Ciprian Deliu

TRIGONOMETRIE PLANĂ ŞI SFERICĂ

2015

Cuprins

Capitolul 1

Trigonometrie plană

1.1 Unghiuri. Clasificarea şi măsurarea unghiurilor

Două semidrepte (a) şi (b) având originea în acelaşi punct O definesc un **unghi** notat $\widehat{(a,b)}$ sau $\measuredangle aOb$. Originea O a semidreptelor se numeşte **vârful** unghiului, iar cele două semidrepte sunt **laturile** lui.

Unghiul $\measuredangle AOB$ se consideră **orientat pozitiv** dacă semidreapta OA se poate suprapune peste semidreapta OB printr-o rotaţie în sens invers acelor de ceasornic (*sens trigonometric* sau *sens pozitiv*).

Două unghiuri sunt **congruente** dacă prin suprapunere coincid. Se numesc unghiuri **adiacente** două unghiuri care au o latură comună, vârful comun şi celelalte laturi de o parte şi de alta a laturii comune.

Bisectoarea unui unghi este semidreapta cu originea în vârful unghiului, situată în interiorul unghiului şi care formează cu laturile unghiului iniţial unghiuri congruente.

Două drepte sunt **perpendiculare** dacă semidreptele lor formează unghiuri adiacente congruente. Un unghi cu laturile perpendiculare se numeşte **unghi drept**.

Fie un cerc cu centrul în punctul O şi de rază r. Un unghi cu vârful în O se numeşte **unghi la centru**. Dacă A şi B sunt intersecţiile laturilor unui unghi la centru cu cercul, spunem că unghiul $\measuredangle AOB$ determină **arcul de cerc** $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$. Domeniul mărginit de razele $\overline{OA}, \overline{OB}$ şi de arcul $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ se numeşte **sector de cerc**.

Dacă A' este cealaltă intersecţie a dreptei (OA) cu cercul, atunci segmentul $\overline{AA'}$ este **diametru** al cercului şi are lungimea $2r$. Un diametru împarte cercul în două arce egale numite **semicercuri**.

Două puncte M şi N de pe cerc astfel încât segmentul $\overline{MN}$ are lungimea mai mică decât $2r$ formează o **coardă**. Domeniul plan mărginit de o coardă $\overline{MN}$ şi arcul corespunzător $\overset{\frown}{MN}$ formează un **segment** de cerc. Un unghi care are vârful pe cerc şi laturile sunt coarde ale cercului se numeşte **unghi înscris** în cerc.

Pe acelaşi cerc, la unghiuri la centru congruente corespund arce congruente şi reciproc. Lungimea unui arc este proporţională cu mărimea unghiului la centru corespunzător. Compararea unghiurilor se face prin compararea arcelor determinate pe acelaşi cerc de către unghiurile la centru.
Unităţi de măsură pentru unghiuri:

- **radian** - unghiul pentru care raportul dintre arcul corespunzător şi rază este 1. Cercul întreg are 2π radiani, un semicerc are π radiani, iar unghiul drept are $\frac{\pi}{2}$ radiani

- **grad sexagesimal** - unghiul congruent cu a 90-a parte a unghiului drept, notat 1^0. A 60-a parte dintr-un grad sexagesimal se numeşte **minut sexagesimal**, notat $1'$, iar a 60-a parte dintr-un minut sexagesimal se numeşte **secundă sexagesimală**, notată $1''$. Avem $1^0 = 60' = 3600''$

- **grad centesimal** - unghiul congruent cu a 100-a parte a unghiului drept, notat 1^g. A 100-a parte dintr-un grad centesimal se numeşte **minut centesimal**, notat 1^c, iar a 100-a parte dintr-un minut centesimal se numeşte **secundă centesimală**, notată 1^{cc}. Avem $1^g = 100^c = 10000^{cc}$

După mărime, unghiurile se clasifică astfel:

- unghi *nul*: $0^0 = 0rad = 0^g$

- unghi *ascuţit*: $0^0 < \alpha^0 < 90^0$ sau $0 < \hat{\alpha} < \frac{\pi}{2}$ sau $0^g < \alpha^g < 100^g$

- unghi *drept*: $90^0 = \frac{\pi}{2}rad = 100^g$

- unghi *obtuz*: $90^0 < \alpha^0 < 180^0$ sau $\frac{\pi}{2} < \hat{\alpha} < \pi$ sau $100^g < \alpha^g < 200^g$

- unghi *alungit* $180^0 = \pi rad = 200^g$

- unghi *supraobtuz* (sau *reflex*): $180^0 < \alpha^0 < 360^0$ sau $\pi < \hat{\alpha} < 2\pi$ sau $200^g < \alpha^g < 400^g$

- unghi *complet*: $360^0 = 2\pi rad = 400^g$

Cum lungimea cercului este $2\pi r$ iar aria interiorului cercului este πr^2 şi aceste formule corespund la unghiul complet, pentru un arc oarecare α deducem că lungimea unui arc de cerc este

$$L_{arc} = \frac{\pi r \alpha^0}{180} = \hat{\alpha} r,$$

iar aria unui sector de cerc este

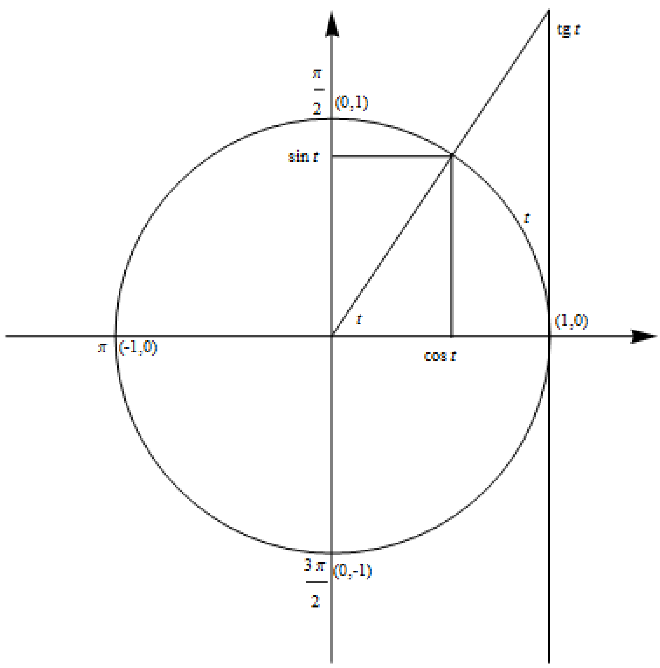
$$A_{sector} = \frac{\pi r^2 \alpha^0}{360} = \frac{\hat{\alpha} r^2}{2}.$$

Fie în plan un sistem de coordonate cartezian xOy. Se numeşte **cerc trigonometric** cercul Γ cu centrul în originea O şi de rază $r = 1$. Orientarea pozitivă a arcelor pe cerc este dată de *sensul trigonometric* (invers acelor de ceasornic). Lungimea circumferinţei unui cerc de rază r este $2\pi r$, deci lungimea cercului trigonometric este 2π.

Pe cercul trigonometric, oricărui unghi la centru de măsură $\alpha \in [0, 2\pi]$ îi corespunde pe cerc un arc de măsură egală, măsurat în sens trigonometric de la punctul $(1,0)$ la un punct P de pe cerc. După cum unghiul α este ascuţit, obtuz sau supraobtuz, punctul corespunzător P este în cadranul I, II, III sau IV.

Pentru valori mai mari decât 2π (sau negative) putem găsi de asemenea puncte corespunzătoare pe cercul trigonometric

$$\forall t \in \mathbb{R}, \exists \alpha \in [0, 2\pi), k \in \mathbb{Z} \text{ astfel încât } t = \alpha + 2k\pi$$



Definim funcţia $f : \mathbb{R} \to \Gamma$ prin $f(t) = P$ unde P este unicul punct de pe cercul trigonometric Γ pentru care arcul orientat pozitiv măsurat pe cerc din punctul $(1,0)$ până la P are lungimea α.

1.2 Funcţii trigonometrice

Funcţia definită anterior se numeşte *funcţia de trecere de la dreapta reală la cercul trigonometric* şi are următoarele proprietăţi:

- nu este injectivă: $f(t) = f(t + 2\pi)$
- este surjectivă
- este periodică de perioadă principală 2π

Cu ajutorul acestei funcţii sunt definite funcţiile cos şi sin:

$$\cos : \mathbb{R} \to [-1,1], \ \cos t = x_P$$

$$\sin : \mathbb{R} \to [-1,1], \ \sin t = y_P$$

aşadar *cosinusul* şi *sinusul* în $t \in \mathbb{R}$ sunt abscisa, respectiv ordonata unicului punct de pe cercul trigonometric corespunzător lui t.

În valorile lui t pentru care $\cos t \neq 0$ se definesc:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}, \ \sec t = \frac{1}{\cos t}$$

În valorile lui t pentru care $\sin t \neq 0$ se definesc:

$$\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}, \ \operatorname{cosec} t = \frac{1}{\sin t}$$

Într-un triunghi dreptunghic având unul din unghiurile ascuţite θ obţinem

$$\sin\theta = \frac{\text{cateta opusă}}{\text{ipotenuză}}, \ \cos\theta = \frac{\text{cateta alăturată}}{\text{ipotenuză}}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\text{cateta opusă}}{\text{cateta alăturată}}, \ \operatorname{ctg}\theta = \frac{\text{cateta alăturată}}{\text{cateta opusă}}$$

$$\sec\theta = \frac{\text{ipotenuză}}{\text{cateta alăturată}}, \ \operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{ipotenuză}}{\text{cateta opusă}}$$

De asemenea avem

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta, \ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta, \ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{ctg}\theta$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\operatorname{tg}\theta,\ \sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\operatorname{cosec}\theta,\ \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sec\theta$$

Din teorema lui Pitagora se obţine *formula fundamentală a trigonometriei*

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

Valorile funcţiilor trigonometrice pentru unghiurile importante din primul cadran sunt:

θ	0	$\frac{\pi}{6}(30^0)$	$\frac{\pi}{4}(45^0)$	$\frac{\pi}{3}(60^0)$	$\frac{\pi}{2}(90^0)$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\operatorname{ctg}\theta$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Valorile funcţiilor trigonometrice pentru unghiuri din cadranele II, III şi IV pot fi calculate folosind următoarele formule de reducere la primul cadran:

$$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta,\ \cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$$

$$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta,\ \cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$$

$$\sin(2\pi-\theta)=-\sin\theta,\ \cos(2\pi-\theta)=\cos\theta$$

$$\sin(-\theta)=-\sin\theta,\ \cos(-\theta)=\cos\theta$$

Proprietăţi ale funcţiei sin:

- este funcţie impară: $\sin(-x)=-\sin x$
- este funcţie periodică de perioadă 2π:

$$\sin(x+2\pi)=\sin x$$

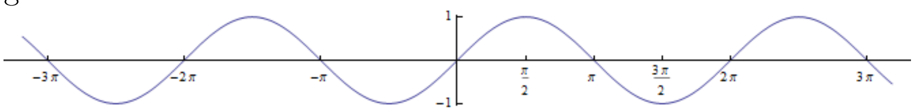
- este continuă şi derivabilă pe $\mathbb{R}$:

$$(\sin x)'=\cos x$$

- dezvoltarea în serie de puteri:

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots$$

- grafic:



Proprietăţi ale funcţiei cos:

- este funcţie pară: $\cos(-x) = \cos x$
- este funcţie periodică de perioadă 2π:

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x$$

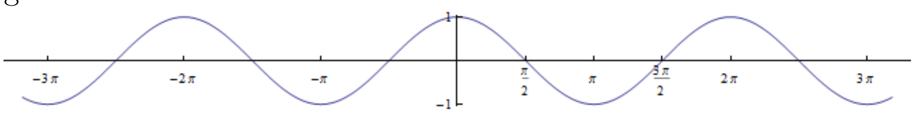
- este continuă şi derivabilă pe $\mathbb{R}$:

$$(\cos x)' = -\sin x$$

- dezvoltarea în serie de puteri:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

- grafic:

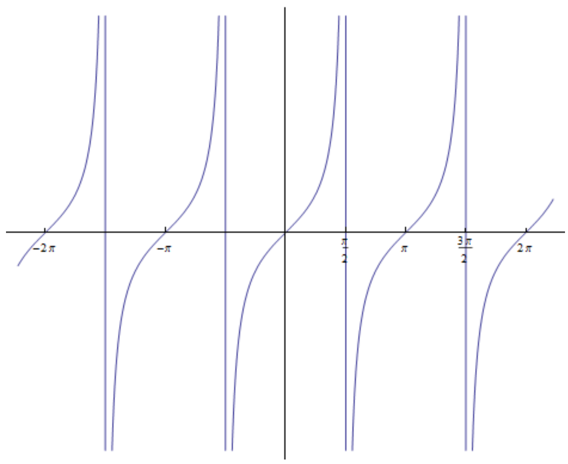


Proprietăţi ale funcţiei tg:

- este funcţie impară: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$
- este funcţie periodică de perioadă π: $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$
- este continuă şi derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$:

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

- grafic:

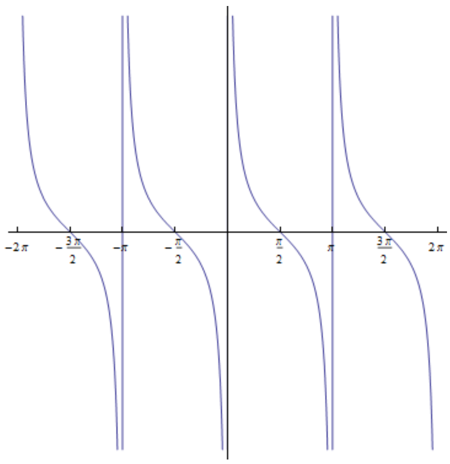


Proprietăţi ale funcţiei ctg:

- este funcţie impară: $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$
- este funcţie periodică de perioadă π: $\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x$
- este continuă şi derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$:

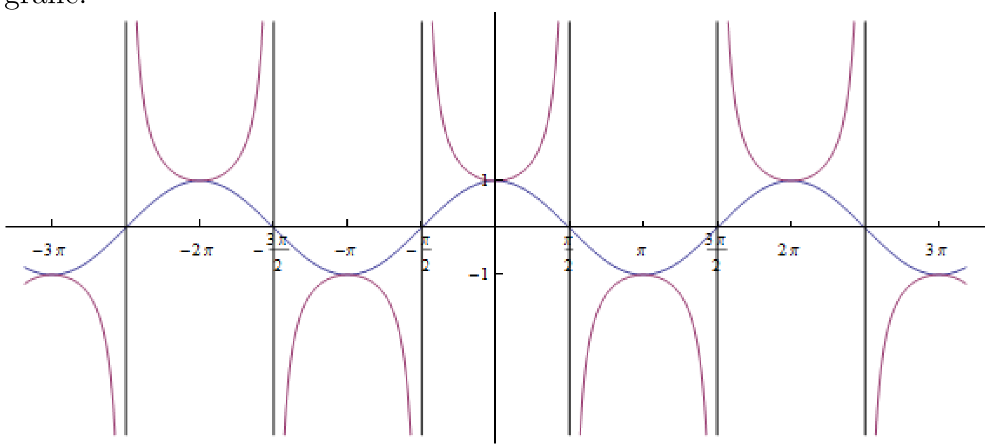
$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

- grafic:



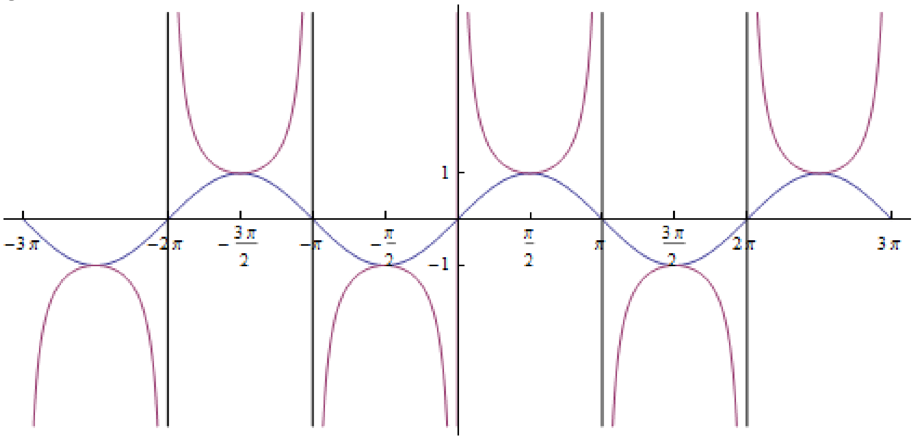
Proprietăţi ale funcţiei sec:

- este funcţie pară: $\sec(-x) = \sec x$
- este funcţie periodică de perioadă 2π:
- este continuă şi derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$
- grafic:



Proprietăţi ale funcţiei cosec:

- este funcţie impară: $\operatorname{cosec}(-x) = -\operatorname{cosec} x$
- este funcţie periodică de perioadă 2π:
- este continuă şi derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$
- grafic:



1.3 Formule trigonometrice

Folosind formula fundamentală a trigonometriei

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

se obţin următoarele relaţii între pătratele funcţiilor trigonometrice:

	$\sin^2 x$	$\cos^2 x$	$\operatorname{tg}^2 x$	$\operatorname{ctg}^2 x$
$\sin^2 x$	$\sin^2 x$	$1-\cos^2 x$	$\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$	$\dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 x}$
$\cos^2 x$	$1-\sin^2 x$	$\cos^2 x$	$\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$	$\dfrac{\operatorname{ctg}^2 x}{1+\operatorname{ctg}^2 x}$
$\operatorname{tg}^2 x$	$\dfrac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}$	$\dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg}^2 x$	$\dfrac{1}{\operatorname{ctg}^2 x}$
$\operatorname{ctg}^2 x$	$\dfrac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}$	$\dfrac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}$	$\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 x}$	$\operatorname{ctg}^2 x$

Formulele funcţiilor trigonometrice ale sumei şi diferenţei:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \tag{1.1}$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \tag{1.2}$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \tag{1.3}$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \tag{1.4}$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \tag{1.5}$$
$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \tag{1.6}$$
$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta} \tag{1.7}$$
$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha} \tag{1.8}$$

Consecinţe ale formulelor pentru sumă:

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x \tag{1.9}$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = -2\sin^2 x \tag{1.10}$$
$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}, \qquad \operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2\operatorname{ctg} x} \tag{1.11}$$
$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x, \qquad \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \tag{1.12}$$
$$\operatorname{tg} 3x = \frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1-3\operatorname{tg}^2 x}, \qquad \operatorname{ctg} 3x = \frac{\operatorname{ctg}^3 x - 3\operatorname{ctg} x}{3\operatorname{ctg}^2 x - 1} \tag{1.13}$$

Din formulele pentru $\cos 2x$ obţinem

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \tag{1.14}$$

Înlocuind x cu $\frac{x}{2}$ găsim

$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}, \qquad \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2} \tag{1.15}$$
$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \qquad \sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} \tag{1.16}$$

Adunând şi scăzând formulele pentru sumă şi diferenţă găsim:

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$$

Notăm $\alpha + \beta = x,\ \alpha - \beta = y$. Atunci $\alpha = \frac{x+y}{2},\ \beta = \frac{x-y}{2}$ şi avem:

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \tag{1.17}$$
$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \tag{1.18}$$
$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \tag{1.19}$$
$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2} \tag{1.20}$$

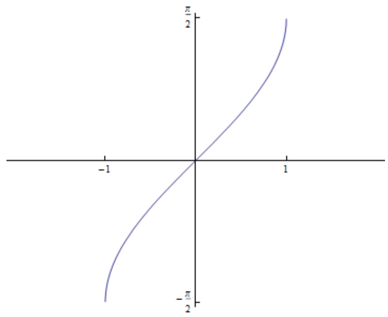
1.4 Funcţii trigonometrice inverse

1. Restricţia funcţiei sin la intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ este bijectivă, deci inversabilă. Definim funcţia inversă

$$\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Proprietăţi ale funcţiei arcsin:

- $\arcsin(\sin x) = x,\ \forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(\arcsin x) = x,\ \forall x \in [-1,1]$
- monoton crescătoare şi impară: $\arcsin(-x) = -\arcsin x$
- continuă şi derivabilă: $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- grafic:



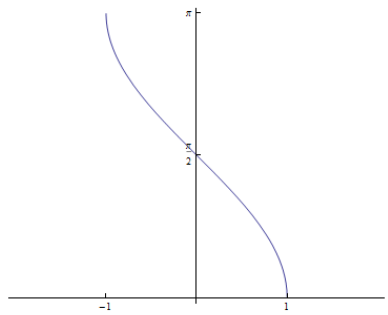
2. Restricţia funcţiei cos la intervalul $[0,\pi]$ este bijectivă, deci inversabilă. Definim funcţia inversă

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$$

Proprietăţi ale funcţiei arccos:

- $\arccos(\cos x) = x,\ \forall x \in [0,\pi]$, $\cos(\arccos x) = x,\ \forall x \in [-1,1]$

- monoton descrescătoare şi $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$
- continuă şi derivabilă: $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- grafic:

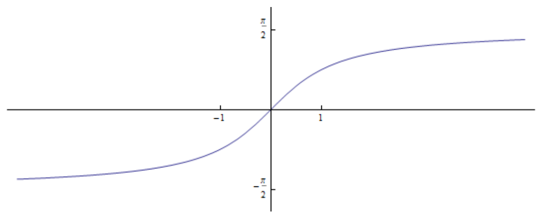


3. Restricţia funcţiei tg la intervalul $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ este bijectivă, deci inversabilă. Definim funcţia inversă

$$\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Proprietăţi ale funcţiei arctg:

- $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x,\ \forall x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\ \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$
- monoton crescătoare şi impară: $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$
- continuă şi derivabilă: $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
- grafic:



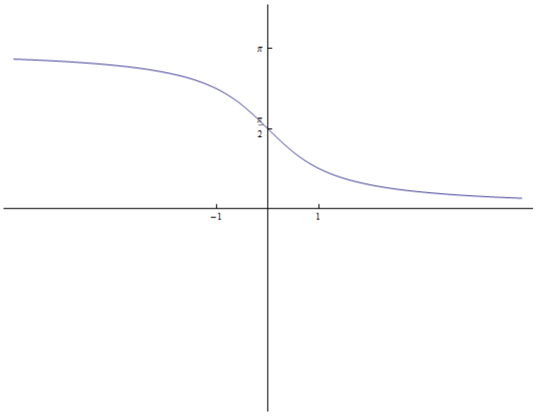
4. Restricţia funcţiei ctg la intervalul $(0, \pi)$ este bijectivă, deci inversabilă. Definim funcţia inversă

$$\operatorname{arcctg} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$$

Proprietăţi ale funcţiei arcctg:

- $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x,\ \forall x \in (0, \pi),\ \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$
- monoton descrescătoare şi $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$

- continuă şi derivabilă:
  $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
- grafic:



5. Relaţii între funcţiile trigonometrice şi inversele lor:

	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\operatorname{arctg} x$	$\operatorname{arcctg} x$
sin	x	$\sqrt{1-x^2}$	$\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
cos	$\sqrt{1-x^2}$	x	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
tg	$\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	x	$\dfrac{1}{x}$
ctg	$\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{1}{x}$	x

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \tag{1.21}$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} \tag{1.22}$$

$$\operatorname{arctg} x \pm \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x \pm y}{1 \mp xy} \tag{1.23}$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \tag{1.24}$$

1.5 Ecuaţii şi inecuaţii trigonometrice

1. ecuaţia $\sin x = a$
   dacă $|a| \le 1 \Rightarrow x = k\pi + (-1)^k \arcsin a,\ k \in \mathbb{Z}$
   dacă $|a| > 1 \Rightarrow$ nu există soluţii

2. inecuaţia $\sin x > a$
   dacă $a \ge 1 \Rightarrow$ nu există soluţii

dacă $a < -1 \Rightarrow$ mulţimea soluţiilor este $\mathbb{R}$
dacă $-1 \leq a < 1 \Rightarrow$ mulţimea soluţiilor este

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (2k\pi + \arcsin a, (2k+1)\pi - \arcsin a)$$

3. inecuaţia $\sin x < a$
   dacă $a \leq -1 \Rightarrow$ nu există soluţii
   dacă $a > 1 \Rightarrow$ mulţimea soluţiilor este $\mathbb{R}$
   dacă $-1 < a \leq 1 \Rightarrow$ mulţimea soluţiilor este

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} ((2k-1)\pi - \arcsin a, 2k\pi + \arcsin a)$$

4. ecuaţia $\cos x = a$
   dacă $|a| \leq 1 \Rightarrow x = 2k\pi \pm \arccos a,\ k \in \mathbb{Z}$
   dacă $|a| > 1 \Rightarrow$ nu există soluţii

5. inecuaţia $\cos x > a$
   dacă $a \geq 1 \Rightarrow$ nu există soluţii
   dacă $a < -1 \Rightarrow$ mulţimea soluţiilor este $\mathbb{R}$
   dacă $-1 \leq a < 1 \Rightarrow$ mulţimea soluţiilor este

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (2k\pi - \arccos a, 2k\pi + \arccos a)$$

6. inecuaţia $\cos x < a$
   dacă $a \leq -1 \Rightarrow$ nu există soluţii
   dacă $a > 1 \Rightarrow$ mulţimea soluţiilor este $\mathbb{R}$
   dacă $-1 < a \leq 1 \Rightarrow$ mulţimea soluţiilor este

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (2k\pi + \arccos a, 2(k+1)\pi - \arccos a)$$

7. ecuaţia $\operatorname{tg} x = a \Rightarrow x = k\pi + \operatorname{arctg} a,\ k \in \mathbb{Z}$

8. inecuaţia $\operatorname{tg} x > a \Rightarrow$ mulţimea soluţiilor este

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(k\pi + \operatorname{arctg} a, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

9. inecuaţia $\operatorname{tg} x < a \Rightarrow$ mulţimea soluţiilor este

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \operatorname{arctg} a\right)$$

10. ecuaţia $\operatorname{ctg} x = a \Rightarrow x = k\pi + \operatorname{arcctg} a,\ k \in \mathbb{Z}$

11. inecuaţia $\operatorname{ctg} x > a \Rightarrow$ mulţimea soluţiilor este

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (k\pi, k\pi + \operatorname{arcctg} a)$$

12. inecuaţia $\operatorname{ctg} x < a \Rightarrow$ mulţimea soluţiilor este

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (k\pi + \operatorname{arcctg} a, k\pi + \pi)$$

1.6 Exerciţii

1. Să se găsească formulele de transformare dintre unităţile de măsură pentru unghiuri.
Rezolvare:
Formulele de transformare dintre unităţile de măsură pentru unghiuri se bazează pe exprimarea unghiului drept:

$$\frac{\pi}{2} rad = 90^0 = 100^g$$

- $1^0 = \left(\frac{100}{90}\right)^g \simeq 1,1111^g = 1^g 11^c 11^{cc}$
  $1' = \frac{1}{60} \cdot \left(\frac{100}{90}\right)^g \simeq 0,0186^g = 1^c 86^{cc}$
  $1'' = \frac{1}{3600} \cdot \left(\frac{100}{90}\right)^g \simeq 0,0003^g = 3^{cc}$
- $1^g = \left(\frac{90}{100}\right)^0 = 0,9^0 = 0,9 \cdot 60' = 54'$
  $1^c = \frac{1}{100} \cdot 0,9^0 = 0,54' = 0,54 \cdot 60'' = 32,4''$
  $1^{cc} = \frac{1}{100} \cdot 32,4'' = 0,324''$
- $1 rad = \left(\frac{180}{\pi}\right)^0 = 57,295779^0 = 57^0 + 0,295779 \cdot 60' = 57^0 17,74674' =$
  $= 57^0 17' + 0,74674 \cdot 60'' = 57^0 17' 44,8'' \simeq 57^0 17' 45''$
- $1 rad = \left(\frac{200}{\pi}\right)^g \simeq 63,6620^g = 63^g 66^c 20^{cc}$
- $1^0 = \frac{\pi}{180} rad \simeq 0,017453 rad$
- $1^g = \frac{\pi}{200} rad \simeq 0,0157078 rad$

2. Să se efectueze următoarele operaţii cu grade, minute şi secunde sexagesimale:

   a) $12^0 35' 44'' + 25^0 45' 52'' = 38^0 21' 36''$
   $44'' + 52'' = 96'' = 1' 36''$
   $35' + 45' + 1' = 81' = 1^0 21'$
   $12^0 + 25^0 + 1^0 = 38^0$

   b) $15^0 43' 38'' \times 3 = 47^0 10' 54''$
   $38'' \times 3 = 114'' = 1' 54''$
   $43' \times 3 + 1' = 130' = 2^0 10'$
   $15^0 \times 3 + 2^0 = 47^0$

   c) $125^0 37' 15'' : 3 = 41^0 52' 25''$
   $125^0 : 3 = 41^0$ rest $2^0 = 120'$
   $120' + 37' = 157' : 3 = 52'$ rest $1' = 60''$
   $60'' + 15'' = 75'' : 3 = 25''$

3. Să se calculeze valorile funcţiilor trigonometrice ale altor unghiuri uzuale (valori exprimate prin radicali):

   a) $\sin 15^0 = \sin\dfrac{\pi}{12} = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4} - \cos\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
   $\cos 15^0 = \cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$; $\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$

   b) $\sin^2(22^0 30') = \sin^2\frac{\pi}{8} = \dfrac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \sin\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$
   $\cos^2(22^0 30') = \cos^2\frac{\pi}{8} = \dfrac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \cos\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$
   $\operatorname{tg}(22^0 30') = \operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$; $\operatorname{ctg}(22^0 30') = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} + 1$

   c) funcţiile trigonometrice ale unghiului de $18^0 = \frac{\pi}{10}$:
   $\sin 72^0 = 2\sin 36^0 \cos 36^0 = 4\sin 18^0 \cos 18^0 (1 - 2\sin^2 18^0)$;
   $\sin 72^0 = \sin(90^0 - 18^0) = \cos 18^0$. Egalând cele 2 identităţi şi împărţind prin $\cos 18^0 > 0$ obţinem ecuaţia în necunoscuta $u = \sin 18^0$:

   $$1 = 4u(1 - 2u^2) \Leftrightarrow 8u^3 - 4u + 1 = 0 \Leftrightarrow (2u-1)(4u^2 + 2u - 1) = 0$$

   care are rădăcinile $u_1 = \frac{1}{2} = \sin 30^0 > \sin 18^0$, $u_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} > 0$ şi $u_3 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4} < 0$, aşadar $\sin 18^0 = \sin\dfrac{\pi}{10} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$. De aici rezultă $\cos 18^0 = \cos\dfrac{\pi}{10} = \sqrt{1-\sin^2 18^0} = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$, apoi $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{10} = \sqrt{1-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}$ şi $\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{10} = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$

d) $\sin 36^0 = \sin\frac{\pi}{5} = 2\sin 18^0 \cos 18^0 = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$;

$\cos 36^0 = \cos\frac{\pi}{5} = \sqrt{1-\sin^2 36^0} = \dfrac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4}$;

$\operatorname{tg} 36^0 = \operatorname{tg}\frac{\pi}{5} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$; $\operatorname{ctg} 36^0 = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{5} = \sqrt{1+\frac{2\sqrt{5}}{5}}$

e) $\sin 54^0 = \sin(90^0-36^0) = \cos 36^0 = \dfrac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4}$

$\cos 54^0 = \cos(90^0-36^0) = \sin 36^0 = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

$\operatorname{tg} 54^0 = \operatorname{ctg} 36^0 = \sqrt{1+\frac{2\sqrt{5}}{5}}$; $\operatorname{ctg} 54^0 = \operatorname{tg} 36^0 = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$

Analog rezultă valorile funcţiilor trigonometrice pentru unghiurile $67^0 30'$, 72^0, 75^0. Aceste valori pot fi puse în următorul tabel:

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
0	0	1	0	∞
$15^0 = \frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
$18^0 = \frac{\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\sqrt{1-\frac{2\sqrt{5}}{5}}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
$22^0 30' = \frac{\pi}{8}$	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}+1$
$30^0 = \frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$36^0 = \frac{\pi}{5}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\sqrt{1+\frac{2\sqrt{5}}{5}}$
$45^0 = \frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$54^0 = \frac{3\pi}{10}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\sqrt{1+\frac{2\sqrt{5}}{5}}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
$60^0 = \frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$67^0 30' = \frac{3\pi}{8}$	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}+1$	$\sqrt{2}-1$
$72^0 = \frac{2\pi}{5}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\sqrt{1-\frac{2\sqrt{5}}{5}}$
$75^0 = \frac{5\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
$90^0 = \frac{\pi}{2}$	1	0	∞	0

4. Să se calculeze funcţiile trigonometrice pentru următoarele valori:

$$\frac{7\pi}{6};\ \frac{9\pi}{4};\ \frac{14\pi}{3};\ -\frac{9\pi}{2};\ \frac{2015\pi}{2};\ \frac{2015\pi}{3};\ \frac{2015\pi}{4};\ \frac{2015\pi}{6}$$

5. Să se rezolve următoarele ecuaţii trigonometrice:

   a) $\cos 2x + 4\sin x - 1 = 0$
   R: Înlocuim în ecuaţie $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ şi obţinem

   $$1 - 2\sin^2 x + 4\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\sin x(2 - \sin x) = 0$$

   Cum $\sin x \leq 1 \Rightarrow 2 - \sin x \geq 0$ deci singura soluţie acceptabilă este $\sin x = 0$ de unde obţinem $x = k\pi + (-1)^k \arcsin 0, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

   b) $\sqrt{2}\cos x + 2\sin^2 x + \operatorname{ctg}^2 x - 3 = 0,\ x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
   R: Folosind formulele care exprimă $\sin^2 x$ şi $\operatorname{ctg}^2 x$ în funcţie de $\cos^2 x$ obţinem

   $$\sqrt{2}\cos x + 2(1 - \cos^2 x) + \frac{\cos^2 x}{1 - \cos^2 x} - 3 = 0$$

   Punând $t = \cos x$, în urma calculelor se obţine

   $$2t^4 - \sqrt{2}t^3 + \sqrt{2}t - 1 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2}t - 1)(\sqrt{2}t^3 + 1) = 0$$

   $$t_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4};\ t_2 = -\frac{1}{\sqrt[6]{2}} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt[6]{2}}\right)$$

   c) $4\sin x + 2\cos x - 3\operatorname{tg} x - 2 = 0$
   R: Facem substituţia $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Avem $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ şi $\operatorname{tg} x = \dfrac{2t}{1-t^2}$. După efectuarea calculelor se obţine ecuaţia

   $$2t^4 - 7t^3 - 2t^2 + t = 0$$

   care are rădăcinile $t_1 = 0$, $t_2 = -\frac{1}{2}$, $t_{3,4} = 2 \pm \sqrt{3}$.

   $$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi \Rightarrow x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$
   $$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi + \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow x = 2k\pi + 2\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right),\ k \in \mathbb{Z}$$
   $$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow x = 2k\pi + 2\operatorname{arctg}\left(2 + \sqrt{3}\right),\ k \in \mathbb{Z}$$
   $$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow x = 2k\pi + 2\operatorname{arctg}\left(2 - \sqrt{3}\right),\ k \in \mathbb{Z}$$

   d) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$
   R: Împărţind prin $\sqrt{3}$ obţinem $\sin x + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Punem $\frac{1}{\sqrt{3}} =$

$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} \Rightarrow \sin x + \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}}\cos x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin x\cos\frac{\pi}{6} + \cos x\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{\pi}{6}$ de unde folosind formula pentru sinusul sumei găsim $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, aşadar

$$x + \frac{\pi}{6} = k\pi + (-1)^k \arcsin\frac{1}{2} \Rightarrow x = k\pi + \left((-1)^k - 1\right)\frac{\pi}{6}$$

e) $3\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x = 0$
R: Împărţind prin $\cos^2 x \neq 0$ şi punând $t = \operatorname{tg} x$ obţinem ecuaţia

$$3t^2 + 2t - 1 = 0$$

$t_1 = -1 \Rightarrow \operatorname{tg} x = -1 \Rightarrow x = k\pi + \operatorname{arctg}(-1) = k\pi - \frac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}$
$t_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = k\pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right),\ k \in \mathbb{Z}$

f) $2\sin^4 x - 2\sqrt{3}\sin^3 x\cos x + 4\sin^2 x\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos^3 x - 2\cos^4 x = 1$
R: Înlocuind în membrul drept $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$ ecuaţia devine:

$$2\sin^4 x - 2\sqrt{3}\sin^3 x\cos x + 4\sin^2 x\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos^3 x - 2\cos^4 x =$$
$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 \Rightarrow$$
$$\sin^4 x - 2\sqrt{3}\sin^3 x\cos x + 2\sin^2 x\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos^3 x - 3\cos^4 x = 0$$

Împărţind prin $\cos^4 x$ şi notând $t = \operatorname{tg} x$ obţinem

$$t^4 - 2\sqrt{3}t^3 + 2t^2 + 2\sqrt{3} - 3 = 0 \Leftrightarrow (t^2 - 1)(t^2 - 2\sqrt{3} + 3) = 0$$

$t_{1,2} = \pm 1 \Rightarrow \operatorname{tg} x = \pm 1 \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}$
$t_{3,4} = \sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$

g) $5(\sin x + \cos x) - 2\sin 2x = 4$
R: Facem substituţia $u = \sin x + \cos x \Rightarrow \sin 2x = u^2 - 1$. Se obţine ecuaţia $2u^2 - 5u + 2 = 0$ cu rădăcinile reale $u_1 = 2,\ u_2 = \frac{1}{2}$.
$u = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2 \Rightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} > 1 \Rightarrow$ nu există soluţii;
$u = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \arccos\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\pi}{4}$.

h) $\cos^2 x + \cos^2 2x - \cos^2 3x = 1$
R: $\frac{1}{2}(1+\cos 2x) + \frac{1}{2}(1+\cos 4x) - \frac{1}{2}(1+\cos 6x) = 1 \Leftrightarrow \cos 2x - \cos 6x = 1 - \cos 4x$. Folosind formulele de transformare a diferenţei şi sumei în produs găsim $-2\sin 4x\sin 2x = 2\sin^2 2x \Rightarrow 2\sin 2x(\sin 4x + \sin 2x) = 0 \Leftrightarrow 4\sin 2x\sin 3x\cos x = 0$
$\sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$
$\sin 3x = 0 \Rightarrow 3x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$
$\cos x = 0 \Rightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$, mulţime de soluţii care este inclusă în prima mulţime.

i) $2(\sin^6 x + \cos^6 x) + \sin^4 x + \cos^4 x = 1$
R: Cu substituţia $y = \sin 2x$ avem $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2}y^2$, $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4}y^2$, iar ecuaţia devine $2\left(1 - \frac{3}{4}y^2\right) + 1 - \frac{1}{2}y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = 1$ cu rădăcinile $y = \pm 1$.
$\sin 2x = 1 \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$;
$\sin 2x = -1 \Rightarrow 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$.

j) $\cos x \cos 7x = \cos 3x \cos 5x$
R: Transformând cele două produse în sume avem

$$\frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 6x) = \frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 2x) \Leftrightarrow \cos 6x - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 \sin 4x \sin 2x = 0$$

$\sin 4x = 0 \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$
$\sin 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, mulţime de soluţii care este inclusă în prima mulţime.

k) $\cos x + \sqrt{3} \sin x = m$; discuţie după $m \in \mathbb{R}$

l) $2\cos^2 x - \sin 2x + \sin x + \cos x = 1$

m) $\cos^2 x + 3\sin^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x = 1$

n) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$

o) $\sin^3 x \cos 3x + \sin 3x \cos^3 x = \frac{3}{4}$

Capitolul 2

Complemente de trigonometrie

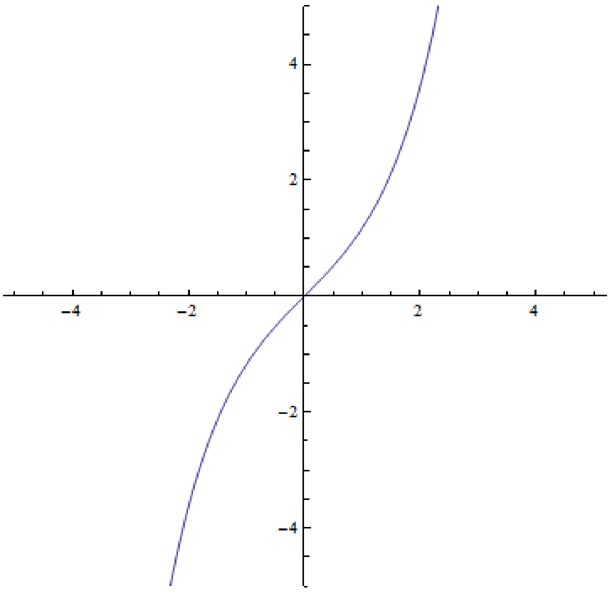
2.1 Funcţii hiperbolice

Funcţia

$$\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \mathrm{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

se numeşte **sinus hiperbolic**.

Este impară, bijectivă şi are graficul:

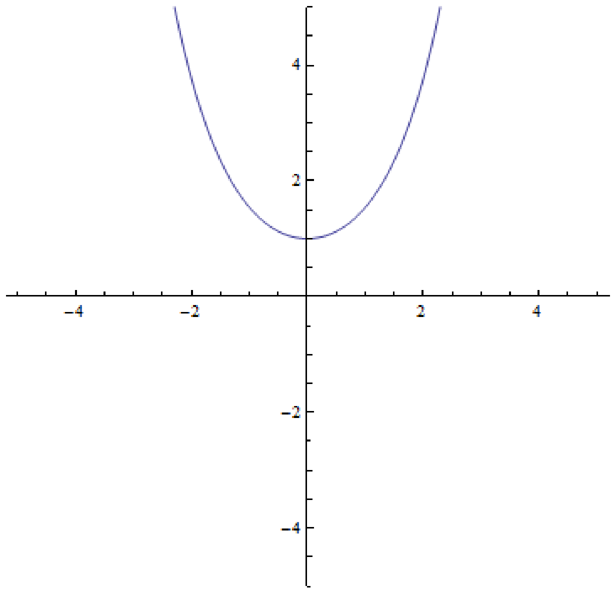


Funcţia

$$\mathrm{ch} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \mathrm{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

se numeşte **cosinus hiperbolic**.

Este pară şi are graficul:



Valorile $\operatorname{ch} t$ şi $\operatorname{sh} t$ sunt coordonatele punctelor de pe hiperbola echilateră unitară de ecuaţie

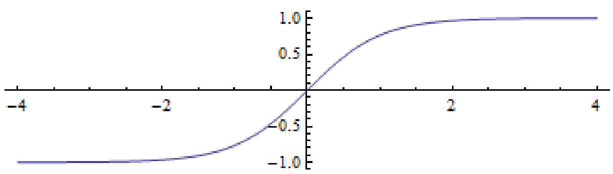
$$x^2 - y^2 = 1.$$

Funcţia

$$\operatorname{th} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

se numeşte **tangentă hiperbolică**.

Este impară şi are graficul:

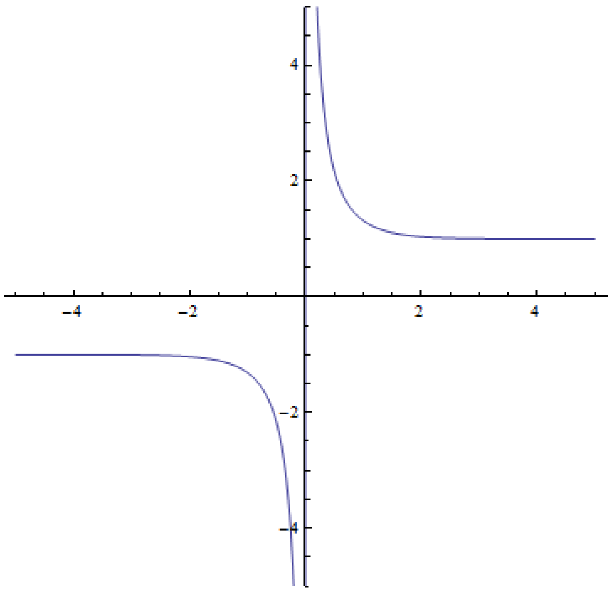


Funcţia

$$\operatorname{cth} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

se numeşte **cotangentă hiperbolică**.

Este impară şi are graficul:



Formule pentru funcţiile hiperbolice:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \tag{2.1}$$

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \tag{2.2}$$

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y \tag{2.3}$$

$$\operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y} \tag{2.4}$$

$$\operatorname{cth}(x \pm y) = \frac{1 \pm \operatorname{cth} x \operatorname{cth} y}{\operatorname{cth} x \pm \operatorname{cth} y} \tag{2.5}$$

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x \tag{2.6}$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x \tag{2.7}$$

$$\operatorname{th} 2x = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x} \tag{2.8}$$

$$\operatorname{sh} x \pm \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x \pm y}{2} \operatorname{ch} \frac{x \mp y}{2} \tag{2.9}$$

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{ch} \frac{x + y}{2} \operatorname{ch} \frac{x - y}{2} \tag{2.10}$$

$$\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x + y}{2} \operatorname{sh} \frac{x - y}{2} \tag{2.11}$$

$$\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y = \frac{\operatorname{sh}(x \pm y)}{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y} \tag{2.12}$$

Funcţia sh este bijectivă pe $\mathbb{R}$, deci inversabilă. Funcţia inversă

$$\operatorname{argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \operatorname{argsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

se numeşte **argument sinus hiperbolic**.

Restricţia cosinusului hiperbolic $\mathrm{ch} : (-\infty, 0] \to [1, \infty)$ este bijectivă deci inversabilă. Funcţia inversă

$$\mathrm{argch}_- : [1, \infty) \to (-\infty, 0],\ \mathrm{argch}_- x = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$$

se numeşte **argument negativ cosinus hiperbolic**.

Restricţia cosinusului hiperbolic $\mathrm{ch} : [0, \infty) \to [1, \infty)$ este bijectivă deci inversabilă. Funcţia inversă

$$\mathrm{argch}_+ : [1, \infty) \to [0, \infty),\ \mathrm{argch}_+ x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

se numeşte **argument pozitiv cosinus hiperbolic**.

Funcţia $\mathrm{th} : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ este bijectivă, deci inversabilă. Funcţia inversă

$$\mathrm{argth} : (-1, 1) \to \mathbb{R},\ \mathrm{argth}\, x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}$$

se numeşte **argument tangentă hiperbolică**.

Funcţiile hiperbolice şi inversele lor sunt derivabile pe domeniile lor de definiţie şi derivatele lor sunt:

$$(\mathrm{sh}\, x)' = \mathrm{ch}\, x;\ (\mathrm{ch}\, x)' = \mathrm{sh}\, x \tag{2.13}$$

$$(\mathrm{th}\, x)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x};\ (\mathrm{cth}\, x)' = \frac{1}{\mathrm{sh}^2 x} \tag{2.14}$$

$$(\mathrm{argsh}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \tag{2.15}$$

$$(\mathrm{argch}_+ x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}},\ x > 1 \tag{2.16}$$

$$(\mathrm{argth}\, x)' = \frac{1}{1 - x^2},\ |x| < 1 \tag{2.17}$$

Dezvoltările în serii de puteri ale funcţiilor hiperbolice sunt:

$$\mathrm{sh}\, x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.18}$$

$$\mathrm{ch}\, x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.19}$$

2.2 Serii trigonometrice

O funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numeşte *periodică* dacă există $T \neq 0$ astfel încât $f(x + T) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Exemplu: funcţiile sin şi cos au perioadele $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Cea mai mică perioadă pozitivă $T > 0$ se numeşte *perioadă principală*.

Dacă funcţia $f(x)$ este periodică de perioadă T, atunci funcţia $g(x) = f(\alpha x)$ este periodică de perioadă $\frac{T}{\alpha}$:

$$g\left(x + \frac{T}{\alpha}\right) = f\left(\alpha\left(x + \frac{T}{\alpha}\right)\right) = f(\alpha x + T) = f(\alpha x) = g(x)$$

Funcţiile $\sin x$ şi $\cos x$ sunt periodice de perioadă principală 2π, funcţiile $\sin nx$ şi $\cos nx$ au perioada $\frac{2\pi}{n}$, iar perioada comună a funcţiilor

$$\{\sin n\omega x, \cos n\omega x; n \in \mathbb{N}\}$$

este $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie periodică de perioadă T, integrabilă pe $\mathbb{R}$, atunci:

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Definiţia 2.1. *Se numeşte* ***serie trigonometrică*** *o serie de funcţii de forma*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x) \tag{2.20}$$

unde $a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N}),\ x \in \mathbb{R},\ \omega > 0.$

Teorema 2.1. *Dacă seria* (2.20) *este convergentă (respectiv absolut convergentă sau uniform convergentă) pe un interval compact oarecare de lungime* $T = \frac{2\pi}{\omega}$, *atunci este convergentă (absolut convergentă sau uniform convergentă) pe* $\mathbb{R}$ *iar suma ei este o funcţie periodică de perioadă* T.

Conform criteriului Dirichlet, dacă şirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt monoton convergente la 0, atunci seria este convergentă pentru orice $x \neq nT,\ n \in \mathbb{Z}$ şi uniform convergentă pe orice interval compact care nu conţine puncte de această formă.

Teorema 2.2. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *o funcţie integrabilă pe* $\mathbb{R}$, *periodică de perioadă* $T = \frac{2\pi}{\omega}$ *care poate fi reprezentată printr-o serie trigonometrică*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x).$$

Atunci coeficienţii a_0, a_n, b_n *sunt daţi de formulele*

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)dx \\ a_n &= \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\cos n\omega x dx,\ n \geq 1 \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\sin n\omega x dx,\ n \geq 1 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Integralele nu depind de α şi de obicei se alege $\alpha = 0$ sau $\alpha = -\frac{T}{2}$.

Pentru valorile lui α anterioare, dacă notăm $T = 2l \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{l}$, formulele (2.21) devin:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)dx \\ a_n &= \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ n \geq 1 \\ b_n &= \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ n \geq 1 \end{aligned} \tag{2.22}$$

sau

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx \\ a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ n \geq 1 \\ b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ n \geq 1 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Formulele (2.21)-(2.23) se numesc **formulele Euler-Fourier**, iar seria trigonometrică corespunzătoare se numeşte **serie Fourier trigonometrică** asociată funcţiei f.

Pentru demonstraţia formulelor Euler-Fourier se calculează mai întâi integralele:

$$\int_{-l}^{l} \cos\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l} = 0,\ \forall n = 1, 2, \ldots$$

$$\int_{-l}^{l} \sin\frac{n\pi x}{l}dx = -\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l} = 0,\ \forall n = 1, 2, \ldots$$

$$\int_{-l}^{l} \sin\tfrac{m\pi x}{l}\cos\tfrac{n\pi x}{l}dx = \tfrac{1}{2}\int_{-l}^{l}\sin\tfrac{(m+n)\pi x}{l} + \tfrac{1}{2}\int_{-l}^{l}\sin\tfrac{(m-n)\pi x}{l} = 0$$

$$\int_{-l}^{l} \sin\tfrac{m\pi x}{l}\sin\tfrac{n\pi x}{l}dx = \tfrac{1}{2}\int_{-l}^{l}\cos\tfrac{(m-n)\pi x}{l} - \tfrac{1}{2}\int_{-l}^{l}\cos\tfrac{(m+n)\pi x}{l} = \begin{cases} 0, m \neq n \\ l, m = n \end{cases}$$

$$\int_{-l}^{l} \cos\tfrac{m\pi x}{l}\cos\tfrac{n\pi x}{l}dx = \tfrac{1}{2}\int_{-l}^{l}\cos\tfrac{(m-n)\pi x}{l} + \tfrac{1}{2}\int_{-l}^{l}\cos\tfrac{(m+n)\pi x}{l} = \begin{cases} 0, m \neq n \\ l, m = n \end{cases}$$

Înlocuind în integralele din (2.23) pe $f(x)$ cu seria trigonometrică (2.20) şi integrând termen cu termen se obţin coeficienţii $a_0, a_n, b_n,\ n = 1, 2, \ldots$.

Dacă funcţia f periodică de perioadă $T = 2l$ este pară, coeficienţii Fourier sunt

$$\begin{aligned} a_0 &= \tfrac{2}{l}\int_0^l f(x)dx \\ a_n &= \tfrac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\tfrac{n\pi x}{l}dx,\ n \geq 1 \\ b_n &= 0,\ n \geq 1 \end{aligned} \tag{2.24}$$

iar seria Fourier trigonometrică este numai de cosinusuri:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}.$$

Dacă funcţia f periodică de perioadă $T = 2l$ este impară, coeficienţii Fourier sunt

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_n &= 0,\ n \geq 1 \\ b_n &= \tfrac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\tfrac{n\pi x}{l}dx,\ n \geq 1 \end{aligned} \tag{2.25}$$

iar seria Fourier trigonometrică este numai de sinusuri:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

O funcţie f definită pe un interval de lungime $2l$ se poate prelungi pe $\mathbb{R}$ la o funcţie periodică $\tilde{f}$ de perioadă $T = 2l$ astfel încât $\tilde{f}(x) = f(x)$ pe intervalul pe care este definită f. Astfel se poate asocia o serie Fourier trigonometrică şi unei funcţii neperiodice definite pe un interval, suma acestei serii fiind o funcţie periodică de perioadă egală cu lungimea intervalului pe care este definită f.

O funcţie f definită pe un interval $[0, l]$ se poate prelungi la o funcţie pară pe intervalul $[-l, l]$ punând $f(-x) = f(x),\ \forall x \in [0, l]$, iar apoi aceasta se poate prelungi la o funcţie periodică de perioadă $T = 2l$. Acestei funcţii i se poate asocia o serie Fourier trigonometrică numai de cosinusuri.

O funcţie f definită pe un interval $[0, l]$ se poate prelungi la o funcţie impară pe intervalul $[-l, l]$ punând $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in [0, l]$, iar apoi aceasta se poate prelungi la o funcţie periodică de perioadă $T = 2l$. Acestei funcţii i se poate asocia o serie Fourier trigonometrică numai de sinusuri.

2.3 Numere complexe sub formă trigonometrică

Definiţia 2.2. *Un* ***număr complex*** *se defineşte ca o pereche ordonată de numere reale $z = (a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, unde a se numeşte* ***partea reală****, iar b -* ***partea imaginară*** *a numărului complex z, notate cu $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$. Mulţimea numerelor complexe se notează cu $\mathbb{C}$.*

Fie $z_1 = (a_1, b_1)$, $z_2 = (a_2, b_2)$, $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$.

Egalitatea a două numere complexe:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \text{ şi } b_1 = b_2.$$

Adunarea:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2).$$

Este asociativă, comutativă, are elementul neutru $(0, 0)$, iar fiecare număr complex z are opusul $-z = (-a, -b)$, aşadar $(\mathbb{C}, +)$ este grup comutativ.

Înmulţirea cu scalari:

$$\alpha \cdot z = (\alpha a, \alpha b).$$

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ este spaţiu vectorial real de dimensiune 2, deci izomorf cu $\mathbb{R}^2$, iar baza canonică este formată din numerele complexe $1 = (1, 0)$ (*unitatea reală*) şi $i = (0, 1)$ (*unitatea imaginară*). În raport cu această bază avem

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a \cdot 1 + b \cdot i = a + bi$$

care se numeşte **forma algebrică a unui număr complex**.

Numerele de forma $(a, 0) = a + 0i = a$ se identifică cu numerele reale. Astfel, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Numerele de forma $(0, b) = 0 + bi = bi$ se numesc *pur imaginare.*

Înmulţirea numerelor complexe:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

Este asociativă, comutativă, are elementul neutru $(1, 0)$, iar fiecare număr complex $z \neq 0$ are inversul $z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$, aşadar $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ este grup comutativ.

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ este corp comutativ. Cum $i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$, operaţiile în acest corp devin asemănătoare cu operaţiile cu polinoame:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i \\ z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 = \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i \end{aligned}$$

Numărul complex $\bar{z} = a - bi$ se numeşte *conjugatul* lui $z = a + bi$.

Numărul real $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ se numeşte *modulul* lui $z = a + bi$.

Are loc relaţia $z \cdot \bar{z} = |z|^2$. Împărţirea a două numere complexe se face prin amplificarea cu conjugatul numitorului:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} i \text{ pentru } z_2 \neq 0.$$

Alte proprietăţi ale numerelor complexe:

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2 \tag{2.26}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \tag{2.27}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \ (z_2 \neq 0) \tag{2.28}$$

$$z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \tag{2.29}$$

$$\operatorname{Re} z = \tfrac{1}{2}(z + \bar{z}), \ \operatorname{Im} z = \tfrac{1}{2i}(z - \bar{z}) \tag{2.30}$$

$$\overline{(\bar{z})} = z \tag{2.31}$$

$$\operatorname{Re} \bar{z} = \operatorname{Re} z, \ \operatorname{Im} \bar{z} = -\operatorname{Im} z \tag{2.32}$$

$$|\bar{z}| = |-z| = |z| \tag{2.33}$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \tag{2.34}$$

$$\left|\tfrac{z_1}{z_2}\right| = \tfrac{|z_1|}{|z_2|} \tag{2.35}$$

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \tag{2.36}$$

$$|\operatorname{Re} z| \leq |z|, \ |\operatorname{Im} z| \leq |z| \tag{2.37}$$

$$|z_1 \pm z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) \tag{2.38}$$

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right) \tag{2.39}$$

Numerele complexe pot fi reprezentate prin puncte în plan astfel: punctul $M(x, y)$ se numeşte *imaginea geometrică* a numărului complex $z = x + yi$ şi invers, numărul complex $z = x + yi$ se numeşte *afixul* punctului $M(x, y)$.

Numerelor reale corespund puncte de pe axa Ox (numită *axă reală*), iar numerelor pur imaginare corespund puncte de pe axa Oy (numită *axă imaginară*)

Folosind coordonatele polare ale punctelor din plan $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$ obţinem **forma trigonometrică** a numerelor complexe:

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$ este chiar *modulul* lui z, iar $\theta \in [0, 2\pi)$ (cu $\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$) se numeşte *argumentul* lui z şi se notează cu $\arg z$

Folosind *formula lui Euler*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

se obţine **forma exponenţială** a numerelor complexe $z = \rho e^{i\theta}$.

Avem $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$, deci $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$.

Pentru adunarea şi scăderea numerelor complexe se poate folosi regula paralelogramului pentru vectorii de poziţie corespunzători imaginilor acestor numere complexe.

Distanţa dintre imaginile a două numere complexe este egală cu modulul diferenţei dintre aceste numere:

$$|z_1 - z_2| = |(x_1 + y_1 i) - (x_2 + y_2 i)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Pentru înmulţirea şi împărţirea numerelor complexe se pot folosi formele trigonometrice sau exponenţiale. Dacă $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = \rho_1 e^{i\theta_1}$ şi $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = \rho_2 e^{i\theta_2}$ atunci:

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot\rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = \\
&= \rho_1\rho_2\left[\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\right] \\
&= \rho_1\rho_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right] \\
&= \rho_1 e^{i\theta_1}\cdot\rho_2 e^{i\theta_2} = \rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1}{\rho_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right] = \frac{\rho_1 e^{i\theta_1}}{\rho_2 e^{i\theta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}
\end{aligned}$$

Formula lui Moivre:

$$z^n = \left[\rho(\cos\theta + i\sin\theta)\right]^n = \rho^n\left[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right]$$

Consecinţe ale formulei lui Moivre:

- Ecuaţia binomă $z^n = a$, unde $a = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \in \mathbb{C}$ are rădăcinile complexe

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right),\ k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{2.40}$$

- Pentru $a = 1 = \cos 0 + i\sin 0$ se obţine

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n},\ k = 0, 1, \ldots, n-1$$

  care se numesc *rădăcinile de ordinul* n *ale unităţii.*

- Rădăcinile din (2.40) pot fi rescrise

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha}{n} + i\sin\frac{\alpha}{n}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right),\ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

  aşadar se obţin dintr-o rădăcină a ecuaţiei binome prin înmulţire cu rădăcinile de ordinul n ale unităţii.

2.4 Funcţiile trigonometrice în complex

Funcţii elementare în complex:

1. *Funcţia polinomială în complex*

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \; a_k \in \mathbb{C}, k = 0, \ldots, n$$

2. *Funcţia raţională în complex*

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \cdots + a_1 z + a_0}{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0},$$

$a_j, b_k \in \mathbb{C}, j = \overline{0, m}, k = \overline{0, n}$

3. *Funcţia radical în complex* $\sqrt[n]{z}$ se defineşte ca fiind inversa funcţiei putere z^n. Folosind (2.40) avem:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right), \; k = \overline{0, n-1}.$$

Funcţia radical în complex este o *funcţie multivalentă (multiformă)* cu n valori (ramuri de funcţie). Pentru $k = 0$ se obţine *determinarea principală* a funcţiei radical.

4. *Funcţia exponenţială în complex*:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Proprietăţi:

- $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$
- $e^{z+2\pi i} = e^z$ (funcţie periodică de perioadă $2\pi i$)
- $|e^z| = e^x$ şi $\arg(e^z) = y$ pentru $z = x + iy$

5. *Funcţia logaritmică în complex* se defineşte ca fiind inversa funcţiei exponenţiale: $z = e^w \Leftrightarrow w = \ln z$.
Dacă $w = u + iv$ şi $z = \rho e^{i\theta}$ (unde $\rho = |z|$ şi $\theta = \arg(z)$) atunci:
$e^w = e^{u+iv} = e^u \cdot e^{iv} = z = \rho \cdot e^{i\theta} \Rightarrow e^u = \rho$ şi $v = \theta + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\left(\arg z + 2k\pi\right), \; k \in \mathbb{Z}$$

Logaritmul complex este o funcţie multivalentă (multiformă) cu o infinitate de ramuri de funcţie. Pentru $k = 0$ se obţine *determinarea principală* a funcţiei logaritm. Proprietăţi:

- $\ln(z_1 \cdot z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$
- $\ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \ln z_1 - \ln z_2$
- $\ln(z^n) = n \ln z$
- $\ln\left(\sqrt[n]{z}\right) = \frac{1}{n} \ln z$

6. *Puterea complexă a unui număr complex*:

$$z^\alpha = e^{\alpha \ln z} \ (\alpha \in \mathbb{C}).$$

7. *Funcţiile trigonometrice şi hiperbolice în complex* se definesc cu ajutorul funcţiei exponenţiale şi prelungesc în complex funcţiile corespunzătoare reale:

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \quad \sin z = \tfrac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) \tag{2.41}$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right) \quad \operatorname{sh} z = \tfrac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right) \tag{2.42}$$

Proprietăţi:

- $\cos(iz) = \operatorname{ch} z$ şi $\sin(iz) = i \operatorname{sh} z$
- $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ şi $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$
- $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$
- $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$
- $\operatorname{sh}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 \pm \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2$
- $\operatorname{ch}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 \pm \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2$
- Funcţiile trigonometrice sin şi cos sunt periodice de perioadă 2π, iar funcţiile hiperbolice sh şi ch sunt periodice de perioadă $2\pi i$
- Funcţiile cos şi ch sunt pare, iar funcţiile sin şi sh sunt impare
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z$ şi $\cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \sin z$

Se pot defini şi funcţiile $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$, $\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$, $\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$, $\operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$.

8. *Funcţiile inverse trigonometrice şi inverse hiperbolice în complex* se definesc cu ajutorul funcţiei logaritmice în complex:

- $\arcsin z = \frac{1}{i} \operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)$
- $\arccos z = \frac{1}{i} \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$

- $\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{i - z}{i + z}$
- $\operatorname{arcctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{z + i}{z - i}$
- $\operatorname{argsh} z = \operatorname{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 + 1} \right)$
- $\operatorname{argch} z = \operatorname{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right)$
- $\operatorname{argth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + z}{1 - z}$
- $\operatorname{argcth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{z + 1}{z - 1}$

2.5 Exerciţii

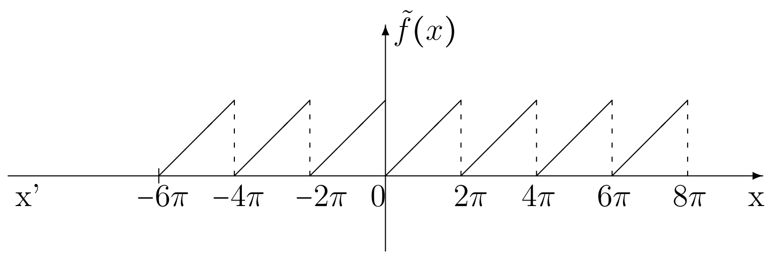
1. Să se găsească seria Fourier a funcţiei

$$f(x) = x, \ 0 \le x \le 2\pi,$$

periodică, de perioadă 2π.

Rezolvare.

Prelungind funcţia $f(x)$ prin periodicitate, construim funcţia $\tilde{f}(x)$, definită pe $\mathbb{R}$ minus punctele $x_n = 2n\pi, \ (n \in \mathbb{Z})$, care sunt discontinuităţi de speţa întâia pentru această funcţie. Graficul său, pentru un număr finit de perioade, este următorul:



Avem: $\tilde{f}(2k\pi - 0) = 2\pi, \ \tilde{f}(2k\pi + 0) = 0, \ k \in \mathbb{Z}$.

Calculăm coeficienţii Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x dx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{2\pi} = 2\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin nx\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\sin nx dx\right] = 0,\ n\in\mathbb{N}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\sin nx dx\right] = -\frac{2}{n},\ n\in\mathbb{N}$$

Avem,

$$f(x) \to \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} = \begin{cases}\tilde{f}(x) & \text{pentru } x\in\mathbb{R}\setminus\{2k\pi\}, k\in\mathbb{Z}\\ \pi & \text{pentru } x = 2k\pi, k\in\mathbb{Z}\end{cases},$$

adică seria Fourier este convergentă către ordonatele graficului funcţiei $\tilde{f}(x)$ în orice punct de continuitate a acestei funcţii şi are suma egală cu media aritmetică a limitelor laterale ale funcţiei $\tilde{f}(x)$, în toate punctele sale de discontinuitate. Pe intervalele $(2n\pi, 2(n+1)\pi)_{n\in\mathbb{Z}}$ convergenţa seriei este chiar uniformă către $\tilde{f}(x)$.

Din precedentele rezultă formula

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2},\ x\in(0,2\pi), \tag{2.43}$$

care dă suma seriei trigonometrice $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ pentru orice valoare a lui x din intervalul $(0,2\pi)$.

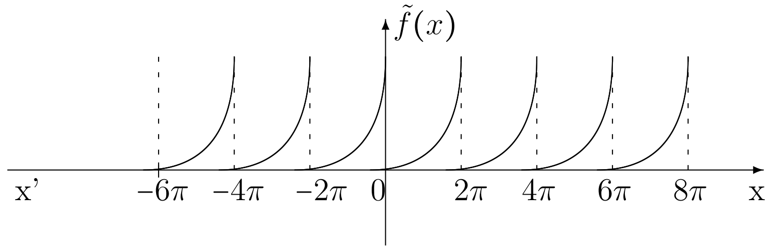
2. Să se găsească seria Fourier a funcţiei

$$f(x) = x^2,\ 0\le x\le 2\pi,$$

funcţia fiind periodică de perioadă $T = 2\pi$, să se precizeze apoi suma seriei pentru $x\in\mathbb{R}$.

Rezolvare.

Graficul funcţiei $f(x)$ este următorul:



Avem: $\tilde{f}(2k\pi - 0) = 4\pi^2$, $\tilde{f}(2k\pi + 0) = 0$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{8\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{4}{n^2}, \; n = 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin nx dx = -\frac{4\pi}{n}, \; n = 1, 2, \ldots$$

Rezultă atunci:

$$f(x) \to \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} = \begin{cases} \tilde{f}(x) & \text{pentru } x \neq 2k\pi \\ 2\pi^2 & \text{pentru } x = 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \tag{2.44}$$

Ca o consecinţă a acestei dezvoltări, obţinem pentru $x = \pi$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

De asemenea, înlocuind (2.43) în (2.44) se obţine suma primei serii din dezvoltarea de mai sus sub forma

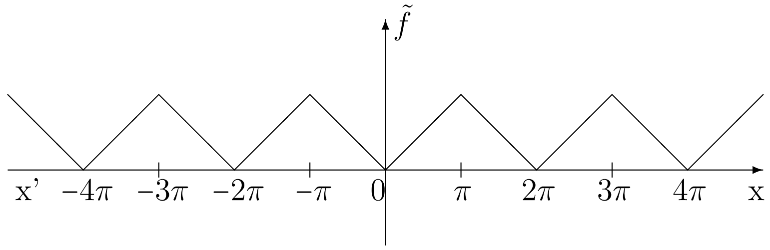
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} = \frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12}, \; 0 \leq x \leq 2\pi, \tag{2.45}$$

egalitatea fiind valabilă chiar pentru $x = 0$ şi $x = 2\pi$, deoarece prelungirea funcţiei din membrul drept al egalităţii (2.45) este continuă pentru $x \in \mathbb{R}$ (ea ia valori egale cu $\pi^2/6$ la capetele intervalului $[0, 2\pi]$).

3. Să se dezvolte în serie Fourier de cosinusuri funcţia $f(x) = |x|, 0 \leq x \leq \pi$, periodică, de perioadă 2π.

   Rezolvare.

   Prelungim mai întâi funcţia prin paritate pe intervalul $[-\pi, 0]$ şi apoi prin periodicitate pe toată axa. Se obţine o funcţie continuă pe $\mathbb{R}$, pe care o notăm cu $\tilde{f}$ şi al cărui grafic este următorul:



Avem:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x dx = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}\Big|_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin nx dx\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^\pi = \begin{cases} 0 & \text{pentru } n \text{ par} \\ \dfrac{-4}{\pi(2n-1)^2} & \text{pentru } n \text{ impar} \end{cases}$$

Prin urmare,

$$\begin{cases} a_{2n} = 0, \ n = 1, 2, \dots \\ a_{2n-1} = \dfrac{-4}{\pi(2n-1)^2}, \ n = 1, 2, \dots \\ b_n = 0, \ n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

rezultă că,

$$|x| \to \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} = \tilde{f}(x), \ x \in \mathbb{R}.$$

Din această dezvoltare rezultă că putem scrie egalitatea:

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}, \ -\pi \le x \le \pi. \tag{2.46}$$

Egalitatea (2.46) are loc şi în punctele $x = \pi$ şi $x = -\pi$, în virtutea continuităţii funcţiei. Seria obţinută este absolut şi uniform convergentă pentru $x \in \mathbb{R}$, concluzie ce rezultă atât din criteriul lui Dirichlet cât şi prin aplicarea criteriului lui Weierstrass, comparând seria dată cu seria Riemann $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$, care este convergentă.

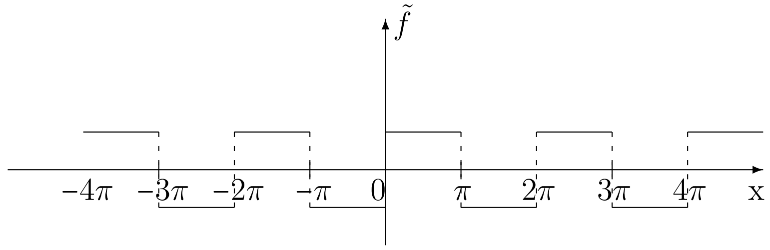
4. Să se dezvolte în serie Fourier de sinusuri, funcţia $f(x) = 1, \ 0 \le x \le \pi$, periodică, de perioadă 2π.

   Rezolvare.

   Rezolvarea problemei constă în a prelungi mai întâi funcţia dată prin imparitate pe intervalul $[-\pi, 0]$, obţinând

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{pentru } -\pi \le x \le 0 \\ 1 & \text{pentru } 0 < x \le \pi \end{cases}$$

şi apoi prin periodicitate pe toată axa, obţinând în final funcţia $\tilde{f}(x)$, al cărei grafic are următorul aspect:



După această operaţie, calculăm coeficienţii corespunzători funcţiei impare date:

$$a_n = 0, \ (n = 0, 1, 2, \dots),$$
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1 \cdot \sin nx dx = -\frac{2}{n\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi}\left[1 - (-1)^n\right],$$

de unde rezultă,

$$b_{2n} = 0, \ (n = 0, 1, 2, \dots),$$
$$b_{2n-1} = \frac{4}{\pi(2n-1)}, \ (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Rezultă că avem

$$f(x) \to \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = \begin{cases} \tilde{f}(x) & \text{pentru } x \neq k\pi \\ 0 & \text{pentru } x = k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Această serie este chiar uniform convergentă pe toate subintervalele aparţinând intervalelor $(n\pi, (n+1)\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Din dezvoltarea precedentă mai rezultă egalitatea

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = \frac{\pi}{4}, \ 0 < x < \pi.$$

Acest rezultat este interesant prin faptul că suma seriei este constantă, cu toate că seria este o serie de funcţii.

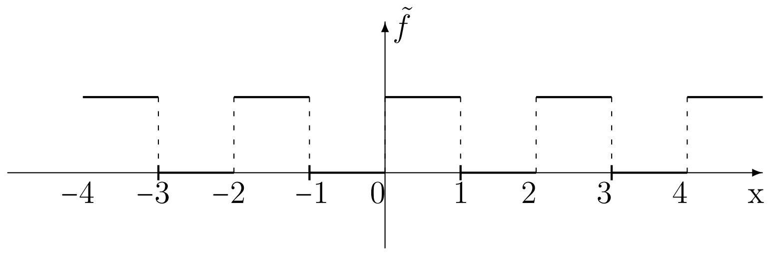
5. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{dacă } -1 < x < 0 \end{cases},$$

a cărei perioadă este $T = 2$.

Rezolvare.

Graficul funcţiei prelungite este de forma prezentată în figura alăturată



Acum calculăm coeficienţii Fourier corespunzători pentru $l = 1$ şi ţinând seama că $f(x) = 0$ pe intervalul $[-1, 0]$:

$$a_0 = \int_0^1 dx = 1;$$

$$a_n = \int_0^1 \cos n\pi x dx = \frac{1}{n\pi} \sin nx \Big|_0^1 = 0, \ (n = 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \int_0^1 \sin n\pi x dx = -\frac{1}{n\pi} \cos n\pi x \Big|_0^1 = \frac{1}{n\pi} [1 - (-1)^n]$$

de unde rezultă

$$b_{2n} = 0, \ b_{2n-1} = \frac{2}{\pi(2n-1)}, \ (n = 1, 2, \dots).$$

Prin urmare,

$$f(x) \to \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\pi x}{2n-1} = \begin{cases} \tilde{f}(x) & \text{pentru } x \neq k \\ \frac{1}{2} & \text{pentru } x = k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

De aici mai rezultă egalitatea

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\pi x}{2n-1} = \frac{\pi}{4}, \ 0 < x < 1,$$

din care pot fi obţinute pentru valori particulare ale lui x sumele unor serii alternate.

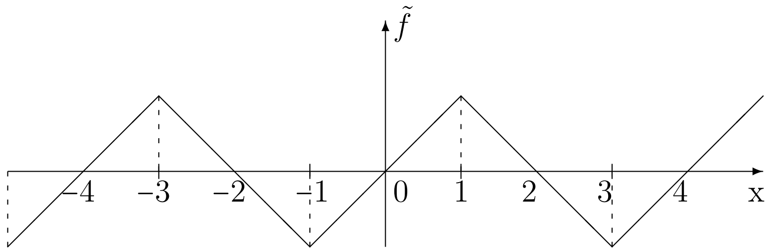
6. Să se dezvolte în serie de sinusuri funcţia periodică

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pentru } 0 \le x \le 1 \\ 2 - x & \text{pentru } 1 < x \le 2 \end{cases},$$

perioada sa fiind $T = 2l = 4$, $(l = 2)$.

Rezolvare.

Prelungind prin imparitate funcţia $f(x)$ pe intervalul $[-2, 0]$ şi apoi prin periodicitate pe toată axa, obţinem funcţia continuă $f(x)$, al cărei grafic are următorul aspect:



Suma seriei Fourier corespunzătoare va coincide cu $\tilde{f}(x)$ pe $\mathbb{R}$, seria fiind absolut şi uniform convergentă (după cum se va putea constata aplicându-i criteriul lui Weierstrass).

Funcţia $f(x)$ fiind impară, rezultă $a_n = 0, (n = 0, 1, 2, \dots)$, iar

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{s}dx = \int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{s}dx =$$
$$= \int_0^1 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx + \int_1^2 (2-x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{8}{\pi^2 n^2}\sin\frac{n\pi}{2},\ (n = 1, 2, \dots).$$

Din ultima expresie rezultă

$$b_{2n} = 0,\ (n \in \mathbb{N});\ b_{2n-1} = \frac{8(-1)^{n-1}}{\pi^2(2n-1)^2},\ (n \in \mathbb{N}).$$

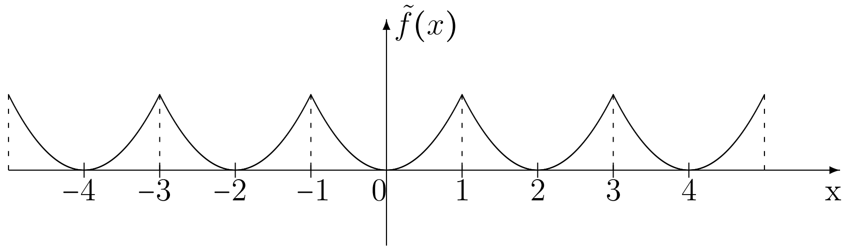
Drept consecinţă, putem scrie

$$\tilde{f}(x) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2},\ x \in \mathbb{R}.$$

7. Să se dezvolte în serie de cosinusuri funcţia periodică de perioadă $T = 2l = 2,\ f(x) = x^2,\ x \in [0,1]$.

   Rezolvare.

   Se prelungeşte mai întâi funcţia $f(x)$ prin paritate pe intervalul $[-1,0]$ şi apoi prin periodicitate pe toată axa, obţinându-se funcţia $\tilde{f}(x)$, continuă pe $\mathbb{R}$, al cărei grafic îl prezentăm în continuare:



   Funcţia dată fiind pară, avem $b_n = 0,\ (n \in \mathbb{N})$.

   Avem încă

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l x^2 dx = 2\int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3};$$
$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l x^2 \cos\frac{n\pi x}{s} dx = 2\int_0^1 x^2 \cos n\pi x dx = \frac{4\cdot(-1)^n}{n^2\pi^2}\ \ (n \in \mathbb{N}).$$

   Urmează atunci, în virtutea continuităţii funcţiei $\tilde{f}(x)$ că avem

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \cos n\pi x}{n^2},\ \ x \in \mathbb{R}$$

   Mai rezultă că putem scrie încă egalitatea

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \cos n\pi x}{n^2} = \frac{\pi^2(3x^2-1)}{12},\ \ x \in [-1,1] \tag{2.47}$$

   Luând în (2.47) pe $x = 1$, obţinem suma seriei Riemann

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

   De asemenea, pentru $x = 0$, din (2.47) obţinem

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

   Din exemplele considerate se poate constata că din dezvoltări Fourier corespunzătoare, se pot obţine sumele unor serii numerice, pentru care, de cele mai multe ori nu putem preciza decât cel mult natura.

8. Să se dezvolte în serie Fourier trigonometrică pe intervalul $[-l, l]$, $l > 0$ funcţia
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-l, 0) \\ x, & x \in [0, l] \end{cases}.$$

9. Să se dezvolte în serie Fourier trigonometrică numai de sinusuri pe intervalul $[0, \pi]$ funcţia
$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0, & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}.$$

10. Să se dezvolte în serie Fourier trigonometrică numai de cosinusuri pe intervalul $[0, \pi]$ funcţia
$$f(x) = \pi - 2x.$$

11. Să se calculeze:
a) $(1+i)(2-3i)$; b) $(2+i)^3$; c) $\dfrac{2-i}{2+i}$; d) $\dfrac{1+3i}{2-i}$; e) $\dfrac{1+i}{i(2+3i)}$;
f) $\dfrac{(1+2i)(2-3i)}{(2-i)(3+2i)}$.

12. Să se reprezinte în plan şi să se scrie sub formele trigonometrică şi exponenţială următoarele numere complexe: $\pm i$, $\pm 1 \pm i$, $\pm 1 \pm i\sqrt{3}$, $\pm\sqrt{3} \pm i$, $\pm 4 \pm 3i$.

13. Să se scrie forma algebrică ale numerelor complexe având următoarele module şi argumente:
a) $|z| = 2, \arg z = \pi$; b) $|z| = 1, \arg z = \frac{3\pi}{4}$; c) $|z| = \pi, \arg z = \frac{\pi}{6}$;
d) $|z| = \frac{1}{2}, \arg z = -\frac{\pi}{3}$.

14. Să se determine şi să se reprezinte în plan numerele complexe care satisfac următoarele relaţii:
a) $|z| = 2$; b) $|z - 2i| \le 3$; c) $3 \le |z - 3 + 4i| \le 5$; d) $\operatorname{Re} z \le 3$; f) $\operatorname{Im} z \ge -2$;
g) $\dfrac{\pi}{6} \le \arg z \le \dfrac{\pi}{3}$

15. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $z^2 + (5-2i)z + 5(1-i) = 0$

b) $z^2 + (1-2i)z - 2i = 0$

c) $z^3 = -1$

d) $z^4 = 4$

e) $z^6 + (1+7i)z^3 + 8 + 8i = 0$

R:

a) $z_1 = -2 + i,\ z_2 = -3 + i$

b) $z_1 = -1,\ z_2 = 2i$

16. Să se calculeze următoarele valori:

a) e^{2+3i}

b) $\ln(\sqrt{3} + i)$

c) $(1+i)^{3-2i}$

d) i^i

R:

a) $e^2(\cos 3 + i \sin 3)$

b) $\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}$

c) $2^{\frac{3}{2}} e^{\frac{\pi}{2} + 4k\pi}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \ln 2\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \ln 2\right)\right], k \in \mathbb{Z}$

d) $e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)},\ k \in \mathbb{Z}$

17. Să se calculeze:

a) $\sin(2 - i)$

b) $\cos(2 + i)$

c) $\operatorname{tg}(2 - i)$

d) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - i \ln 2\right)$

e) $\operatorname{ch}(1 + i)$

f) $\operatorname{cth}(2 + i)$

Capitolul 3

Aplicaţiile trigonometriei în geometrie şi practică

3.1 Relaţii între laturi şi unghiuri într-un triunghi oarecare

Fie un triunghi oarecare cu vârfurile în punctele A, B, C (se notează $\triangle ABC$).

Unghiurile sunt notate cu A, B şi C şi măsura lor este cuprinsă între 0^0 şi 180^0 (în radiani între 0 şi π):

$$A + B + C = 180^0$$

Dacă toate unghiurile sunt ascuţite $(A, B, C < 90^0)$ triunghiul se numeşte *ascuţitunghic*, dacă un unghi este obtuz (cu măsura între 90^0 şi 180^0) se numeşte *obtuzunghic*, iar dacă are un unghi drept (90^0) se numeşte *dreptunghic*.

Laturile se notează cu $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ şi verifică inegalităţile:

$$a < b + c, \quad b < c + a, \quad c < a + b \tag{3.1}$$

$$a > |b - c|, \quad b > |c - a|, \quad c > |a - b| \tag{3.2}$$

Un triunghi care are două laturi egale se numeşte *isoscel*, un triunghi cu toate laturile egale se numeşte *echilateral*, iar un triunghi cu laturile oarecare se mai numeşte şi triunghi *scalen*.

Notăm cu h_a, h_b, h_c înălţimile triunghiului duse din A, B, respectiv C. Avem:

$$h_a = c \sin B = b \sin C \Rightarrow \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$
$$h_b = c \sin A = a \sin C \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$
$$h_c = a \sin B = b \sin A \Rightarrow \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$$

Teorema sinusurilor:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Aria $\triangle ABC$ este

$$S = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}bc\sin A$$

Deducem că $\sin A = \dfrac{2S}{bc}, \sin B = \dfrac{2S}{ac}, \sin C = \dfrac{2S}{ab}$, iar teorema sinusurilor devine

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{abc}{2S} = 2R$$

unde R este raza cercului circumscris triunghiului.

Avem $S = \dfrac{abc}{4R}$ şi

$$a = 2R\sin A,\ b = 2R\sin B,\ c = 2R\sin C$$

Teorema proiecţiilor:

$$\begin{aligned} a &= c\cos B + b\cos C \\ b &= a\cos C + c\cos A \\ c &= b\cos A + a\cos B \end{aligned}$$

Teorema lui Pitagora generalizată:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{aligned}$$

Teorema cosinusului:

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ \cos B &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{aligned}$$

Avem:

$$\begin{aligned} \cos^2\frac{A}{2} &= \frac{1}{2}(1+\cos A) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) = \frac{b^2+2bc+c^2-a^2}{4bc} = \\ &= \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc} = \frac{p(p-a)}{bc},\ \text{unde } p = \frac{a+b+c}{2} \end{aligned}$$

Aşadar $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$, $\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}$, $\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$

$$\begin{aligned}\sin^2\frac{A}{2} &= \frac{1}{2}(1-\cos A)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)=\frac{a^2-b^2+2bc-c^2}{4bc}=\\ &= \frac{(a+c-b)(a+b-c)}{4bc}=\frac{(p-b)(p-c)}{bc},\ \text{deci}\end{aligned}$$

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},\ \sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}},\ \sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},\ \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}},\ \operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

Teorema tangentei:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{2R(\sin A-\sin B)}{2R(\sin A+\sin B)}=\frac{2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}=\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}\operatorname{ctg}\frac{A+B}{2}\Rightarrow$$

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}},\ \frac{b-c}{b+c}=\frac{\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}},\ \frac{c-a}{c+a}=\frac{\operatorname{tg}\frac{C-A}{2}}{\operatorname{tg}\frac{C+A}{2}}$$

Formulele lui Mollweide:

$$\frac{a+b}{c}=\frac{2R(\sin A+\sin B)}{2R\sin C}=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}};\ A+B+C=\pi\Rightarrow$$

$\sin\frac{A+B}{2}=\sin\frac{\pi-C}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)=\cos\frac{C}{2}$ şi atunci obţinem

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}},\ \frac{b+c}{a}=\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}},\ \frac{c+a}{b}=\frac{\cos\frac{C-A}{2}}{\sin\frac{B}{2}}$$

şi analog

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}},\ \frac{b-c}{a}=\frac{\sin\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}},\ \frac{c-a}{b}=\frac{\sin\frac{C-A}{2}}{\cos\frac{B}{2}}$$

3.2 Formule pentru diverse elemente ale unui triunghi

1. **Aria** triunghiului

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}bc\sin A = bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = bc\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \\ &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad (\textbf{formula lui Heron}) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{a\sin B}{\sin A}\cdot\frac{a\sin C}{\sin A}\cdot\sin A = \frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A} \end{aligned}$$

2. **Raza cercului circumscris** triunghiului

$$2R = \frac{abc}{2S} \Rightarrow R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

3. **Raza cercului înscris** în triunghi

$$S = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{a+b+c}{2}\cdot r = p\cdot r \Rightarrow r = \frac{S}{p}$$

4. **Înălţimile** triunghiului

$$\begin{aligned} h_a &= 2R\sin B\sin C \\ h_b &= 2R\sin A\sin C \\ h_c &= 2R\sin A\sin B \end{aligned}$$

5. **Bisectoarele** triunghiului

$$\begin{aligned} b_a &= \frac{b\sin C}{\cos\frac{B-C}{2}} = \frac{c\sin B}{\cos\frac{B-C}{2}} \\ b_b &= \frac{c\sin A}{\cos\frac{C-A}{2}} = \frac{a\sin C}{\cos\frac{C-A}{2}} \\ b_c &= \frac{a\sin B}{\cos\frac{A-B}{2}} = \frac{b\sin A}{\cos\frac{A-B}{2}} \end{aligned}$$

6. **Medianele** triunghiului

$$\begin{aligned} m_a^2 &= \tfrac{2(b^2+c^2)-a^2}{4} \\ m_b^2 &= \tfrac{2(a^2+c^2)-b^2}{4} \\ m_c^2 &= \tfrac{2(a^2+b^2)-c^2}{4} \end{aligned}$$

3.3 Rezolvarea triunghiurilor

Fie ABC un triunghi dreptunghic în A ($A = 90^0$). Lungimile catetelor sunt $AB = c$ şi $AC = b$, iar lungimea ipotenuzei este $BC = a$. Avem:

- Unghiurile ascuţite sunt complementare deoarece suma unghiurilor este 180^0:
$$B + C = 90^0$$
- Teorema lui Pitagora:
$$a^2 = b^2 + c^2$$
- Funcţiile trigonometrice în triunghiul dreptunghic:
$$\sin B = \frac{b}{a},\ \cos B = \frac{c}{a},\ \operatorname{tg} B = \frac{b}{c},\ \operatorname{ctg} B = \frac{c}{b}$$
$$\sin C = \frac{c}{a},\ \cos C = \frac{b}{a},\ \operatorname{tg} C = \frac{c}{b},\ \operatorname{ctg} C = \frac{b}{c}$$
- Aria triunghiului:
$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\cdot b\cdot c = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{4}a^2\sin 2B = \frac{1}{4}a^2\sin 2C \\ &= \frac{1}{2}b^2\operatorname{ctg} B = \frac{1}{2}c^2\operatorname{ctg} C \end{aligned}$$

Un triunghi dreptunghic poate fi rezolvat dacă sunt cunoscute (în afară de unghiul drept $A = 90^0$) următoarele elemente:

1. cele două catete b şi c
2. ipotenuza a şi o catetă b (sau c)
3. ipotenuza a şi un unghi ascuţit B (sau C)
4. o catetă şi unghiul opus ei (b şi B, sau c şi C)

Caz	Date	Necunoscute	Unghiuri	Laturi	Arie
1	b, c	B, C, a, S	$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c}, \operatorname{tg} C = \frac{c}{b}$	$a^2 = b^2 + c^2$	$S = \frac{1}{2}bc$
2	a, b	B, C, c, S	$\sin B = \cos C = \frac{b}{a}$	$c^2 = a^2 - b^2$	$S = \frac{1}{2}b\sqrt{a^2 - b^2}$
3	a, B	C, b, c, S	$C = 90^0 - B$	$b = a\sin B$ $c = a\cos B$	$S = \frac{1}{4}a^2\sin 2B$
4	b, B	C, a, c, S	$C = 90^0 - B$	$a = \frac{b}{\sin B}$ $c = b\operatorname{ctg} B$	$S = \frac{1}{2}b^2\operatorname{ctg} B$

Un triunghi oarecare poate fi rezolvat dacă sunt cunoscute următoarele elemente:

1. două laturi şi unghiul dintre ele (cazul L.U.L.)
2. o latură şi două unghiuri (cazul U.L.U.)
3. toate cele trei laturi (cazul L.L.L.)
4. două laturi şi unghiul opus uneia dintre ele (cazul L.L.U.)

Caz	Date	Nec.	Unghiuri	Laturi
L.U.L.	a, C, b	A, B, c	$\begin{cases} A+B = 180^0 - C \\ \operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cdot\operatorname{ctg}\frac{C}{2} \end{cases}$	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$
U.L.U.	B, a, C	A, b, c	$A = 180^0 - (B+C)$	$b = \frac{a\sin B}{\sin A},\ c = \frac{a\sin C}{\sin A}$
L.L.L.	a, b, c	A, B, C	$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$ $\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$ $\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$	Verificare : $A+B+C = 180^0$
L.L.U.	a, b, A	B, C, c	$\sin B = \frac{b\sin A}{a}$ $C = 180^0 - (A+B)$	$c^2 - 2bc\cos A + b^2 - a^2 = 0$ (ecuaţie de gr. 2 în c)

Observaţii:

- În cazul L.U.L. triunghiul poate fi construit grafic, deci existenţa lui este asigurată cu soluţie unică. Latura necunoscută se determină cu teorema lui Pitagora generalizată, iar unghiurile necunoscute se obţin din sistemul pentru suma şi diferenţa lor (ca în tabel) sau cu teorema sinusurilor
- În cazul U.L.U. triunghiul există şi este unic dacă şi numai dacă suma unghiurilor date este mai mică de 180^0. Unul din unghiurile date poate să nu fie alăturat laturii date deoarece din suma unghiurilor rezultă şi celălalt unghiu alăturat. Laturile necunoscute se calculează cu ajutorul teoremei sinusurilor.
- În cazul L.L.L. triunghiul există şi este unic determinat dacă şi numai dacă pentru laturile date sunt îndeplinite inegalităţile triunghiului. Unghiurile se determină cu ajutorul teoremei cosinusului sau cu formulele jumătăţii de arc în funcţie de laturi.

- În cazul L.L.U. triunghiul există dacă şi numai dacă ecuaţia de gradul doi obţinută din teorema lui Pitagora generalizată are cel puţin o rădăcină strict pozitivă.

$$c^2 - 2bc\cos A + b^2 - a^2 = 0 \Rightarrow c = b\cos A \pm \sqrt{b^2\cos^2 A - b^2 + a^2} \Rightarrow$$
$$c = b\cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2\sin^2 A}$$

3.4 Trigonometrie şi geometrie în spaţiu

Intersecţia a două plane neparalelele este o dreaptă. Aceste plane se împart în patru semiplane (două câte două opuse) care au în comun dreapta de intersecţie.

Două semiplane formează un **unghi diedru**, dreapta ce limitează aceste semiplane se numeşte *originea diedrului* sau *muchia diedrului*, iar semiplanele se numesc *feţele diedrului*.

Prin *unghi plan corespunzător unui unghi diedru* înţelegem unghiul format de două semidrepte conţinute în cele două semiplane şi perpendiculare pe muchia diedrului.

Planul bisector al unghiului diedru este planul care conţine muchia diedrului şi care face cu feţele diedrului unghiuri plane corespunzătoare egale.

Fie un unghi diedru de măsură α. Dacă ABC este un triunghi de arie S situat pe una din feţele diedrului, atunci aria proiecţiei $A'B'C'$ pe cealaltă faţă a diedrului este $S' = S\cos\alpha$

Dacă se consideră un al treilea plan care nu este paralel cu cele două plane care formează unghiul diedru, atunci toate trei au un punct comun şi se intersectează două câte două după câte o dreaptă, formând trei muchii care trec prin punctul comun planelor. Spaţiul este împărţit de cele trei plane în opt părţi numite *octanţi*.

Porţiunea din spaţiu determinată de un octant se mai numeşte şi *unghi spaţial* sau **unghi triedru**. Elementele unui triedru $Oxyz$ sunt:

- *vârful* triedrului O
- 3 *muchii* (semidreptele Ox, Oy, Oz)
- 3 *feţe* plane (xOy, yOz, xOz), fiecare dintre ele fiind un unghi plan
- 3 *unghiuri diedre* având ca muchii Ox, Oy, Oz.

Bisectoarea unui triedru este semidreapta de intersecţie a planelor bisectoare ale celor trei diedre formate de feţele triedrului.

Teorema 3.1. *În orice triedru unghiul unei feţe este mai mic decât suma celorlalte două unghiuri.*

Un triedru pentru care cele trei semidrepte sunt perpendiculare două câte două se numeşte *triedru tridreptunghic*.

Un triedru tridreptunghic constituie suportul unui *reper* (*sistem de coordonate*) *cartezian* în spaţiu, muchiile fiind suportul *axelor de coordonate* (având fixate sensurile pozitive şi unitatea de măsură).

Un *reper drept* este un reper în care prin rotirea semiaxei pozitive Ox spre semiaxa pozitivă Oy în sens pozitiv, se obţine sensul pozitiv al semiaxei pozitive Oz după regula mâinii drepte sau a burghiului.

Dacă se consideră mai multe (cel puţin trei) plane ce au un punct comun se obţine un unghi mărginit de mai multe feţe plane, numit *unghi poliedru.*

Dacă interiorul unui unghi poliedru nu este intersectat de niciunul din planele care îl formează, acesta se numeşte *unghi poliedru convex*; în caz contrar unghiul se numeşte *unghi poliedru concav.*

Un plan care intersectează toate feţele unui unghi poliedru convex determină prin punctele de intersecţie cu muchiile poliedrului un poligon convex. Dacă acest poligon convex este inscriptibil într-un cerc, atunci acest cerc împreună cu vârful unghiului poliedru determină o suprafaţă conică în care este înscris poliedrul convex.

Un **unghi solid** este o porţiune din spaţiu mărginită de suprafaţa unui con circular drept.

Unghiurile solide se măsoară în *steradiani.* Un steradian este egal cu unghiul solid care, având vârful în centrul unei sfere, decupează pe aceasta o arie egală cu pătratul razei. Sfera are în total 4π steradiani (aria sferei fiind $4\pi r^2$).

Unghiurile solide se mai măsoară în *grade pătrate*, notate $(^0)^2$ sau deg^2. Ele măsoară porţiuni din suprafaţa unei sfere analog cum gradele măsoară porţiuni din lungimea unui cerc.
Astfel, dacă un grad are $\frac{\pi}{180}$ radiani, atunci un grad pătrat are $\left(\frac{\pi}{180}\right)^2 \simeq 3.0462 \cdot 10^{-4}$ steradiani.
O sferă întreagă are $4\pi\left(\frac{180}{\pi}\right)^2 = \frac{129600}{\pi} \simeq 41253\ deg^2$

3.5 Aplicaţii practice ale trigonometriei în topografie şi geodezie

3.5.1 Determinarea înălţimii unui obiect vertical

1. *Dacă punctul de la baza obiectului ce trebuie măsurat este accesibil*
   Notăm cu h înălţimea obiectului, d distanţa de la observator la baza obiectului şi α unghiul de elevaţie (determinat cu teodolitul). Atunci

$$h = d \operatorname{tg} \alpha.$$

2. *Dacă punctul de la baza obiectului este inaccesibil* (metoda 1)
   Se determină cu ajutorul teodolitului unghiurile de elevaţie α şi β ale obiectului din două puncte distincte coliniare cu baza obiectului, aflate la distanţa d unul de celălalt. Atunci:

$$h = \frac{d}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta} = \frac{d \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)}.$$

   Dacă obiectul este situat pe un plan înclinat (de pantă $\operatorname{tg} \varphi$) atunci:

$$h = \frac{d \sin \alpha \sin \beta}{\cos \varphi \sin(\beta - \alpha)}.$$

3. *Dacă punctul de la baza obiectului este inaccesibil* (metoda 2)

   - Fie P_1 şi P_2 două puncte în planul orizontal necoliniare cu baza obiectului B.
   - Notăm cu γ_1 şi γ_2 unghiurile făcute de BP_1 şi BP_2 cu P_1P_2, şi cu α_1, α_2 unghiurile de elevaţie măsurate în P_1, respectiv P_2.
   - Dacă d este distanţa dintre P_1 şi P_2, atunci:

$$h = \frac{d \operatorname{tg} \alpha_1 \sin \gamma_2}{\sin(\gamma_1 + \gamma_2)} = \frac{d \operatorname{tg} \alpha_2 \sin \gamma_1}{\sin(\gamma_1 + \gamma_2)}$$

   - Dacă se cunoaşte doar unul dintre unghiurile γ_1 şi γ_2, avem $BP_1 = h \operatorname{ctg} \alpha_1$ şi $BP_2 = h \operatorname{ctg} \alpha_2$, iar aplicând teorema cosinusului în $\triangle BP_1P_2$ pentru unghiul cunoscut se obţine h.

3.5.2 Determinarea distanţei dintre două puncte

1. Determinarea distanţei dintre două puncte accesibile despărţite printr-un obstacol

   - Fie A şi B cele două puncte despărţite printr-un obstacol.
   - Se alege un punct C din care se văd punctele A şi B şi se măsoară distanţele $AC = b$ şi $BC = a$.
   - Se determină unghiul $C = \measuredangle ACB$.
   - Distanţa $c = AB$ se determină din triunghiul ABC cu teorema lui Pitagora generalizată:

   $$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

2. Determinarea distanţei dintre un punct accesibil şi unul inaccesibil

   - Fie punctul accesibil A şi un punct B inaccesibil observatorului.
   - Se alege un punct C din care se văd punctele anterioare A şi B, punctul B fiind despărţit de punctele A şi C printr-un obstacol.
   - Se măsoară distanţa $CA = d$ şi unghiurile $\measuredangle CAB = \alpha$ şi $\measuredangle ACB = \gamma$
   - Pentru determinarea distanţei $AB = x$ se aplică teorema sinusurilor în triunghiul ABC. Obţinem

   $$x = \frac{d\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}$$

3. Determinarea distanţei dintre două puncte vizibile dar inaccesibile

   - Fie A şi B cele două puncte inaccesibile observatorului.
   - Se aleg alte două puncte C şi D din care se văd punctele A şi B dar sunt despărţite printr-un obstacol de acestea.
   - Se măsoară distanţa $CD = d$, precum şi unghiurile $\measuredangle ACB = \alpha_1$, $\measuredangle BCD = \alpha_2$, $\measuredangle ADB = \beta_1$ şi $\measuredangle ADC = \beta_1$.
   - Din teorema sinusurilor aplicată în triunghiul BCD rezultă

   $$BC = \frac{d\sin(\beta_1+\beta_2)}{\sin(\alpha_2+\beta_1+\beta_2)}$$

   - Din teorema sinusurilor aplicată în triunghiul ACD rezultă

   $$AC = \frac{d\sin\beta_2}{\sin(\beta_2+\alpha_1+\alpha_2)}$$

   - Distanţa căutată se obţine din triunghiul ABC:

   $$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC\cdot BC\cdot\cos\alpha_1$$

3.6 Exerciţii

1. Să se rezolve triunghiurile dreptunghice în care se cunosc:

   a) $A = 90^0,\ b = 3m, c = 4m;$

   b) $A = 90^0,\ a = 15m, c = 5m;$

   c) $A = 90^0,\ a = 100m, B = 69^0 21' 14'';$

   d) $A = 90^0,\ c = 10m, C = 22^0 30'.$

   R:

   a) $B = 36^0 52' 12'',\ C = 53^0 07' 48'',\ a = 5m,\ S = 6m^2$

   b) $B = 70^0 32' 44'',\ C = 19^0 27' 16'',\ b = 14.142136m,\ S = 35.355339m^2$

   c) $C = 20^0 38' 46'',\ b = 93.577607m,\ c = 35.259487m,\ S = 1649.749199m^2$

   d) $B = 67^0 30',\ a = 26.131259m,\ b = 24.142136m,\ S = 120,710678m^2$

2. Să se rezolve triunghiurile în care se cunosc:

   a) $a = 2.25, b = 8, C = 36^0 44'$
   R: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 69.0625 - 36\cos 36.733333^0 = 40.211098 \Rightarrow$ $c = 6.341222$.
   Din teorema tangentelor $\Rightarrow \operatorname{tg}\dfrac{A-B}{2} = \dfrac{a-b}{a+b}\operatorname{ctg}\dfrac{C}{2} = -1.689636 \Rightarrow$ $A - B = -118.762219^0$.
   Avem de asemenea $A + B = 180^0 - C = 143^0 16' = 143.266666^0$.
   Rezolvând sistemul găsim $A = 12.252224^0 = 12^0 15' 08''$ şi $B = 131.014442^0 = 131^0 52''$.
   Aria este $S = \frac{1}{2}ab\sin C = 5.382823$.

   b) $a = 4,\ A = 14^0 15',\ B = 112^0 37' 12'';$
   R: $C = 180^0 - (A + B) = 180^0 - 126^0 52' 12'' = 53^0 07' 48'' = 53.13^0$
   Laturile b şi c se obţin din teorema sinusurilor:
   $$b = \frac{a\sin B}{\sin A} = \frac{4\sin 112.62}{\sin 14.25^0} = 15;\ c = \frac{a\sin C}{\sin A} = \frac{4\sin 53.13}{\sin 14.25^0} = 13$$
   Aria este $S = \dfrac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A} = 24$.

   c) $a = 19,\ b = 34,\ c = 49;$
   R: Condiţiile de existenţă a triunghiului sunt îndeplinite.

Avem semiperimetrul $p = 51$, $p-a = 32$, $p-b = 17$, $p-c = 2$, de unde găsim:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = 0.144338 \Rightarrow A = 16.426421^0 = 16^0 25' 35''$$
$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}} = 0.271694 \Rightarrow B = 30.400027^0 = 30^0 24'$$
$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} = 2.309401 \Rightarrow C = 133.173551^0 = 133^0 10' 25''$$

Aria este $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 235.558910$

d) $a = \sqrt{2}$, $b = 2$, $B = 45^0$;

R: Din teorema lui Pitagora generalizată $\Rightarrow b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \Rightarrow c^2 - 2ac\cos B + a^2 - b^2 = 0 \Rightarrow c^2 - 2c + 2 = 0$ ecuaţie care are singura rădăcină pozitivă $c = 1 + \sqrt{3} = 2.732051$.

$\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = 30^0 \Rightarrow C = 180^0 - (A + B) = 105^0$.

Aria este $S = \dfrac{1}{2} bc \sin A = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2} = 1.366025$

e) $b = \sqrt{5}$, $c = \sqrt{17}$, $B = \arccos \frac{4\sqrt{17}}{17}$;

R: Din teorema lui Pitagora generalizată $\Rightarrow b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \Rightarrow a^2 - 2ac\cos B + c^2 - b^2 = 0 \Rightarrow a^2 - 8a + 12 = 0$ ecuaţie care are două rădăcini pozitive, deci problema are două soluţii:

Pentru $a_1 = 2 \Rightarrow \cos C_1 = \dfrac{a_1^2 + b^2 - c^2}{2a_1 b} = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow C_1 = 153.434949^0 = 153^0 26' 06'' \Rightarrow$
$A_1 = 180^0 - (B + C_1) = 12.528808^0 = 12^0 31' 44''$. Aria este $S_1 = \frac{1}{2} bc \sin A_1 = 1.002842$.

Pentru $a_2 = 6 \Rightarrow \cos C_2 = \dfrac{a_2^2 + b^2 - c^2}{2a_2 b} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow C_2 = 26.565051^0 = 26^0 53' 54'' \Rightarrow$
$A_2 = 180^0 - (B + C_2) = 139.398706^0 = 139^0 23' 56''$. Aria este $S_1 = \frac{1}{2} bc \sin A_2 = 2.999989$.

3. Să se rezolve triunghiurile în care se cunosc:

a) $a = 14$, $c = 13$, $B = 67^0 22' 49''$;

b) $b = 15$, $A = 14^0 15'$, $C = 53^0 07' 48''$;

c) $a = 5,\ b = 12,\ c = 13$;

d) $b = 5.064,\ c = 7.458,\ C = 10^0 32' 48''$;

e) $a = 1000,\ A = 50^0,\ B = 75^0$;

f) $a = 112,\ b = 86,\ c = 98$;

g) $a = 13.9,\ c = 8.43,\ A = 126^0 43'$;

h) $a = 2.018,\ b = 1.466,\ C = 58^0 47'$;

i) $a = 1,\ b = 2,\ c = \sqrt{3}$.

R:

a) $b = 15,\ C = 53^0 07' 48'',\ A = 59^0 29' 23''\ S = 84$;

b) $a = 4,\ c = 13,\ B = 112^0 37' 12'',\ S = 24$;

c) $A = 22^0 37' 12'',\ B = 67^0 22' 48'',\ C = 90^0,\ S = 30$;

d) $A = 162^0 18' 48'',\ B = 7^0 08' 24'',\ a = 12.379,\ S = 5.737$;

e) $b = 1260.6,\ c = 1069.3,\ C = 55^0,\ S = 516311$;

f) $A = 74^0 40' 17'',\ B = 47^0 46' 39'',\ C = 57^0 33' 04'',\ S = 4064.1$;

g) $B = 24^0 11',\ C = 29^0 06',\ b = 7.102,\ S = 24$;

h) $A = 76^0 19' 07'',\ B = 44^0 53' 53'',\ c = 1.776,\ S = 1.265$;

i) $B = 90^0,\ C = 60^0,\ A = 30^0,\ S = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. La distanţa de 7.62 metri un turn se vede sub unghiul de 78^0. Care este înălţimea turnului?
   R: 35.85 m

5. Un pod orizontal peste un râu are lungimea de 400 m. Dintr-un capăt A al podului se observă un punct situat pe suprafaţa apei exact sub pod un obiect P sub un unghi de declinaţie de 5^0. Din capătul celălalt B al podului, obiectul P se vede sub unghiul de declinaţie de 7^0. Să se determine la ce înălţime faţă de suprafaţa apei este situat podul.
   R: 20.435 m

6. Un om observă un arbore sub unghiul de elevaţie de 46^0. După ce merge 2m în direcţia arborelui, găseşte unghiul de elevaţie de 50^0. Care este înălţimea arborelui?
   R: 15.8 m

7. Un avion este văzut simultan de doi observatori situaţi în acelaşi plan cu verticala avionului la distanţa de 320 m unul de celălalt, sub unghiurile de elevaţie de 52^0, respectiv 57^0. Să se calculeze altitudinea la care zboară avionul.
R: 2426.5 m

8. Dintr-un punct situat în planul orizontal al solului se vede o clădire înaltă sub un unghi de elevaţie de $11^0 29'$. Din alt punct situat cu 30 m mai aproape de baza clădirii unghiul este de $13^0 18'$. Să se determine înălţimea clădirii.
R: 43.34 m

9. Dintr-un punct situat la poalele unui deal, acesta se observă sub un unghi de 20^0. Din alt punct situat în plan orizontal mai aproape de deal cu 100 m, acesta se vede sub un unghi de 25^0. Să se afle înălţimea relativă a dealului.
R: 165.85 m

10. Un stâlp cu înălţimea de 3 m lasă în lumina soarelui o umbră cu lungimea de 5 m. Care va fi lungimea umbrei când soarele va fi cu 10^0 mai sus pe bolta cerească?
R: 3.456 m

11. Un releu TV este situat în vârful unui deal de pantă 15^0 şi se vede dintr-un punct situat mai în vale sub un unghi de $11^0 24'$. Urcând pe pantă în direcţia releului 50 m, unghiul sub care se vede releul este $17^0 36'$. Să se calculeze înălţimea releului.
R: 28.645 m

12. Un balon este observat la două staţii P şi Q, situate la acelaşi nivel orizontal, P fiind la 1000 metri la nord de Q. La un moment dat balonul apare din P în direcţia $33^0 12'$ NE, sub unghiul de elevaţie $53^0 25' 12''$, iar din Q apare în direcţia $21^0 27'$ NE. Să se determine înălţimea la care este situat balonul.
R: 2419.74 m

13. Dintr-un punct P_1 situat la sol la sud de un balon, acesta se vede sub unghiul de elevaţie de $41^0 12'$. În acelaşi timp, din alt punct P_2 situat la 1000 m est de P_1, unghiul de elevaţie este de $36^0 41'$. La ce înălţime este balonul?
R: 1418 m

14. Din două puncte de observaţie P şi Q situate în acelaşi plan la distanţă de 100 m unul de altul se vede un obiect vertical AB (B coplanar cu P şi Q, AB perpendicular pe acest plan) sub unghiurile $\alpha = 35^0$, respectiv $\beta = 50^0$. Tot din P se măsoară unghiul $\gamma = 40^0$ sub care se vede segmentul QB. Să se calculeze înălţimea obiectului AB.
R: 50.8862 m

15. Fie A şi B două puncte situate pe marginile opuse ale unui teren mlăştinos. Dintr-un punct C situat în afara mlaştinii se constată că distanţa PA este de 882 metri, distanţa PB este de 1008 metri, iar unghiul sub care se vede din C segmentul AB este de $55^0 40'$. Care este distanţa dintre punctele A şi B?
R: 889.5 m

16. Se observă din două puncte A şi B de pe malul unui râu, situate la distanţa de 150 metri, un reper P de pe malul opus. Sunt măsurate unghiurile $\measuredangle PAB = 51^0 20'$ şi $\measuredangle PBA = 62^0 12'$. Să se calculeze lăţimea râului.
R: 113 m

17. De pe malul unui râu care nu poate fi traversat se doreşte să se afle distanţa dintre doi copaci A şi B situaţi pe malul opus. În acest scop se măsoară distanţa de 25 m dintre două puncte P şi Q situate pe malul accesibil şi unghiurile $\measuredangle APB = \measuredangle BPQ = 60^0$, $\measuredangle AQB = 30^0$, $\measuredangle AQP = 45^0$.
R: 59.15 m

18. Fie A şi B sunt două nave pe mare, iar P şi Q sunt două puncte de observaţie situate pe mal la distanţa de 1100 metri între ele. Se consideră că cele patru puncte A, B, P şi Q sunt situate aproximativ în acelaşi plan orizontal. Din P, distanţa AB se vede sub un unghi de 49^0, iar BQ sub un unghi de 31^0. Din Q, distanţa AB se vede sub un unghi de 60^0, iar AP sub un unghi de 62^0. Să se calculeze distanţa AB dintre nave.
R: 1567.66 m

Cuprins

Capitolul 1

Trigonometrie sferică

1.1 Geometria sferei

Definiţia 1.1. *Se numeşte* ***suprafaţă sferică*** *(sau* ***sferă****) locul geometric al punctelor din spaţiu egal depărtate de un punct fix C numit* ***centrul sferei****.*

Spaţiul mărginit de suprafaţa unei sfere se numeşte *bilă* sau *glob*, iar dacă nu există pericol de confuzie se va numi tot sferă.

Segmentul de dreaptă care uneşte centrul sferei cu orice punct de pe suprafaţa ei se numeşte **rază** a sferei, iar segmentul de dreaptă care uneşte două puncte de pe suprafaţa sferei şi trece prin centrul acesteia se numeşte **diametru**.

Fie o sferă de rază R cu centrul în punctul $C(a, b, c)$. Impunând condiţia ca un punct oarecare $M(x, y, z)$ de pe suprafaţa sferei să fie la distanţa R de centrul C se obţine:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

care se numeşte *ecuaţia sferei*. În cazul particular în care centrul este chiar originea $O(0, 0, 0)$ găsim ecuaţia

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Poziţia relativă a dreptelor şi sferelor

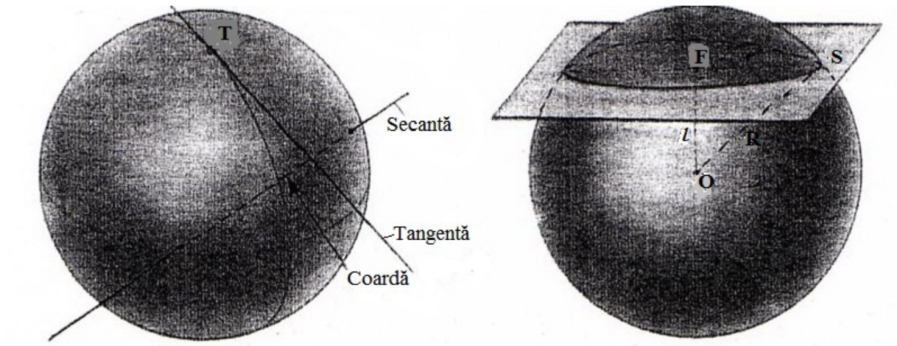
Dreptele pot avea cu o suprafaţă sferică un punct comun, două puncte comune sau niciun punct comun. O **secantă** intersectează suprafaţa sferei în două puncte. Partea dintr-o secantă cuprinsă în interiorul sferei se numeşte **coardă**. Coarda cea mai lungă este diametru al sferei, iar centrul sferei se află la jumătatea diametrului.

Tangenta la o sferă este o dreaptă care intersectează sfera într-un singur punct. Prin orice punct al unei sfere se pot duce o infinitate de tangente, toate fiind coplanare şi formând **planul tangent** în acel punct. Raza sferei corespunzătoare acestui punct este perpendiculară pe planul tangent.

Poziţia relativă a planelor şi sferelor

Un plan şi o suprafaţă sferică pot avea în comun un cerc, un punct, sau niciun punct. În primul caz, centrul cercului de intersecţie între plan şi sferă este piciorul perpendicularei din centrul sferei pe plan. Dacă centrul sferei C este inclus în plan, atunci centrul cercului de intersecţie este chiar C.

Un plan intersectează o sferă după un cerc atunci când distanţa h de la centrul sferei la acel plan este mai mică decât raza R. Raza cercului de intersecţie este $r = \sqrt{R^2 - h^2}$, deci ia valoarea maximă R atunci când $h = 0$, aşadar planul conţine centrul sferei. Dacă $h = R$ atunci planul este tangent la sferă (deci intersecţia este formată dintr-un singur punct), iar dacă $h > R$ planul nu intersectează sfera.



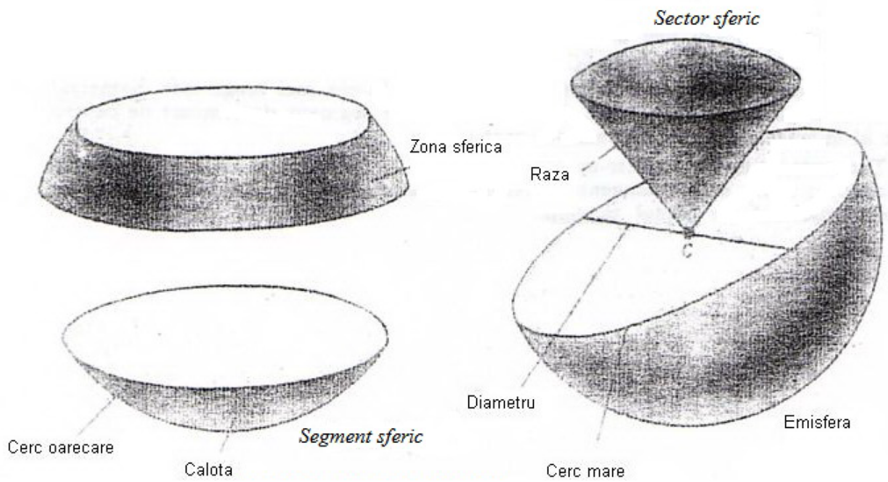
Prin orice două puncte A şi B care sunt situate pe o sferă şi nu sunt diametral opuse, se poate duce un *fascicol de plane*, care intersectează sfera după un *fascicol de cercuri*. Dintre acestea, cel mai mic cerc (ca lungime) este cel care are diametrul AB, iar cel mai mare are centrul chiar în centrul sferei. Acesta din urmă, a cărui rază coincide cu raza sferei se numeşte **cerc mare** al sferei, iar toate celelalte sunt numite **cercuri mici**.

Arcul AB de pe cercul mare al sferei care trece prin aceste puncte este cel mai scurt drum (pe sferă) dintre punctele A şi B, deci este corespondentul în geometria sferică a segmentului de dreaptă din geometria plană. Acest arc se numeşte **linie geodezică** pe sferă, iar lungimea lui se numeşte **distanţa sferică** între cele două puncte de pe sferă.

Prin oricare două puncte de pe o sferă (care nu sunt diametral opuse) trece un unic cerc mare al sferei. Oricare două cercuri mari ale unei sfere se intersectează în două puncte diametral opuse. Un plan care intersectează o sferă după un cerc (mare sau mic) împarte suprafaţa sferică în două **ca-**

lote sferice, şi sfera (globul) în două **segmente sferice**. Aceste calote şi segmente sunt egale dacă planul trece prin centrul sferei.

Două plane paralele delimitează dintr-o sferă o **zonă sferică**. O zonă sferică este mărginită de două cercuri de pe sferă, dintre care cel mult unul poate fi cerc mare. Două cercuri mari delimitează dintr-o sferă patru **pene sferice**. Zona dintr-o sferă delimitată de o suprafaţă conică circulară cu vârful în centrul sferei se numeşte **sector sferic**.



Fie o sferă cu centrul în origine şi de rază R, şi $M(x, y, z)$ un punct de pe sferă. Notăm cu M' proiecţia lui M pe planul xOy, cu φ unghiul dintre OM şi planul xOy, şi cu θ unghiul dintre OM' şi Ox. Atunci avem:

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi\cos\theta \\ y = R\cos\varphi\sin\theta \\ z = R\sin\varphi \end{cases},$$

care se numesc **ecuaţiile parametrice ale sferei**.

Unghiul $\theta \in [-180^0, 180^0]$ se numeşte **longitudine**, unghiul $\varphi \in [-90^0, 90^0]$ se numeşte **latitudine**, iar împreună (θ, φ) se numesc **coordonate sferice**.

Curbele de pe sferă obţinute prin fixarea uneia dintre cele două coordonate sferice sunt:

- θ = constant: semicercuri mari numite **meridiane**
- φ = constant: cercuri numite **paralele**. În particular, $\varphi = 0$ este un cerc mare numit **ecuator**.

Suprafaţa de ecuaţie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

se numeşte **elipsoid** de semiaxe a, b, c. Dacă toate semiaxele sunt egale între ele se obţine o sferă. Dacă doar două semiaxe sunt egale, elipsoidul se numeşte **elipsoid de rotaţie**. Astfel, un elipsoid de rotaţie în jurul axei Oz are ecuaţia

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

În geodezie **Pământul** este considerat un elipsoid de rotaţie cu raza ecuatorială $a \simeq 6378$ km şi raza polară $b \simeq 6357$ km. În realitate forma Pământului este neregulată şi se numeşte **geoid**, dar abaterile de la o formă care se pretează calculelor matematice sunt mici în raport cu mărimile care intervin în aceste calcule. Într-o primă aproximare, Pământul poate fi considerat o sferă (glob) de rază medie $R = 6371,221$ km.

1.2 Biunghi sferic. Triunghi sferic

Toate distanţele dintre puncte aflate pe o sferă se măsoară prin arce de cercuri mari. Dacă raza sferei este foarte mare, aceste distanţe pot fi aproximate prin segmentele de dreaptă dintre punctele respective. Lungimea arcului de cerc mare $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ dintre două puncte A şi B depinde de mărimea razei R şi de unghiul la centru α:

$$l_{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}} = R \cdot \alpha = \frac{\pi \cdot R \cdot \alpha}{180}$$

după cum α este măsurat în radiani sau grade sexagesimale.

Două cercuri mari se intersectează în două puncte *diametral opuse* N şi S care se numesc **poli**. Porţiunea din suprafaţa sferei mărginită de două arce de cerc mare cu extremităţile în polii N şi S se numeşte **biunghi** sau **fus sferic**.

Orice plan perpendicular pe diametrul NS intersectează planele celor două cercuri mari după câte o dreaptă, unghiul α dintre aceste două drepte fiind egal cu unghiul diedru dintre planele celor două cercuri mari. Tangentele într-un pol la ambele cercuri mari sunt perpendiculare pe diametrul NS, deci formează acelaşi unghi α.

În cartografie sunt folosite fusuri (biunghiuri) sferice ale căror unghiuri sunt de 6^0, numite **benzi meridiane Gauss-Kruger**. Dacă aria sferei de rază R este $4\pi R^2$ şi corespunde la un unghi la centru de 2π radiani (sau 360^0), atunci aria fusului sferic corespunzător unghiului α este:

$$\mathcal{A} = 2 \cdot R^2 \cdot \alpha = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot \alpha}{90}$$

după cum α este măsurat în radiani sau grade sexagesimale. O bandă meridiană Gauss-Kruger are aria

$$\mathcal{A} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot 6^0}{90^0} = \frac{\pi R^2}{15} = 8.501.665 \text{ km}^2$$

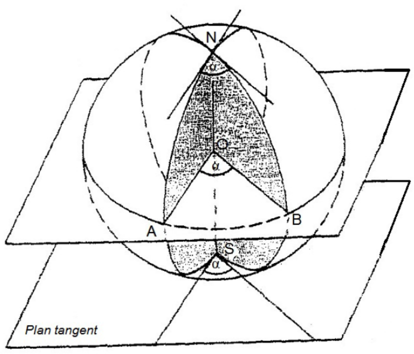
Fie o sferă de centru O şi rază R, iar pe această sferă fie cercul mare $\mathcal{C}$ (cu centrul în O şi de rază R). Dreapta care trece prin O şi este perpendiculară pe planul cercului mare $\mathcal{C}$ intersectează suprafaţa sferei în două puncte diametral opuse N şi S care se numesc **polii** cercului mare considerat $\mathcal{C}$. Cercul $\mathcal{C}$ se numeşte **polara** punctelor N şi S (sau *ecuator* pentru polii N şi S). Dacă se alege un sens de parcurgere pe cercul $\mathcal{C}$, se pot deosebi polii: un pol drept şi unul stâng, sau *pol nord* şi *pol sud*.

Cum distanţa dintre două puncte de pe o sferă se măsoară în grade sau radiani pe arcul de cerc mare ce trece prin aceste puncte, găsim că toate punctele de pe cercul mare $\mathcal{C}$ sunt la aceeaşi distanţă (90^0) faţă de polii N şi S. Arcul de cerc mare care uneşte polul unui cerc de pe sferă cu un punct al cercului este constant (90^0) şi se numeşte **rază polară** sau **rază sferică** a cercului.

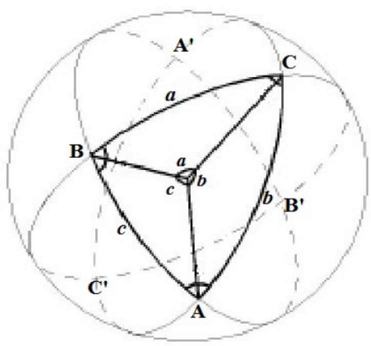
Intersecţia dintre suprafaţa sferei şi un alt plan perpendicular pe NS (altul decât cel ecuatorial) este un cerc mic Γ cu centrul pe NS şi de rază

$$r = R\cos\varphi$$

unde φ este latitudinea corespunzătoare paralelei Γ.



Biunghi sferic



Triunghi sferic

Definiţia 1.2. *Se numeşte **triunghi sferic** porţiunea de pe suprafaţa unei sfere mărginită de trei arce de cerc mare (numite **laturile** triunghiului sferic), care se intersectează două câte două în trei puncte numite **vârfurile** triunghiului sferic.*

Fiind date trei puncte A, B şi C pe o sferă astfel încât să nu fie două diametral opuse şi nici toate trei pe acelaşi cerc mare al sferei, există trei cercuri mari care unesc câte două din aceste puncte şi se intersectează şi în punctele diametral opuse A', B' şi C'. Suprafaţa sferei este astfel împărţită în opt părţi, fiecare mărginită de câte trei arce de cerc mare de măsură mai mică de 180^0, numite **triunghiuri sferice euleriene**.

Unghiurile unui triunghi sferic sunt unghiurile diedre dintre planele cercurilor mari corespunzătoare. Într-un triunghi sferic eulerian, atât laturile (notate cu a, b, c) cât şi unghiurile (notate cu A, B, C) sunt mai mici de 180^0.

Planele cercurilor mari corespunzătoare triunghiului sferic ABC se intersectează în centrul O al sferei şi formează **unghiul triedru** $OABC$. Un triunghi sferic poate fi obţinut prin intersecţia suprafeţei sferei cu un triedru cu vârful în O. Unghiurile triunghiului sferic sunt egale cu unghiurile diedre ale triedrului corespunzător, iar laturile triunghiului sferic sunt egale cu unghiurile plane ale triedrului. Intersecţia a două sfere concentrice cu acelaşi triedru sunt două triunghiuri sferice **asemenea** ale căror elemente (exprimate în unităţi de unghi) sunt egale.

Un biunghi sferic este împărţit printr-un arc de cerc mare în două triunghiuri sferice numite triunghiuri **conjugate** sau **suplementare**. Un triunghi sferic se numeşte **dreptunghic** dacă are cel puţin un unghi de 90^0. Un triunghi sferic se numeşte **quadratic** (sau **rectilater**) dacă are cel puţin o latură de 90^0.

1.3 Proprietăţi ale triunghiurilor sferice

1.3.1 Egalitatea triunghiurilor sferice

Spunem că două triunghiuri sferice situate pe aceeaşi sferă sunt egale (congruente) dacă sunt la fel aşezate şi au egale câte:

1. două laturi şi unghiul cuprins între ele (cazul L.U.L.)
2. o latură şi cele două unghiuri alăturate (cazul U.L.U.)
3. trei laturi (cazul L.L.L.)
4. trei unghiuri (cazul U.U.U.)

Observaţie: Ultimul caz apare în plus faţă de triunghiurile plane deoarece pe suprafaţa sferei atât distanţele cât şi unghiurile se măsoară în grade sau radiani.

1.3.2 Triunghiuri sferice polare

Definiţia 1.3. *Fie triunghiul sferic ABC. Se consideră pe sfera suport punctele A_1, B_1, C_1 astfel încât :*

- *A_1 este pol al arcului de cerc mare BC*
- *B_1 este pol al arcului de cerc mare CA*
- *C_1 este pol al arcului de cerc mare AB*

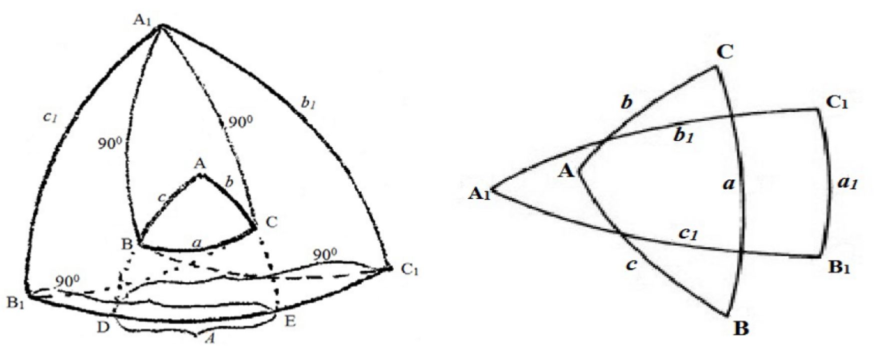
Triunghiul sferic $A_1B_1C_1$ se numeşte ***triunghi sferic polar*** *în raport cu triunghiul ABC.*

Observaţie:
Se poate arăta că şi invers, triunghiul ABC este polar în raport cu triunghiul $A_1B_1C_1$.

Teorema 1.1.
1. *Suma dintre un unghi al triunghiului sferic ABC şi latura corespunzătoare a triunghiului său polar $A_1B_1C_1$ este egală cu 180^0.*
2. *Suma dintre o latură a triunghiului sferic ABC şi unghiul corespunzător al triunghiului său polar $A_1B_1C_1$ este egală cu 180^0.*

Dacă notăm cu a_1, b_1, c_1 şi A_1, B_1, C_1 laturile, respectiv unghiurile triunghiului polar $A_1B_1C_1$, atunci avem:

$$\begin{array}{lcl} a_1 + A = 180^0 & & a + A_1 = 180^0 \\ b_1 + B = 180^0 & \text{şi} & b + B_1 = 180^0 \\ c_1 + C = 180^0 & & c + C_1 = 180^0 \end{array}$$



Triunghiuri sferice polare

Observaţie:

Triunghiul sferic din stânga are laturile mai mici decât 90^0, de aceea este situat în interiorul triunghiului său polar $A_1B_1C_1$. Dacă triunghiul ABC are laturi mai mari decât 90^0, cele două triunghiuri reciproc polare se intersectează (cazul din dreapta).

1.3.3 Relaţii de ordine între elementele unui triunghi sferic

Laturile a, b, c verifică inegalităţile:

$$a < b + c, \quad b < c + a, \quad c < a + b \tag{1.1}$$

$$a > |b - c|, \quad b > |c - a|, \quad c > |a - b| \tag{1.2}$$

Dacă se notează cu $s = \frac{a+b+c}{2}$ *semiperimetrul* triunghiului sferic, atunci

$$s > a, \ s > b, \ s > c$$

Laturile a, b, c verifică

$$0^0 < a + b + c < 360^0$$

Scriind inegalitatea anterioară pentru triunghiul sferic polar, obţinem

$$180^0 < A + B + C < 540^0 \tag{1.3}$$

Diferenţa dintre suma unghiurilor unui triunghi sferic şi 180^0 se numeşte **excesul sferic** al triunghiului şi se notează cu

$$\varepsilon = A + B + C - 180^0 \in (0^0, 360^0) \tag{1.4}$$

Scriind inegalităţile (1.1) pentru triunghiul polar, se obţine

$$B + C - A < 180^0, \ C + A - B < 180^0, \ A + B - C < 180^0 \tag{1.5}$$

1.4 Formulele fundamentale ale trigonometriei sferice

Formulele lui Gauss-Euler pentru cosinusurile laturilor:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A \tag{1.6}$$

$$\cos b = \cos c \cdot \cos a + \sin c \cdot \sin a \cdot \cos B \tag{1.7}$$

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C \tag{1.8}$$

Formulele lui Gauss-Euler pentru cosinusurile unghiurilor:

$$\cos A = -\cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C \cdot \cos a \tag{1.9}$$

$$\cos B = -\cos C \cdot \cos A + \sin C \cdot \sin A \cdot \cos b \tag{1.10}$$

$$\cos C = -\cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B \cdot \cos c \tag{1.11}$$

Teorema sinsurilor din trigonometria sferică:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} = K \tag{1.12}$$

unde K se numeşte **modulul** triunghiului sferic şi este definit prin

$$K^2 = \frac{1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C - 2\cos A \cos B \cos C}{\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C}$$

Laturilor egale într-un triunghi sferic li se opun unghiuri egale şi reciproc; În orice triunghi sferic, unghiului mai mare i se opune latura mai mare şi reciproc.

Triunghiurile sferice care au două laturi egale se numesc **isoscele**, triunghiurile sferice care au toate laturile egale se numesc **echilaterale**, iar triunghiurile care nu sunt isoscele sau echilaterale se numesc **scalene**.

Triunghiurile sferice cu o latură de 90^0 se numesc **quadratice**, triunghiurile sferice cu două laturi de 90^0 se numesc **biquadratice**, iar triunghiurile sferice cu toate laturile de 90^0 se numesc **triquadratice**.

Triunghiurile sferice cu un unghi de 90^0 se numesc **dreptunghice**, triunghiurile sferice cu două unghiuri de 90^0 se numesc **bidreptunghice**, iar triunghiurile sferice cu toate unghiurile de 90^0 se numesc **tridreptunghice**.

Un triunghi sferic fără unghiuri drepte se numeşte **oblic**. Un triunghi sferic oblic se numeşte **ascuţit** dacă are toate unghiurile ascuţite, respectiv **obtuz** dacă are cel puţin un unghi obtuz.

1.5 Formule deduse din formulele fundamentale

Din formulele (1.6)-(1.8) obţinem **formulele celor cinci elemente** ale lui Gauss:

$$\begin{aligned}
\sin a \cos B &= \sin c \cos b - \sin b \cos c \cos A\\
\sin a \cos C &= \sin b \cos c - \sin c \cos b \cos A\\
\sin b \cos C &= \sin a \cos c - \sin c \cos a \cos B\\
\sin b \cos A &= \sin c \cos a - \sin a \cos c \cos B\\
\sin c \cos A &= \sin b \cos a - \sin a \cos b \cos C\\
\sin c \cos B &= \sin a \cos b - \sin b \cos a \cos C
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Folosind teorema sinusurilor găsim

$$\begin{aligned}
\sin A\cos B &= \sin C\cos b - \sin B\cos c\cos A\\
\sin A\cos C &= \sin B\cos c - \sin C\cos b\cos A\\
\sin B\cos C &= \sin A\cos c - \sin C\cos a\cos B\\
\sin B\cos A &= \sin C\cos a - \sin A\cos c\cos B\\
\sin C\cos A &= \sin B\cos a - \sin A\cos b\cos C\\
\sin C\cos B &= \sin A\cos b - \sin B\cos a\cos C
\end{aligned}\tag{1.14}$$

care se numesc **formulele modificate ale celor cinci elemente**.

Formulele celor patru elemente (sau **formulele cotangentelor ale lui Viete**):

$$\begin{aligned}
\cos a\cos B &= \operatorname{ctg} c\sin a - \operatorname{ctg} C\sin B\\
\cos a\cos C &= \operatorname{ctg} b\sin a - \operatorname{ctg} B\sin C\\
\cos b\cos C &= \operatorname{ctg} a\sin b - \operatorname{ctg} A\sin C\\
\cos b\cos A &= \operatorname{ctg} c\sin b - \operatorname{ctg} C\sin A\\
\cos c\cos A &= \operatorname{ctg} b\sin c - \operatorname{ctg} B\sin A\\
\cos c\cos B &= \operatorname{ctg} a\sin c - \operatorname{ctg} A\sin B
\end{aligned}\tag{1.15}$$

Ecuaţia (1.6), prima egalitate din (1.12) şi prima ecuaţie din (1.13) pot fi scrise compact sub forma matriceală

$$\begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\sin B\\ \sin a\cos B\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos c & 0 & \sin c\\ 0 & 1 & 0\\ \sin c & 0 & -\cos c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\sin A\\ \sin b\cos A\end{pmatrix}\tag{1.16}$$

care împreună cu permutările circulare corespunzătoare se numesc **formulele lui Bessel**.

Funcţiile trigonometrice ale jumătăţii de unghi:

$$\begin{aligned}
\sin\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}} & \cos\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}}\\
\sin\frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(s-c)\sin(s-a)}{\sin c\sin a}} & \cos\frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{\sin s\sin(s-b)}{\sin c\sin a}}\\
\sin\frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a\sin b}} & \cos\frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{\sin s\sin(s-c)}{\sin a\sin b}}
\end{aligned}\tag{1.17}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-a)}} = \frac{M}{\sin(s-a)}\\
\operatorname{tg}\frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(s-c)\sin(s-a)}{\sin s\sin(s-b)}} = \frac{M}{\sin(s-b)}\\
\operatorname{tg}\frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin s\sin(s-c)}} = \frac{M}{\sin(s-a)}
\end{aligned}\tag{1.18}$$

unde $M = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}}$.

Formulele de mai sus se numesc **formulele lui Borda** pentru unghiurile unui triunghi sferic, iar invariantul M este egal cu tangenta razei cercului sferic înscris în triunghiul sferic dat.

Funcţiile trigonometrice ale jumătăţii de latură:

$$\begin{aligned}
\sin\tfrac{a}{2} &= \sqrt{\tfrac{-\cos S\cos(S-A)}{\sin B\sin C}} & \cos\tfrac{a}{2} &= \sqrt{\tfrac{\cos(S-B)\cos(S-C)}{\sin B\sin C}}\\
\sin\tfrac{b}{2} &= \sqrt{\tfrac{-\cos S\cos(S-B)}{\sin C\sin A}} & \cos\tfrac{b}{2} &= \sqrt{\tfrac{\cos(S-C)\cos(S-A)}{\sin C\sin A}}\\
\sin\tfrac{c}{2} &= \sqrt{\tfrac{-\cos S\cos(S-C)}{\sin A\sin B}} & \cos\tfrac{c}{2} &= \sqrt{\tfrac{\cos(S-A)\cos(S-B)}{\sin A\sin B}}
\end{aligned}\tag{1.19}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}\tfrac{a}{2} &= \sqrt{\tfrac{-\cos S\cos(S-A)}{\cos(S-B)\cos(S-C)}} = \tfrac{\cos(S-A)}{N}\\
\operatorname{tg}\tfrac{b}{2} &= \sqrt{\tfrac{-\cos S\cos(S-B)}{\cos(S-C)\cos(S-A)}} = \tfrac{\cos(S-B)}{N}\\
\operatorname{tg}\tfrac{c}{2} &= \sqrt{\tfrac{-\cos S\cos(S-C)}{\cos(S-A)\cos(S-B)}} = \tfrac{\cos(S-C)}{N}
\end{aligned}\tag{1.20}$$

unde $M = \sqrt{\frac{\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}{-\cos S}}$.

Formulele de mai sus se numesc **formulele lui Borda** pentru laturile unui triunghi sferic, iar invariantul N este egal cu cotangenta razei sferice a cercului circumscris triunghiului sferic.

Folosind formulele lui Borda pentru unghiurile triunghiului sferic polar, găsim:

$$\begin{aligned}
\sin\tfrac{a}{2} &= \sqrt{\tfrac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin B\sin C}} & \cos\tfrac{a}{2} &= \sqrt{\tfrac{\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin B\sin C}}\\
\sin\tfrac{b}{2} &= \sqrt{\tfrac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin C\sin A}} & \cos\tfrac{b}{2} &= \sqrt{\tfrac{\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin C\sin A}}\\
\sin\tfrac{c}{2} &= \sqrt{\tfrac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin A\sin B}} & \cos\tfrac{c}{2} &= \sqrt{\tfrac{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin A\sin B}}
\end{aligned}\tag{1.21}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}\tfrac{a}{2} &= \sqrt{\tfrac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}} = \tfrac{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{Q}\\
\operatorname{tg}\tfrac{b}{2} &= \sqrt{\tfrac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)}} = \tfrac{\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{Q}\\
\operatorname{tg}\tfrac{c}{2} &= \sqrt{\tfrac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)}} = \tfrac{\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{Q}
\end{aligned}\tag{1.22}$$

unde $Q = \sqrt{\frac{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}}$.

Formulele lui Delambre:

$$\begin{aligned}
\sin\tfrac{A+B}{2}\cos\tfrac{c}{2} &= \cos\tfrac{a-b}{2}\cos\tfrac{C}{2}\\
\sin\tfrac{A-B}{2}\sin\tfrac{c}{2} &= \sin\tfrac{a-b}{2}\cos\tfrac{C}{2}\\
\cos\tfrac{A+B}{2}\cos\tfrac{c}{2} &= \cos\tfrac{a+b}{2}\sin\tfrac{C}{2}\\
\cos\tfrac{A-B}{2}\sin\tfrac{c}{2} &= \sin\tfrac{a+b}{2}\sin\tfrac{C}{2}
\end{aligned}\tag{1.23}$$

precum şi cele obţinute prin permutări circulare;

Formulele lui Neper:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}\tfrac{a+b}{2}\cos\tfrac{A+B}{2} &= \operatorname{tg}\tfrac{c}{2}\cos\tfrac{A-B}{2}\\
\operatorname{tg}\tfrac{a-b}{2}\sin\tfrac{A+B}{2} &= \operatorname{tg}\tfrac{c}{2}\sin\tfrac{A-B}{2}\\
\operatorname{tg}\tfrac{A+B}{2}\cos\tfrac{a+b}{2} &= \operatorname{ctg}\tfrac{C}{2}\cos\tfrac{a-b}{2}\\
\operatorname{tg}\tfrac{A-B}{2}\sin\tfrac{a+b}{2} &= \operatorname{ctg}\tfrac{C}{2}\sin\tfrac{a-b}{2}
\end{aligned} \tag{1.24}$$

precum şi cele obţinute prin permutări circulare.

Formulele de control ale lui Gauss:

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}} &= \frac{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}}\\
\frac{\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}} &= \frac{\operatorname{tg}\frac{b+c}{2}}{\operatorname{tg}\frac{b-c}{2}}\\
\frac{\operatorname{tg}\frac{C+A}{2}}{\operatorname{tg}\frac{C-A}{2}} &= \frac{\operatorname{tg}\frac{c+a}{2}}{\operatorname{tg}\frac{c-a}{2}}
\end{aligned} \tag{1.25}$$

Formulele lui Cagnoli pentru excesul sferic:

$$\begin{aligned}
\sin\frac{\varepsilon}{2} &= \frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\sin C = \frac{\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}{\cos\frac{a}{2}}\sin A = \frac{\sin\frac{c}{2}\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{b}{2}}\sin B\\
\sin\frac{\varepsilon}{2} &= \frac{\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Formulele lui L'Huilier:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4} &= \sqrt{\operatorname{tg}\frac{s}{2}\operatorname{tg}\frac{s-a}{2}\operatorname{tg}\frac{s-b}{2}\operatorname{tg}\frac{s-c}{2}}\\
\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right) &= \sqrt{\frac{\operatorname{tg}\frac{s-b}{2}\operatorname{tg}\frac{s-c}{2}}{\operatorname{tg}\frac{s}{2}\operatorname{tg}\frac{s-a}{2}}}\\
\operatorname{tg}\left(\frac{B}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right) &= \sqrt{\frac{\operatorname{tg}\frac{s-c}{2}\operatorname{tg}\frac{s-a}{2}}{\operatorname{tg}\frac{s}{2}\operatorname{tg}\frac{s-b}{2}}}\\
\operatorname{tg}\left(\frac{C}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right) &= \sqrt{\frac{\operatorname{tg}\frac{s-a}{2}\operatorname{tg}\frac{s-b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{s}{2}\operatorname{tg}\frac{s-c}{2}}}
\end{aligned} \tag{1.27}$$

1.6 Rezolvarea triunghiurilor sferice

Sunt considerate numai triunghiuri sferice euleriene, deci cu laturi şi unghiuri mai mici decât 180^0. Valorile acestora se obţin ca funcţii trigonometrice din formulele fundamentale ale trigonometriei sferice şi din cele deduse din acestea. Când rezultă mai multe valori posibile, soluţia se alege prin considerente geometrice, cu ajutorul unor inegalităţi:

1. Latura mai mare se opune unghiului mai mare.

2. La unghiuri ascuţite (mai mici de 90^0) se opun laturi mai mici de 90^0, iar la unghiuri obtuze (mai mari de 90^0) se opun laturi mai mari de 90^0.

3. Dacă suma a două laturi este mai mare (respectiv mai mică) decât 180^0, atunci şi suma unghiurilor opuse acestor două laturi este mai mare (respectiv mai mică) decât 180^0.

1.6.1 Rezolvarea triunghiurilor sferice dreptunghice

Din formula (1.6) pentru cosinusul laturii a se obţine

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A \Rightarrow \cos a = \cos b \cdot \cos c \tag{1.28}$$

Din formulele (1.9)-(1.11) pentru cosinusurile unghiurilor se obţine:

$$\cos A = -\cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C \cdot \cos a \Rightarrow \cos a = \operatorname{ctg} B \cdot \operatorname{ctg} C \tag{1.29}$$
$$\cos B = -\cos C \cdot \cos A + \sin C \cdot \sin A \cdot \cos b \Rightarrow \cos B = \sin C \cdot \cos b \tag{1.30}$$
$$\cos C = -\cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B \cdot \cos c \Rightarrow \cos C = \sin B \cdot \cos c \tag{1.31}$$

Din teorema sinusurilor (1.12) se obţine:

$$\sin A \cdot \sin b = \sin a \cdot \sin B \Rightarrow \sin b = \sin a \cdot \sin B \tag{1.32}$$
$$\sin A \cdot \sin c = \sin a \cdot \sin C \Rightarrow \sin c = \sin a \cdot \sin C \tag{1.33}$$

Din formulele celor 4 elemente (1.15) se obţine:

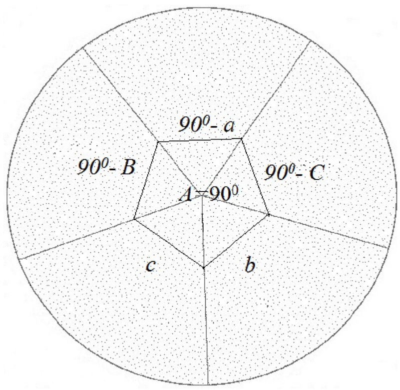
$$\cos b \cos C = \operatorname{ctg} a \sin b - \operatorname{ctg} A \sin C \Rightarrow \cos C = \operatorname{ctg} a \operatorname{tg} b \tag{1.34}$$
$$\cos b \cos A = \operatorname{ctg} c \sin b - \operatorname{ctg} C \sin A \Rightarrow \sin b = \operatorname{ctg} C \operatorname{tg} c \tag{1.35}$$
$$\cos c \cos A = \operatorname{ctg} b \sin c - \operatorname{ctg} B \sin A \Rightarrow \sin c = \operatorname{ctg} B \operatorname{tg} b \tag{1.36}$$
$$\cos c \cos B = \operatorname{ctg} a \sin c - \operatorname{ctg} A \sin B \Rightarrow \cos B = \operatorname{ctg} a \operatorname{tg} c \tag{1.37}$$

Folosind funcţiile trigonometrice ale complementului unui unghi, cele 10 formule anterioare se rescriu astfel:

$$\sin(90^0 - a) = \cos b \cdot \cos c \tag{1.38}$$
$$\sin(90^0 - a) = \mathrm{tg}(90^0 - B) \cdot \mathrm{tg}(90^0 - C) \tag{1.39}$$
$$\sin(90^0 - B) = \cos(90^0 - C) \cdot \cos b \tag{1.40}$$
$$\sin(90^0 - C) = \cos(90^0 - B) \cdot \cos c \tag{1.41}$$
$$\sin b = \cos(90^0 - a) \cdot \cos(90^0 - B) \tag{1.42}$$
$$\sin c = \cos(90^0 - a) \cdot \cos(90^0 - C) \tag{1.43}$$
$$\sin(90^0 - C) = \mathrm{tg}(90^0 - a)\,\mathrm{tg}\, b \tag{1.44}$$
$$\sin b = \mathrm{tg}(90^0 - C)\,\mathrm{tg}\, c \tag{1.45}$$
$$\sin c = \mathrm{tg}(90^0 - B)\,\mathrm{tg}\, b \tag{1.46}$$
$$\sin(90^0 - B) = \mathrm{tg}(90^0 - a)\,\mathrm{tg}\, c \tag{1.47}$$

Pentru cele 10 formule există o **regulă mnemotehnică (a pentagonului)** stabilită de **Neper** şi **Mauduit**.

Diagrama Neper - Mauduit



Sinusul oricărui unghi din diagramă este egal cu:

- produsul tangentelor a două unghiuri adiacente acestuia;
- produsul cosinusurilor a două unghiuri opuse (neadiacente).

Un triunghi sferic dreptunghic poate fi rezolvat dacă se dau (în afară de $A = 90^0$) următoarele elemente:

1. ipotenuza a şi o catetă b (sau c);
2. cele două catete b şi c;

3. ipotenuza a şi un unghi alăturat ei B (sau C);
4. o catetă şi un unghi alăturat ei (b şi C, sau c şi B);
5. cele două unghiuri B şi C;
6. o catetă şi unghiul opus ei (b şi B, sau c şi C).

Cazurile 1-5 dau soluţie unică, iar cazul 6 dă două soluţii deoarece elementele ce rămân de determinat se obţin prin sinusul lor, ceea ce conduce la două valori suplementare una alteia.

Din formulele (1.38)-(1.47) pot fi deduse următoarele reguli:

- Dacă b şi c se află în acelaşi cadran atunci $a < 90^0$, iar dacă se află în cadrane diferite atunci $a > 90^0$;
- Dacă B şi C se află în acelaşi cadran atunci $a < 90^0$, iar dacă se află în cadrane diferite atunci $a > 90^0$
- Valorile catetei şi a unghiului opus ei se află în acelaşi cadran.

1.6.2 Rezolvarea triunghiurilor sferice oarecare

Rezolvarea unui triunghi sferic quadratic se face prin trecerea la triunghiul sferic polar, care este dreptunghic şi se aplică formulele corespunzătoare

Un triunghi sferic oarecare poate fi rezolvat dacă din cele 6 elemente ale sale (3 laturi şi 3 unghiuri: a, b, c, A, B, C) sunt cunoscute 3.

Distingem 6 cazuri, şi anume acelea când se dau:

1. trei laturi;
2. trei unghiuri;
3. două laturi şi unghiul dintre ele;
4. o latură şi două unghiuri alăturate ei;
5. două laturi şi un unghi opus uneia dintre ele;
6. două unghiuri şi o latură opusă unuia dintre ele.

Observaţii:

- Cazurile 1-4 au soluţie unică. Cazurile 5 şi 6 au două soluţii care apar datorită utilizării sinusurilor pentru determinarea primului element, rezultând două soluţii suplementare.

- Controlul soluţiilor se face evaluând excesul sferic pe două căi (cu definiţia $\varepsilon = A + B + C - 180^0$ şi apoi cu (1.27)) sau cu formulele (1.25).

Caz	Date	Formule	Condiţii de existenţă
1	a, b, c	(1.6) – (1.8), (1.17) sau (1.18) pentru A, B, C	$0^0 < a + b + c < 360^0$ $a + b > c, b + c > a, c + a > b$
2	A, B, C	(1.9) – (1.11), (1.19) sau (1.20) pentru a, b, c	$180^0 < A + B + C < 540^0$ $A + B < 180^0 + C$ $B + C < 180^0 + A$ $C + A < 180^0 + B$
3	b, c, A	$(1.6) - (1.8) \Rightarrow a$ $(1.24) \Rightarrow B, C$	
4	a, B, C	$(1.24) \Rightarrow b, c$ $(1.9) - (1.11) \Rightarrow A$	
5	b, c, B	$(1.12) \Rightarrow C$ $(1.24) \Rightarrow a, A$	1 soluţie sau 2 dacă $\sin c \cdot \sin B \leq \sin b$ Se reţin valorile lui C pentru care $A - B$ şi $a - b$ au acelaşi semn; $A + B - 180^0$ şi $a + b - 180^0$ să fie de acelaşi semn
6	B, C, b	$(1.12) \Rightarrow c$ $(1.24) \Rightarrow a, A$	o soluţie sau 2 dacă $\sin b \cdot \sin C \leq \sin B$ Se reţin valorile lui c pentru care $A - B$ şi $a - b$ au acelaşi semn; $A + B - 180^0$ şi $a + b - 180^0$ să fie de acelaşi semn

1.7 Alte probleme privind triunghiurile sferice

O **înălţime** într-un triunghi sferic este un arc de cerc mare dus printr-un vârf şi perpendicular pe latura opusă. Lungimea unei înălţimi măsoară *distanţa* (pe sferă) de la un vârf la latura opusă.

O înălţime împarte un triunghi sferic în două triunghiuri sferice dreptunghice. Folosind formulele de la triunghiuri dreptunghice se obţine:

$$\sin h_a = \sin c \cdot \sin B = \sin b \sin C$$
$$\sin h_b = \sin a \cdot \sin C = \sin c \sin A$$
$$\sin h_c = \sin b \cdot \sin A = \sin a \sin B$$

O altă metodă de rezolvare a triunghiurilor sferice (**metoda înălţimii**) constă în calcularea elementelor triunghiului prin rezolvarea triunghiurilor dreptunghice determinate de o înălţime.

Într-un triunghi sferic isoscel ABC (cu $AB = AC$), înălţimea din A este şi *mediană* (împarte BC în două părţi egale), şi *bisectoare* (împarte unghiul A în două părţi egale) şi *mediatoare* (perpedicularea pe BC dusă prin mijlocul lui BC).

Bisectoarele unghiurilor unui triunghi sferic sunt concurente în centrul cercului înscris în triunghi. Raza ρ a acestui cerc este dată de constanta M din formulele lui Borda pentru unghiurile unui triunghi sferic.

Mediatoarele unui triunghi sferic sunt concurente în centrul cercului circumscris triunghiului. Raza r a acestui cerc este dată de constanta N din formulele lui Borda pentru laturile unui triunghi sferic.

Medianele unui triunghi sferic sunt concurente în centrul triunghiului.

Aria unui triunghi sferic este

$$S = \frac{\pi R^2}{180} \cdot \varepsilon$$

unde R este raza sferei iar ε este excesul sferic (exprimat în grade). Dacă excesul sferic este exprimat în radiani, atunci

$$S = \varepsilon R^2.$$

1.8 Poligoane sferice

Definiţia 1.4. *Un* ***poligon sferic*** *este o figură geometrică pe suprafaţa unei sfere formată dintr-un număr finit n de arce de cercuri mari (care nu sunt unul în prelungirea altuia), strict mai mici de 180^0, numite* ***laturi****.*

Punctele de intersecţie ale arcelor de cercuri mai care formează poligonul se numesc **vârfurile** poligonului. Un poligon sferic se numeşte **convex** dacă pentru orice latură a sa, toate vârfurile nesituate pe latura considerată se află de aceeaşi parte a cercului mare pe care se află acea latură. În caz contrar, poligonul se numeşte **concav**.

Unghiurile unui poligon convex nu pot avea mai mult de 180^0. Un poligon convex cu n laturi (şi n vârfuri) se poate descompune în $n - 2$ triunghiuri prin unirea unui vârf cu toate celelalte.

Oricare ar fi două puncte situate în interiorul unui poligon convex, arcul de cerc mare (unic) care le uneşte este inclus în interiorul poligonului. Triunghiurile sferice sunt poligoane sferice convexe, dar biunghiurile sferice nu sunt (deoarece au laturile de 180^0).

Un **patrulater sferic convex** este un poligon sferic convex cu patru laturi (şi patru unghiuri). **Aria** unui patrulater sferic convex situat pe o sferă de rază R este

$$S = \frac{\pi R^2}{180} \cdot \varepsilon$$

unde $\varepsilon = A + B + C + D - 360^0$ se numeşte **excesul sferic** al patrulaterului.

Aria unui poligon sferic convex cu n vârfuri $M_1 M_2 \ldots M_n$ situat pe o sferă de rază R este

$$S = \frac{\pi R^2}{180} \cdot \varepsilon$$

unde $\varepsilon = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k - (n-2) \cdot 180$ se numeşte **excesul sferic** al poligonului.

Un poligon sferic **regulat** este un poligon sferic convex cu toate cele n laturi egale.

1.9 Legătura între trigonometria sferică şi trigonometria plană

Trei puncte necoliniare în spaţiu determină un plan şi în acest plan un triunghi unic. În schimb, există o infinitate de sfere pe a căror suprafaţă sunt situate cele trei puncte date. Cu cât raza sferei este mai mare, cu atât curbura suprafeţei este mai mică, apropiindu-se de o suprafaţă plană. Astfel, când $R \to \infty$, unghiurile de pe suprafaţa sferică se apropie de unghiurile obişnuite plane iar excesul sferic $\varepsilon \to 0$.

Dacă a, b, c sunt laturile unui triunghi sferic (măsurate în radiani), atunci lungimile arcelor corespunzătoare sunt

$$\bar{a} = a \cdot R, \ \bar{b} = b \cdot R, \ \bar{c} = c \cdot R$$

şi converg către lungimile laturilor triunghiului plan corespunzător atunci când $R \to \infty$.

Dacă raza sferei este mare, atunci a, b, c sunt mici iar pentru unghiuri mici putem aproxima $\operatorname{tg} x \simeq x$. Formula lui l'Huilier

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{s}{2}\operatorname{tg}\frac{s-a}{2}\operatorname{tg}\frac{s-b}{2}\operatorname{tg}\frac{s-c}{2}}$$

devine

$$\frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\frac{s}{2}\cdot\frac{s-a}{2}\cdot\frac{s-b}{2}\cdot\frac{s-c}{2}}$$

Înlocuind $a = \frac{\bar{a}}{R}, b = \frac{\bar{b}}{R}, c = \frac{\bar{c}}{R}$ se obţine

$$\frac{\varepsilon}{4} = \frac{1}{4R^2}\sqrt{\bar{s}(\bar{s}-\bar{a})(\bar{s}-\bar{b})(\bar{s}-\bar{c})}$$

iar aria triunghiului sferic devine

$$S = \varepsilon\cdot R^2 = \sqrt{\bar{s}(\bar{s}-\bar{a})(\bar{s}-\bar{b})(\bar{s}-\bar{c})}$$

adică formula lui Heron din trigonometria plană.

Înlocuind $a = \frac{\bar{a}}{R}, b = \frac{\bar{b}}{R}, c = \frac{\bar{c}}{R}$ în teorema sinusurilor din trigonometria sferică se obţine

$$\frac{\sin\frac{\bar{a}}{R}}{\sin A} = \frac{\sin\frac{\bar{b}}{R}}{\sin B} = \frac{\sin\frac{\bar{c}}{R}}{\sin C}$$

Folosind dezvoltările în serie de puteri ale funcţiei sin rezultă:

$$\frac{\bar{a}\left(1-\frac{\bar{a}^2}{3!R^2}+\frac{\bar{a}^4}{5!R^4}-\dots\right)}{\sin A} = \frac{\bar{b}\left(1-\frac{\bar{b}^2}{3!R^2}+\frac{\bar{b}^4}{5!R^4}-\dots\right)}{\sin B} = \frac{\bar{c}\left(1-\frac{\bar{c}^2}{3!R^2}+\frac{\bar{c}^4}{5!R^4}-\dots\right)}{\sin C}$$

care prin trecere la limită cu $R \to \infty$ devine

$$\frac{\bar{a}}{\sin A} = \frac{\bar{b}}{\sin B} = \frac{\bar{c}}{\sin C}$$

adică teorema sinusurilor din trigonometria plană.

Înlocuind $a = \frac{\bar{a}}{R}, b = \frac{\bar{b}}{R}, c = \frac{\bar{c}}{R}$ în prima formulă Gauss-Euler se obţine

$$\cos\frac{\bar{a}}{R} = \cos\frac{\bar{b}}{R}\cos\frac{\bar{c}}{R} + \sin\frac{\bar{b}}{R}\sin\frac{\bar{c}}{R}\cos A$$

Folosind dezvoltările în serie de puteri ale funcţiilor sin şi cos rezultă:

$$1-\frac{\bar{a}^2}{2!R^2}+\dots = \left(1-\frac{\bar{b}^2}{2!R^2}+\dots\right)\left(1-\frac{\bar{c}^2}{2!R^2}+\dots\right)+\frac{\bar{b}\bar{c}}{R^2}\left(1-\frac{\bar{b}^2}{3!R^2}+\dots\right)\left(1-\frac{\bar{c}^2}{3!R^2}+\dots\right)\cos A$$

Efectuând calculele şi trecând la limită cu $R \to \infty$ se obţine

$$\bar{a}^2 = \bar{b}^2 + \bar{c}^2 - 2\bar{b}\bar{c}\cos A$$

adică teorema cosinusului din trigonometria plană.

Înlocuind $a = \dfrac{\bar{a}}{R}, b = \dfrac{\bar{b}}{R}, c = \dfrac{\bar{c}}{R}$ în formula de control a lui Gauss

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}} \Rightarrow \frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2R}}{\operatorname{tg}\frac{\bar{a}-\bar{b}}{2R}}$$

Folosind dezvoltările în serie de puteri ale funcţiei tg rezultă:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}} = \frac{\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2R} + \frac{1}{3}\left(\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2R}\right)^3 + \dots}{\frac{\bar{a}-\bar{b}}{2R} + \frac{1}{3}\left(\frac{\bar{a}-\bar{b}}{2R}\right)^3 + \dots} = \frac{\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2} + \frac{1}{3R^2}\left(\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}\right)^3 + \dots}{\frac{\bar{a}-\bar{b}}{2} + \frac{1}{3R^2}\left(\frac{\bar{a}-\bar{b}}{2}\right)^3 + \dots}$$

şi trecând la limită cu $R \to \infty$ se obţine

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}} = \frac{\bar{a}+\bar{b}}{\bar{a}-\bar{b}}$$

adică teorema tangentei din trigonometria plană.

Notăm cu $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ unghiurile triunghiului plan corespunzător triunghiului sferic ABC. Pentru evaluarea diferenţei dintre unghiurile triunghiului plan şi ale celui sferic se porneşte de la

$$\sin\frac{\bar{A}-A}{2} = \sin\frac{\bar{A}}{2}\cos\frac{A}{2} - \cos\frac{\bar{A}}{2}\sin\frac{A}{2}$$

şi folosind formulele pentru funcţiile trigonometrice ale jumătăţii unghiului din trigonometria plană şi sferică, precum şi dezvoltările în serie ale funcţiilor sin şi cos se obţine

$$\sin\frac{\bar{A}-A}{2} = \frac{S_{ABC}}{\bar{b}\bar{c}}\left(1 + \frac{\bar{b}^2+\bar{c}^2}{12R^2} + \dots\right)\left(-\frac{\bar{b}\bar{c}}{6R^2} + \dots\right)$$

Ignorând termenii ce conţin puteri mari ale lui $\frac{1}{R^2}$ şi aproximând $\sin x \simeq x$ pentru $x = \frac{\bar{A}-A}{2}$ mic rezultă

$$\frac{\bar{A}-A}{2} = -\frac{S_{ABC}}{6R^2} \Rightarrow \bar{A} = A - \frac{S_{ABC}}{3R^2} = A - \frac{\varepsilon}{3}$$

şi analog $\bar{B} = B - \dfrac{\varepsilon}{3}$, $\bar{C} = C - \dfrac{\varepsilon}{3}$, aşadar fiecare unghi al triunghiului plan este mai mic decât unghiul corespunzător al triunghiului sferic cu o treime din exces.

1.10 Exerciţii

1. Să se scrie ecuaţia sferei în următoarele cazuri:

   (a) $C(1,-2,2),\ R=3$

   (b) $C=O,\ R=\sqrt{2}$

   (c) $C=O$ şi trece prin punctul $A(3,-1,2)$

   (d) $C(2,-1,3)$ şi trece prin punctul $B(-2,0,1)$

   (e) Punctele $A(1,2,-1)$ şi $B(3,4,5)$ sunt extremităţile unui diametru

   (f) $C(1,2,3)$ şi este tangentă planului $6x+7y-6z+31=0$

   (g) Sfera trece prin $O(0,0,0)$, $A(2,0,0)$, $B(0,5,0)$, $C(0,0,3)$
   R: $a=1, b=\frac{5}{2}, c=\frac{3}{2}$

2. Să se determine centrul şi raza sferelor:

   (a) $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+5=0$

   (b) $x^2+y^2+z^2-8x-4y+2z+17=0$

   (c) $x^2+y^2+z^2+2x-6y+4z-11=0$

   (d) $x^2+y^2+z^2-x+3y-4z+1=0$

   (e) $2(x^2+y^2+z^2)+4x-y+2z-5=0$

3. Fie sfera de ecuaţie

$$(S):\ x^2+y^2+z^2-6x+4y-2z-86=0$$

   şi planul $(p):\ 2x-2y-z+9=0$.

   (a) Să se afle centrul şi raza sferei

   (b) Să se arate că $S\cap p\neq\varnothing$

   (c) Să se afle centrul şi raza cercului de intersecţie a sferei S cu planul p

   R: $C(3,-2,1), R=10, C_1(-1,2,3), r=8$
   Aceleaşi cerinţe pentru:

   (a) $(S):\ x^2+y^2+z^2-4x-2y+6z+1=0,\ (p):\ x+2y-z-3=0$

   (b) $(S):\ (x-4)^2+(y-7)^2+(z+1)^2-36=0,\ (p):\ 3x+y-z-9=0$

4. Să se scrie ecuaţiile planelor tangente la sfera

$$(S):\ x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z+8=0$$

în punctele de intersecţie ale sferei cu dreapta

$$(d):\ \frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{2}$$

R: $S\cap d=\{M_1(1,0,1),M_2(3,-2,5)\}$

5. Să se rezolve triunghiurile sferice dreptunghice ($A=90^0$) cunoscând

   (a) $a=74^0$ şi $c=30^030'$;

   (b) $b=60^0$ şi $c=45^0$;

   (c) $a=82^030'$ şi $C=72^025'$

   (d) $c=45^0$ şi $B=60^035'$

   (e) $B=46^0$ şi $C=75^030'$

   (f) $b=38^024'$ şi $B=42^054'$

   Rezolvări:

   (a) $\cos a=\cos b\cos c\Rightarrow\cos b=\dfrac{\cos a}{\cos c}=\dfrac{\cos 74^0}{\cos 30.5^0}=0.319903\Rightarrow b=71.342969^0=71^020'35''$
   $\cos B=\operatorname{ctg}a\operatorname{tg}c=\dfrac{\operatorname{tg}30.5^0}{\operatorname{tg}74^0}=0.168906\Rightarrow B=80.275786^0=80^016'33''$
   $\cos C=\operatorname{ctg}a\operatorname{tg}b=\dfrac{\operatorname{tg}71.342969^0}{\operatorname{tg}74^0}=0.849249\Rightarrow C=31.869874^0=31^052'12''$
   $\varepsilon=A+B+C-180^0=22^028'45''$

   (b) $\cos a=\cos b\cos c=\cos 60^0\cos 45^0=0.353553\Rightarrow a=76.994680^0=76^059'41''$
   $\cos B=\operatorname{ctg}a\operatorname{tg}c=\dfrac{\operatorname{tg}45^0}{\operatorname{tg}76.99468}=0.377964\Rightarrow B=75.324860^0=75^019'03''$
   $\cos C=\operatorname{ctg}a\operatorname{tg}b=\dfrac{\operatorname{tg}60^0}{\operatorname{tg}76.99468^0}=0.1520222\Rightarrow C=65.169840^0=65^010'11''$
   $\varepsilon=A+B+C-180^0=50^029'14''$

(c) $a = 82^0 30' = 82.5^0$, $C = 72^0 25' = 72.41667^0$
$\cos C = \operatorname{ctg} a \operatorname{tg} b \Rightarrow \operatorname{tg} b = \cos C \operatorname{tg} a = \cos 72.41667^0 \operatorname{tg} 82.5^0 = 2.294621 \Rightarrow b = 66.452341^0 = 66^0 27' 08''$
$\cos a = \cos b \cos c \Rightarrow \cos c = \dfrac{\cos a}{\cos b} = \dfrac{\cos 82.5^0}{\cos 66.452341^0} = 0.326714 \Rightarrow c = 70.930533^0 = 70^0 55' 50''$
$\cos B = \sin C \cos b = \sin 72.416667^0 \cos 66.452341^0 = 0.380845 \Rightarrow B = 67.613966 = 67^0 36' 50''$
$\varepsilon = A + B + C - 180^0 = 50^0 01' 50''$

(d) $\cos C = \sin B \cos c = \sin 60.583333^0 \cos 45^0 = 0.615940 \Rightarrow C = 51.979731^0 = 51^0 58' 47''$
$\cos a = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C = \operatorname{ctg} 60.58333 \operatorname{ctg} 51.979731 = 0.440852 \Rightarrow a = 63.841705^0 = 63^0 50' 30''$
$\cos C = \operatorname{ctg} a \operatorname{tg} b \Rightarrow \operatorname{tg} b = \cos C \operatorname{tg} a = \cos 51.979731^0 \operatorname{tg} 63.841705^0 = 1.254059 \Rightarrow b = 51.430768^0 = 51^0 25' 51''$
$\varepsilon = A + B + C - 180^0 = 22^0 33' 47''$

(e) $\cos a = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C = \operatorname{ctg} 46^0 \operatorname{ctg} 75.5^0 = 0.249744 \Rightarrow a = 75.537636^0 = 75^0 32' 15''$
$\cos B = \sin C \cos b \Rightarrow \cos b = \dfrac{\cos B}{\sin C} = \dfrac{\cos 46^0}{\sin 75.5^0} = 0.717513 \Rightarrow b = 44.150483^0 = 44^0 09' 02''$
$\cos C = \sin B \cos c \Rightarrow \cos c = \dfrac{\cos C}{\sin B} = \dfrac{\cos 7505^0}{\sin 46^0} = 0.348069 \Rightarrow c = 69.630738^0 = 69^0 37' 51''$
$\varepsilon = A + B + C - 180^0 = 31^0 30'$

(f) $\sin c = \operatorname{ctg} B \operatorname{tg} b = 0.852928 \Rightarrow c_1 = 58.531651^0 = 58^0 31' 54''$, $c_2 = 180^0 - c_1 = 121^0 28' 06''$
$\cos C = \sin B \cos c \Rightarrow C_1 = 69.184797^0 = 69^0 11' 05''$, $C_2 = 110^0 48' 55''$
$\cos B = \operatorname{ctg} a \operatorname{tg} c \Rightarrow a_1 = 65.851092^0 = 65^0 51' 04''$, $a_2 = 114^0 08' 56''$

6. Să se rezolve triunghiurile sferice quadratice ($a = 90^0$) cunoscând

(a) $b = 139^0$ şi $C = 51^0$;

(b) $B = 120^0$ şi $C = 100^0$;

(c) $A = 152^0 50' 36''$ şi $C = 24^0 12' 36''$

(d) $A = 88^0 18'$ şi $b = 108^0 23'$

(e) $b = 82^0$ şi $c = 95^0$

(f) $c = 127^0 24' 18''$ şi $C = 135^0 56' 12''$

Rezolvări:

(a) Triunghiul polar $A_1B_1C_1$ este dreptunghic ($A_1 = 90^0$). Avem:
$\sin C_1 = \operatorname{ctg} B_1 \operatorname{tg} b_1 \Rightarrow \operatorname{tg} b_1 = \sin C_1 \operatorname{tg} B_1 = \sin 129^0 \operatorname{tg} 41^0 = 0.675563 \Rightarrow$
$b_1 = \operatorname{arctg} 0.675563 = 34.041492^0 = 34^0 02' 29'' \Rightarrow B = 180^0 - b_1 = 145^0 57' 31''$.
$\cos a_1 = \cos b_1 \cos c_1 = \cos 34.041492^0 \cos 129^0 = -0.521475 \Rightarrow$
$a_1 = \arccos(-0.521475) = 121.431243^0 = 121^0 25' 53'' \Rightarrow A = 180^0 - a_1 = 58^0 24' 07''$
$\cos C_1 = \operatorname{ctg} a_1 \operatorname{tg} b_1 = \frac{\operatorname{tg} 34.041492^0}{\operatorname{tg} 121.431243^0} = -0.412871 \Rightarrow$
$C_1 = \arccos(-0.412871) = 114.385315^0 = 114^0 23' 07'' \Rightarrow c = 180^0 - C_1 = 65^0 36' 53''$.

(b) $A = 94^0 57' 44''$, $b = 119^0 29' 56''$, $c = 98^0 41' 35''$

(c) $B = 12^0 41' 42''$, $b = 28^0 46' 30''$, $c = 63^0 57' 18''$

(d) $B = 108^0 27' 33''$, $C = 84^0 37' 26''$, $c = 84^0 53' 56''$

(e) $A = 82^0 17' 43''$, $B = 81^0 58' 09''$, $C = 95^0 02' 57''$

(f) $A = 118^0 53' 54''$, $b = 122^0 17' 30''$, $B = 132^0 15' 48''$

Capitolul 2

Aplicaţiile trigonometriei sferice

2.1 Geometria analitică a sferei

Fie o sferă cu centrul în originea O a unui sistem de coordonate cartezian şi de rază R, deci având ecuaţia

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

şi $M(x, y, z)$ un punct de pe sferă. Notăm cu M' proiecţia lui M pe planul xOy, cu φ unghiul dintre OM şi planul xOy, şi cu θ unghiul dintre OM' şi Ox. Atunci avem:

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi\cos\theta \\ y = R\cos\varphi\sin\theta \\ z = R\sin\varphi \end{cases},$$

care se numesc **ecuaţiile parametrice ale sferei**.

Unghiul $\theta \in [-180^0, 180^0]$ se numeşte **longitudine**, unghiul $\varphi \in [-90^0, 90^0]$ se numeşte **latitudine**, iar împreună (θ, φ) se numesc **coordonate sferice**.

Curbele de pe sferă obţinute prin fixarea uneia dintre cele două coordonate sferice sunt:

- θ = constant: semicercuri mari numite **meridiane**. $\theta = 0$ se numeşte **meridianul zero**.

- φ = constant: cercuri numite **paralele**. $\varphi = 0$ se numeşte **ecuator**.

Ecuatorul se mai numeşte **cercul de bază al sistemului de coordonate sferice**. Meridianul zero completat cu antimeridianul său formează un alt cerc mare, perpendicular pe ecuator, care se numeşte **cercul principal al sistemului de coordonate sferice**. Punctul de intersecţie dintre ecuator şi meridianul zero se numeşte **punctul principal al sistemului de coordonate sferice** şi are coordonatele sferice $\varphi = 0, \theta = 0$.

Latitudinea $\varphi = 90^0$ o are doar un punct, numit **polul nord** şi notat cu N. Latitudinea $\varphi = -90^0$ o are doar un punct, numit **polul sud** şi notat cu S. Dreapta NS se numeşte **axă polară**.

Fie două puncte de pe suprafaţa sferei date prin coordonatele lor sferice $M_1(\theta_1, \varphi_1)$, $M_2(\theta_2, \varphi_2)$. Distanţa sferică dintre cele două puncte este dată prin

$$\cos \widehat{M_1 M_2} = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)$$

Considerând un al treilea punct pe sferă $M_3(\theta_3, \varphi_3)$, în mod analog se pot calcula $\widehat{M_1 M_3}$ şi $\widehat{M_2 M_3}$. Rezolvând triunghiul sferic $M_1 M_2 M_3$ se poate calcula aria cu formula

$$S = \frac{\pi R^2}{180} \cdot \varepsilon$$

Excesul sferic poate fi calculat direct cu formula

$$\varepsilon = 180^0 - 2(\alpha - \beta + \gamma)$$

unde $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg} \frac{\theta_3 - \theta_2}{2} \frac{\cos \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{2}}{\cos \frac{\varphi_2 + \varphi_3}{2}}\right)$, $\beta = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg} \frac{\theta_3 - \theta_1}{2} \frac{\cos \frac{\varphi_1 - \varphi_3}{2}}{\cos \frac{\varphi_1 + \varphi_3}{2}}\right)$ şi $\gamma = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg} \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \frac{\cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}}{\cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}}\right)$.

Locul geometric al punctelor de pe sferă situate la o distanţă sferică determinată ρ de un punct fix al sferei $C(\theta_0, \varphi_0)$ este un cerc mic al sferei de rază sferică ρ şi centru sferic C. Ecuaţia analitică a acestui cerc se obţine impunând condiţia ca distanţa dintre punctul curent al cercului $M(\theta, \varphi)$ şi centrul C să fie ρ:

$$\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos(\theta - \theta_0) = \cos \rho$$

În cazul particular $\rho = 90^0$ se obţine ecuaţia cercului mare cu polul în punctul C:

$$\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos(\theta - \theta_0) = \cos 90^0 = 0$$

sau echivalent

$$\cos(\theta - \theta_0) = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \varphi_0$$

Ecuaţia cercului mare care trece prin două puncte de pe sferă $M_1(\theta_1, \varphi_1)$, $M_2(\theta_2, \varphi_2)$ este

$$\operatorname{tg} \varphi \sin(\theta_2 - \theta_1) + \operatorname{tg} \varphi_1 \sin(\theta - \theta_2) + \operatorname{tg} \varphi_2 \sin(\theta_1 - \theta) = 0$$

2.2 Coordonate geografice şi probleme de geodezie

Pământul poate fi considerat o sferă cu raza medie $R = 6371.221$ km, iar ecuaţiile parametrice ale suprafeţei sale sunt:

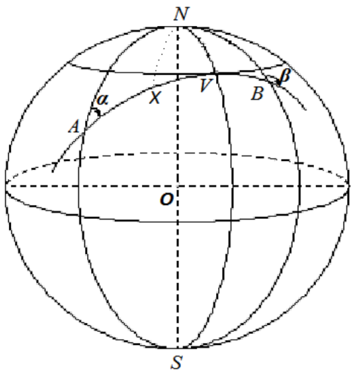
$$\begin{cases} x = R\cos\varphi\cos\theta \\ y = R\cos\varphi\sin\theta \\ z = R\sin\varphi \end{cases}$$

Longitudinea $\theta \in [-180^0, 180^0]$ şi latitudinea $\varphi \in [-90^0, 90^0]$ se numesc **coordonatele geografice** ale punctelor de pe suprafaţa globului. Fiecare punct este la intersecţia dintre un meridian $\theta = \theta_0$ şi o paralelă $\varphi = \varphi_0$.

- $\theta = 0^0$ se numeşte meridianul zero sau meridianul Greenwich;
- Dacă $\theta \in (0^0, 180^0)$ punctul este în emisfera estică;
- Dacă $\theta \in (-180^0, 0^0)$ punctul este în emisfera vestică;
- Punctele de longitudine $\theta = \pm 180^0$ sunt situate pe antimeridianul Greenwich care completează meridianul zero până la un cerc mare;
- $\varphi = 0^0$ se numeşte ecuator;
- Dacă $\varphi \in (0^0, 90^0)$ punctul este în emisfera nordică;
- Dacă $\varphi \in (-90^0, 0^0)$ punctul este în emisfera sudică;
- Latitudinea $\varphi = 90^0$ o are un singur punct, şi anume polul nord;
- Latitudinea $\varphi = -90^0$ o are un singur punct, şi anume polul sud;

2.3 Navigaţie maritimă şi aeriană

Dacă punctul de plecare şi cel de sosire sunt situate la distanţă mare, este recomandată navigaţia pe arcul de cerc mare care uneşte cele două puncte, care se numeşte **ortodromă** şi este cel mai scurt drum dintre cele două puncte pe sfera terestră.



- A = punctul de plecare
- B = punctul de sosire
- $d = \widehat{AB}$ = distanţa ortodromică
- α = cursul (capul) iniţial
- β = cursul (capul) final
- V = vertexul (punctul de pe ortodromă cel mai apropiat de polul geografic)

Distanţa ortodromică d se calculează cu formula

$$\cos d = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

Dacă se cunoaşte d, unghiurile α şi β se pot calcula din teorema sinusurilor în triunghiul ANB:

$$\frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\sin d} = \frac{\sin\alpha}{\sin(90^0 - \varphi_2)} = \frac{\sin\beta}{\sin(90^0 - \varphi_1)}$$

Unghiurile α şi β se pot calcula şi direct folosind formulele celor 4 elemente:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\varphi_2 \cos\varphi_1 \operatorname{cosec}(\theta_2 - \theta_1) - \sin\varphi_1 \operatorname{ctg}(\theta_2 - \theta_1)$$
$$\operatorname{ctg}\beta = -\operatorname{tg}\varphi_1 \cos\varphi_2 \operatorname{cosec}(\theta_2 - \theta_1) + \sin\varphi_2 \operatorname{ctg}(\theta_2 - \theta_1)$$

Coordonatele geografice (θ_V, φ_V) ale vertexului V se calculează prin rezolvarea unuia din triunghiurile sferice dreptunghice NVA sau NVB:

$$\cos\varphi_V = \cos\varphi_1 \sin\alpha$$
$$\operatorname{ctg}(\theta_V - \theta_1) = \sin\varphi_1 \operatorname{tg}\alpha$$
$$\operatorname{ctg}(\theta_V - \theta_2) = \sin\varphi_2 \operatorname{tg}\beta$$

2.4 Astronomie sferică

Pentru un observator situat pe Pământ, bolta cerească apare ca o calotă sferică pe a cărei suprafaţă se deplasează astrele (spre Est datorită rotaţiei Pământului). Centrul O al acestei sfere se poate considera puctul observatorului (**sferă cerească topocentrică**) sau centrul Pământului (**sferă**

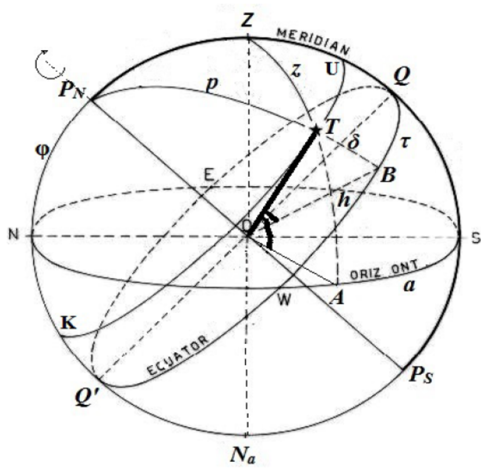
cerească geocentrică). Distanţa dintre centrele acestor sfere este raza Pământului, care este neglijabilă în raport cu distanţele la majoritatea astrelor.

Axa de rotaţie a sferei cereşti se numeşte **axa lumii**, iar punctele de intersecţie ale acesteia cu sfera cerească se numesc **poli cereşti**, notaţi cu P_N şi P_S. Semicercurile mari care unesc polii cereşti se numesc **meridiane cereşti**.

Planul care trece prin centrul sferei cereşti şi este perpendicular pe axa lumii $P_N P_S$ se numeşte **plan ecuatorial ceresc**, iar intersecţia acestuia cu sfera cerească este un cerc mare numit **ecuator ceresc**. Ecuatorul ceresc împarte sfera cerească în două emisfere: **emisfera cerească boreală** şi **emisfera cerească australă**.

Direcţia verticală (gravitaţională) într-un punct de observaţie se numeşte **verticala locului**, iar planul tangent sferei terestre în acest punct (deci perpendicular pe verticala locului) se numeşte **plan orizontal**. Planul orizontal intersectează sfera cerească după un cerc mare numit **orizont matematic**, iar punctele de intersecţie ale verticalei locului cu sfera cerească se numesc **zenit** (notat cu Z şi situat deasupra observatorului) şi **nadir** (notat cu N_a şi diametral opus zenitului).

Orice plan care conţine verticala locului ZN_a se numeşte **plan vertical** şi intersectează sfera cerească după un cerc mare numit **cerc vertical**. Orizontul matematic şi ecuatorul ceresc se intersectează în două puncte diametral opuse numite punctele cardinale **est** E şi **vest** W.



Axa lumii $P_N P_S$ şi verticala locului ZN_a determină un plan numit **plan meridian al locului** care intersectează sfera cerească după **meridianul ceresc al locului** iar planul orizontal după o dreaptă numită **meridiana**

locului. Orizontul matematic este intersectat de meridiana locului în două puncte diametral opuse numite puncte cardinale **nord** N şi **sud** S. Se notează cu Q şi Q' cele două puncte diametral opuse în care meridianul ceresc al locului intersectează ecuatorul ceresc.

Fie un astru T situat pe sfera cerească.

- **Înălţimea deasupra orizontului** $h \in [-90^0, 90^0]$ este unghiul făcut de raza OT cu planul orizontului.

- **Distanţa zenitală** $z \in [0^0, 180^0]$ este măsura arcului de cerc vertical TZ, adică $z = 90^0 - d$.

- **Azimutul** $a \in [0^0, 360^0]$ este unghiul diedru făcut de planul vertical al lui T cu planul meridian al locului, măsurat pe orizontul matematic de la punctul sud S spre vest.

- (h, z) se numesc **coordonate orizontale** (sau **zenitale**) ale astrului T şi au ca plan fundamental planul orizontului matematic şi verticala locului drept axă fundamentală.

În mişcarea sa aparentă diurnă dinspre est spre vest, astrul T descrie un arc de cerc mic paralel (**paralel ceresc**) cu ecuatorul ceresc. El apare deasupra orizontului dintr-un **punct de răsărit** al astrului şi se deplasează până într-un **punct de apus** al astrului (intersecţiile paralelului ceresc cu orizontul).

Astrul T atinge o **înălţime maximă** h_{max} la intersecţia paralelului ceresc cu meridianul locului într-un punct numit **punct de culminaţie superioară** U. Punctul diametral opus pe paralelul ceresc situat pe meridianul locului se numeşte **punct de culminaţie inferioară** K.

Planul determinat de axa lumii $P_N P_S$ şi T se numeşte **plan orar** al astrului şi intersectează sfera cerească după un cerc mare numit **cercul orar** al astrului sau **cercul de declinaţie**.

- **Declinaţia** $\delta \in [-90^0, 90^0]$ a astrului T este unghiul făcut de raza OT cu planul ecuatorial ceresc.

- $p = 90^0 - \delta \in [0^0, 180^0]$ se numeşte **distanţa polară cerească**.

- **Unghiul orar** $\tau \in [0^0, 360^0]$ este unghiul diedru dintre planul meridian al locului şi planul orar al astrului.

- (δ, τ) se numesc **coordonatele orare** ale astrului T şi au ca plan fundamental planul ecuatorului ceresc şi axa lumii drept axă fundamentală.

Folosind formulele trigonometriei sferice fie în coordonate zenitale, fie în coordonate orare, pot fi studiate numeroase probleme de astronomie, printre care:

- Determinarea coordonatelor astronomice ale unui astru pe baza unor observaţii;
- Studiul mişcării diurne şi anuale a Soarelui sau a Lunii;
- Relaţiile dintre coordonatele astronomice ale unui astru;
- Determinarea răsăritului şi apusului unui astru în orice loc de pe Pământ;
- Determinarea latitudinii şi longitudinii unui punct de observaţie;
- Măsurarea timpului pe baza unor fenomene astronomice periodice.

2.5 Exerciţii

1. Să se determine distanţa dintre Iaşi $(27^0 35' 20'' E, 47^0 09' 44'' N)$ şi Paşcani $(26^0 43' 38'' E, 47^0 14' 58'' N)$.
   Rezolvare:
   $\theta_1 = 27.588889^0, \varphi_1 = 47.162222^0$ şi $\theta_2 = 26.727222^0, \varphi_2 = 47.249444^0$

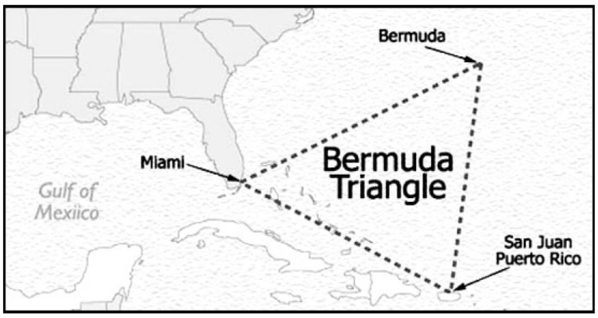
$$\cos\widehat{IP} = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)$$

$$\cos\widehat{IP} = 0.733282 \cdot 0.734316 + 0.679925 \cdot 0.678808 \cdot 0.999887 = 0.999947$$

$$\widehat{IP} = 0.591685^0$$

$$IP = \frac{\pi R}{180} \cdot 0.591685 = \frac{\pi \cdot 6371.221}{180} \cdot 0.591685 = 65.813367 km$$

2. Să se calculeze perimetrul şi aria triunghiului Bermudelor



- Miami: $25^0 48' 47'' N,\ 80^0 08' 03'' W$
- San Juan: $18^0 27' 00'' N,\ 66^0 04' 00'' W$
- Bermuda: $32^0 17' 35'' N,\ 64^0 46' 55'' W$

<u>Rezolvare</u>:
Miami: $M_1(\theta_1 = -80.134167^0, \varphi_1 = 25.813056^0)$
San Juan: $M_2(\theta_2 = -66.195374^0, \varphi_2 = 18.231960^0)$
Bermuda: $M_3(\theta_3 = -64.781944^0, \varphi_3 = 32.293056^0)$
$\cos \overset{\frown}{M_1M_2} = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) = 0.966082 \Rightarrow$
$\Rightarrow \overset{\frown}{M_1M_2} = 14.965305^0 \Rightarrow M_1M_2 = 1664.074636$ km
$\cos \overset{\frown}{M_1M_3} = \sin\varphi_1 \sin\varphi_3 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_3 \cos(\theta_3 - \theta_1) = 0.966457 \Rightarrow$
$\Rightarrow \overset{\frown}{M_1M_3} = 14.881842^0 \Rightarrow M_1M_3 = 1654.793926$ km
$\cos \overset{\frown}{M_2M_3} = \sin\varphi_2 \sin\varphi_3 + \cos\varphi_2 \cos\varphi_3 \cos(\theta_3 - \theta_2) = 0.969794 \Rightarrow$
$\Rightarrow \overset{\frown}{M_2M_3} = 14.118400^0 \Rightarrow M_2M_3 = 1569.902608$ km
$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\theta_3-\theta_2}{2}\frac{\cos\frac{\varphi_2-\varphi_3}{2}}{\cos\frac{\varphi_2+\varphi_3}{2}}\right) = 89.3560263^0$
$\beta = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\theta_3-\theta_1}{2}\frac{\cos\frac{\varphi_1-\varphi_3}{2}}{\cos\frac{\varphi_1+\varphi_3}{2}}\right) = 83.2696532^0$
$\gamma = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\frac{\cos\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}}{\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}\right) = 83.5205873^0$
$\varepsilon = 180^0 - 2(\alpha - \beta + \gamma) = 0.7860793^0 \Rightarrow S = \frac{\pi R^2}{180} \cdot \varepsilon = 556915\ \text{km}^2$