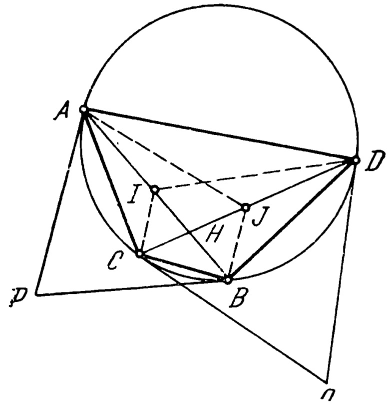

Fig. 375

1220. Fie $A_1B_1C_1$ noua poziţie a lui $A'B'C'$ după translaţia $\overline{O'O}$ (fig. 376). Însemnăm cu (a, b, c), (a_1, b_1, c_1) respectiv proiecţiile punctului O pe laturile triunghiurilor ABC, $A_1B_1C_1$. Patrulaterele aA_1b_1B, b_1BcC_1, cC_1a_1A,

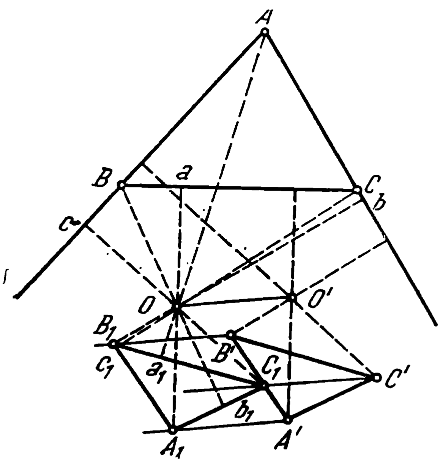

Fig. 376

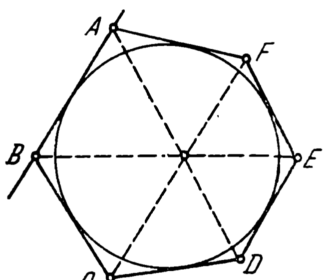

Fig. 377

a_1AbB_1, bB_1c_1C, c_1CaA_1 sînt inscriptibile, deoarece au cîte două unghiuri opuse drepte. Rezultă $\overline{Oa}\cdot\overline{OA_1}=\overline{Ob_1}\cdot\overline{OB}=\overline{Oc}\cdot\overline{OC_1}=\overline{Oa_1}\cdot\overline{OA}=\overline{Ob}\cdot\overline{OB_1}=\overline{Oc_1}\cdot\overline{OC}=k^2$; acestea arată că A, B, C şi

A_1, B_1, C_1 sînt polii laturilor B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1; BC, CA, AB față de cercul (O, k), adică ABC, $A_1B_1C_1$ sînt polar reciproce față de acest cerc (G.M. XXII). **1221.** Fie I punctul de întîlnire a dreptelor OA și BC. Avem $O(BIC\alpha)=O(\beta\alpha\gamma I)=O(\gamma I\beta\alpha)$ și deci $A(BIC\alpha)=O(\gamma I\beta\alpha)$. Aceste fascicule au razele AI, OI confundate. *Altă soluție.* Se consideră un triunghi $A_1B_1C_1$. Înălțimile acestui triunghi A_1A_1', $B_1'B_1'$, $C_1C'_1$ sînt concurente. Se transformă figura prin polare reciproce, luînd un cerc director cu centrul în O. **1222.** Se transformă prin polare reciproce teorema lui Pascal (fig. 377). **1223.** Caz particular al teoremei lui Brianchon. **1224.** Fie a, b, c punctele de contact ale laturilor lui ABC cu cercul (O), M punctul de tangență a dreptei T cu cercul, α, β, γ proiecțiile lui M pe bc, ca, ab. Punctele α, β, γ sînt coliniare (probl. 257). Transformînd această proprietate prin polare reciproce față de cercul director (O), obținem teorema cerută (G.M. XXIII). **1225.** Transformata prin polare reciproce a teoremei din probl. 1191 (fig. 378). **1226.** Se

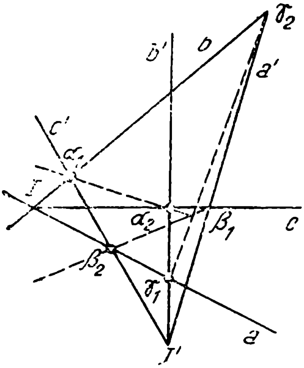

Fig. 378

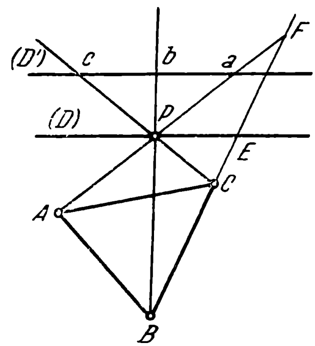

Fig. 379

deduce din problema precedentă cînd punctele I, I' sînt la infinit respectiv în direcțiile (D), (D'). **1227.** Fie (Δ), (Δ') două din cele cinci drepte; acestea sînt întîlnite în A, A', B, B', C, C' de celelalte trei. Vom considera patrulaterele complete $(\Delta, \Delta', BB', CC')$; $(\Delta, \Delta', CC', AA')$; $(\Delta, \Delta', AA', BB')$. Fie α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2 respectiv mijloacele segmentelor $\overline{BC'}$, $\overline{CB'}$, $\overline{CA'}$, $\overline{AC'}$, $\overline{AB'}$, $\overline{BA'}$. Din problema precedentă deducem că dreptele $\alpha_1\alpha_2$, $\beta_1\beta_2$, $\gamma_1\gamma_2$ se întîlnesc într-un punct. **1228.** BC întîlnește pe (D) în E (fig. 379). Fie F conjugatul armonic al lui C în raport cu E și B; AF intersectează pe (D) în punctul căutat P. **1229.** Se va observa că dreptele MP și Mx sînt conjugate armonic în raport cu tangentele MA, MB. Se va deduce de aici că MP trece prin polul dreptei xx' în raport cu cercul (O). **1230.** Se vede imediat că FG este polara lui E în raport cu unghiul AFB (fig. 380) (probl. 1160), deci și în raport cu cercul și că EG este polara lui F. Punctul G, intersecția polarelor lui E și F, este polul lui EF. **1231.** P și B sînt conjugate armonice în raport cu punctele de intersecție a diametrului PO' cu cercul (O'). Polara lui P în raport cu (O') trece deci prin B și deoarece $PO' \perp CD$, CD este polara lui P. *Altă metodă.* Se transformă figura prin inversiune în raport cu P ca pol. Problema se reduce la următoarea: se dă o dreaptă (Δ) și un punct P; fie A proiecția lui P pe (Δ). Dintr-un punct B al dreptei (Δ) ca centru se descrie un cerc (O'), care este întîlnit de cercul PAB în punctele C și D. Să se demonstreze că PC și PD sînt tangente cercului (O'). Însă aceasta este evident. **1232.** Fie R intersecția dreptei AB cu media-

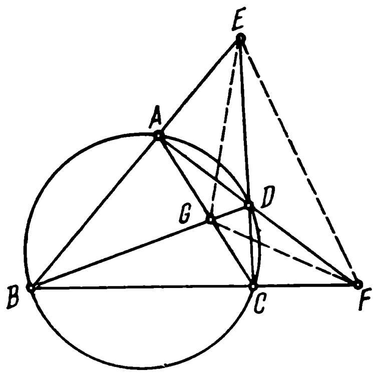

Fig. 380

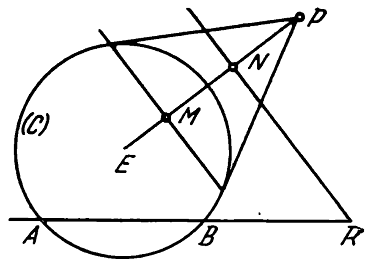

Fig. 381

toarea lui MP (fig. 381). Cercul cu centrul R și raza RM determină punctele P și M conjugate armonic față de (C), pe diametrul EP, deci cele două cercuri sînt ortogonale. Dar cercurile care intersectează ortogonal fasciculul de cercuri (C) au centrele pe axa radicală AB a cercurilor (C) și formează un fascicul punctual, deci numai unul trece prin P, adică R este fix. (G.M.XXIX). A se vedea și alte soluții G.M. XXXI). **1233.** a) Fie E, F, G, H proiecțiile lui A respectiv pe BM, CM, BN, CN (fig. 382); P, Q proiecțiile lui A pe MD și ND; A' piciorul bisectoarei din A a triunghiului ABC. Avem $M(BCA'D) = N(BCA'D) = -1 = A(EFDP) =$ $= A(GHDQ)$, deoarece ultimele două fascicule au razele perpendiculare pe razele omoloage ale primelor două. Polul dreptei AP față de cercul $AEMF$ se află pe AD și se obține ducînd din centrul O perpendiculara pe AP, deci paralela la MPD. Rezultă că polul căutat este mijlocul I al lui $\overline{AD}$. La fel se arată că polul dreptei AQ față de cercul $AGNH$ este tot I. Deducem $\overline{IE} \cdot \overline{IF} = \overline{IG} \cdot \overline{IH} = \overline{IA}^2$, deci punctele E, F, G, H sînt conciclice și c) cercurile (Γ) sînt ortogonale cercului descris pe $\overline{AD}$ ca diametru. b) Fie ω centrul cercului (Γ). Polara lui A față de ω este perpendiculară pe $A\omega$ și intersectează pe $A\omega$ în L. Avem $\overline{\omega L} \cdot \overline{\omega A} = \rho^2$, ρ fiind raza cercului (Γ) și deoarece (Γ) este ortogonal cercului (I) de diametru $\overline{AD}$, $\overline{\omega L} \cdot \overline{\omega A}$ este puterea

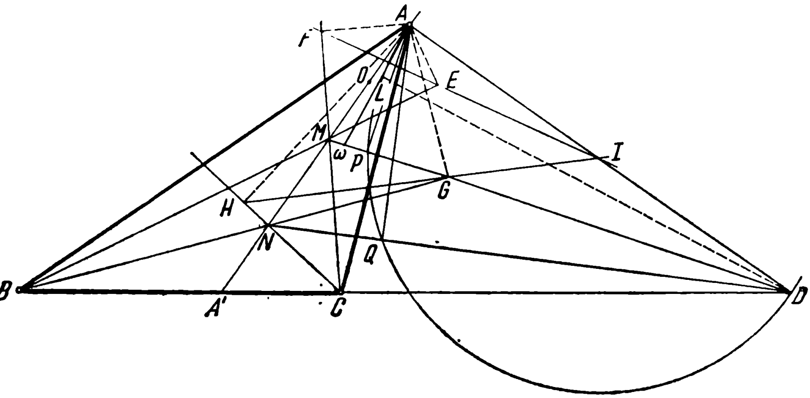

Fig. 382

lui ω față de cercul (I), deci L se află pe cercul I. Atunci perpendiculara prin L pe ωA trece prin D (G. M. LIII). **1234.** Fie N centrul sferei circumscrise conului considerat și S vîrful conului circumscris sferei de-a lungul cercului (C). Se observă că S este polul planului (π) și că N este mijlocul lui $\overline{OS}$. Rezultă că dacă M este fix, locul lui N este un plan paralel cu planul polar al lui M. Cînd M descrie planul (P), S descrie tot spațiul și N la fel. Se va observa însă că N nu poate fi în interiorul sferei (G.M. XIV). **1235.** a) M fiind un punct pe cercul (A), iar MT tangenta în acest punct, (P) este planul determinat de punctul B și dreapta MT. b) Fie α și β polii planelor cercurilor (A) și (C). Conurile cu vîrfurile în α, γ și avînd ca baze respectiv (A) și (C) sînt circumscrise sferei în toate punctele acestor cercuri. Punctele α, M, γ sînt coliniare. Punctul γ se găsește în planul polar (π) al punctului B în raport cu sfera pe conul cu vîrful în α și avînd cercul (A) ca bază. Locul lui γ este deci intersecția lor: o conică. **1236.** Se intersectează sfera cu un plan (R) dus prin centru și perpendicular pe dreapta (D), intersecția planelor (Q), (Q') în care se găsesc cercurile (A), (A'). Planul (R) intersectează sfera după un cerc mare (Γ) și planele (Q), (Q') după diametrele ab, $a'b'$ ale cercurilor (A), (A'). Fie S intersecția dreptelor aa' și bb', iar S' ntersecția dreptelor *ab* și *a'b'*. Cercurile (A), (A') se găsesc pe două conuri, unul cu vîrful în S, iar altul cu vîrful în S'. Planele (P) formează două serii, unele sînt tangente conului (S, A), altele sînt tangente conului (S', A'). Din problema precedentă se deduce că locul căutat se compune din două conice.

XXVI. **1237.** Dacă plecînd din A și B, M și N sînt luate pe cerc în sensuri contrare, locul este evident mediatoarea lui $\overline{AB}$. Dacă sînt luate în același sens, fie P punctul comun dreptelor AM, NB, Q al dreptelor AB și MN. PQ trece prin O iar P și Q sînt conjugate armonic în raport cu punctele de intersecție a dreptei PQ cu cercul, deci $\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = R^2$, R fiind raza cercului (O). Locul lui P este deci un cerc care trece prin O și care se obține prin inversiune din dreapta AB (probl. 196). **1238.** A', B', C' picioarele înălțimilor, A'', B'', C'' proiecțiile lui H pe MA, MB, MC. Din patrulaterul inscriptibil $AA''A'A_1$ și cele analoge se deduce $\overline{HA''} \cdot \overline{HA_1} = \overline{HA} \cdot \overline{HA'} = \overline{HB} \cdot \overline{HB'} = \overline{HB''} \cdot \overline{HB_1} = \overline{HC} \cdot \overline{HC'} = \overline{HC''} \cdot \overline{HC_1}$ (probl. 677); A'', B'', C'' se găsesc pe cercul descris pe $\overline{MH}$ ca diametru, deci A_1, B_1, C_1 se găsesc pe o dreaptă obținută din acest cerc prin inversiune în raport cu H ca pol. **1239.** Se deduce printr-o inversiune în raport cu cercul conjugat (probl. 1200), observînd că proiecțiile ortocentrului pe mediane aparțin unui cerc avînd ca diametru segmentul ce unește ortocentrul cu centrul de greutate. **1240.** ω este unul din centrele de asemănare. Fie A și A' punctele de contact ale cercurilor (O) și (O') cu una din tangentele comune duse prin ω, B și B' punctele unde aceeași tangentă întîlnește axa radicală, de o parte, și cercul descris pe segmentul centrelor de asemănare, de altă parte. Trebuie să se demonstreze că $\overline{\omega B} \cdot \overline{\omega B'} = \overline{\omega A} \cdot \overline{\omega A'}$, ceea ce se face observînd că centrele O, O' și centrele de asemănare formează o diviziune armonică, deci și $\omega AB'A'$ este o diviziune armonică, $\overline{\omega B'} = 2\overline{\omega A} \cdot \overline{\omega A'} : (\overline{\omega A} + \overline{\omega A'})$, însă B este la mijlocul lui AA'. **1241.** Fie patrulaterul convex $ABCD$ înscris în cercul (O). Se face o inversiune luînd ca pol punctul A și ca modul un număr pozitiv arbitrar λ. Cercul se transformă într-o dreaptă. Fie b, c, d inversele punctelor B, C, D. Avem $\overline{bd} = \overline{bc} + \overline{cd}$ și cum $\overline{bd} = \lambda \cdot \overline{BD} : \overline{AB} \cdot \overline{AD}$, $\overline{bc} = \lambda \cdot \overline{BC} : \overline{AB} \cdot \overline{AC}$, $\overline{cd} = \lambda \cdot \overline{CD} : \overline{AC} \cdot \overline{AD}$, se deduce $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}$ (prima teoremă a lui Ptolomeu). Aplicăm relația lui Stewart punctelor coliniare b, c, d și punctului A. Avem $\overline{Ab^2} \cdot \overline{cd} + \overline{Ac^2} \cdot \overline{db} + \overline{Ad^2} \cdot \overline{bc} + \overline{cd} \cdot \overline{db} \cdot \overline{bc} = 0$, unde $\overline{cd} = cd$, $\overline{db} = -db$, $\overline{bc} = bc$, $\overline{Ab^2} = \lambda^2 : \overline{AB^2}$, $\overline{Ac^2} = \lambda^2 : \overline{AC^2}$, $\overline{Ad^2} = \lambda^2 : \overline{AD^2}$. Făcînd înlocuirile de mai sus, obținem $\overline{AC} : \overline{BD} = (\overline{AB} \cdot \overline{AD} + \overline{CB} \cdot \overline{CD}) : (\overline{BA} \cdot \overline{BC} + \overline{DA} \cdot \overline{DC})$ (a doua teoremă a lui Ptolomeu).

1242. Se face o inversiune luînd ca pol punctul O. Problema se reduce la demonstrarea proprietății: dacă perpendicularele coborîte dintr-un punct O pe laturile triunghiului $a'b'c'$ le întîlnesc în trei puncte coliniare, atunci O aparține cercului $a'b'c'$ (probl. 257). **1243.** Se transformă figura printr-o inversiune, luînd ca pol punctul O iar ca modul $\overline{OA}^2$. Cele trei cercuri se transformă în înălțimile triunghiului ABC. I este inversul ortocentrului H. Locul lui H este cercul lui Carnot (C) (probl. 141). Locul lui I va fi inversul lui (C). **1244.** Se transformă figura prin inversiune, luînd pe O ca pol și pătratul razei cercului (O) ca modul; a, b, c, d, e, f fiind mijloacele laturilor lui $ABCDEF$, inversele lor formează un hexagon $a'b'c'd'e'f'$ circumscris cercului (O). Inversele celor trei cercuri sînt dreptele $a'd'$, $b'e'$, $c'f'$, care sînt concurente, după teorema lui Brianchon (probl. 1222). **1245.** Transformăm figura prin inversiune luînd pe O ca pol; cercurile date se transformă în drepte formînd un triunghi $A'B'C'$ ale cărui vîrfuri sînt inversele punctelor A, B, C. Perpendicularele duse din O pe coardele OA, OB, OC se transformă în ele însele; ele sînt perpendiculare pe OA', OB', OC' și se întîlnesc respectiv pe laturile $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$, în punctele α', β', γ' coliniare (probl. 1221). **1246.** Transformăm figura prin inversiune luînd pe A ca pol. Cercurile (O') și (O'') se transformă în dreptele (D'), (D''), iar cercurile (O), (ω) în cercurile (O_1), (ω_1), tangente la (D') și (D''). Cercurile (O_1), (ω_1) se întîlnesc în M_1, N_1 și dreapta M_1N_1 este transformata cercului AMN. Locul căutat este o dreaptă (Δ) perpendiculară pe M_1N_1 și paralelă cu bisectoarea unghiului format de dreptele (D'), (D''). **1247.** Se știe

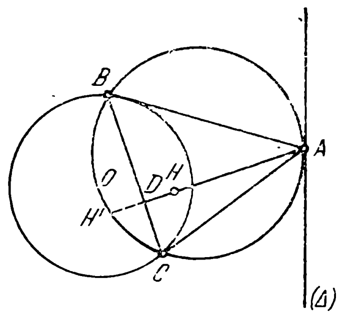

Fig. 383

că ortocentrul unui triunghi și punctul în care o înălțime intersectează cercul circumscris sînt simetrice în raport cu piciorul înălțimii (probl. 231). H' fiind intersecția lui AD cu cercul ABC (fig. 383), atunci $\overline{DH'} = \overline{DH}$. Puterea lui D față de cercul ABC dă $\overline{DH'} \cdot \overline{DA} = \overline{DH} \cdot \overline{DA} = \overline{DB} \cdot \overline{DC} =$ puterea lui D față de cercul $(O) =$ const. $\overline{DH} \cdot \overline{DA} =$ const arată că H descrie figura inversă dreptei (Δ), deci un cerc ce trece prin D și al cărui diametru, dus prin acest punct, este perpendicular pe (Δ) (R.M.F.1. 1954). **1248.** Se transformă figura prin inversiune luînd I ca pol și $\overline{IA} \cdot \overline{II_a} = \overline{IB} \cdot \overline{II_b} = \overline{IC} \cdot \overline{I_cI}$ (probl. 677) ca putere de inversiune. Cercurile II_bI_c și

IBC devin dreptele CB și I_bI_c. Cercul IMN devine dreapta DE care unește mijloacele lui $\overline{BC}$ și $\overline{I_bI_c}$. În patrulaterul complet $IBI_aCI_bI_c$, DE trece prin mijlocul ω al diagonalei $\overline{II_a}$. Cercul IMN trece prin punctele fixe I și P. **1249.** Fie I, I_a, I_b, I_c centrele cercului înscris și cercurilor exînscrise. II_a întîlnește latura BC în A'. Fie A_1, α_1, α' proiecțiile lui A, I, I_a pe CB, M mijlocul acestei laturi. Diviziunea $(AIA'I_a)$ este armonică, deci și $(A_1\alpha A'\alpha')$ este armonică. Se va duce prin A' o a doua tangentă comună cercurilor (I) și (I_a) care le atinge în D și D'. MD întîlnește pe I în E, MD' pe I_a în E'. Deci $\overline{MA'}\cdot\overline{MA_1}=\overline{M\alpha^2}=\overline{MD}\cdot\overline{ME}=\overline{M\alpha'^2}$. Se face inversiunea în raport cu M ca pol și cu $\overline{M\alpha^2}$ ca putere. Cercul celor nouă puncte devine o dreaptă care trece prin A' și este paralelă cu tangenta în M la cercul celor nouă puncte sau tangenta în A la cercul circumscris, adică este tocmai $DA'D'$. Cercul celor nouă puncte atinge deci cercul (I) în E și cercul (I_a) în E'. Punctele de tangență se numesc *punctele lui Feuerbach.* **1250.** Se transformă prin inversiune, luînd ca pol I și ca putere $\overline{IA}\cdot\overline{II_a}=\overline{IB}\cdot\overline{II_b}=$ $=\overline{IC}\cdot\overline{II_c}$. Problema se reduce la precedenta. **1251.** Inversiunea, al cărei centru este centrul radical P al cercurilor exînscrise și a cărei putere este aceea a punctului P în raport cu aceste cercuri, le transformă pe acestea în ele însele, înlocuiește cercul celor nouă puncte (O_9) prin cercul (Γ), laturile triunghiului prin cercurile (ω_a), (ω_b), (ω_c) și cercul înscris (I) prin cercul (Γ'). Cercurile (O_9), (I) fiind tangente (probl. 1249), și cercurile (Γ), (Γ') vor fi tangente. **1252.** Se observă că $\sphericalangle BPD=\sphericalangle BAC=$const. Transformăm figura prin inversiune luînd pe P ca pol. AB se transformă într-un cerc fix care intersectează pe PB și PD în B' și D'. Pentru că dreapta $B'D'$ este tangentă la un cerc fix, cercul BDP este tangent la un cerc fix (G. M. IX). **1253.** a) Notăm punctele figurii transformate cu accente. Dreptele care trec prin L se transformă în ele înseși, cercurile în drepte, iar laturile patrulaterului în cercuri ce trec prin L. Cercurile ABL, DCL (fig. 384, *a*) devin dreptele $A'B'$, $C'D'$ și se intersectează în M' (fig. 384, *b*). Cercurile BCL, ADL devin dreptele $B'C'$, $A'D'$ și se intersectează în N'. b) În patrulaterul complet $A'B'C'D'M'N'$, dreptele LM', LN' sînt conjugate față de $A'C'$, $B'D'$, deci LM, LN sînt conjugate față de diagonalele lui $ABCD$. c) Din faptul că M' și R' sînt conjugate față de A' și B', rezultă că $\frac{\overline{M'A'}}{\overline{M'B'}}=\frac{\overline{R'A'}}{\overline{R'B'}}$, adică $\overline{M'A'}\cdot\overline{R'B'}=\overline{M'B'}\cdot\overline{R'A'}$. Însă $\overline{M'A'}=\overline{MA}\dfrac{k}{\overline{LM}\,\overline{LA}}$ etc. Înlocuind, găsim $\overline{MA}\cdot\overline{RB}=$

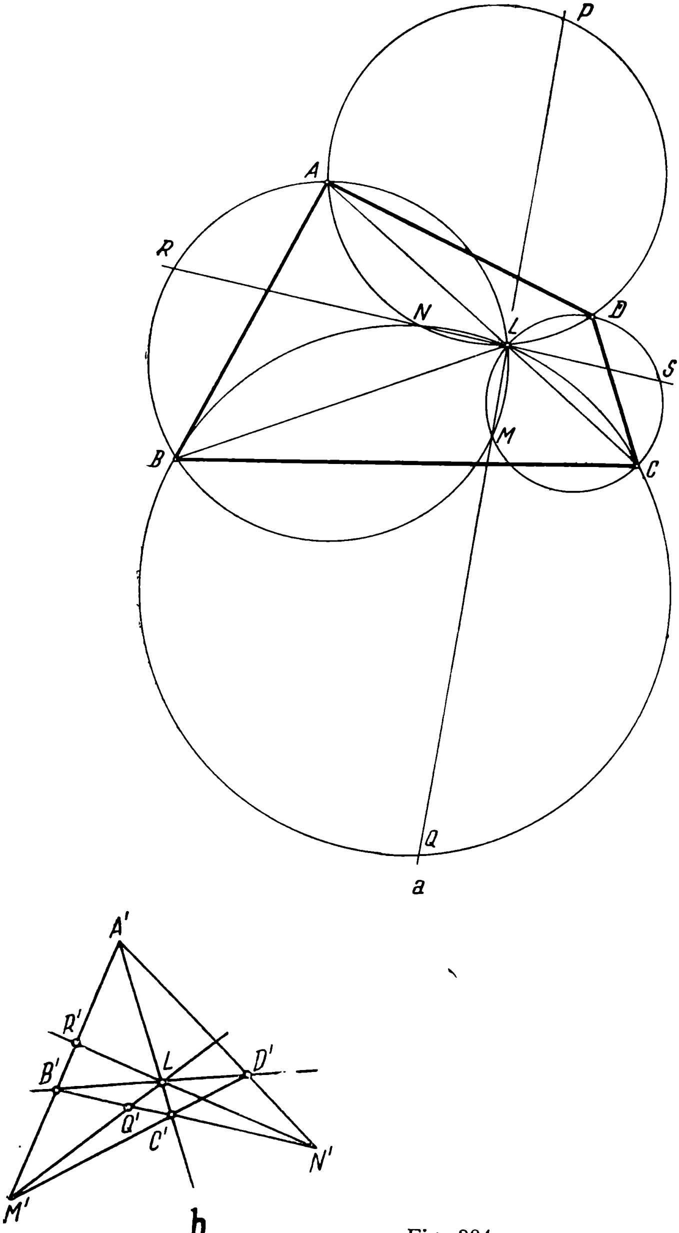

Fig. 384

$=\overline{MB}\cdot\overline{RA}$. De asemenea, se arată că $\overline{M'A'}\cdot\overline{R'B'} = \overline{A'B'}\cdot\overline{MR}/2$ sau $2\overline{M'A'}\cdot\overline{A'B'}=\overline{A'B'}\cdot\overline{M'R'}$, scriind $2\overline{M'A'}\cdot\overline{R'B'} = (\overline{M'A'} - \overline{M'B'})\cdot(\overline{M'B'}+\overline{B'R'})$. Se dezvoltă și se grupează termenii. Înlocuind pe $\overline{M'A'}$, $\overline{R'B'}$ etc., în funcție de $\overline{MA}$, $\overline{RB}$ etc., se obține a doua parte a egalității. **1254.** Se observă că P fiind punctul de întîlnire a celor două cercuri, patrulaterul $ABPC$ este inscriptibil. Fie A' intersecția lui MP cu acest cerc. Cînd A descrie dreapta (Δ), se observă că A' descrie dreapta (Δ_1), simetrica dreptei (Δ) față de perpendiculara ridicată pe mijlocul lui $\overline{BC}$. Rezultă că locul lui P este inversul dreptei (Δ_1), M fiind polul și $\overline{MB}\cdot\overline{MC}$ fiind puterea de inversiune. Linia centrelor cercurilor din enunț trece prin N, centrul cercului care este locul lui (P și deci trece printr-un punct fix. Se va observa că $MN\perp(\Delta_1)$ G.M.IX). **1255.** Se transformă figura prin inversiune luînd pe I_1 ca pol: cercurile (O_1), (O_2), (O_3) se transformă în dreptele (D_1), (D_2), (D_3), trecînd prin același punct, I transformatul lui I_2. A_4', transformatul lui A_4, descrie o dreaptă (D_4) așa ca fasciculul $(D_1D_2D_3D_4)$ să fie armonic. Se deduce că A_4 descrie un cerc trecînd prin I_1 și I_2 (G.M.XIII). **1256.** a) Fie P intersecția tangentei în T la cercul (O) cu BC. Se observă că $\overline{PT}^2 = \overline{PA}^2 = (\overline{PA}-\overline{AB})(\overline{PA}+\overline{AC})$. Rezultă că $\overline{PA} = \overline{PT} = \overline{AB}\cdot\overline{AC}:(\overline{AB}+\overline{AC})$, ceea ce arată că P este fix și că locul lui T este cercul de centru P și rază $\overline{PA}$. b) Fie A' și B' intersecțiile lui AT și BT cu cercurile (O) și (O'). Relațiile $\overline{AT}\cdot\overline{AA'}=\overline{AB}\cdot\overline{AC}$ și $\overline{BB'}\cdot\overline{BT}=\overline{BA}^2$ arată că A' descrie inversul cercului (Γ), polul de inversiune fiind A, iar B' descrie un cerc, inversul cercului (Γ), polul de inversiune fiind B (G.M.XVI). **1257.** Se transformă figura prin inversiune luînd pe A ca pol; locul lui P', inversul lui P, este un cerc (O') descris pe $\overline{B'C'}$ ca diametru și deci locul lui P este cercul (O), inversul lui (O'). Se va observa că acest cerc este tangent razelor IB, IC, I fiind centrul cercului ABC (G.M. XXI). **1258.** Locul cercurilor este sfera de centru D și rază $R^2=\overline{DA}\cdot\overline{DB}$. Fie S centrul unei sfere și O centrul cercului considerat. Se observă că $\overline{DO}\cdot\overline{DS}=\overline{DT}^2=$const, $\overline{DT}$ fiind lungimea tangentei duse din D la sfera S. Observînd că locul lui S este o dreaptă (Δ), deducem că locul lui O este un cerc, inversul dreptei (Δ) situat în planul determinat de D și (Δ) (G.M.XVIII). **1259.** λ fiind modulul de transformare, avem $\overline{A'B'} = |\lambda|\,\overline{AB}:\overline{MA}\cdot\overline{MB}$, $\overline{A'C'} = |\lambda|\,\overline{AC}:\overline{MA}\cdot\overline{MC}$. Relația $\overline{A'B'} = \overline{A'C'}$ se poate înlocui prin $\overline{MB}:\overline{MC} = \overline{AB}:\overline{AC}$ și deci locul lui M este sfera, loc al punctelor, astfel că raportul distanțelor la punctele B și C să fie egal cu

$\overline{AB}:\overline{AC}$. Cînd triunghiul $A'B'C'$ este echilateral, locul lui M este un cerc. **1260.** Se transformă figura prin inversiune, luînd ca pol punctul A și ca modul puterea punctului A în raport cu sfera (S); aceasta se transformă în ea însăși. (Σ) se transformă într-un plan trecînd prin B', inversul lui B, și tangent sferei (S) în punctul M', inversul lui M. Locul lui M' este un cerc, deci locul lui M va fi cercul ce se obține printr-o inversiune din acesta. **1261.** a) Sfera (Σ) trece printr-un al doilea punct fix C', simetric cu C în raport cu planul (Q). Punctele C și C' trebuie să fie de aceeași parte a planului (P). CC' intersectează planul (P) în I. Avem $\overline{IM}^2=\overline{IC}\cdot\overline{IC'}$ și locul lui M este un cerc (Γ) cu centrul în I. b) Raza ωM, fiind perpendiculară pe planul (P), este o generatoare a cilindrului de rotație, care are ca bază cercul (Γ) și generatoarele perpendiculare pe (P). Deci locul lui ω este elipsa (E), secțiunea cilindrului prin planul (Q). c) Se transformă figura prin inversiune, luînd ca pol punctul C și ca modul $\overline{CC'}^2$; sferele (Σ) se transformă în plane (π), trecînd prin punctul C', iar planul (P) într-o sferă (S), trecînd prin punctul C. Planele (π) sînt tangente conului de rotație (U) cu vîrful în C' și circumscris sferei (S). Planul tangent (T) în C la o sferă (Σ) este paralel cu planul (π) corespunzător; el va fi deci tangent unui con (V) de rotație, paralel cu conul (U). Deci și raza $C\omega\perp(T)$ aparține unui con de rotație. **1262.** Dacă centrele O_1, O_2, O_3 ale sferelor (S_1), (S_2), (S_3) nu sînt coliniare, se poate face o inversiune, astfel ca sferele transformate să aibă centrele coliniare. Secțiunile sferelor prin planul centrelor O_1, O_2, O_3 sînt trei cercuri mari (C_1), (C_2), (C_3) și polul de inversiune trebuie să se găsească pe cercul ortogonal acestor cercuri. Problema s-a redus deci la studierea cazului cînd sferele fixe (S_1'), (S_2'), (S_3') au centrele lor O_1', O_2', O_3' pe o dreaptă (D). Se consideră o sferă variabilă (S') de centru O', tangentă acestor sfere respectiv în punctele a_1, a_2, a_3. Dreptele $O'O_1'$, $O'O_2'$, $O'O_3'$ trec prin punctele a_1, a_2, a_3 și sînt în același plan, care intersectează cele trei sfere după cercurile mari (C_1'), (C_2'), (C_3'), iar pe (S') după cercul mare (C') tangent în a_1, a_2, a_3 celor trei cercuri. Rotind sfera (S) în jurul dreptei (D), ea va rămîne tangentă sferelor date, iar punctele a_1, a_2, a_3 vor descrie cercuri în plane perpendiculare pe (D). Locul punctelor de contact ale sferei (S') cu una oarecare din sferele (S_1'), (S_2'), (S_3') se compune din patru cercuri.

XXVII. **1263.** Dreptele AB, $A'B'$ intersectează pe (D) în M și N. Fie P un punct oarecare pe (D). Cercul ABP intersectează din nou pe (D) în Q, iar cercul $A'B'Q$ o intersectează în R. Corespondența între P și R este biunivocă. P și R descriu diviziuni omografice de aceeași bază. (D) va fi coarda comună celor două cercuri, dacă în afară de Q vor avea încă un punct comun, adică dacă P și R coincid. În acest caz P și R sînt punctele comune celor două diviziuni, deci două soluții. Pentru relația omografică, notăm $\overline{MN} = a$, $\overline{MP} = x$; $\overline{MR} = x'$, cu m, n lungimile tangentelor din M și N respectiv la cercurile ce trec prin (A, B) și (A', B'). Avem $\overline{MP} \cdot \overline{MQ} = \overline{MA} \cdot \overline{MB} = m^2$, $\overline{NQ} \cdot \overline{NR} = \overline{NA'} \cdot \overline{NB'} = n^2$, înlocuind pe $\overline{MQ}$ și $\overline{NQ}$ în $\overline{MQ}+\overline{QN}=a$, deducem $axx'-(a^2-n^2)x-$ $-m^2x'+am^2 = 0$. Pentru punctele duble $x = x'$. Discriminantul ecuației trebuie să fie $\geqslant 0$, deci $(a+m+n)(-a+m+n)\times$ $\times(a-m+n)(a+m-n) \leqslant 0$, adică triunghiul cu laturile a, m, n să nu se poată forma, deci $a \geqslant m+n$. **1264.** Unui punct m îi corespunde un singur punct m' și reciproc. Legătura între aceste puncte este algebrică. O fiind intersecția dreptelor (L), (L'), să notăm $\overline{Om}=x$, $\overline{Om'}=x'$. Paralelele duse prin P la (L'), (L) întîlnesc respectiv dreptele (L), (L') în punctele i, j'. În triunghiul mPi avem $\overline{mO}:\overline{mi}=$ $=\overline{Om'}:\overline{iP}$, care se poate scrie $xx'-bx-ax' = 0$, unde am pus $\overline{Oi} = a$, $\overline{iP} = b$; i și j' sînt punctele limită, căci corespund punctelor de la infinit ale celor două diviziuni. Deci $\overline{im}:\overline{j'm'} =$ const. **1265.** Corespondența este biunivocă. Pentru punctele limită ducem tangentele paralele la cele două tangente fixe. **1266.** Punctele M și N descriu pe dreaptă diviziuni omografice. I și J sînt punctele limită (G.M. XXIV). **1267.** Unui punct m îi corespunde punctul m' iar lui m' îi corespunde același punct m. Abscisele punctelor m, m' sînt legate algebric. Punctul central o este intersecția dreptelor (L) și AB. Avem $\overline{om} \cdot \overline{om'} = \overline{oA} \cdot \overline{oB} =$ const. Punctele duble a, b sînt date de $\overline{oa}^2 = \overline{ob}^2 = \overline{oA} \cdot \overline{oB}$. Se găsesc luînd intersecția dreptei (L) cu cercul de centru o, ortogonal cu unul din cercurile fasciculului. **1268.** Punctul central fiind omologul punctului de la infinit, vom duce la cerc o tangentă paralelă cu (L), vom lua punctul B de întîlnire cu (D) și vom duce tangenta Bo la cerc, care va întîlni pe (L) în punctul central o. Dreapta (D) întîlnește cercul în două puncte, α, β. Tangentele în aceste puncte întîlnesc pe (L) în punctele duble a, b; o este mijlocul segmentului $\overline{ab}$. **1269.** Punctele N și P descriu pe AC și AB diviziuni omografice. Dacă punem $\overline{CN} = x$, $\overline{BP} = x'$, vom avea între x și x' o relație omografică de forma $\alpha xx' +$ $+ \beta y + \gamma x' + \delta = 0$. Această relație trebuie să fie simetrică, deci $\beta = \gamma$. Cînd M se depărtează la infinit pe (Δ), relația este verificată de $x = x' = 0$, deci $\delta = 0$. Deducem $(1:x)+(1:x')=-\alpha:\beta=$const. **1270.** Punctul central se află pe diametrul perpendicular pe (L), iar punctele duble se găsesc la intersecția dreptei (L) cu cercul. **1271.** Punctele M, N desciu pe OA, OB diviziuni omografice care au punctele A și B ca puncte limită. Deci $\overline{AM} \cdot \overline{BN} = k$. Pentru a găsi pe k, facem pe P să vină în punctul O. **1272.** Punctele m, m' descriu pe (L) ca bază diviziuni omografice. Dacă punem $\overline{am} = x$, $\overline{am'} = x'$, trebuie să avem o relație omografică de forma $Axx' + Bx + Cx' + D = 0$. Abscisele punctelor duble sînt rădăcinile ecuației $Ax^2 + (B + C)x + D = 0$. Punctele duble fiind confundate cu a, această ecuație trebuie să admită rădăcină dublă $x = 0$. Deci $B + C = 0$ și $D = 0$; relația între x și x' devine $Axx' + B(x - x') = 0$ sau $(1 : x) - (1 : x') = A : B =$ const. **1273.** Punctele m și m' descriu diviziuni omografice pe baza (L). Punctele duble se găsesc la infinit. **1274.** Punctele M, M' descriu pe Oy diviziuni în involuție. O este punctul central. Se găsește pentru constantă valoarea $k = aR^2 : (a - 2R)$, unde s-a pus $\overline{OA} = a$. **1275.** Cercurile de diametre $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ sînt ortogonale (probl. 1165) și axa lor radicală (Δ) este polara punctului a în raport cu cercul de diametru BB' și polara punctului b în raport cu cercul de diametru AA'. (Δ) întîlnește linia centrelor în O și $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'}$. **1276.** Punctele m, m' descriu pe (Δ) diviziuni în involuție (probl. 1268). Proprietatea rezultă din reciproca problemei 1268. **1277.** Fie α, β, γ punctele de tangență ale cercului cu laturile, iar α', β', γ' izotomicele lor (probl. 1101). Punctele a', b' descriu pe CB, CA diviziuni omografice. În punctul C se întîlnesc două puncte omoloage; deci $a'b'$ trece printr-un punct fix. Se determină acest punct dînd poziții particulare tangentei; dacă se confundă cu latura BC, atunci dreapta $a'b'$ devine ceviana $A\alpha'$. **1278.** Fie ABC un triunghi circumscris cercului (O). O tangentă la (O) întîlnește laturile AB, AC în D și E. Fie m, m' mijloacele diagonalelor $\overline{CD}$, $\overline{EB}$ ale patrulaterului format de dreptele AB, BC, CA, DE, iar I mijlocul lui $\overline{BC}$. Să ducem prin I dreptele $Ix \| BA$, $Iy \| CA$. Cînd tangenta DE variază, punctele m, m' descriu diviziuni omografice pe dreptele Ix, Iy. Cînd DE coincide cu BC, punctele m și m' coincid cu I, deci dreapta m, m' trece printr-un punct fix. Dînd poziții particulare tangentei DE, găsim că punctul fix este centrul cercului (O). **1279.** Cînd punctul M descrie cercul circumscris, punctele β, γ descriu pe AC și AB diviziuni omografice. Deoarece în punctul A se confundă două puncte omoloage, dreapta $\beta\gamma$ trece printr-un punct fix. În poziții particulare ale punctului M, dreapta $\alpha\beta\gamma$ se confundă cu simedianele (probl. 583, 587). **1280.** Cînd punctul I se mișcă pe AB, punctele M, M' descriu diviziuni asemenea pe OA, OB. Dreptele MH, $M'H$ au direcții fixe. Locul lui H este o dreaptă. **1281.** Fie a', b' punctele unde tangentele duse din a, b cercurilor (γ_a), (γ_b)

întîlnesc pe (T). Cînd tangenta ab variază, a și b descriu pe CA. CB diviziuni omografice, a și a' descriu pe AC și (T) diviziuni omografice, iar b și b' descriu diviziuni omografice pe BC și (T). Deci a' și b' descriu diviziuni omografice pe (T). Făcînd pe ab să coincidă pe rînd cu tangentele AC, BC, AB, se obțin pe dreapta (T) puncte duble. Deoarece există trei puncte duble pe (T), toate punctele vor fi duble și punctele a', b' sînt confundate. **1282.** Fie ω punctul de întîlnire a dreptei BB_1 cu cercul, iar C_1' intersecția dreptelor MN și ωC. Cînd punctul A se mișcă pe cerc, AB și AC descriu pe MN diviziuni omografice, ce au puncte duble pe M și N; deci $(MNC'B')=(MNB_1C_1')$ sau $\overline{C'M}\cdot\overline{B'N}:\overline{C'N}\cdot\overline{B'M}=$ $=\overline{B_1M}\cdot\overline{C_1'N}:\overline{B_1N}\cdot\overline{C_1'M}$ și cum B' și B_1 sînt simetrice în raport cu O, avem $\overline{B'N}:\overline{B'M}=\overline{B_1M}:\overline{B_1N}$ și se deduce că punctele C' și C_1' sînt simetrice în raport cu O, adică C_1 și C_1' sînt confundate. **1283.** Cînd punctul M se mișcă pe cerc, MP și MQ sînt raze omoloage a două fascicule omografice de vîrfuri P și Q, deci punctele p, q descriu pe AB și AC diviziuni omografice. Cînd M vine în A, punctele p și q coincid cu A și deci dreapta pq trece printr-un punct fix. Luînd poziții particulare, găsim că acest punct este intersecția dreptelor BQ și CP. **1284.** a) Triunghiurile ABC, $A'B'C'$ sînt simetrice în raport cu O. Dreapta (Δ) întîlnește laturile $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ în punctele α', β', γ' simetrice cu α, β, γ în raport cu O. Deci $(\alpha'\beta'\gamma\alpha)=(\alpha\beta\gamma'\alpha')=(\alpha'\gamma'\beta\alpha)$ și $C'(\alpha'\beta'\gamma\alpha)=B'(\alpha'\gamma'\beta\alpha)$. Se deduce că punctele A', M, α sînt coliniare, M fiind punctul comun dreptelor $C'\gamma$, $B'\beta$. b) Cînd O se mișcă pe (Δ), dreptele $\beta B'$, $\gamma C'$ sînt razele omoloage a două fascicule omografice de vîrfuri β, γ și avînd două raze omoloage confundate după $\beta\gamma$. Locul lui M este o dreaptă. **1285.** Fie (OA, OA'), (OB, OB') două perechi de raze omoloage, care întîlnesc cercul în punctele (a, a'), (b, b') și fie P intersecția dreptelor aa' și bb'. O secantă dusă prin P întîlnește cercul în m, m'. Aceste puncte unite cu O dau razele OM, OM', care fac parte din involuția determinată de cele două perechi de drepte. **1286.** Ducem $AH \parallel BC$; H pe cerc. Dreapta HP întîlnește din nou cercul în K iar dreptele AK, BC se intersectează în O. După teorema lui Frégier punctele M, M' descriu pe BC diviziuni în involuție. Punctele B, C sînt o prereche de puncte omoloage a acestor diviziuni, iar O este punctul central. Avem deci $\overline{OM}\cdot\overline{OM'}=\overline{OB}\cdot\overline{OC}$ și cum $\overline{OB}\cdot\overline{OC}=$ $=\overline{OA}\cdot\overline{OK}$, rezultă că $\overline{OM}\cdot\overline{OM'}=\overline{OA}\cdot\overline{OK}$ și punctele M, M', A, K se găsesc pe un cerc. **1287.** Fie P, Q, R, S vîrfurile care determină patrulaterul complet; laturile opuse sînt (PQ, RS), (PR, QS), (PS, QR). O dreaptă (Δ) întîlnește aceste drepte respectiv în punctele (a, a'), (b, b'), (c, c'). Fie I intersecția dreptelor PR și QS.

Avem $Q(PRIb)=S(PRIb)$ și intersectînd aceste fascicule cu dreapta (Δ), obținem $(ac'b'b)=(ca'b'b)$ sau $(ac'b'b)=(a'cbb')$ și punctele (a, a'), (b, b'), (c, c') sînt în involuție. Transformînd prin dualitate prima proprietate, obținem pe cea de-a doua. **1288.** Păstrăm notațiile problemei precedente. Punctele P, Q, R, S se găsesc pe un cerc (O). Fie (m, m') punctele în care (Δ) întîlnește cercul. Avem $R(PQmm')=S(PQmm')$. Aceste fascicule intersectate de transversala (Δ) dau $(bc'mm')=(cb'mm')$ și cum $(cb'mm')=(b'cm'm)$, se deduce $(bc'mm')=(b'cm'm)$ și perechile de puncte (b, b'), (c, c'), (m, m') sînt în involuție. Dacă se transformă prima proprietate prin polare reciproce, luînd cercul (O) ca cerc director, se obține ultima proprietate. **1289.** Presupunem că punctele (a, a'), (b, b'), (c, c') sînt în involuție. Fie D punctul de întîlnire a dreptelor Aa' și Bb', iar c_1 intersecția dreptelor (Δ) și CD. Teorema lui Desargues aplicată patrulaterului $ABCD$ intersectat de (Δ) arată că punctele (a, a'), (b, b'), (c, c_1) sînt în involuție. Deci c' și c_1 se confundă. **1290.** Fie a, b, c, a', b', c' punctele unde o dreaptă (Δ) întîlnește respectiv dreptele BC, CA, AB, Aa', Bb', Cc'. Pentru ca dreptele Aa', Bb', Cc' să fie concurente este necesar și suficient (probl. 1289) ca perechile de puncte (a, a'); (b, b'), (c, c') să fie în involuție sau ca perechile de drepte (Pa, Pa'), (Pb, Pb'), (Pc, Pc') să fie în involuție. Cînd (Δ) este dreapta de la infinit, se obține proprietatea enunțului. **1291.** a) Fie (γ) cercul circumscris lui ABC; a este centrul radical al cercurilor (γ), (ω) și OBC, deci se află pe axa radicală a cercurilor (ω), (γ). b) În patrulaterul complet format de laturile triunghiului ABC și de dreapta (abc), vîrfurile opuse sînt (A, a) (B, b), (C, c); deci (probl. 1287) perechile de drepte (OA, Oa), (OB, Ob), (OC, Oc) sînt raze omoloage a două fascicule în involuție. Dreptele A_1A', B_1B', C_1C' sînt concurente după teorema lui Frégier (probl. 1285). **1292.** Fie d, d' punctele de întîlnire a cercului și a dreptei (Δ). Perechile de puncte (a, a'), (b, b'), (c, c') (d, d') sînt puncte omoloage a două diviziuni în involuție, admițînd ca puncte duble punctele p, q. Dreapta Aa' intersectează cercul în M, iar dreptele MB, MC întîlnesc pe (Δ) respectiv în punctele b_1, c_1. Teorema lui Desargues (probl. 1288) aplicată patrulaterului $ABCM$ arată că punctele (a, a'), (b, b_1), (c, c_1), (d, d') sînt puncte omoloage a două diviziuni în involuție. Se deduce că b_1, c_1 coincid cu b', c'. **1293.** Triunghiul ABC și dreapta (Δ) formează un patrulater complet, în care vîrfurile opuse sînt (A, A_1), (B, B_1), (C, C_1). Deci (probl. 1287) perechile de drepte (DA, DA_1), (DB, DB_1), (DC, DC_1) sînt în involuție și după teorema lui Frégier (probl. 1285) dreptele AA_2, BB_2, CC_2 sînt concurente. Cînd D se deplasează pe cerc, dreptele AA_2, BB_2 sînt raze omoloage a două fascicule omografice, avînd ca vîrfuri punctele A și B și avînd două raze omoloage confundate după AB. Deci locul lui M, intersecția dreptelor AA_2, BB_2, este o dreaptă. Cînd D se află în A, B, C, punctul M vine respectiv în A_1, B_1, C_1. **1294.** Unui punct m îi corespunde un singur punct m' și reciproc. Prin fiecare din dreptele date (D), (L), (L') se duc plane paralele cu celelalte două. Se obțin șase plane care formează un paralelipiped *abcdefgh* în care (D), (L), (L') sînt trei muchii ce n-au o extremitate comună. Un plan oarecare trecînd prin (D) întîlnește planele paralele *abcd*, *efgh* după paralelele $\overline{am}$, $\overline{epm'}$, m fiind pe (L), p pe gh și m' pe (L'); $pm \parallel (D)$. Avem $\overline{m'g}:\overline{m'f}=\overline{gp}:\overline{fe}$ sau $\overline{cm}:\overline{cd}=$ $=\overline{gm'}:(\overline{fg}+\overline{gm'})$ și dacă punem $\overline{cm}=x$, $\overline{cd}=\alpha$, $\overline{gm'}=x'$, $\overline{fg}=\beta$, deducem $xx'+\beta x-\alpha x'=0$.

XXVIII. **1295.** Fie N un punct interior elipsei de focare F, F'; $F'N$ intersectează elipsa în M. Avem $\overline{NF}<\overline{NM}+\overline{MF}$ și $\overline{NF}+\overline{NF'}<$ $<\overline{MF}+\overline{MF'}=2a$, $2a$ fiind axa elipsei. Soluție analogă pentru N exterior. **1296.** Procedeu analog ca la problema precedentă. **1297.** Fie N interior, N_1 proiecția lui pe directoare și M punctul unde N_1N intersectează parabola de focar F. Avem $\overline{NF}<\overline{NM}+\overline{MF}$ sau $\overline{NF}<\overline{NN_1}$, pentru că $\overline{MF}=\overline{MN_1}$. **1298.** Fie M un punct pe curbă. Teorema medianei aplicată triunghiului MFF' ne dă $\overline{MF}^2+\overline{MF'}^2=$ $=2\overline{OM}^2+2\overline{OF}^2$. Dar $\overline{MF}+\overline{MF'}=2a=\text{const.}$ $\overline{OF}=\overline{OF'}=c=$ $=\text{const.}$ Deci $\overline{OM}^2=2a^2-c^2-\overline{MF}\cdot\overline{MF'}$. Suma factorilor fiind constantă, produsul $\overline{MF}\cdot\overline{MF'}$ este maxim cînd factorii sînt egali $\overline{MF}=\overline{MF'}$. Extremitățile axelor răspund problemei. **1299.** Fie F, F', F_1 focarele elipselor și M unul din punctele lor comune. Din $\overline{MF}+\overline{MF'}=\overline{MF}+\overline{MF_1}$ se deduce $\overline{MF'}=\overline{MF_1}$ și M se găsește pe mediatoarea segmentului $\overline{F'F_1}$ care intersectează numai în două puncte una oarecare din elipse. **1300.** Elipsă sau hiperbolă cu focarele în centrele celor două cercuri. **1301.** Elipsă sau hiperbolă cu focarele în A și B, după cum C este între A și B sau pe prelungirea lui $\overline{AB}$. **1302.** O parabolă avînd ca focar centrul O, iar ca directoare o dreaptă paralelă cu (Δ) și depărtată de (Δ) cu o lungime egală cu raza cercului (O). **1303.** Parabole avînd focarul în punctul dat și directoarea paralelă cu dreapta dată. **1304.** Fie ω punctul al cărui loc îl căutăm și ω' proiecția lui pe $\overline{OA}$. Avem $\overline{\omega O}+\overline{\omega\omega'}=$

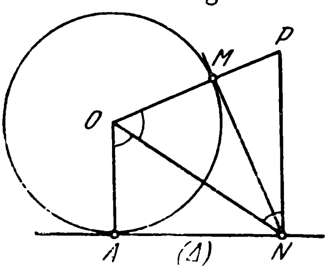

Fig 385

$=\overline{OA}=$const. Problema se reduce la precedenta. **1305.** Fie P punctul al cărui loc se cere (fig. 385); A punctul de tangență a lui (Δ) cu cercul (O). Din egalitatea de unghiuri $\sphericalangle NOA=\sphericalangle NOM=$ $=\sphericalangle ONP$, rezultă că triunghiul ONP este isoscel. P fiind egal depărtat de o dreaptă fixă (Δ) și de un punct fix O, descrie o parabolă. **1306.** Avem $\overline{EC}-\overline{EB}=\overline{EC}-\overline{EA}=\overline{CB}=$ const. O hiperbolă cu focarele în A și C cu axa transversă egală cu $\overline{BC}$. **1307.** Fie M un punct comun al celor două parabole, M_1 proiecția sa pe directoarea comună. F_1 și F_2 fiind cele două focare, avem $\overline{MF_1}=\overline{MM_1}$ și $\overline{MM_1}=\overline{MF_2}$. Deci $\overline{MF_1}=\overline{MF_2}$, și M se află pe mediatoarea segmentului $\overline{F_1F_2}$. **1308.** Fie F focarul și Q punctul unde $\overline{FP}$ intersectează directoarea. Se știe că $\overline{FP}=\overline{PQ}$ și MQ este paralelă cu axa. Fie E intersecția dreptei NP cu axa. $FNQE$ este paralelogram, deci $\overline{EF}=\overline{QN}$ și E este fix. **1309.** Fie M un punct comun parabolelor, F focarul comun, iar M_1, M_2 proiecțiile lui M pe cele două directoare. Din $\overline{MF}=\overline{MM_1}$ și $\overline{MF}=\overline{MM_2}$, rezultă $\overline{MM_1}=\overline{MM_2}$. **1310.** Să considerăm două puncte vecine M, M' pe elipsa de centru O și de focare F, F'. Luăm pe $F'M$ o lungime $\overline{F'D}=\overline{F'M'}$ și pe FM o lungime $\overline{FC}=\overline{FM'}$; $\overline{MD}=\overline{MC}$. Fie G un punct pe secanta MM' și $GI \parallel M'D$, $GH \parallel M'C$, I și H fiind respectiv pe MF' și MF. Patrulaterele $GHMI$ și $M'CMD$ sînt asemenea, deci $\overline{MI}=\overline{MH}$. Dreptele GH și GI sînt perpendiculare pe bisectoarele unghiurilor la vîrf, ale triunghiurilor isoscele CFM', $DF'M'$. Cînd punctul M' se apropie de M, secanta MM' are ca limită tangenta în M și la limită $GH \perp MF$, $GI \perp MF'$. **1311.** Fie M, M' două puncte vecine pe parabolă, φ și φ' proiecțiile lor pe directoare. Luăm pe FM o lungime $\overline{FC}=\overline{FM'}$ și pe φM o lungime $\overline{\varphi E}=\overline{\varphi' M'}$; $\overline{MC}=\overline{ME}$. Fie G un punct pe MM' și $GI \parallel M'C$, $GH \parallel M'E$, I și H fiind respectiv pe FM și φM. Patrulaterele $CM'EM$, $IGHM$ sînt asemenea, deci $\overline{MI}=\overline{MH}$; $GH \perp M\varphi$, iar GI este perpendiculară pe bisectoarea unghiului din F al triunghiului isoscel $M'FC$. Cînd M' se apropie de M, MM' devine tangentă la parabolă și triunghiurile GMH, GMI devin egale. **1312.** Fie M un punct de intersecție. Cele două tangente în M sînt bisectoarele unghiului FMF' (probl. 1310). **1313.** Fie M un punct comun parabolelor și (Δ) paralela dusă prin M la axa comună a parabolelor. Cele două tangente în M sînt bisectoarele unghiului format de (Δ) cu MF (probl. 1311) **1314.** Fie M un punct pe elipsă, φ simetricul lui F în raport cu tangenta în M, iar K intersecția tangentei cu dreapta $F\varphi$. $\overline{MF}=\overline{M\varphi}$ și deci $\overline{MF'}+\overline{M\varphi}=\overline{MF'}+\overline{MF}=2a$. Locul lui φ este cercul director cu centrul în F' și de rază $2a$. **1315.** Fie F, F' focarele unei elipse de centru O, K proiecția lui F pe o tangentă și φ simetricul lui F în raport cu K. Avem $\overline{F'\varphi} = 2\overline{OK} = 2a$. **1316.** Fie K proiecția lui F pe tangenta în M la parabolă, iar φ simetricul lui F în raport cu K; $\overline{MF} = \overline{M\varphi}$ și $\overline{M\varphi} \perp (\Delta)$. **1317.** a) Fie P proiecția lui M pe axă (fig. 386), T punctul comun tangentei în M și axei, A vîrful parabolei, F focarul, N piciorul normalei în M pe axă. F este mijlocul ipo-

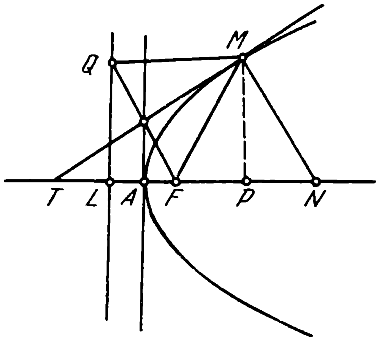

Fig. 386

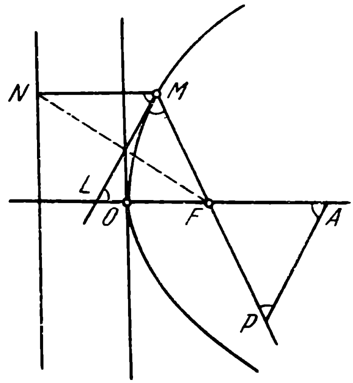

Fig. 387

tenuzei triunghiului dreptunghic TMN; deci triunghiul MFT este isoscel. Proiecția lui F pe tangenta MT se găsește pe tangenta în vîrf (probl. 1316) care este perpendiculară pe axă. b) Fie φ proiecția lui M pe directoare. Figura $M\varphi FN$ este un paralelogram și $\overline{\varphi F} = \overline{MN}$; deci $\Delta MPN = \Delta \varphi LF$, L fiind punctul de întîlnire a directoarei și axei. Rezultă $\overline{PN} = \overline{LF} = p$. **1318.** Paralela prin M la axă intersectează directoarea în N (fig. 387); tangenta în M intersectează axa în L. Fie P punctul al cărui loc se cere. Din $\sphericalangle LMF = \sphericalangle LMN = \sphericalangle MLF$, rezultă că triunghiul FLM este isoscel, deci și FAP este isoscel. Locul este cercul cu centrul în F și raza $\overline{FA}$. **1319.** Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice ACR, AMQ deducem $\overline{MQ}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{AQ}$. Locul lui M este o parabolă, avînd ca axă pe AB și vîrful în A. **1320.** Fie M un punct pe hiperbolă; MF' intersectează cercul principal în φ. Fie K proiecția lui F pe tangenta KT în M: $KT \perp F\varphi$. Cînd M se depărtează la infinit, avem $\varphi F' \parallel KT$ și deci $\varphi F' \perp KF$ etc. **1321.** Fie M un punct pe parabolă, φ proiecția focarului F pe tangenta în M, iar A vîrful parabolei. Proprietatea cerută rezultă din asemănarea triunghiurilor $AF\varphi$, $M\varphi F$. **1322.** În triunghiul BMN (fig. 388), BQ este mediană, iar O centrul de greutate; deci MO este mediană și trece prin mijlocul lui $\overline{BN}$. Rezultă că BN este paralelă cu diametrul conjugat lui OM și deci paralelă cu tangenta în M. **1323.** Fie φ proiecția lui F pe tangenta în M, N punctul unde această tangentă este întîlnită de directoare, iar P punctul de întîlnire a tangentei cu paralela dusă prin F la directoare. φ se află (probl. 1316) pe tangenta în vîrf. Deci $\overline{N\varphi} = \overline{P\varphi}$ și triunghiul NEP este isoscel. **1324.** A fiind vîrful parabolei, avem $\overline{MP}^2 = 2p \cdot \overline{AP} = 2p(\overline{AQ} + \overline{QP}) = 2p\left(\overline{AQ} + \frac{p}{2}\right)$ (probl. 1317), iar $\overline{M'N}^2 = \overline{M'Q}^2 + \overline{QN}^2 = 2p\overline{AQ} + p^2$; deci $\overline{MP} = \overline{M'N}$. **1325.** Dacă punctul dat M este pe curbă, se duc bisectoarele unghiului FMF'. Fie P un punct exterior, iar φ intersecția cercului director cu centrul în F', cu cercul de centru P și de rază $\overline{PF}$. Perpendiculara în P pe $F\varphi$ este tangenta căutată. *Altă soluție numai pentru elipsă.* a) *M este pe elipsă.* Perpendiculara din M pe axa mare întîlnește cercul principal (omografic) în M_1. Tangenta în M_1 la cerc intersectează axa în T. MT este tangenta cerută. b) *Punctul P exterior elipsei.* Fie B, B' extremitățile axei mici și B_1, B_1' punctele comune axei mici și cercului omografic. PB intersectează pe AA' în K, iar perpendiculara din P pe AA' și dreapta B_1K se întîlnesc în R. Tangentele din R la cercul principal întîlnesc pe AA' în T_1, T_2, iar cercul în N_1, N_2. Dreptele PT_1, PT_2 sînt tangentele căutate, iar punctele de contact se găsesc pe proiectantele punctelor N_1, N_2 pe AA'. **1326.** Fie φ intersecția cercului director de centru F' cu perpendiculara în F pe dreapta dată. Tangenta căutată este perpendiculară pe mijlocul lui $\overline{F\varphi}$. Problema nu este întotdeauna posibilă la hiperbolă. *Altă soluție pentru elipsă.* Notațiile problemei precedente. O paralelă OD cu dreapta dusă prin centru, întîlnește dreapta BK, oarecare, în N, iar KB_1 întîlnește perpendiculara în N pe AA' în N_1. Tangenta la cercul omografic, paralelă cu ON_1, intersectează pe AA' în T', $T'm' \parallel ON_1$ este tangenta cerută. Punctul de contact se află pe perpendiculara din M pe AA'. **1327.** Procedeu analog ca pentru elipsă (prima soluție), înlocuindu-se cercul director cu directoarea. **1328.** Centrele cercurilor ce trec prin punctul M, prin simetricul φ al focarului F în raport cu (D) și sînt tangente cercului director, cu centrul în F'.

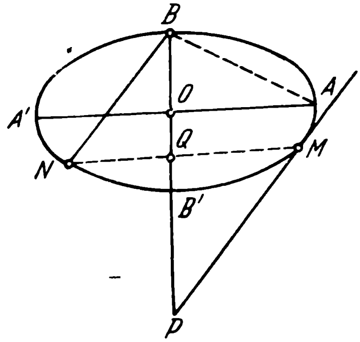

Fig. 388

Altă soluție pentru elipsă. Fie A, A', B, B' extremitățile axelor elipsei, B_1, B_1' punctele unde axa mică a elipsei întîlnește cercul omografic, L punctul unde (D) întîlnește pe AA', K un punct pe AA'. BK intersectează pe (D) în C. Perpendiculara în C pe AA' intersectează pe KA_1 în C_1. LC_1 intersectează cercul omografic în M_1, M_2 iar punctele căutate se găsesc pe perpendicularele coborîte din M_1, M_2 pe AA'. **1329.** Fie φ simetricul lui F în raport cu (D). Centrele cercurilor ce trec prin F și φ și sînt tangente directoarei (probl. 412). **1330.** Fie φ, φ' simetricele punctelor F, F', respectiv în raport cu PM, PM'. Triunghiurile $PF\varphi'$, $PF'\varphi$ sînt egale, căci au toate laturile egale; deci $\sphericalangle EP\varphi' = \sphericalangle F'P\varphi$ din care deducem $\sphericalangle MPF = \sphericalangle M'PF'$. Din triunghiurile egale de mai sus deducem $\sphericalangle PF\varphi' = \sphericalangle P\varphi F'$; dar $\sphericalangle P\varphi F' = \sphericalangle PFM$, deci $\sphericalangle PF\varphi' = \sphericalangle PFM$. **1331.** Această proprietate care se poate demonstra și direct, se deduce din problema precedentă, observînd că parabola este limita unei elipse la care un focar se depărtează pe axă la infinit. **1332.** Fie F_1 simetricul lui F în raport cu PM. Avem $\overline{F'F_1} = 2a$ și triunghiurile PQQ' și PF_1F' sînt egale, deoarece au $\overline{PQ'} = \overline{PF'}$, $\overline{PF_1} = \overline{PQ}$ și $\sphericalangle QPO' = \sphericalangle F_1PF'$. **1333.** Ducem dreptele (D_1) și (D_2) paralele cu (D) și la distanța R de ea (fig. 389); P și Q fiind pe bisectoare, $\overline{PP_1} = \overline{PM}$ și $\overline{QQ_1} = \overline{QM}$; scăzînd și respectiv adăugînd R la ambii membri, obținem $\overline{PP_2} = \overline{PO}$ și $\overline{QO} = \overline{QQ_2}$. P descrie o parabolă cu focarul în O și directoarea (D_1) iar Q o parabolă cu focarul O și directoarea (D_2). Tangenta la parabolă fiind bisectoarea unghiului format de dreapta ce unește punctul cu focarul și perpendiculara din punct pe directoare, găsim că tangentele în P și Q sînt respectiv PN și QN (G.M.F. 3. 1954). **1334.** Fie F focarul fix, F_1 simetricul lui F' în raport cu tangenta dată se găsește pe cercul director (C) cu centrul în F. Locul lui F' va fi cercul (C') simetric cu (C) în raport cu dreapta dată (Δ), iar locul centrului O, mijlocul lui $\overline{FF'}$, va fi deci un cerc. **1335.** Se determină lungimea $\overline{FF'} = 2c$, dintr-un triunghi dreptunghic, deoarece $a^2 = b^2 + c^2$. F' se află la intersecția cercului cu centrul în F și de rază $2c$ cu cercul cu centrul în M și de rază $(2a - \overline{MF})$. **1336.** Fie (T), (T') două tangente paralele la o elipsă, în punctele M, M', simetrice în raport cu centrul O; K, K' proiecțiile lui F pe cele două

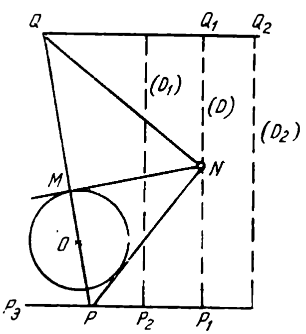

Fig. 389

tangente, L, L' proiecțiile lui F' pe tangente. K și K' aparțin cercului omografic. Deci $\overline{FK}\cdot\overline{FK'} = \text{const} = b^2$. Dar $\overline{FK'} = \overline{F'L}$. Deci $\overline{FK}\cdot\overline{F'L} = b^2$. **1337.** Fie P un punct; (T), (T_1) tangentele duse prin P la elipsa de focare F, F'; φ, φ_1 simetricele lui F în raport cu tangentele (T), (T_1). Deci unghiul format de (T), (T_1) este drept, $\sphericalangle \varphi F\varphi_1 = 90°$, P este mijlocul ipotenuzei $\varphi\varphi_1$ în triunghiul dreptunghic $\varphi F\varphi_1$. Triunghiul dreptunghic $F'P\varphi$ dă $\overline{PF'}^2+\overline{P\varphi}^2=\overline{PF'}^2+\overline{PF}^2=\overline{F'\varphi}^2= 4a^2$. Deci (probl. 644) locul lui P este un cerc (*cercul lui Monge* sau *cercul ortoptic*) cu centrul în centrul curbei. Raza acestui cerc este $\sqrt{a^2+b^2}$, pentru că vîrfurile dreptunghiului construit pe axe aparțin evident locului. În cazul hiperbolei cercul lui Monge are raza $\sqrt{a^2-b^2}$. În cazul parabolei cercul lui Monge se reduce la directoare. **1338.** Fie P proiecția lui M pe Ox. MP și paralela dusă prin O la AB se întîlnesc în N. $\Delta BPM \sim \Delta OPN$. Deci $\overline{MP}: \overline{NP} = \overline{BM}: \overline{ON}$ sau $\overline{MP} = \dfrac{b}{a}\overline{NP}$. Locul lui N este un cerc cu centrul în (O). Deci locul lui M este o elipsă avînd cercul loc al lui N ca cerc principal. **1339.** Să considerăm o poziție particulară a lui $\overline{AB}$ și cercul ABO. Cînd $\overline{AB}$ variază, acest cerc trece întotdeauna prin O. Fie D și E extremitățile diametrului ce trece prin M. Locul lui D este o dreaptă OX, iar locul lui E o dreaptă $OY \perp OX$. Problema se reduce la precedenta, căci DE este constant și alunecă pe două drepte perpendiculare. **1340.** Fie (D) o dreaptă perpendiculară pe axa mare a elipsei și depărtată de centru cu $\overline{OE} = a^2: c$, M un punct al elipsei, P proiecția lui M pe (D), N intersecția dreptei $F'M$ cu cercul director (F'), iar I punctul unde tangenta în N la cerc întîlnește pe (D). Se observă că directoarea (D) este axa radicală a cercului (F') și a punctului F; deci $\overline{IN} = \overline{IF}$ și $\sphericalangle MNI = \sphericalangle MFI$. Unghiul MFI va fi drept și punctele N, F, P situate pe cercul descris pe MI ca diametru. Deci $\sphericalangle NPM = \sphericalangle NFM = \sphericalangle MNF$. Triunghiurile NMP și $NF'F$ au toate unghiurile egale și vom avea proporția $\overline{MN} : \overline{MP} = \overline{FF'}: \overline{NF'}$ sau $\overline{MF} : \overline{MP} = 2c:(2a) = c: a$ etc. **1341.** Fie P și Q proiecțiile punctelor M și N pe directoarea (D); $\overline{IM}: \overline{IN} = \overline{MP}: \overline{NQ} = \overline{FM}: \overline{FN}$. Deci I este piciorul bisectoarei interioare sau exterioare a unghiului MFN situat pe MN. **1342.** Se deduce din problema precedentă cînd punctele M și N se confundă. **1343.** Fie M un punct oarecare din plan, P intersecția tangentelor în A și B la cele două conice, deci polul dreptei AB față de cele două conice (fig. 390). Dreapta PM intersectează pe AB în Q, conjugatul lui Q față de A și B este N, iar PN este polara lui Q față de ambele conice. Rezultă că N

este polul lui MP față de ambele conice (intersecția polarelor lui P și Q). Atunci polarele oricărui punct de pe MP față de cele două conice trec prin N. Deci polarele lui M față de cele două conice se întîlnesc pe AB în conjugatul lui Q față de A și B. **1344.** a) Fie A', B', C' proiecțiile punctelor A, B, C pe (d), iar A_1, B_1, C_1 respectiv simetricele punctelor A, B, C, în raport cu

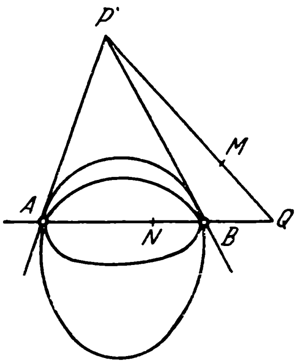

Fig. 390

A', B', C'. Punctele A', B', C' se găsesc pe tangentele la vîrfurile parabolelor, iar A_1, B_1, C_1 pe directoare. Dar A_1, B_1, C_1 se găsesc și pe cercul circumscris. Se folosește apoi problema 271. b) Polarele punctului M față de parabolele $(P_a), (P_b), (P_c)$ sînt (probl. 1342) perpendicularele duse în A, B, C pe dreptele MA, MB, MC (G.M. XXXII). **1345.** PMQ este polara lui A față de conică, deci polara lui M trece prin A. Ne mai trebuie un punct. Conjugatul lui M față de P și Q se află pe polara lui M față de conică și față de unghiul PAQ; dar conjugata medianei AM față de unghiul A este paralelă cu BC. Rezultă că polara lui M față de conică este paralelă prin A la BC. Fie M_∞ punctul de la infinit al polarei (deci și al lui BC). Polara lui M_∞ față de conică trece prin pol, deci prin M, dar trece și prin centrul conicei ω, este deci ωM. Acesta fiind diametru, M este mijlocul coardei și cum este și mijlocul lui $\overline{BC}$, capetele coardei sînt izotomice față de $\overline{BC}$ (G.M.F. 1950. 8). **1346.** Fie A un punct al cercului (C), AT tangenta în acest punct, M polul lui AT în raport cu cercul director, P proiecția lui M pe (Δ). Vom avea $\overline{OM}:\overline{OC}=\overline{MP}:\overline{CA}$ sau $\overline{OM}:\overline{MP}=d:r$ și locul lui M este conica enunțată. Reciproca este imediată. **1347.** Transformînd proprietatea prin polare reciproce, ajungem la propoziția: dacă dintr-un punct a se duc tangentele am, am' la un cerc (C), dreapta mm' este perpendiculară pe Ca și $\sphericalangle amm' = \sphericalangle am'm$. **1348.** Transformînd figura prin polare reciproce, obținem propoziția: se consideră pe un cerc două puncte variabile m, m', astfel ca unghiul ascuțit format de tangentele în aceste puncte să fie constant; a) locul punctului de întîlnire a acestor tangente se compune din două cercuri concentrice cu cercul dat; b) înfășurătoarea dreptei mm' se compune din două cercuri concentrice cu cercul dat. **1349.** O transformare prin polare reciproce ne conduce la propoziția: se consideră un punct fix F pe un cerc (C) și se consideră două puncte variabile M, M' pe cerc, astfel ca dreptele FM, FM' să formeze un unghi constant α; înfăşurătoarea dreptei MM' este un cerc (C') concentric cu (C). În particular cînd $\alpha = 90°$, hiperbola se reduce la directoarea parabolei. **1350.** a) O transformare prin polare reciproce ne conduce la teorema lui Simson (probl. 257 și 1135). b) Cercul de diametru $\overline{FI}$ trece prin A, B, C. **1351.** *Prima soluție.* Focarul F se găseşte (probl. 1350) pe cercul circumscris. Simetricele lui F în raport cu laturile triunghiului se găsesc pe o dreaptă care este chiar directoarea parabolei (probl. 1316) şi care trece prin ortocentru (probl. 295). *A doua soluție.* Se transformă figura prin polare reciproce, luînd pe F ca centru al cercului director. Parabolei îi corespunde un cerc (C) trecînd prin punctul F; triunghiului dat îi corespunde un triunghi abc, înscris în cerc, iar ortocentrului îi corespunde o dreaptă care se obține astfel: se duc prin punctul F perpendiculare pe dreptele Fa, Fb, Fc care întîlnesc respectiv laturile bc, ca, ab în punctele α, β, γ, coliniare (probl. 1221). Trebuie dovedit că dreapta $\alpha\beta\gamma$ trece prin centrul C al cercului (C). $F\alpha$ întîlnește cercul în punctul a' diametral opus lui a; b', c' punctele analoge. Teorema lui Pascal aplicată hexagonului $Fa'acbb'F$ arată că punctele α, C, β sînt coliniare. *A treia soluție.* Fie (A), (B), (C) laturile triunghiului circumscris, (A'), (C'), tangentele perpendiculare respectiv pe (A), (C) și fie (Δ) dreapta de la infinit tangentă parabolei. Se aplică teorema lui Brianchon hexagonului circumscris ale cărui laturi se succed în ordinea (A), (B), (C), (C'), (Δ), (A'). Dreapta ce unește punctul (A, B) cu punctul (C', Δ), aceea ce unește punctele (B, C), (Δ, A') și dreapta care unește punctele (C, C') și (A, A') sînt concurente. Dar primele drepte sînt două înălțimi ale triunghiului dat, iar a treia este directoarea parabolei, căci trece (probl. 1337) prin punctele de întîlnire a două tangente perpendiculare oarecare. **1352.** Se transformă figura prin polare reciproce luînd ca cerc director un cerc oarecare cu centrul în F. Conica se transformă într-un cerc (C) (probl. 1347), iar punctelor m, n le corespund tangentele M', N' la cerc, perpendiculare pe secanta Omn și care o întîlnesc pe aceasta în punctele m', n'. Avem $\overline{Fm}\cdot\overline{Fm'} = \overline{Fn}\cdot\overline{Fn'} = R^2$, R fiind raza cercului director. Se deduce $\overline{Fm} = R^2:\overline{Fm'}$, $1:\overline{Fn} = R^2:\overline{Fn'}$. Deci $|1:\overline{Fm} - 1:\overline{Fn}| = |(\overline{Fm'} - \overline{Fn'}):R^2| = n'm':R^2 = 2r:R^2$, r fiind raza cercului (C). **1353.** Fie F, F' focarele conicei înscrise în triunghiul ABC. Avem (probl. 1330) $\sphericalangle BAF = \sphericalangle CAF'$ etc. (probl. 586). În cazul parabolei, un focar fiind situat la infinit, inversul său (probl. 256) se găsește pe cercul circumscris. **1354.** Se deduce cu ajutorul ultimei părți a problemei 1330. **1355.** $\sphericalangle MA'A_2 = \sphericalangle OAA_2 = \sphericalangle OA_2A$ şi triunghiul

MA_2A este isoscel. Deci $\overline{MA'}+\overline{MO}=\overline{MA_2}+\overline{MO}=R$. O elipsă cu focarele în A' și O și cu axa mare egală cu raza cercului (O) (G.M. XXV). **1356.** Se observă că $\overline{FN}=p=$const. Fie ω punctul unde PN intersectează axa. Avem $\overline{F\omega}=\overline{FN}=p$; deci ω este fix (G.M.XXIV). **1357.** Fie F_1 proiecția lui F pe MM_1. Triunghiul MM_1F este isoscel și avem $\overline{M_1F_1}=\overline{M_2F}=p$. Locul este un cerc cu centrul în F (G.M. XXVII). **1358.** Fie F_1 un punct al dreptei (D), I mijlocul segmentului $\overline{FF_1}$, (Δ) perpendiculara pe mijlocul lui $\overline{FF_1}$, F' proiecția lui F pe (D), N intersecția dreptei FF' cu (Δ), iar M simetricul lui N în raport cu I. Figura FMF_1N este un romb. Rezultă că $\overline{MF_1}=\overline{MF}$ și $\overline{MF_1}\perp(D)$. Deci M se află pe o parabolă (P) care are punctul F ca focar și pe (D) ca directoare. Deoarece pe (Δ) există un singur punct M, ea va fi tangentă la parabolă (G.M. XXIX). **1359.** Fie I punctul al cărui loc se cere, N intersecția lui MI cu (Δ) (fig. 391), P', Q' intersecțiile lui PI și QI cu QM și PM. Patrulaterul $MQ'IP'$ este circumscris conicei date și se știe (teorema lui Brianchon) că dreptele care unesc punctele de contact ale laturilor opuse trec prin intersecția diagonalelor. Fie ω acest punct; deoarece se află pe polarele lui P și Q, ω este polul dreptei (Δ), apoi din patrulaterul $MQ'IP'PQ$ rezultă că $(MI\omega N)=-1$. Deoarece M și N descriu două drepte fixe, iar ω este fix, I descrie a patra rază a fasciculului armonic $A(MI\omega N)$, A fiind punctul comun lui (D) și (Δ) (G.M. 1947, 4). **1360.** Prin ipoteză $\overline{AB}=\overline{CD}$ (fig. 392). Fie M mijlocul lui $\overline{BC}$, adică $\overline{MB}=\overline{MC}$; urmează că $\overline{MA}=\overline{MD}$ și deci $\overline{MA}\cdot\overline{MB}=\overline{MC}\cdot\overline{MD}$. M se găsește pe axa radicală a celor două cercuri. Din trapezul $O_1M_1M_2O_2$ rezultă că perpendiculara în M pe AD trece prin O, mijlocul distanței centrelor, adică printr-un punct fix. Deci toate secantele $ABCD$ se obțin ducînd perpendiculare în M pe raza variabilă OM. Ele înfășoară o parabolă care admite axa radicală ca tangentă în vîrf și O ca focar.

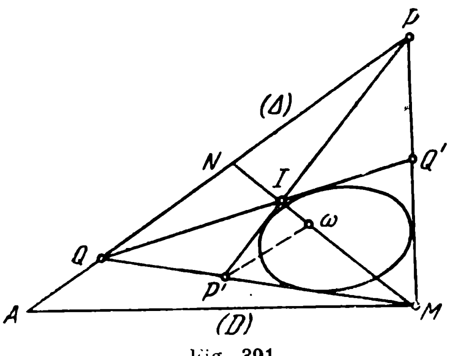

Fig. 391

Poziții particulare sînt cele patru tangente comune. Se poate pune problema și în modul următor. Să se arate că cele patru tangente a două cercuri împreună cu axa radicală sînt tangente unei parabole. Se adaugă dreapta de la infinit a planului și se aplică teorema corelativă a lui Pascal. **1361.** Din cauza simetriei latura opusă trece printr-un punct fix, simetricul lui P față de O. Fie Q' simetricul lui Q față de B (fig. 393). $\overline{PQ'}=\overline{DB}=2R$: $\overline{MQ}=\overline{MQ'}$, deci $\overline{MP}+\overline{MQ}=\overline{MP}+\overline{MQ'}=2R$. Locul lui M este elipsa care are P și Q ca focare și diametrul ca axă mare. Q va descrie cercul director al focarului P, iar AB este perpendiculară pe QQ' în mijlocul său. Deci M este punctul de contact. **1362.** Fie AOB un triunghi dreptunghic în O, C mijlocul lui $\overline{AB}$, O' simetricul lui O în raport

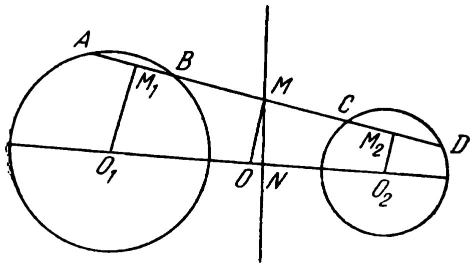

Fig. 392

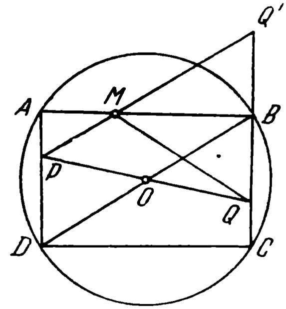

Fig. 393

cu C și A', B' extremitățile diametrului perpendicular pe $\overline{AB}$, al cercului circumscris (C). $O'A'$ și $O'B'$ sînt simetricele bisectoarelor în raport cu (C). Invers, laturile OA și OB sînt simetricele bisectoarelor unghiului $A'O'B'$ în raport cu (C). Paralela din O la BC mai intersectează cercul în F. Tangenta în O la cercul (C) și paralela OF, fiind izogonale în raport cu OA și OB, urmează că dreapta lui Simson a punctului F în raport cu triunghiul OAB este paralelă cu diametrul OCO'. Rezultă că directoarea parabolei (π), înscrisă în triunghiul OAB și avînd focarul în F, coincide cu diametrul OCO'. Parabola (π) este deci tangentă și diametrului $A'CB'$, fiindcă tangentele la o parabolă duse dintr-un punct al directoarei sînt perpendiculare. Dreapta FO' fiind paralelă cu $A'B'$, rezultă analog că parabola (π'), înscrisă în triunghiul $O'A'B'$ și avînd focarul în F, este de asemenea tangentă diametrului AB. Dar parabolele (π) și (π') coincid, fiindcă au același focar F și au două tangente comune — diametrele AB și $A'B'$. Aceasta demonstrează propoziția enunțată (G.M. 1947, 7). **1363.** Îndoim hîrtia așa ca F să vină într-un punct F_1 de pe (D) și fie (Δ) linia de îndoitură și I intersecția ei cu FF_1, care este perpendiculară pe (Δ). Avem $\overline{FI}=\overline{F_1I}$. Fie F' proiecția lui F pe (D) și N intersecția lui FF' cu (Δ), iar M pe (Δ), simetric cu N față de I. Figura FMF_1N este un romb, căci are diagonalele perpendiculare în mijlocul lor. Rezultă că $\overline{MF}=\overline{MF_1}$ și $MF_1 \| FNF'$ este perpendiculară pe (D). Deci M este pe parabola cu focarul F și directoarea (D). Se deduce că parabola nu mai are pe (Δ) alt punct afară de M. (Δ) este deci tangentă la parabolă în M și, prin urmare, parabola este înfășurătoarea dreptelor (Δ) (G.M. 1923.2). **1364.** Dreapta lui Simson a lui φ în raport cu triunghiul $A_1B_1C_1$ este tangenta în vîrf a unei parabole cu focarul în φ și înscrisă în triunghiul $A_1B_1C_1$ (probl. 1316). Dreapta (d) trece prin ortocentrul O al triunghiului $A_1B_1C_1$ (probl. 1351) și este paralelă cu dreapta lui Simson a lui φ (probl. 266). **1365.** Punctul lui Feuerbach aparține (probl. 1249) cercului celor nouă puncte $A_1B_1C_1$ și cercului înscris (I). După problema precedentă este suficient să se arate că φ este ortopolul dreptei OI. Se știe că φ este ortopolul unei drepte (Δ) trecînd prin O (probl. 266), φ avînd puteri egale față de cercurile $A_1B_1C_1$ și (I), rezultă din teorema lui Lemoine (probl. 705) că (Δ) trece și prin I. **1366.** φ, ortopolul dreptei OH' în raport cu ABC, este focarul unei parabole înscrise în $A_1B_1C_1$ și a cărei directoare (probl. 1364) trece prin O și este paralelă cu dreapta lui Simson a lui φ în raport cu $A_1B_1C_1$. Tot φ este focarul unei parabole înscrise în $A'B'C'$ și a cărei directoare este paralelă cu dreapta lui Simson a lui φ în raport cu $A'B'C'$ și trece prin H'. Se va arăta că dreptele lui Simson ale lui φ în raport cu $A_1B_1C_1$ și $A'B'C'$ sînt paralele (G.M. XXXIV). **1367.** H și H' fiind ortocentrele celor două triunghiuri, iar M un punct al locului, unghiul HMH' este constant (probl. 267). Locul este un cerc. **1368.** Fie $A_1B_1C_1$ triunghiul median al triunghiului ABC. Deoarece BC este polara lui A, B_1C_1 este tangentă la parabolă. Restul rezultă din problema 1351. **1369.** *Prima soluție.* Fie h punctul diametral opus lui o în cercul omm'; mh, $m'h$ avînd direcții fixe, locul punctului h este o dreaptă (D) care întîlnește cercul în al doilea punct F, fix. Există o parabolă de focar F și tangentă dreptelor (L), (L'), tangenta la vîrf a acestei parabole fiind dreapta (Δ) ce unește proiecțiile lui F pe cele două tangente (L), (L'). F fiind pe cercul omm', proiecția lui pe mm' este de asemenea pe (Δ) (probl. 257) și mm' este tangentă la parabolă. *A doua soluție.* Fie (a, a'), (b, b') două perechi de puncte omoloage. Există o parabolă tangentă dreptelor (L), (L'), aa', bb'. Focarul său este punctul lui Miquel (probl. 219) al patrulaterului format de aceste drepte și tangenta la vîrf trece prin proiecțiile focarului pe cele patru tangente. O tangentă oarecare la parabolă întîlnește pe (L), (L') în punctele μ, μ', care descriu pe (L), (L') diviziuni asemenea, căci punctele de la infinit ale celor două diviziuni se corespund. Aceste noi diviziuni au două perechi de puncte omoloage comune cu diviziunile date (a, a') și (b, b'). Deci ele coincid și mm' este tangenta parabolei.

1370. Fie O mijlocul lui $\overline{FF'}$. Avem succesiv $(\overline{MF'} - \overline{MF})^2 = = \overline{MF'}^2 + \overline{MF}^2 - 2\overline{MF}\cdot\overline{MF'} = 2\overline{OM}^2 + 2\overline{OF}^2 - 2\overline{OM}^2 = 2\overline{OF}^2$. Hiperbola întîlnește axa FF' în vîrfurile A, A', astfel ca $\overline{OF} = \overline{OF'} = \overline{OA}\sqrt{2} = = \overline{OA'}\sqrt{2}$. **1371.** Fie P proiecția lui M pe $\overline{AA'}$, iar O mijlocul lui $\overline{AA'}\cdot \triangle A'MP \sim \triangle MAP$. Deci $\overline{PM}^2 = \overline{PA}\cdot\overline{PA'} = \overline{OP}^2 - \overline{OA}^2$. Dacă luăm pe $\overline{AA'}$ punctele F, F', astfel ca $\overline{OF} = \overline{OF'} = a\sqrt{2}$, unde s-a notat $\overline{AA'} = 2\overline{OA} = 2a$, se deduce $\overline{MF'} - \overline{MF} = 2a$. **1372.** Dreapta AM întîlnește pe AL în μ și cercul (O), în m. Din problema precedentă deducem $\sphericalangle MAA' - \sphericalangle MA'A = 90°$. Dar $\sphericalangle mAA' + + \sphericalangle MA'A = 90°$. Deci $\sphericalangle MAA' + \sphericalangle mAA' = 180°$ și dreptele AM și Am sînt simetrice în raport cu AA'. Rezultă $(A'\mu mM) = -1$. **1373.** Fie $\overline{BB'}$ diametrul perpendicular pe $\overline{AA'}$ în cercul (O) descris pe $\overline{AA'}$ ca diametru și AL tangenta în A la cerc. Dreapta de la infinit, considerată ca făcînd parte din aceeași figură cu H, are ca omoloagă pe BB'. (Δ) intersectează pe AL în I. Paralela din A' la (Δ) întîlnește pe BB' în K. Dreapta KI, care este transformata (Δ') a lui (Δ), întîlnește cercul în punctele m, m', iar dreptele $A'm$, $A'm'$ intersectează pe (Δ) în M, M', punctele căutate. **1374.** *Prima soluție.* Asimptotele (Δ), (Δ') sînt tangente hiperbolei în punctele E, F, de la infinit. Fie CD a doua diagonală a paralelogramului, AD, BC fiind paralele cu (Δ) și AC, BD cu (Δ'). Se va aplica teorema lui Pascal hexagonului înscris, ale cărui laturi sînt succesiv AE sau AD (1), tangenta în E sau asimptota (Δ) (2), EB sau BC (3), BF sau BD (4), tangenta în F sau asimptota (Δ') (5), FA sau AC (6). Punctele de întîlnire ale perechilor de drepte (1,4), (2,5), (3,6) sînt coliniare, adică CD trece prin O. *A doua soluție.* Dreapta AB intersectează dreapta de la infinit EF în punctul P. Polara punctului P trece prin intersecția C a dreptelor AF și BE, prin intersecția D a dreptelor AE, BF și prin intersecția O a tangentelor în E, F la conică. **1375.** Consecință a precedentei. **1376.** *Prima soluție.* Paralela dusă prin punctul A la asimptota (Δ') întîlnește asimptota (Δ) în H, iar paralela dusă prin B la (Δ) întîlnește pe (Δ') în punctul K. Fie E, F punctele de la infinit pe dreptele (Δ), (Δ'). Se aplică teorema lui Pascal hexagonului înscris ale cărui laturi sînt succesiv AF sau AH (1), tangenta în F sau (Δ') (2), dreapta EF sau dreapta de la infinit (3), tangenta în E sau (Δ) (4), EB sau BK (5), BA (6). Rezultă că $HK \| AB$ și $\overline{KH} = \overline{BD} = \overline{CA}$. *A doua soluție.* Dreapta dată întîlnește dreapta de la infinit în punctul P. Polara lui P trece prin punctul de întîlnire O a tangentelor (Δ), (Δ') în E și F, prin conjugatul armonic M al lui P în raport cu E și F și prin conjugatul armonic N al lui P în raport cu A și B. Dar OM este de asemenea polara lui P în raport cu unghiul EOF, deci intersectează pe CD într-un punct N, conjugat armonic al lui P în raport cu C și D. *A treia soluție*. Unim centrul O cu mijlocul I al coardei $\overline{AB}$ și ducem $OK \| AB$; OK și OI sînt două diametre conjugate. Deci OK, OI sînt conjugate armonic în raport cu asimptotele. Se deduce că I este mijlocul lui $\overline{CD}$. **1377.** Caz particular al problemei precedente. **1378.** *Prima soluție*. Fie C punctul de tangență al dreptei de la infinit cu parabola. Se aplică teorema lui Brianchon triunghiului format de tangentele în A, B, C la parabolă. *A doua soluție*. Se aplică teorema lui Pascal triunghiului înscris ABC. **1379.** Se consideră o hiperbolă echilateră de centru O și să luăm pentru fixarea ideilor două puncte A, B pe o ramură și un punct C pe cealaltă. Fie $A'B'C'$ triunghiul median al lui ABC. Va fi suficient să arătăm că patrulaterul $OA'B'C'$ este inscriptibil. OA' este diametrul conjugat al direcției BC. Deci bisectoarele unghiurilor formate de aceste drepte sînt paralele cu asimptotele și se deduce cu ușurință $\sphericalangle A'OB' + \sphericalangle A'C'B' = 180°$. **1380.** Fie O centrul curbei, C_1 piciorul înălțimii vîrfului C, D al doilea punct de întîlnire a înălțimii cu hiperbola, M mijlocul segmentului $\overline{CD}$, E și F punctele de la infinit ale hiperbolei situate pe asimptotele perpendiculare OE, OF. *Prima metodă*. Cercul lui Euler trece prin punctele C', C_1 și O după problema precedentă. Patrulaterul $OC_1C'M$ fiind inscriptibil, M aparține și el cercului și D este ortocentrul. *A doua metodă*. Se aplică teorema lui Pascal hexagonului înscris ale cărui vîrfuri sînt succesiv A, B, C, D, E, F. Se observă că $BE \perp AF$, $DE \| BE$ și EF este dreapta de la infinit. Dreptele AB și DE se întîlnesc în I, BC și EF în J, la infinit pe BC, CD și FA în K, ortocentrul triunghiului AID. Punctele I, J, K sînt coliniare, adică $IK \| BC$ și deci $AD \perp BC$. **1381.** Caz particular al problemei precedente. *Altă soluție*. Se consideră un unghi drept, variabil, avînd vîrful A într-un punct fix al curbei și ale cărui laturi întîlnesc curba în punctele M, N. Dreapta MN trece printr-un punct fix (punctul lui Frégier) situat pe normala în punctul A. În cazul particular cînd AM, AN devin paralele cu asimptotele, dreapta MN devine dreapta de la infinit și deci punctul lui Frégier este punctul de la infinit al normalei în A, iar dreapta MN va fi mereu paralelă cu normala sau perpendiculară pe tangenta AT. **1382.** Se consideră o conică oarecare, un punct A pe ea și o dreaptă (Δ). Ducem prin A coardele AM și AM' egal înclinate pe (Δ). Ele formează două fascicule în involuție. După teorema lui Frégier dreapta MM' trece printr-un punct fix φ_1. Razele unite ale involuției sînt coardele AB și AC, respectiv paralele și perpendiculare pe (Δ). Coardele MM' corespunzătoare acestor direcții sînt tangente la conică în B și C. La intersecția acestor tangente se află punctul φ_1. Se observă că coarda BC trece prin punctul φ al lui Frégier, corespunzător involuției descrie de un unghi drept cu vîrful în A. Pentru o hiperbolă echilateră și (Δ) o asimptotă a ei, cazul problemei propuse, dreapta BC este la infinit, deci φ_1 este polul dreptei de la infinit, adică centrul conicei. Coarda MM' este un diametru al hiperbolei (G.M.F. 1952, 10). **1383.** Să considerăm triunghiul ABC conjugat cu hiperbola de centru O. BC fiind polara lui A, dreapta OA este diametrul conjugat al direcției BC. O asimptotă a hiperbolei face unghiuri egale cu dreptele OA, BC ca și cu dreptele OB, CA. Se deduce că unghiul dreptelor OA, OB este egal cu unghiul dreptelor CA, CB. **1384.** Fie c', b' intersecțiile celor două drepte cu cealaltă asimptotă (Y), C' mijlocul segmentelor $\overline{cc'}$ și $\overline{AB}$, B' mijlocul segmentelor $\overline{bb'}$ si $\overline{AC}$. Proiectînd pe asimptota (X), putem scrie $\text{pr}.\overline{B'O}+\text{pr}.\overline{OC'} = \text{pr}.\overline{B'C'}$ sau $\overline{bO}:2+\overline{Oc}:2=\text{pr}.\overline{CB}:2$ sau $\overline{bc}=\text{pr}.\ \overline{CB}$. *Altă soluție.* Se poate arăta că proprietatea este adevărată pentru o hiperbolă oarecare. O dreaptă oarecare (Δ) întîlnește hiperbola în punctele P, P' și dreptele AB, AC în Q, Q'. Q și Q' descriu pe (Δ) diviziuni omografice de aceeași bază, avînd ca puncte duble punctele P și P'. Cînd (Δ) se confundă cu asimptota (X), punctele P și P' se găsesc la infinit. **1385.** Proprietatea rezultă din problema precedentă și din problema 263. **1386.** Fie P un punct variabil pe (d). Izogonalele cevienelor BC, CP descriu fascicule omografice cu vîrfurile în B și C. Intersecția lor descrie deci o conică. Luîndu-se inversele punctelor de întîlnire a laturilor cu dreapta (d), se obțin ca puncte ale locului vîrfurile. Inversele punctelor M, N sînt la infinit în direcțiile dreptelor lui Simson ale acestor puncte. Inversul lui O este ortocentrul H etc. **1387.** (C_1) și (C_2) conicele, A punctul fix, (Δ_1) și (Δ_2) polarele lui A față de (C_1) și (C_2). Unui punct M pe (Δ_1) îi corespunde o polară ce trece prin A căreia îi corespunde un singur pol N pe (Δ_2), deci M și N descriu diviziuni omografice pe (Δ_1) și (Δ_2). MN înfășoară o conică tangentă la (Δ_1) și (Δ_2). Cînd $M\to\infty$, polara este diametrul conicei (C_1), care trece prin A; acestuia îi corespunde N_0. Cînd $N\to\infty$, avem analog M_0 polul diametrului conicei (C_2) trecînd prin A. M_0 și N_0 sînt punctele de contact ale conicei loc cu (Δ_1) și (Δ_2). **1388.** O dreaptă (D) intersectează parabola în M și M'; N mijlocul lui MM' este punctul al cărui loc se cere F_∞ punctul la infinit pe axa parabolei. Avem două fascicule: unul cu vîrful în punctul fix A, al doilea cu vîrful în F_∞. Locul căutat este o conică ce trece prin A și F_∞. Dreapta AF_∞ considerată în primul fascicul (A) are ca rază omoloagă dreapta de la infinit care este tangentă la conică, deci conica este o parabolă, cu axa paralelă cu axa parabolei date. Dreapta AF_∞ considerată în al doilea fascicul (F_∞) are ca rază omoloagă coarda în care A este mijlocul ei; aceasta este tangenta la parabola loc. Parabola trece prin A', proiecția lui A pe axa parabolei date. Axa parabolei loc trece prin mijlocul lui AA'. Indicațiile sînt date pentru A, interior parabolei. Pentru A exterior se aplică principiul continuității. **1389.** Fie O vîrful parabolei (fig. 394). Axa parabolei este

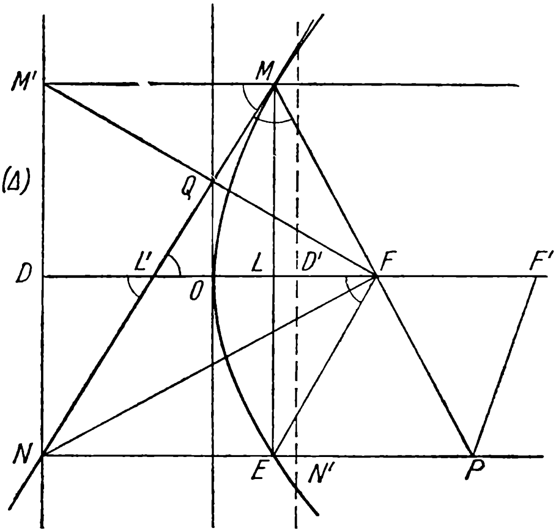

Fig. 394

intersectată de directoarea (Δ) și de tangenta în M respectiv în D și L'. L este proiecția lui M pe axă, P punctul al cărui loc se cere, M' proiecția lui M pe (Δ), Q intersecția tangentei MN cu tangenta în vîrf. Avem $\overline{MF}=\overline{MM'}$, deci $\sphericalangle FMQ=\sphericalangle QMM'=\sphericalangle ML'F$. Triunghiul FML' este isoscel, deci $\overline{OL}=\overline{OL'}$, de unde $\overline{LF}=\overline{DL'}$. Rezultă că MNP este isoscel. Fie ME înălțimea din M. Avem $\triangle DNL'=\triangle LEF$, deci $EF \parallel MN$ și $\overline{EP}=\overline{PF}$. Se deduce că NF este înălțimea din N. Problema se reduce la următoarea: se dă un punct fix F și o dreaptă fixă (Δ); se ia N arbitrar pe (Δ) și se cere locul intersecției perpendicularelor duse din N pe (Δ) și în F pe FN. Se formează două fascicule omografice, unul cu vîrful în F și altul cu vîrful la infinit în direcția axei DF, deci locul cerut este o conică. Cînd N coincide cu D, P vine în F, apoi cînd $N \to \infty$, $P \to \infty$ în direcția axei OF. Curba este simetrică față de această axă și, avînd un singur punct la infinit, este o parabolă.

Pentru determinarea ei se va lua de o parte și alta a lui F, $\overline{FF'}=$ $=\overline{FD'}=k$ și fie N' proiecția lui D' pe NP. Se determină k astfel ca $\overline{PF'}=\overline{PN'}$ și se găsește $k=\frac{1}{4}\overline{FD}=\frac{p}{4}$, p fiind parametrul parabolei date. **1390.** Perpendicularele în A și B sînt întîlnite de paralelele duse prin Q și P la AB, respectiv în E și C (fig 395). AP și BQ formează fascicule omografice, deci I descrie o conică. Cînd $M\to\infty$, AP și BQ se confundă cu AB, deci AB face parte din loc. Conica se descompune în AB și încă o dreaptă; cum C și E aparțin locului, locul este dreapta CE. **1391.** Considerăm fasciculul de conice ce trec prin B, C și sînt tangente în A dreptei date (Δ) (fig 396). Punctele de intersecție ale conicelor din fascicul determină pe orice dreaptă deci și pe dreapta de la infinit două diviziuni în involuție. Punctele duble ale involuției sînt

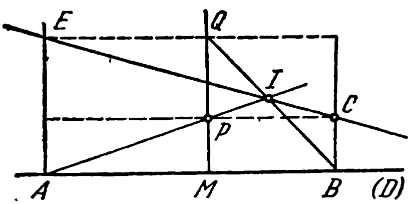

Fig. 395

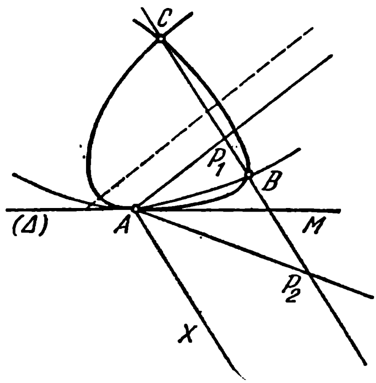

Fig. 396

punctele de contact ale conicelor tangente dreptei de la infinit și sînt date de direcțiile axelor parabolelor fasciculului. Celelalte perechi de puncte ale involuției sînt conjugate față de punctele duble, deci punctele de la infinit ale conicelor degenerate (Δ, BC), (AB, AC) din fascicul sînt conjugate față de punctele duble. Rezultă că, dacă ducem $AX \parallel BC$, fasciculele $A(P_1P_2MX)$ și $A(P_1P_2BC)$ sînt armonice. În primul fascicul $AX \parallel BC$, deci M este mijlocul lui $\overline{P_1P_2}$. Din al doilea fascicul deducem $(P_1P_2BC)=$ $=-1$ și cum M este mijlocul lui P_1P_2, avem $\overline{MP_1^2}=\overline{MB}\cdot\overline{MC}$. (G.M.F. 1951,11). **1392.** Folosim teorema: dacă o conică intersectează laturile AB, BC, CA ale unui triunghi în punctele (c, c'), (a, a'), (b, b'), între segmentele determinate de conică pe laturile triunghiului avem relația cunoscută:

$$\frac{\overline{Ac}\cdot\overline{Ac'}}{\overline{Ab}\cdot\overline{Ab'}}\cdot\frac{\overline{Ba}\cdot\overline{Ba'}}{\overline{Bc}\cdot\overline{Bc'}}\cdot\frac{\overline{Cb}\cdot\overline{Cb'}}{\overline{Ca}\cdot\overline{Ca'}}=1; \qquad (1)$$

N fiind intersecția tangentelor în M_1 și M_2, conica va fi tangentă triunghiului NT_1T_2. Relația devine

$$\left(\frac{\overline{NM_2}}{\overline{NM_1}}\cdot\frac{\overline{T_2Q}}{\overline{T_2M_2}}\cdot\frac{\overline{T_1M_1}}{\overline{T_1O}}\right)^2=1$$

sau

$$\frac{\overline{NM_2}}{\overline{NM_1}}\cdot\frac{\overline{T_2O}}{\overline{T_2M_2}}\cdot\frac{\overline{T_1M_1}}{\overline{T_1O}}=-1, \tag{2}$$

se ia semnul —, deoarece M_1, O, M_2 sînt interioare laturilor triunghiului. Aplicînd teorema lui Menelaus triunghiului NT_1T_2 intersectat de transversala M_2M_1T, obținem

$$\frac{\overline{T_2T}}{\overline{TT_1}}\cdot\frac{\overline{T_1M_1}}{\overline{M_1N}}\cdot\frac{\overline{M_2N}}{\overline{T_2M_2}}=-1. \tag{3}$$

Împărțind (2) cu (3), avem

$$\frac{\overline{T_2O}}{\overline{T_1O}}\cdot\frac{\overline{TT_1}}{\overline{T_2T}}=1 \text{ sau } \frac{\overline{T_2O}}{\overline{T_2T}}=-\frac{\overline{T_1O}}{\overline{T_1T}},$$

deci diviziunea OTT_1T_2 este armonică (G.M.F.I. 1952). **1393.** Fie M un punct variabil pe o hiperbolă care are asimptotele Ox, Oy; P, P' punctele de întîlnire a paralelelor duse prin M la Ox, Oy respectiv cu Oy, Ox; Q, Q' proiecțiile lui M pe Oy, Ox; A, A' punctele de la infinit ale hiperbolei, situate pe Ox, Oy. Cînd M se mișcă, dreptele MA, MA' sînt raze omoloage a două fascicule omografice, avînd ca centre pe A și A'; deci aceste raze întîlnesc pe Oy, Ox în punctele P, P', care sînt puncte omoloage a două diviziuni omografice. Punctele limită sînt confundate cu punctul O. Deci $\overline{OP}\cdot\overline{OP'}=k$. Dar $\overline{MQ}=k_1\cdot\overline{MP}$ și $\overline{MQ'}=k_2\cdot MP'$ și se deduce $\overline{MQ}\cdot\overline{MQ'}=$const. **1394.** Tangenta în punctul M la hiperbolă întîlnește asimptotele Ox, Oy în punctele P, Q. Aceste puncte descriu pe Ox, Oy diviziuni omografice, avînd punctele limită confundate cu punctul O. Deci $\overline{OP}\cdot\overline{OQ}=c^2$. Fie P', Q' punctele de întîlnire ale unei tangente fixe la hiperbolă cu Ox, Oy, S aria ΔOPQ, S' aria $\Delta OP'Q'$. Avem (probl 742) $S:S'=OP\cdot OQ:$ $:OP'OQ'=c^2:c^2=1$. Deci $S=S'$. **1395.** Fie (Δ) o dreaptă oarecare ce întîlnește pe Ox, Oy în P și Q astfel ca $\overline{OP}\cdot\overline{OQ}=c^2$. Aria ΔOPQ este constantă. Hiperbolele conjugate H, H' care au ca asimptote pe Ox, Oy și a căror distanță focală este egală cu $2c$, sînt bine determinate, căci vîrfurile dreptunghiului construit pe axele lor sînt punctele de întîlnire ale asimptotelor cu cercul de centru O și rază c. În afară de asimptota Oy se pot duce prin Q la hiperbolele (H), (H') respectiv tangentele QP_1, QP_2; P_1 și P_2 sînt pe Ox. După teorema precedentă avem $\overline{OP}\cdot\overline{OQ}=\overline{OP_2}\cdot\overline{OQ}=c^2$. Se deduce $\overline{OP}=\overline{OP_1}=\overline{OP_2}$ și deci P coincide cu unul din punctele P_1, P_2, adică dreapta PQ este tangentă la (H) sau (H'). **1396.** Fie M' al doilea punct de întîlnire a hiperbolei (H) și dreptei (Δ). Paralelele duse prin M, M' la Ox întîlnesc diametrul (D) paralel cu (Δ) în punctele m, m'. Cînd (Δ) se deplasează paralel cu (D), punctele m, m' descriu pe (D) diviziuni în involuție, al căror punct central este centrul O al hiperbolei. Deci $\overline{Om}\cdot\overline{Om'}=k$. Dar $\overline{Om}=\overline{PM}$, $\overline{Om'}=\overline{PM'}=\overline{MP'}$ (probl 1376). Deci $\overline{PM}\cdot\overline{MP'}=k$ sau $\overline{MP}\cdot\overline{MP'}=-k$ Se poate deduce că k este egal în valoare absolută cu pătratul semidiametrului (D) și este negativ dacă diametrul (D) este transvers și pozitiv dacă acest diametru este netransvers. **1397.** După problema precedentă $\overline{OA}^2=\overline{MP}\cdot\overline{MP'}=$ $=(\overline{IP}-\overline{IM})(\overline{IP}+\overline{IM})=\overline{IP}^2-\overline{IM}^2=\overline{IO}^2-\overline{IM}^2$ sau $\overline{IM}^2=\overline{OI}^2-$ $-\overline{OA}^2=\overline{IA}\cdot\overline{IA'}$. **1398.** Fie M un punct pe hiperbolă, M_1 diametral opusul lui M în cercul MAA'. După problema precedentă hiperbola echilateră este locul geometric al punctelor M de contact al unui cerc variabil, trecînd prin punctele fixe A și A' cu tangentele paralele cu o direcție fixă. Deci și M_1 aparține hiperbolei. Tangentele în M și M_1 la cerc sînt paralele cu tangentele în A și A' la hiperbolă. **1399.** Se păstrează notațiile celor două probleme precedente. Avem $\sphericalangle MAA'-\sphericalangle MA'A=\sphericalangle MAA'-\sphericalangle AMI=\sphericalangle MIA=$ const. **1400.** P și P' descriu pe baza comună (Δ) diviziuni omografice în care punctele duble sînt confundate la infinit. **1401.** *Prima soluție.* Se construiește pe cele două diametre conjugate paralelogramul $RR'SS'$. ROS și $R'OS'$ sînt de asemenea două diametre conjugate. Axele curbei sînt razele omoloage perpendiculare ale fasciculelor involutive formate de diametrele conjugate. Se duce un arc de cerc de centru ω și trecînd prin punctul O. Fie m, m', r, r' punctele unde acest cerc întîlnește diametrele OM, OM', OR, OR'. Dreptele mm', rr' se întîlnesc în punctul i, iar dreapta ωi întîlnește cercul în punctele u, u'. Axele elipsei sînt dreptele Ou, Ou'. Pentru a găsi mărimea axelor se consideră punctele T, T' unde tangenta în M întîlnește pe Ou, Ou'. I și I' fiind proiecțiile lui M pe Ou, Ou', jumătatea axei Ou este $\sqrt{\overline{OI}\cdot\overline{OT}}$, iar jumătatea axei Ou' este $\sqrt{\overline{OI'}\cdot\overline{OT'}}$. *Altă construcție* rezultă din teoremele lui Apollonius. Din punctul M se coboară o perpendiculară pe diametrul $M'N'$ și se ia pe aceasta $\overline{MK}=\overline{OM'}=\overline{ON'}$. Pe $\overline{OK}$ drept diametru se descrie un cerc, se unește M cu centrul

I al acestui cerc și se iau *p* și *q* intersecțiile acestei drepte cu cercul. Direcțiile axelor sînt *Op* și *Oq*, iar lungimile lor sînt egale cu $\overline{Mp}, \overline{Mq}$. **1402.** Fie *Q* polul dreptei (Δ), *d* punctul de întîlnire a dreptei (Δ) cu *PQ*, iar *e* polul dreptei *PQ*. *Qm* este polara punctului *c*. Dreptele *Pm*, *Qm* sînt raze omoloage a două fascicule omografice cu vîrfurile în *P* și *Q*. Locul este o conică ce trece prin punctele *P* și *Q*, prin punctele de întîlnire a conicei cu dreapta (Δ) și prin punctele de contact ale tangentelor duse din *P* la conică. Tangentele în *P* și *Q* sînt dreptele *Pe*, *Qe*, omoloagele razei *PQ*, considerate ca făcînd parte din unul din fascicule. Cînd dreapta *PQ* este tangentă în *e* la conica (*C*), conica loc se reduce la o dreaptă, căci *PQ*, considerată ca făcînd parte dintr-unul din fascicule, este propria sa omoloagă în raport cu celălalt. **1403.** *M* fiind un punct al locului, dreptele *FM*, *F'M* sînt raze omoloage a două fascicule omografice, căci direcțiile acestei drepte sînt simetrice în raport cu direcția fixă (*D*). Locul este o hiperbolă echilateră trecînd prin *F*, *F'*, tangentele în aceste puncte fiind paralele cu direcția simetrică a lui (*D*) în raport cu *FF'*, centrul fiind mijlocul lui $\overline{FF'}$, iar asimptotele una perpendiculară și alta paralelă cu (*D*). **1404.** Fie patru puncte fixe *a*, *b*, *c*, *d* și un punct *m* pe (*D*). Prin *a*, *b*, *c*, *d*, *m* se poate duce o singură conică ce intersectează pe (*D*) într-un al doilea punct *m'*. Reciproc, dacă plecăm de la *m'*, ajungem la *m*. Cele trei perechi de laturi opuse ale patrulaterului format de cele patru puncte sînt trei conice degenerate ale fasciculului. De aici rezultă imediat proprietatea (*a*). Cînd (*D*) este una din cele trei diagonale ale patrulaterului, extremitățile acestei diagonale sînt puncte duble ale involuției, determinate pe această dreaptă de conicele fasciculului, și se deduce propoziția (*b*). **1405.** Fie *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6* șase puncte ale unei conice, *a* punctului de întîlnire a dreptelor (*12*), (*45*), *b* intersecția dreptelor (*23*), (*56*), iar *c* intersecția dreptelor (*34*), (*61*). Fie α, β punctele de întîlnire a dreptei *ab* cu conica, iar *p* punctul unde se întîlnește *ab* cu diagonala (*25*). Laturile (*16*), (*25*) ale patrulaterului (*1256*) intersectează dreapta *ab* în două puncte omoloage ale involuției determinate de perechile de puncte (*a*, *b*) și (α, β). Același lucru se poate spune de laturile (*34*) și (*25*) ale patrulaterului (*2345*). Dreptele (*16*) și (*34*) trec amîndouă prin omologul punctului *p* în această involuție. Ele se intersectează deci într-un punct pe *ab*. **1406.** Să considerăm două triunghiuri *ABC*, *DEF* înscrise într-o conică (Γ) și să arătăm că ele sînt circumscrise unei alte conice (Γ'). Fie *P* intersecția dreptelor *AB* și *DE*, *Q* intersecția dreptelor *BC* și *EF*, *R* intersecția dreptelor *CD* și *FA*

Punctele P, Q, R sînt coliniare după teorema lui Pascal. Deci dreptele AF, CD și PQ sînt concurente într-un punct R și teorema lui Brianchon demonstrează propoziția. **1407.** Proprietate duală a teoremei lui Desargues și Sturm (probl 1404). **1408.** Fie (C), (C_1) două conice oarecare ale fascicului, Q intersecția polarelor lui P în raport cu (C), (C_1), (Γ_0) altă conică oarecare a fasciculului. Dreapta PQ întîlnește conicele (C), (C_1), (Γ) în punctele (a, a'), (a_1, a_1'), (m, m'). Aceste puncte definesc o involuție (probl. 1404). P și Q fiind conjugate cu perechile de puncte (a, a') și (a_1, a_1'), sînt punctele duble ale involuției și deci conjugate și în raport cu m, m'. **1409.** Proprietatea duală a problemei precedente este următoarea: locul polilor unei drepte fixe (Δ), în raport cu conicele unui fascicul tangențial, este o dreaptă (D). Cînd (Δ) este dreapta de la infinit, polul ei în raport cu o conică este centrul acesteia. Conicele degenerate ale fasciculului se compun din cele trei perechi de vîrfuri opuse. Mijloacele diagonalelor aparțin deci locului. **1410.** Fie A, B, C, D cele patru puncte comune tuturor conicelor fasciculului, iar (Δ) o dreaptă în plan. Să căutăm locul polilor dreptei (Δ) în raport cu aceste conice. Fie P și Q intersecțiile dreptei (Δ) cu laturile opuse. AB și CD, P' și Q' conjugatele armonice ale punctelor P, Q, respectiv în raport cu A și B, C și D, iar M polul dreptei (Δ) în raport cu o conică (Γ) a fasciculului. Dreptele $P'M$ și $Q'M$ sînt polarele punctelor P, Q în raport cu (Γ). Dreptele $P'M$, $Q'M$ sînt raze omoloage a două fascicule omografice cu centrele în punctele fixe P' și Q'. Locul este în general o conică, circumscrisă triunghiului diagonal al patrulaterului format de cele patru puncte și trecînd prin conjugatele armonice ale punctelor de întîlnire a dreptei (Δ) cu laturile, în raport cu vîrfurile patrulaterului, situate pe aceleași laturi. În cazul cînd (Δ) este dreapta de la infinit. locul este o conică ce trece prin mijloacele laturilor și prin punctele diagonale ale patrulaterului. **1411.** Să considerăm punctele comune cercurilor ortoptice a două conice (C) și (C'); din aceste puncte se văd (C) și (C') sub unghiuri drepte. Involuția tangentelor duse din fiecare din aceste puncte conicelor fasciculului tangențial determinat de (C) și (C') (probl. 1407) cuprinde deci două perechi de raze omoloage perpendiculare; ea se compune deci din drepte perpendiculare și propoziția este demonstrată. Între conicele fasciculului există trei conice degenerate, compuse din cîte o pereche de vîrfuri opuse ale patrulaterului complet circumscris, comun. **1412.** Fie I și J punctele circulare, iar (a, a'), (b, b'), (m, m') punctele de la infinit ale celor două hiperbole date și ale unei conice din fasciculul punctual determinat de ele. I și J fiind conjugate armonic în raport cu perechile de puncte (a, a') și (b, b'), vor fi conjugate armonic în raport cu (m, m'), căci conicele unui fascicul punctual determină o involuție pe dreapta de la infinit (probl. 1404). Conicele degenerate ale fasciculului vor trebui să fie drepte perpendiculare, adică coardele comune a două hiperbole echilatere sînt două cîte două perpendiculare. **1413.** Se observă că dreptele AD, BD, CD împart în rapoarte egale laturile $\overline{BC}$ și $\overline{C'B'}$, $\overline{CA}$ și $\overline{A'C'}$, $\overline{AB}$ și $\overline{B'A'}$ ale triunghiurilor ABC, $A'B'C'$; punctele A_0, B_0, C_0, unde întîlnesc dreptele $C'B'$, $A'C'$, $B'A'$, sînt vîrfurile unui triunghi omologic cu triunghiul $A'B'C'$, sau punctele de contact ale laturilor acestui triunghi cu o conică înscrisă (ω). Cînd punctul P se mișcă pe conica (γ), punctele B_1, C_1 descriu diviziuni omografice pe dreptele $A'C'$, $A'B'$ și coincid cu punctele C' și B', A' și C_0, B_0 și A', cînd punctul P este diametral opus punctelor A, B, C pe conica (γ). Dreapta B_1C_1 este deci tangentă conicei (ω) și același lucru se poate spune de dreptele C_1A_1 și A_1B_1; cele trei puncte sînt deci coliniare. **1414.** a) Fie P proiecția sub unghiul α a lui N pe Ox (fig 397). Punctul H se află la intersecția dreptelor OM și NP,

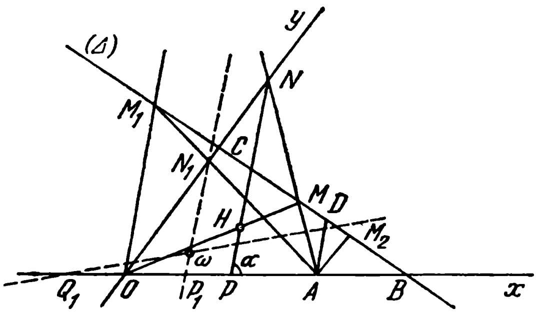

Fig. 397

care pot fi considerate ca raze corespunzătoare a două fascicule omografice: unul cu vîrful în O, altul cu vîrful în (α), punctul de la infinit dat de direcția α. Rezultă că H descrie o conică ce-trece prin O și prin (α), adică o hiperbolă a cărei direcție asimptotică face cu Ox unghiul α. Particularizînd pe M, rezultă că punctul $C \equiv (\Delta, Oy)$ și punctul D, unde paralela prin A la NP intersectează pe (Δ), aparțin locului. Dreapta Ox este tangentă în O la hiperbolă. Să considerăm acum pe $O(\alpha)$ aparținînd fasciculului cu vîrful în O. Ea întîlnește pe (Δ) în M_1, iar AM_1 intersecteazã pe Oy în N_1. Dreapta N_1P_1 înclinată cu unghiul α pe Ox este asimptotă. Pentru a găsi cealaltă asimptotă ducem dreapta AN_∞care intersectează pe (Δ) în M_2 $(AM_2 \| OY)$. Prin Q_1 simetricul lui P_1 față de O se duce o paralelă la OM_2, care este a doua asimptotă. b) Punctul M_2 nu depinde de α, deci asimptota $Q_1\omega$ se deplasează paralel cu ea însăşi cînd α variază. Înfăşurătoarea se reduce la un punct la infinit. Punctele N_1 și (α) descriu diviziuni omografice cu bazele pe Oy și pe dreapta de la infinit. Înfășurătoarea asimptotei N_1P_1 este deci o conică tangentă acestor două drepte, adică o parabolă (G.M.1947,8).

BIBLIOGRAFIE

E. Rouché et *Ch. de Combcrousse*. Traité de géométrie (2 vol.). Paris, Gauthier-Villars, 1922.

C. Guichard. Traité de géométrie (2 vol.).

J. Hadamard. Léçons de géométrie élémentaire (2 vol.). A. Colin, 1931—1932.

Tr. Lalescu. La géométrie du triangle. Paris, Vuibert, 1937.

Ion Ionescu. Maxime și minime geometrice. Biblioteca Societății de Științe Matematice și Fizice din R.P.R., nr. 11, București, Editura tehnică, 1955.

O. Sacter. Despre conice și alte curbe. Biblioteca Societății de Științe Matematice și Fizice din R.P.R., nr. 10. București, Editura tehnică, 1955.

E. Lemoine. Les lieux géométriques en mathématiques spéciales.

Ch. Michel: Compléments de géométrie moderne. Paris, Vuibert, 1926.

E. Duporq. Premiers principes de géométrie moderne. Paris, Gauthier-Villars,

F.G.M. Exercices de géométrie.

G. Papelier. Exercices de géomėtrie moderne. Paris, Vuibert, 1927.

I. I. Alexandrov. Probleme de construcții geometrice. București, Editura tehnică, 1951.

Julius Petersen. Methodes et théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques. Paris, Gauthier-Villars, 1931.

ERATĂ

Pag.	Rîndul	În loc de	Se va citi
35	14 de sus	... $\alpha'\beta'\gamma$ ...	... $\alpha'\beta'\gamma'$ ...
46	3 de jos	... unghiului ABD ...	... unghiului ADB ...
50	1 de jos	$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DB}$ și	$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ și
51	9 de jos	... ipoteza BC ...	... ipotenuza BC ...
51	10 de jos	... triunghiului $A'B'C'$.	... triunghiului $AB'C'$.
54	7 de sus	... puncte variabile A', B,	... puncte variabile A', B',
62	13 de sus	... și O', O'' ...	... și Q', Q'' ...
63	15 de jos	... X, Y, Z, ...	... X_1, Y_1, Z_1, ...
94	6 de jos	... muchiile A, B, C.	... muchiile în A, B, C.
96	19 de sus	... prin $A'B'C'$ ...	... prin A', B', C' ...
118	10 de sus	C'_a C'_c ...	C_a, C'_b...
124	15 de jos	... $\overline{OA} = \overline{OB}$, ...	... $\overline{OA} = \overline{AB}$, ...
153	7 de sus	... $\overline{BC}$ și ...	... $\overline{BN}$ și ...
162	2 de jos	Fie O ...	Fie I ...
182	9 de jos	... simetricul lui A ...	... simetricul lui O ...
197	17 de sus	... $\gamma A + \gamma B =$ ...	... $\gamma A = \gamma B =$ ...
197	1 de jos	... cu arcul ...	... cu cercul ...
243	8 de jos	$\overline{BP} : \overline{DR} = \overline{DR} : \overline{DN}$.	$\overline{BP} : \overline{DR} = \overline{DB} : \overline{DN}$.
253	1 de sus		Tot rîndul la pagina 252 sus
296	7 de sus	... Se duce $OY' \perp$ ...	... Se duce $OA' \perp$ ...
302	7 de sus	$= \alpha' + \beta' + \gamma +$ ...	$= \alpha' + \beta' + \gamma' +$ ...

Îngrijitor ediție: Conf. dr. Gh. Simionescu
Redactor: Valentina Crețu
Tehnoredactor: Elena Geru

Bun de tipar: 10. 11. 1981, Coli de tipar: 23,75,
C.Z. 513 (076)

Tiparul executat sub comanda
Nr. 538 la
Intreprinderea poligrafică
„13 Decembrie 1918",
str. Grigore Alexandrescu nr. 89-97
București,
Republica Socialistă România

Lei 13

EDITURA TEHNICĂ