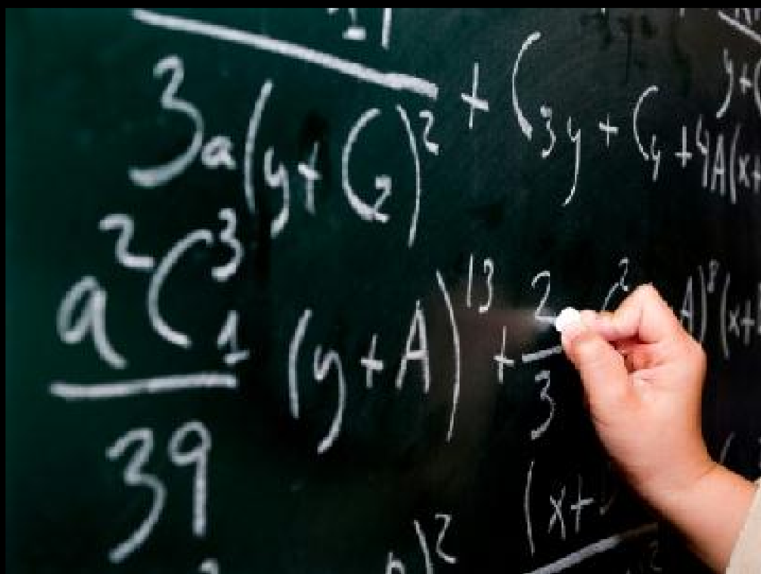
CAPES Maths

Session CAPES 2013

Recueil compilé par Clément Boulonne

Les leçons de mathématiques à l'oral du CAPES



http://cboumaths.wordpress.com

les leçons de mathématiques à l'oral du capes

recueil compilé par clément BOULONNE

SOMMAIRE

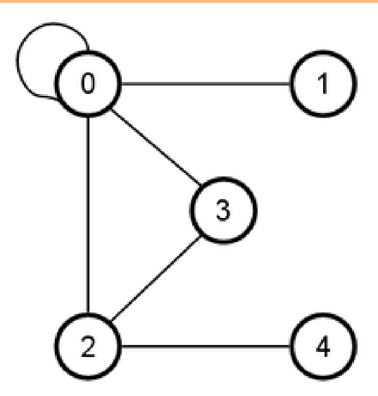
I

Probabilités et statistiques

LEÇON

1

Résolution de problèmes à l'aide de graphes



Niveau : Terminale ES Spécialité Maths
Prérequis : définitions de base d'un graphe

1 Problème des ponts de Köningsberg

1.1 Enoncé du problème

La ville de Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad) est construite autour de deux îles situées sur le Pregel et reliées entre elles par un pont. Six autres ponts relient les rives de la rivière à l'une ou l'autre des deux îles. Le problème consiste à déterminer s'il existe ou non une promenade dans les rues de Königsberg permettant, à partir d'un point de départ au choix, de passer une et une seule fois par chaque pont, et de revenir à son point de départ, étant entendu qu'on ne peut traverser le Pregel qu'en passant sur les ponts.

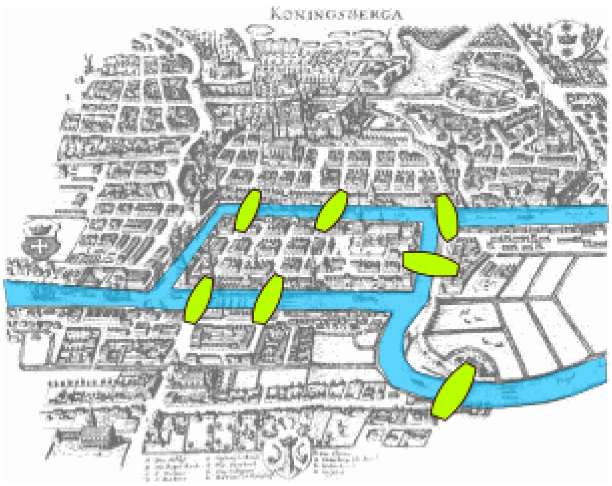
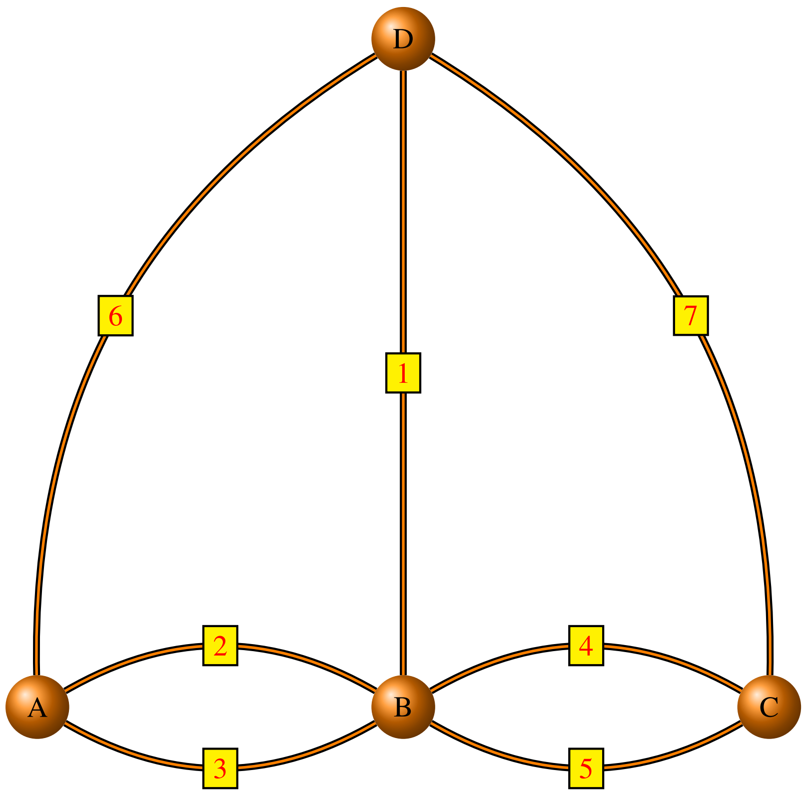


FIGURE 1.1 – Ponts de Köningsberg

On peut représenter le problème grâce à un graphe :



1 2 Outils pour la résolution

Définition 1.1

Graphe connexe
On appelle *graphe connexe*, un graphe pour lequel chaque paire de sommets est reliée par au moins une annexe.

Définition 1.2

Chaîne eulérienne
On appelle *chaîne eulérienne*, une chaîne composée de toutes les arrêtes prises une seule fois.

Définition 1.3

Cycle eulérien
On appelle *cycle eulérien*, une chaîne eulérienne dont les extérmités coïncident.

Théorème 1.4

a. Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si tous ses sommes sont de degré pair.

b. Un garphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.

Développement
Démonstration

Démonstration.

a. $\boxed{\Rightarrow}$ Si G est connexe et admet un cycle eulérien c, par définition, c passe par toutes les arrêtes de G une et une seule fois. Soit x un sommet de G, c passe $\deg(x)$ fois par x. Or, pour tout sommet, si on arrive sur x par une arrête, on en repart par une autre non emprunté donc $\deg(x)$ est pair.

$\boxed{\Leftarrow}$ La démonstration se fait par récurrence forte. Supposons que les sommets de G sont de degré impair. Soit c_1 une chaîne aussi longue que possible à partir d'un sommet x_1 de G.

ou bien c_1 est une chaîne eulérienne et c'est fini (cette chaîne est un cycle car tous les degrés sont pairs)

ou bien on considère G' le sous-graphe de G obtenu en otant les arrêtes de c_1 et les sommets qui ne sont plus incidents à aucune arrête. G est connexe donc G' possède au moins un sommet x_2 commun avec ceux de G_1. Les sommets de G' sont de degré pair et $\operatorname{ord}(G') < \operatorname{ord}(G)$ donc, par hypothèse de récurrence, on construit un cycle c_2 dans G'.
On juxtapose c_1 et c_2 et on a notre cycle.

b. $\boxed{\Rightarrow}$ Si G est une chaîne de sommets d'extrémités a et b :

ou bien ou bien a et b sont confondus, ils forment un cycle eulérien et donc a et b sont de degré pair.

ou bien $a \neq b$ et on ajoute l'arrête (a, b). On a alors un cycle eulérien donc tous les sommets sauf a et b sont de degré pair.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si le nombre de sommet de degré impair est 0 ou 2.

Si 0 **:** chaîne eulérienne (car cycle eulérien, voir a.)

sinon : on ajoute le somme α, les arrêtes (α, a) et (α, b). Alors tous les sommets sont paires donc G admet un cycle eulérien passant par α. On élimine deux arrêtes dy cycle et le sommet α et on a notre chaîne eulérienne.

□

1 3 Résolution du problème

Développement
Résolution du problème des ponts de Köningsberg

Ici, $\deg(A) = 5$ et $\deg(B) = \deg(C) = \deg(D) = 3$ impair. Donc, ce problème n'a pas de solution.

Développement
Autre problème possible

Dans un jeu de dominos, peut-on mettre bout à bout en ligne toutes les pièces du jeu ?

2 Coloration de graphes

2.1 Enoncé du problème

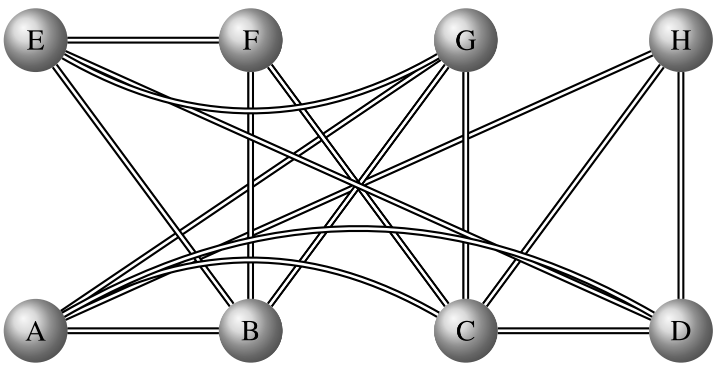
Un aquariophile vient de recevoir huit poissons. Les poissons ne peuvent cohabiter tous ensemble dans un même aquarium.

Dans le tableau suivant, une croix signifie que deux poissons ne peuvent cohabiter.

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		×	×	×			×	×
B	×				×	×	×	
C	×			×		×	×	×
D	×		×		×			×
E		×		×		×	×	
F		×	×		×			
G	×	×	×		×			
H	×		×	×				

Combien d'aquariums seront nécessaires ?

Ce problème est équivalent à colorier avec un minimum de couleurs les sommets du graphe suivant :



2.2 Outils pour la résolution

Définition 1.5

Coloration d'un graphe

On dit qu'on *colorie un graphe* si on affecte une couelur à chacun de ses sommets de façon à ce que deux sommets adjacents ne portent pas la même couleur.

Définition 1.6

Nombre chromatique

On appelle *nombre chromatique* d'un graphe G, le plus petit nombre de couleurs permettant de le colorer. On note $\gamma(G)$ le nombre chromatique de G.

Propriété 1.7

Soit G un graphe. S'il existe un sous-graphe de G complet d'ordre p alors le nombre chromatique $\gamma(G)$ de G vérifie la relation $\gamma(G) \geq p$.

Algorithme 1.8

Algorithme de Welsh-Powell

Soit G un graphe. L'algorithme de Welsh-Powell a pour but de donner une approximation du nombre chromatique du graphe G. Il se fait en deux étapes :

Étape 1 On attribue une couleur C_1 au premier sommet de la liste.

Étape 2 En suivant la liste, on attribue cette couleur C_1 **à tous les sommets qui ne lui sont pas adjacents et qui ne sont pas adjacents entre eux**.

Ensuite... On attriue une couleur C_2 au premier sommet non colorié et on recommence comme à l'étape 2 et ainsi de suite... jusqu'à ce que tous les sommets du graphe G soient coloriés.

C'est un algorithme glouton, c'est-à-dire qu'étape par étape, on essaie de faire un choix optimal local pour espérer obtenir un résultat optimum global.

Théorème 1.9

Vizing, admis

Soit G un graphe et soit Δ le plus grand des degrés. Alors le nombre chromatique $\gamma(G)$ est inférieur ou égal à $\Delta + 1$; soit $\gamma(G) \leq \Delta + 1$.

Développement

Démonstration.

- Si G' est complet alors $\gamma(G') = p$ d'ordre p donc si G' est complet et est inclus dans G alors $p \leq \gamma(G)$.
- Soient $x_1, \ldots, x_n$ les sommets de G. Soit x_i non colorié. Comme $\deg(x_i) \leq r$, on a au plus r sommets adjacents à x_i donc au plus r couleurs différents. La $r+1$-ieme couleurs sera pour x_i, d'où $\gamma(G) \leq r+1$.

□

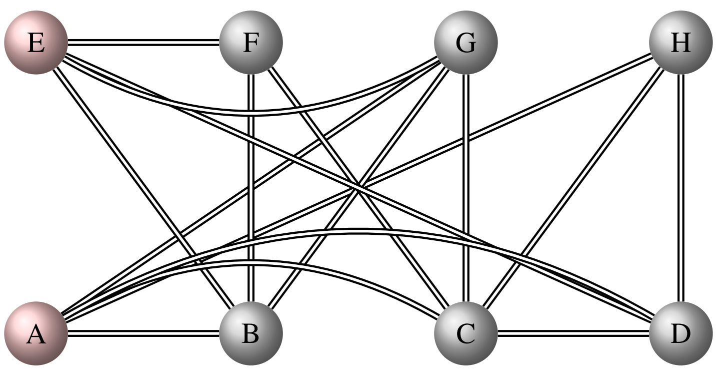
Développement

Déroulement de l'algorithme de Welsh-Powell pour notre problème

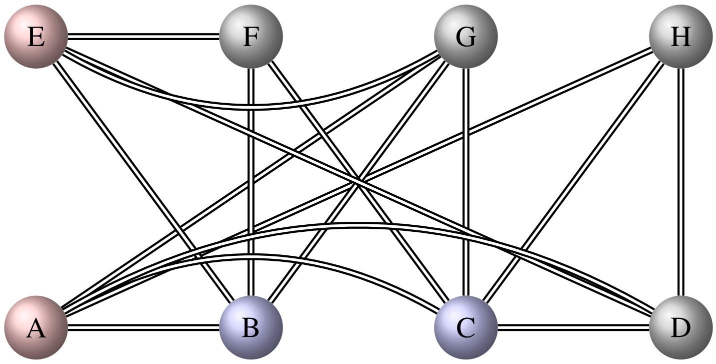
1. On liste les sommets par ordre de degré décroissant.

Sommets	A	C	B	D	E	G	F	H
Degré	5	5	4	4	4	4	3	3

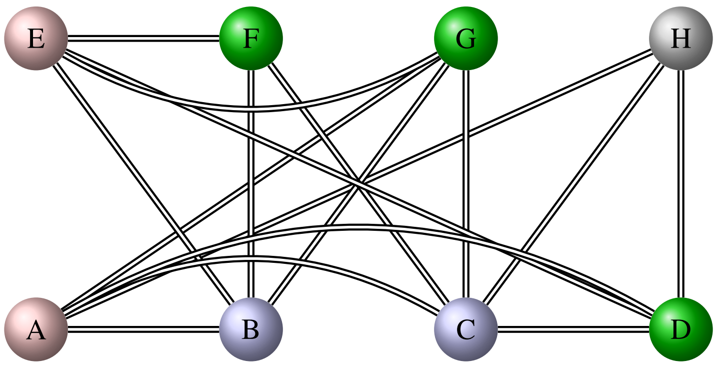
2. On choisit la couleur rouge pour A (sommet de plus haut degré) et on colore tous les sommets non adjacents à A (ou entre eux) en rouge (sommet E).



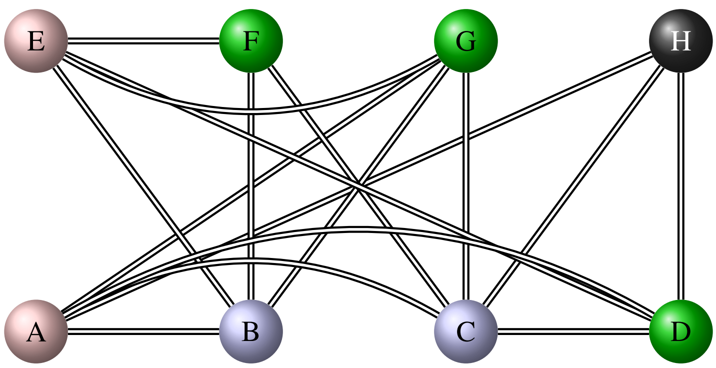
3. On s'occupe maintenant du sommet C qui est d'ordre 5. On lui choisit la couleur bleue et on colore tous les sommets non adjacents à A (ou entre eux) en bleu (sommet B).



4. On s'occupe maintenant du sommet D qui est d'ordre 4. On lui choisit une couleur : la couleur verte et on colorie les sommets qui lui sont non adjacents (les sommets G et F).



5. Enfin il reste un sommet à colorier, c'est le sommet H !



Majoration et minoration de $\gamma(G)$:

– Le maximum des degrés du graphe est 5 donc $\gamma(G) \leq 5$.

– Le sous graphe $A - H - D - C$ est complet d'ordre 4 donc $4 \leq \gamma(G)$.

Or, on a réussi (grâce à l'algorithme de Welsh-Powell à colorier le graphe en 4 couleurs, d'où $\gamma(G) = 4$.

Il faudra donc au minimum 4 aquariums.

3 Recherche du plus court chemin

3.1 Pondération d'un graphe

Définition 1.10

Pondérer un graphe

Soient $G = (S, A)$ un graphe tel que $S = (s_1, \ldots, s_n)$. *Pondérer un graphe* est équivalent à se donner une fonction $f : S \times S \to \mathbb{R}$ tel que $f(s_i, s_j)$ est la longueur de l'arrête qui relie le sommet s_i et s_j.

3.2 Algorithme de Dijsktra

Algorithme 1.11

Algorithme de Dijsktra

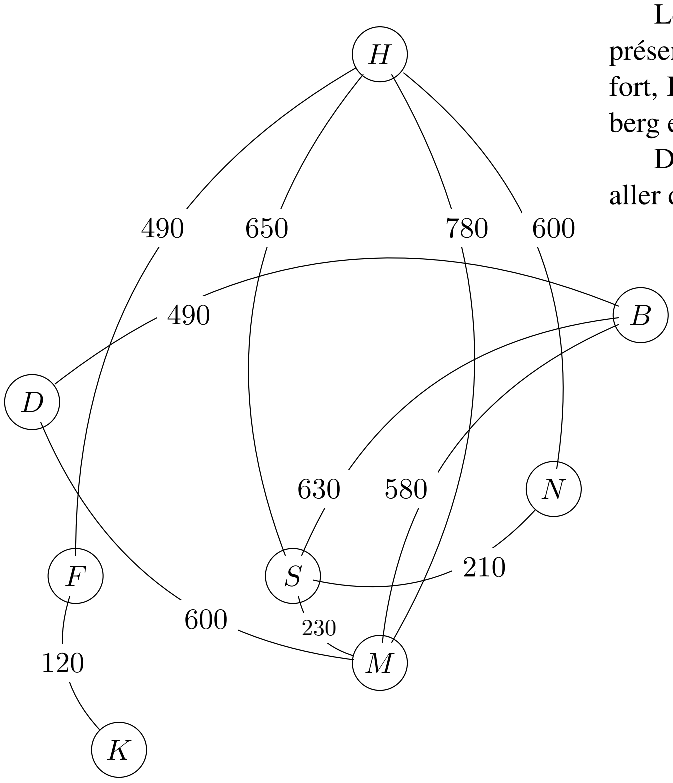
1. On trace un tableau avec autant de colonnes qu'il y a de sommets dans le graphe G. La première colonne est réservée au sommet de départ.
2. Dans la ligne suivante, on met 0 dans la première colonne et ∞ dans les colonnes suivantes pour indiquer que l'on coommence l'algorithme (on part du sommet de départ et on n'avance pas vers d'autres sommets (sommets inaccessibles)).
3. On met les valeurs des chemins qui partent du sommet qu'on a gardé précédemment vers les autres arrêtes (sans se préoccuper des sommets traités).
4. On entoure l'arrête qui a la longueur minimale et on garde le sommet qui constitue le but de l'arrête.
5. On recommence à l'étape 3 jusqu'à tant qu'il n'y a plus d'arrêtes à traiter.

Ainsi, on se constitue une suite de sommets qui sera notre chemin de longueur minimale.

Remarque 1.12. L'algorithme de Dijsktra peut se mettre en œuvre quand le graphe est connexe et que al valeur aux arrêtes est positif ou nul.

3.3 Exemples de problèmes et résolution

On a reporté sur le graphe ci-dessous cerraintes villes d'Allemagne et les distances qui les séparent (en kilomètres) :



Les lettres B, D, F, H, K, M, N et S représentent les villes Berline, Dortmund, Francfort, Hambourg, Kaiserslautern, Munich, Nuremberg et Stuttgart.

Déterminer le plus court chemin possible pour aller de Kaiserslautern à Berlin.

Résolution du problème

On commence par le sommet K :

K	F	H	S	M	N	D	B
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

On étudie chacune des arretes partant du sommet choisi. Dans les colonnes, on met la distance à K et le sommet d'où l'on vient.

K	F	H	S	M	N	D	B
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
•	120_K	∞	∞	∞	∞	∞	∞

On se place de nouveau au sommet du plus petit poids, ici F.

K	F	H	S	M	N	D	B
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
•	$\boxed{120_K}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞
•	•	610_F	∞	∞	∞	∞	∞

Et ainsi de suite…

K	F	H	S	M	N	D	B
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
•	$\boxed{120_K}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞
•	•	$\boxed{610_F}$	∞	∞	∞	∞	∞
•	•	•	1260_H	1390_H	1210_H	∞	∞

K	F	H	S	M	N	D	B
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
•	$\boxed{120_K}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞
•	•	$\boxed{610_F}$	∞	∞	∞	∞	∞
•	•	•	1260_H	1390_H	$\boxed{1210_H}$	∞	∞
•	•	•	1260_H ou 1420_N	1390_H	•	∞	∞

K	F	H	S	M	N	D	B
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
•	$\boxed{120_K}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞
•	•	$\boxed{610_F}$	∞	∞	∞	∞	∞
•	•	•	1260_H	1390_H	$\boxed{1210_H}$	∞	∞
•	•	•	$\boxed{1260_H}$	1390_H	•	∞	∞
•	•	•	•	1390_H ou 1490_S	•	∞	1840_S

K	F	H	S	M	N	D	B
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
•	$\boxed{120_K}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞
•	•	$\boxed{610_F}$	∞	∞	∞	∞	∞
•	•	•	1260_H	1390_H	$\boxed{1210_H}$	∞	∞
•	•	•	$\boxed{1260_H}$	1390_H	•	∞	∞
•	•	•	•	$\boxed{1390_H}$	•	∞	1840_S
•	•	•	•	•	•	1990_M	1840_S ou 1970_M

Et enfin…

K	F	H	S	M	N	D	B
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
•	$\boxed{120_K}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞
•	•	$\boxed{610_F}$	∞	∞	∞	∞	∞
•	•	•	1260_H	1390_H	$\boxed{1210_H}$	∞	∞
•	•	•	$\boxed{1260_H}$	1390_H	•	∞	∞
•	•	•	•	$\boxed{1390_H}$	•	∞	1840_S
•	•	•	•	•	•	1990_M	$\boxed{1840_S}$

On a trouvé le chemin de poids minimal qui va du sommet K jusqu'au sommet B : c'est le chemin $K-F-H-S-B$.

4 Graphe probabiliste

4.1 Définition

Définition 1.13

Graphe probabiliste

On dit qu'un graphe est *probabiliste* si le graphe est orienté, pondéré et que les poids figurant sur chaque arrête est un nombre réel dans l'intervalle $[0\,,1]$ et que la somme des poids des arrêtes sortant de chaque sommet est égale à 1.

Mathématiquement, on dit qu'un graphe $G=(S,A)$ eset probabiliste s'il existe une fonction $f\colon S\times S\to[0\,,1]$ tel que :

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq n} f(s_i,s_j)=1.$$

4.2 Exemples de problèmes

On a divisé une population en deux catégories : « fumeurs » et « non-fumeurs ».

- 60% des descendants de fumeurs sont des fumeurs.
- 10% des descendants de non-fumeurs sont des fumeurs.

À la génération 1, il y a autant de fumeurs que de non-fumeurs. On se propose de suivre l'évolution génération par génération du taux de fumeurs et des non-fumeurs par rapport à la population totale. Ce problème peut se modéliser grâce à un graphe probabiliste.

4.3 Outils pour la résolution

Définition 1.14

Matrice de transition

On appelle *matrice de transition* (notée M) du graphe probabiliste, la matrice dont le terme de la i^{e} colonne et de la j^{e} colonne est égal au poids de l'arête allant du sommet s_i au sommet s_j si elle existe et à 0 sinon.

Exemple 1.15. La matrice de transition à l'étape 0 de l'exemple précédent est :

$$M=\begin{pmatrix}0,6 & 0,4\\ 0,1 & 0,9\end{pmatrix}$$

Théorème 1.16

Soit P_0 la matrice représentant l'état probabiliste initial et P_n la matrice représentant l'état probabiliste à l'étape n. Alors : $P_n=P_0M^n$.

Définition 1.17

On dit que P est un état stable si $P=PM$.

Théorème 1.18 Pour toute matrice de transition M, il existe un état stable (c'est-à-dire il existe P tel que $P = PM$).

Développement

Démonstration. Soit $P = (\alpha, \beta)$ et $M = \left(\begin{smallmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{smallmatrix}\right)$. On dit que λ est valeur propre de M si $PM = \lambda P$.
Donc $PM = P$ si et seulement si 1 est valeur propre de M. On regarde le polynôme caractéristique de M :

$$\begin{aligned}\chi_M(X) &= X^2 - \operatorname{tr}(M^T) + \det M \\ &= X^2 - (a+1-b)X + a(1-b) - b(1-a) \\ &= X^2 - (a+1-b)X + a - b\end{aligned}$$

1 est racine de $\chi_M(X)$ car :

$$1 - (a+1-b) - a - b = 0.$$

□

4 4 Résolution

Développement

Recherche d'un état stable

On cherche l'état stable dans le problème posé plus haut. Pour cela, on pose $P = (a, b)$ (avec a, b positifs et $a + b = 1$) et on résout l'équation matricelle $PM = P$.

$$(a, b) \times \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} = (a, b)$$

d'où

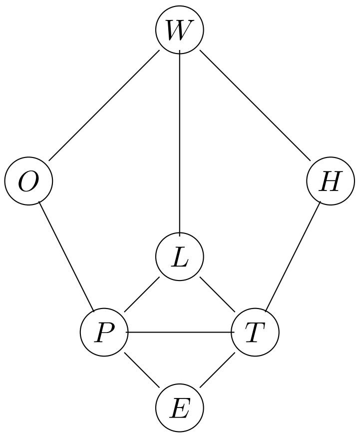
$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 0,6a + 0,1b = a \\ 0,4a + 0,9b = b \end{cases}$$

et ainsi, on trouve $a = 0,2$ et $b = 0,8$.

Exercices d'entrainement

Parcours eulriens

1 On considère le graphe Γ ci-contre.



1. Ce graphe admet-il une chaîne eulérienne ? Justifier.
   Si oui, donner une telle chaîne.
2. Ce graphe admet-il un cycle eulérien ? Justifier.
   Si oui, donner un tel cycle.

Coloration

2 **Bac ES Antilles-Guyane 2006**

Un jardinier doit décorer privatif en répartissant 10 variétés de fleurs notés V_1 à V_{10} dans différents parterres. Certaines de ces variétés ne peuvent pas être plantées ensemble pour des raisons diverses (tailles, couleurs, conditions climatiques, etc.). Ces incompatibilités sont résumées dans le tableau ci-dessous une croix indique qu'il y a incompatibilité entre deux variétés.

Fleur	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	V_9	V_{10}
V_1			×			×				×
V_2			×	×	×			×		
V_3	×	×		×		×				
V_4		×	×		×			×	×	
V_5		×		×			×	×		
V_6	×		×				×			
V_7					×	×				
V_8		×		×	×					
V_9				×						×
V_{10}	×								×	

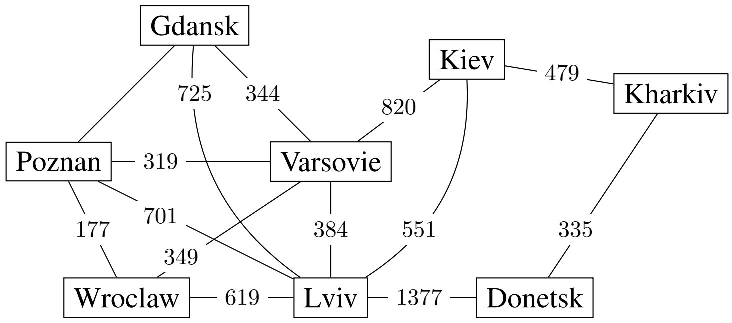
1. Représenter par son graphe G la situation proposée.
2. **a.** Trouver un sous-graphe complet d'ordre 4 et le dessiner.

   b. Que peut-on en déduire pour la coloration du graphe G ? Quel eset le nombre minimum de parterres que la jardiner doit décorer ?

Recherche d'un chemin de longueur minimale

3 On a indiqué le graphe ci-dessous les villes qui vont acceuillir l'Euro 2012, ainsi que les distances en km qui les séparent.

Déterminer le plus court chemin pour aller de Poznan à Donetsk.



Graphes probabilistes

4 Un ciné-club qui projette des films français et étrangers dispose de deux salles. Les abonnés au ciné-club assistent systématiquement à une projection chaque lundi soir.

La probabilité qu'un spectateur ayant vu un film français à une séance aille voir un film étranger à la séance suivante est égale à $0,6$.

La probabilité qu'un spectateur ayant vu un film étranger à une séance aille voir un film français à la séance suivante est égale à $0,75$.

Un lundi soir, un film français est projeté dans chacune des deux salles. Puis les semaines suivantes, le ciné-club propose dans une salle un film français et dans l'autre un film étranger.

On cherche à étudier l'évolution de la répartition des spectateurs entre les deux salles au cours des semaines suivantes, à partir de ce lundi.

1. On note A l'état : « le spectateur voit un film français ». On note B l'état « le spectateur voit un film étranger ».

   a. Représenter la situation ci-dessous par un graphe probabiliste.

   b. On note M la matrice de transition de ce graphe en considérant les états dans l'ordre alphabétique. Justifier que $M = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}75 & 0{,}25 \end{pmatrix}$.
2. Soit A_n l'événement : « Le spectateur voit un film français à la n^{e} séance » et B_n l'événement : « Le spectateur voit un film étranger à la n^{e} séance ».

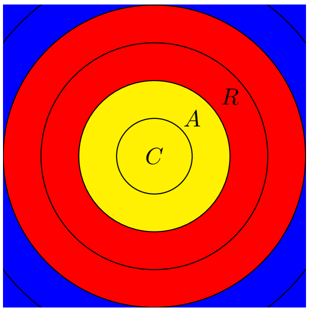
   a. Préciser l'état probabiliste initial.

   b. Déterminer les matrices T_2 et T_3. En donner une interprétation en termes de répartition des abonnés dans les deux salles.

3. Déterminer la valeur arrondie au centième des réels x et y définissant l'état stable $T = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ vers lequel converge la suite (T_n). Interpréter le résultat.

5 Un archer participe aux compétitions internationales. À ce niveau, on estime qu'il n'atteint que trois zones sur le blason :

- la zone or centrale C à 10 points ;
- l'anneau or A à 9 points ;
- le premier anneau de la zone rouge R à 8 points.



Pour cet archer :

- s'il atteint la zone C un tir donné, il atteint la zone C au tir suivant avec la probabilité de $0,7$, la zone A avec la probabilité de $0,15$.
- s'il atteint la zone A un tir donné, il atteint la zone C avec la probabilité de $0,7$, la zone A avec la probabilité de $0,2$.
- s'il atteint la zone R un tir donné, il atteint la zone C au tir suivant avec la probabilité de $0,85$, la zone A avec la probabilité de $0,1$.

En ce jour de compétition, lors de son premier tir, l'archer atteint la zone A.

On note $E_n = \begin{pmatrix} c_n & a_n & r_n \end{pmatrix}$ la matrice-ligne traduisant la probabilité que l'archer atteigne chacune des zons précitées lors du n^{e} tir ((n entier naturel non nul).

1. Préciser E_1.

2. Construire un graphe probabilisite traduisant la situation proposée.

3. Donner la matrice de transisition M associée à ce graphe probabiliste. On prendra les sommets C, A et R dans cet ordre.

4. Déterminer par le caclul la matrice E_2. Intepréter les résultats obtenus.

5. **a.** À l'aide de la calculatrice, déterminer les matrices E_3, E_5 et E_{10}. On arrondira les résultats à 4 décimales. Que remarque-t-on ?

b. La remarque précédente est-elle modifiée si le tir initial atteint la zone C ? La zone R ?

6. On admet que la situation proposée évolue vers un état stable $P = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$ avec $x + y + z = 1$.

a. Montrer que la traduction de l'état stable conduit au système :

$$\begin{cases} 11x - 150z = 0 \\ 22y - 59z = 0 \end{cases}.$$

b. Résoudre le système :

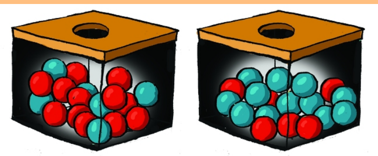
$$\begin{cases} 11x - 150z = 0 \\ 22y - 59z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}.$$

c. En déduire l'état stable et interpréter les résultats obtenus.

LEÇON

2

Expérience aléatoire, probabilité, probabilité conditionnelle



Niveau : Lycée
Prérequis : théorie des ensembles

1 Expérience aléatoire, événements

1.1 Expérience aléatoire

Définition 2.1

Expérience aléatoire
On dit qu'on fait une expérience de type *aléatoire* si on ne peut pas prévoir le résultat final de cette expérience.

Exemples 2.2.

1. On lance une pièce et on observe le côté exposé (pile ou face). Il y a deux issues possibles sur cette expérience.
2. On dispose d'une urne avec 100 boules, on tire une d'entre elles et on note le numéro. Cette expérience aléatoire a 100 issues possibles.

Définition 2.3

Univers
L'ensemble de toutes les issues d'une expérience aléatoire est appelé *univers*. On note généralement cet ensemble Ω.

Remarque 2.4. Dans cette leçon, on se limitera au cas où Ω est un ensemble fini.

Exemple 2.5. On reprend les expériences de l'exemple précédent.

1. Si on lance une pièce de monnaie, on obtient $\Omega = \{P, F\}$.
2. Si on tire une boule numérotée dans une urne où il en contient 100 alors $\Omega = \{1, 2, \dots, 100\}$.

1.2 Evénement associé à une expérience aléatoire

Dans ce qui suit, nous allons décrire ce qu'est un événement :

Définition 2.6

Vocabulaire des événements

- Un *événement élémentaire* (qu'on note ω) est ce qui constitue l'une des issues de la situation étudiée (un élément de Ω).
- Un *événement* est un ensemble de plusieurs issues.
- L'événement « A *et* B » (qu'on note $A \cap B$) est l'événement constitué des issues communes aux deux événements.
- L'événement « A *ou* B » (qu'on note $A \cup B$) est l'événement constitué des toutes les issues des deux événements.
- Deux événements *incompatibles* A et B (qu'on note $A \cap B = \emptyset$) sont deux événements qui n'ont pas d'éléments en commun.
- L'événement est dit *contraire* de A (qu'on note $\overline{A}$) si A et $\overline{A}$ sont incompatibles et $A \cup \overline{A}$ forme la totalité des issues.

Exemples 2.7.

1. Obtenir un 7 est un événement élémentaire : $\omega = \{7\}$.
2. Obtenir un nombre pair est un événement :
$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}\,.$$
3. Obtenir un multiple de trois est un événement :
$$B = \{3, 6, 9, 12\}\,.$$

4. $A \cap B = \{6, 12\}$.
5. $A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$.
6. Si
$$C = \{10, 11, 12\}$$
et
$$D = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$
alors $C \cap D = \emptyset$ donc C et D sont incompatibles.
7. Ici, $\overline{A}$ représente l'événement « obtenir une somme impaire ». On a alors :
   - $A \cap \overline{A} = \emptyset$,
   - $A \cup \overline{A} = \Omega$.

2 Probabilités

2 1 Loi de probabilités sur un univers Ω

Définition 2.8

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. Définir une loi de probabilité P sur Ω, c'est associer, à chaque événement élémentaire ω_i, des nombres $p_i \in [0\,,1]$ tels que :

$$\sum_i p_i = 1.$$

On appelle les nombres p_i, les *probabilités* (qu'on peut noter $p_i = P(\omega_i)$).

Proposition 2.9

Principe fondamental
La probabilité $P(E)$ d'un événement E est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

Corollaire 2.10

$P(\Omega) = 1$

Développement

Démonstration du corollaire 2.10.

$$P(\Omega) = P(\bigcup_i \omega_i) = \sum_i P(\omega_i) = \sum_i \frac{1}{n} = 1.$$

□

Exemple 2.11. On se donne les probabilités d'apparition des faces d'un dé truqué :

Issue ω	1	2	3	4	5	6
Probabilités $P(\omega)$	0,05	0,05	0,1	0,1	0,2	inconnue

Développement

1. On veut calculer la probabilité de l'événement

$$A = \text{« obtenir un résultat inférieur ou égal à 4 »}.$$

D'après le principe,
$$P(A) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = 0{,}05 + 0{,}05 + 0{,}1 + 0{,}1.$$

2. On veut calculer la probabilité d'obtenir 6. Le corollaire 2.10 nous donne :

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

donc $P(6) = 0{,}5$.

Définition 2.12

Autre définition

Soit Ω un univers et $\mathcal{P}(\Omega) = \mathcal{A}$ l'ensemble des parties de Ω (c'est-à-dire l'ensemble de tous les événements associé à cette expérience aléatoire). On appelle *probabilité* P toute application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}_+$ qui vérifie :

1. $P(\Omega) = 1$
2. Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $I \subset \mathbb{N}$ une famille d'événements de $\mathcal{P}(\Omega)$ deux à deux disjoints (si $i \neq j$ alors $A_i \cap A_j = \emptyset$) alors :
$$P\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} P(A_i).$$

2.2 Propriétés de calcul de probabilités

Propriétés 2.13

Soient $A, B \subset \Omega$. Alors :

1. $P(\emptyset) = 0$
2. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
3. $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$
4. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Développement

Démonstration.

1. On applique la propriété 2 de la définition 2.12 à A et $\emptyset$ (ils sont disjoints car $A \cap \emptyset = \emptyset$) d'où
$$P(A \cup \emptyset) = P(A) + P(\emptyset) \Leftrightarrow P(A) = P(A) + P(\emptyset)$$
et donc on en déduit que $P(\emptyset) = 0$.
2. Comme $A \cap \overline{A} = \emptyset$ et $A \cup \overline{A} = \Omega$, on a :
$$P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) \Leftrightarrow P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A}).$$
Or $P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = 1$ d'où $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.
3. On a : $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$, de plus $(A \setminus B)$ et $A \cap B$ sont disjoints donc on peut appliquer la définition :
$$P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B).$$
4. $A \subset B$ implique que $B = (B \cap A) \cup A$ donc
$$P(B) = P(B \setminus A) + P(A) \leq P(A).$$
5. On a :
$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$$
2 à 2 disjoints donc :
$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \setminus B) + P(A \cap B) + P(B \setminus A) \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B). \end{aligned}$$

□

2.3 Équiprobabilité

Définition 2.14

Équiprobabilité

Si tous les éléments de Ω (l'univers d'une expérience aléatoire) ont la même propriété d'apparition alors Ω est dit *équiprobable*. Si $\Omega = \{a_1, \ldots, a_n\}$ alors :

$$P(\{a_i\}) = \frac{1}{n}, \quad \forall a_i \in \Omega.$$

Propriété 2.15

Si Ω est équiprobable, la probabilité d'un événement $A \subset \Omega$ contenant n_A éléments est :

$$P(A) = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n_A \text{ fois}} = \frac{n_A}{n} = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}.$$

Exemples 2.16. On lance un dé (non truqué) ; $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. On est dans le cas d'une équiprobabilité. Développement

1. La probabilité d'avoir un 5 est $P(5) = 1/6$ (5 est un événement élémentaire)
2. La probabilité d'obtenir un nombre pair est :

$$P(\text{« obtention d'un nombre pair »}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

3 Probabilités conditionnelles

3.1 Un exemple pour débuter

Exemple 2.17. On considère une population de 500 individus parmi lesquels il y a 180 femmes et 90 des 500 individus ont l'allèle du daltonisme. On choisit un individu au hasard dans cette population (c'est une expérience aléatoire). On note :

$$F = \text{« l'individu choisi est une femme »}$$
$$D = \text{« l'individu choisi possède l'allèle du daltonisme ».}$$

Développement

L'univers Ω est l'ensemble des individus, il est *équiprobable*. Chaque individu a la même probabilité d'être choisi $\frac{1}{500}$. Donc,

$$P(D) = \frac{\text{card}(D)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{90}{500} = 0{,}18.$$

Maintenant, on se restreint à la *sous-population des femmes*. On sait que 9 femmes possèdent l'allèle du daltonisme. L'univers Ω' est l'ensemble des femmes F. Il est équiprobable. Chaque femme a $\frac{1}{180}$ chance d'être choisie.

On cherche la probabilité qu'une femme choisie au hasard possède l'allèle du daltonisme :

$$\frac{\text{card}(D \cap F)}{\text{card}(\Omega')} = \frac{9}{180} = 0{,}05.$$

On note cette probabilité :

$$P_F(D) = \frac{\text{card}(D \cap F)}{\text{card}(F)} = \frac{P(D \cap F)}{P(F)}.$$

3.2 Probabilité conditionnelle

Définition 2.18

Soit F un événement de probabilité *strictement positive* (c'est-à-dire $F \subset \Omega$ et $P(F) > 0$). On appelle *probabilité conditionnelle* à F, l'application $P_F(\cdot)$ de l'ensemble des événements $(\mathcal{P}(\Omega))$ dans $[0\,,1]$ telle que :

$$\begin{array}{rcccl} P_F & : & \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0\,,1] \\ & & A & \mapsto & P_F(A) = \frac{P(A\cap F)}{P(F)} \end{array}.$$

Proposition 2.19

L'application $P_F(\cdot)$ est une probabilité.

Développement

Démonstration de la proposition 2.19. On vérifie que $P_F(\cdot)$ prend ses valeurs dans $[0\,,1]$. Si $A\cap F \subset F$ alors $P(A\cap F) \leq P(F)$ et ainsi :

$$\frac{P(A\cap F)}{P(F)} = P_F(A) \leq 1$$

et $P_F(A) \geq 0$ comme quotient de deux probabilités. On vérifie la propriété 1 de la définition 2.12 :

$$P_F(\Omega) = \frac{P(\Omega\cap F)}{P(F)} = \frac{P(F)}{P(F)} = 1.$$

On vérifie ensuite la propriété 2 de la définition 2.12. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements dans Ω deux à deux disjoints.

$$P_F\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \frac{P((\bigcup_{i\in I} A_i)\cap F)}{P(F)} = \frac{P(\bigcup_{i\in I}(A_i\cap F))}{P(F)}.$$

Mais $A_i \cap F \subset A_i$ donc tous les $(A_i \cap F)$ sont disjoints 2 à 2 et :

$$P_F\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \frac{\sum_{i\in I} P(A_i\cap F)}{P(F)} = \sum_{i\in I}\frac{P(A_i\cap F)}{P(F)} = \sum_{i\in I} P_F(A_i).$$

□

Propriété 2.20

Probabilités composées

Soit Ω un univers, F et A deux événements tel que $P(F) > 0$. Alors,

$$P(A\cap F) = P_F(A)\times P(F) = P_A(F)\times P(A)$$

3.3 Formule des probabilités totales et de Bayes

Propriété 2.21

Formule des propriétés totales

Soit $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ une partition de Ω d'événements non vides. Soit $A \subset \Omega$. Alors :

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P_{E_i}(A)\times P(E_i).$$

Exemple 2.22. On considère deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient 6 boules rouges et 4 boules vertes et l'urne U_2 contient 7 boules vertes et 3 boules rouges. On lance un dé. S'il indique le chiffre 1, on choisit l'urne U_1 sinon on choisit l'urne U_2. On effectue ensuite deux tirages avec remise. On cherche la probabilité d'avoir tiré deux rouges en tout. On note :

$$R = \{\text{rouge au } 1^{\text{er}} \text{ tirage}\}, \quad R' = \{\text{rouge au } 2^{\text{e}} \text{ tirage}\}$$

$$H_1 = \{\text{choix de l'urne } U_1\}, \quad H_2 = \overline{H}_1 = \{\text{choix de l'urne } H_2\}.$$

On a ainsi :

$$P_{H_1}(R) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, \quad P_{H_1}(R \cap R') = \left(\frac{3}{5}\right)^2.$$

$$P_{H_2}(R) = \frac{3}{10}, \quad P_{H_2}(R \cap R') = \left(\frac{3}{10}\right)^2.$$

La formule de conditionnement donne :

$$\begin{aligned} P(R) &= P_{H_1}(R)P(H_1) + P_{H_2}(R)P(H_2) \\ &= \frac{1}{6}\frac{3}{5} + \frac{5}{6}\frac{3}{10} = \frac{1}{10} + \frac{1}{4} = \frac{4+10}{40} = \frac{7}{20}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P(R \cap R') &= P_{H_1}(R \cap R')P(H_1) + P_{H_2}(R \cap R')P(H_2) \\ &= \frac{1}{6}\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{5}{6}\left(\frac{3}{10}\right)^2 = \frac{27}{200}. \end{aligned}$$

Propriété 2.23

Formule de Bayes

Soit $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ une partition de Ω d'événements non vides. Soit $A \subset \Omega$. Alors :

$$P_A(E_i) = \frac{P_{E_i}(A) \times P(E_i)}{\sum_{i=1}^n P_{E_i}(A) \times P(E_i)}.$$

Exemple 2.24. Un test sanguin a une probabilité de 0,95 de détecter un certain virus lorsque celui-ci est effectivement présent. Il donne néanmoins un faux résultat positif pour 1% des personnes non infectées. On cherche la probabilité ait le virus sachant qu'elle est positif (et on sait que 0,5% de la population est porteuse du virus). On note :

$$\begin{aligned} V &= \{\text{la personne testée a le virus}\}, \\ T &= \{\text{la personne testée a un test positif}\}. \end{aligned}$$

On cherche $P_T(V)$. Or, on sait que :

$$P(V) = 0{,}005, \quad P_V(T) = 0{,}95, \quad P_{\overline{V}}(T) = 0{,}01.$$

On en déduit par la formule de Bayes,

$$\begin{aligned} P_T(V) &= \frac{P(T \cap V)}{P(T)} = \frac{P_V(T)P(V)}{P_V(T)P(V) + P_{\overline{V}}(T)P(\overline{V})} \\ &= \frac{0{,}95 \times 0{,}005}{0{,}95 \times 0{,}005 + 0{,}01 \times 0{,}995} \simeq 0{,}323. \end{aligned}$$

3 4 Indépendance

Définition 2.25

Indépendance de deux événements

Deux événements E et F sont indépendants si :

$$P(E \cap F) = P(E) \times P(F).$$

Remarque 2.26. D'après la propriété des probabilités composées, $P(E) = P_F(E)$ (si $P(F) > 0$). Ce résultat correspond à l'idée intuitive que si E et F sont *indépendants* alors la réalisation de F n'apporte pas d'information sur E.

Exemple 2.27. On jette deux fois le même dé. Les événements

$$A = \{\text{obtention d'un chiffre pair au premier lancer}\},$$
$$B = \{\text{obtention du 1 au deuxième lancer}\},$$

sont indépendants. En effet, en prenant $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$ et si on fait l'hypothèse de l'équiprobabilité dans Ω (P équiprobable), on vérifie que :

$$P(A) = \frac{3 \times 6}{36} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{6 \times 1}{36} = \frac{1}{6}.$$
$$P(A \cap B) = \frac{3 \times 1}{36} = \frac{1}{12}, \quad P(A)P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

3.5 Schéma de Bernoulli

Définition 2.28

Toute expérience aléatoire conduisant à deux issues possibles S (Succès) et $\overline{S}$ (Echec) est appelée *épreuve de Bernoulli*.

Exemple 2.29. Si on appelle Succès lors d'un lancé d'un dé, l'événement noté :

$$S = \text{« Le six sort »}.$$

Le lancer du dé peut alors être considéré comme une épreuve de Bernoulli avec

- $S = \{6\}$ et $p = P(S) = 1/6$.
- $\overline{S} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ avec $q = 1 - p = 5/6$.

Définition 2.30

Schéma de Bernoulli

Si on répète n fois et de façon indépendante une épreuve de Bernoulli, on obtient un *schéma de Bernoulli*.

Propriété 2.31

Soit $0 \leq k \leq n$,

$$P(\text{« obtenir } k \text{ succès »}) = \mathrm{C}_n^p p^k q^{n-k}.$$

Exemple 2.32. On lance 3 fois une pièce et on dit qu'on fait « succès » si la pièce tombe sur pile. On cherche la probabilité de faire 2 succès.

$$P(\text{« obtenir 2 succès »}) = \mathrm{C}_3^2 \frac{1}{4}\frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$$

LEÇON

3

Variables aléatoires discrètes

Niveau : Terminale S
Prérequis : probabilités

1 Loi de probabilités. Fonction de répartition

Exemple 3.1. On tire au hasard une boule dans une urne. Cette urne contient une boule rouge R, une verte V, une bleue B. On remet la boule dans l'urne et on effectue un deuxième tirage. On suppose qu'il y a équiprobabilité dans les deux tirages. Soit

$$\Omega = \{(R,R),(R,V),(R,B),(V,R),(V,V),(V,B),(B,B),(B,R),(B,V)\}.$$

Il y a neuf événements élémentaires. Il y a équiprobabilité, donc la probabilité de chaque événement élémentaire est $p = \frac{1}{9}$. La probabilité de tirer au moins une boule verte est :

$$q = \frac{5}{9}.$$

On fixe la règle suivante : « Si on tire une boule

- rouge, on gagne 6 euros,
- verte, on gagne 1 euro,
- bleue, on perd 4 euros. »

On définit ainsi une application de Ω dans $\mathbb{R}$, cette application est appelée *variable aléatoire*. Voici les gains et perte du jeu :

Tirage 1	Tirage 2	Ω	Gain (en euros)
R	R	(R,R)	12
R	V	(R,V)	7
R	B	(R,B)	2
V	R	(V,R)	7
V	V	(V,V)	2
V	B	(V,B)	-3
B	R	(B,R)	2
B	V	(B,V)	-3
B	B	(B,B)	-8

Définition 3.2

Lorsque qu'à chaque événement élémentaire ω d'un univers Ω, on associe un nombre réel, on dit que l'on définit une *variable aléatoire (réelle)*. Une variable est donc une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Elle est dite *discrète* si $\Omega \subset \mathbb{N}$.

Exemple 3.3. On lance trois fois une pièce non truqué et on compte le nombre de fois où on obtient « Face ». On définit ainsi une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$ avec :

$$\Omega = \{PPP, PPF, PFP, FPP, PFF, FPF, FFP, FFF\}$$

et

$$X(PPP) = 0,\ X(PPF) = 1,\ X(PFP) = 1,\ X(FPP) = 1$$

$$X(FFP) = 2,\ X(FPF) = 2,\ X(PFF) = 2,\ X(FFF) = 3.$$

Définition 3.4

Loi de probabilité

Soit P une probabilité sur un univers Ω. Soit X une variable aléatoire définie sur Ω telle que $X(\Omega)$ soit fini de cardinal n. Lorsqu'à chaque valeur x_i ($1 \leq i \leq n$) de X on associe les probabilités p_i de l'événement « $X = x_i$ », on dit que l'on définit *une loi de probabilité* P_X de la variable aléatoire X.

Exemple 3.5. Dans l'exemple précédent, on a équiprobabilité de Ω (la probabilité d'obtenir un des événements élémentaires étant de $\frac{1}{8}$). La probabilité d'obtenir 2 fois le côté face de la pièce est de :

$$P_X(2) = P(X = 2) = \frac{3}{8}.$$

Définition 3.6

Fonction de répartition

La *fonction de répartition* de la variable aléatoire X est la fonction F telle que :

$$\begin{array}{rccl} F & : \mathbb{R} & \to & [0\,,1] \\ & x & \mapsto & F(x) = P(X \leq x) \end{array}.$$

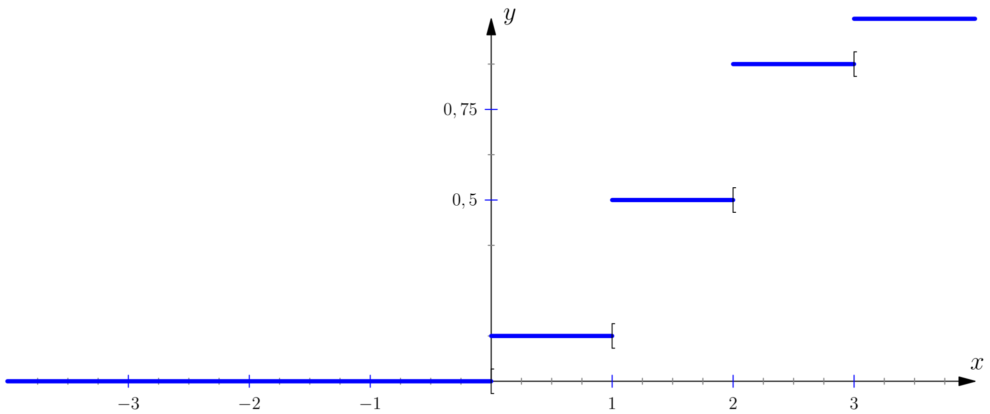
Propriété 3.7

La fonction de répartition est toujours une fonction croissante et bornée par 0 et 1.

Exemple 3.8. Avec l'exemple précédent, on a :

- Pour $x \in]-\infty\,,0[$, on a :
$$F(x) = 0$$
- Pour $x \in]0\,,1]$, on a :
$$F(x) = \frac{1}{8}$$
- Pour $x \in]1\,,2]$, on a :
$$F(x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$$
- Pour $x \in]2\,,3]$, on a :
$$F(x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$
- Pour $x \in]3\,,4]$, on a :
$$F(x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1.$$

Voici la représentation graphique :



Définition 3.9

Espérance mathématique

Soient Ω l'univers correspondant à une expérience aléatoire, P une probabilité sur Ω et X une variable aléatoire sur Ω telle que $X(\Omega)$ soit fini [a]. On note $\{x_1, \ldots, x_n\}$ l'ensemble $X(\Omega)$ (c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises par X. *L'espérance mathématique* de la variable aléatoire X est le nombre, noté $\mathbf{E}(X)$, défini par :

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n$$

où $p_i = P(X = x_i)$.

a. Si $X(\Omega)$ est infini dénombrable, l'espérance existe encore sous réserve de la convergence (absolue) de la série de terme général $x_n p_n$.

Remarque 3.10. L'espérance est la moyenne des valeurs x_i pondérées par les probabilités p_i.

Exemple 3.11. On reprend l'exemple de la pièce de monnaie. On a :

$$\mathbf{E}(X) = \frac{1}{8} \times 0 + \frac{3}{8} \times 1 + \frac{3}{8} \times 2 + \frac{1}{8} \times 3 = \frac{3}{2}.$$

Remarque 3.12. On pourrait aussi calculer l'espérance $\mathbf{E}(X)$ en revenant aux événements élémentaires de l'univers Ω au lieu d'utiliser les valeurs x_i de la variable aléatoire X :

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) X(\omega).$$

Exemple 3.13. Suite à la remarque 3.12

Sur l'exemple précédent, comme $P(\omega) = \frac{1}{8}$, cela donnerait :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X) &= \frac{1}{8} \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \\
&= \frac{1}{8}[X(PPP) + X(PPF) + X(PFP) + X(FPP) \\
&\qquad + X(PFF) + X(FPF) + X(FFP) + X(FFF)] \\
&= \frac{1}{8}(0 + 1 + 1 + 2 + 1 + 2 + 2 + 3) = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Théorème 3.14

Linéarité de l'espérance

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même univers Ω de cardinal fini. Soit P une probabilité sur Ω. On a :

$$\mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y).$$

En particulier, si b est un réel :

$$\mathbf{E}(X + b) = \mathbf{E}(X) + b$$

et pour tout réel k,

$$\mathbf{E}(kX) = k\mathbf{E}(X).$$

Développement

Démonstration du théorème 3.14. On a :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X+Y) &= \sum_{\omega\in\Omega}(X+Y)(\omega)P(\omega)\\ &= \sum_{\omega\in\Omega}X(\omega)P(\omega)+\sum_{\omega\in\Omega}Y(\omega)P(\omega)=\mathbf{E}(X)+\mathbf{E}(Y).\end{aligned}$$

En prenant Y constante égale à b, on obtient :

$$\mathbf{E}(X+b)=\mathbf{E}(X)+\mathbf{E}(b)=\mathbf{E}(X)+b.$$

De plus,

$$\mathbf{E}(kX)=\sum_{i=1}^{n}kp_ix_i=k\sum_{i=1}^{n}p_ix_i=k\mathbf{E}(X).$$

□

3 Variance et écart-type

Définition 3.15

Variance et écart-type

Soient Ω l'univers correspondant à une expérience aléatoire, P une probabilité sur Ω et X une variable aléatoire sur Ω telle que $X(\Omega)$ soit fini. On note $\{x_1,\dots,x_n\}$ l'ensemble $X(\Omega)$ (c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises par X).

– La *variance* de la variable aléatoire X est le nombre, notée $\mathrm{Var}(X)$, défini par :

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X)=\mathbf{E}((X-\mathbf{E}(X))^2) &= \sum_{i=1}^{n}p_i(x_i-\mathbf{E}(X))^2\\ &= p_1(x_1-\mathbf{E}(X))^2+\cdots+p_n(x_n-\mathbf{E}(X))^2.\end{aligned}$$

– L'*écart-type* de la variable aléatoire X est le nombre, noté $\sigma(X)$ défini par :

$$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{Var}(X)}.$$

Remarques 3.16.

1. La variance est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.
2. La variance est une quantité positive, donc l'écart-type est bien défini.

Exemple 3.17. Sur le problème du comptage du côté face, on calcule la variance de X :

$$\mathrm{Var}(X)=\frac{1}{8}\left(0-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{3}{8}\left(1-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{8}\left(2-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{8}\left(3-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}.$$

D'où :

$$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{Var}(X)}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exemple 3.18. Montrer que l'espérance $\mathbf{E}(X)$ minimise la fonction f définie par $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}p_i(x_i-x)^2$$

mais pas la fonction g définie par :

$$g(x)=\sum_{i=1}^{n}p_i\left|x_i-x\right|.$$

Développement

Réponse à l'exercice ??. La fonction f est dérivable comme somme de fonctions dérivables et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = -2\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - x) = -2\sum_{i=1}^{n} p_i x_i - 2x\sum_{i=1}^{n} p_i = -2(\mathbf{E}(X) - x).$$

On en déduit :

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \mathbf{E}(X).$$

Donc f admet un minimum en $\mathbf{E}(X)$ (et ce minimum est $f(\mathbf{E}(X)) = \operatorname{Var}(X)$. L'espérance est donc la quantité qui minimise la moyenne des carrés des écarts. Par contre, elle ne minimise ps la moyenne des écarts. En effet, on considère la variable aléatoire X définie par la loi suivante :

x_i	0	1000
p_i	0,9	0,1

On a :

$$\mathbf{E}(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 = 1000$$

$$g(\mathbf{E}(X)) = p_1 |x_1 - 1000| + p_2 |x_2 - 1000| = 90 + 90 = 180.$$

Or :

$$g(0) = \mathbf{E}(X) = 100.$$

Donc : $g(0) < g(\mathbf{E}(X))$. Conclusion : $\mathbf{E}(X)$ ne minimise pas la fonction g et on peut montrer que la médiane est ce minimum. $\square$

Théorème 3.19

Formule de Koenig

La variance d'une variable aléatoire X peut se calculer avec la relation suivante :

$$\operatorname{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - [\mathbf{E}(X)]^2.$$

La variance est l'écart entre la moyenne des carrés et le carré de la moyenne.

Développement

Démonstration de la formule de Koeing. On rappelle que l'espérance d'une variable aléatoire constante $X = b$ est égale à la constante b. D'après la linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(X) &= \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))^2) = \mathbf{E}(X^2 - 2X\mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(X)^2) \\ &= \mathbf{E}(X^2) - 2\mathbf{E}(X)\mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(X)^2\mathbf{E}(1)\end{aligned}$$

D'où $\operatorname{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - [\mathbf{E}(X)]^2$. $\square$

Exemple 3.20. On reprend l'exemple de la pièce de monnaie lancée trois fois de suite. On rappelle que X est le nombre de « face » obtenu. On a déjà calculé $\mathbf{E}(X)$, on calcule $\mathbf{E}(X^2)$:

$$\mathbf{E}(X^2) = \frac{1}{8} \times 0^2 + \frac{3}{8} \times 1^2 + \frac{3}{8} \times 2^2 + \frac{1}{8} \times 3^2 = 3.$$

D'où :

$$\operatorname{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - [\mathbf{E}(X)]^2 = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}.$$

Corollaire 3.21

Effet d'un changement affine sur la variance et l'écart-type

Soit X une variable aléatoire. Soient a et b deux réels. On :

$$\operatorname{Var}(aX + b) = a^2 \operatorname{Var}(X) \quad \text{et} \quad \sigma(aX + b) = |a|\,\sigma(X).$$

En particulier :

$$\operatorname{Var}(aX) = a^2 \operatorname{Var}(X) \quad \text{et} \quad \sigma(aX) = |a|\,\sigma(X)$$

et

$$\operatorname{Var}(X + b) = \operatorname{Var}(X) \quad \text{et} \quad \sigma(X + b) = \sigma(X).$$

Démonstration du corollaire 3.21. D'après la formule de Koeing, on a :

$$\mathrm{Var}(aX+b) = \mathbf{E}(a^2X^2 + 2abX + b^2) - [\mathbf{E}(aX+b)]^2$$

et d'après la linéarité de l'espérance,

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(aX+b) &= a^2\mathbf{E}(X^2) + 2ab\mathbf{E}(X) + b^2 - [a\mathbf{E}(X)+b]^2 \\ &= a^2\mathbf{E}(X^2) + 2ab\mathbf{E}(X) + b^2 - a^2[\mathbf{E}(X)]^2 - 2ab\mathbf{E}(X) - b^2 = a^2\,\mathrm{Var}(X).\end{aligned}$$

D'où, par passage à la racine carrée :

$$\sigma(aX+b) = |a|\,\sigma(X).$$

Pour montrer la particularisation, il faut remplacer dans chaque formule $b=0$ et $a=1$ (selon le cas que l'on veut démonter). □

4 Exemples de variables aléatoires discrètes

4.1 Loi de Bernouilli

Définition 3.22

Une *expérience de Bernouilli* est une expérience qui n'a que deux issues possibles, l'une appelée « succès » qui a pour probabilité p, l'autre appelée « échec » qui a pour probabilité $q = 1-p$.

Définir une *loi de Bernouilli de paramètre* p, c'est associer une loi de probabilité discrète à cette expérience aléatoire en faisant correspondre la valeur 1 à l'apparition d'un succès et 0 à celle d'un échec.

x_i	1	0
$P(X=x_i)$	p	$1-p$

Exemple 3.23. Si on lance un dé et qu'on nomme « succès » l'apparition de la face 6, on définit la loi de Bernouilli suivante :

x_i	1	0
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

Propriété 3.24

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, alors :
- L'espérance de X vaut $\mathbf{E}(X) = p$.
- La variance de X vaut $\mathrm{Var}(X) = pq$.

Exemple 3.25. Dans l'exemple précédent, on obtient $\mathbf{E}(X) = \frac{1}{6}$ et $\mathrm{Var}(X) = \frac{5}{36}$.

4.2 Loi binomiale

Définition 3.26

Loi binomiale

La *loi binomiale de paramètres* n *et* p, notée $\mathrm{Bin}(n,p)$ est la loi de probabilité du nombre de succès dans la répartition de n expériences de Bernouilli de paramètres p identiques et indépendantes. Elle est définie par :

$$P(X=k) = \mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k}, \quad \forall 0 \le k \le n.$$

Exemple 3.27. On lance 2 fois un dé bien équilibré. On s'interesse à l'appartion de la face 6. Chaque lancer est une expérience de Bernouilli de paramètres $\frac{1}{6}$. On obtient donc une loi binomiale $\mathrm{Bin}(2, 1/6)$.

nombre de succès	0	1	2
probabilité	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

Propriété 3.28

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\text{Bin}(n, p)$ alors :
- L'espérance de X vaut $\mathbf{E}(X) = np$.
- La variance de X vaut $\text{Var}(X) = npq$.

Exemple 3.29. Dans l'exemple précédent, on obtient $\mathbf{E}(X) = \frac{1}{3}$ et $\text{Var}(X) = \frac{5}{18}$.

4.3 Loi de Poisson

La loi de Poisson modélise des situations où l'on s'interesse au nombre d'occurrences d'un événement dans un laps de temps déterminé ou dans une région donnée. Par exemple :
- nombre d'appels téléphoniques qui arrivent à un standard en x minutes,
- nombre de clients qui attendent à la caisse d'un magasin,
- nombre de défauts de peinture par m^2 sur la carroserie d'un véhicule...

Définition 3.30

La variable aléatoire X suit une *loi de Poisson de paramètre* λ, notée $\text{Pois}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ lorsque sa loi de probabilité vérifie :

$$P(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

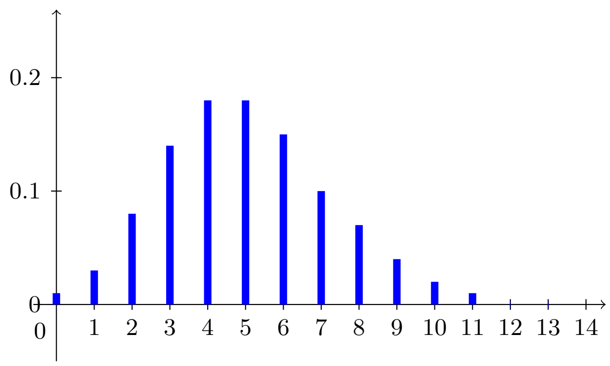
Exemple 3.31. On considère la variable aléatoire X mesurant le nombre de clients se présentant au guichet 1 d'un bureau de poste par intervalle de temps de durée 10 minutes entre 14h30 et 16h30. On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 5$.

Développement

- Pour $\lambda = 5$, la table de la loi de Poisson nous donne :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$P(X = k)$	$0,007$	$0,034$	$0,084$	$0,140$	$0,176$	$0,176$	$0,146$	$0,104$	$0,065$	$0,036$	$0,018$	$0,008$	$0,003$	$0,001$	$0,000$

- On peut aussi représenter graphiquement la loi $\text{Pois}(5)$:



- La probabilité qu'entre 14h30 et 14h40, 10 personnes exactement se présentent à ce guichet vaut :

$$P(X = 10) = 0,018.$$

- La probabilité qu'entre 15h20 et 15h30, au maximum 3 personnes se présentent à ce guichet vaut :

$$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0,265.$$

- La probabilité qu'entre 16h00 et 16h10, 8 personnes au moins se présentent à ce guichet vaut :

$$P(X \geq 8) = 1 - P(X < 8) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + \cdots + P(X = 8)] = 1 - 0,867 = 0,133.$$

Propriété 3.32

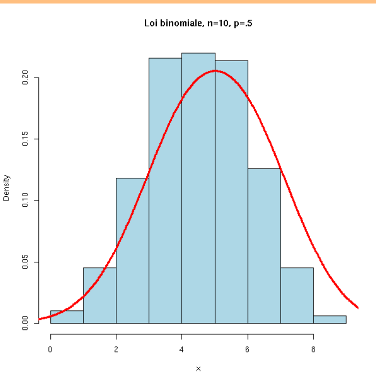
Soit X une variable aléatorie suivant une loi de Poisson de paramètre λ, alors l'espérance et la variance sont égales et valent $\mathbf{E}(X) = \mathrm{Var}(X) = \lambda$.

Exemple 3.33. Dans l'exemple précédent, on obtient $\mathbf{E}(X) = \mathrm{Var}(X) = 5$.

LEÇON

4

Loi binomiale



Niveau : Première S + SUP (Convergence)

Prérequis : Variable aléatoire, espérance, variance, théorème limite central, loi de Poisson

1 Loi de Bernoulli

Définition 4.1

Loi de Bernoulli

Soit $\mathcal{E}$ une épreuve comportant deux issues (succès et échec). On note p la probabilité de succès. Soit X la variable aléatoire qui est égal à 1 en cas de succès et 0 sinon. Alors, on dit que X suit un loi de Bernoulli de paramètres p. On note alors $X \sim \mathrm{Bern}(p)$.

Remarque 4.2. Si $X \sim \mathrm{Bern}(p)$, on notera :

$$P(X=1)=p \quad \text{et} \quad P(X=0)=1-p=q.$$

Exemple 4.3. On lance un dé non pipé. On note X la variable aléatoire qui prend comm valeur 1 si la face 6 apparait lors du lancer et 0 sinon.

La variable aléatoire X est une variable aléatoire qu isuit la loi de Bernoulli de paramètres $1/6$. Donc $X \sim \mathrm{Bern}(1/6)$.

Lemme 4.4

Si $X \sim \mathrm{Bern}(p)$ alors $X^2 \sim \mathrm{Bern}(p)$.

Développement

Démonstration. On a $X^2(\Omega) = \{0,1\}$ et :

$$P(X^2=1)=P(X=1)=p$$

donc $X^2 \sim \mathrm{Bern}(p)$. □

Proposition 4.5

Si $X \sim \mathrm{Bern}(p)$ alors :

a. $\mathbf{E}(X)=p$

b. $\mathrm{Var}(X)=pq$.

Développement

Démonstration. On a :

$$\mathbf{E}(X)=P(X=0)\times 0+P(X=1)\times 1=q\times 0+p\times 1=p,$$

et :

$$\mathrm{Var}(X)=\mathbf{E}(X^2)-\mathbf{E}(X)^2=\mathbf{E}(X^2)-p^2$$

or $X^2 \sim \mathrm{Bern}(p)$, donc on a : $\mathbf{E}(X^2)=\mathbf{E}(X)=p$.
Ainsi, $\mathrm{Var}(X)=p-p^2=pq$. □

Définition 4.6

Loi binomiale

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire. Soit X une variable aléatoire définie sur Ω. On dit que X suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0\,,1]$ lorsque :

a. $X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$;

b. pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p alors on note $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$.

Remarque 4.7. Soit $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$. On a bien défini une variable aléatoire car :

$$\sum_{k=0}^{n} P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n'k}{p}^k q^{n-k} = [p + (1-p)]^n = 1.$$

Théorème 4.8

Soit $\mathcal{E}$ une épreuve comportant deux issues (succès et échec). On note p la probabilité de succès. On note n fois, de façons indépendantes, l'épreuve $\mathcal{E}$. Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de succès. Alors : X suit une loi binomiale de paramètres n et p.

Développement

Démonstration. La probabilité d'avoir k succès suivis de $n-k$ succès suivis de $n-k$ échecs est : $p^k(1-p)^{n-k}$. Mais les succès et les échecs n'apparaissent pas nécessairement dans cet ordre.

On considère l'ensemble des « mots » de n lettres qui ne contiennent que des S (Succès) et des E (Échecs). On sait qu'il y en a exactement $\binom{n}{p}$ qui contiennent exactement k fois la lettre S (et donc $n-k$ fois la lettre E).

On en déduit m

$$P(X = k) = \binom{n}{p} p^k (1-p)^{n-k}$$

et ceci pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. □

Remarques 4.9.

a. La probabilité d'avoir n succès : $P(X = n) = p^n$ et d'avoir aucun succès $P(X = 0) = q^n$. Par conséquent, la probabilité d'avoir au moins un succès est :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - q^n.$$

b. La loi de Bernoulli est un cas particulier de la loi binomiale où l'épreuve $\mathcal{E}$ n'est réalisée qu'une seule fois.

c. Toute variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0\,,1]$ peut s'écrire comme somme $X = X_1 + \cdots + X_n$ où, pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, X_k est une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p (X_k vaut 1 en cas de succès à la k^e^ réalisation de $\mathcal{E}$ et 0 sinon).

Exemples 4.10. La probabilité qu'un tireur atteigne sa cible est $p = \frac{3}{4}$. On suppose qu'il fait deux tirs et on note X la variable aléatoire associant à cette épreuve le nombre de succès obtenus ($X = 0$, 1 ou 2).

1. Calculer la probabilité des événements $\{X = 0\}$, $\{X = 1\}$ et $\{X = 2\}$.
2. Calculer $\sum_{k=0}^{2} P(X = k)$.
3. On suppose qu'il fait sept tirs et on note Y la variable aléaoire associant à cette épreuve le nombre de succès obtenus. Calculer $P(X = 1)$ et $P(X = 2)$.

Théorème 4.11

Espérance et variance d'une loi binomiale

Si $X \sim \text{Bin}(n,p)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0\,,1]$ alors :

$$\mathbf{E}(X) = np \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = npq.$$

Développement

Démonstration. Puisque $X \sim \text{Bin}(n,p)$, il existe des variables aléatoires (réelles) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ définies sur Ω indépendantes, de loi de Bernoulli de même paramètre p telles que $X = \sum_{i=1}^n X_i$.
Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}(X_i)$$

et d'après ce qui précède :

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^n p = np.$$

De même pour la variance :

$$\text{Var}(X) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = \sum_{i=1}^n pq = npq.$$

$\square$

Exemple 4.12. La probabilité qu'un tireur atteigne sa cible est $p = \frac{3}{4}$. On suppose qu'il tire $n = 7$ fois. On note X la variable aléatoire associant à cette expérience aléatoire le nombre de succès obtenus. Calculer son espérance et sa variance.

3 Propriétés sur les coefficients binomiaux

3.1 Définitions et propriétés

Définition 4.13

Combinaisons

Soient n et p deux entiers naturels et E un ensemble contenant n éléments. Un sous-ensemble de E contenant p éléments est appelé une *combinaison* de p éléments de E.

Le nombre de p-combinaisons d'un ensemble contenant n éléments est noté C_n^p ou $\binom{n}{p}$.

Exemple 4.14. Pour gagner au Loto, il faut trouver 3 numéros parmi 5. On veut savoir combien il y a de grilles possibles. Considérons une grille quelconque (c'est-à-dire une 3-combinaison de l'ensemble des 5 numéros) : par exemple $\{1,3,4\}$. Il y a 3! façons possibles d'ordonner ces nombres. Or, il y a $\mathrm{C}_5^3 \times 3!$ suites de 3 nombres ordonnées. Mais, on compte $5 \times 4 \times 3$ de ces dernières suites. Donc :

$$\mathrm{C}_5^3 = \frac{5 \times 4 \times 3}{3!}.$$

On peut maintenant généraliser la formule :

Proposition 4.15

Le nombre de p-combinaisons d'un ensemble contenant n éléments est noté

$$\mathrm{C}_n^p = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot(n-(p-1))}{p!} \tag{4.1}$$

$$= \frac{n!}{p!(n-p)!} \tag{4.2}$$

Développement

Démonstration de la proposition 4.15. On part de la formule (4.1) pour arriver à la formule (4.2) :

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}_n^p &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}{p!}\\
&= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}{p!}\,\frac{(n-p)(n-p-1)\cdots 2\times 1}{(n-p)(n-p-1)\cdots 2\times 1}\\
&= \frac{n!}{p!(n-p)!}
\end{aligned}$$

Une autre façon de voir la formule (4.2). Il y a A_n^p manières de tirer p objets parmi n en les ordonnant soit

$$\mathrm{A}_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Une fois les p objets tirés, il y a $p!$ manières de les ordonner. Il y a donc $\frac{\mathrm{A}_n^p}{p!}$ manières de tirer p objets parmi sans les ordonner. D'où

$$\mathrm{C}_n^p = \frac{\mathrm{A}_n^p}{p!} = \frac{1}{p!}\,\frac{n!}{(n-p)!}.$$

□

Définition 4.16

Coefficients binomiaux

Soit p un entier naturel non nul. Les nombres C_n^p sont appelés les *coefficients binomiaux*.

Proposition 4.17

Formule de Pascal

Soit $n, p \in \mathbb{N}$ tel que $p < n$. On a :

$$\mathrm{C}_n^p = \mathrm{C}_{n-1}^p + \mathrm{C}_{n-1}^{p-1}.$$

Développement

Démonstration de la formule de Pascal. Soit un ensemble E à n éléments. On suppose que l'on a « extrait » une partie à p éléments. Si l'on retire un élément $\{a\}$ à E, c'est soit un élément de la combinaison, soit non. Dans le premier cas, les $p-1$ restants forment une partie de l'ensemble $E \setminus \{a\}$ de cardinal $n-1$, et dans le second, ce sont les p éléments qui forment une partie de $E \setminus \{a\}$. Cette union étant disjointe, les cardinaux s'ajoutent pour aboutir à l'égalité demandée. □

$n\backslash p$	0	1	2	3	$\cdots$
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

FIGURE 4.1 – Triangle de Pascal

Proposition 4.18

Formule itérée de Pascal

Soit $p \leq n$ deux entiers naturels. Alors

$$\sum_{k=p}^{n} \mathrm{C}_p^k = \mathrm{C}_{n+1}^{p+1}.$$

Développement

Démonstration de la formule itérée de Pascal. On effectue une récurrence sur l'entier n.

Initialisation Lorsque $n = p$, les deux membres valent 1.

Hérédité On suppose que la formule est vraie au rang n et on montre qu'elle est encore vraie au rang $n + 1$:

$$\sum_{k=p}^{n+1} \mathrm{C}_k^p = \sum_{k=p}^{n} \mathrm{C}_k^p + \mathrm{C}_p^{k+1}$$

et d'après l'hypothèse de récurrence,

$$\sum_{k=p}^{n+1} \mathrm{C}_k^p = \mathrm{C}_{n+1}^{p+1} + \mathrm{C}_{n+1}^p = \mathrm{C}_{n+2}^{p+1}.$$

La dernière égalité est justifiée par l'emploi de la formule de Pascal.

□

On note $A = \mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{Z}$).

Théorème 4.19

Formule du binôme

Soient deux éléments a, b de A qui commutent. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^k b^{n-k}.$$

Développement

Démonstration de la formule du binôme de Newton. On démontre la formule par récurrence sur n.

Initialisation Lorsque $n = 0$, les deux membres sont égaux à 1 (avec le cas échéant la convention $0^0 = 1$).

Hérédité On suppose que la formule est vraie au rang n et on montre qu'elle est encore vraie au rang $n + 1$.

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n &= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \mathrm{C}_n^{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^k b^{n-k+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^{k-1} a^k b^{n-k+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k a^k b^{n-k+1} \\
&= \mathrm{C}_{n+1}^0 a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{C}_n^{k-1} + \mathrm{C}_n^k) a^k b^{n+1-k} + \mathrm{C}_{n+1}^{n+1} a^{n+1} b^0 \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \mathrm{C}_{n+1}^k a^k b^{n-k}.
\end{aligned}$$

La dernière égalité utilise la formule de Pascal pour l'addition des deux coefficients binomiaux.

□

Remarque 4.20. Certains auteurs définissent le coefficient binomial comme le coefficient du monôme $a^k b^{n-k}$ dans le développement de l'expression $(a + b)^n$ en remarquant que ce développement est homogène en a et b.

Corollaire 4.21

On a les égalités suivantes :

1. $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k = 2^n$,
2. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathrm{C}_n^k = 0$.

Développement

Démonstration du corollaire 4.21.

1. On utilise le binôme de Newton avec $a = 1$ et $b = 1$.
2. On utilise le binôme de Newton avec $a = -1$ et $b = 1$.

$\square$

Remarque 4.22. On remarque que l'égalité 1 du corollaire 4.21 traduit le fait que le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est 2^n. En effet, ce nombre est la somme des nombres de parties ayant respectivement 0, 1, $\ldots$ éléments (le cardinal d'une union disjointe est la somme des cardinaux), ce qui correspond bien à la somme indiquée.

Proposition 4.23

Formule de Van der Monde

Pour tous entiers m, n et p tels que $p \leq m+n$, on a l'égalité :

$$\mathrm{C}_{m+n}^{p} = \sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_m^k \mathrm{C}_n^{p-k}.$$

Développement

Démonstration de la formule de Van der Monde. Soit x un réel. Alors :

$$(1+x)^m(1+x)^n = (1+x)^{m+n} = \sum_{p=0}^{m+n} \mathrm{C}_{m+n}^{p} x^p.$$

Or

$$\begin{aligned}(1+x)^m(1+x)^n &= \left(\sum_{i=0}^{m} \mathrm{C}_m^i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \mathrm{C}_n^j x^j\right) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \mathrm{C}_m^i \mathrm{C}_n^j x^{i+j} \\ &= \left(\mathrm{C}_m^0 \mathrm{C}_n^0\right) + \left((\mathrm{C}_m^0 \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_m^1 \mathrm{C}_n^0)x\right) \\ &\qquad + \left((\mathrm{C}_m^0 \mathrm{C}_n^2 + \mathrm{C}_m^1 \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_m^2 \mathrm{C}_n^0)x^2\right) + \cdots \\ &= \sum_{p=0}^{m+n} \Big(\big(\sum_{\substack{i,j>0 \\ i+j=p}} \mathrm{C}_m^i \mathrm{C}_n^j \big) x^p \Big).\end{aligned}$$

Par identification des coefficients de ce polynôme de degré p, on obtient finalement que, pour tout entier $0 \leq p \leq m+n$,

$$\mathrm{C}_{m+n}^{p} = \sum_{\substack{i,j>0 \\ i+j=p}} \mathrm{C}_m^i \mathrm{C}_n^j = \sum_{i=0}^{p} \mathrm{C}_m^i \mathrm{C}_n^{p-i}.$$

$\square$

4 Stabilité additive de la loi binormale

Théorème 4.24

Stabilité additive de la loi binomiale

Si $X \sim \mathrm{Bin}(m,p)$ et $Y \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ avec X et Y indépendantes, alors $X+Y = \mathrm{Bin}(m+n,p)$.

Soit $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ une suite d'événements. On note : $\coprod_{i=0}^{n} A_i$ si les événements sont disjoints.

Développement

Démonstration. On pose $S = X + Y$. On a clairement $S(\Omega) = \{0, \dots, m+n\}$.
Calculons $P(S^{-1}(k))$ pour tout $1 \leq k \leq m+n$:

$$S^{-1}(k) = \coprod_{i=0}^{k} X^{-1}(i) \cap Y^{-1}(k-i).$$

D'où :

$$P(S^{-1}(k)) = \sum_{i=0}^{k} P(X^{-1}(i) \cap Y^{-1}(k-i)).$$

Et comme X et Y sont indépendantes :

$$P(S^{-1}(k)) = \sum_{i=0}^{k} P(X^{-1}(i))P(Y^{-1}(k-i)).$$

Comme $X \sim \mathrm{Bin}(m,p)$ et $Y \sim \mathrm{Bin}(n,p)$:

$$\begin{aligned} P(S^{-1}(k)) &= \sum_{i=0}^{k} \mathrm{C}_m^i p^i (1-p)^{m-i} \mathrm{C}_n^{k-i} p^{k-i} (1-p)^{n-(k-i)} \\ &= \left(\sum_{i=0}^{k} \mathrm{C}_m^i \mathrm{C}_n^{k-i} \right) p^k (1-p)^{m+n-k}. \end{aligned}$$

Et comme $\sum_{i=0}^{k} \mathrm{C}_m^i \mathrm{C}_n^{k-i} = \mathrm{C}_{m+n}^k$.

$$P(S^{-1}(k)) = \mathrm{C}_{m+n}^k p^k (1-p)^{m+n-k}.$$

Donc $S \sim \mathrm{Bin}(m+n, p)$. □

5 Convergence

5 1 Vers la loi de Poisson

Théorème 4.25

Lorsque n tend vers l'infini et que simultanément $p_n \to 0$ de sorte que $\lim_n np_n = a > 0$, la loi binomiale de paramètres n et p_n converge vers la loi de Poisson de paramètre a. En pratique, on remplace la loi binomiale par une loi de Poisson dès que $n > 30$ et $np < 5$ ou dès que $n > 50$ et $p < 0.1$.

Développement

Démonstration. On décompose $P(X = k)$:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\ &= \frac{(np_n)^k}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) (1-p_n)^{n-k}. \end{aligned}$$

On se place dans la situation où p_n est équivalent à $\frac{a}{n}$ en l'infini.

– Lorsque n tend vers l'infini, les facteurs $(1 - \frac{1}{n})$, $(1 - \frac{2}{n})$, …, $(1 - \frac{k-1}{n})$ tendent vers 1. Le produit de ces termes tend également vers 1 puisqu'ils sont en nombre fini fixé k.
– On a :

$$(1-p_n)^{n-k} = (1-p_n)^n (1-p_n)^{-k},$$

or, $\lim_{p \to 0} (1-p)^{-k} = 1$ et de plus, $(1-p_n)^n \simeq (1 - \frac{a}{n})^n$ et ce dernier terme tend vers e^{-a} quand n tend vers l'infini.

On trouve donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{a^k}{k!} \mathrm{e}^{-a},$$

qui est la probabilité de k pour la loi de Poisson de paramètre a. □

5.2 Vers la loi normale

Théorème 4.26

Soit $(X_n)_n$ une suite de variable aléatoires indépendnates de même loi de Bernoulli $\mathrm{Bern}(p)$ et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi binomiale $\mathrm{Bin}(n, p)$.

D'après le théorème central limite, la loi de S_n peut re approximée par la loi normale $\mathfrak{N}(\mathbf{E}(S_n), \mathrm{Var}(S_n))$, c'est-à-dire par la loi $\mathfrak{N}(np, npq)$.

Remarque 4.27. En pratique, lorsque $n \geq 30$, $np \geq 15$ et $npq > 5$, la loi binomiale $\mathrm{Bin}(n, p)$ peut être approximée par la loi normale $\mathfrak{N}(np, npq)$.

6 Échantillonnage

6.1 Premier problème : proportion de boules dans une urne

Dans une urne contenant une dizaine de boules, il y a 2 boules noires et 8 boules blanches. La proportion de boules noires est donc de $1/5$.

On pioche dans l'urne avec ordre et remise une vingtaine de boules et on s'intéresse à la proportion de boules noires obtenues.

Cette expérience a été recommencée 100 fois à l'aide d'un tableur et voici les proportions obtenues.

Proportion	0	$0,05$	$0,1$	$0,15$	$0,2$	$0,25$	$0,3$	$0,35$	$0,4$	$0,45$	$0,5$	Total
Nb d'échantillons	0	9	13	20	27	16	9	5	0	1	0	100

1. Quel est le nombre d'échantillons qui ont une proportion de boules noires de $0,3$?

2. Quel est le nombSi $(X_n)_n$re d'échantillons qui ont une proportion de boules noires de $0,6$?

3. Quel est le nombre d'échantillons qui ont une proportion de boules noires entre $0,1$ et $0,4$?

4. Le but de cette partie est de retrouver par le calcul ce dernier nombre. On considère la variable aléatoire X qui lors de l'expérience compte le nombre boules noires obtenues.

  a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

  b. Calculer $P(2 \leq X \leq 8)$.

  c. En déduire la probabilité que la proportion de boules noires soit comprise entre 0 et $0,4$.

Solution.

Proportion	0	$0,05$	$0,1$	$0,15$	$0,2$	$0,25$	$0,3$	$0,35$	$0,4$	$0,45$	$0,5$	Total
Nb d'échantillons	0	9	13	20	27	16	9	5	0	1	0	100

1. Le nombre d'échantillons qui ont une proportion de boules noires de $0,3$ est 9.

2. Le nombre d'échantillons qui ont une proportion de boules noires de $0,6$ est 0. En effet, tous les échantillons sont déjà dans le tableau.

3. Le nombre d'échantillons qui ont une proportion de boules noires comprise entre $0,1$ et $0,4$ est $13 + 20 + 27 + 16 + 9 + 5 = 90$. Soit 90%.

4. **a.** On recommence 20 fois de manière indépendante une expérience ayant deux issues possibles, succès ou échec. La variable aléatoire qui compte le nombre de succès suit une loi binomiale de paramètres 20 et $1/5$.

  b. $P(2 \leq X \leq 8) = 0,92$.

  c. On cherche la probabilité que la proportion de boules noires dans un échantillon soit comprise entre $0,1$ et $0,4$; c'est-à-dire la probabilité qu'il y ait entre 10% et 40% de boules noires. Or chaque échantillonage contient 20 boules. Ainsi 10% de boules noires pari ces 20 boules représente exactement 2 boules noires. De même 40% représente 8 boules noires. Finalement, chercher la probabilité que la proportion de boules noires dans les échantillonnages soit comprise entre $0,1$ et $0,4$ revient à chercher la probabilité de piocher entre 2 et 8 boules noires parmi les 20 boules. C'est exactement la probabilité que l'on a caculé à la question 4b, soit $0,92$. Ce qui correspond à peu près au 90% trouvé grâce au tableau.

$\square$

6 2 Second problème : proportion de camions sur une autoroute

Sur une autoroute, la proportion des camions par rapport à l'ensemble des véhicules est $0,07$.

1. Soit X le nombre de camions parmi 100 véhicules choisis au hasard. Calculer $P(X \geq 5)$.

2. Soit Y le nombre de camions parmi 1000 véhicules choisis au hasard. Calculer $P(65 \leq Y \leq 75)$.

3. On choisit n véhicules au hasard. Pour quelles valeurs de n peut-on affirmer que la proportion de camions est entre $0,06$ et $0,08$ avec un risque d'erreur inférieur à 5% ?

Solution.

1. Soit X une variable aléatoire de loi binomiale $\mathrm{Bin}(100, 0.07)$. $100 \geq 30$, $100 \times 0,07 = 7 < 15$, $0,07 \leq 0,1$ donc l'approximation à utiliser est celle par la loi de Poisson $\mathrm{Pois}(7)$ et :

$$P(X \geq 5) \approx 1 - \mathrm{e}^{-7} \sum_{k=0}^{4} \frac{7^k}{k!} \approx 0,827.$$

2. Y suit la loi binomiale $\mathrm{Bin}(1000, 0.07)$. $1000 \geq 30$, $1000 \times 0,07 = 70 \geq 15$, $70 \times 0,93 = 64,1 > 4$ donc l'approximation à utiliser est celle par la loi normale $\mathfrak{N}(70, 65.1)$ et si F désigne la fonction de répartition de la loi $\mathfrak{N}(70, 65.1)$,

$$\begin{aligned} P(65 \leq Y \leq 75) &\approx F(75.5) - F(64.5) = \Phi\left(\frac{5.5}{\sqrt{65.1}}\right) - \Phi\left(-\frac{5.5}{\sqrt{65.1}}\right) \\ &= 2\Phi\left(\frac{5.5}{\sqrt{65.1}}\right) - 1 \approx 2\Phi(0.68) \approx 0.5 \end{aligned}$$

3. On choisit n véhicules au hasard. Le nombre S_n des camions parmi ces n véhicules suit la loi binomiale $\mathrm{Bin}(n, 0.07)$ et la proportion des camions est $\frac{S_n}{n}$.
On cherche n tel que

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - 0.07\right| \geq 0.01\right) = 0.05.$$

Si $n \geq 30$, $0.07n \geq 15$ et $0.07 \times 0.93 \times n > 5$, c'est-à-dire $n \geq 215$, on peut approximer la loi de $\frac{S_n}{n}$ par la loi normale $\mathfrak{N}(0.07, \frac{0.0651}{n})$ et la loi de $\frac{S_n}{n} - 0.07$ par la loi normale $\mathfrak{N}(0, \frac{0.065}{n})$.
On a alors :

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - 0.07\right| \geq 0.01\right) &= P\left(\left|\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{0.0651}}\left(\frac{S_n}{n} - 0.07\right)\right| \geq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{0.0651}}\frac{1}{100}\right) \\ &\approx 2\left(1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{651}}\right)\right) \approx 0.05 \end{aligned}$$

On a donc $\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{651}}\right) \approx 0.975 \approx \Phi(1.96)$ et $n \approx 1.96^2 \times 651 \approx 2501$. $2501 \geq 90$, ce qui légitime l'approximation.

□

7 Loi multinomiale

Définition 4.28

Loi multinomiale
Le vecteur aléatoire N suit la loi multinomiale de paramètres n et $(p_1, \dots, p_d)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et les p_i sont strictement positifs et de somme 1 si pour tout d-uple $(j_1, j_2, \dots, j_d)$ d'entiers tels que $j_1 + j_2 + \cdots + j_d = n$,

$$P[N = (j_1, j_2, \dots, j_d)] = \frac{n!}{j_1! j_2! \cdots j_d!} p_1^{j_1} p_2^{j_2} \cdots p_d^{j_d}.$$

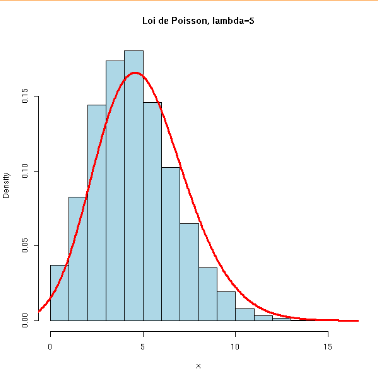
Exemple 4.29. On considère 20 tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant 1 boule bleue, 3 jaunes, 4 rouges et 2 vertes. Notons $N = (N_1, N_2, N_3, N_4)$ où N_i est le nombre de boules de la couleur i en numérotant les couleurs par ordre alphabétique (`b`, `j`, `r`, `v`). On a $(p_1, p_2, p_3, p_4) = (\frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{2}{10})$. La probabilité d'obtenir en 20 tirages 3 bleues, 5 jaunes, 10 rouges et 2 vertes est :

$$P(N = (3, 5, 10, 2)) = \frac{20!}{3!5!10!2!} \left(\frac{1}{10}\right)^3 \left(\frac{3}{10}\right)^5 \left(\frac{4}{10}\right)^{10} \left(\frac{2}{10}\right)^2 \simeq 0,004745.$$

LEÇON

5

Loi de Poisson, loi normale



Niveau : BTS

Prérequis : Variable aléatoire, espérance, variance, théorème limite central, loi binomiale, fonctions exponentielles

1 Loi de Poisson

1.1 Définition

La loi de Poisson est la loi des processus assmilables au temps d'attente.

Définition 5.1

Soit λ un réel strictement positif. On appelle *loi de Poisson* de paramètre λ, la loi dd'une variable aléatoire X discrète qui prend les valeurs $k \in \mathbb{N}$ avec les probabilités :

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$$

une telle loi est notée $\mathrm{Pois}(\lambda)$.

Développement

A-t-on bien défini une variable aléatoire ?

Théorème 5.2

Pour tout réel x, on a :

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Démonstration. La formule de Taylor, pour une fonction indéfiniment dérivable f nous donne :

$$f(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}u^n}(0)\frac{u^n}{n!}$$

et l'égalité, valable pour tout entier naturel n :

$$\frac{\mathrm{d}^n(\mathrm{e}^u)}{\mathrm{d}u^n} = \mathrm{e}^u$$

donnent le résultat. □

Ainsi :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda+\lambda} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

1.2 Valeurs caractéristiques

Théorème 5.3

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre λ. Alors :

$$\mathbf{E}(X) = \lambda \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}(X) = \lambda.$$

Développement

Démonstration. On a :

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda.$$

$$\mathbf{E}(X(X-1)) = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = \lambda^2.$$

Or, par linéarité de l'espérance :

$$\mathbf{E}(X(X-1) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)$$

donc :

$$\mathbf{E}(X^2) = \lambda^2 + \lambda \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

□

1.3 Somme des deux lois de Poisson

Théorème 5.4

Si X_1 suit une loi $\text{Pois}(\lambda_1)$ et X_2 suit une loi $\text{Pois}(\lambda_2)$ et que X_1 et X_2 sont indépendantes alors $X = X_1 + X_2$ suit une loi $\text{Pois}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

1.4 Table de la loi de Poisson

Contrairement à la loi binomiale qui a 2 paramètres n et p, la loi de Poisson n'a qu'un seul paramètre λ. Ci-dessous, la table donnant les valeurs numériques de $P(X = k)$ pour différentes valeurs de λ et k.

k \ λ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,368	0,223	0,135	0,050	0,018	0,007	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,368	0,335	0,271	0,149	0,073	0,034	0,015	0,006	0,003	0,001	0,000
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,184	0,251	0,271	0,224	0,147	0,084	0,045	0,022	0,011	0,005	0,002
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,061	0,126	0,180	0,224	0,195	0,140	0,089	0,052	0,029	0,015	0,008
4	0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,015	0,047	0,090	0,168	0,195	0,175	0,134	0,091	0,057	0,034	0,019
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0004	0,003	0,014	0,036	0,101	0,156	0,175	0,161	0,128	0,092	0,061	0,038
6			0,0000	0,0000	0,0000	0,001	0,004	0,012	0,050	0,104	0,146	0,161	0,149	0,122	0,091	0,063
7						0,000	0,001	0,003	0,022	0,060	0,104	0,138	0,149	0,140	0,117	0,090
8							0,000	0,001	0,008	0,030	0,065	0,103	0,130	0,140	0,132	0,113
9								0,000	0,003	0,013	0,036	0,069	0,101	0,124	0,132	0,125
10									0,001	0,005	0,018	0,041	0,071	0,099	0,119	0,125
11									0,000	0,002	0,008	0,023	0,045	0,072	0,097	0,114
12										0,001	0,003	0,011	0,026	0,048	0,073	0,095
13										0,000	0,001	0,005	0,014	0,030	0,050	0,073
14											0,000	0,002	0,007	0,017	0,032	0,052
15												0,001	0,003	0,009	0,019	0,035
16												0,000	0,001	0,005	0,011	0,022
17													0,001	0,002	0,006	0,013
18													0,000	0,001	0,003	0,007
19														0,000	0,001	0,004
20															0,001	0,002
21															0,000	0,001
22																0,000

Exemple 5.5. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson $\text{Pois}(\lambda)$, $\lambda = 4$. On a $P(X = 2) = 0,147$.

1.5 Exemples de situations

Exemple 5.6. Signature de pétitions

Un militant entreprend de faire signer une pétition à l'entrée d'un supermarché. Le nombre de personnes X qu'il peut ainsi contacter est une variable aléatoire de Poisson de paramètre α. Soit p la probabilité qu'une personne ainsi sollicitée signe la pétition. On note Y le nombre total de signatures et Z le nombre total de refus de signature ($X = Y + Z$).

1. Soient j et k deux entiers. En distinguant les cas $j > k$ et $j \leq k$, calculer $P(X = k \mid Y = j)$.
2. En déduire $P(X = k, Y = j)$.
3. Déterminer la loi de Y. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4. En utilisant le résultat de la question 2, déterminer la loi du couple (Y, Z).
5. Ces deux variables aléatoires sont-elles indépendantes ? Commenter.

Exemple 5.7. Poisson pair et impair

Soit X une variable aléatoire de Poisson de moyenne $\theta > 0$. Quelle est la probabilité que X soit pair ? impair ?

2.1 Definition

Définition 5.8

Soient m un réel et σ un réel positif et non nul. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi normal de paramètres m et σ si elle admet pour densité de probabilité :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} = \mathrm{e}^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)}.$$

On dit que X suit une loi $\mathfrak{N}(m,\sigma)$.

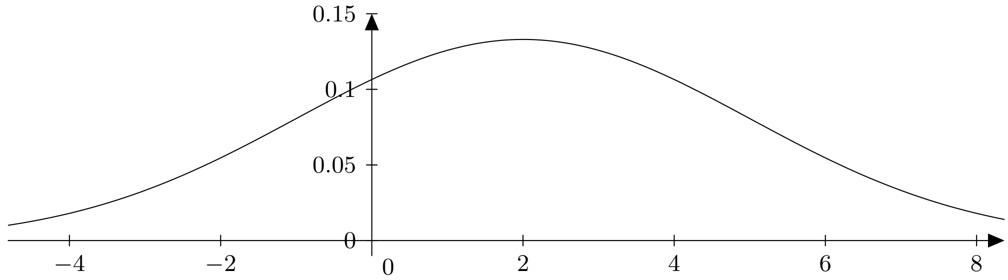
La densité de probabilité de f est :

$$P(X \leq x) = F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-(t-m)^2/2\sigma^2}\,\mathrm{d}t.$$

On admet que :

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(t-m)^2/2\sigma^2}\,\mathrm{d}t = 1.$$

Pour $m = 2$ et $\sigma = 3$, on obtient la courbe suivante dite en forme de cloche de Gauss :



Propriété 5.9

Pour tout $x > 0$, on a $f(m+x) = f(m-x)$, donc la droite d'équation $x = m$ est un axe de symétrie pour la courbe.

Théorème 5.10

Si $X \sim \mathfrak{N}(m,\sigma)$ alors $\mathbf{E}(X) = m$ et $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$.

2.2 Loi normale centrée-réduite

Soit $X \sim \mathfrak{N}(m,\sigma)$, on considère la variable $Y = \frac{Xm}{\sigma}$.
On a :

$$P(Y < y) = P(X < \sigma y + m) = \frac{1}{\sigma} \int_{-\infty}^{\sigma x + m} \mathrm{e}^{-(t-m)^2/(2\sigma^2)}\,\mathrm{d}t.$$

Effectuons le changement de variable :

$$u = \frac{t-m}{\sigma} \Rightarrow \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}t}{\sigma}.$$

On obtient :

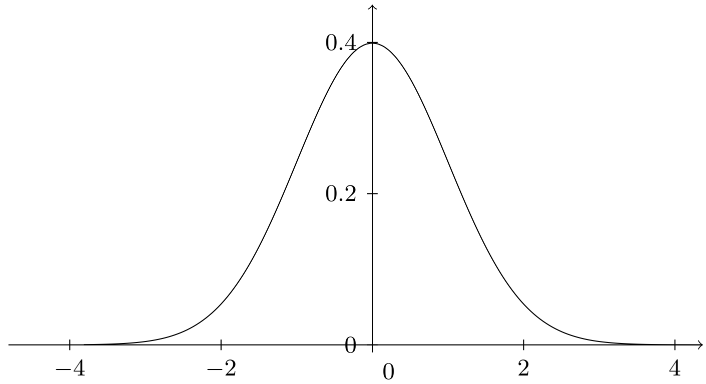
$$P(Y < y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-u^2/2}\sigma\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u.$$

Donc $Y \sim \mathfrak{N}(0,1)$.

Définition 5.11

On appelle *loi normale centrée-réduite* ou de *Laplace-Gauss*, la loi $\mathfrak{N}(0,1)$.

Sa fonction densité est une fonction paire et son graphe admet (Oy) pour axe de symétrie.



Dans le cas de la loi $\mathfrak{N}(0,1)$, on note $P(X < x) = F(x) = \Pi(X)$.
Cette fonction est tabulée pour $x \geq 0$.

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5754
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6627	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7122	0.7156	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7356	0.7389	0.7421	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7793	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8079	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8414	0.8438	0.8461	0,8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8622
1.1	0.8643	0.8665	0.8687	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0,8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9083	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9193	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9485	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9648	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9895	0.9898	0.9901	0.9903	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9926	0.9928	0.9930	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9944	0.9946	0.9948	0.9949	0,9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9958	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

Table pour les grandes valeurs de x

x	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.8	4.0	4.5
$\Phi(x)$	0.99865	0.99904	0.99931	0.99952	0.99966	0.99976	0.999841	0.999928	0.999968	0.999997

FIGURE 5.1 – Table des valeurs de Φ, fonction de répartition de la loi normale standard $\mathfrak{N}(0,1)$

Exemple 5.12. On donne $X \sim \mathfrak{N}(0,1)$. D'après la table de la loi normale centrée-réduite :

$$P(X < 1) = 0,8413,\ P(X < 2,55) = 0,9946.$$

Propriété 5.13

Propriété sur la loi normale centrée-réduite

Si $X \sim \mathfrak{N}(0,1)$,

$$P(a < X < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}t = \Pi(b) - \Pi(a).$$

2 3 Somme de variables gausiennes

Théorème 5.14

Si X_1 suit la loi $\mathfrak{N}(m_1, \sigma_1,)$, X_2 suit la loi $\mathfrak{N}(m_2, \sigma_2)$ et X_1, X_2 indépendantes, alors $X = X_1 + X_2$ suit la loi $\mathfrak{N}(m_1 + m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$.

3 Convergence

3 1 De la loi binomiale vers la loi de Poisson

Théorème 5.15

Soient $p \in [0\,,1]$ et $n \in \mathbb{N}$. Soit X suivant la loi $\mathrm{Bin}(n,p)$. Si n est « assez grand », si p est « assez petit » et si np n'est « pas trop grand » alors on peut approcher la loi de X par une loi de Poisson $\mathrm{Pois}(np)$.

Les conditions d'utilisation de ce théorème sont :

- $n \geq 30$, $p \leq 0,1$, $np \leq 15$;
- $n \geq 50$, $p \leq 0,1$, $np \leq 10$.

Exemple 5.16. Dans une entreprise, on estime que la probabilité pour un article d'être défectueux est $p = 0,05$. On prélève dans un stock de 80000 articles un échantillon de 120 unités et on s'intéresse au nombre d'éléments défectueux dans l'échantillon.

Hypothèses : Bien que le choix des articles prélevés se fasse sans remise, on formule l'hypothèse que ce prélèvement de 120 articles sur les 80000 ne modifie pratiquement pas la composition globale du stock.

Modélisation : Sous les hypothèses précédentes, une expérience élémentaire consiste à prélever un article, constater s'il est défectueux, le remplacer dans le stock. Cette expérience élémentaire étant répétée 120 fois de façon indépendantes des autres.

On note X_i pour $i = 1, 2, \dots, 120$ la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si l'objet est défectueux, 0 sinon.

X est la variable aléatoire qui donne le nombre d'articles défectueux dans l'échantillon de taille 120.

Il est clair que $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{120}$. Comme pour $i = 1, 2, \dots, 120$, X_i suit une loi $\mathrm{Bern}(0.05)$ alors X_i suit une loi $\mathrm{Bin}(120, 0.05)$.

De plus, $\mathbf{E}(X) = np = 120 \times 0,05 = 6$.

Convergence : On dresse un tableau avec quelques valeurs approchées de la loi de X et une variable Y de loi de Poisson $\mathrm{Pois}(6)$:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P(X = k)$	$0,002$	$0,013$	$0,041$	$0,087$	$0,134$	$0,164$	$0,165$	$0,141$	$0,105$	$0,069$
$P(Y = k)$	$0,002$	$0,015$	$0,045$	$0,089$	$0,134$	$0,161$	$0,161$	$0,138$	$0,103$	$0,69$

3 2 De la loi de Poisson à la loi binomiale

Théorème 5.17

SI $(X_n)_n$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi de Poisson $\text{Pois}(\lambda)$ et si $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ alors S_n suit la loi de Poisson $\text{Pois}(n\lambda)$.

Développement

Démonstration. La démonstration se fait par récurrence sur n.

– Pour $n = 1$, X_1 suit la loi de Poisson $\text{Pois}(\lambda)$.
– Si $S_n = X_1+\cdots+X_n$ suit la loi de Poisson $\text{Pois}(n\lambda)$, $S_{n+1}+S_n+X_{n+1}$, et vu que S_n et X_{n+1} sont indépendantes, que S_n suit la loi de Poisson $\text{Pois}(n\lambda)$ et X_{n+1} la loi de Poisson $\text{Pois}(\lambda)$), $S_n + X_{n+1} = S_{n+1}$ suit la loi de Poisson de paramètre $n\lambda + \lambda = (n + 1)\lambda$.

□

S_n suit la loi de Poisson $\text{Pois}(n\lambda)$ donc $\mathbf{E}(S_n) = n\lambda$ et $\text{Var}(S_n) = n\lambda$. D'après le théorème central limite, la loi de S_n peut être approximée par la loi normale $\mathfrak{N}(\mathbf{E}(S_n), \text{Var}(S_n))$, c'est-à-dire $\mathfrak{N}(n\lambda, n\lambda)$.

En pratique, lorsque $\lambda \geq 15$, on peut approximer la loi de Poisson $\text{Pois}(\lambda)$ par la loi normale $\mathfrak{N}(\lambda, \lambda)$.

Exemple 5.18. Si X suit la loi de Poisson $\text{Pois}(16)$,

$$P(X = 16) = \mathrm{e}^{-16}\frac{16^{16}}{16!} \approx 0,0992.$$

En approximant la loi $\text{Pois}(16)$ par la loi $\mathfrak{N}(16, 16)$ de fonction de répartition F, on obtient :

$$P(X = 16) \approx F(16,5) - F(15,5) = \Phi\left(\frac{0,5}{4}\right) - \Phi\left(-\frac{0,5}{4}\right) = 2\Phi(0,125) - 1 \approx 0,0995.$$

Le gain de temps est surtout sensible pour le calcul des valeurs de la fonction de répartition :

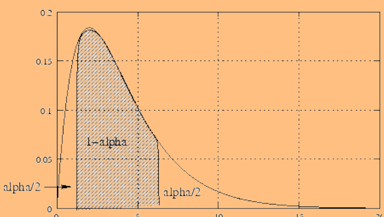
$$P(X \leq 20) \approx F(20,5) = \Phi\left(\frac{20,5-16}{4}\right) = \Phi(1,125) \approx 0,8697$$

(alors qu'en gardant la loi de Poisson, il faudrait faire la somme de 21 termes !)

LEÇON

6

Variables aléatoires réelles à densité



Niveau : Terminale S et BTS

Prérequis : probabilités, intégrales, primitives, croissance comparée, équations différentielles, désintégration radioactive

1 Introduction

Nous avons vu dans la leçon « Variables aléatoires discrètes » que des variables aléatoires peuvent prendre leur valeur dans un sous-ensemble des nombres entiers. On va essayer de généraliser en élargissant l'ensemble des valeurs de départ d'une variable aléatoire à un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exemple 6.1. On tire au hasard un point a sur le segment $[0\,,1]$ et on note $X = a$. On a alors $X(\Omega) = [0\,,1]$.

1. Calculer $P(\{X = 0{,}5\})$.
2. Calculer la probabilité que X appartienne au segment $[0\,,\frac{1}{2}]$.

2 Densité et loi de probabilité

Définition 6.2

Densité de probabilité

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle *densité de probabilité sur* I, toute fonction f *continue et positive sur* I telle que :

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

Remarque 6.3. La notation $\int_I$ désigne l'intégrale sur l'intervalle I.

1. Si $I = [a\,,b]$ alors
$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$
2. Si I est non borné d'un coté (par exemple $I = [a\,,+\infty[$ alors
$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$
3. Si $I = \mathbb{R}$ alors :
$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to-\infty} \int_x^0 f(x)\,\mathrm{d}t + \lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 6.4. Soit f une fonction constante sur l'intervalle $[0\,,1]$. On cherche la valeur de cette constante pour que f soit une densité. On note γ cette constante :

$$\int_0^1 \gamma\,\mathrm{d}t = 1 \Leftrightarrow \gamma = 1.$$

Plus généralement, si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a\,,b]$, on montre que $f(t) = \gamma = \frac{1}{b-a}$.

Définition 6.5

Loi de probabilité

Soit I un intervalle et f une densité de probabilité sur I. L'application P qui, à tout sous-intervalle $[a\,,b]$ de I associe la quantité :

$$P([a\,,b]) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

est appelé loi de probabilité sur I.

Développement

Justification de la définition 6.5. Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de sous-intervalles disjoints de I, alors par linéarité de l'intégrale :

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{I_n} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(I_n)$$

et de plus $P(I) = 1$. □

Remarques 6.6.

1. On a bien $0 \leq P([a\,,b]) \leq 1$ car $[a\,,b]$ est inclus dans I.
2. On a :

$$P(\{x_0\}) = \int_{x_0}^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On dit alors que $\{x_0\}$ est un événement « *presque-sûrement impossible* ».

Exemples 6.7.

1. Si f est constante sur $[a\,,b]$, on dit que P est la *loi uniforme*.
2. Si f est de la forme $f(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$ sur $\mathbb{R}$ avec $\lambda > 0$, on dit que P est la *loi exponentielle de paramètre* λ. On a tout de même besoin d'une justification. Soit $\lambda > 0$ un réel. On montre que $f(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$ définie sur $\mathbb{R}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}_+$. On calcule :

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \lambda\left[-\frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}t}{\lambda}\right]_0^x = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

Or, on a :

$$\lim_{x\to+\infty}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}) = 1.$$

La limite en $+\infty$ de $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe bien et on a :

$$\int_{\mathbb{R}_+} f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

3 Variables aléatoires continues. Loi uniforme, loi exponentielle

Définition 6.8

Soit P une loi de probabilité sur un intervalle I de f. On dit qu'une variable aléatoire X, à valeurs dans I, suit une loi de probabilité P lorsque pour tout sous-intervalle $[a\,,b]$ de I, on a :

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemples 6.9.

1. On peut maintenant répondre aux questions de l'exemple introductif. X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0\,,1]$. Donc :

   (a)

$$P(X = 0{,}5) = \int_{0{,}5}^{0{,}5} 1\,\mathrm{d}t = 0.$$

   (b)

$$P(X \in [0\,,0{,}5]) = P(0 \leq X \leq 0{,}5) = \int_0^{0{,}5} 1\,\mathrm{d}t = 0{,}5.$$

Dans le cas général, supposons que X suivent la loi uniforme sur $[a\,,b]$. Alors :

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}t = \frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$

On note $L([a\,,b])$ la longueur de l'intervalle de $[a\,,b]$. Si X suit une loi uniforme sur un intervalle I, alors la probabilité d'un sous-intervalle J est donné par la formule :

$$P(X \in J) = \frac{L(J)}{L(I)}.$$

2. Si X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, alors

$$P(0 \leq X \leq x) = \int_0^x \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

et par complémentarité :

$$P(X \geq x) = 1 - P(0 \leq X \leq x) = \mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

Définition 6.10

Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire, à valeurs dans un intervalle I de la forme $[a\,,b]$ (ou de la forme $[a\,,+\infty[$) qui suit une loi de probabilité P. On appelle *fonction de répartition de* X, la fonction F définie pour tout réel x de I par :

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Propriété 6.11

Si F est une fonction de répartition de X alors :

1. F est croissante sur $[a\,,x]$,
2. $F(a) = 0$,
3. $F(b) = 1$ (si $I = [a\,,b]$) ou

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1 \qquad \text{si } I = [a\,,+\infty[.$$

4. $P(X > x) = 1 - F(x)$
5. $P(\alpha < X \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.

Exemple 6.12. Si X suit la loi exponentielle de paramètre λ, on a :

$$F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

4 Espérance d'une variable aléatoire continue

Définition 6.13

Espérance d'une variable aléatoire continue

Soit X une variable aléatoire continue prenant ses valeurs dans un intervalle I. On appelle *espérance* de X la quantité :

$$\mathbf{E}(X) = \int_I t f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemples 6.14.

1. Si X suit une loi uniforme sur $I = [a\,,b]$ alors :

$$\mathbf{E}(X) = \int_a^b \frac{t}{b-a}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{b-a}\left[\frac{t^2}{2}\right]_a^b = \frac{b+a}{2}.$$

2. Soit X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ sur $\mathbb{R}_+$. On calcule l'intégrale suivante :

$$\int_0^x t\lambda e^{-\lambda t}\,dt = \lambda \int_0^x te^{-\lambda t}\,dt.$$

On pose :

$$u(t) = t \quad \text{et} \quad v'(t) = e^{-\lambda t},$$

ainsi

$$u'(t) = 1 \quad \text{et} \quad v(t) = -\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}.$$

Une intégration par parties donne :

$$\lambda \int_0^x te^{-\lambda t}\,dt = \left[-te^{-\lambda t}\right]_0^x + \int_0^x e^{-\lambda t}\,dt = -xe^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}\left[e^{-\lambda t}\right]_0^x = \frac{-\lambda xe^{-\lambda x} - e^{-\lambda x} + 1}{\lambda}.$$

Puis, on étudie la limite lorsque x tend vers $+\infty$. On sait que :

$$\lim_{x\to+\infty} -xe^{-\lambda x} = 0$$

grâce à la règle des croissances comparées et

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-\lambda x} = 0$$

donc $\mathbf{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$.

5 Exemples de variables aléatoires à densité

5.1 Lois normales

1. Définition

Définition 6.15

Loi normale

Soit $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que la variable aléatoire réelle X suit la loi normale $\mathfrak{N}(m, \sigma)$ si elle a pour densité de probabilité la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-1/2[(x-m)/\sigma]^2}.$$

Conséquence 6.16

$$P(a \leq X \leq b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-1/2[(x-m)/\sigma]^2}\,dx.$$

2. Cas particulier de $\mathfrak{N}(0,1)$

La densité de probabilité est alors $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ et on appelle, dans ce cas, Π la fonction de répartion.

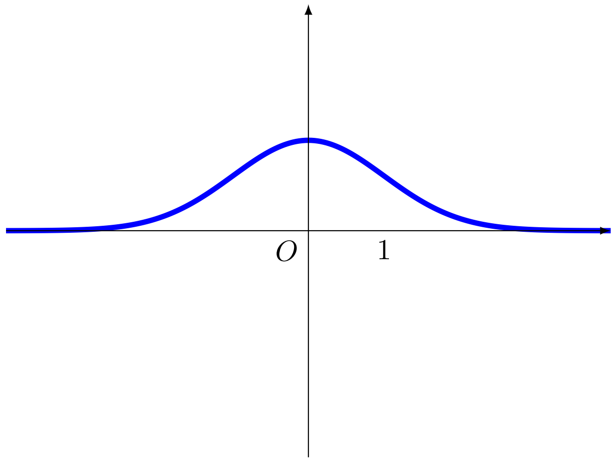
On a donc :

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2} 2\,dx = \Pi(b) - \Pi(a).$$

Les valeurs de la fonction de répartition pour la loi normale centrée réduite étant tabulées, il est désormais possible de calculer $P(a \leq X \leq b)$.

Propriété 6.17

La fonction f est paire sur $\mathbb{R}$.



Conséquence 6.18 Si $x > 0$ alors $\Pi(-x) = 1 - \Pi(x)$.

Développement

Démonstration. En effet :

$$\Pi(-x) = P(X \leq -x) = \int_{-\infty}^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\inf}^{-x} f(-t)\,\mathrm{d}t$$

car f une fonction paire

$$= \int_{x}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

après le changement de variable $u = -t$

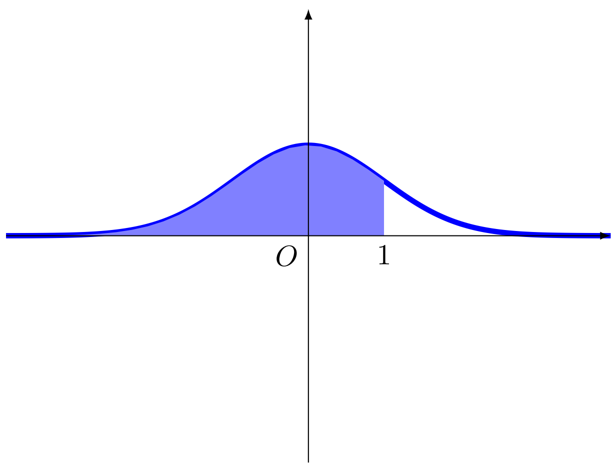
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = 1 - \Pi(x).$$

□

Exemples 6.19.

a. $\Pi(1) = P(X \leq 1)$ correspond donc à l'aire sous la courbe délimité à *droite* par la droite d'équation $x = 1$.

b. $\Pi(-1) = P(X \leq -1) = 1 - \Pi(-1)$ correspond à l'aire sous la courbe délimité *à gauche* par la droite d'équation $x = 1$.



3. Se ramener à une $\mathfrak{N}(0,1)$

Propriété 6.20

Soit $X \sim \mathfrak{N}(m,\sigma)$. Alors $Y = \frac{X-m}{\sigma} \sim \mathfrak{N}(0,1)$. On dit qu'on centre et qu'on réduit la variable aléatoire X.

Développement

Démonstration.

$$\begin{aligned} P(a \leq Y \leq b) &= P\left(a \leq \frac{X-m}{\sigma} \leq b\right) \\ &= P(A\sigma + m \leq X \leq b\sigma + m) = \int_{a\sigma+m}^{b\sigma+m} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-1/2[(x-m)/\sigma]^2}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

On effectue alors le changement de variable $y = \frac{x-m}{\sigma}$ et on obtient :

$$P(a \leq Y \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-y^2/2}\sigma\,\mathrm{d}y = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y$$

donc Y a pour densité $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}2$. La variable aléatoire Y suit bien une loi normale centrée réduite. $\square$

Exemple 6.21. La variable aléatoire X suit une loi normale de paramètres $m = 2,09$ et $\sigma = 0,13$, autrement dit $X \sim \mathfrak{N}(2.09, 0.13)$.

On va se ramener à une loi normale centrée réduit en posant : $T = \frac{X-m}{\sigma}$ et donc $T \sim \mathfrak{N}(0,1)$. On demande de calculer $P(X \leq 2,35)$ et $P(1,895 \leq X \leq 2,285)$.

–
$$P(X \leq 2,35) = P\left(\frac{X-2,09}{0,13} \leq 2\right) = P(T \leq 2) = 0,9772.$$

–
$$\begin{aligned} P(1,895 \leq X \leq 2,285) &= P(-1,5 \leq T \leq 1,5) = P(T \leq 1,5) - P(T \leq -1,5) \\ &= P(T \leq 1,5) - (1 - P(T \leq 1,5)) = 2 \times P(T \leq 1,5) - 1 \\ &= 2 \times 0,9332 - 1 = 0,8664. \end{aligned}$$

4. Espérance et variance

Propriété 6.22

Si $X \sim \mathfrak{N}(m,\sigma)$ alors $\mathbf{E}(X) = m$ et $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$.

Développement

Démonstration.

–
$$\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-1/2[(x-m)/\sigma]^2}\,\mathrm{d}x.$$

On considère la variable aléatoire $Y = \frac{X-m}{\sigma}$ alors $Y \sim \mathfrak{N}(0,1)$. On a : $X = \sigma Y + m$ donc :

$$\begin{cases} \mathbf{E}(X) = \sigma\mathbf{E}(Y) + m \\ \mathrm{Var}(X) = \sigma^2\,\mathrm{Var}(Y) \end{cases}$$

donc si $\begin{cases} \mathbf{E}(Y) = 0 \\ \mathrm{Var}(Y) = 1 \end{cases}$ alors $\begin{cases} \mathbf{E}(X) = m \\ \mathrm{Var}(X) = \sigma^2 \end{cases}$.

–
$$\mathbf{E}(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y = 0 \quad \text{car } f \text{ est une fonction paire.}$$

–
$$\mathrm{Var}(Y) = \mathbf{E}(Y^2) - (\mathbf{E}(Y))^2 = \mathbf{E}(Y^2).$$

Il faut donc calculer :
$$\mathbf{E}(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-y^2}2\,\mathrm{d}y.$$

Pour cela, on va faire une IPP en considérant l'intégrale suivante :
$$\text{soit } a > 0, \quad I(a) = \int_{-a}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y$$

avec :
$$\begin{cases} u(y) = \mathrm{e}^{-y^2}2, \ u'(x) = -y\mathrm{e}^{-y^2/2} \\ v'(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \ v(y) = \frac{y}{\sqrt{2\pi}}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I(a) &= \left[\frac{y}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-y^2/2}\right]_{-a}^{a} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} y^2\mathrm{e}^{-y^2}2\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{2a}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-a^2/2} + \int_{-a}^{a} \frac{y^2}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Puis on fait tendre a vers $+\infty$ et on obtient :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y = 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^2}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y.$$

Au final, on a :
$$\mathrm{Var}(Y) = \mathbf{E}(Y^2) = 1.$$

□

5 2 Loi uniforme

La loi uniforme sur $[a, b]$, notée $\mathrm{Unif}([a, b])$ a pour densité de probabilité :
$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x \notin [a\,, b] \\ f(x) = \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a\,, b]. \end{cases}$$

Propriété 6.23

Si $X \sim \mathrm{Unif}([a, b])$ alors :
$$\mathbf{E}(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

5 3 Loi exponentielle

La loi exponentielle $\mathrm{Exp}(\lambda)$ a pour densité de probabilité :
$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Propriété 6.24

La densité de probabilité h de la somme de deux variables aléatoires indépendantes dont les densités f et g sont nulles pour $x \leq 0$, est définie par :
$$h(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Propriété 6.25

Si $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ alors :
$$\mathbf{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

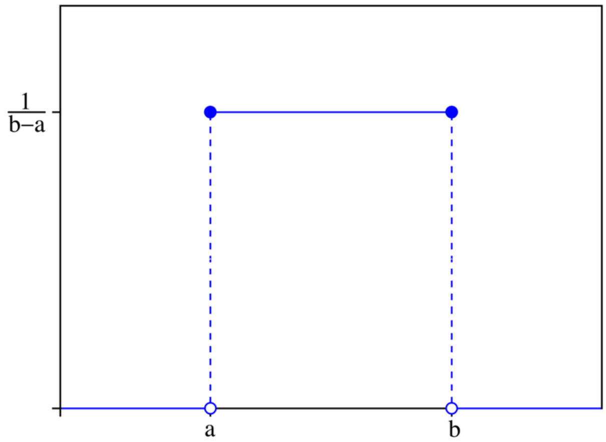


FIGURE 6.1 – Densité de la loi uniforme $[a, b]$

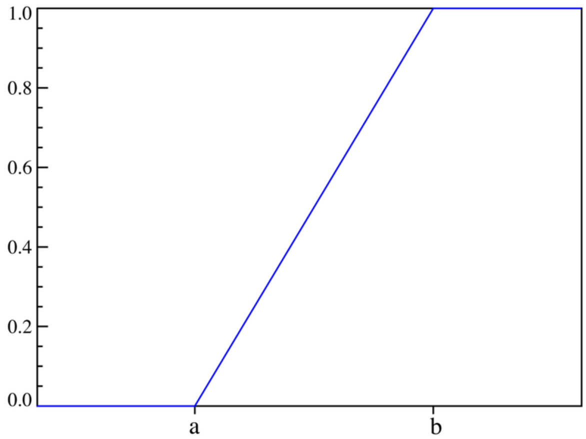


FIGURE 6.2 – Fonction de répartition de la loi uniforme $[a, b]$

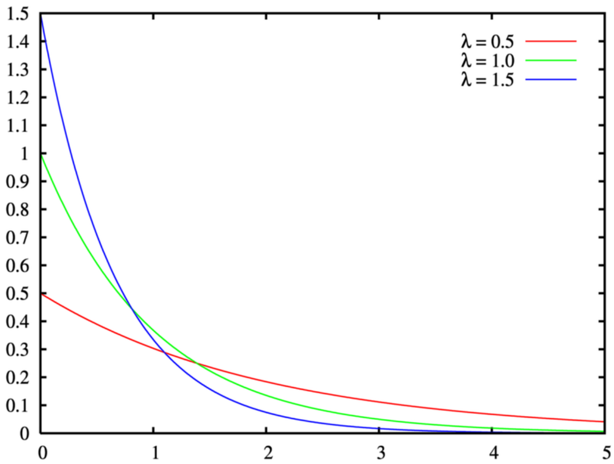


FIGURE 6.3 – Densité de la loi exponentielle $\mathrm{Exp}(\lambda)$ pour $\lambda = 0,5$, $\lambda = 1$, $\lambda = 1,5$

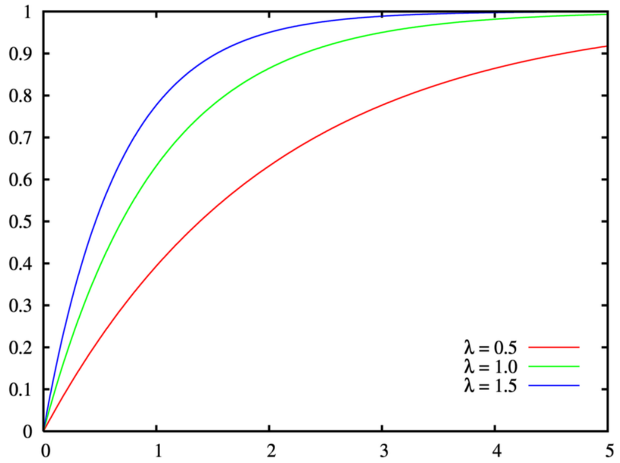


FIGURE 6.4 – Fonction de répartition de la loi exponentielle $\mathrm{Exp}(\lambda)$ pour $\lambda = 0,5$, $\lambda = 1$, $\lambda = 1,5$

6 Applications

6.1 Loi de durée de vie sans vieillissement

Définition 6.26

Soit T une variable aléatoire correspondant à la durée de vie d'un individu ou d'un objet. On dit que T suit la *loi de durée de vie sans vieillissement* lorsque la probabilité que l'individu (ou l'objet) soit vivant (ou fonctionne) à l'instant $t+h$ sachant qu'il est vivant (ou qu'il fonctionne) à l'instant t ne dépend pas de son âge :

$$P_{(T\geq t)}(T \geq t+h) = P(T \geq h).$$

Proposition 6.27

Une variable aléatoire T suit la loi de durée sans vieillissement si et seulement si elle suit une loi exponentielle.

Développement

Démonstration de la proposition 6.27.

($\Leftarrow$) On suppose que T suive une loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Par définition d'une probabilité conditionnelle, on a :

$$P_{(T\geq t)}(T \geq t+h) = \frac{P((T \geq t+h) \cap (T \geq t))}{P(T \geq t)}.$$

Or l'événement « $T \geq t+h$ » est inclus dans l'événement « $T \geq t$ » donc :

$$P((T \geq t+h) \cap (T \geq t)) = P(T \geq t+h) = \mathrm{e}^{-\lambda(t+h)}.$$

Par ailleurs :

$$P(T \geq t) = \mathrm{e}^{-\lambda t},$$

d'où :

$$P_{(T\geq t)}(T \geq t+h) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+h)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}} = \mathrm{e}^{-\lambda h} = P(T \geq h).$$

($\Rightarrow$) Réciproquement, soit T une variable aléatoire suivant une loi de durée de vie sans vieillissement. Alors, pour tout réel t de $\mathbb{R}_+$ et tout réel h de $\mathbb{R}_+$:

$$P_{(T\geq t)}(T \geq t+h) = P(T \geq h) \Leftrightarrow P(T \geq t+h) = P(T \geq h)P(T \geq t).$$

Soit F la fonction de répartition de la variable aléatoire T. On note φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\varphi(t) = 1 - F(t) = 1 - P(T \leq t) = P(T > t) = P(T \geq t).$$

Comme F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, φ l'est aussi et on a :

$$\varphi(0) = 1 - F(0) = 1 \quad \text{et} \quad \varphi(t+h) = \varphi(t)\varphi(t),$$

autrement dit, φ vaut 1 en 0 et transforme les sommes en produits. Il existe donc un réel a (voir la leçon « Équations différentielles ») tel que

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{at}.$$

Mais comme φ est en fait une probabilité, on a pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\varphi(t) \leq 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{at} \leq 1 \Leftrightarrow at \leq 0 \Leftrightarrow a \leq 0.$$

On pose $\lambda = -a \in \mathbb{R}_+$. Si a était nul, on aurait, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\varphi(t) = 1 \Leftrightarrow P(T \geq t) = 1$$

Ce qui signifierait que notre individu est éternel, hypothèse que l'on peut rejeter. Donc, on a bien $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. D'où, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t} \Leftrightarrow 1 - F(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

et en dérivant, on obtient :

$$-f(t) = -\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \Leftrightarrow f(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

La variable aléatoire T suit donc une loi exponentielle de paramètre λ.

□

6 2 Loi de désintégration radioactive

Selon les physiciens, la durée de vie T d'un noyau radioactif suit une loi de durée de vie sans vieillissement, autrement dit, une loi exponentielle. Considérons l'expérience $\mathcal{E}$: « on examine un noyau à l'instant [1] t ». On note S l'événement « Ce noyau n'est pas désintégré ». D'après la loi exponentielle, il existe un réel λ strictement positif tel que :

$$P(S) = P(T \geq t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

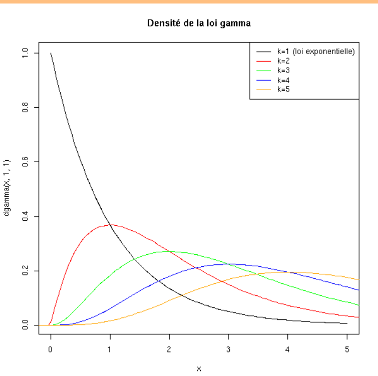
Supposons que l'on ait au départ ($t = 0$), dans notre corps radioactif, N_0 noyaux. On note X_t la variable aléatoire égale au nombre de noyaux non désintégrés à l'instant t. Comme chaque noyau se désintègre indépendamment aux autres, on peut affirmer que X_t suit une loi binomiale de paramètres $n = N_0$ et $p = P(S) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$. Le nombre moyen $N(t)$ de noyaux présents à l'instant t est donc donné par l'espérance de X_t :

$$N(t) = \mathbf{E}(X_t) = np = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

1. La constante λ est appelée « constante radioactive du noyau

LEÇON 7

Lois uniformes, lois exponentielles



Niveau : Terminale S

Prérequis : Variable aléatoire, espérance, variance, fonctions exponentielles, formule de Koenig

1 Lois uniformes

1.1 Loi uniforme discrète

Définition 7.1

On dit que la variable aléatoire X suit une loi uniforme sur A si

$$X(\Omega) = A \quad \text{et} \quad P(X = a) = \frac{1}{\text{card}(A)},\ a \in A.$$

En général, $A = [1, n]_{\mathbb{N}} = [1, n] \cap \mathbb{N}$.

Exemple 7.2. On lance un dé non truqué. Soit X la variable aléatoire qui prend comme résultat le numéro de la face indiqué par le dé. X suit la loi uniforme sur $A = [1, 6]_{\mathbb{N}}$.

Exemple 7.3. Un ordinateur est programmé pour donner en sortie un entier au hasard entre 1 et 20. On note Y la variable aléatoire qui prend comme résultat l'entier sorti par l'ordinateur.
Y suit la loi uniforme sur $A = [1, 20]_{\mathbb{N}}$.

Soit $A = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Théorème 7.4

Si $X \sim \text{Unif}(A)$ alors :

$$\mathbf{E}(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2.$$

Dans le cas où $A = [1, n]_{\mathbb{N}} = [1, n] \cap \mathbb{N}$:

Théorème 7.5

Si $X \sim \text{Unif}([1, n]_{\mathbb{N}})$ alors :

$$\mathbf{E}(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = \frac{n^2 - 1}{12}.$$

Développement

Démonstration. Soit $X \sim \text{Unif}([1, n]_{\mathbb{N}})$. On calcule son espérance :

$$\mathbf{E}(X) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

On peut ensuite calculer la variance avec la formule de Koëning :

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k^2 - \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{(n+1)(4n+2) - (n+1)(3n+3)}{12} = \frac{(n+1)(n-1)}{12} = \frac{n^2-1}{12}. \end{aligned}$$

□

Exemple 7.6. Calculons l'espérance et la variance de Y.

$$\mathbf{E}(Y) = \frac{20+1}{2} = \frac{21}{2}$$

$$\text{Var}(Y) = \frac{20^2 - 1}{12} = 400 - 112 = \frac{399}{12}.$$

1 2 Loi uniforme continue

Définition 7.7

Loi uniforme continue

La loi uniforme est la loi exacte des phénomènes continues uniformément répartis sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$, c'est-à-dire si sa densité de probabilité est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \Phi & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{si } x \notin [a, b] \end{cases}.$$

Développement

Calcul de Φ. On cherche Φ tel que :

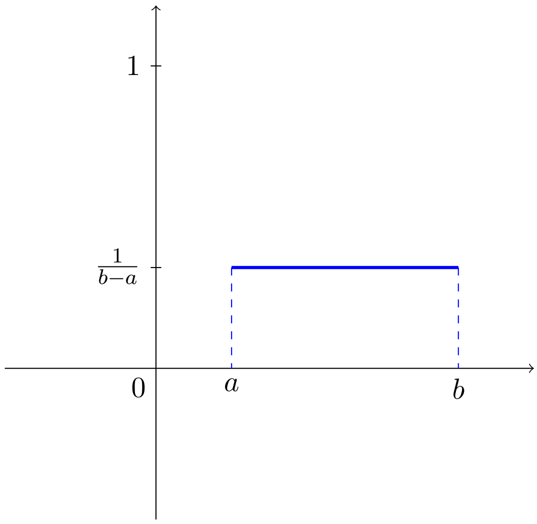
$$\int_a^b \Phi \, \mathrm{d}t = 1$$

c'est-à-dire :

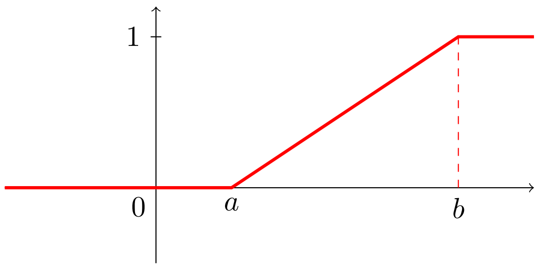
$$[\Phi x]_a^b = 1 \Leftrightarrow (b-a)\Phi = 1 \Leftrightarrow \Phi = \frac{1}{b-a}.$$

□

La fonction de densité de probabilité est représenté par le graphique ci-dessous :



et sa fonction de répartition :



Remarque 7.8. La probabilité que $X \in [\alpha, \beta]$ avec $\alpha < \beta$ et $\alpha, \beta \in [a, b]$ vaut :

$$P(\alpha \leq \beta) = \int_\alpha^\beta f(x) \, \mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}x}{b-a} = \frac{\beta - \alpha}{b-a}.$$

Exemple 7.9. Dans la journée, un métro passe toutes les 6 minutes à la station n° 14. Soit X le temps d'attente d'une personne à cette station. On suppose que X suit la loi uniforme sur $[0\,,6]$.

Quelle est la probabilité que cette personne attende entre 3 et 5 minutes ?

$$P(3 \leq X \leq 5) = \frac{5-3}{6} = \frac{1}{3}.$$

Théorème 7.10

Soit $X \sim \mathrm{Unif}([a,b])$.

$$\mathbf{E}(X) = \frac{b+a}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Développement

Démonstration.
Calcul de l'espérance de X Par définition :

$$\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} x f(x) \,\mathrm{d}x + \int_{a}^{b} x f(x) \,\mathrm{d}x + \int_{b}^{+\infty} x f(x) \,\mathrm{d}x.$$

Or : $\int_{-\infty}^{a} x f(x) \,\mathrm{d}x = 0$ et $\int_{b}^{+\infty} x f(x) = 0$ par définition de la loi uniforme continue, d'où :

$$\mathbf{E}(X) = \int_{a}^{b} \frac{x \,\mathrm{d}x}{b-a} = \frac{1}{b-a} \int_{a}^{b} x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}.$$

Variance Par la formule de Koenig,

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) \,\mathrm{d}x - \mathbf{E}(X)^2 = \int_{a}^{b} x^2 \frac{\mathrm{d}x}{b-a} - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \frac{1}{b-a} \left[\frac{b^3-a^3}{3}\right] - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a} \left[\frac{b^3-a^3}{3}\right] &= \frac{1}{3}(b^2+ab+a^2) \\ \frac{(b+a)^2}{4} &= \frac{1}{4}(b^2+2ab+a^2) \end{aligned}$$

d'où :

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^3-a^3}{3}\right) - \left(\frac{(b+a)^2}{4}\right) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

□

Théorème 7.11

Si X est une variable réelle de fonction de répartition continue strictement croissante F et si U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0\,,1]$, alors la variable aléatoire $Y := F^{-1}(U)$ a même loi que X.

Ce théorème permet de réduire la simulation informatique de la loi de X à celle de U.

Développement

Démonstration. Comme F est continue strictement croissante, c'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image $]0\,,1[$ (en raison de la stricte monotonie de F, les bornes 0 et 1 ne sont pas atteintes). Par conséquent $F^{-1} :]0\,,1[\to \mathbb{R}$ est bien définie et vérifie :

$$\forall u \in]0\,,1[,\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad F^{-1}(u) \leq x \text{ si et seulement si } u \leq F(x).$$

Comme $P(0 < U < 1) = 1$, on en déduit que les évènement $\{F^{-1}(U) \leq x\}$ et $\{U \leq F(x)\}$ ont même probabilité. Pour obtenir la fonction de répartition de Y, on remarque alors que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(Y \leq x) = P(F^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F(x)) = \frac{L([0, F(x)])}{L([0,1])} = F(x)$$

où $L([a,b])$ correspond à la longueur de l'intervalle $[a,b]$. Ainsi Y a pour fonction de répartition F donc a même loi que X. □

Exemple 7.12. La rotation d'une roue de loterie équilibrée et d'épaisseur constante, tournant sur un cadran gradué régulièrement, les forces de frottement s'exerçant sur l'axe de rotation étant constantes, lorsque l'on suppose que la roue ne s'arrête devant l'aiguille que selon une graduation, donne un exemple concret de phénomène probabiliste suivant une loi uniforme. Si l'on a une ou deux dizaines de graduations, on peut considérer être en présence de l'équiprobabilité d'apparition de certaines graduations. En augmentant indéfiniment le nombre de graduations, on pourra même considérer des intervalles de graduations, ainsi la probabilité d'une graduation donnée parmi un très grand nombres de graduations va tendre vers 0.

D'autre part, la probabilité que l'aiguille se présente entre deux graduations quelconques est proportionnelle à la mesure du secteur que ces graduations délimitent.

2 Lois exponentielles

2 1 Définition

Définition 7.13

Soit a un réel strictement positif. La variable aléatoire réelle X suit la loi exponentielle de paramètre a si elle admet pour densité :

$$f(t) = \begin{cases} a\mathrm{e}^{-at} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

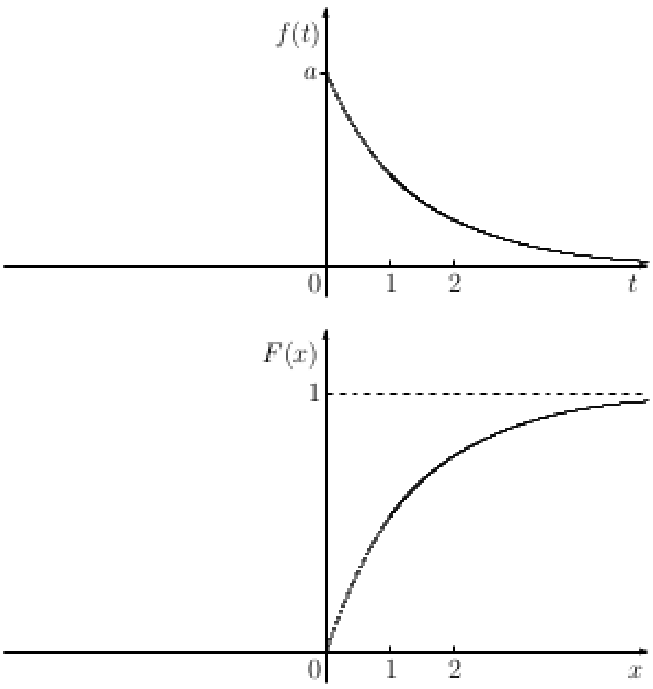


FIGURE 7.1 – Densité et fonction de répartition de loi $\mathrm{Exp}(a)$

2 2 Loi de durée de vie sans vieillissement

Soit $X \sim \mathrm{Exp}(a)$. On dit que X est une loi de durée de vie *sans vieillissement.*

Définition 7.14

Soit T la variable aléatoire correspondant à la durée de vie d'un individu ou d'un objet.

On dit que T suit la *loi de durée de vie sans vieillissement* lorsque la probabilité que l'individu (ou l'objet) soit vivant (ou fonctionne) à l'instant $t+h$ sachant qu'il est vivant (ou qu'il fonctionne) à l'instant t ne dépend pas de son âge t :

$$P_{(T\geq t)}(T \geq t+h) = P(T \geq h).$$

Remarque 7.15. La loi de durée de vie sans vieillissement s'applique-t-elle aux humains ? Non, ce n'est pas un modèle pertinent à long terme. En effet, un bébé à la naissance peut raissonablement espérer vivre plusieurs dizaines d'années alors qu'on peut en dire autant d'un vieillard. Le modèle semble plus proche de la réalité lorsque h est petit. Par exemple la probabilité de vivre encore une minute semble comparable indépendamment de l'âge. Mais cette loi s'applique plutôt à des composants électroniques par exemple.

Proposition 7.16

Une variable aléatoire T suit la loi de durée de vie sans vieillissement si et seulement si elle suit une loi exponentielle.

Développement

Démonstration. Supposons que T suive une loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Par définition d'une probabilité conditionnelle, on a :

$$P_{(T\geq t)}(T \geq t+h) = \frac{P((T \geq t+h) \cap (T \geq t))}{P(T \geq t)}.$$

Or, l'événement $(T \geq t+h)$ est inclus dans l'événement $(T \geq t)$ donc :

$$P((T \geq t+h) \cap (T \geq t)) = P(T \geq t+h) = \mathrm{e}^{-\lambda(t+h)}.$$

Par ailleurs,

$$P(T \geq t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

D'où :

$$P_{(T\geq t)}(T \geq t+h) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+h)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}} = \mathrm{e}^{-\lambda h} = P(T \geq h).$$

Réciproquement, soit T une variable aléatoire suivant une loi de durée de vie sans vieillissement. Alors, pour tout réel t de $\mathbb{R}$, et tout réel h de $\mathbb{R}_+$:

$$P_{(T\geq t)}(T \geq t+h) = P(T \geq h)$$
$$P(T \geq t+h) = P(T \geq h)P(T \geq t).$$

Soit F la fonction de répartition de la variable aléatoire T. Notons φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\varphi(t) = 1 - F(t) = 1 - P(T \leq t) = P(T > t) = P(T \geq t).$$

Comme F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, φ l'est aussi et on a :

$$\varphi(0) = 1 - F(0) = 1 \quad \text{et} \quad \varphi(t+h) = \varphi(h)\varphi(t).$$

Autrement dit, φ vaut 1 en 0 et transforme les sommes en produits.
On en déduit qu'il existe un réel a tel que pour tout réel t de $\mathbb{R}_+$

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{at}.$$

Mais comme φ est en fait une probabilité, on a pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\varphi(t) \leq 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{at} \leq 1 \Leftrightarrow at \leq 0 \Leftrightarrow a \leq 0.$$

On pose $\lambda = -a \in \mathbb{R}_+$. Si a était nul, on aurait, pour tout réel $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\varphi(t) = 1 \Leftrightarrow P(T \geq t) = 1.$$

Donc on a bien $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. D'où, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t} \Leftrightarrow 1 - F(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

et en dérivant :

$$-f(t) = -\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \Leftrightarrow f(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

La variable aléatoire T suit donc une loi exponentielle de paramètre λ. $\square$

Développement

Une autre preuve pour loi de durée de vie sans vieillissement implique loi exponentielle. Soit X une variable aléatoire dont la loi vérifie :

$$\forall s \in \mathbb{R}_+,\ \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad P(X > t + s \mid X > t) = P(X > s) \tag{7.1}$$

et G sa fonction de survie [1] Comme $G = 1 - F$, G est décroissante et continue à droite et tend vers 0 en $+\infty$. De plus, l'écriture de (7.1) suppose implicitement que $G(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$ car sinon $P(\cdot \mid X > t)$ ne serait pas définie. On a aussi :

$$P(X > t + s \mid X > t) = \frac{P(X > t + s)}{P(X > t)} = \frac{G(t+s)}{G(t)}. \tag{7.2}$$

Grâce à (7.2), on voit que la propriété d'absence de mémoire (7.1) équivaut à :

$$\forall s \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R}_+, \frac{G(t+s)}{G(t)} = G(s).$$

La fonction de survie G doit donc être une solution décroissante, continue à droite, tendant vers 0 en $+\infty$ et telle que $0 < G(t) \leq 1$ de l'équation fonctionnelle :

$$\forall s \in \mathbb{R}_+,\ \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad G(t+s) = G(t)G(s). \tag{7.3}$$

En faisant $s = t = t0$ dans (7.3), on obtient $G(0) = G(0)^2$ et comme $G(0) > 0$, on a

$$G(0) = 1. \tag{7.4}$$

En faisant $s = t$ dans (7.3), on obtient $G(2t) = G(t)^2$, puis de proche en proche

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \geq 0, \quad G(nt) = G(t)^n. \tag{7.5}$$

En particulier pour $t = 1/d$, $d \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall d \in \mathbb{N}^*, \quad G\left(\tfrac{n}{d}\right) = G\left(\tfrac{1}{d}\right)^n. \tag{7.6}$$

Lorsque $n = d$, (7.6) donne $G(1) = G(1/d)^d$ d'où :

$$\forall d \in \mathbb{N}^*, \quad G\left(\tfrac{1}{d}\right) = G(1)^{1/d}. \tag{7.7}$$

Nous connaissons maintenant G sur l'ensemble des rationnels positifs puisque (7.4), (7.5), (7.6) et (7.7) nous donnent

$$\forall r \in \mathbb{Q}^+, \quad G(r) = G(1)^r \tag{7.8}$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+ \backslash \mathbb{Q}^+$, x est limite d'une suite décroissante (r_n) de rationnels. Comme G est continue à droite, $G(r_n)$ converge vers $G(x)$. D'autre part l'application $y \mapsto G(1)^y$ est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, en appliquant (7.8) à r_n et en faisant tendre n vers l'infini, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad G(x) = G(1)^x. \tag{7.9}$$

A priori, la constante $G(1)$ est dans $]0\,,1]$. On peut écarter la valeur $G(1) = 1$ car sinon d'après (7.9), la limite en $+\infty$ de G serait 1 alors qu'elle vaut 0.

Finalement, puisque $0 < G(1) < 1$, on peut poser $G(1) = \mathrm{e}^{-a}$ pour un réel $a > 0$ (cela revient à prendre $a = -\ln G(1)$). On peut alors réécrire (7.9) sous la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad G(x) = \mathrm{e}^{-ax}.$$

La fonction de survie G est donc la même que celle de la loi exponentielle de paramètre a, donc X suit cette loi. $\square$

---

1. la fonction de survie d'une loi exponentielle est défini de la manière suivante :

$$G(x) = P(X > x) = 1 - F(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ \mathrm{e}^{-ax} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

2.3 Un exemple

Exemple 7.17. On suppose que la durée de vie X d'une voiture suit une loi exponentielle de paramètre $0,1$.

1. Calculer la probabilité qu'une voiture dépasse 10 ans de durée de vie.
2. On sait qu'une voiture a duré déjà 10 ans. Quelle est la probabilité qu'elle dépasse 12 ans de durée de vie ?
3. Comparer le résultat précédent avec la probabilité que la durée de vie de la voiture dépasse deux ans.

Développement

Solution.

1.
$$P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10)1 - \int_0^{10} 0,1\mathrm{e}^{-0,1t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

2.
$$P_{(X>10)}(X > 12) = \frac{P(X > 12)}{P(X > 10)} = \frac{\mathrm{e}^{-0,1\times 12}}{\mathrm{e}^{-1}} = \mathrm{e}^{-0,2} \simeq 0,82.$$

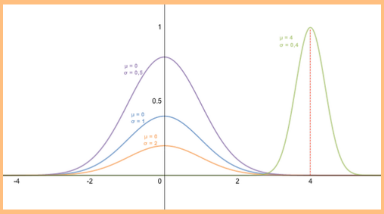
3.
$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \int_0^{2} 0,1\mathrm{e}^{-0,1t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-0,2} \simeq 0,82.$$

□

LEÇON

8

Lois normales



Niveau : BTS

Prérequis : Variable aléatoire, espérance, variance, théorème limite central, loi binomiale, loi de Poisson, fonctions exponentielles, intégrales

1 Premières définitions

Définition 8.1

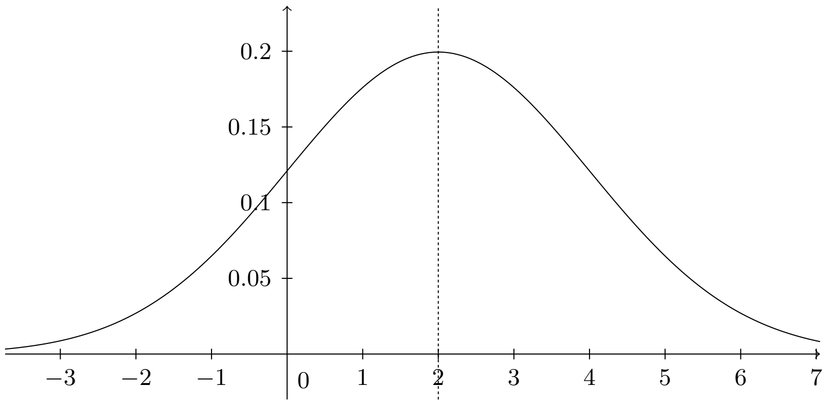
Soit $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que X suit la loi *normale* de paramètres m et σ, qu'on note $\mathfrak{N}(m, \sigma)$, si la densité de probabilité f est définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-1/2[(x-m)/\sigma]^2}.$$

Remarque 8.2. La fonction de répartition F est donnée par l'intégrale :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-1/2[(x-m)/\sigma]^2}.$$

On donne la représentation graphique de la fonction f pour $m = 2$ et $\sigma = 2$.



$m = 2$

Théorème 8.3

Si une variable X suit la loi normale $\mathfrak{N}(m, \sigma)$ alors :

$$\mathbf{E}(X) = m \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2.$$

2 Loi normale centrée

Définition 8.4

Si les paramètres d'une loi normale sont respectivement 0 et 1, alors on dit que la loi normale est *centrée réduite*. On la note $\mathfrak{N}(0, 1)$.

Remarque 8.5. La densité de probabilité associée à la loi normale $\mathfrak{N}(0, 1)$ est la fonction f définie par :

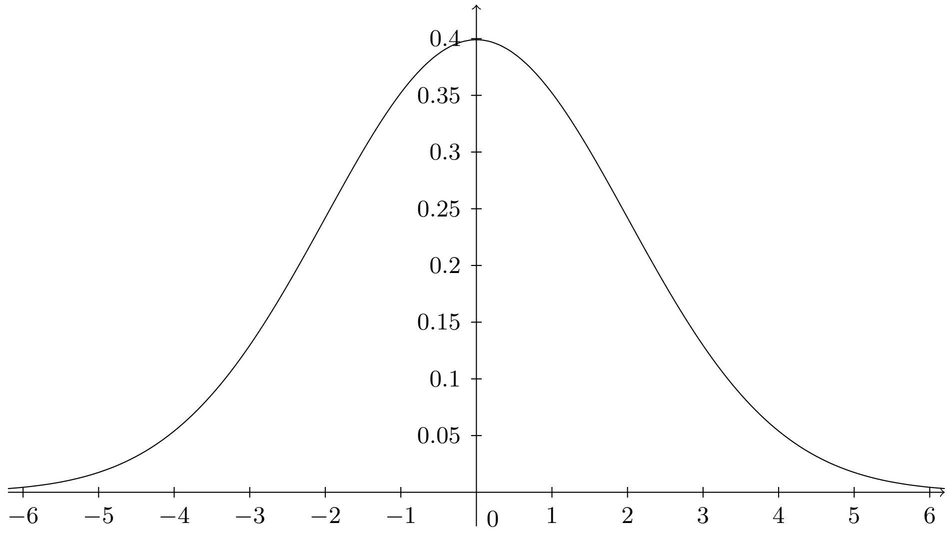
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2}.$$

Propriétés 8.6

a. f est une fonction paire sur $\mathbb{R}$ (pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$.

b. La représentation graphique de f, $\mathcal{C}_f$, est symétriqu par rapport à l'axe (yy').

On donne la représentation graphique de la fonction f (densité de probabilité associée à la loi normale $\mathfrak{N}(0, 1)$.



3 De la loi normale à la loi normale centrée réduite, utilisation de tables

Théorème 8.7

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathfrak{N}(m, \sigma)$. En effectuant le changement de variable suivant :

$$T = \frac{X - m}{\sigma},$$

on obtient une nouvelle variable aléatoire, notée T qui suit la loi normale centrée réduite $\mathfrak{N}(0, 1)$.

Développement

Démonstration. X suit la loi $\mathfrak{N}(m, \sigma)$ donc sa densité de probabilité est la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x - m}{\sigma}\right)^2\right)$$

et on a :

$$F(X) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t - m}{\sigma}\right)^2\right) \mathrm{d}t. \tag{8.1}$$

Faisons le changement de variable d'intégration $u = \frac{t-m}{\sigma}$. On obtient $\mathrm{d}t = \sigma\,\mathrm{d}u$. Lorsque t tend vers $-\infty$, u tend vers $-\infty$; lorsque t vaut x, u vaut $\frac{x-m}{\sigma}$.
Les égalités (8.1) deviennent :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-u^2/2} \sigma\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u.$$

Si on pose maintenant $T = \frac{X-m}{\sigma}$ soit $t = \frac{x-m}{\sigma}$ pour tout réel x, il vient :

$$F(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u.$$

La densité de probabilité T est donc la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-u^2/2}$. T suit la loi normale $\mathfrak{N}(0, 1)$. □

Remarque 8.8. La loi normale $\mathfrak{N}(m, \sigma)$ a deux paramètres mais le changement de variable $T = \frac{X-m}{\sigma}$ permet de travailler avec la loi normale centrée réduite, $\mathfrak{N}(0, 1)$ dont la table est fournie ci-dessous.

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5754
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6627	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7122	0.7156	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7356	0.7389	0.7421	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7793	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8079	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8414	0.8438	0.8461	0,8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8622
1.1	0.8643	0.8665	0.8687	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0,8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9083	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9193	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9485	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9648	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9895	0.9898	0.9901	0.9903	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9926	0.9928	0.9930	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9944	0.9946	0.9948	0.9949	0,9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9958	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

Table pour les grandes valeurs de x

x	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.8	4.0	4.5
$\Phi(x)$	0.99865	0.99904	0.99931	0.99952	0.99966	0.99976	0.999841	0.999928	0.999968	0.999997

FIGURE 8.1 – Table des valeurs de Φ, fonction de répartition de la loi normale standard $\mathfrak{N}(0,1)$

Définition 8.9

Soit T la variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $\mathfrak{N}(0,1)$. La fonctoion de répartiton Π de T est donnée par l'intégrale :

$$\Pi(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$$

sachant que $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}$.

Exemple 8.10. Pour $t \in [0,3]$, on peut lire directement les valeurs dans la table.

$$P(T \leq 2,47) = \Pi(2,47) = 0,9932$$
$$P(T > 2,47) = 1 - \Pi(2,47) = 0,0068.$$

Exemple 8.11. Si $t \in [-3,0]$. On utilise la symétrie de la courbe de la fonction f.

$$P(T \leq -1,27) = P(T \geq 1,23) = 1 - P(T \leq 1,23) = 1 - 0,8907 = 0,1093.$$

Exemple 8.12. Soit X la variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathfrak{N}(m,\sigma)$ où $m = 2,09$ et $\sigma = 0,13$.

On va calculer $P(X \leq 2,35)$ et $P(1,895 \leq X \leq 2,285)$. Dans les deux calculs, on procède au changement de variable : $T = \frac{X-m}{\sigma}$.

$$\begin{aligned} P(X \leq 2,35) &= P\left(\frac{X-2,09}{0,13} \leq \frac{2,35-2,09}{0,13}\right) \\ &= P\left(T \leq \frac{0,26}{0,13}\right) = P(T \leq 2) = 0,9772. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(1,895 \leq X \leq 2,285) &= P\left(\frac{1,895-2,09}{0,13} \leq \frac{X-2,09}{0,13} \leq \frac{2,285-2,09}{0,13}\right) \\ &= P\left(\frac{-0,195}{0,13} \leq T \leq \frac{0,195}{0,13}\right) = P(-1,5 \leq T \leq 1,5) \\ &= P(T \leq 1,5) - P(T < -1,5) = P(T \leq 1,5) - (1 - P(T \leq 1,5)) \\ j &= 2P(T \leq 1,5) - 1 = 2 \times 0,9332 - 1 = 0,8664. \end{aligned}$$

4 Convergence

4.1 Théorème limite centrée

Théorème 8.13

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles définies sur le même espace de probabilité, suivant la même et indépendantes. On note μ l'espérance et σ l'écart de la loi considérée (on suppose qu'ils existent et soient fini).

Soit $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et $\overline{X}_n = \frac{S_n}{n}$. La variable aléatoire $Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ converge en loi vers la loi centrale réduite $\mathfrak{N}(0,1)$, c'est-à-dire :

$$\lim_{n\to+\infty} P(Z_n \leq z) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z\right) = \Phi(z).$$

4 2 Approximation de la loi binomiale

Théorème 8.14

Pour n « assez grand » ($n \geq 50$) et pour p ni voisin de 0, ni voisin de 1, tels que $np(1-p) > 10$, on peut approcher la loi binomiale $\operatorname{Bin}(n,p)$ par la loi normale $\mathfrak{N}(m,\sigma)$ où $m = np$ et $\sigma = \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$. On a alors :

$$P(X=k) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{k-m}{\sigma}\right)^2\right).$$

Exemple 8.15. Lançons cinquante fois une pièce de monnaie équilibrée. Soit X la variable aléatoire mesurant le nombre de « face » ainsi obtenu. On sait que X suit la loi binomiale $\operatorname{Bin}(50,1/2)$.

L'espérance mathématique de X est $\mathbf{E}(X) = np = 25$ et son écart type :

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{\frac{25}{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \simeq 3,54.$$

On veut calculer $P(X=25)$:

$$P(X=25) = \frac{50!}{25!25!}\left(\frac{1}{2}\right)^{50}.$$

Ce calcul semble compliquer car 25! et 50! est très très grand.

D'après le théorème précédent, on peut approximer la loi binomiale $\operatorname{Bin}(50,1/2)$ par la loi normale $\mathfrak{N}(25,5/\sqrt{2})$ (ceci est légitime car $n \geq 50$, $p = 1/2$, $npq > 10$).

4 3 De la loi de Poisson à la loi binomiale

Théorème 8.16

Si $(X_n)_n$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi de Poisson $\operatorname{Pois}(\lambda)$ et si $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ alors S_n suit la loi de Poisson $\operatorname{Pois}(n\lambda)$.

Développement

Démonstration. La démonstration se fait par récurrence sur n.

- Pour $n = 1$, X_1 suit la loi de Poisson $\operatorname{Pois}(\lambda)$.
- Si $S_n = X_1+\cdots+X_n$ suit la loi de Poisson $\operatorname{Pois}(n\lambda)$, $S_{n+1}+S_n+X_{n+1}$, et vu que S_n et X_{n+1} sont indépendantes, que S_n suit la loi de Poisson $\operatorname{Pois}(n\lambda)$ et X_{n+1} la loi de Poisson $\operatorname{Pois}(\lambda)$), $S_n + X_{n+1} = S_{n+1}$ suit la loi de Poisson de paramètre $n\lambda + \lambda = (n+1)\lambda$.

□

S_n suit la loi de Poisson $\operatorname{Pois}(n\lambda)$ donc $\mathbf{E}(S_n) = n\lambda$ et $\operatorname{Var}(S_n) = n\lambda$. D'après le théorème central limite, la loi de S_n peut être approximée par la loi normale $\mathfrak{N}(\mathbf{E}(S_n), \operatorname{Var}(S_n))$, c'est-à-dire $\mathfrak{N}(n\lambda, n\lambda)$.

En pratique, lorsque $\lambda \geq 15$, on peut approximer la loi de Poisson $\operatorname{Pois}(\lambda)$ par la loi normale $\mathfrak{N}(\lambda,\lambda)$.

Exemple 8.17. Si X suit la loi de Poisson $\operatorname{Pois}(16)$,

$$P(X=16) = \mathrm{e}^{-16}\frac{16^{16}}{16!} \approx 0,0992.$$

En approximant la loi $\operatorname{Pois}(16)$ par la loi $\mathfrak{N}(16,16)$ de fonction de répartition F, on obtient :

$$P(X=16) \approx F(16,5) - F(15,5) = \Phi\left(\frac{0,5}{4}\right) - \Phi\left(-\frac{0,5}{4}\right) = 2\Phi(0,125) - 1 \approx 0,0995.$$

Le gain de temps est surtout sensible pour le calcul des valeurs de la fonction de répartition :

$$P(X \leq 20) \approx F(20,5) = \Phi\left(\frac{20,5-16}{4}\right) = \Phi(1,125) \approx 0,8697$$

(alors qu'en gardant la loi de Poisson, il faudrait faire la somme de 21 termes !)

Théorème 8.18

Théorème de De Moivre-Laplace

Si S_n est une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres n et $p]0\,,1[$, on a avec $q := 1-p$,

$$S_n^* := \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} = \sqrt{\frac{n}{pq}}\left(\frac{S_n}{n} - p\right) \xrightarrow[\text{loi}]{n\to+\infty} Z$$

Exemple 8.19. Soit une urne qui contient des boules rouges et des boules vertes, la proportion de chaque couleur étant inconnue. On effectue n tirages avec remise et on cherche à estimer la proportion p de boules rouges. On pose alors $X_i = 1$ si le i^{e} tirage donne une boule rouge et $X_i = 0$ sinon. $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ est le nombre aléatoire de boules rouges sorties en n tirages et S_n/n la fréquence observée de sortie d'une boule rouge.

Le théorème de De Moivre-Laplace va nous permette de construire des intervalles de confiance pour p. Considérons, pour $t > 0$, l'événement :

$$A_{n,t} := \left\{\omega \in \Omega,\ -t \leq \sqrt{\tfrac{n}{pq}}\left(\tfrac{S_n(\omega)}{n} - p\right) \leq t\right\}.$$

Le théorème de De Moivre-Laplace nous dit que pour n assez grand, on peut utiliser l'approximation :

$$P(A_{n,t}) \simeq \Phi(t) - \Phi(-t) = 2\Phi(t) - 1.$$

Cela peut se réécrire :

$$P\left(\frac{S_n}{n} - t\sqrt{\frac{pq}{n}} \leq p \leq \frac{S_n}{n} + t\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) = 2\Phi(t) - 1 + \varepsilon_n.$$

Or, on ignole la valeur de p donc celle de $\sqrt{pq}$. Mais, on peut majorer cette quantité car $p(1-p)$ est maximal pour $p = 1/2$. D'où :

$$\sqrt{pq} \leq \frac{1}{2}.$$

On note :

$$B_{n,t} = \left\{\omega \in \Omega,\ \tfrac{S_n(\omega)}{n} - \tfrac{t}{2\sqrt{n}} \leq p \leq \tfrac{S_n(\omega)}{n} + \tfrac{t}{2\sqrt{n}}\right\},$$

et on a $A_{n,t} \subset B_{n,t}$, d'où :

$$P(B_{n,t}) \geq 2\Phi(t) - 1 + \varepsilon_n.$$

En pratique n est fixé et on connait des valeurs numérqiues explicites $x_1, \ldots, x_n$ que l'on interprète comme les valeurs de $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$ pour un même ω tiré au sort (suivant P. On a donc d'une valeur numérique explicite de $\frac{S_n(\omega)}{n} = \frac{(x_1+\cdots+x_n)}{n}$. Proposer pour le paramètre inconnu p l'intervalle de confiance :

$$I_{n,t} = [0,53 - t/(2\sqrt{n}); 0,53 + t/2\sqrt{n}]$$

c'est faire le pari que le ω observé est bien dans $B_{n,t}$. La probabilité de gagner ce pari est minorée par $2\Phi(t) - 1 + \varepsilon_n$. On dit que $I_{n,t}$ est un intervalle de confiance pour p avec un niveau d'au moins $2\Phi(t) - 1 + \varepsilon_n$. En pratique, on détermine t de façon approcée grâce à la tabulation de Φ. Par exemple pour un niveau de confiance de 95%, on est ramené à la résolution de l'équation

$$\Pi(t) = \frac{1,95}{2} = 0,975$$

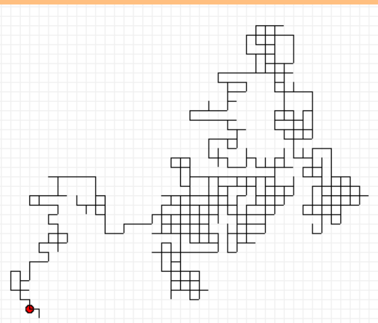
d'où $t \simeq 1,96$, ce qui nous donne l'intervalle :

$$I_n = \left[\frac{S_n(\omega)}{n} - \frac{1,96}{2\sqrt{n}}; \frac{S_n(\omega)}{n} + \frac{1,96}{2\sqrt{n}}\right] \quad \text{au niveau de confiance } 95\%.$$

LEÇON

9

Marches aléatoires



Niveau : Terminale S
Prérequis : aucun

1 Chaînes de Markov

Définition 9.1

Chaîne de Markov I

Une chaîne de Markov est une suite de variables aléatoires $(X_n,\ n \in \mathbb{N})$ qui permet de modéliser l'évolution dynamique d'un système aléatoire : X_n représente l'état du système à l'instant n.

Propriété 9.2

Propriété de Markov

L'évolution future du système ne dépend du passé qu'à travers de sa valeur actuelle. Autrement dit, conditionnement à X_n, $(X_0, \dots, X_n)$ et $(X_{n+k},\ k \in \mathbb{N})$ sont indépendantes.

Les applications des chaînes de Markov sont très nombreuses :

– réseaux,
– génétique ddes populations,
– mathématiques financières,
– gestion de stock,
– alogirthmes stochastiques d'optimisation,
– simulation.

On se place maintenant sur E un espace discret, c'est-à-dire un espace au plus dénombrable muni de la topologie discrète où tous les points de E sont isolés. On considère la tribu $\mathcal{E} = \mathcal{P}(E)$.

Définition 9.3

Matrices stochastiques

Une matrice $P = (P(x,y))_{x,y \in E}$ est dite matrice stochastique si ses coefficients sont positifs et la somme sur une ligne des coefficients est égale à 1 :

a. $P(x,y) \geq 0$;
b. $\sum_{z \in E} P(x,z) = 1$;

pour tous $x, y \in E$.

On donne une nouvelle définition des chaînes de Markov basée sur les probabilités.

Définition 9.4

Chaîne de Markov II

Soit P une matrice stochastique sur E. Une suite de variables aléatoires $(X_n,\ n \in \mathbb{N})$ à valeurs dans E est appelée chaîne de Markov de matrice de transition P si pour tous $n \in \mathbb{N}$, $x \in E$, on a :

$$P(X_{n+1} \mid X_n, \dots, X_0) = P(X_{n+1} = x \mid X_n) = P(X_n, x).$$

On dit que la chaîne de Markov est issue de μ_0 si la loi de X_0 est μ_0.

Remarques 9.5.

a. Comme l'espace d'état est discret, l'équation de la définition précédente est équivalente à : pour tous $x_0, \dots, x_n \in E$, tels que $P(X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) > 0$:

$$P(X_{n+1} = x \mid X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) = P(X_{n+1} = x \mid X_n = x_n) = P(X_n, x).$$

b. Si $P(X_0 = x) = 1$, autrement dit μ_0 est la masse de Dirac en x on dira plus simplement que la chaîne de Markov.

Proposition 9.6

La loi d'une chaîne de Markov $(X_n,\ n \in \mathbb{N})$ est entièrement caractérisée par sa matrice de transition, P et la loi de X_0, μ_0. De plus, on a, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $x_0, \dots, x_n \in E$,

$$P(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = \mu_0(x_0) \prod_{k=1}^{n} P(x_{k-1}, x_k).$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, \ldots, x_n \in E$. Si $P(X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}) > 0$, une utilisation successive de la formule des probabilités conditionnelles donne :

$$\begin{aligned} P(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) &= P(X_0 = x_0) P(X_1 = x_1 \mid X_0 = x_0) \cdots P(X_n = x_n \mid X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}) \\ &= \mu_0(x_0) \prod_{k=1}^{n} P(x_{k-1}, x_k). \end{aligned}$$

Si $P(X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}) = 0$,

- soit $P(X_0 = x_0) = 0$, c'est-à-dire $\mu_0(x_0) = 0$ et donc l'égalité de la proposition reste vraie ;
- soit il existe $m \in \{1, \ldots, n-1\}$ tel que $P(X_0 = x_0, \ldots, X_{m-1} = x_{m-1}) > 0$ et $P(X_0 = x_0, \ldots, X_m = x_m) = 0$. Dans ce dernier cas, on peut utiliser l'égalité de la proposition avec $n = m$ et obtenir que :

$$0 = P(X_0 = x_0, \ldots, X_m = x_m) = \mu_0(x_0) \prod_{k=1}^{m} P(x_{k-1}, x_k).$$

  On en déduit que l'égalité de la proposition reste vraie avec les deux membres nuls.

En conclusion, l'égalité de la proposition est toujours vérifié. □

On donne un exemple de chaînes de Markov qui sera le but de l'exposé.

Exemple 9.7. La marche aléatoire symétrique simple sur $\mathbb{Z}$, $S = (S_n,\ n \geq 0)$, est définie par :

$$S_n = S_0 + \sum_{k=1}^{n} Z_k$$

où $Z = (Z_n,\ n \geq 1)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, $P(Z_n = 1) = P(Z_n = -1) = 1/2$, et S_0 est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$ indépendante de Z.

On vérifie facilement que la marche aléatoire simple est une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{Z}$ de matrice de transition :

$$P(x, y) = \begin{cases} 0 \text{ si } |x - y| \neq 1 \\ 1/2 \text{ si } |x - y| = 1 \end{cases} \qquad \text{pour } x, y \in \mathbb{Z}.$$

2 Chaînes de Markov au lycée

D'après un article de Louis-Marise Bonneval paru dans le bulletin APMEP n° 503.

L'expression « chaîne de Markov » ne figure dans aucun libellé de programme de lycée. Mais on peut lire dans le programme de la spécialité mathématiques de Terminale S, sous le titre « Matrices et suites » :

Il s'agit d'étudier des exemples de processus, déterministes ou stochastiques, à l'aide de suites ou de matrices.

Exemples de problèmes

- Matrice aléatoire simple sur un graphe à deux ou trois sommets.
- Matrice aléatoire sur un tétraèdre ou un graphe à N sommets (étude asymptotique d'une marche aléatoire).

et dans le programme de la spécialité mathématiques de Terminale ES : *Les graphes probabilistes permettent d'étudier des phénomènes d'évolution simples, et de faire le lien avec les suites.*

Contenus : Graphe probabiliste à deux ou trois sommets : matrice de transition, état stable d'un graphe probabiliste.

L'article suggère cinq problèmes permettant de mieux cerner la notion de marches aléatoires.

21 Bonus et malus en assurance automobile

Un contrat d'assurance automobile comporte trois tarifs de cotisation annuelle : bas, intermédiaire, haut.

– La première année, l'assuré paye le tarif intermédiaire.

– S'il n'a été responsable d'aucun accident pendant une année, il passe au tarif inférieur l'année suivante (s'il est déjà au tarif bas, il y reste).

– S'il a été responsable d'au moins un accident au cours d'une année, il passe au tarif supérieur l'année suivante (s'il est déjà au tarif haut, il y reste).

La compagnie d'assurance estime à 10% la probabilité qu'un assuré pris au hasard soit responsable d'au moins un accident au cours d'une année.

Quelle sera à long terme la répartition des assurés entre les trois catégories de tarif ?

22 Une ronde sur un triangle

Nous sommes au XIVe siècle, dans le château de Poitiers. Il est triangulaire, flanqué d'une tour à chaque sommet : Est, Nord, Sud. Partant de la tour Est, la sentinelle fait sa ronde sur le rempart. À chaque sommet du triangle, pour tromper l'ennemi (et l'ennui), il jette une pièce : pile, il continue dans le même sens ; face, il repart en sens inverse.

Pourra-t-il assurer une surveillance comparable dans les trois directions ?

23 La collection d'autocollants

Chaque semaine, Anna achète une tablette de chocolat Cébon. Chaque tablette contient un autocollant représentant soit une étoile, soit un cœ ur, soit un trèfle à quatre feuilles. Anna les collectionne pour décorer son journal intime.

En supposant les trois motifs équirépartis entre les tablettes, **combien de tablettes suffit-il d'acheter pour être sûr à plus de 95% d'avoir les trois types de dessin ?**

24 Pertinence d'une page web

Le réseau Internet peut être représenté comme un gigantesque graphe (non probabilisite), dont les N sommets sont les *pages*, et les flèches les *liens* qui pointent d'une page à une autre.

Un moteur de recherche, pour être utile, doit classer les pages par ordre de pertinence.

Comment mesurer la pertinence d'une page ?

25 Les urnes d'Ehrenfest

On dispose de deux urnes A et B, et de N boules numérotées de 1 à N. Au début, toutes les boules sont dans l'urne A. De temps à autre, on tire au hasard un numéro entre 1 et N, et *on change d'urne* la boule correspondante.

Au bout de combien d'étapes peut-on espérer que toutes les boules soient à nouveau dans l'urne A **?**

26 Bonus : Un exercice de 1re S

Une fourmi parcourt les côtés d'un carré $ABCD$ en partant du sommet A et met 1 minute à parcourir un côté.

Arrivé à l'un des sommets, elle choisit au hasard l'un ou l'autre des deux côtés issus de ce sommet pour poursuivre sa marche. On dit que la fourmi a traversé le carré lorsqu'elle atteint pour la première fois le sommet C.

On observe la fourmi pendant au plus 4 minutes et on note X le temps de la traversée. On pose $X = 0$ si la fourmi n'a pas atteint le point C pendant l'observation.

1. Faire un schéma du carré et les déplacements possibles de la fourmi.

2. Représenter cette expérience aléatoire à l'aide d'un arbre.

3. Déterminer la loi de proabilité de la variable aléatoire X.

4. Quelle est la probabilité que la fourmi ait traversé le carré pendant les 4 minutes.

3 Un cas particulier de chaîne de Markov : marches aléatoires sur $\mathbb{Z}$

3.1 Une activité d'introduction sur Algobox

Activité A.

Sur un axe horizontal, un pion placé à l'origine O du repère se déplace de la manière suivante :

- Si le lancer d'une pièce équilibrée donne Pile, on déplace le pion d'une unité vers la droite.
- Si le lancer d'une pièce équilibrée donne Face, on déplace le pion d'une unité vers la gauche.

Quelle est la probabilité que le pion ne revienne jamais à sa position initiale ?

Développement

On va simuler la situation de la manière suivante : on effectue un certain nombre de déplacements, fixé par l'utilisateur, et on teste si le pion est revenu à sa position initiale au cours de ces déplacements (on peut compter le nombre de fois où il est revenu à sa position initiale).

```
VARIABLES
alea EST_DU_TYPE NOMBRE
X EST_DU_TYPE NOMRBE
C EST_DU_TYPE NOMBRE
I EST_DU_TYPE NOMRBE
N EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
   AFFICHER "Entrer le nombre de déplacement souhaités"
   LIRE N
   X PREND_LA_VALEUR 0
   TRACER_POINT (0,0)
   POUR I ALLANT_DE 1 A N
      DEBUT_POUR
       alea PREND_LA_VALEUR floor(2*random())
        SI (alea==0) ALORS
          DEBUT_SI
             X PREND_LA_VALEUR X-1
         FIN_SI
        SINON
           DEBUT_SINON
              X PREND_LA_VALEUR X+1
           FIN_SINON
         TRACER_POINT (I,X)
         SI (X==0) ALORS
           DEBUT_SI
             AFFICHER "Le pion est revenu à sa position initiale après "
              AFFICHER I
              AFFICHER " deplaçements."
             C PREND_LA_VALEUR C+1
            FIN_SI
       FIN_POUR
     AFFICHER "Le pion est revenu "
     AFFICHER C
     AFFICHER " fois à sa position initiale."
FIN_ALGORITHME
```

En exercice, vous expliquerez le fonctionnement de l'algorithme.

3 2 Nombre de chemins et probabilités

On appelera *chemin de* (m, a) *et* (n, b) une ligne brisée, c'est-à-dire une suite de segments joignant les points successifs (m_0, a_0), (m_1, a_1), …, (m_r, a_r) qui commence au point $(m_0, a_0) = (m, a)$ et se termine au point $(m_r, a_r) = (m, b)$ et tel que, pour tout $0 \leq i < r$, on ait $m_{i+1} = m_i + 1$ et $a_{i+1} = a_i + 1$ ou $a_i - 1$.

Propriété 9.8

Soient (m, a) et (n, b) deux couples d'entiers. Si $|b - a| \leq n - m$ et si $n - m$ et $b - a$ ont même parité, alors le nombre de chemins de (m, a) et (n, b) est exactement

$$C_n = \binom{n-m}{\frac{n-m}{2} + \frac{b-a}{2}}$$

Développement

Démonstration.

- Étant donné un chemin joignant les points (m_0, a_0), (m_1, a_1), …, (m_r, a_r), il est clair que la partié de m_{i+1} est l'inverse de la parité de m_i, tout comme la parité de a_{i+1} est l'inverse de celle de a_i. Si la suite m_0, m_1, …, m_r change un nombre pair de fois de parité, il en va de même pour la suite a_0, a_1, …, a_r (idem dans le cas impair), et donc les extrémités (m, a) et (n, b) vérifient la propriété « $n - m$ et $b - a$ ont même parité ».
- De même, si $|b - a| > n - m$, alors pour joindre (m, a) et (n, b), il faudrait au moins $|b - a|$ montées (ou descentes), en seulement $n - m$ étapes.
- Enfin, si $|b - a| \leq n - m$ et $n - m$ et $b - a$ n'ont pas même parité, alors tout chemin joignant (m, a) et (n, b) est obtenu en « montant » $\frac{n-m}{2} + \frac{b-a}{2}$ fois et en « descendant » $\frac{n-m}{2} - \frac{b-a}{2}$.

  En effet, si p désigne le nombre de montées, c'est-à-dire le nombre d'indices i tels que $a_{i+1} = a_i + 1$, et d le nombre de descentes, c'est-à-dire le nombre d'indices i tels que $a_{i+1} = a_i - 1$ alors on a $n - m = p + d$ (les $n - m$ pas du chemin étant soit des montées, soit des descentes), et $b - a = p - d$ (la progression totale est égale au nombre de fois où l'on a monté, p, multiplié par la valeur de la montée, 1, plus le nomber de fois où l'on a descendu, d, multiplié par la valeur de la progression dans ce cas, -1). En additionnant membre à membre ces deux égalités, on obtient bien $p = \frac{n-m}{2} + \frac{b-a}{2}$.

Un chemin joignant (m, a) à (n, b) est alors caractérisé par l'ordre dans lequel on monte et on descend, c'est-à-dire par les indices i où l'on monte. Il s'agit donc de choisir $\frac{n-m}{2} + \frac{b-a}{2}$ indices parmi $n - m$, soit un nombre de chemins de $\binom{n-m}{\frac{n-m}{2}+\frac{b-a}{2}}$. □

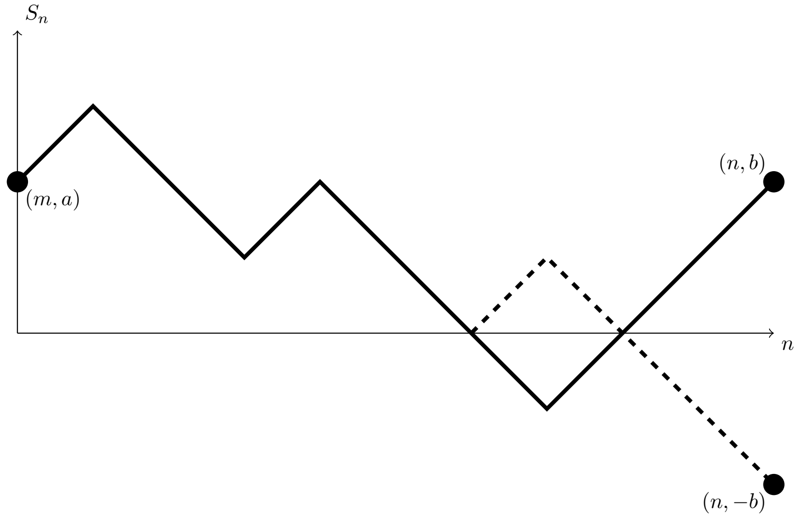
Théorème 9.9

Principe de réflexion

Soient a et b deux entiers strictement positifs, et $m < n$ deux entiers. Alors le nombre de chemins joignant (m, a) à (n, b) et touchant l'axe des abscisses est exactement le nombre de chemins joignant (m, a) à $(n, -b)$.

Développement

Démonstration. La prevue de ce principe est assez simple : elle repose sur l'idée qu'un chemin joignant (m, a) à $(n, -b)$ passe nécessairement par la valeur 0. On peut alors établir une correspondance bijective entre les chemins de ces deux types par symétrie d'une partie de ces chemins (à partir du moment où l'on touche l'axe des abscisses) par rapport à ce même axe.



□

3 3 Application sur des exemples

Exemple 9.10. Au cours d'un scrutin opposant deux candidats A et B, le candidat A obtient 600 voix et le candidat B en obtient 400. Quelle est la probabilité pour que A ait été majoritaire (au sens large) tout au long du dépouillement ?

Développement

Nous allons modéliser le dépouillement par un chemin dans le plan. Lors du processus de dépouillement, on ouvre les enveloppes uen à unbe, cahcune contenant un bulletin « A » ou un bulletin « B ». Si l'on affecte la valeur 1 aux bulletins « A » et la valeur -1 aux bulletins « B », alors on peut représenter le déroulement du dépouillement par un chemin qui part du point $(0,0)$, va monter 600 fois et descendre 400 fois, donc qui arrive au point $(1000,200)$. On considère que tous les ordres possibles d'apparition, au cours du dépouillement, des bulletins « A » et « B » sont équiprobables. Le nombre total de dépouillements possibles est C_{1000}^{600}.

On cherche le nombre de chemins de $(0,1)$ à $(1000,201)$ qui ne touchent pas l'axe des abscisses. C'est le nombre total de chemins de $(0,1)$ à $(1000,201)$ (à savoir C_{1000}^{600}) moins le nombre de chemins de $(0,1)$ à $(1000,201)$ qui touchent l'axe, c'est-à-dire le nombre de chemins de $(0,1)$ à $(1000,-201)$, soit C_{1000}^{399}.

La probabilité cherchée, sous l'hypothèse que tous les dépouillements possibles sont équiprobables, est donc :

$$\frac{C_{1000}^{600}-C_{1000}^{399}}{C_{1000}^{600}}=1-\frac{\frac{1000!}{399!601!}}{\frac{1000!}{400!600!}}=1-\frac{400}{601}=\frac{201}{601}\simeq 0{,}334$$

La probabilité que le candidat ait été majoritaire (au sens large) tout au long du dépouillement est d'environ $0{,}334$.

Exemple 9.11. 100 personnes font la queue à un guichet de cinéma. La place coûte 5 €. 60 personnes ont un billet de 5 €, tandis que les 50 autres ont des billets de 10 €. Combien faut-il prévoir de billets de 5 € en caisse pour qu'avec une probabilité d'au moins 95%, tous les spectateurs soient servis, dans l'ordre dans leuel ils se présentent à la caisse.

Développement

Si l'on appelle S_0 le nombre de billets de 5 € dans la caisse au moment initial, et ue l'on trace la courbe représentative du nombre de billets de 5 € dans la caisse en fonction du nombre de spectateur qui ont déjà acheté leur billet, on obtient exactement un graphe du type voulu. À chaque fois qu'un spectateur passeà la caisse, soit il a un billet de 5 € et paye avec, auquel cas le nombre de billets de 5 € dans la caisse augmente d'un, soit il n'a qu'un billet de 10 €, auquel cas le nombre de billets de 5 € dans la caisse diminue d'un, qui correspond à la monnaie qu'on lui rend.

Au total, sur les 100 spectateurs, 60 donnent un billet de 5 € et 40 en reçoivent un, et donc on a à la fin S_0+20 billets de 5 €. La courbe tracée est donc un chemin de $(0,S_0)$ et $(100,S_0+20)$. Pour que tous les spectateurs soient servis, dans l'ordre dans lequel ils se présentent à la caisse, il faut que le chemin ne traverse pas l'axe des abscisses.

Il s'agit donc de trouver le plus petit S_0 pour lequel la probabilité de traverser l'axe des abscisses soit inférieur à 5%. Là aussi, étant donné S_0, la probabilité p_{S_0} pour que le chemin traverse l'axe des abscisses est la probabilité pour qu'un chemin de $(0, S_0+1)$ à $(100, S_0+21)$ touche l'axe des abscisses. C'est donc le rapport du nombre de chemins de $(0, S_0+1)$ à $(100, -(S_0+21))$ au nombre de chemins de $(0, S_0+1)$ à $(100, S_0+21)$. On trouve :

$$p_{S_0} = \frac{\mathrm{C}_{100}^{50-(S_0+11)}}{\mathrm{C}_{100}^{60}} = \frac{60!40!}{(39-S_0)!(61+S_0)!} = \frac{\prod_{k=40-S_0}^{40} k}{\prod_{k=61}^{61+S_0} k}.$$

On calcule les valeurs successives de p_{S_0} lorsque S_0 varie. On trouve les valeurs approchées suivantes :

S_0	0	1	2	3	4	5
p_{S_0}	$0,656$	$0,412$	$0,249$	$0,144$	$0,080$	$0,042$

Il faut donc 5 billets au départ dans la caisse pour qu'avec une probabilité d'au moins 95%, tous les spectateurs soient servis.

3 4 Premier retour en 0

Lemme 9.12 La probabilité pour que S_{2n} soit nul est $P(S_{2n}=0) = \frac{\mathrm{C}_{2n}^n}{2^{2n}}$.

Développement

Démonstration. En effet, le nombre de chemins de $(0,0)$ à $(2n, 0)$ est exactement C_{2n}^n puisqu'il correspond au nombre de façon de choisir les n montées (et donc les n descentes). Comme il y a par ailleurs 2^{2n} trajectoires possibles de longueur $2n$ (2 choix possibles à chaque étape), et que toutes les trajectoires sont équiprobables, on a bien :

$$P(S_{2n}=0) = \frac{\mathrm{C}_{2n}^n}{2^{2n}}.$$

□

Si $E := \{n \geq 1,\ S_n = 0\}$, notons :

$$T_0 = \begin{cases} \inf E \text{ si } \mathrm{card}(E) < +\infty \\ +\infty \text{sinon} \end{cases}.$$

T_0 correspond à l'instant de premier retour en 0. S'il est fini, il est nécessairement pair.

Théorème 9.13 La probabilité pour que le premier retour en 0 ait lieu à l'instant $2n$ est :

$$P(T_0 = 2n) = \frac{1}{2^{2n-1}}(\mathrm{C}_{2n-2}^{n-1} - \mathrm{C}_{2n-2}^{n-2}) = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1} n!(n-1)!}.$$

Développement

Démonstration. On distingue deux cas selon que l'on a $S_1 = 1$ ou $S_1 = -1$. Si $S_1 = 1$, alors il s'agit de calculer le nombre de chemins de $(1,1)$ à $(2n, 0)$ qui ne touchent pas l'axe des abscisses avant l'étape $2n$. Mais le dernier pas est alors imposé : on a nécessairement $S_{2n-1} = 1$, puisque l'on cherche des chemins qui aboutissent à la valeur 0 sans avoir jamais touché l'axe des abscisses. Il s'agit donc de dénombrer le nombre de chemins de $(1,1)$ à $(2n-1, 1)$ ne touchant pas l'axe des abscisses, c'est-à-dire le nombre total de chemins moins le nombre de chemins qui touchent l'axe. D'après le principe de reflexion, ce dernier est égal au nombre de chemins de $(1,1)$ à $(2n-1, -1)$. Au total on trouve :

$$\mathrm{C}_{2n-2}^{n-1} - \mathrm{C}_{2n-2}^{n-2}.$$

Conditionnellement à l'hypothèse $S_1 = 1$, on trouve donc une probabilité pour que $T_0 = 2n$ de $\frac{\mathrm{C}_{2n-2}^{n-1} - \mathrm{C}_{2n-2}^{n-2}}{2^{2n-2}} \times \frac{1}{2}$. Le premier terme du produit est la probabilité pour que la marche aléatoire passe de la valeur $S_1 = 1$ à la valeur $S_{2n-1} = 1$ sans toucher l'axe (rapport du nombre de trajectoires favorables sur le nombre total de possibilités), et le facteur $1/2$

correspond à la probabilité pour que S_{2n} soit nul lorsque l'on a $S_{2n-1} = 1$ (il faut que le dernier pas soit de -1). Lorsque $S_1 = -1$, la situation est totalement symétrique, donc on trouve exactement la même probabilité. Au total, on a trouvé :

$$P(T_0 = 2n) = \frac{C_{2n-2}^{n-1} - C_{2n-2}^{n-2}}{2^{2n-1}}.$$

En revenant aux expressions définissant les nombres C_n^k on obtient :

$$\begin{aligned} P(T_0 = 2n) &= \frac{1}{2^{2n-1}} \left(\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} - \frac{(2n-2)!}{n!(n-2)!} \right) \\ &= \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1} n!(n-1)!}(n - (n-1)) \\ &= \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1} n!(n-1)!} \end{aligned}$$

On remarque, enfin, que cette dernière expression nous permet d'obtenir la relation $P(T_0 = 2n) = P(S_{2n-2} = 0) - P(S_{2n} = 0)$. En effet, on a :

$$\begin{aligned} P(S_{2n-2} = 0) - P(S_{2n} = 0) &= \frac{C_{2n-2}^{n-1}}{-} \frac{C_{2n}^{n}}{2^{2n}} \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \left(4\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} - \frac{(2n)!}{n!n!} \right) \\ &= \frac{(2n-2)!}{2^{2n} n!n!}(4n^2 - 2n(2n-1)) \\ &= \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1} n!(n-1)!}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$P(T_0 = 2n) = P(S_{2n-2} = 0) - P(S_{2n} = 0).$$

□

3.5 Modèle du joueur

En exercice.

Exemple 9.14. Une personne dispose d'un capital de départ c (c entier). Elle joue à pile ou face de manière répété une somme de 1, jusqu'à atteindre un but b qu'elle s'est fixée au départ, ou bien jusqu'à ce qu'elle ne puisse plus jouer (lorsque sa fortune atteint la valeur 0). Quelle est la probabilité pour qu'elle atteigne son objectif b ?

4 Marches aléatoires sur $\mathbb{Z}^d$

4.1 En deux dimensions

On considère une marche aléatoire sur le réseau plan $\mathbb{Z}^2$. Il y a ici *quatre* mouvements possibles à chaque site : en avant, en arrière, à droite, à gauche.

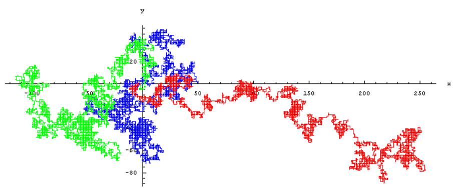


FIGURE 9.1 – Trois marches aléatoires (indépendantes) isotropes sur le réseau $\mathbb{Z}^2$

Pour de longues marches, la distribution de la position finale du marcheur se comporte asymptotiquement comme une distribution gausienne.

4.2 En trois dimensions

On considère une marche aléatoire sur le réseau cubique $\mathbb{Z}^3$. Il y a ici *six* mouvements possibles à chaque site : en avant, en arrière, à droite, à gauche, en haut et en bas.

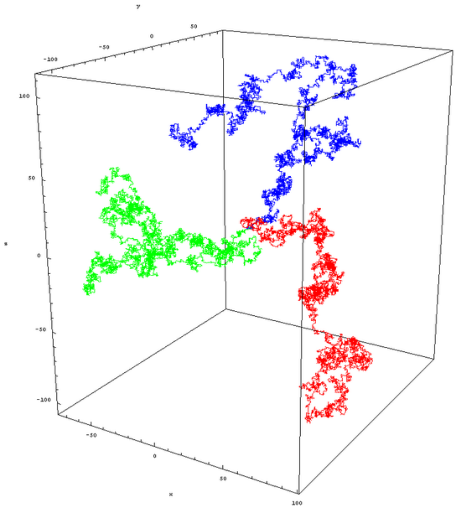


FIGURE 9.2 – Trois marches aléatoires (indépendantes) isotropes sur le réseau $\mathbb{Z}^3$

4 3 Récurrence et dimensionnalité

1. Récurrence

Considérons une marche aléatoire *isotrope* (c'est-à-dire tels que chaque mouvement, à un instant fixé, ait la même probabilité d'être choisi) sur le réseau $\mathbb{Z}^d$ à d dimensions spatiales. On peut toujours choisir de prendre le point de départ de cette marche comme origine O du système de coordonnées cartésiennes. La question de la récurrence consiste à se demander si on peut trouver au moins un instant t positif fini pour lequel la particiule repasse par l'origine O.

Définition 9.15

Marche aléatoire récurrente

La marche aléatoire sera dite *récurrente* si et seulement si la probabilité que la particule repasse à l'origine O pour un certain instant t ultérieur fini vaut 1.

2. Théorème de Pólya

Le théorème de Pólya permet de relier récurrence et dimensionnalité de l'espace.

Théorème 9.16

Théorème de Pólya

- Pour $d = 1$ et $d = 2$, la marche aléatoire isotrope est récurrente.
- Pour $d \geq 3$, la marche aléatoire n'est pas récurrente ; on dit alors qu'elle est transitoire ou transient.

Développement

On sait calculer la probabilité que le marcheur, parti initialement de l'origine, revienne à l'origine, et ce pour toutes les dimensions $d > 2$. Cette probabilité $p(d)$ admet l'expression suivante :

$$p(d) = 1 - \frac{1}{u(d)}$$

où $u(d)$ est une intégrale à d dimensions :

$$u(d) = \frac{d}{(2\pi)^d} \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_d}{d - \cos x_1 - \cdots - \cos x_d}.$$

Pour $d = 3$, on obtient l'expression analytique suivante :

$$u(3) = \frac{\sqrt{6}}{32\pi^3} \Gamma(\tfrac{1}{24})\Gamma(\tfrac{5}{24})\Gamma(\tfrac{7}{24})\Gamma(\tfrac{11}{24}) \simeq 1,516\ldots$$

où $\Gamma(x)$ est la fonction Gamma d'Euler.

On obtient donc en trois dimensions une probabilité de retour à l'origine :

$$p(3) \simeq 0,3405\dots$$

Des valeurs numériques pour $u(d)$ (avec $4 \leq d \leq 8$) ont été trouvés :

d	4	5	6	7	8
$u(d)$	$0,193$	$0,135$	$0,105$	$0,0858$	$0,0729$

5 Marches aléatoires sur un groupe

Développement

On considère un groupe $(G, \circ)$, qu'on suppose multiplicatif. On se donne une suite $Y = (Y_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi (qu'on appelle ν), variables aléatoires toutes à valeurs dans $(G, \circ)$. On se donne aussi une variable aléatoire X_0 à valeurs dans $(G, \circ)$, de loi quelconque, et indépendante de $Y = (Y_n)_{n\geq 0}$. On pose alors, pour $n \geq 1$:

$$X_n = X_{n-1} \circ Y_n.$$

Définition 9.17

Marche aléatoire sur G

La suite $X = (X_n)_{n\geq 0}$ est alors une chaîne de Markov, et est dite *marche aléatoire sur G* de pas ν.

On accepte aussi comme marche aléatoire, une suite définie par la relation de récurrence :

$$X_n = Y_n \circ X_{n-1}.$$

Pour distinguer les deux types de chaînes de Markov ainsi définies, on parle parfois de marche aléatoire *droite* et de marche aléatoire *gauche*. Le terme général $p_{g,h}$ de la matrice de transition de chaine de Markov est défini, pour $(g, h) \in G^2$, par :

$$p_{g,h} = \nu(g^{-1} \circ h) \text{ ou bien } p_{g,h} = \nu(h \circ g^{-1}),$$

suivant que la marche aléatoire est droite ou gauche. On peut vérifier que :

$$\sum_{g\in G} p_{g,h} = \sum_{g\in G} \nu(g^{-1} \circ h) = \sum_{g\in G} \nu(g^{-1}) = \sum_{g\in G} \nu(g) = 1,$$

car $g \mapsto g \circ h$ et $g \mapsto g^{-1}$ sont des bijections de G dans G. Ainsi, une mesure uniforme sur G estune mesure stationnaire.

6 Marches aléatoires grandeur nature

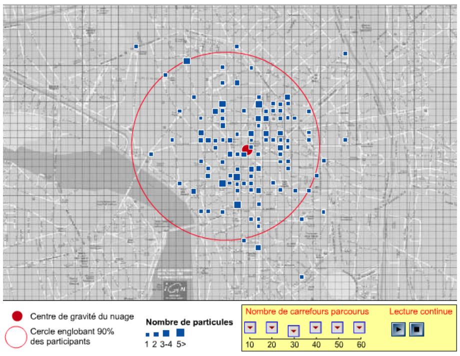
Développement

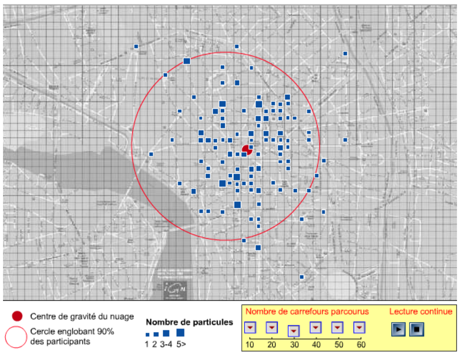
Une expérience scientifique originale s'est déroulée le 16 octobre 2005 dans les rues de Toulouse.

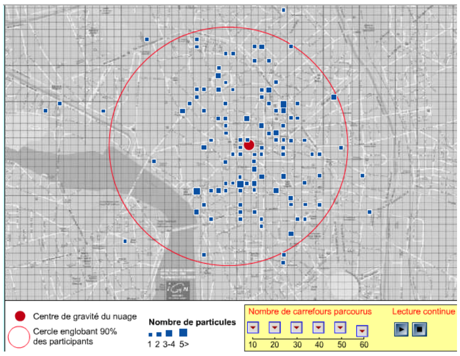
Environ 300 lycéens, partis de la place du Capitole, ont parcouru les rues de la ville, en lançant à chaque carrefour le dé pour décider de leur trajectoire (mode d'emploi distribué aux participants). Le but était de modéliser le célèbre mouvement brownien, à l'occasion du centième anniversaire de l'article d'Albert Einstein qui en établissait la théorie. Chaque participant devait relever sa position après 10, 20, 30, 40, 50, et enfin 60 carrefours. Les cartes ci-contre figurent ces différents moments de l'évolution du « nuage de participants ». L 'expérience avait bien entendu des enjeux mathématiques et physiques, disciplines où la théorie des marches aléatoires est très présente et bien connue. Mais un résultat frappant fut l'apparition de phénomènes liés à la géographie particulière de la ville. Les résultats théoriques classiques peuvent s'établir facilement dans le cas de la marche aléatoire sur un « réseau régulier à maille carrée » (certains plans de villes américaines s'approchent bien de ce modèle). On peut les résumer ainsi :

– le nuage de participants reste approximativement centré sur le point de départ

– il s’étale de façon isotrope (identique dans toutes les directions : le nuage est « rond »), suivant une loi en racine carrée du nombre de carrefours parcourus. Sur les cartes ci-contre, on a ainsi tracé des cercles englobant 90% des participants à une phase donnée de l’expérience.







Ces résultats s’étendent aux « réseaux irréguliers homogènes », c’est-à-dire dans lesquels les quantités remarquables (la densité de carrefours, les nombres de rues par carrefours) sont globalement équivalentes aux différents endroits du réseau. Pour l’expérience de Toulouse, la théorie est bien respectée, à deux perturbations près :

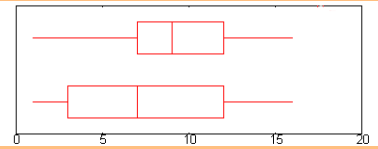
– une zone de très faible densité de carrefours, au nord-est de la place du Capitole, a donné lieu à une faible concentration de particules, mais aussi à quelques trajectoires très longues ;

– plus marquée, une sorte de « barrière » a été très peu franchie par les participants. Il s’agit d’une ligne, prolongeant la Garonne, qui contient très peu de points de franchissement. Le nuage de participants a en quelque sorte « rebondi » sur cette barrière.

LEÇON

10

Séries statistiques à une variable



Niveau : Seconde, Première S
Prérequis : aucun

1 Premières définitions et exemples

Définition 10.1

Statistiques

La statistique étudie certaines caractéristiques : *caractères* ou *variables* d'un ensemble fini qu'on appelle *population*. Les éléments de cette population étudiée sont appelés *individus*.

Définition 10.2

Type de variables

On peut classer en trois catégories les variables rencontrées :

Quantitative numérique et fait l'objet de calcul (par exemple : âge, taille, poids, notes...).

Qualitative discrète si la variable prend qu'un nombre fini de valeurs (on appelle *modalités* de telle valeur et on les notera x_i)

Qualitative continue si la variable prend ses valeurs dans un intervalle (*classe*).

Exemple 10.3. Voici une liste de 30 notes d'un Devoir Surveillé de 2nde d'un lycée parisien :

5	10	12	13	20	14
15	8	3	4	5	1
20	14	12	3	5	19
10	4	9	10	15	12
11	12	14	20	4	0

On peut regrouper ces notes par ordre croissant et on les compte :

Note	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
Effectif	1	1	0	2	3	3	0	0	1	1	3	1	4	1	3	2	0	0	0	1	3

et on peut regrouper ces notes par intervalle :

Intervalle	$[0\,,5[$	$[5\,,10[$	$[10\,,15[$	$[15\,,20[$	Total
Effectif	7	5	12	6	30

Définition 10.4

Représentation graphique de données statistiques

– Si le caractère est quantitatif discret, on peut utiliser le *diagramme en bâton* pour représenter graphiquement les données statistiques. Dans un repère orthogonal, pour chaque valeur de la série statistique, on trace un trait vertical dont la hauteur est proportionnelle.
– Si le caractère est quantitatif continue, on peut utiliser le *diagramme en rectangle* pour représenter graphiquement les données statistiques. Dans un repère orthogonal, la base des rectangles est proportionnelle à la longueur de l'intervalle et la hauteur est proportionnelle à l'effectif.
– Si le caractère est qualitatif, on utilise *les diagrammes circulaires*.

Exemple 10.5. On donne en figure 10.1, la représentation graphique de la série statistique des classements de notes par ordre croissant et par intervalle de 5 notes.

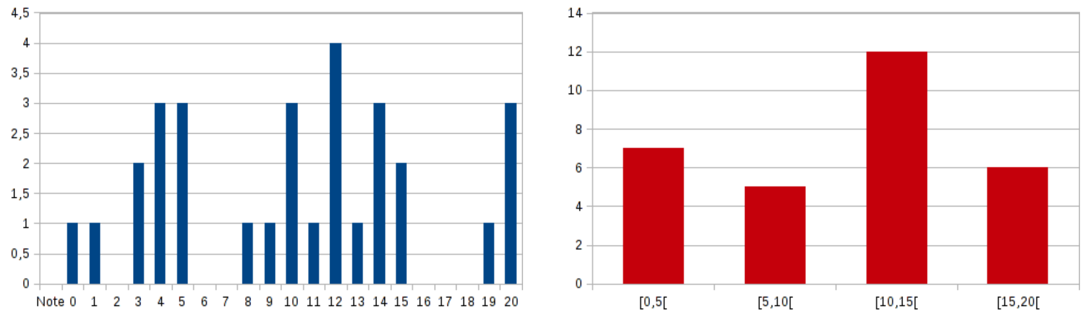
2 Effectif et fréquence

Définition 10.6

Effectif

L'*effectif* d'une classe ou d'une modalité est le nombre d'individu de cette classe ou de cette modalité. Généralement, on note n_i l'effectif de la classe numéro i (ou de la modalité x_i).

L'*effectif total* est la somme des effectifs de toutes les classes. On le note souvent N.



(a) Représentation graphique du classement des notes par ordre croissant

(b) Représentation graphique du classement par intervalles

FIGURE 10.1

Exemple 10.7. Dans l'exemple précédent,

$$N = \sum_{i=1}^{5} n_i = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 7 + 5 + 12 + 8 = 30.$$

Définition 10.8

Effectif cumulé

L'*effectif cumulé* d'une modalité est la somme des effectifs des modalités qui lui sont inférieurs ou égales.

Définition 10.9

Fréquence

La *fréquence* notée f_i de la classe i (ou de la modalité x_i) est le rapport $\frac{f_i}{N}$, la fréquence d'une classe est un nombre de l'intervalle $[0\,,1]$.

Définition 10.10

La *fréquence cumulée* d'une modalité est la somme des fréquences des modalités qui lui sont inférieures ou égales.

Exemple 10.11. Reprenons les données de l'exemple précédent. On a :

Note	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
Effectif	1	1	0	2	3	3	0	0	1	1	3	1	4	1	3	2	0	0	0	1	3
Effectif cumul.	1	2	2	4	7	10	10	10	11	12	15	16	20	21	24	26	26	26	26	27	30

(par exemple, 20 personnes ont une note inférieure ou égale à 12) et

Intervalle	$[0\,,5[$	$[5\,,10[$	$[10\,,15[$	$[15\,,20[$	Total
Effectif	7	5	12	6	30
Effectif cumul.	7	12	24	30	30

(par exemple 12 personnes ont en dessous de la moyenne).

3 Etendue et mode d'une série statistique

Définition 10.12

Etendue d'une série statistique

L'*étendue d'une série statistique* est la différence entre la plus grande modalité du caractère et la plus grande modalité.

Exemple 10.13. Reprenons les données de l'exemple précédent. On a :

Note	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
Effectif	1	1	0	2	3	3	0	0	1	1	3	1	4	1	3	2	0	0	0	1	3

L'étendue de cette série est $20 - 0 = 20$.

Définition 10.14

Mode d'une série statistique

Dans le cas continu, on dit qu'une classe est *modale* si elle a le plus grand effectif parmi toutes les casses.

Dans le cas discret, le mode est la valeur de plus grand effectif.

Exemple 10.15. Dans cette série statistique, on a :

Intervalle	$[0\,,5[$	$[5\,,10[$	$[10\,,15[$	$[15\,,20[$	Total
Effectif	7	5	12	6	30

La classe modale de cette série statistique est $[10\,,15[$.

4 Paramètre de position

4 1 Moyenne

Définition 10.16

Moyenne

Dans le cas discret, on appelle *moyenne* d'une série statistique d'effectif total N, le réel

$$\overline{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_kx_k}{N}.$$

Exemple 10.17. Reprenons les données de l'exemple précédent. On a :

Note	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Effectif	1	1	0	2	3	3	0	0	1	1	3	1	4	1	3	2	0	0	0	1	3

La moyenne de la série statistique est :

$$\overline{x} = \frac{1\times1+0\times2+2\times3+3\times4+3\times5+0\times6+0\times7+1\times8+1\times9+3\times10+11\times1+12\times4+13\times1+14\times3+15\times2+16\times0+17\times0+18\times0+19\times1+3\times20}{30}$$

$$\overline{x} = \frac{304}{30} \simeq 10,13.$$

Remarque 10.18. Pour calculer la moyenne d'une série statistique continu, on prend comme valeur de caractère *le milieu de chaque classe*.

Propriétés 10.19

1. Si on ajoute à toutes les valeurs d'une série statistique le même nombre b, on augmente la moyenne de cette série par b.
2. Si les valeurs d'une série statistique sont multipliées ou divisées par un même nombre a, la moyenne de cette série est aussi multipliée ou divisée par a.
3. Si une population d'effectif N est composée d'une partie d'effectif N_1 et de moyenne $\overline{x}_1$ et d'une autre partie d'effectif N_2 et de moyenne $\overline{x}_2$ alors la moyenne $\overline{x}$ de la population totale est telle que :
$$\overline{x} = \frac{N_1\overline{x}_1 + N_2\overline{x}_2}{N}.$$

Exemple 10.20. Si, dans une classe, les 15 garçons d'une classe mesurent en moyenne 182 cm et si les 20 filles mesurent en moyenne 168 cm alors la taille moyenne d'un élève de cette classe est égale à

$$\frac{15 \times 182 + 20 \times 168}{15 + 20} = 174 \text{ cm}.$$

4 2 Médiane

Définition 10.21

La *médiane* est un paramètre de position qui permet de couper la population étudiée en deux groupes contenant le même nombre d'individus.

Exemple 10.22. On reprend la liste des 30 notes d'un Devoir Surveillé de 2nde d'un lycée parisien :

5	10	12	13	20	14
15	8	3	4	5	1
20	14	12	3	5	19
10	4	9	10	15	12
11	12	14	20	4	0

Pour trouver la médiane, on range les notes par ordre croissant.

0	1	3	3	4	4
4	5	5	5	8	9
10	10	10	11	12	12
12	12	13	14	14	14
15	15	19	20	20	20

Comme il y a 30 notes, la médiane correspond à la moyenne de la 15ᵉ note et de la 16ᵉ de cette liste, d'où :

0	1	3	3	4	4
4	5	5	5	8	9
10	10	$\boxed{10}$	$\boxed{11}$	12	12
12	12	13	14	14	14
15	15	19	20	20	20

, $\quad \overline{x} = \dfrac{10+11}{2} = 10{,}5.$

Remarque 10.23. En général, la moyenne et la médiane d'une série statistique sont deux valeurs différentes.

5 Paramètre de dispersion

5 1 Associé à la moyenne

Définition 10.24

Variance

On appelle *variance* d'une série statistique d'effectif total N, et de moyenne $\overline{x}$, le réel :

$$V = \frac{n_1(x_1-\overline{x})^2 + n_2(x_2-\overline{x})^2 + \cdots + n_k(x_k-\overline{x})^2}{N}.$$

Définition 10.25

Ecart-type

On appelle l'*écart-type* de la série, le réel $\sigma = \sqrt{V}$.

Exemple 10.26. Dans l'exemple des notes, on peut montrer que :

$$V = \frac{7286}{225} \simeq 32{,}115$$

et

$$\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{32{,}115} \simeq 5{,}66.$$

Propriétés 10.27

1. Si on ajoute à toutes les valeurs d'une série statistique le même nombre b, l'écart-type reste inchangé.
2. Si les valeurs d'une série statistique sont multipliées ou divisées par un même nombre a, l'écart-type est multiplié ou divisé par $|a|$.

5.2 Associé à la médiane

Définition 10.28

Soit une série statistique de médiane M dont la liste des valeurs est rangée dans l'ordre croissant. En coupant la liste en deux sous-séries de même effectif,

- on appelle *premier quartile* le réel noté Q_1 égal à la médiane de la sous-série inférieure ;
- on appelle *troisième quartile* le réel noté Q_3 égal à la médiane de la sous-série supérieure.
- L'*écart-interquartile* est égal à $Q_3 - Q_1$.
- $]Q_1\,, Q_3[$ est appelé *intervalle interquartile*.

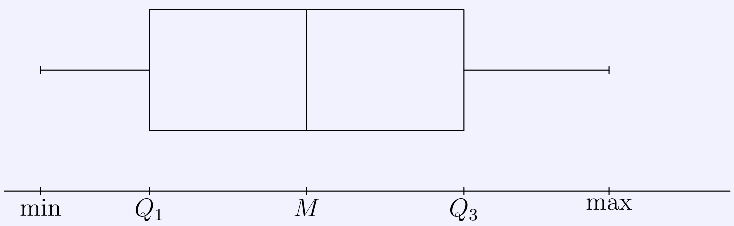
Remarque 10.29.

- 25% de la population admet une valeur du caractère entre $\min$ et Q_1,
- 25% de la population admet une valeur du caractère entre Q_1 et M,
- 25% de la population admet une valeur du caractère entre M et Q_3,
- 25% de la population admet une valeur du caractère entre Q_3 et $\max$.

Définition 10.30

Diagramme en boites

Le *diagramme en boites* d'une série se construit de la manière suivante :



Exemple 10.31. On reprend la liste ordonnée de l'exemple précédent :

0	1	3	3	4	4
4	5	5	5	8	9
10	10	$\boxed{10}$	$\boxed{11}$	12	12
12	12	13	14	14	14
15	15	19	20	20	20

On peut immédiatement voir que $Q_1 = \frac{4+5}{2} = 4{,}5$ et $Q_3 = \frac{13+14}{2} = 13{,}5$. Donc, on a la construction du diagramme en bâtons suivant (voir la figure 10.2) :

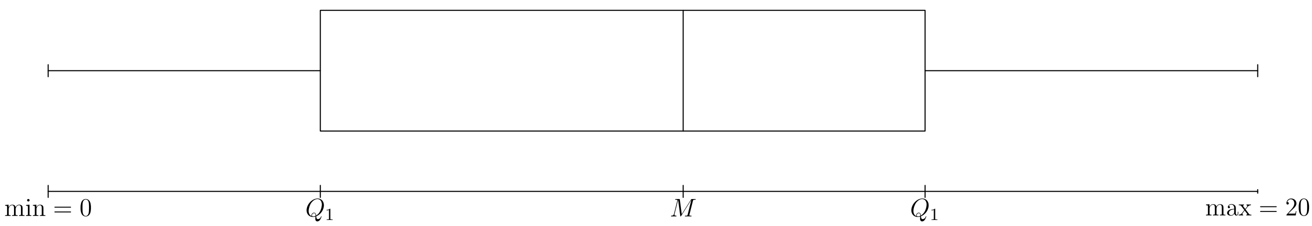


FIGURE 10.2 – Construction du diagramme en boîte

Exercices et problèmes

1 On considère une série statistique numérique positive : $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. On note $\overline{x}$ sa moyenne et M sa moyenne.

1. Trouver un exemple où $M < \overline{x}$.

2. Trouver un exemple où $M > \overline{x}$.

3. Montrer que $M \leq 2\overline{x}$.

4. Montrer qu'il n'existe pas de constante a (positive) telle que, pour toute série positive, on ait : $M \geq a\overline{x}$.

2 Ne pas parler trop vite

Un concours est organisé dans deux centres d'examen. Tous les candidats passent la même épreuve. Dans le premier centre, les garçons ont obtenu 13 de moyenne et les filles 12. Dans le second centre, les garçons ont obtenu 9 de moyenne et les filles 8. Le président de jury en déduit que les garçons ont eu de milleurs résultats que les filles.

1. Qu'en pensez-vous ?

2. Il y avait 58 garçons et 104 filles dans le premier centre, 87 garçons et 32 filles dans le second. Quelle est la moyenne globale de garçons ? Quelle est celled es filles ? Qu'en pensez-vous ?

3. Donner un exemple de répartition de filles et de garçons dans les deux centres d'examen pour lequel le président aurait raison.

3 Ecart absolu moyen

Soit $X = (x_i, p_i)_{i=1,\dots,n}$ une série statistique pondérée (avec $\sum p_i = 1$) admettant la moyenne $\overline{x}$. On définit comme alternative à l'écart-type un indicateur de dispersion appelé *écart absolu moyen* e_n par :

$$e_a = \sum_{i=1}^{n} p_i \left| x_i - \overline{x} \right| .$$

Démontrer que l'on a, pour toute série statistique, $e_a \leq \sigma$.

4 Moyenne et médiane

Soit $X = (x_i, p_i)_{i=1,\dots,n}$ une série statistique pondérée (avec $\sum p_i = 1$).

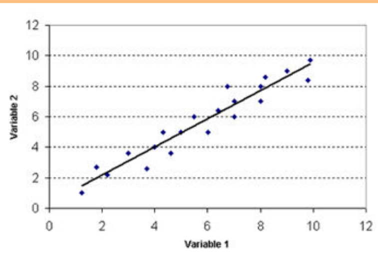
1. Pour quelle valeur de a le minimum de $f(a) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - a)^2$ est-il atteint ?

2. Pour quelle(s) valeur(s) de a le minimum de $g(a) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left| x_i - a \right|$ est-il atteint ?

LEÇON

11

Séries statistiques à deux variables numériques



Niveau : BTS

Prérequis : statistiques à une variable, équation d'une droite.

1 Nuage de points

Définition 11.1

Série statistiques à deux variables
On se donne deux caractères qu'on suppose discrets X et Y pour chaque individu d'une population. On obtient donc *une série statistique à 2 variables* que l'on peut représenter par un *nuage de points*.

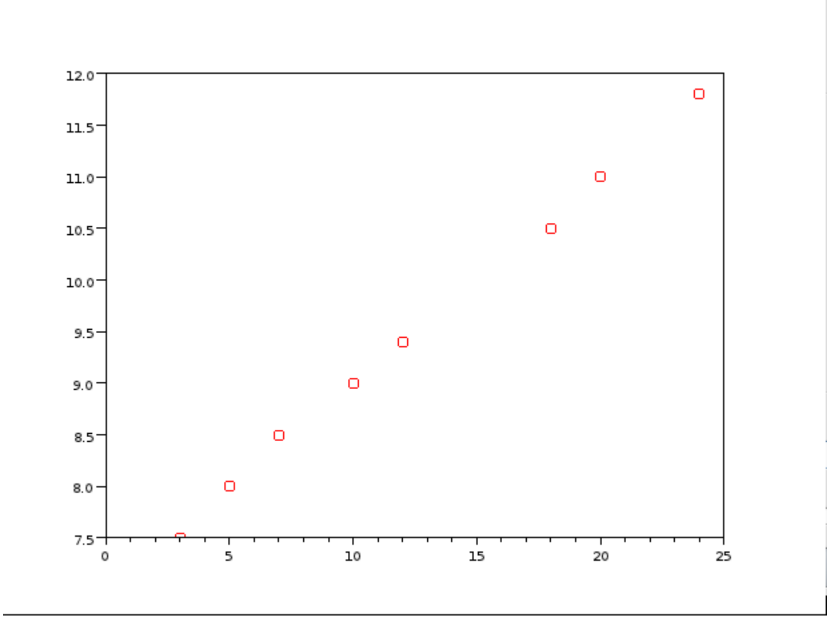
Définition 11.2

Nuage de points
Soient $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$ deux caractères discrets. Un *nuage de point* associé à (X, Y) est l'ensemble des points $M_i = (x_i, y_i)$ pour $1 \leq i \leq n$.

Exemple 11.3. On applique à un ressort une masse (qu'on mesure en gramme) et on lui mesure sa longueur (en cm).

Masse (en g)	7	10	18	20	5	24	12	3
Longueur (en cm)	8,5	9	10,5	11	8	11,8	9,4	7,5

On peut construire le nuage de points associé à cette série statistique :



2 Point moyen

Définition 11.4

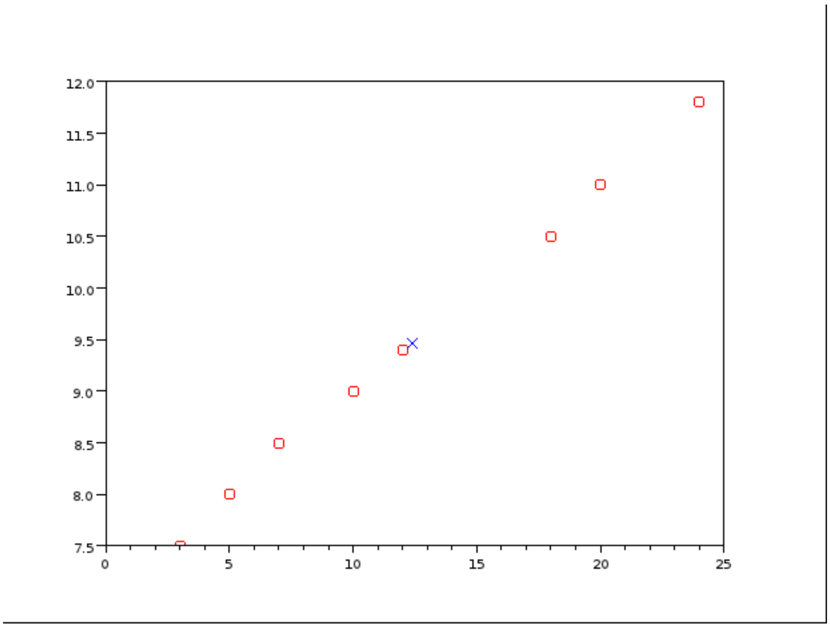
Point moyen d'un nuage
Le point moyen d'un nuage de points est le point G de coordonnées $(\overline{x}, \overline{y})$ où (l'on rappelle que) :

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{et} \quad \overline{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Exemple 11.5. Dans l'exemple du ressort, on a :

$$\overline{x} = \frac{7 + 10 + 18 + 20 + 5 + 24 + 12 + 3}{8} = 12{,}375$$
$$\overline{y} = \frac{8{,}5 + 9 + 10{,}5 + 11 + 8 + 11{,}8 + 9{,}4 + 7{,}5}{8} = 9{,}125$$

D'où $G = (12{,}375; 9{,}125)$.



3 Caractéristiques numériques

Remarque 11.6. Comme X et Y sont deux caractères discrets, on peut séparément calculer la moyenne $\overline{x}$, $\overline{y}$, la médiane, les quartiles, l'écart-type $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ et la variance $\mathrm{Var}(X)$ et $\mathrm{Var}(Y)$.

Définition 11.7

Covariance

On appelle *covariance* du couple (X, Y), le réel :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}).$$

Définition 11.8

Coefficient de corrélation linéaire

On appelle *coefficient de corrélation linéaire*, le réel :

$$r = \rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Exemple 11.9. Dans l'exemple précédent, on peut calculer :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) \simeq 10{,}02 \quad \text{et} \quad \rho(X,Y) \simeq 0{,}99$$

Propriété 11.10

1. $\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Var}(X)$ d'après la formule de Koeing.
2. La covariance est une forme bilinéaire symétrique positive.
3. $|\mathrm{Cov}(X,Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y)$ et donc $|\rho(X,Y)| \leq 1$.
4. $|r| = |\rho(X,Y)| = 1$ si et seulement si les points du nuages sont alignés.

Théorème 11.11

Méthode des moindres carrés

La droite d'équation

$$y - \overline{Y} = \frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)^2}(x - \overline{X})$$

passe par le point moyen et est la droite d'équation réduite de la forme $y = ax + b$ qui minimise la somme :

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(ax_i + b - y_i)^2$$

pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Autrement dit :

$$a = \frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)^2} \quad \text{et} \quad b = \overline{Y} - \overline{X}\frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)^2}$$

réalisent ce minimum sur $\mathbb{R}^2$.

Développement

Démonstration du théorème 11.11, première méthode. On pose

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - ax_i - b]^2$$

et on introduit $z = y - ax - b$, on peut alors réécrire $S(a, b)$ comme

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^{n} z_i^2.$$

Or, on sait que

$$\operatorname{Var}(z) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(z_i - z)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i^2 - \overline{z}^2$$

et, par linéarité de la moyenne $\overline{z} = \overline{y} - a\overline{x} - b$. Donc, minimiser $S(a, b)$ revient à minimiser $\sum z_i^2 = n(\operatorname{Var}(z) + \overline{z}^2)$. On va donc minimiser $n\operatorname{Var}(z)$. On a :

$$z_i - \overline{z} = y_i - ax_i - b - (\overline{y} - a\overline{x} - b) = (y_i - \overline{y}) - a(x_i - \overline{x}).$$

D'où :

$$\begin{aligned} n\operatorname{Var}(z) &= \sum_{i=1}^{n}(z_i - \overline{z}) = \sum_{i=1}^{n}[(y_i - \overline{y}) - a(x_i - \overline{x})]^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}[(y_i - \overline{y})^2 - 2a(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) + a^2(x_i - \overline{x})^2] \\ &= \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2 - 2a\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) + a^2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2. \end{aligned}$$

Or

$$\operatorname{Cov}(x, y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}).$$

On a finalement :

$$\operatorname{Var}(z) = \operatorname{Var}(x)a^2 - 2\operatorname{Cov}(x, y) + \operatorname{Var}(y).$$

On reconnaît un trinôme du second degré. On va l'écrire sous forme canonique :

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}(z) &= \left(\sigma(x)a - \frac{\operatorname{Cov}(x, y)}{\sigma(x)}\right)^2 + \operatorname{Var}(y) - \left(\frac{\operatorname{Cov}(x, y)}{\sigma(x)}\right)^2 \\ &= \left(\sigma(x)a - \frac{\operatorname{Cov}(x, y)}{\sigma(x)}\right)^2 + \frac{\operatorname{Var}(x)\operatorname{Var}(y) - \operatorname{Cov}(x, y)^2}{\operatorname{Var}(x)}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\operatorname{Var}(z)$ est minimal lorsque $\left(\sigma(x)a - \frac{\operatorname{Cov}(x,y)}{\sigma(x)}\right)^2 = 0$, c'est-à-dire $a = \frac{\operatorname{Cov}(x,y)}{\operatorname{Var}(x)}$ et le minimum de $\operatorname{Var}(z)$ est

$$\frac{\operatorname{Var}(x)\operatorname{Var}(y) - \operatorname{Cov}(x,y)^2}{\operatorname{Var}(x)}.$$

On va maintenant minimiser $\overline{z}^2$. On a : $\overline{z} = \overline{y} - a\overline{x}$. Donc $\overline{z}$ est minimal si $b = \overline{y} - a\overline{x}$ et le minimum de $\overline{z}$ est 0.
D'où la droite de régression de y en x a pour équation $y = ax + b$ où

$$a = \frac{\operatorname{Cov}(x,y)}{\operatorname{Var}(x)} \quad \text{et} \quad b = \overline{y} - a\overline{x}.$$

□

Démonstration du théorème 11.11, seconde méthode. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(a,b) = \sum_{i=1}^{n} f_i(ax_i + b - y_i)^2.$$

C'est une fonction polynôme de degré 2 que l'on peut écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
f(a,b) &= \left(\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2\right) a^2 + b^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} f_i x_i\right) ab \\
&\qquad\qquad - 2\left(\sum_{i=1}^{n} f_i x_i y_i\right) a - 2\left(\sum_{i=1}^{n} f_i y_i\right) b + \sum_{i=1}^{n} f_i y_i^2 \\
f(a,b) &= \overline{X^2}a^2 + b^2 + 2\overline{X}ab - 2\overline{XY}a - 2\overline{Y}b + \overline{Y^2}.
\end{aligned}$$

Les dérivées partielles sont données par :

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a,b) = 2\overline{X^2}a + 2\overline{X}b - 2\overline{XY} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial b}(a,b) = 2\overline{X}a + 2b - 2\overline{Y}$$

Elles s'annulent simultanément en l'unique point critique défini par :

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{-\overline{X}\cdot\overline{Y} + \overline{XY}}{\overline{X^2} - \overline{X}^2} = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)^2} \\
b_0 &= \frac{\overline{XY}\cdot\overline{X} + \overline{Y}\cdot\overline{X^2}}{\overline{X^2} - \overline{X}^2} = \overline{Y} - \overline{X}\frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)^2}.
\end{aligned}$$

Les dérivées partielles secondes sont données par :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(a,b) = 2\overline{X^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b}(a,b) = 2\overline{X}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial b^2}(a,b) = 2.$$

Avec les notations de Monge, au point (a_0, b_0), on a :

$$rt - s^2 = 4\overline{X^2} - 4\overline{X}^2 = 4\sigma(X)^2 > 0$$

ce qui assure qu'on a bien un minimum local en (a_0, b_0). De plus, un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de (a_0, b_0) donne :

$$\begin{aligned}
f(a,b) = f(a_0,b_0) &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(a_0,b_0)(a-a_0)^2 \\
&+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b}(a_0,b_0)(a-a_0)(b-b_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial b^2}(a_0,b_0)(b-b_0)^2 \geq f(a_0,b_0)
\end{aligned}$$

puisque les termes d'ordre supérieur sont nuls (fonction polynôme de degré 2) et la forme quadratique est strictement positive ($rt - s^2 > 0$) et ainsi on a bien un maximum global sur $\mathbb{R}^2$.
La droite d'équation réduite $y = a_0x + b_0$ est la droite proposée dans l'énoncé et passe clairement par le point moyen de la série statistique.

□

Droite d'ajustement

Définition 11.12

– La droite définie ci-dessus est appelée *droite d'ajustement* (ou *droite de régression* de Y en X.

– La somme

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(ax_i + b - y_i)^2$$

est appelée *résidu quadratique*.

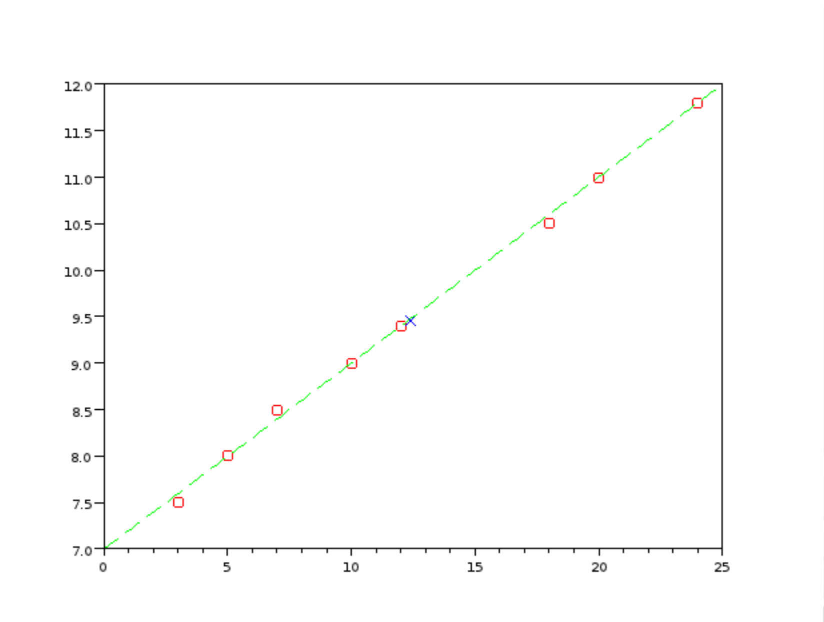
Remarques 11.13.

1. La droite d'équation
$$x - \overline{X} = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sigma(Y)^2}(y - \overline{Y})$$
minimise la somme
$$\sum_{i=1}^{n} f_i(ay_i + b - x_i)^2$$
et s'appelle droite d'ajustement de X en Y.
2. Notons $Z = (1,\dots,1)$ le caractère constant égal à 1 sur la population commune à X et Y. Ajuster Y en X revient à considérer le projeté orthogonal de Y sur le sous-espace (X,Z) de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire canonique.
3. Lorsque $|r| = |\rho(X,Y)| > 0{,}9$ (valeur dépendant des auteurs et des besoins), on considère que l'ajustement affine de Y en X est satisfaisant (sinon, il faut déterminer un autre type d'ajustement).

Exemple 11.14. On va calculer l'ajustement affine pour notre exemple du ressort. On a :

$$a = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)^2} \simeq 0{,}2 \quad \text{et} \quad b = \overline{Y} - \overline{X}\frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)^2} \simeq 7.$$

D'où la droite de régression a pour équation $y = 0{,}2x + 7$ et on a vu que le coefficient de corrélation est pratiquement égal à 1. On peut donc affirmer sans trop d'erreur que l'allongement du ressort est *proportionnel* à la masse appliquée.



4 1 Sur un tableur

Sur un tableur, on donne la masse d'un objet en fonction du temps :

Temps (s)	*Masse (g)*
0	0
5	22
10	53
15	88
20	125
25	163
30	202
35	245
40	296
45	352
50	412

On construit le graphique sans relier les points :

- On sélectionne les deux colonnes du tableau.
- `Insertion > Diagramme`
- On sélectionne le diagramme `Ligne` sans relier les points.
- Dans l'onglet « *Plage de données* », on coche l'option « *Séries de données en colonnes* », « *Première ligne comme étiquette* » et « *Première colonne comme étiquette* ».

On veut ensuite l'ajustement linéaire des données statistiques (c'est-à-dire la droite qui minimise le carré des distances des points). Pour cela, on clique droit sur les points et on sélectionne « *Insérer une courbe de tendance* ». La courbe doit être « *Linéaire* » et on peut afficher l'équation de la droite.

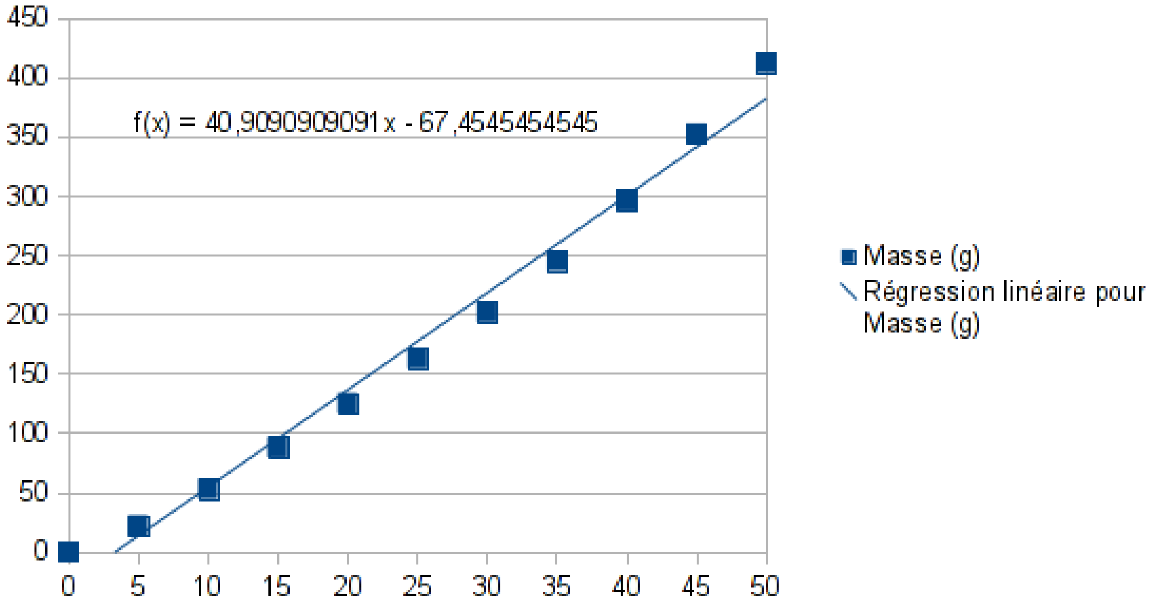


FIGURE 11.1 – Ajustement linéaire sur les données statistiques

5 Autres types de régression

Dans certains cas, le nuage de points laisse présentir une relation fonctionnelle globale entre X et Y mais cette relation n'est pas nécessairement affine.

5 1 Ajustement exponentielle

Si les points $M_i(x_i, y_i)$ sont proches de la courbe d'équation $y = \lambda e^{ax}$ alors les points $N_i(x_i, \ln y_i)$ sont proche de la courbe d'équation $y = (\ln a)x + (\ln \lambda)$ et réciproquement.

La méthode consiste à chercher la droite de regression entre X et $\ln Y$.

5 2 Ajustement par une fonction puissance

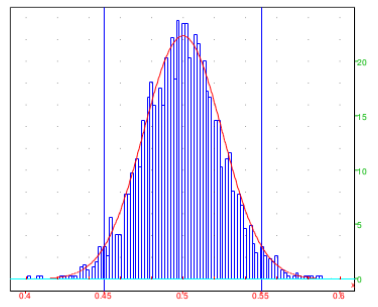
Si les points $M_i(x_i, y_i)$ sont proches de la courbe d'équation $y = \lambda a^x$ alors les points $N_i(\ln x_i, \ln y_i)$ sont proches de la courbe d'équation $y = ax + \ln \lambda$ réciproquement.

On cherche alors la droite de régression entre $\ln X$ et $\ln Y$.

LEÇON

12

Intervalles de fluctuation



Niveau : Lycée

Prérequis : Variable aléatoire, espérance, variance, théorème limite central, loi binomiale, loi normale, fonctions

1 Le théorème de De Moivre-Laplace

1.1 Énoncé

Théorème 12.1

Si S_n est une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres n et $p \in \,]0\,,1[$, on a avec $q := 1 - p$,

$$S_n^* := \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} = \sqrt{\frac{n}{pq}}\left(\frac{S_n}{n} - p\right) \xrightarrow[\text{loi}]{n \to +\infty} Z,$$

où Z est une variable variable aléatoire de loi gausienne $\mathfrak{N}(0,1)$.

1.2 Une démonstration dans le cas $p = 1/2$

Pour une démonstration complète du théorème de De Moivre-Laplace dans le cas $p = 1/2$, voir Ressources pour la classe terminale générale et technologique : dossier annexe, téléchargeable sur le site Web Eduscol : `http://eduscol.education.fr/prog`, février 2012.

1.3 Un exemple d'application du théorème de De Moivre-Laplace

Exemple 12.2. On donne un exemple d'utilisation du théorème de De Moivre-Laplace.

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires suivant la loi $\mathrm{Bin}(50, 0.3)$, $np = 15$, $nq = 35$.

D'après les tables, la valeur exacte pour $P(X_n = 10) = 0,038619$.

La formule d'approximation avec une loi $\mathfrak{N}(np, \sqrt{npq}) = \mathfrak{N}(15, \sqrt{10.5})$ donne le résultat :

$$P\left(\frac{9,5 - 15}{\sqrt{10,5}} \leq N \leq \frac{10,5 - 15}{\sqrt{10,5}}\right) = P(-1.7 \leq N \leq -1.39) = P(1.39 \leq N \leq 1.7 = 0,9554 - 0,9177 =$$

L'erreur d'approximation est faible.

Pour $P(X_n \leq 10) = 0,0789$, l'approximation usuelle fournit

$$P(N \leq -1.39) = P(N \geq 1.39) = 1 - P(N \leq 1,39) = 0,0823.$$

Si nous n'avoins pas corrigé la continuité de l'approximation nous aurions eu :

$$P\left(N \leq \frac{10 - 15}{\sqrt{10,5}}\right) = P(N \leq -1,54) = 1 - P(N \leq 1,54) = 0,0618.$$

Cette dernière valeur est assez imprécise.

2 Activités d'introduction en Seconde

2.1 À la découverte de l'intervalle de fluctuation

Une urne contient des boules jaunes et des boules jaunes. Les bules sont indiscernables au toucher. L'urne contient 20% de boules jaunes.

On extrait au hasard une boule. On note sa couleur, puis on la remet dans l'urne.

On souhaite étudier la fréquence d'apparition de la couleur jaune lorsque l'on procède à 100 tirages successifs. On choisit de faire une simulation de cette expérience avec un tableur.

On ne connait pas le nombre de boules de l'urn. Mais l'expérience revient à simuler un tirage au sort dans une urne contenant 100 boules, dont 20 boules jaunes. On attribue les nombres 1 et 20 aux boules jaunes, ce qui correspond bien à une proportion de 20%.

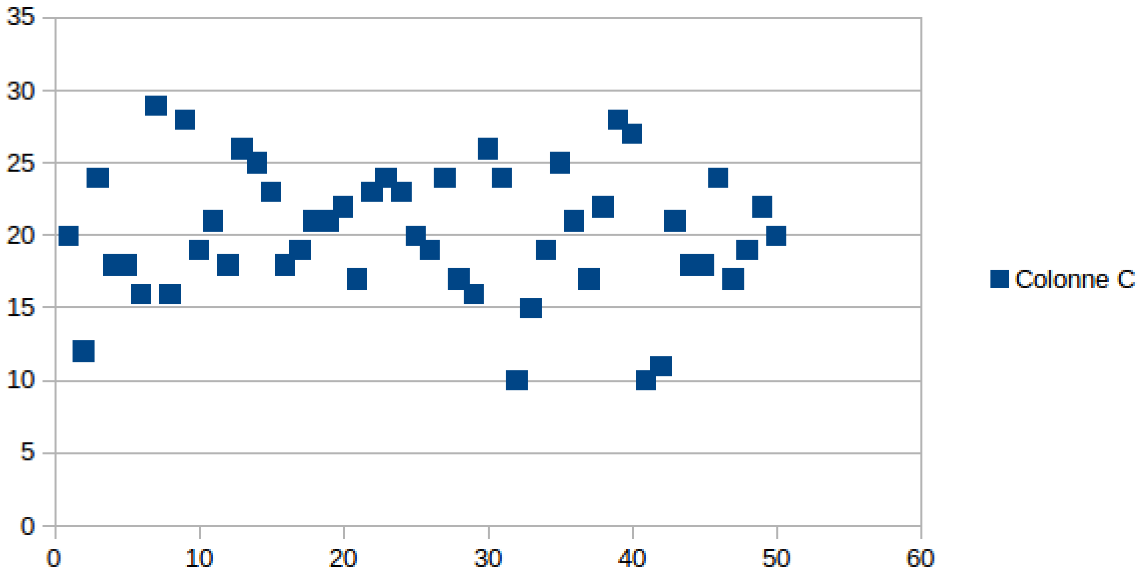
Sur la première colonne d'une feuille de calcul, on simule 100 tirages dans l'urne, c'est-à-dire on tire au hasard un nombre entre 1 et 100 sur 100 cellules. On tape alors `ALEA.ENTRE.BORNES(1;100)` entre A1 et A100.

Sur la colonne suivante, on teste si la cellule AX ($1 \leq X \leq 100$) vaut un nombre entre 1 et 20. Pour cela, on tape : `SI(ET(1<=A1;A1<=20);1;0)`.

On compte ensuite la fréquence d'apparition de la couleur jaune en bas de la seconde colonne. Pour cela, on utilise la fonction `=NB.SI(B1:B100;1)`.

On recommence cette expérience 50 fois. On recopie les colonnes A et B sur les 100 colonnes suivantes.

On obtient le nuage des fréquences ci-dessous :



On calcule ensuite :

$$0,2 - \frac{1}{\sqrt{100}} = 0,2 - \frac{1}{10} = 0,1$$
$$0,2 + \frac{1}{\sqrt{100}} = 0,2 + \frac{1}{10} = 0,3$$

On remarque que les fréquences observés appartiennent à l'intervalle $[0,1; 0,3]$.

Définition 12.3

Au sein d'une population, on connaît la proportion p des individus ayant un caractère doné. Ici, dans l'ensemble des boules, on connaît la proportion ($p = 0,20$) de boules jaunes.

Parmi les échantillons de taille n extraits de cette population, la fréquence d'apparition f du caractère varie avec l'échantillon prélévé.

On admet que, pour un échantillon de taille $n \geq 25$ et pour p comprise entre $0,2$ et $0,8$, la fréquence d'apparition f observée appartient à l'intervalle $[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ avec une probabilité d'au moins $0,95$.

Cet intervalle est appelé *l'intervalle de fluctuation au seuil de* 95%.

2 2 Utilisation de l'intervalle de fluctuation

Propriété 12.4

Connaissant la proportion p d'individus dans une population, l'intervalle de fluctuation $[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ permet d'étudier un échantillon donné par rapport à ce caractère.

Si la fréquence observée f du caractère est en dehors de l'intervalle, on « rejette » de l'échantillon avec une erreur au seuil de 5%.

Ces résultats signifient que, dans 5% environ des cas, la décision prise (rejet ou validation) risque d'être incorrecte.

En 2007, parmi les 557 députés élus à l'Assemblée Nationale, les femmes élus représentent $18,5\%$ des députés.

Parmi les maires de 57 grandes villes, on compte 4 femmes maires.

La répartition hommes-femmes au sein de la population est $51,6\%$ de femmes et $48,6\%$ d'hommes.

On peut dresser le tableau suivant :

	Assemblée Nationale	Maires
n	577	57
I_n	$[51,6 - \frac{1}{\sqrt{577}}, 51,6 + \frac{1}{\sqrt{577}}]$ $= [51,56; 51,64]$	$[51,6 - \frac{1}{\sqrt{57}}; 51,6 + \frac{1}{\sqrt{57}}]$ $= [51,46; 51,73]$
Proportion réelle	$0,185$	$0,07$

Les proportions établies ne sont pas dans les intervalles de fluctuation. Il n'y a donc aucun respect de la parité en politique.

3 Intervalle de fluctuation, la théorie en Terminale S

3 1 Simulation

On lance 120 fois un dé à jouer bien équiliré. On appelle N la variable aléatoire qui associe le nombre de fois que le dé affiche la face 6. On voudrait savoir la probabilité que la variable aléatoire N soit comprise dans l'intervalle $[12, 28]$.

On écrit le programme ci-dessous. Ce programme effectue 100 fois ces 120 lancers. On affiche à chaque expérience I le point (I, N) ainsi que les droites $y = 12$ et $y = 28$. À la fin de ces 100 expériences, on affiche le nombre de points M qui se situe dans l'intervalle $[12, 28]$.

```
Variables : A,B,I,J,M,N,X

Initialisation
Effacer dessin
0 -> M
12 -> A
28 -> B
Tracer y = A
Tracer y = B

Traitement
Pour I de 1 à 100
   0 -> N
      Pour J de 1 à 120
        randInt(1,6) -> X
        Si X = 6
          N + 1 -> N
        FinSi
     FinPour
     Afficer le point (I;N)
     Si N >= A et N <= B
       M+1 -> M
    FinSi
 FinPour
Sortie
Afficher M
```

On trouve alors $M = 96$. On peut alors dire qu'à 96%, le nombre d'appartition de la face 6 se situe dans l'intervalle $[12, 28]$. On nomme alors cet intervalle, intervelle de fluctuation de N au seuil de 96%.

3 2 Définition

Définition 12.5

X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\text{Bin}(n,p)$, α un réel tel que $0<\alpha<1$ et a et b sont deux réels.

On dit que $[a\,,b]$ est un *intervalle de fluctuation de* X au seuil de $1-\alpha$, si et seulement si :

$$P(a \leq X \leq b) \geq 1-\alpha.$$

3 3 Intervalle de fluctuation asymptotique

Théorème 12.6

Si la variable aléatoire X_n suit une loi binomiale $\text{Bin}(n,p)$ alors pour tout réel α de $]0\,,1[$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1-\alpha$$

où

$$I_n = \left[p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,; p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

u_α étant le nombre tel que $P(-u_\alpha \leq Z_n \leq u_\alpha) = 1-\alpha$ lorsque $Z_n \sim \mathfrak{N}(0,1)$.

On appelle *variable fréquence*, la variable aléatoire $F_n = \frac{X_n}{n}$ qui à tout échantillon de taille n associe la fréquence f obtenue.

Remarque 12.7. Le mot asymptotique vient du passage à la limite de l'intervalle I_n, la loi binomiale peut alors être assimilé à la loi normale.

Développement

Démonstration. On pose $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$. On pourra utiliser cet intervalle de fluctuation dans les conditions de l'approximation normale de la loi binomiale ($n \geq 30$, $np \geq 5$, $n(p-1) \geq 5$).
D'après le théorème de De Moivre-Laplace :

$$\lim_{n\to+\infty} P(-u_\alpha \leq Z_n \leq u_\alpha)$$

suit une loi normale centrée réduite de variable aléaoitre Z_n.
On sait, d'après les propriétés de la loi normale centrée réduite que pour tout α de $]0\,,1[$, il existe un unique réel strictemnet positif u_α tel que :

$$P(-u_\alpha \leq Z_n \leq u_\alpha) = 1-\alpha.$$

De plus

$$\begin{aligned}
-u_\alpha &\leq Z_n \leq u_\alpha \\
-u_\alpha\sqrt{np(1-p)} &\leq X_n - np \leq u_\alpha\sqrt{np(1-p)} \\
np - u_\alpha\sqrt{np(1-p)} &\leq X_n \leq n_p + u_\alpha\sqrt{np(1-p)} \\
p - u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} &\leq \frac{X_n}{n} \leq p + u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1-\alpha.$$

□

Propriété 12.8

Il faut connaître l'intervalle I_n de fluctuation au seuil de 95% correspondant à $\alpha = 0,05$ et qui donne $u_\alpha = 1,96$.

$$I_n = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,; p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right].$$

Exemple 12.9. Si l'on reprend l'exemple sur les 120 lancers de dé à jouer avec N comme variable aléatoire. L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% (dans les conditions de l'approximation normale) est alors :

$$p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{6} - 1,96\frac{\sqrt{\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}}}{\sqrt{120}} \simeq 0,100.$$
$$p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{6} + 1,96\frac{\sqrt{\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}}}{\sqrt{120}} \simeq 0,233.$$

Donc $I_n = [0,100; 0,233]$ qui correspond à la variable aléatoire fréquence $\frac{N}{120}$.

Si on revient à la variable N, l'intervalle de fluctutation est alors :

$$[120 \times 0,100; 120 \times 0,233] = [12; 28],$$

ce qui confirme notre expérience.

Remarque 12.10. Cet intervalle peut être simplifié par l'intervalle

$$J_n = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right].$$

En effet, la fonction $x \mapsto x(1-x) = x - x^2$ est une fonction du second degré qui s'annule en 0 et 1, elle admet donc un maximum (coefficient négatif devant x^2) en $0,5$. On a alors $f(0,5) = 0,25$. Elle est positive entre 0 et 1. On a alors :

$$0 \leq p(1-p) \leq 0,25 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{p(1-p)} \leq \sqrt{0,25} = 0,5.$$

On en déduit alors que $0 \leq 1,96\sqrt{p(1-p)} \leq 1$. On a alors :

$$0 \leq 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

On a ainsi $I_n \subset J_n$. On a alors dans la plupart des cas $P(F_n \in J_n) \geq 0,95$.

3.4 Prise de décision

Propriété 12.11

Soit f_{obs} la fréquence d'un caractère observée d'un échantillon de taille n d'une population donnée. On suppose que les conditions de l'approximation normale de la loi binomiale sont remplies : $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$.

Hypothèse : La proportion du caractère étudié dans la population est p.

- Si $f_{\text{obs}} \in I_n$, on ne peut rejeter l'hypothèse faite sur p.
- Si $f_{\text{obs}} \notin I_n$, on rejette l'hypothèse faite sur p.

Exemple 12.12. Pour créer ses propres colliers, on peut acheter un kit contenant des perles de cinq couleurs différentes (marrons, jaunes, rouges, vertes et bleues), dans des proportions affichées sur le paquet.

Ainsi les perles marrons et les perles jaunes sont annoncés comme représentant chacunes 20% de l'ensemble des perles tandis que les perles rouges sont annoncées à 10%.

On veut vérifier cette information. Pour cela, on choisit d'observer un échantillon aléatoire de perles et de construire un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% pour la proportion de perles marrons.

On constitue donc un échantillon, que l'on considère aléatoire, de 690 perles. On a dénombré 140 perles marrons.

La *prise de décision* est la suivante : si la proportion de perles marrons dans l'échantillon n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation, on rejette l'hypothèse selon laquelle les perles marron représentent 20% des perles.

a. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique I au seuil de 95% pour la proportion de perles marrons.

b. Calculer la proportion de perles marrons dans l'échantillon. Que peut-on en conclure ?

c. Dans le même échantillon, il y avait 152 perles et 125 perles rouges. Que peut-on conclure de ces résultats ?

Développement

Solution.

a. En ce qui concerne les perles marrons, on a : $n = 690$ et $p + 0,2$, donc :

$$n \geq 30, \ np = 138 \geq 5 \quad \text{et} \quad n(1-p) = 552 \geq 5.$$

Nous sommes bien les hypothèses du théorème de De Moivre-Laplace.

On calcule ensuite :

$$p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0,2 - 1,96\frac{\sqrt{0,2 \times 0,8}}{\sqrt{690}} \simeq 0,1702$$
$$p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0,2 + 1,96\frac{\sqrt{0,2 \times 0,8}}{\sqrt{690}} \simeq 0,2298.$$

On a donc : $I = [0,17; 0,23]$.

b. On calcule la fréquence $f_m = \frac{140}{690} \simeq 0,203$. Comme $f_m \in I$, on ne peut pas rejeter l'hypothèse selon laquelle les perles marron représentent 20% des perles.

c. On calcule la fréquence des perles jaunes : $f_j = \frac{152}{690} \simeq 0,220$. Comme $f_j \in I$, on ne peut pas rejeter l'hypothèse selon laquelle les perles jaunes représentent 20% des perles.

Pour les perles rouges, il faut calculer un nouvel intervalle de fluctuation :

$$p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0,1 - 1,96\frac{\sqrt{0,1 \times 0,9}}{\sqrt{690}} \simeq 0,0886$$
$$p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0,1 + 1,96\frac{\sqrt{0,1 \times 0,9}}{\sqrt{690}} \simeq 0,1224$$

On a donc : $I' = [0,08; 0,13]$ (on prend l'intervalle par excès). On calcule la fréquence des perles rouges $f_r = \frac{125}{690} \simeq 0,18$. Comme $f_r \notin I'$, on doit rejeter l'hypothèse selon laquelle les perles rouges représentent 10% des perles.

$\square$

4 D'autres exemples

4.1 Confiance des électeurs

Monsieur Z, chef du gouvernement d'un pays lointain, affirme que 52% des électeurs lui font confiance. On interroge 100 électeurs au hasard (la population est suffisamment grande pour considérer qu'il s'agit de tirages avec remise) et on souhaite savoir à partir de quelles fréquences, au seuil de 5%, on peut mettre en doute le pourcentage annoncé par Monsieur Z, dans un sens, ou dans l'autre.

1. On fait l'hypothèse que Monsieur Z dit vrai et que la proportion des électeurs qui lui font confiance dans la population est $p = 0,52$. Montrer que la variable aléatoire X, correspondant au nombre d'électeurs lui faisant confiance dans un échantillon de 100 électurs, suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,52$.

2. On donne ci-contre un extrait de la table des probabilités cumulées $P(x \leq k)$ où X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,52$

k	$P(X \leq k) \approx$
40	$0,0106$
41	$0,0177$
42	$0,0286$
43	$0,0444$
$\cdots$	$\cdots$
61	$0,9719$
62	$0,9827$
63	$0,9897$
64	$0,9941$

a. Déterminer a et b tels que :

- a est le plus petit entier tel que $P(X \leq a) \geq 0,025$;
- b est le plus petit entier tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$.

b. Comparer l'intervalle de fluctuation à 95%, $\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}\right]$, ainsi obtenu grâce à la loi binomiale, avec l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

3. Énoncer la règle décision permettant de rejeter ou non l'hypothèse $p = 0,52$, selon la valeur de la fréquence f des électeurs favorables à Monsieur Z obtenue sur l'échantillon.

4. Sur les 100 électeurs interrogés au hasard, 43 déclarent avoir confiance en Monsieur Z. Peut-on considérer, au seuil de 5%, l'affirmation de Monsieur Z comme exacte ?

4 2 Algues toxiques

Dans un pays lointain, 10% des placges étaient atteintes par des algues toxiques. On a modifié le processus de rejets chimiques : on admet que le nouveau processus de rejet, très différent du précédent, pourrait augmenter ou diminuer cette fréquence.

On veut établir, puis mettre en œuvre, une procédure statistique permettant de décider, au seuil de 5%, si le nouveau processus de rejets a, ou non, un impact significatif, dans un sens ou dans un autre, sur la fréquence d'apparition de ces algues.

1. Énoncer une règle de décision permettant de rejeter, ou non, au seuil de décision de 5%, l'hypothèse selon laquelle 10% des plages sont touchées par ce type d'algues après la mise en place du nouveau procédé, à l'aide d'un échantillon aléatoire de 150 plages.

2. Sur un échantillon aléatoire de 150 plages, on constat que 9 plages sont atteintes. Peut-on, au seuil de décision de 5%, rejeter l'hypothèse précédente de 10% de plages polluées ?

4 3 Homogénéité de lots dans une production

La proportion d'ampoules à économie d'énergie non-conformes dans la production d'une entreprise est $p = 0,07$. L'entreprise souhaite fournir des lots d'ampoules pour lesquels elle puisse « garantir » qu'environ 95% d'entre eux ont une fréquence d'ampoules non-conformes entre $0,06$ et $0,08$.

Quelle taille minimale n du lot à prendre pour répondre à cette contrainte ?

5 Avec Xcas

5 1 Énoncé

À l'aide d'un logiciel, on souhaite simuler le lancer de 400 pièces de monnaie équilibrées, puis calculer la fréquence d'apparition de « pile ». On veut ensuite répeter 2000 fois l'expérience.

Au résultat « pile », on associe la valeur 1 et à « face » le résultat 0.

On génère donc 400 nombres aléatoires 0 ou 1 et on note la fréquence des 1.

On répète 2000 fois cette expérience. On obtient une série statistique de fréquence d'apparition du nombre 1.

On cherche alors la proportion des valeurs situées à l'intérieur de l'intervalle $I = [p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ où p est la probabilité théorique et n la taille de l'échantillon.

5.2 Expérimentation avec Xcas

On aura donc ici $n = 400$, $p = 1/2$ et

$$I = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{400}}; \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{400}}\right] = [0,45; 0,55].$$

1. Réalisation d'un échantillon de taille 400

```
x:=randvector(400,'rand(2)');
count_eq(1,x);
count_eq(1,x)/400
count_eq(1,x)/400.0;
```

2. Simulation

On va réaliser un programme.

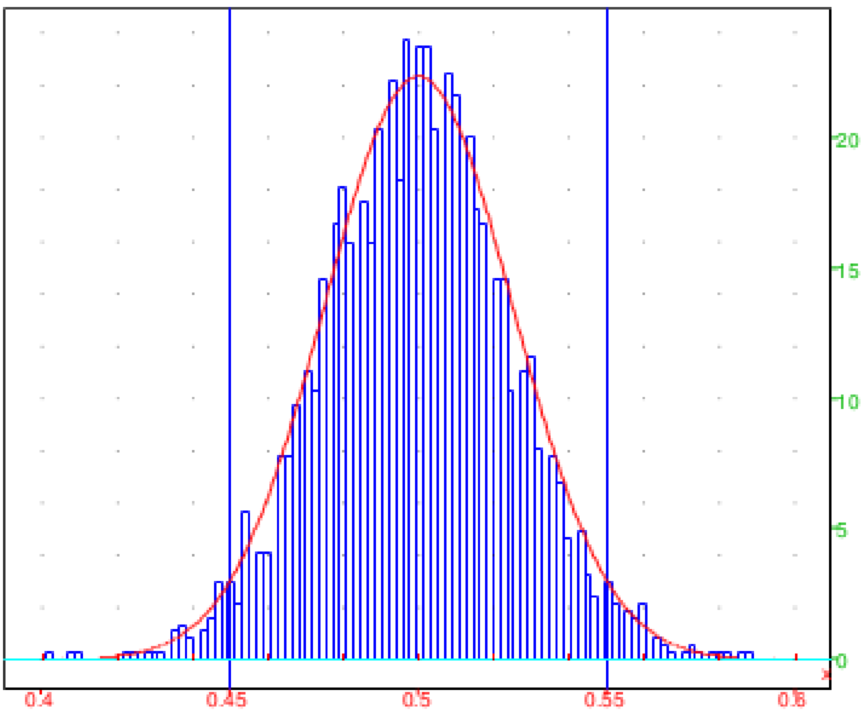
```
u:=[];
pour j de 0 jusque 1999 faire
x:=randvector(400,'rand(2)');
u[j]:=count_eq(1,x)/400.0;
fpour;
```

3. Utilisation de la simulation

On utilisera le mode graphique (Alt+G)

```
f:=max(u)-min(u);
a:=1/2-1/sqrt(400)
b:=1/2+1/sqrt(400)
classes(u,0,f/30)
histogram(classes(u,0,f/30));
purge(x)
droite(x=a);droite(x=b);
2000-count_int(a,u)-count_sup(b,u)
(2000-count_int(a,u)-count_sup(b,u))/2000
```

On obtiendra le graphique suivant (dependant des échantillons simulés) :



LEÇON

13

Estimation

Niveau : BTS
Prérequis : probabilités, loi normale

1 Estimation

1.1 Introduction

Lorsque l'on cherche à déterminer le poids moyen des français, il est bien sûr hors de question de peser *tous* les français. Par contre, en choisissant *judicieusement* un petit nombre de personnes, il est possible d'en obtenir une *estimation*.

On pratique beaucoup ces estimations dans les milieux industriels plutôt que d'étudier la population entière soit parce que cela prendrait trop de temps, soit parce que cela reviendrait trop cher, soit encore parce que cela serait illogique (contrôle qualité détruisant les pièces...).

1.2 Loi des grands nombres

Théorème 13.1

Loi des grands nombres

On considère une expérience aléatoire avec un événement A de probabilité p. Si on répète n fois et de manière aléatoire cette expérience on regarde la fréquence d'apparition f_n de l'événement A. On obtient, avec une probabilité aussi grande que l'on veut, une fréquence f_n (pour n expériences indépendantes) aussi proche que l'on veut de p, lorsque n est suffisamment grand.

Exemple 13.2. Lors de 300 lancers de dés, on observe les résultats suivants :

Faces	1	2	3	4	5	6
Effectif	49	50	51	49	50	51
Fréquence	0,163	0, 166	0,17	0,163	0,166	0,17

On observe que les fréquences sont proches des probabilités pour obtenir une des faces d'un dé qui est de $\frac{1}{6}$.

1.3 Estimation ponctuelle

On prélève un échantillon au hasard sur la population dont on cherche à faire l'étude.

Définition 13.3

Estimation ponctuelle de la fréquence

Pour estimer la fréquence p *inconnue* d'un caractère dans une population, on prélève un échantillon et on calcule la fréquence d'apparition de ce caractère dans l'échantillon. Cette fréquence d'apparition est une *estimation ponctuelle* de la fréquence p.

Exemple 13.4. Une usine produit des vis cruciformes. On souhaite estimer la moyenne des longueurs des vis dans la production de la journée qui s'élève à 10000 pièces. On prélève un échantillon de 150 vis et on relève 3 pièces défectueuses. On peut alors donner une estimation de la fréquence p de vis défectueuses dans le production journalière :

$$f = \frac{3}{150} = 0{,}02$$

donc $p = 0{,}02$.

Définition 13.5

Estimation ponctuelle de la moyenne

Pour estimer la moyenne m *inconnue* d'une population, on prélève un échantillon et on calcule la moyenne de cet échantillon. Cette moyenne d'échantillon est une *estimation ponctuelle* de la moyenne m.

Exemple 13.6. On reprend les données de l'exemple de l'usine. On choisit un échantillon de 150 vis et on obtient une moyenne de $m = 4{,}57$ cm. On en déduit donc que la longueur moyenne des vis de la production journalière est $\overline{x} = 4{,}57$ cm.

Définition 13.7

Estimation ponctuelle de l'écart-type

Pour estimer l'écart-type σ *inconnu* d'une population, on prélève un échantillon et on calcule l'écart-type σ' de cet échantillon. Le nombre $\sqrt{\frac{n}{n-1}}\sigma'$ est une *estimation ponctuelle* de l'écart-type σ.

Exemple 13.8. On reprend les données de l'exemple de l'usine. La mesure de la longueur des vis produites dans l'échantillon précédent de 150 pièces conduit à relever un écart-type de 3 mm. La meilleure estimation possible de l'écart-type de la production journalière n'est pas de 3 mm comme dans le cas précédent pour la moyenne, mais de

$$\sigma = 3\sqrt{\frac{150}{149}} \simeq 3{,}01 \text{ mm}.$$

1.4 Estimation par intervalle de confiance

Moyenne On considère une population de moyenne m *inconnue* et d'écart-type σ qu'on suppose *connue*. Si n est assez grand, la variable aléatoire X qui à chaque échantillon de n éléments associe sa moyenne suit approximativement la loi $\mathcal{N}\left(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

On peut donc, à l'aide de $\mathcal{N}(0, 1)$, trouver un intervalle $[a\,, b]$ tel que $P(a \leq X \leq b) = 0{,}95$ pr exemple.

Définition 13.9

Cet intervalle est appelé *intervalle de confiance* de la moyenne m avec le *coefficient de confiance* 0,95.

On a de manière plus générale :

Théorème 13.10

L'intervalle $[\overline{x}-t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,, \overline{x}+t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$ est l'*intervalle de confiance* de la moyenne m de la population avec le coefficient de confiance $2\Pi(t) - 1$ où $\overline{x}$ est la moyenne de l'échantillon considéré et $\Pi(t)$ la valeur en t de la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0, 1)$.

Remarque 13.11. On ne peut déterminer un intervalle de confiance que si *on connaît déjà* l'écart-type σ.

Exemple 13.12. On suppose que la durée de vie, exprimée en heures, d'une ampoule électrique d'un certain type, suit la loi normale de moyenne M inconnue et d'écart type $\sigma = 20$. Une étude sur un échantillon de 16 ampoules donne une moyenne de vie égale à 3000 heures. On va déterminer un intervalle de confiance de M au seuil de risque de 10%. On a :

$$2\Pi(t) - 1 = 1 - 0{,}1 \Leftrightarrow \Pi(t) = 0{,}95 \Leftrightarrow t = 1{,}645.$$

Un intervalle de confiance de M est donc :

$$\left[3000 - 1{,}645\frac{20}{\sqrt{16}}; 3000 + 1{,}645\frac{20}{\sqrt{16}}\right] = [2992\,, 3008].$$

Fréquence On considère une population qui contient avec une fréquence p des individus ayant un certain caractère. Si n est assez grand, la variable aléatoire F qui à chaque échantillon de n éléments associe la fréquence d'apparition des individus ayant ce caractère suit approximativement la loi $\mathcal{N}\left(p; \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$.

De manière analogue au cas pour une moyenne il est possible de déterminer un *intervalle de confiance* de la fréquence p avec un *coefficient de confiance choisi.*

Théorème 13.13

L'intervalle $[f - t\sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}}\,, f + t\sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}}]$ est l'*intervalle de confiance* de la fréquence p avec le coefficient de confiance $2\Pi(t) - 1$ où f est la fréquence des individus ayant le caractère dans l'échantillon considéré.

Exemple 13.14. Un sondage dans une commune révèle que sur les 500 personnes interrogées, 42% sont mécontentes de l'organisation des transport. On veut déterminer, au seuil de risque 1%, un intervalle de confiance du pourcentage p de personnes mécontentes dans la commune. On a $f = 0{,}42$, $n = 500$, $2\Pi(t) - 1 = 0{,}99$ donc $t = 2{,}575$. Un intervalle de confiance du pourcentage p est donc :

$$\left[0{,}42 - 2{,}58\sqrt{\frac{0{,}42 \times 0{,}58}{499}} ; 0{,}42 + 2{,}58\sqrt{\frac{0{,}42 \times 0{,}58}{499}}\right] = [0{,}36\,,0{,}48] = [36\%\,,47\%].$$

2 Tests d'hypothèses

Chaque test se déroule en 5 étapes :

1. Détermination de la variable aléatoire de décision et de ses paramètres.
2. Choix des deux hypothèses : l'hypothèse nulle H_0 et de l'hypothèse alternative H_1,
3. L'hypothèse nulle étant considérée comme vraie et compte tenu de l'hypothèse alternative, détermination de la zone critique selon le niveau de risque α donné,
4. Rédaction d'une règle de décision

Ces quatre premières étapes est la *construction du test de validité d'hypothèse* et :

5. Calcul des caractéristiques d'un échantillon particulier puis application de la règle de décision

Cette dernière étape est l'*utilisation du test d'hypothèse.*

2.1 Test bilatéral relatif à une moyenne

Exemple 13.15. Une machine produit des rondelles dont l'épaisseur est une variable aléatoire X d'écart-type $0{,}3$ mm. La machine a été réglée pour obtenir des épaisseurs de 5 mm. Un contrôle portant sur un échantillon de 100 rondelles a donné $5{,}07$ mm comme moyenne des épaisseurs de ces 100 rondelles. Peut-on affirmer que la machine est bien réglée au seuil de risque de 5% ?

1. Variable aléatoire de décision Soit m l'espérance mathématique de X, c'est-à-dire la moyenne des épaisseurs de toutes les rondelles produites par la machine ainsi réglée. On considère la variable aléatoire M qui, à chaque échantillon de taille 100, associe sa moyenne. La talle des échantillons étant suffisamment grande, on considère que M suit la loi $\mathcal{N}\left(m, \frac{0{,}3}{\sqrt{100}}\right)$, c'est-à-dire $\mathcal{N}(m, 0{,}03)$. M sera la variable de décision

2. Choix des hypothèses On estime que la machine est bien réglée, si la moyenne de toutes les rondelles produites par la machine est 5 mm. C'est donc l'hypothèse $m = 5$ que nous allons tester. On l'appelle l'hypothèse nulle H_0. Sinon, on choisit comme hypothèse alternative, l'hypothèse H_1 : « $m \neq 5$ ». Recherchons comment la moyenne m_e, d'un échantillon de 100 rondelles peut confirmer ou non l'hypothèse H_0.

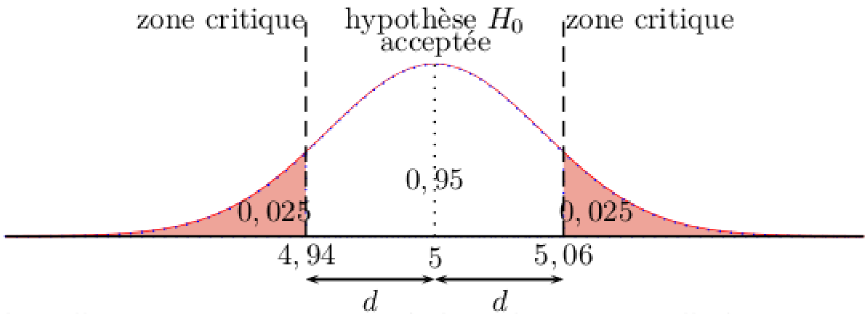
3. Zone critique Dans le cas où l'hypothèse H_0 est vraie, la variable aléatoire M suit la loi $\mathcal{N}(5; 0{,}03)$. On cherche alors le réel d tel que

$$P(5 - d \leq M \leq 5 + d) = 0{,}95. \tag{13.1}$$

La variable aléatoire $T = \frac{M-5}{0{,}03}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$, on a alors :

$$\begin{aligned}(13.1) \Leftrightarrow P(5 - d \leq 0{,}03T + 5 \leq 5 + d) = 0{,}95 \Leftrightarrow P\left(-\tfrac{d}{0{,}03} \leq T \leq \tfrac{d}{0{,}03}\right) = 0{,}95\\ \Leftrightarrow 2\Pi\left(\tfrac{d}{0{,}03}\right) - 1 = 0{,}95 \Leftrightarrow \Pi\left(\tfrac{d}{0{,}03}\right) = 0{,}975.\end{aligned}$$

On trouve alors $\frac{d}{0{,}03} = 1{,}96$ soit $d = 0{,}0588 \simeq 0{,}06$. L'intervalle de confiance est donc l'intervalle : $[5 - 0{,}06\,, 5 + 0{,}06] = [4{,}94\,, 5{,}06]$.



La probabilité qu'un échantillon ait une moyenne située hors de cet intervalle étant 0,05, on peut considérer que cet événement est rare. Ainsi, la moyenne de notre échantillon $m_e = 5{,}07$ nous amène à douter de la validité de l'hypothèse H_0.

Il se peut, malgré tout, que la machine soit bien réglée et que notre échantillon fasse partie des 5% de ceux ayant une moyenne hors de l'intervalle trouvé. C'est pourquoi cette région est appelée *zone critique*.

4. Règle de décision Si la moyenne de l'échantillon n'est pas située dans la zone critique, on accepte H_0, sinon, on refuse H_0 et on accepte H_1.

5. Conclusion Puisque 5,07 appartient à la zone critique, on décide de rejeter l'hypothèse H_0 et d'accepter l'hypothèse alternative H_1 : « $m \neq 5$ » (la machine n'est pas bien réglée).

Remarque 13.16. Dans un test de validité d'hypothèse, le seuil de risque α est la probabilité de rejeter H_0 alors qu'elle est vraie.

2 2 Test unilatéral relatif à une moyenne

Exemple 13.17. La durée de vie (en heures) des ampoules électriques produites par une usine est une variable aléatoire X d'écart type 120. Le fabricant annonce qu'en moyenne, les ampoules ont une durée de vie de 1120 heures. On demande de rédiger une règle de décision pour vérifier l'affirmation du fabricant, au seuil de risque de 5%, en testant un échantillon de 36 ampoules.

1. Variable aléatoire de décision Soit m l'espérance mathématique de X, c'est-à-dire la moyenne des durées de vie de toutes les ampoules produites. On considère la variable aléatoire M qui, à chaque échantillon de 36 ampoules associe la moyenne de durée de vie des 36 ampoules. La taille des échantillons étant suffisamment grande, on considère M suit la loi $\mathcal{N}\left(m; \frac{120}{\sqrt{36}}\right)$, c'est-à-dire $\mathcal{N}(m; 20)$.

2. Choix des hypothèses Soit l'hypothèse nulle H_0 : « $m = 1120$ » (l'affirmation du fabricant est vraie). Dans l'exemple précédent, les rondelles devaient avoir une épaisseur moyenne de 5 mm et cette mesure ne supportait ni excès, ni déficit. Ici, l'acheteur ne se plaindra que si la durée de vie des ampoules est inférieure à 1120 heures ; dans le cas où la moyenne m_e, de l'échantillon est supérieure à 1120, l'hypothèse du fabricant se trouve immédiatement confirme. L'hypothèse alternative H_1 est donc $m < 1120$ (l'affirmation du fabricant est fausse).

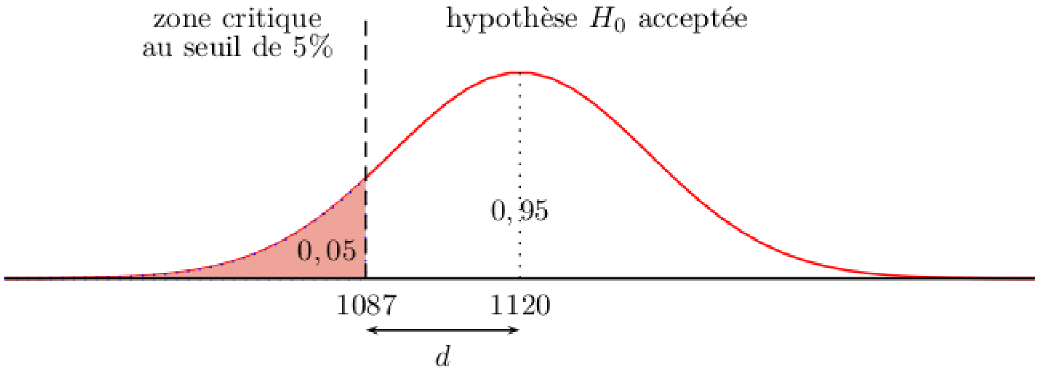
3. Zone critique La zone critique se trouve donc d'un seul côté de la moyenne. On dit alors que le test est unilatéral par opposition au test bilatéral effectué au paragraphe précédent. Dans le cas où H_0 est vraie, la variable aléatoire M suit la loi $\mathcal{N}(1120; 20)$. On cherche alors le réel d tel que

$$P(M < 1120 - d) = 0{,}05. \tag{13.2}$$

La variable aléatoire $T = \frac{M-1120}{20}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$, on a alors :

$$\begin{aligned}(13.2) &\Leftrightarrow P(20T + 1120 < 1120 - d) = 0{,}05 \Leftrightarrow P\left(T < -\tfrac{d}{20}\right) = 0{,}05 \\ &\Leftrightarrow P\left(T > \tfrac{d}{20}\right) = 0{,}05 \Leftrightarrow 1 - P\left(T \leq \tfrac{d}{20}\right) = 0{,}05 \Leftrightarrow \Pi\left(\tfrac{d}{20}\right) = 0{,}95.\end{aligned}$$

On trouve alors $\frac{d}{20} = 1{,}645$ soit $d = 32{,}9 \approx 33$. La zone critique est donc l'intervalle $]-\infty\,, 1120 - 33] =]-\infty\,, 1087]$.



La zone critique est l'intervalle $]-\infty\,, 1087]$: 5% seulement des échantillons de taille 36 ont en moyenne une durée de vie inférieure à 1087 heures.

4. Règle de décision Si la moyenne m_e de l'échantillon observé est inférieure à 1087, on rejette l'hypothèse H_0 et on accepte l'hypothèse alternative H_1 (l'affirmation du fabricant est fausse). Si la moyenne m_e de l'échantillon observé est supérieure à 1087, on accepte l'hypothèse H_0.

2 3 Test unilatéral relatif à une fréquence

Remarque 13.18. On donne ici un exemple de test unilatéral relatif à une fréquence, mais d'autres cas peuvent amener à envisager des tests bilatéraux relatifs à une fréquence.

Exemple 13.19. Un joueur doit choisir au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. Il obtient certains avantages s'il découvre un roi. On constate qu'il a retourné 134 fois un roi sur 800 essais. Peut-on présumer, au seuil de risque de 1%, que ce joueur est un tricheur ?

1. Variable aléatoire de décision Soit p la fréquence de rois que le joueur découvraient s'il jouait une infinité de fois. Soit F la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 800 essais, associe la fréquence d'apparition du roi. La taille des échantillons étant suffisamment grande, on considère F suit la loi $\mathcal{N}\left(p; \sqrt{\frac{p(1-p)}{800}}\right)$. F sera la variable aléatoire de décision.

2. Choix des hypothèses Si le joueur n'est pas un tricheur, la valeur de p est $\frac{4}{32} = 0{,}125$. Donc, l'hypothèse nulle H_0 est « $p = 0{,}125$ » (le joueur n'est pas un tricheur). Si $p < 0{,}125$, on considéra que le joueur n'est pas un tricheur non plus, donc : l'hypothèse alternative H_1 est « $p > 0{,}125$ » (le joueur est un tricheur).

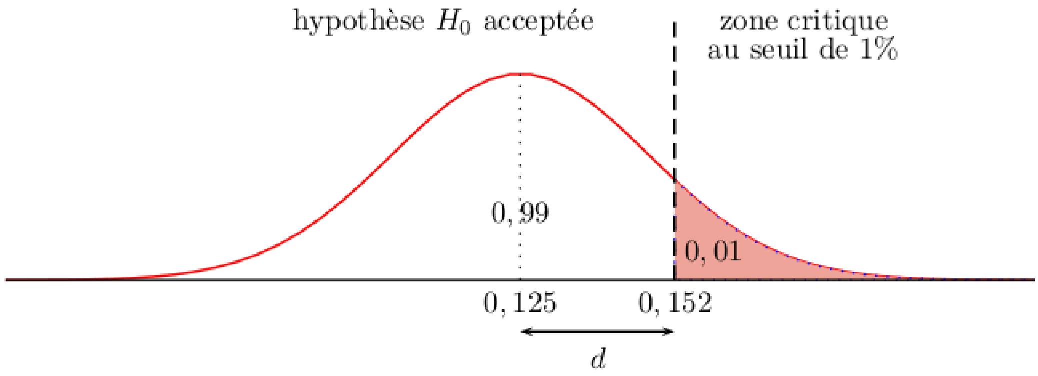
3. Zone critique Dans le cas où l'hypothèse H_0 est vraie, la variable aléatoire F suit la loi $\mathcal{N}\left(0{,}125; \sqrt{\frac{0{,}125}{8}}\right.$ soit $\mathcal{N}(0{,}125; 0{,}0117)$. On cherche alors le réel d tel que

$$P(F > 0{,}125 + d) = 0{,}01 \tag{13.3}$$

La variable aléatoire $T = \frac{F - 0{,}125}{0{,}0117}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$, on a alors :

$$\begin{aligned}(13.3) &\Leftrightarrow P(0{,}0117T + 0{,}125 > 0{,}125 + d) = 0{,}01 \Leftrightarrow P\left(T > \frac{d}{0{,}0117}\right) = 0{,}01\\ &\Leftrightarrow 1 - P\left(T \leq \frac{d}{0{,}0117}\right) = 0{,}01 \Leftrightarrow \Pi\left(\frac{d}{0{,}0117}\right) = 0{,}99.\end{aligned}$$

On trouve alors $\frac{d}{0{,}0117} = 2{,}33$ soit $d = 0{,}027261 \approx 0{,}027$. La zone critique est donc l'intervalle $[0{,}125 + 0{,}027\,, +\infty[= [0{,}152\,, +\infty[$.



Donc la zone critique est $]0{,}152\,, +\infty]$.

4. Règle de décision Si la fréquence de l'échantillon est supérieure à $0{,}152$, on rejette l'hypothèse H_0 et on accepte l'hypothèse H_1 : l'hypothèse H_0 n'est pas validée. Si la fréquence de l'échantillon est inférieure $0{,}152$, on accepte l'hypothèse H_0 : l'hypothèse H_0 est validée.

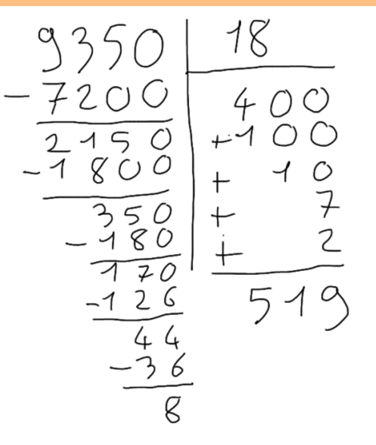
5. Conclusion L'échantillon observé a une fréquence égale à $\frac{134}{800} = 0{,}1675$. D'après la règle de décision, puisque $0{,}1675 > 0{,}152$, on accepte l'hypothèse H_1 et on décide que le joueur est un tricheur.

II

Arithmétique & Algèbre

LEÇON 14

Multiples, diviseurs, division euclidienne



Niveau : Terminale S

Prérequis : notions d'arithmétique : théorème de Gauss, division, nombres entiers, construction de $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

1 Multiples et diviseurs dans $\mathbb{Z}$

1.1 Définition

Définition 14.1

Soient a et b deux entiers relatifs. a est un multiple de b, si et seulement si, il existe un entier relatif k tel que : $a = kb$.

On dit aussi que :

- a est divisible par b ;
- b est un diviseur de a ;
- b divise a.

Exemples 14.2.

a. 54 est un multiple de 3 car $54 = 18 \times 3$.
b. -5 divise 45 car $45 = (-9) \times (-5)$.

1.2 Propriétés

Propriétés 14.3

a. 0 est un multiple de tout entier.
b. 1 divise tout entier.
c. Si a est un multiple de b et si $a \neq 0$ alors $|a| \geq |b|$.
d. Si a divise b et si b divise a alors $a = b$ ou $a = -b$ avec a et b non nuls.

1.3 Règles de divisibilité

Toutes les règles de divisibilité peuvent être démontrées par la congruence.

Propriétés 14.4

a. Un entier est divisible par 2 s'il se termine par 0, 2, 4, 6, 8.
b. Un entier est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou 5.
c. Un entier est divisible par 10 s'il se termine par 0.
d. Un entier est divisible par 25 s'il se termine par 00, 25, 50, 75.
e. Un entier est divisible par 4 si le nombre formé par les deux derniers chiffres est divisible par 4.

Développement

Démonstration du critère de divisibilité par 2. Soit N un nombre entier. Il existe donc un B et a_0 tel que

$$N = 10B + a_0$$

avec $0 \leq a_0 \leq 9$. Or $10B$ est toujours multiple de 2 donc N est multiple de 2 si et seulement si a_0 est multiple de 2. □

Exemples 14.5.

a. 1932 est divisible par 4 car 32 est divisible par 4.
b. Par contre, 1714 n'est pas divisible par 4 car 14 n'est pas divisible par 4.

Propriétés 14.6

a. Un entier est divisible par 3 si la somme des chiffres est divisible par 3.
b. Un entier est divisible par 9 si la somme des chiffres est divisible par 9.

Développement

Démonstration du critère de divisibilité par 3. Soit N un entier naturel divisible par 3. On a alors :

$$3 \mid N \Leftrightarrow N \equiv 0 \pmod 3.$$

On pose

$$N = a_0 + a_1 \times 10 + a_2 \times 10^2 + \cdots + a_n \times 10^n.$$

Or $10 \equiv 1 \pmod 3$ donc

$$N \equiv 0 \pmod 3 \Leftrightarrow a_0 + a_1 + \cdots + a_n = 0 \pmod 3.$$

Ainsi, lorsqu'un nombre est divisible par 3, la somme des chiffres de ce nombre est divisible par 3. □

Exemples 14.7.

a. 8232 est divisible par 3 car $8 + 2 + 3 + 5 = 15$ et 15 est divisible par 3.

b. 4365 est divisible par 9 car $4 + 3 + 6 + 5 = 18$ et 18 est divisible par 9.

Propriété 14.8

Un entier de trois chiffres est divisible par 11 si la sommes des chiffres extrêmes est égale à celui du milieu.

Exemple 14.9. 451 est divisible par 11 car $4 + 1 = 5$. On a alors $451 = 11 \times 41$.

Propriété 14.10

D'une façon générale un entier est divisible par 11 si la différence entre la somme des chiffres de rangs pairs et la somme des chiffres de rangs impairs est divisible par 11.

Exemples 14.11.

a. 6457 est divisible par 11 car :

$$(7 + 4) - (5 + 6) = 11 - 11 = 0$$

et 0 est divisible par 11.

b. 4939 est divisible par 11 car :

$$(9 + 9) - (3 + 4) = 18 - 7 = 11$$

et 11 est divisible par 11.

Propriété 14.12

Critère de divisibilité par 7

Un nombre est *divisible par* 7 si et seulement si le résultat de la soustraction du *nombre de dizaines* par le double du chiffre des unités est multiple de 7.

La démonstration nécessite la connaissance du théorème de Gauss.

Développement

Démonstration du critère de divisibilité par 7. Soit N un nombre entier divisible par 7. On pose

$$N = a_0 + a_1 \times 10 + \cdots + a_n \times 10^n.$$

On a :

$$7 \mid 10(a_1 + a_2 \times 10 + \cdots + a_n \times 10^{n-1} - 2a_0).$$

Or 7 et 10 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Gauss :

$$7 \mid a_1 + a_2 \times 10 + \cdots + a_n \times 10^{n-1} - 2a_0.$$

Réciproquement si

$$7 \mid a_1 + a_2 \times 10 + \cdots + a_n \times 10^{n-1} - 2a_0$$

alors

$$7 \mid 10(a_1 + a_2 \times 10 + \cdots + a_n \times 10^{n-1} - 2a_0)$$

Or, $7 \mid 21$ donc

$$7 \mid a_1 \times 10 + a_2 \times 10^2 + \cdots + a_n \times 10^n - 20a_0 + 21a_0.$$

On obtient ainsi $7 \mid N$. □

Exemple 14.13. 252 est divisible par 7 car son nombre de dizaine est 25, son chiffre des unités est 2 et

$$25 - 2 \times 2 = 25 - 4 = 21 \quad \text{(divisible par 7)}.$$

Exemple 14.14. Grâce aux règles de divisibilité, on montre facilement que :

a. Les diviseurs de 20 sont : 1, 2, 4, 5, 10, 20

b. Les diviseurs de 36 sont : 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

c. Les diviseurs de 120 sont : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120

14 Un exercice d'application

Exercice 14.15.

1. Déterminer tous les couples d'entiers naturels tels que :

$$x^2 - 2xy = 15.$$

2. Déterminer tous les entiers relatifs n tels que $(n-3)$ divise $n+5$.

Développement

Solution.

1. On cherche à mettre le terme de droite en facteur de façon à faire apparaître des divisuers de 15. En factorisant, on trouve :

$$x(x-2y) = 15.$$

Comme x et y sont des entiers naturels, on a la relation suivante : $x \geq x - 2y$. De plus, les diviseurs de 15 sont :

$$D_{15} = \{1, 3, 5, 15\}.$$

Les décompositions possible sont donc :

$$\begin{cases} x = 15 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 5 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} x = 15 \\ y = \frac{15-1}{2} = 7 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 5 \\ y = \frac{5-3}{2} = 1 \end{cases}.$$

On obtient alors les couples solutions : $(15, 7)$ et $(5, 1)$.

2. Si $(n-3)$ divise $(n+5)$ alors il existe un entier k tel que :

$$n + 5 = k(n-3)$$

On cherche à factoriser par $(n-3)$ en faisant ressortir ce terme à gauche :

$$\begin{aligned} (n+3) + 8 &= k(n-3) \\ k(n-3) - (n-3) &= 8 \\ (n-3)(k-1) &= 8 \end{aligned}$$

donc $(n-3)$ est un diviseur de 8. L'ensemble des diviseurs de 8 dans $\mathbb{Z}$ est :

$$D_8 = \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}.$$

On a donc le tableau suivant correspond aux valeurs possibles de n :

$n-3$	-8	-4	-2	-1	1	2	4	8
n	-5	-1	1	2	4	5	7	11

□

1.5 Opérations sur les multiples

Théorème 14.16

Soit trois entiers relatifs a, b et c.
Si a divise b et c alors a divise $a+b$, $a-b$ ou toutes combinaison linéaire de b et de c.

Développement

Démonstration. On sait que a divise b et c, donc il existe deux entiers relatifs k et k' tels que :

$$b = ka \quad \text{et} \quad c = k'a.$$

On a alors :

$$b+c = (k+k')a, \quad b-c = (k-k')a \quad \text{et} \quad \alpha b + \beta c = (\alpha k + \beta k')a.$$

Donc a divise $b+c$, $b-c$ et $\alpha b + \beta c$. □

Exemple 14.17. Soit k un entier naturel, on pose $a = 9k+2$ et $b = 12k+1$. On cherche les diviseurs positifs communs à a et b.

Soit d un diviseur commun à a et b. Comme d divise a et b, il divise $c = 4a - 3b$, soit :

$$c = 4(9k+2) - 3(12k+1) = 36k + 8 - 36k - 3 = 5$$

donc d divise 5. Comme 5 n'a que 2 diviseurs positifs, 1 et 5, on a alors $d = 1$ et $d = 5$.

Les diviseurs positifs possibles communs à a et b sont 1 et 5.

2 Division euclidienne

Définition 14.18

Soit a un entier relatif et b un entier naturel non nul.

On appelle division euclidienne de a par b, l'opération qui au couple (a, b) associe le couple (q, r) tels que :

$$a = bq + r \quad \text{avec } 0 \leq r < b.$$

a s'appelle le dividende, b le diviseur, q le quotient et r le reste.

Exemples 14.19.

a. La division euclidienne de 114 par 8 : $114 = 8 \times 14 + 2$

b. La division de -17 par 3 : $17 = 3 \times (-6) + 1$.

Exercice 14.20.

1. Trouver tous les entiers qui divisés par 5 donne un quotient égal à 3 fois le reste.
2. Lorsqu'on divise a par b, le reste est 8 et lorsqu'on divise $2a$ par b, le reste est 5. Déterminer le diviseur b.

Développement

Démonstration.

1. Soit a l'entier cherché. On divise a par 5, on a alors :

$$a = 5q + r \quad \text{avec } 0 \leq r < 5$$

Comme $q = 3r$, on a :

$$a = 15r + r = 16r \quad \text{avec } 0 \leq r < 5$$

On trouve toutes les valeurs de a en faisant varier r de 0 à 4 compris, on a alors l'ensemble solution suivant :

$$S = \{0, 16, 2, 48, 64\}.$$

2. Écrivons les deux divisions, en notant q et q' les restes respectifs :

$$\begin{aligned} 2bq+16 &= bq'+5 \quad \text{avec } b>8 \\ b(2q-q') &= -11 \\ b(q'-2q) &= 11 \end{aligned}$$

On en déduit que p est un multiple positif non nul de 11, supérieur à 8, donc : $b=11$.

□

Algorithme. On propose un algorithme sur Xcas qui effectue une division euclidienne par soustraction successives :

```
diveucl(a,b) fonction
  local r,q;
  si b < 0 alors
    b := -b;
    a := -a;
  fsi
  q := 0;
  r := a;
  si a >= 0 alors
    tantque r>=b faire
      r := r-b;
      q := q+1;
    ftantque
   sinon
     tantque r<0 faire
      r := r+b;
      q := q-1;
     ftantque
  fsi
    afficher(q);
    afficher(r);
ffonction:;
```

3 Vers les congruences

3.1 Entiers congrus modulo n

Définition 14.21

Soit n un entier naturel ($n \geq 2$), a et b deux entiers relatifs. On dit que deux entiers a et b sont congrus modulo n si, et seulement si, a et b ont même reste par la division euclidienne par n. On note alors :

$$a \equiv b \pmod{n}.$$

Exemples 14.22.

a. $57 \equiv 15 \pmod 7$ car $57 = 7 \times 8 + 1$ et $15 = 7 \times 2 + 1$.

b. Un nombre est congru à son reste modulo n par la division euclidienne par n :

$$2000 \equiv 8 \pmod{10}, \quad 17 \equiv 1 \pmod 4, \quad 75 \equiv 3 \pmod 9.$$

Propriétés 14.23

Comme la congruence est une relation d'équivalence, elle est :

a. réflexive : $a \equiv a \pmod n$;

b. symétrique : si $a \equiv b \pmod n$ alors $b \equiv a \pmod n$;

c. transitive : si $a \equiv b \pmod n$ et $b \equiv c \pmod n$ alors $a \equiv c \pmod n$.

Remarque 14.24. Lorsqu'on s'intéresse au jour de la semaine d'une date donnée, on travaillera modulo 7.

Théorème 14.25

Soit n un entier naturel ($n \geq 2$), a et b deux entiers relatifs.

$$a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow a - b \equiv 0 \pmod{n}.$$

Développement

Démonstration.

$\boxed{\Rightarrow}$ On sait donc que $a \equiv b \pmod{n}$. Il existe donc q, q' et r tels que :

$$a = nq + r \quad \text{et} \quad b = nq' + r \quad \text{avec } 0 \leq r < n.$$

On en tire :

$$a - b = n(q - q').$$

Donc $a - b$ est un multiple de n, donc son reste par la division par n est nul, donc $a - b \equiv 0 \pmod{n}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ On sait donc que $a - b \equiv 0 \pmod{n}$. Il existe k tel que :

$$a - b = kn \tag{14.1}$$

Si l'on effectue la division de a par n, on a :

$$a = nq + r \tag{14.2}$$

De (14.1) et (14.2), on obtient :

$$\begin{aligned} nq + r - b &= kn \\ -b &= kn - nq - r \\ b &= (q - k)n + r \end{aligned}$$

On en déduit donc : $a \equiv b \pmod{n}$.

□

3 2 Compatibilité avec la congruence

Théorème 14.26

Soit n un entier naturel ($n \geq 2$), a, b, c, d des entiers relatifs vérifiant :

$$a \equiv b \pmod{n} \quad \text{et} \quad c \equiv d \pmod{n}.$$

La congruence est compatible :

a. avec l'addition :
$$a + c \equiv b + d \pmod{n};$$

b. avec la multiplication :
$$ac \equiv bd \pmod{n};$$

c. avec les puissances :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a^k \equiv b^k \pmod{n}.$$

Développement

Démonstration.

Compatibilité avec l'addition : On sait que $a \equiv b \pmod n$ et $c \equiv b \pmod n$, donc $(a-b)$ t $(c-d)$ sont des multiples de n. Il existe donc deux entiers relatifs k et k' tels que :

$$a - b = kn \quad \text{et} \quad c - d = k'n.$$

En additionnant ces deux égalités, on obtient :

$$\begin{aligned} a - b + c - d &= kn + k'n \\ (a+c) - (b+d) &= (k+k')n \end{aligned}$$

Donc $(a-c) - (b-d)$ est un multiple de n, donc d'après le théorème 14.25, on obtient :

$$a + c \equiv b + d \pmod n.$$

Compatibilité avec la multiplication : On sait que $a \equiv b \pmod n$ et $c \equiv d \pmod n$, donc il existe deux entiers relatifs k et k' tels que :

$$a = b + kn \quad \text{et} \quad c = d + k'n.$$

En multipliant ces deux égalités, on obtient :

$$\begin{aligned} ac &= (b+kn)(d+k'n) \\ ac &= bd + k'bn + kdn + kk'n^2 \\ ac &= bd + (k'b + kd + kk'n)n \\ ac - bd &= (k'b + kd + kk'n)n \end{aligned}$$

Donc $(ac - bd)$ est un multiple de n, donc d'après le théorème 14.25, on a :

$$ac \equiv bd \pmod n.$$

Compatibilité avec les puissances : On prouve cette compatibilité par récurrence sur k, à l'aide de la compatibilité avec la multiplication.

□

---

3 3 Applications de la congruence (en lien avec le thème de la leçon)

1. Reste

On souhaite déterminer les restes succesifs dans la division par 7 des nombres suivants :

$$50^{100},\ 100,\ 100^3,\ 50^{100} + 100^{100}.$$

1. On détermine le reste de 50^{100} par la division par 7. On a $50 \equiv 1 \pmod 7$ car $50 = 7 \times 7 + 1$. D'après la compatibilité avec les puissances, on a :

$$50^{100} \equiv 1^{100} \equiv 1 \pmod 7.$$

Le reste est 1.

2. On détermine le reste de 100 par la division par 7. $100 = 50 \times 2$, comme $50 \equiv 1 \pmod 7$, d'après la compatibilité avec la multiplication, on a :

$$100 \equiv 2 \pmod 7.$$

Le reste est 2.

3. Pour déterminer le reste de 100^3 par la division par 7, on utilise la question précédente et la compatibilité avec les puissances. On a :

$$100^3 \equiv 2^3 \equiv 8 \equiv 1 \pmod 7.$$

Le reste est 1.

4. On détermine le reste de $50^{100} + 100^{100}$ par la division par 7. On a : $100^{100} = 100^{3\times 33+1} = (100^3)^{33} \times 100$, donc d'après la compatibilité avec les puissances et la multiplication, on a :

$$100^{100} \equiv 1^3 \times 2 \equiv 2 \pmod 7.$$

Par compatibilité avec l'addition, on a alors :

$$50^{100} + 100^{100} \equiv 1 + 2 \equiv 3 \pmod 7.$$

2. Divisibilité

On va montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.

On a : $3^{n+3} = 3^n \times 3^3 = 27 \times 3^n$, or $27 \equiv 5 \pmod{11}$, donc d'après la compatibilité avec la multiplication, on a :

$$3^{n+3} \equiv 5 \times 3^n \pmod{11}.$$

On a : $4^{4n+2} = (4^4)^n \times 4^2$, or $4^2 \equiv 5 \pmod{11}$ donc $4^4 \equiv 5^2 \equiv 3 \pmod{11}$, donc :

$$4^{4n+2} \equiv 3^n \times 5 \pmod{11}.$$

On en déduit donc :

$$3^{n+3} - 4^{4n+2} \equiv 0 \pmod{11}.$$

La proposition est donc vérifiée, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

LEÇON

15

PGCD, égalité de Bézout

Niveau : Terminale S Spé
Prérequis : divisibilité, nombres premiers

1 PGCD : Plus grand commun diviseur

1.1 Définition

Définition 15.1

Plus grand commun diviseur
Soient a, b deux nombres entiers relatifs non nuls. L'ensemble des diviseurs communs de a et de b admet un plus grand élément que l'on appelle le *plus grand commun diviseur* de a et de b.

Remarques 15.2.

a. $b \mid a$ si et seulement si $\mathrm{PGCD}(a,b) = b$.

b. Soient a et b deux entiers relatifs :

$$\mathrm{PGCD}(a,b) = \mathrm{PGCD}(|a|, |b|).$$

1.2 Propriétés

Propriétés 15.3

Étant donnés quatre nombres entiers a, b, c et d.

a. $\mathrm{PGCD}(a,b) = \mathrm{PGCD}(b,a)$;

b. $\mathrm{PGCD}(ka,kb) = k\,\mathrm{PGCD}(a,b)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

c. Si $a \mid c$ et $b \mid d$ alors $\mathrm{PGCD}(a,b) \mid \mathrm{PGCD}(c,d)$.

Développement

Démonstration des propriétés 15.3

a. Triviale

b. Soit $k \neq 0$, on peut appliquer l'algorithme d'Euclide sur a et b :

$$\begin{cases} a = bq_0 + r_0 \\ b = r_0 q_1 + r_1 \\ r_0 = r_1 q_2 + r_2 \\ \quad \vdots \\ r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n \\ r_{n-1} = r_n q_{n+1} + 0 \end{cases} \tag{15.1}$$

Donc, d'après (15.1), $\mathrm{PGCD}(a,b) = r_n$. On multiplie les expressions de (15.1) par k :

$$\begin{cases} ka = kbq_0 + kr_0 \\ kb = kr_0 q_1 + kr_1 \\ kr_0 = kr_1 q_2 + kr_2 \\ \quad \vdots \\ kr_{n-2} = kr_{n-1} q_n + kr_n \\ kr_{n-1} = kr_n q_{n+1} + 0 \end{cases}$$

D'où $\mathrm{PGCD}(ka,kb) = kr_n$.

c. Comme $\mathrm{PGCD}(a,b) \mid a$, $a \mid c$ et $\mathrm{PGCD}(a,b) \mid b$ et $b \mid d$ alors $\mathrm{PGCD}(a,b)$ divise c et d donc divise $\mathrm{PGCD}(c,d)$.

□

1 3 Algorithme d'Euclide, exemples

Théorème 15.4

Théorème d'Euclide

Soient a et b deux entiers non nuls. La suite des diviseurs euclidiennes :

- de a par b : $a = bq_0 + r_0$;
- de b par r_0 (si $r_0 \neq 0$) : $b = q_1 r_0 + r_1$;
- ...
- de r_{n-1} par r_n (si $r_n \neq 0$) : $r_{n-1} = r_n q_{n+1} + r_{n+1}$

fini par s'arrêter un des restes r_i étant nul. Le dernier reste non nul est alors le $\mathrm{PGCD}(a,b)$ (si $r_0 = 0$ alors $\mathrm{PGCD}(a,b) = b$).

Développement

Démonstration du théorème 15.4

Les inégalités $b > r_0 > r_1 > \cdots > r_n > \cdots \geq 0$ montrent que la suite $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'entiers naturels, cette suite est finie. D'autre part, considérons l'égalité $a = bq_0 + r_0$:

- tout diviseur de a et b divise $a - bq_0$, c'est un diviseur de b et r_0 ;
- tout diviseur de b et r_0 divise $bq_0 - r_0$, c'est un diviseur de b et r_0.

Ainsi, les diviseurs communs de a et b sont ceux de b et r_0 et il va de même pour le plus grand d'entre eux : $\mathrm{PGCD}(a,b) = \mathrm{PGCD}(b,r_0)$.

On peut appliquer ce raisonnement à chaque égalité :

$$\mathrm{PGCD}(a,b) = \mathrm{PGCD}(b,r_0) = \cdots = \mathrm{PGCD}(r_{i-1}, r_{i-2}).$$

Or si $r_{i-2} = r_{i-1}q_i + 0$ alors $\mathrm{PGCD}(a,b) = \mathrm{PGCD}(r_{i-1}, r_i) = r_{i-1}$ avec $r_i = 0$. □

On donne maintenant un algorithme implémentable sur Xcas :

```
pgcdeuclide(a,b):={
   local r;
   tantque b<>0 faire
     r := irem(a,b)
     a := b
     b := r
  ftantque
   retourne(a)
}
```

Exemple 15.5. Calculer $\mathrm{PGCD}(1636, 1128)$.

Développement

Exemple 15.5

On applique l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned}
1636 &= 1128 + 508 \\
1128 &= 2 \times 508 + 112 \\
508 &= 4 \times 112 + 60 \\
112 &= 60 + 52 \\
60 &= 52 + 8 \\
52 &= 6 \times 8 + 4 \\
8 &= 4 \times 2 + 0.
\end{aligned}$$

Donc : $\mathrm{PGCD}(1636, 1128) = 4$.

2 Nombres premiers entre eux

2.1 Premiers résultats

Définition 15.6

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls, a et b sont *premiers entre eux* si et seulement si $\mathrm{PGCD}(a,b)=1$.

Propriété 15.7

Soient a et b deux entiers naturels non nuls. δ est le PGCD de a et de b si et seulement si, $\frac{a}{\delta}$ et $\frac{b}{\delta}$ sont des entiers premiers entre eux.

Développement

Démonstration de la propriété 15.7

On justifie que $\frac{a}{\delta}$ et $\frac{b}{\delta}$ sont des entiers naturels non nuls.

Comme $\delta=\mathrm{PGCD}(a,b)$, $\delta \mid a$ et $\delta \mid b$ donc il existe deux entiers relatifs k et k' tels que $k\delta=a$ et $k'\delta=b$, d'où $\delta=\frac{a}{k}=\frac{b}{k'}$.

$$\frac{a}{\delta}=\frac{a}{\frac{a}{k}}=a\times\frac{k}{a}=k\in\mathbb{Z}$$
$$\frac{b}{\delta}=\frac{b}{\frac{b}{k'}}=b\times\frac{k'}{b}=k'\in\mathbb{Z}.$$

Si $d=\mathrm{PGCD}(\frac{a}{\delta},\frac{b}{\delta})$ alors, en utilisant la formule d'homogénéité, on obtient :

$$d=\mathrm{PGCD}(\tfrac{a}{\delta},\tfrac{b}{\delta})=\frac{1}{\delta}\mathrm{PGCD}(a,b).$$

Or $\delta=\mathrm{PGCD}(a,b)$ d'où $d=1$.

Réciproquement, si $\frac{a}{\delta}$ et $\frac{b}{\delta}$ sont premiers entre eux alors $\mathrm{PGCD}(\frac{a}{\delta},\frac{b}{\delta})=1$. En utilisant une nouvelle fois, la formule d'homogénéité :

$$\mathrm{PGCD}(\tfrac{a}{\delta},\tfrac{b}{\delta})=\frac{1}{\mathrm{PGCD}(a,b)}\mathrm{PGCD}(a,b)=1$$

et ainsi, $\delta=\mathrm{PGCD}(a,b)$. □

2.2 Application

Application 15.8. Factoriser $\frac{12345}{13991}$.

Développement

Application 15.8

On calcule $\mathrm{PGCD}(12345,13991)$.

$$13991=12345\times 1+1646$$
$$12345=1646\times 7+823$$
$$1646=823\times 2+0.$$

Donc : $\mathrm{PGCD}(12345,13991)=823$ et :

$$12345=15\times 823$$
$$13991=17\times 823$$

D'où :

$$\frac{12345}{13991}=\frac{15}{17}.$$

Comme $\mathrm{PGCD}(15,17)=1$, la fraction $\frac{15}{17}$ est irréductible.

Théorème 15.9

Théorème de Gauss

Soient a, b et c trois entiers relatifs non nuls. Si $a \mid bc$ et a et$b$ sont premiers entre eux alors $a \mid c$.

Développement

Démonstration du théorème 15.9

Comme $a \mid bc$, il existe un entier k tel que $bc = ka$. Comme a et b sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, il existe des entiers relatifs u et b tels que $au + bv = 1$.

En multipliant par c cette dernière égalité, on obtient :

$$c = acu + bcv = acu + kav = a(cu + kv).$$

Comme $(cu + kv)$ est un entier, cette égalité prouve que $a \mid c$. □

Proposition 15.10

Soient a, b et c trois entiers naturels. Si $a \mid c$, $b \mid c$, a et b sont premiers entre eux alors $ab \mid c$.

Développement

Démonstration de la proposition 15.10

Comme $a \mid c$, il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $c = ad$. Comme $b \mid c$, il existe $d' \in \mathbb{N}$ tel que $c = bd'$. Donc $ad = bd'$. Comme a divise bd' et $\mathrm{PGCD}(a, b) = 1$, d'après le théorème de Gauss, a divise d'. Il existe donc $d' \in \mathbb{N}$ tel que $d' = ad''$. Donc :

$$c = d'b = ad''b.$$

□

3 Égalité de Bézout

Théorème 15.11

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls et d leur PGCD. Alors il existe des entiers relatifs u et v tels que $au + bv = d$. On appelle cette égalité, *égalité de Bézout*.

Développement

Démonstration du théorème 15.11

- Soit E l'ensemble des entiers naturels non nuls de la forme $ax + by$ où x et y sont des entiers relatifs.

  E est une partie non vide de $\mathbb{N}$. En effet, on a, par exemple, $|a| \in E$ car, selon le signe de a, l'entier naturel $|a|$ s'écrit $a \times 1 + b \times 0$ ou $a \times (-1) + b \times 0$. E étant une partie non vide de $\mathbb{N}$, E admet un plus petit élément n.

  Par définition de E, il existe donc des entiers relatifs u et v tels que $n = au + bv$. Or d divise a et b donc d divise n, d'où $d \leq n$.
- On montre que n divise a en écrivant la division euclidienne de a par n : $a = nq + r$ avec $0 \leq r < n$ et $q \in \mathbb{Z}$. Donc :

$$r = a - nq = a - q(au + bv) = a(1 - qu) + b(-qv).$$

  Ainsi r est de la forme $ax + by$ avec x et y des entiers relatifs. De plus, $r < n$ donc, par définition de n, $r \notin E$. Alors nécessairement $r = 0$ et donc n divise a.
- On montre de même que n divise b. D'où, par définition de d, $n \leq d$. Finalement, on obtient $d = n = au + bv$.

□

Théorème 15.12

Théorème de Bézout

Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe des entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.

Développement

Démonstration du théorème 15.12

Si a et b sont premiers entre eux alors $\mathrm{PGCD}(a, b) = 1$ et donc, avec la propriété précédente, $au + bv = 1$.

Réciproquement, on suppose qu'il existe des entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$. Soit $D = \mathrm{PGCD}(a, b)$ alors D divise a, D divise b donc D divise $au + bv$, d'où $D = 1$. □

Exemple 15.13. Résoudre l'égalité de Bézout suivante :

$$266u + 224v = \mathrm{PGCD}(266, 224).$$

Développement

Exemple 15.13

On détermine tout d'abord $\mathrm{PGCD}(266, 244)$ avec l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned} 266 &= 1 \times 224 + 42 \\ 224 &= 5 \times 42 + 14 \\ 42 &= 3 \times 4 + 0. \end{aligned}$$

D'où $\mathrm{PGCD}(266, 224) = 14$. On résout donc l'équation :

$$266u + 224v = 14.$$

Par l'algorithme d'Euclide, on trouve :

$$\begin{aligned} 14 &= 224 - 5 \times 42 \\ 14 &= 224 - 5(266 - 244) \\ 14 &= 6 \times 224 - 5 \times 266. \end{aligned}$$

On obtient $u = -5$ et $v = 6$.

On peut montrer que toutes les solutions sont les couples :

$$\{(-5 + 224k, 6 - 266k), k \in \mathbb{Z}\}.$$

4 Applications

4.1 Décomposition en facteurs premiers et PGCD

Théorème 15.14

Théorème fondamental de l'arithmétique

Pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

a. Il existe k nombres premiers naturels, $p_1, \dots, p_k$ distincts deux à deux et des nombres entiers non nuls $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ tels que :

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}.$$

b. Il y a unicité de cette décomposition à l'ordre des facteurs près.

Développement

Démonstration du théorème 15.14

Existence : La démonstration se fait par récurrence sur n.

Initialisation : Si $n = 2$ alors $n = 2^1$.

Hérédité : Si $n \geq 2$ alors n possède au moins un diviseur premier de p et l'on peut écrire $n = pm$ avec $m < n$. Si $m = 1$ alors c'est fini ! Sinon on applique l'hypothèse de récurrence à m pour obtenir la décomposition sur n.

Unicité : la démonstration de l'unicité se fait par récurrence sur n.

Initialisation : L'unicité est évidente pour $n = 2$. En effet, si $2 = q_1^{\beta_1} \cdots q_m^{\beta_m}$ montre que $q_i \mid 2$ pour tout $1 \leq i \leq m$, ce qui impose d'avoir $m = 1$, $q_1 = 2$ et $\beta_1 = 1$.

Hérédité : Si l'unicité est démontrée jusqu'au rang n, on suppose que :

$$n + 1 = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} = q_1^{\beta_1} \cdots q_m^{\beta_m}$$

avec $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{N}^*$ et où les $p_1, \ldots, p_k$ et $q_1, \ldots, q_m$ sont des nombres entiers.
$p_k \mid q_1^{\beta_1} \cdots q_m^{\beta_m}$ donc p_k divise l'un des q_i, par exemple $p_k \mid q_m$. Comme p_k est premier, cela entraîne que $p_k = q_m$ et :

$$\frac{n+1}{p_k} = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k - 1} = q_1^{\beta_1} \cdots q_m^{\beta_m - 1}.$$

On applique l'hypothèse de récurrence à cette décomposition en distinguant deux cas :

1. Si $\alpha_k = 1$ alors $\beta_m = 1$ autrement q_m diviserait l'un des p_i avec $i \neq m$, ce qui est absurde.
2. Si $\alpha_k > 1$ alors $\beta_m > 1$ autrement p_k diviserait l'un des q_i avec $i \neq k$, ce qui est encore absurde.

□

Théorème 15.15

Soient a et b deux entiers naturels tels que :

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} \quad \text{et} \quad b = p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k}.$$

Alors :

$$\mathrm{PGCD}(a, b) = p_1^{\delta_1} \cdots p_k^{\delta_k}$$

avec $\delta_i = \min(\{\alpha_i, \beta_i\})$.

Développement

Démonstration du théorème 15.15

Soit $d = p_1^{\delta_1} \cdots p_k^{\delta_k}$. On vérifie que d est bien un diviseur commun de a et de b. Réciproquement, soit d' un diviseur commun de a et de b. Tout facteur premier p de d est aussi un facteur premier de a et de b. Si p_i^δ divise a et b alors $\delta \leq \alpha_i$ et $\delta \leq \beta_i$ onc :

$$\delta \leq \delta_i = \min(\{\alpha_i, \beta_i\}).$$

Cela entraîne que d' est un diviseur de d. Donc d est le PGCD de a et de b. □

---

4 2 Applications de la vie de tous les jours

Problème 15.16. Un jardinier doit planter une haie autour d'une pacerelle rectangulaire de longueur 10,2 m et de largeur 7,8 m. Il doit mettre un plant à chaque sommet d'un rectangle et espacer les plants régulièrement d'un nombre entier de centimètres.

Combien de plants au minimum peut-il planter ?

Développement

Solution du problème 15.16

On calcule $\mathrm{PGCD}(102, 78)$ par l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned} 102 &= 78 \times 1 + 24 \\ 78 &= 24 \times 3 + 6 \\ 24 &= 6 \times 4 + 0 \end{aligned}$$

On a de plus :

$$102 = 6 \times 17 \quad \text{et} \quad 78 = 6 \times 13.$$

Les plants devront être plantés à 6 cm d'espacement chacun. Sur une longueur, on peut planter 17 plants et sur la largeur, 13 plants. Donc, on peut planter $(13 + 17) \times 2 = 60$ plants.

Problème 15.17. Une fleuriste dispose de 244 lys, 366 roses et 183 oeillets roses. En utilisant le tout, quel nombre maximal de bouquets identiques peut-elle composer ?

Préciser la composition d'un bouquet.

Développement

Solution du problème 15.17

On a :

$$\mathrm{PGCD}(244, 366, 183) = \mathrm{PGCD}(\mathrm{PGCD}(244, 366), 183) = \mathrm{PGCD}(122, 183) = 61.$$

On peut donc composer au maximum 61 bouquets. La composition du bouquet est :

- 4 lys ;
- 6 roses ;
- 3 oeillets roses.

---

4 3 Équation de droite

L'ensemble des points $M(x, y)$ vérifiant l'équation $ax + by = c$ forme une droite. Les couples d'entiers relatifs vérifiant cette équation correspond aux points M de la droite dont les coordonnées sont entières. La résolution de l'équation dans l'ensemble des entiers relatifs permet de donner les coordonnées de ces points. Selon la valeur de c, la droite D peut ne jamais passer par des points de coordonnées entières ou bien posséder une infinité de points de coordonnées régulièrement répartis.

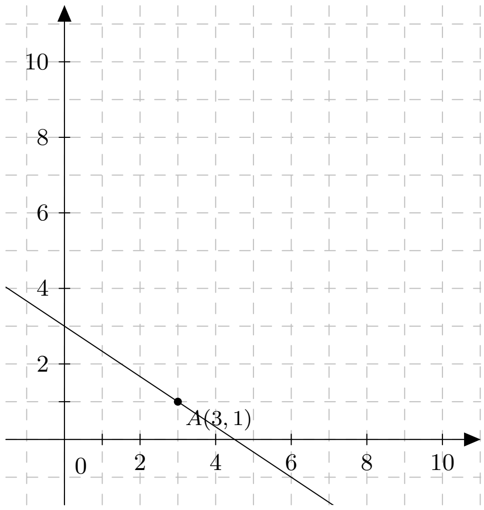


FIGURE 15.1 – Résolution graphique de l'équation $9x + 6y = 27$. Existence de solutions car la droite a un point à coordonnées entières.

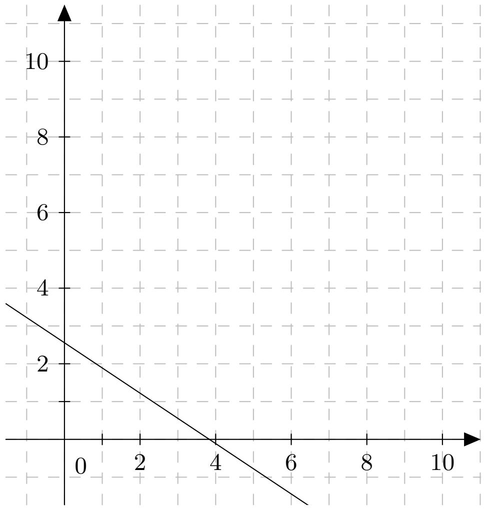


FIGURE 15.2 – Résolution graphique de l'équation $9x + 6y = 23$. Non-existence de solutions car la droite n'a aucun point à coordonnées entières.

Questions du jury

Propositions personelles de questions :

1 Dans la définition 15.11, pourquoi les diviseurs communs de a et de b ont un plus grand élément.

2 Résoudre l'équation diophantienne : $266u + 224v = 98$.

3 Démontrer le théorème 15.14 et 15.15.

4 Donner une correction du problème 15.16 face à une classe de Term S.

5 Peut-on définir le PGCD de trois nombres entiers ? Résoudre alors le problème 15.17.

Questions proposées par [Mer] :

6 Expliquez comment définir le PGCD de deux nombres entiers naturels en utilisant l'algorithme d'Euclide. Justifiez complétement votre définition et, en particulier, expliquez pourquoi l'algorithme d'Euclide aboutit après un nombre fini de calculs.

7 Connaissez-vous une interprétation géométrique de l'algorithme d'Euclide qui permet de calculer le PGCD de deux nombres entiers ?

8 Déterminer les couples d'entiers relatifs dont le PGCD est 15 et la différence 105.

9 Soient $a, b, n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathrm{PGCD}(a, b) = 1$ entraînee que $\mathrm{PGCD}(a, b^n) = 1$. La réciproque est-elle vraie ?

10 On suppose que les entiers u et v sont premiers entre eux et de parités différentes. Démontrer que les entiers $2uv$, $u^2 + v^2$, $u^2 - v^2$ sont premiers entre eux deux à deux.

Questions proposées par [Her] :

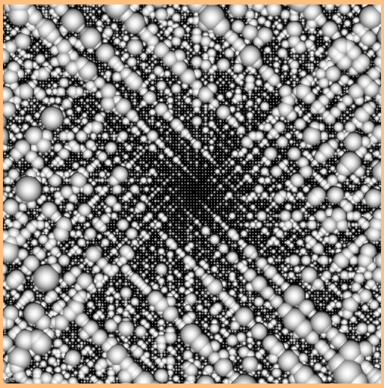
11 Est-ce qu'on peut résoudre l'équation suivante : $4x - 2y = 5$ avec x et y des entiers relatifs ?

12 Pouvez-vous montrer que l'algorithme d'Euclide s'arrête à un moment donné ?

13 À quoi servent les théorème de Bézout et Gauss ?

LEÇON 16

Nombres premiers, décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers



Niveau : Terminale S

Prérequis : notions d'arithmétique : diviseurs, nombres entiers, construction de $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

1 Nombres premiers : définition et propriétés

1.1 Définition

Définition 16.1

Nombre premier

Un *nombre premier* est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Remarques 16.2.

a. 1 n'est pas un nombre premier (il n'a qu'un seul diviseur).

b. Un nombre premier p est un naturel supérieur ou égal à 2 soit : $p \geq 2$.

Exemple 16.3. Les nombres premiers inférieurs à 100 sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 et 97.

1.2 Critère d'arrêt

Théorème 16.4

Tout entier naturel n, $n \geq 2$, admet un diviseur premier. Si n n'est pas premier, alors il admet un diviseur premier p tel que :

$$2 \leq p \leq \sqrt{n}.$$

Développement

Démonstration.

– Si n est premier, il admet donc un diviseur premier : lui-même.

– Si n n'est pas premier, l'ensemble des diviseurs d de n tel que :

$$2 \leq d < n$$

n'est pas vide. Il admet donc un plus petit élément p. Si p n'était pas premier, il admettrait un diviseur d' tel que $2 \leq d' < p$ qui diviserait n. Ceci est impossible car p est le plus petit. Donc p est premier.

On a donc p premier et $n = p \times q$ avec $p \leq q$. En multipliant cette inégalité par p, on obtient :

$$p^2 \leq pq \Leftrightarrow p^2 \leq n$$

soit $p \leq \sqrt{n}$.

□

Exemple 16.5. Montrer que 109 est un nombre premier. On a $10 < \sqrt{109} < 11$. On teste tous les nombres premiers strictement inférieurs à 11, soit : 2, 3, 5 et 7.

On utilise les règles de divisibilité de 2, 3, 5 pour en déduit que 109 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5.

En effectuant la division euclidienne de 109 par 7, on obtient :

$$109 = 7 \times 15 + 4$$

109 n'est donc pas divisible par 7. Conclusion, comme 109 n'est pas divisible par 2, 3, 5 et 7, 109 est premier.

Algorithme. On donne un algorithme implémenté sur Xcas qui permet de déterminer si un nombre N est premier.

```
testpremier(n) fonction
  local j,t;
  j := 2;
  t := 0;
  si floor(n/j) = n/j alors
    print(n," est divisible par ", j)
  sinon
    j := j+1
    tantque (j <= sqrt(n) et t = 0) faire
        si floor(n/j) = n/j alors
          t := 1;
        sinon
          j := j+2;
        fsi
      ftantque
    fsi
      si t = 1 alors
       print(n," est divisible par ",j);
      sinon
       print(n, "est premier");
     fsi
ffonction:;
```

On obtient alors :

- 527 divisible par 17 ;
- 719 est premier ;
- 11111 divisible par 41 ;
- 37589 est premier.

1 3 Infinité des nombres premiers

Théorème 16.6 Il existe une infinité de nombres premiers.

Développement

Démonstration. Supposons qu'il existe un nombre fini de nombres premiers $p_1, p_2, \dots, p_n$. On pose :

$$N = \left(\prod_{i=1}^{n} p_i\right) + 1.$$

N admet un diviseur premier. Soit p_i ce diviseur premier. p_i divise $p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_i \times \cdots \times p_n$ et N. Il divise donc la différence

$$N - (p_1 \times \cdots \times p_i \times \cdots p_n) = 1.$$

Ceci est impossible, donc l'hypothèse qu'il existe un nombre fini de nombres premiers est absurde. □

1 4 Compléments : Distribution des nombres premiers

On a montré que l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers était un ensemble infini. Mais entre 1 et N, combien y-a-t-il de nombres premiers ?

On énonce un théorème qui permet de faire une majoration du nombre des entiers premiers entre 1 et N.

Théorème 16.7

Admis

On note $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$ l'ensemble des nombres premiers et $\pi(N)$ le cardinal de l'ensemble des nombres premiers inférieurs ou égaux à N.

1. Pour tout n, on a $p_{n+1} \leq p_1 \cdots p_n + 1 \leq p_n^n + 1$
2. Pour tout $n \geq 2$, on a $\ln(\ln(n)) \leq \pi(n)$.

1 5 Critère d'Eratosthène

Pour dresser la liste des nombres premiers entre 2 et 100, la méthode du crible d'Eratosthène consiste à :

- écrire la liste des nombres entiers inférieurs ou égal à 100 ;
- éliminer successivement les multiples propres de 2, de 3, … puis ceux de p, où p est le premier nombre non encore élimié, etc.

Les entiers éliminés (en rouge) sont les entiers non premiers entre 2 et 100. Les entiers (en vert) sont donc les nombres premiers inférieur à 100.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

FIGURE 16.1 – Crible d'Erastosthène pour les entiers inférieurs ou égaux à 100

Remarques 16.8.

a. Pour éliminer les multiples propre de 7, commencer à 7^2, car les multiples inférieurs ont déjà été éliminés.

b. Il est possible de savoir à l'avance « jusqu'où aller ». En effet, grâce au critère d'arrêt, tout entier composé n admet un diviseur premier p tel que :

$$2 \leq p \leq n.$$

Si $n \leq 10$, alors $\sqrt{n} \leq \sqrt{100} = 10$. Tous les entier non premier sera éliminé en tant que multiple propre de 2, 3, 5, 7 et 11.

On peut écrire un algorithme qui permet d'établir le crible d'Eratosthène (qu'on peut implémenter sur Xcas) :

```
erato(n):={
local j,k,P;
P:=[seq(k,k=1..n)];
P[0]:=0;
pour j de 2 jusque floor(sqrt(n)) faire
  si P[j-1]>=1 alors
    pour k de 2 jusque floor(n/j) faire
      P[j*k-1]:=0;
    fpour;
   fsi;
fpour;
retourne(select(x->(x>=1),P));
}:;
```

16 Nombres de Mersenne

Définition 16.9

On appelle *nombres de Marsenne*, les nombres M_n de la forme :

$$M_n = 2^n - 1 \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}^*.$$

1. On calcule les 6 premiers nombres de Mersenne :

$$\begin{aligned} M_1 &= 2 - 1 = 1 \\ M_2 &= 4 - 1 = 3 \\ M_3 &= 8 - 1 = 7 \\ M_4 &= 16 - 1 = 15 \\ M_5 &= 32 - 1 = 31 \\ M_6 &= 64 - 1 = 63 \end{aligned}$$

On constate que pour les n égaux à 2, 3 et 5, les nombres de Mersenne sont premiers.
Est-ce que si n est premier, M_n est premier ? Cela permettrait de connaître un nombre premier aussi grand que l'on souhaite.

2. Montrons que si n n'est pas premier alors M_n ne l'est pas non plus.
On rappelle la factorisation standard :

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)$$

Si n n'est pas premier, alors il existe d, diviseur propre de n tel que :

$$n = dq \quad \text{avec } q > 1.$$

Factorisons alors M_n :

$$\begin{aligned} M_n &= 2^n - 1 = (2^d)^q - 1 \\ &= (2^d - 1)[(2^d)^{q-1} + (2^d)^{q-2} + \cdots + 2^d + 1] \end{aligned}$$

donc $2^d - 1$ est un diviseur propre de M_n et donc M_n n'est pas premier.
Donc : si n n'est pas premier alors M_n ne l'est pas non plus. On peut aussi utiliser la contraposée : si M_n est premier alors n l'est vraie.

3. Malheureusement, la réciproque est fausse. En effet, si $M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047$. Or $2047 = 23 \times 89$. M_{11} n'est pas premier mais 11 l'est.

2 Divisibilité et nombres premiers

21 Théorème de Gauss et nombres premiers

Théorème 16.10

Un nombre premier divise un produit de facteurs si et seulement si, il divise l'un de ces facteurs.

$$p \text{ divise } ab \Leftrightarrow p \text{ divise } a \text{ ou } p \text{ divise } b.$$

En particulier, si p premier divise une puissance a^k, alors nécessairement p dvise a, d'où découle que p^k divise a^k.

22 Conséquences

Conséquences 16.11

a. Si un nombre premier p divise un produit de facteurs premiers, alors p est l'un de ces facteurs premiers.

b. Soit $p_1, p_2, \ldots, p_k$ des nombres premiers distincts et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ des entiers naturels non nuls. Si, pour tout $1 \leq i \leq k$, $p_i^{\alpha_i}$ divise un entier n alors le produit $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ divise aussi l'entier n.

3 Décomposition, diviseurs d'un entier

3.1 Théorème fondamental de l'arithmétique

Théorème 16.12 Tout entier $n \geq 2$ peut se décomposer de façon unique (à l'ordre des facteurs près) en produit de facteurs premiers.

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots p_m^{\alpha_m}.$$

Exemple 16.13. On décompose 16758 en produit de facteurs premiers. Pour décomposer un entier, on effectue des divisions successives par des nombres premiers dans l'ordre croissant.

$$\begin{array}{r|l} 16758 & 2 \\ 8379 & 3 \\ 2793 & 3 \\ 931 & 7 \\ 133 & 7 \\ 19 & 19 \\ 1 & \end{array}$$

On a donc : $16758 = 2 \times 3^2 \times 7^2 \times 19$.

On propose un algorithme qui permet de donner la décomposition en facteurs premiers d'un entier.

```
decompositionentier(n) fonction
  local d,j,c,L;
  L := []
  d := 2;
  j := 1;
  c := 1;
  tantque d <= sqrt(n) faire
    si floor(n/d) = n/d alors
      L[j-1] := d;
      j := j+1;
      n := n/d
   sinon
      d := d+c;
      c := 2;
   fsi
  ftantque
 L[j-1] := n;
 retourne L;
ffonction:;
```

Il faut donc chercher les facteurs premiers d'un entier $n \geq 2$. On teste si d est un diviseur de n en commençant par 2 puis les nombres impairs dans l'ordre croissant en appliquant le critère d'arrêt $d \leq \sqrt{n}$. On initialse n en prenant le quotient $\frac{n}{d}$. Le dernier nombre qui ne vérifie pas le critère d'arrêt est alors premier et on le rajoute à la liste des diviseurs. On peut tester le programme :

```
decompositionentier(16758)
                       [2,3,3,7,7,19]
decompositionentier(87616)
                     [2,2,2,2,2,2,37,37]
decompositionentier(77986545)
                     [3,5,7,13,19,31,97]
```

Exemple 16.14. Soit à calculer $\mathrm{PGCD}(126, 735)$ et $\mathrm{PPCM}(126, 735)$.

– On décompose les deux nombres :

$$\begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 735 & 3 \\ 245 & 5 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

On a donc :

$$126 = 2 \times 3^2 \times 7$$
$$735 = 3 \times 5 \times 7^2$$

– On détermine les facteurs communs pour le PGCD et les facteurs utilisés pour le PPCM :

$$\mathrm{PGCD}(126, 735) = 3 \times 7 = 21 \quad \text{et} \quad \mathrm{PPCM}(126, 735) = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7^2 + 441.$$

3 2 Diviseurs d'un entier

Théorème 16.15

Soit un nombre n ($n \geq 2$) dont la décomposition en facteurs premiers est :

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_m^{\alpha_m}.$$

Alors tout diviseur d de n a pour décomposition :

$$d = p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \cdots \times p_m^{\beta_m}$$

avec $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ et $1 \leq i \leq m$. Le nombre de diviseurs N est alors :

$$N = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_m + 1).$$

Exemple 16.16. Trouver le nombre de diviseurs de 120 puis déterminer tous ces diviseurs.

– On décompose 120 en facteurs premiers : $120 = 2^3 \times 3 \times 5$. On a alors :

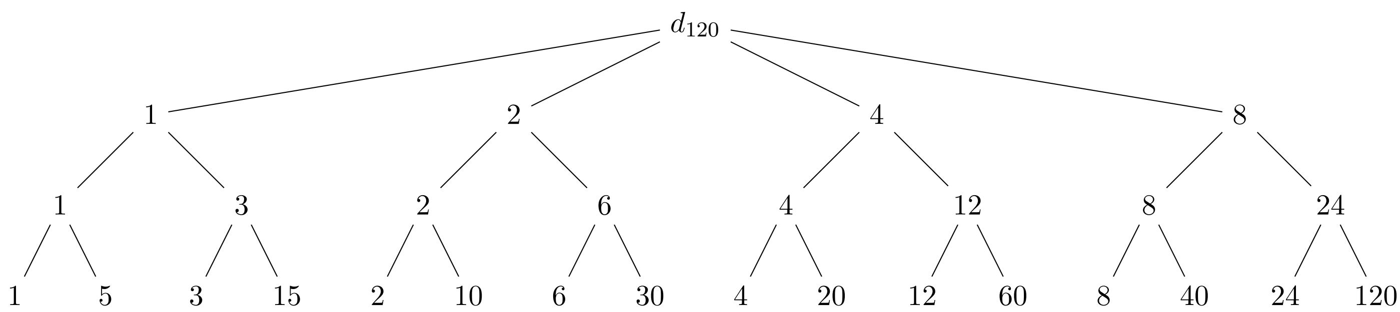
$$(3 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 4 \times 2 \times 2 = 16.$$

Il y a donc 16 diviseurs pour 120.

– Pour déterminer tous ces diviseurs, on peut utiliser un tableau double entrée en séparant les puissances de 2 et les puissances de 3 et 5. On obtient alors :

$\times$	2^0	2^1	2^2	2^3
$3^0 5^0$	1	2	4	8
$3^1 5^0$	3	6	12	24
$3^0 5^1$	5	10	20	40
$3^1 5^1$	15	30	60	120

– On peut aussi utiliser un arbre pondéré dont les coefficients sont les facteurs premiers possibles.



– Les 16 diviseurs de 120 sont donc :

$$D_{120} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120\}.$$

Exercice 16.17. Un entier naturel n a 15 diviseurs. On sait de plus que n est divisible par 6 mais pas par 8.

Déterminer cet entier n.

Développement

Solution. L'entier n a 15 diviseurs. Il faut donc connaître toutes les décompositions de 15 en facteurs supérieurs à 1. Il n'y a que 2 décompositions soit en un seul facteur 15, soit en deux facteurs 3×5.
On sait que n est divisible par 6, il est donc divisible par 2 et par 3. Donc n admet 2 facteurs premiers. Comme 15 ne peut décomposer en plus de 2 facteurs, alors n ne peut admettre que 2 facteurs premiers 2 et 3. On a donc :

$$n = 2^\alpha 3^\beta.$$

Comme $15 = 3 \times 5$, on a alors :

$$(1+\alpha)(1+\beta) = 3 \times 5.$$

On trouve alors deux solutions :

$$\alpha = 2 \text{ et } \beta = 4 \quad \text{ou} \quad \alpha = 4 \text{ et } \beta = 2.$$

On sait de plus que n n'est pas divisible par $8 = 2^3$, donc α est inférieur à 3. n est donc :

$$n = 2^2 3^4 = 4 \times 81 = 324.$$

□

Exercice 16.18. Déterminer le plus petit entier possédant 28 diviseurs.

Développement

Solution. Trouvons toutes les décompositions de 28 en facteurs supérieurs à 1. On peut décomposer en 1, 2 ou trois facteurs :

$$28 \quad \text{ou} \quad 2 \times 14 \quad \text{ou} \quad 4 \times 7 \quad \text{ou} \quad 2 \times 2 \times 7$$

- En 1 facteur : le plus petit entier n est alors $n = 2^\alpha$ avec $\alpha + 1 = 28$, soit $\alpha = 27$.

$$n = 2^{27} = 134217728.$$

- En deux facteurs : $28 = 2 \times 14$. Le plus petit entier n est alors :

$$n = 2^\alpha \times 3^\beta$$

  aveec $\alpha + 1 = 14$ et $\beta + 1 = 2$. On trouve alors : $\alpha = 13$ et $\beta = 1$ donc

$$n = 2^{13} \times 3 = 24576.$$

  Si on considère que $28 = 4 \times 7$, le plus petit entier n est alors :

$$n = 2^\alpha \times 3^\beta$$

  avec $\alpha + 1 = 7$ et $\beta + 1 = 4$. On trouve alors : $\alpha = 6$ et $\beta = 3$ donc :

$$n = 2^6 \times 3^3 = 1728.$$

- En trois facteurs : $28 = 2 \times 2 \times 7$. Le plus petit entier n est alors :

$$n = 2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma$$

  avec $\alpha + 1 = 7$, $\beta + 1 = 2$ et $\gamma + 1 = 2$. On trouve alors : $\alpha = 6$, $\beta = 1$ et $\gamma = 1$ donc :

$$n = 2^6 \times 3 \times 5 = 960.$$

Conclusion : le plus petit entier naturel ayant 28 diviseurs est 960. □

4 Petit théorème de Fermat

4 1 Théorème, remarque et exemple

Théorème 16.19

Soit un nombre premier p et un naturel a non multiple de p alors :

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Développement

Démonstration. Considérons les $p-1$ premiers multiples de a :

$$a,\ 2a,\ 3a,\ \ldots,\ (p-1)a.$$

Considérons les restes de la division de ces multiples de a par p :

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ \ldots,\ r_{p-1}.$$

– Ces restes sont deux à deux distincts. En effet, s'il existait deux restes identiques, soit r_i et r_j avec $i > j$ alors :

$$\begin{aligned} ia - ja &\equiv r_i - r_j \pmod{p} \\ a(i-j) &\equiv 0 \pmod{p} \end{aligned}$$

donc $(i-j)a$ serait multiple de p, ce qui est impossible.

– Si ces restes sont tous différents et qu'il y a $p-1$ multiples, on trouve tous les restes non nul possibles de la division par p. Donc

$$r_1 \times r_2 \times \cdots \times r_{p-1} = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (p-1) = (p-1)!$$

– Si l'on cherche le reste du produit de tous ces multiples, on obtient :

$$\begin{aligned} a \times 2a \times 3a \times \cdots \times (p-1)a &\equiv (p-1)! \pmod{p} \\ (p-1)!a^{p-1} &\equiv (p-1)! \pmod{p} \\ (p-1)!(a^{p-1}-1) &\equiv 0 \pmod{p} \end{aligned}$$

Comme $(p-1)!$ n'est pas un multiple de p car tous les facteurs sont inférieurs à p, alors $a^{p-1}-1$ est donc un multiple de p.
On a donc :

$$a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Le théorème est donc vérifié.

□

Remarque 16.20. Pour tout nombre premier p et pour tout $a \in \mathbb{N}$, on a $a^p \equiv a \pmod{p}$.

En effet, si a n'est pas multiple de p, en multipliant l'équivalence du théorème de Fermat, on obtient l'équivalence ci-dessus. Si a est un multiple de p, on a alors : $a \equiv 0 \pmod{p}$ et donc $a^p \equiv 0 \pmod{p}$.

Exemple 16.21. Prouver que, pour tout enter n, 7 divise $3^{6n} - 1$.

Développement

Solution. 7 est premier et 6 n'est pas un multiple de 7, donc d'après le petit théorème de Fermat, on a :

$$3^6 \equiv 1 \pmod{7}.$$

Comme la congruence est compatible avec les puissances, on a :

$$3^{6n} \equiv 1 \pmod{7}$$

donc $3^{6n} - 1$ est divisible par 7 pour tout n. □

4 2 Nombre de Poulet

Soit n un entier ($n \geq 1$) un nombre impair tel que $2^{n-1} \not\equiv 1 \pmod{n}$.

1. Montrer que n n'est pas premier.
2. Prouver que $2^{340} \equiv 1 \pmod{341}$, mais que 341 n'est pas premier.

Développement

Solution.

1. Montrons que n est composé par la ontraposée : « n est premier impair alors $2^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$. Si n est premier et impair, alors 2 n'est pas un multiple de n, d'après le théorème de Fermat, on a :
$$2^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}.$$
La contraposée est donc vérifiée.
2. On sait que $2^{10} = 1024$ et $1024 = 341 \times 3 + 1$, donc $1024 \equiv 1 \pmod{341}$.
$$2^{340} = (2^{10})^{34}$$
et donc
$$(2^{10})^{34} \equiv 1 \pmod{341}.$$
Or on a : $341 = 11 \times 31$ et donc 341 n'est pas premier.
La réciproque de la contraposée est fausse.

□

Définition 16.22

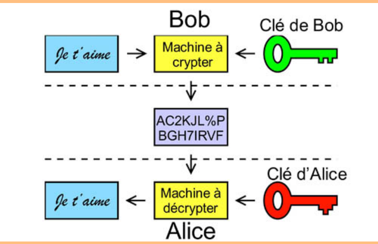
Nombre de Poulet
Un *nombre de Poulet* est un nombre n, non premier, tel que $2^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$.

Le nombre 341 est un nombre de Poulet.

LEÇON

17

Congruences dans $\mathbb{Z}$



Niveau : Terminale S

Prérequis : division euclidienne, nombre premiers, nombres premier entre eux, théorème de Bézout, théorème de Gauss, théorie de groupes et d'anneaux.

1 Premières définitions

Définition 17.1

Congruence

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{Z}$. On dit que a est *congru* à b *modulo* n si $n \mid a - b$. On note alors $a \equiv b \pmod{n}$.

Exemples 17.2.

1. $11 \equiv 1 \pmod{5}$ car $5 \mid 11 - 1$.
2. $25 \equiv 4 \pmod{7}$ car $7 \mid 25 - 4$.

Définition 17.3

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{Z}$. On dit que a est *congru* à b *modulo* p, si a et b ont le même reste dans la division euclidienne par p.

Nous avons donné deux définitions de congruence. On montre qu'elles sont équivalentes.

Développement

Démonstration.

– Supposons que a et b ont le même reste r dans la division euclidienne par p. On peut donc écrire

$$a = p \times k + r \quad \text{et} \quad b = p \times k' + r \quad \text{avec } k, k' \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leq r \leq p.$$

donc

$$b - a = p \times k' + r - (p \times k) + r = p \times k' - p \times k = p(k' - k).$$

$k' - k$ étant un entier relatif, on en déduit que $b - a$ est multiple de p.

– Supposons que $b - a$ est multiple de p, on peut écrire $b - a = k \times p$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On note q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de b par p. On a donc $b = p \times q + r$. Alors, en remplaçant dans l'égalité $b - a = k \times p$, on obtient

$$p \times q + r = a = kp.$$

Donc

$$A = p \times q + r - kp = p(q - k) + r$$

$q - k$ est un entier relatif et r est un entier naturel tel que $0 \leq r < p$. On en déduit que r est le reste de la division euclidienne de a par p. Donc a et b ont le même reste dans la division euclidienne par p.

□

Propriétés 17.4

1. Si $a \equiv b \pmod{p}$ et $b \equiv c \pmod{p}$ alors $a \equiv c \pmod{p}$.
2. Si $a \equiv b \pmod{p}$ et si $a' \equiv b' \pmod{p}$ alors
   - $a + a' \equiv b + b' \pmod{p}$,
   - $aa' \equiv bb' \pmod{p}$,
   - $a^n \equiv b^n \pmod{p}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Si $a \equiv b \pmod{p}$ alors, pour tout $c \in \mathbb{Z}$,
   - $a + c \equiv b + c \pmod{p}$,
   - $a - c \equiv b - c \pmod{p}$,
   - $ac \equiv bc \pmod{p}$.

Développement

Démonstration des propriétés 17.4.

1. Si $a \equiv b \pmod p$ et $b \equiv c \pmod p$ alors a et b ont le même reste dans la division euclidienne par p et b et c ont le même reste dans la division euclidienne par p donc a et c ont le même reste dans la division euclidienne par p et par conséquent $a \equiv c \pmod p$.
2. Si $a \equiv b \pmod p$ et si $a' \equiv b' \pmod p$ alors $b-a$ est un multiple de p et $b'-a'$ est un multiple de p. On en déduit, d'après les propriétés des multiples que $(b-a)+(b'-a')$ et $(b-a)-(b'-a')$ sont des multiples de p, c'est-à-dire $(b+b')-(a+a')$ et $(b-b')-(a-a')$ sont des multiples de p donc :
$$a+a' \equiv b+b' \pmod p \quad \text{et} \quad a-a' \equiv b-b' \pmod p.$$
D'autre part, puisque $b-a$ est un multiple de p, $a'(b-a)$ est un multiple p et puisque $b'-a'$ est un multiple de p, $b(b'-a')$ est un multiple de p et par conséquent $a'(b-a)+b(b'-a')$ est un multiple de p, c'est-à-dire $a'b-a'a+bb'-ba'$ est un multiple de p donc $bb'-aa'$ est un multiple de p donc
$$aa' \equiv bb' \pmod p.$$
Enfin considérons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition $P(n)$: « $a^n \equiv b^n \pmod p$. Pour $n=1$, on a $a^1 = 1$et $b^1 = b$ et on sait que $a \equiv b \pmod p$ donc $P(1)$ est vraie. Supposons la proposition $P(n)$ vraie pour un entier $n \geq 1$ alors $a^n \equiv b^n \pmod p$ et comme on a aussi $a \equiv b \pmod p$, on peut en utilisant la propriété précédente justifier que $a^n \times a \equiv b^n \times b \pmod p$ soit $a^{n+1} \equiv b^{n+1} \pmod p$, c'est-à-dire la proposition $P(n+1)$ est vraie. On a donc démontré par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$.
3. Si $a \equiv b \pmod p$ alors $b-a$ est un multiple de p mais on peut écrire :
$$b-a = (b+c)-(a+c)$$
donc $(b+c)-(a+c)$ est un multiple de p, donc
$$a+c \equiv b+c \pmod p \quad \text{pour tout } c \in \mathbb{Z}$$
De même, on peut écrire $b-a = (b-c)-(a-c)$ donc
$$a-c \equiv b-c \pmod p \quad \text{pour tout } c \in \mathbb{Z}.$$
D'autre part, puisque $b-a$ est un multiple de p alors, pour tout $c \in \mathbb{Z}$, $c(b-a)$ est un multiple de p, c'est-à-dire $bc-ac$ est un multiple de p donc
$$ac \equiv bc \pmod p \quad \text{pour tout } c \in \mathbb{Z}.$$

□

Exemples 17.5.

1. On démontre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $10^n - (-1)^n$ est divisible par 11. On peut écrire $10 \equiv -1 \pmod{11}$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $10^n \equiv (-1)^n \pmod{11}$ et ainsi, $10^n - (-1)^n$ est divisible par 11.

2 Compléments : l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Proposition 17.6 La relation de congruence modulo n est une relation d'équivalence

Développement

Démonstration. Les propriétés de reflexivité, symétricité et transitivité sont démontrés dans la section précédente. □

Remarque 17.7. Soit $a \in \mathbb{Z}$. On note $\overline{a}$ la classe d'équivalence de a pour cette relation, c'est-à-dire :
$$\overline{a} = \{b \in \mathbb{Z},\ a \equiv b \pmod n\}.$$

Définition 17.8

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

L'ensemble des classes d'équivalence de $\mathbb{Z}$ par cette relation est l'ensemble quotient noté $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Conséquence 17.9

Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, il existe un unique $r \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\begin{cases} 0 \leq r < n \\ \overline{a} = \overline{r} \end{cases}$$

Développement

Démonstration.
Existence Soit $a \in \mathbb{Z}$, il existe $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que :

$$\begin{cases} a = qn + r \\ 0 \leq r \leq n \end{cases}$$

Or, $a \equiv r \pmod{n}$ car $r = 0n + r$ et $0 \leq r < n$, donc $\overline{a} = \overline{r}$. En effet,

$$\overline{a} = \{b \in \mathbb{Z},\ b \equiv a \pmod{n}\} = \{b \in \mathbb{Z},\ b \equiv r \pmod{n}\} = \overline{r}.$$

Unicité Supposons qu'il existe un autre $r' \in \mathbb{Z}$ tel que $0 \leq r' < n$ et $\overline{r'} = \overline{a}$ donc $|r - r'| < n$ et $\overline{r} = \overline{r'}$, c'est-à-dire $r \equiv r' \pmod{n}$ ou il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $r - r' = nk$. D'où : $|r - r'| = n\,|k| < n$ donc $|k| < 1$ car $n > 0$, donc $k = 0$ c'est-à-dire $r = r'$.

□

Proposition 17.10

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \dots, \overline{n-1}\}$$

et $\operatorname{card}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = n$.

Développement

Démonstration. D'après ce qui précède, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \subset \left\{\overline{0}, \dots, \overline{n-1}\right\}$. En effet, soit $a \in \mathbb{Z}$, $\overline{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ alors il existe $r \in \mathbb{Z}$ tel que $0 \leq r < n$ et $\overline{r} = \overline{a}$, donc $\overline{a} = \overline{r} \in \left\{\overline{0}, \dots, \overline{n-1}\right\}$ donc :

$$\left\{\overline{0}, \dots, \overline{n-1}, \subset\right\} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},$$

c'est-à-dire $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \left\{\overline{0}, \dots, \overline{n-1}\right\}$.
De plus, soit $a \in \{0, \dots, n-1\}$. Il existe $r \in \mathbb{Z}$ tel que $0 \leq r < n$ et $\overline{r} = \overline{a}$ et ce r est unique donc $a = r$.
Ainsi :

$$\begin{cases} a \equiv a \pmod{n} \\ a \not\equiv i \pmod{n} \end{cases} \quad \text{pour tout } i \in \{0, \dots, n-1\} \text{ tel que } i \neq a$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} a \in \overline{a} \\ a \in \overline{i} \end{cases} \quad \text{pour tout } i \in \{0, \dots, n-1\} \text{ tel que } i \neq a$$

donc les éléments de $\left\{\overline{0}, \dots, \overline{n-1}\right\}$ sont deux à deux distincts. □

Théorème 17.11

On définit deux lois de composition interne sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que pour tout $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$:

$$\begin{cases} \overline{a} + \overline{b} = \overline{a + b} \\ \overline{a} \times \overline{b} = \overline{a \times b} \end{cases}$$

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau commutatif unifère.

Développement

Démonstration. La loi :

$$+ \quad : \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ (a \times b) & \mapsto & \overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b} \end{array}$$

est une loi de composition interne, car c'est une application $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (cela provient du fait que la relation de congruence est compatible avec l'addition). De plus, cette application est indépendante du représentant choisi.
$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau commutatif unifère provient du fait que $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau commutatif unifère. □

Remarques 17.12.

a. $\mathbb{Z}/1\mathbb{Z} = \{\overline{0}\}$ n'est pas unitaire.

b. $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ n'est pas intègre. $\overline{3}$ et $\overline{2} \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ donc $\overline{3} \times \overline{2} = \overline{6} = \overline{0}$ mais $\overline{3} \neq \overline{0}$ et $\overline{2} \neq \overline{0}$.

Théorème 17.13 Soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. $\mathrm{PGCD}(m, n) = 1$ si et seulement si $\overline{m}$ est un élément inversible de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Développement

Démonstration.

$(\Rightarrow)$ $\mathrm{PGCD}(m, n) = 1$, donc d'après le théorème de Bézout, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $un + vm = 1$, donc :

$$\overline{u} \times \overline{n} + \overline{v} \times \overline{m} = \overline{1} \Leftrightarrow \overline{v} \times \overline{m} = 1$$

car $\overline{n} = \overline{0}$ donc $\overline{m}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

$(\Leftarrow)$ Soit $\overline{m} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que il existe $\overline{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\overline{a} \times \overline{m} = \overline{1}$ donc $\overline{am} = \overline{1}$ et ainsi $am \equiv 1 \pmod{n}$. Il existe docn $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a \times m - kn = 1$, c'est-à-dire $\mathrm{PGCD}(n, m) = 1$.

□

Corollaire 17.14 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ est un corps si et seulement si n est premier.

Développement

Démonstration.

$$\begin{aligned} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times) \text{ est un corps} &\Leftrightarrow \forall \overline{m} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad \overline{m} \text{ est inversible et } \overline{m} \neq \overline{0} \\ &\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{Z},\ \mathrm{PGCD}(m, n) = 1 \text{ et } n \text{ ne divise pas } m \\ &\Leftrightarrow n \text{ est premier.} \end{aligned}$$

□

Remarque 17.15. L'ensemble des éléments de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \times)$ est un groupe.

Théorème 17.16 Soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. $\mathrm{PGCD}(m, n) = 1$ si et seulement si $\overline{m}$ engendre $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$.

Développement

Démonstration.

(⇒) $\overline{m}$ engendre $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ signifie que

$$G(\overline{m}) = \{k\overline{m},\ \forall k \in \mathbb{Z}\} =$$

Il suffit de démontrer que $\overline{1} \in G(\overline{m})$ afin d'avoir $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +) \subset G(\overline{m})$. En effet,si $\overline{1} \in G(\overline{m})$, alors soit $\overline{x} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. $\overline{x} = \overline{1} \times \overline{x} \in G(\overline{m})$ car $\overline{1}G(\overline{m})$ et $\overline{x} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$.
Par hypothèse, $\mathrm{PGCD}(n, m) = 1$, donc d'après le théorème de Bézout, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $nu + mv = 1$, donc $\overline{nu} + \overline{mv} = \overline{1}$. Or $\overline{n} = 0$ donc $\overline{1} = \overline{vm} \in G(\overline{m})$ car $\overline{v} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$.
Montrons que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, + \supset G(\overline{m})$. Soit $\overline{x} \in G(\overline{m})$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\overline{x} = k\overline{m}$ donc

$$\overline{x} = \underbrace{\overline{m} + \cdots + \overline{m}}_{k \text{ fois}} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

car $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe.

(⇐) Comme $\overline{m}$ engendre $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$, on a donc $G(\overline{m}) = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$. Or $\overline{1} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\overline{1} = k\overline{m}$ donc $km \equiv 1 \pmod{n}$ donc il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $km - k'n = 1$, c'est-à-dire $\mathrm{PGCD}(m, n) = 1$.

□

Corollaire 17.17

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe cyclique d'ordre n. Ce groupe est engendré par la lasse de tout entier p premier avec n.

Développement

Démonstration. $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe fini d'ordre n et monogène car $\overline{1}$ est générateur.
D'après ce qui précède, si $\mathrm{PGCD}(p, n) = 1$ alors $\overline{p}$ engendre $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$. □

3 Applications

3.1 Petit théorème de Fermat

Théorème 17.18

Petit théorème de Fermat
Soit p un nombre premier et a un entier naturel premier avec p alors $a^{p-1} - 1$ est divisible par p. En d'autres termes $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Développement

Démonstration du théorème 17.18. p ne divise aucun nombre de la suite $a, 2a, \ldots, (p-1)a$. En effet, d'après le théorème de Gauss, si p divisait un de ces produits ka, p diviserait k puisque a et p sont premiers entre eux. Ceci est impossible puisque $1 < k < p$.
De plus, les restes des divisions de $a, 2a, \ldots, (p-1)a$ par p sont tous différents. Si on trouvait des restes identiques pour ka et $k'a$ $(k > k')$ alors le reste de $(k-k')a$ par p serait nul, ce qui est impossible d'après ce qui précède. Donc, à l'ordre près des facteurs les restes de $a, 2a, \ldots, (p-1)a$ par p sont $1, 2, \ldots, p-1$.
Par conséquent la division du produit $a \times 2a \times \cdots \times (p-1)a$ par p a pour reste le produit $1 \times 2 \times \cdots \times (p-1)$ et donc $a \times 2a \times \cdots \times (p-1)a$ qui s'écrit encore

$$a^{p-1} \times 2 \times \cdots (p-1) \equiv 2 \times 3 \times \cdots \times (p-1) \pmod{p}.$$

Il existe donc un entier relatif k tel que

$$(a^{p-1} - 1)(1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (p-1)) = kp.$$

Comme p est premier avec $1 \times 2 \times \cdots \times (p-1)$ d'après le théorème de Gauss, p divise $a^{p-1} - 1$. a^{p-1} est donc congru à 1 modulo p. □

Corollaire 17.19 Soit p un nombre premier et a un entier quelconque alors $a^p \equiv a \pmod{p}$.

Développement

Démonstration du corollaire 17.19. D'après ce qui précède, si a et p sont premiers entre eux, $a^{p-1} - 1$ est congru à 0 modulo p. Sinon, p étant premier, a est congru à 0 modulo p. On a donc soit $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ soit $a^P \equiv a \equiv 0 \pmod{p}$ et par conséquent dans les deux cas $a^p \equiv a \pmod{p}$. □

3 2 Le cryptage RSA

Le cryptage RSA (du nom des inventeurs, Ronald Rivest, Adi Shamir et Leonard Adleman) est intéressant car la clé de cryptage est publique et il n'a donc pas de risques liés à l'envoi de la clé et au procédé de codage des données. Bob, comme tout le monde, peut crypter et envoyer un message. Par contre, seul la destinataire, Alice, qui connaît la clé privée correspondante pourra reconstituer le message initial.

Alice, la destinataire rend publique deux nombres n et c où n est le produit de deux grands nombres premiers p et q qu'elle est seule à connaître, où c est un entier premier avec le produit $(p-1)(q-1)$ compris entre 2 et $(p-1)(q-1)$.

Pour coder le message « Bonjour », par exemple, on commence par remplacer les lettres par leurs positions dans l'ordre alphabétique, ce qui donne

$$02\ 15\ 14\ 10\ 15\ 21\ 18.$$

Si on utilise $n = 10573 = 97 \times 109$, on peut regrouper les chiffres par 4 sans risquer de dépasser n. Ce qui donne $0215\ 1410\ 1521\ 0018$. Pour chaque nombre a de la série, on détermine alors b, reste de la division de a^c par n. On obtient alors dans ce cas avec $c = 5$ la série :

$$9131\ 7391\ 0690\ 7574.$$

C'est cette série de nombres qu'envoie Bob à Alice.

Alice qui connaît les deux facteurs premiers de n (ici $p = 97$ et $q = 109$) détermine alors facilement le nombre entier d vérifiant $1 < d < (p-1)(q-1)$ et tel que

$$cd \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)}.$$

Ici $d = 6221$.

Alice peut alors retrouver la série initiale de nombres car, pour chaque entier b de cette série, on démontre de b^d est congru à a modulo n.

L'intérêt pour Alice est bien sûr d'avoir un nombre n produit de deux nombres premiers très grands de façon à ce que les calculateurs même les plus rapides ne puissent pas trouver en un temps suffisammment court les deux facteurs premiers nécessaires pour calculer d.

On note d'autre part que c et d jouent le même et sont interchangeables. Ainsi Alice peut décider de coder elle-même un message en utiliser sa clé privée $d = 6621$. Bob décryptera alors aisément ce message avec la clé publique c. Le message envoyé à Bob constitue en fait une signature du message d'Alice. En effet, si Bob réussit à décrypter sans problème le message à l'aide de la clé c, c'est que ce message a été codé avec la clé privée d connue d'Alice seule et cela suffit pour en garantir l'authenticité.

On donne quelques propriétés permettant de justifier la robustesse de la méthode RSA.

Propriété 17.20 Soient p et q deux nombres premiers. Si c, tel que $1 < c < (p-1)(q-1)$, est premier avec le produit $(p-1)(q-1)$ alors il existe un unique d tel que $1 < d < (p-1)(q-1)$ et vérifiant

$$cd \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1).}$$

Développement

Démonstration de la propriété 17.20. Si c et $(p-1)(q-1)$ sont premiers entre eux, il existe, d'après le théorème de Bézout, deux entiers relatifs u_0 et v_0 tels que $u_0c+v_0(p-1)(q-1)=1$. Par suite (u,v) est solution de

$$uc+v(p-1)(q-1)=1$$

si et seulement si il existe un entier relatif k tel que

$$u=u_0-k(p-1)(q-1) \quad \text{et} \quad v=v_0+kc.$$

Soit donc k tel que u soit le plus petit des entiers positifs. Dans ces conditions

$$uc=1-v(p-1)(q-1)\equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)}$$

et le nombre d recherché est par conséquent égal à u.
Il est unique car s'il en existait un autre, d', alors on aurait

$$c(d-d')\equiv 0 \pmod{(p-1)(q-1)}.$$

Comme c est premier avec $(p-1)(q-1)$, alors, d'après le théorème de Gauss,

$$d-d'\equiv 0 \pmod{(p-1)(q-1)}.$$

Mais comme on a $1<d<(p-1)(q-1)$ et $1<d'<(p-1)(q-1)$ et bien, on peut avoir que $d=d'$. $\square$

Propriété 17.21

Dans les conditions précédentes, si p et q sont différents et si $b\equiv a^c \pmod{pq}$ alors $b^d\equiv a \pmod{pq}$.

Développement

Démonstration de la propriété 17.21. Si $b\equiv a^c \pmod{pq}$ alors $b^d\equiv a^{cd} \pmod{pq}$ et $cd\equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)}$. Il existe donc un entier $k\geq 0$ tel que $cd=1+k(p-1)(q-1)$. On obtient donc

$$a^{cd}=a\left(\left(a^{p-1}\right)^{q-1}\right)^k.$$

Si a est divisible par p alors de façon évidente, $a^{cd}\equiv a\equiv 0 \pmod p$, sinon, d'après le petit théorème de Fermat, $a^{p-1}\equiv 1 \pmod p$ d'où $a^{cd}\equiv a \pmod p$. De même $a^{cd}\equiv a \pmod q$. Il existe donc deux entiers k et k' tels que $a^{cd}=a+kp$ et $a^{cd}=a+k'q$. Ainsi $kp=k'q$, entier qui se trouve donc être multiple de pq puisque p et q sont des nombres premiers différents. On obtient donc dans ces conditions $a^{cd}\equiv a \pmod{pq}$. $\square$

---

3 3 Le numéro INSEE

Le numéro INSEE ou numéro de Sécurité Sociale est formé de 15 chiffres déterminés, pour chaque individu de la façon suivante :

– 1 chiffre pour le sexe : Homme (1) et Femme (2)
– 2 chiffres correspondants aux deux derniers chiffres de l'année de naissance
– 2 chiffres correspondant au mois de naissance
– 2 chiffres correspondant au département de naissance
– 3 chiffres correspondant à la commune de naissance
– 3 chiffres correspondant au numéro d'inscription sur le registre des naissances
– 2 chiffres correspondant à une clé de contrôle. La clé de contrôle est ainsi déterminée de la manière suivante : « *On prend le nombre formé par les 13 premiers chiffres, on cherche son reste r dans la division par 97, la clé est alors égale au nombre $97-r$ écrit avec deux chiffres (le premier étant éventuellement un* 0.

Exemple 17.22.

1. Vérifier la clé de contrôle associée au numéro 2 85 05 33 565 001 89
2. On change le dixième chiffre « 5 » par le chiffre « 9 ». Montrer qu'alors la clé de contrôle permet de détecter l'erreur.

Théorème 17.23

Soit $(n,m) \in (\mathbb{Z} \setminus \{0,1\})^2$ tel que $\mathrm{PGCD}(m,n) = 1$. Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$. Alors

$$\begin{cases} x \equiv a \pmod{n} \\ x \equiv b \pmod{m} \end{cases} \qquad (\Sigma)$$

admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}$.

Si, de plus, $x_0 \in \mathbb{Z}$ est une solution particulière de Σ, alors l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ est $\{x_0 + knm,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Développement

Démonstration. Soit $x \in (\Sigma)$. Si $x_0 \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\begin{cases} x_0 \equiv a \pmod{n} \\ x_0 \equiv b \pmod{m} \end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} x_0 \equiv x \pmod{n} \\ x_0 \equiv x \pmod{m} \end{cases}$$

Il existe $(k,k') \in \mathbb{Z}^2$ tel que $nk = x_0 - x$ et $mk' = x_0 - x$. D'après le théorème de Gauss, $n \mid k'$ car $\mathrm{PGCD}(n,m) = 1$. Il existe $l \in \mathbb{Z}$ tel que $k' = ln$, donc $x_0 - x = lmn$, c'est-à-dire

$$\mathcal{S} \subset \{x_0 + lmn,\ l \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Soit $x = x_0 + lmn$, où $l \in \mathbb{Z}$. On a $x \equiv x_0 \pmod{n}$ et $x \equiv x_0 \pmod{m}$. Ainsi on obtient l'égalité.
Montrons que $\mathcal{S} \neq \emptyset$.

$$\textbf{(??)} \Leftrightarrow \begin{cases} xm \equiv am \pmod{mn} \\ xn \equiv bn \pmod{nm} \end{cases}$$

donc $x(m-n) \equiv am - bn \pmod{nm}$. Dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on a :

$$\overline{x} \times \overline{m-n} = \overline{am-bn}.$$

Si $\overline{m-n}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, alors on a une solution :

$$\overline{x} = \overline{am-bn}\overline{m-n}^{-1}$$

puisqu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x(m-n) = am - bn + lmn$ donc $m(x-a) = n(-b+km+x)$ donc n divise $x-a$ (car $\mathrm{PGCD}(n,m) = 1$ et $-b+km+x \in \mathbb{Z}$). De façon analogue, $x \equiv b \pmod{m}$.
Montrons que $\overline{m-n}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$, c'est-à-dire $\mathrm{PGCD}(m-n,mn) = 1$. Comme $\mathrm{PGCD}(m,n) = 1$, on a $\mathrm{PGCD}(m-n,n) = 1 = \mathrm{PGCD}(m-n,m)$, d'après le théorème de Bezout. En effet, il existe $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $nu + mv = 1$ donc :

$$(m-n)v + (u+v)n = 1$$

donc $\mathrm{PGCD}(m-n,n) = 1$ car $u+v \in \mathbb{Z}$.
Par suite, $\mathrm{PGCD}(m-n,mn) = 1$ car si $d = \mathrm{PGCD}(m-n,mn)$. Soit d' tel que $d' \mid mn$ et $d' \mid m-n$, d est un diiviseur premier de d. Comme $\mathrm{PGCD}(m,n) = 1$, d' divise m ou n (par ex., $d' \mid n$. Or $d' \mid m-n$, donc $d' \mid m$. Ainsi $d' \mid \mathrm{PGCD}(m,n)$ et $d' = 1$ (ce qui est absurde. Comme d n'a pas de diviseur premier, $d = 1$. $\square$

Exemple 17.24. Résoudre dans $\mathbb{Z}$:

a. $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 1 \pmod{6} \end{cases}$

b. $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{8} \\ x \equiv 3 \pmod{6} \end{cases}$

Solution.

a. On multiple la première ligne par 6 et la deuxième par 6 :

$$\begin{cases} 6x \equiv 18 \pmod{30} \\ 5x \equiv 5 \pmod{30} \end{cases}$$

donc $6x - 5x = x \equiv 13 \pmod{30}$.
Réciproquement, si $x \equiv 13 \pmod{30}$ alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - 13 = 5 \times 6k$ donc $x \equiv 13 \pmod{5}$. Or $13 \equiv 3 \pmod{5}$, donc $x \equiv 3 \pmod{5}$. De plus,

$$x \equiv 13 \equiv 1 \pmod{6}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est : $\{x \in \mathbb{Z},\ x \equiv 13 \pmod{5}\}$.

b. On arriverait à $x \equiv 6 \pmod{24}$. Réciproquement, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - 6 = 24k = 8 \times 3k$, donc $x \equiv 6 \pmod{8}$ mais $6 \not\equiv 2 \pmod{8}$ ou $x \equiv 6 \equiv 0 \pmod{6}$ mais $3 \not\equiv 0 \pmod{6}$. Il n'y a donc pas de solution.

□

3 5 Critères de divisibilité

On note :

$$N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_0}^{10} = 10^n a_n + \cdots + a_0.$$

1. Par 9

Soit $k \in \mathbb{N} \cap [1\,, n]$.

$$10^k a_k = (10^k - 1)a_k + a_k = 9b_k a_k + a_k$$

où $b_k = \sum_j 10^j (-1)^{k-j-1}$.
Donc : N est divisible par 9 si la somme des chiffres de N est divisible par 9.

2. Par 3

3 divise N si et seulement si $N \equiv 0 \pmod{3}$ si et seulement $\sum a_k \equiv 0 \pmod{3}$ car 3 divise :

$$(10^n - 1)a_n + \cdots + (10 - 1)a_1.$$

3. Par 5, 2 et 10

- Un nombre N est divisible par 2 si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6, 8.
- Un nombre N est divisible par 5 si son chiffre des unités est 0 et 5.
- Un nombre N est divisible par 10 si son chiffre des unités est 0.

4. Par 11

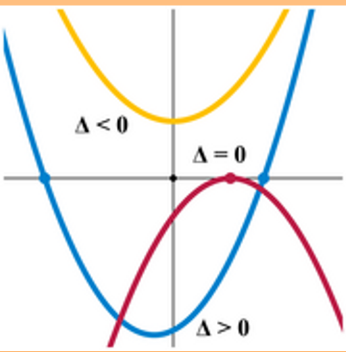
x

$$\begin{aligned} 11 \mid N \Leftrightarrow N &\equiv 0 \pmod{11} \\ &\Leftrightarrow \sum_k (-1)^k a_k \equiv 0 \pmod{11} \\ &\Leftrightarrow \sum_{j \text{ pair}} a_j - \sum_{j \text{ impair}} a_j \equiv 0 \pmod{11} \end{aligned}$$

LEÇON

18

Équations du second degré à coefficients réels ou complexes



Niveau : Première S (mise sous forme canonique, coef réels, résolution dans $\mathbb{R}$) ; Terminale S (coef réels, résolution dans $\mathbb{C}$) ; BTS groupement A (coef complexes).
Prérequis : nombres complexes, définition et propriétés, polynôme, trinôme, résolution d'équations, fonctions du second degré.

1 Premières définitions et mise sous forme canonique

1.1 Définition d'une équation du second degré

Définition 18.1

On appelle *équation du second degré* à coefficients réels (resp. complexes), une équation du type
$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{avec } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \text{ (resp. } \mathbb{C}^3\text{)}, a \neq 0 \tag{E}$$

Exemple 18.2. $2x^2 - 3x + 1 = 0$ est une équation du second degré à coefficients réels.

1.2 Mise sous forme canonique

Théorème 18.3

Pour tout trinôme $f : ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ et $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, il existe deux nombres α et β tels que :
$$f(x) = a[(x-\alpha)^2 - \beta].$$
Cette écriture est appelée *forme canonique*.

Développement

Démonstration. Comme $a \neq 0$, on peut écrire
$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$
On reconnaît le début du développement de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ avec $x^2 + \frac{b}{a}x$. En effet
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$
d'où
$$x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2.$$
Ainsi :
$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \\ &= a[(x-\alpha)^2 - \beta] \quad \text{avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \end{aligned}$$
□

Exemple 18.4. Mettre sous forme canonique $2x^2 - 6x - 1$.

Développement

Solution. On a :
$$2x^2 - 6x - 1 = 2\left(x^2 - 3x - \frac{1}{2}\right).$$
$x^2 - 3x$ est le début du développement de $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$.
$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = x^2 - 3x + \frac{9}{4}$$
$$x^2 - 3x = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}2\left(x^2-3x-\frac{1}{2}\right)&=2\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}-\frac{1}{2}\right]\\&=2\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{11}{4}\right].\end{aligned}$$

et on trouve : $\alpha=\frac{3}{2}$ et $\beta=\frac{11}{4}$.

□

---

2 Résolution dans $\mathbb{C}$ des équations du second degré à coefficients réels

2.1 Discriminant

Définition 18.5

On appelle *discriminant* de l'expression ax^2+bx+c, avec $a\neq 0$, le nombre $\Delta=b^2-4ac$.

2.2 Résolution

Théorème 18.6

Soit l'équation $ax^2+bx+c=0$, avec $a\neq 0$, de discriminant Δ.

Si $\Delta>0$ l'équation a deux sollutions réelles distincts x_1 et x_2 :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\quad\text{et}\quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{a}$$

On a : $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Si $\Delta=0$ l'équation admet une solution $x_0=-\frac{b}{2a}$.

Si $\Delta<0$ alors l'équation admet deux solutions *complexes* conjuguées :

$$x_1=\frac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\qquad x_2=\frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Développement

Démonstration. Soit l'équation $ax^2+bx+c=0$ (avec $a\neq 0$ et $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$). L'équation s'écrit :

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=0.$$

On pose $\Delta=b^2-4ac$, elle s'écrit donc

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=0,$$

soit à résoudre :

$$\left(x+\frac{b}{2a}^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)=0$$

car $a\neq 0$.

Si $\Delta>0$ alors Δ est le carré de $\sqrt{\Delta}$:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2=\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right).$$

L'équation s'écrit :

$$\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0.$$

Donc soit $x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=0$ ou soit $x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=0$ et ainsi :

$$x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Si $\Delta=0$ alors $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0$ s'écrit $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$. Ce carré est nul si et seulement si, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)=0$, soit $x=-\frac{b}{2a}$.

Si $\Delta<0$ pas de solutions réels mais en passnat par les complexes, $\frac{\Delta}{4a^2}$ est le carré de $\frac{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et l'on revient au cas $\Delta>0$.

□

2 3 Exemples de résolution

Exemples 18.7.

1. Résoudre $2x^2-5x-4=0$.
2. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, $2z^2+10z+25=0$.

Développement

Solution.

1. Soit à résoudre $2x^2-5x-4=0$. Le discriminant de l'expression $2x^2-5x-4$ est $\Delta=25+4\times4\times2=25+32=57>0$. Donc l'équation $2x^2-5x-4=0$ admet deux solutions :

$$x_1=\frac{5+\sqrt{57}}{4} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{5-\sqrt{57}}{4}.$$

2. Soit à résoudre $2z^2+10z+25=0$. Le discriminant de l'expression $2z^2+10z+25$ est $\Delta=10^2-4\times25\times2=-100<0$. Il y a donc deux racines complexes :

$$z_1=\frac{-10+10\mathrm{i}}{2\times2}=-\frac{5}{2}+\frac{5}{2}\mathrm{i}=\frac{5}{2}(-1+\mathrm{i})$$
$$z_2=\frac{-10+10\mathrm{i}}{2\times2}=-\frac{5}{2}-\frac{5}{2}\mathrm{i}.$$

Ne nous arrêtons pas en si bon chemin. Calculons la forme exponentielle de z_1 et z_2. Tout d'abord, on calcul le module de z_1 et z_2 :

$$|z_1|=|z_2|=\frac{5}{2}\sqrt{1^2+(-1)^2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

On calcule maintenant l'argument θ_1 de z_1 :

$$\frac{z_1}{|z_1|}=\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}=\frac{\frac{5}{2}(-1+\mathrm{i})}{\frac{5}{2}\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

donc :

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\theta_1=\frac{3\pi}{4}\pmod{2\pi}.$$

Donc :

$$z_1=\frac{5\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4}.$$

Pour z_2, son argument θ_2 est tel que :

$$\frac{z_2}{|z_2|}=\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}=\frac{\frac{5}{2}(-1-\mathrm{i})}{\frac{5}{2}\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$$

donc

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\theta_2=-\frac{3\pi}{4}\pmod{2\pi}$$

et ainsi,

$$z_2=\frac{5\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\pi/4}.$$

□

3 Applications

3.1 Nombres consécutifs

Déterminer deux nomrbes entiers relatifs consécutifs dont la somme des carrés est 221.

Développement

Solution. On forme l'équation :

$$n^2 + (n+1)^2 = 221 \Leftrightarrow n^2 + n^2 + 2n + 1 = 221 \Leftrightarrow 2n^2 + 2n + 1 = 221$$
$$\Leftrightarrow 2n^2 + 2n - 220 = 0 \Leftrightarrow n^2 + n + 110 = 0$$

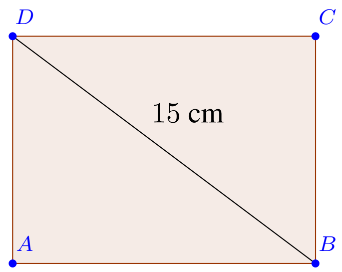
Le discriminant de l'expression $n^2 + n + 110$ est $\Delta = 1 + 4 \times 110 = 441 > 0$, d'où $\sqrt{\Delta} = \sqrt{441} = 21$ et il y a deux solutions pour l'équation $n^2 + n + 110 = 0$:

$$n_1 = \frac{1+21}{2} = 11 \quad \text{et} \quad n_2 = \frac{1-21}{2} = -10.$$

□

3.2 Périmètre et diagonale d'un rectangle

Soit $ABCD$ un rectangle dont la diagonale $[BD]$ mesure 15 cm et le périmètre P du rectangle vaut 42 cm. Quels sont les dimensions du rectangle $ABCD$?



$\mathcal{P}_{ABCD} = 45$ cm

Développement

Solution. Soit L la longueur du rectangle (ce qui correspond à la mesure du côté $[AB]$) et ℓ la largeur du rectangle (ce qui correspond à la mesure du côté $[AD]$). ℓ et L vérifient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 2(\ell + L) = 42 \\ \ell^2 + L^2 = 15^2 \text{ (d'après le thm. de Pythagore)} \\ (\ell, L \geq 0,\ \ell < L) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ell + L = 21 \\ \ell^2 + L^2 = 15^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L = 21 - \ell \\ \ell^2 + (21-\ell)^2 = 225 \quad (2) \end{cases}$$

On résoud l'équation (2) :

$$(2) \Leftrightarrow \ell^2 + (21-\ell)^2 = 225 \Leftrightarrow \ell^2 + \ell^2 - 42\ell + 441 - 225 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2\ell^2 - 42\ell + 216 = 0 \Leftrightarrow \ell^2 - 21\ell + 108 = 0.$$

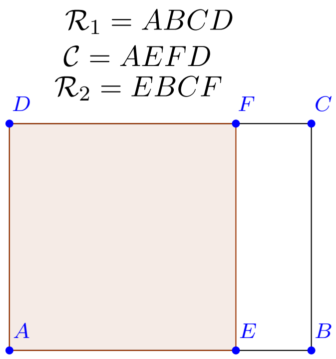
Le discriminant de l'expression $\ell^2 - 21\ell + 108$ est $\Delta = 441 - 432 = 9 > 0$ donc $\sqrt{\Delta} = 3$ et l'équation (2) admet deux solutions :

$$\begin{cases} \ell_1 = \frac{21+3}{2} = \frac{24}{2} = 12 \\ L_1 = 21 - 12 = 9 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \ell_2 = \frac{21-3}{2} = \frac{18}{2} = 9 \\ L_2 = 21 - 9 = 12. \end{cases}$$

Or $L > \ell$, donc les dimensions du rectangle $ABCD$ sont $\ell = 9$ cm et $L = 12$ cm. □

33 Nombre d'or

Soit R un rectangle. On note $\mathcal{Q}(R)$, le rapport de la longueur avec la largueur du rectangle R. Soit R_1 le rectangle $ABCD$ de longueur L et de largueur ℓ. On trace un carré $AEFD$ (qu'on nomme $\mathcal{C}$) avec $E \in [AB]$ et $F \in [CD]$ puis on obtient le rectangle $EBCF$ (qu'on nomme $\mathcal{R}_2$). On dit que $\mathcal{R}_1$ est un rectangle d'or si $\mathcal{Q}(R_1) = \mathcal{Q}(R_2)$ (on notera $\Phi = \mathcal{Q}(R_1)$). Quelle est la valeur exacte de Φ ?



Développement

Solution. On forme l'équation :

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}(R_1) = \mathcal{Q}(R_2) &\Leftrightarrow \frac{L}{\ell} = \frac{\ell}{L-\ell} \Leftrightarrow \frac{L(L-\ell)}{\ell^2} = 1 \\ &\Leftrightarrow L^2 - L\ell = \ell^2 \Leftrightarrow L^2 - L\ell - \ell^2 = 0\end{aligned}$$

On note $\Phi = \frac{L}{\ell}$, on peut diviser par ℓ^2 (car $\ell \neq 0$) :

$$\Leftrightarrow \frac{L^2}{\ell^2} - \frac{L}{\ell} - 1 = 0 \Leftrightarrow \Phi^2 - \Phi - 1 = 0.$$

Le discriminant de l'expression $\Phi^2 - \Phi - 1$ est $\Delta = 1 + 4 = 5 > 0$. Donc :

$$\Delta = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \geq 0.$$

À noter qu'on trouve une autre solution de l'équation :

$$\tilde{\Phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0.$$

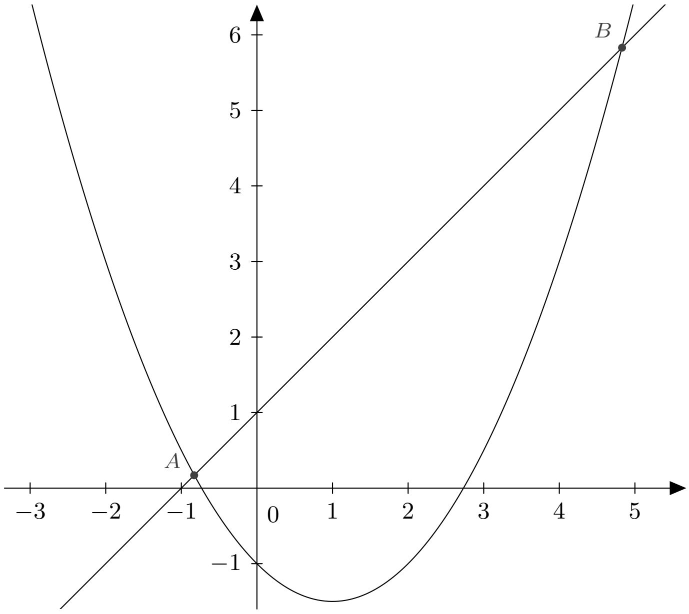
Comme le rapport $\frac{L}{\ell}$ est positif, on prend juste la valeur de Φ. □

34 Intersection d'une parabole et une droite

Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^2}{2} - x - 1 \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ (resp. $\mathcal{C}_g$) la courbe représentative de la fonction f (resp. g). Quels sont les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$?



Développement

Solution. On cherche les coordonnées des points d'intersections A et B des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$. Trouver les coordonnées des points d'intersections revient à résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow \frac{x^2}{2} - x - 1 = x + 1 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 2 = x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 3 = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant de l'expression $2x^2 - 3x - 3$ est $\Delta = 9 + 4 \times 3 \times 2 = 33 > 0$. Donc $\sqrt{\Delta} = 33$ et l'équation admet deux solutions :

$$\begin{cases} x_A = \frac{3+\sqrt{33}}{4} \\ y_A = \frac{7+\sqrt{33}}{4} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_B = \frac{3-\sqrt{33}}{4} \\ y_B = \frac{7-\sqrt{33}}{4} \end{cases}.$$

□

4 Résolution d'équations du second degré à coefficients complexes

4 1 Résolution

Théorème 18.8

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $a \neq 0$ admet deux solutions (distinctes ou confondues) :

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$$

où $\delta^2 = \Delta = b^2 - 4ac$.

Développement

Démonstration. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$. On considère l'équation :

$$az^2 + bz + c = 0. \tag{18.1}$$

On met l'équation (18.1) sous la forme canonique :

$$\begin{aligned} (18.1) &\Leftrightarrow a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \end{aligned}$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ et $w = z + \frac{b}{2}$. D'où :

$$(18.1) \Leftrightarrow w^2 = \frac{\Delta}{4a^2}.$$

Soit δ une racine carrée de Δ, les deux solutions de (18.1) sont donc :

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}.$$

□

4 2 Un exemple

Résoudre $\mathrm{i}z^2 - (3+8\mathrm{i})z + 13 + 13\mathrm{i} = 0$.

Développement

Solution. On obtient :

$$\begin{aligned}\Delta &= (3+8\mathrm{i})^2 - 4\mathrm{i}(13+13\mathrm{i}) = 9 + 48\mathrm{i} - 64 - 13 \times 4(\mathrm{i}(1+\mathrm{i})) \\ &= -55 + 48\mathrm{i} - 52(\mathrm{i}-1) = -55 + 52 + 48\mathrm{i} - 52\mathrm{i} = -3 - 4\mathrm{i}.\end{aligned}$$

On cherche $\delta = a + \mathrm{i}b$ tel que $\delta^2 = -3 - 4\mathrm{i}$. On a : $\delta^2 = a^2 - b^2 + 2\mathrm{i}ab$ et $|\delta|^2 = a^2 + b^2$. De plus $|\Delta| = \sqrt{9+16} = 5$. On en déduit :

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 5 \\ a^2 - b^2 = -3 \\ 2ab = -4 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 4 \\ ab = -2 \end{cases}$$

On trouve ainsi les racines de Δ :

$$\delta_1 = 1 - 2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad \delta_2 = -1 + 2\mathrm{i}.$$

D'où :

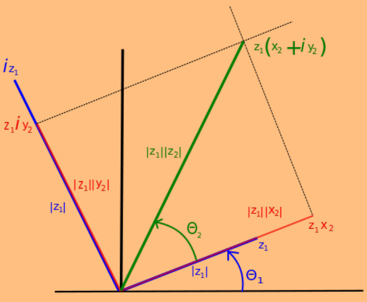
$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{(3+8\mathrm{i}) - (-1+2\mathrm{i})}{2\mathrm{i}} = \frac{4+6\mathrm{i}}{2\mathrm{i}} = 3 - 2\mathrm{i}; \\ z_2 &= \frac{(3+8\mathrm{i}) + (-1+2\mathrm{i})}{2\mathrm{i}} = \frac{2+10\mathrm{i}}{2\mathrm{i}} = 5 + \mathrm{i}. \end{aligned}$$

□

LEÇON

19

Module et argument d’un nombre complexe



Niveau : Terminale S

Prérequis : construction de $\mathbb{C}$ (rappel en première partie), partie réelle / partie imaginaire, conjugué d’un nombre complexe, affixe d’un point et d’un vecteur, congruences, fonctions trigonométriques, angles et cocyclicité, équations différentielles

Développement

1 Petit rappel sur les nombres complxes

Considérons l'équation $x^2 = 1$. Cette équation a deux solutions dans $\mathbb{R}$ qui sont 1 et -1. Mais si on remplace dans l'équation 1 par -1 ? On est un peu embêté car aucun nombre réel admet un carré négatif. Alors, décidons que i serait une des solutions de cette équation, c'est-à-dire que $\mathrm{i}^2 = -1$. L'équation aurait donc deux solutions (i et $-\mathrm{i}$) dans un autre ensemble de nombres car $x^2 + 1 = 0$ équivaudrait à $x^2 - \mathrm{i}^2 = 0$ ou soit $(x - \mathrm{i})(x + \mathrm{i}) = 0$.

Définition 19.1

On définit l'ensemble des complexes :

$$\mathbb{C} = \{a + \mathrm{i}b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

avec $\mathrm{i}^2 = -1$.

Remarque 19.2. On peut aussi identifier $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire que à un point $M(a, b)$, on peut lui faire correspondre un $z = a + \mathrm{i}b$ et vice et versa. On dira que $z = a + \mathrm{i}b$ est l'affixe du point $M(a, b)$.

Définition 19.3

Partie réelle et partie imaginaire

Soit $z = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$. Le réel a s'appelle la *partie réelle* de z et b la *partie imaginaire*. On note $a = \operatorname{Re}(z)$ et $b = \operatorname{Im}(z)$.

Définition 19.4

Imaginaire pur

On dit qu'un nombre complexe est *imaginaire pur* si sa partie réelle est nulle (c'est-à-dire il s'écrit $z = b\mathrm{i}$ où $b \in \mathbb{R}$).

Définition 19.5

Conjugué d'un nombre complexe

Soient a et b deux nombres réels. Le nombre complexe *conjugué* de $z = a + \mathrm{i}b$ est le nombre complexe $\overline{z} = a - \mathrm{i}b$.

Exemple 19.6. Soit $z = 9 - 4\mathrm{i}$. Son conjugué est $\overline{z} = 9 + 4\mathrm{i}$.

Propriétés 19.7

Soit $z \in \mathbb{C}$.

a. $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(\overline{z})$;
b. $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re}(z)$;
c. $z - \overline{z} = 2\mathrm{i}\operatorname{Im}(z)$;
d. $z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $z = \overline{z}$;
e. z est imaginaire pur si et seulement si $z = -\overline{z}$.

Développement

Démonstration.

a. Évident.
b. Soit $z = a + b\mathrm{i}$, on a :

$$z + \overline{z} = a + b\mathrm{i} + (a - b\mathrm{i}) = 2a = 2\operatorname{Re}(z).$$

c. Soit $z = a + b\mathrm{i}$, on a :

$$z - \overline{z} = a + b\mathrm{i} - (a - b\mathrm{i}) = 2\mathrm{i}\operatorname{Im}(z).$$

d. z est un réel si et seulement si $\operatorname{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z - \overline{z} = 0 \Leftrightarrow z = \overline{z}$.

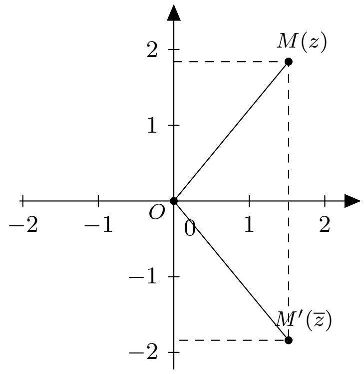


FIGURE 19.1 – Interprétation géométrique du conjugué

e. z est un imaginaire pur si et seulement $\mathrm{Re}(z) = 0$.

□

2 Module d'un nombre complexe

Définition 19.8

Module d'un nombre complexe
On appelle *module* d'un nombre complexe $z = a + ib$ la quantité positive $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Remarques 19.9. On donne une interprétation géométrique du module. Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé.

a. Si z est l'affixe du point $M(a, b)$, le module z n'est autre que la distance OM, $OM = |z|$.

b. Si z est l'affixe d'un vecteur $\overrightarrow{AB} = (a, b)$, le module de z représente la distance AB :

$$AB = |z_B - z_A|$$

où z_A (resp. z_B) représente l'affixe du point A (resp. B).

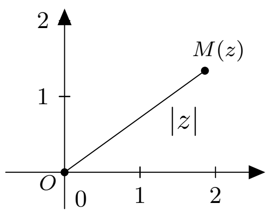


FIGURE 19.2 – Interprétation graphique du module

Exemples 19.10.

a. Soit $z = -3 + 4\mathrm{i}$, on a : $|z|^2 = 9 + 16 = 25$, donc $|z| = 5$.

b. On se donne $z_A = -1 + 3\mathrm{i}$ l'affixe d'un point A et $z_B = 2 - \mathrm{i}$ l'affixe du point B. On veut calculer la distance AB. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A = 3 - 4\mathrm{i}$ donc :

$$AB = |z_B - z_A| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5.$$

Remarques 19.11.

a. $|z| \geq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

b. $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$.

c. D'après les formules de conjugaison, $|z|^2 = z\bar{z}$.

d. Si $z = a + bi$ est réel alors $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$. Le module d'un nombre réel est donc sa valeur absolue, ce qui justifie la notation.

Théorème 19.12

Propriétés des modules

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$:

a. $|zz'| = |z|\,|z'|$. En particulier, si λ est réel, $|\lambda z| = |\lambda|\,|z|$.

b. $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ (lorsque $z' \neq 0$). En particulier, pour tout $z \neq 0$, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.

c. Inégalité triangulaire : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

Développement

Démonstration.

a. On a :

$$|zz'|^2 = zz'\,\overline{zz'} = zz'\,\bar{z}\,\bar{z'} = z\,\bar{z}\,z'\,\bar{z'} = |z|^2\,|z'|^2 = (|z|\,|z'|)^2.$$

b. On peut procéder de la même manière que dans a.

c.

$$\begin{aligned}|x+y|^2 - (|x| + |y|)^2 &= (x+y)^2 - (|x|^2 + 2\,|x|\,|y| + |y|^2)\\ &= (x^2 + 2xy + y^2 - (x^2 + 2\,|xy| + y^2) = 2(xy - |xy|) \leq 0\end{aligned}$$

Donc $|x+y|^2 \leq (|x| + |y|)^2$.

□

3 Argument d'un nombre complexe

Définition 19.13

Argument

Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé du plan. On appelle *argument* d'un nombre complexe z non nul, toute mesure, en radians, de l'angle orienté $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$. On le note $\theta = \arg(z)$.

Remarque 19.14. Un nombre complexe possède une *infinité* d'arguments ! Si θ est un argument de z, tout autre argument de la forme $\theta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). L'unique argument θ appartenant à l'intervalle $]-\pi\,,\pi[$ s'appelle l'*argument principal*.

On notera par exemple $\arg(z) = \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$ ou $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$ modulo 2π pour signifier que $\arg(z)$ peut être égal à $\frac{\pi}{4}$ mais aussi égal à n'importe lequel des nombres $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Attention ! Le nombre complexe nul $Z = 0$ ne possède pas d'argument car, dans ce cas, $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$ ne se définit pas.

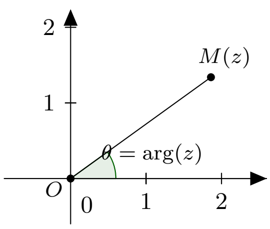


FIGURE 19.3 – Interprétation graphique de l'argument

Exemples 19.15.

a. $\arg(\mathrm{i}) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.

b. $\arg(1) = 0 \pmod{2\pi}$.
c. $\arg(-1) = \pi \pmod{2\pi}$.
d. $\arg(-\mathrm{i}) = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.
e. $\arg(1+\mathrm{i}) = \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$.

Proposition 19.16

a. Un réel strictement positif a un arguemnt modulo 2π, un réel strictement négatf a un argument égal à π modulo 2π. Donc, on peut dire :

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (z = 0 \text{ ou } \arg(z) = 0 \pmod{\pi}).$$

b. Un imaginaire pur dont la partie imaginaire est strictement positive a un argument égal à $\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ et iun imaginaire pur dont la partie imaginaire est strictement négatif a un argument égal à $-\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$. Donc, on peut dire :

$$z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow (z = 0 \text{ ou } \arg(z) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}),$$

où $\mathrm{i}\mathbb{R}$ représente l'ensemble des imaginaires purs.

On donne une méthode pour calculer l'argument principal d'un nombre complexe *non nul*. ON utilise les relations métriques dans le triangle OHM de la figure 19.4.

Cas où $\theta \in [0\,,\pi/2]$

$$\cos(\theta) = \frac{OH}{OM} = \frac{a}{|z|} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{HM}{OM} = \frac{b}{|z|}.$$

Cas où $\theta \in]\pi/2\,,\pi]$

$$\cos(\theta) = -\cos(\pi - \theta) = -\frac{OH}{OM} = -\frac{(-a)}{|z|} = \frac{a}{|z|}.$$

Cas où $\theta < 0$ On raisonne de même, en tenant compte du fait que $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ et $HM = -b$.

Dans tous les cas, on a :

$$\cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{b}{|z|}.$$

Si les cosinus et sinus ci-dessus ont des valeurs remarquables, on peut trouver θ directement à l'aide du cercle trigonométrique, sinon, à l'aide de la calculatrice en respectant la règle suivante :

- $\arccos\left(\frac{a}{|z|}\right)$ donne la valeur absolue de θ ;
- $\sin(\theta)$ donne le signe de θ.

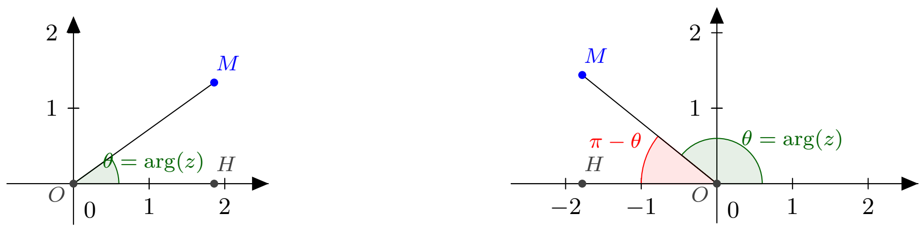


FIGURE 19.4 – Différents cas pour l'angle

Exemples 19.17.

a. On cherche à déterminer l'argument principal θ de $z = -2\sqrt{3} + 2\mathrm{i}$. On a :

$$|z|^2 = a^2 + b^2 = 12 + 4 = 16.$$

On doit alors résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = -\frac{2\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Ce sont des valeurs remarquables, on peut donc trouver θ à l'aide du cercle trigonométrique : $\theta = \frac{5\pi}{6}$.

b. On cherche à déterminer l'argument principal θ de $z = 3 - 4\mathrm{i}$. On a : $|z|^2 = 9 + 16 = 25$ donc $|z| = 5$. On doit résoudre le système :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{3}{5} \\ \sin(\theta) = -\frac{4}{5} \end{cases} .$$

Ce ne sont pas des valeurs remarquables. La calculatrice donne $|\theta| \simeq 0{,}9273$ rad. Mais $\sin(\theta)$ est négatif donc θ est négatif : $\theta \simeq -0{,}9273$ rad, c'est-à-dire $\theta \simeq 53{,}13°$.

Théorème 19.18

Propriétés des arguments

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$:

a. $\arg(\overline{z}) = -\arg(z) \pmod{2\pi}$.

b. $\arg(-z) = \arg(z) + \pi \pmod{2\pi}$.

c. $\arg(-\overline{z}) = \pi - \arg(z) \pmod{2\pi}$.

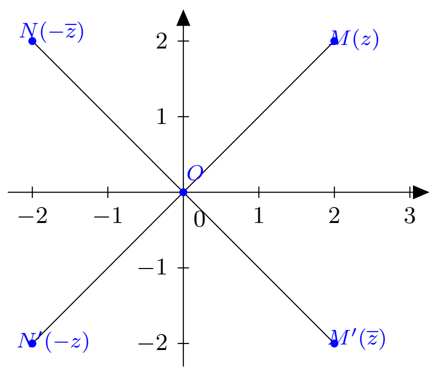


FIGURE 19.5 – Illustration de la démonstration pour le théorème

Remarque 19.19. Si $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, alors :

$$\arg(\lambda z) = \arg(z) \pmod{2\pi}.$$

Si $\lambda \in \mathbb{R}_-^*$ alors :

$$\arg(\lambda z) = \arg(z) + \pi \pmod{2\pi}.$$

4 Différentes formes d'écritures des nombres complexes

4.1 Forme algébrique et trigonométrique

Définition 19.20

Forme algébrique

L'écriture $z = a + bi$ s'appelle la *forme algébrique* de z (ou *forme cartésienne*).

Or,

$$a = r\cos(\theta) \quad \text{et} \quad b = r\sin(\theta)$$

avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$. D'où :

Définition 19.21

Forme trigonométrique

$z = a + ib$ peut s'écrire sous la forme $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$; cette écriture s'appelle une *forme trigonométrique* de z.

Remarques 19.22.

a. Le nombre complexe nul $z = 0$ n'a pas de forme trigonométrique (puisque pas d'argument).

b. Pour trouver une forme trigonométrique d'un nombre complexe *non nul*, il suffit de calculer son module et son argument.

Théorème 19.23

Si $z = r(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))$ avec $r > 0$ alors $r = |z|$ et $\theta = \arg(z) \pmod{2\pi}$.

Développement

Démonstration. On a :

$$|z^2| = r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta) = r^2.$$

Or $r > 0$ donc $|z| = r$. Soit θ' un argument de z alors :

$$z = r(\cos(\theta') + \mathrm{i}\sin(\theta')) = r\cos(\theta') + \mathrm{i}r\sin(\theta').$$

Or, par hypothèse :

$$z = r(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)) = r\cos(\theta) + \mathrm{i}r\sin(\theta)$$

et comme $a' + b'\mathrm{i} = a + b\mathrm{i}$ équivaut à $a' = a$ et $b' = b$ alors :

$$r\cos(\theta') = r\cos(\theta) \quad \text{et} \quad r(\sin(\theta') = r\sin(\theta).$$

D'où :

$$\cos(\theta') = \cos(\theta) \quad \text{et} \quad \sin(\theta') = \sin(\theta).$$

Ce qui implique $\theta' = \theta \pmod{2\pi}$ donc $\theta = \arg(z) \pmod{2\pi}$. □

Exemple 19.24. Soit

$$z = -2\left(\cos\frac{\pi}{5} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{5}\right).$$

z n'est pas sous une forme trigonométrique car un module ne peut pas être négatif. On transforme :

$$z = 2\left(-\cos\frac{5}{-}\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{5}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{5} + \pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{5} + \pi\right)\right).$$

Le module de z est donc $r = 2$ et un de ses arguments est $\theta = \frac{6\pi}{5}$.

Théorème 19.25

Propriétés sur les arguments (encore !)

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$ non nuls, on a :

a. $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \pmod{2\pi}$

b. $\arg(\frac{1}{z}) = -\arg(z) \pmod{2\pi}$

c. $\arg(\frac{z}{z'}) = \arg(z) - \arg(z') \pmod{2\pi}$

d. $\arg(z^n) = n\arg(z)$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Développement

Démonstration.

a. On va utiliser les formes trigonométriques de z et z' :

$$z = r(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)) \quad \text{et} \quad z' = r'(\cos(\theta') + \mathrm{i}\sin(\theta')).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} zz' &= rr'(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))(\cos(\theta') + \mathrm{i}\sin(\theta')) \\ &= rr'[\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') + \mathrm{i}(\sin(\theta)\cos(\theta') + \cos(\theta)\sin(\theta'))]. \end{aligned}$$

Ce qui, d'après les formules trigonométriques d'addition, donne :

$$zz' = rr'(\cos(\theta + \theta') + \mathrm{i}\sin(\theta + \theta')).$$

Comme $rr' > 0$, on en déduit, d'après le théorème précédent, que :

$$|zz'| = rr' \quad \text{et} \quad \arg(zz') + \theta + \theta' = \arg(z) + \arg(z') \pmod{2\pi}.$$

D'où la première relation.

b. Si $z' = \frac{1}{z}$ dans la relation précédente, cela donne :

$$\arg(1) = \arg(\tfrac{1}{z}) + \arg(z) \pmod{2\pi}.$$

Or $\arg(1) = 0 \pmod{2\pi}$ d'où la seconde relation :

$$\arg(\tfrac{1}{z}) = -\arg(z) \pmod{2\pi}.$$

c. En remarquant que $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$, on a d'après ce qui précède :

$$\arg(\tfrac{z}{z'}) = \arg(z) + \arg(\tfrac{1}{z'}) = \arg(z) - \arg(z') \pmod{2\pi}.$$

D'où la troisième relation.

d. Pour la dernière relation, on distingue trois cas :

Cas $n > 0$ Par récurrence, on peut montrer que :

$$\arg(z^n) = \arg(z \times z \times \cdots \times z) = n \arg(z) \pmod{2\pi}.$$

Cas $n < 0$ On pose $m = -n > 0$ et en utilisant le cas précédent $m > 0$:

$$\arg(z^m) = \arg(\tfrac{1}{z^m}) = m \arg(\tfrac{1}{z}) = -m \arg(z) = n \arg(z) \pmod{2\pi}.$$

Cas $n = 0$ La relation $\arg(z^n) = \arg(1) = 0 = n \arg(z) \pmod{2\pi}$ est triviale.

□

Exemple 19.26. Soit $z = 3(\cos(-\frac{\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(-\frac{\pi}{4})$ et $z' = 2(\cos(\frac{2\pi}{3}) + \mathrm{i}\sin(\frac{2\pi}{3}))$. On veut calculer zz'. L'utilisation des propriétés des modules et des arguments nous livrent directement le résultat :

$$zz' = 6\left(\cos\frac{5\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{12}\right).$$

4 2 Forme exponentielle

Développement

Soit f l'application :

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & & \theta & \mapsto & \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta) \end{array}.$$

On a, pour tous θ, θ' de $\mathbb{R}$:

$$f(\theta + \theta') = f(\theta) f(\theta').$$

La fonction f est donc une solution (complexe) de l'équation fonctionnelle $f(u+v) = f(u)f(v)$. Or, on sait (prérequis) que les solutions de cette équation fonctionelle sont solutions des équations différentielles de type $y' = ay$. On va déterminer a (qui est ici dans $\mathbb{C}$ puisque f est à valeur dans $\mathbb{C}$). En étendant les propriétés de la dérivation aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, on a f dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(\theta) = -\sin(\theta) + \mathrm{i}\cos(\theta) = \mathrm{i}f(\theta).$$

D'où $a = \mathrm{i}$ et :

$$f(\theta) = f(0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

On peut énoncer la définition suivante :

Définition 19.27 Pour tout réel θ, on note $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ le nombre complexe $\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$.

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ a pour module 1 et argument θ.

Exemples 19.28.

a. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}0} = 1$,

b. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} = \mathrm{i}$,

c. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$,
d. $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi} = 1$.

Définition 19.29

Forme exponentielle
Un nombre complexe de module r et d'argument θ s'écrit $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Cette écriture est appelée une *forme exponentielle* de z.

Remarque 19.30. Le conjugué de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$.

Théorème 19.31

Pour tous θ et θ' de $\mathbb{R}$,
a. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}$.
b. $\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\theta')}$.
c. $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$, pour $n \in \mathbb{Z}$.

La démonstration du théorème repose sur les propriétés des arguments.

Exemples 19.32.

a. La notation exponentielle rend les calculs très ismples . Si $z = 3\mathrm{e}^{3\pi\mathrm{i}/4}$ et $z' = 7\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi/3}$ alors :

$$zz' = 21\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/12} \quad \text{et} \quad \frac{z}{z'} = \frac{3}{7}\mathrm{e}^{17\mathrm{i}\pi/12}.$$

b. On veut calculer $(1+\mathrm{i})^{14}$. On pose $z = 1+\mathrm{i}$. On a donc, sous la forme exponentielle :

$$z = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}.$$

D'où :

$$z^{14} = 2^7\mathrm{e}^{7\mathrm{i}\pi/2} = 128\mathrm{e}^{12\pi}\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/2} = -128\mathrm{i}.$$

5 Applications

Théorème 19.33

a. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow (d-c)\overline{(b-a)} \in \mathbb{R}$
b. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow (d-c)\overline{(b-a)} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.

Développement

Démonstration.

a.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ colinéaires} &\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0 \pmod{\pi} \Leftrightarrow \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) = 0 \pmod{\pi}\\ &\Leftrightarrow \frac{d-c}{b-a} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (d-c)\overline{(b-a)} \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ orthogonaux} &\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \Leftrightarrow \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}\\ &\Leftrightarrow \frac{d-c}{b-a} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (d-c)\overline{(b-a)} \in \mathrm{i}\mathbb{R}.\end{aligned}$$

□

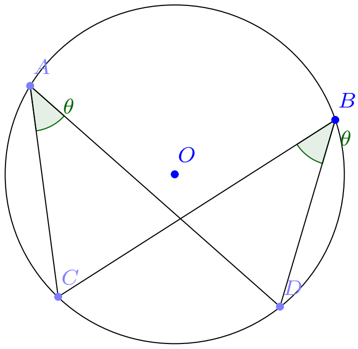
Théorème 19.34

Quatre points A, B, C et D distincts du plan sont cocylciques ou alignés si et seulement si :

$$\frac{a-c}{a-d} \div \frac{b-c}{b-d} \in \mathbb{R}.$$

Développement

Démonstration.



$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}) \pmod{\pi} &\Leftrightarrow \arg\left(\frac{a-c}{a-d}\right) = \arg\left(\frac{b-c}{b-d}\right) \pmod{\pi}\\ &\Leftrightarrow \arg\left(\frac{a-c}{a-d} \div \frac{b-c}{b-d}\right) = 0 \pmod{\pi}\\ &\Leftrightarrow \frac{a-c}{a-d} \div \frac{b-c}{b-d} \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

□

Théorème 19.35

Un triangle est équilatéral si et seulement si les affixes a, b et c de ses sommets vérifient :

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca.$$

Développement

Démonstration.

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \Leftrightarrow (a-c)(a-b) + (b-c)^2 = 0 &\Leftrightarrow (a-c)(a-b) = (b-c)^2\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} AC \times AB = BC^2 \\ \arg\left(\frac{a-c}{b-c}\right) = \arg\left(\frac{c-b}{a-b}\right) \pmod{2\pi} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AC \times AB = BC^2 \\ (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) \pmod{2\pi} \end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} AC \times AB = BC^2 \\ ABC \text{ isocèle en } A \end{cases} \Leftrightarrow ABC \text{ équilatéral}\end{aligned}$$

□

6 Propositions de questions posées par le Jury

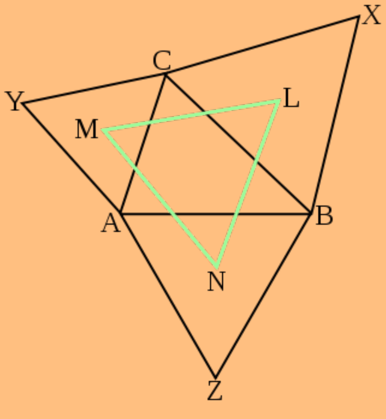
1. Démontrer l'égalité du parallélogramme :

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

2. Que représente géométriquement $\frac{|z-3|}{|z-4|} = 1$?
3. Que représente géométriquement $|z| = 1$?
4. Équation générale d'un cercle ?
5. Résoudre $z^3 = 1$.
6. De manière générale, résoudre $z^n = 1$.

LEÇON 20

Exemples d'utilisation des nombres complexes



Niveau : Terminale S - BTS
Prérequis : nombres complexes, séries de Fourier, barycentre, polynômes

1 Les nombres complexes en géométrie

1.1 Formules de Moivre, formules d'Euler

Théorème 20.1

Formule de Moivre
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)$$

$$(\cos(\theta) - \mathrm{i}\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) - \mathrm{i}\sin(n\theta).$$

Développement

Démonstration du théorème 20.1. On utilise les formes exponentielles :

$$(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))^n = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta).$$

D'où la première formule de Moivre. La seconde formule est obtenue en remplaçant θ par $-\theta$. □

Théorème 20.2

Formule d'Euler
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\cos(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}, \quad \sin(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}.$$

Développement

Démonstration du théorème 20.2.

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} &= \cos\theta + \mathrm{i}\sin(\theta) + \cos(-\theta) + \mathrm{i}\sin(-\theta) \\
&= \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta) + \cos(\theta) - \mathrm{i}\sin(\theta) = 2\cos(\theta) \\
\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} &= \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta) - \cos(-\theta) - \mathrm{i}\sin(-\theta) \\
&= \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta) - \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta) = 2\mathrm{i}\sin(\theta).
\end{aligned}$$

D'où les deux formules d'Euler. □

Exemples 20.3.

1. On veut linéariser $\sin^3(\theta)$ et $\cos^4(\theta)$. Pour cela, on utilise les formules de De Moivre et d'Euler.

$$\begin{aligned}
\sin^3(\theta) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}\right)^3 = \frac{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta} - 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\theta}}{-8\mathrm{i}} \\
&= \frac{2\mathrm{i}\sin(3\theta) - 6\mathrm{i}\sin(\theta)}{-8\mathrm{i}} = -\frac{1}{4}\sin(3\theta) + \frac{3}{4}\sin(\theta). \\
\cos^4(\theta) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}\right)^4 = \frac{\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\theta} + 4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} + 6 + 4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-4\mathrm{i}\theta}}{16} \\
&= \frac{2\cos(4\theta) + 8\cos(2\theta) + 6}{16} = \frac{1}{8}\cos(4\theta) + \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{3}{8}.
\end{aligned}$$

2. On veut calculer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(3\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$. D'après la formule de De Moivre :

$$\begin{aligned}(\cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta))^3 &= \cos(3\theta)+\mathrm{i}\sin(3\theta)\\ &= \cos^3(\theta)+3\mathrm{i}\cos^2(\theta)\sin(\theta)-3\cos(\theta)\sin^2(\theta)-\mathrm{i}\sin^3(\theta).\end{aligned}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) &= \cos^3(\theta)-3\cos(\theta)\sin^2(\theta)\\ &= \cos^3(\theta)-3\cos(\theta)(1-\cos^2(\theta)=4\cos^3(\theta)-3\cos(\theta)\\ \sin(3\theta) &= 3\cos^2(\theta)\sin(\theta)-\sin^3(\theta)\\ &= 3(1-\sin^2(\theta))\sin(\theta)-\sin^3(\theta)=3\sin(\theta)-4\sin^3(\theta).\end{aligned}$$

1 2 Détermination de lieux géométriques

On rappelle que si z_A et z_B sont les affixes respectives de deux points A et B alors :

$$AB = |z_B - z_A|$$

Exemples 20.4.

1. On veut déterminer l'ensemble des points M d'affixe z telles que :

$$|z-2| = |z+\mathrm{i}|\,.$$

On introduit $A(2)$ et $B(-\mathrm{i})$, ainsi on a :

$$AM = BM.$$

L'ensemble recherché est la médiatrice du segment $[AB]$.

2. On veut déterminer l'ensemble des points M d'affixe z telles que :

$$|z-3\mathrm{i}| = 2.$$

On introduit $C(3\mathrm{i})$, ainsi on a :

$$CM = 2$$

L'ensemble recherché est le cercle de centre C et de rayon 2.

3. On veut déterminer l'ensemble des points M d'affixe z telles que :

$$|z-2| = |2z+\mathrm{i}|\,.$$

On introduit $A(2)$ et $B\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)$, ainsi :

$$AM = 2BM.$$

Il s'agit de la ligne de niveau k (ici $k=2$) de l'application $M \mapsto \frac{MA}{MB}$. On a :

$$AM^2 = 4BM \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 = 4\overrightarrow{MB}^2 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}) = 0$$

On introduit le barycentre G_1 de $(A,1)$ et $(B,-2)$ et le barycentre G_2 de $(A,1)$ et $(B,2)$. On obtient alors

$$(-1)\overrightarrow{MG_1}\cdot 3\overrightarrow{MG_2} = 0$$

et comme $-1\times 3 \neq 0$, $\overrightarrow{MG_1}\cdot\overrightarrow{MG_2} = 0$. L'ensemble recherché est donc le cercle de diamètre $[G_1, G_2]$.

13 Calcul d'angles

Théorème 20.5 Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé dans le plan. Si A et B sont deux points distincts du plan complexe d'affixes respectives a et b alors :

$$(\vec{\imath}, \overrightarrow{AB}) = \arg(b-a) \pmod{2\pi}.$$

Développement

Démonstration du théorème 20.5. Soit $M(z)$ le point tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$. Ainsi :

$$(\vec{\imath}, \overrightarrow{AB}) = (\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}) = \arg(z) = \arg(b-a) \pmod{2\pi}.$$

□

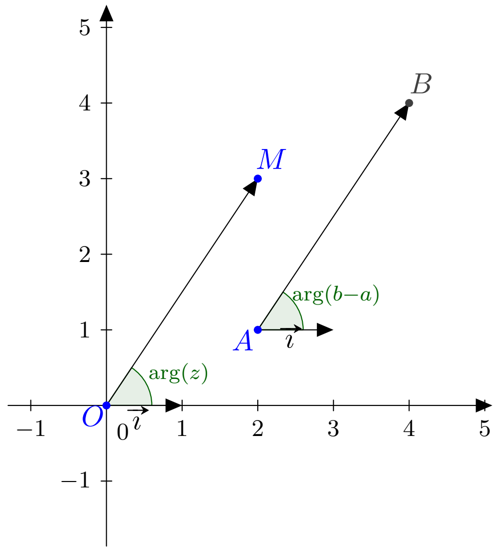


FIGURE 20.1 – Transformation des angles

Exemple 20.6. On donne $A(1)$ et $B(2+\mathrm{i}\sqrt{3})$ et on veut déterminer l'angle $(\vec{\imath}, \overrightarrow{AB})$. On a :

$$b-a = 1+\mathrm{i}\sqrt{3} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}.$$

D'où :

$$(\vec{\imath}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}.$$

Théorème 20.7 Si A, B et C sont trois points deux à deux distincts du plan complexe d'affixes a, b et c alors :

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) \pmod{2\pi}.$$

Développement

Démonstration du théorème 20.7. Les affixes des vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont respectivement $(a-c)$ et $(b-c)$. D'après le théorème 20.5 :

$$\arg(a-c) = (\vec{\imath}, \overrightarrow{CA}) \pmod{2\pi} \quad \text{et} \quad \arg(b-c) = (\vec{\imath}, \overrightarrow{CB}) \pmod{2\pi}.$$

Or d'après la relation de Chasles sur les angles :

$$(\vec{\imath}, \overrightarrow{CB}) - (\vec{\imath}, \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \pmod{2\pi}$$

et d'après les propriétés des arguments :

$$\arg(b-c) - \arg(a-c) = \arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) \pmod{2\pi}.$$

Donc :

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) \pmod{2\pi}.$$

□

Remarque 20.8. Il résulte du fait qu'un argument d'un réel (non nul) est zéro (modulo π) et que celui d'un imaginaire pur (non nul) est égal à $\frac{\pi}{2}$ (modulo π) que pour tous points $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ tels que $A \neq C$:

$$\frac{b-c}{a-c} \text{ est réel} \Leftrightarrow \text{les points } A, B \text{ et } C \text{ sont alignés.}$$

Et si de plus $B \neq C$:

$$\frac{b-c}{a-c} \text{ est imaginaire pur} \Leftrightarrow \text{les droites } (CA) \text{ et } (CB) \text{ sont perpendiculaires.}$$

Exemple 20.9. Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé du plan complexe et deux points $A(5+3\mathrm{i})$ et $B(5-8\mathrm{i})$. On veut savoir si le triangle OAB est rectangle en O. D'après ce qui précède :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \arg\left(\frac{b}{a}\right) \pmod{2\pi}.$$

Or :

$$\frac{b}{a} = \frac{5-8\mathrm{i}}{5+3\mathrm{i}} = \frac{1-55\mathrm{i}}{34} \notin \mathrm{i}\mathbb{R}.$$

Donc les droites (OA) et (OB) ne sont pas perpendiculaires.

1.4 Equation paramétrique d'un cercle

Théorème 20.10

Soit C le cercle de centre $\Omega(\omega)$ et de rayon R. Soit M un point d'affixe z. Alors $M \in C$ si et seulement s'il existe un réel θ tel que

$$z = \omega + R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

Développement

Démonstration du théorème 20.10. On a :

$$M \in C \Leftrightarrow \Omega M = R \Leftrightarrow |z-\omega| = R.$$

Or, d'après le lemme 20.12, $|z-\omega| = R$ si et seulement si il existe un réel θ tel que $z - \omega = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. D'où le théorème et on a de plus :

$$\theta = \arg(z-\omega) = (\vec{\imath}, \overrightarrow{\Omega M}) \pmod{2\pi}.$$

□

Remarque 20.11. Dans le théorème 20.10, on peut choisir θ dans $[0\,,2\pi[$ ou tout autre intervalle semi-ouvert de longueur 2π.

Pour démontrer le théorème 20.10, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 20.12

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes. Alors $|z_1| = |z_2|$ si et seulement si il existe un réel θ tel que $z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z_2$.

Développement

Démonstration du lemme 20.12. Supposons que $|z_1| = |z_2|$. Si z_1 et z_2 sont de module nul (donc sont nuls), n'importe quel réel θ fera l'affaire. On suppose alors que le module r de z_1 et z_2 est non nul. On note α_1 et α_2 des arguments respectifs de z_1 et z_2. On a ainsi :

$$z_1 = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_1} \quad \text{et} \quad z_2 = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_2}.$$

Comme $r > 0$, on a :

$$\frac{z_1}{z_2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha_1 - \alpha_2)}.$$

Il suffit de poser $\theta = \alpha_1 - \alpha_2$ ainsi :

$$z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z_2.$$

De plus, θ est un argument de $\frac{z_1}{z_2}$.
Réciproquement, s'il existe un réel θ tel que $z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z_2$, il est clair que $|z_1| = |z_2|$. □

Exemple 20.13. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère le point $A(a)$ du cercle de centre O et de rayon 1 tel que $\arg(a) = \frac{\pi}{6}$ puis le point B du cercle de centre A et de rayon $\frac{1}{4}$ tel que $(\vec{\imath}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{4}$. On cherche l'affixe de B. On a clairement :

$$a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}.$$

De plus :

$$b = a + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}.$$

D'où :

$$b = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i} + \frac{\sqrt{2}}{8} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{8} = \frac{4\sqrt{3} + \sqrt{2}}{8} + \mathrm{i}\frac{4 + \sqrt{2}}{8}.$$

Remarque 20.14. Si on note (x_Ω, y_Ω) les coordonnées de Ω et (x, y) celles de M, on a :

$$M \in C \Leftrightarrow \text{il existe un réel } \theta \text{ tel que } \begin{cases} x = x_\Omega + R\cos(\theta) \\ y = y_\Omega + R\sin(\theta) \end{cases}.$$

1 5 Barycentre

Théorème 20.15

Soit G le barycentre de n points pondérés $(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)$ avec $\sum_{p=1}^n a_p \neq 0$. On note z_p les affixes des points A_p $(1 \leq p \leq n)$. Alors l'affixe z_G de G est donnée par :

$$z_G = \frac{\sum_{p=1}^n \alpha_p z_p}{\sum_{p=1}^n \alpha_p}$$

En particulier, si on considère des points $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$, on a :
- l'affixe du milieu de $[AB]$ est $\frac{a+b}{2}$,
- l'affixe du centre de gravité du triangle ABC est $\frac{a+b+c}{3}$.

Exemple 20.16. ABC est un triangle de sens direct. On construit les points P, Q et R tels que :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AP}) &= \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad AP = BC \\ (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BQ}) &= \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad BQ = CA \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CR}) &= \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad CR = AB. \end{aligned}$$

On démontre que le triangle PQR a le même centre de gravité que ABC. On a donc :

$$\begin{aligned} p - a &= \mathrm{i}(c - b) \\ q - b &= \mathrm{i}(a - c) \\ r - c &= \mathrm{i}(b - a) \end{aligned}$$

En additionnant membre à membre ces trois égalités, il vient :

$$p + q + r = a + b + c.$$

On en déduit que les deux triangles ont le même centre de gravité.

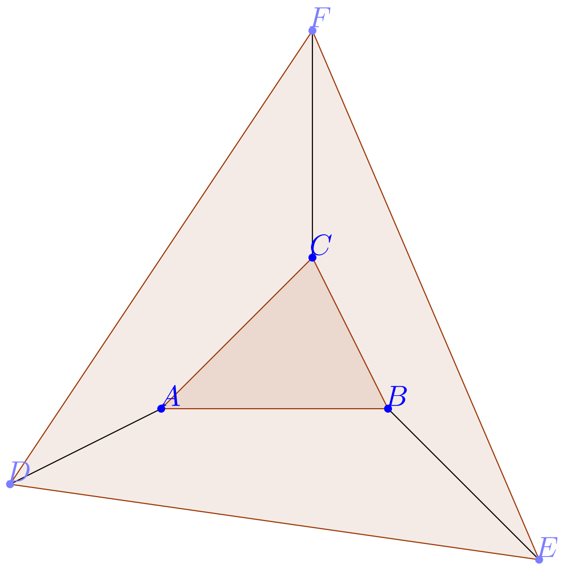
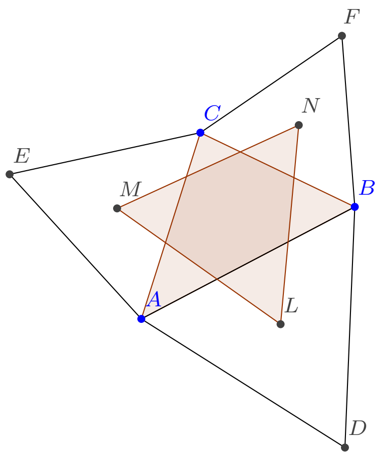


FIGURE 20.2 – Figure de l'exemple

1 6 Théorème de Napoléon

Théorème 20.17

Soit ABC un triangle quelconque. On construit trois triangle équilatéraux à partir des côtés du triangle ABC. Si L, M et N sont les centres de ces triangles alors le triangle LMN est aussi équilatéral.



Développement

Démonstration. Pour tout point M du plan complexe, on note m son affixe. Rappelons l'écriture complexe de la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ :

$$z' - \omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega).$$

A est l'image de B par la rotation de centre M et d'angle $\frac{2\pi}{3}$, c'est-à-dire :

$$a - m = j(b - m).$$

De même, on a :

$$c - l = j(a - l)$$
$$b - n = j(c - n)$$

de ce fait :

$$a - jb = m(1 - j) \tag{20.1}$$
$$c - ja = l(1 - j) \tag{20.2}$$
$$b - jcn(1 - j) \tag{20.3}$$

Montrons que N est l'image de M par la rotation de centre L et d'angle $\frac{\pi}{3}$. (20.2) − (20.3) donne :

$$(l-n)(1-j) = (1+j)c - ja - b = -j^2c - ja - b$$

car $1 + j + j^2 = 0$

$$= -j^2c - j^4a - j^3b$$

car $j^3 = 1$

$$\begin{aligned} &= -j^2(c + j^2a + jb) = -j^2 - c + (-1-j)a + jb) \\ &= -j^2(c - ja - (a - jb)) = -j^2(l-m)(1-j) \end{aligned}$$

donc :

$$n - l = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}(m-l).$$

□

1.7 Cocyclicité de quatre points

Proposition 20.18 Quatre points A, B, C et D sont cocycliques ou alignés si et seulement si

$$\frac{d-a}{c-a}\frac{c-b}{d-b} \in \mathbb{R}.$$

Développement

Démonstration. Les angles orientés $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ et $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})$ interceptent le même arc, ils sont donc égaux, c'est-à-dire $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) \pmod{\pi}$.

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{d-a}{c-a}\right) - \arg\left(\frac{d-b}{c-b}\right) &= 0 \pmod{\pi} \\ \arg\left(\frac{d-a}{c-a}\frac{c-b}{d-b}\right) &= 0 \pmod{\pi} \\ \frac{d-a}{c-a}\frac{c-b}{d-b} &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

□

2 Les nombres complexes pour la résolution d'équations algébriques

2.1 Résolution d'une équation de second degré

Soit l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0 \tag{20.4}$$

Théorème 20.19

Résolution de l'équation (20.4)

On veut résoudre
$$ax^2 + bx + c = 0$$
et on note Δ le discriminant de l'équation.

– Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions x_1 et x_2 données par les formules suivantes :
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$
– Si $\Delta = 0$, l'équation admet une racine double :
$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \quad \text{et} \quad x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$
– Si le discriminant est strictement négatif, l'équation n'admet pas de solution réelle.

On s'intéresse à la résolution de l'équation
$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0 \tag{20.5}$$
tel que $\Delta < 0$. On a vu, dans la section précédente, qu'il n'y a pas de solutions réelles. Si on se place dans l'ensemble $\mathbb{C}$, il y a deux solutions qu'on va expliciter. L'équation (20.5) s'écrit sous sa forme canonique :
$$a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{i}\,|\Delta|}{2a}\right)^2\right) = 0.$$
On obtient alors le résultat suivant :

Théorème 20.20

Si $\Delta < 0$ alors l'équation admet deux solutions complexes conjuguées x_1 et x_2 qui s'écrivent :
$$x_1 = \frac{-b + \mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

Exemple 20.21. Soit à résoudre l'équation :
$$10x^2 + 9x + 5 = 0 \tag{20.6}$$
On a : $\Delta = 9^2 - 4 \times 10 \times 5 = 81 - 200 = -129$. Ainsi, les solutions de l'équation (20.6) sont :
$$x_1 = \frac{-9 + \mathrm{i}\sqrt{129}}{20} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-9 - \mathrm{i}\sqrt{129}}{20}.$$

2 2 Résolution d'une équation du troisième degré

On veut résoudre :
$$x^3 - 15x - 4 = 0. \tag{20.7}$$
Pour cela, on définit les variables u et v par les équations :
$$\begin{cases} x = u + v \\ 3uv = 15. \end{cases}$$
L'équation (20.7) devient :
$$\begin{aligned}(u+v)^3 - 15(u+v) - 4 = 0 &\Leftrightarrow u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 - 15(u+v) - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow u^3 + 3uuv + 3uvv + v^3 - 15(u+v) - 4 = 0\end{aligned}$$
on remplace $3uv$ par 15,
$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow u^3 + 15u + 15v + v^2 - 15(u+v) - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow u^3 + v^3 - 4 = 0\end{aligned}$$

soit

$$u^3 + v^3 = 4$$

Par ailleurs :

$$uv = \frac{15}{3} = 5$$

donc $u^3 v^3 = 5^3 = 125$. On pose $U = u^3$ et $V = v^3$. Le problème se ramène à déterminer U et V en connaissant leur somme et leur produit :

$$\begin{cases} U + V = 4 \\ U \cdot V = 125 \end{cases}.$$

On peut alors poser $V = -U + 4$ et donc :

$$U(-U + 4) = 125 \Leftrightarrow -U^2 + 4U = 125 \Leftrightarrow U^2 - 4U + 125 = 0.$$

Le discriminant de cette équation du second degré est :

$$\Delta = 4^2 - 4 \times 125 = -484 \quad \text{et} \quad \sqrt{-\Delta} = \sqrt{484} = 22.$$

D'après la section précédente, les deux solutions de cette équation sont :

$$\begin{cases} U_1 = \frac{4+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2} = \frac{4+22\mathrm{i}}{2} = 2 + 11\mathrm{i} \\ U_2 = 2 - 11\mathrm{i} \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} V_1 = 2 - 11\mathrm{i} \\ V_2 = 2 + 11\mathrm{i} \end{cases}.$$

On remarque que $U_1 = V_2$ et que $U_2 = V_1$; les deux solutions donnent donc le même résultat. On a ainsi une solution unique de l'équation (20.7) :

$$x = u + v = \sqrt[3]{U_1} + \sqrt[3]{V_1} = \sqrt[3]{2 + 11\mathrm{i}} + \sqrt[3]{2 - 11\mathrm{i}}.$$

On montre que $2 + \mathrm{i}$ est une racine cubique de U. On a :

$$(2 + \mathrm{i})^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot \mathrm{i} + 3 \cdot 2 \cdot \mathrm{i}^2 + \mathrm{i}^3 = 8 + 12\mathrm{i} - 6\mathrm{i} + 12\mathrm{i} = 2 + 11\mathrm{i}$$

soit $(2 + \mathrm{i})^3 = U$. Donc $(2 + \mathrm{i})$ est bien racine cubique de U. On a donc :

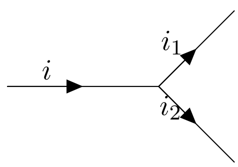
$$\begin{cases} u = 2 + \mathrm{i} \\ v = 2 - \mathrm{i} \end{cases}$$

et $x = 4$.

3 Les nombres complexes et l'électronique

3.1 Somme de deux grandeurs sinusoïdales

On considère la situation suivante



Le courant initial i et les deux courants résultants i_1 et i_2 ont la même pulsation α. Si $i_k = \widehat{I_k}\sin(\alpha t + \varphi)$, alors, en notant I_k la valeur efficace [1] de i_k, on a :

$$\underline{I_k} = I_k(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi)$$

avec $\widehat{I_k} = \sqrt{2}I_k$.

Remarque 20.22. En électronique, on note « j » le nombre carré -1 pour ne pas confondre avec le « i » de l'intensité…

La *loi des nœuds* nous dit que, à chaque instant t, $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$. En utilisant la formule trigonométrique suivante,

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a,$$

on obtient :

$$i_1(t) + i_2(t) = (\sqrt{2}I_1\cos\varphi_1 + \sqrt{2}I_2\cos\varphi_2)\sin(\alpha t) + (\sqrt{2}I_1\sin\varphi_1 + \sqrt{2}I_2\sin\varphi_2)\cos(\alpha t)$$

et

$$i(t) = (\sqrt{2}I\cos\varphi)\sin(\alpha t) + (\sqrt{2}I\sin\varphi)\cos(\alpha t).$$

Pour $t = 0$, on a alors :

$$\sqrt{2}I\sin\varphi = \sqrt{2}I_1\sin\varphi_1 + \sqrt{2}I_2\sin\varphi_2$$

et en $t = \frac{\pi}{2\alpha}$,

$$\sqrt{2}I\cos\varphi = \sqrt{2}I_1\cos\varphi_1 + \sqrt{2}I_2\cos\varphi_2.$$

D'où :

$$\begin{aligned}\underline{I} &= I(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi) = (I_1\cos\varphi_1 + I_2\cos\varphi_2) + \mathrm{j}(I_1\sin\varphi_1 + I_2\sin\varphi_2)\\ &= [I_1\cos\varphi_1 + \mathrm{j}I_1\sin\varphi_1] + [I_2\cos\varphi_2 + \mathrm{j}I_2\sin\varphi_2] = \underline{I_1} + \underline{I_2}\end{aligned}$$

Exemple 20.23. On considère $i_1 = 2\sqrt{2}\sin\left(\alpha t + \frac{\pi}{4}\right)$ et $i_2 = 3\sqrt{2}\sin\left(\alpha t - \frac{\pi}{2}\right)$. On a alors :

$$\begin{aligned}\underline{I_1} &= 2\left(\cos(\tfrac{\pi}{4}) + \mathrm{j}\sin(\frac{\pi}{4})\right) = \sqrt{2}(1+\mathrm{j}),\\ \underline{I_2} &= 3\left(\cos(\tfrac{-\pi}{6}) + \mathrm{j}\sin(-\frac{\pi}{6})\right) = \frac{3}{2}(\sqrt{3}-\mathrm{j}).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\underline{I} = \underline{I_1} + \underline{I_2} = \left(\sqrt{2} + \tfrac{3\sqrt{3}}{2}\right) + \mathrm{j}\left(\sqrt{2} - \tfrac{3}{2}\right).$$

En approchant le résultat, on obtient :

$$I \approx 4{,}012 - 0{,}086\mathrm{j}$$

On en déduit alors que l'intensité efficace vaut environ $4{,}01$ Ampères et une mesure de son argument est $-0{,}021$ radian et donc

$$i(t) \approx 4{,}01\sqrt{2}\sin(\alpha t - 0{,}021)$$

1. La valeur efficace d'un signal périodique est la racine carré de la moyenne du carré de l'intensité calculée sur une période T :

$$i_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{T}}\sqrt{\int_t^{t+T} i^2(t)\,\mathrm{d}t}$$

3 2 Cas d'une bobine parfaite

Définition 20.24

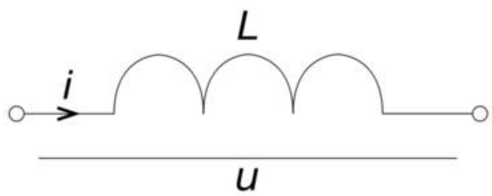
Impédance complexe

L'*impédance complexe* $\underline{Z}$ est définie par :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R + \mathrm{j}X$$

où R est la *résistance* et X la *réactance* du dipôle.

On considère la situation suivante :



Par définition de l'intensité $i(t)$, on a :

$$u(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}.$$

Or $i(t) = I\sqrt{2}\sin(\alpha t + \varphi)$, donc :

$$u(t) = L\frac{\mathrm{d}(I\sqrt{2}\sin(\alpha t + \varphi)}{\mathrm{d}t} = LI\sqrt{2}\alpha\cos(\alpha t + \varphi) = L\alpha I\sqrt{2}\sin(\alpha t + \varphi + \tfrac{\pi}{2}).$$

On en déduit alors :

$$\arg(\underline{Z}) = \arg(\underline{U}) - \arg(\underline{I}) = \varphi + \frac{\pi}{2} - \varphi = \frac{\pi}{2}$$

et

$$|\underline{Z}| = \frac{|\underline{U}|}{|\underline{I}|} = \frac{IL\alpha}{I} = L\alpha.$$

Finalement, on a : $\underline{Z} = \mathrm{j}L\alpha$.

4 Compléments : calcul de $\zeta(2)$

On rappelle l'expression complexe de la série de Fourier d'une fonction f, 2π-périodique continue par morceaux :

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} \quad \text{avec } c_n = \tfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t.$$

Considérons la fonction f, 2π-périodique définie par :

$$\forall x \in [0\,,2\pi], \quad f(x) = \mathrm{i}(\pi - x)$$

On calcule $c_n(f)$:

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{i}(\pi - t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned} u(t) &= \mathrm{i}(\pi - t) \quad & u'(t) &= -\mathrm{i} \\ v(t) &= -\frac{1}{\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \quad & v'(t) &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}. \end{aligned}$$

u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, par le théorème d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} c_0(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{i}(\pi - t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[-\mathrm{i}\frac{(\pi-t)^2}{2}\right]_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Si $n \neq 0$,

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\left(\left[\frac{(t-\pi)}{n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{n}.$$

Par la formule de Parseval,

$$\begin{aligned} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|n|^2} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{f(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-t)^2\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{3}. \end{aligned}$$

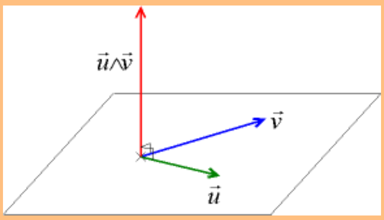
Comme $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n^2} = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$, on en déduit :

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

LEÇON

21

Calcul vectoriel



Niveau : BTS
Prérequis : définition d'un vecteur, base de la géométrie

1 Opérations sur les vecteurs

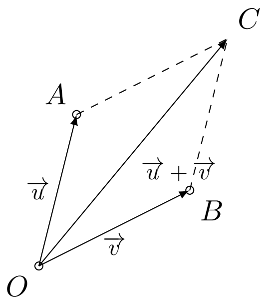
1.1 Addition de deux vecteurs

Définition 21.1

Addition de deux vecteurs

On se donne deux vecteurs de l'espace, $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Si $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ alors $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OC}$ tel que $OABC$ est un parallélogramme.

Exemple 21.2.



Propriétés 21.3

Addition de vecteurs

On se donne trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$:

a. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

b. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

c. $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$.

Propriété 21.4

Relation de Chasles

Soient A, B et C trois points quelconques du plan. On a :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

1.2 Multiplication par un réel

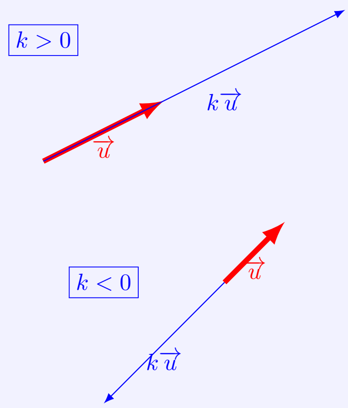
Définition 21.5

Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et k un réel quelconque.

a. Si $k > 0$ alors le vecteur $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$ a même sens et même direction que $\overrightarrow{AB}$ et $CD = kAB$.

b. Si $k < 0$ alors le vecteur $\overrightarrow{EF} = k\overrightarrow{AB}$ a même direction que $\overrightarrow{AB}$ mais a un sens opposé au vecteur $\overrightarrow{AB}$ et $EF = |k|\ AB$.

c. Si $k = 0$ alors $k\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.



Propriétés 21.6

Multiplication par un réel

Si k_1 et k_2 sont deux réels quelconques, et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs quelconques de l'espace :

a. $k_1(k_2\vec{u}) = (k_1k_2)\vec{u} = k_1k_2\vec{u}$;

b. $1\vec{u} = \vec{u}$;

c. $(k_1 + k_2)\vec{u} = k_1\vec{u} + k_2\vec{u}$;

d. $k_1(\vec{u} + \vec{v}) = k_1\vec{u} + k_1\vec{v}$.

2 Équations d'une droite ou d'un plan

2.1 Colinéarité et coplanéarité

Définition 21.7

Colinéarité

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *colinéaires* si, et seulement si, il existe deux réels α et β non tous deux nuls tels que :

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}.$$

Définition 21.8

Coplanéarité

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanéaires si il existe trois réels α, β et γ non tous nuls tels que :

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}.$$

Exemple 21.9. Quatre points distincts A, B, C et D appartiennent à un même plan si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

2.2 Équations de droites

Développement

Soit $\mathcal{D}$ la droite de l'espace passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$. Un point $M(x, y, z)$ de l'espace appartient à la droite (AB) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, on obtient donc :

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A} \quad \text{(si aucun des trois réels au dénominateu n'est nul).}$$

Si $\mathcal{D}$ eset donnée par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et par un vecteur directeur $\vec{v}(a, b, c)$, alors on peut écrire les trois égalités suivantes :

$$\begin{cases} x - x_A = ka \\ y - y_A = kb \\ z - z_A = kc \end{cases}.$$

Si aucun des trois réels a, b, c n'est nul, on peut écrire :

$$\frac{x - x_A}{a} = \frac{y - y_A}{b} = \frac{z - z_A}{c}.$$

Il s'agit des équations de $\mathcal{D}$ lorsque cette droite n'est pas parallèleà l'un des plans de coordonnées.

Propriété 21.10

Soit $\mathcal{D}$ une droite de l'espace définie par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et par un vecteur directeur $\vec{v}(a, b, c)$.

- Si $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $c \neq 0$ alors $\mathcal{D}$ n'est parallèle à aucun plan de coordonnées, ses équations peuvent s'écrire :
$$\frac{x - x_A}{a} = \frac{y - y_A}{b} = \frac{z - z_A}{c}.$$
- Si $a = 0$, $b \neq 0$ et $c \neq 0$ (il en est de même si $b = 0$ ou $c = 0$) alors $\mathcal{D}$ est parallèle au plan d'équation $x = 0$, ses équations peuvent s'écrire :
$$\begin{cases} x = x_A \\ \frac{y - y_A}{b} = \frac{z - z_A}{c} \end{cases}.$$
- Si $a = 0$, $b = 0$ et $c \neq 0$ (il en est de même si $a = 0$ et $c = 0$ ou $b = 0$ et $c = 0$) alors $\mathcal{D}$ est parallèle à l'axe Oz, ses équations peuvent s'écre :
$$\begin{cases} x = x_A \\ y = y_A \\ z = z_A + tc \quad (t \in \mathbb{R}) \end{cases}.$$

Exemple 21.11. Donner les équations de la droite $\mathcal{D}$ passant par $A(-3, 1, 4)$ et $B(2, 3, 1)$.

Développement

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB}(5, 2, -3)$.

Les équations de $\mathcal{D}$ peuvent s'écrire :

$$\frac{x+3}{5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{-3}$$

ou

$$\begin{cases} \frac{x+3}{5} = \frac{y-1}{2} \\ \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+6 = 5y-5 \\ 2z-8 = -3y+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-5y+11 = 0 \\ 3y+2z-11 = 0 \end{cases}$$

2 3 Équations de plans

On admet que :

Théorème 21.12

Tout plan de l'espace rapport à un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ admet une équation cartésienne du type :

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Méthode 21.13

Méthode d'obtention de l'équation cartésienne d'un plan

Soit un plan $\mathcal{P}$ défini par un point A et deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de ce plan.

Tout point M du plan $\mathcal{P}$ est tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$.

Cette égalité permet en utilisant les coordonnées (x, y, z) de M, celles de A et les composantes de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'obtenir trois équations.

Exemple 21.14. On cherche l'équation du plan $\mathcal{P}$ défini par $A(1, 0, 1)$ et les vecteurs $\vec{u}(2, -1, 1)$ et $\vec{v}(1, 1, 2)$.

Développement

L'équation $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ donne :

$$\begin{cases} x-1 = 2\lambda + \mu & (1) \\ y = -\lambda + \mu & (2) \\ z-1 = \lambda + 2\mu & (3) \end{cases}.$$

En additionnant (2) et (3), on obtient :

$$3\mu = y + z - 1 \Leftrightarrow \mu = \frac{1}{3}(y + z - 1).$$

En soustrayant (2) et (1), on obtient :

$$3\lambda = x - y - 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{3}(x - y - 1).$$

En replaçant λ et μ par ces valeurs dans (2), on obtient :

$$y = \frac{1}{3}(x - y - 1) + \frac{1}{3}(y + z - 1) \Leftrightarrow 3y = -x + y + 1 + y + z - 1.$$

Ainsi : $x + y - z = 0$. Cette équation est une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

3.1 Barycentres de n points

Définition 21.15

Barycentres de n points

Si a_1, a_2, ..., a_n sont n réels tels que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \neq 0$ alors le point G tel que :

$$a_1\overrightarrow{GA_1} + a_2\overrightarrow{GA_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{GA_n} = \vec{0} \tag{21.1}$$

est appelé *barycentre* des points pondérés (A_1, a_1), (A_2, a_2), ..., (A_n, a_n).

Si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$, on dit alors que G est l'*isobarycentre* des points A_1, A_2, ..., A_n.

Propriété 21.16

Si M est un point quelconque et G est le barycentre des points pondérés (A_1, a_i) alors :

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i}(a_1\overrightarrow{MA_1} + a_2\overrightarrow{MA_2} + \cdots a_n\overrightarrow{MA_n})$$

L'égalité précédente est appelée *forme réduite du barycentre*.

Développement

Démonstration. Soit M un point quelconque de l'espace. L'égalité (21.1) peut s'écrire :

$$a_1(\overrightarrow{A_1M} + \overrightarrow{MG}) + a_2(\overrightarrow{A_2M} + \overrightarrow{MG}) + \cdots + a_n(\overrightarrow{A_nM} + \overrightarrow{MG}) = \vec{0},$$

ce qui donnje en changeant l'ordre des termes :

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\overrightarrow{MG} + a_1\overrightarrow{A_1M} + a_2\overrightarrow{A_2M} + \cdots + a_n\overrightarrow{A_nM} = \vec{0},$$

d'où l'égalité. □

Exemple 21.17. Soit ABC un triangle, placer le barycentre des points pondérés $(A, 2)$, $(B, 1)$ et $(C, 1)$.

Développement

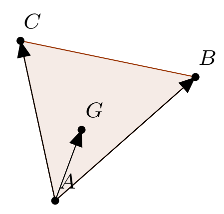
En utilisant le résultat précédent, on obtient :

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{4}(2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}).$$

Cette égalité étant vraie pour tout point M, elle est vraie en particulier pour $M = A$.

D'où :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$



3.2 Utilisation du barycentre partiel

Théorème 21.18 Si G est le barycentre de n points pondérés, on peut remplacer p de ces points par leur barycentre affecté de la somme des coefficients de ces points.

Développement

Considérons n points pondérés (A_1, a_1), (A_2, a_2), …, (A_n, a_n) tels que $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$. Soit G le barycentre de ces points.

Considérons également le barycentre G_1 des p premiers points pondérés ($p < n$). Ce barycentre n'existe que si $a_1 + a_2 + \cdots + a_p \neq 0$.

D'après le théorème précédent, on a :

$$\left(\sum_{i=1}^{p} a_i\right) \overrightarrow{MG_1} = a_1\overrightarrow{MA_1} + a_2\overrightarrow{MA_2} + \cdots + a_p\overrightarrow{MA_p} \quad \text{pour tout point } M.$$

Cette égalité est vraie en particulier pour $M = G$, d'où :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \overrightarrow{GG_i} = a_1\overrightarrow{GA_1} + a_2\overrightarrow{GA_2} + \cdots + a_p\overrightarrow{GA_p}. \tag{21.2}$$

L'égalité qui définit le point G s'écrit :

$$a_1\overrightarrow{GA_1} + a_2\overrightarrow{GA_2} + \cdots + a_p\overrightarrow{GA_p} + a_{p+1}\overrightarrow{GA_{p+1}} + \cdots + a_n\overrightarrow{GA_n} = \vec{0}.$$

En utilisant le résultat de l'égalité (21.2) précédente, on obtient :

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_p)\overrightarrow{GG_1} + a_{p+1}\overrightarrow{GA_{p+1}} + \cdots + a_n\overrightarrow{GA_n} = \vec{0}.$$

G est donc le barycentre de $(G_1, a_1 + \cdots + a_p)$, (A_{p+1}, a_{p+1}), …, (A_n, a_n).

Exemple 21.19. Montrer que l'isobarycentre des trois sommets d'un triangle est le point de conconurs de ses médianes (donc son centre de gravité).

Retrouver le résultat « dans un triangle le centre de gravité se situe aux $\frac{2}{3}$ de chacune des médianes à partir des sommets ».

Développement

Soit ABC un triangle. Soit G le barycentre de $(A, 1)$, $(B, 1)$ et $(C, 1)$.

Soit A' le barycentre de $(B, 1)$, $(C, 1)$ (A' est le milieu de $[BC]$), d'après le théorème précédent, G est le barycentre de $(A, 1)$, $(A', 2)$, G se situe donc sur la médiane (AA'). De la même manière, si on note C' le milieu de $[AB]$, on obtiendra le fait que G se situe sur la médiane (CC').

G est l'intersection de deux médianes, il s'agit bien du centre de gravité du triangle. De plus G est le barycentre de $(A, 1)$, $(A', 2)$, on a donc pour tout point M du plan :

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MA'}),$$

et pour $M = A$, on obtient :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}.$$

G se situe donc aux $\frac{2}{3}$ de $[AA']$ en partant du sommet A. Un raisonnement analogue permettrait de montrer que G se situe aux $\frac{2}{3}$ de chacune des deux autres médianes.

3.3 Coordonnées du barycentre

Théorème 21.20

Coordonnées du barycentre

Soit A_1, A_2, …, A_n n points dans l'espace. On note, pour tout $1 \leq i \leq n$, (x_i, y_i, z_i) les coordonnées de A_i. Le barycentre G du système pondéré (A_1, a_1), (A_2, a_2), …, (A_n, a_n) a pour coordonnées :

$$x_G = \frac{a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n}{\sum_{i=1}^n a_i} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i x_i}{\sum_{i=1}^n a_i}, \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^n a_i y_i}{\sum_{i=1}^n a_i}, \quad z_G = \frac{\sum_{i=1}^n a_i z_i}{\sum_{i=1}^n a_i}.$$

Développement

Démonstration. On reprend les notations du théorème. En remplaçant M par O dans l'égalité :

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i}(a_1\overrightarrow{MA_1} + a_2\overrightarrow{MA_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{MA_n}),$$

on obtient

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i}(a_1\overrightarrow{OA_1} + a_2\overrightarrow{OA_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{OA_n}),$$

d'où le résultat. □

Exemple 21.21. Dans le repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace, on donne :

$$A(1,1,1), \quad B(2,1,0) \quad \text{et} \quad C(-3,1,0).$$

On cherche les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC.

Développement

Le centre de gravité est le barycentre de $(A, 1)$, $(B, 1)$ et $(C, 1)$. Donc :

$$x_G = \frac{1+2-3}{3}, \quad y_G = \frac{1+1+1}{3}, \quad z_G = \frac{1+0+0}{3},$$

d'où $G\left(0, 1, \frac{1}{3}\right)$.

4 Produit scalaire

4.1 Définition

Définition 21.22

Produit scalaire

On appelle *produit scalaire* des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\vec{u} \cdot \vec{v}$ le nombre réel défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2.\right]$$

Remarque 21.23. Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Théorème 21.24

Si $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est un repère orthonormée (c'est-à-dire $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est une base orthonormale) et si $\vec{u} = (x, y)$ et $\vec{v} = (x', y')$ alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

Développement

Démonstration. On a : $\vec{u}+\vec{v}=(x+x', y+y')$ et donc :

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=(x+x')^2+(y+y')^2.$$

D'où :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left[(x+x')^2+(y+y')^2-(x^2+y^2)-(x'^2+y'^2)\right]=xx'+yy'.$$

□

Exemple 21.25. Soit $\vec{u}=(3,-1)$ et $\vec{v}=(2,6)$ alors

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=3\times 2+(-1)\times 6=6-6=0.$$

On dira que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

4 2 Propriétés

Propriétés 21.26

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$:

1. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
2. $\vec{0}\cdot\vec{u}=\vec{u}\cdot\vec{0}=0$
3. Pour tout réel k, $k\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot(k\vec{v})=k\times(\vec{u}\cdot\vec{v})$
4. $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
5. $\vec{u}\cdot\vec{u}$ est noté $\vec{u}^2$ est appelé carré scalaire de $\vec{u}$.
6. $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$ (carré de la longueur du vecteur $\vec{u}$)
7. $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$ (cela signifie que $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}\cdot\vec{u}+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v}$)
8. $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$
9. $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$

Développement

Démonstration des propriétés 32.5-1, 32.5-3 et 32.5-4. 1. D'après la définition du produit scalaire :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right]=\left[\|\vec{v}+\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2\right]=\vec{v}\cdot\vec{u}.$$

3. On se donne un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et trois vecteurs $\vec{u}=(x_1,y_1)$, $\vec{v}=(x_2,y_2)$, $\vec{w}=(x_3,y_3)$. On utilise la formule du théorème 32.3 :

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})&=x_1(x_2+x_3)+y_1(y_2+y_3)=x_1x_2+x_1x_3+y_1y_2+y_1y_3\\&=x_1x_2+y_1y_2+x_1x_3+y_1y_3=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}.\end{aligned}$$

4. De même,

$$\begin{aligned}(k\vec{u})\cdot\vec{v}&=kx_1x_2+ky_1y_2=kx_2x_1+ky_2y_1=\vec{u}\cdot(k\vec{v})\\&=kx_1x_2+ky_1y_2=k(x_1x_2+y_1y_2)=k\times(\vec{u}\cdot\vec{v}).\end{aligned}$$

□

Propriété 21.27

Dire que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux équivaut à dire que $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

Remarque 21.28. Si on note $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$:

$$\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2\Leftrightarrow AC^2=AB^2+BC^2.$$

4.3 Autres expressions du produit scalaire

Théorème 21.29

Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

Propriété 21.30

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls *colinéaires* :

1. S'ils ont même sens alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
2. S'ils ont sens contraire alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

Exemple 21.31. Si $\vec{u} = \frac{3}{2}\vec{v}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 2 = 6$.

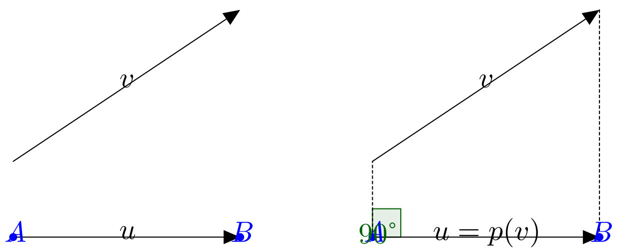


FIGURE 21.1 – Projection orthogonale de v sur une droite portant u

Propriété 21.32

Etant donné deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Si on note $p(\vec{v})$, la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur une droite portant $\vec{u}$ alors on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot p(\vec{v}).$$

Exemple 21.33.

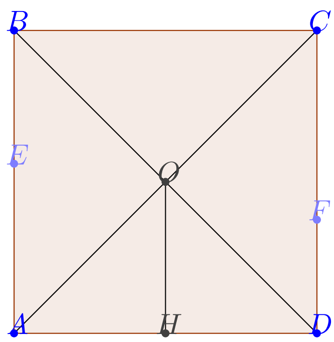


FIGURE 21.2 – Figure de l'exemple

- $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ car $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.
- $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} = -3 \times 3 = -9$ car $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires et de sens contraires.
- $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AH} = 3 \times 1,5 = 4,5$ car le projeté orthogonale de $\overrightarrow{AO}$ sur (AD) est $\overrightarrow{AH}$ et que $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de même sens.
- Les produits scalaires $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{EF}$ sont tous égaux entre eux. En effet, si on projette orthogonalement $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sur (AD), on obtient à chaque fois $\overrightarrow{AD}$. Donc tous ces produits scalaires sont égaux à $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = 3 \times 3 = 9$.

4 Applications

1. Vecteur normal à une droite

Définition 21.34

On dit qu'un vecteur $\vec{n}$ est normal à une droite $\mathcal{D}$ si $\vec{n} \neq \vec{0}$ et si $\vec{n}$ est orthogonal à la direction de $\mathcal{D}$.

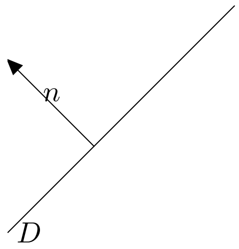


FIGURE 21.3 – Le vecteur n est normale à la droite D

Théorème 21.35

Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$

$$M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = \vec{0}.$$

Théorème 21.36

Soit $\mathcal{D}$ une droite d'équation $ux + vy + w = 0$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Le vecteur $\vec{n}(u, v)$ est normal à $\mathcal{D}$.

2. Relations dans un triangle

Théorème 21.37

Formule d'Al-Kashi

Dans un triangle ABC,

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}.$$

Développement

Démonstration du théorème 32.16. Si on note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$, on a :

$$a^2 = BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = BA^2 + AC^2 + 2(\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}) = c^2 + b^2 + 2b\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC})$$

Or $\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}) = \cos[\pi + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})] = -\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\cos \widehat{A}$. □

Théorème 21.38

Formule des 3 sinus

Soit ABC un triangle (on note $a = BC$, $b = AC$, $c = BA$), S l'aire de ce triangle et R le rayon du cercle circonscrit au triangle :

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = \frac{abc}{2S} = 2R.$$

Développement

Démonstration du théorème 32.17. On note H le pied de la hatueur issue de A dans le triangle ABC.

– Dans le cas où $\widehat{B}$ est obtus, $AH = AB\sin(\pi - \widehat{B}) = AB\sin\widehat{B} = c\sin\widehat{B}$.
– Dans le cas où $\widehat{B}$ est aigu, $AH = AB\sin\widehat{B} = c\sin\widehat{B}$.

Donc, dans tous les cas, $AH = c\sin\widehat{B}$ et $S = \frac{1}{2}BC \cdot AH = \frac{1}{2}ac\sin\widehat{B}$. D'où

$$S = \frac{1}{2}ac\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C} = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}.$$

□

3. Relations et équations trigonométriques

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs unitaires dans une base orthonormée directe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ tels que $(\vec{\imath}, \vec{u}) = b$ et $(\vec{\imath}, \vec{v}) = a$. On a

$$\vec{u} = \cos b \cdot \vec{\imath} + \sin b \cdot \vec{\jmath} = \cos a \cdot \vec{\imath} + \sin a \cdot \vec{\jmath}.$$

Donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$. De plus, $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{\imath}, \vec{v}) - (\vec{\imath}, \vec{u}) = a - b$. Donc :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos(a - b).$$

D'où :

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

En remplaçant a par $\frac{\pi}{2} - a$, on obtient :

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$$

À partir de ces formules, on déduit les suivantes :

$$\begin{aligned}
\cos(a + b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\
\sin(a - b) &= \sin a \cos b - \sin b \cos a \\
\sin 2a &= 2\sin a \cos a \\
\cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a.
\end{aligned}$$

On a aussi

$$\cos X = \cos\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} X = \alpha + 2k\pi \\ X = -\alpha + 2k\pi \end{cases}, \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin X = \sin\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} X = \alpha + 2k\pi \\ X = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

4. Recherche de lieux géométriques

1. On cherche tout d'abord l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = k$.

Propriété 21.39

Soit I le milieu du segment $[AB]$ (avec $A \neq B$). Pour tout point M, on a :

$$MA^2 + MB^2 = 2IM^2 + \frac{AB^2}{2} \quad \text{(Théorème de la médiane).}$$

Etant donné un réel k, on en déduit que l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = k$ est un cercle, ou un point ou l'ensemble vide.

Exemple 21.40. Soit A et B deux points tels que $AB = 2$. On cherche à déterminer l'ensemble E des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 20$. On utilise le théorème de la médiane :

$$MA^2 + MB^2 = 20 \Leftrightarrow 2IM^2 + \frac{AB^2}{2} = 20 \Leftrightarrow 2IM^2 + \frac{4}{2} = 20 \Leftrightarrow IM^2 = 9 \Leftrightarrow IM = 3$$

(car $IM > 0$). L'ensemble E est donc le cercle de centre I et de rayon 3.

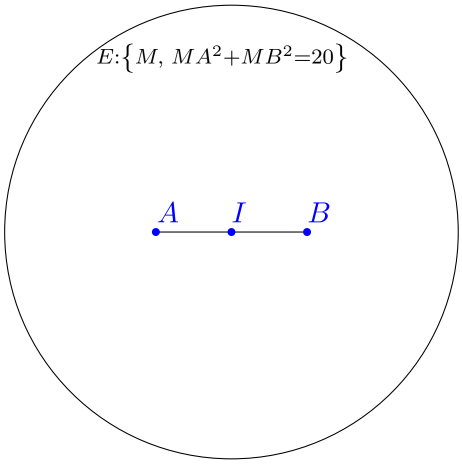


FIGURE 21.4 – Construction de l'ensemble E de l'exemple 21.40

2. On cherche à déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$. Pour cela, on décompose $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ en passant par I le milieu de $[AB]$.

Exemple 21.41. Soit A et B deux points tels que $AB = 4$. On cherche à déterminer l'ensemble E des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 12$.

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 12 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = 12.$$

Or, $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$. On a donc :

$$(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = 12 \Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = 12 \Leftrightarrow MI^2 - 2^2 = 12.$$

On en déduit que $M \in E \Leftrightarrow MI^2 = 16 \Leftrightarrow MI = 4$. E est donc le cercle de centre I et de rayon 4

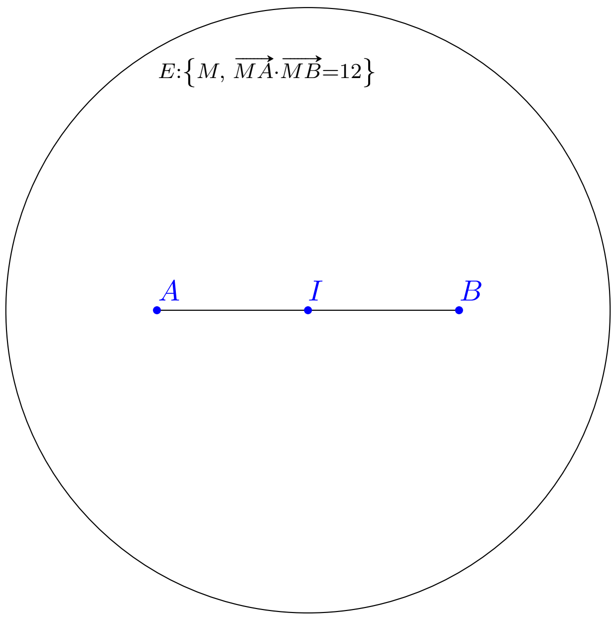


FIGURE 21.5 – Construction de E de l'exemple 21.41

3. On cherche à déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = k$. Pour cela, on cherche un point particulier H appartenant à l'ensemble. On a alors $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = k$. Ainsi,

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = k \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AH}) \cdot \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \perp \vec{u}.$$

L'ensemble est alors la droite passant par H de vecteur normal $\vec{u}$.

Exemple 21.42. Soit A et B deux points tels que $AB = 3$. On cherche à déterminer l'ensemble E des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = -6$. Soit H le point de la droite (AB) tel que $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient de sens contraires et tel que $AH \times AB = 6 \Leftrightarrow AH = \frac{6}{3} = 2$. Ainsi, on a bien $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = -6$. Dès lors :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = -6 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AH}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \perp \overrightarrow{AB}.$$

L'ensemble E est alors la droite perpendiculaire à (AB) passant par H.

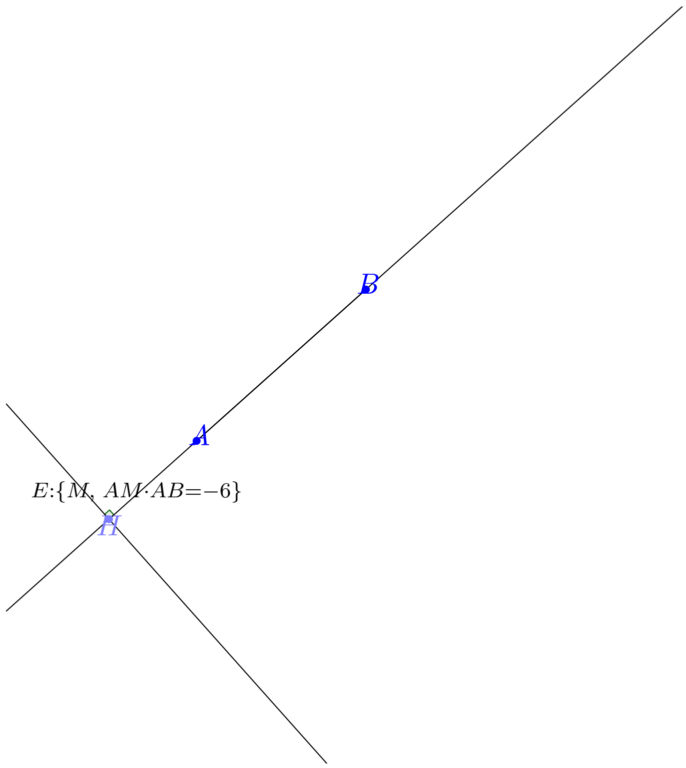


FIGURE 21.6 – Construction de E de l'exemple 21.42

5 Produit vectoriel, produit mixte

5.1 Définition du produit vectoriel

On rappelle tout d'abord que $\mathcal{A}(\vec{u}, \vec{v})$ vaut :

$$\mathcal{A}(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \, |\sin(\theta)|$$

où θ est l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$.

Définition 21.43

Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$. Si $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$, on pose $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$. Sinon, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est l'unique vecteur tel que :

1. $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{u}$,
2. $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{v}$,
3. $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est un trièdre direct,
4. $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \mathcal{A}(\vec{u}, \vec{v})$.

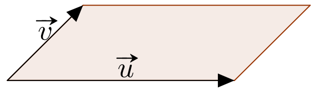


FIGURE 21.7 – Parallélogramme porté par les vecteurs u et v

Propriétés 21.44

Si $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$ alors :

1. $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ (alternance)
2. $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$ (antisymétrie)
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\lambda \vec{v}) = \lambda \vec{u} \wedge \vec{v}$
4. $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ si et seulement si $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$.

5 2 Définition d'un produit mixte

On note $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ le produit scalaire.

Définition 21.45

Produit mixte

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}$. On appelle *produit mixte* de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, le réel

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] := \langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w} \rangle .$$

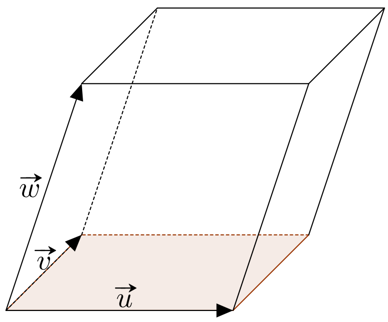


FIGURE 21.8 – Parallélépipède P construit sur les vecteurs u, v, w

On rappelle que P est un parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ si :

$$P = \{x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w},\ x, y, z \in [0\,, 1]\} .$$

Théorème 21.46

$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \pm \mathrm{vol}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. De plus, le signe est positif si le trièdre $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est direct et il est négatif dans le cas contraire.

Développement

Démonstration du théorème 21.46.

1. Si les trois vecteurs sont coplanaires, alors le volume est nul. Quant au produit mixte, il est également nul d'après les propriétés 1 et 2 du produit vectoriel (ajouté au fait qu'un produit scalaire entre deux vecteurs orthogonaux est nul).
2. Si les trois vecteurs forment un trièdre direct, alors on sait que le volume du parallélépipède est égal à l'aire de la base fois la hauteur correspondante. On obtient donc :

$$\mathrm{vol}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \mathcal{A}(\vec{u}, \vec{v}) \times h$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) &= \mathcal{A}(\vec{u}, \vec{v}) \times \cos((\vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w})) \, \|\vec{w}\| \\ &= \langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w} \rangle = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]. \end{aligned} \tag{21.3}$$

3. Si les vecteurs forment un trièdre alors, dans la ligne (21.3), le cosinus (négatif) est précédé d'un signe moins.

□

Corollaire 21.47

Le produit mixte est inchangé par permutation circulaire de ses arguments, c'est-à-dire :

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}].$$

Le produit mixte change de signe quand on transpose deux de ses arguments, par exemple :

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}].$$

Développement

Démonstration du corollaire 21.47. Les volumes étant égaux, il s'agit simplement d'appliquer la règle des trois doigts.

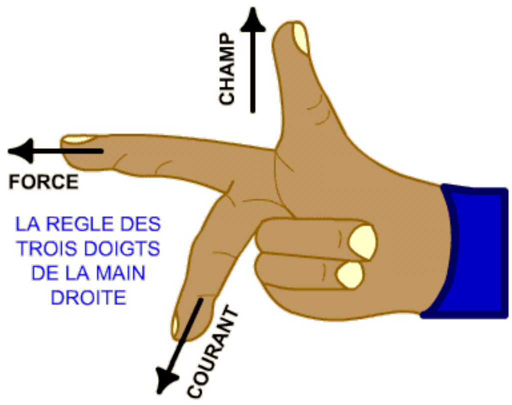


FIGURE 21.9 – La règle des trois doigts

□

5 3 Propriétés de linéarité

Propriétés 21.48

Distributivité du produit vectoriel par rapport à l'addition

Pour tout $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}$,

1. $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$,
2. $(\vec{u} + \vec{w}) \wedge \vec{u} = \vec{v} \wedge \vec{u} + \vec{w} \wedge \vec{u}$.

Développement

Démonstration des propriétés 21.48.

1. On va montrer que $\vec{r} = \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) - \vec{u} \wedge \vec{v} - \vec{u} \wedge \vec{w} = \vec{0}$.

   Premier cas On suppose que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}$ sont non-coplanaires. Pour montrer que $\vec{r} = \vec{0}$, il suffit de montrer que $\langle \vec{r}, \vec{t} \rangle = 0$ pour tout vecteur $\vec{t}$. Mais grâce à la linéarité du produit scalaire par rapport à la seconde variable, il suffit de vérifier cette dernière propriété pour trois vecteurs d'une base, il suffit donc de vérifier que

   $$\langle \vec{r}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{r}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{r}, \vec{w} \rangle = 0.$$

   Or, par définition, le produit vectoriel de n'importe quel vecteur avec $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{u}$. Les trois termes du second membre sont donc nuls. Donc : $\langle \vec{r}, \vec{u} \rangle = 0$. On calcule $\langle \vec{r}, \vec{v} \rangle$:

   $$\begin{aligned}\langle \vec{r}, \vec{v} \rangle &= \langle \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}), \vec{v} \rangle - \underbrace{\langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{v} \rangle}_{=0} - \langle \vec{u} \wedge \vec{w}, \vec{v} \rangle \\ &= [\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}, \vec{v}] - [\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}].\end{aligned}$$

Or $\text{vol}(\vec{u}, \vec{v}+\vec{w}, \vec{v}) = \text{vol}(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v})$. En effet, ces deux parallélépipèdes ont la même hauteur et $\mathcal{A}(\vec{v}+\vec{w}, \vec{v}) = \mathcal{A}(\vec{w}, \vec{v})$ car ces deux parallélogrammes ont la même hauteur et une base commune.

De plus, $(\vec{u}, \vec{v}+\vec{w}, \vec{v})$ et $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v})$ ont la même orientation. Donc $\det(\vec{u}, \vec{v}+\vec{w}, \vec{v}) = \det(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v})$ et donc $\langle \vec{r}, \vec{r} \rangle = 0$.

On peut faire le même raisonnement pour montrer que $\langle \vec{r}, \vec{w} \rangle = 0$.

Second cas Si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires alors on peut exprimer un vecteur en fonction des deux autres.

2. Il suffit d'utiliser l'anti-symétrie du produit vectoriel pour se ramener au cas précédent.

□

Corollaire 21.49

Additivité du produit mixte par rapport à la deuxième variable

$$[\vec{u}, \vec{v}+\vec{v'}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}, \vec{v'}, \vec{w}].$$

Proposition 21.50

Le produit mixte est linéaire en chacune de ses variables, c'est-à-dire :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall \vec{u}, \vec{u'}, \vec{v}, \vec{w}, \quad [\lambda\vec{u} + \mu\vec{u'}, \vec{v}, \vec{w}] = \lambda[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + \mu[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$$

et de même par rapport aux deuxième et troisième variables.

Théorème 21.51

Expression analytique du produit vectoriel

Dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, si les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont respectivement (x, y, z) et (x', y', z') alors les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ sont :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} yz' - zy \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}.$$

Exemple 21.52. Soit les vecteurs $\vec{u}(1, 2, 0)$ et $\vec{v}(-1, 3, 1)$. On va calculer les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$. Pour calculer l'abscisse $x_{\vec{u}\wedge\vec{v}}$ du vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$, il faut donc calculer :

$$yz' - zy' = 2 \times 1 - 0 \times 3 = 2.$$

De même,

$$y_{\vec{u}\wedge\vec{v}} = 0 \times (-1) - 1 \times 1 = -1 \quad \text{et} \quad z_{\vec{u}\wedge\vec{v}} = 1 \times 3 - 2 \times (-1) = 5.$$

Donc les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ sont $(2, -1, 5)$.

5 4 Applications

Exemple 21.53. Calcul du sinus d'un angle

Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ deux vecteurs non nuls de l'espace. Alors :

$$\sin \widehat{BAC} = \frac{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|}$$

va nous permettre de calculer l'angle $\widehat{BAC}$. De plus, si on appelle H le pied de la hauteur issue de B, dans le triangle ABH :

$$\sin \widehat{BAC} = \frac{BH}{BA}$$

donc

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = AB \times \times AC \times \frac{BH}{BA} = AC \times BH.$$

Comme l'aire du triangle ABC est $\frac{AC \times BH}{2}$, on a alors :

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}{2}.$$

Application Dans l'espace muni d'un repère orthonormal direct, on définit les points $A(2,-2,3)$ et $B(4,-6,1)$ et $C(0,-1,5)$. L'unité est le cm. On veut calculer l'aire du triangle ABC en cm^2.

On calcule les coordonnées des vecteurs :

$$\overrightarrow{AB} = (2,-4,-4)$$
$$\overrightarrow{AC} = (-2,1,2)$$

donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (-4,4,-6)$ et :

$$\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + -6^2} = \sqrt{68}.$$

L'aire du triangle ABC est donc :

$$\frac{\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|}{2} = \frac{\sqrt{68}}{2} = \frac{2\sqrt{17}}{2} = \sqrt{17} \approx 4,12\text{cm}^2.$$

Exemple 21.54. Moment d'une force

Le moment d'une force $\vec{F}$ s'exerçant au point A par rapport au pivot P est le vecteur :

$$M_{\vec{F}/P} = \overrightarrow{PA} \wedge \vec{F}.$$

Ce vecteur désigne l'aptitude de la force $\vec{F}$ à faire tourner un système mécanique autour du point P, qui est le pivot.

Exemple 21.55. Equation du plan P

En utilisant le produit mixte, donner une équation du plan P défini par le point $A(1,1,2)$ et les vecteurs $\vec{u}(0,1,2)$ et $\vec{v}(-1,1,-1)$.

Soit $M(x,y,z)$ un point du plan P, on a :

$$\overrightarrow{AM}(x-1, y-1, z-2).$$

Alors

$$[\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}] = \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} \wedge \vec{v} = 0.$$

On calcule donc $\vec{u} \wedge \vec{v} = (-3,-2,1)$ et :

$$\overrightarrow{AM} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = (x-1) \times (-3) + (y-1) \times (-2) + (z-2) \times 1$$

qui est nul. Donc une équation du plan P est :

$$-3x + 3 - 2y + 2 + z - 2 = 0 \Leftrightarrow -3x - 2y + z + 3 = 0.$$

Exemple 21.56. Moment d'une force par rapport à un axe

Soit $\vec{F}$ une force exercée le long d'une droite D et soit $(O, \vec{v})$ un axe orienté. Le produit mixte $[\vec{v}, \overrightarrow{OA}, \vec{F}]$, où A est un point quelconque de D est appelé *moment de la force* $\vec{F}$ par rapport à l'axe $(O, \vec{v})$.

Exercices d'entrainement

Équations de droites, de plans

On se situe dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

1 Déterminer les équations de la droite (AB) avec $A(1, 0, 1)$ et $B(2, -1, 0)$.

2 On considère la droite $\mathcal{D}$ définie par :

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{2z+1}{3}.$$

Donner les coordonnées de deux points de cette droite, ainsi que les composantes d'un de ses vecteurs directeurs.

Montrer que $\mathcal{D}$ est l'intersection des plans d'équations :

$$2x - 3y - 1 = 0 \quad \text{et} \quad 3y - 4z - 5 = 0.$$

3 Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) sachant que :

$$A(1, 2, 0),\ B(3, 0, 0) \quad \text{et} \quad C(2, 2, 1).$$

4 Déterminer une équation cartésienne du plan défini par le point $A(1, 0, 1)$ et les vecteurs $\vec{u}(2, 1, 1)$ et $\vec{v}(0, 0, 1)$.

Barycentres

5 On considère un parallélogramme $ABCD$. Soit G le barycentre desp oints pondérés $(A, 2)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$ et $(D, 1)$.

On note M le barycentre de $(A, 2)$, $(B, 1)$. G' l'isobarycentre de B, C, D et I le milieu de $[BC]$.

1. Placer sur un dessin les points M, G' et I.
2. Montrer que le point G est l'intersection des droites (AG') et (IM).
3. Placer ce point.

6 On considère le tétraèdre $ABCD$. Soit G le barycentre $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(C, 2)$, $(D, 2)$.

On appelle I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[CD]$. Soit G' le barycentre de $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(C, 2)$.

1. Préciser la position de G'.
2. Montrer que G est le barycentre de I et J affectés de coefficients que l'on déterminera.
3. Montrer que G est le barycentre de G' et D affectés de coefficients que l'on déterminera.
4. Définir le point G comme intersection de deux droites.

Produit scalaire, applications

7 Dans le plan, on considère les points $A(1, 0)$, $B(2, -1)$ et $C(3, 1)$.

1. Donner une équation de la droite (AB).
2. Calculer la distance du point C à la droite (AB).
3. Calculer l'aire du triangle ABC.

8 On considère le tétraèdre de sommets $A(1, 1, 1)$, $B(1, 0, 0)$, $C(0, 1, 2)$ et $D(2, 3, 1)$.

1. Donner une équation du plan (ABC).
2. Calculer la distance du point D au plan (ABC).

Produit vectoriel, produit mixte

9 On considère les points :

$$A(1, 1, 2),\ B(0, 1, 1),\ C(2, 1, 0),\ D(2, 1, 1).$$

1. Déterminer une équation du plan (ABC).
2. Calculer la distance de D au plan (ABC).
3. Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

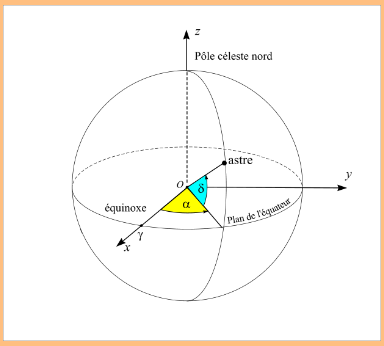
10 En utilisant le produit mixte, donner une équation du plan par les points $I(1, 0, 0)$, $J(0, 1, 0)$ et $K(0, 0, 1)$.

Donner la distance du point $O(0, 0, 0)$ à ce plan.

LEÇON

22

Exemples d'utilisation d'un repère



Niveau : Première S, Terminale S, BTS
Prérequis : définition d'un vecteur, base de la géométrie

1 Définition d'un repère

1.1 Droite graduée

Définition 22.1

Droite graduée

Pour graduer une droite, on prend sur cette droite un point O appelé *origine* et le représentant d'un vecteur $\vec{\imath}$ passant par O qui définit l'*unité* : on parle du repère $(O, \vec{\imath})$.

Propriété 22.2

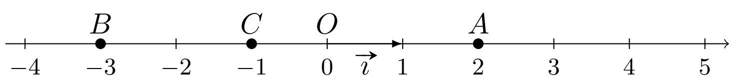
Sur une droite graduée par le repère $(O, \vec{\imath})$, à tout point A correspond un unique nombre x appelé *abscisse* de A.

On a :

$$\overrightarrow{OA} = x \cdot \vec{\imath}$$

et on note $A(x)$.

Exemple 22.3.



- L'abscisse du point A est 2.
- L'abscisse du point B est -3.
- L'abscisse du point C est -1.

1.2 Repérage dans le plan

Définition 22.4

Repérage dans le plan

Pour munir le plan d'un repère, on prend dans ce plan un point O appelé *origine* et les représentants de deux vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ passant par O qui définissent les unités respectivement « horizontales » et « verticales ». Ainsi le triplet $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ forme un *repère* du plan.

Propriété 22.5

Dans le plan muni du repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, à tout point A correspond un unique couple (x, y) de nombres appelés *coordonnées* de A. On a :

$$\overrightarrow{OA} = x \cdot \vec{\imath} + y \cdot \vec{\jmath}$$

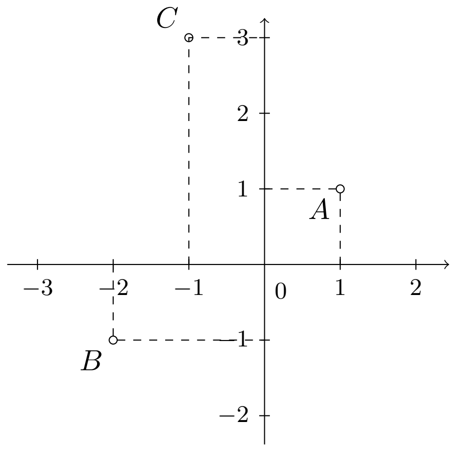
et on note $A(x, y)$ ou $A(x; y)$.

Définition 22.6

Vocabulaire

- x est l'*abscisse* de A ;
- y est l'*ordonnée* de A ;
- la droite sur laquelle on lit les abscisses des points est appelée *axe des abscisses* et celle sur laquelle on lit les ordonnées des points est appelée *axe des ordonnées*.

Exemple 22.7.



– Les coordonnées de A sont $(+1,+1)$. Son abscisse est $+1$, son ordonnée est $+1$. On note $A(1,1)$.
– Les coordonnées de B sont $(-2,-1)$. Son abscisse est -2, son ordonnée est -1. On note $B(-2,-1)$.
– Les coordonnées de C sont $(-1,3)$. Son abscisse est -1, son ordonnée est 3. On note $C(-1,3)$.

Définition 22.8

Repère orthogonal et repère orthonormal

Un repère dont les axes sont perpendiculaires est dit *orthogonal*.

Un repère orthogonal tel que les normes des vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ soient chacune égales à 1 est dit *orthonormé* ou *repère orthonormal*.

1 3 Repère dans l'espace

Définition 22.9

Repérage dans l'espace

Pour munir l'espace d'un repère, on prend un point O appelé *origine* et les représentants de trois vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ passant par O qui définissent les unités et les directions, respectivement « gauche-droite », « avant-arrière » et « verticale ». Le quadruplet $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ forme un *repère* dans l'espace.

Propriété 22.10

Dans l'espace muni du repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, à tout point A correspond un unique triplet (x, y, z) de nombres appelés *coordonnées* de A. On a :

$$\overrightarrow{OA} = x \cdot \vec{\imath} + y \cdot \vec{\jmath} + z \cdot \vec{k}$$

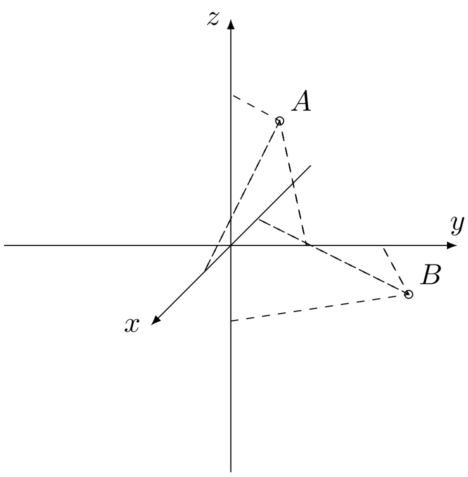
et on note $A(x, y, z)$ ou $A(x; y; z)$.

Définition 22.11

Vocabulaire

– x est l'*abscisse* de A ;
– y est l'*ordonnée* de A ;
– z est la *cote* de A ;
– la droite sur laquelle on lit les abscisses des points est appelée *axe des abscisses* ;
– la droite sur laquelle on lit les ordonnées des points est appelée *axe des ordonnées* ;
– la droite sur laquelle on lit les cotes est appelée *axe des cotes*.

Exemple 22.12.



- Les coordonnées de A sont $(1, 1, 2)$.
- Les coordonnées de B sont $(-1, 2, -1)$.

Définition 22.13

Repère orthogonal, orthonormal

Un repère dont les axes sont perpendiculaires est dit *orthogonal*.

Un repère orthogonal dont les normes des vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont chacune égales à 1 est dit *orthonormé*, ou *repère orthonormal*.

Développement

14 Compléments : base orthonormale

1. Définition

Définition 22.14

Soit E_n un espace vectoriel de dimension n, où n est un entier naturel, et $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n})$ une base de E_n. On dit que $\mathcal{B}$ est *orthonormale* si et seulement si :

- $\|\vec{e_1}\| = \|\vec{e_2}\| = \ldots = \|\vec{e_n}\| = 1$;
- pour tout $i \neq j$, $\vec{e_i} \perp \vec{e_j}$.

Définition 22.15

Soit $\mathcal{A}_n$ un espace affine euclidien associé à l'espace vectoriel euclidien E_n et O un point quelconque de $\mathcal{A}_n$, alors le repère $\mathcal{R} = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n})$ est dit *orthonormal* si et seulement si sa *base associée* $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \cdots, \vec{e_n})$ est elle-même orthonormale.

2. Calculs dans une base orthonormée

Propriété 22.16

Soit $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n})$ une base orthonormale de E_n.

a. La décomposition d'un vecteur de E_n dans cette base est donnée par :

$$\forall \vec{x} \in E_n, \quad \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{e_i}, \vec{x} \rangle\, \vec{e_i}.$$

b. L'expression du produit scalaire de deux vecteurs de E_n est alors donnée par :

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E_n, \quad \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{e_i}, \vec{x} \rangle \langle \vec{e_i}, \vec{y} \rangle .$$

c. L'expression du carré de la norme d'un vecteur de E_n est donc :

$$\forall \vec{x} \in E_n, \quad \|\vec{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{e_i}, \vec{x} \rangle^2 .$$

Ces trois propriétés sont en fait équivalentes entre elles, et équivalentes au fait que la famille $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ soit une base orthonormale de E_n.

3. Procédé de Gram-Schmidt

Théorème 22.17

Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $(x_1, \dots, x_p)$ une famille libre de vecteurs. Alors, il existe une famille orthonormale $(e_1, \dots, e_p)$ unique telle que :

a. pour tout $1 \leq k \leq p$, $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_k)$;

b. pour tout $1 \leq k \leq p$, $\langle e_k, v_k \rangle > 0$.

Méthode 22.18

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n, puis $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une base de E. On va construire à partir de la famille libre $(x_1, \dots, x_n)$ une famille orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ de E qui sera donc une base orthonormale.

L'algorithme est le suivant :

a. poser $e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$;

b. une fois les vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_k$ calculés, chercher le vecteur e_{k+1} sous la forme : $e_{k+1} = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_k e_k + \beta x_{k+1}$; pour trouver les constantes :

- calculer $\langle e_{k+1}, e_j \rangle = 0$ pour tout $1 \leq j \leq k$, pour obtenir α_j en fonction de β ;
- calculer $\langle e_{k+1}, e_{k+1} \rangle = 1$ pour obtenir β^2 ;
- prendre $\beta > 0$ grâce à $\langle e_{k+1}, x_{k+1} \rangle > 0$: on a β puis tous les α_j.

2 Utilisation de repères

2.1 Géométrie analytique

1. Norme d'un vecteur, distance entre deux points

Théorème 22.19

Norme d'un vecteur

Si le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées (x, y) dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ alors sa norme est donnée par :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Développement

Démonstration. On appelle M le point du plan défini par $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$. M a alors pour coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (qu'on suppose orthonormé).

Soit P le projeté du point M sur l'axe Ox parallèlement à l'axe Oy et Q le projeté du point M sur l'axe Oy parallèlement à l'axe Ox.

Comme le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est orthonormé, le parallélogramme $OPMQ$ est un rectangle. Le triangle OMP est donc rectangle en P. Par conséquent, on peut appliquer le théorème de Pythagore :

$$OM^2 = OP^2 + PM^2 = OP^2 + OQ^2.$$

Or la distance OM est égale à la norme du vecteur $\vec{u}$, $\overrightarrow{OP} = x\vec{\imath}$ et $\overrightarrow{OQ} = y\vec{\jmath}$, ainsi on a :

$$\|\vec{u}\|^2 = \left\|\overrightarrow{OP}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{OQ}\right\|^2 = \|x\vec{\imath}\|^2 + \|y\vec{\jmath}\|^2 = |x|^2 + |y|^2 = x^2 + y^2$$

Par passage à la racine carrée, on en déduit le résultat du théorème. □

Le théorème précédent permet de calculer la distance entre deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$. Elle est égale à la norme du vecteur

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}.$$

Théorème 22.20

Dans un repère orthonormé, la distance entre les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ est donnée par :

$$AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

2. Formule du produit scalaire

Définition 22.21

Produit scalaire

Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel note $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ et défini par :

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{u}\|^2\right]$$

Théorème 22.22

Produit scalaire et coordonnées dans un repère orthonormé

Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé quelconque alors :

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = xx' + yy'.$$

Développement

Démonstration. Comme l'on travaille dans un repère orthonormé, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle &= \frac{1}{2}\left[\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{(x + x')^2 + (y + y')^2}\right)^2 - \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 - \left(\sqrt{x'^2 + y'^2}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{2}[(x + x')^2 + (y + y')^2 - (x^2 + y^2) - (x'^2 + y'^2)] \\
&= \frac{1}{2}[x^2 + 2xx' + x'^2 + y^2 + 2yy' + y'^2 - x^2 - y^2 - x'^2 - y'^2] \\
&= \frac{1}{2}(2xx' + 2yy') = \frac{1}{2} \times 2 \times [xx' + yy'] = xx' + yy'.
\end{aligned}$$

□

3. Distance entre un point et une droite

Théorème 22.23

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la distance entre le point $A(x_A, y_A)$ et la droite $\mathcal{D}$ dont une équation cartésienne est $ax + by + c = 0$ est donnée par :

$$d(A; \mathcal{D}) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Développement

Démonstration. Soit A' le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathcal{D}$. On sait que :

$$d(A;\mathcal{D}) = AA'.$$

Si $\mathcal{D}$ a pour équation $ax+by+c=0$ alors son vecteur normal $\vec{n}$ a pour coordonnées $\binom{a}{b}$. Ce dernier vecteur est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix} x_{A'}-x_A \\ y_{A'}-y_A \end{pmatrix}$. On peut donc écrire les égalités suivantes :

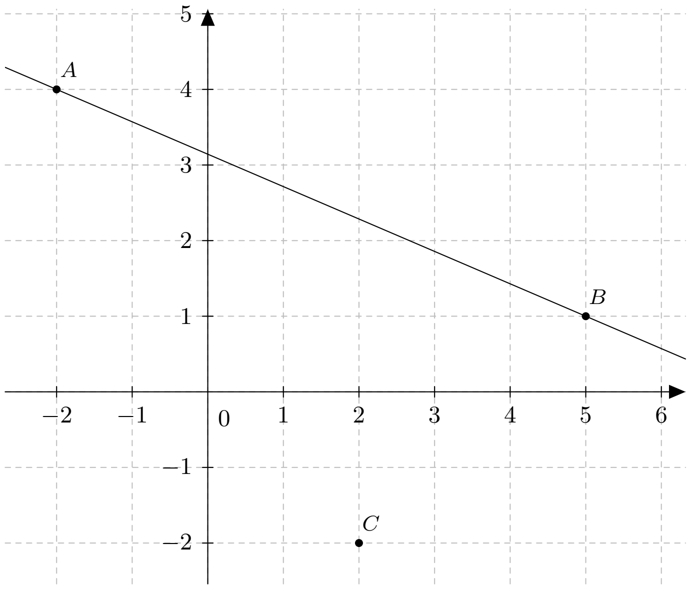
$$\begin{aligned}\left\langle \vec{n}, \overrightarrow{AA'} \right\rangle &= \pm[\sqrt{a^2+b^2}] \times AA' \\ &= a(x_{A'}-x_A) + b(y_{A'}-y_A) = ax_{A'} + by_{A'} - ax_A - by_A = -[ax_A + by_A + c].\end{aligned}$$

On peut supprimer $\pm$ en passant par les valeurs absolues, cela donne :

$$\sqrt{a^2+b^2} \times AA' = |ax_A + by_A + c| \Leftrightarrow AA' = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

□

Exemple 22.24. Soit $A(-2,4)$, $B(5,1)$ et $C(2,-2)$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On cherche la distance du point C par rapport à la droite (AB).



Développement

Déterminons une équation cartésienne de la droite (AB). $M(x,y)$ appartient à la droite (AB) si et seulement les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires. Ainsi, on trouve une équation cartésienne de (AB) (en exercice) : $3x - 7y + 34 = 0$. On applique la formule précédente :

$$d(C;(AB)) = \frac{|3x_C - 7y_C + 34|}{\sqrt{3^2+(-7)^2}} = \frac{|3\times 2 - 7\times(-2) + 34|}{\sqrt{9+49}} = \frac{6+14+34}{\sqrt{58}} = \frac{54}{\sqrt{58}}.$$

4. Équation d'un cercle

Théorème 22.25

Dans un repère orthonormé, tout cercle $\mathcal{C}$ admet une équation cartésienne de la forme

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

où a, b et c sont trois réels.

Développement

Démonstration. Soit $I(\alpha,\beta)$. On considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre I et de rayon r. Un point $M(x,y)$ appartient au cercle $\mathcal{C}$ si et seulement si $IM=r$. Cela se traduit par l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} M(x,y)\in\mathcal{C} \Leftrightarrow IM=r \Leftrightarrow \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=r \\ \Leftrightarrow (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \\ \Leftrightarrow x^2-2\alpha x+\alpha^2+y^2-2\beta y+\beta^2=r^2 \Leftrightarrow x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2+\beta^2-r^2=0. \end{aligned}$$

Si on pose $a=-2\alpha$, $b=-2\beta$ et $c=\alpha^2+\beta^2-r^2$, on obtient une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$. □

On va maintenant déterminer à quelle condition l'équation cartésienne $x^2+y^2+ax+by+c=0$ se rapporte-elle à un cercle.

Développement

On appelle $\mathcal{E}$ l'ensemble des points $M(x,y)$ vérifiant $x^2+y^2+ax+by+c=0$.

$$\begin{aligned} M(x,y)\in\mathcal{E} &\Leftrightarrow x^2+y^2+ax+by+c=0 \\ &\Leftrightarrow \left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2+c=0 \\ &\Leftrightarrow \left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c. \end{aligned}$$

De là, il faut savoir si $\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c$ peut être le carré d'un rayon. Pour cela, il faut distinguer trois cas :

– Si la quantité $\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c$ est négative alors la dernière équation devient :

$$M(x;y)\in\mathcal{E}\Leftrightarrow IM^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c<0.$$

Or, un carré n'est jamais négatif. Aucun point M ne peut la satisfaire. L'ensemble $\mathcal{E}$ se résume à l'ensemble vide.

– Si le second membre $\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c$ est nul alors l'équivalence devient :

$$M(x,y)\in\mathcal{E}\Leftrightarrow IM^2=0\Leftrightarrow IM=0.$$

L'ensemble $\mathcal{E}$ se résume au seul point $I(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2})$.

– Si la quantité $\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c$ est positive alors elle est le carré de sa racine. Donc :

$$M(x,y)\in\mathcal{E}\Leftrightarrow IM^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c\Leftrightarrow IM=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c}\text{ ou }IM=-\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c}$$

Or, un la distance IM ne peut pas être négative. Ainsi, $M\in\mathcal{E}$ si et seulement si la distance entre I et M est de $\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c}$ donc $\mathcal{E}$ est le cercle de centre $I\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)$ et de rayon $\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c}$.

Théorème 22.26

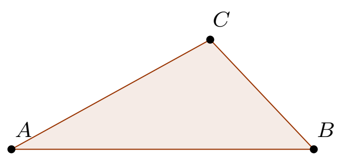
Pour qu'une équation cartésienne de la forme $x^2+y^2+ax+by+c=0$ soit celle d'un cercle $\mathcal{C}$, il faut et il suffit que la quantité $\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c$ soit positive (ou nulle).

Le cercle $\mathcal{C}$ a pour centre le point $I\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)$ et pour rayon $\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c}$.

2.2 Recherche de lieux

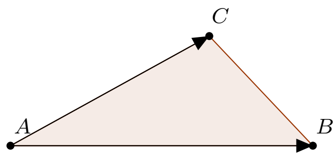
Exemple 22.27. Soit ABC un triangle tel que $AB=4$, $AC=3$ et $BC=2$. On détermine l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan vérifiant l'équation :

$$3AM^2-4BM^2+2CM^2.$$



Développement

Pour trouver l'ensemble $\mathcal{E}$ de manière analytique, nous allons nous placer dans le repère non orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Dans ce repère l'origine A a pour coordonnée $(0;0)$, $B(1;0)$ et $C(0;1)$.



Comme le repère choisi n'est pas orthonormé, la formule des normes de vecteurs ne s'applique pas. On détermine une autre formule. Si le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x;y)$ dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ alors :

$$\vec{u} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}.$$

La norme d'un vecteur est égale à la racine carré de son carré scalaire. Ainsi :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} = \sqrt{\left\langle x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}, x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} \right\rangle} = \sqrt{x^2 \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + 2xy\left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right\rangle + y^2 \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2}$$

Or :

$$\|AB\|^2 = AB^2 = 16 \quad \text{et} \quad \|AC\|^2 = AC^2 = 9.$$

Reste à calculer le produit scalaire $\left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right\rangle$:

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right\rangle &= \left\langle -\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC} \right\rangle = -\left\langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC} \right\rangle \\
&= -\frac{1}{2}\left[\left\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2\right] \\
&= -\frac{1}{2}[2^2 - 4^2 - 3^2] = -\frac{1}{2}[4 - 16 - 9] = -\frac{1}{2}(-21) = 10,5.
\end{aligned}$$

Ainsi, la norme du vecteur $vvu(x;y)$ dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est donnée par :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{16x^2 + 21xy + 9y^2}.$$

Soient $M(x,y)$ et $I(a,b)$ dans $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Le carré de la distance IM est donné par :

$$\begin{aligned}
IM^2 &= \left\|\overrightarrow{IM}\right\| = \|(x-a; y-b)\|^2 \\
&= \left(\sqrt{16(x-a)^2 + 21(x-a)(y-b) + 9(y-b)^2}\right)^2 \\
&= 16(x^2 - 2ax + a^2) + 21(xy - bx - ay + ab) + 9(y^2 - 2by + b^2) \\
&= 16x^2 + (-32a - 21b)x + 9y^2 + (-21a - 18b)y + 21xy + 16a^2 + 21ab + 9b^2.
\end{aligned}$$

Ainsi, on peut décrire tous les points $M(x;y)$ de l'ensemble $\mathcal{E}$.

$$\begin{aligned}
M(x,y) \in \mathcal{E} &\Leftrightarrow 3AM^2 - 4BM^2 + 2CM^2 = 26 \\
&\Leftrightarrow 3\left\|\overrightarrow{AM}\right\|^2 - 4\left\|\overrightarrow{BM}\right\|^2 + 2\left\|\overrightarrow{CM}\right\|^2 = 26 \\
&\Leftrightarrow 3(16x^2 + 21xy + 9y^2 - 4(16(x-1)^2 + 21(x-1)y + 9y^2) + 2(16x^2 + 21x(y-1) + 9(y-1)^2 = 26 \\
&\Leftrightarrow \cdots \\
&\Leftrightarrow 16x^2 + 86x + 9y^2 + 48y + 21xy - 72 = 0.
\end{aligned}$$

L'équation $16x^2 + 86x + 9y^2 + 48y + 21xy - 72 = 0$ semble être une équation cartésienne d'un cercle. Il faut en déterminer les coordonnées du centre et son rayon. La formule donnant IM^2 va nous être utile, ici.

$$\begin{aligned}
IM^2 &= 16x^2 + 9y + 21xy + 86x + 48y - 72 = 0 \\
&= 16x^2 + 9y + 21xy + (-32a - 21b)x + (-21a - 18b)y - 72 = 0
\end{aligned}$$

Les coordonnées (a, b) du centre I de notre cercle sont les solutions du système 2×2 suivant :

$$\begin{cases} -32a - 21b = 86 \\ -21a - 18b = 48 \end{cases}$$

Après calculs, on trouve $a = -4$ et $b = 2$. Ainsi :

$$\begin{aligned} M(x,y) \in \mathcal{E} &\Leftrightarrow 16x^2 + 9y^2 + 21xy + 86x + 48y - 72 = 0 \\ &\Leftrightarrow IM^2 - [16 \times (-4)^2 + 21 \times (-4) \times 2 + 9 \times 2^2] - 72 = 0 \\ &\Leftrightarrow IM^2 - 124 - 72 = 0 \Leftrightarrow IM^2 = 196 \Leftrightarrow IM = 14. \end{aligned}$$

Conclusion : l'ensemble $\mathcal{E}$ est le cercle de rayon 14 et de centre le point I défini par :

$$\overrightarrow{AI} = -4\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}.$$

---

23 Équations de droites, équations de plans

1. Colinéarité et coplanéarité

Définition 22.28

Colinéarité

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *colinéaires* si, et seulement si, il existe deux réels α et β non tous deux nuls tels que :

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}.$$

Définition 22.29

Coplanéarité

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanéaires si il existe trois réels α, β et γ non tous nuls tels que :

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}.$$

Exemple 22.30. Quatre points distincts A, B, C et D appartiennent à un même plan si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

2. Équations de droites

Développement

Soit $\mathcal{D}$ la droite de l'espace passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$. Un point $M(x, y, z)$ de l'espace appartient à la droite (AB) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, on obtient donc :

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A} \quad \text{(si aucun des trois réels au dénominateu n'est nul).}$$

Si $\mathcal{D}$ eset donnée par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et par un vecteur directeur $\vec{v}(a, b, c)$, alors on peut écrire les trois égalités suivantes :

$$\begin{cases} x - x_A = ka \\ y - y_A = kb \\ z - z_A = kc \end{cases}.$$

Si aucun des trois réels a, b, c n'est nul, on peut écrire :

$$\frac{x - x_A}{a} = \frac{y - y_A}{b} = \frac{z - z_A}{c}.$$

Il s'agit des équations de $\mathcal{D}$ lorsque cette droite n'est pas parallèleà l'un des plans de coordonnées.

Propriété 22.31

Soit $\mathcal{D}$ une droite de l'espace définie par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et par un vecteur directeur $\vec{v}(a, b, c)$.

– Si $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $c \neq 0$ alors $\mathcal{D}$ n'est parallèle à aucun plan de coordonnées, ses équations peuvent s'écrire :
$$\frac{x - x_A}{a} = \frac{y - y_A}{b} = \frac{z - z_A}{c}.$$
– Si $a = 0$, $b \neq 0$ et $c \neq 0$ (il en est de même si $b = 0$ ou $c = 0$) alors $\mathcal{D}$ est parallèle au plan d'équation $x = 0$, ses équations peuvent s'écrire :
$$\begin{cases} x = x_A \\ \frac{y-y_A}{b} = \frac{z-z_A}{c} \end{cases}.$$
– Si $a = 0$, $b = 0$ et $c \neq 0$ (il en est de même si $a = 0$ et $c = 0$ ou $b = 0$ et $c = 0$) alors $\mathcal{D}$ est parallèle à l'axe Oz, ses équations peuvent s'écre :
$$\begin{cases} x = x_A \\ y = y_A \\ z = z_A + tc \quad (t \in \mathbb{R}) \end{cases}.$$

Exemple 22.32. Donner les équations de la droite $\mathcal{D}$ passant par $A(-3, 1, 4)$ et $B(2, 3, 1)$.

Développement

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB}(5, 2, -3)$.

Les équations de $\mathcal{D}$ peuvent s'écrire :
$$\frac{x+3}{5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{-3}$$
ou
$$\begin{cases} \frac{x+3}{5} = \frac{y-1}{2} \\ \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 6 = 5y - 5 \\ 2z - 8 = -3y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5y + 11 = 0 \\ 3y + 2z - 11 = 0 \end{cases}$$

3. Équations de plans

On admet que :

Théorème 22.33

Tout plan de l'espace rapport à un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ admet une équation cartésienne du type :
$$ax + by + cz + d = 0.$$

Méthode 22.34

Méthode d'obtention de l'équation cartésienne d'un plan

Soit un plan $\mathcal{P}$ défini par un point A et deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de ce plan.

Tout point M du plan $\mathcal{P}$ est tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$.

Cette égalité permet en utilisant les coordonnées (x, y, z) de M, celles de A et les composantes de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'obtenir trois équations.

Exemple 22.35. On cherche l'équation du plan $\mathcal{P}$ défini par $A(1, 0, 1)$ et les vecteurs $\vec{u}(2, -1, 1)$ et $\vec{v}(1, 1, 2)$.

Développement

L'équation $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ donne :
$$\begin{cases} x - 1 = 2\lambda + \mu \quad (1) \\ y = -\lambda + \mu \quad (2) \\ z - 1 = \lambda + 2\mu \quad (3) \end{cases}.$$

En additionnant (2) et (3), on obtient :

$$3\mu = y + z - 1 \Leftrightarrow \mu = \frac{1}{3}(y + z - 1).$$

En soustrayant (2) et (1), on obtient :

$$3\lambda = x - y - 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{3}(x - y - 1).$$

En replaçant λ et μ par ces valeurs dans (2), on obtient :

$$y = \frac{1}{3}(x - y - 1) + \frac{1}{3}(y + z - 1) \Leftrightarrow 3y = -x + y + 1 + y + z - 1.$$

Ainsi : $x + y - z = 0$. Cette équation est une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

3 Fonctions et changement de repère

Exemple 22.36. On considère la fonction f définie par $f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 9x$ et on note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique par rapport à un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On note A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 1. Démontrer qu'une équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $(A, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est $Y = 4X^3 - 3X$.

Développement

Calculons tout d'abord les coordonnées du point $A(1, f(1))$.

$$f(1) = 4 \times 1^3 - 12 \times 1^2 + 9 \times 1 = 1.$$

Soit M un point du plan de coordonnées (x, y) dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et de coordonnées (X, Y) dans $(A, \vec{\imath}, \vec{\jmath}$. On sait, d'après la relation de Chasles que :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM},$$

on peut donc obtenir une relation entre les coordonnées de M dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et celles dans $(A, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$:

$$\begin{cases} x = 1 + X \\ y = 1 + Y \end{cases}$$

On remplaces ensuite x et y dans $y = 4x^3 - 12x^2 + 9x$ par leur valeur en fonction de X et Y :

$$\begin{aligned} 1 + Y = 4(1+X)^3 - 12(1+X)^2 + 9(1+X) &\Leftrightarrow Y = 4(1 + 3X + 6X^2 + 3X + 1) - 12(X^2 + 2X + 1) + 9 + 9X - 1 \\ &\Leftrightarrow Y = 4 + 12X + 24X^2 + 12X + 1 - 12X^2 - 24X - 12 + 9 + 9X - 1 \\ &\Leftrightarrow Y = 4X^3 - 3X. \end{aligned}$$

4 Système de coordonnées

Définition 22.37

Un *système de coordonnée* est une correspondance entre chaque point d'un espace à N dimension et un N-uplet de scalaires.

L'exemple le plus connu est les coordonnées cartésiennes que l'on a vu dans toute la leçon mais il en existe plusieurs en mathématiques.

Exemples 22.38.

a. Les **coordonnées polaires** décrivent la position d'un point $P(r, \varphi)$ du plan par sa distance r par rapport à l'origine et l'angle φ entre l'axe des abscisses et le segment $[OP]$

b. Les **coordonnées cylindriques** décrivent la position d'un point $P(\rho, \phi, z)$ de l'espace par le rayon du cylindre $\rho \geq 0$, la distance entre le point et l'axe des z.

c. Les **coordonnées sphériques** décrivent la position d'un point $P(r, \vartheta, \varphi)$ à l'aide de $r = OP$, ϑ l'angle entre l'axe polaire (axe des z positifs) et $[OP]$ et φ l'angle entre l'axe des x positifs et la projection de $[OP]$ sur le plan (x, y).

Application : calcul d'intégrales

5 Coordonnées géographiques

Pour se repérer sur la Planète de Terre, les scientifiques ont inventés un système de coordonnées :

– la latitude : une valeur angulaire, expression du positionnement nord-sud d'un point sur Terre.

– la longitude : une valeur angulaire, expression du positionnement est-ouest d'un point sur Terre.

– le niveau de la mer.

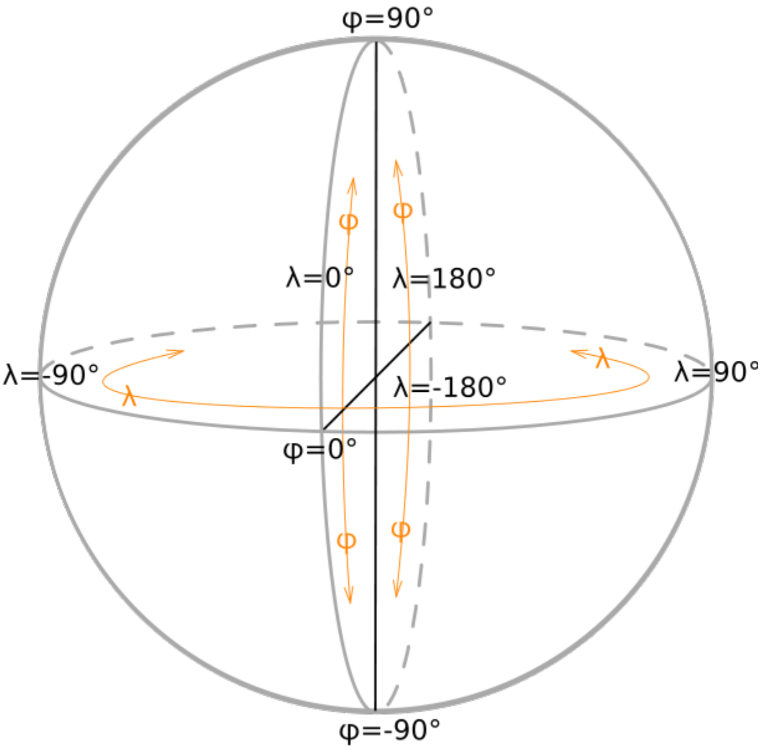
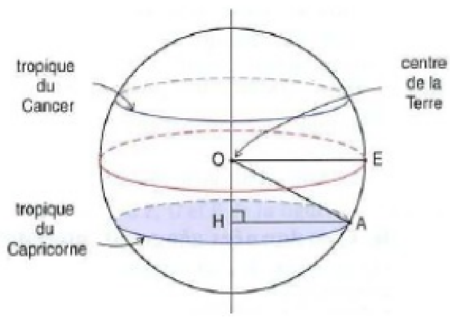


FIGURE 22.1 – Latitude, longitude

Pour finir cette section, voici un exercice concernant les coordonnés géographiques :



1. On suppose que la Terre est une sphère de rayon 6378 km. Un tropique est un parallèle situé dans un plan dont la distance au centre de la Terre est $OH = 2543\,km$. Calculer la longueur d'un tropique.

2. Dans la pratique, on donne la latitude du point A au lieu de la distance OH. Cette latitude $\widehat{EOA} = 23{,}5\,°$.

a. Démontrer que $\widehat{OAH}$ et $\widehat{EOA}$ ont la même mesure.

b. On considère le triangle OHA. Calculer la longueur du tropique du Capricorne.

3. Un cercle polaire est un parallèle de latitude 66,5°.

a. Calculer la longueur d'un cercle polaire.

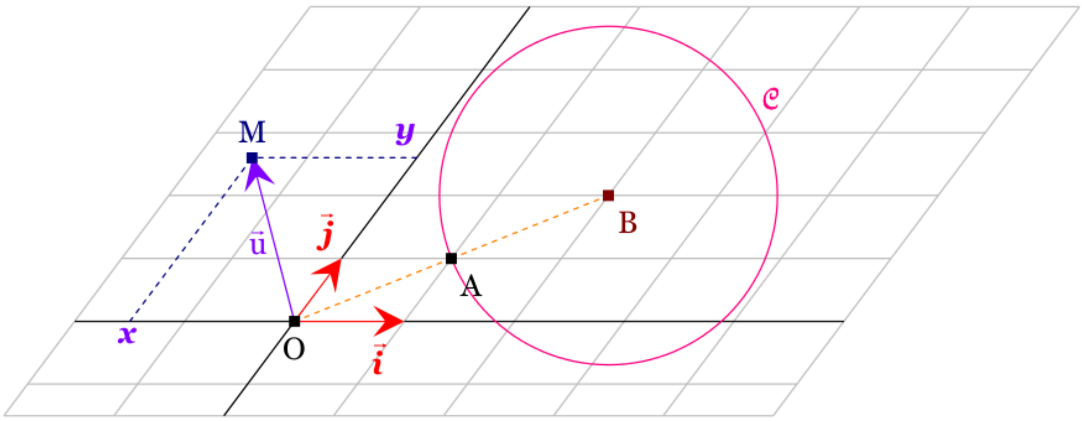
b. Vérifier que le carré de la longueur de l'Équateur est la somme des carrés des longueurs d'un cercle polaire et d'un tropique.

6 Et sans repère orthonormé...

Que se passe-t-il pour les équations cartésiennes de droite et de cercle si le repère n'est pas orthonormé ?

Développement

On se place dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ non orthonormé dont la norme du vecteur $\vec{\imath}$ est 7 et celle du vecteur $\vec{\jmath}$ est de 5. La distance OA est égale à $\sqrt{116} = 2\sqrt{29}$.



6.1 Norme de vecteurs

Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $\binom{x}{y}$, on a alors : $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$. On développe le carré scalaire :

$$\begin{aligned}\|\vec{u}\|^2 &= \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \langle (x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}), (x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}) \rangle \\ &= \|x\vec{\imath}\|^2 + 2\langle x\vec{\imath}, y\vec{\jmath} \rangle + \|y\vec{\jmath}\|^2 = x^2\|\vec{\imath}\|^2 + 2xy\langle \vec{\imath}, \vec{\jmath} \rangle + y^2\|\vec{\jmath}\|^2 .\end{aligned}$$

Calculons $\|\vec{\imath}\|^2 = 7^2 = 49$, $\|\vec{\jmath}\|^2 = 5^2 = 25$ et :

$$\begin{aligned}\langle \vec{\imath}, \vec{\jmath} \rangle &= \frac{1}{2}\left(\|\vec{\imath} + \vec{\jmath}\|^2 - \|\vec{\imath}\|^2 - \|\vec{\jmath}\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}[\sqrt{116}^2 - 7^2 - 5^2] = \frac{1}{2}[116 - 49 - 25] = \frac{1}{2} \times 42 = 21.\end{aligned}$$

On a ainsi :

$$\|\vec{u}\|^2 = 49x^2 + 42xy + 25y^2$$

et en prenant la racine carrée :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{49x^2 + 42xy + 25y^2}.$$

La distance AB peut être calculé grâce au résultat précédent. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ ayant pour coordonnées $(1, 1)$, on peut écrire :

$$AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{49 \times 1^2 + 42 \times 1 + 1 + 25 \times 1} = \sqrt{49 + 42 + 25} = \sqrt{116}.$$

6.2 Équation du cercle $\mathcal{C}$

On cherche une équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre $B(2; 2)$ et passant par $A(1; 1)$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Un point M appartient au cercle $\mathcal{C}$ si la distance BM est égale à AB.

$$\begin{aligned}M(x, y) \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow \sqrt{49(x-2)^2 + 42(x-2)(y-2) + 25(y-2)^2} = \sqrt{116} \\ &\Leftrightarrow 49(x-2)^2 + 42(x-2)(y-2) + 25(y-2)^2 = 116 \\ &\Leftrightarrow 49[x^2 - 4x + 4] + 42[xy - 2x - 2y + 4] + 25[y^2 - 4y + 4] = 116 \\ &\Leftrightarrow 49x^2 - 196x + 196 + 42xy - 84x - 84y + 168 + 25y^2 - 100y + 100 = 116 \\ &\Leftrightarrow 49x^2 + 25y^2 + 42xy - 280x - 184y + 348 = 0.\end{aligned}$$

Conclusion : une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ est :

$$49x^2 + 25y^2 + 42xy - 280x - 184y + 348 = 0.$$

On place le point D de coordonnées $(3;3)$. Vérifions qu'il appartient au cercle $\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned}49x_D^2 + 25y_D^2 + 42x_Dy_D - 280x_D - 184y_D + 348 &= 49 \times 3^2 + 25 \times 3^2 + 42 \times 3 \times 3 - 280 \times 3 - 184 \times 3 + 348 \\ &= 441 + 225 + 378 - 840 - 552 + 348 = 1392 - 1392 = 0.\end{aligned}$$

6 3 Produit scalaire

On considère deux vecteurs $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On a donc les relations vectorielles suivantes :

$$\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \quad \text{et} \quad \vec{v} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}.$$

On peut ainsi calculer le produit scalaire $\langle\vec{u}, \vec{v}\rangle$.

$$\langle\vec{u}, \vec{v}\rangle = \langle(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}), (x\vec{\imath} + y\vec{\jmath})\rangle = 49xx' + 21xy' + 21x'y + 25yy'.$$

6 4 Conclusion finale

Théorème 22.39

Soit un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ quelconque. Notons :

$$a = \|\vec{\imath}\|^2, \quad b = \langle\vec{\imath}, \vec{\jmath}\rangle \quad \text{et} \quad c = \|\vec{\jmath}\|^2.$$

a. L'expression de la norme du vecteur $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$ est :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{ax^2 + 2bxy + cy^2}$$

b. L'expression du produit scalaire des vecteurs $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ est :

$$\langle\vec{u}, \vec{v}\rangle = axx' + b(xy' + yx') + cyy'.$$

c. Toute équation cartésienne d'un cercle est de la forme :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + \ldots x + \ldots y + \ldots = 0.$$

On retrouve les résultats précédents pour des répères orthonormés. En effet, quand un repère est orthonormé, $a = c = 1$ et $b = 0$.

LEÇON

23

Résolution de problèmes à l'aide de matrices

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 10 \\ 5 & 0 & 8 & 8 \\ 9 & 2 & 7 & 12 \\ 4 & 11 & 14 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 10 \\ 4 & 11 & 14 & 1 \\ 9 & 2 & 7 & 12 \\ 5 & 0 & 8 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 & 14 \\ 7 & 3 & 10 & 18 \\ 13 & 13 & 21 & 13 \\ 13 & 13 & 21 & 13 \\ 6 & 2 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

Niveau : Terminale ES

Prérequis : (définition d'une matrice, opérations sur les matrices), fonction dérivée, intégrales, résolution d'un système d'équations, utilisation d'un logiciel de calcul formel

Développement

Proposition : Mettre cette partie comme prérequis.

1 Matrices et opérations sur les matrices

1.1 Définition d'une matrice

Définition 23.1

Matrice

Soit n et p deux entiers naturels non nuls. On appelle *matrice* réelle à n lignes et p colonnes la donnée d'un tableau rectangulaire à n lignes et p colonnes composé de nombres réelles appelés *coefficients* de la matrice.

Une matrice à n lignes et p colonnes est dite matrice *d'ordre* (n, p) ou de dimension $n \times p$. L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels se note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Exemple 23.2. La matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -4 \\ \sqrt{2} & \frac{2}{3} & \pi \end{pmatrix}$$

a 2 lignes et 3 colonnes donc $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. Le coefficient de la deuxième ligne et de la troisième colonne est $a_{23} = \pi$.

Définition 23.3

Quelques matrices particulières

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle *matrice transposée* de A, notée A^T est la matrice obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A.

Une matrice est dite carrée s'il a même nombre de lignes que de colonnes. L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels se note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exemple 23.4. Soit la matrice :

$$Y = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 2,5 & 9 \\ -4 & 7,2 \end{pmatrix}$$

Y est une matrice de dimension 3×2 : $Y \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$.

Sa matrice transposée est :

$$Y^T = \begin{pmatrix} -3 & 2,5 & -4 \\ 8 & 9 & 7,2 \end{pmatrix}$$

Y^T est une matrice de dimension 2×3 : $Y^T \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

1.2 Égalité de matrices

Définition 23.5

Égalité de matrices

Soit A et B deux matrices. On dit que les matrices A et B sont égales si :

- A et B ont même dimension $n \times p$
- pour tous i, j tels que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$, $a_{ij} = b_{ij}$.

Exercice 23.6. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 3x & 0 \\ 2 & 2y-1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 2y-x & 5 \end{pmatrix}.$$

Déterminer x et y pour que A et B soient deux matrices égales.

Développement

Solution.

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 12 \\ 2 = 2y - x \\ 2y - 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \; y = 3 \end{cases}$$

□

Définition 23.7

Soient A et B deux matrices réelles de même ordre. On appelle *somme de matrices A et B* la matrice notée $A + B$, de même ordre que A et B obtenue en ajoutant les coefficients situés en même position dans A et dans B.

Remarque 23.8. Une matrice A de dimension $n \times p$ est nulle si, pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$, $a_{ij} = 0$.

Définition 23.9

Produit d'une matrice par un réel

Soit A une matrice réelle et soit λ un nombre réel. On appelle *produit de la matrice A par le réel λ* la matrice notée λA, de même ordre que A obtenue en multipliant chaque coefficient de A par le réel λ.

Dans le cas où $\lambda = -1$, la matrice $-A$ est appelée *opposée de A*.

Propriétés 23.10

Soient A, B et C trois matrices de même ordr ; soit k et k' deux nombres réels :

a. $A + B = B + A$

b. $(A + B) + C = A + (B + C)$

c. $k(A + B) = kA + kB$

d. $k(k'A) = k'(kA) = (kk')A$

1 3 Produit de deux matrices

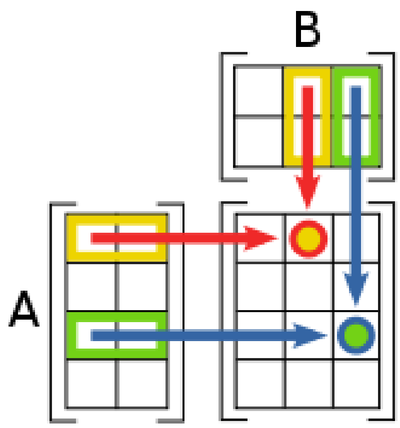
Définition 23.11

Soit A une matrice d'ordre $n \times p$ et B une matrice d'ordre $p \times r$: $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{R})$.

On appelle *produit des matrices A et B* la matrice $C = (c_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq r}$ définie coefficient par coefficient par :

$$c_{ij} = a_{i1} \times b_{1j} + a_{i2} \times b_{2j} + \cdots + a_{ip} \times b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}.$$

La multiplication de deux matrices se fait selon le schéma suivant :



Remarques 23.12.

a. Le produit $A \times B$ n'est défini que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

b. Il peut arriver que le produit $A \times B$ soit réalisable alors que le produit $B \times A$ ne l'est pas (problème de dimensions).
c. Le produit de deux matrices n'est pas commutatif.

Propriétés 23.13

Soient A, B et C trois matrices réelles ; si ls opérations indiquées existent, alors on a les égalités :

a. $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$
b. $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$
c. $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$

1 4 Le problème

On réalise le jeu suivant : on lance 4 fois de suite un dé équilibré. On multiple le résultat du premier lancer par 5, celui du deuxième par 10, celui du troisième par 15 et celui du quatrième par 20. Avec les valeurs obtenues, on retranche la deuxième à la première, on ajoute la troisième et on retranche la quatrième pour finir : on obtient le score pour la partie. Si l'on considère plusieurs joueurs, la personne qui obtient le score le plus élevé sur une série de 4 lancers est déclarée gagnante.

1. On prend une partie de 5 joueurs. Construire la matrice des résultats affichés par le dé pour chacun des joueurs. On placera les résultats de chaque série ordonnée de 4 lancers en colonne, par joueur.
2. Déterminer par un calcul matriciel le résultat de chacun des joueurs. Qui a gagné ?
3. Quel est le score minimal possible à ce jeu ? Le score maximal.

Développement

Solution.

1. On note t_{ij} (pour $1 \leq i \leq 5$ et pour $1 \leq j \leq 4$) le résultat du j^{e} lancer du i^{e} joueur. On aura alors la matrice :

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \\ t_{51} & t_{52} & t_{53} & t_{54} \end{pmatrix}$$

2. Pour obtenir le score de chaque joueur, on multiplie la matrice T par la matrice C de diagonale $(5, 10, 15, 20)$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}.$$

La matrice $T \times C$ sera donc de la forme :

$$P = T \times C = \begin{pmatrix} 5t_{11} & 10t_{12} & 15t_{13} & 20t_{14} \\ 5t_{21} & 10t_{22} & 15t_{23} & 20t_{24} \\ 5t_{31} & 10t_{32} & 15t_{33} & 20t_{34} \\ 5t_{41} & 10t_{42} & 15t_{43} & 20t_{44} \\ 5t_{51} & 10t_{52} & 15t_{53} & 20t_{54} \end{pmatrix}.$$

Ensuite, pour obtenir le score final de chaque joueur, on multiplie la matrice P par la matrice-colonne (vecteur) V :

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ (-1) \\ 1 \\ (-1) \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$P \times V = \begin{pmatrix} 5t_{11} - 10t_{12} + 15t_{13} - 20t_{14} \\ 5t_{21} - 10t_{22} + 15t_{23} - 20t_{24} \\ 5t_{31} - 10t_{32} + 15t_{33} - 20t_{34} \\ 5t_{41} - 10t_{42} + 15t_{43} - 20t_{44} \\ 5t_{51} - 10t_{52} + 15t_{53} - 20t_{54} \end{pmatrix}.$$

3. Pour obtenir le score minimal de ce jeu, il faut maximiser les deuxième et quatrième lancers et minimiser les premier et troisième lancers.

$$s_{\min} = 5 \times 1 - 10 \times 6 + 15 \times 1 - 20 \times 6 = 5 - 60 + 15 - 120 = -160.$$

Pour obtenir le score maximal de ce jeu, il faut minimiser les deuxième et quatrième lancers et maximiser les premier et troisième lancers.

$$s_{\max} = 5 \times 6 - 10 \times 1 + 15 \times 6 - 20 \times 1 = 30 - 10 + 90 - 20 = 90.$$

□

2 Résolution de systèmes d'équations

2.1 Le problème

Un client achète chez un traiteur deux bouchées à la reine au ris de veau et trois oeufs en gelée pour $18,70$ €. Le client suivant prend une bouchée à la reine au ris de veau et deux oefus en gelée pour $10,60$ €.

Déterminer le prix d'une bouchée à la reine au riz de veau et d'un oeuf en gelée.

2.2 La théorie

1. Matrices inversibles

Définition 23.14

Matrice identité

La matrice I_n de dimension $n \times n$ définie de la manière suivante :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

est appelée *matrice d'identité* d'ordre n.

Définition 23.15

Matrice inversible

Soit A une matrice carrée d'ordre n. On dit que la matrice A est *inversible* s'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que :

$$A \times B = I_n.$$

Propriété 23.16

Soit A une matrice carrée d'ordre n. S'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que $A \times B = I_n$, alors B est unique.

B est appelée *l'inverse de la matrice* A et se note A^{-1}.

Développement

Démonstration. Supposons qu'il existe B et C carrées d'ordre n telle que $A \times B = A \times C = I_n$. On a a :

$$\begin{aligned} B &= B \times I_n = B \times (A \times C) \\ &= (B \times A) \times C = I_n \times C = C. \end{aligned}$$

□

2. Résolution de systèmes

Propriété 23.17

Tout système d'équations linéaires peut s'écrire sous forme matricielle.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{p1}x_1 + \cdots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases} \Leftrightarrow AX = B$$

où $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}$ est la matrice du système $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Pour résoudre le sysètme précédent, si la matrice A est inversible, on a :

$$AX = B \Leftrightarrow A^{-1} \times (AX) = A^{-1} \times B.$$

D'après l'associativité du produit matriciel :

$$A^{-1} \times (AX) = A^{-1} \times B \Leftrightarrow (A^{-1} \times A) \times X = A^{-1} \times B.$$

Ainsi :

$$I_n \times X = X = A^{-1} \times B.$$

Et finalement : $X = A^{-1} \times B$. On détermine ainsi aisément x et y à l'aide d'un calcul matriciel.

3. Matrices inversibles 2×2

Propriété 23.18

Admise

Soit $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ une matrice 2×2. La matrice A est inversible si et seulement si $ad - bc = 0$. Si tel est le cas,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

2 3 Solution du problème

Développement

Solution. On cherche :

- x le prix d'une bouchée à la reine
- y le prix d'un œuf en gelée

On doit résoudre le système matriciel suivant :

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18,70 \\ 10,60 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est inversible car $2 \times 2 - 3 \times 1 = 1$ et la matrice A^{-1} s'obtient de la manière suivant :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

On peut donc résoudre le système matriciel :

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B.$$

On effectue le calcul :

$$\begin{aligned} X = A^{-1}B &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 18,70 \\ 10,60 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -18,70 + 2 \times 10,60 \\ 2 \times 18,70 - 3 \times 10,60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,50 \\ 5,60 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

3 Matrice de Leontief

Définition 23.19

On considère n types de productions et ces consommations intermédiaires entre elles.

On appelle *coefficient technique* le rapport entre laconsommation intermédiaire d'un produit par une branche et la production totale de la blanche.

Soit C la matrice des coefficients techniques C (c'est une matrice carrée d'ordre n).

On appelle *matrice de Leontief* la matrice $L = I_2 - C$.

Remarques 23.20.

a. Si L représente la matrice de Léontief d'un secteur d'activité, le terme d'indice (i, j) de la matrice L^{-1} est le montant dont le secteur i doit augmenter sa production pour satisfaire à une augmentation de la demande finale d'une unité de la part du secteur j.

b. Si le terme (i, j) de la matrice L^{-1} est nul, cela signifie que toute augmentation d'une unité de la demande du secteur $n^{\text{o}}\, j$ n'influence pas la production totale du secteur $n^{\text{o}}\, i$.

Exercice 23.21. On considère une économie fermée à deux secteurs dont on donne la matrice C des coefficients techniques,

$$C = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la demande finale correspondant à un niveau de production $P = \left(\begin{smallmatrix} 50 \\ 30 \end{smallmatrix}\right)$.

2. Déterminer à l'aide d'une matrice inverse les niveaux de production nécessaires pour répondre à une demande finale $D = \left(\begin{smallmatrix} 200 \\ 50 \end{smallmatrix}\right)$.

Développement

Démonstration.

1. La demande finale est donné par $LP = D_F$ où L est la matrice de Leontief $L = I_2 - C$. D'où :

$$D_F = (I_2 - C) \times P = \begin{pmatrix} 1 - 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 1 - 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,3 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 \\ 33 \end{pmatrix}.$$

2. On doit résoudre le système matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} 200 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,3 & 0,6 \end{pmatrix} P$$

d'inconnue P. La matrice $C = \left(\begin{smallmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,3 & 0,6 \end{smallmatrix}\right)$ est inversible car $0,8 \times 0,6 - 0,1 \times 0,3 \neq 0$. D'où :

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{16}{9} \end{pmatrix}$$

On peut ainsi déterminer les niveaux de production :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{16}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2300}{9} \\ -\frac{400}{9} \end{pmatrix}$$

□

4 Courbes polynomiales

D'après BAC Pro Aéronautique 2008

Après arrêt d'un moteur turbo propulseur, l'hélice d'un avion continue de tourner librement jusqu'à son arrêt. Son mouvement est un mouvement de rotation uniformément décéléré. Le nombre de tours N effectués en fonction du temps t (en secondes) est donné par $N = f(t) = at^2 + bt$, où a et b sont des réels à déterminer et $t \in [0\,, 72.5]$.

1. Sachant que l'hélice étudiée effectue 250 tours en 20 secondes et 510 tours en une minute, déterminer le système d'équations d'inconnues a et b correspondant à ces données.
2. Résoudre ce système à l'aide d'un calcul matriciel et en déduire l'expression de $f(t)$.
3. On admet que la fréquence de rotation de l'hélice est donnée par la dérivée f' de la fonction f. Déterminer $f'(t)$ pour $t \in [0\,, 72.5]$, puis déterminer le nombre de tours effectués par l'hélice jusqu'à son arrêt.

Développement

Solution.

1. Avec les données, on doit résoudre le système d'équations (d'inconnues a et b) suivant :

$$\begin{cases} 400a + 20b = 250 \\ 3600a + 60b = 510 \end{cases}$$

2. La résolution du système d'équations est équivalente à la résolution du système matriciel suivant :

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 400 & 20 \\ 3600 & 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250 \\ 510 \end{pmatrix}$$

La matrice A est inversible car $400 \times 60 - 3600 \times 20 \neq 0$ et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{800} & \frac{1}{2400} \\ \frac{3}{40} & -\frac{1}{120} \end{pmatrix}.$$

On a alors :

$$X = A^{-1}B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{800} & \frac{1}{2400} \\ \frac{3}{40} & -\frac{1}{120} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 250 \\ 510 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} \\ \frac{29}{2} \end{pmatrix}$$

On en déduit une expression de $f(t)$:

$$f(t) = -\frac{1}{10}t^2 + \frac{29}{2}t.$$

3. La fonction dérivée de f se calcule facilement :

$$f'(t) = -\frac{2}{10}t + \frac{29}{2}, \qquad \text{pour tout } t \in [0, 72.5]$$

La fréquence devient nulle quand

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{10}t + \frac{29}{2} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{290}{4} = 72,5,$$

c'est-à-dire que les hélices s'arrênt à $t = 72,5$. Le nombre de tours d'hélices effectués par l'hélice jusqu'à son arrêt est donnée par :

$$\int_0^{72,5} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{72,5} -\frac{1}{10}t^2 + \frac{29}{2}t\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[-\frac{t^3}{30} + \frac{29t^2}{4}\right]_0^{72,5} = -\frac{72,5^3}{30} + \frac{29 \times 72,5^2}{4} \simeq 50811.$$

Il faut 50811 tours d'hélices pour que l'hélicoptère s'arrête complétement.

□

5 Trigonalisation de matrices

Une matrice carrée d'ordre n est *trigonalisable* s'il existe une matrice carrée P d'ordre n inversible et une matrice T triangulaire d'ordre n telles que $A = PTP^{-1}$.

On considère les matrices A et P ci-dessous.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -6 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On admet que P est inversible.

1. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, calculer $P^{-1}AP$. Quelle est la forme de la matrice obtenue ?
2. Que peut-on déduire pour la matrice A ? Pour la suite, on posera $T = P^{-1}AP$.
3. Exprimer A^2 puis A^3 en fonction de P, T et P^{-1}.
4. Déterminer l'expression de A^n ($n \in \mathbb{N}^*$) en fonction de P, T et P^{-1}.
5. On admet que T^n ($n \in \mathbb{N}^*$) a pour expression

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & 6n & 3n(n-1) \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les coefficients de A^n en fonction de n.
6. Vérifier vos résultats en remplaçant n par 2.

Développement

Solution.

1.

```
A := [[1,1,1],[-6,0,5],[0,1,2]]
                    [[1,1,1],
                     [-6,0,5],
                     [0,1,2]]
P := [[1,1,0],[-1,5,0],[1,1,1]]
                    [[1,1,0],
                     [-1,5,0],
                     [1,1,1]]
inv(P)
                   [[5/6,-1/6,0],
                    [1/6,1/6,0],
                    [-1,0,1]]
inv(P)*A*P
                   [[1,6,0],
                     [0,1,1],
                      [0,0,1]]
```

2. La matrice A est trigonalisable car il existe $T = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ une matrice triangulaire et P une matrice d'ordre 3 telle que :

$$T = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PTP^{-1}.$$

3. On exprime A^2 et A^3 en fonction de P, T et P^{-1} :

$$A^2 = (PTP^{-1})^2 = PTP^{-1}PTP^{-1} = PTTP^{-1} = PT^2P^{-1}.$$

$$A^3 = (PT^2P^{-1})(PTP^{-1}) = PT^3P^{-1}.$$

4. De proche en proche, on obtient :

$$A^n = PT^nP^{-1}.$$

5. Sur Xcas, on obtient :

```
T := [[1,6*n,3*n*(n-1)],[0,1,n],[0,0,1]]
                         [[1,6*n,3*n*(n-1)],
                            [0,1,n],
                             [0,0,1]]
P * T * inv(P)
                 [[(5+6*n+1-(3*n*(n-1)+n)*6)/6,(-1+6*n+1)/6,3*n*(n-1)+n],
                  [(-5-6*n+5-(-3*n*(n-1)+5*n)*6)/6,(1-6*n+5)/6,-3*n*(n-1)+5*n],
                   [(5+6*n+1-(3*n*(n-1)+n+1)*6)/6,(-1+6*n+1)/6,3*n*(n-1)+n+1]]
```

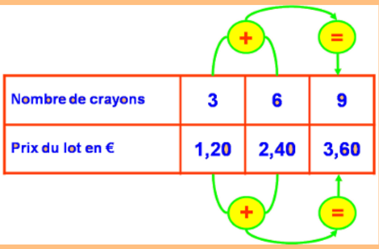
6. Pour $n = 2$,

```
n := 2
                   2
P * T * inv(P)
              [[-5,2,8],
               [-6,-1,4],
                [-6,2,9]]
```

$\square$

LEÇON 24

Proportionnalité et linéarité



Niveau : Troisième
Prérequis : les quatre opérations, repérage, vecteurs

1 Situation de proportionnalité

1.1 Reconnaître une situation de proportionnalité

Définition 24.1

Dire que deux grandeurs sont *proportionnelles* revient à dire que les valeurs de l'une s'obtiennent en multipliant les valeurs de l'autre par un même nombre, appelé *coefficient de proportionnalité*

Exemple 24.2. On achète des pommes à la pesée, à 2 € le kilogramme. Dans le tableau ci-dessous, les prix payés obtenus en multipliant les quantités par le même nombre : 2.

Le prix payé est proportionnel à la quantité de pommes achetées. Ce tableau est appelé tableau de proportionnalité.

Quantité en kg	1	$1,5$	2	$2,3$
Prix payé en €	2	3	4	$4,6$

$\boxed{\times 2}$

Proposition 24.3

On peut également reconnaître un tableau de proportionnalité si les deux lignes d'une même colonne sont obtenues en multipliant par un même nombre les deux lignes d'une autre colonne.

$\boxed{\times \frac{4}{3}}$

Quantité en kg	1	$1,5$	2	$2,3$
Prix payé en €	2	3	4	$4,6$

1.2 Compléter un tableau de proportionnalité : la quatrième proportionnelle

Définition 24.4

Un tableau de proportionnalité étant donné, si l'on connaît trois des nombres de deux colonnes du tableau alors on peut déterminer le quatrième. Ce quatrième nombre est alors appelé quatrième proportionnelle.

Exemple 24.5. Un morceau de tissu de 3 mètres de long est vendu 25 €. Comment calculer le prix de 7 mètres de ce même tissu ?

Développement

Longueur	3 m	7 m
Prix	25 €	x €

On veut savoir tout d'abord quel est le prix au mètre du tissu.

Coefficient de proportionnalité	$\rightarrow$	$\div 3$	$\times 7$
Longueur	3 m	1m	7 m
Prix	25 €	$\frac{25}{3}$ €	x €

Pour 1 mètre de tissu, on paie 3 fois moins cher qu'avec 3 mètres, donc on paie $\frac{25}{3}$ soit environ $8,33$ €.
Pour 7 mètres de tissu, on paie 7 fois plus cher qu'avec 1 mètre, donc on paie $\frac{25}{3} \times 7 = \frac{175}{3}$ € soit environ $58,33$ €.

Développement

On développe deux autres méthodes pour parvenir à nos fins.

1. 7 mètres est égal à $\frac{7}{3}$ de 3 mètres. Le prix pour 7 mètres est donc égal aux $\frac{7}{3}$ du prix pour 3 mètres.

Coefficient de proportionnalité	$\rightarrow$	$\times\frac{7}{3}$
Longueur	3 m	7 m
Prix	25 €	x €

$\frac{7}{3} \times 25 = \frac{175}{3}$. Donc le prix de 7 mètres de tissu est égal à environ $58,33$ €.

2.

Longueur	3 m	7 m
Prix	25 €	? €

$\times\frac{25}{3}$

25 est égal à $\frac{25}{3}$ de 3.

$$\frac{25}{3} \times 7 = \frac{175}{3}.$$

Or $\frac{175}{3} \approx 58,33$ donc le prix de 7 mètres de tissu est égal à environ $58,33$ €.

Conséquence 24.6

Le produit en croix

Nb. de baguettes	5	x
Prix en €	$4,25$	$2,55$

Le coefficient de proportionnalité est égal à $\frac{4,25}{5}$. Mais il est aussi égal à $\frac{2,55}{x}$. Donc :

$$\frac{4,25}{5} = \frac{2,55}{x}$$
$$4,25 \times x = 5 \times 2,55$$
$$x = \frac{5 \times 2,55}{4,25} = 3.$$

1 3 Exemples de situations de proportionnalité

1. Les pourcentages

Définition 24.7

Un *pourcentage* traduit une situation de proportionnalité, il est égal au coefficient de proportionnalité de la situation dont le dénominateur vaut 100.

Exemple 24.8. Une usine fabrique du chocolat noir. Leurs tablettes de 250 g contiennent 180 g de cacao. Quel est le pourcentage de cacao dans la tablette ?

Développement

Chocolat en g	250	100
Cacao en g	180	x

$\times\frac{180}{250}$

$$\frac{180}{250} = \frac{x}{100}$$

donc $x = 72$. Dans une tablette de chocolat noir, il y a donc 72 g de cacao sur 100 g de chocolat donc il y a 72% de cacao dans le chocolat noir.

---

2. Les échelles

Un élève souhaite dessiner son bureau sur lequel il travaill, mais il souhaite respecter les proportions. Les dimensions réelles du bureau doivent donc être proportionnelles aux dimensions du bureau dessiné.

Proposition 24.9

Le coefficient de proportionnalité par lequel il faut multiplier les dimensions réelles pour obtenir les dimensions mesurées sur le plan, exprmées dans la même unité, est appelée *échelle du plan*.

Notation : Si 1 cm sur le plan représente 300 m en réalité alors l'échelle est $1 : 30000$.

3. Théorème de Thalès

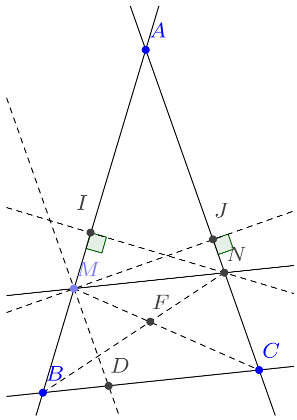
Théorème 24.10

Soit deux droites d et d' sécantes en un point A ; B et M deux points de d distinct de A et C et N deux points de d' distinct de A (A, B et M alignés dans le même ordre que A, C et N). Alors :

$$(BC)//(MN) \Leftrightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

Développement

Démonstration.



On considère les triangles AMN et BNA. On a : $2\mathcal{A}(AMN) = AM \cdot NI$ et $2\mathcal{A}(BNA) = AB \cdot IN$ donc on a :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{\mathcal{A}(AMN)}{\mathcal{A}(BNA)}.$$

De plus, $2\mathcal{A}(AMN) = AN \cdot MJ$ et $2\mathcal{A}(CMA) = AC \cdot MJ$ donc

$$\frac{AN}{AC} = \frac{\mathcal{A}(AMN)}{\mathcal{A}(CMA)}.$$

Maintenant, montrons que $\mathcal{A}(BNA) = \mathcal{A}(CMA)$. Ceci revient à montrer que $\mathcal{A}(MFB) = \mathcal{A}(CFN)$: (MN) et (BC) sont parallèles donc on en déduire que $\mathcal{A}(BNM) = \mathcal{A}(CMN)$: même base et même hauteur. Or :

$$\mathcal{A}(BNM) = \mathcal{A}(BMF) + \mathcal{A}(FMN) \quad \text{et} \quad \mathcal{A}(CMN) = \mathcal{A}(CFN) + \mathcal{A}(FMN),$$

ce qui démontre l'égalité.
Ainsi, comme $\mathcal{A}(BNA) = \mathcal{A}(CMA)$, on a alors :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{\mathcal{A}(AMN)}{\mathcal{A}(BNA)} = \frac{\mathcal{A}(AMN)}{\mathcal{A}(CMA)} = \frac{AN}{AC}.$$

Montrons maintenant la deuxième égalité en considérant le parallélogramme $MNCD$: d'après ce que l'on vient de démontrer, en se plaçant dans le triangle ABC, on a $\frac{BM}{BA} = \frac{BD}{BC}$, d'où :

$$\frac{BA - MA}{BA} = \frac{BC - DC}{BC} \Leftrightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{DC}{BC} = \frac{MN}{BC}$$

car $MNCD$ est un parallélogramme. On a ainsi démontré l'implication directe.
Réciproque : elle utilise le sens direct.
Soit le point E de d tel que (NE) est parallèle à (BC), alors A, E et B sont alignés dans le même ordre que A, N et C et donc on peut appliquer le sens direct :

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$$

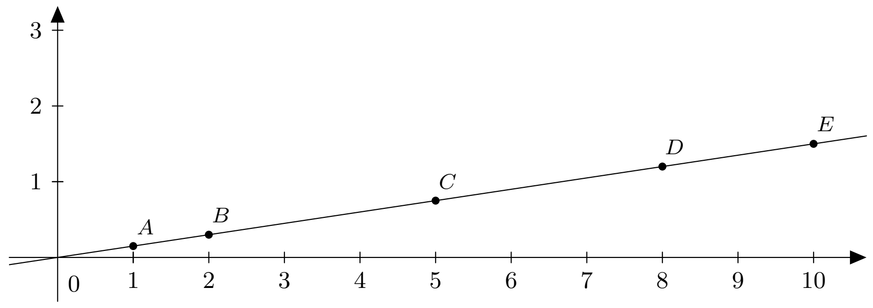
d'après l'hypothèse. Donc : $\frac{AE}{AB} = \frac{AM}{AB}$ d'où $AE = AM$, les points étant tous alignés dans le même ordre, il vient que $E = M$ donc les droites (MN) et (BC) sont parallèles. □

2 Représentation graphique

Exemple 24.11.

Nombre de SMS	1	2	5	8	10
Prix payé en €	$0,15$	$0,30$	$0,75$	$1,20$	$1,50$

Le graphique suivant représente le prix payé en fonction du nombre de SMS envoyé :



Propriété 24.12

Deux grandeurs sont proportionnelles lorsque les points de la représentation graphique des valeurs d'une grandeur en fonction des valeurs de l'autre grandeur sont alignés sur une droite passant par l'origine du repère.

3 Proportionnalité et fonctions linéaires

Exemple 24.13. Reprenons l'exemples des SMS.

Nombre de SMS	1	2	5	8	10	$\searrow$	
Prix payé en €	$0,15$	$0,30$	$0,75$	$1,20$	$1,50$	$\nearrow$	$\boxed{\times 0,15}$

Le coefficient de proportionnalité vaut $0,15$ donc si on envoie x SMS, le prix à payer $f(x)$ en fonction du nombre x de SMS envoyés sera de $f(x) = 0,15 \times x$.

Définition 24.14

On se donne un réel a. Le processus qui, à un nombre x, fait correspondre le nombre ax est appelé *fonction linéaire* de coefficient directeur a.

Si on appelle cette fonction f, on note alors $f : x \mapsto ax$.

Le nombre $f(x) = ax$ est l'image de x par la fonction f et le nombre x est l'antécédent de $f(x)$ par la fonction f.

Propriété 24.15

La représentation graphique d'une fonction linéaire f de coefficient directeur a est une droite passant par l'origine du repère et par le point $(1, a)$.

Une équation de cette droite est $y = f(x)$.

Réciproquement, toute droite passant par l'origine est la représentation graphique d'une fonction linéaire.

Développement

Démonstration. On considère le cas où $a > 0$.

$f(0) = 0$ et $f(1) = a$ donc la courbe passe bien par ces deux points. Soit x un réel non nul, considérons alors les points $O(0; 0)$, $A(1; a)$, $A'(1; 0)$, $B(x, y)$, $B'(x; 0)$ sont tels que B appartienne à la droite passant par O et par A.

Les droites (AA') et (BB') sont parallèles donc on peut appliquer le théorème de Thalès dans le triangle OBB'. On a : $\frac{OA'}{OB'} = \frac{OA}{OB}$. Les triangles OAA' et OBB' sont rectangles donc on peut appliquer Pythagore pour déterminer les longueurs OA et OB :

$$OB^2 = OB'^2 + BB'^2 = x^2 + y^2$$
$$OA^2 = OA'^2 + AA'^2 = 1 + a^2.$$

D'où :

$$\frac{OA'}{OB'} = \frac{1}{x} = \frac{OA}{OB} = \sqrt{\frac{1+a^2}{x^2+y^2}} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{1+a^2}{x^2+y^2} \Leftrightarrow x^2(1+a^2) = x^2+y^2 \Leftrightarrow y^2 = x^2a^2 \Leftrightarrow y = ax$$

car si $y = -ax$, les points O, A et B ne serient pas alignés. □

Propriété 24.16

Si deux grandeurs sont proportionnelles avec un coefficient de proportionnalité a, alors l'une est fonction linéaire de l'autre et le coefficient de proportionnalité a de la situation de proportionnalité est égal au coefficient directeur de la fonction linéaire associée.

Réciproquement à toute fonction linéaire correspond une situation de proportionnalité.

4 Proportionnalité et fonctions affines

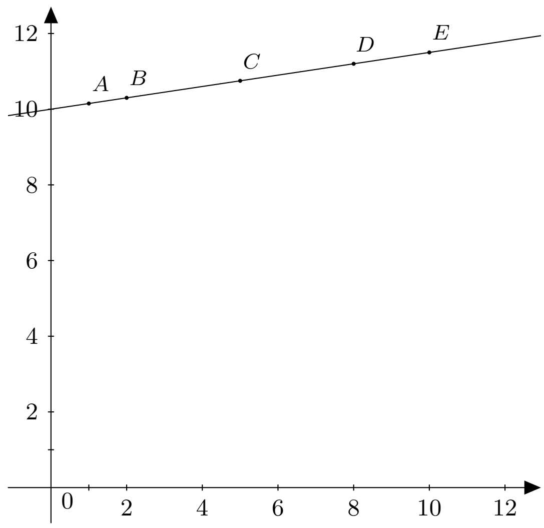
Exemple 24.17. Un abonnement de téléphone coûte 10 € et avec cet abonnement, on peut payer 100 SMS.

Si on envoie plus de 100 SMS, le coût du SMS supplémentaire est de $0,15$ €.

Nb de SMS supplémentaires	1	2	5	8	10
Prix payé en €	$10,15$	$10,30$	$10,75$	$11,20$	$11,50$

On ne se trouve donc plus dans une situation de proportionnalité car pour 1 SMS supplémentaire, on paie $10,15$ € et pour 2 SMS, on paie $10,30$ €. Or, $10,30 \neq 2 \times 10,15$.

On a la représentation graphique suivante :



On remarque cependant que les points sont toujours alignés sur une droite ne passant pas par l'origine.

Exprimons le prix payé $f(x)$ en fonction du nombre x de SMS supplémentaires envoyés : l'abonement coûte 10 euros auquel on doit rajouter le nombre de SMS supplémentaires envoyé multiplié par le prix d'un SMS :

$$f(x) = 0,15 \times x + 10.$$

Définition 24.18

Soient a et b deux réels. Le processus qui, à un nombre x, fait correspondre le nombre $ax+b$ est appelé fonction affine.

Si on appelle cette fonction f, on note alors $f : x \mapsto ax+b$.

Le nombre $f(x) = ax+b$ est l'image de x par la fonction f et le nombre x est l'antécédent de $f(x)$ par la fonction f.

Propriété 24.19

L'image de 0 par f est b, b est alors appelé *ordonnée à l'origine* de la fonction affine f.
a est le *coefficient directeur* de la fonction affine f.

Propriété 24.20

La représentation graphique d'une fonction affine $f : x \mapsto ax+b$ est une droite D passant par le point $(0,b)$ et parallèle à la représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto ax$.

Une équation de D est $y = ax+b$.

Réciproquement, toute droite du plan est la représentation graphique d'une fonction affine.

Développement

Démonstration. Pour montrer que la courbe représentation d'une fonction affine est une droite, on fait la même preuve que pour les fonction linéaires non pas en conséidérant la droite $y=0$ mais la droite parallèle à celle-ci et d'équation $y=b$.

On montre maintenant le parallélisme entre une droite représentation une fonction linéaire et une droite représentant une fonction affine et non linéaire. Si les droites n'étaient pas parallèles, il existerait un point A appartenant à d_f et à d_g donc ses coordonnées seraient (x,ax) et $(x,ax+b)$ donc $b=0$ impossible. Donc les droites sont parallèles. □

Propriété 24.21

Soit $f : x \mapsto ax+b$ une fonction affine. Il y a proportionnalité entre les accroissements de $f(x)$ et les accroissements de x.

Développement

Démonstration.

$$f(x) - f(y) = ax + b - (ay+b) = a(x-y).$$

□

Exemple 24.22. Si on reprend l'exemple des SMS, on a $f(x) = 1,15 \times x + 10$ et on a le tableau suivant :

Nombre de SMS supplémentaire x	1	2	5	8	10
Prix payé en €	$10,15$	$10,30$	$10,75$	$11,20$	$11,50$

À partir de ce tableau, on peut remplir celui-ci :

Acc. de x	$2-1=1$	$5-2=3$	$10-8=2$	$\searrow$
Acc. de $f(x)$	$10,3-10,15=0,15$	$10,75-10,3=0,45$	$11,5-11,2=0,3$	$\nearrow$
		$\boxed{\times 0,15}$		

On a alors le coefficient de proportionnalité qui est égal à a.

5 Applications

5 1 Application 1

Le PIB d'un payé est passé de 6700 à 7500 milliards de dollars U.S., puis a augmenté de 8%, puis est passé de l'indice 100 à l'indice 103, puis a augmenté de 457 milliards de dollars.

Calculer chacune de ces évolutions par un coefficient multiplication, et calculer le PIB final de ce pays.

En déduire le pourcentage global d'évolution.

5 2 Application 2 : construction à la règle et au compas

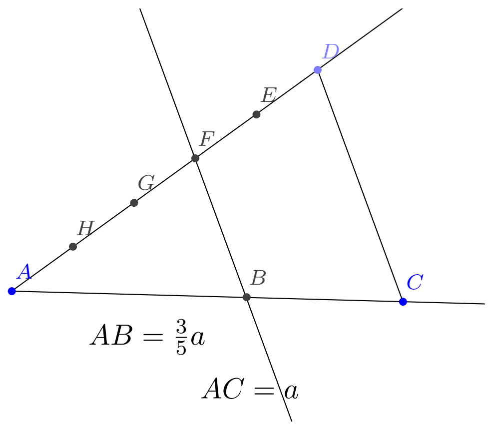
1. Étant donné une longueur a, construire $\frac{3}{5}a$.

2. Étant donné trois longueurs a, b et c, construire la longueur d telle que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

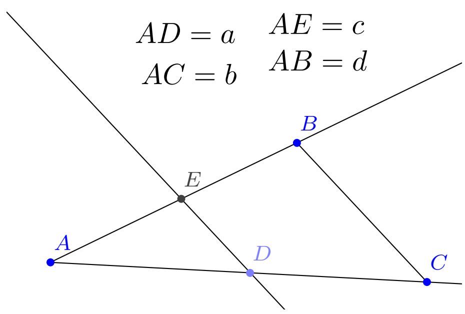
3. Étant donné deux longueurs a et b, construire la longueur c telle que $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$.

Développement

1.



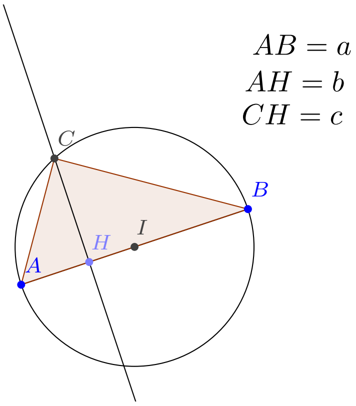
2.



3. Soit ABC un triangle quelconque et soit H le point d'intersection de la hauteur issue de A avec (BC), alors on a $2\mathcal{A}(ABC) = AB \cdot AC = BC \cdot AH$, d'où :

$$\begin{aligned}
AB \cdot BC = BC \cdot AH &\Leftrightarrow AB^2 \cdot AC^2 = BC^2 \cdot AH^2 \\
&\Leftrightarrow (BH^2 + AH^2)(HC^2 + AH^2) = (BH + CH)^2 \cdot AH^2 \\
&\Leftrightarrow \cdot \\
&\Leftrightarrow BH^2 \cdot HC^2 + AH^4 = 2AH^2 \cdot BH \cdot CH \\
&\Leftrightarrow BH^2 \cdot HC^2 + AH^4 - 2AH^2 \cdot BH \cdot CH = 0 \\
&\Leftrightarrow (BH \cdot CH - AH^2)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow BH \cdot CH = AH^2.
\end{aligned}$$

Or si $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$ alors $ab = c^2$. Supposons $a > b$, il suffit donc de construire un segment $[AB]$ de longueur a, un point $H \in [AB]$ tel que $AH = b$. Ensuite, on trace le cercle de diamètre $[AB]$ et de tracer laa droite perpendiculaire à (AB) passant par H pour créer un point C sur le cercle tel que ABC rectangle en C, la longueur CH sera alors égal à c.



5 3 Application 3 : Agrandissement, réduction

Propriété 24.23 Lors d'un agrandissement ou d'une réduction de rapport k, les longueurs sont multipliées par k, les aires par k^2, les volumes par k^3.

Exemple 24.24. Des ingénieurs ont construit une maquette au $1 : 5000$ d'un bassin de retenue. La maquette mesure $1,60$ m de long et contient 5 L d'eau. La surface du lac artificiel est 80 dm^2. Quelle sera, en km, la longueur du futur lac artificiel ? Quelle sera en km^2 sa surface ? Quel sera, en million de m^3, le volume d'eau contenu dans le lac ?

Définition 24.25 On se place dans le plan muni du repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit H et M deux points du plan et k un réel non nul. La transformation qui envoie le point M sur le point M' tel que $\overrightarrow{HM'} = k\overrightarrow{HM}$ est appelée homothétie de centre H et de rapport k.

5 4 Application 4 : π

Définition 24.26 On définit le nombre π comme étant le rapport du périmètre de tout cercle divisé par son diamètre.

LEÇON

25

Pourcentages

%

Niveau : Tous niveaux

Prérequis : Proportionnalité, fonction affine, fonction linéaire, tableau de proportionnalité, trigonométrie

1 Introduction du pourcentage au collège

1.1 Une définition et des exemples

Définition 25.1

Pourcentage
Un *pourcentage* est un rapport de proportionnalité ramené à 100. on peut l'écrire sous la forme d'une fraction décimale dont le dénominateur est 100.

Exemple 25.2. Si, dans une classe de 25 élèves, 40% sont des garçons, combient représentent-ils ?
On peut dresser un *tableau de proportionnalité* suivant :

Pourcentage	100%	40%
Élèves	25	x

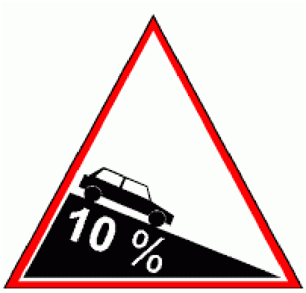
et on effectue le calcul pour trouver la valeur de x :

$$x = 25 \times \frac{40}{100} = 10.$$

Il y a donc 10 garçons dans la classe.

Remarque 25.3. L'utilisation d'un tableau de proportionnalité (et des fameux produits en croix) est une méthode qui permet à coup sûr de résoudre les problèmes posés.

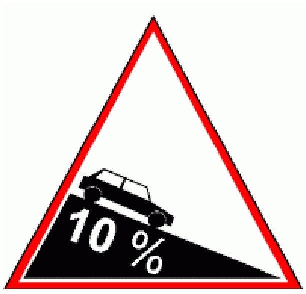
Exemple 25.4.



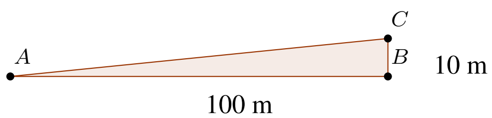
Sur les routes de montage, on rencontre parfois ce panneau.
Que représentent-ils ? Quel est l'angle d'une telle pente.

Développement

Démonstration.



1. Le panneau de signalisation suivant signifie que la pente descendue est à 10%, autrement dit, si la voiture parcourt 100 mètres, elle descend d'une altitude de 10 mètres.
2. Voici une petite figure :



La tangente de l'angle $\widehat{BAC}$ est donnée par :

$$\tan(\widehat{BAC}) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}.$$

D'où :

$$\widehat{BAC} = \arctan(1/10) \approx 5,7°.$$

□

1 2 Interprétation des pourcentages

Une chaîne de télévision a relevé l'Audimat (taux d'écoute d'une émission) pour la journée du 23 décembre à 20 h 50.

42% des téléspectateurs ont regardé Soft Lory. Ce qui revient à dire qu'en moyenne sur 100 téléspectateurs, 42 ont regardé cette émission, ou encore :

– sur 50 téléspectateurs, 21 ont regardé Soft Lory ;
– sur 200 téléspectateurs, 84 ont regardé Soft Lory ;
– sur 1000 téléspectateurs, 420 ont regardé Soft Lory.

Nombre total de téléspé.	100	50	200	1000
Nmbre de téléspé. pour Soft Lory	42	21	84	420

Remarque 25.5. Dans le cas où le dénominateur est cent, le coefficient de proportionnalité est appelé pourcentage.

1 3 Appliquer un pourcentage

Ce jours-là, à Rians, on comptait 11250 téléspectateurs. Dans cette ville, à combien peux-t-on estimer le nombre de personnes ayant regardé Soft Lory ?

Nombre total de téléspé.	100	11250
Nmbre de téléspé. pour Soft Lory	42	x

$$\frac{42}{100} \times 11250 = 4725$$

On peut donc estimer à 4725 le nombre de Riannais ayant regardé Soft Lory.

Propriété 25.6

Pour prendre les $p\%$ d'une quantité a, on effectue le calcul $a \times \frac{p}{100}$.

1 4 Calculer un pourcentage

La population totale de Rians est de 17067 habitants. Quel est le pourcentage de Riannais ayant regardé la télévision le 23 décembre 2001 ?

Population totale	100	17067
Nombre total de téléspé.	x	11250

Pour 17067 habitants, 11250 ont regardé la télévision. Pour 100 habitants, combien ont regardé la télévision ?

$$100 \times \frac{11250}{17067} = 66\%$$

Donc environ 66% des Riannais ont regardé la télévision.

Propriété 25.7

Pour trouver le poucentage que a représente par rapport à b, on effectue le calcul :

$$\frac{a}{b} \times 100.$$

1 5 Retrouver une quantité initiale

Un autre jour, 10584 habitants ont regardé l'émission, soit 5% de pluq que la veille. Combien de personnes avaient regardé la télévision, la veille ?

Si x représente le nombre de personnes qui ont regadé l'émission la veille, alors $x + \frac{5}{100}x$ ont regardé l'émission.

$x + \frac{5}{100}x$ correspond à 10584 habitants, soit

$$x + 0,05x = 10584.$$

En résolvant l'équation, on trouve $x = 10080$. Le nombre d'habitants ayant regardé l'émission est 10080.

2 Des pourcentages en 1reES

2 1 Expression en pourcentage d'une augmentation ou d'une diminution

Théorème 25.8

a. Augmenter une grandeur de $t\%$ équivaut à multiplier sa valeur initiale par $1 + \frac{t}{100}$.

b. Diminuer une grandeur de $t\%$ équivaut à multiplier sa valeur initiale par $1 - \frac{t}{100}$.

Développement

Démonstration. Si A_1 désigne la valeur initiale et A_2 la valeur finale de cette gradeur.

a.

$$A_2 = A_1 + \frac{t}{100}A_1 = A_1\left(1 + \frac{t}{100}\right).$$

b.

$$A_2 = A_1 - \frac{t}{100}A_1 = A_1\left(1 - \frac{t}{100}\right).$$

□

Exemples 25.9.

a. Augmenter de 50%, c'est multiplier par $1 + \frac{50}{100}$, c'est-à-dire $1,5$.

b. Diminuer de 75%, c'est multiplier par $1 - \frac{75}{100}$, c'est-à-dire $0,25$.

2 2 Augmentations et diminutions successives

Théorème 25.10

t et t' désignent deux nombres positifs (augmentations) ou négatifs (diminutions).
Faire évoluer une grandeur de $t\%$ puis de $t'\%$ équivaut à multiplier sa valeur initiale par :

$$\left(1 + \frac{t}{100}\right) \times \left(1 + \frac{t'}{100}\right).$$

Développement

Démonstration. Notons A_1 la valeur initiale, A_2 la valeur après application de l'augmentation (ou la diminution) de $t\%$ et A_3 la valeur finale de cette grandeur.

$$A_2 = A_1\left(1 + \frac{t}{100}\right) \quad \text{et} \quad A_3 = A_2\left(1 + \frac{t'}{100}\right)$$

Soit :

$$A_3 = A_1\left(1 + \frac{t}{100}\right)\left(1 + \frac{t'}{100}\right).$$

□

Exemple 25.11. Le litre de super sans plomb coûte $1,12$ €. Il subit deux augmentations succesivves de 5% et de 2%. Pour obtenir son nouveau prix P, on calcule :

$$P = 1,12\left(1+\frac{5}{100}\right)\left(1+\frac{2}{100}\right) = 1,12 \times 1,05 \times 1,02 = 1,19952$$

soit $P \approx 1,20$ €.

Exercice 25.12. À la bourse de Paris, l'action Renault a augmenté de $1,45\%$ le 10 juin 2000. Sachant que son évolution sur les deux jours du 10 juin 2000 et du 11 juin 2000 est une baisse de $0,50\%$, déterminer son évolution le 11 juin 2000.

Développement

Solution. On cherche t tel que :

$$\left(1+\frac{1,45}{100}\right)\left(1+\frac{t}{100}\right) = 1 - \frac{0,5}{100}$$

c'est-à-dire

$$1,0145 \times \left(1+\frac{t}{100}\right) = 0,995$$

$$\left(1+\frac{t}{100}\right) = \frac{0,995}{1,0145}$$

d'où :

$$t = 100 \times \left(\frac{0,995}{1,0145} - 1\right).$$

Donc $t = -1,92$ et l'action Renault a baissé d'environ $1,92\%$ le 11 juin 2000. □

Remarque 25.13. n augmentations de $p\%$ n'est pas équivalent à une augmentation de $np\%$.

2 3 Variation d'un pourcentage

Un pourcentage est exprimé par un rapport de dénominateur 100. Alors il permet de communiquer, de comparer des quantités, ou des évolutions aisément. Mais il ne faut pas oublier qu'l résulte le plus souvent du calcul d'un rapport $\frac{x}{y}$ ($x > 0$ et $y > 0$) où y n'égal pas égal à 100.

La variation de ce rapport $\frac{x}{y}$ peut être due à la variation de x, *mais aussi à la variation de* y.

Exemple 25.14. Il y a 12 filles dans une classe de 25 élèves ; le pourcentage de fille est donc de 48% (car $\frac{12}{25} = 0,48$). Dans le courant de l'année ce pourcentage passe de 48% à 60%. Cette augmentation est due :

– à une augmentation du numérateur : 3 filles sont arrivés dans la classe ; on passe donc de $\frac{12}{25}$ à $\frac{15}{25}$;
– à une deminution du dénominateur : 5 garçons sont partis ; on passe donc de $\frac{12}{25}$ à $\frac{12}{20}$.

2 4 Formulation des variations en termes d'indices

Définition 25.15

Dire que $I_{k/0}$ est l'indice à la date t_k, en prenant 100 pour base à la date t_0, signifie que $I_{k/0}$ est à la quatrième proportionnelle du tableau ci-dessous :

date	t_0	t_k
valeur	A_0	A_k
indice	100	$I_{k/0}$

c'est-à-dire que :

$$I_{k/0} = 100 \times \frac{A_k}{A_0}.$$

Théorème 25.16

Avec les notations de la définition ci-dessus, le pourcentage d'évolution de A_0 à A_k est $(I_{K/0} - 100)\%$.

Développement

Démonstration. $A_k = \frac{A_0 \times I_{k/0}}{100}$ donc $\frac{A_0 \times I_{k/0}}{100} = A_0\left(1 + \frac{t}{100}\right)$ et $t = I_{k/0} - 100$. □

Exemple 25.17. Prenons 100 pour base l'année 0. Alors

$$I_{2/0} = \frac{0,63}{0,53} \times 100$$

soit $I_{2/0} \approx 119$.

année	0	1	2
prix de la baguette (en €)	$0,53$	$0,56$	$0,63$

Le prix de la baguette a augmenté de 19% entre l'année 0 et l'année 2.

2 5 Utiliser un indice pour évaluer des pourcentages d'évolution

Exercice 25.18. Le tableau ci-dessous donne les montants, en milliards d'euros, des cotisations sociales versées par les non-salariées en France, de 1994 et 1999.

année	1994	1995	1996	1997	1998	1999
montant	$16,66$	$17,33$	$19,03$	$19,25$	$15,23$	$15,99$

1. En prenant 100 pour base en 1994, calculer les indices pour les autres années.
2. En déduire les pourcentages d'évoluton de ces montants de 1994 à 1996, de 1994 à 1998 et de 1994 à 1999.
3. En utilisant les indices, calculer le pourcentage d'évolution de ces montants de 1997 à 1999.

Développement

Démonstration.

1. Voici les indices arrondis au dixième.

rang	0	1	2	3	4	5
année	1994	1995	1996	1997	1998	1999
indice	100	$104,0$	$114,2$	$115,5$	$91,4$	$96,0$

Par exemple :

$$I_{1/0} = 100 \times \frac{17,33}{16,66}$$

et donc $I_{1/0} = 104,0$.

2. $I_{2/0} - 100 = 14,2$, donc de 1994 et de 1996, le montant des cotisations a augmenté d'environ $14,2\%$.
$I_{4/0} - 100 = -8,6$, donc de 1994 à 1998, le montant des cotisations a baissé d'environ $8,6\%$.
$I_{5/0} - 100 = -4$ donc, de 1994 à 1999, le montant des cotisations a baissé d'environ 4%.
3. Soit t ce pourcentage.

$$I_{6/0} = I_{3/0}\left(1 + \frac{t}{100}\right) \Leftrightarrow 96 = 115,5 \times \left(1 + \frac{t}{100}\right).$$

On en déduit :

$$t = 100 \times \left(\frac{96}{115,5} - 1\right) = -16,9.$$

De 1997 à 1999, le montant des cotisations a baissé de $16,9\%$ environ.

□

2.6 Pourcentages de pourcentages

Théorème 25.19

Prendre $t_1\%$ de $t_2\%$, c'est prendre $\frac{t_1 t_2}{100}\%$.

Exemple 25.20. Dans une classe de 1[re] ES, 60% des élèves sont externes et 70% des externes sont des filles. Les filles externes représentent 70% des externes, c'est-à-dire 70% de 60% de la classe.

$$\frac{70 \times 60}{100}\% = 42\%,$$

donc il y a 42% de filles externes dans la classe.

2.7 Comparaison de pourcentages

Théorème 25.21

a. Lorsque deux pourcentages portent sur un même ensemble de référence, ils sont dans le même ordre que les données absolues.
b. Lorsque deux pourcentages portant sur des ensembles de référence distincts leur ordre ne renseigne pas sur l'ordre des données absolues.

Exemples 25.22.

a. 25% de 130 est égal à $32,5$; 50% de 130 est égal à 65.
On a à la fois $25\% < 50\%$ et $32,5 < 65$.
b. 25% de 40 est égal à 10 ; 50% de 10 est égal à 5. On a $25\% < 50\%$ mais $10 > 5$.

3 Les pièges des pourcentages

Remarque 25.23. En général, les pourcentages ne s'ajoutent pas et ne se retranche pas.

Exemple 25.24. Un objet coûte 100 €. Son prix augmente de 10%, puis le nouveau prix est diminué de 10%. Quel est son nouveau prix ?

Développement

Solution. Une erreur serait de croire que 100 €$+10\% - 10\% = 100$ € ! En effet, on a : $100\,e + 10\% = 110\,e$ et la diminution suivante, de 10% sera appliquée aux $110\,e$ soit :

$$110\,€ - 10\% = 110 - 11 = 99\,€.$$

$\square$

Remarque 25.25. Seuls les pourcentages portant sur le même ensemble sont suceptibles de s'ajouter.

Exemple 25.26. Dans une classe de 30 élèves, 15 élèves sont bruns et 3 sont roux. Quel est le pourcentage d'élèves qui ne sont pas blonds ?

Développement

Solution. Les élèves bruns représentent $\frac{15\times 100}{50} = 50\%$ de la classe et les élèves roux représentent $\frac{3\times 100}{30} = 10\%$ de la classe. Les pourcentages ayant été calculés à partir du même ensemble de définition (la classe), on peut affirmer que $50\% + 10\% = 60\%$ des élèves ne sont pas blonds. $\square$

Remarque 25.27. n augmentations de $p\%$ ne sont pas équivalentes à une augmentation de $np\%$.

Exemple 25.28. Une somme d'argent de 500 euros est placée sur un compte rénuméré à 4% l'an. Au bout de la première année, la somme d'argent, augmentée de ses intérêts devient égale à $500 \times 1,05 = 520$ €. Mais, lors de la deuxième année, les 4% ne sont plus calculés sur les 500 du début mais sur les 520 € de sorte qu'à la fin de la deuxième année, le capital obtenu s'élève à :

$$520 \times 1,04 = 500 \times 1,04 \times 1,04 = 500 \times (1,04)^2 = 540,80 \text{ €}.$$

Deux augmentations succesives de 4% ne sont donc pas égales à une augmentation de 8%. Pour connaître leur effet sur une somme, il convient de calculer $(1,04)^2 = 1,0816$. Ceci nous permet d'affirmer que 2 augmentations successives de 4% sont équivalentes à une augmentation de $8,16\%$.

4 Applications économiques : les intérêts

Exemple 25.29. Une personne décide de placer la somme de 1500 € à un taux d'intérêt annuel de 3%.
- L'intérêt acquis au bout d'un an sera de $1500 \times 0,03 = 45$ €.
- L'intérêt acquis au bout d'un mois sera de $1500 \times \frac{0,03}{12} = 3,75$ €.
- L'intérêt acquis au bout de 6 mois sera de $3,75 \times 6 = 22,50$ €.

4 1 Intérêt simple

Définition 25.30

Intérêt simple
L'*intérêt simple* est proportionnel au captial placé, au taux d'intérêt et à la durée de placement :

$$I = C \times t \times n$$

où :
- I est l'intérêt (en €),
- C est le capital placé,
- t est le taux périodique (ce qui rapporte 1 € durant une période)
- n est le nombre de placement (années, semestres, trimestres, mois, semaines, jours).

4 2 Valeur acquise

Définition 25.31

La valeur acquise est la somme disponible à la fin du placement :

$$A = C + I$$

où
- A est la valeur acquise (en €),
- C est le capital placé,
- I représente les intérêts acquis.

Exemple 25.32. Un placement de 2300 € placé 5 mois au taux mensuel de $0,5\%$ rapporte un intérêt de $57,50$ € soit une valeur acquise de :

$$2300 + 57,50 = 2357,50 \text{ €}.$$

4.3 Taux proportionnels

Définition 25.33

Taux proportionnels

Deux taux sont dits *proportionnels* s'ils sont proportionnels à leur durée de placement :

$$t_{\text{semestriel}} = \frac{t_{\text{annuel}}}{2}, \ t_{\text{trimestriel}} = \frac{t_{\text{annuel}}}{4}, \ t_{\text{mensuel}} = \frac{t_{\text{annuel}}}{12}$$

Remarques 25.34.

a. À intérêts simples, des taux proportionnels sont équivalents, car ils conduisent à la même valeur acquise.

b. Une année commerciale compte 360 jours, 12 mois et 24 quinzaines.

4.4 Taux moyen de placement

Définition 25.35

Taux moyen de placement

Le *taux moyen de placement* est le taux unique auquel il aurait fallu placer les capitaux pendant les mêmes durées pour obtenir le même intérêt total.

Exemple 25.36. Trois placements de 2000 €, 1500 € et 750 € sont respectvement placés pendant un an à $4,25\%$ l'an, pendant 8 mois à $0,3\%$ mensuel et pendant 120 jours à $5,5\%$. L'intérêt total rapporté par les 3 placements est :

$$I = (2000 \times 0,0425) + (1500 \times 0,003 \times 8) + (750 \times 0,055 \times \tfrac{120}{360}) = 134,75\,€.$$

Le taux moyen de placement T est obtenu par la résolution de l'équation suivante :

$$134,75 = (2000T) + (1500T \times \tfrac{8}{12}) + (750T \times \tfrac{120}{360}$$

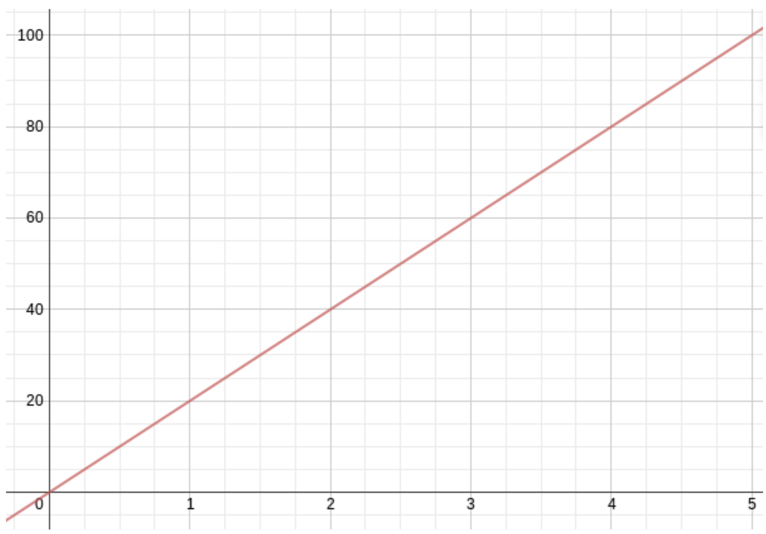
soit $134,75 = 3250T \Leftrightarrow T = 0,0415$. Le taux moyen de placement est de $4,15\%$ annuel.

4.5 Représentatons graphiques

Propriété 25.37

L'intérêt simple est une fonction linéaire de la durée de placement. Elle est représentée par une droite passant par l'origine.

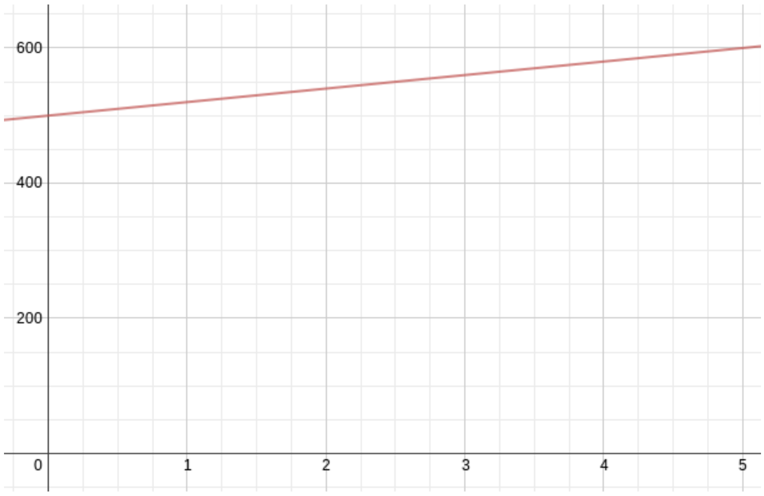
Exemple 25.38. Une personne a placé 500 € au taux annuel de 4%. L'intérêt est représenté par la droite d'équation $y = 500 \times 0,04 \times x$ soit $y = 20x$ où y représente l'intérêt et x la durée du placement.



Propriété 25.39

La valeur acquise est une fonction affine de la durée du placement. Elle est représentée par une droite qui ne passe par l'origine.

Exemple 25.40. La valeur acquise au bout de x année est représentée par la droite d'équation $y = 500 + 20x$.



LEÇON

26

Systèmes d’équations et systèmes d’inéquations

Niveau : Troisième, Première ES
Prérequis : résolution d’une équation à une inconnue, équation de droite

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$, dans tout l'exposé, un système d'équations $m \times n$ désigne un système de m équations à n inconnues.

1 Cas particulier : systèmes d'équations 2×2

1.1 Préliminaires

Ce sont les premiers systèmes d'équations que l'on rencontre au niveau collège.

Propriété 26.1

Pour déterminer complétment la valeur de deux inconnues dans une équation, il en faut éventuellement une deuxième.

1.2 Méthodes de résolution

On décrit maintenant les méthodes de résolution d'un tel système d'équation.

Définition 26.2

Résolution par substitution
Cette méthode de résolution consiste à exprimer une des inconnues en fonction de l'autre.

Définition 26.3

Résolution par comparaison
Cette méthode de résolution consiste à établir une égalité à partir d'une inconnue exprimée de la même manière dans chaque équation.

Définition 26.4

Résolution par addition
Cette méthode de résolution consiste à ajouter membre à membre les deux égalités pour me garder qu'une seule inconnue.

Définition 26.5

Résolution graphique
Cette méthode de résolution consiste à relever (graphiquement) les coordonnées du point d'intersection des deux droites.

Exemple 26.6. Résoudre, par différentes méthodes, le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x + 2y = 9 \\ x - 3y = 5 \end{cases}$$

Développement

On résout le système d'équations par les différentes méthodes décrites plus en haut :

Par substitution On peut exprimer x en fonction de y dans la première équation du système :

$$\begin{aligned} x + 2y &= 9 \\ x &= 9 - 2y \end{aligned}$$

On remplace alors x par cette valeur « $9 - 2y$ » dans la deuxième égalité :

$$\begin{aligned} x - 3y &= 5 \\ x &= 5 + 3y \\ 9 - 2y &= 5 + 3y \\ 4 &= 5y \\ y &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

On remplace enfin y par sa valeur dans une des égalités pour trouver x :

$$x = 9 - 2y = 9 - 2 \times \frac{4}{5} = 9 - \frac{8}{5} = \frac{37}{5}.$$

Par comparaison On exprime, par exemple, x dans chaque égalité en fonction de y

$$x = -2y + 9 \tag{26.1}$$
$$x = 3y + 5 \tag{26.2}$$

À parti de (26.1) et (26.2), on peut former une nouvelle égalité :

$$\begin{aligned} -2y + 9 &= 3y + 5 \\ 4 &= 5y \end{aligned}$$

et on en déduit ainsi les solutions du système.

Par addition On veut « éliminer » les termes en x. Pour cela, on multiplie la seconde équation par -1 œ

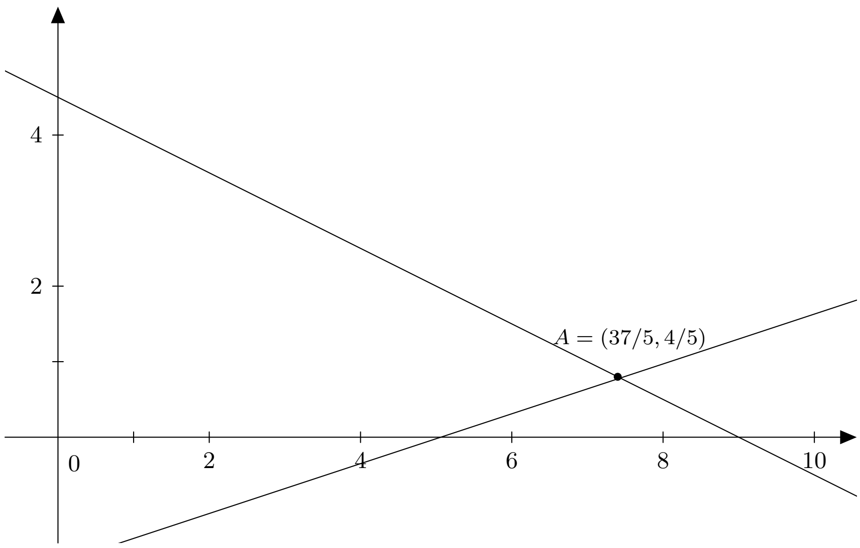
$$\begin{aligned} -(x - 3y) &= 5 \\ -x + 3y &= 5 \end{aligned}$$

et on ajoute la première et la seconde :

$$\begin{aligned} x - x + 2y + 3y &= 9 - 5 \\ 5y &= 4 \end{aligned}$$

et on en déduit ainsi les solutions du système.

Graphiquement Les deux droites d'équations respectives $x + 2y = 9$ soit $y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$ et $x - 3y = 5$ soit $y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$ ont un point d'intersection de coordonnées $x = \frac{37}{5}$ et $y = \frac{4}{5}$.



Conclusion Les solutions de ce système d'équations est le couple $(37/5, 4/5)$.

2 Cas général d'un système d'équations, méthode du pivot de Gauss

2.1 Méthode du pivot de Gauss

On décrit la méthode du pivot de Gauss pour un système d'équations $n \times n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

Développement

Méthode du pivot de Gauss

Soit à résoudre le système d'équations $n \times n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

Il est équivalent à résoudre ceci :

$$AX = B, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

- On commence par vérifier si $a_{11} \neq 0$. Si $a_{11} = 0$ alors on permute la ligne L_1 et L_i $(2 \leq i \leq n)$ tel que $a_{i1} \neq 0$ et on réindexe la matrice A des coefficients (a_{ij}).
- On effectue les opérations élémentaires pour $2 \leq i \leq n$, $L_i \leftarrow \frac{a_{i1}}{a_{11}} L_i - L_1$. n obitent une matrice $A^{(1)} = (a_{ij}^{(1)})$ dont la premièr colonne a pour coefficient a_{11} et les autres coefficients sont nuls.
- On vérifie que $a_{22}^{(1)} \neq 0$. Si $a_{22}^{(1)} = 0$ alors on permute la ligne L_2 et L_i avec $3 \leq i \leq n$ tel que $a_{i2}^{(1)} \neq 0$.
- On effectue les opérations élémentaires pour $3 \leq i \leq n$, $L_i \leftarrow \frac{a_{i,2}^{(1)}}{a_{2,2}^{(1)}} L_i - L_2 \ldots$
- $\ldots$
- On procéde ainsi (il y a au maximum $k-1$ étapes) jusqu'à obtenir que des 0 sous la diagonale principâle : $A^{(k-1)}$ triangulaire supérieure.

---

2 2 Application sur un exemple

Les systèmes d'équations étudiés en Première ES sont généralement 3×3. On utilise la méthode du pivot de Gauss sur un exemple.

Exemple 26.7. Résoudre :

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 & (L_1) \\ x + 2y - z = 9 & (L_2) \\ -x - y + 3z = 1 & (L_3) \end{cases}$$

Développement

On fait les opérations suivantes : $L_2 \leftarrow 2L_2$ et $L_3 \leftarrow 2L_3$.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 & \\ 2x + 4y - 2z = 18 & L_2 \leftarrow 2L_2 \\ -2x - 2y + 6z = 2 & L_3 \leftarrow 2L_3 \end{cases}$$

Ensuite, on peut faire : $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 & \\ 3y - 3z = 15 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -y + 7z = 5 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$

Et ainsi de suite :

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 & \\ y - z = 5 & L_2 \leftarrow \frac{L_2}{3} \\ -y + 7z = 5 & \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 & \\ y - z = 5 & \\ 6z = 10 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+y & = 3 - \frac{10}{6} \\ y & = 5 + \frac{10}{6} \\ z & = \frac{10}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x & = \frac{4}{3} - \frac{20}{3} = -\frac{16}{3} \\ y & = \frac{20}{3} \\ z & = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{8}{3} \\ y = \frac{20}{3} \\ z = \frac{5}{3} \end{cases}$$

3 Système d'inéquations

3 1 Principe et remarques

Théorème 26.8

La droite D a pour équation :

$$ax + by + c = 0.$$

La droite D partage le plan en deux demi-plans.

– Pour tout point $M(x, y)$ de l'un d'entre eux l'expression $ax + by + c$ est positive.
– Pour tout point $M(x, y)$ de l'autre demi-plan, l'expression $ax + by + c$ est négative.

Remarque 26.9. Pour tout point $M(x, y)$ d'un même demi-plan, l'expression $ax + by + c$ garde le même signe.

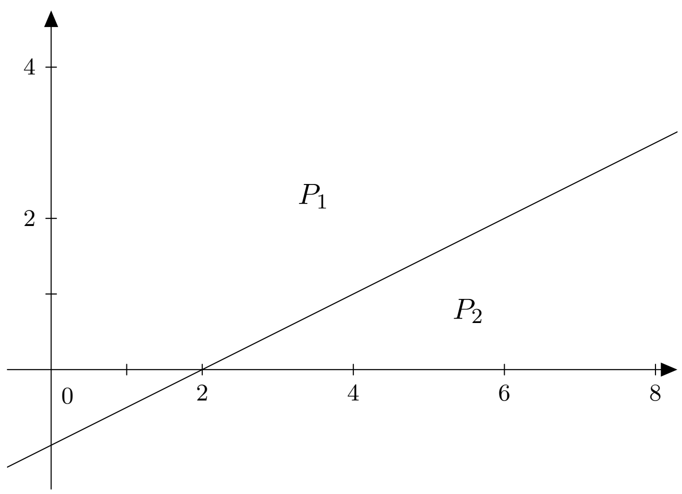
3 2 Un exemple

Exemple 26.10. Résoudre le système d'inéquations :

$$\begin{cases} x - 2y - 2 \geq 0 \\ 5x - 4y - 24 < 0 \\ 3x + y + 4 > 0 \end{cases}$$

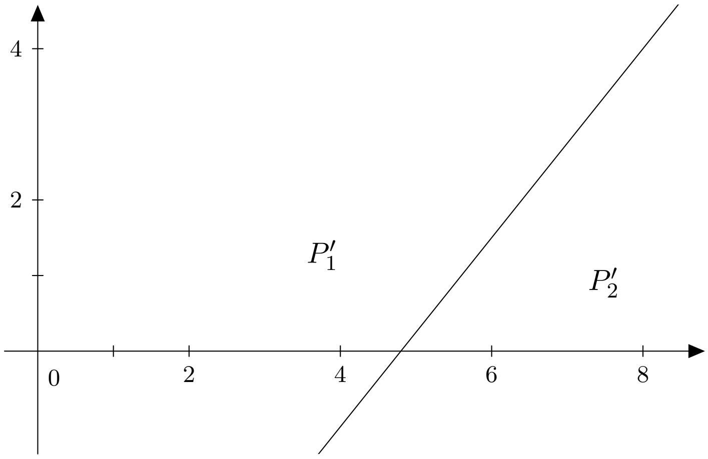
Développement

1. La droite d'équation $D : x - 2y - 2 = 0$ passe par les points $(0, -1)$ et $(2, 0)$. Elle partage le plan en deux demi-plans P_1 et P_2.



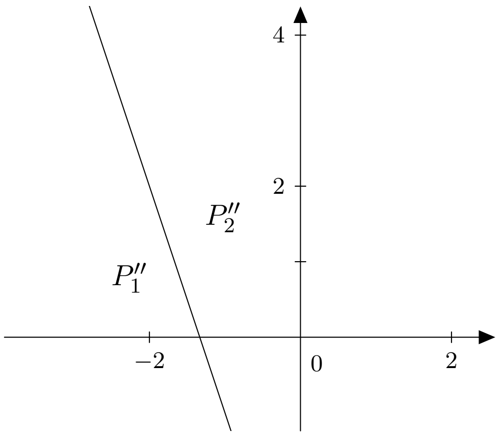
Pour le point $O(0,0)$, l'expression $x+2y-2$ vaut -2. L'expression est donc négative sur P_1 (dont O en fait partie) et positive sur P_2. L'ensemble des points solutions de l'inéquation $x-2y-2 \leq 0$ est le demi-plan P_2 (positive) avec la droite D (ou nul).

2. La droite D' passe par les points de coordonnées $(0,-6)$ et $(4,-1)$. Elle partage le plan en deux plans P_1' et P_2'.



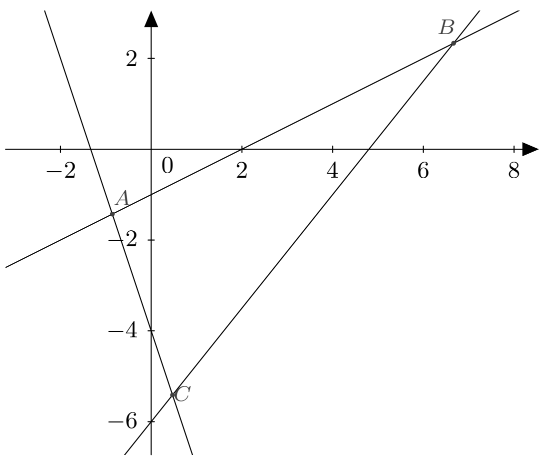
Pour le point $O(0,0)$, l'expression $5x-4y-24$ vaut -24. L'expression est donc négative sur P_1' (dont O fait partie) et positive sur P_2'. L'ensemble des points solutions de l'inéquation $5x-4y-24 < 0$ est le demi-plan P_1' (négatif).

3. La droite D'' passe par les points de coordonnées $(-1,-1)$ et $(0,-4)$. Elle partage le plan en deux demi-plans P_1'' et P_2''.



Pour le point $O(0,0)$, l'expression $3x+y+4$ vaut 4. L'expression est donc positive sur P_2'' (dont O fait partie) et négative sur P_1''. L'ensemble des points solutions de l'inéquation $3x+y+4 > 0$ est le demi-plan P_2''.

Conclusion. L'ensemble des points solutions du système d'équation est l'intérieur du triangle ABC (avec $A(-6/7, 10/7)$, $B(20/3, 7/3)$ et $C(8/17, -92/17)$) avec le segment $[AB]$ car la première équation est une inéquation large. Il faut donc encore inclure la droite (AB) mais il faut exclure le point A car il ne fait partie de P_2'' et de même il faut exclure B car il ne fait pas partie de P_1'.



Problème 26.11. Un menuisier fabrique des tables et des buffets en bois. Une table nécessite 3 heures de découpe et 2 heures de finition. Un buffet nécessite $1h30$ de découpage et 6 heures de finition. Pour des raisons de commercialisation, ce menuisier ne peut pas produire plus de 18 meubles par mois. Les capacités de production sont de 45 heures pour le découpage et 78 heures pour la finition. Cet artisan réalise un bénéfice de 200 € par table et 300 € par buffet.

Déterminer le nombre x de tables et y debuffets que ce menuisier doit fabriquer pour réaliser un bénéfice maximum.

Développement

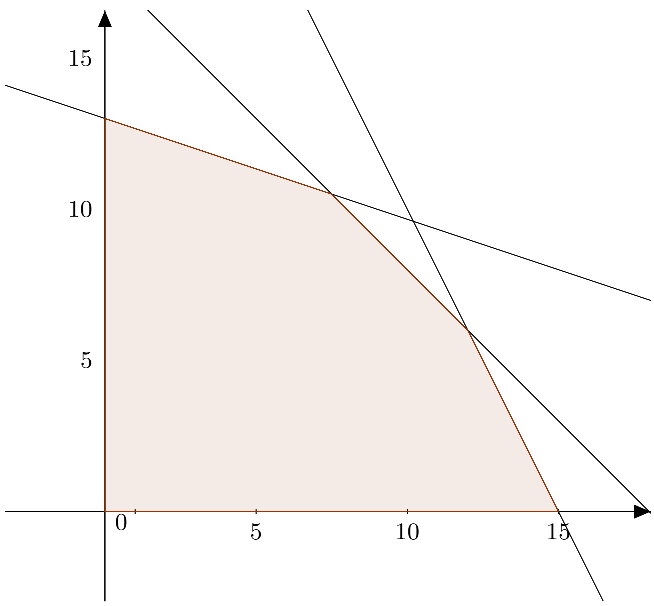
Soit x le nombre de tables à produire et y le nombre de buffets à produire.

- La quantité de tables à produire est positive donc $x \geq 0$.
- La quantité de buffets à produire est positive donc $y \geq 0$.
- En un mois, on ne peut produire que 18 meubles donc $x + y \leq 18$.
- En un mois, x est limité à 45 heures de découpage, une table nécessite 3 heures de découpage et un buffet, $1h30$ de découpage donc $3x + 1,5y \leq 45 \Leftrightarrow 6x + 3y \leq 90 \Leftrightarrow 2x + y \leq 30$.
- En un mois, on est limité à 78 heures de finition, une tabl nécessite 2 heures de finition et un buffet 6 heures de finition. Cela se traduit par l'inégalité $2x + 6y \leq 78 \Leftrightarrow x + 3y \leq 39$.

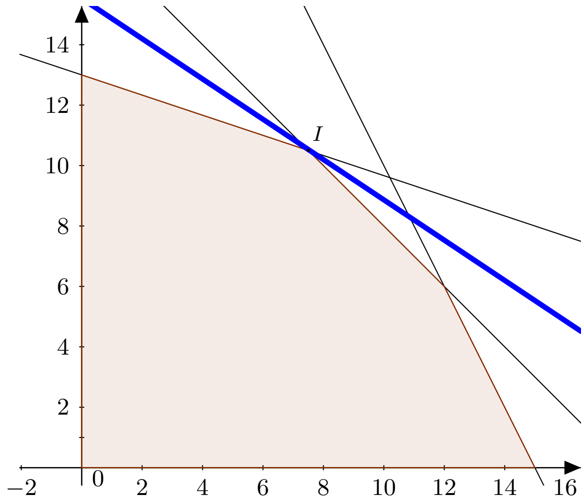
Donc les contraintes de production se traduisent par le système :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 18 \\ 2x + y \leq 30 \\ x + 3y \leq 39 \end{cases}.$$

On trouve le domaine des contraintes dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.



Le bénéfice B est une fonction de x et y. Elle s'exprime par $B(x, y) = 200x + 300y$.



Graphiquement, le point I du domaine des contraintes pour lequel le bénéfice est maximum est $(7,5;10,5)$. Le bénéfice maximum est donc : $200 \times 7,5 + 300 \times 10,5 = 4650$.

Exercices et problèmes

1 Résoudre le système d'équations suivants :

$$\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ 5x + 2y = -4 \end{cases}$$

2 Combien y-a-t-il de solutions au système d'équations :

$$\begin{cases} 3x + y = 13 \\ 3x - y = 12 \end{cases}$$

3 Résoudre les systèmes d'équations suivants :

1. $\begin{cases} x - y - 2z = 17 \\ 2x + y + z = -4 \\ 3x - 2y - z = 11 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x + 2y + 3z = 10 \\ 4x + 5y - 6z = 20 \\ -7x - 8x + 9z = 30 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ 5x + 2y + 9z = 36 \end{cases}$

4 Trouver trois nombres entiers sachant que :

– leur somme est 120 ;
– la division euclidienne du deuxième par le premier donne comme quotient 2, comme reste 7 ;
– la division euclidienne du troisième par le second donne comme quotient 3, comme reste 20.

5 Résoudre graphiquement chaque dans un repère orthonormé.

1. $\begin{cases} x + y \leq 30 \\ x - 5y - 25 \leq 0 \\ 5x - y \geq 0 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y - 300 \leq 0 \\ 20x + y \leq 400 \\ 50x + y \leq 500 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \geq 40 \\ 2x + y \leq 120 \\ -2x + 3y \leq 120 \end{cases}$

6 Deux services (A et B) d'un hôpital se partagent l'usage de deux appareils médicaux : un scanner et une radio.

Une étude a montré que les patients du service A passent en moyenne 30 minutes au scanner et 20 minutes à la radio. Quant aux patients du service B, ils passent en moyenne 15 minutes au scanner et 20 minutes à la radio.

Le service du scanner fonctionne 9 heures par jour et celui de la radio 10 heures par jour.

Ces appareils étant coûteux, on cherche à déterminer le nombre x de patients du service A et le nombre y de patients du service B pour les utiliser au mieux chaque jour.

1. Déterminer un système d'inéquations dont les inconnues x et y traduissent les contraintes.

2. À tout couple $(x; y)$ on associe un point M de coordonnées $(x; y)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique : 0,5 cm).

a. Montrer que le système obenu à la question 1 est équivalent à :

$$(C) \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \leq 36 \\ x + y \leq 30 \end{cases}$$

b. Déterminer graphiquement l'ensemble des points $M(x; y)$ dont les coordonnées vérifient les contraintes.

3. Pour la gestion des deux appareils, $4{,}50$ € sont prélevés sur les frais médicaux des patients du service A et 3 € pour les patients du service B.

   a. Exprimer la somme S ainsi obtenue quotidiennement en fonction de x et de y. On obtient ainsi l'équation d'une droite Δ_S.

      Tracer sur le même graphique la droite Δ_{90}.

   b. Expliquer comment, grâce au graphique, on peut trouver le couple $(x_0; y_0)$ pour lequel la somme S est maximum. D'après cette étude graphique, trouver ce couple et calculer la somme maxium.

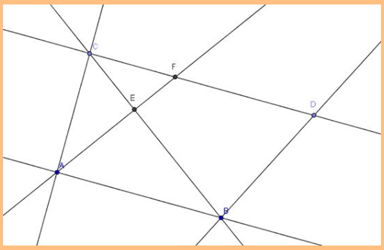
III

Géométrie

LEÇON

27

Droites du plan



Niveau : Lycée
Prérequis : notion de fonctions, vocabulaire de la droite (parallélisme, perpendiculaire, sécantes), vecteurs, équations cartésiennes, équations paramétrique.

Dans cette leçon, on se donne un repère *orthonormé* $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ dans le plan. Chaque droite du plan est caractérisée par une relation algébrique entre l'abscisse et l'ordonnée de ses points : c'est l'*équation cartésienne* de la droite.

1 Généralités sur les droites

1 1 Une définition

Définition 27.1

Soit $A \in \mathcal{P}$ et $\vec{u}$ un vecteur non nul. L'ensemble :

$$\mathcal{D}(A, \vec{u}) = \left\{ M \in \mathcal{P},\ \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u} \right\}$$

est appelé *droite* passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Proposition 27.2

Soit $\mathcal{D}(A, \vec{u}$ une droite du plan, $B \in \mathcal{P}$ et $\vec{v}$ un vecteur non nul.
$\mathcal{D}(A, \vec{u}) = \mathcal{D}(B, \vec{v})$ si et seulement si $B \in D(A\vec{u})$ et $\vec{v}$ colinéaire à $\vec{u}$.

Conséquence 27.3

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\mathcal{D}(A, \vec{u})$ et $\mathcal{D}(A', \vec{v})$ sont sécantes en un unique point.

2 Droites parallèles à un axe

2 1 Parallèle à l'axe des ordonnées

Définition 27.4

Une droite *parallèle à l'axe des ordonnées* possède une équation de la forme $x = k$ où k est un nombre qui mesure l'écart algébrique de la droite par rapport à l'axe des ordonnées. On dit parfois qu'une telle droite est *verticale*.

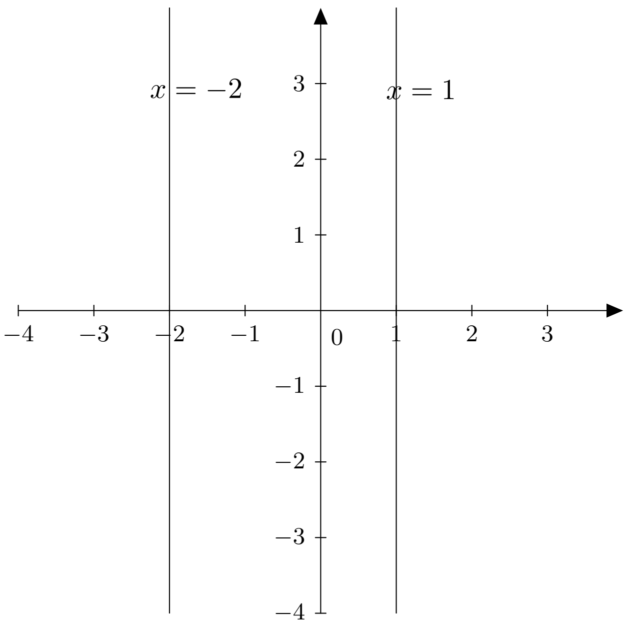


FIGURE 27.1 – Deux droites d'équations $x = 1$ et $x = -2$

2.2 Droite parallèle à l'axe des abscisses

Définition 27.5

Une droite *parallèle à l'axe des abscisses* possède une équation de la forme $y = k$ où k est un nombre qui mesure l'écart algébrique de la droite par rapport à l'axe des abscisses. On dit parfois qu'une telle droite est *horizontale*.

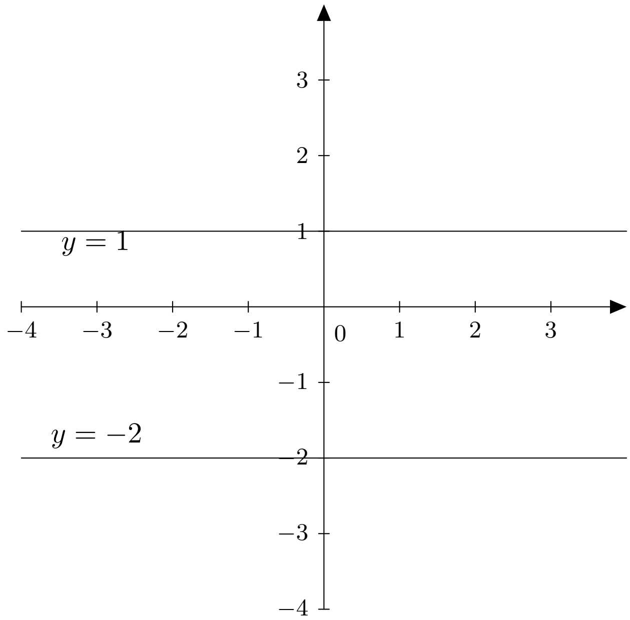


FIGURE 27.2 – Deux droites d'équation $y = 1$ et $y = -2$

3 Equation d'une droite

Définition 27.6

Equation cartésienne d'une droite

Si une droite est non parallèle à l'un des axes de coordonnées, alors l'équation de cette droite est de la forme $ax + b$. C'est une droite *oblique*.

Exemple 27.7. Soit la droite tracée en figure 27.4. On cherche l'équation de cette droite de la forme $y = ax + b$. Cette droite passe par les points de coordonnées $A(0, 1)$ et $B(1/2, 0)$. Ainsi, on est amené à résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} b = 1 \\ \frac{1}{2}a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -2 \end{cases}$$

d'où l'équation de la droite est $y = -2x + 1$.

Remarque 27.8. D'une façon générale, la recherche de l'équation d'une droite sous la forme $y = ax + b$ conduit à un système de deux équations à deux inconnues a et b. Pour des méthodes de résolution, voir la **Systèmes d'équations et d'inéquations**

Définition 27.9

Ordonnée à l'origine

Si x est nul alors l'équation de la droite devient $y = b$ (c'est une droite verticale). Le nombre b est appelé *ordonnée à l'origine*.

Proposition 27.10

Si une droite passe par l'origine, son *ordonnée à l'origine* est nulle. Son équation est de la forme $y = ax$.

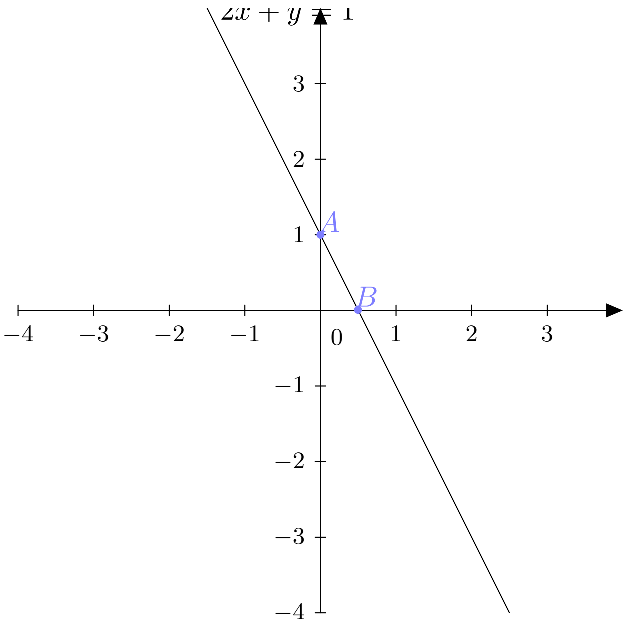


FIGURE 27.3 – Droite d'équation $y = -2x + 1$

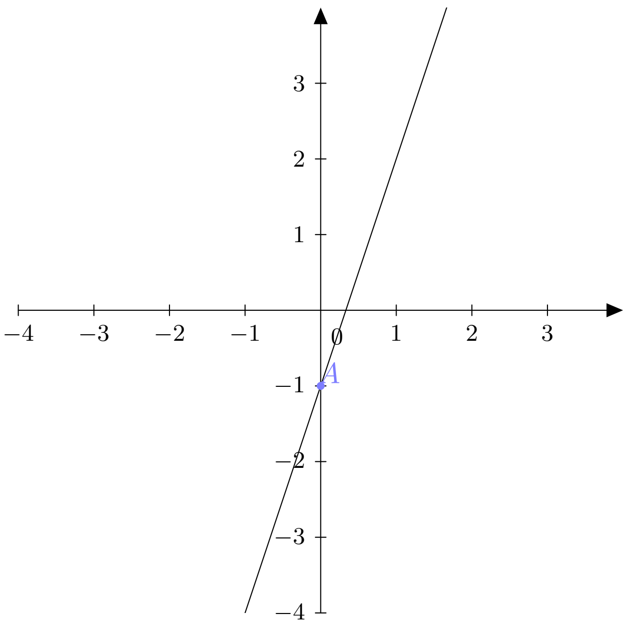


FIGURE 27.4 – L'ordonnée à l'origine de la droite d'équation $y = 3x - 1$ est -1

Définition 27.11

Coefficient directeur
Dans les équations $y = ax$ ou $y = ax+b$ (pour $a \neq 0$), le nombre a est le *coefficient directeur* de la droite. On l'appelle aussi *la pente*

Propriété 27.12

Si une droite est non parallèle à l'un des axes de coordonnées et passe par le point $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$, on a alors :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

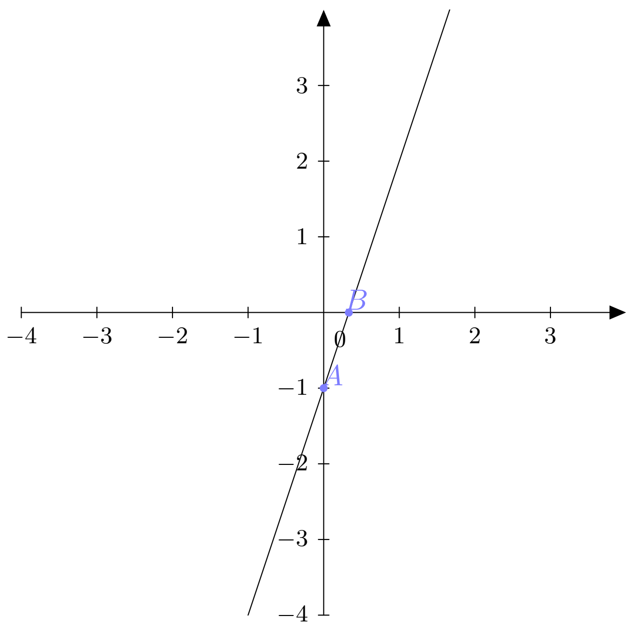


FIGURE 27.5 – La pente de la droite d'équation $y = 3x - 1$ est 3

4 Caractérisation de droites parallèles et perpendiculaires

4.1 Droites parallèles

Définition 27.13

Deux droites seront *parallèles* si et seulement si elles ont le *même coefficient directeur* (même pente). Soient deux droites $(d) : y = ax+b$ et $(d') : y = a'x+b'$. Ces deux droites sont parallèles si et seulement si $a = a'$.

1. Droites perpendiculaires

Comme on travaille sur un repère *orthonormé*, les axes sont perpendiculaires et les unités sur les axes sont les mêmes. Ainsi, on peut définir la notion de perpendiculaire.

Définition 27.14

Soient $(d) : ax + b$ et $(d') : y = a'x + b'$ sont *perpendiculaires* si et seulement si $aa' = 1$.

Remarque 27.15. A noter que dans la définition précédent, il faut supposer que $a \neq 0$ et $a' \neq 0$, ce qui revient à dire que aucune des droites (d) et (d') n'est parallèle à l'un des axes de coordonnées.

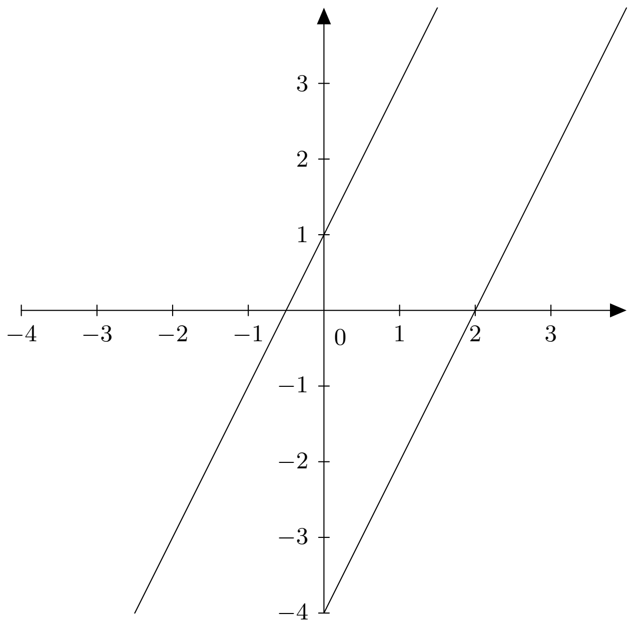


FIGURE 27.6 – Les deux droites d'équation « $y = 2x + 1$ » et « $y = 2x - 4$ » sont parallèles

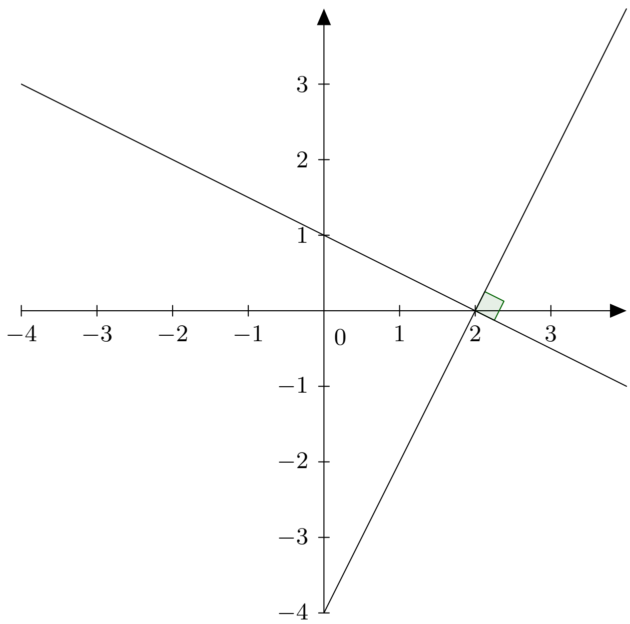


FIGURE 27.7 – Les deux droites d'équation « $y = -\frac{1}{2}x + 1$ » et « $y = 2x - 4$ » sont perpendiculaires

5 Autres formes d'équations de la droite

5.1 Equation paramétrique de la droite

Définition 27.16

Vecteur directeur

Soit (d) une droite. Si A et B appartiennent à (d), le vecteur $\overrightarrow{AB}$ dirige la droite : c'est un *vecteur directeur*.

On choisit A comme origine de (d). Pour tout point M de (d), il existe un nombre k tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$; les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires : ils ont la même direction. En notant $M(x, y)$ un point quelconque de (d), on peut écrire :

$$\begin{cases} x - x_A = k(x_B - x_A) \\ y - y_A = k(y_B - y_A) \end{cases}$$

Définition 27.17

Si on note a et b les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ alors une *représentation paramétrique de la droite* (AB) est de la forme :

$$\begin{cases} x = x_A + ka \\ y = y_A + kb \end{cases}$$

Exemple 27.18. Soit $A(1, 4)$ et $\overrightarrow{AB}(3, -2)$. Les coordonnées du point $M(x, y)$ appartenant à la droite (AB) sont de la forme :

$$\begin{cases} x = 1 + 3k \\ y = 4 - 2k \end{cases}$$

Si $k = 2$, on obtient le point de coordonnées $(7, 0)$: intersection de la droite (AB) avec l'axe des abscisses.

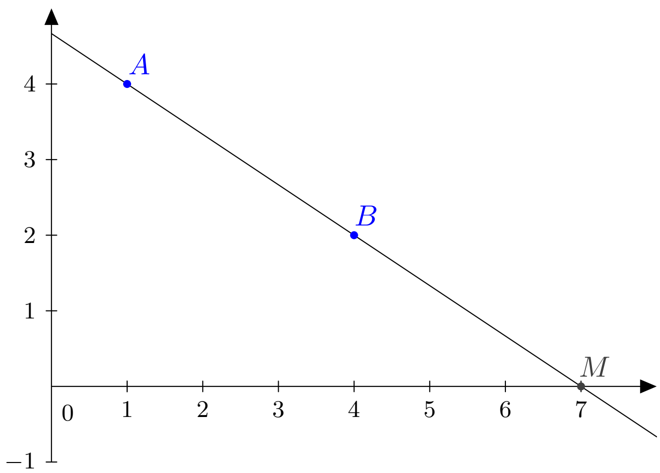


FIGURE 27.8 – Les deux droites d'équation « $y = -\frac{1}{2}x + 1$ » et « $y = 2x - 4$ » sont perpendiculaires

5.2 Forme implicite de l'équation cartésienne

Théorème 27.19

Toute droite possède une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$. On parle d'équation *implicite* car ni x ni y ne sont explicités l'un en fonction de l'autre.

Si une droite a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$, un vecteur directeur est alors donné par $\vec{v}(-b, a)$.

6 Forme implicite, parallélisme et perpendiculaires

6.1 Déterminant

Définition 27.20

Déterminant

Soient deux droites $(d) : ax+by+c=0$ et $(d') = a'x+b'y+c'=0$. On appelle *déterminant* des deux droites (d) et (d') :

$$\det(d,d') = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = ab' + ba'.$$

Propriété 27.21

Deux droites $(d) : ax+by+c=0$ et $(d') : a'x+b'y+c'=0$ sont parallèles si et seulement si leur déterminant est nulle.

$$ax+by+c=0 \quad \text{et} \quad a'x+b'y+c'=0,\ (d) \parallel (d') \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow ab'-a'b=0.$$

6.2 Droites perpendiculaires

Proposition 27.22

Soient deux droites $(d) : ax+by+c=0$ et $(d') : ax'+by'+c'=0$. Les droites (d) et (d') sont perpendiculaires si et seulement si $aa'+bb'=0$.

On verra dans la leçon **Orthogonalité** que deux droites sont perpendiculaires si et seulement si leur produit scalaire est nul, on dira alors que les deux droites sont orthogonales.

6.3 Distance d'un point à une droite

Définition 27.23

La distance d'un point M à une droite $(D) : ax+by+c=0$ est la longueur d du segment $[MH]$ où H est le pied, sur la droite (D), de la perpendiculaire issue de M.

Remarque 27.24. Les coordonnées x et y de H vérifient $ax+by+c=0$.

Proposition 27.25

Si $M(x_0,y_0)$ et $(d) : ax+by+c=0$. La distance d du point M à la droite (d) est donnée par la formule suivante :

$$d = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ ou } d^2 = \frac{(ax_0+by_0+c)^2}{a^2+b^2}.$$

Exemple 27.26. Soit $A=(1,2)$ et $B(3,0)$. On cherche la distance du point $M(0,1)$ à la droite (AB). On calcule tout d'abord la forme implicite de l'équation cartésienne de la droite (AB).

$$\begin{cases} a+b=2 \\ 3a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-3a=2 \\ 3a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ 3\times -1+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=3 \end{cases}$$

Donc l'équation cartésienne de l'équation est $y=-x+3$ et sous la forme implicite $y+x-3=0$. Ainsi :

$$d^2 = \frac{(1-3)^2}{1^2+1^2} = \frac{4}{2} = 2,$$

soit $d=\sqrt{2}$.

7 Intersection de trois droites

Théorème 27.27

Soient D et D' deux droites distinctes du plan qui se coupent en A. On note :

$$\begin{aligned} D &: ax+by+c=0 \\ D' &: a'x+b'y+c'=0 \end{aligned}$$

Soit $\Delta : \alpha x+\beta y+\gamma=0$.

$$A\in\Delta \Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ (\lambda,\mu)\neq(0,0),\ \alpha x+\beta y+\gamma=\lambda(ax+by+c)+\mu(a'x+b'y+c')=0.$$

Développement

Démonstration.

($\Leftarrow$) On note :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= ax+by+c \\ f_1(x,y) &= a'x+b'y+c' \\ f_2(x,y) &= \alpha x+\beta y+\gamma \end{aligned}$$

On a :

$$f_2(x,y)=\lambda f(x,y)+\mu f_1(x,y).$$

$A(x_0,y_0)\in D$ et $A\in D'$ donc :

$$\lambda f(x_0,y_0)+\mu f_1(x_0,y_0)=f_2(x_0,y_0)=0\Rightarrow \lambda\in\Delta.$$

($\Rightarrow$) Comme $A\in D$ et $A\in D'$:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \begin{cases} ax_0+by_0+c=0 \\ a'x_0+b'y_0+c'=0 \end{cases} \\ &\Rightarrow x_0+\frac{bc'-b'c}{ab'-ba'} \quad y_0=\frac{ca'-c'a}{ab'-ba'}. \end{aligned}$$

$A\in\Delta$ donc $\alpha x_0+\beta y_0+\gamma=0$

$$\Rightarrow \gamma=\frac{\alpha b'-\beta a'}{ab'-ba'}c+\frac{a\beta-b\alpha}{ab'-ba'}=c'.$$

On cherche $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que $f_2(x,y)=\lambda f(x,y)+\mu f_1(x,y)$. Cela implique que $\gamma=\lambda c+\mu c'$. On pose :

$$\lambda=\frac{\alpha b'-\beta a'}{ab'-ba'} \quad \text{et} \quad \mu=\frac{a\beta-b\alpha}{ab'-ba'}$$

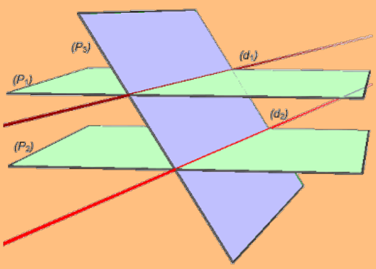
et on vérifie les égalités :

$$\alpha=\lambda a+\mu a',\quad \beta=\lambda b+\mu\beta,\quad \gamma=\lambda c+\mu c'.$$

□

LEÇON 28

Droites et plans de l'espace



Niveau : Terminale S

Prérequis : résolution de systèmes linéaires, vecteurs, Thalès dans le plan et position relatives de deux droites dans le plan

On se place dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

1 Règles de base de la géométrie dans l'espace

Pour travailler dans l'espace (ou la troisième dimension), il est nécessaire de se fixer quelques axiomes.

Axiome 28.1

Par deux points distincts passe une seule droite. Deux points distincts déterminent une droite.

Définition 28.2

Points alignés

On dit que des points sont *alignés* s'ils appartiennent à la même droite.

Axiome 28.3

Par trois points non alignés passe un seul plan.

Définition 28.4

Points coplanaires

Si plusieurs points de l'espace appartiennent à un même plan, on dit qu'ils sont coplanaires.

Axiome 28.5

Si A et B sont deux points du plan $\mathcal{P}$ alors tous les points de la droite (AB) appartiennent au plan $\mathcal{P}$.

Axiome 28.6

Si deux plans distincts ont un point commun, alors leur intersection est une droite.

Définition 28.7

Intersection de deux plans

Si deux plans distincts ont un point commun, alors leur intersection est une droite.

Axiome 28.8

Tous les résultats de la géométrie plane s'appliquent dans chaque plan de l'espace.

Remarque 28.9. Un plan peut être défini par :

- un point et une droite ne passant par ce point,
- deux droites sécantes,

2 Droites et plans

2.1 Définitions

Définition 28.10

Droite

On appelle $\mathcal{D}$, une droite, toute partie de $\mathbb{R}^3$ telle qu'il existe un point A et $\vec{u} \neq \vec{0}$ vérifiant :

$$\mathcal{D} = \left\{M \in \mathbb{R}^3,\ \exists k \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = k\vec{u}\right\}.$$

On note alors $\mathcal{D} = \mathcal{D}(A, \vec{u})$ et $\vec{u}$ est appelé *vecteur directeur* de $\mathcal{D}$.

Définition 28.11

Plan

On appelle $\mathcal{P}$, un plan, toute partie de $\mathbb{R}^3$ telle qu'il existe un point A et deux vecteurs non nuls linéairement indépendants $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vérifiant :

$$\mathcal{P} = \left\{M \in \mathbb{R}^3,\ \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}\right\}.$$

On note alors $\mathcal{P} = \mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont appelés *vecteurs directeurs* de $\mathcal{P}$.

Remarques 28.12.

a. Une droite est parfaitement définie par la donnée de deux points non alignés. Il s'agit de l'ensemble des barycentres possibles de ces points.

b. Un plan est parfaitement définie par la donnée de trois points non alignés. Il s'agit de l'ensemble des barycentres possibles de ces points.

Proposition 28.13

Soit $\mathcal{P}$ un plan. Il existe un point A et un vecteur $\vec{n} \neq \vec{0}$ vérifiant :

$$\mathcal{P} = \left\{M \in \mathbb{R}^3,\ \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0\right\}.$$

On dit alors que $\vec{n}$ est un *vecteur normal* au plan $\mathcal{P}$.

Développement

Démonstration. Considérons $\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$ avec $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ et $\vec{v}(\alpha', \beta', \gamma')$. Prenons $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$. Procédons par double inclusion :

– Si $M \in \mathcal{P}$ alors $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ car $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ et $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$.

– D'autre part $(\vec{n}, \vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Donc si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ alors $\overrightarrow{AM}$ est engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et donc $M \in \mathcal{P}$.

□

2.2 Représentation paramétrique d'une droite

Soit $\mathcal{D}(A, \vec{u})$ une droite et $\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$ avec $A(a, b, c)$, $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ et $\vec{v}(\alpha', \beta', \gamma')$. Alors :

$$M(x, y, z) \in \mathcal{D}(A, \vec{u}) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x = a + k\alpha \\ y = b + k\beta \\ z = c + k\gamma \end{cases}$$

$$M(x, y, z) \in \mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v}) \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x = a + \lambda\alpha + \mu\alpha' \\ y = b + \lambda\beta + \mu\beta' \\ z = c + \lambda\gamma + \mu\gamma' \end{cases}$$

Ces systèmes sont appelés représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{P}$).

2.3 Équation cartésienne d'un plan

Théorème 28.14

Soit $\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$ un plan avec $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ et $\vec{v}(\alpha', \beta', \gamma')$. Il existe $(p, q, r, s) \in \mathbb{R}^4$ avec $(p, q, r) \neq (0, 0, 0)$ tel que :

$$M(x, y, z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow px + qy + rz + s = 0.$$

Réciproquement, si $(p, q, r, s) \in \mathbb{R}^4$ avec $(p, q, r) \neq (0, 0, 0)$, alors l'ensemble

$$\left\{M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ px + qy + rz + s = 0\right\}$$

est un plan de vecteur normal $\vec{n}(p, q, r)$.

Développement

Démonstration. Soit $\mathcal{P}(A, \vec{n})$ un plan avec $\vec{n}(p, q, r)$ et $A(a, b, c)$.

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-a)p + (y-b)q + (z-c)r = 0 \end{aligned}$$

En posant $s = -pa - qb - rc$, nous avons donc l'implication.
Réciproquement, on matre facilement que l'ensemble

$$\mathcal{E} = \left\{M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ px + qy + rz + s = 0\right\}$$

est non vide (si $r \neq 0$, il contient $(0, 0, \frac{s}{r})$).
Soit $A(a, b, c) \in \mathcal{E}$, alors $s = -ap - bq - cr$.

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in \mathcal{E} &\Leftrightarrow px + qy + rz + s = 0 \\ &\Leftrightarrow px + qy + rz + (-ap - bq - cr) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-a)p + (y-b)q + (z-c)r = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \\ &\Leftrightarrow M \in \mathcal{P}(A, \vec{n}) \end{aligned}$$

où $\vec{n}(p, q, r)$ est un vecteur normal au plan. Donc $\mathcal{E}$ définit bien un plan. □

Définition 28.15 L'équation $px + qy + rz + s = 0$ est appelée *équation cartésienne* de $\mathcal{P}$.

3 Positions relatives

3.1 De deux plans

Théorème 28.16 Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans, de vecteur normal respectif $\vec{n}$ et $\vec{n}'$.

a. Si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont soit strictement parallèles, c'est-à-dire qu'ils n'ont aucun point en commun, soit confondus.

b. Si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont pas colinéaires, les deux plans sont sécants et l'intersection est une droite de vecteur directeur un vecteur noraml $\vec{n}$ et $\vec{n}'$.

Développement

Démonstration. Posons $\vec{n}(a, b, c)$ et $\vec{n}'(a, b, c)$. Supoosns $\vec{n}' = k\vec{n}$.

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in \mathcal{P}' &\Leftrightarrow a'x + b'y + c'z = d' = 0 \\ &\Leftrightarrow kax + kby + kcz + d' = 0 \\ kd + d' &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, si $d' = kd$, on a bien $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$. Sinon $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \emptyset$.
Supposons $\vec{n}'$ et $\vec{n}$ sont colinéaires. On peut aussi supposer sans perte de généralités, $a \neq 0$.

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in \mathcal{P}' &\Leftrightarrow \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 & (1) \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 & (2) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 & (1) \\ \underbrace{(a'b - ab')}_{\alpha} y + \underbrace{(a'c - ac')}_{\beta} z + \underbrace{(ad - ad')}_{\gamma} = 0 & (3) \leftarrow a'(1) - a(2) \end{cases} \end{aligned}$$

Puisque $\vec{n}'$ et $\vec{n}$ sont non colinéaires, on peut supposer sans perte de généralités, $\alpha \neq 0$, on obtient alors :

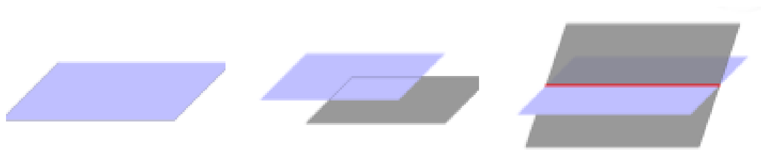
$$\begin{cases} x = \dfrac{b\beta - c\alpha}{a\alpha} z + \dfrac{b\gamma - d\alpha}{a\alpha} \\ y = -\dfrac{\beta}{\alpha} z - \dfrac{\gamma}{\alpha} \\ z = z \end{cases}$$

Ce qui bien l'équation d'une droite. □

Toute droite peut donc être vue comme l'interesection de deux plans, c'est-à-dire comme l'ensemble des points $M(x, y, z)$ vérifiant :

$$\begin{cases} px + qy + rz + s = 0 \\ p'x + q'y + r'z + s' = 0 \end{cases}$$

où (p, q, r) et (p', r', q') ne sont pas proportionnels. On appelle ce système *équation cartésienne* de la droite.



3 2 D'une droite et d'un plan

Définition 28.17

$\mathcal{D}$ est parallèle à $\mathcal{P}$ si tout vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est dans la direction de $\mathcal{P}$ (il peut être engendré par les vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$).

Proposition 28.18

Si $\mathcal{D}$ est parallèle à $\mathcal{P}$ alors soit $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ soit $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \emptyset$. Sinon, l'intersection de $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{P}$ est un point.

Développement

Démonstration. Soit $\mathcal{P}(A, \vec{u}) \cap \mathcal{D}(B, \vec{n}) = \emptyset$, soit il existe au moins un point en commun disons I. Puisque le vecteur directeur $\vec{u}$ de $\mathcal{D}$ est dans la direction de $\mathcal{P}$ alors :

$$M(x, y, z) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} = \lambda\vec{u} \Rightarrow M(x, y, z) \in \mathcal{P}.$$

Ce qui montre le premier point.
Si la droite et le plan ne sont pas parallèles, alors prenons M un point $\mathcal{D}$ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u}$.

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \vec{n} = 0 \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}) \cdot \vec{n} = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \vec{n} = \lambda\vec{u} \cdot \vec{n}. \end{aligned}$$

Puisque $\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$, on a :

$$\lambda = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \vec{n}}{\vec{u} \cdot \vec{n}},$$

ce qui définit bien un unique point M. □

3.3 De deux droites

Définition 28.19

Deux droites sont dites *coplanaires* s'il existe un plan $\mathcal{P}$ les contenant toutes les deux.

Définition 28.20

Deux droites sont dites *parallèles* si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

Proposition 28.21

Deux droites parallèles ou sécantes sont toujours coplanaires.

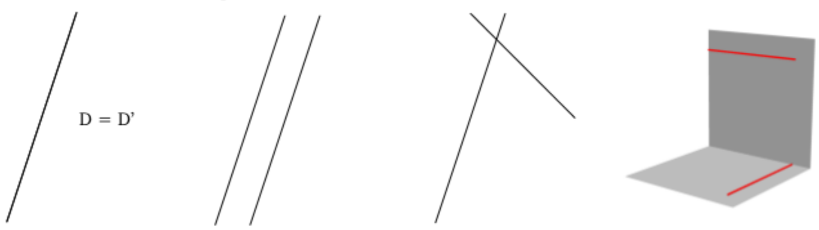
Développement

Démonstration. Soit $\mathcal{D}(A, \vec{u})$ et $\mathcal{D}'(A', \vec{u}')$.

- Si les droites sont parallèles, il suffit de prendre le plan $\mathcal{P}(A, \vec{u}, \overrightarrow{AA'})$.
- Si les droites sont sécantes, en notant I le point d'intersection, il suffit de prendre $\mathcal{P}(I, \vec{u}, \vec{u}')$.

$\square$

Remarque 28.22. Deux droites peuvent donc ne pas avoir de points d'intersection sans être pour autant parallèles.



4 Applications

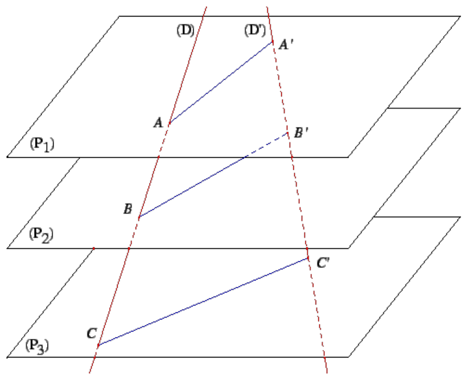
4.1 Théorème de Thalès

Théorème 28.23

Théorème de Thalès

Soient $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$ trois plans strictement parallèles de l'espace, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites non parallèles aux plans $\mathcal{P}_i$. Posons $A_i = \mathcal{P}_i \cap \mathcal{D}$ et $A_i' = \mathcal{P}_i \cap \mathcal{D}'$ alors on a :

$$\frac{\overline{A_1A_3}}{\overline{A_1A_2}} = \frac{\overline{A_1'A_3'}}{\overline{A_1'A_2'}}.$$



Développement

Démonstration. Si $\mathcal{D}(A_1, \vec{u})$ et $\mathcal{D}'(A'_1, \vec{u}')$ sont coplanaires, on a l'égalité par le théorème de Thalès dans le plan.
Si $\mathcal{D}(A_1, \vec{u})$ et $\mathcal{D}'(A'_1, \vec{u})$ ne sont pas coplanaires, on considère $\mathcal{D}''(A'_1, \vec{u})$ et on pose $A''_i = \mathcal{P}_i \cap \mathcal{D}''$.
$A'_1 \in \mathcal{D}' \cap \mathcal{D}''$ donc $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$ sont coplanaires.

$$\frac{\overline{A'_1A_3}}{\overline{A'_1A'_2}} = \frac{\overline{A''_1A''_3}}{\overline{A''_1A''_2}}.$$

Puisque $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ont pour vecteur directeur $\vec{u}$, elles sont parallèles et donc coplanaires elles aussi. D'après le théorème de Thalès dans le plan, on a là aussi :

$$\frac{\overline{A_1A_3}}{\overline{A'_1A'_2}} = \frac{\overline{A''_1A''_3}}{\overline{A_1A_2}}.$$

Ce qui donne bien :

$$\frac{\overline{A_1A_3}}{\overline{A_1A_2}} = \frac{\overline{A'_1A'_3}}{\overline{A'_1A'_2}}.$$

□

4 2 Application du théorème des trois perpendiculaires

Théorème 28.24

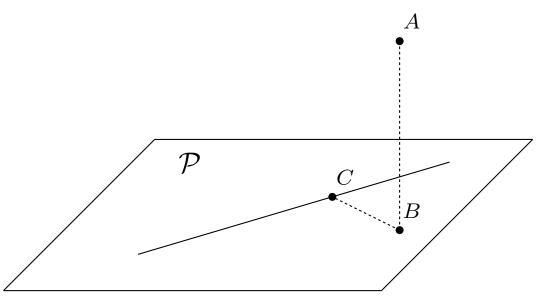
Soit $\mathcal{D}$ une droite contenue dans un plan $\mathcal{P}$ et A un point extérieur à $\mathcal{P}$. On appelle B le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$ et C le projeté orthogonal de B sur $\mathcal{D}$. Alors (AC) est perpendiculaire à $\mathcal{D}$.

Développement

Démonstration. Par hypothèse :

$$\begin{cases} \overrightarrow{BC} \cdot \vec{u} = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{car } \vec{u} \text{ est dans la direction de } \mathcal{P}. \end{cases}$$

Donc $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{u} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \vec{u} = 0$.
Les droites sont donc orthogonales. Comme C appartient à (AC) et à $\mathcal{D}$ alors elles sont perpendiculaires. □

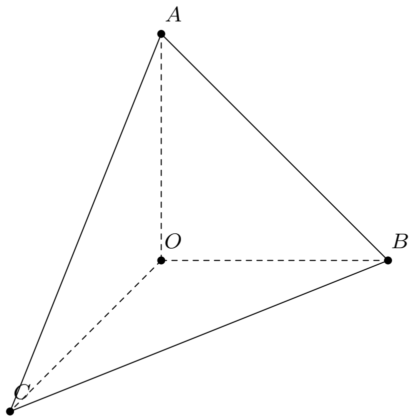


Proposition 28.25

Résultat de Descartes

Soit $(OABC)$ une pyramide rectangle, c'est-à-dire tel que $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ soient orthogonaux deux à deux. Alors :

$$\mathcal{A}^2_{ABC} = \mathcal{A}^2_{OAB} + \mathcal{A}^2_{OBC} + \mathcal{A}^2_{OCA}.$$



Développement

Démonstration. D'après le théorème des trois perpendiculaires, A et O ont le même projeté sur (BC), disons I. On utilise alors le théorème de Pythagore dans les triangles AOI et OBC, on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{ABC}^2 - \mathcal{A}_{OBC}^2 &= \frac{1}{4}(IA^2 \times CB^2 - IO^2 \times BC^2) \\
&= \frac{1}{4} \times CB^2 \times (IA^2 - IO^2) \\
&= \frac{1}{4} \times CB^2 \times AO^2 \\
&= \frac{1}{4}(CO^2 + OB^2) \times AO^2 \\
&= \mathcal{A}_{AOC}^2 + \mathcal{A}_{AOB}^2.
\end{aligned}$$

□

4 3 Distance d'un point à un plan

Définition 28.26

Distance d'un point à un plan

Soient $\mathcal{P}$ un plan et M_0 un point. La distance de M_0 au plan $\mathcal{P}$ estla distance de M_0 au projeté orthogonal H du point M_0 sur le plan $\mathcal{P}$. Cette distance est la plus courte distance de M_0 à un point quelconque de $\mathcal{P}$.

Proposition 28.27

Si dans un repère orthogonal le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$ (l'un des trois réels a, b et c n'étant pas nul) et M_0 a pour coordonnées (x_0, y_0, z_0) alors la distance de M_0 à $\mathcal{P}$ est donnée par :

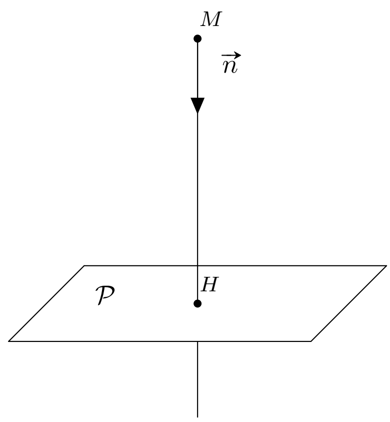
$$d(M_0, \mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Développement

Démonstration. On a vu que l'équation cartésienne d'un plan relativement à un repère orthonormé est de la forme :

$$ax + by + cz + k = 0$$

où a, b et c sont les coordonnées d'un vecteur normal à ce plan.



Soit donc $\mathcal{P}$ un plan d'équation

$$\mathcal{P} : ax + by + cz + k = 0$$

M de coordonnées (α, β, γ) un point quelconque de l'espace (situé ou non dans le plan $\mathcal{P}$). La droite passant par M et orthogonale à $\mathcal{P}$ coupe $\mathcal{P}$ en H de coordonnées (x_H, y_H, z_H) et $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$ de coordonnées a, b et c.
Le vecteur $\overrightarrow{MH}$ lui aussi orthogonal à $\mathcal{P}$ a donc pour coordonnées $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$. La distance du point M au plan $\mathcal{P}$ est donc :

$$MH = |\lambda| \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Il faut donc déterminer λ. Puisque H appartient au plan $\mathcal{P}$, on a :

$$ax_H + by_H + cz_H + k = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{MH}$ a pour coordonnées $(x_H - \alpha, y_H - \beta, z_H - \gamma)$ qui sont égales à $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$. Donc :

$$x_H = \lambda a + \alpha, \quad y_H = \lambda b + \beta, \quad z_H = \lambda c + \gamma.$$

En remplaçant dans l'équation $ax_H + by_H + cz_H + k = 0$, on obtient :

$$a(\lambda a + \alpha) + b(\lambda b + \beta) + c(\lambda c + \gamma) + k = 0.$$

D'où :

$$\lambda(a^2 + b^2 + c^2) + (a\alpha + b\beta + c\gamma + k) = 0,$$

et donc :

$$\lambda = -\frac{a\alpha + b\beta + c\gamma + k}{a^2 + b^2 + c},$$

le dénominateur n'étant pas nul puisque $\vec{n}$ ne l'est pas. Donc :

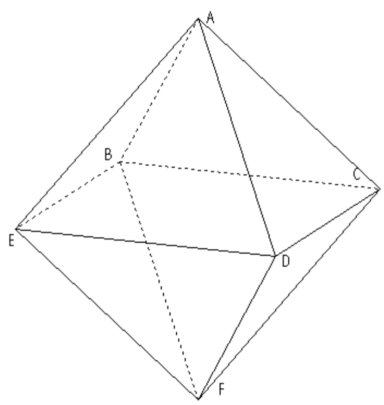
$$MH = \frac{|a\alpha + b\beta + c\gamma + k|}{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{|a\alpha + b\beta + c\gamma + k|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

□

---

4 4 Distance entre deux plans opposés dans un octaèdre

Exercice 28.28. Soit $ABCDEF$ un octaèdre dessiné ci-dessous :

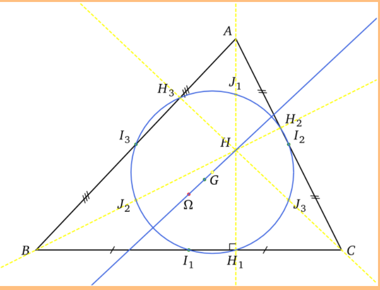


Déterminer la distance entre les plans (ABE) et (FDC).

LEÇON

29

Droites remarquables du triangle



Niveau : Lycée

Prérequis : géométrie du triangle, théorème des milieux, construction à la règle et au compas, propriétés du parallélogramme, théorème de Pythagore

1 Introduction

Définition 29.1

Droite remarquable
On appelle *droite remarquable* dans un triangle une droite qui possède une propriété particulière quel que soit le triangle.

Remarque 29.2. Dans le secondaire, on étudie quatre droites remarquables du triangle :
- médiatrice,
- médiane,
- bissectrice,
- hauteur.

2 Médiatrices

2.1 Définition et propriétés

Définition 29.3

Médiatrice
La médiatrice d'un segment $[AB]$ est la droite perpendiculaire à (AB) et passant par le milieu I de $[AB]$.

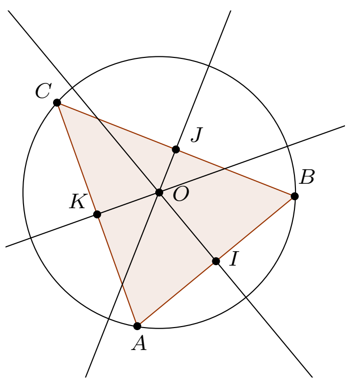
Propriétés 29.4

a. La médiatrice d'un segment est un axe de symétrie pour ce segment.
b. Si N est un point de la médiatrice de $[AB]$ alors $NA = NB$.
c. Si $NA = NB$ alors N st un point de la médiatrice de $[AB]$.

2.2 Médiatrices d'un triangle

Propriété 29.5

Les trois médiatrices des côtés d'un triangle sont concourante. Le point d'intersection est le centre d'un cercl passant par les trois sommets du triangle.



Développement

Démonstration. On note :
- (d_1) la médiatrice de $[BC]$;
- (d_2) la médiatrice de $[AC]$;

- (d_3) la médiatrice de $[AB]$;
- O est le point d'intersection de (d_1) et (d_2).

Comme O appartient à la médiatrice $[BC]$ alors $OB = OC$ et comme O appartient à la médiatrice de $[AC]$ alors $OA = OC$. Ainsi,

- $OA = OB$ et O appartient à (d_3), la médiatrice de $[AB]$
- O est égale distance de A, B et C.

Conclusions :

- (d_1), (d_2) et (d_3) sont concourantes en O.
- O est le centre du cercle qui passe par A, B et C.

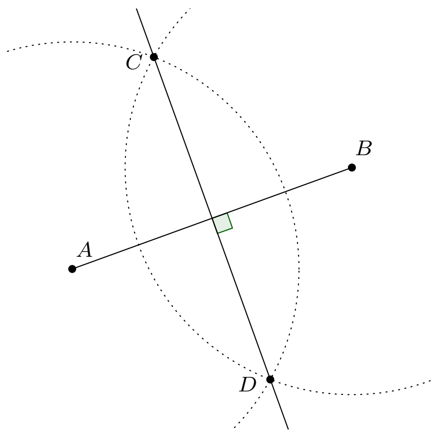
□

Définition 29.6 Ce cercle s'appelle le *cercle circonscrit au triangle*. Le triangle est dit *inscrit dans le cercle.*

2.3 Construction à la règle et au compas

Pour tracer la médiatrice du segment $[AB]$ à la règle et au compas,

- construire un cercle de centre A et de rayon r supérieur à la moitié de la longueur du segment $[AB]$;
- construire un cercle de center B et de rayon r ;
- on obtient deux points C et D, points d'intersection des deux cercles construits.



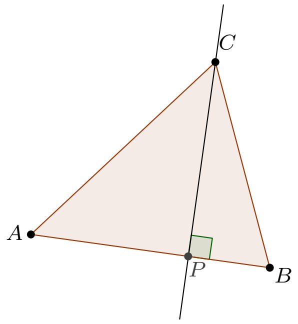
Développement

Démonstration. $[CA]$, $[CB]$, $[DA]$ et $[DB]$ sont des rayons de cercles de même rayon donc $CA = CB = DA = DB = r$. Les points C et D sont donc deux points distincts de la médiatrice. La droite passant par C et D est nécessairement la médiatrice de $[AB]$. □

3 Hauteurs

3.1 Définition

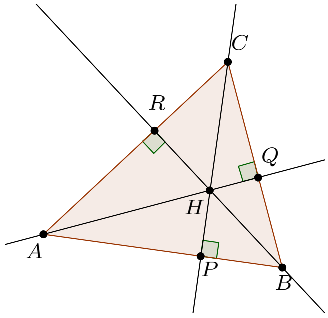
Définition 29.7 **Hauteur d'un triangle**
Dans un triangle ABC, la droite perpendiculaire à (AB) et passant par C est la hauteur issue de C ou relative à $[AB]$.



Définition 29.8 Le point P, intersection de la hauteur issue de C et de la droite (AB), est appelé *pied de la hauteur*

3.2 Orthocentre

Propriété 29.9 Les hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point appelé *orthocentre*.

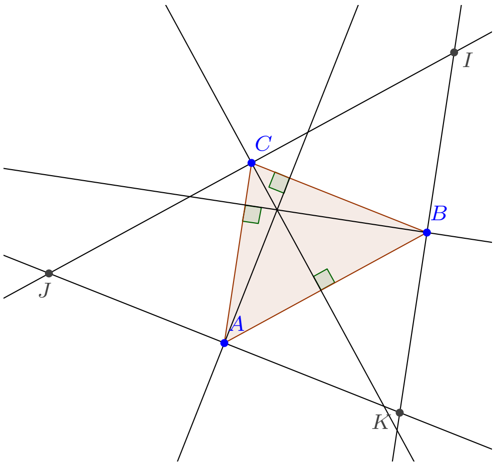


Développement

Démonstration. Soit ABC un triangle. On construit :

- la parallèle à (AB) passant par C ;
- la parallèle à (BC) passant par A ;
- la parallèle à (AC) passant par B ;

elles se coupent en I, J et K (avec $A \in [JK]$, $B \in [IK]$ et $C \in [IJ]$).



Par définition, (AK) et (BC) sont parallèles et (BK) et (AC) sont parallèles donc $AKBC$ est un parallèlogramme ainsi $AK = BC$. On a aussi (AJ) parallèle à (BC) et (CJ) parallèle à (AB) donc $ABCJ$ est un parallélogramme ainsi $AJ = BC$.

Comme $A \in [JK]$ et $AK = AJ$, A st le milieu de $[JK]$. On peut montrer de même que B est le milieu de $[IK]$ et C est le milieu de $[IJ]$.

On construit (d_1), la médiatrice de $[JK]$. Ainsi A appartient à (d_1) car A est le milieu de (JK). De plus, (d_1) et (JK) sont perpendiculaires, (JK) et (BC) sont parallèles donc (d_1) est perpendiculaire à (BC). On peut en conclure que, dans le triangle ABC, (d_1) est la hauteur issue du sommet A.
On montre de même que (d_2) médiatrice de $[KI]$ est la hauteur issue du sommet B t (d_3) médiatrice de $[IL]$ est la hauteur issue du sommet C.
Or, d'après la propriété 29.5, les droites (d_1), (d_2) et (d_3) sont concourrantes. □

Conséquence 29.10

Si une droite passe par un sommet et l'orthocentre d'un triangle alors elle est perpendiculaire au côté du triangle opposé à ce sommet.

3.3 Axe orthique

Soit ABC un triangle. On note :
- A' le pied de la hauteur issue de A ;
- B' le pied de la hauteur issue de B ;
- C' le pied de la hauteur issue de C.

Définition 29.11

Triangle orthique
Le triangle $A'B'C'$ est appelé le *triangle orthique*.

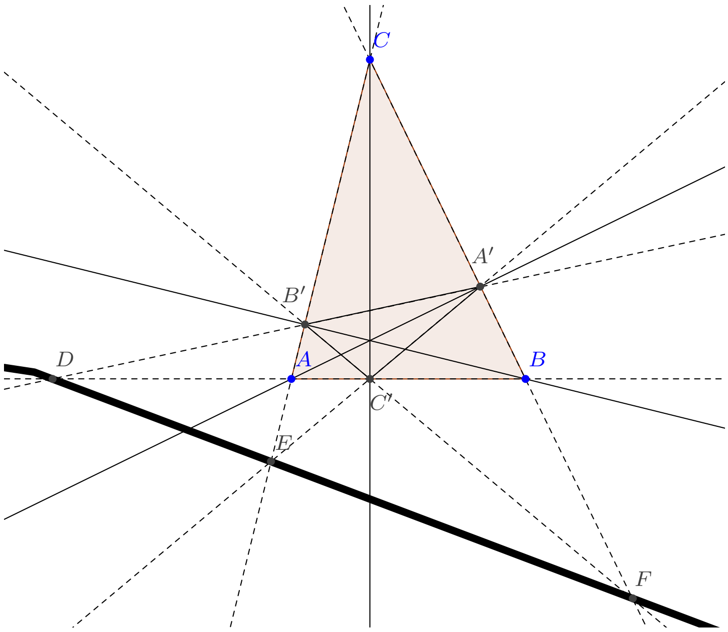
On trace les droites (AB), (AC), (BC), $(A'B')$, $(A'C')$ et $(B'C')$. On note :
- D le point d'intersection de la droite (AB) avec la droite $(A'B')$;
- E le point d'intersection de la droite (AC) avec la droite $(A'C')$;
- F le point d'intersection de la droite (BC) avec la droite $((B'C')$.

Alors :

Propriété 29.12

D, E et F sont alignés sur une droite qu'on appelle *axe orthique*.

La droite d'Euler, ligne des centres des deux cercles, est perpendiculaire à l'axe.

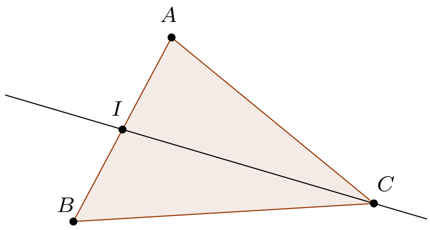


4 Médianes

4.1 Définition

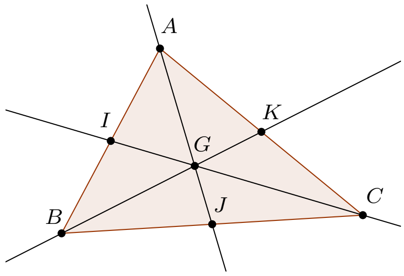
Définition 29.13

Dans un triangle ABC, le segment dont les extrémités sont le sommet A et le milieu I du côté $[CB]$ s'appelle la *médiane* issue de A ou relative à $[CB]$.



4 2 Centre de gravité

Propriété 29.14 Le trois médinanes d'un triangle sont concourantes en un point appelé *centre de gravité*



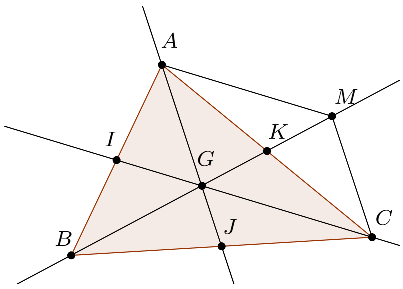
Remarque 29.15. Le centre de gravité st situé au deux tiers de la longueur de chaque médiane à partir du sommet. C'est-à-dire :

$$AG = AJ \;;\; BG = BK \;;\; CG = CI.$$

Développement

Démonstration. Soit :

- ABC un triangle ;
- $(d_1) = (AJ)$ la médiane du triangle ABC issu de B ;
- $(d_2) = (CI)$ la médiane du triangle ABC issue de C ;
- G est le point d'intersection de (IC) et (JA) ;
- M est le symétrique de B par rapport à G.



On a, d'après le théorème des milieux appliqué aux triangles BCM et BAM :

- (IG) est parallèle à (AM)
- (JG) est parallèle à (CM)

donc $AMCG$ est un parallélogramme, ses diagonales $[GM]$ et $[AC]$ ont le même milieu K. Donc $(KB) = (d_3)$ est la médiane du triangle ABC issue de B.
D'où : (d_1), (d_2) et (d_3) sont concourantes en G. □

Conséquences 29.16

a. Si une droite passe par un sommet et le centre de gravité d'un gravité d'un triangle alors elle coupe le côté opposé à ce sommet en son milieu.

b. Si un point est le point d'intersection de deux médinaes d'un triangle alors il est situé aux deux tiers de chaque médiane à partir des sommets.

4.3 Théorème d'Appollonius

Théorème 29.17

Théorème d'Appollonius
Soient ABC un triangle et (AI) la médiane du triangle ABC issue de A. On a alors la relation suivante :

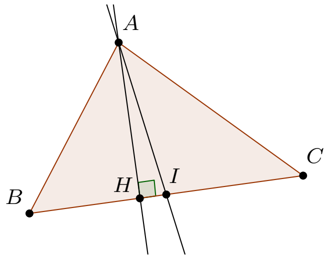
$$AB^2 + AC^2 = 2BI^2 + 2AI^2$$

ou

$$AB^2 + AC^2 = \frac{1}{2}BC^2 + 2AI^2$$

Développement

Démonstration. On note H le pied de la hauteur issue de A.



Les triangles BHA, AHC et AHI sont donc rectangles, on peut appliquer le théorème de Pythagore :

$$AB^2 = BH^2 + AH^2 \tag{29.1}$$
$$AC^2 = AH^2 + HC^2 \tag{29.2}$$
$$AI^2 = IH^2 + AH^2. \tag{29.3}$$

On obtient donc :

$$AB^2 + AC^2 = BH^2 + 2AH^2 + HC^2.$$

B, H et I sont alignés donc $BH = BI - IH$ et C, H et I sont alignés donc $HC = IC + IH$ et en plus, I milieu de $[BC]$ donc $IC = BI$ et donc $HC = BI + IH$.
On a ainsi :

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= (BI - IH)^2 + 2AH^2 + (BI + IH)^2 \\ &= BI^2 - 2BI \cdot IH + IH^2 + 2AH^2 + BI^2 + 2BI \cdot IH + IH^2 \\ &= 2BI^2 + 2IH^2 + 2AH^2 = 2BI^2 + 2(IH^2 + AH^2). \end{aligned}$$

Or, comme AHI est un triangle rectangle, $IH^2 + AH^2 = AI^2$ et en remplaçant dans l'égalité précédente, on obtient :

$$AB^2 + AC^2 = 2BI^2 + 2AI^2.$$

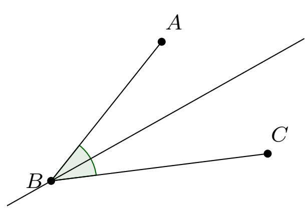
□

5 Bissectrices

5.1 Définition et propriété

Définition 29.18

La bissectrice d'un angle est l'axe de symétrie de cet angle.



Propriété 29.19

La bissectrice de l'angle partage cet angle en deux angles de même mesure.

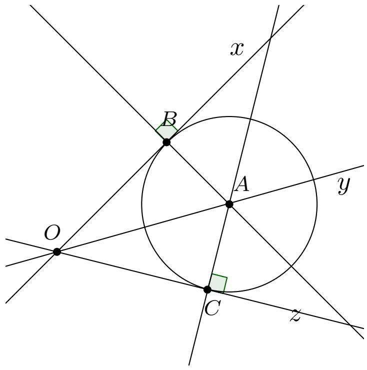
5.2 Théorème de la bissectrice

Théorème 29.20

Théorème de la bissectrice
Tout point de la bissectrice d'un angle est à égale distance des côtés de cet angle.

Développement

Démonstration. Soit (Oz) la bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$. On note A un point appartenant à la demi-droite $[Oz)$, B (resp. C) le projeté orthogonal de A sur $[Ox)$ (resp. sur $[Oy)$.



La distance AB correspond à la distance entre le point A et la droite $[Ox)$ et la distance AC correspond à la distance entre le point A à $[Oy)$.
On note : $\widehat{xOz} = \widehat{yOz} = \alpha$.
Dans les triangles OAC et OAB, on a :

$$AB = OA \times \sin(\alpha)$$
$$AC = OA \times \sin(\alpha)$$

et donc $AB = AC$. □

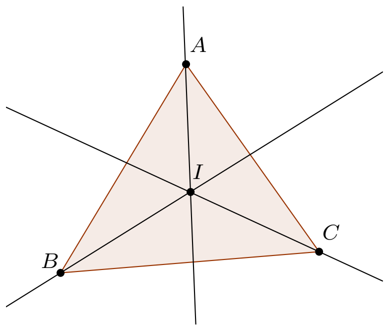
5.3 Cercle inscrit

Propriété 29.21

Les bissectrices des trois angles d'un triangle sont concourantes.

Propriété 29.22

Le point d'intersection de ces trois bissectrices est le centre dun cercle intérieur au triangle et tangente aux trois côtés du triangle.
Le cercle s'appelle *cercle inscrit*, le triangle st dit *circonscrit au cercle.*



Développement

Démonstration. Soient :

- ABC un triangle ;
- (d_1) la bissectrice de $\widehat{BAC}$
- (d_2) la bissectrice de $\widehat{ABC}$
- (d_3) la bissectrice de $\widehat{ACB}$
- I est le point d'intersection de (d_1) et (d_2)

Comme I appartient à la bissectrice de $\widehat{BAC}$ alors $d(I,(AB)) = d(I,(AC))$ (où $d(I,(AB))$ est la distance entre le point I et la droite (AB)). Comme I appartient à la bissectrice de $\widehat{ABC}$ alors $d(I,(AB)) = d(I,(BC))$.
Ainsi :

- $d(I,(AC)) = d(I,(BC))$ et I appartient à (d_3), la bissectrice de $\widehat{ACB}$.
- I est à égale distance de (AB), (BC) et (AC).

Donc : (d_1), (d_2), (d_3) sont concourantes en I et I est le centre du cercle qui est tangent à (AB), (BC) et (AC). □

Conséquence 29.23

Si une droite passe par un sommet et le point d'intersection de deux bissectrices d'un triangle alors c'est une bissectrice de ce triangle.

5 4 Egalité de proportions

On considère ABC un triangle. On note :

- $\mathcal{B}_A$ la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$;
- $\mathcal{B}_B$ la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$;
- $\mathcal{B}_C$ la bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$;
- $\mathcal{B}_A^{\perp}$ la perpendiculaire à $\mathcal{B}_A$ passant par A ;
- $\mathcal{B}_B^{\perp}$ la perpendiculaire à $\mathcal{B}_B$ passant par B ;
- $\mathcal{B}_C^{\perp}$ la perpendiculaire à $\mathcal{B}_C$ passant par C.

On peut montrer que $\mathcal{B}_A^{\perp}$, $\mathcal{B}_B^{\perp}$, $\mathcal{B}_C^{\perp}$ sont des bissectrices des angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACB}$. On les appelle bissectrice extérieur du triangle ABC.

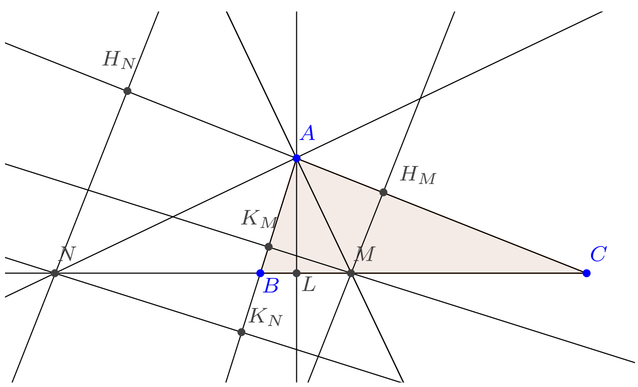
Proposition 29.24

Si ABC n'est pas isocèle en A, alors en posant $M = \mathcal{B}_A \cap (BC)$ et $N = \mathcal{B}_A^{\perp} \cap (BC)$, on a les égalités :

$$\frac{MB}{MC} = \frac{NB}{NC} = \frac{AB}{AC}.$$

Développement

Démonstration. On note K_H (resp. K_N) le projeté orthogonal de M (resp. N) sur (AB), et H_M (resp. H_N) celui de M (resp. N) sur (AC), et enfin L celui de A sur (BC).



Alors :

$$\frac{\mathcal{A}(AMB)}{\mathcal{A}(AMC)} = \frac{MB \cdot AL}{MC \cdot AL} = \frac{AB \cdot MK_M}{AC \cdot MH_M}.$$

Or $MK_M = MH_M$ car $M \in \mathcal{B}_A$. D'autre part :

$$\frac{\mathcal{A}(ANB)}{\mathcal{A}(ANC)} = \frac{NB \cdot AL}{NC \cdot AL} = \frac{AB \cdot NK_N}{AC \cdot NH_N}.$$

Comme précédemment, on a $NK_N = NH_N$ car $N \in \mathcal{B}_A^{\perp}$. Au final :

$$\frac{MB}{MC} = \frac{NB}{NC} = \frac{AB}{AC}.$$

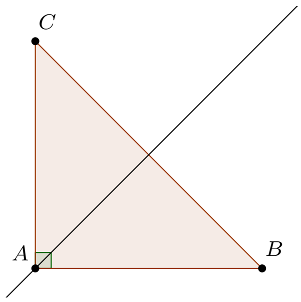
□

6 Droites particulières d'un triangle isocèle ou équilatéral

6.1 Dans un triangle rectangle

Propriété 29.25

Soit ABC un triangle rectangle en A. (BA) et (CA) sont deux hauteurs qui sont confondues avec les côtés $[BA]$ et $[CA]$. L'orthocoentre du triangle ABC rectangle en A est donc A.

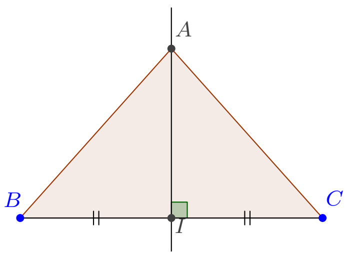


6.2 Dans un triangle isocèle

Si le triangle est quelconque, les quatre familles de droites (médiatrices, bissectrices, médianes et hauteurs) que l'on a décrit ne se superposent pas et les quatre points particuliers sont des poinst distincts.

Si le triangle est isocèle, certaines droites particulières sont confondues.

Soit ABC un triangle isocèle en A et (d_1) la médiatrice relative à la base $[BC]$.



Cette droite passe par le milieu de la base $[BI]$ et lui est perpendiculaire. C'est le lieu géométrique des points équidistants des sommets B et C. Comme le triangle ABC est isocèle, $AB = AC$ et le sommet A appartient donc à la médiatrce de la base $[BC]$. Par conséquent, la médiatrice de base d'un triangle isocèle est aussi un axe de symétrique du triangle ABC.

On en déduit les propriétés suivantes d'un triangle isocèle.

Propriété 29.26

Dans un triangle isocèle, les deux angles à la base ont même amplitude.

Les deux angles sont images l'un et l'autre par une symétrie orthogonale.

Propriété 29.27

Dans un triangle isocèle, la médiatrice de la base est aussi la bissectrice de l'angle au sommet.

La médiatrice relative à la base de cet angle en deux angles de même amplitude puisqu'elle est un axe de symétrie.

Propriété 29.28

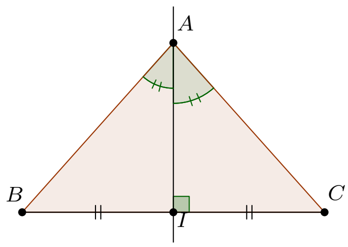
Dans un triangle isocèle, la médiatrice de la base est aussi la hauteur relative au sommet.

C'est la droite passant par A et perpendiculaire au côté opposé.

Propriété 29.29

Dans un triangle isocèle, la médiatrice de la base est aussi la médiane relative à ce côté.

En effet, elle relie le sommet A au milieu du côté $[BC]$.



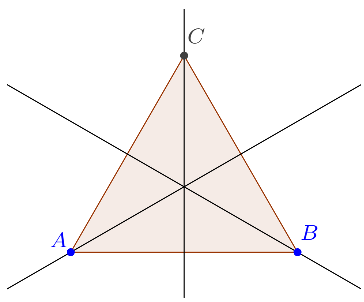
6.3 Dans un triangle équilatéral

Un triangle équiltéral ayant trois côtés de même longueur, chacun de ces côtés peut être considéré comme la base d'un triangle isocèle. Toutes les droites remarquables relatives à cette base se superposent.

On en déduit les propriétés suivantes d'un triangle équilatéral :

Propriété 29.30

Dans un triangle équilatéral, toutes les droites remarquables relatives à une base se superposent.



7 Compléments

7.1 Droite d'Euler

Définition 29.31

Le *cercle d'Euler* d'un triangle est l'unique cercle passant par :

– les trois milieux des trois côtés du triangle ;

– le pied de chacune des trois hauteurs du triangle ;

– le milieu de chacun des trois segments reliant l'orthocentre à un sommet du triangle.

Proposition 29.32 Dans un triangle, l'orthocentre, le centre du cercle circonscrit, le centre de gravité et le centre du cercle d'Euler sont alignés. La droite qui passe par ces quatre points particuliers du triangle est appelé *droite d'Euler.*

Développement

Démonstration. Soit M le point défini par $\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C}$. La relation de Chasles donne

$$\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega I_1} + \overrightarrow{I_1 B} + \overrightarrow{\Omega I_1} + \overrightarrow{I_1 C}$$

Or I_1 est le milieu de $[BC]$ donc $\overrightarrow{I_1 B} + \overrightarrow{I_1 C} = \vec{0}$. D'où :

$$\overrightarrow{\Omega M} - \overrightarrow{\Omega A} = 2\overrightarrow{\Omega I_1} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{\Omega I}.$$

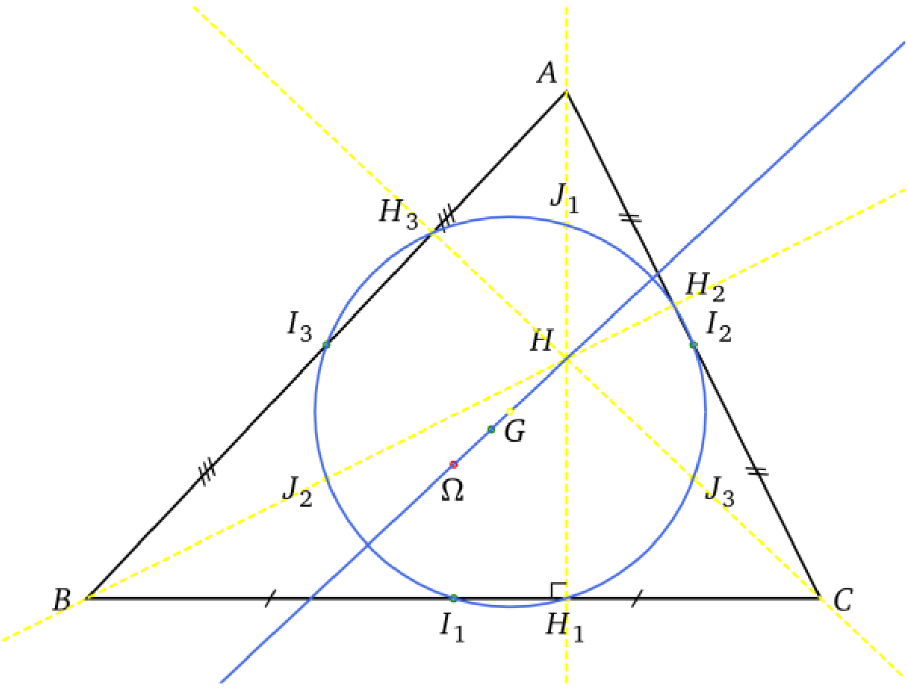
Par définition de Ω, la droite (ΩI_1) est la médiatrice du segment $[BC]$, donc lui est perpendiculaire. La relation vectorielle établie juste au-dessus montre alors que la droite (AM) est aussi perpendiculaire à $[BC]$, donc (AM) est une hauteur du triangle ABC.
De même, on montre que (BM) et (CM) sont les hauteurs de ABC donc M appartient aux trois hauteurs de ce triangle et en est donc l'orthocentre H.
On a donc

$$\overrightarrow{\Omega H} = \overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C}.$$

Par la relation de Chasles, on a :

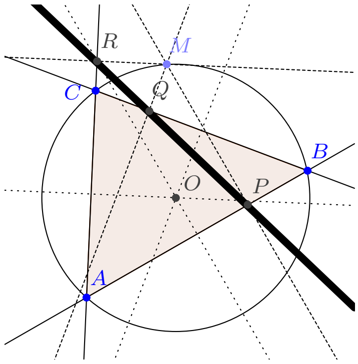
$$\overrightarrow{\Omega H} = 3\overrightarrow{\Omega G} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}.$$

Or $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ (car G est le centre de gravité du triangle ABC). Donc, on obtient finalement $\overrightarrow{\Omega H} = 3\overrightarrow{\Omega G}$, ce qui montre que les points Ω, G et H sont alignés dans cet ordre. □



7.2 Droite de Simpson

Proposition 29.33 Soit ABC un triangle, M un point du plan $\mathcal{P}$ et P, Q, R ses projetés orthogonaux sur les trois côtés du triangle. Alors P, Q, R sont alignés si et seulement si M est sur le cercle circonscrit au triangle ABC. Si c'est le cas, la droite (PQ) est appelée *droite de Simpson*.



Développement

Démonstration. On a : $(AC) \perp (RM)$ et $(AB) \perp (QM)$ donc $(\widehat{\overrightarrow{AR}, \overrightarrow{AQ}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = (\widehat{\overrightarrow{MR}, \overrightarrow{MQ}}) \pmod{\pi}$. Par le théorème de cocyclicité, les points A, M, R et Q sont cocycliques et la réciproque du théorème donne aussi :

$$(\widehat{\overrightarrow{RQ}, \overrightarrow{RM}}) = (\widehat{\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AM}}).$$

On montre de même que $(BC) \perp (PM)$ et $(AC) \perp (RM)$ impliquent $(\widehat{\overrightarrow{RM}, \overrightarrow{RP}}) = (\widehat{\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CP}}) \pmod{\pi}$. Donc :

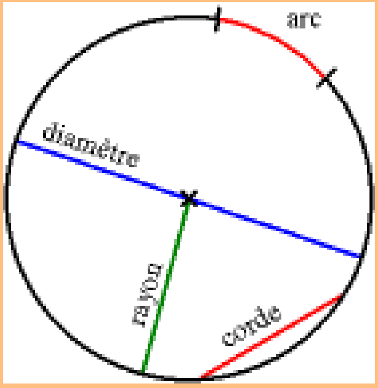
$$(\widehat{\overrightarrow{RQ}, \overrightarrow{RP}}) = (\widehat{\overrightarrow{RQ}, \overrightarrow{RM}}) = (\widehat{\overrightarrow{RM}, \overrightarrow{RP}}) = (\widehat{\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AM}}) + (\widehat{\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CP}}) \pmod{\pi}$$

de sorte que P, Q, R alignés si et seulement M appartient à $(\mathcal{C})$. □

LEÇON

30

Le cercle



Niveau : Collège (Définitions, propriétés), Première S (équation cartésienne du cercle)
Prérequis : produit scalaire (équation cartésienne du cercle)

1 Définitions

Définition 30.1

Cercle

Soit O un point du plan et r un nombre réel. Le *cercle* $\mathcal{C}$ de *centre* O et de *rayon* r est l'ensemble des points à distance r de O. Si M appartient au cercle $\mathcal{C}$ alors :

$$OM = r.$$

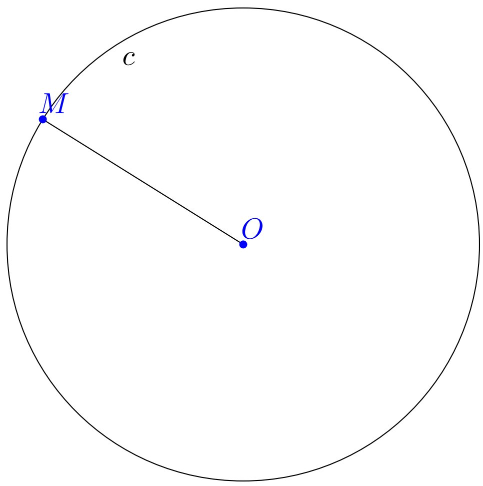


FIGURE 30.1 – Cercle de centre O et de rayon OM

Définition 30.2

Objets géométriques liés au cercle

- Une *corde* est un segment de droite dont les extrémité se trouvent sur le cercle.
- Un *arc* est une portion de cercle délimitée par deux points.
- Un *rayon* est un segment de droite joignant le centre à un point du cercle.
- Un *diamètre* est une corde passant par le centre (la longueur du diamètre est $2r$ si r est une mesure du rayon).
- Un *disque* est une région du plan limitée par un cercle.
- Un *secteur angulaire* est une partie du disque comprise entre deux rayons.
- Un *angle au centre* est un angle formé par deux rayons du cercle.

2 Quelques propriétés du cercle

2.1 Aire d'un cercle

Propriété 30.3

Aire d'un cercle

Le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon r a pour aire πr^2.

Exemple 30.4. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 3. L'aire du cercle $\mathcal{C}$ est donc de 9π.

2.2 Tangente

Définition 30.5

On dit que deux cercles sont *tangents* l'un de l'autre si leur intersection est réduit à un point.

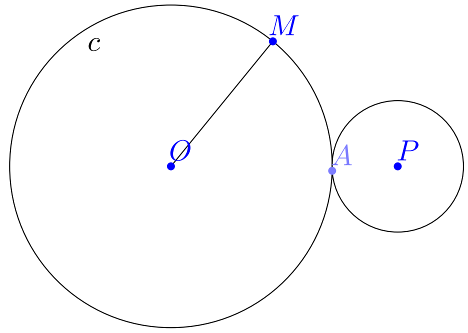


FIGURE 30.2 – Deux cercles tangents de point de contact A

Propriété 30.6

Une droite peut avoir, avec un cercle

- 0 point d'intersection
- 1 point d'intersection (tangente)
- 2 points d'intersection

Définition 30.7

Tangente au cercle

On dit qu'une droite est *tangente* à un cercle s'il n'a qu'un seul point d'intersection avec ce dernier.

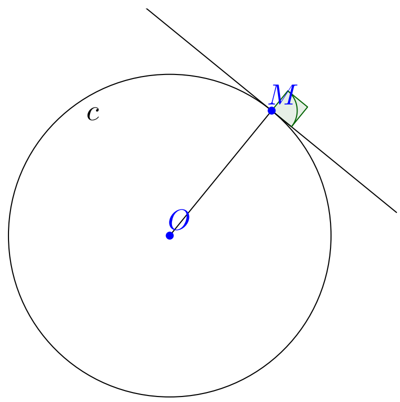


FIGURE 30.3 – Tangente au cercle de point d'intersection M

Propriété 30.8

La tangente en un point du cercle est perpendiculaire au rayon en ce point (voir la figure précédente).

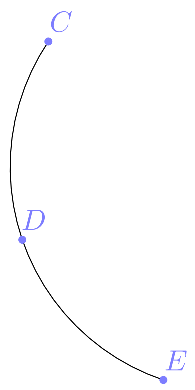
2.3 Médiatrice

Propriété 30.9

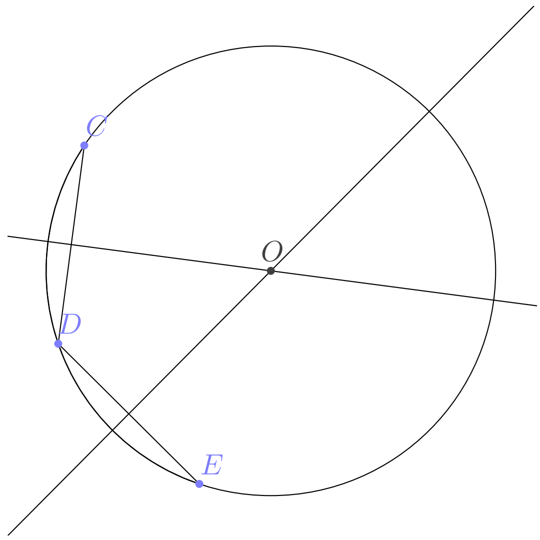
Dans un cercle, la médiatrice d'une corde passe par le centre du cercle.

Exemple 30.10. Application de la propriété 30.9

Soit l'arc de cercle passant par trois points C, D et E. On cherche le centre et le rayon du cercle dont l'arc de cercle y est confondu.



Pour cela, on trace les cordes $[DC]$ et $[DE]$. On construit les médiatrices des segments $[DC]$ et $[DE]$ et leur point d'intersection (d'après le propriété 30.9) est le centre du cercle qui contient l'arc de cercle $\overset{\frown}{CDE}$.



2.4 Angle inscrit, angle au centre

Définition 30.11

Soient A, M, B trois points distincts appartenant au cercle de centre O et de rayon quelconque :

- l'angle $\widehat{AMB}$ est un *angle inscrit* qui intercepte l'arc $\overset{\frown}{AB}$;
- l'angle $\widehat{AOB}$ est l'*angle au centre* qui intercepte l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

Propriété 30.12

Un angle inscrit mesure la moitié de l'angle au centre qui intercepte le même arc.

Conséquence 30.13

Deux angles inscrits qui interceptent le même arc ont la même mesure.

3 Equation cartésienne du cercle

Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé du plan.

Définition 30.14

Cercle défini par son centre et son rayon

Le cercle de centre $O(a, b)$ et de rayon r a pour équation cartésienne :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

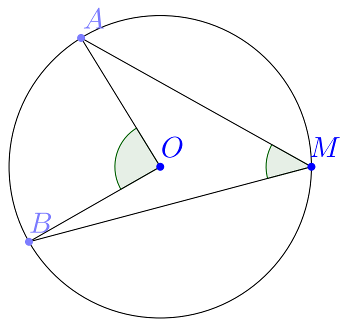


FIGURE 30.4 – Théorème de l'angle inscrit et de l'angle au centre

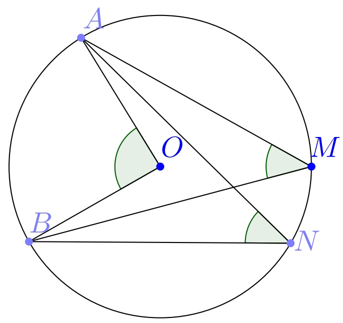


FIGURE 30.5 – $\widehat{ANB} = \widehat{AMB}$ car ils interceptent l'arc AB.

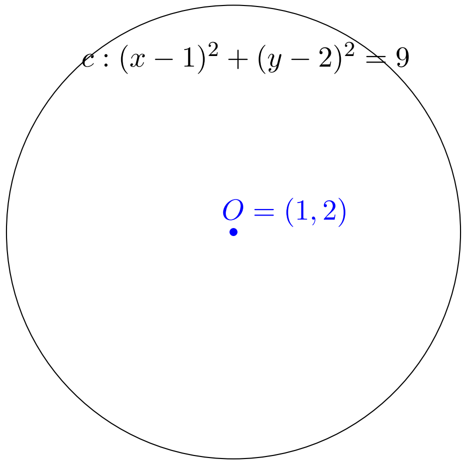


FIGURE 30.6 – Equation cartésienne d'un cercle de centre $O(1,2)$ et de rayon 3

Définition 30.15

Cercle défini par son diamètre

Un point M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$. Si $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ alors le cercle de diamètre $[AB]$ a pour équation cartésienne :

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0.$$

Définition 30.16

Forme générale d'une équation cartésienne de cercle

En développant les expressions précédente on voit qu'une équation cartésienne de cercle peut s'écrire sous la forme :

$$x^2 + y^2 + mx + py + q = 0.$$

Remarque 30.17. La réciproque est fausse.

Exemples 30.18.

1. L'équation $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$ peut s'écrire :

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 + 6 - 1 - 9 = 0.$$

   On obtient alors :

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 4 = 2^2.$$

   Ceci est l'équation du cercle de centre $A(1, -3)$ et de rayon 2.

2. L'équation $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 20 = 0$ va s'écrire :

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 + 20 - 4 - 16 = 0.$$

   On obtient alors :

$$(x+2)^2 + (y-4)^2 = 0.$$

   Cette égalité est seulement vraie pour les coordonnées du point $A(-2, 4)$. L'égalité ci-dessus n'est donc pas une équation de cercle.

3. L'équation $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 15 = 0$ s'écrit :

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 + 15 - 9 - 1 = 0.$$

   On obtient alors

$$(x+3)^2 + (y-1)^2 = -5.$$

   Or une somme de deux carrés ne peut pas être négative. Il n'y a donc pas de solutions pour l'équation précédent. Ce n'est donc pas l'équation d'un cercle.

4 Puissance d'un point par rapport à un cercle

Si M est un point et Γ est le cercle de centre O et de rayon R, alors pour toute droite passant par M et rencontrant le cercle en A et en B, on a :

$$MA \times MB = \left|OM^2 - R^2\right|.$$

Cette valeur ne dépend pas de la droite choisie, mais seulement de la position de M par rapport au cercle.

Remarques 30.19.

– Si M est à l'extérieur du cercle,

$$MA \times MB = OM^2 - R^2$$

– Si M est à l'intérieur du cercle,

$$OM^2 - R^2 = -MA \times MB.$$

Définition 30.20

Puissance d'un point par rapport au cercle

On appelle *puissance du point M* par rapport au cercle Γ le produit des mesures algébriques $\overline{MA}$ et $\overline{MB}$ (c'est-à-dire la valeur $-MA \times MB$). Ce produit est indépendant de la droite choisie et vaut toujours $OM^2 - R^2$.

Lorsque le point M est à l'extérieur du cercle, il est possible de mener des tangentes au cercle. En appelant T le point de contact d'une de ces tangentes, d'après le théorème de Pythagore dans le triangle OMT, la puissance de M est MT^2. L'égalité

$$MA \times MB = MT^2$$

est suffisante pour affirmer que la droite (MT) est tangente au cercle.

Propriété 30.21

Si

– A, B, C, D sont quatre points tels que (AB) et (CD) se coupent en M

– $\overline{MA} \times \overline{MB} = \overline{MC} \times \overline{MD}$ (en mesures algébriques)

alors les quatre points sont cocycliques.

5 Le cercle vue comme une conique

Définition 30.22

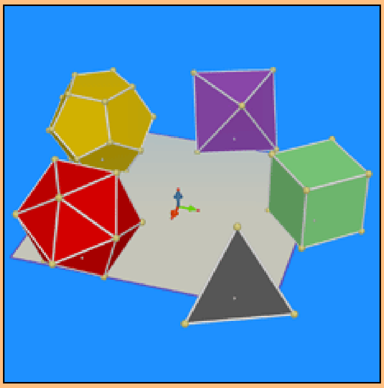
Le *cercle* est une ellipse dont les foyers sont confondus au centre du cercle ; la longueur du grand axe est égale à la longueur du petit axe.

C'est une conique dont *l'excentricité* e vaut 0. Elle peut être obtenue par l'intersection d'un plan avec un cône de révolution lorsque le plan est perpendiculaire à l'axe de révolution du cône (ou « section droite » du cône).

LEÇON

31

Solides de l'espace



Niveau : Tous niveaux
Prérequis : intégrales, géométrie dans l'espace

On se place dans l'espace $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3.

1 Défintions

1.1 Définition de la vie courante

Définition 31.1

Solide

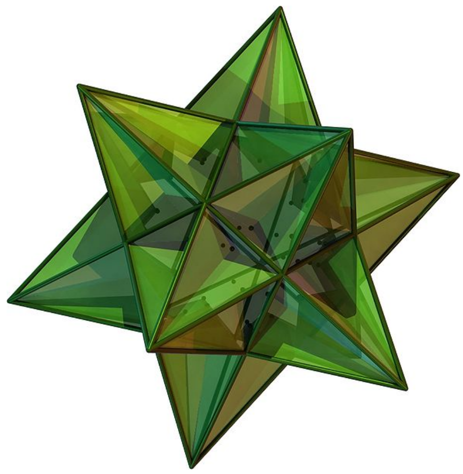
Un solide dans l'espace est un ensemble de points situés à l'intérieur d'une partie fermée de l'espace.

Définition 31.2

Polyèdre

Lorsque ces solides sont déterminés par des surfaces planes polygonales, on les appelle « *polyèdres* ».

Ces surfaces sont alors appelées *faces*, dont les côtés sont des arpetes ayant pour extrémités des sommets du polyèdre.



Définition 31.3

Volume

On appelle *volume* la portion de l'espace occupée par un solide.

Définition 31.4

Patron

Un *patron* d'un solide est un modèle plan permettant de construire par pliage, le solide.

1.2 Définition selon de grands mathématiciens

Définition 31.5

Selon Platon

Est solide ce qui possède longueur, largueur et profondeur, et la limite d'un solide est une surface.

Définition 31.6

Selon Leibniz

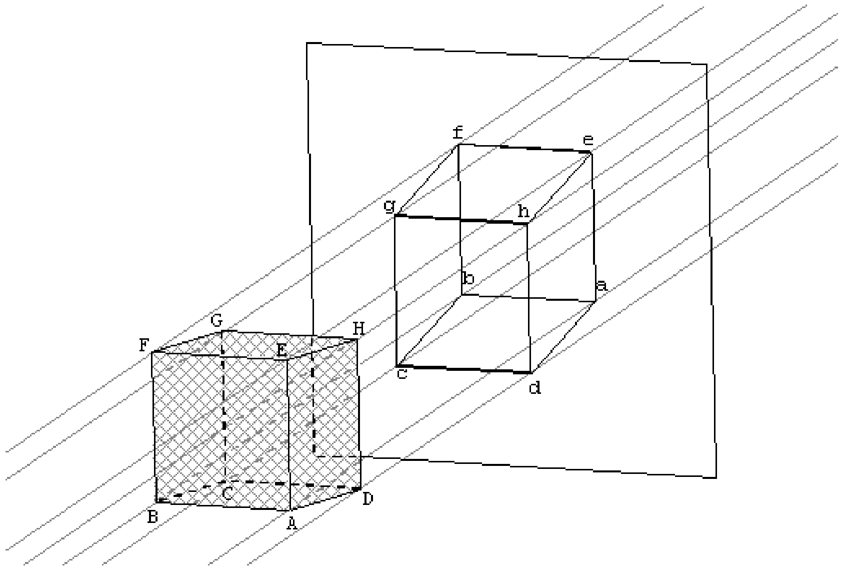
Le chemin suivi par un point se déplaçant vers un autre est une ligne (...) Le déplacement de cette ligne dont les points ne se remplacent pas sans cesse donne une surface. Le déplacement d'une surface dont les points ne se remplacent pas sans cesse donne un solide.

2 Règles de la perspective cavalière

2.1 Notion de perspective

Définition 31.7

La perspective est une technique de représentation des solides sur une surface plane.



Remarque 31.8. La perspective cavalière donne une meilleure idée de la forme réelle du cube dans l'espace.

2.2 Règles de construction

Théorème 31.9

Règles de construction d'un solide en perspective cavalière

– Les éléments cachés sont tracés en pointillés, les éléments visibles sont en trait plein.
– Les éléments situés dans un plan vu de face (frontal) sont représentés en vraie grandeur.
– Les droites perpendicualires au plan frontal sont représentées par des droites parallèles formant un angle (de fuite) avec l'horizontale.
– Les longueurs représentées dans la direction des lignes fuyantes ne sont pas les longueurs réelles (on les réduite par un coefficient de réduction en général $0,5$ ou $0,7$.

2.3 Propriétés de la perspective cavalière

Propriétés 31.10

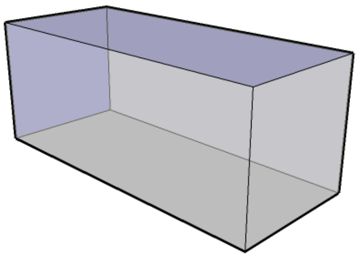
– Deux droites parallèles sont représentées par deux droites parallèles.
– Deux droites sécantes sont représentées par deux droites sécantes.
– Des points alignés sont représentées par des points alignés.
– Les milieux de segments sont conservés.

3 Solides usuelles

3.1 Parallélépipèdes rectangles (ou pavés droits)

Définition 31.11

Un parallélépipède rectangle est un polyèdre dont toutes les faces sont rectangulaires.
Il y a 6 faces, 8 sommets et 12 arrêtes.



Remarque 31.12. Si toutes les faces du parallélépipède rectangle sont des carrés, on appelle ce solide, un cube.

Propriété 31.13

Si on note L, l et h les dimensions du pavé droit, alors :

- le volume est : $L \times l \times h$;
- l'aire est $2 \times (Ll + lh + Lh)$;
- la grande diagonale mesure $\sqrt{L^2 + l^2 + h^2}$.

Propriété 31.14

La section d'un pavé droit avec un plan parallèle à une face est un rectangle de même mesure que cette face.

La section d'un pavé droit avec un plan parallèle à une arrête est un rectangle dont les mesures dépendent du plan.

Développement

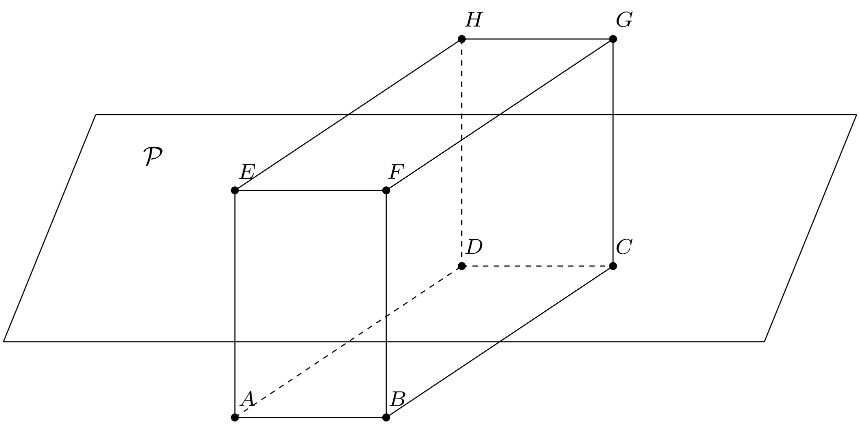
Pour la démonstration de la propriété 31.14, on aura besoin du résultat suivant :

Théorème 31.15

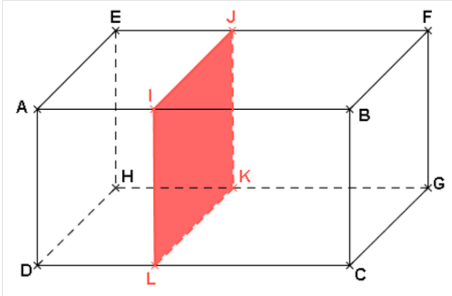
« Théorème du toit »

Si deux plans distincts (non parallèles) contiennent deux droites parallèles, alors l'intersection de ces deux plans est une droite parallèle aux deux autres, c'est-à-dire, si $(d_1) \subset \mathcal{P}_1$, $(d_2) \subset \mathcal{P}_2$ et si $(d_3) = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ alors $(d_3) // (d_1)$ et $(d_2) // (d_3)$.

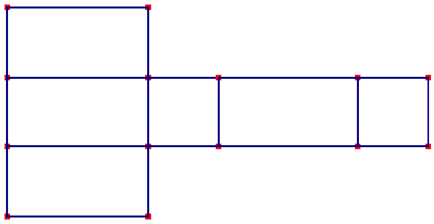
Démonstration de la propriété 31.14.



Soit $\mathcal{P}$ un plan d'intersection parallèle avec (FB). On montre que l'intersection est un rectangle.
Puisque $\mathcal{P} // (FB)$, $\mathcal{P} \cap (BGC)$ est parallèle à (BF). On montre de même que $\mathcal{P} \cap (EAD)$ est parallèle à (EA).
Donc les côtés opposés $\mathcal{P} \cap (BGC)$ et $\mathcal{P} \cap (EAD)$ sont parallèles. Ainsi, en utilisant le théorème de Thalès dans l'espace, on montre qu'ils sont de même longueur.
De plus, puisque $\mathcal{P} \cap (BCG)$ est parallèle à (BF), elle est orthogonale à (ABC), et en particulier à la droite $\mathcal{P} \cap (ABC)$.
On a donc un parallélogramme avec un angle droit, c'est un rectangle. □



On donne ci-dessous le patron du parallélépipède rectangle.



3 2 Prismes et cylindres

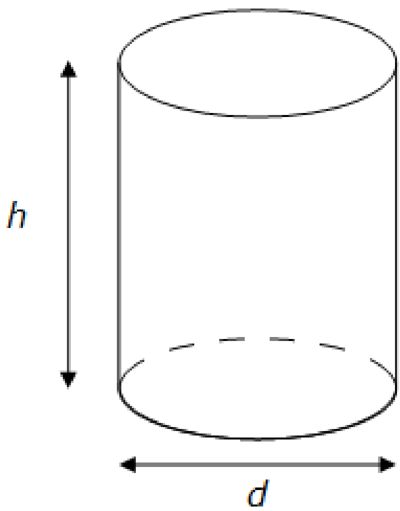
Définition 31.16

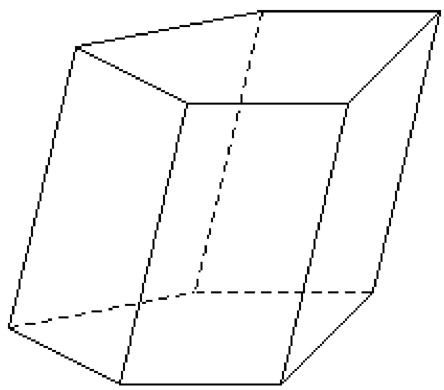
Soit $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans parallèles et M un point de $\mathcal{P}_1$.

Soit un polygone $\mathcal{P}$ et un cercle $\mathcal{C}$ inclus dans $\mathcal{P}_1$. On considère la droite (d) passant par M et non parallèle à $\mathcal{P}_1$.

On appelle *prisme* (resp. *cylindre*) le solide délimité par la surface latérale que décrit (d) quand M décrit $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{C}$).

On appelle (d) *génératrice* du prisme (resp. cylindre) et la distance entre $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ est appelé *hauteur*.





Remarques 31.17.

a. Lorsque (d) est orthogonal à $\mathcal{P}_1$, on dit que le prisme (resp. cylindre) est droit (resp. de révolution).

b. Les pavés sont des prismes droits.

Propriété 31.18

– Le volume du prisme et du cylindre est égal à :

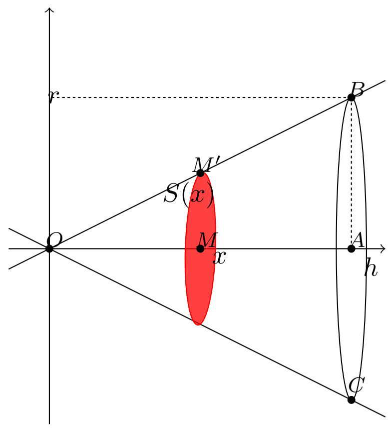
$$\mathcal{V} = \text{aire de la base} \times \text{hauteur}.$$

– L'aire du prisme et du cylindre est égal à :

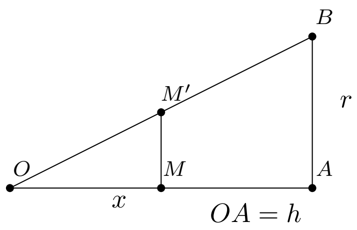
$$\mathcal{A} = \text{périmètre de la base} \times \text{hauteur} + 2 \times \text{aire de la base}.$$

Développement

Démonstration.



On coupe le cône par un plan passant par la droite (OA) et on obtient le triangle OAB suivant :



D'après le théorèm de Thalès :

$$MM'\frac{rx}{h}$$

donc

$$S(x) = \pi = \left(\frac{rx}{h}\right)^2.$$

$$\mathcal{V} = \int_0^h \frac{\pi}{r^2} h^2 x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{\pi r^2}{h^2} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

Soit :

$$\mathcal{V} = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}.$$

On peut faire de même pour démontrer le volume de la pyramide. □

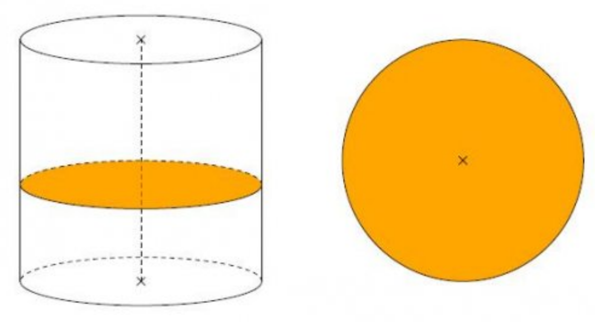
Propriété 31.19

La section d'un cylindre de révolution ou d'un prisme droit avec un plan parallèle à la base est une figure identique à la base.

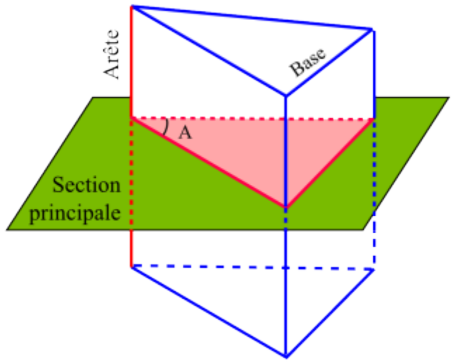
La section d'un prise droit (resp. d'un cylindre de révolution) avec un plan parallèle à une arête (resp. avec la hateur) est un rectangle.

Développement

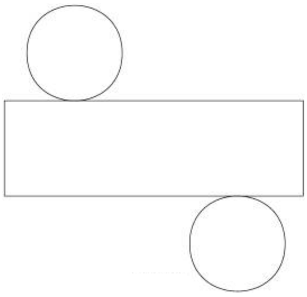
Démonstration. On peut utiliser le théorème de Thalès dans l'espace. □

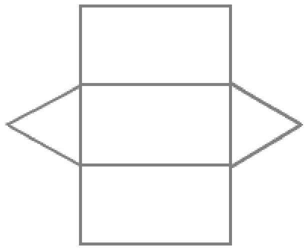


Vue en perspective Vue de dessus



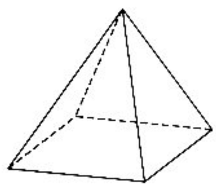
On donne ci-dessous les patrons du cylindre droit et du prisme.





3.3 Pyramide

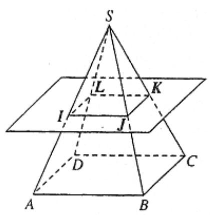
Définition 31.20 Une *pyramide* est un solide à base qui peut être quelconque (rectangulaire, carré, ou triangulaire) et les faces latérales sont des triangles.



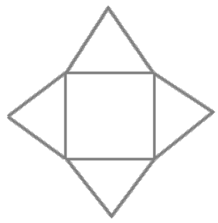
Propriété 31.21 Si on note c le côté de la base et h la hauteur de la pyramide alors :

$$\mathcal{V} = \frac{B \times h}{3} = \frac{c^2 \times h}{3}$$

Propriété 31.22 La section d'une pyramide avec un plan parallèle à la base est une réduction de la base de rapport $\frac{IJ}{AB}$.



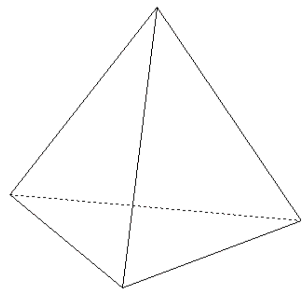
On donne ci-dessous le patron d'une pyarmide :



Définition 31.23

Tétraèdre

Un *tétraèdre* est une pyramide à base triangulaire.



Propriété 31.24

Si on note h la hauteur du tétraèdre et B l'aire de sa base alors :

$$\mathcal{V} = \frac{B \times h}{3}.$$

Propriété 31.25

Section du tétraèdre

Si $\mathcal{P}$ est parallèle à l'une des faces, la section est un triangle dont les côtés sont parallèles à ceux de la base.

4 Solides de révolution

4.1 Définition

Définition 31.26

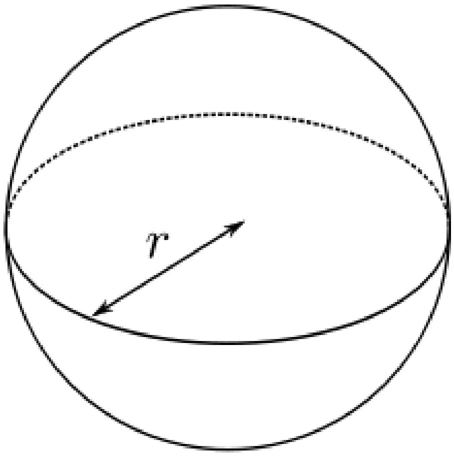
Un *solide de révolution* est engendré par une surface plane fermée tournant autour d'un axe.

4.2 Boule et sphère

Définition 31.27

Boule et sphère

Une *boule* est un solide de révolution (on a fait tourner un cercle sur un axe). La *sphère* de centre$O$ et de rayon r est le bord de la boule de même centre et de même rayon. C'est l'ensemble des points qui sont à distance r du point O.



Propriété 31.28

En muniisant l'espace d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, $M(x, y, z)$ appartient à la sphère de centre $A(x_A, y_A, z_A)$ et de rayon R si et seulement si :

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = R^2.$$

Propriété 31.29

Le volume d'une sphère de rayon R est :

$$\mathcal{V} = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

L'aire d'une sphère de rayon R est :

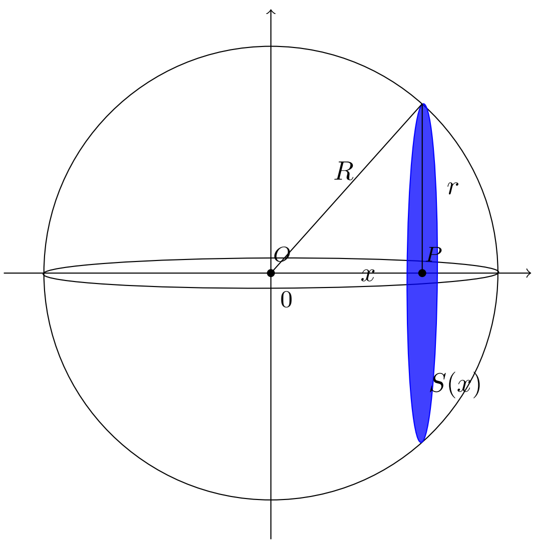
$$\mathcal{A} = 4\pi R^2.$$

Remarque 31.30. La formule du volume peut se démontrer de multiples façons selon le niveau : au collège en admettant le principe de Cavalieri, au lycée par une intégrale simple en supposant que le volume puisse s'obtenir en intégrant une surface le long d'un segment, et en BTS à l'aide d'intégrale triple.

Pour l'aire on peut tenter de justifier le fait qu'il suffise de dériver le volume (en supposant l'aire comme la limite d'un volume lorsque la hauteur tend vers 0). Une démonstration plus rigoureuse est possible en BTS grâce aux coordonnées sphériques et à une intégrale double.

Développement

Une démonstration proposée en TS.



Avec le théorème de Pythagore, on peut affirmer que le rayon du disque d'intersection est : $r = \sqrt{R^2 - x^2}$. D'où :

$$\mathcal{V} = \int_{-R}^{R} S(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = 2\pi\left(\pi R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

$\square$

Une démonstration proposée en BTS. On rappelle les coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} x = R\cos\theta\sin\varphi \\ y = R\sin\theta\sin\varphi \\ z = R\cos\varphi \end{cases}$$

Or : $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = R^2 \times |\sin\varphi|\,\mathrm{d}R\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$ (R^2 est le déterminant de la matrice jacobienne). Si on note $\mathcal{S}$ la sphère :

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} R^2\sin\varphi\,\mathrm{d}R\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{R^3}{3}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\frac{2R^3}{3}\,\mathrm{d}\theta = \frac{4\pi R^3}{3} \end{aligned}$$

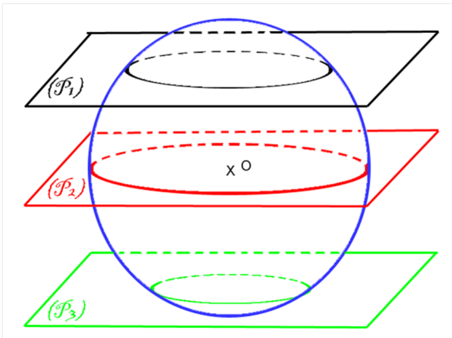
et pour l'aire, R ne varie pas :

$$\mathcal{A} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} R^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} 2R^2\,\mathrm{d}\theta = 4\pi R^2.$$

$\square$

Propriété 31.31

L'intersection d'une sphère et d'un plan est soit :
- vide ;
- un point (on dit alors que le plan est tangent à la sphère) ;
- un cercle.



Développement

Démonstration. On peut toujours se ramener à un repère où l'équation du plan est $z = 0$. L'équation de la sphère dans ce repère est alors :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = 4^2.$$

On a ainsi :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{P} \cap \mathcal{S} &\Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 - z_0^2 \end{cases} \end{aligned}$$

On a alors trois cas :
- $|R| < |z_0|$: pas de solution, l'intersection est vide.
- $|R| > |z_0|$: c'est exactementl'équation d'un cercle de centre (x_0, y_0) et de rayon $\sqrt{R^2 - z_0^2}$ dans le plan $z = 0$.
- $|R| = |z_0|$: $S = \{(x_0, y_0, 0)\}$, l'intersection est un point.

□

Exercice 31.32. Déterminer l'intersection de $\mathcal{P} : x+y-2z=9=0$ avec la sphère de centre $(6,5,4)$ et de rayon 6.

Développement

Démonstration. On calcule la distance de Ω, centre de la sphère au plan $\mathcal{P}$:

$$d(\Omega,\mathcal{P}) = \frac{|6+5-2\times 4-9|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} < 6.$$

L'intersection est un cercle, de centre $M(x_M, y_M, z_M)$. Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ un vecteur normal de $\mathcal{P}$. On a :

$$\overrightarrow{\Omega M}//\vec{n} \Leftrightarrow C\begin{cases} x_M = 6+\lambda \\ y_M = 5+\lambda \\ z_M = 4-2\lambda \end{cases}$$

et

$$\Omega M^2 = 6 \Rightarrow \lambda^2+\lambda^2+4\lambda^2 = 6 \Rightarrow \lambda^2 = 1$$

donc $\lambda = \pm 1$. On a alors $M(7,6,2)$ ou $M(5,4,6)$. Puisque $M\in\mathcal{P}$, on doit avoir $x_M+y_M-2z_M = 9$ donc :

$$M(7,6,2) \quad \text{convient.}$$

Pour avoir le rayon du disque, on utilise Pythagore :

$$r'^2 = 36-6 = 30 \Rightarrow r' = \sqrt{30}.$$

On en conclut que :

$$\mathcal{P}\cap\mathcal{S}_{\Omega,6} = \mathcal{C}_{(7,6,2),\sqrt{30}}.$$

□

5 Solides de Platon

Définition 31.33

Solide de Platon

Un *solide de Platon* est un polyèdre régulier, c'est-à-dire inscriptible dans une sphère et toutes ses faces sont des polygones réguliers isométriques.

Propriété 31.34

Chaque solide de Platon vérifie la formule d'Euler :

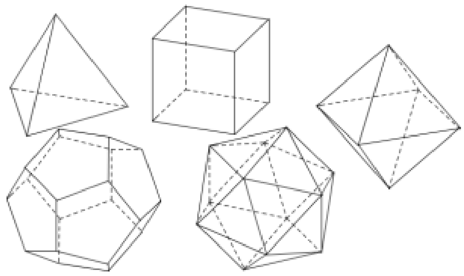
$$F+S = A+2$$

avec F le nombre de faces, A le nombre d'arrêtes et S le nombre de sommets.

Théorème 31.35

Il y a 5 solides de Platon :

1. l'icosaèdre qui est composé de 20 faces (qui sont des triangles équilatéraux), 12 sommets et 30 arrêtes ;
2. le dodécaèdre qui est composé de 12 faces (qui sont des pentagones réguliers), 20 sommets et 30 arrêtes ;
3. l'octaèdre qui est composé de 8 faces (qui sont des triangles équilatéraux), 6 sommets et 12 arrêtes ;
4. le cube qui est composé de 6 faces (qui sont des carrés), 8 sommets et 12 arrêtes ;
5. le tétraèdre qui est composé de 4 faces (qui sont des triangles équilatéraux), 4 sommets et 6 arrêtes.



Développement

Démonstration. On montre qu'il y a cinq et seulement cinq solides de Platon. On considère un polyèdre régulier et on note s le nombre de sommets, f le nombre de faces et a le nombre d'arrêtes du polyèdre. On note aussi q le nombre de côtés du polygone régulier qui constitue la face du polyèdre et p le nombre de faces qui aboutissent chacun de ses sommets. On a alors : $fq = 2a$ et $sp = 2a$. Il s'agit donc de résoudre :

$$\begin{cases} s - a + f = 2 \\ fq = 2a \\ sp = 2a \end{cases}$$

d'où

$$s = \frac{4q}{2p + 2q - pq}, \quad a = \frac{2pq}{2p + 2q - pq}, \quad f = \frac{4p}{2p + 2q - pq}.$$

On recherche alors tous les couples d'entiers (p, q) vérifiant $p \geq 3$, $q \geq 3$ et $2p + 2q - pq > 0$ et on en obtient exactement 5 :

$$(3, 3),\ (4, 3),\ (3, 4),\ (5, 3),\ (3, 5),$$

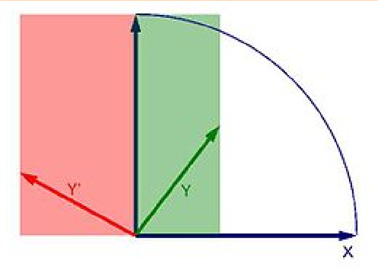
desquels on déduit les triples (s, a, f) correspondants :

$$(4, 6, 4),\ (6, 12, 8),\ (8, 12, 6),\ (12, 30, 20),\ (20, 30, 12).$$

□

LEÇON 32

Produit scalaire



Niveau : Première S
Prérequis : vecteurs, norme de vecteurs

1 Définition

Définition 32.1

Produit scalaire

On appelle *produit scalaire* des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\vec{u} \cdot \vec{v}$ le nombre réel défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 .\right]$$

Remarque 32.2. Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Théorème 32.3

Si $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est un repère orthonormée (c'est-à-dire $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est une base orthonormale) et si $\vec{u} = (x, y)$ et $\vec{v} = (x', y')$ alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

Développement

Démonstration du théorème 32.3. On a : $\vec{u} + \vec{v} = (x + x', y + y')$ et donc :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (x + x')^2 + (y + y')^2.$$

D'où :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left[(x + x')^2 + (y + y')^2 - (x^2 + y^2) - (x'^2 + y'^2)\right] = xx' + yy'.$$

□

Exemple 32.4. Soit $\vec{u} = (3, -1)$ et $\vec{v} = (2, 6)$ alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 2 + (-1) \times 6 = 6 - 6 = 0.$$

On dira que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

2 Propriétés

Propriétés 32.5

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$:

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
2. $\vec{0} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{0} = 0$
3. Pour tout réel k, $k\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$
4. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
5. $\vec{u} \cdot \vec{u}$ est noté $\vec{u}^2$ est appelé carré scalaire de $\vec{u}$.
6. $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ (carré de la longueur du vecteur $\vec{u}$)
7. $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$ (cela signifie que $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{v}$)
8. $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$
9. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

Développement

Démonstration des propriétés 32.5-1, 32.5-3 et 32.5-4. 1. D'après la définition du produit scalaire :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right] = \left[\|\vec{v}+\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2\right] = \vec{v}\cdot\vec{u}.$$

3. On se donne un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et trois vecteurs $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$, $\vec{w} = (x_3, y_3)$. On utilise la formule du théorème 32.3 :

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) &= x_1(x_2+x_3) + y_1(y_2+y_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + y_1y_2 + y_1y_3\\ &= x_1x_2 + y_1y_2 + x_1x_3 + y_1y_3 = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}.\end{aligned}$$

4. De même,

$$\begin{aligned}(k\vec{u})\cdot\vec{v} &= kx_1x_2 + ky_1y_2 = kx_2x_1 + ky_2y_1 = \vec{u}\cdot(k\vec{v})\\ &= kx_1x_2 + ky_1y_2 = k(x_1x_2 + y_1y_2) = k\times(\vec{u}\cdot\vec{v}).\end{aligned}$$

□

Propriété 32.6

Dire que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux équivaut à dire que $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

Remarque 32.7. Si on note $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$:

$$\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 \Leftrightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

3 Autres expressions du produit scalaire

Théorème 32.8

Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v}).$$

Propriété 32.9

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls *colinéaires* :

1. S'ils ont même sens alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$
2. S'ils ont sens contraire alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = -\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$.

Exemple 32.10. Si $\vec{u} = \frac{3}{2}\vec{v}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3\times 2 = 6$.

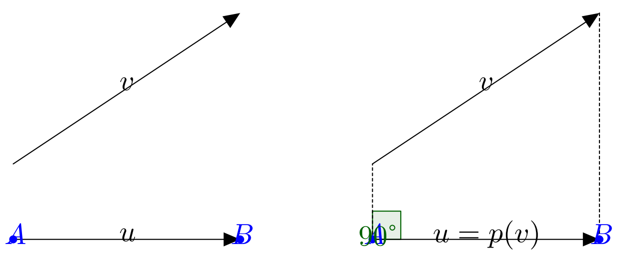


FIGURE 32.1 – Projection orthogonale de v sur une droite portant u

Propriété 32.11

Etant donné deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Si on note $p(\vec{v})$, la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur une droite portant $\vec{u}$ alors on a :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot p(\vec{v}).$$

Exemple 32.12.

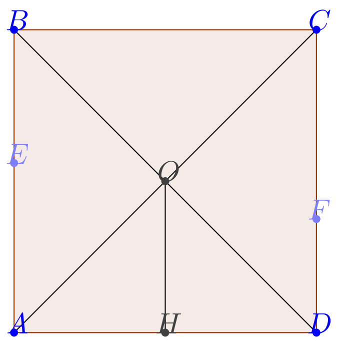


FIGURE 32.2 – Figure de l'exemple

- $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ car $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.
- $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} = -3 \times 3 = -9$ car $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires et de sens contraires.
- $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AH} = 3 \times 1,5 = 4,5$ car le projeté orthogonale de $\overrightarrow{AO}$ sur (AD) est $\overrightarrow{AH}$ et que $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de même sens.
- Les produits scalaires $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{EF}$ sont tous égaux entre eux. En effet, si on projette orthogonalement $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sur (AD), on obtient à chaque fois $\overrightarrow{AD}$. Donc tous ces produits scalaires sont égaux à $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = 3 \times 3 = 9$.

Développement

Démonstration. On part du principe que l'on ait démontré :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\| - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

1. Supposons que $\vec{u} \neq 0$ et $\vec{v} \neq 0$. On pose $\vec{\imath} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$. Soit $\vec{\jmath}$ le vecteur tel que $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}) = \frac{\pi}{2}$ et $\|\vec{\jmath}\| = 1$. Ainsi, nous avons ainsi construit une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormale directe. Dans cette base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on a, en notant $\theta = (\vec{u}, \vec{v})$:
$$\vec{u}(\|\vec{u}\|, 0)\ ;\ \vec{v}(\|\vec{v}\| \cos\theta, \|\vec{v}\|, \sin\theta)\ ;\ \vec{v'}(\|\vec{v}\| \cos\theta, 0)$$
où l'on note $\vec{v'}$ le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$. D'où :
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos\theta \quad \text{et} \quad \vec{u} \cdot \vec{v'} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos\theta.$$
D'où les formules des propriétés précédemment citées.
2. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\theta = (\vec{u}, \vec{v}) = 0$ et $\cos\theta = 1$.

□

4 Applications

4.1 Vecteur normal à une droite

Définition 32.13 On dit qu'un vecteur $\vec{n}$ est normal à une droite $\mathcal{D}$ si $\vec{n} \neq \vec{0}$ et si $\vec{n}$ est orthogonal à la direction de $\mathcal{D}$.

Théorème 32.14 Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$

$$M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = \vec{0}.$$

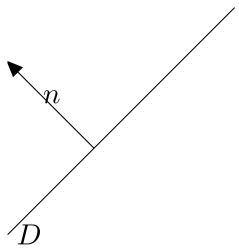


FIGURE 32.3 – Le vecteur n est normale à la droite D

Théorème 32.15

Soit $\mathcal{D}$ une droite d'équation $ux + vy + w = 0$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Le vecteur $\vec{n}(u, v)$ est normal à $\mathcal{D}$.

4 2 Relations dans un triangle

Théorème 32.16

Formule d'Al-Kashi

Dans un triangle ABC,

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}.$$

Développement

Démonstration du théorème 32.16. Si on note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$, on a :

$$a^2 = BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = BA^2 + AC^2 + 2(\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}) = c^2 + b^2 + 2b\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC})$$

Or $\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}) = \cos[\pi + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})] = -\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\cos \widehat{A}$. □

Théorème 32.17

Formule des 3 sinus

Soit ABC un triangle (on note $a = BC$, $b = AC$, $c = BA$), S l'aire de ce triangle et R le rayon du cercle circonscrit au triangle :

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = \frac{abc}{2S} = 2R.$$

Développement

Démonstration du théorème 32.17. On note H le pied de la hatueur issue de A dans le triangle ABC.

- Dans le cas où $\widehat{B}$ est obtus, $AH = AB\sin(\pi - \widehat{B}) = AB\sin \widehat{B} = c\sin \widehat{B}$.
- Dans le cas où $\widehat{B}$ est aigu, $AH = AB\sin \widehat{B} = c\sin \widehat{B}$.

Donc, dans tous les cas, $AH = c\sin \widehat{B}$ et $S = \frac{1}{2}BC \cdot AH = \frac{1}{2}ac\sin \widehat{B}$. D'où

$$S = \frac{1}{2}ac\sin \widehat{B} = \frac{1}{2}ab\sin \widehat{C} = \frac{1}{2}bc\sin \widehat{A}.$$

□

4.3 Relations et équations trigonométriques

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs unitaires dans une base orthonormée directe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ tels que $(\vec{\imath}, \vec{u}) = b$ et $(\vec{\imath}, \vec{v}) = a$. On a

$$\vec{u} = \cos b \cdot \vec{\imath} + \sin b \cdot \vec{\jmath} = \cos a \cdot \vec{\imath} + \sin a \cdot \vec{\jmath}.$$

Donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$. De plus, $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{\imath}, \vec{v}) - (\vec{\imath}, \vec{u}) = a - b$. Donc :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos(a - b).$$

D'où :

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

En remplaçant a par $\frac{\pi}{2} - a$, on obtient :

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$$

À partir de ces formules, on déduit les suivantes :

$$\begin{aligned}
\cos(a + b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\
\sin(a - b) &= \sin a \cos b - \sin b \cos a \\
\sin 2a &= 2 \sin a \cos a \\
\cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a.
\end{aligned}$$

On a aussi

$$\cos X = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} X = \alpha + 2k\pi \\ X = -\alpha + 2k\pi \end{cases}, \; k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin X = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} X = \alpha + 2k\pi \\ X = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases}, \; k \in \mathbb{Z}.$$

4.4 Recherche de lieux géométriques

1. On cherche tout d'abord l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = k$.

Propriété 32.18

Soit I le milieu du segment $[AB]$ (avec $A \neq B$). Pour tout point M, on a :

$$MA^2 + MB^2 = 2IM^2 + \frac{AB^2}{2} \quad \text{(Théorème de la médiane).}$$

Etant donné un réel k, on en déduit que l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = k$ est un cercle, ou un point ou l'ensemble vide.

Exemple 32.19. Soit A et B deux points tels que $AB = 2$. On cherche à déterminer l'ensemble E des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 20$. On utilise le théorème de la médiane :

$$MA^2 + MB^2 = 20 \Leftrightarrow 2IM^2 + \frac{AB^2}{2} = 20 \Leftrightarrow 2IM^2 + \frac{4}{2} = 20 \Leftrightarrow IM^2 = 9 \Leftrightarrow IM = 3$$

(car $IM > 0$). L'ensemble E est donc le cercle de centre I et de rayon 3.

2. On cherche à déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$. Pour cela, on décompose $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ en passant par I le milieu de $[AB]$.

Exemple 32.20. Soit A et B deux points tels que $AB = 4$. On cherche à déterminer l'ensemble E des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 12$.

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 12 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = 12.$$

Or, $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$. On a donc :

$$(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = 12 \Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = 12 \Leftrightarrow MI^2 - 2^2 = 12.$$

On en déduit que $M \in E \Leftrightarrow MI^2 = 16 \Leftrightarrow MI = 4$. E est donc le cercle de centre I et de rayon 4

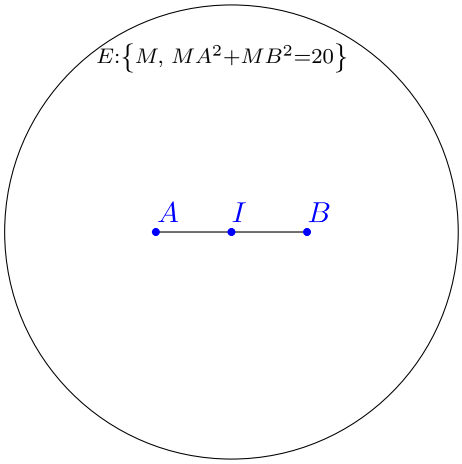


FIGURE 32.4 – Construction de l'ensemble E de l'exemple

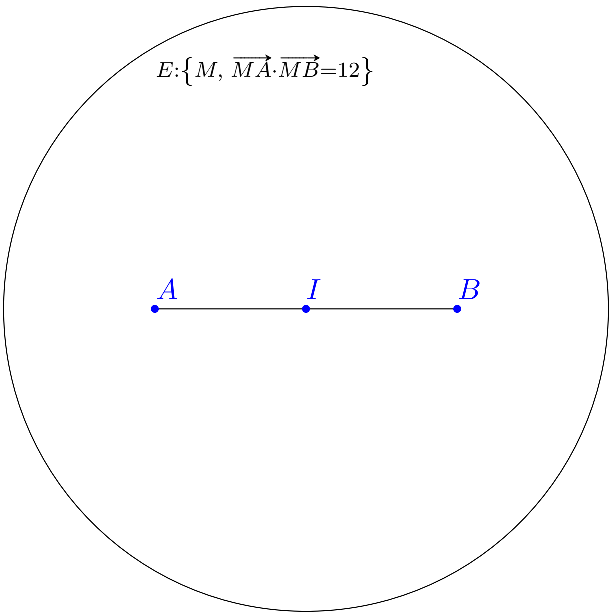


FIGURE 32.5 – Construction de E de l'exemple

3. On cherche à déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = k$. Pour cela, on cherche un point particulier H appartenant à l'ensemble. On a alors $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = k$. Ainsi,

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = k \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AH}) \cdot \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \perp \vec{u}.$$

L'ensemble est alors la droite passant par H de vecteur normal $\vec{u}$.

Exemple 32.21. Soit A et B deux points tels que $AB = 3$. On cherche à déterminer l'ensemble E des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = -6$. Soit H le point de la droite (AB) tel que $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient de sens contraires et tel que $AH \times AB = 6 \Leftrightarrow AH = \frac{6}{3} = 2$. Ainsi, on a bien $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = -6$. Dès lors :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = -6 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AH}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \perp \overrightarrow{AB}.$$

L'ensemble E est alors la droite perpendiculaire à (AB) passant par H.

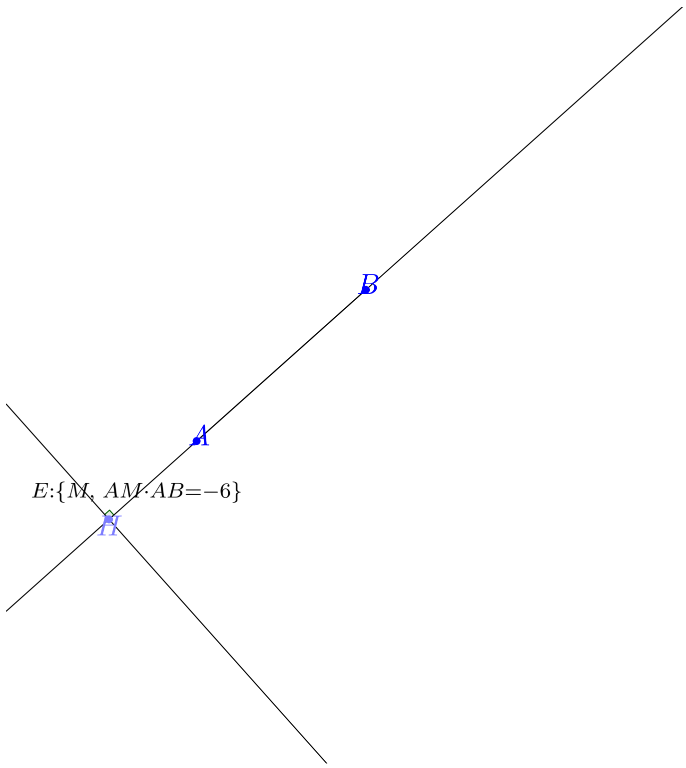
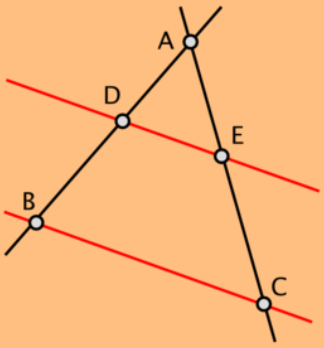


FIGURE 32.6 – Construction de E de l'exemple

LEÇON

33

Théorème de Thalès



Niveau : De la 3^e à Supérieur

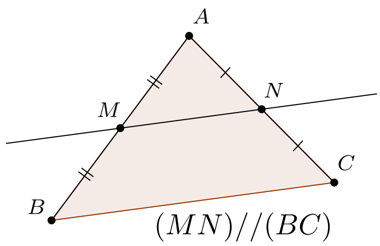
Prérequis : notions de proportionnalité

1 Rappels de quatrième

1 1 Droites des milieux

Théorème 33.1

Dans un triangle, si une droite pas par le milieu d'un côté et est parallèle à un deuxième côté alors, elle coupe le troisième côté en son milieu.



Théorème 33.2

Dans un triangle, si une droite passe par le milieu de deux côtés aalors elle est parallèle au troisième côté.

Théorème 33.3

Dans les deux configurations précédentes, on a $MN = \frac{1}{2}BC$.

1 2 Agrandissement / réduction d'une figure

Définition 33.4

Lorsque l'on multiplie par un nombre $k > 0$ toutes les longueurs d'une figure $\mathcal{F}$, on obtient une figure $\mathcal{F}'$ qui est :

a. un agrandissement de $\mathcal{F}$ si $k > 1$;

b. une réduction de $\mathcal{F}$ si $0 < k < 1$.

Le nombre k est appelé le facteur d'agrandissement ou de réduction.

Remarque 33.5. Dans la section précédente, le triangle ABC est un agrandissement de AMN de facteur 2.

Propriété 33.6

Dans un agrandissement ou une réduction :

- les mesures d'angles sont conservées ;
- les droites parallèles restent parallèles ;
- les droites perpendiculaires restent perpendiculaires ;
- les aires sont multipliés par k^2 ;
- les volumes sont multipliés par k^3.

2 Théorème de Thalès et sa réciproque

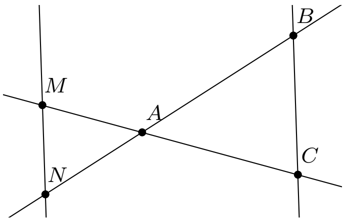
2 1 Le théorème de Thalès

Théorème 33.7

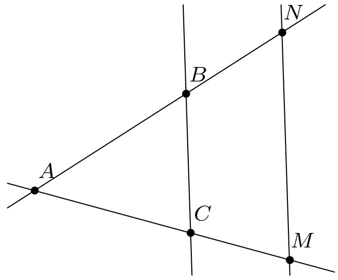
Étant donné deux droites sécantes coupées toutes deux par deux droites parallèles (de telle façon que l'on ait deux triangles), alors le plus grand triangle est un agrandissement du plus petit.

Deux configurations possibles :

1.



2.



Développement

Égalité entre rapport de longueurs

Comme AMN est un agrandissement de ABC alors :

- AM est un agrandissement de AB ;
- AN est un agrandissement de AC ;
- MN est un agrandissement de BC.

Dit d'une autre façon, on peut trouver un nombre $k > 1$ tel que :

- $AM = kAB$;
- $AN = kAC$;
- $MN = kBC$.

On a donc :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = k.$$

Développement

Résolution type brevet

Si :

- $(MN)//(BC)$;
- les points A, B, M sont alignés ;
- les points A, C, N sont alignés.

Alors, je peux appliquer le théorème de Thalès aux triangles ABC et AMN :

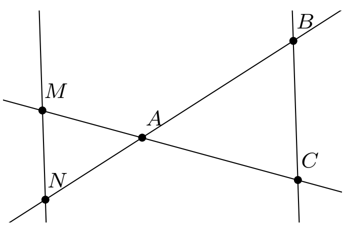
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

2 2 Réciproque du théorème de Thalès

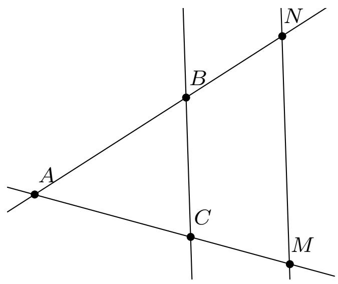
Théorème 33.8

Étant doné deux droites sécantes coupées toutes deux par deux droites d et d' (de telle façon que l'on ait deux triangles). Si le plus grand triangle est un agrandissement du plus petit alors d et d' sont parallèles.

1.



2.



Pour vérifier que AMN est un agrandissement de ABC, il faut montrer qu'il existe un nombre k tel que :

- $AM = kAB$;
- $AN = kAC$;
- $MN = kBC$.

Remarque 33.9. On peut montrer que dans la configuration où nous sommes, il suffit de montrer qu'il existe un nombre k tel que $AM = kAB$, $AN = kAC$ pour conclure que AMN est un agrandissement de ABC.

Développement

Rédaction type brevet

- Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$
- Si les points A, B, M et les points A, C, N sont alignés dans le même ordre

alors on peut appliquer la réciproque du théorème de Thalès et conclure que $(MN)//(BC)$.

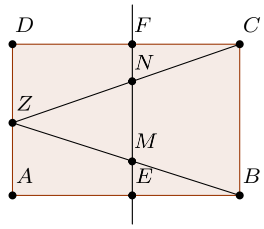
3 Exercices et applications

3.1 Une longueur constante

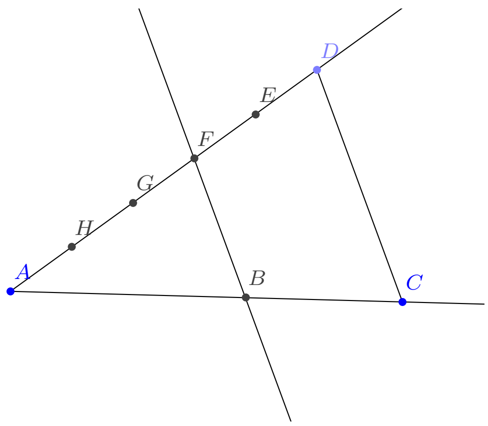
Soit $ABCD$ un rectangle. On construit le point E sur le segment $[AB]$ et F sur le segment $[CD]$ tel que $(EF)//(BC)$.

Soit $Z \in [DA]$. Le segmenet $[ZB]$ coupe le segment $[EF]$ en un point M et le segment $[ZC]$ coupe le segment $[EF]$ en un point N.

Montrer que $MN = cst$.



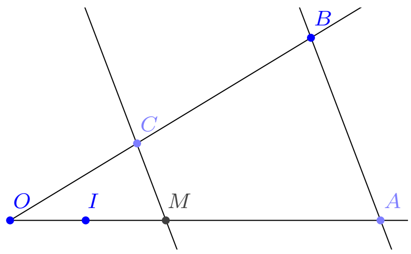
3.2 Découper un segment de longueur donné en n segments de même longueur



3.3 Construire à la règle et au compas une fraction

On considère un axe tel que $OI = 1$. Construire M tel que $OM = \frac{a}{b}$.

Développement



On place A tel que $OA = a \times OI$.

Soit C un point de d'. On place B tel que $OB = bOC$.

La droite parallèle à (AB) couple l'axe en M tel que

$$\frac{OM}{OA} = \frac{OC}{OB} = \frac{1}{b}.$$

D'où

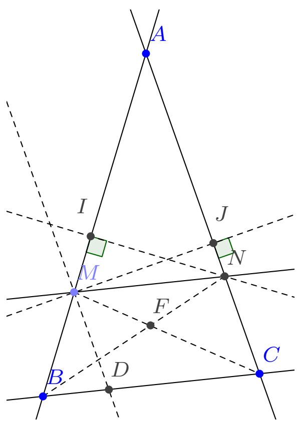
$$OM = \frac{1}{b}OA = \frac{a}{b}OI = \frac{a}{b}.$$

4 Démonstration du théorème de Thalès

4.1 Une démonstration due à Euclide

Développement

Démonstration.



On considère les triangles AMN et BNA. On a : $2\mathcal{A}(AMN) = AM \cdot NI$ et $2\mathcal{A}(BNA) = AB \cdot IN$ donc on a :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{\mathcal{A}(AMN)}{\mathcal{A}(BNA)}.$$

De plus, $2\mathcal{A}(AMN) = AN \cdot MJ$ et $2\mathcal{A}(CMA) = AC \cdot MJ$ donc

$$\frac{AN}{AC} = \frac{\mathcal{A}(AMN)}{\mathcal{A}(CMA)}.$$

Maintenant, montrons que $\mathcal{A}(BNA) = \mathcal{A}(CMA)$. Ceci revient à montrer que $\mathcal{A}(MFB) = \mathcal{A}(CFN)$: (MN) et (BC) sont parallèles donc on en déduire que $\mathcal{A}(BNM) = \mathcal{A}(CMN)$: même base et même hauteur. Or :

$$\mathcal{A}(BNM) = \mathcal{A}(BMF) + \mathcal{A}(FMN) \quad \text{et} \quad \mathcal{A}(CMN) = \mathcal{A}(CFN) + \mathcal{A}(FMN),$$

ce qui démontre l'égalité.

Ainsi, comme $\mathcal{A}(BNA) = \mathcal{A}(CMA)$, on a alors :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{\mathcal{A}(AMN)}{\mathcal{A}(BNA)} = \frac{\mathcal{A}(AMN)}{\mathcal{A}(CMA)} = \frac{AN}{AC}.$$

Montrons maintenant la deuxième égalité en considérant le parallélogramme $MNCD$: d'après ce que l'on vient de démontrer, en se plaçant dans le triangle ABC, on a $\frac{BM}{BA} = \frac{BD}{BC}$, d'où :

$$\frac{BA - MA}{BA} = \frac{BC - DC}{BC} \Leftrightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{DC}{BC} = \frac{MN}{BC}$$

car $MNCD$ est un parallélogramme. On a ainsi démontré l'implication directe.

Réciproque : elle utilise le sens direct.

Soit le point E de d tel que (NE) est parallèle à (BC), alors A, E et B sont alignés dans le même ordre que A, N et C et donc on peut appliquer le sens direct :

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$$

d'après l'hypothèse. Donc : $\frac{AE}{AB} = \frac{AM}{AB}$ d'où $AE = AM$, les points étant tous alignés dans le même ordre, il vient que $E = M$ donc les droites (MN) et (BC) sont parallèles. □

4 2 Preuve purement vectorielle

Développement

Démonstration. Il faut se poser la question de la validité d'une démonstration vectorielle du théorème de Thalès. En effet, la géométrie vectorielle s'appuis souvent sur une définition géométrique des vecteurs, définition dans laquelle le théorème de Thalès joue un rôle prépondérant quand il s'agit d'affirmer que $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$.

Mais on peut toutefois s'intéresser à une écriture possible du théorème de Thalès et sa justification grâce aux opérations vectorielles. Ce qui pourrait permettre de généraliser le théorème de Thalès à tout espace affine euclidien associé à un espace vectoriel.

Dire que D est sur (AB), c'est écrire qu'il existe un réel x tel que $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB}$.

De même, dire que E est sur (AC), c'est écrire qu'il existe un réel y tel que $\overrightarrow{AE} = y\overrightarrow{AC}$.

Enfin, dire que les droites (ED) et (BC) sont parallèles, c'est écrire qu'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{DE} = t\overrightarrow{BC}$.

Les égalités précédentes et la relation de Chasles permettent d'écrire que :

$$\begin{aligned} y\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AE} \\ y(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} \\ y\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{BC} &= x\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{BC}. \end{aligned}$$

L'écriture suivant les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ se doit être unique car ces vecteurs ne sont pas colinéaires. Donc $y = x$ et $y = t$.

On obtient donc les trois égalités :

$$\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AE} = x\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DE} = x\overrightarrow{BC}.$$

L'avantage de cet énoncé et de cette démonstration est que cela n'oblige pas à traiter les différents cas de configuration évoqués plus haut. □

5 D'autres théorèmes de géométrie en rapport avec le théorème de Thalès

5 1 Dans le plan

Soit E un espace affine de dimension 2 et $\vec{E}$ son espace vectoriel associé.

Théorème 33.10

Soit Δ_1, Δ_2, Δ_3 trois droites distinctes telles que Δ_1 soit parallèle à Δ_2, elles coupents Δ et Δ', deux droites distinctes, en A, B, C et A', B' et C'.

Alors Δ_1 est parallèle à Δ_3 si et seulement si :

$$\begin{cases} \overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{A'B'} \\ \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB} \end{cases}$$

avec $k \in \mathbb{R}^*$.

Développement

Démonstration.

$\boxed{\Leftarrow}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CC'} &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C'} \\ &= k\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA'} + k\overrightarrow{A'B'} \\ &= k\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA'} + k(\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB'}) \\ &= k(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB'}) + (1-k)\overrightarrow{AA'} \\ &= (k+l)\overrightarrow{BB'}\end{aligned}$$

car $\Delta_1 // \Delta_2$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ et il existe $k' \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{A'C'} = k'\overrightarrow{A'B'}$. Montrer que $k = k'$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A'C'} &= k'\overrightarrow{A'B'} \\ \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC'} &= k'(\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'}) \\ (1-k)\overrightarrow{AA'} = k\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{CC'} &= (k'-k)\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

Or $\Delta_1 // \Delta_2 // \Delta_3$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$(1-k)\overrightarrow{AA'} + k\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{CC'} = \lambda\overrightarrow{AA'}.$$

D'où :

$$(k'-k)\overrightarrow{AB} - \lambda\overrightarrow{AA'} = 0.$$

Or $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AA'}$ ne sont pas colinéaire, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'})$ est un système libre, d'où $k' - k = 0$ et $\lambda = 0$. □

Développement

Autre preuve par les projections

Démonstration.

$\boxed{\Rightarrow}$ Δ_1, Δ_2 et Δ_3 sont parallèles. Ces trois espaces affines sont dirigé par un même sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$ noté $\overrightarrow{H}$. On considère p, la projection sur Δ' parallèlement à $\overrightarrow{H}$. On a :

$$p(A) = A' \ ; \ p(B) = B' \ ; \ p(C) = C'.$$

Soit $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ (existe car A, B et C sont alignés). On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A'C'} &= \overrightarrow{p(A)p(C)} \\ &= \overrightarrow{p}(\overrightarrow{AC}) \\ &= \overrightarrow{p}(k\overrightarrow{AB}) = k\overrightarrow{p}(\overrightarrow{AB}) = k\overrightarrow{A'B'}\end{aligned}$$

où $\overrightarrow{p}$ est l'application linéaire associée à p.

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{A'B'}$. Soti D' un point de Δ' tel que $(CD') // \Delta_1$. On peut applique Thalès :

$$\begin{cases}\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{A'D'} = k\overrightarrow{A'B'}.\end{cases}$$

D'où $\overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{A'C'}$, c'est-à-dire $C' = D'$. □

Corollaire 33.11 Le théorème de Thalès peut donc s'exprimer uniquement en affine. Avec les hypothèses du théorème :

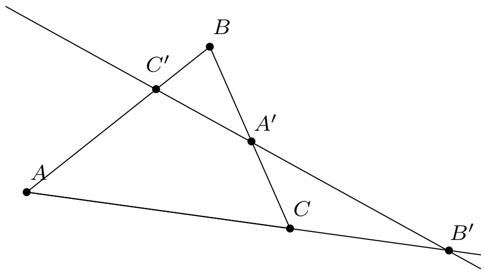
$$\Delta_2 // \Delta_3 \Leftrightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}}.$$

Théorème 33.12

Théorème de Ménélaus

Soit ABC un triangle et $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$ et $C' \in (AB)$.

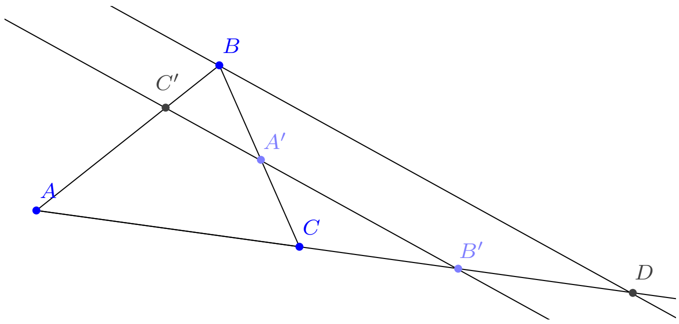
$$\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = 1 \Leftrightarrow A', B', C' \text{ alignés.}$$



Développement

Démonstration.

$\boxed{\Leftarrow}$ On considère d la droite parallèle à $(C'B')$ passant par B. On note $D = d \cap (AC)$ (D est la projection de B sur (AC) parallèlement à $(C'B')$) ?



On applique deux fois le théorème de Thalès :

- dans ABD et $AC'B'$;
- dans CBD et $CB'A'$.

$\boxed{\Rightarrow}$ On utilise le premier sens.
On note $D = (B'C') \cap (BC)$. D'après le premier sns :

$$\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} \times \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = 1.$$

Or, par hypothèse :

$$\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} \times \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = 1,$$

d'où

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}},$$

c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} \overrightarrow{DB} = k\overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{A'B} = k\overrightarrow{A'C} \end{cases}$$

d'où $\overrightarrow{DA'} = k\overrightarrow{DA'}$, c'est-à-dire $D = A'$ ($k \neq 1$) sinon $B = C$.

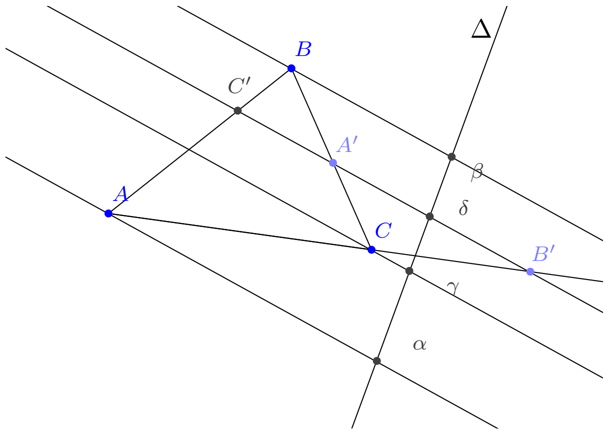
□

Développement

Preuve par les projections

Démonstration.

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit Δ non parallèle à $(C'B')$. On considère δ, α, β, γ les projetés respectives de C', A, B, C sur Δ parallèle à $(C'B')$.



On note p cette projection.

$$\overrightarrow{\delta\alpha} = \overrightarrow{p(C')p(A)} = \vec{p}(\overrightarrow{C'A}).$$

Soit $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{C'A} = k\overrightarrow{C'B}$, alors :

$$\vec{p}(\overrightarrow{C'A}) = k\vec{p}(\overrightarrow{C'B}) = k\overrightarrow{\delta\beta}.$$

D'où :

$$\frac{\overline{\delta\alpha}}{\overline{\delta\beta}} = \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}.$$

De même :

$$\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{\delta\gamma}}{\overline{\delta\alpha}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \frac{\overline{\delta\beta}}{\overline{\delta\gamma}}.$$

Finalement :

$$\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = 1.$$

$\boxed{\Rightarrow}$ On note δ le projeté de B' et C'. On note δ' le projeté de A'. On montre que $\delta = \delta'$, et donc que B', C' et A' sont alignés.

On a :

$$\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = 1$$

d'où :

$$\frac{\overline{\delta\alpha}}{\overline{\delta\beta}} \times \frac{\overline{\delta\gamma}}{\overline{\delta\alpha}} \times \frac{\overline{\delta'\beta}}{\overline{\delta'\gamma}} = 1$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\overline{\delta\gamma}}{\overline{\delta\beta}} = \frac{\overline{\delta'\gamma}}{\overline{\delta'\beta}}$$

et donc $\delta = \delta'$.

□

Théorème 33.13

Théorème de Ceva

Étant donnés un triangle ABC et trois points A', B' et C' appartenant respectivement aux droites (BC), (AC) et (AB) ; les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles si et seulement si :

$$\frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} \times \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} \times \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}} = -1.$$

Théorème 33.14

Théorème de Pappus

Soient deux droites d et d' ; trois points A, B et C de d ; trois points A', B' et C' de d'. On note P, Q et R les intersections respectives de (AB') et $(A'B)$, de $(B'C)$ et (BC'), et de (AC') et $(A'C)$. Alors les points P, Q et R sont alignés.

Théorème 33.15

Théorème de Desargues

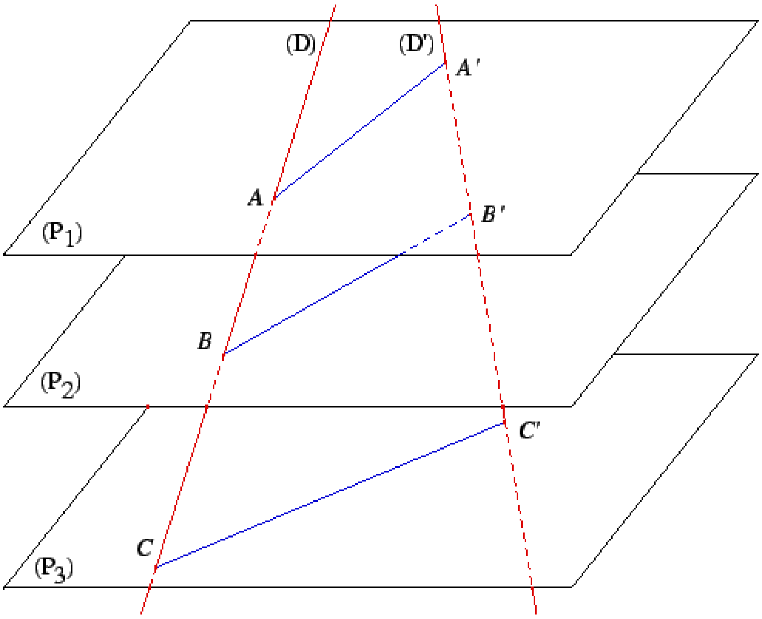
Soient deux triangles ABC et $A'B'C'$ tels que les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles, de même pour (BC) et $(B'C')$ et pour (AC) et $(A'C')$. Alors les drotes (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles ou concourantes.

Développement

En exercice, faire les figures correspondants aux théorèmes proposés.

5 2 Dans l'espace

On considère la figure suivante :



Théorème 33.16

Théorème de Thalès dans l'espace

Si les plans (P_1), (P_2) et (P_3) sont parallèles alors :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}.$$

Développement

Démonstration. On considère la parallèle à D passant par A' puis on applique le théorème de Thalès deux fois. □

Théorème 33.17

Réciproque du théorème de Thalès dans l'espace

Si

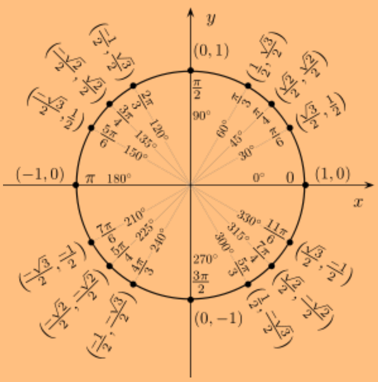
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}.$$

alors les plans (P_1), (P_2) et (P_3) sont parallèles.

LEÇON

34

Trigonométrie



Niveau : De la 3^{e} à la Terminale S

Prérequis : géométrie du triangle, théorème de Pythagore, notion de fonction, produit scalaire

1 De la trigonométrie vue en classe de troisième

1 1 Définitions

Définition 34.1

Dans un triangle ABC rectangle en A, on définit le *sinus*, le *cosinus* et la *tangente* de l'angle aigu $\widehat{ABC}$ de la manière suivante :

$$\sin \widehat{ABC} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{ABC}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{BC}$$
$$\cos \widehat{ABC} = \frac{\text{côté adjacent à } \widehat{ABC}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}$$
$$\tan \widehat{ABC} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{ABC}}{\text{côté adjacent à } \widehat{ABC}} = \frac{AC}{AB}.$$

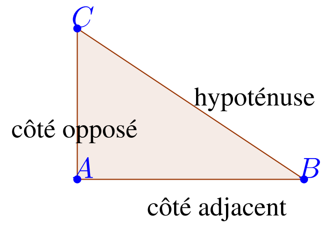


FIGURE 34.1 – Côté opposé, côté adjacent à un angle, hypoténuse

Remarque 34.2. On a aussi avec l'angle $\widehat{ACB}$:

$$\cos \widehat{ACB} = \frac{AC}{BC}, \ \sin \widehat{ACB} = \frac{AB}{BC}, \ \tan \widehat{ACB} = \frac{AB}{AC}.$$

Propriété 34.3

Le sinus et le cosinus d'un angle aigu sont strictement plus grands que 0 et strictement plus petits que 1 et ils n'ont pas d'unité.

Remarques 34.4Sur la calculatrice (Casio FX-92)

.

1. Lorsque l'on connaît le sinus d'un angle, on peut trouver la mesure de cet angle en utilisant les touches : Shift - sin .
2. Lorsque l'on connaît le cosinus d'un angle, on peut trouver la mesure de cet angle en utilisant les touches : Shift - cos .
3. Lorsque l'on connaît le tangente d'un angle, on peut trouver la mesure de cet angle en utilisant les touches : Shift - tan .

Exemples 34.5Connaissant sinus, cosinus et tangente

.

1. Si $\sin \widehat{ABC} = 0,8$ et $\widehat{ABC}$ est un angle aigu alors $\widehat{ABC} = 53,13$ degrés à $0,01$ près.
2. Si $\cos \widehat{ABC} = 0,5$ et $\widehat{ABC}$ est un angle aigu alors $\widehat{ABC} = 60$ degrés.
3. Si $\tan \widehat{ABC} = 0,2$ et $\widehat{ABC}$ est un angle aigu alors $\widehat{ABC} = 11,30$ degrés à $0,01$ près.

1.2 Formules de trigonométrie

Propriété 34.6

Pour toutes valeurs de x, on a :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \text{et} \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Développement

Démonstration de la propriété 34.6. On se place dans le cas où x est une valeur strictement compris entre 0 et 90 degrés. Prenons un triangle ABC rectangle en A tel que $\widehat{ABC} = x$. On a alors :

$$\cos x = \frac{AB}{BC}, \ \sin x = \frac{AC}{BC}, \ \tan x = \frac{AC}{BC}.$$

Ainsi,

$$\cos^2 x + \sin^2 x = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 = \frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2}.$$

On sait que le triangle ABC est rectangle en A. D'après le théorème de Pythagore, on a $AB^2 + AC^2 = BC^2$. D'où :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = \frac{BC^2}{BC^2} = 1.$$

De plus :

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AB}{BC}} = \frac{AC}{BC} \times \frac{BC}{AB} = \frac{AC}{AB} = \tan x.$$

□

1.3 Quelques exemples

Exemples 34.7.

1. Soit DEF un triangle rectangle en D tel que $\widehat{DEF} = 30°$ et $DF = 5$. Quelle est la mesure de EF?. Comme DEF est un triangle rectangle en D :

$$\begin{aligned} \sin \widehat{DEF} &= \frac{DE}{DF} \\ \sin 30 &= \frac{DE}{5} \\ DE &= 5 \times \sin 30 \\ DE &= 2,5 \end{aligned}$$

2. ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 5$ ET $Ac = 7$. On veut déterminer la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ à $0,01$ près. Comme ABC est un triangle rectangle en A.

$$\begin{aligned} \tan \widehat{ABC} &= \frac{AC}{AB} \\ \tan \widehat{ABC} &= \frac{7}{5} \\ \widehat{ABC} &= 50,19 \text{ degrés à 0,01 près.} \end{aligned}$$

La dernière étape est faite grâce à la calculatrice (en tapant les touches Shift - tan .

2 De la trigonométrie vue en classe de Première S

2.1 Le radian

Définition 34.8

Radian

Le *radian* est une unité de mesure des angles choisie de façon que l'angle plat (180°) mesure π radians.

Remarque 34.9. Pour trouver la mesure d'un angle de x degrés, on a recours à un tableau de proportionnalité.

degrés	180	x
radians	π	α

Exemple 34.10. Un angle de 60° vaut en radians :

$$\alpha = \frac{60\pi}{180} = \frac{\pi}{3} \text{ rad.}$$

2.2 Cercle trigonométrique

Définition 34.11

Cercle trigonométrique

Si on munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Le *cercle trigonométrique* est le cercle de centre O et de rayon 1 orienté dans le sens direct (sens contraire des aiguilles d'une montre).

Soit M un point du cercle tel que α soit une mesure (en radians) de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$.

Définition 34.12

Sinus et cosinus

On appelle *cosinus* et *sinus* de α et on note $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$, les coordonnées du point M dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$:

$$\overrightarrow{OM} = (\cos\alpha)\overrightarrow{OI} + (\sin\alpha)\overrightarrow{OJ}.$$

Soit Δ la droite (verticale) d'équation $x = 1$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et H le point défini par $(OM) \cap \Delta$. Ce point H existe dès lors que Δ et (OM) ne sont pas parallèles, c'est-à-dire dès que M n'est ni en $J(0,1)$, ni en $J'(0,-1)$, c'est-à-dire dès que $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Définition 34.13

Tangente

On appelle *tangente* de α et on note $\tan\alpha$, l'ordonnée du point H dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

La table 34.1 rappelle les valeurs remarquables du cosinus, du sinus et de la tangente.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non définie

TABLE 34.1 – Valeurs remarquables

Développement

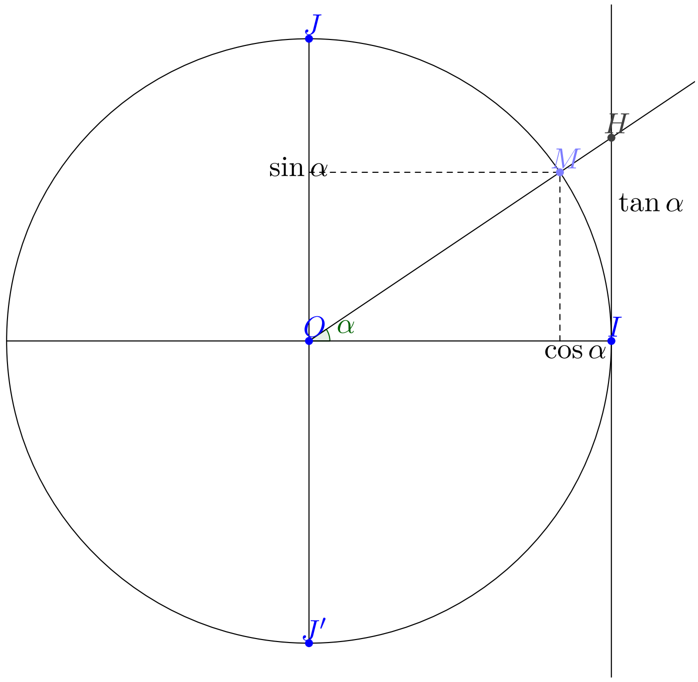


FIGURE 34.2 – Cercle trigonométrique, cosinus, sinus et tangente d'un angle

Calcul de valeurs remarquables. Pour calculer les valeurs de $\sin \frac{\pi}{4}$ et $\cos \frac{\pi}{4}$, on exploite la diagonale du carré (de côté 1). Dans le triangle ABC rectangle en B, on a :

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\tan \frac{\pi}{4} = \frac{BC}{AB} = 1.$$

Pour calculer les valeurs du sinus, du cosinus et de la tangente de $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{6}$, on exploite naturellement la configuration du triangle équilatéral de côté 1 avec une de ses hauteurs qui, d'après le théorème de Pythagore, mesure $\sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Dans le triangle AHC rectangle en H, on a :

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{AH}{AC} = \frac{1}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{6} = \frac{CH}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan \frac{\pi}{6} = \frac{AH}{CH} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{CH}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{3} = \frac{AH}{AC} = \frac{1}{2}, \quad \tan \frac{\pi}{3} = \frac{CH}{AH} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

□

Propriété 34.14

Sinus et cosinus

1. $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$
2. $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$
3. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
4. $-1 \leq \cos x \leq 1$
5. $-1 \leq \sin x \leq 1$

Exemple 34.15. On admet que $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, on veut calculer la valeur exacte de $\sin \frac{\pi}{12}$. On utilise la relation 3 :

$$\cos^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{\pi}{12} = 1.$$

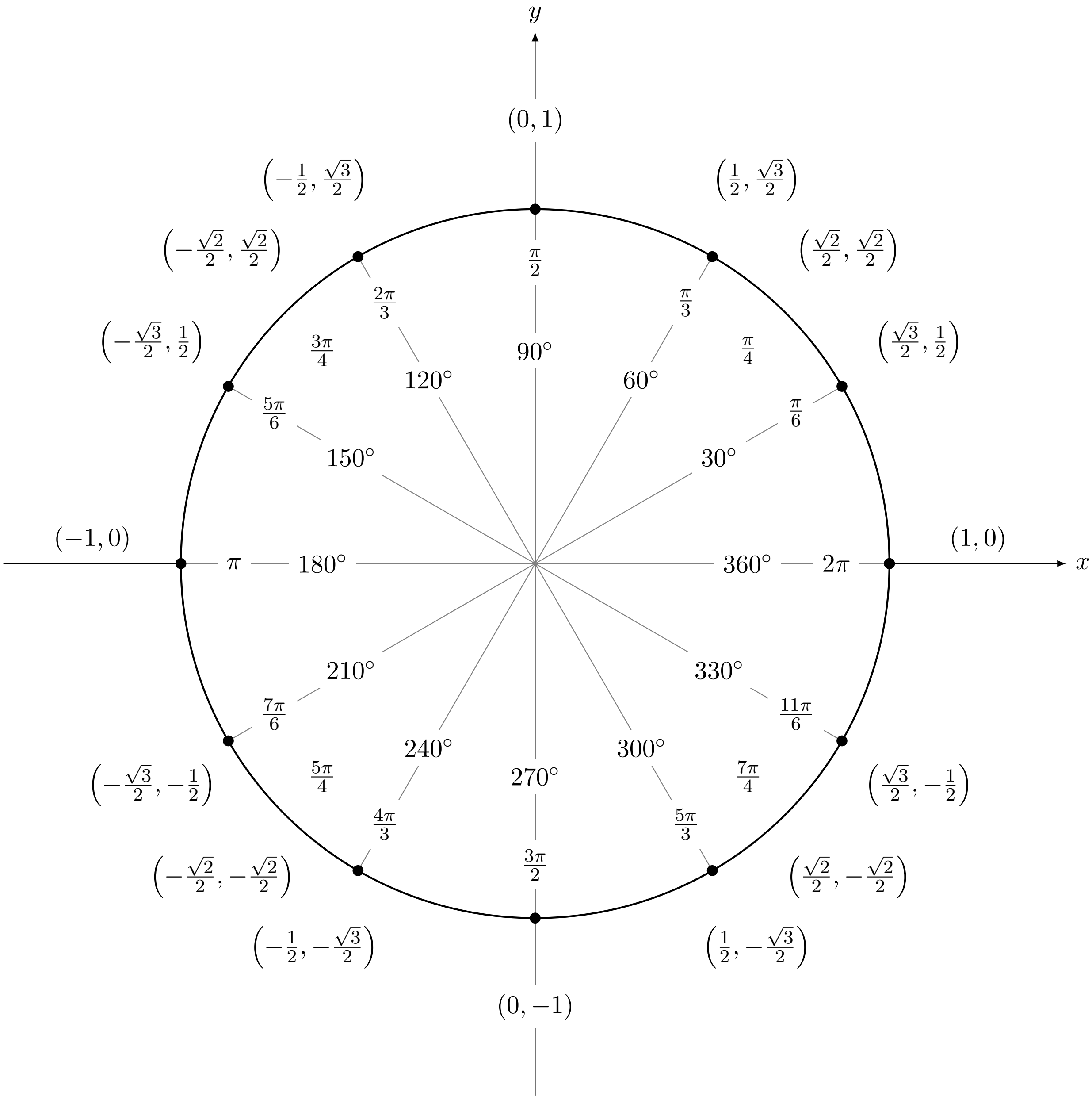


FIGURE 34.3 – Cercle trigonométrique et quelques valeurs remarquables

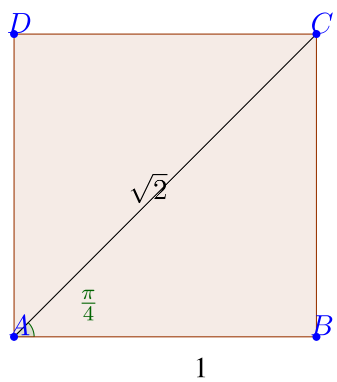


FIGURE 34.4 – Carré de côté 1

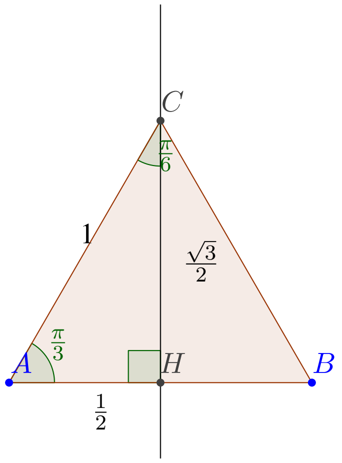


FIGURE 34.5 – Triangle équilatéral de côté 1

On calcule $\cos^2 \frac{\pi}{12}$:

$$\cos^2 \frac{\pi}{12} = \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{6+2\sqrt{12}+2}{16} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}.$$

D'où :

$$\sin^2 \frac{\pi}{12} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{12} = 1 - \frac{2+\sqrt{3}}{4} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}.$$

Or $\sqrt{A^2} = |A|$ donc :

$$\left|\sin \frac{\pi}{12}\right| = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}.$$

Or, $\sin \frac{\pi}{12} \geq 0$ car $\frac{\pi}{12} \in [0\,, \pi]$. Donc :

$$\sin \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}.$$

2 3 Fonction sinus et cosinus

Définition 34.16

Fonction périodique
Une fonction f est dite *périodique* de période T si pour tout réel x, on a : $f(x+T) = f(x)$.

Pour étudier une fonction périodique, on se limite à une période car :

$$\cdots = f(x+2T) = f(x+T) = f(x) = f(x-T) = f(x-2T) = \cdots$$

Théorème 34.17

Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π. De plus, la fonction cosinus est paire ($\cos(-x) = \cos x$) et la fonction sinus est impaire ($\sin(-x) = -\sin x$).

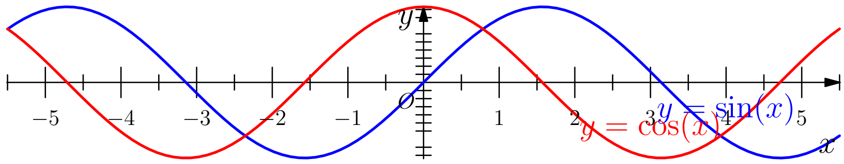


FIGURE 34.6 – Représentation graphique de $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \cos(x)$

2.4 Résolution des équations $\cos x = a$ et $\sin x = a$ ($x \in \mathbb{R}$)

- Si $a \notin [-1\,,1]$ alors ces équations n'ont pas de solutions (car $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$)
- Si $a \in [-1\,,1]$, elles ont une infinité

  Pour $\cos x = a$ on résout déjà l'équation sur l'intervalle $[0\,,2\pi]$ en cherchant à l'aide du cercle trigonométrique les deux angles α et $-\alpha$ dont le cosinus vaut a. On trouve les solutions de l'équation en ajoutant les multiples de 2π.

$$\cos x = a \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = -\alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

  Pour $\cos x = a$ on résout déjà l'équation sur l'intervalle $[0\,,2\pi]$ en cherchant à l'aide du cercle trigonométrique les deux angles α et $\pi - \alpha$ dont le sinus vaut a. On trouve les solutions de l'équation en ajoutant les multiples de 2π.

$$\sin x = a \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

2.5 Angles associés

Propriétés 34.18

On a les propriétés suivantes :

1. $\cos(-x) = \cos x$,
2. $\sin(-x) = \sin x$,
3. $\cos(\pi - x) = -\cos x$,
4. $\sin(\pi - x) = \sin x$,
5. $\cos(\pi + x) = -\cos x$,
6. $\sin(\pi + x) = -\sin x$
7. $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$,
8. $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$,
9. $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$,
10. $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$.

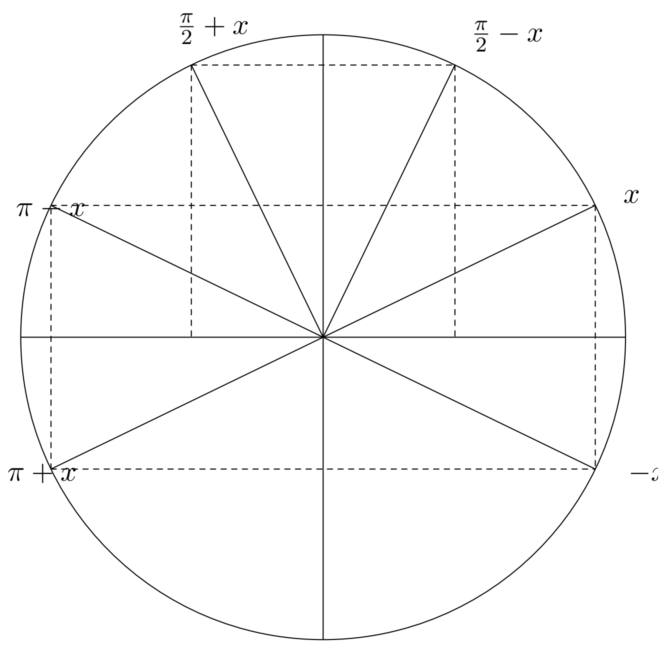


FIGURE 34.7 – Angles associés

Développement

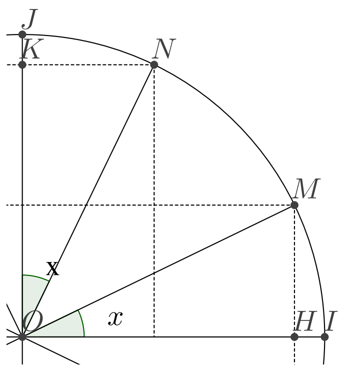
Démonstration des propriétés 34.18. Les relations $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$ s'obtiennent immédiatement par symétrie par rapport à l'axe des abscisses.
Supposons tout d'abord que x est un angle aigu (c'est-à-dire $x \in [0\,, \frac{\pi}{2}]$. On montre les relations :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x.$$

On note I, J, M et N les points du cercle trigonométrique correspondants aux angles de 0, $\frac{\pi}{2}$, x et $\frac{\pi}{2} - x$ radians respectivement. Notons H (resp. K) le projeté orthogonal de M (resp. N) sur l'axe des abscisses (resp. ordonnées). D'après la relation de Chasles sur les angles :

$$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{ON}) + (\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OJ}) \pmod{2\pi} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - x + (\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OJ}) \pmod{2\pi} \Leftrightarrow (\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OJ}) = x \pmod{2\pi}.$$

Les coordonnées du point M sont $M(\cos x, \sin x)$, celles du point N sont : $N(\cos(\frac{\pi}{2} - x), \sin(\frac{\pi}{2} - x))$. Comme x est un



angle aigu, toutes ces coordonnées sont positives et :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = KN \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = OK.$$

Mais par ailleurs, d'après les relations métriques dans le triangle ONK rectangle en K, on a :

$$\cos x = OK \quad \text{et} \quad \sin x = KN.$$

D'où les relations : $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$. Les autres relations se démontrent de manière analogue.
Par exemple, si x appartient à $[-\frac{\pi}{2}\,, 0]$, on pose $y = -x$. Comme y est un angle aigu, on a, par exemple, en utilisant ce qui précède :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \sin y \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + y\right) = -\sin y,$$

c'est-à-dire :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin(-x) = -\sin x \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin(-x) = \sin x.$$

De même, si x appartient à $[\frac{\pi}{2}\,, \frac{3\pi}{2}]$, alors on pose $y = \pi - x$ et on utilise les formules précédentes. □

2.6 Formules trigonométriques

Proposition 34.19

Formules d'addition

1. $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$,
2. $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$,
3. $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$,
4. $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

Développement

Justification d'une formule de trigonométrie.

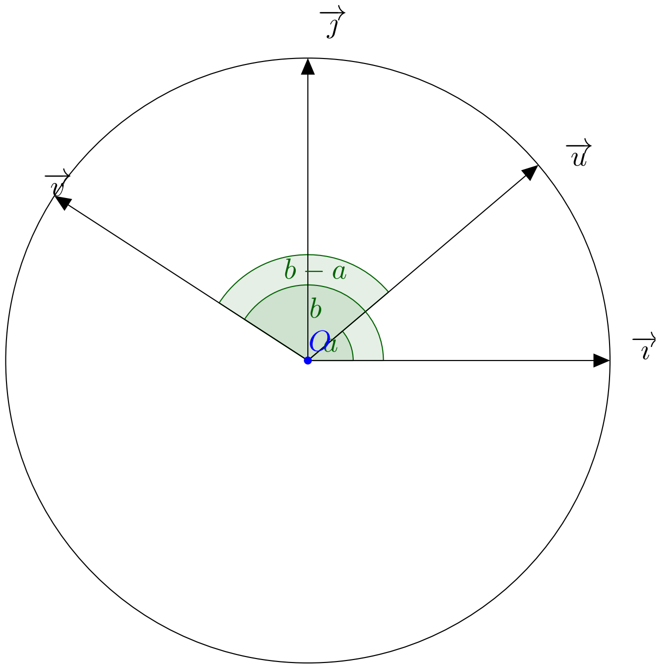


FIGURE 34.8 – Figure pour la démonstration (méthode avec produit scalaire)

Méthode utilisant le produit scalaire On va étudier la quantité $\cos(a-b)$ où a et b sont deux nombres réels. Dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, considérons deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ unitaires tels que :

$$(\vec{\imath}, \vec{u}) = a \quad \text{et} \quad (\vec{\imath}, \vec{v}) = b.$$

Une première expression du produit scalaire donne :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

D'après la relation de Chasles :

$$(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{\imath}) + (\vec{\imath}, \vec{v}) = b - a$$

donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos(b-a) = \cos(a-b)$ car la fonction cosinus est paire. D'autre part, d'après la définition du cosinus et du sinus, on a :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \cos b \\ \sin b \end{pmatrix}$$

D'après l'expression du produit scalaire avec les coordonnées $(xx' + yy')$, on obtient alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

Ce qui nous donne une formule trigonométrique :

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

Méthode n'utilisant pas le produit scalaire On étudie cette fois-ci $\cos(a+b)$ où a et b sont deux nombres réels. On considère le cercle de centre O et de rayon 1 dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Sur ce cercle, on place un point A tel que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = a$, le point M tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = b$ et le point A' tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \frac{\pi}{2}$. D'après la relation de Chasles pour les angles, on a :

$$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = a + b \pmod{2\pi}$$

Donc :

$$\overrightarrow{OM} = \cos(a+b)\overrightarrow{OI} + \sin(a+b)\overrightarrow{OJ}.$$

Mais en se plaçant dans le repère orthonormé (O, A, A'), on a :

$$\overrightarrow{OM} = \cos(b)\overrightarrow{OA} + \sin(b)\overrightarrow{OA'}$$

et en exprimant les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA'}$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on a :

$$\overrightarrow{OA} = \cos(a)\overrightarrow{OI} + \sin(a)\overrightarrow{OJ}$$

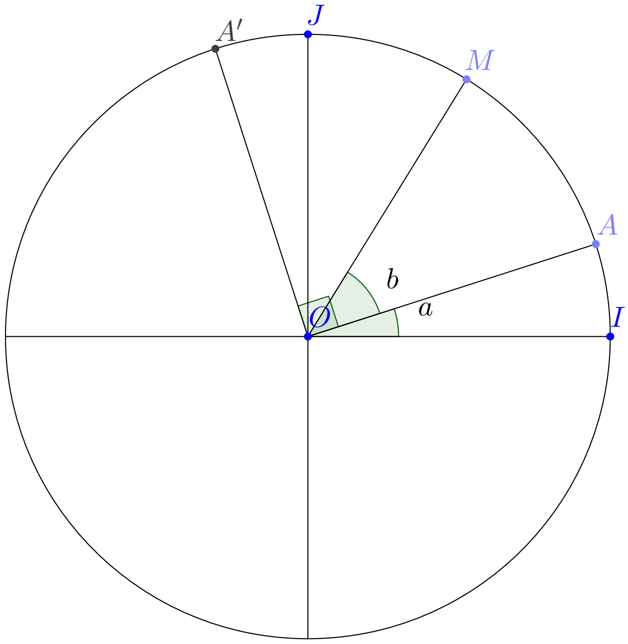


FIGURE 34.9 – Figure pour la démonstration (méthode sans produit scalaire)

et
$$\overrightarrow{OA'} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right)\overrightarrow{OI} + \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right)\overrightarrow{OJ} = -\sin(a)\overrightarrow{OI} + \cos(a)\overrightarrow{OJ}.$$

Finalement :
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \cos(b)\cos(a)\overrightarrow{OI} + \cos(b)\sin(a)\overrightarrow{OJ} - \sin(b)\sin(a)\overrightarrow{OI} + \sin(b)\cos(a)\overrightarrow{OJ} \\ &= [\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)]\overrightarrow{OI} + [\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)]\overrightarrow{OJ}\end{aligned}$$

et par unicité des coordonnées d'un vecteur dans un repère, il vient les deux relations :
$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)\end{aligned}$$

□

Proposition 34.20

Formules de duplication

1. $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$,
2. $\sin(2a) = 2\sin a\cos a$.

Développement

Démonstration de la proposition 34.20.
$$\begin{aligned}\cos(2a) &= \cos(a+a) = \cos a\cos a - \sin a\sin a = \cos^2 a - \sin^2 a \\ \sin(2a) &= \sin(a+a) = \sin a\cos a + \cos a\sin a = 2\sin a\cos a\end{aligned}$$

□

Proposition 34.21

Formule de linéarisation

1. $\cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2}$,
2. $\sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}$.

Développement

Démonstration de la proposition 34.21. On rappelle que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ quelque soit le réel x. Donc :

$$\cos(2a) = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1,$$

d'où $\cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2}$. De même,

$$\cos(2a) = (1 - \sin^2 a) - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a,$$

d'où $\sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}$. □

Exemple 34.22. On va calculer les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{8}$, $\sin\frac{\pi}{8}$, $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$. En utilisant les formules de linéarisation :

$$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

et comme $\cos\frac{\pi}{8} > 0$, il vient $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$$\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

et comme $\sin\frac{\pi}{8} > 0$, il vient $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. D'où :

$$\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}.$$

Or :

$$\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{(2-\sqrt{2})^2}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = \frac{6-4\sqrt{2}}{4-2} = 3-2\sqrt{2} = 1-2\sqrt{2}+2 = (1-\sqrt{2})^2.$$

D'où :

$$\tan\frac{\pi}{8} = \left|1-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}-1.$$

En utilisant les formules d'addition :

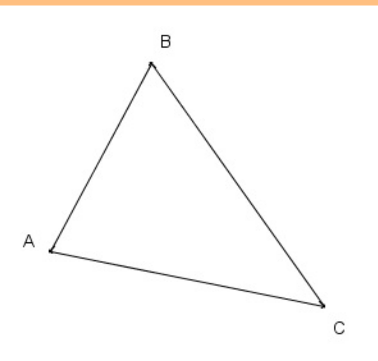
$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}.$$

D'où

$$\tan\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})} = \frac{8-2\sqrt{12}}{6-2} = 2-\sqrt{3}.$$

LEÇON 35

Relations métriques et trigonométriques dans un triangle



Niveau : Lycée
Prérequis : géométrie du triangle

1 Relations métriques dans un triangle

1.1 Théorème de Pythagore

Théorème 35.1

Théorème de Pythagore

ABC est un triangle rectangle en A si et seulement si $BC^2 + AB^2 + AC^2$.

Développement

Démonstration du théorème de Pythagore. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, les vecteurs portés par les côtés du triangle ABC vérifient la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}.$$

Ainsi :

$$AB^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = AC^2 + CB^2 + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$$

donc la relation du théorème est équivalente à l'annulation du dernier produit scalaire, ce qui correspond précisément au cas où les vecteurs sont orthogonaux, autrement dit lorsque les côtés $[AC]$ et $[BC]$ forment un angle droit. □

Exemple 35.2. Escargot

On part d'un triangle isocèle rectangle dont les côtés autres que l'hypoténuse mesurent 1 unité. L'hypoténuse mesure alors $\sqrt{2}$ unités. On place un triangle rectangle sur cette hypoténuse, son côté adjacent à l'angle droit mesurant 1 unité. Alors l'hypoténuse de ce nouveau triangle mesure $\sqrt{3}$ unités, et ainsi de suite…

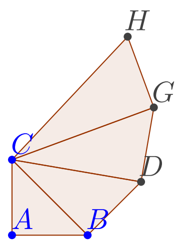


FIGURE 35.1 – Escargot

1.2 Formule d'Al-Kashi

Théorème 35.3

Formule d'Al-Kashi

Dans un triangle ABC,

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}.$$

Développement

Démonstration du théorème 35.3. Si on note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$, on a :

$$a^2 = BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = BA^2 + AC^2 + 2(\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}) = c^2 + b^2 + 2b\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC})$$

Or $\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}) = \cos[\pi + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})] = -\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\cos \widehat{A}$. □

1.3 Formule des 3 sinus

Théorème 35.4

Formule des 3 sinus
Soit ABC un triangle (on note $a = BC$, $b = AC$, $c = BA$), S l'aire de se triangle et R le rayon du cercle circonscrit au triangle :

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = \frac{abc}{2S} = 2R.$$

Développement

Démonstration du théorème 35.4. On note H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

- Dans le cas où $\widehat{B}$ est obtus, $AH = AB\sin(\pi - \widehat{B}) = AB\sin\widehat{B} = c\sin\widehat{B}$.
- Dans le cas où $\widehat{B}$ est aigu, $AH = AB\sin\widehat{B} = c\sin\widehat{B}$.

Donc, dans tous les cas, $AH = c\sin\widehat{B}$ et $S = \frac{1}{2}BC \cdot AH = \frac{1}{2}ac\sin\widehat{B}$. D'où

$$S = \frac{1}{2}ac\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C} = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}.$$

□

2 Relations trigonométriques dans un triangle

Définition 35.5

Dans un triangle ABC rectangle en A, on définit le *sinus*, le *cosinus* et la *tangente* de l'angle aigu $\widehat{ABC}$ de la manière suivante :

$$\sin\widehat{ABC} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{ABC}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\cos\widehat{ABC} = \frac{\text{côté adjacent à } \widehat{ABC}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan\widehat{ABC} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{ABC}}{\text{côté adjacent à } \widehat{ABC}} = \frac{AC}{AB}.$$

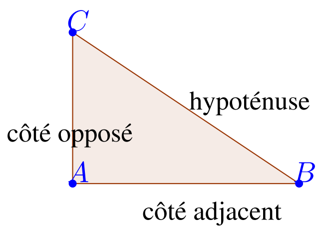


FIGURE 35.2 – Côté opposé, côté adjacent à un angle, hypoténuse

Remarque 35.6. On a aussi avec l'angle $\widehat{ACB}$:

$$\cos\widehat{ACB} = \frac{AC}{BC}, \quad \sin\widehat{ACB} = \frac{AB}{BC}, \quad \tan\widehat{ACB} = \frac{AB}{AC}.$$

Propriété 35.7

Le sinus et le cosinus d'un angle aigu sont strictement plus grands que 0 et strictement plus petits que 1 et ils n'ont pas d'unité.

Propriété 35.8

Pour toutes valeurs de x, on a :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \text{et} \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Proposition 35.9

Formules d'addition

1. $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$,
2. $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$,
3. $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$,
4. $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

Développement

Justification d'une formule de trigonométrie.

Méthode utilisant le produit scalaire On va étudier la quantité $\cos(a-b)$ où a et b sont deux nombres réels. Dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, considérons deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ unitaires tels que :

$$(\vec{\imath}, \vec{u}) = a \quad \text{et} \quad (\vec{\imath}, \vec{v}) = b.$$

Une première expression du produit scalaire donne :

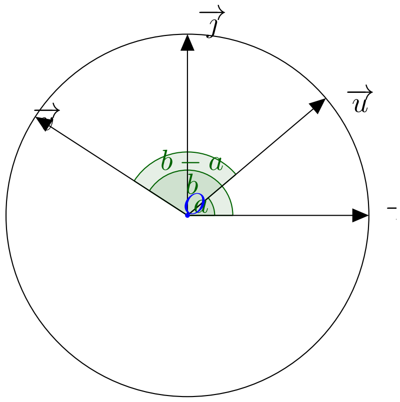


FIGURE 35.3 – Figure pour la démonstration (méthode avec produit scalaire)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

D'après la relation de Chasles :

$$(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{\imath}) + (\vec{\imath}, \vec{v}) = b - a$$

donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos(b-a) = \cos(a-b)$ car la fonction cosinus est paire. D'autre part, d'après la définition du cosinus et du sinus, on a :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \cos b \\ \sin b \end{pmatrix}$$

D'après l'expression du produit scalaire avec les coordonnées $(xx' + yy')$, on obtient alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

Ce qui nous donne une formule trigonométrique :

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

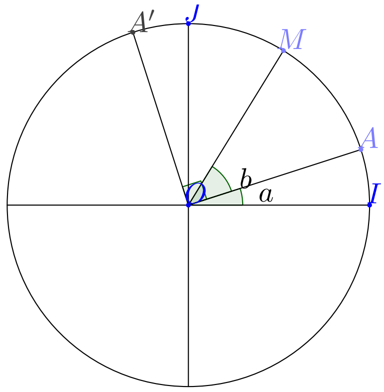


FIGURE 35.4 – Figure pour la démonstration (méthode sans produit scalaire)

Méthode n'utilisant pas le produit scalaire On étudie cette fois-ci $\cos(a+b)$ où a et b sont deux nombres réels. On considère le cercle de centre O et de rayon 1 dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Sur ce cercle, on place un point A tel que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = a$, le point M tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = b$ et le point A' tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \frac{\pi}{2}$. D'après la relation de Chasles pour les angles, on a :

$$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = a + b \pmod{2\pi}$$

Donc :

$$\overrightarrow{OM} = \cos(a+b)\overrightarrow{OI} + \sin(a+b)\overrightarrow{OJ}.$$

Mais en se plaçant dans le repère orthonormé (O, A, A'), on a :

$$\overrightarrow{OM} = \cos(b)\overrightarrow{OA} + \sin(b)\overrightarrow{OA'}$$

et en exprimant les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA'}$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on a :

$$\overrightarrow{OA} = \cos(a)\overrightarrow{OI} + \sin(a)\overrightarrow{OJ}$$

et

$$\overrightarrow{OA'} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right)\overrightarrow{OI} + \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right)\overrightarrow{OJ} = -\sin(a)\overrightarrow{OI} + \cos(a)\overrightarrow{OJ}.$$

Finalement :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \cos(b)\cos(a)\overrightarrow{OI} + \cos(b)\sin(a)\overrightarrow{OJ} - \sin(b)\sin(a)\overrightarrow{OI} + \sin(b)\cos(a)\overrightarrow{OJ} \\ &= [\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)]\overrightarrow{OI} + [\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)]\overrightarrow{OJ}\end{aligned}$$

et par unicité des coordonnées d'un vecteur dans un repère, il vient les deux relations :

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)\end{aligned}$$

□

Proposition 35.10

Formules de duplication

1. $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$,
2. $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$.

Développement

Démonstration de la proposition 35.10.

$$\begin{aligned}\cos(2a) &= \cos(a+a) = \cos a \cos a - \sin a \sin a = \cos^2 a - \sin^2 a \\ \sin(2a) &= \sin(a+a) = \sin a \cos a + \cos a \sin a = 2\sin a \cos a\end{aligned}$$

□

Proposition 35.11 **Formule de linéarisation**

1. $\cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2}$,
2. $\sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}$.

Développement

Démonstration de la proposition 35.11. On rappelle que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ quelque soit le réel x. Donc :

$$\cos(2a) = \cos^2 a - (1-\cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1,$$

d'où $\cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2}$. De même,

$$\cos(2a) = (1-\sin^2 a) - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a,$$

d'où $\sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}$. □

Exemple 35.12. On va calculer les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{8}$, $\sin\frac{\pi}{8}$, $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$. En utilisant les formules de linéarisation :

$$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

et comme $\cos\frac{\pi}{8} > 0$, il vient $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

$$\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

et comme $\sin\frac{\pi}{8} > 0$, il vient $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. D'où :

$$\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}.$$

Or :

$$\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{(2-\sqrt{2})^2}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = \frac{6-4\sqrt{2}}{4-2} = 3-2\sqrt{2} = 1-2\sqrt{2}+2 = (1-\sqrt{2})^2.$$

D'où :

$$\tan\frac{\pi}{8} = \left|1-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}-1.$$

En utilisant les formules d'addition :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}.$$

D'où

$$\tan\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})} = \frac{8-2\sqrt{12}}{6-2} = 2-\sqrt{3}.$$

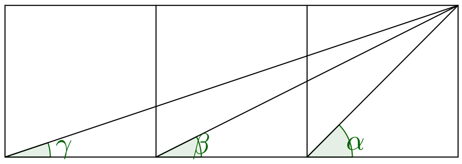


FIGURE 35.5 – Figure de l'exemple

3 Applications

Exemple 35.13. On considère trois carrés disposés comme dans la figure 35.5. Montrer que $\alpha = \beta+\gamma$.
On a bien sûr $\alpha = \frac{\pi}{4}$. On montre donc que $\beta + \gamma = \frac{\pi}{4}$. D'après une formule d'addition :

$$\cos(\beta + \gamma) = \cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma.$$

Or, si l'on note a la longueur des côtés des carrés, on a (d'après le théorème de Pythagore et les relations du cosinus et du sinus dans un triangle rectangle) :

$$\cos\beta = \frac{2a}{\sqrt{5}a} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos\gamma = \frac{3a}{\sqrt{10}a} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$
$$\sin\beta = \frac{a}{\sqrt{5}a} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin\gamma = \frac{a}{\sqrt{10}a} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Donc :

$$\cos(\beta+\gamma) = \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{5}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Et comme $0 < \beta + \gamma < \pi$, on a bien $\beta + \gamma = \frac{\pi}{4}$.

Exemple 35.14. Soit ABC un triangle avec $a = 2$, $b = 3$ et $c = 4$. Calculer la valeur exacte de l'aire $\mathcal{S}$ de ABC.

D'après la formule d'Al-Kashi :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}.$$

Donc :

$$\cos\widehat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

On remplace par les valeurs numériques :

$$\cos\widehat{A} = \frac{9 + 16 - 4}{24} = \frac{7}{8}.$$

Or $\cos^2\widehat{A} + \sin^2\widehat{A} = 1$, donc :

$$\sin^2\widehat{A} = 1 - \frac{49}{64} = \frac{15}{64}.$$

Or ABC étant un triangle, l'angle $\widehat{A}$ est compris entre 0 et π rad donc son sinus est positif. D'où :

$$\sin\widehat{A} = \frac{\sqrt{15}}{8}.$$

Enfin, d'après la formule de l'aire du triangle, on obtient :

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A} = \frac{3\sqrt{15}}{4}.$$

Exemple 35.15. Soit ABC un triangle avec $b = 3$, $c = 8$ et $\widehat{A} = 60°$. Calculer la valeur exacte de a ainsi que $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ (en degrés à 10^{-1} près).

D'après la formule d'Al-Kashi :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 9 + 64 - 48 \times \frac{1}{2} = 49.$$

D'où $a = 7$. On peut déterminer $\cos\widehat{B}$ à l'aide de la formule d'Al-Kashi :

$$\cos\widehat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{13}{14}.$$

On a $\cos B > 0$ et ABC triangle donc $B \in \left]0\,,90\right[$. On calcule donc $\widehat{B} = \arccos\frac{13}{14} \simeq 21,8°$. On peut calculer $\widehat{C}$ avec la relation $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$. Ainsi :

$$\widehat{C} = 180 - 21,8 - 60 = 98,2°.$$

Exemple 35.16. Aire maximale d'un rectangle inscrit dans un cercle

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de rayon 1 cm. Quelle est l'aire maximale d'un rectangle dont les sommets sont sur le cercle $\mathcal{C}$.

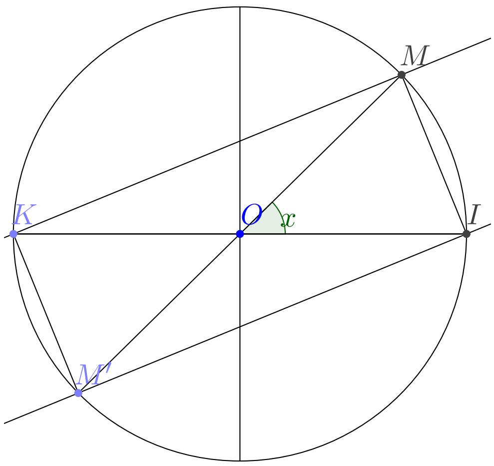


FIGURE 35.6 – Figure de l'exemple

On note O le centre du cercle et soit I et K deux points diamétralement opposés. Soit M un point mobile sur le cercle et on note x une mesure en radian de l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$. Enfin, on note M' le point diamétralement opposé à M. D'après la formule de l'aire d'un triangle exprimée avec un sinus :

$$\mathcal{A}(MOI) = \frac{1}{2} OM \times OI \sin x.$$

Comme le rayon du cercle est égal à 1 :

$$\mathcal{A}(MOI) = \frac{1}{2}\sin x.$$

Enfin, les diagonales d'un rectangle partagent celui-ci en quatre triangles de même aire (puisque la médiane dans un triangle partage celui-là en deux triangles de même aire) donc :

$$\mathcal{A}(MKM'I) = 2\sin x.$$

L'aire du rectangle inscrit dans le cercle est donc maximale lorsque le sinus l'est, à savoir pour $x = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire lorsque le rectangle est un carré ; l'aire maximale est alors de 2 cm^2.

Exemple 35.17. Formule de Héron

Soit ABC un triangle de demi-périmètre p (p est défini par la relation $2p = a + b + c$). On montre que l'aire $\mathcal{S}$ de ABC est donnée par :

$$\mathcal{S} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{(formule de Héron).}$$

D'après la formule d'Al-Kashi, on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}.$$

$$\begin{aligned}
\cos\widehat{A} &= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\\
1-\cos\widehat{A} &= 1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{a^2-(b^2-2bc+c^2)}{2bc} = \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc} = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc}\\
1+\cos\widehat{A} &= 1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(b^2+2bc+c^2)-a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c-a)(b+c+a)}{2bc}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\sin^2\widehat{A} = 1-\cos^2\widehat{A} = (1-\cos\widehat{A})(1+\cos\widehat{A}) = \frac{(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a+b+c)}{4b^2c^2}$$

$$4b^2c^2\sin^2\widehat{A} = (2p-2b)(2p-2c)(2p-2a)(2p) = 16p(p-a)(p-b)(p-c).$$

En outre,

$$\mathcal{S} = \frac{1}{4}b^2c^2\sin^2\widehat{A} = p(p-a)(p-b)(p-c).$$

D'où la formule de Héron.

Exemple 35.18. Inégalités dans le triangle

Soit ABC un triangle. On note $a = BC$, $b = AC$, et $c = AB$. On va montrer que :

$$|b-c| \leq a \leq b+c.$$

D'après la formule d'Al-Kashi, on a :

$$a^2 = b^2+c^2-2bc\cos\widehat{A} \Leftrightarrow \cos\widehat{A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

On en déduit l'encadrement :

$$-2bc \leq a^2-b^2-c^2 \leq 2bc.$$

D'où $(b-c)^2 \leq a^2 \leq (b+c)^2$. Par croissance de l'application $t \mapsto \sqrt{t}$ sur $[0\,,+\infty[$, on obtient :

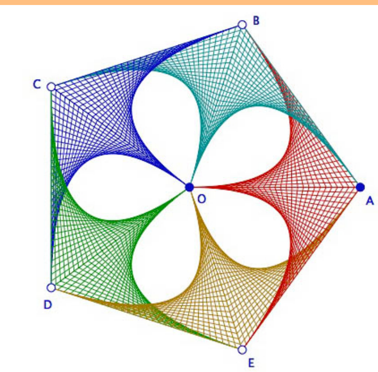
$$|b-c| \leq |a| \leq |b+c|\,.$$

Comme a, b et c sont des quantités positives :

$$|b-c| \leq a \leq b+c.$$

LEÇON 36

Problèmes de constructions géométriques



Niveau : Tous niveaux
Prérequis : homothétie, théorème de Thalès, construction à la règle et au compas

1 Programme de construction

Définition 36.1

Programme de construction

Un *programme de construction* est un texte qui permet d'établir une figure géométrique. On retrouve ce programme de construction au début d'un exercice de géométrie de collège ou de lycée.

Dans cette, leçon, on présente quelques programmes de construction pouvant être vus au collège ou au lycée. On donnera, en plus de la démonstration, une construction détaillée sur le logiciel Geogebra. Tout ce qui est dans un cadre bleu est à taper sur la barre de saisie.

2 Un œuf

Cette activité peut être réalisée en classe de troisième.

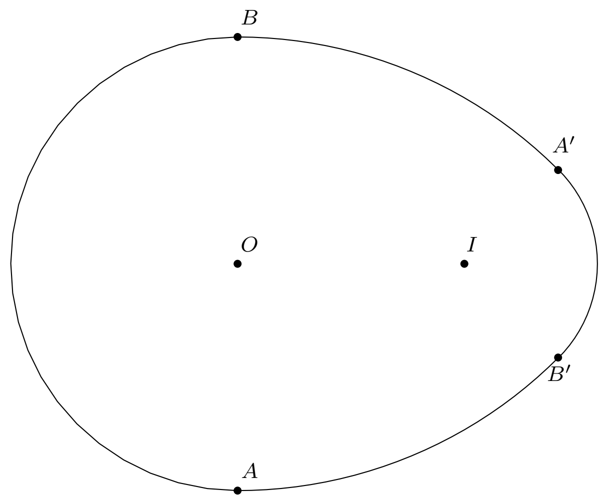
Exercice 36.2.

1. Tracer un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 3.
2. Soit I un point du cercle $\mathcal{C}$, tracer un $\mathcal{C}'$ de centre I et de rayon $6-3\sqrt{2}$.
3. Placer A et B tels que $[AB]$ est un diamètre du cercle $\mathcal{C}$ perpendiculaire à (OI).
4. Tracer les droites (AI) et (BI).
5. Soit A' l'intersection de (BI) et du cercle $\mathcal{C}'$ tel que A' n'appartient pas au segment $[BI]$.
6. Soit B' l'intersection de (AI) au cercle $\mathcal{C}'$ tel que B' n'appartient pas au segment $[AI]$.
7. Tracer les arcs de cercle suivants :
   a. l'arc de cercle de centre A passant par B et B' ;
   b. l'arc de cercle de centre$B$ passant par A et A' ;
   c. l'arc de cercle de centre I passant par A' et B' ;
   d. l'arc de cercle de centre O passant par A et B.

Développement

Construction sur GeoGebra.

```
O=(0,0)
Cercle[O,3]
I = Point(c)
Cercle[I,6-3*sqrt(2)]
Droite[O,I]
Perpendiculaire[O,a]
# Marque les points d'interesction entre le cercle C
# et la droite perpendiculaire à (OI) passant par O
# A est de coordonnées (0,-3)
# B est de coordonnées (0,3)
Droite[A,I]
Droite[B,I]
Intersection[d,e]
Interesection[d,f]
# Effacer les points qui sont sur le segment [AI] et [BI]
# Renommer les points restants C et D en A' et B'
ArcCercle[A,B',B]
ArcCercle[B,A,A']
ArcCercle[I,B',A']
ArcCercle[O,B,A]
```



3 Triangle d'or et pentagone

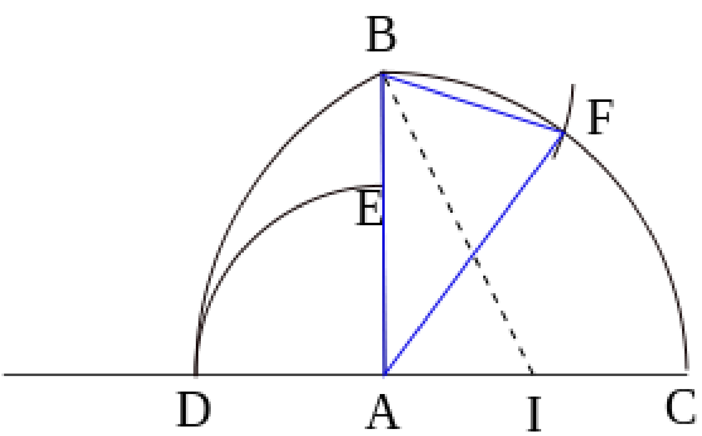
La construction du pentagone suivante est dûe à Euclide. L'élément de base de la construction est un triangle d'or, c'est-à-dire un triangle isocèle dont les angles avec la base sont double de l'angle au sommet.

3.1 Construction du triangle d'or

Soient A et C deux points du plan.

1. Placer I le milieu de $[AC]$.
2. Tracer la droite (Δ) perpendiculaire à (AC) passant par A. Construire le point B sur (Δ) tel que $AC = AB$.
3. Placer le point D sur (AC) tel que $IB = ID$.
4. Construire E sur (Δ) tel que $AD = AE$.
5. Tracer l'arc de cercle $\overset{\frown}{CB}$ de centre A.
6. Placer le point F sur l'arc $\overset{\frown}{CB}$ tel que $BF = AE$.

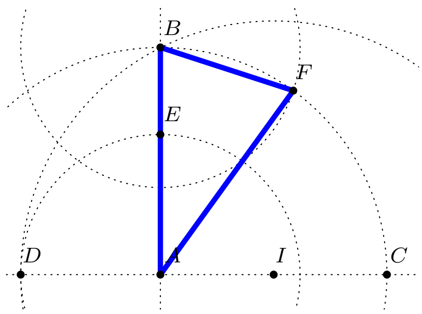
Le triangle ABF est un triangle d'or.



Développement

Construction sur GeoGebra.

```
A = (0,0)
C = (3,0)
Cercle(A,C)
Droite(A,C)
Perpendiculaire[A,a]
# B est l'intersection de la droite a au cercle c
I = MilieuCentre[A,C]
Cercle[I,B]
# D est l'intersection de la droite a au cercle d
Cercle[A,D]
# E est l'intersection de la droite b au cercle e
Segment[A,E]
Cercle[B,f]
# F est l'intersection de la droite
```



□

Justification de la construction. D'après le théorème de Pythagore :

$$IB = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Ainsi :

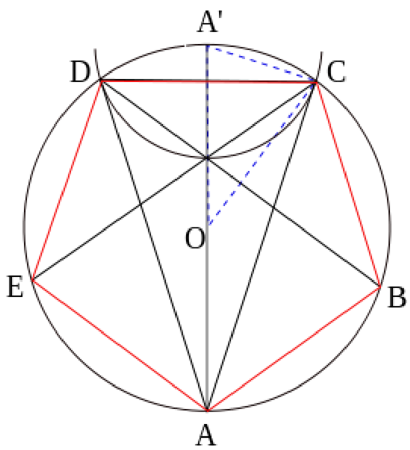
$$AD = AE = BF = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\varphi}$$

où φ est le nombre d'or.

Les dimensions du triangle ABF sont donc 1 - 1 - $\frac{1}{\varphi}$. C'est bien un triangle d'or. □

3 2 Construction du pentagone

1. À partir du triangle $OA'C$, construire le triangle d'or CDA grâce à l'arc de cercle de centre A' et de rayon $A'C$.
2. En prenant les bissectrices des angles C et D en les prolongeant jusqu'au cercle, on obtient les deux sommets B et E manquant.



Exercice 36.3. Le but de cet exercice de tracer un dodécagone avec une règle et un compas.

1. Tracer le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon $OA = 1$.
2. Tracer le triangle OIA.
3. Tracer la bissectrice de l'angle $\widehat{IAO}$, elle coupe le cercle $\mathcal{C}$ en un point B.
4. Tracer la perpendiculaire de (OI) passant par O. Elle coupe le cercle $\mathcal{C}$ en un point J.
5. Tracer A', B', i' les points symétriques de A, B et I (respectivement) par rapport à la droite (OJ).
6. Tracer A'', B'', J' les points symétriques de A, B et J par rapport à O.
7. Tracer A''', B''' les points symétriques de A et B par rapport à (OI).

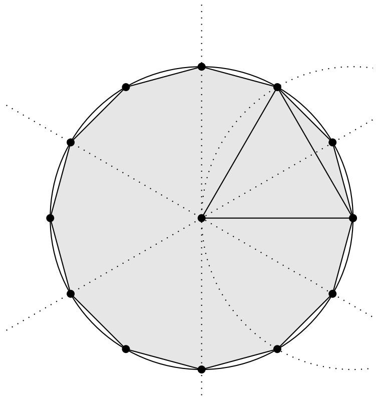
En reliant par des lignes droites, les points I, B, A, J, A', B', I', B'', A'', J', A''', B''', on obtient un dodécagone.

Développement

Construction de GeoGebra.

```
O = (0,0)
I = (2,0)
Cercle[O,I]
# Les trois instructions suivantes permettent
# de construire un triangle équilatéral OIA
Cercle[I,O]
Intersection[c,d]
# Ne pas afficher le point B
Segment[O,I]
Segment[O,A]
Segment[I,A]
Bissectrice{a,b]
# A cette étape là, deux bissectrices s'affichent,
# il faut conserver celle qui coupe le segment [IA]
Intersection{f,c]
# Ne pas afficher le point C
# Renommer le point D en B
Perpendiculaire[O,b]
Intersection{h,c]
# Renommer le point E en J
# Ne pas afficher le point D
Symétrie[A,h]
Symétrie[B,h]
Symétrie[I,h]
Symétrie[A,O]
Symétrie[B,O]
Symétrie[J,O]
Symétrie[A,b]
Symétrie[B,b]
Polygone[I,B,A,J,A',B',I',B'',A'',J',A''',B''']
```

□



L'aire du dodécagone permet d'approximer π.

Développement

Approximation de π avec l'aire du dodécagone. On remarque que le triangle OBB'' est un triangle équilatéral car $OB = OB'''$ et $\widehat{BOB'''} = 60°$. Ainsi, $BB''' = 1$. La hauteur BK du triangle OAB est égale à $\frac{1}{3}$ et l'aire du triangle est égale à $\frac{1}{4}$. Le dodécagone a donc une aire égale à 3. Elle est inférieure à l'aire du cercle $\mathcal{C}$ d'où $3 < \pi$. On admettra que :

$$OHH = \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1).$$

En choisissant $OP = \frac{1}{\cos\pi/12} = \sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$, on construit un dodécagone tangent extérieurement au cercle $\mathcal{C}$ d'aire 3, d'où $OI^2 \simeq 3,22$.
Ainsi, $3 < \pi < 3,22$. □

5 Carré dont les côtés passent par quatre points

Le problème est le suivant : « Soient quatre A, B, C, D (qu'on suppose deux à deux distincts). Tracer quatre droites passant par chacun des points de telle sorte qu'elles déterminent un carré ».

Pour cela,

1. Construire le point D_1 tel que (DD_1) soit perpendiculaire à (BC) et tel que $BC = DD_1$.
2. Tracer la droite (AD_1).
3. Tracer la droite perpendiculaire à (AD_1) passant par B. On note M l'intersection de (AD_1) et de la perpendiculaire tracée.
4. Tracer la droite perpendiculaire à (BM) passant par D. On note Q l'intersection de (BM) et de la perpendiculaire tracée.
5. Tracer la droite perpendiculaire à (DQ) passant par C. On note P l'intersection de (DQ) et de la pependiculire tracée et N l'intersection de (AM) et de la perpendiculaire tracée.

Développement

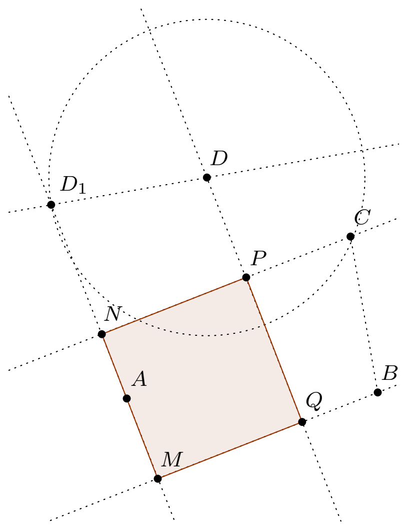
Construction avec GeoGebra. On place tout d'abord quatre points A, B, C et D distincts deux à deux avec l'outil « Nouveau point ».

```
Segment[B,C]
Perpendiculaire[D,a]
Cercle[D,a]
Intersection[b,c]
```

On obtient donc deux nouveaux points. On choisit un de ces deux points (qu'on nommera D_1) et on n'affiche pas l'autre point.

```
Droite[A,D_1]
Perpendiculaire[B,d]
M = Intersection{d,e]
Perpendiculaire[D,e]
Q = Intersection{e,f]
Perpendiculaire[C,f]
P = Intersection[f,g]
N = Intersection[g,d]
Polygone[M,N,P,Q]
```

□



Développement

Justification de la construction

Démonstration. Par construction, $MNPQ$ est un rectangle (trois angles droits). On montre que le rectangle $MNPQ$ a deux côtés consécutifs de même longueur. On note B' le projeté orthogonal de B sur (NP) et D' le projeté orthogonal de D sur (MN).

Les triangles $B'BC$ et $D'DD_1$ ont leurs côtés deux à deux perpendiculaires. L'hypoténuse $[BC]$ est perpendiculaire à $[DD_1]$ avec $BC = DD_1$. Les triangles sont semblables et $BB' = DD'$. Ce qui prouve que deux côtés consécutifs ont même longueur : $MNPQ$ est un carré. □

6 Quelques quadratures du carré

Définition 36.4 Soit $\mathcal{F}$ une figure rectiligne donné. On appelle quadrature du carré relatif à $\mathcal{F}$, un carré dont l'aire est égale à l'aire de $\mathcal{F}$.

6.1 Une construction dite de Sulbastra

Soit $ABCD$ un rectangle.

1. Tracer le carré $ADFE$.
2. Tracer la médiatrice de $[CF]$. Elle coupe $[CF]$ en H et $[EB]$ en G.
3. Tracer le rectangle $DFIJ$ tel que $DF = HG$ et $FI = HC$.
4. Tracer le carré $AGKJ$.
5. Tracer le cercle de centre J passant par A et coupe $[DH]$ en L.

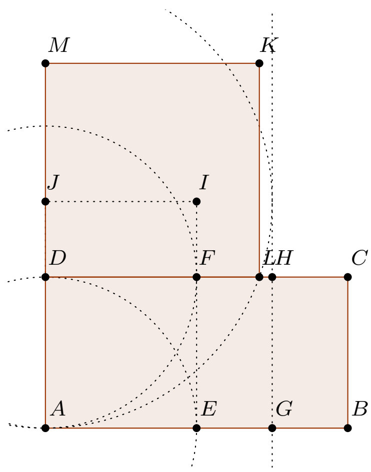
$[DL]$ est le côté duc arré qui a meme aire que le rectangle $ABCD$.

Développement

Construction sur GeoGebra.

```
A = (0,0)
B = (4,0)
C = (4,2)
D = (0,2)
Polygone[A,B,C,D]
Cercle[A,D]
Intersection[e,a]
Cercle[D,A]
Intersection[f,c]
Segment[E,F]
Médiatrice[C,F]
G = Intersection[a,h]
H = Intersection[c,h]
J = (0,3)
I = (2,3)
Segment[I,J]
Segment[J,D]
Segment[F,I]
Cercle[J,A]
L = Intersection[p,c]
Polygone[D,L,4]
```

□



6.2 La construction d'Euclide

On donne une interprétation moderne de la construction d'Euclide pour la quadrature d'un carré. On se donne $ABCD$ un rectangle.

1. Tracer la droite (AB).
2. Tracer un cercle $\mathcal{C}_1$ de centre B et de rayon $[BC]$. Il intersecte la droite (AB) en E et F tel que E n'est pas sur le segment.
3. Tracer un cercle $\mathcal{C}_2$ de diamètre $[AE]$.
4. Tracer la droite (BC). Elle intersecte le cercle $\mathcal{C}_2$ en T.

Ainsi BT est le côté du carré qui a même aire que le rectangle $ABCD$.

Développement

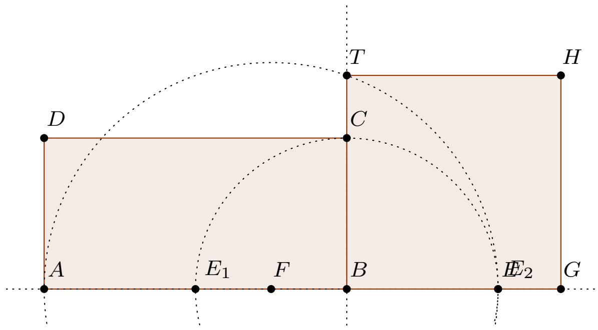
Construction sur GeoGebra.

```
A = (0,0)
B = (4,0)
C = (4,2)
D = (0,2)
Polygone[A,B,C,D]
Droite[A,B]
Cercle[B,C]
E=F # au cas où E est sur le segment [AB]
Droite[B,C]
MilieuCentre[A,E]
Cercle[F,A]
T = Intersection[h,g]
```

Il faut renomer le point T_1 en T et ne pas afficher le point T_2.

```
Polygone[T,B,4]
```

□



6 3 Quadrature du carré de Wallis

Soit $ABCD$ un rectangle.

1. Tracer le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre A et de rayon $[AD]$. Il intersecte $[AB]$ en D'.
2. Tracer la médiatrice de $[D'B]$. Soit O un point de cette médiatrice.
3. Tracer le cercle $\mathcal{C}_2$ de centre O qui passe par D'. B appartient aussi au cercle tracé car $OD' = OB$ (O est sur la médiatrice de $[D'B]$).
4. Tracer la tangente au cercle $\mathcal{C}_2$ passant par A.

Développement

Démonstration. La puissance du point A par rapport au cercle est :

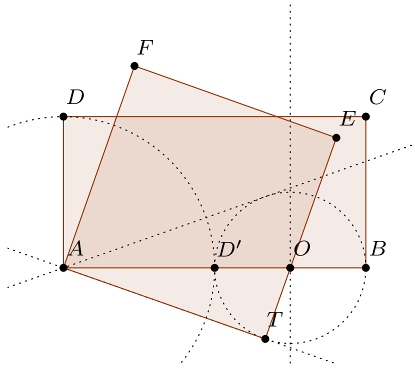
$$AT^2 = AD' \times AB = AD \times AB$$

D'où le carré $ATUV$ a même aire que le rectangle $ABCD$. □

Construction sur GeoGebra.

```
A = (0,0)
B= (4,0)
C = (4,2)
D = (0,2)
Cercle[A,D]
D' = Intersection[e,a]
Médiatrice[D',B]
O = Point[f]
Cercle[O,D']
Tangente[A,g]
T = Intersection[g,h]
Polygone[A,T,4]
```

$\square$



7 Autres problèmes de construction

7.1 Problème 1

Soit ζ un cercle de centre O ; I est un point du disque ouvert de frontière ζ. Construire les points P et Q de ζ tels que I soit le milieu du segment $[PQ]$.

Développement

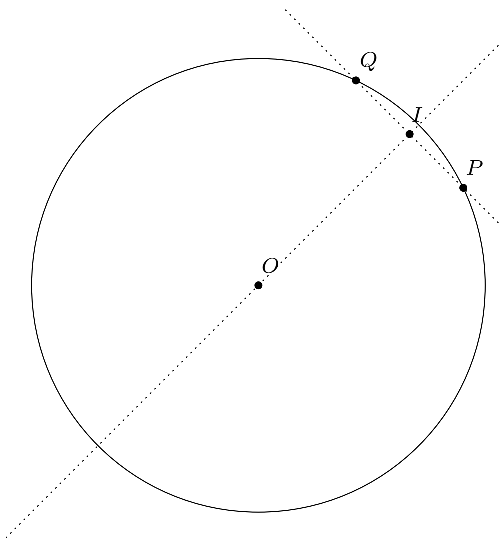
Observation. On suppose l'existence de points P et Q de ζ tels que I soit le milieu du segment $[PQ]$. P et Q ne sont pas confondus car I n'est pas un point de ζ. O est équidistant de P et Q, donc O appartient à la médiatrice $[PQ]$. I étant le milieu de $[PQ]$, la droite (OI) est la médiatrice de (PQ). $\square$

Construction et justificiation. Construire la perpendiculaire (Δ) à (Oi) en I ; Δ coupe ζ en deux points P et Q car I est « intérieur à ζ.
On a alors : $OP = OQ$ donc O appartient à la médiatrice de (PQ), ce qui prouve que I est le milieu de $[PQ]$. $\square$

Construction sur GeoGebra.

```
O = (0,0)
Cercle[O,3]
I = (2,2)
Droite[O,I]
Perpendiculaire[I,a]
P = Intersection[b,c]
# Renommer le point P_1 en P et le point P_2 en Q
```

$\square$



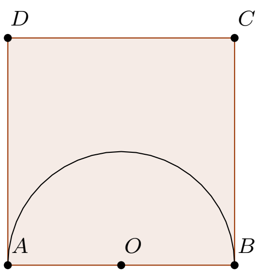
7 2 Problème 2

Soient A et B deux points du plan et soit O le milieu du segment $[AB]$. Γ est le demi-cercle de diamètre $[AB]$. Construire les points P, Q, R et S tels que :

- P et Q appartiennent à (AB)
- R et S appartiennent à Γ
- $PQRS$ est un carré.

Développement

Démonstration. La difficulté provient du fait que les trois conditions doivent être simultanément satisfaites. L'idée est d'en oublier une dans un premier temps.
On construit aisément un carré ayant deux sommets sur $[AB]$, les deux autres n'appartenant pas nécessairement à Γ ; on construit, par exemple, celui de côté $[AB]$ et inclus dans le demi-plan de frontière (AB) contenant Γ. On note que Γ est nécessairement « à l'intérieur » de $ABCD$.



Comment transformer $ABCD$ en un carré vérifiant toutes les conditions imposées ?
Soient R le point d'intersection de la droite (OC) et de Γ, S le point d'intersection de la droite (OD) et de Γ. Q et P les projetés orthogonaux respectifs de R et de S sur la droite (AB). Les points O, R et C sont alignés, dans cet ordre ; il existe donc une homothétie h de centre O et de rapport $k > 0$ transformant C en R.
On a donc : $\overrightarrow{OR} = k\overrightarrow{OC}$; c'est-à-dire $R = h(C)$.
De plus, on sait :

- $OR = OS$ (car $[OR]$ et $[OS]$ sont des rayons d'un même cercle),
- $OC = OD$ (car les triangles rectangles BOC et AOD sont isométriques et ont respectivement pour hypoténuses $[OC]$ et $[OD]$),
- O, S, D sont alignés dans le même ordre,

donc $\overrightarrow{OS} = k\overrightarrow{OD}$; c'est-à-dire $S = h(D)$.
D'autre part, les droites (PS) et (AD) sont parallèles, car toutes deux perpendiculaires à (AB) ; d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OA}, \quad \text{c'est-à-dire } P = h(A)$$

De même on montre :

$$\overrightarrow{OQ} = k\overrightarrow{OB}, \quad \text{c'est-à-dire } Q = h(B)$$

On a prouvé que P, Q, R, S sont les images respectives de A, B, C, D par h. Comme l'homothétique d'un carré est un carré, $PQRS$ est un carré.
Finalement, on a bien :

- P et Q sont des points de (AB) ;
- R et S sont des points de Γ ;
- $PQRS$ est un carré.

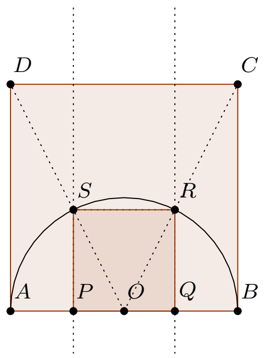
□

Construction sur GeoGebra.

```
A = (0,0)
B = (3,0)
C = (3,3)
D = (0,3)
O = MilieuCentre[A,B]
Demi-Cercle[A,B]
```

```
Segment[O,C]
Segment[O,D]
R = Intersection[e,f]
S = Intersection[e,g]
Segment[R,S]
Perpendiculaire[R,h]
Perpendiculaire[S,h]
P = Intersection[j,a]
Q = Intersection[i,a]
Polygone[P,Q,R,S]
```

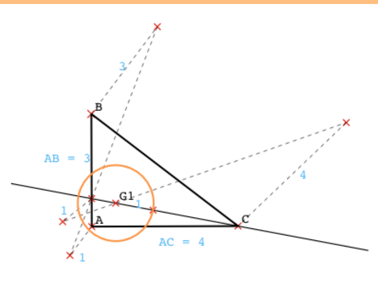
□



LEÇON

37

Problèmes de lieux géométriques



Niveau : Terminale S

Prérequis : barycentre, produit scalaire, complexe, formules trigonométriques, relation de Chasles, detérminant

0 3 Définition d'introduction

Définition 37.1

Lieu géométrique

Un *lieu géométrique* est un ensemble de points satisfaisant certaines conditions, données par un problème de construction géométrique.

Dans cette leçon, on donne des problèmes de lieux géométriques.

1 Médiatrice

Définition 37.2

Médiatrice

Une médiatrice $\mathcal{M}$ d'un segment $[AB]$ est l'ensemble des points M tel que $AM = BM$:

$$\mathcal{M} = \{M,\ AM = BM\}$$

Exemple 37.3. Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé du plan, $A = (-2, 0)$ et $B = (2, 0)$. L'ensemble des points M équidistants de A et de B est la médiatrice $[AB]$, précisément l'axe $(O, \vec{\jmath})$.

2 Le cercle

Définition 37.4

Cercle

Un cercle $\mathcal{C}$ de centre O de rayon r est l'ensemble des points M tel que $OM = r$.

$$\mathcal{C} = \{M,\ OM = OR\}$$

Exemples 37.5.

1. Soit O et A deux points. L'ensemble

$$\mathcal{C} = \{M,\ OM = OA\}$$

   est le cercle de centre O et de rayon $[OA]$.
2. Soit A et B deux points. On cherche à représenter géométriquement l'ensemble

$$\mathcal{C} = \left\{M,\ \frac{1}{2}AB = AM\right\}.$$

   On introduit I le milieu de $[AB]$. On a ainsi $\frac{1}{2}AB = AI$. D'où $\mathcal{C}$ est le cercle de centre A et de rayon $[AI]$.

3 Utilisation des barycentres

Exemple 37.6. ABC est un triangle dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité 1 cm.

1. On va déterminer l'ensemble E_1 des points M tels que $\left\|\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\| = 6$ cm. Pour réduire la somme vectorielle, on pose G_1 le barycentre de $(B, 1)$, $(C, 2)$ (que l'on peut construire avec $\overrightarrow{BG_1} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$). Alors, pour tout point M :

$$\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = (1+2)\overrightarrow{MG_1} = 3\overrightarrow{MG_1}.$$

   E_1 est donc l'ensemble des points M tels que $\left\|3\overrightarrow{MG_1}\right\| = 6$ cm $\Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{MG_1}\right\| = 2$ cm. On en déduit que E_1 est le cercle de centre G_1 et de rayon 2 cm.

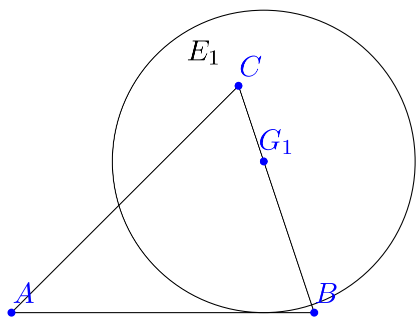


FIGURE 37.1 – Construction de l'ensemble E_1

2. Soit ABC un triangle. On va construire l'ensemble E_2 des points M tels que :

$$\left\|3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\|.$$

On note

- G_2 le barycentre de $(A, 3)$ et $(B, 1)$,
- G_3 le barycentre de $(A, 1)$ et $(C, 1)$.

Pour tout point M, on a alors :

- $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB} = (3+1)\overrightarrow{MG_2} = 4\overrightarrow{MG_2}$,
- $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC} = (1+1)\overrightarrow{MG_3} = 2\overrightarrow{MG_3}$.

E_2 est donc l'ensemble des points M tels que $\left\|4\overrightarrow{MG_2}\right\| = 2\left\|2\overrightarrow{MG_3}\right\| \Leftrightarrow \|MG_2\| = \|MG_3\|$. On en déduit que E_2 est la médiatrice de $[G_2, G_3]$.

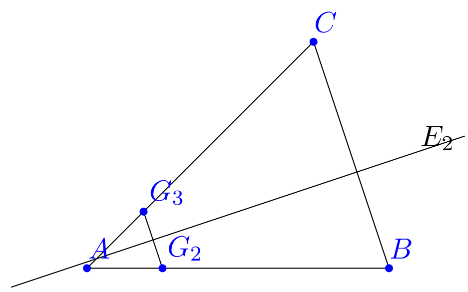


FIGURE 37.2 – Construction de l'ensemble E_2

4 Utilisation du produit scalaire

1. On cherche tout d'abord l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = k$.

Propriété 37.7

Soit I le milieu du segment $[AB]$ (avec $A \neq B$). Pour tout point M, on a :

$$MA^2 + MB^2 = 2IM^2 + \frac{AB^2}{2} \quad \text{(Théorème de la médiane).}$$

Etant donné un réel k, on en déduit que l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = k$ est un cercle, ou un point ou l'ensemble vide.

Exemple 37.8. Soit A et B deux points tels que $AB = 2$. On cherche à déterminer l'ensemble E des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 20$. On utilise le théorème de la médiane :

$$MA^2 + MB^2 = 20 \Leftrightarrow 2IM^2 + \frac{AB^2}{2} = 20 \Leftrightarrow 2IM^2 + \frac{4}{2} = 20 \Leftrightarrow IM^2 = 9 \Leftrightarrow IM = 3$$

(car $IM > 0$). L'ensemble E est donc le cercle de centre I et de rayon 3.

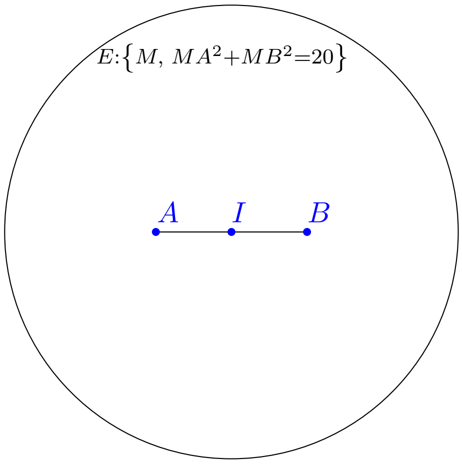


FIGURE 37.3 – Construction de l'ensemble E de l'exemple 37.8

2. On cherche à déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$. Pour cela, on décompose $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ en passant par I le milieu de $[AB]$.

Exemple 37.9. Soit A et B deux points tels que $AB = 4$. On cherche à déterminer l'ensemble E des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 12$.

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 12 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = 12.$$

Or, $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$. On a donc :

$$(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = 12 \Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = 12 \Leftrightarrow MI^2 - 2^2 = 12.$$

On en déduit que $M \in E \Leftrightarrow MI^2 = 16 \Leftrightarrow MI = 4$. E est donc le cercle de centre I et de rayon 4

3. On cherche à déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = k$. Pour cela, on cherche un point particulier H appartenant à l'ensemble. On a alors $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = k$. Ainsi,

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = k \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AH}) \cdot \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \perp \vec{u}.$$

L'ensemble est alors la droite passant par H de vecteur normal $\vec{u}$.

Exemple 37.10. Soit A et B deux points tels que $AB = 3$. On cherche à déterminer l'ensemble E des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = -6$. Soit H le point de la droite (AB) tel que $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient de sens contraires et tel que $AH \times AB = 6 \Leftrightarrow AH = \frac{6}{3} = 2$. Ainsi, on a bien $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = -6$. Dès lors :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = -6 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AH}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \perp \overrightarrow{AB}.$$

L'ensemble E est alors la droite perpendiculaire à (AB) passant par H.

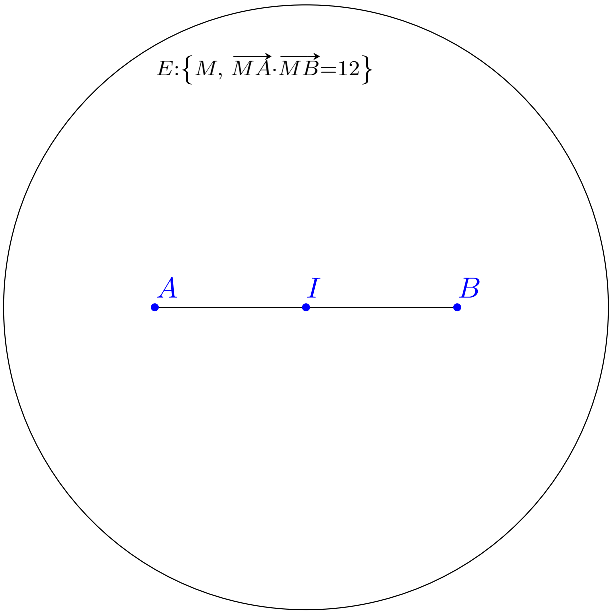


FIGURE 37.4 – Construction de E de l'exemple 37.9

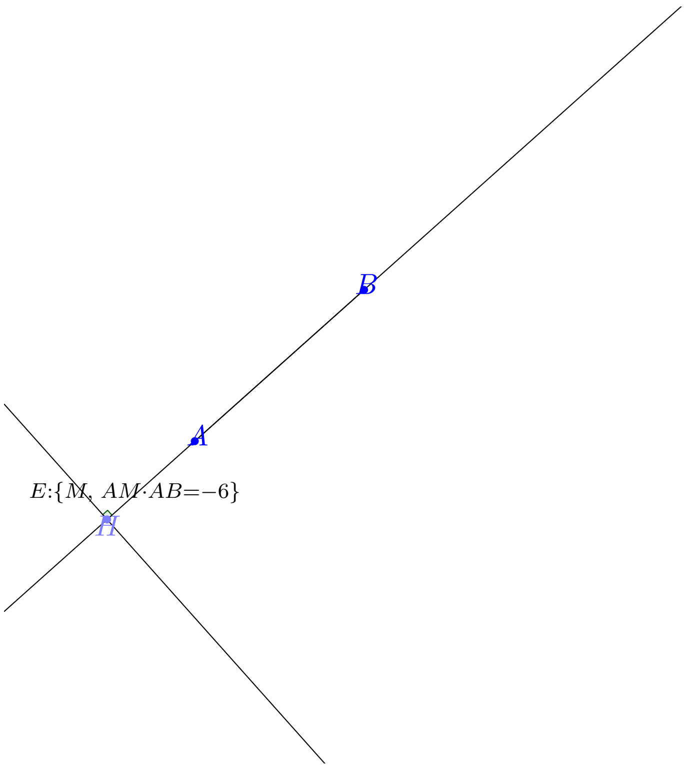


FIGURE 37.5 – Construction de E de l'exemple 37.10

Exercice 37.11. On considère deux points distincts A et B. Pour tout point M du plan, soit I le milieu de $[AM]$ et G le barycentre de $(A, -1)$, $(B, 2)$ et $(M, 1)$

1. Faire une figure.
2. Démontrer que I est l'image de M par une transformation du plan à déterminer. Démontrer que G est l'image de I par une transformation du plan à déterminer.
3. En déduire
   - le lieu des points I lorsque M décrit le cercle de diamètre $[AB]$;
   - le lieu des points G lorsque M décrit le cercle de diamètre $[AB]$;
   - le lieu des points I lorsque M décrit la droite perpendiculaire à (AB) en B ;
   - le lieu des points G lorsque M décrit la droite perpendiculaire à (AB) en B.

Développement

Solution de l'exercice 37.11.

1. G étant le barycentre de $(A, -1)$, $(B, 2)$ et $(M, 1)$, on a : $-\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GM} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GM} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$, d'où $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$. I étant le milieu de $[AM]$, on en déduit que $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AI}$.

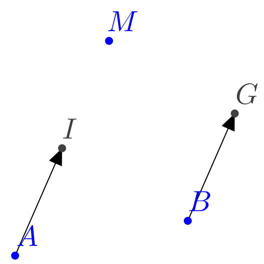


FIGURE 37.6 – Figure de la question 1

2. I étant le milieu de $[AM]$, on a $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$. Donc I est l'image de M par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$. On a vu $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AI}$, donc $BGIA$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{AB}$. Donc G est l'image de I par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
3. Par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$, le point A est invariant et le point B a pour image le point K tel que $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire le milieu de $[AB]$. I étant l'image de M par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$, lorsque M décrit le cercle de diamètre $[AB]$, I décrit le cercle de diamètre $[AK]$.

   Par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, le point A a pour image B et le point K a pour image L tel que $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AB}$. G étant l'image de I par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, lorsque M décrit le cercle de diamètre $[AB]$, I décrit le cercle de diamètre $[AK]$ et G décrit le cercle de diamètre $[BL]$.

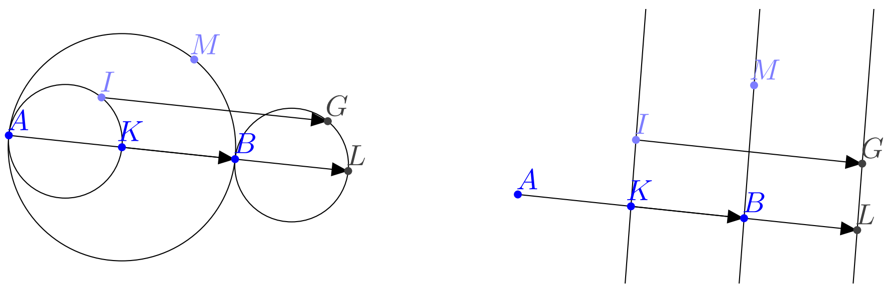


FIGURE 37.7 – Figure de la question 3

Lorsque M décrit la droite perpendiculaire à (AB) en B, I décrit la droite perpendiculaire à (AK) en K et G décrit la droite perpendiculaire à (BL) en L.

□

Exercice 37.12. Soient A et B deux points distincts, I le milieu de $[AB]$. Soit (d) la médiatrice de $[AB]$. Soit (C) le cercle de centre A et de rayon AI et (C') le cercle de diamètre $[AB]$. A tout point M, on associe le point M' barycentre de $(A,-1)$ et $(M,2)$. Déterminer le lieu géométrique de M' lorsque M décrit :

1. la droite (AB)
2. la droite (d)
3. le cercle (C)
4. le cercle (C')

Développement

Solution de l'exercice 37.12. M' est le barycentre de $(A,-1)$ et $(M,2)$, on a donc :

$$-\overrightarrow{M(A}+2\overrightarrow{M'M}=\vec{0}\Leftrightarrow -\overrightarrow{M'A}+2(\overrightarrow{M'A}+\overrightarrow{AM})=\vec{0},$$

c'est-à-dire $\overrightarrow{M'A}+2\overrightarrow{MA}=\vec{0}$ donc $\overrightarrow{AM'}=2\overrightarrow{AM}$. On en déduit que M' est l'image de M par l'homothétie de centre A et de rapport 2.

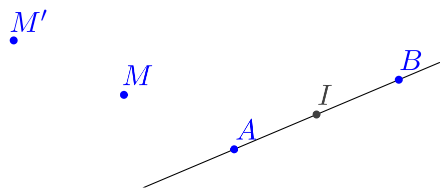


FIGURE 37.8 – Figure d'introduction pour l'exercice

1. A étant le centre de l'homothétie, on a $A'=h(A)=A$. De plus, l'image de B par h est $B'=h(B)$ avec $\overrightarrow{AB'}=2\overrightarrow{AB}$. Si M décrit la droite (AB), M' décrit la droite $(A'B')$. Or A' et B' se trouvent sur la droite (AB), donc la droite $(A'B')$ est la droite (AB). Lorsque M décrit la droite (AB), M' décrit la droite (AB).

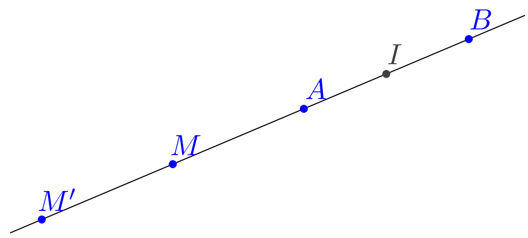


FIGURE 37.9 – Figure de la question 1

2. La droite (d), médiatrice de $[AB]$ est la droite passant par I et perpendiculaire à (AB). Comme I est le milieu de $[AB]$, on a $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AI}$. Donc B est l'image de I par h. Si M décrit la droite (d) passant par (I) et perpendiculaire à (AB), alors M' décrit la droite (d') passant par $I'=B$ et perpendiculaire à $(A'B')=(AB)$. Lorsque M décrit la droite (d) médiatrice de $[AB]$, M' décrit la droite (d') passant par B et perpendiculaire à (AB).
3. Si M décrit le cercle (C') de centre A et de rayon (AI), alors M' décrit le cercle de centre $A'=A$ et de rayon $2AI=AB$, c'est-à-dire le cercle de centre A et passant par B. Lorsque M décrit le cercle (C), M' décrit le cercle de centre A passant par B.
4. Si M décrit le cercle (C') de diamètre $[AB]$, alors M' décrit le cercle de diamètre $[A'B']=[AB']$. Comme $\overrightarrow{AB'}=2\overrightarrow{AB}$, B est le milieu de $[AB']$, donc le cercle de diamètre $[AB']$ est le cercle de centre B passant par A. Lorsque M décrit le cercle (C') de diamètre $[AB]$, M' décrit le cercle de entre B passant par A.

□

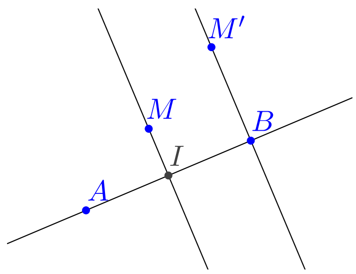


FIGURE 37.10 – Figure de la question 2

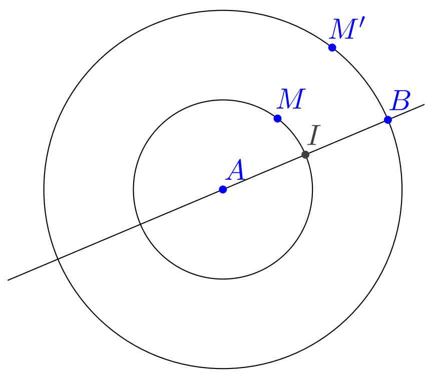


FIGURE 37.11 – Figure de la question 3

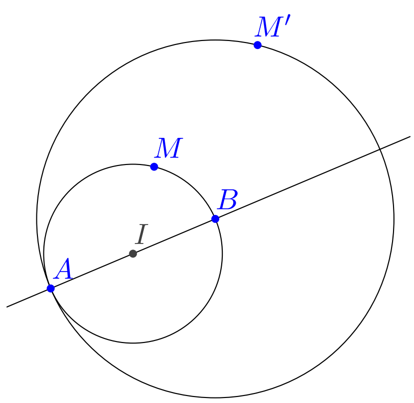


FIGURE 37.12 – Figure de la question 4

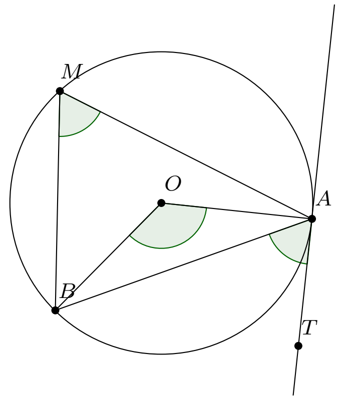
6.1 Théorème de l’angle au centre

Théorème 37.13

Théorème de l’angle au centre

Soient M, A, B trois points distincts d’un cercle de centre O, T un point de la tangente en A ($T \neq A$). L’angle au centre $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est égal au double de l’angle inscrit $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ et au double de l’angle de la tangente $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB})$:

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) &\equiv 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \pmod{2\pi}\\ &\equiv 2(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) \pmod{2\pi}\end{aligned}$$



Développement

Démonstration.

– La somme des angles orientés du triangle MAO est égale à π :

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) + (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) \equiv \pi \pmod{2\pi}.$$

On a aussi $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) \equiv (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AM}) \pmod{2\pi}$ car MAO est isocèle, d’où :

$$2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) \equiv \pi \pmod{2\pi}.$$

Les mêmes considérations dans le triangle MOB mènent à l’égalité analogue :

$$2(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{MA}) \equiv \pi \pmod{2\pi}.$$

En ajoutant ces deux égalités, on obtient :

$$2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) + 2(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{MA}) \equiv 0 \pmod{2\pi},$$

d’où par la relation de Chasles,

$$2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

ce qui donne la première égalité de l’énoncé.

– On a :

$$2(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = 2(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AO}) + 2(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB}) \equiv \pi + 2(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB}) \pmod{2\pi}.$$

La somme des angles orientés du triangle isocèle AOB étant égale à π, on a :

$$2(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB}) \equiv \pi - (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) \pmod{2\pi}.$$

D’où :

$$2(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = \pi + \pi - (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) \equiv (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \pmod{2\pi}.$$

□

6 2 Théorème du cercle capable

Théorème du cercle capable

Théorème 37.14

Soient A, B deux points distincts du plan affine euclidien orienté et $\alpha \in \mathbb{R}$ ($\alpha \not\equiv 0 \pmod{\pi}$). L'ensemble E_α des points M du plan tels que :

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \alpha \pmod{\pi}$$

est le cercle passant par A et B et dont la tangente (AT) en A vérifie $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) \equiv \alpha \pmod{\pi}$ privé des points A et B.

Ce cercle s'appelle *cercle capable d'angle* α du couple (A, B).

Développement

Démonstration. On munit l'espace d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de manière à ce que A et B aient pour coordonnées $A(-a, 0)$ et $B(a, 0)$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$. En notant z l'affixe du point $M(x, y)$ autre que A et B, on a :

$$\begin{aligned}
M \in E_\alpha &\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \alpha \pmod{\pi} \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z-a}{z+a}\right) \equiv \alpha \pmod{\pi} \\
&\Leftrightarrow \arg((z-a)(\overline{z}+a)) \equiv \alpha \pmod{\pi} \Leftrightarrow \arg((z-a)(\overline{z}+a)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}) \equiv 0 \pmod{\pi} \\
&\Leftrightarrow \operatorname{Im}((x+\mathrm{i}y-a)(x-\mathrm{i}y+a)(\cos\alpha - \mathrm{i}\sin\alpha)) = 0 \Leftrightarrow -(x^2+y^2-a^2)\sin\alpha + 2ay\cos\alpha = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2+y^2-2ay\operatorname{cotan}(\alpha) - a^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y - a\operatorname{cotan}(\alpha))^2 = \frac{a^2}{\sin^2\alpha}.
\end{aligned}$$

Donc E_α est le cercle $\mathcal{C}$ de centre de coordonnées $(0, a\operatorname{cotan}\alpha)$ et de rayon $\frac{a}{|\sin\alpha|}$.

De plus, si T est un point de la tangente en A au cercle $\mathcal{C}$ ($T \neq A$), d'après le théorème de l'angle au centre, on a :

$$(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) \equiv (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \pmod{\pi} \equiv \alpha \pmod{\pi}.$$

□

6 3 Théorème de l'arc capable

Théorème de l'arc capable

Théorème 37.15

Soient A, B deux points distincts du plan affine euclidien orienté et $\alpha \in \mathbb{R}$ ($\alpha \not\equiv 0 \pmod{\pi}$). L'ensemble E_α des points M du plan tels que :

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \alpha \pmod{2\pi}$$

est l'arc en cercle ouvert $\overset{\frown}{AB}$ du cercle capable $\mathcal{C}$ d'angle α du couple (A, B) qui est l'intersection de $\mathcal{C}$ avec le demi-plan ouvert délimité par (AB), qui ne contient pas la demi-tangente $[AT)$ au cercle en A, où T est le point de la tangente tel que $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) \equiv \alpha \pmod{2\pi}$.

Cet arc est appelé *arc capable d'angle* α *du couple* (A, B). L'autre arc ouvert $\overset{\frown}{AB}$ est l'arc capable d'angle $\alpha + \pi$ du couple (A, B).

Développement

Démonstration. On note $\operatorname{sign}(x)$ le signe d'un réel non nul x. On a l'équivalence :

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \alpha \pmod{2\pi} \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \equiv \alpha \pmod{\pi} \quad \text{et} \quad \operatorname{sign}(\sin(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})) = \operatorname{sign}(\sin\alpha).$$

La première condition équivaut à l'appartenance de M au cercle capable $\mathcal{C}$ d'angle α. Il suffit donc de vérifier que la deuxième condition équivaut à l'appartenance de M au demi-plan ouvert dont parle le théorème.

On choisit un repère orthonormé direct $(A, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ tel que $\overrightarrow{AB} = a\vec{\imath}$ avec $a = AB$. Comme :

$$\det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = MA \times MB \times \sin(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$$

dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, son signe est celui du sinus.
En fonction de $M(x, y)$, $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ ont pour composantes respectives $(-x, -y)$ et $(a - x, -y)$,

$$\det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = ay$$

donc

$$\operatorname{sign}(\sin(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})) = \operatorname{sign}(ay) = \operatorname{sign}(y).$$

La condition cherchée équivaut donc à l'appartenance de M au demi-plan P, délimité par (AB) dans lequel $\operatorname{sign}(y) = \operatorname{sign}(\sin\alpha)$.
Pour tout point T de la tangente en A ($T \neq A$), on a :

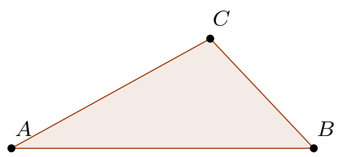
$$(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) \equiv \alpha \pmod{\pi}.$$

Donc $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) \equiv \alpha \pmod{2\pi}$ si et seulement si on a de plus $\operatorname{sign}(\sin(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB})) = \operatorname{sign}(\sin\alpha)$, ou encore $\operatorname{sign}(\det(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB})) = \operatorname{sign}(\sin\alpha)$.
En fonction de $T(x, y)$, les composantes respectives de $\overrightarrow{AT}$ et de $\overrightarrow{AB}$ sont (x, y) et $(a, 0)$ et on a $\det(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = -ay$.
On a donc $\operatorname{sign}(\sin(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB})) = \operatorname{sign}(\sin\alpha)$ si et seulement si T est dans le demi-plan ouvert où $\operatorname{sign}(y) = -\operatorname{sign}(\sin\alpha)$, c'est-à-dire dans le demi-plan opposé à celui de M.
Cette démonstration reprise avec $\alpha+\pi$ mène à un second arc capable qui est l'intersection du cercle capable d'angle $\alpha+\pi$, qui n'est autre que $\mathcal{C}$ avec le demi-plan ouvert, délimtié par (AB), qui ne rencontre pas la demi-tangente $[AT)$ à $\mathcal{C}$ en A, quand $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) \equiv \alpha + \pi \pmod{2\pi}$. C'est donc le second arc capable $\overset{\frown}{AB}$ du cercle capable. □

7 Un exemple de recherche de lieux en utilisant un repère

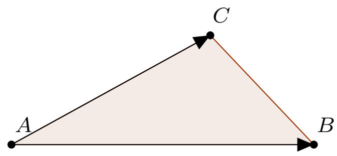
Exemple 37.16. Soit ABC un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 3$ et $BC = 2$. On détermine l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan vérifiant l'équation :

$$3AM^2 - 4BM^2 + 2CM^2.$$



Développement

Pour trouver l'ensemble $\mathcal{E}$ de manière analytique, nous allons nous placer dans le repère non orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Dans ce repère l'origine A a pour coordonnée $(0; 0)$, $B(1; 0)$ et $C(0; 1)$.



Comme le repère choisi n'est pas orthonormé, la formule des normes de vecteurs ne s'applique pas. On détermine une autre formule. Si le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x; y)$ dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ alors :

$$\vec{u} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}.$$

La norme d'un vecteur est égale à la racine carré de son carré scalaire. Ainsi :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u}\rangle} = \sqrt{\left\langle x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}, x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}\right\rangle} = \sqrt{x^2\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + 2xy\left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\rangle + y^2\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2}$$

Or :

$$\|AB\|^2 = AB^2 = 16 \quad \text{et} \quad \|AC\|^2 = AC^2 = 9.$$

Reste à calculer le produit scalaire $\left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\rangle$:

$$\begin{aligned}\left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\rangle &= \left\langle -\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}\right\rangle = -\left\langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}\right\rangle \\ &= -\frac{1}{2}\left[\left\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2\right] \\ &= -\frac{1}{2}[2^2 - 4^2 - 3^2] = -\frac{1}{2}[4 - 16 - 9] = -\frac{1}{2}(-21) = 10,5.\end{aligned}$$

Ainsi, la norme du vecteur $vvu(x;y)$ dans le repère $(A;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est donnée par :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{16x^2 + 21xy + 9y^2}.$$

Soient $M(x,y)$ et $I(a,b)$ dans $(A;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Le carré de la distance IM est donné par :

$$\begin{aligned}IM^2 &= \left\|\overrightarrow{IM}\right\| = \|(x-a;y-b)\|^2 \\ &= \left(\sqrt{16(x-a)^2 + 21(x-a)(y-b) + 9(y-b)^2}\right)^2 \\ &= 16(x^2 - 2ax + a^2) + 21(xy - bx - ay + ab) + 9(y^2 - 2by + b^2) \\ &= 16x^2 + (-32a - 21b)x + 9y^2 + (-21a - 18b)y + 21xy + 16a^2 + 21ab + 9b^2.\end{aligned}$$

Ainsi, on peut décrire tous les points $M(x;y)$ de l'ensemble $\mathcal{E}$.

$$\begin{aligned}M(x,y) \in \mathcal{E} &\Leftrightarrow 3AM^2 - 4BM^2 + 2CM^2 = 26 \\ &\Leftrightarrow 3\left\|\overrightarrow{AM}\right\|^2 - 4\left\|\overrightarrow{BM}\right\|^2 + 2\left\|\overrightarrow{CM}\right\|^2 = 26 \\ &\Leftrightarrow 3(16x^2 + 21xy + 9y^2 - 4(16(x-1)^2 + 21(x-1)y + 9y^2) + 2(16x^2 + 21x(y-1) + 9(y-1)^2 = 26 \\ &\Leftrightarrow \cdots \\ &\Leftrightarrow 16x^2 + 86x + 9y^2 + 48y + 21xy - 72 = 0.\end{aligned}$$

L'équation $16x^2 + 86x + 9y^2 + 48y + 21xy - 72 = 0$ semble être une équation cartésienne d'un cercle. Il faut en déterminer les coordonnées du centre et son rayon. La formule donnant IM^2 va nous être utile, ici.

$$\begin{aligned}IM^2 &= 16x^2 + 9y + 21xy + 86x + 48y - 72 = 0 \\ &= 16x^2 + 9y + 21xy + (-32a - 21b)x + (-21a - 18b)y - 72 = 0\end{aligned}$$

Les coordonnées (a,b) du centre I de notre cercle sont les solutions du système 2×2 suivant :

$$\begin{cases} -32a - 21b = 86 \\ -21a - 18b = 48 \end{cases}$$

Après calculs, on trouve $a = -4$ et $b = 2$. Ainsi :

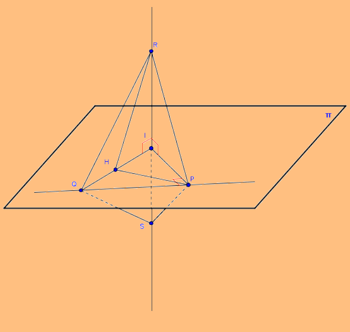
$$\begin{aligned}M(x,y) \in \mathcal{E} &\Leftrightarrow 16x^2 + 9y^2 + 21xy + 86x + 48y - 72 = 0 \\ &\Leftrightarrow IM^2 - [16 \times (-4)^2 + 21 \times (-4) \times 2 + 9 \times 2^2] - 72 = 0 \\ &\Leftrightarrow IM^2 - 124 - 72 = 0 \Leftrightarrow IM^2 = 196 \Leftrightarrow IM = 14.\end{aligned}$$

Conclusion : l'ensemble $\mathcal{E}$ est le cercle de rayon 14 et de centre le point I défini par :

$$\overrightarrow{AI} = -4\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}.$$

LEÇON 38

Orthogonalité



Niveau : Lycée
Prérequis : vocabulaire sur les droites, produit scalaire, barycentre.

1 Droites orthogonales ou perpendiculaires

Définition 38.1

Droites orthogonales

On dit que deux droites sont *orthogonales* (ou *perpendiculaires*) si elles sont sécantes et forment un angle droit.

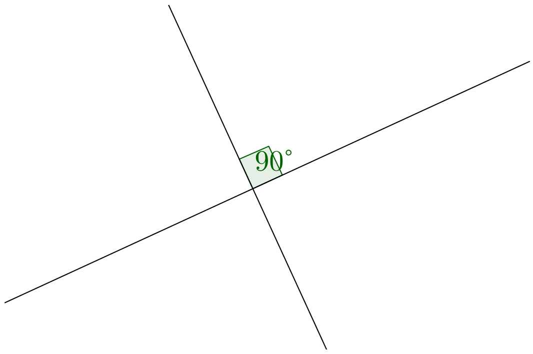


FIGURE 38.1 – Deux droites perpendiculaires

Notation. Soient (d_1) et (d_2) deux droites. Si (d_1) et (d_2) sont perpendiculaires alors on note $(d_1) \perp (d_2)$.

Propriétés 38.2

1. Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles.
2. Si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

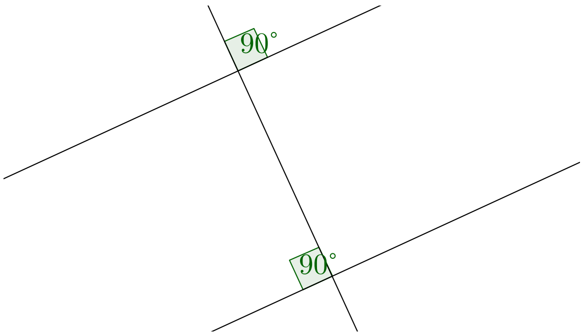


FIGURE 38.2 – Si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

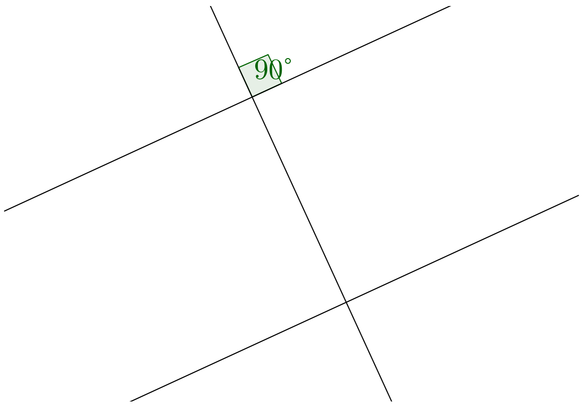


FIGURE 38.3 – Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles.

2.1 Droites orthogonales

Soit d et d' deux droites de l'espace et A_1 et A_2 deux points de l'espace.

1. d_1 et d'_1 sont les parallèles à d et d' passant par A_1 et P_1 est le plan déterminé par ces deux droites.
2. d_2 et d'_2 sont les parallèles à d et d' passant par A_2 et P_2 est le plan déterminé par ces deux droites.

On admet que d_1 et d'_1 sont perpendiculaires dans P_1 si et seulement si d_2 et d'_2 sont perpendiculaires dans P_2.

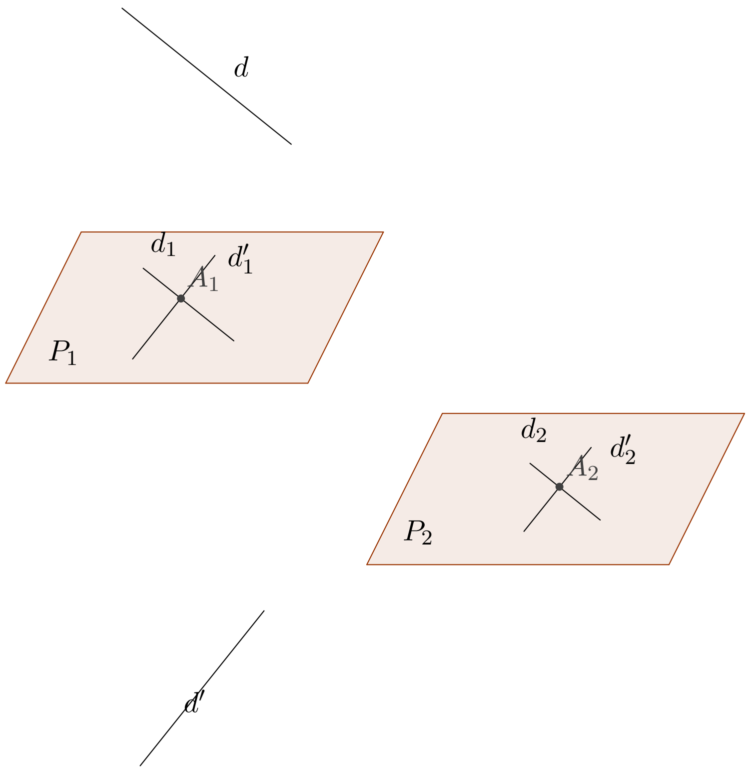


FIGURE 38.4 – $d_1 \perp d'_1$ et $d_2 \perp d'_2$

En résumé : si en un point, les parallèles à d et d' sont perpendiculaires, alors en tout autre point de l'espace, les parallèles à d et d' seront perpendiculaires.

On peut donc définir :

Définition 38.3 Deux droites de l'espace sont *orthogonales* si leurs parallèles menées par un point quelconque de l'espace sont perpendiculaires. On note $d \perp d'$.

Remarque 38.4. L'adjectif « perpendiculaire » ne s'utilise que pour les droites orthogonales et sécantes (donc coplanaires). Dans la suite de la section, on parlera, pour simplifier, de droites orthogonales qu'elles soient sécantes ou non.

Propriétés 38.5

1. Si deux droites sont orthogonales, alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.
2. Si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

Remarque 38.6. **Attention !** Certaines règles vraies dans le plan ne sont pas vraies dans l'espace. Par exemple, dans le plan, deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre elles ; ce qui n'est pas vrai dans l'espace.

2 2 Droites orthogonales à un plan

Définition 38.7

Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan. On note $d \perp P$.

Propriété 38.8

Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

Propriétés 38.9

1. Il existe une unique droite passant par un point donné et orthogonale à un plan donné.
2. Il existe un unique plan passant par un point donné et orthogonal à une droite donnée.

Propriétés 38.10

1. Si deux droites sont parallèles, alors tout plan orthogonal à l'une est orthogonale à l'autre.
2. Si deux droites sont orthogonales à un même plan, alors elles sont parallèles.

Propriétés 38.11

1. Si deux plans sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.
2. Si deux plans sont orthogonaux à une même droite, alors ils sont parallèles.

Remarque 38.12. La relation d'orthogonalité ne lie pas seulement une droite et un plan mais une famille de plan tous parallèles entre eux à une famille de droites toutes parallèles entre elles.

2 3 Plans médiateurs

Définition 38.13

On appelle *plan médiateur* d'un segment $[AB]$, le plan orthogonal à (AB) passant par le milieu I de $[AB]$.

Propriété 38.14

L'ensemble des points équidistants de deux points A et B ($A \neq B$) est le plan médiateur du segment $[AB]$.

Remarque 38.15. Dans l'espace, le plan médiateur joue un rôle analogue à celui de la médiatrice dans le plan.

2 4 Projections orthogonales

Définition 38.16

Projection orthogonale

Soit P un plan. La *projection orthogonale* sur P est la projection sur P parallèlement à une droite d orthogonale à P.

L'image M' d'un point M par la projection orthogonale sur P est appelée *projection orthogonal de* M.

Remarques 38.17.

1. Pour tout point M et N de projetés orthogonaux M' et N' sur un plan P, on a $M'N' \leq MN$.
2. Si trois points M, N et P sont alignés alors leurs projetés orthogonaux M', N' et P' sur un plan P sont alignés.

3 Produit scalaire (en lien avec l'orthogonalité)

3.1 Produit scalaire de deux vecteurs

On munit l'espace d'un repère *orthonormé* $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Définition 38.18

Produit scalaire

Soient $\vec{u} = (x, y, z)$ et $\vec{u'} = (x', y', z')$ deux vecteurs de l'espace. Le *produit scalaire* de $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ vaut :

$$\vec{u} \cdot \vec{u'} = xx' + yy' + zz'.$$

Propriétés 38.19

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et quel que soit le réel k, on a :

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
3. $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$.

Remarque 38.20. Le produit scalaire de tout vecteur $\vec{u}$ avec le vecteur nul est le réel nul. Il se peut que le produit scalaire de deux vecteurs soit nul sans qu'aucun le soit.

Définition 38.21

Orthogonalité

Deux vecteurs sont dits *orthogonaux* si (et seulement si) leur produit scalaire est nul.

3.2 Droites orthogonales

Une droite peut être définie par un de ses points et par un de ses vecteurs directeurs (un vecteur directeur est toujours non nul).

Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$, si $\vec{u'}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}'$, et si les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont orthogonaux, alors tout vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est orthogonal à tout vecteur directeur de $\mathcal{D}'$.

Cela se justifie par la dernière propriété dans le paragraphe précédent. Si $\vec{v}$ est un autre vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$, il est colinéaire au vecteur $\vec{u}$: il existe donc un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$. De même, si $\vec{v'}$ est un autre vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}'$, il est colinéaire au vecteur $\vec{u'}$: il existe donc un réel k' tel que $\vec{v'} = k'\vec{u'}$.

Donc :

$$\vec{v} \cdot \vec{v'} = (k\vec{u}) \cdot (k\vec{u'}) = kk'(\vec{u} \cdot \vec{u'}) = kk' \times 0 = 0$$

puisque les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont orthogonaux. Donc les deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{v'}$ le sont aussi.

Définition 38.22

Deux droites sont *orthogonales* si (et seulement si) un vecteur directeur de l'une est orthogonal à un vecteur directeur de l'autre. Auquel cas tout vecteur directeur de l'une est orthogonal à tout vecteur directe de l'autre.

Deux droites orthogonales n'ont aucune raison d'être coplanaires, mais si elle le sont, elles se coupent alors en formant des angles droites : elles sont *perpendiculaires.*

Le terme « orthogonales » est donc plus général que le terme « perpendiculaire ».

3.3 Droite orthogonale à un plan

Un plan $\mathcal{P}$ peut être défini par un point A et deux vecteurs indépendants (non colinéaires) $\vec{u}$ et $\vec{v}$. L'ensemble $(A, \vec{u}, \vec{v})$ est alors un repère dans ce plan. Si le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, il est orthogonal à tout vecteur du plan $\mathcal{P}$. En effet, un tel vecteur peut s'écrire :

$$\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v},$$

donc :

$$\vec{n} \cdot \vec{w} = x(\vec{n} \cdot \vec{u}) + y(\vec{n} \cdot \vec{v}) = 0$$

puisque $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$.

Définition 38.23

Vecteur normal

Un vecteur est *normal* ou orthogonal au plan s'il est orthogonal à deux vecteurs indépendants de ce plan. Il est alors orthogonal à tout vecteur de ce plan.

Exemple 38.24. Détermination de l'équation d'un plan

Soit un point A de coordonnées (α, β, γ) relativement à un repère orthonormé de l'espace et soit $\vec{n}$ un vecteur de coordonnées (a, b, c) relativement à ce même repère. On cherche une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par A et dont le vecteur $\vec{n}$ soit un vecteur normal. Le point M de coordonnées (x, y, z) est un point du plan $\mathcal{P}$ si et seulement si les deux vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont orthogonaux. Ce qui équivaut à :

$$a(x-\alpha) + b(y-\beta) + c(z-\gamma) = 0$$

qui est de la forme :

$$ax + by + cz + k = 0.$$

Réciproquement, toute équation de cette forme est celle d'un plan orthogonal au vecteur de coordonnées (a, b, c).

Définition 38.25

Droite orthogonale

On dit qu'une droite est *orthogonale* à un plan si un vecteur directeur de cette droite est normal à ce plan.

Tout vecteur directeur $\vec{u}$ de cette droite est alors orthogonal à tout vecteur $\vec{t}$ du plan.

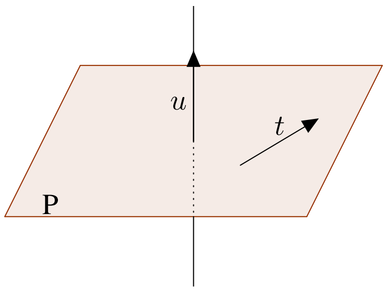


FIGURE 38.5 – Tout vecteur directeur u de cette droite est alors orthogonal à tout vecteur t du plan.

Il suffit pour cela qu'un vecteur directeur de la droite soit orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan.

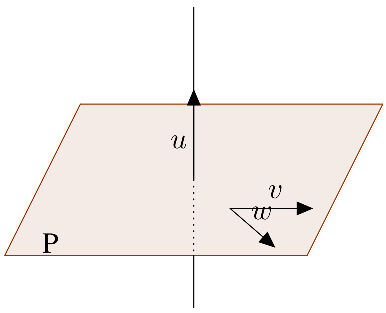


FIGURE 38.6 – Il suffit pour cela qu'un vecteur directeur de la droite soit orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan.

Théorème 38.26

Une droite est orthogonale à un plan si elle est orthogonale à *deux droites sécantes* de ce plan. Elle est alors orthogonale à toutes les droites de ce plan.

4 Applications

4.1 Théorème des trois perpendiculaires

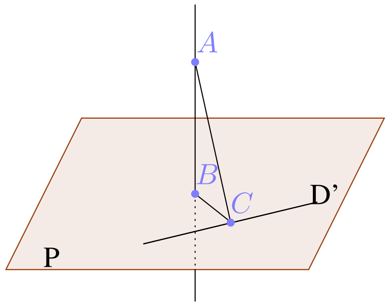


FIGURE 38.7 – Théorème des trois perpendiculaires

Théorème 38.27 Soit une droite (AB) orthogonale en B à un plan $\mathcal{P}$ ($B \in \mathcal{P}$) et soit une droite $\mathcal{D}'$ du plan $\mathcal{P}$. La droite du plan $\mathcal{P}$ passant par B est perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}'$ la coupe en C.

Développement

Démonstration du théorème 38.27 en utilisant le théorème 38.26. La droite (AB) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$, donc elle est orthogonale à la droite $\mathcal{D}'$ contenue dans ce plan. La droite $\mathcal{D}'$ est donc orthogonale à la droite (AB), mais aussi à la droite (BC), elle est orthogonale à deux droites du plan (ABC), donc elle est orthogonale à ce plan. Par suite, elle est orthogonale à toutes les droites du plan (ABC), notamment à la droite (AC). Elle est également sécante à (AC), donc les deux droites $\mathcal{D}'$ et (AC) sont bien perpendiculaires. □

Démonstration du théorème 38.27 en utilisant les vecteurs. Soit $\vec{v}$ un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}'$. $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) qui est orthogonale au plan $\mathcal{P}$: donc ce vecteur est orthogonal à tout vecteur du plan $\mathcal{P}$, en particulier au vecteur $\vec{v}$. Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{v} = 0$.
La droite (BC) est perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}'$, donc les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux : $\overrightarrow{BC} \cdot \vec{v} = 0$. Il en résulte que :

$$\overrightarrow{AC} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{v} + \overrightarrow{BC} \cdot \vec{v} = 0.$$

Donc la droite (AC) est perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}'$. □

Démonstration du théorème 38.27 en utilisant le théorème de Pythagore. Soit M un point de la droite $\mathcal{D}'$ différent de C. Les triangles ABC, BCM et ABM sont des triangles rectangles.

- ABC est un triangle rectangle en B puisque la droite (AB) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$ donc orthogonale à toutes les droites de ce plan. Donc selon le théorème de Pythagore :
$$AC^2 = AB^2 + BC^2.$$
- BCM est un triangle rectangle en C puisque (BC) est perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}'$ ou (CM). Donc, on a de même :
$$\overrightarrow{BM}^2 = \overrightarrow{CM}^2 + \overrightarrow{BC}^2.$$
- ABM est un triangle rectangle en B puisque (AB) est perpendiculaire à (BM). Donc :
$$AM^2 = AB^2 + BM^2.$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} AM^2 &= AB^2 + BM^2 \\ &= AB^2 + BC^2 + CM^2 \\ &= AC^2 + CM^2 \end{aligned}$$

Cette égalité prouve que le triangle ACM est rectangle en C, et donc que la droite (AC) est perpendiculaire à la droite (CM) ou $\mathcal{D}'$.

□

4.2 Distance d'un point à un plan

On généralise un résultat connu concernant la distance d'un point à une droite (dans le plan) en dimension 3 (dans l'espace. On a vu précédemment que l'équation cartésienne d'un plan relativement à un repère orthonormé est de la forme

$$ax + by + cz + k = 0$$

où a, b et c sont les coordonnées d'un vecteur normal à ce plan.

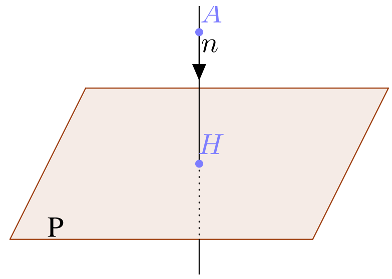


FIGURE 38.8 – Distance d'un point à un plan

Soit donc $\mathcal{P}$ un plan d'équation

$$\mathcal{P} : ax + by + cz + k = 0$$

A de coordonnées (α, β, γ) un point quelconque de l'espace (situé ou non dans le plan P). La droite passant par A et orthogonale à P coupe P en H de coordonnées (x_H, y_H, z_H), et $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$ de coordonnées a, b et c.

Le vecteur $\overrightarrow{AH}$ lui aussi orthogonal à P a donc pour coordonnés $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$. La distance du point A au plan P est donc :

$$AH = |\lambda| \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Il faut donc déterminer λ.

Puisque H appartient au plan $\mathcal{P}$, on a :

$$ax_H + by_H + cz_H + k = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{AH}$ a pour coordonnées $(x_H - \alpha, y_H - \beta, z_H - \gamma)$ qui sont égales à $(\lambda a, \lambda b, \lambda c$. Donc :

$$x_H = \lambda a + \alpha, \quad y_H = \lambda b + \beta, \quad z_H = \lambda c + \gamma.$$

En remplaçant dans l'équation $ax_H + by_H + cz_H + k = 0$, on obtient :

$$a(\lambda a + \alpha) + b(\lambda b + \beta) + c(\lambda c + \gamma) + k = 0.$$

D'où :

$$\lambda(a^2 + b^2 + c^2) + (a\alpha + b\beta + c\gamma + k) = 0,$$

et donc

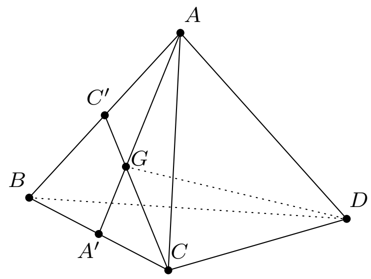
$$\lambda = -\frac{a\alpha + b\beta + c\gamma + k}{a^2 + b^2 + c^2},$$

le dénominateur n'étant pas nul puisque $\vec{n}$ ne l'est pas. Donc :

$$AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c\gamma + k|}{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{|a\alpha + b\beta + c\gamma + k|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

4.3 Démontrer l'orthogonalité d'une droite et d'un plan

Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier. Soit G le centre de gravité de la face ABC.



Démontrer que la droite (DG) est orthogonale au plan (ABC).

Développement

Solution. Soit A' le milieu de $[BC]$. On peut écrire :

$$\overrightarrow{GD} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'D}) \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{GA'} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{A'D} \cdot \overrightarrow{BC}.$$

Or, dans les triangles équilatéraux ABC et DBC, les médinaes (GA') et (DA') sont aussi des hauteurs à (BC), d'où :

$$\overrightarrow{GA'} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{A'D} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

donc : $\overrightarrow{GD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.
On note C' le milieu de $[AB]$.

$$\overrightarrow{GD} \cdot \overrightarrow{BA} = (\overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{C'D}) \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{GC'} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{C'D} \cdot \overrightarrow{BA} = 0.$$

Or les médianes (GC') et $(C'D)$ sont aussi des hauteurs donc : $\overrightarrow{GC'} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$ et $\overrightarrow{C'D} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$ et il vient $\overrightarrow{GD} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$.
La droite (DG) est orthogonale à deux droites sécantes (BC) et (BA) du plan (ABC), ainsi elle est orthogonale au plan (ABC). □

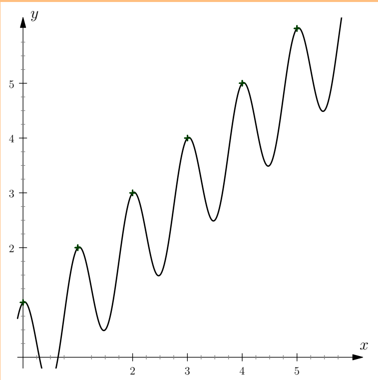
IV

Suites numériques

LEÇON

39

Suites monotones



Niveau : Lycée

Prérequis : Notion de fonctions, convergence de suites

1 Définition et exemples de suites numériques

Définition 39.1

Suite numérique
Une suite numérique est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, définie à partir d'un certain rang n_0. L'image d'un entier naturel n est notée $u(n)$ ou u_n, n est appelé *l'indice* ou le *rang* du terme u_n. La suite est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geq n_0}$.

Exemples 39.2.

1. Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par
$$u_n = \frac{1}{n}, \quad \text{pour } n \geq 1.$$
Cette suite est définie en fonction du rang (elle est de type $u_n = f(n)$ où f est une fonction). On obtient :
$$u_1 = 1,\ u_2 = \frac{1}{2},\ u_3 = \frac{1}{3}, \dots$$
2. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n(1-u_n) \end{cases}$$
Cette suite est définie en fonction de terme(s) précédent(s) (on dit que c'est une suite récurrente). On obtient :
$$u_1 = u_0(1-u_0) = -2,\ u_2 = -6,\ u_3 = -42.$$

Remarque 39.3. Une suite comportant un nombre fini de termes peut aussi être définie par un tableau de valeurs. Par exemple :

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	2	-5	6	7	10	-15	21

Définition 39.4

On appelle représentation graphique d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'ensemble des points du plan de coordonnées (n, u_n).

Exemple 39.5. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 2n - 3$. On donne une représentation graphique de la suite en figure 39.1.

2 Suites monotones

Définition 39.6

Soit la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$.
- On dit que (u_n) est *croissante* si : pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} \geq u_n$.
- On dit que (u_n) est *décroissante* si : pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} \leq u_n$.
- On dit que (u_n) est *stationnaire* si : pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} = u_n$.

Remarques 39.7.

1. On définit de la même façon une suite strictement croissante ou strictement décroissante en utilisant des inégalités strictes.

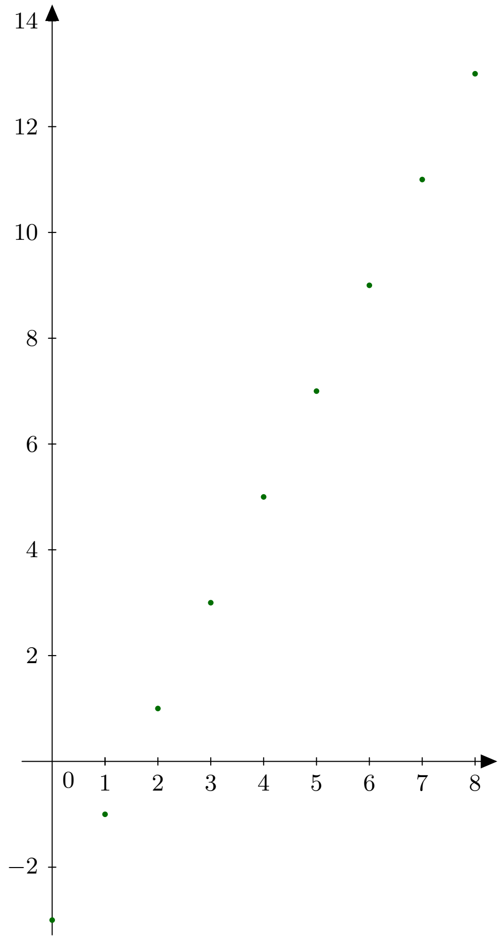


FIGURE 39.1 – Représentation graphique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 2n - 3$

2. Une suite croissante ou décroissante est appelée suite *monotone*.
3. Étudier le sens de variation d'une suite, c'est déterminer si une suite est croissante ou décroissante (ou ni l'un ni l'autre). Cette étude peut se faire en calculant la différence $u_{n+1} - u_n$ et en déterminant si cette différence a un signe constant.
4. La définition d'une suite croissante (ou d'une suite décroissante) n'est pas identique à la définition d'une fonction croissante. Dans le cas d'une suite, on compare deux termes consécutifs u_n et u_{n+1} dans le cas d'une fonction on compare les images de deux réels quelconques a et b.

Exemples 39.8.

1. La suite $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante car, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 + n^2 = 2n + 1 > 0.$$
2. La suite $(-2n+3)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante car, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_{n+1} - u_n = -2(n+1) + 3 - (-2n+3) = -2n - 2 + 3 + 2n - 3 = -2 < 0.$$
3. La suite $(-1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ni croissante, ni décroissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_{2n+1} - u_{2n} = (-1)^{2n+1} - (-1)^{2n} = -1 - 1 = -2 < 0$$
$$u_{2n+2} - u_{2n+1} = (-1)^{2n+2} - (-1)^{2n+1} = 1 - (-1) = 2 > 0.$$
4. La suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0.$$

Propriété 39.9

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante. Si $n \geq p$ alors $u_n \geq u_p$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante. Si $n \geq p$ alors $u_n \leq u_p$.

Développement

Justification de la propriété 39.9.

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante. Si $n \geq p$, on peut écrire $n = p + k$ avec k un entier naturel ($k = n - p$). La suite (u_n) étant croissante, on peut alors écrire :

$$u_p \leq u_{p+1} \leq u_{p+2} \leq \cdots \leq u_{p+k}.$$

  Donc $u_p \leq u_n$, c'est-à-dire $u_n \geq u_p$.
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante. Si $n \geq p$, on peut écrire $n = p + k$ avec k un entier naturel ($k = n - p$). La suite (u_n) étant décroissante, on peut alors écrire :

$$u_p \geq u_{p+1} \geq u_{p+2} \geq \cdots \geq u_{p+k}.$$

  Donc $u_p \geq u_n$, c'est-à-dire $u_n \leq u_p$.

$\square$

Propriété 39.10

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Si f est une fonction croissante sur $[n_0\,, +\infty[$, la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ définie par $u_n = f(n)$ est une suite croissante.

Développement

Justification de la propriété 39.10. Soit f une fonction croissante sur $[n_0\,, +\infty[$ et la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ définie par $u_n = f(n)$. Soit $n \geq n_0$. On a de façon évidente, $n + 1 \geq n$. La fonction f étant croissante sur $[n_0\,, +\infty[$, on en déduit que $f(n+1) \geq f(n)$. Donc $u_{n+1} \geq u_n$. Pour tout $n \geq n_0$, on a donc $u_{n+1} \geq u_n$, c'est-à-dire que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante. $\square$

Remarques 39.11.

1. On a une propriété identique avec une fonction décroissante.
2. La condition est suffisante, mais pas nécessaire, c'est-à-dire que la suite peut être croissante alors que la fonction ne l'est pas (voir la figure 39.2).

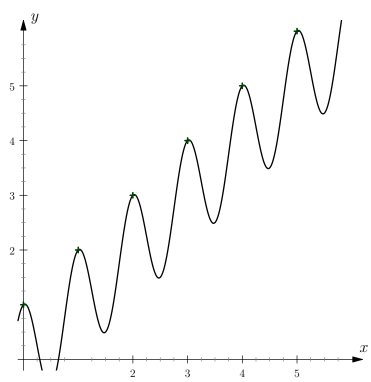


FIGURE 39.2 – La fonction $f(x) = \cos(2\pi x) + x$ n'est pas croissante et pourtant, la suite $u_n = f(n)$ est croissante

Exemple 39.12. On peut démontrer que la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{n}{n+1}$ est croissante en justifiant que la fonction $x \mapsto \frac{x}{x+1}$ est une fonction croissante sur $[0\,, +\infty[$.

3 Suites minorés, majorés

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_n = \frac{2n+1}{n+2}, \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{2\times 0+1}{0+2} = \frac{1}{2} \simeq 0{,}5 \\ u_1 &= \frac{2\times 1+1}{1+2} = \frac{3}{3} \simeq 1 \\ u_2 &= \frac{2\times 2+1}{2+2} = \frac{5}{4} \simeq 1{,}25 \\ u_3 &= \frac{2\times 3+1}{3+2} = \frac{7}{5} \simeq 1{,}4 \\ u_4 &= \frac{2\times 4+1}{4+2} = \frac{9}{6} \simeq 1{,}5 \\ u_5 &= \frac{2\times 5+1}{5+2} = \frac{11}{7} \simeq 1{,}57 \end{aligned}$$

On montre que $0 \leq u_n \leq 2$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $2n+1 > 0$ et $n+2 > 0$ donc $\frac{2n+1}{n+2} > 0$ donc $u_n > 0$.
2. D'autre part, on peut écrire :

$$u_n - 2 = \frac{2n+1}{n+2} = \frac{2n+1-2n-4}{n+2} = \frac{-3}{n+2}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n+2 > 0$ donc $\frac{-3}{n+2} < 0$ donc $u_n - 2 < 0$ donc $u_n < 2$.

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq u_n \leq 2$. Ainsi, on peut penser que quand n est très grand, u_n est très proche de 2 (on dira que la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand $n \to +\infty$ est 2).

Définition 39.13

Si pour tout entier n, on a $u_n \leq M$, on dit que la suite (u_n) est *majorée* par M. M est un *majorant* de la suite (u_n).

Si pour tout entier n, on a $u_n \geq m$, on dit que la suite (u_n) est *minorée* par m. m est un *minorant* de la suite $(u_n)_n$.

On dit que la suite (u_n) est *bornée* par m et M si elle est *minorée* par m et *majorée* par M.

Exemple 39.14. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 18$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.

1. On calcule u_1, u_2 et u_3 :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2} \times 18 + 3 = 9 + 3 = 12 \\ u_2 &= \frac{1}{2} \times 12 + 3 = 6 + 3 = 9 \\ u_3 &= \frac{1}{2} \times 9 + 3 = \frac{9}{2} + \frac{6}{2} = \frac{15}{2} = 7{,}5. \end{aligned}$$

2. On peut calculer $u_4, u_5, \dots, u_{10}$ sur une calculatrice TI-82 en faisant :

```
18 -> A
A * 1/2 + 3 -> A
```

où −> peut être obtenu en tapant sur la touche STO> . Il suffit ensuite d'appuyer plusieurs fois sur la touche ENTER pour obtenir les valeurs approchées successives des termes de la suite :

```
6.75
6.375
6.1875
6.09375
6.046875
6.0234375
6.01171875
```

3. Supposons $u_n \geq 0$, alors $\frac{1}{2}u_n \geq 0$ donc $\frac{1}{2}u_n + 3 \geq 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geq 0$. Donc si u_n est positif alors u_{n+1} est positif. On sait que u_0 est positif. On peut en déduire que u_1 positif.

   Sachant que u_1 est positif, on en déduit que u_2 est positif. Sachant que u_2 est positif, on en déduit que u_3 est positif. En poursuivant le raisonnement, on peut conclure que u_n est positif pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. On montre que (u_n) est décroissante. Supposons que $u_n \geq 6$ alors $\frac{1}{2}u_n \geq 3$ donc $\frac{1}{2}u_n + 3 \geq 6$ donc $u_{n+1} \geq 6$. Donc si $u_n \geq 6$ alors $u_{n+1} \geq 6$. On sait que $u_0 = 18$ donc $u_0 \geq 6$. On peut en déduit que $u_1 \geq 6$, etc. On conclut alors que $u_n \geq 6$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire :
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 3 - u_n = 3 - \frac{1}{2}u_n.$$
   On sait que $u_n \geq 6$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $\frac{1}{2}u_n \geq 3$ donc $-\frac{1}{2}u_n \leq -3$ donc $3 - \frac{1}{2}u_n \leq 0$. On a donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que la suite (u_n) est décroissante.
5. La suite (v_n) est définie par $v_n = 6 + \frac{12}{2^n}$. On a :
$$\begin{aligned} v_0 &= 6 + \frac{12}{2^0} = 6 + \frac{12}{1} = 6 + 12 = 18 \\ v_1 &= 6 + \frac{12}{2^1} = 6 + \frac{12}{2} = 6 + 6 = 12 \\ v_2 &= 6 + \frac{12}{2^2} = 6 + \frac{12}{4} = 6 + 3 = 9 \\ v_3 &= 6 + \frac{12}{2^3} = 6 + \frac{12}{8} = 6 + \frac{3}{2} = \frac{15}{2}. \end{aligned}$$
6. On peut écrire $v_{n+1} = 6 + \frac{12}{2^{n+1}}$ et
$$\frac{1}{2}v_n + 3 = \frac{1}{2} \times \left(6 + \frac{12}{2^n}\right) + 3 = 3 + \frac{1}{2} \times \frac{12}{2^n} + 3$$
   donc
$$\frac{1}{2}v_n + 3 = 6 + \frac{12}{2^{n+1}}.$$
   Donc $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme on a d'autre part $v_0 = 18 = u_0$, les suites (u_n) et (v_n) sont définies par le même premier terme et la même relation de récurrence. Donc : la suite (v_n) est identique à la suite (v_n).

4 Suites adjacentes

Définition 39.15

On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante et si
$$\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0.$$

Exemple 39.16. Les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = -\frac{1}{n}$ sont adjacentes.

Lemme 39.17

Supposons que (u_n) soit une suite croissante adjacente à (v_n), une suite décroissante. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n.$$

Développement

Démonstration. Par hypothèse, on a pour tout n que $u_n \leq u_{n+1}$ et $v_n \geq v_{n+1}$. Alors,

$$(v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n) \leq (v_n - u_n) - (v_n - u_n) = 0 \Leftrightarrow v_{n+1} - u_{n+1} \leq v_n - u_n$$

donc la suite $(v_n - u_n)$ est décroissante et tend vers 0, donc elle est à termes positifs, ce qui signifie que, $v_n \geq u_n$, pour tout n. □

Théorème 39.18

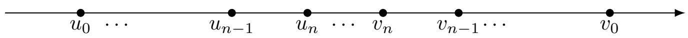
Si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, (u_n) étant une suite croissante et (v_n) la suite décroissante, alors :

a. les deux suites (u_n) et (v_n) convergent, et elles ont même limite λ ;

b. pour tout n, $u_n \leq \lambda \leq v_n$.

Développement

Démonstration. On se place dans les hypothèses du thoérème, Comme démontré dans le lemme précédent, pour tout n, $u_n \leq v_n$. Les termes des suites (u_n) et (v_n) sont donc rangés comme indiqué sur la figure ci-dessous :



La suite (u_n) est ainsi croissante et majorée par v_0. Le théorème des suites croissantes majorées permet de conclure que la suite (u_n) converge vers une limite λ.
La suite (v_n) est décroissante et minorée par u_0. On peut conclure de même que la suite (v_n) converge vers une limite λ'.
Or

$$\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0.$$

On en déduit que $\lim_{n \to +\infty} u_n - \lim_{n \to +\infty} v_n = 0$, c'est-à-dire $\lambda = \lambda'$.
Enfin, de l'égalité $u_n \leq v_p$ vraie pour tout couple (n, p), on peut en déduire, en faisant tendre d'abord n vers $+\infty$, puis p vers $+\infty$ que $\lambda \leq v_p$ et $u_n \leq \lambda$, ce qui prouve bien la double inégalité $u_n \leq \lambda \leq v_n$. □

Exemple 39.19. Soit (u_n) et (v_n) deux suites de terme général :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

Montrer que ces suites sont adjacentes, déterminer leur limite commune et donner un encadrement de la limite à 10^{-3}.

5 Applications

5 1 Méthode de dichotomie

Proposition 39.20

Soit f définie et continue sur $[a\,, b]$ et telle que $f(a)f(b) < 0$. Alors f admet au moins une racine dans l'intervalle $[a, b]$.

Développement

Démonstration. On utilise le principe de dichotomie : on définit une suite (u_n) et (v_n) par $u_0 = a$ et $v_0 = b$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} & \text{si } f(u_n)f(\frac{u_n+v_n}{2}) \leq 0 \\ u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = v_n & \text{si } f(u_n)f(\frac{u_n+v_n}{2}) \geq 0 \end{cases}.$$

Par construction, les suites (u_n) et (v_n) sont respectivement croissante et décroissante, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - v_n| \leq \frac{b-a}{2^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Ce sont donc des suites adjacentes, qui convergent donc vers une limite dnas $[a, b]$ que l'on note ℓ.
La continuité de f nous assure que $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim_{n\to+\infty} f(v_n) = f(\ell)$, donc en passant à la limite dans la relation $f(u_n)f(v_n) \leq 0$, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n)f(v_n) \leq 0 \Rightarrow (f(\ell))^2 \leq 0 \Rightarrow f(\ell) = 0.$$

□

Exemple 39.21. En utilisant cette méthode de dichotomie, déterminer une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à l'aide de la fonction $f(x) = x^2 - 2$ définie sur $[1\,, 2]$.

Développement

Démonstration. On peut créer la fonction suivante sur Xcas :

```
dicho(f,a,b,n):={
  local u,v,t,g;
  u := a;
  v := b;
  g := f;
  tantque v-u>10^(-n-1) faire
    t := (u+v)/2;
    si g(u)*g(t) < 0
      alors v := t
      sinon u := t
     fsi
  ftantque
  return evalf(u);
}:;
```

La fonction prend comme argument :

- la fonction considérée,
- les bornes de l'intervalle de définition,
- la précision souhaitée

La fonction crée deux suites (u_n) et (v_n) applique le principe de la dichotomie à condition que $v_n - u_n < \frac{1}{10^{n-1}}$.
On utilise la fonction avec les données de l'énoncé :

$$f : x \mapsto x^2 - 2 \quad \text{sur } [1, 2]$$

```
f := x -> x^2 - 2
                 (x)->x^2-2
dicho(x -> x^2-2,1,2,1)
                 1.4140625
dicho(x -> x^2-2,1,2,2)
                 1.4140625
dicho(x -> x^2-2,1,2,3)
                 1.41418457031
dicho(x -> x^2-2,1,2,4)
                 1.4142074585
dicho(x -> x^2-2,1,2,5)
                 1.41421318054
```

□

5 2 Développement décimal d'un nombre réel

Théorème 39.22

Soit $x \in \mathbb{R}$, il existe une unique $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers naturels telle que :

a. $\forall n \geq 1$, $a_n \in \{0, \dots, 9\}$ et $a_0 \in \mathbb{Z}$,

b. il n'existe pas $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n > N$, $a_n = 9$,

c.
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \leq x \leq a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}.$$

Développement

Démonstration. Soit u_n la valeur décimale approchée par défaut à x à 10^{-n} près. La double inégalité en (iii) se réduit alors à l'égalité :
$$u_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}.$$
Soit $m = u_n 10^n \in \mathbb{N}$. Alors on a l'équivalence suivante :
$$u_n = \frac{m}{10^n} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \Leftrightarrow m = a_0 10^n + a_1 10^{n-1} + \cdots + a_{n-1}10 + a_n.$$
Cette dernière équation n'admet qu'une unique solution dans $\mathbb{Z} \times \{0, \dots, 9\}^n$, par unicité de l'écriture en base 10.
On montre que les coefficients a_i sont indépendants du rang choisi. Autrement dit, montrons que $(a_i)_{0\leq i\leq n}$ sont les mêmes au rang n et $n+1$. Supposons qu'on ait au rang $n+1$ la double inégalité :
$$b_0 + \cdots + \frac{b_n}{10^n} + \frac{b_{n+1}}{10^{n+1}} \leq x < b_0 + \cdots + \frac{b_n}{10^n} + \frac{b_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{1}{10^{n+1}}.$$
Or, puisque $b_{n+1} \leq 9$, on aura nécessairement $\frac{b_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{1}{10^{n+1}} \leq \frac{1}{10^n}$, et notre double inégalité devient :
$$b_0 + \cdots + \frac{b_n}{10^n} + \frac{b_n}{10^n} \leq x < b_0 + \cdots + \frac{b_n}{10^n} + \frac{b_n}{10^n} + \frac{1}{10^{n+1}}.$$
L'unicité de la solution $(a_0, \dots, a_n)$ de la relation du (iii) au rang n nous permet d'affirmer que pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, $a_i = b_i$.
On suppose enfin qu'il existe un entier naturel N tel que pour tout $n \geq N$ vérifie $a_n = 9$. Quitte à effectuer une multiplication par une combinaison linéaire de puissance de 10, on est ramené à étudier le cas particulier $0,99\overline{9}\dots$. Or :
$$0,99\overline{9}\dots = \sum_{n\geq 1} \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10} \sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{9}{10}\frac{10}{9} = 1$$
et l'inégalité (iii) n'est plus vraie pour tout n alors, car les membres de gauche et de droite sont égaux, ce qui est contradictoire. □

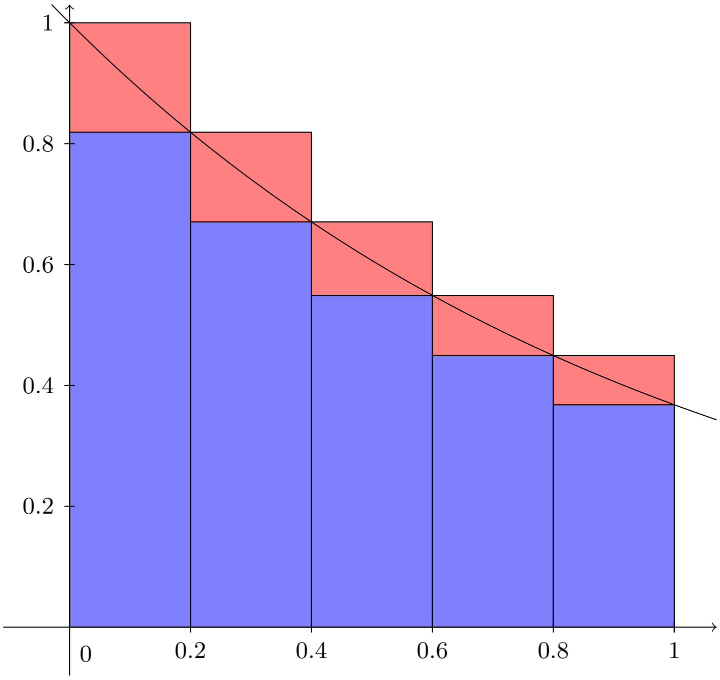
Définition 39.23

Dans ce cas, par passage à la limite :
$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n},$$
et l'on dit que c'est le *développement décimal illimité propre* de et on note de manière plus commode $x = a_0 a_1 a_2 a_3 \dots$.

5 3 Aire sous la courbe et suites adjacentes

Soit f une fonction continue ou en escalier, positive et monote sur l'intervalle $I = [a, b]$ et $\mathcal{A}$ désignant l'« aire sous la courbe ». La méthode des rectangles, par exemple, permet d'encadrer $\mathcal{A}$.

On se place dans le cas où f est décroissante sur $I = [0, 1]$. On partage I en N intervalle de même amplitude $\frac{1}{N}$ alors :
$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{k=N} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \mathcal{A} \leq \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{k=N-1} f\left(\frac{k}{n}\right).$$



Si à tout entier naturel non nul n, on associe un partage régulier de $I = [0\,,1]$ défini par son pan p_n (on a alors $N = \frac{1}{p_n}$), en posant $a_n = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{k=N} f\left(\frac{k}{N}\right)$ et $b_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{k=N-1} f\left(\frac{k}{N}\right)$, on définit deux suites (a_n) et (b_n) telles que, pour tout entier naturel non nul n, $a_n \leq \mathcal{A} \leq b_n$.

Question : Est-ce que les suites (a_n) et (b_n) ainsi définies sont adjacentes ?

Si [1] $p_n = \frac{1}{n}$, on ne peut pas conclure à la monotonie des suites (a_n) et (b_n) par des considérations d'aire car les $n+1$ rectangles obtenuus à l'étape $n+1$ sont sans lien direct avec les n rectangles obtenus à l'étape n et les suites (a_n) et (b_n) ne sont pas nécessairement adjacentes.

Contre exemple : Soit f la fonction en escalier définie sur $[0,1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1/2] \\ 1/2 & \text{si } x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

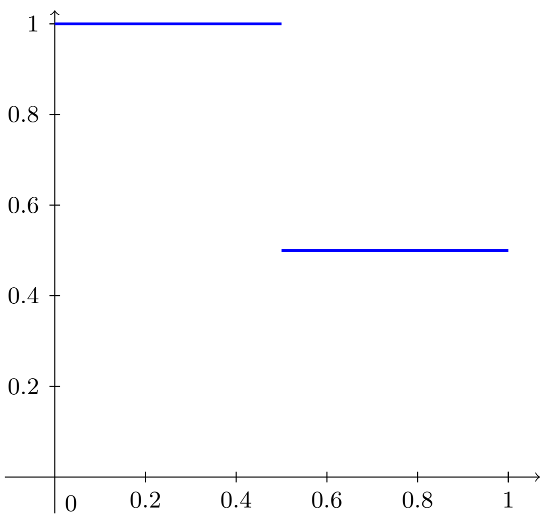
Alors, on montre que :

$$a_2 = \mathcal{A} \quad \text{et} \quad a_3 < \mathcal{A}$$

et plus généralement, pour tout entier naturel non nul k,

$$a_{2k} = \mathcal{A} \quad \text{et} \quad a_{2k+1} = \mathcal{A}.$$

La suite (a_n) n'est donc pas croissante.



1. à l'étape n, on partage l'intervalle $[0\,,1]$ en $N = n$ intervalles de même amplitude

Dans ce cas où $p_n = \frac{1}{n}$, que les suites (a_n) et (b_n) soient adjacentes ou ne le soient pas, les justifications ne sont en général pas simples, on peut toutefois trouver quelques fonctions telles que la fonction carrée ou la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x+1}$ pour lesquelles on obtient des suites dont on peut démontrer qu'elles sont bien adjacentes.

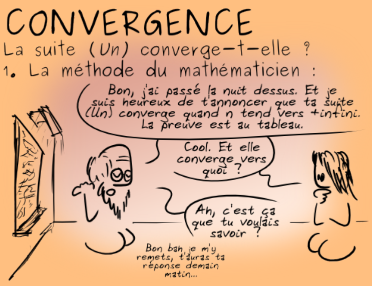
Si[2] $p_n = \frac{1}{2^n}$ alors, dans le cas où f est monotone sur I, des considérations d'aire permettent d'établir la monotonie des suites (a_n) et (b_n) et de montrer qu'elles sont bien adjacentes.

Cependant si l'on cherche à exhiber un exemple correspondant à ce cas, les expressions de (a_n) et (b_n) deviennent vite très compliquées étant donné que $N = 2^n$.

2. à chaque étape on multiplie le nombre d'intervalles du partage par 2 et $N = 2^n$.

LEÇON 40

Limites de suites réelles



Niveau : Terminale S

Prérequis : généralité sur les suites : monotonie, suites majorées, suites minorée, suites arithmétiques, suites géométrique ; continuité, dérivabilité, théorème du point fixe

1 Notion de limite infinie d'une suite

Définition 40.1

Limite infinie d'une suite

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $+\infty$ si, pour tout nombre A positif, l'intervalle $[A\,,+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Autrement dit, pour tout nombre A positif, l'inégalité $u_n \geq A$ est vraie à partir d'un certain rang.

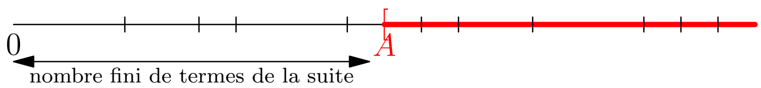


FIGURE 40.1 – Limite infinie d'une suite (en $+\infty$)

On dit que la limite de la suite (u_n) est $+\infty$ et on écrit

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

Remarque 40.2. On définit de manière analogue une suite qui tend vers $-\infty$ et on note

$$\lim_{n\to-\infty} u_n = -\infty.$$

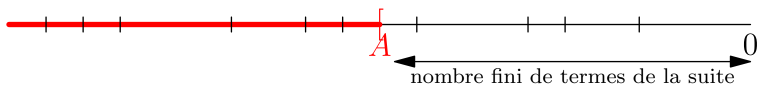


FIGURE 40.2 – Limite infinie d'une suite (en $-\infty$)

Propriétés 40.3

Limite des suites de référence

1. $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$,
2. $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$,
3. $\lim_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$,
4. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

Propriété 40.4

Limites et opposés

$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ équivaut à $\lim_{n\to+\infty}(-u_n) = +\infty$.

2 Limites finies - Suites convergentes

Définition 40.5

On dit que la suite (u_n) *tend vers un nombre* ℓ si tout intervalle du type $]\ell - r\,,\ell + r[$ (avec $r > 0$) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Remarque 40.6. Dire que la suite (u_n) tend vers un nombre ℓ, revient aussi à dire que :

1. L'inégalité $|u_n - \ell| < r$ est vraie à partir d'un certain rang ;
2. La double inégalité $\ell - r < u_n < \ell + r$ est vraie à partir d'un certain rang.

FIGURE 40.3 – Limite finie d'une suite

Exemple 40.7. Soit la suite définie par $u_n = \frac{3}{n}$. Pour $r > 0$, $0 < \frac{3}{n} < r$ est équivalent à $n > \frac{3}{r}$. Donc, pour n assez grand, $-r < u_n < r$. La suite (u_n) tend vers 0.

Propriété 40.8

Si une suite (u_n) a une limite finie ℓ, alors la limite ℓ est unique.

Si une suite (u_n) a une limite ℓ, on dit aussi que la suite est convergente ou qu'elle converge vers ℓ et on écrit $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Propriété 40.9

Dire qu'une suite (u_n) tend vers un nombre ℓ équivaut à dire que la suite $(u_n - \ell)$ tend vers 0.

Exemple 40.10. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{4n+3}{n}$. L'observation de la courbe représentant la suite dans un repère orthogonal montre que les termes de la suite sont de plus en plus proches du nombre 4.

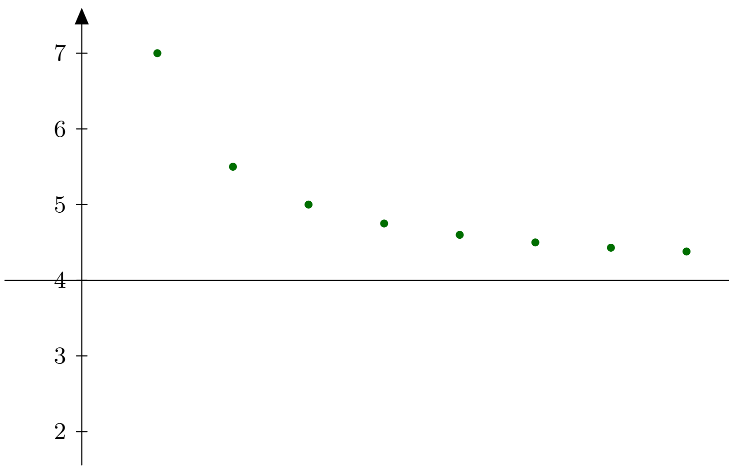


FIGURE 40.4 – Représentation graphique de la suite définie par $u_n = \frac{4n+3}{n}$ pour $n \geq 1$

On a :

$$|u_n - 4| = \frac{3}{n} \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = 0$$

donc la suite (u_n) tend vers le nombre 4.

Propriété 40.11

Limites de suites de référence

1. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$
2. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$
3. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = 0$
4. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Définition 40.12

On appelle *suite divergente* une suite qui ne converge pas.

Remarque 40.13. Si une suite diverge alors, soit la suite a une limite égale à $+\infty$, soit la suite a une limite égale à $-\infty$, soit la suite n'a pas de limite.

Exemple 40.14. La suite $(-1)^n$ est une suite divergente. La limite de cette suite ne peut être que 1 ou -1. Or, la suite admet presque tous ses termes dans l'intervalle $]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}[$ et également dans l'intervalle $]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$. Il est donc impossible que 1 ou -1 soient limites de la suite.

Propriété 40.15

Limite d'une somme de suites

si $\lim_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
si $\lim_{n\to+\infty} v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
alors $\lim_{n\to+\infty}(u_n+v_n) =$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	forme ind.

Remarque 40.16. L'expression « forme ind. » (ou « forme indéterminée ») signifie que l'on ne peut pas conclure directement et une étude spécifique est nécessaire.

Propriété 40.17

Limite d'un produit de suites

si $\lim_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	$\ell<0$ ou $-\infty$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	$\ell>0$ ou $+\infty$	0
si $\lim_{n\to+\infty} v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim_{n\to+\infty}(u_nv_n) =$	$\ell+\ell'$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	forme ind.

Propriété 40.18

Limite de l'inverse d'une suite

si $\lim_{n\to+\infty} u_n =$	$\ell\neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	0 avec $u_n>0$	0 avec $u_n<0$	0
alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} =$	$\frac{1}{\ell}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	forme ind.

Exemples 40.19.

1. Soit la suite (v_n) définie par :
$$v_n = \left(\frac{4n+3}{n}\right)\left(3+\frac{5}{n^3}\right).$$
On a $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{5}{n^3} = 0$ et
$$\lim_{n\to+\infty} \left(3+\frac{5}{n^3}\right) = 3.$$
On a montré précédemment que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4n+3}{n} = 4.$$
Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} v_n = 4\times 3 = 12$.
2. Soit la suite (w_n) définie par $w_n = n^3\sqrt{n}+\frac{1}{n^2}+3$. On a :
$$\lim_{n\to+\infty} n^3 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$$
donc
$$\lim_{n\to+\infty} n^3\sqrt{n} = +\infty.$$
De plus $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, donc
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}+3 = 3.$$
On en déduit que
$$\lim_{n\to n^o\ 43:pinf} n^3\sqrt{n}+\left(\frac{1}{n^2}+3\right) = +\infty.$$
3. Soit la suite (z_n) définie par $z_n = \frac{1}{n^5\sqrt{n}}$. On écrit $n^5 = n^3n^2$ et on montre que $\lim_{n\to+\infty} n^5 = +\infty$, d'où $\lim_{n\to+\infty} n^5\sqrt{n} = +\infty$. On a, d'après la propriété précédente,
$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^5\sqrt{n}} = 0.$$

Propriété 40.20

Soit (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$. Si (u_n) et (v_n) sont des suites convergentes de limites respectives ℓ et ℓ' alors $\ell \leq \ell'$.

Développement

Démonstration. Par l'absurde, supposons qu'à partir du rang n_0, $u_n \leq v_n$ e que $\ell > \ell'$. Soit $r = \frac{|\ell-\ell'|}{3}$, $I :=]\ell - r, \ell + r[$ et $I' =]\ell' - r, \ell' + r[$. I et I' sont bien disjoints c'est-à-dire $I \cap I' = \emptyset$.

I contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un rang n_1, I' contient tous les termes de la suite (v_n) à partir d'un rang n_2.

Soit N le maximum de n_0, n_1 et n_2 alors, pour tout $n \geq N$, $u_n \in I$ et $v_n \in I$, d'où :

$$v_2 < \ell' + r < \ell - r < u_n,$$

ce qui est absurde car, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$. □

Théorème 40.21

Théorème des gendarmes

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites vérifiant à partir d'un certain rang, $u_n \leq w_n \leq v_n$. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites convergentes de même limite ℓ, alors la suite (w_n) est convergente et $\lim_{n\to+\infty} w_n = \ell$.

Développement

Démonstration du théorème des gendarmes. Soit $r > 0$. A partir d'un certain rang, $\ell - r < u_n < \ell + r$. De même, pour la suite (v_n), à partir d'un certain, $\ell - r < v_n < \ell + r$. Donc, à partir d'un certain rang,

$$\ell - r < u_n \leq w_n \leq v_n < \ell + r.$$

Finalement, pour n assez grand,

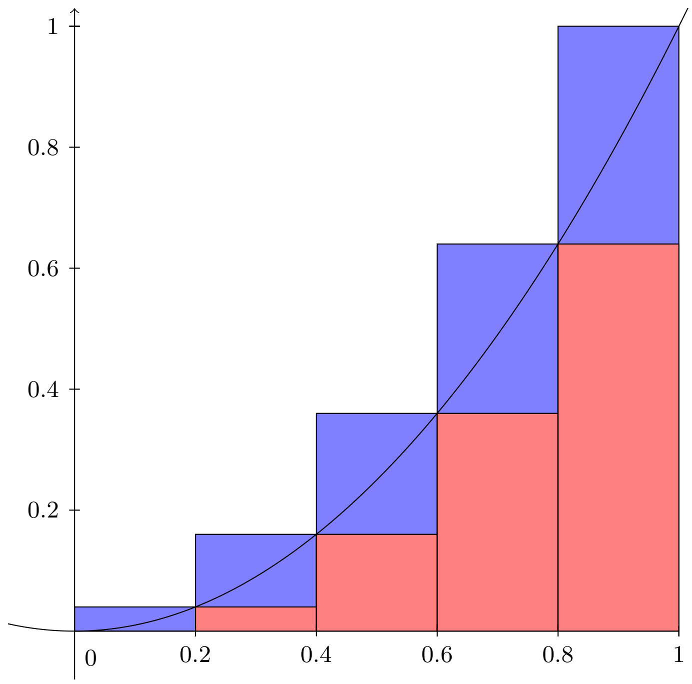
$$\ell - r < w_n < \ell + r.$$

□

Exemple 40.22. On considère la fonction :

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

et on veut calculer l'aire $\mathcal{A}$ entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses entre 0 et 1.



Soit (u_n) l'aire des rectangles inférieurs et (v_n) l'aire des rectangles supérieurs.

$$\begin{aligned}u_n &= \left(\frac{0}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{k}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \\ &= \frac{1}{n^2} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n} = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}.\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}v_n &= \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{k}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\end{aligned}$$

d'où :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{3}$$

et comme $u_n \leq A \leq v_n$, par le théorème des gendarmes, $\mathcal{A} = \frac{1}{3}$, ce qui correspond bien à $\int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x$.

Propriétés 40.23

1. Soit (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$.
   - Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
   - Si $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
2. Soit (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant, à partir d'un certain rang, $|u_n| \leq v_n$. Si $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exemple 40.24. Soit la suite définie par $u_n = 7 + \frac{\sin n}{n}$. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad 7 - \frac{1}{n} \leq 7 + \frac{\sin n}{n} \leq 7 + \frac{1}{n}.$$

Or,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(7 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(7 - \frac{1}{n}\right) = 7.$$

Le théorème des gendarmes permet d'en déduire que la suite (u_n) est convergente et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 7$.

5 Limites des suites arithmétiques et géométriques

Voir la leçon **Suites arithmétiques et géométriques** pour une définition des suites arithmétiques et géométriques.

Propriété 40.25

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

- Si $r > 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- Si $r < 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Propriété 40.26

Soit (u_n) la suite géométrique de raison q définie par $u_n = q^n$.

- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- Si $q > 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- Si $q = 1$ alors la suite (u_n) est constante.
- Si $q \leq -1$, alors la suite (u_n) est divergente.

Exemples 40.27.

1. $\lim_{n\to+\infty}(350 \times 0,95^n) = 0$. On a $0 < 0,95 < 1$ et $\lim_{n\to+\infty} 0,95^n = 0$. La propriété sur le produit des limites permet de conclure.
2. $\lim_{n\to+\infty}(-3 \times 1,01^n) = -\infty$. On a $1,01 > 1$, $\lim_{n\to+\infty} 1,01^n = +\infty$. La propriété sur le produit des limites permet de conclure.

6 Déterminer la limite d'une suite

6.1 Méthodes

Méthode 40.28

Déterminer la limite d'une suite

1. Exprimer la suite en fonction de suites dont on connaît la limite et utiliser les propriétés sur les opérations algébriques.
2. Encadrer la suite par deux suites ayant même limite.
3. Majorer l'écart, entre le terme général de la suite et la limite, par le terme général d'une suite convergent vers 0.

6.2 Exemples

Exemples 40.29.

1. On veut déterminer la limite de la suite (u_n) définie par

$$u_n = \frac{9n^2 - 5n + 2}{n^2}.$$

On a :

$$u_n = \frac{9n^2}{n^2} - \frac{5n}{n^2} + \frac{2}{n^2} = 9 - \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}.$$

Les suites $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n^2}$ convergent vers 0. On a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{5}{n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n^2} = 0.$$

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 9$.

2. On veut déterminer la limite de la suite (u_n) définie par

$$u_n = \frac{4n^3 - 2n^2 + 1}{5n^3 - 4n + 6}.$$

Pour cela, on transforme l'expression de (u_n) comme pour la recherche de la limite en $+\infty$ d'une fraction rationnelle :

$$u_n = \frac{4n^3 - 2n^2 + 1}{5n^3 - 4n + 6} = \frac{n^3(4 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3})}{n^3(5 - \frac{4}{n^2} + \frac{6}{n^3})} = \frac{4 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}}{5 - \frac{4}{n^2} + \frac{6}{n^3}}.$$

En procédant comme dans l'exemple 1, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \left(4 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}\right) = 4 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \left(5 - \frac{4}{n^2} + \frac{6}{n^3}\right) = 5.$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{4}{5}$.

3. On veut déterminer la limite de la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{5n^2 + (-1)^n}{n^2 + 2}.$$

Comme $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, on a :

$$5n + 1 \leq 5n^2 + (-1)^n \leq 5n^2 + 1,$$

d'où par encadrement

$$\frac{5n^2 - 1}{n^2 + 2} \leq u_n \leq \frac{5n^2 + 1}{n^2 + 2}.$$

On a :

$$\frac{5n^2 + 1}{n^2 + 2} = \frac{n^2(5 + \frac{1}{n^2})}{n^2(1 + \frac{2}{n^2})} = \frac{5 + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{2}{n^2}}.$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} \left(5 + \frac{1}{n^2}\right) = 5 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) = 1.$$

En utilisant le quotient, on en déduit

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5n^2 + 1}{n^2 + 2} = 5.$$

On montre de même que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5n^2 - 1}{n^2 + 2} = 5.$$

La suite est donc encadrée par deux suites convergentes vers le même nombre 5. Le « théorème des gendarmes » implique alors que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 5.$$

4. On veut déterminer la limite de la suite (u_n) définie par

$$u_n = \frac{n - \sin n}{n}.$$

On a, pour tout n,

$$|u_n - 1| = \left|-\frac{\sin n}{n}\right| = \left|\frac{\sin n}{n}\right|.$$

On en déduit que, pour tout n, $|u_n - 1| \leq \frac{1}{n}$ avec

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

7 Suites monotones et limites

7.1 Suites monotones

Théorème 40.30

a. Toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.
b. Toute suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.

Développement

Démonstration. Soit (u_n) unesuite croissante non majorée et $a \in \mathbb{R}$. Posons $I =]a\,, +\infty[$. Comme (u_n) est non majorée, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $u_{n_0} > a$. De plus, (u_n) est croissante, d'où

$$\forall n \geq n_0, \quad u_n \geq u_{n_0} < a.$$

I contient tous les termes de (u_n) à partir du rang n_0. Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

□

Théorème 40.31

a. Toute suite croissante majorée converge.
b. Toute suite décroissante minorée converge.

Développement

Démonstration (admise en TS). Sout (u_n) une suite réelle, croissante et majorée. On considère l'ensemble $E = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Comme (u_n) est majorée, E l'est également. De plus, E est non vide. Or, toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure. Soit $\alpha = \sup E$.
Montrons que (u_n) converge vers α. Soit $\varepsilon > 0$, d'après la caractérisation de la borne supérieure,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \alpha - \varepsilon < u_{n_0} \leq \alpha.$$

Comme (u_n) est croissante,

$$\forall n \geq n_0, \quad \alpha - \varepsilon < u_{n_0} \leq u_n \leq \alpha.$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha.$$

□

Exemple 40.32. Suite de Héron
Soit la suite u_n définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in]0\,, +\infty[\\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) & \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Dans un premier temps, on montre que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq \sqrt{2}$.

$$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{u_n^2 + 2 - 2\sqrt{2}u_n}{2u_n} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n} \geq 0$$

donc, $\forall n \geq 1$, $u_n \geq \sqrt{2}$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{u_n} - u_n\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2 - u_n^2}{u_n}\right) \leq 0 \quad \text{car } \forall n \geq 1,\ u_n^2 \geq 2.$$

d'où (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

(u_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$, par conséquent elle est convergente mais on ne peut conclure que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$.

Pour cela, on pose :

$$\begin{array}{rccc} f & : &]0\,,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right) \end{array}$$

f est dérivable sur $I =]0\,,+\infty[$ et :

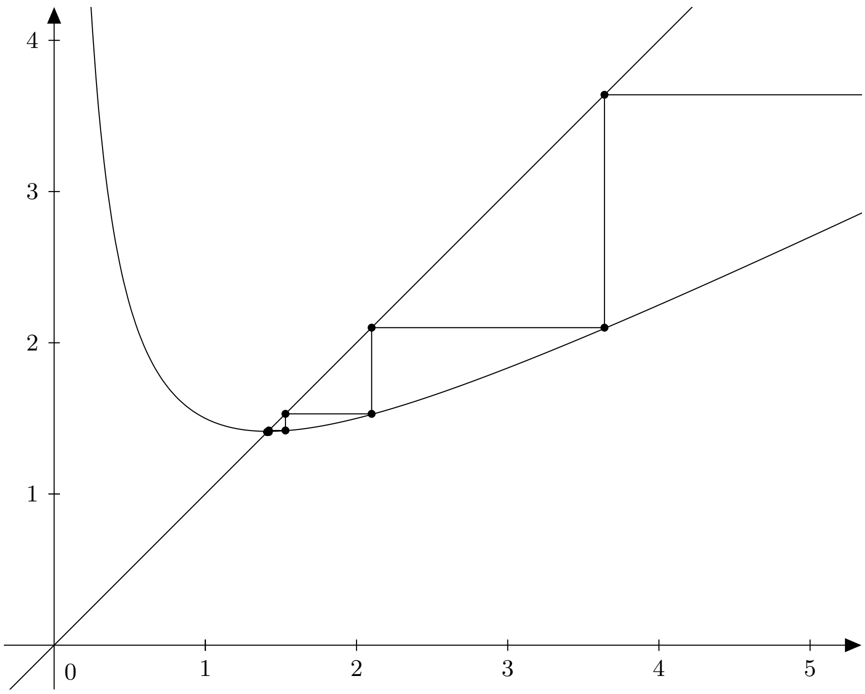
$$\forall x \in I, \quad f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Par l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}\,|x-y|\,.$$

f est $\frac{1}{2}$-contractante. Par le théorème du point fixe, (u_n) converge vers $\sqrt{2}$, qui est l'unique point fixe de f dans I.

On se sert de la suite de Héron pour approximer le nombre irrationnel $\sqrt{2}$



Le tableau suivant donne des approximations de $\sqrt{2}$ à partir des premiers termes de (u_n). On remarque pour avoir une bonne approximation à 10^{-4}, on doit choisir u_6 (ou les termes suivants).

n	u_n	erreur
0	$17,807113$	$16,392899$
1	$8,959714$	$7,545500$
2	$4,591467$	$3,177254$
3	$2,513291$	$1,099315$
4	$1,654115$	$0,240397$
5	$1,431677$	$0,017463$
6	$1,414320$	$0,000106$
7	$1,414213$	10^{-8}

7 2 Suites adjacentes

Définition 40.33

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit que (u_n) et (v_n) sont adjacentes si elles vérifient les trois conditions suivantes :

a. (u_n) est croissante ;

b. (v_n) est décroissante ;

c. $\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.

Théorème 40.34

Théorème des suites adjacentes

Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont deux suites adjacentes, alors elles sont convergentes et :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Développement

Démonstration. Dans un premier temps, montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$. Pour cela, posons $w_n = v_n - u_n$.

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= v_{n+1} - u_{n+1} - (v_n - u_n) \\ &= (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n) \leq 0 \end{aligned}$$

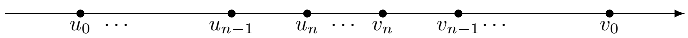
car

- (u_n) est croissante : $u_{n+1} - u_n \geq 0$
- (v_n) est décroissante : $v_{n+1} - v_n \leq 0$

donc (w_n) est décroissante vers 0. De ce fait, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n \geq 0$, c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \geq u_n.$$

Les termes des suites (u_n) et (v_n) sont donc rangés comme indiqué sur la figure ci-dessous :



La suite (u_n) est ainsi croissante et majorée par v_0. Le théorème des suites croissantes majorées permet de conclure que la suite (u_n) converge vers une limite λ.
La suite (v_n) est décroissante et minorée par u_0. On peut conclure de même que la suite (v_n) converge vers une limite λ'.
Or

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0.$$

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n - \lim_{n\to+\infty} v_n = 0$, c'est-à-dire $\lambda = \lambda'$. □

Exemple 40.35. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies de la manière suivante :

$$u_n = \frac{\mathrm{E}\left(10^n x\right)}{10^n}, \quad v_n = \frac{\mathrm{E}\left(10^n x\right) + 1}{10^n}.$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\mathrm{E}\left(10^{n+1} x\right)}{10^{n+1}} - \frac{\mathrm{E}\left(10^n x\right)}{10^n} = \frac{\mathrm{E}\left(10^{n+1} x\right) - 10\mathrm{E}\left(10^n x\right)}{10^{n+1}}.$$

Or, $\mathrm{E}\left(10^n x\right) \leq 10^n x$ donc $10\mathrm{E}\left(10^n x\right) \leq 10^{n+1} x$. Comme $\mathrm{E}\left(10^{n+1} x\right)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $10^{n+1} x$, on en déduit que :

$$\mathrm{E}\left(10^{n+1} x\right) \geq 10\mathrm{E}\left(10^n x\right).$$

Ainsi $u_{n+1} \geq u_n$ et $(u_n)_n$ est croissante.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{\mathrm{E}\left(10^{n+1} x\right) + 1}{10^{n+1}} - \frac{\mathrm{E}\left(10^n x\right) + 1}{10^n} = \frac{\mathrm{E}\left(10^{n+1} x\right) + 1 - 10(\mathrm{E}\left(10^n x\right) + 1)}{10^{n+1}}.$$

Or, $10^n x < \mathrm{E}\left(10^n x\right) + 1$ donc $10^{n+1} x < 10(\mathrm{E}\left(10^n x\right) + 1)$. Comme $\mathrm{E}\left(10^{n+1} x\right) + 1$ est le plus petit entier strictement supérieur à $10^{n+1} x$, on a :

$$\mathrm{E}\left(10^{n+1} x\right) + 1 \leq 10(\mathrm{E}\left(10^n x\right) + 1)$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{E}\left(10^{n+1} x\right) + 1 - 10(\mathrm{E}\left(10^n x\right) + 1) \leq 0$$

ainsi, $v_{n+1} \leq v_n$ donc $(v_n)_n$ est décroissante.

On a : $v_n - u_n = \frac{1}{10^n}$, d'où $\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.

Finalement, les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes. Nous venons de démontrer que tout nombre réel x est limite d'une suite de nombres rationnels. Il s'agit de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Commençons par exposer une méthode classique pour l'étude de certaines suites récurrentes. Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par récurrence par une formule du type :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

avec f de la forme $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ ($c \neq 0$ sinon l'étude est triviale), alors :

- soit la fonction f admet deux points fixes α et β, auquel cas on étudie la suite de terme général $v_n = \frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}$, et l'on s'aperçoit rapidement que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
- sinon f n'a qu'un seul point fixe α, auquel cas on étudie la suite de terme général $v_n = \frac{1}{u_n-\alpha}$, qui est alors une suite arithmétique.

Exemple 40.36. Soit à étudier la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n+3}{2u_n}.$$

On commence par chercher les points fixes de $f : z \mapsto \frac{z+3}{2z}$. Ceux-ci sont les racines de l'équaton $z+3 = z\times(2z)$, c'est-à-dire -1 et $3/2$. On étudie donc la suite de terme général $\frac{u_n+1}{u_n-3/2}$. On a :

$$\frac{u_{n+1}+1}{u_{n+1}-3/2} = \frac{\frac{u_n+3}{2u_n}+1}{\frac{u_n+3}{2u_n}-3/2} = \left(-\frac{3}{2}\right)\frac{u_n+1}{u_n-3/2}.$$

Par récurrence, on a immédiatement :

$$\frac{u_n+1}{u_n-3/2} = \left(-\frac{3}{2}\right)\frac{u_0+1}{u_0-3/2}$$

et donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_n+1}{u_n-3/2}\right| = +\infty.$$

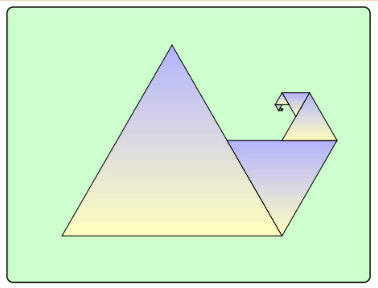
D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 3/2.$$

LEÇON

41

Suites arithmétiques, suites géométriques



Niveau : Première S
Prérequis : définition de base sur les suites

1 Suites arithmétiques

Définition 41.1

Suite arithmétique

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *arithmétique* si, pour tout n, $u_{n+1} = u_n + r$, où r est un nombre réel. Le nombre r s'appelle la *raison* de la suite arithmétique.

Remarque 41.2. Une suite arithmétique est donc définie par son premier terme u_0 et sa raison r. On a alors :

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 + r \\ u_2 &= u_1 + r = u_0 + 2r \\ u_3 &= u_2 + r = u_0 + 3r \\ &\dots \end{aligned}$$

Propriété 41.3

Si (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raions r, alors, pour tout n, on a $u_n = u_0 + nr$.

Exemple 41.4. Soit u la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 3. Exprimer le terme u_n de la suite en fonction de n. En déduire les 10 premières valeurs de la suite.

Développement

On a $u_n = 3n + 1$ et on obtient le tableau de valeurs suivant.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31

Propriété 41.5

Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. S'il existe deux nombres réels r et b tels que, pour tout n, $u_n = b+nr$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r et de premier terme b.

Exemple 41.6. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{152n+30}{6}$. Montrer que cette suite est arithmétique.

Développement

On a, pour tout n, $u_n = \frac{76}{3}n + 5$ donc (u_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{76}{3}$ et de premier terme 5.

Remarques 41.7.

a. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0. Si $n > m > 0$ alors :

$$u_n = u_m + (n-m)r.$$

b. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r ($r \neq 0$) et de premier trerme u_0. Pour tout n, on a : $u_{n+1} - u_n = r$. On a ainsi :
- si $r > 0$ alors $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est strictement croissante ;
- si $r < 0$ alors $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite (u_n) est strictement décroissante.

c. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r ($r \neq 0$) et de premier u_0. Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty.$$

(les suites arithmétiques ne convergent pas).

Propriété 41.8

Soit S_n la somme $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ des $n+1$ premiers termes d'une suite arithmétique (u_n) de raison r. On a :

$$S_n = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}$$

Développement

Démonstration. Soit :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n \tag{41.1}$$
$$S_n = u_n + u_{n-1} + \cdots + u_1 + u_0 \tag{41.2}$$

On en déduit que :

$$2S_n = (u_0 + u_n) + (u_1 + u_{n-1}) + (u_2 + u_{n-2}) + \cdots + (u_{n-1} + u_1) + (u_n + u_0).$$

On a :

$$\begin{aligned} u_0 + u_n &= u_0 + (u_0 + nr) = 2u_0 + nr \\ u_1 + u_{n-1} &= (u_0 + r) + (u_0 + (n-1)r) = 2u_0 + nr \\ u_2 + u_{n-2} &= (u_0 + 2r) + (u_0 + (n-2)r) = 2u_0 + nr \\ &\ldots \end{aligned}$$

Toutes ces sommes sont égales à $u_0 + u_n$. On obtient :

$$2S_n = (u_0 + u_n) + (u_0 + u_n) + \cdots + (u_0 + u_n).$$

La somme précédente comporte $(n+1)$ termes égaux à $(u_0 + u_n)$, d'où :

$$2S_n = (n+1)(u_0 + u_n).$$

□

Exemple 41.9. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 30n - 6$. Calculer $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

Développement

On a :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2} = (n+1)(15n - 6).$$

Remarque 41.10. La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique s'obtient par la formule :

$$(\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier terme + dernier terme}}{2}.$$

Conséquence 41.11

La suite des entiers naturels non nuls est une suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 1 :

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{41.3}$$

Développement

Démonstration. On peut montrer la formule (41.3) par récurrence.

Initialisation Pour $n = 1$, la formule est valable :

$$\frac{2 \times 1}{2} = 1.$$

Hérédité On suppose que, pour un entier donné n, la formule

$$1+2+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$$

est vérifiée. On vérifie que la formule est vraie au rang $n+1$:

$$\begin{aligned}1+2+\cdots+n+1 &= 1+2+\cdots+n+n+1\\ &= \sum_{k=1}^{n} k+n+1\\ &= \frac{n(n+1)}{2}+\frac{2n+2}{2}\\ &= \frac{n^2+n+2n+2}{2}\\ &= \frac{n^2+3n+2}{2}\\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$

La formule est donc vérifiée pour le rang $n+1$.

Conclusion pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}.$$

□

2 Suites géométriques

Définition 41.12

Suite géométrique
La suite (u_n) est *géométrique* si, pour tout $u_{n+1}=qu_n$, où q est un nombre réel non nul. Le nombre q s'appelle la *raison* de la suite géométrique.

Remarques 41.13.

a. Si les termes de la suite ne sont pas nuls, alors, pour tout n, $\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$.

b. Une suite géométrique est définie par son premier terme u_0 et sa raison q. On a :

$$\begin{aligned}u_1 &= u_0 q\\ u_2 &= u_1 q = u_0 q^2\\ u_3 &= u_2 q = u_0 q^3\\ &\ldots\end{aligned}$$

Propriété 41.14

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q (q non nul) alors, pour tout n, on a : $u_n = u_0 q^n$.

Exemple 41.15. Soit u la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 3. Exprimer le terme u_n de la suite en fonction de n. En déduire les 10 premiers termes de la suite.

Développement

On a : $u_n=3^n$ et on obtient le tableau de valeurs suivant.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n	1	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049

Propriété 41.16

Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. S'il existe deux nombres a et q non nuls tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = aq^n$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q et de premier terme a.

Exemple 41.17. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 5 \times \frac{76^n}{3^n}$. Montrer que (u_n) est une suite géométrique.

Développement

On a :

$$u_n = 5 \times \left(\frac{76}{3}\right)^n$$

donc (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{76}{3}$ et de raison 5.

Remarque 41.18. Soit la suite géométrique (u_n) définie par $u_n = q^n$ $(q > 0)$. Pour tout n, on a $u_{n+1} - u_n = q^{n+1} - q^n = q^n(q-1)$. Donc :

- si $q > 1$, alors $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est strictement croissante ;
- si $0 < q < 1$ alors $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite (u_n) est strictement décroissante ;
- si $q = 1$ alors $u_{n+1} - u_n = 0$ et la suite (u_n) est constante.

Remarques 41.19. Convregence et alternance

a. Une suite géométrique est convergente vers 0 si et seulement si $-1 < q < 1$.

b. Si $q < 0$, on dit que la suite géométrique est *alternée*.

Propriété 41.20

Soit S_n la somme $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique (u_n) de raison q (q différent de 1). On a :

$$S_n = \frac{u_0 - u_{n+1}}{1-q} = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Développement

Démonstration. Soit S_n la somme des $n+1$ premiers termes de la suite. On peut écrire :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$
$$qS_n = u_1 + \cdots + u_n + u_{n+1}$$

Alors $S_n - qS_n = u_0 - u_{n+1}$ soit $(1-q)S_n = u_0 - u_{n+1}$, d'où :

$$S_n = \frac{u_0 - u_{n+1}}{1-q} = \frac{u_0 - u_0 q^{n+1}}{1-q} = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \text{car } q \neq 1.$$

□

Exemple 41.21. Soit (u_n) la suite géométrique de raison $\frac{76}{3}$ et de premier terme 5. Calculer $S_3 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3$.

Développement

On veut calculer la somme $S_3 := u_0 + u_1 + u_2 + u_3$. On a :

$$S_3 = 5 \times \frac{1 - \left(\frac{76}{3}\right)^4}{1 - \frac{76}{3}} = \frac{2285075}{27}.$$

Conséquence 41.22

Pour tout nombre réel $x \neq 1$, on a :

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Développement

Exemple 41.23.

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^9 = \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = 2^{10} - 1 = 1023.$$

3 Montrer qu'une suite est arithmétique ou géométrique

Développement

Méthode 41.24

Montrer qu'une suite est arithmétique ou géométrique

1. **Écrire le terme général sous la forme** $u_n + nr = u_0$
   - Montrer qu'il existe un nombre réel r tel que, pour tout n, $u_n = nr + u_0$.
   - Conclure que (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.
2. **Étudier la différence** $u_{n+1} - u_n$
   - Calculer la différence $u_{n+1} - u_n$ et montrer qu'elle est constante et égale à r.
   - Conclure que (u_n) est une suite arithmétique de raison r.
3. **Écrire le terme sous la forme** $u_n = u_0 q^n$
   - Montrer qu'il existe un nombre réel q tel que, pour tout n, $u_n = u_0 q^n$.
   - Conclure que (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.
4. **Trouver une relation de la forme** $u_{n+1} = qu_n$
   - Montrer que l'on peut écrire $u_{n+1} = qu_n$ (avec $q \neq 0$).
   - Conclure que (u_n) est une suite géométrique de raison q.

Remarque 41.25. Dans la méthode 4, on peut montrer qaussi que le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant sous conditions que tous les termes de la suite soient non nuls.

Exemples 41.26.

a. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = -5n + 12$ et la suite (v_n) vérifiant pour tout n, $v_n = 2u_n + n + 5$. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique.

b. Soit la suite (v_n) définie par $v_{n+1} = \frac{nv_n + 4}{n+1}$ et de premier terme $v_1 = 1$. Montrer que la suite (u_n) vérifiant $u_n = nv_n$ est une suite arithmétique.

c. Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = 2(-5)^{n+1}\left(\frac{10}{3}\right)^n$ est une suite géométrique.

d. Soit la suite (v_n) de premier terme v_0 avec $v_0 = 3$ et définie par $v_{n+1} = -7v_n + 8$. Montrer que la suite (u_n) vérifiant, pour tout n, $u_n = v_n - 1$ est une suite géométrique.

Définition 41.27

Suite arithmético-géométriques

On dit qu'une suite (u_n) est *arithmético-géométrique* s'il existe deux réels a et b tels que $u_{n+1} = au_n + b$.

Exemple 41.28. La suite (u_n) définie par $u_{n+1} = 2u_n + 1$ et de premier terme $u_0 = 1$ est arithmético-géométrique.

Remarque 41.29. Une suite arithmético-géométrique n'est ni une suite arithmétique ni une suite géométrique.

Exemple 41.30. Soit (u_n) la suite arithmético-géométrique définie, pour tout $n \geq 0$, par $u_{n+1} = 2u_n - 3$ et de premier terme $u_0 = 5$. Montrer que la suite (v_n) définie pour tout $n \geq 0$, par $v_n = u_n - 3$ est une suite géométrique.

Développement

On a :

$$\begin{aligned} u_1 &= 2 \times 5 - 3 = 7 \\ u_2 &= 2 \times 7 - 3 = 11 \\ u_3 &= 2 \times 11 - 3 = 19. \end{aligned}$$

Soit la suite (v_n) définie, pour tout $n \geq 0$, par : $v_n = u_n - 3$. On a alors :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 3 = 2u_n - 3 - 3 \\ &= 2u_n - 6 = 2(u_n - 3) = 2v_n. \end{aligned}$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = u_0 - 3 = 5 - 3 = 2$. On peut donc en conclure que, pour tout n,

$$v_n = v_0 \times 2^n = 2 \times 2^n.$$

Ainsi, $u_n = v_n + 3$ et on peut en déduire que $u_n = 2 \times 2^n + 3$, pour tout n.

En résumé, le schéma de l'étude d'une suite arithmético-géométrique est toujours le même :

Méthode 41.31

Étude d'une suite arithmético-géométrique

1. Introduction d'une suite auxilaire (v_n) définie à l'aide de la suite (u_n).
2. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
3. En déduire une formule exprimant v_n en fonction de n.
4. À partir de la relation entre (v_n) et (u_n), en déduire une formule générale exprimant u_n en fonction de n.

Pour fabriquer cette suite auxiliaire, voici comment on procède. On suppose qu'on doit étudier la suite arithmético-géométrique (u_n) de premier terme u_0 donné et défini, pour tout $n \geq 0$, par : $u_{n+1} = au_n + b$ (on suppose que $a \neq 1$ et $b \neq 0$). On résout l'équation $x = ax + b$ et on note ℓ la solution de cette équation. On a alors $\ell = a\ell + b$. Ainsi :

$$\begin{cases} u_{n+1} = au_n + b \\ \ell = a\ell + b \end{cases}$$

et en soustrayant, $u_{n+1} - \ell = a(u_n - \ell)$. On pose alors $v_n = u_n - \ell$ et on obtient ainsi que (v_n) est une suite géométrique.

Exercices d'entraînement

Suites arithmétiques

1 Des termes consécutifs d'une suite arithmétique ont une somme égale à 28. La différence des termes extrêmes est 18 et le troisième terme est 1.

Calculer le nombre de termes eet déterminer ces termes.

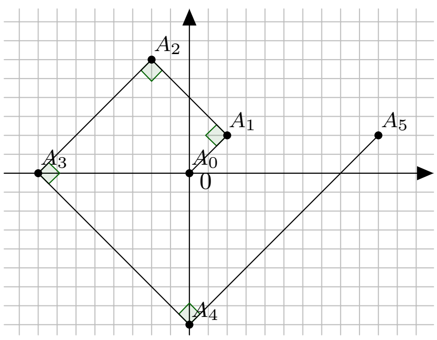
(On pourra choisir comme éléments inconnus le nombre de termes n, la raison r, le premier u_0. La traduction des informations conduit à un système de trois équations à trois inconnues. On pourra montrer que $5n^2 - 37n + 14 = 0$.)

2 On verse tous les mois une somme d'argent sur un compte de la manière suivante. Le premier versement est de 50 €. Ensuite, on augmente les versements de $2,5$ € à chaque fois.

1. Calculer le deuxième et le troisième versement.
2. Soit S_n la somme totale sur le compte au bout de n mois. Exprimer S_n en foncton de n.
3. Combien faut-il de mois pour avoir au moins 3000 € sur le compte ?

Suites géométriques

3 On fabrique des lignes polygonales $A_0A_1A_2A_3\ldots$ comme sur la figure ci-dessous.



A_0 est l'origine du repère orthonormal et le point A_1 est le point de coordonnées $(1;1)$.

Le segment $[A_1A_2]$ a une longueur double de celle du segment $[A_0A_1]$, et les droites (A_1A_2) et (A_0A_1) sont perpendiculaires.

Puis, on construit de même les segments $[A_2A_3]$, $[A_3A_4]$, ...

1. On note l_n la longueur du segment $[A_nA_{n-1}]$ et L_n la longueur de la ligne polygonale $A_0A_1A_2A_3\ldots A_n$. Montrer que (l_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
2. Calculer les longueurs l_n et L_n en fonction de n.
3. Calculer l_5 et L_5, puis contrôler le graphique.

4 Un capital C_0 de 5000 € est placé à intérêts composés avec un taux annuel de 5%, c'est-à-dire que les intérêts d'une année s'ajoutent au capital pour le calcul des intérêts de l'année suivante.

1. Calculer la valeur du capital et les intérêts acquis au bout de 10 ans.
2. On note C_n la valeur du capital au bout de n années. Exprimer C_n en fonction de n et montrer que la suite est croissante.
3. Á l'aide d'une calculatrice, déterminer le nombre d'années à partir duquel la valeur du capital est supérieure :
   a. au double du capital initial ;
   b. au cinq quarts du capital initial.

Suites arithmético-géométriques

5 On veut étudier l'évolution d'une population de bactéries. On place 100 bactéries dans un récipient.

Le relevé quotidien du nombre de bactéries permet de constater le phénomène suivant : chaque jour, le nombre de bactéries triple, après quoi disparaissent 50 bactéries.

On note u_n le nombre de bactéries après n jours. Ainsi $u_0 = 100$.

1. Calculer les 4 premiers termes de la suite (u_n).
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Pour tout entier n, on pose $v_n = u_n - 25$. Montrer que (v_n) est une géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
4. Exprimer v_n en fonction de n.
5. En déduire u_n en fonction de n.
6. Donner un ordre de grandeur de bactéries dans le récipient au bout d'un mois (de 31 jours).

é

LEÇON 42

Suites de terme général a^n, n^p et $\ln n$ ($a \in \mathbb{R}_+^*$, $p \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$)

Niveau : Terminale S - BTS (Croissance comparée)
Prérequis : fonctions exponentielles, fonctions logarithmes, suites numériques

1 Etude de la suite a^n ($a \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{N}$)

Théorème 42.1

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = a^n$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Si $a \in]1, +\infty[$ alors (u_n) est croissante.
2. Si $a = 1$ alors (u_n) est constante.
3. Si $0 < a < 1$ alors (u_n) est décroissante.

Développement

Démonstration du théorème 42.1. On rappelle que, pour $a \in \mathbb{R}_+^*$:

$$a^n = \mathrm{e}^{n\ln(a)}.$$

Ainsi

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\mathrm{e}^{(n+1)\ln a}}{\mathrm{e}^{n\ln a}}$$

On utilise la propriété de transformation de produit en somme de l'exponentielle :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \mathrm{e}^{(n+1)\ln(a) - n\ln(a)} = \mathrm{e}^{\ln a} = a.$$

1. Si $a > 1$ alors $u_{n+1} - u_n > 1$ donc (u_n) est croissante.
2. Si $a = 1$ alors $u_{n+1} - u_n = 1$ donc (u_n) est stationnaire.
3. Si $0 < a < 1$ alors $u_{n+1} - u_n < 1$ donc (u_n) est décroissante.

□

Théorème 42.2

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = a^n$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$. Alors :

1. Si $a \in]1, +\infty[$ alors (u_n) est divergente (de limite $+\infty$).
2. Si $a = 1$ alors (u_n) est constante (donc convergente vers 1).
3. Si $0 < a < 1$ alors (u_n) est convergente vers 0.

Pour démontrer le théorème 42.2, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 42.3

Inégalité de Bernoulli

Pour tout réel x positif et tout entier naturel n, on a :

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Développement

Démonstration du lemme 42.3. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On considère la propriété $\mathcal{P}(n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) := (1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Initialisation On a $\mathcal{P}(0)$ puisque $(1+x)^0 \geq 1 + 0x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

Hérédité Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Comme $x > 0$, on a aussi $1 + x > 0$. En multipliant l'inégalité ci-dessus par $(1 + x)$, on obtient :

$$(1 + x)^{n+1} \geq (1 + nx)(1 + x).$$

Or :

$$(1 + nx)(1 + x) = 1 + x + nx + nx^2 + 1 + (n + 1)x + nx^2.$$

Comme $nx^2 \geq 0$, on a :

$$(1 + nx)(1 + x) \geq 1 + (n + 1)x.$$

D'où :

$$(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x.$$

Ce qui est $\mathcal{P}(n + 1)$.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

□

Démonstration du théorème 42.2.

1. On suppose que $a \in]1, +\infty[$. Posons $x = a - 1$. Alors $x \in]0, +\infty[$. D'après l'inégalité de Bernoulli :

   $$a^n = (1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

   Or, $\lim_{n\to+\infty} 1 + nx = +\infty$. Par comparaison, on en déduit :

   $$\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty.$$

   La suite (u_n) diverge donc vers $+\infty$.
2. Si $a = 1$ alors le résultat est évident.
3. Si $0 < a < 1$ alors on pose :

   $$a' = \frac{1}{a}.$$

   On a alors $a' \in]1, +\infty[$. D'après le résultat précédent :

   $$\lim_{n\to+\infty} a'^n = +\infty$$

   et par passage à l'inverse, on obtient :

   $$\lim_{n\to+\infty} a^n = 0.$$

   La suite converge donc vers 0.

□

2 Étude de la suite n^p ($n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$)

Théorème 42.4

Soit (u_n) la suite $u_n = n^p$ avec $p \in \mathbb{N}$.

1. Si $p = 0$ alors la suite (u_n) est stationnaire.
2. Si $p > 0$ alors la suite (u_n) est strictement croissante.

Développement

Démonstration du théorème 42.4. Soit $p \in \mathbb{N}$. On étudie la différence $u_{n+1} - u_n$.

$$u_{n+1} - u_n = (n + 1)^p - n^p = (1 + n)^p - n^p$$

Si $p = 0$ alors $(1 + n)^0 - n^0 = 1 - 1 = 0$. On suppose maintenant que $p > 0$ alors par un développement de $(1 + n)^p$:

$$u_{n+1} - u_n = (n + 1)^p - n^p = (1 + n)^p - n^p = n^p + \cdots + 1 - n^p \geq 1$$

où $\cdots$ est le développement classique de Bernoulli. Ainsi $u_{n+1} - u_n \geq 0$, d'où la suite (u_n) est croissante quand $p \neq 0$.
□

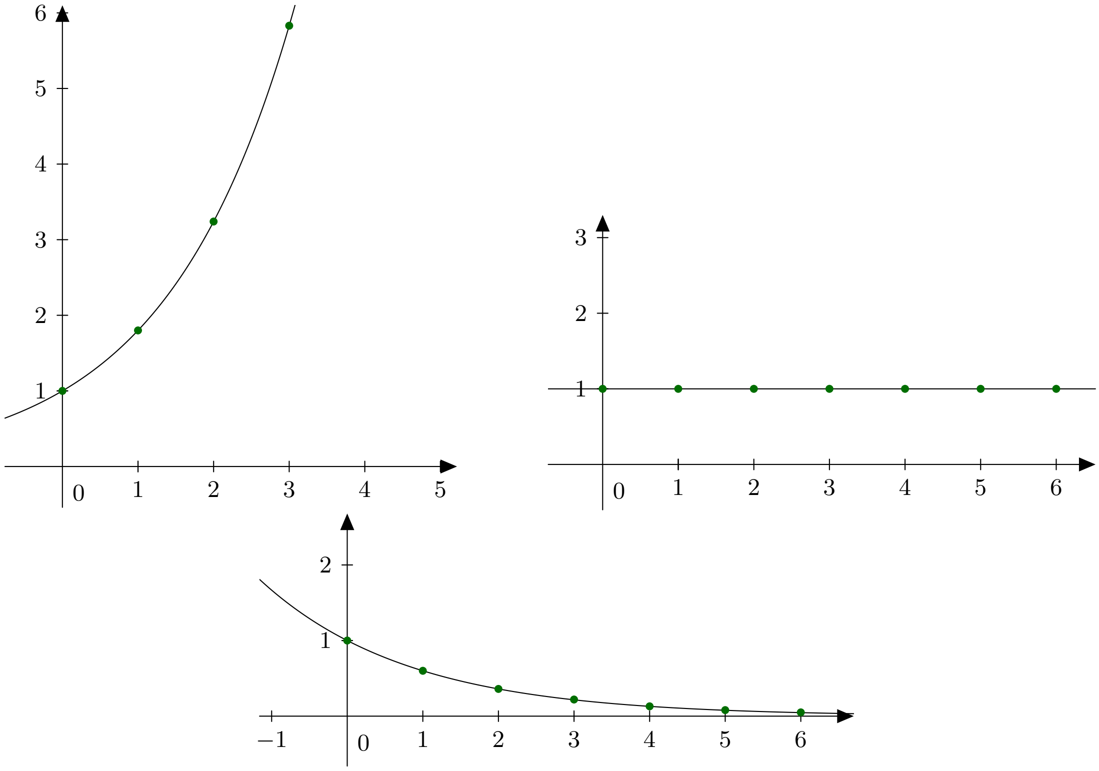


FIGURE 42.1 – Représentation graphique de la suite $u_n = a^n$ avec $a > 1$, $a = 1$ et $a < 1$

Théorème 42.5

Soit (u_n) la suite $u_n = n^p$ avec $p \in \mathbb{N}$.

1. Si $p = 0$ alors la suite (u_n) est stationnaire donc converge vers 1.
2. Si $p > 0$ alors la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

Développement

Démonstration du théorème 42.5. Si $p = 0$ alors $u_n = 1$, d'où le résultat. On suppose que $p \neq 0$. On sait que :

$$\lim_{n \to +\infty} n = +\infty. \tag{42.1}$$

Par récurrence :

Initialisation Si $p = 1$ alors on applique (42.1) : $\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$.

Hérédité Supposons que pour un rang $p \geq 1$ fixé, on a montré

$$\lim_{n \to +\infty} n^p = +\infty.$$

On montre alors la propriété au rang $p + 1$. On a alors :

$$\lim_{n \to +\infty} n^{p+1} = \lim_{n \to +\infty} n \times n^p.$$

Or, par hypothèse de récurrence, $\lim_{n \to +\infty} n^p = +\infty$. En appliquant les propriétés de produit de limite avec (42.1), on obtient alors :

$$\lim_{n \to +\infty} n^{p+1} = +\infty.$$

□

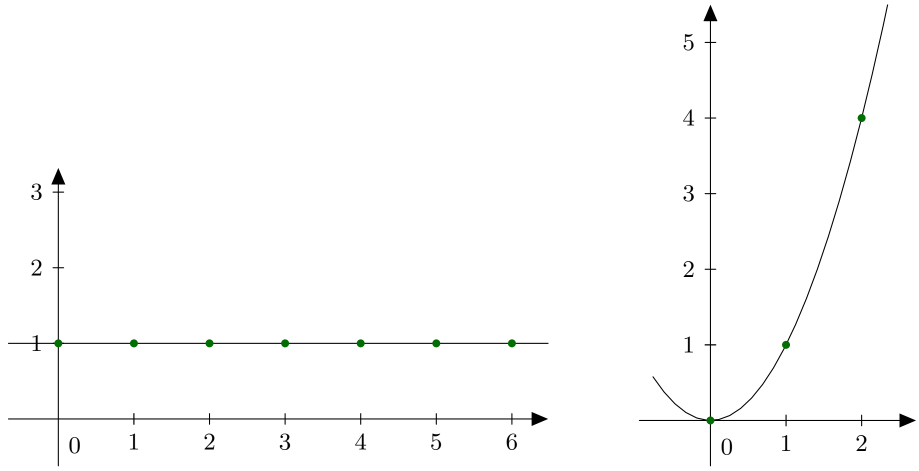


FIGURE 42.2 – Représentation graphique de la suite $u_n = n^p$ avec $p = 0$ et $p > 0$

3 Étude de la suite $\ln(n)$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$)

Théorème 42.6

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \ln(n)$. La suite (u_n) est strictement croissante.

Développement

Démonstration du théorème 42.6. On étudie la différence $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+1} - u_n = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln(n(n+1)) = \ln(n^2 + n).$$

Or $n \geq 1$ donc $n^2 + n \geq 1$ donc $\ln(n^2 + n) \geq 0$ et ainsi la suite (u_n) est strictement croissante. □

Théorème 42.7

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \ln(n)$. La suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

Développement

Démonstration du théorème 42.7. On utilise le fait que si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{n \to +\infty} f(n) = +\infty$. Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $x_m \in \mathbb{R}$ tel que

$$x > x_m \geq f(x) > M$$

En prenant la partie entière dans chaque membre de l'inégalité, on obtient la propriété.
En particulier :

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \ln(n) = +\infty.$$

□

4 Croissance comparée

Lorsque plusieurs suites tendent vers $+\infty$, la croissance comparée se propose de déterminer laquelle croît le « plus vite ».

Définition 42.8

Suite dominée

Une suite (u_n) est dite *dominée* par une suite (v_n), quand n tend vers $+\infty$ si et seulement si on peut trouver un réel positif A et un entier N qui vérifient

$$n < N \Rightarrow |u_n| \leq A \times |v_n|.$$

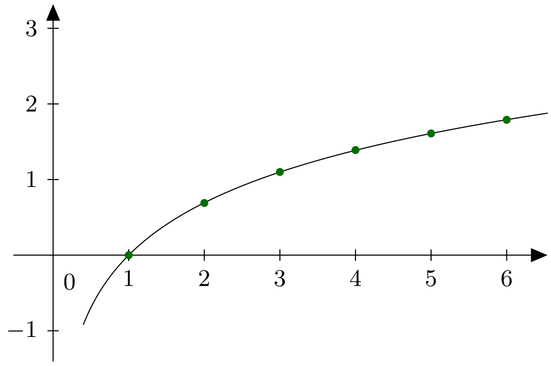


FIGURE 42.3 – Représentation graphique de la suite $u_n = \ln n$

Remarque 42.9. (Notation de Landau) On notera $O(v_n)$ l'ensemble des suites dominées par (v_n).

Définition 42.10

Suites négligeables

Une suite (u_n) est dite *négligeable* devant une suite (v_n), quand n tend vers $+\infty$ si et seulement si on peut trouver une suite (ε_n) qui vérifie :

$$\begin{cases} u_n = \varepsilon_n \times v_n, & \forall n \in \mathbb{N} \\ \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0 \end{cases}.$$

Remarque 42.11. (Notation de Landau) On notera $o(v_n)$ l'ensemble des suites négligeables devant (v_n).

Théorème 42.12

Si la suite (v_n) ne s'annule pas au delà d'un certain rang, on a

$$u_n \in o(v_n) \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

Théorème 42.13

La suite géométrique (ou exponentielle) $u_n = a^n$ de raison $a \in \mathbb{N}$ strictement supérieure à 1 croit plus vite que toute puissance de n, $v_n = n^p$ avec $p \in \mathbb{N}$:

$$n^p \in o(a^n) \qquad \text{ou encore} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^p} = +\infty.$$

Théorème 42.14

La suite géométrique (ou exponentielle) $u_n = a^n$ de raison $a \in \mathbb{N}$ strictement supérieure à 1 et la suite puissance $v_n = n^p$, pour tout $p \geq 1$ croit plus vite que la suite logarithmique, $w_n = \ln(n)$:

$$\ln(n) \in o(a^n) \quad \text{et} \quad \ln(n) \in o(n^p)\,.$$

Développement

Démonstration du théorème 42.14. Posons $r = a - 1$, on a aussitôt : $a^n = (1+r)^n$ avec $0 < r$. Soit N un entier naturel vérifiant $p < N$, pour tout entier n supérieur à $N+1$, on écrit le développement du binôme :

$$(1+r)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k r^k > \mathrm{C}_n^N r^N.$$

Cette majoration ne suffit pas encore, nous allons affiner la condition en n. En prenant maintenant n supérieur à $2N$, le coefficient du binôme vérifie :

$$\mathrm{C}_n^N = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-N+1)}{N!} > \frac{n^N}{2^N \times N!}.$$

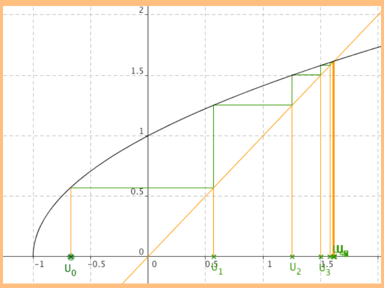
Ainsi, nous avons :

$$p < N,\ 2N < n \Rightarrow \frac{n^N}{2^N \times N!} \times r^N < a^n \Rightarrow \frac{(a-1)^N}{2^N \times N!} \times \frac{n^N}{n^p} < \frac{a^n}{n^p}.$$

L'exposant $N - p$ étant strictement positif, $\frac{n^N}{n^p} = n^{N-p}$ tend vers $+\infty$. □

LEÇON 43

Suites de nombres réels définies par une relation de récurrence



Niveau : Terminale S

Prérequis : généralités sur les suites, théorème des accroissements finis, polynômes du second degré, variations de fonctions, principe de récurrence

1 Suites définies par une relation de récurrence, généralités

Définition 43.1

Suite définie par une relation de récurence
Une suite définie par récurence est une suite que l'on connaît par son terme initial u_0 ou u_1 et une relation qui lie un terme quelconque en fonction du précédent ou des précédents.

Il existe différents types de suite définie par récurrence :

1. Suite définie par une relation de récurrence du type
$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$
2. Suite arithmético-géométrique : $u_{n+1} = au_n + b$.
3. Suites définies par une relation de la forme :
$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$
et leurs deux premiers termes.
4. Suite homographique : $u_{n+1} = \frac{au_n+b}{cu_n+d}$.
5. …

2 Suites définies par récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$

2 1 Définitions et exemples

Si la suite (u_n) est définie par son premier terme u_0 et par :
$$u_{n+1} = f(u_n), \qquad \text{pour tout } n \geq 0,$$
(avec $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$), il n'y a pas de formule permettant de calculer directement u_n en fonction de n, mais on dispose d'une relation (dite de récurrence) permettant de calculer le terme de rang $n+1$ à partir de celui de rang n. Ainsi, en connaissant le premier terme u_0, on peut calculer le terme suivant u_1, puis connaissant u_1, on peut calculer u_2.

Exemples 43.2.

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3 \times u_n$. On a alors :
$$\begin{aligned} u_1 &= 3 \times u_0 = 3 \times 2 = 6 \\ u_2 &= 3 \times u_1 = 3 \times 6 = 18 \\ u_3 &= 3 \times u_2 = 3 \times 18 = 52. \end{aligned}$$
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1,5$ et $u_{n+1} = 2\sqrt{4 + u_n}$. On a alors :
$$\begin{aligned} u_1 &= 2\sqrt{4 + u_0} = 2\sqrt{4 - 1{,}5} \simeq 3{,}16 \\ u_2 &= 2\sqrt{4 + u_1} \simeq 2\sqrt{4 + 3{,}16} \simeq 5,35. \end{aligned}$$

2 2 Une propriété de continuité

Propriété 43.3 Soit f une fonction continue, et (u_n) une suite vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n à partir d'un certain rang. Si (u_n) est convergente cvers un réel ℓ, alors ℓ est un point fixe de f (donc $f(\ell) = \ell$).

Développement

Démonstration. Soit (u_n) une suite convergente vers ℓ. Comme u_n tend vers ℓ (quand $n \to +\infty$), u_{n+1} tend vers ℓ (quand $n \to +\infty$) comme suite extraite de (u_n).
D'autre part, par continuité de f, on a $f(u_n)$ tend vers $f(\ell)$. On en déduit par unicité de la limite que $f(\ell) = \ell$. □

Exercice 43.4. Soit (u_n) la suite récurrente définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}.$$

1. Observer le comportement de la suite sur un tableur. Quelle conjecture peut-on formuler ?
2. Montrer par récurrence que tous les termes de la suite sont strictemnet positifs.
3. Montrer que la suite est strictement croissante.
4. Montrer que, si la suite converge vers a, ce nombre vérifie nécessairement l'équation $a = a + \frac{1}{a}$. En déduire la limite de la suite (u_n).

Développement

Démonstration.

1.

0	1
1	2
2	2,5
3	2,9
4	3,2448275862
5	3,5530103705
6	3,8344618428
7	4,0952546323
8	4,3394396927
9	4,5698841904
10	4,7887081164
11	4,9975327045
12	5,197631445
13	5,3900267718
14	5,5755546072
15	5,7549089621
16	5,928673657
17	6,0973454474
18	6,2613512444
19	6,4210611794
20	6,576798677

2. On montre par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}_n$

$$\mathcal{P}_n : « u_n > 0 »$$

Initialisation Pour $n = 0$ $u_0 = 1 > 0$.

Hérédité Soit $n \geq 1$. On suppose que la propriété $\mathcal{P}_n$ est démontrée. On montre la propriété au rang $n+1$. Comme $u_n > 0$ alors $\frac{1}{u_n} > 0$. D'où :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} > 0.$$

Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

3. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, on a : $\frac{1}{u_n} > 0$ et :

$$u_{n+1} - u_n = [u_n + \frac{1}{u_n}] - u_n = \frac{1}{u_n} > 0.$$

La suite (u_n) est donc strictement croissante.

4. La fonction :

$$f \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x + \frac{1}{x} \end{array}$$

est continue sur $\mathbb{R}_+$. On utilise la propriété précédente. On suppose que la suite converge vers a, ce nombre vérifie :

$$a = f(a) \Leftrightarrow a = a + \frac{1}{a}.$$

Ainsi,

$$\frac{a^2}{a} = \frac{a^2+1}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{a} = 0.$$

La suite (u_n) tend vers $+\infty$.

□

2 3 Détermination graphique des termes

Dans un repère orthonormé, on trace d'abord la représentation graphique de la fonction f définissant la relation de récurrence et la droite d'équation $y = x$. On part de u_0 en abscisse : l'ordonnée du point de la courbe correspondant à cette abscisse nous donne u_1. Pour déterminer $u_2 = f(u_1)$, il nous faut rabattre u_1 sur l'axe des abscisses, pour cela, on utilise la droite d'équation $y = x$. Dès lors, u_2 est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse u_1.

Pour poursuivre la construction, on répète le procédé en rabattant u_2 sur l'axe des abscisses, u_3 est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisses u_2...

Exemples 43.5. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = a \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = 1{,}5u_n^2 - 1 = f(u_n)$ avec f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1,5x^2 - 1$. On voit que pour $a = 0,9$, la suite semble converger vers un point

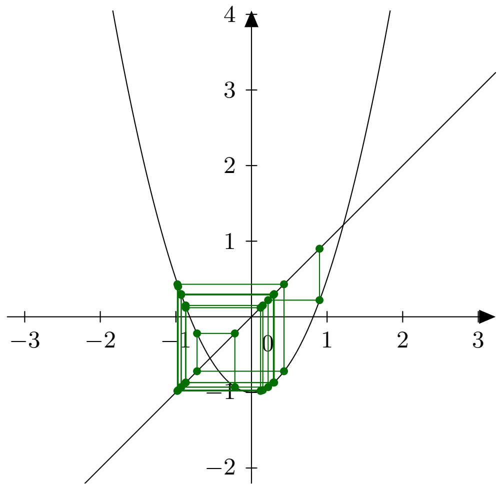


FIGURE 43.1 – Représentation graphique de la suite $u_{n+1} = 1,5u_n^2 - 1$ quand $u_0 = 0,9$

(qu'on appelle point fixe). Si on prend, maintenant $a = 1,8$, on obtient la représentation graphique de la figure 43.2

Le but de cet exemple est d'étudier la suite

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = 1,5x^2 - 1. \end{cases}$$

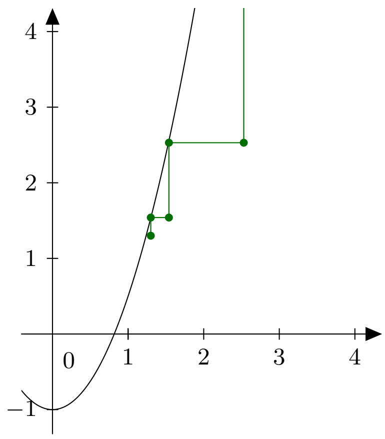


FIGURE 43.2 – Représentation graphique de $u_{n+1} = 1,5u_n^2 -$ quand $u_0 = 1,3$

On résout d'abord $f(x) = x$:

$$1,5x^2 - 1 = x \Rightarrow 1,5x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 2x - 2 = 0.$$

Le discriminant du polynôme est :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 + 24 = 28 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{7}.$$

D'où l'équation a pour solutions :

$$x_1 = \frac{2 - 2\sqrt{7}}{6} = \frac{1 - \sqrt{7}}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{7}}{3}.$$

D'après le graphique, la parabole, courbe représentative de f et la droite d'équation $y = x$ ont deux points d'intersection un d'abscisse négative ℓ (limite de (u_n) quand elle converge) et un d'abscisse positive a, donc $a = \frac{1+\sqrt{7}}{3}$.

1. On étudie quand $u_0 \notin [-a, a]$. Si $u_0 < -a = -\frac{1+\sqrt{7}}{3}$ alors :

$$-u_0 > a = \frac{1 + \sqrt{7}}{3} \Rightarrow (-u_0)^2 = u_0^2 > \left(\frac{1 + \sqrt{7}}{3}\right)^2 = \frac{8 + 2\sqrt{7}}{9}.$$

$$u_1 = 1,5u_0^2 - 1 > 1,5\frac{8 + 2\sqrt{7}}{9} - 1 = \frac{8 + 2\sqrt{7} - 6}{6} = \frac{1 + \sqrt{7}}{3} = a.$$

Si $u_0 > a$ alors

$$u_0^2 > \left(\frac{1 + \sqrt{7}}{3}\right)^2 = \frac{8 + 2\sqrt{7}}{9}$$

et d'après ce qui précède, $u_1 > a$.

Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété $u_n > a$. D'après ce qui précède, $\mathcal{P}_1$ est vraie. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et on va en déduire $\mathcal{P}_{n+1}$ vraie. Il suffit de remplacer u_0 par u_n dans le calcul précédent :

$$u_n > a = \frac{1 + \sqrt{7}}{3} \Rightarrow u_n^2 > \left(\frac{1 + \sqrt{7}}{3}\right)^2 = \frac{8 + 2\sqrt{7}}{9}$$

$$u_{n+1} = 1,5u_n^2 - 1 > 1,5\frac{8 + 2\sqrt{7}}{9} - 1 = \frac{8 + 2\sqrt{7} - 6}{6} = \frac{1 + \sqrt{7}}{3} = a.$$

$\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. On a démontré par récurrence que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

Pour démontrer que (u_n) est croissante, on cherche le signe de $u_{n+1} - u_n$.

$$u_{n+1} - u_n = 1,5u_n^2 - u_n - 1.$$

On reconnaît le trinôme du second degré étudié dans la première question u_0 est à l'extérieur des racines et pour $n \geq 1$, P_n implique que u_n est à l'extérieur des racines donc $u_{n-1} - u_n > 0$ et (u_n) est strictement croissante.

Soit la suite (v_n) définie par $v_{n+1} = 1,5v_n - 1$ et $v_1 = u_1$. Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété $u_n \geq v_n$. On va démontrer par récurrence que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq 1$. P_1 est vraie. On suppose que P_n est vraie et on va déduire P_{n+1} vraie.

$$u_n > a > 1 \Rightarrow u_n^2 > u_n \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_n \Rightarrow u_n \geq v_n$$

$$u_{n+1} = 1,5u_n^2 - 1 > 1,5u_n - 1 \geq 1,5v_n - 1 = v_{n+1}.$$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. On a démontré par récurrence que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

La suite arithmético-géométrique (v_n) tend vers $+\infty$ et on peut appliquer le théorème des gendarmes :

$$u_n > v_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

2. On suppose que $u_0 \in \left]-a\,,a\right[$. Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété $-a < u_n < a$. $u_0 \in \left]-a\,,a\right[$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et on va en déduire $\mathcal{P}_{n+1}$ vraie.

   Si $0 \leq u_n < a$

$$0 < u_n < a = \frac{1+\sqrt{7}}{3} \Rightarrow 0 < u_n^2 < \left(\frac{1+\sqrt{7}}{3}\right) = \frac{8+2\sqrt{7}}{9}$$

$$-1 < u_{n+1} = 1,5u_n^2 - 1 < 1,5\frac{8+2\sqrt{7}}{9} - 1 = \frac{8+2\sqrt{7}-6}{6} = \frac{1+\sqrt{7}}{3} = a.$$

$$-a < -1 \Rightarrow -a < u_n < a.$$

   $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

   Si $-a < u_n < 0$

$$0 < -u_n < a = \frac{1+\sqrt{7}}{3} \Rightarrow 0 < (-u_n)^2 = u_n^2 < \left(\frac{1+\sqrt{7}}{3}\right)^2 = \frac{8+2\sqrt{7}}{9}.$$

   On a démontré par récurrence que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq 0$.

   D'après le graphique, la parabole, courbe représentation de f et la droite d'équation $y = x$ ont deux points d'intersection un d'abscisse négative ℓ donc $\ell = \frac{-1-\sqrt{7}}{3}$.

2 4 Étude directe par les accroissements finis

On considère la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 + 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On suppose qu'on a montré que $u_n \in [0, 2]$, pour tout n, mais pas toute la suite.

On étudie $f'(x)$ sur $[0, 2]$:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$

et on a $0 \leq x \leq 2$, donc $2 \leq x + 2 \leq 4$ puis en composant par la racine carrée croissante, $\sqrt{2} \leq \sqrt{x+2} \leq 2$; on multiplie par 2 : $2\sqrt{2} \leq 2\sqrt{x+2} \leq 4$ et enfin on compose par la fonction inverse décroissante :

$$\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} < 1.$$

La fonction f est continue sur $[0, 2]$ et dérivable sur $]0, 2[$ donc l'inégalité des accroissements finis nous donne :

$$|f(u_n) - f(2)| \leq \frac{\sqrt{2}}{4} |u_n - 2|$$

donc :

$$|u_{n+1} - 2| \leq \frac{\sqrt{2}}{4} |u_n - 2|.$$

Par récurrence sur n, on montre alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - 2| \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^n |u_0 - 2|.$$

Initialisation $|u_0 - 2| = |u_0 - 2|$ est évidente.

Hérédité On supose que
$$|u_n - 2| \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^n |u_0 - 2|\,.$$

Alors
$$|u_{n+1} - 2| \leq \frac{\sqrt{2}}{4} \times |u_n - 2| \leq \frac{\sqrt{2}}{4} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^n |u_0 - 2| \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{n+1} |u_0 - 2|\,.$$

Enfin, le théorème de comparaison donne $|u_n - 2|$ tend vers 0 (quand $n \to +\infty$) donc $u_n - 2 \to 0$ et $u_n \to 2$.

2 5 Suites arithmético-géométriques

Il s'agit des suites récurrentes définie par :
$$\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = au_n + b \end{cases}, \quad \text{où } a, b \in \mathbb{R}.$$

C'est un cas particulier des suites étudiées plus en haut, f est une fonction linéaire. On veut exprimer le terme général u_n de cette suite en fonction de n et étudier sa limite éventuelle. Tout d'abord,

- Si $a = 1$ et $b = 0$, c'est une suite constante.
- Si $a = 1$ et $b \neq 0$ alors la suite (u_n) est arithmétique de raison b. On a donc, pour tout entier naturel n :
$$u_n = u_0 + bn.$$
La suite (u_n) diverge donc vers $+\infty$ et $-\infty$ selon le signe de b.
- Si $b = 0$ et $a \neq 1$, alors la suite (u_n) est géométrique de raison a. On a donc, pour tout entier naturel n :
$$u_n = u_0 a^n.$$
Ainsi, la suite diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$ selon le signe de u_0 si $a > 1$ et si $a \in]-1\,,1[$ alors la suite converge vers 0 et si $a \leq -1$, elle diverge.
- Si $a = 0$ alors la suite (u_n) est stationnaire égale à b.

Dans ce qui suit, on suppose $a \neq 1$ et $b \neq 0$. Si (u_n) et (w_n) sont deux suites qui vérifient :
$$u_{n+1} = au_n + b \quad \text{et} \quad w_{n+1} = aw_n + b$$
alors leur différence (v_n) est une suite géométrique de raison a. En effet, pour tout n, on a :
$$v_{n+1} = u_{n+1} - w_{n+1} = au_n - b - aw_n - b = a(u_n - w_n) = av_n.$$
Il suffit donc de chercher une suite (w_n) la plus simple possible vérifiant la relation $w_{n+1} = aw_n + b$.

Soit la suite (w_n) constante. On note α cette constante. On a alors :
$$\alpha = a\alpha + b.$$
Comme $a \neq 1$, il vient :
$$\alpha = \frac{b}{1-a}.$$
En conséquence, la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \alpha$, où $\alpha = \frac{b}{1-a}$ est géométrique de raison a. On en déduit alors que pour tout n,
$$v_n = v_0 a^n = (u_0 - \alpha)a^n.$$
D'où
$$u_n = (u_0 - \alpha)a^n + \alpha.$$
Comme, on connaît le comportement asymptotique des suites géométriques (a^n), on en déduit celui de (u_n) :

- Si $u_0 = \alpha$ alors (u_n) est constante égale à α.
- Si $a \in]-1\,,1[$ et $u_0 \neq \alpha$ alors (u_n) converge vers α.
- Si $a > 1$ et $u_0 \neq \alpha$ alors (u_n) diverge vers $+\infty$ (si $u_0 > \alpha$) ou $-\infty$ (si $u_0 < \alpha$).
- Si ($a \leq -1$ et $u_0 \neq \alpha$), alors (u_n) diverge.

Exemples 43.6.

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{4} + 3$.

   (a) On représente graphiquement les premiers termes de la suite. On trace d'abord la droite d'équation $y = \frac{x}{4} + 3$ et la droite d'équation $y = x$. On part de u_0 en abscisse : l'ordonnée du point de la courbe correspondant à cette abscisse nous donne u_1. Pour déterminer $u_2 = f(u_1)$, il nous faut rabattre u_1 sur l'axe des abscisses en utilisant la droite d'équation $y = x$. Dès lors, u_2 est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse u_1. Pour poursuivre la construction, on répète le procédé en rabattant u_2 sur l'axe des abscisses…

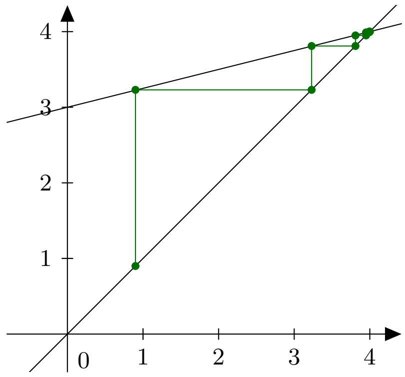


FIGURE 43.3 – Représentation de la suite $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3$ avec $u_0 = 0,9$

   (b) On montre que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 4$ est géométrique. Pour tout n,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - 4}{u_n - 4} = \frac{\frac{u_n}{4} + 3 - 4}{u_n - 4} = \frac{\frac{u_n}{4} - 1}{u_n - 4} = \frac{\frac{1}{4}(u_n - 4)}{u_n - 4} = \frac{1}{4}.$$

   (v_n) est donc géométrique de raison $b = \frac{1}{4}$.

   (c) On en déduit l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n. Pour tout n :

$$v_n = b^n vXS_0 = -3\left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \text{(car } v_0 = u_0 - 4 = 1 - 4 = -3\text{)}.$$

$$v_n = u_n - 4 \Leftrightarrow u_n = v_n + 4 = -3\left(\frac{1}{4}\right)^n + 4.$$

   (d) On détermine la limite de la suite (u_n) :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{-3\left(\frac{1}{4}\right)^n}_{\to 0} + 4 = 4 \quad \text{(car } -1 < \tfrac{1}{4} < 1\text{)}.$$

   (e) On détermine enfin l'expression de $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ en fonction de n :

$$S_n = v_0 + 4 + v_1 + 4 + \cdots + v_n + 4 = v_0 + v_1 + \cdots + v_n + 4(n+1).$$

   Or (v_n) est géométrique donc :

$$v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}^{n+1}\right)}{1 - \frac{1}{4}} = -3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}} = 4 \times \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right).$$

   D'où

$$S_n = -4 \times \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) + 4(n+1).$$

2. Soit (u_n), la suite définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 1$.

(a) On montre par récurrence que (u_n) est décroissante. Il s'agit de montrer que, pour tout n, $u_{n+1} - u_n \leq 0$:

– $u_1 - u_0 = \frac{4}{2} + 1 - 4 = -1 \leq 0$. La propriété est vraie au rang 0.

– On suppose la propriété vraie au rang p, c'est-à-dire que $u_{p+1} - u_p \leq 0$. On a alors :

$$u_{p+2} - u_{p+1} = \left(\frac{u_{p+1}}{2} + 1\right) - \left(\frac{u_p}{2} + 1\right) = \frac{1}{2}\underbrace{(u_{p+1} - u_p)}_{\leq 0} \leq 0.$$

La propriété est alors vraie au rang $p + 1$.

Elle est donc vraie pour tout n. Donc (u_n) est décroissante pour tout n.

(b) On montre par récurrence que (u_n) est minorée par 2.

– $u_0 = 4 \geq 2$. La propriété est vraie au rang 0.

– On suppose la propriété vraie au rang p, c'est-à-dire que $u_p \geq 2$. On a alors :

$$\frac{u_p}{2} \geq 1 \Rightarrow \frac{u_p}{2} + 1 \geq 2 \Rightarrow u_{p+1} \geq 2.$$

La propriété est alors vraie au rang $p + 1$.

Elle est donc vraie pour tout n.

3. On montre que (u_n) converge vers une limite ℓ qu'on déterminera. (u_n) est décroissante et minorée donc elle converge vers une limite ℓ qui est nécessairement une solution de l'équation $x = \frac{x}{2} + 1$. Or,

$$x = \frac{x}{2} + 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow x = 2.$$

(u_n) converge vers 2.

2 6 Suites de Héron, approximation de $\sqrt{2}$

Exercice 43.7. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right).$$

1. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$f'(x) = \frac{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{2x^2}.$$

En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$.

2. On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}.$$

a. Calculer u_1 etu_2.

b. Démontrer par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sqrt{2} < u_{n+1} < u_n \leq \frac{3}{2}.$$

En déduire que la suite (u_n) est convergente.

c. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{2}).$$

d. En déduire, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 < u_n - \sqrt{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - \sqrt{2}).$$

e. En déduire la limite de la suite (u_n).

Développement

Démonstration.

1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-2}{2x^2} = \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{2x^2}.$$

Le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
signe de $x-\sqrt{2}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $x+\sqrt{2}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signe de $2x^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
signe de la dérivée f'		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$-\sqrt{2}$	$\searrow$	$-\infty$ $\|$ $+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

2. Les limites :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

(justification évidente). Les limites en $-\infty$ et 0^- s'en déduisent facilement en utilisant le fait que f est impaire.

3. **a.** $u_1 = \frac{17}{12} \simeq 1,41667$; $u_2 = \frac{577}{408} \simeq 1,41422$ à 10^{-5} près d'après la calculatrice.

b. Notons $\mathcal{P}$ la propriété définie, pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) : \sqrt{2} < u_{n+1} < u_n \leq \frac{3}{2}.$$

Initialisation : Comparons les carrés des nombres u_1, u_0 et $\sqrt{2}$:

$$(\sqrt{2})^2 = 2 = \frac{288}{144} \; ; \; u_1^2 = \frac{289}{144} \; ; \; u_0^2 = \frac{9}{4} = \frac{324}{144}.$$

D'où :

$$0 \leq (\sqrt{2})^2 < u_1^2 < u_0^2 \leq \frac{9}{4}.$$

Par croissance de l'application $t \mapsto \sqrt{t}$, nous obtenons : $0 \leq \sqrt{2} < u_1 < u_0 \leq \frac{3}{2}$. D'où la propriété $\mathcal{P}(0)$.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons :

$$\mathcal{P}(n) : \sqrt{2} < u_{n+1} < u_n \leq \frac{3}{2}.$$

Comme f est strictement croissante sur $[\sqrt{2}; 3/2]$, nous avons :

$$f(\sqrt{2}) < f(u_{n+1}) < f(u_n) \leq f(3/2).$$

Or $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, $f(u_{n+1}) = u_{n+1}$, $f(u_n) = u_{n+1})$ et $f(3/2) = 17/12$. D'où :

$$\sqrt{2} < u_{n+2} < u_{n+1} \leq \frac{17}{12} \leq \frac{3}{2}.$$

Ce qui est $\mathcal{P}(n+1)$.

Bilan : On a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sqrt{2} < u_{n+1} < u_n \leq \frac{3}{2}.$$

En conséquence, la suite (u_n) est décroissante et minorée (par $\sqrt{2}$) donc convergente.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) - \sqrt{2} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{u_n} - \sqrt{2}.$$

Par passage à l'inverse :

$$\frac{1}{u_n} < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

D'où :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \sqrt{2} &< \frac{1}{2}u_n + \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} \\ u_{n+1} - \sqrt{2} &< \frac{1}{2}u_n - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ u_{n+1} - \sqrt{2} &< \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

d. Soit $\mathcal{T}$ la propriété définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\mathcal{T}(n) : 0 < u_n - \sqrt{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - \sqrt{2})$$

- On a : $0 < u_0 - \sqrt{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 (u_0 - \sqrt{2})$, d'où $\mathcal{T}(0)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{T}(n)$. Alors :

$$0 < u_{n+1} - 2 < \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{2}) \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - \sqrt{2})$$

$$0 < u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (u_0 - \sqrt{2}).$$

  Ce qui est $\mathcal{T}(n+1)$.
- Bilan : on a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 < u_n - \sqrt{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - \sqrt{2}).$$

e. Comme $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ (puisque $\frac{1}{2} \in]-1\,,1[$), nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - \sqrt{2}) = 0.$$

Du théorème des gendarmes, on déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}.$$

□

3 Suites récurrentes de type $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$

3 1 Un exemple

Exemple 43.8. Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. On montre que la suite (v_n) définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$ est une suite géométrique. Pour tout n,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+2} - u_{n+1}}{u_{n+1} - u_n} = \frac{5u_{n+1} - 4u_n - u_{n+1}}{u_{n+1} - u_n} = \frac{4u_{n+1} - 4u_n}{u_{n+1} - u_n} = 4.$$

   (v_n) est géométrique de raison $b = 4$ et de premier terme $v_0 = u_1 - u_0 = 1$.

2. On exprime v_n en fonction de n :

$$v_n = b^n \times v_0 = 4^n.$$

3. On a :

$$u_0 + (v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}) = u_0 + (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \cdots + (u_n - u_0) = u_n.$$

4. On en déduit une expression de u_n en fonction de n. (v_n) est géométrique, donc

$$v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1} = v_0 \times \frac{1-4^n}{1-4} = \frac{1}{3} \times (4^n - 1).$$

D'où

$$u_n = u_0 + \frac{1}{3} \times (4^n - 1) = 1 + \frac{1}{3} \times 4^n - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times 4^n + \frac{2}{3}.$$

5. Etudier la limite de la suite (u_n).

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{1}{3} \times 4^n}_{\to+\infty} + \frac{2}{3} = +\infty \quad (\text{car } 4 > 1).$$

3.2 Nombres de Fibonacci

On considère, quand $t = 0$, un couple A de jeunes lapins. Le mois suivant $(t = 1)$, les deux lapins sont adultes, le couple est appelé B. A $t = 2$, deux jeunes lapins naissent et on a deux couples B et A. Pour chaque mois suivant, chaque couple A devient B et chaque B devient BA. Les couples sont, successivement, A, B, BA, BAB, $BABBA$, $BABBABAB$ etc. Les nombres de couples de lapins sont

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots.$$

Définition 43.9

Nombres de Fibonacci

Ces nombres sont appelés les *nombres de Fibonacci*

On construit ainsi la suite F telle que $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$ et pour tout entier naturel n, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Définition 43.10

Suite de Fibonacci

La suite (F_n) définie par :

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

est appelé *suite de Fibonacci*. Les termes de la suite sont les *nombres de Fibonacci.*

Le polynôme caractéristique de la suite de Fibonacci est

$$\chi(x) = x^2 - x - 1$$

admettant pour racines

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \overline{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Ainsi $F_n = \lambda\varphi^n + \mu\overline{\varphi}^n$ où λ et μ sont obtenus par la résolution du système suivant :

$$\begin{cases} F_0 = \lambda + \mu \\ F_1 = \lambda\varphi + \mu\overline{\varphi} \end{cases}$$

On obtient alors la formule de Binet :

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

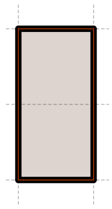
Exemples 43.11Applications des suites de Fibonacci

.

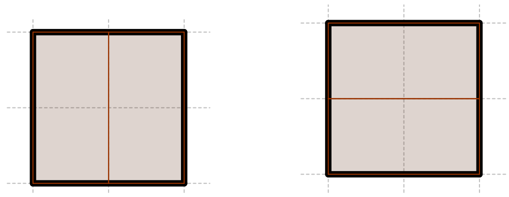
1. On dispose d'un plateau de dimension $2 \times n$, $n \in \mathbb{N}^*$. De combien de façon différentes peut-on disposer des dominos (à couleur unique sans motif) de sorte à ce qu'ils recouvrent totalement le plateau.

   On regarde ce qui se passe pour les premières valeurs de n :

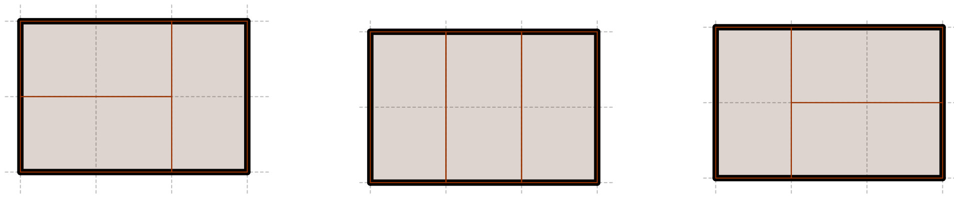
   $n = 1$: il y a une seule façon de disposer le domino.

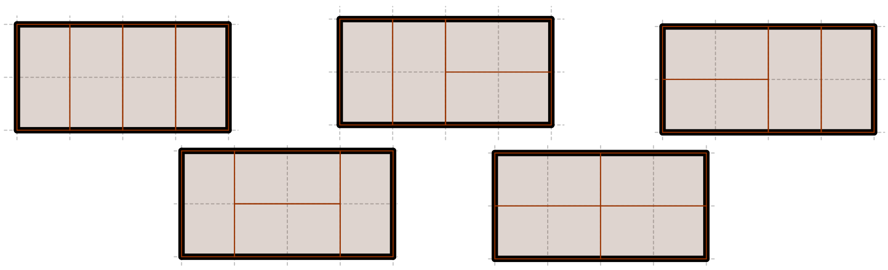
   $n = 2$: Il y a 2 façons de disposer les dominos.

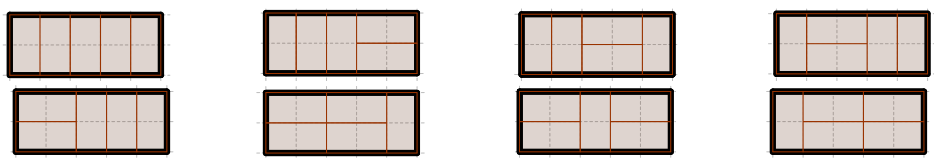
   $n = 3$: Il y a 3 façons de disposer les dominos.

   $n = 4$: Il y a 5 façons de disposer les dominos.

   $n = 5$: Il y a 8 façons de disposer les dominos.

   $n = 6$: Il y a 13 façons de disposer les dominos.

   Ainsi, nous pouvons constater (et on peut vérifier cela en regardant les autres valeurs de n) que nous obtenons ici les premiers termes de la suite de Fibonacci. Il y a donc F_n façons de disposer les dominos sur un plateau de dimensions $2 \times n$.

2. Un homme se déplace dans un couloir infini où il n'avance que face à lui ou vers sa droite sans jamais se tourner vers la gauche ni revenir en arrière. Combien de chemins possibles peut-il emprunter pour aller à la case n suivant l'illustration ci-dessous ?

   – De la case 1 à la case 2, il y a 1 possibilité ;
   – De la case 1 à la case 3, il y a 2 possibilités ($1 \to 3$ ou $1 \to 2 \to 3$) ;
   – De la case 1 à la case 4, il y a 3 possibilités ;
   – De la case 1 à la case 5, il y a 5 possibilités ;
   – De la case 1 à la case 6, il y a 8 possibilités ;

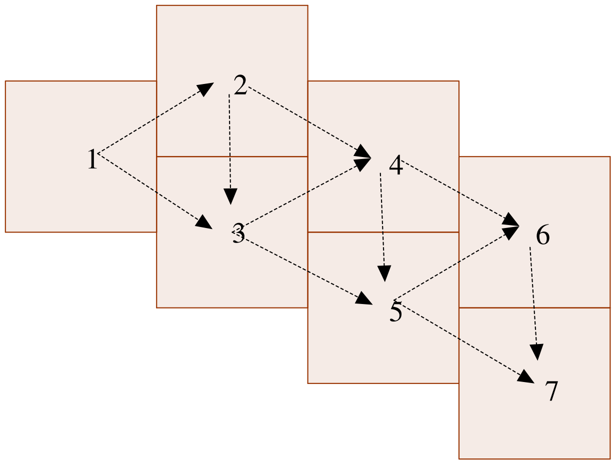


FIGURE 43.4 – Parcours dans un couloir infini

– De la case 1 à la case 7, il y a 13 possibilités ;

On voit encore une fois apparaître les premiers termes de la suite de Fibonacci. Il y a donc F_n chemins possibles pour aller de la case 1 à la case n.

4 Utilisation de Geogebra pour tracer une suite de récurrence

Soit à tracer la représentation graphique de la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : I \to \mathbb{R}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, de premier terme u_0. On trace tout d'abord la représentation graphique de f :

```
f(x) = ...
```

et la première bissectrice du repère (qu'on appellera $\mathcal{D}$) :

```
y = x
```

On définit le paramètre a à l'aide d'un curseur et le paramètre n (nombre de termes de la suite qui seront calculés) avec un autre curseur. On calcule alors les n premiers termes de la suite :

```
Termes=ItexrationListe[f,a,n]
```

On définit les points (u_i, u_i) de la droite $\mathcal{D}$

```
Pointsx = Sequence[(Element[Termes,i],Element[Termes,i]),i,1,n]
```

puis les points (u_i, u_{i+1})

```
Pointsf = Sequence[(Element[Termes,i],Element[Termes,i+1]),i,1,n]
```

puis les segments verticaux :

```
SegmentsV = Sequence[Segment[Element[Pointsx,i],Element[Pointsf,i
   ]],i,1,n]
```

Et enfin les segments horizontaux :

```
SegmentsH = Sequence[Segment[Element[Pointsf,i],Element[Pointsx,i
   +1]],i,1,n]
```

Les suites récurrentes ont de très nombreuses applications. Par exemple, intéressons nous à l'évolution à l'effectif d'une population.

Soit p_n l'effectif de la population à l'instant n. On suppose qu'il n'y a aucun flux migratoire. L'évolution de l'effectif de la population résulte donc uniquement des naissances et des décès. On note α le taux de natalité ($\alpha \geq 0$) et ω le taux de mortalité ($0 < \omega < 1$). On a :

$$p_{n+1} = p_n + \alpha p_n - \omega p_n = p_n(1 + \alpha - \omega). \tag{43.1}$$

Cependant, il parait raisonnable de penser que les taux de natalité et de mortalité sont dépendants de l'effectif de la population. En effet, si l'effectif de la population est très important, la compétition entre les individus est accrue. On peut alors imaginer que le taux de natalité diminue et que le taux de mortalité augmente et inversement…

Un modèle un peu plus fin pourrait donc considérer que ω et α sont des fonctions affines dépendantes de p_0 :

$$\begin{aligned} \alpha(p_n) &= \alpha - \alpha' p_n \quad \text{où } \alpha' > 0 \\ \omega(p_n) &= \omega + \omega' p_n \quad \text{où } \omega' > 0. \end{aligned}$$

(44.1) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n(1 + \alpha - \alpha' p_n - \omega - \omega' p_n) \\ &= p_n(1 + \alpha - \omega) \cdot \left(1 - \frac{\alpha' + \omega'}{1 + \alpha + \omega} p_n\right). \end{aligned}$$

On pose $u_n :- \frac{\alpha'+\omega'}{1+\alpha+\omega} p_n$. Comme $p_{n+1} > 0$, $p_n > 0$ et $(1 + \alpha - \omega) \geq 0$, on a : $0 \leq u_n \leq 1$.

Remarque 43.12. Que caractérise u_n ?

- Si u_n est nul (ou tout au moins très petit) alors on en revient au premier modèle, c'est-à-dire les taux de natalité et de mortalité sont très peu sensibles à l'effectif de la population.
- Si u_n s'approche de 1, l'évolution de l'effectif en ait fortement impacté.

Conclusion : u_n caractérise la sensibilité des taux de mortalité et de natalité à l'effectif de la population.

On remarque que :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{\alpha' + \omega'}{a} \cdot p_{n+1} \quad \text{où } a = 1 - \omega + \alpha \\ &= \frac{\alpha' + \omega'}{a} \cdot a \cdot p_n \cdot (1 - u_n) \\ &= u_n \cdot a \cdot (1 - u_n). \end{aligned}$$

u_n est donc une suite récurrente avec $g(x) = ax(1 - x)$.

Remarque 43.13. $a > 0$ car $1 - \omega > 0$ et $\alpha > 0$. On peut considérer que a n'est pas très grand, sinon cela signifierait qu'il y a un grand écart entre α et ω. Prenons $0 < a < 4$.

On peut alors montrer que $g([0\,,1]) \subset [0\,,1]$. Les points fixes de g sont $\overline{x_1} = 0$ et $\overline{x_2} = \frac{a-1}{a}$.

Si $0 \leq a < 1$ seul $\overline{x_1}$ est dans $[0\,,1]$ et il est attractif car $g'(x) = a - 2ax$ et $g'(\overline{x_1}) = a$.

Si $1 \leq a < 2$

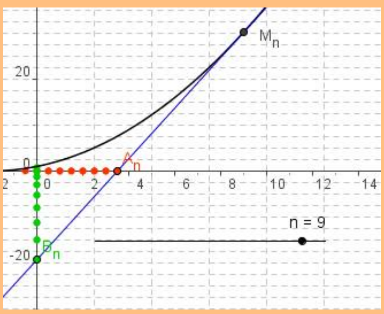
- $g'(x) = a - 2ax$, $g'(\overline{x_1}) = 0 > 1$ donc $\overline{x_1}$ est répulsif.
- $g'(\overline{x_2}) = a - 2a\frac{a-1}{a} = 1 - a$. Or

$$1 \leq a < 2 \Leftrightarrow -1 \geq -a > -2 \Leftrightarrow 0 \geq 1 - a > -1$$

donc $\overline{x_2}$ est attractif.

LEÇON 44

Problèmes conduisant à l'étude de suites



Niveau : Terminale S - BTS
Prérequis : suites, probabilités

Exemple 44.1. On considère un carré $ABCD$ de côté $c = 4$. On appelle A_1, B_1, C_1 et D_1 les points situés sur $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ à distance 1 de A, B, C, D.

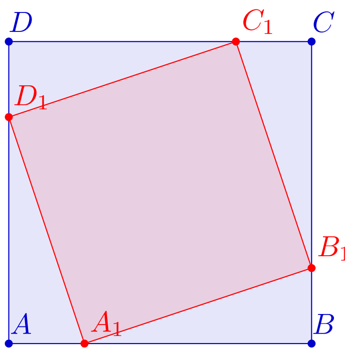


FIGURE 44.1 – Figure de l'exemple

Développement

1. On justifie que $A_1B_1C_1D_1$ est un carré. Les triangles AA_1D_1, BB_1A_1, CC_1B_1 et DD_1C_1 sont des triangles isométriques puisqu'ils ont chacun un angle droit compris entre deux côtés de longueurs respectives 1 et 3. On en déduit que $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = D_1A_1$. $A_1B_1C_1D_1$ est donc un quadrilatère ayant quatre côtés de même longueur, c'est un losange. De plus, on a :
$$\widehat{AA_1D_1} + \widehat{D_1A_1B_1} + \widehat{B_1A_1B} = \pi.$$
Donc
$$\widehat{D_1A_1B_1} = \pi - \widehat{AA_1D_1} + \widehat{B_1A_1B}.$$
Comme les triangles AA_1D_1, BB_1A_1, CC_1B_1 et DD_1C_1 sont isométriques et rectangles, on a :
$$\widehat{AA_1D_1} + \widehat{B_1A_1B} = \widehat{AA_1D_1} + \widehat{A_1D_1A} = \frac{\pi}{2}.$$
On en déduit que
$$\widehat{D_1A_1B_1} = \frac{\pi}{2}.$$
Donc $A_1B_1C_1D_1$ est un carré.
2. On appelle A_2, B_2, C_2 et D_2 les points situés respectivement sur $[A_1B_1], [B_1C_1], [C_1D_1], [D_1A_1]$ à la distance 1 de A_1, B_1, C_1, D_1. On montre que $A_2B_2C_2D_2$ est un carré.
Les triangles $A_1A_2D_2$, $B_1B_2A_2$, $C_1C_2B_2$ et $D_1D_2C_2$ sont des triangles isométriques puisqu'ils ont chacun un angle droit compris entre deux côtés de longueurs respectives égales.

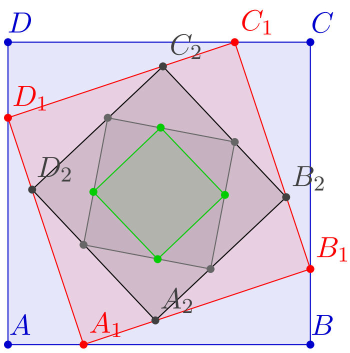


FIGURE 44.2 – Figure de la question 2

On en déduit que $A_2B_2 = B_2C_2 = C_2D_2 = D_2A_2$. $A_2B_2C_2D_2$ est donc un quadrilatère ayant quatre côtés de même longueur, c'est un losange. De plus, on a :

$$\widehat{A_1A_2D_2} + \widehat{D_2A_2B_2} + \widehat{B_2A_2B_1} = \pi.$$

Donc

$$\widehat{D_2A_2B_2} = \pi - \widehat{A_1a_2D_2} + \widehat{B_2A_2B_1}.$$

Comme les triangles $A_1A_2D_2$, $B_1B_2A_2$, $C_1C_2B_2$ et $D_1D_2C_2$ sont isométriques et rectangles, on a :

$$\widehat{A_1A_2D_2} + \widehat{B_2A_2B_1} = \widehat{A_1A_2D_2} + \widehat{A_2D_2A_1} = \frac{\pi}{2}.$$

On en déduit que $\widehat{D_2A_2B_2} = \frac{\pi}{2}$. Donc $A_2B_2C_2D_2$ est un carré.

3. On peut montrer que même, que si on réitère le procédé, on obtient que $A_2B_2C_2D_2$, $A_3B_3C_3D_3$, $A_4B_4C_4D_4$ sont des carrés.

4. On note $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ et $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$ les aires et les longueurs des carrés $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, $A_3B_3C_3D_3$, $A_4B_4C_4D_4$ et $A_5B_5C_5D_5$. On montre que les suites $(a_k)_{0\leq k\leq 5}$ et $(c_k)_{0\leq k\leq 5}$ sont décroissantes. Le carré $A_5B_5C_5D_5$ est contenu dans le carré $A_4B_4C_4D_4$, lui même contenu dans le carré $A_3B_3C_3D_3$, lui-même contenu dans le carré $A_2B_2C_2D_2$, lui-même contenu dans le carré $A_1B_1C_1D_1$, lui-même contenu dans le carré $ABCD$. On a donc

$$a_5 \leq a_4 \leq a_3 \leq a_2 \leq a_1 \leq a_0.$$

On sait de plus que le côté d'un carré est égal à la racine carré de son aire. La fonction racine carrée étant croissante sur $[0\,,+\infty[$, on en déduit que :

$$c_5 \leq c_4 \leq c_3 \leq c_2 \leq c_1 \leq c_0.$$

Donc les suites de nombres $(a_k)_{0\leq k\leq 5}$ et $(c_k)_{0\leq k\leq 5}$ sont décroissantes.

5. On calcule les valeurs de $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ et c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5. On sait que $c_0 = 4$ donc $a_0 = 16$. L'utilisation du théorème de Pythagore dans le triangle A_1Bb_1 permet d'obtenir :

$$(A_1B_1)^2 = A_1B^2 + BB_1^2 = 3^2 + 1^2 = 10 \text{ donc } a_1 = 10 \quad \text{et} \quad c_1 = \sqrt{10} \simeq 3,162.$$

L'utilisation du théorème de Pythagore dans le triangle $A_2B_1B_2$ permet d'obtenir :

$$(A_2B_2)^2 = (A_2B_1)^2 + (B_1B_2)^2 = (\sqrt{10} - 1)^2 + 1^2 = 12 - 2\sqrt{10}$$

donc

$$a_2 = 12 - 2\sqrt{10} \simeq 5,675 \quad \text{et} \quad c_2 = \sqrt{12 - 2\sqrt{10}} \simeq 2,382.$$

En réitérant les calculs, on obtient :

$$a_0 = 16,\ a_1 = 10,\ a_2 = 10 - 2\sqrt{10} \approx 5,675,\ a_3 \approx 2,911,\ a_4 = 1,499,\ a_5 = 1,050$$

et

$$c_0 = 4,\ c_1 = \sqrt{10} \approx 3,162,\ c_2 = \sqrt{12 - 2\sqrt{10}} \approx 2,382,\ c_3 \approx 1,706,\ c_4 \approx 1,224,\ c_5 \approx 1,025.$$

L'aire A du carré peut s'obtenir à partir de l'aire a du carré précédent par le calcul :

$$A = (\sqrt{a} - 1)^2 + 1.$$

On peut ainsi obtenir avec une calculatrice les aires successives des carrés. Avec la calculatrice TI82, on pourra faire :

```
16 -> A
(V^A-1)^2 + 1 -> A
```

où −> peut s'obtenir en tapant la touche STO> et V^ est la racine carrée. Il suffit ensuite de appuyer sur la touche ENTER pour obtenir les valeurs approchées successives de l'aire.

```
> 16 -> A
16
> (V^A-1)^2 + 1 -> A
10
5.6754468
2.910806318
1.498589257
```

Le côté C d'un carré peut s'obtenir à partir de l'aire c du carré précédent par le calcul

$$C = \sqrt{(c-1)^2 + 1^2}.$$

On peut ainsi obtenir avec la TI82 :

```
4 -> C
V^((C-1)^2 + 1) -> C
```

Il suffit ensuite de appuyer sur la touche ENTER pour obtenir les valeurs approchées successives du côté :

```
> 4 -> C
4
> V^((C-1)^2 + 1) -> C
3.16227766
2.382319181
1.706108531
1.224168802
```

6. On donne un algorithme sur Algobox qui permet d'obtenir les valeurs de a_n et c_n pour un n quelconque.

```
> Variables
    etape EST_DU_TYPE NOMBRE
    C EST_DU_TYPE_NOMBRE
> DEBUT_ALGORITHME
    LIRE etape
    C PREND_LA_VALEUR 4
    > TANT_QUE (etape>0) FAIRE
       DEBUT_TANT_QUE
       etape PREND_LA_VALEUR etape-1
       C PREND_LA_VALEUR sqrt((C-1)*(C-1)+1)
       FIN_TANT_QUE
    AFFICHER C
  FIN_ALGORITHME
```

On donne un algorithme sur TI82 qui permet d'obtenir les valeurs de a_n et c_n pour un n quelconque.

```
Input N
4 -> C
While N>0
V^((C-1)^2+1)-> C
N-1 -> N
End
Disp "COTE ", C
```

Si on réitère le procédé, il semble que l'on s'apporche de plus en plus d'un carré « fixe » de côté 1.

2 Intérêts composés

Exemple 44.2. Une personne a placé sur un compte le 1er janvier 2005 un capital de 10000 €. Ce compte produit des intérêts de 4% par an. Chaque année, les intérêts sont ajoutés au capital et deviennent à leur tour générateurs d'intérêts. Pour n entier naturel, on appelle C_n le capital du 1er janvier de l'année $2005+n$. On a ainsi $C_0 = 10000$.

Développement

1. On détermine C_1 et C_2. Chaque année le capital génère des intérêts de 4%. Rajouter 4% revient à multiplier par :

$$1 + 4\% = 1 + \frac{4}{100} = 1,04.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} C_1 &= C_0 \times 1,04 = 10000 \times 1,04 = 10400 \\ C_2 &= C_1 \times 1,04 = 10400 \times 1,04 = 10816. \end{aligned}$$

2. On exprime C_{n+1} en fonction de C_n et on en déduit une valeur approchée de C_{10}. C_{n+1} est le capital au 1er janvier de l'année $2005+n+1$. Il est obtenu en rajoutant 4% à C_n, capital au 1er janvier de l'année $2005+n$. On a donc :

$$C_{n+1} = C_n \times 1,04.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} C_3 &= C_2 \times 1,04 = 10816 \times 1,04 = 11248,64 \\ C_4 &= C_3 \times 1,04 = 11248,64 \times 1,04 \approx 11698,59 \\ C_5 &= C_4 \times 1,04 \approx 11698,59 \times 1,04 \approx 12166,53 \\ C_6 &= C_5 \times 1,04 \approx 12166,53 \times 1,04 \approx 12653,19 \\ C_7 &= C_6 \times 1,04 \approx 12653,19 \times 1,04 \approx 13159,32 \\ C_8 &= C_7 \times 1,04 \approx 13159,32 \times 1,04 \approx 13685,69 \\ C_9 &= C_8 \times 1,04 \approx 13685,69 \times 1,04 \approx 14233,12 \\ C_{10} &= C_9 \times 1,04 \approx 14233,12 \times 1,04 \approx 14802,44. \end{aligned}$$

3. On suppose maintenant qu'au 1er janvier de chaque année, à partir du 1er janvier 2006, la personne rajoute 1000 € sur son compte. On recalcule C_1 et C_2, puis on exprime C_{n+1} en fonction de C_n. Ainsi, on détermine une valeur approchée de C_{10}. Chaque année, le capital génère des intérêts de 4% et de plus il est augmenté de 1000 €. On a donc

$$\begin{aligned} C_1 &= C_0 \times 1,04 + 1000 = 10000 \times 1,04 + 1000 = 11400 \\ C_2 &= C_1 \times 1,04 + 1000 = 11400 \times 1,04 + 1000 = 12856 \end{aligned}$$

On peut écrire $C_{n+1} = C_n \times 1,04 + 1000$. On obtient alors en utilisant une calculatrice $C_{10} \approx 26808,55$. Avec une TI82, on peut faire :

```
10000 -> C
C * 1.04 + 1000 -> C
```

On obtient alors

```
> 10000-> C
10000
> C*1.04+1000->C
11400
12856
14370.24
15945.0496
```

```
17582.85158
19286.16565
21057.61227
22899.91676
24815.91343
26808.54997
```

Avec un tableur (OpenOffice.org Calc), on peut faire :

```
A1 = 10000
B1 = A1*1,04+1000
# Glisser la formule vers la droite autant de fois que necessaire
```

On obtient :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	10000	11400	12856	14370,24	15945,0496	17582,85158	19286,16565	21057,61227	22899,91676	24815,91343

4. On donne un algorithme sur Algobox qui détermine à partir de quelle année le capital aura été multiplié par 5.

```
> VARIABLES
    C EST_DU_TYPE NOMBRE
    annee EST_DU_TYPE NOMBRE
> DEBUT_ALGORITHME
    annee PREND_LA_VALEUR 2005
    C PREND_LA_VALEUR 10000
    > TANT_QUE (C < 50000) FAIRE
       DEBUT_TANT_QUE
       annee PREND_LA_VALEUR annee+1
       C PREND_LA_VALEUR C*1.04+1000
       FIN_TANT_QUE
    AFFICHER annee
  FIN_ALGORITHME
```

On donne un algorithme sur TI82 qui détermine à partir de quelle année le capital aura été multiplié par 5.

```
2005 -> N
10000 -> C
While C < 50000
C*1.04+1000 -> C
N + 1 -> N
End
Disp "ANNEE ",N
```

Ainsi, en 2025, on multiplie par 5 le capital initial déposé en 2005.

3 Un problème de tribu Lation

Exemple 44.3. Dans une tribu un peu spéciale, la tribu « Lation », on compte de façon très étrange :

$$1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20, 22, \dots$$

Tous les multiples de 3 ont disparu tout en gardant le symbole « 3 » dans les autres nombres ! Quel nombre obtiendra-t-on si l'on compte 2011 objets ?

Développement

On se fixe k un entier supérieur à 2 et pose N_k le k^{e} nombre obtenu. Soit p un entier, que vaut N_{3p} ?

- $N_3 = 4 = 3 + 1 = 3 + N_1$
- $N_6 = 8 = 6 + 2 = 6 + N_2$
- $N_9 = 13 = 9 + 4 = 9 + N_3$
- $N_{12} = 17 = 12 + 5 = 12 + N_4$
- $N_{15} = 22 = 15 + 7 = 15 + N_5$

On constate alors que :

$$N_{3p} = 3p + N_p.$$

Ainsi :

$$N_{2010} = 2010 + N_{670}.$$

Comme 670 n'est pas divisible par 3, on va exprimer N_{669} :

$$N_{669} = 669 + N_{223}.$$

Comme 223 n'est pas divisible par 3, on va exprimer N_{222} :

$$N_{222} = 222 + N_{74}.$$

Comme 74 n'est pas divisible par 3, on va exprimer N_{72} :

$$N_{72} = 72 + N_{24} = 72 + 24 + N_8 = 72 + 24 + 11 = 107.$$

On a alors :

$$N_{74} = 110$$

car 108 est divisible par 3. D'où :

$$N_{222} = 222 + 110 = 332$$

ainsi

$$N_{223} = 334$$

car 333 est divisible par 3. De plus :

$$N_{669} = 669 + 334 = 1003$$

$$N_{670} = 1004$$

$$N_{2010} = 2010 + 1004 = 3014.$$

4 0,9999... = 1

À l'aide d'une suite géométrique, on va montrer que $0,9999\cdots = 1$.

Développement

Nous avons :

$$0,9999\cdots = 0,9 + 0,09 + 0,009 + \cdots = \frac{9}{10}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{10^n}$$

$$0,9999\cdots = \frac{9}{10} \times \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{9}{10} \times \frac{10}{9}.$$

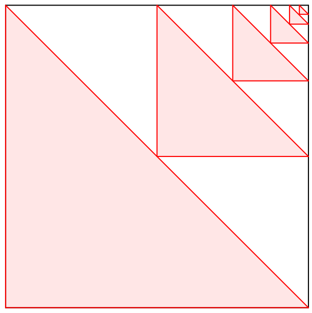


FIGURE 44.3 – Mise en abîme

5 Mise en abîme

Sachant qu'il y a une infinité de triangles colorés, calculez l'aire de la surface totale qu'ils occupent.

Développement

- Le premier triangle (le plus grand) a pour côté 1, son aire est donc égale à $\frac{1}{2}$.
- Le second triangle a pour côté $\frac{1}{2}$; son aire est donc égal à $\frac{1}{8}$.
- Le troisième triangle a pour côté $\frac{1}{4}$; son aire est donc égale à $\frac{1}{32}$.

La surface totale aura donc une aire égale à :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}.$$

6 Le problème des anniversaires

A partir de quelle valeur n la probabilité pour que, dans un groupe de n personnes, deux au moins d'entre elles aient la même date d'anniversaire est-elle supérieur à $0,5$?

Développement

Pour traiter ce problème, considérons l'événement contraire de celui qui nous intéresse : calculons la probabilité pour qu'aucune des personnes n'aient la même date d'anniversaire (on notera cette probabilité p_n). Quand $n = 2$,

$$p_2 = \frac{364}{365} = 1 - \frac{1}{365}.$$

Quand $n = 3$, il faut que la troisième personne n'ait pas la même date d'anniversaire que les deux autres, d'où :

$$p_3 = \left(1 - \frac{1}{365}\right)\left(1 - \frac{2}{365}\right).$$

Quand $n = 4$, on a :

$$p_4 = \left(1 - \frac{1}{365}\right)\left(1 - \frac{2}{365}\right)\left(1 - \frac{3}{365}\right).$$

Pour n quelconque, on a :

$$p_n = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{365}\right).$$

La probabilité qui nous intéresse est $1 - p_n$. On regroupe les valeurs dans la table 44.1. On voit ici qu'à partir de $n = 23$, la probabilité qui nous intéresse est supérieur à 0,5.

n	p_n	1-p_n
2	0,997260274	0,002739726
3	0,9917958341	0,0082041659
4	0,9836440875	0,0163559125
5	0,9728644263	0,0271355737
6	0,9595375164	0,0404624836
7	0,9437642969	0,0562357031
8	0,9256647076	0,0743352924
9	0,9053761661	0,0946238339
10	0,8830518223	0,1169481777
11	0,8588586217	0,1411413783
12	0,8329752112	0,1670247888
13	0,8055897248	0,1944102752
14	0,776897488	0,223102512
15	0,7470986802	0,2529013198
16	0,7163959947	0,2836040053
17	0,6849923347	0,3150076653
18	0,6530885821	0,3469114179
19	0,620881474	0,379118526
20	0,5885616164	0,4114383836
21	0,5563116648	0,4436883352
22	0,5243046923	0,4756953077
23	**0,4927027657**	**0,5072972343**
24	0,4616557421	0,5383442579
25	0,431300296	0,568699704
26	0,4017591799	0,5982408201
27	0,3731407177	0,6268592823
28	0,3455385277	0,6544614723
29	0,3190314625	0,6809685375
30	0,2936837573	0,7063162427

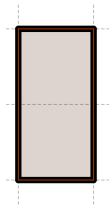
TABLE 44.1 – Problèmes des anniversaires

Exemples 44.4. Applications des suites de Fibonacci

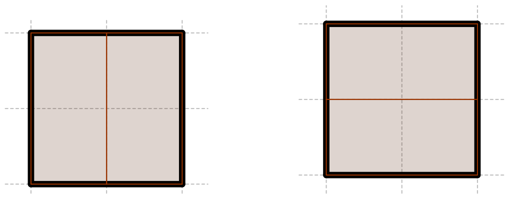
1. On dispose d'un plateau de dimension $2 \times n$, $n \in \mathbb{N}^*$. De combien de façon différentes peut-on disposer des dominos (à couleur unique sans motif) de sorte à ce qu'ils recouvrent totalement le plateau.

   On regarde ce qui se passe pour les premières valeurs de n :

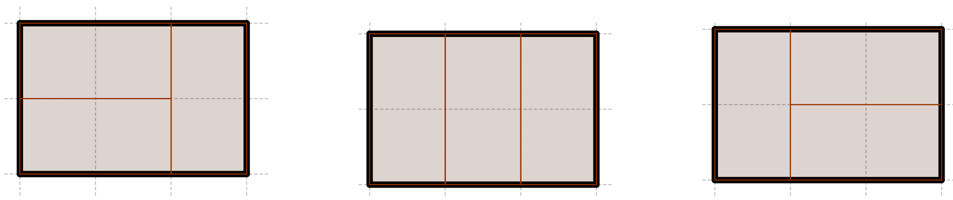
   $n = 1$: il y a une seule façon de disposer le domino.

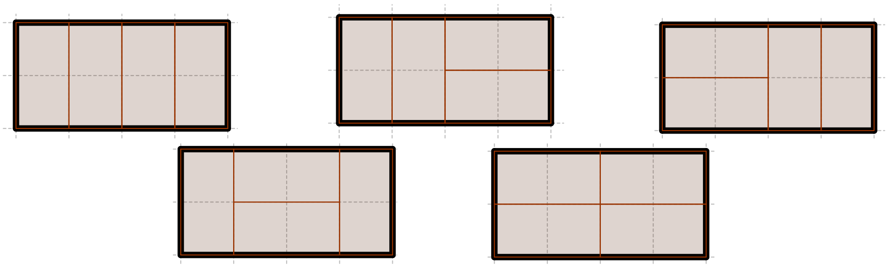
   $n = 2$: Il y a 2 façons de disposer les dominos.

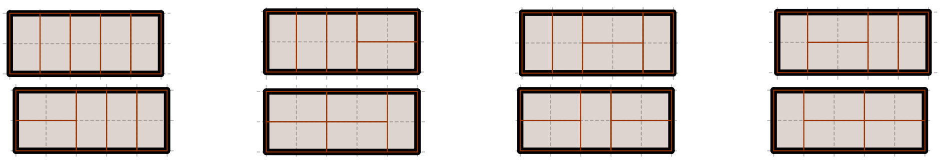
   $n = 3$: Il y a 3 façons de disposer les dominos.

   $n = 4$: Il y a 5 façons de disposer les dominos.

   $n = 5$: Il y a 8 façons de disposer les dominos.

   $n = 6$: Il y a 13 façons de disposer les dominos.

   Ainsi, nous pouvons constater (et on peut vérifier cela en regardant les autres valeurs de n) que nous obtenons ici les premiers termes de la suite de Fibonacci. Il y a donc F_n façons de disposer les dominos sur un plateau de dimensions $2 \times n$.

2. Un homme se déplace dans un couloir infini où il n'avance que face à lui ou vers sa droite sans jamais se tourner vers la gauche ni revenir en arrière. Combien de chemins possibles peut-il emprunter pour aller à la case n suivant l'illustration ci-dessous ?

   – De la case 1 à la case 2, il y a 1 possibilité ;

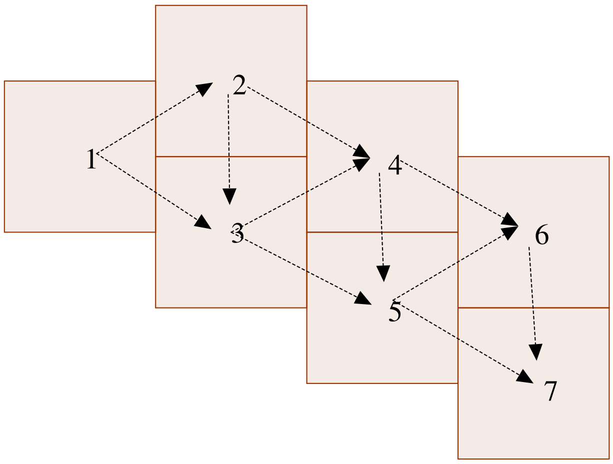


FIGURE 44.4 – Parcours dans un couloir infini

- De la case 1 à la case 3, il y a 2 possibilités ($1 \to 3$ ou $1 \to 2 \to 3$) ;
- De la case 1 à la case 4, il y a 3 possibilités ;
- De la case 1 à la case 5, il y a 5 possibilités ;
- De la case 1 à la case 6, il y a 8 possibilités ;
- De la case 1 à la case 7, il y a 13 possibilités ;

On voit encore une fois apparaître les premiers termes de la suite de Fibonacci. Il y a donc F_n chemins possibles pour aller de la case 1 à la case n.

7 1 Etude d'une population

Les suites récurrentes ont de très nombreuses applications. Par exemple, intéressons nous à l'évolution à l'effectif d'une population.

Développement

Soit p_n l'effectif de la population à l'instant n. On suppose qu'il n'y a aucun flux migratoire. L'évolution de l'effectif de la population résulte donc uniquement des naissances et des décès. On note α le taux de natalité ($\alpha \geq 0$) et ω le taux de mortalité ($0 < \omega < 1$). On a :

$$p_{n+1} = p_n + \alpha p_n - \omega p_n = p_n(1 + \alpha - \omega). \tag{44.1}$$

Cependant, il parait raisonnable de penser que les taux de natalité et de mortalité sont dépendant de l'effectif de la population. En effet, si l'effectif de la population est très important, la compétition entre les individus est accrue. On peut alors imaginer que le taux de natalité diminue et que le taux de mortalité augmente et inversement. . .

Un modèle un peu plus fin pourrait donc considérer que ω et α sont des fonctions affines dépendantes de p_0 :

$$\begin{aligned} \alpha(p_n) &= \alpha - \alpha' p_n \quad \text{où } \alpha' > 0 \\ \omega(p_n) &= \omega + \omega' p_n \quad \text{où } \omega' > 0. \end{aligned}$$

(44.1) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n(1 + \alpha - \alpha' p_n - \omega - \omega' p_n) \\ &= p_n(1 + \alpha - \omega) \cdot \left(1 - \frac{\alpha' + \omega'}{1 + \alpha + \omega} p_n\right). \end{aligned}$$

On pose $u_n := \frac{\alpha' + \omega'}{1 + \alpha + \omega} p_n$. Comme $p_{n+1} > 0$, $p_n > 0$ et $(1 + \alpha - \omega) \geq 0$, on a : $0 \leq u_n \leq 1$.

Remarque 44.5. Que caractérise u_n ?

- Si u_n est nul (ou tout au moins très petit) alors on en revient au premier modèle, c'est-à-dire les taux de natalité et de mortalité sont très peu sensibles à l'effectif de la population.
- Si u_n s'approche de 1, l'évolution de l'effectif en ait fortement impacté.

Conclusion : u_n caractérise la sensibilité des taux de mortalité et de natalité à l'effectif de la population.

On remarque que :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{\alpha' + \omega'}{a} \cdot p_{n+1} \quad \text{où } a = 1 - \omega + \alpha \\ &= \frac{\alpha' + \omega'}{a} \cdot a \cdot p_n \cdot (1 - u_n) \\ &= u_n \cdot a \cdot (1 - u_n). \end{aligned}$$

u_n est donc une suite récurrente avec $g(x) = ax(1-x)$.

Remarque 44.6. Discussion des valeurs de a

$a > 0$ car $1 - \omega > 0$ et $\alpha > 0$. On peut considérer que a n'est pas très grand, sinon cela signifierait qu'il y a un grand écart entre α et ω. Prenons $0 < a < 4$.

On peut alors montrer que $g([0\,,1]) \subset [0\,,1]$. Les points fixes de g sont $\overline{x_1} = 0$ et $\overline{x_2} = \frac{a-1}{a}$.

Si $0 \leq a < 1$ seul $\overline{x_1}$ est dans $[0\,,1]$ et il est attractif car $g'(x) = a - 2ax$ et $g'(\overline{x_1}) = a$.

Si $1 \leq a < 2$
- $g'(x) = a - 2ax$, $g'(\overline{x_1}) = 0 > 1$ donc $\overline{x_1}$ est répulsif.
- $g'(\overline{x_2}) = a - 2a\frac{a-1}{a} = 1 - a$. Or

$$1 \leq a < 2 \Leftrightarrow -1 \geq -a > -2 \Leftrightarrow 0 \geq 1 - a > -1$$

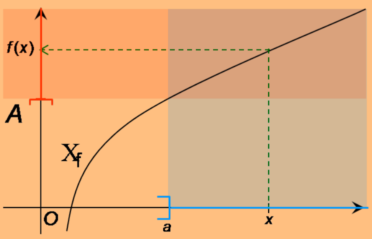
donc $\overline{x_2}$ est attractif.

V

Fonctions

LEÇON 45

Limte d’une fonction réelle d’une variable réelle



Niveau : Première S
Prérequis : fonctions

1 Introduction

Exemple 45.1. On considère la fonction f définie sur $]1\,,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{3x-4}{x-1}.$$

1. Si on calcule les valeurs de f quand x deviennent très grand, on obtient :

x	2	5	10	50	100	1000	10000
$f(x)$	2	$2,75$	$2,88889$	$2,97959$	$2,98989$	$2,99899$	$2,99989$

On constate que lorsque les nombres x devient de plus en plus grands, les nombres $f(x)$ s'approchent aussi près que voulu du nombre 3. On dire que la limite f en $+\infty$ est égale à 3.

2. Si on calcule maintenant les valeurs de la fonction lorsque la variable x s'approche de plus en plus de la valeur interdite 1 :

x	$0,5$	$0,8$	$0,9$	$0,99$	$0,999$	$0,9999$	1	$1,0001$	$1,001$	$1,01$	$1,1$	$1,2$	$1,5$	2
$f(x)$	5	8	13	103	1003	10003	$\times$	-9997	-997	-97	-7	-2	1	2

On dira alors que f n'a pas de limite ou mieux :

– la limite de f en 1 à gauche est égale à $+\infty$

– la limite de f en 1 à droite est égale à $-\infty$.

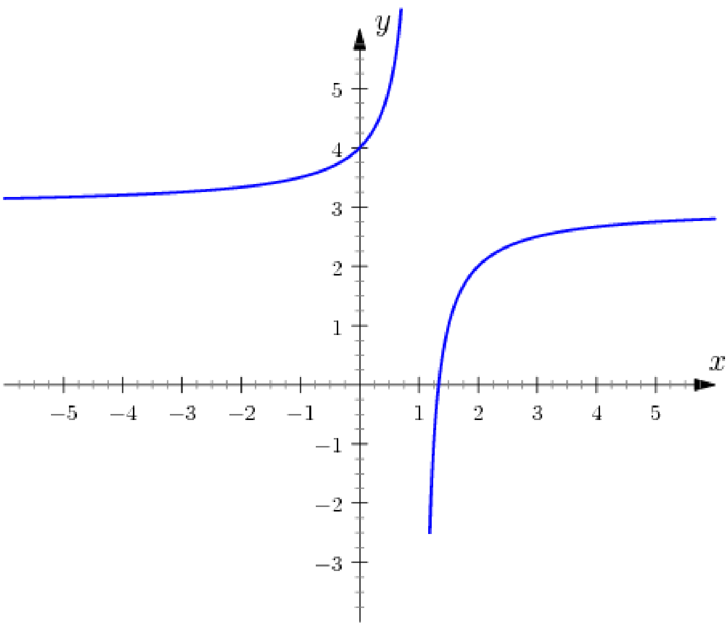


FIGURE 45.1 – Représentation graphique de la fonction $x \mapsto f(x) = \frac{3x-4}{x-1}$

2 Définitions

2.1 Limite d'une fonction en $+\infty$

On donne tout d'abord des définitions intuitives de la limite :

Définition 45.2

Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, si les nombres $f(x)$ deviennent de plus en plus :

grands [a], on dit que f a *pour limite* $+\infty$ en $+\infty$ et on note :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

grands en valeurs absolue mais négatifs on dit que f *a pour limite* $-\infty$ en $+\infty$ et on note

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$

proches d'un réel ℓ [b], on dit que f *a pour limite* ℓ en $+\infty$ et on note

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell.$$

a. Par l'expression « de plus en plus grand », il faut entendre « aussi grand que voulu ».
b. Par l'expression « de plus en plus proche », il faut entendre « aussi proche que voulu ».

On donne maintenant des définitions plus rigoureuses bien qu'elle ne soit pas utilisé en classe de Première S.

Définition 45.3

1. Si pour tout réel M positif, il existe un réel A tel que :

   $$x \geq A \Rightarrow f(x) \geq M,$$

   alors on dit que f *a pour limite* $+\infty$ en $+\infty$ et on note

   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

2. Si pour tout réel M négatif, il existe un réel A tel que :

   $$x \geq A \Rightarrow f(x) \leq M$$

   alors on dit que f *a pour limite* $-\infty$ *en* $+\infty$ et on note

   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$

3. S'il existe un réel ℓ tel que pour tout intervalle $]\ell-\varepsilon\,,\ell+\varepsilon[$, $(\varepsilon > 0)$ et il existe un réel A tel que :

   $$x \geq A \Rightarrow f(x) \in I.$$

   Alors on dit que f a *pour limite* ℓ en $+\infty$ et on note

   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell.$$

Exemples 45.4.

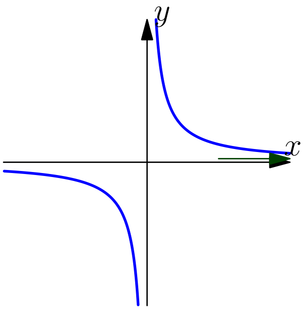
1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0,$
2. $\lim_{x\to+\infty}(2 + \frac{1}{x}) = 2,$
3. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0,$
4. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty,$

5. $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$,

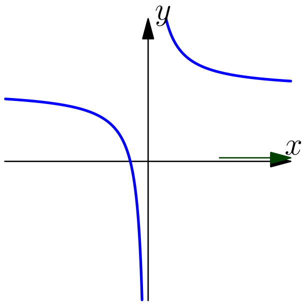
6. $\lim_{x\to+\infty}(-3x) = -\infty$,

7. $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$,

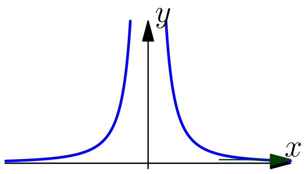
8. $\lim_{x\to+\infty}(-\frac{x^2}{2}) = -minf$.



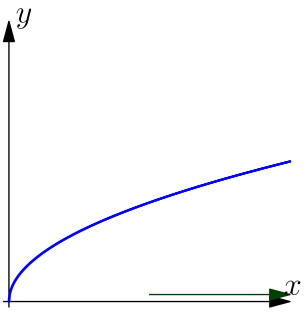
(a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$



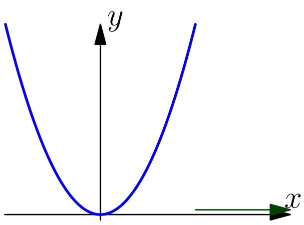
(b) $\lim_{x\to+\infty}(2 + \frac{1}{x}) = 2$



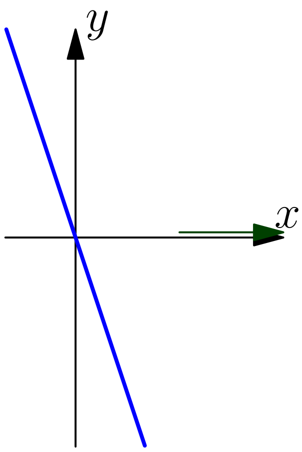
(c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$



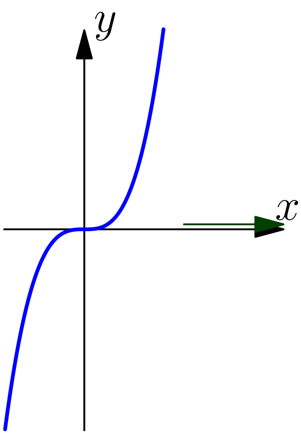
(d) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$



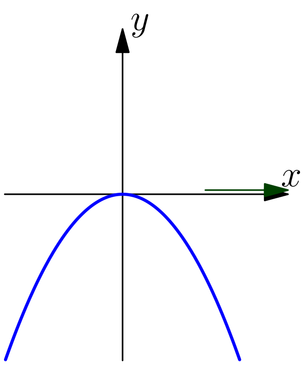
(e) $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$



(f) $\lim_{x\to+\infty}(-3x) = -\infty$



(g) $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$



(h) $\lim_{x\to+\infty}(-\frac{x^2}{2}) = -\infty$

FIGURE 45.2 – Limite d'une fonction en $+\infty$

Remarque 45.5. Il existe des fonctions qui n'ont pas de limite en $+\infty$, c'est le cas, par exemple, pour la fonction sinus et cosinus.

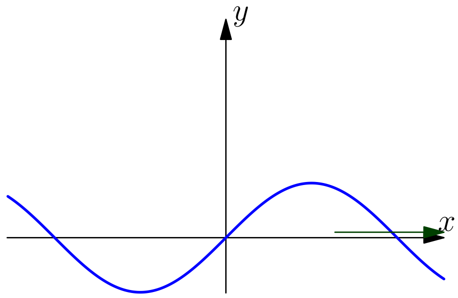


FIGURE 45.3 – La fonction sinus n'a pas de limite en $+\infty$

2.2 Limite d'une fonction en $-\infty$

Définition 45.6

Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle du type $]-\infty\,, a[$. Lorsque $-x$ prend des valeurs de plus en plus grandes, si les nombres $f(x)$ deviennent de plus en plus

grands, on dit que f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ et on note

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

proches d'un réel ℓ, on dit que f a pour limite ℓ en $-\infty$ et on note

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$$

grands en valeurs absolue mais négatifs, on dit que f a pour limite $-\infty$ et $-\infty$ et on note

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Exemples 45.7.

1. $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$,
2. $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$,
3. $\lim_{x\to-\infty}(2 + \frac{1}{x}) = 2$,
4. $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$.

2.3 Limite d'une fonction en un réel a

Définition 45.8

Soit f une fonction définie sur un domaine D contenant a ou tel que a soit une borne de D. Lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a, si les nombres $f(x)$ deviennent de plus en plus

grands, on dit que f a pour limite $+\infty$ en a et on note

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty.$$

proches d'un réel ℓ, on dit que f a pour limite ℓ en a et on note

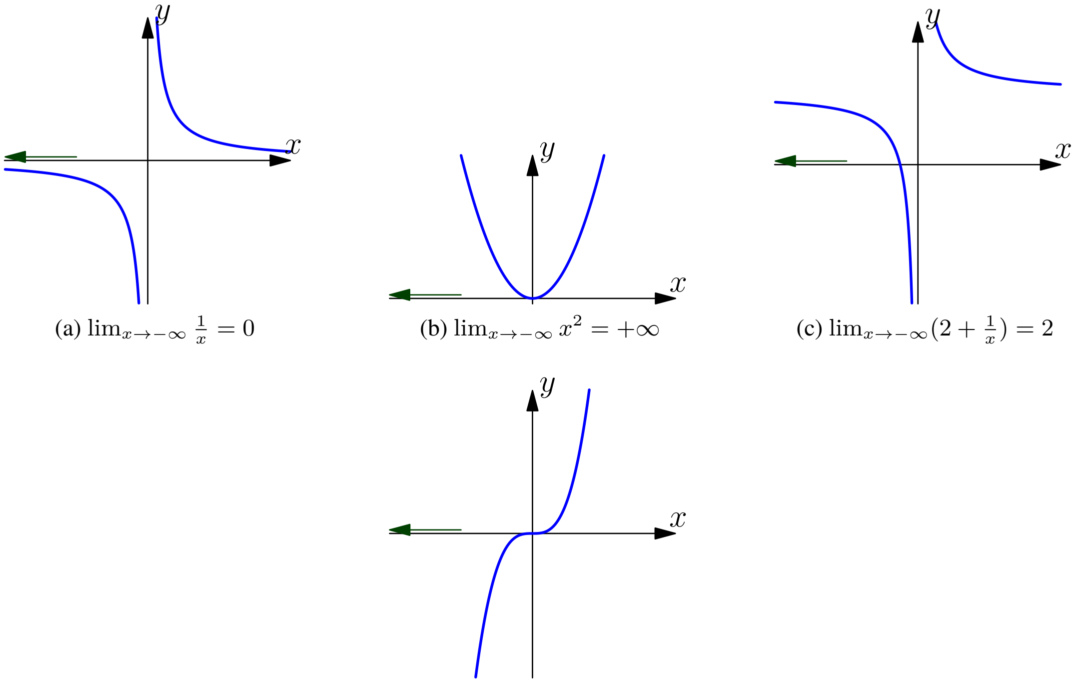
$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell.$$

grands en valeur absolue mais négatifs, on dit que f a pour limite $-\infty$ en a et on note

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty.$$

Exemples 45.9.

1. $\lim_{x\to0} \frac{1}{x^2} = +\infty$,

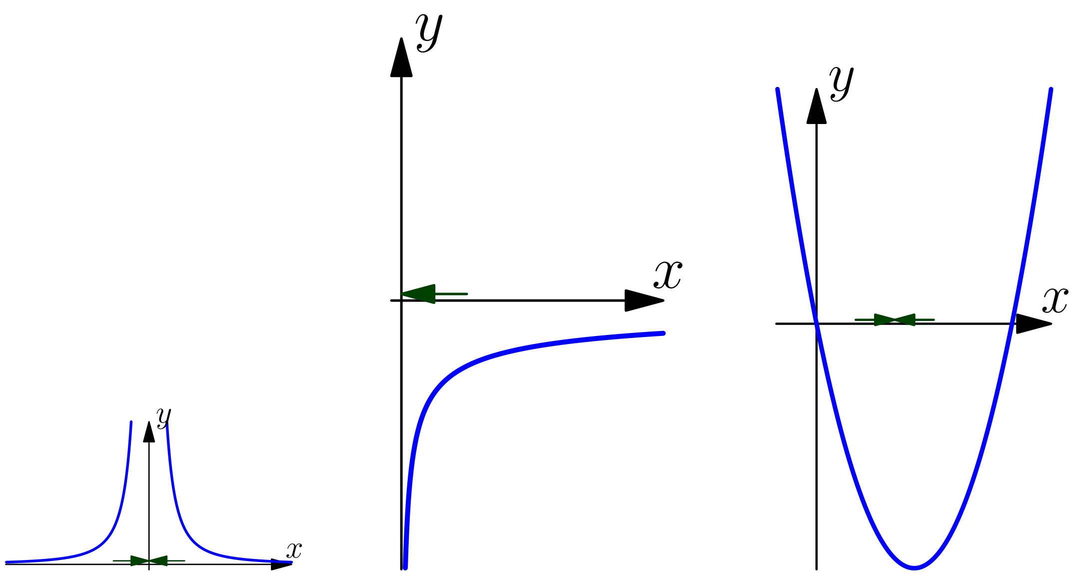


(a) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ (b) $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ (c) $\lim_{x\to-\infty}(2+\frac{1}{x}) = 2$

(d) $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

FIGURE 45.4 – Limite d'une fonction en $-\infty$

2. $\lim_{x\to 0} -\frac{1}{\sqrt{x}} = -\infty$,
3. $\lim_{x\to 2}(x^2 - 5x) = -6$.



(a) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ (b) $\lim_{x\to 0} -\frac{1}{\sqrt{x}} = -\infty$ (c) $\lim_{x\to-\infty}(x^2 - 5x) = -6$

FIGURE 45.5 – Limite d'une fonction en un point a

Remarque 45.10. Il existe des fonctions qui n'ont pas de limite en a ; c'est le cas de la fonction inverse, qui n'a pas de limite en 0.

2.4 Limite d'une fonction à droite (ou à gauche)

La fonction inverse n'a pas de limite en 0, car si x s'approche de 0, les nombres $\frac{1}{x}$ ne rentrent pas dans le cadre de la définition 45.8. Cependant, on peut parler de limite « à droite » et de limite « à gauche » : on note alors 0^+ pour signifier que x s'approche de 0 par valeur supérieure et 0^- pour signifier que x s'approche de 0 par valeur inférieure.

Ainsi, on a :

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

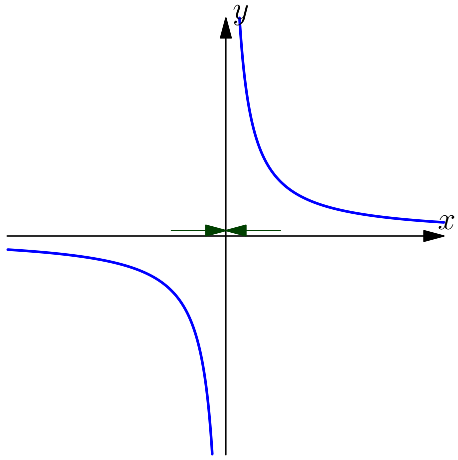


FIGURE 45.6 – Limite à gauche et à droite

3 Opérations sur les limites

Propriété 45.11 Les tableaux 45.1, 45.2 et 45.3 permettent de donner, dans certains cas, la limite de la somme et du produit de deux fonctions f et g, ainsi que la limite de l'inverse d'une fonction f lorsqu'on connaît la limite de deux fonctions. Les limites peuvent être des limites en $+\infty$, en $-\infty$, en x_0, des limites à droite ou à gauche, mais bien entendu toutes les limites utilisées doivent être de même nature.

Si f a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $f+g$ a pour limite	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	forme ind.

TABLE 45.1 – Limite d'une somme

Si f a pour limite	ℓ	$\ell' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
Si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $f+g$ a pour limite	$\ell \times \ell'$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$ (suivant les signes)	forme ind.

TABLE 45.2 – Limite d'un produit

Si f a pour limite	$\ell' \neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\frac{1}{f}$ a pour limite	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0

TABLE 45.3 – Limite d'un inverse

Remarques 45.12.

1. Les résultats des deux tableaux précédents permettent de trouver les résultats pour un quotient.
2. Les formes indéterminées sont de deux types exprimés sous forme abrégée par : $+\infty - \infty$, $0 \times +\infty$.

Exemples 45.13.

1. $\lim_{x\to+\infty}(x^3+x+15) = +\infty$ car $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}(x+15) = +\infty$.
2. $\lim_{x\to+\infty}(-2x(x+3)) = -\infty$ car $\lim_{x\to+\infty}(-2x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}(x+3) = +\infty$.
3. $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x(x-2)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{x-2} = -\infty$ car $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to 0^+}(x-2) = -2$.

Propriété 45.14

- La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ ou en $-\infty$ est égale à la limite de son terme de plus haut degré.
- La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ ou en $-\infty$ est égale à la limite du quotient des termes des plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Exemples 45.15.

1. $\lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} -3x^3+2x^2+3x-5 = +\infty$ car $\lim_{x\to-\infty} -3x^3 = +\infty$.
2. $\lim_{x\to+\infty} R(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{3x+2} = +\infty$ car $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{3} = +\infty$.

4 Asymptotes

4.1 Asymptote horizontale

Définition 45.16

Asymptote horizontale
Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = k$ (resp $\lim_{x\to-\infty} f(x) = k$) on dit que la droite d'équation $y = k$ est une asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ (resp. en $-\infty$).

Exemple 45.17. $\lim_{x\to+\infty}(2+\frac{1}{x}) = 2$, donc la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = 2+\frac{1}{x}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ en $+\infty$.

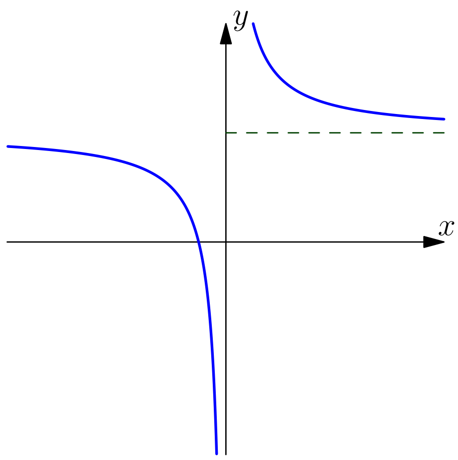


FIGURE 45.7 – La courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto 2+\frac{1}{x}$ admet une tangente horizontale d'équation $y = 2$ en $+\infty$

4.2 Asymptote verticale

Définition 45.18

Asymptote verticale
Si une fonction f admet une limite infinie à gauche ou à droite en un réel a, on dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$.

Exemple 45.19. $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$ (et $\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$) donc la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x-2}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

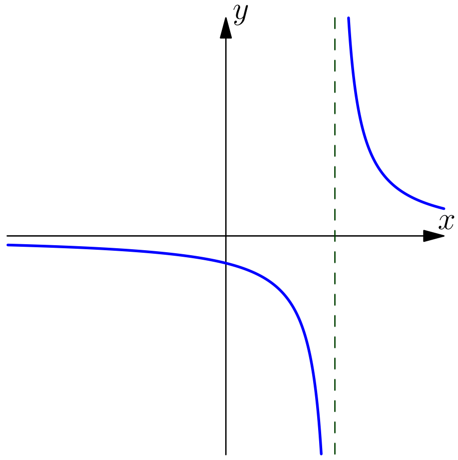


FIGURE 45.8 – La courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x+2}$ admet une tangente verticale d'équation $x = 2$

5 Théorème de comparaison

5.1 Théorème de majoration, minoration

Théorème 45.20

Soit f, u et v des fonctions définies sur un intervalle du type $[a, +\infty[$.

- Si, pour x assez grand, on a $f(x) \geq u(x)$ et si $\lim_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$ alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- Si, pour x assez grand, on a $f(x) \leq v(x)$ et si $\lim_{x\to+\infty} v(x) = -\infty$ alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Il existe des théorèmes analogues pour des limites en $-\infty$ et en a.

Exemples 45.21.

1. Soit $f(x) = -x + \sin(x)$. On calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. On pose $v(x) = -x + 1$. Comme, pour tout x, $\sin x \leq 1$, on a, pour tout x, $f(x) \leq v(x)$. Or,
$$\lim_{x\to+\infty} v(x) = -\infty$$
donc
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$
2. Soit $g(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}$. Calculer $\lim_{x\to0} g(x)$. On pose $u(x) = \frac{1}{x^2}$. Comme, pour tout x, on a $1 \leq \sqrt{1+x^2}$, on a, pour tout x, $g(x) \geq u(x)$. Or,
$$\lim_{x\to0} u(x) = +\infty$$
, donc
$$\lim_{x\to0} g(x) = +\infty.$$

5.2 Théorème d'encadrement ou théorème des « gendarmes »

Théorème 45.22

Soient f, u et v des fonctions définies sur un intervalle du type $[a, +\infty[$. Si, pour x assez grand, on a $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ et si
$$\lim_{x\to+\infty} u(x) = \lim_{x\to+\infty} v(x) = \ell$$
alors
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell.$$

Démonstration. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Pour tout intervalle ouvret U contenant ℓ :

– Puisque $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, il existe un voisinage V_1 de a tel que pour tout x de V_1, $f(x) \in U$.
– Puisque $\lim_{x\to a} h(x) = \ell$, il existe un voisinage V_2 de a tel que pour tout x de V_2, $h(x) \in U$.
– Enfin, d'après la propriété d'encadrement, il existe un voisinage V_3 de a tel que, pour tout x de V_3, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

L'intersection de trois voisinages est un voisinage donc $V = V_1 \cap V_2 \cap V_3$ est un voisinage de a et pour tout a de V, on a :

$$\begin{cases} f(x) \in U \\ h(x) \in U \\ f(x) \leq g(x) \leq h(x) \end{cases}$$

d'où il vient que pour tout voisinage U contenant ℓ, il existe un voisinage V tel que $x \in V$ implique $g(x) \in U$. Ce qui prouve que :

$$\lim_{x\to a} g(x) = \ell.$$

□

Il existe des théorèmes analogues pour des limites en $-\infty$ et en a.

Exemples 45.23. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = 1 + \frac{\sin x}{x}.$$

On veut calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. On pose :

$$u(x) = 1 - \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad v(x) = 1 + \frac{1}{x}.$$

Comme, pour tout $x \neq 0$, on a :

$$-1 \leq \sin x \leq 1,$$

on en déduit que, pour tout $x \neq 0$:

$$u(x) \leq f(x) \leq v(x).$$

Or

$$\lim_{x\to+\infty} u(x) = \lim_{x\to+\infty} v(x) = 1,$$

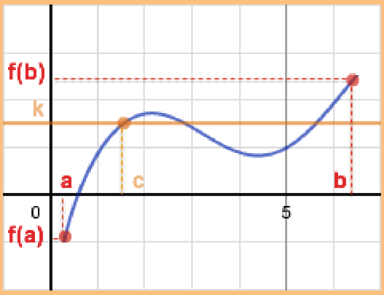
donc :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$

LEÇON

46

Théorème des valeurs intermédiares



Niveau : Terminale S

Prérequis : continuité d'une fonction, suites adjacentes

1 Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 46.1

Théorème des valeurs intermédiaires
Soient I un intervalle, a et b dans I tels que $a < b$. Soit f une application *continue* sur l'intervalle I. Soit λ, un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe (au moins) un réel c dans $[a\,,b]$ tel que $f(c) = \lambda$.

Développement

Démonstration du théorème 67.9. Supposons $f(a) < f(b)$. Nous allons construire deux suites adjacentes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par l'algorithme suivant :

- Si le milieu m de l'intervalle $[a\,,b]$ est tel que $f(m) \geq m$ alors on pose $a_1 = a$ et $b_1 = m$.
- Sinon, on pose $a_1 = m$ et $b_1 = b$.

On recommence le découpage :

- Si le milieu m de l'intervalle $[a_1\,,b_1]$ est tel que $f(m) \geq \lambda$ alors on pose $a_2 = a_1$ et $b_2 = m$.
- Sinon, on pose $a_2 = m$ et $b_2 = b_1$.

On a ainsi :

$$a \leq a_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq b_1 \leq b \quad \text{et} \quad f(a_2) \leq \lambda \leq f(b_2).$$

En réitérant le procédé, on construit ainsi une suite de segments emboîtés [1] :

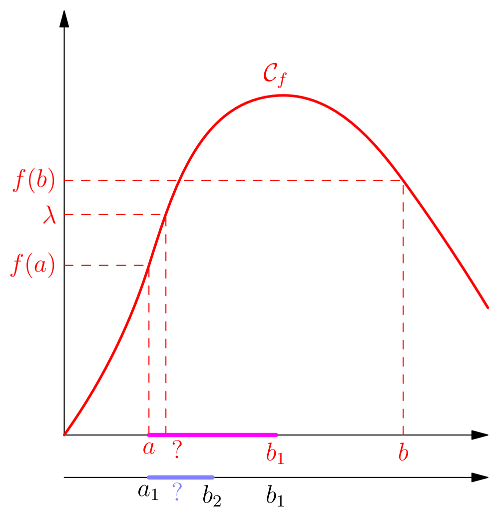


FIGURE 46.1 – Illustration de la suite construite

$$[a\,,b] \supset [a_1\,,b_1] \supset \cdots \supset [a_n\,,b_n] \supset \cdots.$$

De plus, par construction, la longueur de $[a_n\,,b_n]$ est $\frac{b-a}{2^n}$. Les segments $[a_n\,,b_n]$ ont donc des longueurs qui tendent vers 0. Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont donc adjacentes.
Notons c leur limite commune (ce réel c est dans l'intervalle $[a\,,b]$). Montrons que $f(c) = \lambda$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f(a_n) \leq \lambda \leq f(b_n)$$

et par passage à la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n)\lambda \leq \lim_{n\to+\infty} f(b_n).$$

Or, f est continue en c donc :

$$f(c) \leq \lambda \leq f(c)$$

et ainsi $f(c) = \lambda$. On a bien montré qu'il existe un réel c dans $[a\,,b]$ tel que $f(c) = \lambda$. □

1. Il s'agit d'une méthode de *dichotomie*.

Remarques 46.2.

a. Le théorème des valeurs intermédiaires nous dit que l'équation $f(x) = \lambda$ $(f(a) < \lambda < f(b))$ admet au moins une solution dans $[a\,, b]$.

b. L'hypothèse de continuité est *indispensable* dans le théorème. Essayer d'applique le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction « partie entière » avec $a = 0$, $b = 1$ et $\lambda = \frac{1}{2}$...

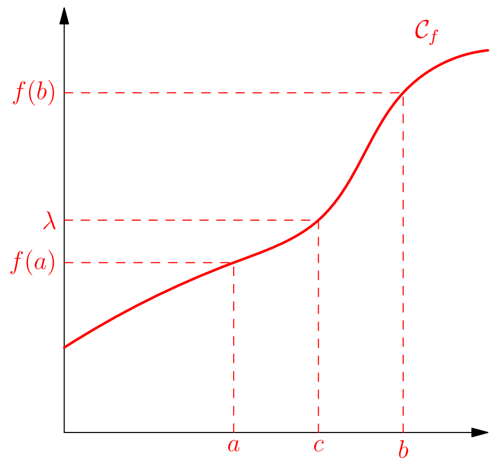


FIGURE 46.2 – Cas d'une fonction monotone

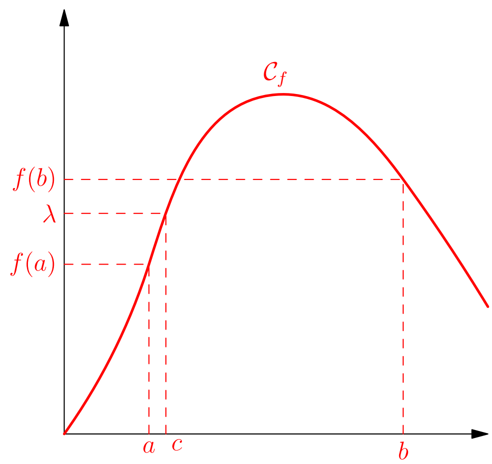


FIGURE 46.3 – Cas d'une fonction non monotone

Exemple 46.3. Tout polynôme de polynôme P (à coefficients réels) de degré impair admet (au moins) une racine réelle. En effet, comme le degré de P est impair, on a :

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty.$$

En conséquence, il existe un réel $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x < a$, on ait $P(x) < 0$ et un réel $b \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > b$, on ait $P(x) > 0$. Comme P est une fonction continue, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer l'existence d'un réel $c \in \left]a\,, b\right[$ tel que $P(c) = 0$.

Remarque 46.4. Le théorème des valeurs intermédiaires n'admet pas de réciproque. Une fonction f peut très bien vérifier la propriété des valeurs intermédiaires sans être continue. Considérer par exemple la fonction f définie sur $I = \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ x_0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{où } x_0 \in [-1\,, 1].$$

On peut montrer (en exercice) que la fonction f est non continue en 0 et vérifie pourtant la propriété des valeurs intermédiaires. En effet, soient a et b deux réels avec $a < b$.

– Si a et b sont non nuls et de même signe, alors c'est immédiat (puisque dans ce cas f est continue sur $[a\,,b]$).
– Si $a = 0$ (et $b > 0$) alors on prend un réel λ compris entre $f(a) = x_0$ et $f(b)$. Comme $\lambda \in [-1\,,1]$, on peut toujours trouver un réel $X \geq \frac{1}{b}$ tel que $\sin X = \lambda$. En posant $x = \frac{1}{X}$, il vient bien $f(x) = \lambda$ avec $x \in [a\,,b]$.
– On raisonne de même si on a un intervalle $[a\,,0]$ ou $[a\,,b]$ lorsqu'il contient 0.

2 Applications

2 1 Le théorème du point fixe

Le théorème des valeurs intermédiaires permet de démontrer un petit théorème de point fixe.

Théorème 46.5

Théorème du point fixe
Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a\,,b]$. Si $f(I) \subset I$ alors f admet (au moins) un point fixe sur I. Autrement dit, il existe (au moins) un réel x de I tel que $f(x) = x$.

Développement

Démonstration du théorème 46.5. Considérons la fonction g définie sur I par :

$$g(x) = f(x) - x.$$

Montrons que $0 \in g(I)$. On a :

$$g(a) = f(a) - a \in g(I) \quad \text{et} \quad g(b) = f(b) - b \in g(I).$$

Or, comme $f(I) \subset I$, on a $f(a) \geq a$ et $f(b) \leq b$, c'est-à-dire $g(a) \leq 0$ et $g(b) \geq 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $x \in I$ tel que $f(x) = 0$, c'est-à-dire $f(x) = x$. □

2 2 Image d'un intervalle par une application continue

Corollaire 46.6

Image d'un intervalle par une application continue
Soit f une application *continue* sur un intervalle I. Alors [a] $f(I)$ est un intervalle.

a. $f(I) = \{f(x),\ x \in I\}$.

Développement

Démonstration du corollaire 46.6. Soient y_1 et y_2 dans $f(I)$ avec $y_1 \leq y_2$. Il s'agit de montrer tout élément λ de $[y_1\,,y_2]$ est élément de $f(I)$. Comme y_1 et y_2 sont dans $f(I)$, il existe a et b dans I tels que :

$$f(a) = y_1 \quad \text{et} \quad f(b) = y_2.$$

Comme I est un intervalle, on a : $[a\,,b] \subset I$. Comme f est continue sur $[a\,,b]$ (puisque $[a\,,b] \subset I$), on a, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $\lambda \in [y_1\,,y_2]$, il existe $c \in [a\,,b]$ tel que $f(c) = \lambda$. D'où : $\lambda \in f(I)$. □

Remarque 46.7. Si f n'est pas continue, il se peut très bien que $f(I)$ ne soit pas un intervalle : avec $f(x) = \mathrm{E}\,(x)$, $\mathrm{E}\,(x)$ désigant la partie entière de x, on a $f([0\,,1]) = [0\,,1]$.

Exemples 46.8.

a. Soit $f(x) = x^2$ pour $x \in \mathbb{R}$.
– Image de l'intervalle ouvert $I =]1\,,2[$: $f(I) =]1\,,4[$.

- Image de l'intervalle ouvert $J =]-1\,,2[$: $f(J) = [0\,,4[$.
- Image de l'intervalle fermé $H = [-2\,,2]$: $f(H) = [0\,,4]$.
- Image de l'intervalle semi-ouvert $K = [0\,,+\infty[$, $f(K) = K$.

b. Soit $g(x) = \sin x$ pour $x \in \mathbb{R}$.

- Image de l'intervalle ouvert $I =]0\,,\pi[$, $g(I) =]0\,,1]$.
- Image de l'intervalle ouvert $J =]0\,,2\pi[$: $g(J) = [-1\,,1]$.

c. Soit $h(x) = \frac{x}{1+|x|}$ pour $x \in \mathbb{R}$. On veut déterminer $h(\mathbb{R})$. Comme $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$h(-x) = \frac{-x}{1+|-x|} = -\frac{x}{1+|x|} = -h(x),$$

ce qui prouve que h est impaire. Montrons que h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Soient x et y dans $\mathbb{R}_+$. Supposons $0 \leq x < y$. Alors :

$$h(y) - h(x) = \frac{y}{1+y} - \frac{x}{1+x} = \frac{y(1+x) - x(1+y)}{(1+x)(1+y)} = \frac{y-x}{(1+x)(1+y)}.$$

Or, $y - x > 0$ d'où :

$$h(x) - h(y) > 0 \Leftrightarrow h(x) < h(y).$$

Ceci prouve la stricte croissance de h dans $\mathbb{R}_+$. Comme h est impaire, on en déduit qu'elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1+x} = 1,$$

et, h étant impaire :

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = -1.$$

Montrons que h est bornée par -1 et 1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Il est clair que $0 \leq x \leq 1 + x$. Comme $1 + x \geq 0$, on peut diviser par $1 + x$:

$$0 \leq \frac{x}{1+x} \leq 1$$

et comme $x = |x|$ (puisque $x \geq 0$) :

$$0 \leq h(x) \leq 1.$$

Comme h est impaire, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$-1 \leq h(x) \leq 1.$$

Donc h est bornée par -1 et 1 (mais elle n'atteint pas ses bornes). On a donc $h(\mathbb{R}) \in]-1\,,1[$. Réciproquement soit $y \in]-1\,,1[$. Comme h est continue (quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas), le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer l'existence d'un réel $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = y$. Donc $]-1\,,1[\subset h(\mathbb{R})$. D'où :

$$h(\mathbb{R}) =]-1\,,1[.$$

2 3 Image d'un segment par une application continue

La démonstration est hors programme, on pourra admettre le théorème lors de la présentation du plan.

Théorème 46.9

Image d'un segment par une application continue

Soit f une application continue sur un segment I et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors $f(I)$ est un segment.

Pour démontrer le théorème 46.9, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 46.10

Soit f une fonction numérique définie sur un segment $[a\,,b]$. Si f est continue sur $[a\,,b]$, f est bornée sur $[a\,,b]$.

Développement

Démonstration du lemme 46.10. On suppose que f est non bornée et on reprend la démonstration du théorème des valeurs intermédiaires. On suppose que c est la limite commune des suites (a_n) et (b_n) construite dans cette démonstration. Or f est non bornée sur $[a_n\,,b_n]$, on peut donc construire une suite réelle $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout n, $c_n \in [a_n\,,b_n]$ et $|f(c_n)| \geq n$. La première relation nous montre que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers c ce qui est contradictoire avec la seconde relation si on suppose f continue sur $[a\,,b]$. □

Démonstration du théorème 46.9. Soit $[a\,,b]$ un segment de I. D'après le lemme précédent, il existe deux réels m et M tel que $f([a\,,b])$ soit l'un des intervalles $]m\,,M[$, $[m\,,M[$, $]m\,,M]$, $[m\,,M]$, On justifiera de l'impossibilité des trois premières formes en introduisant les fonctions

$$x \mapsto \frac{1}{f(x)-m} \quad \text{ou} \quad x \mapsto \frac{1}{M-f(x)}$$

dont on observera qu'elles sont définies et continues sur $[a\,,b]$ sans y être bornées. □

2 4 Théorème de bijection

Le théorème de bijection est une particularisation du théorème des valeurs intermédiaires. On ajoute une condition de plus pour la fonction f : la stricte monotonie.

Théorème 46.11

Théorème de bijection

Soit f une application *continue* et *strictement montone* sur un intervalle I. Soient a et b dans I avec $a < b$. Soit λ un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe un *unique* c dans $[a\,,b]$ tel que $f(c) = \lambda$.

Démonstration du théorème 46.11.

Existence L'existence a déjà été prouvée : c'est le théorème des valeurs intermédiaires.

Unicité L'unicité découle de la stricte monotonie. On va la démontrer dans le cas où f est strictement croissante (le cas strictement décroissante) est analogue. Supposons qu'il existe deux réels c et c' dans $[a\,,b]$ tels que $f(c) = \lambda$ et $f(c') = \lambda$. Si $c < c'$ alors par stricte croissante de f :

$$f(c) < f(c').$$

Ce qui contredit la condition $f(c) = f(c') = \lambda$. Si $c > c'$ alors par stricte croissante de f :

$$f(c) > f(c').$$

Ce qui contredit la condition $f(c) = f(c') = \lambda$. Finalement $c = c'$, ce qui prouve l'unicité.

□

Remarque 46.12. En résumé, lorsque f est une fonction définie sur un intervalle I, et lorsque $\lambda \in f(I)$, l'hypothèse de continuité de f nous fournit l'existence d'au moins une solution (dans I) de l'équation $f(x) = \lambda$. Si l'on ajoute l'hypothèse de stricte monotonie de f, nous sommes alors assurés de l'unicité de cette solution.

Dans le cas où f est une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I, on a donc moyen de déterminer l'image d'un intervalle $[a\,,b]$:

– $f([a\,,b]) = [f(a)\,,f(b)]$ lorsque f est strictement croissante ;
– $f([a\,,b]) = [f(b)\,,f(a)]$ lorsque f est strictement décroissante.

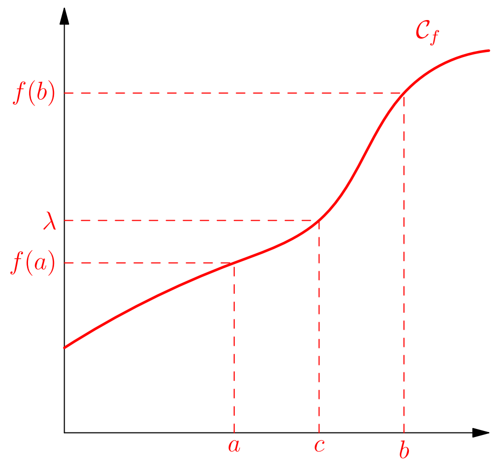


FIGURE 46.4 – Si l'on ajoute l'hypothèse de stricte monotonie de f, nous sommes alors assurés de l'unicité de cette solution.

Ce résultat s'étend aux intervalles non bornés en remplaçant les valeurs de f par ses limites.

Corollaire 46.13

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [a\,,b]$. Si $f(a)f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans I.

Développement

Démonstration du corollaire 46.13. Si $f(a)f(b) < 0$, cela signifie que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires. Autrement dit, 0 est intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$. On conclut avec le théorème de bijection. $\square$

Exemple 46.14. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (1+x)^3 + x.$$

On démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-1\,,0]$. La fonction g est clairement continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (comme somme et composée de fonctions qui le sont). De plus :

$$g(-1) = -1 < 0 \quad \text{et} \quad g(0) = 1 > 0.$$

Le réel $\lambda = 0$ est donc bien compris entre $g(-1)$ et $g(0)$. On en déduit que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-1\,,0]$:

x	$-\infty$	-1	α	0	$+\infty$
$g'(x)$			$+$		
g		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

On donne maintenant un encadrement de α d'amplitude 10^{-1} à l'aide d'un petit tableau de valeurs :

x	$-0,9$	$-0,8$	$-0,7$	$-0,6$	$-0,5$	$-0,4$	$-0,3$	$-0,2$	$-0,1$
$g(x)$	$-0,899$	$-0,792$	$-0,673$	$-0,536$	$-0,375$	$-0,184$	$0,043$	$0,312$	$0,629$

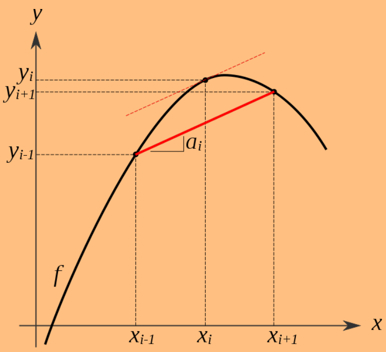
On en déduit :

$$-0,4 < \alpha < -0,3.$$

LEÇON

47

Dérivation



Niveau : Terminale S

Prérequis : continuité en un point d'une fonction, limite en un point d'une fonction

1 Dérivabilité en un point

Théorème 47.1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit x_0 un élément de I. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe un réel ℓ tel que l'accroissement moyen ait pour limite ℓ :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \ell.$$

(ii) Il existe un réel ℓ et une fonction φ tels que pour tout h tel que $x_0+h \in I$:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \ell h + h\varphi(h) \quad \text{où } \lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0.$$

Développement

Démonstration du théorème 47.1.

(i) ⇒ (ii) Il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \ell.$$

On pose, pour $h \neq 0$:

$$\varphi(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - \ell.$$

Par hypothèse, on a ainsi :

$$\lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0.$$

De plus :

$$h\varphi(h) = f(x_0+h) - f(x_0) - \ell h.$$

D'où la condition (ii) :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \ell h + h\varphi(h) \quad \text{où } \lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0.$$

(ii) ⇒ (i) Supposons :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \ell h + h\varphi(h) \quad \text{où } \lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0.$$

Pour $h \neq 0$, on a :

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \ell + \varphi(h)$$

et comme $\lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$, il vient :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \ell.$$

D'où la condition (i).

□

Définition 47.2

Accroissement moyen

La quantité $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ s'appelle *l'accroissement moyen de f en x_0*. Graphiquement, elle représente le coefficient directeur de la sécante à la courbe $\mathcal{C}_f$ de f entre les points d'abscisses x_0 et x_0+h.

La condition (i) du théorème peut donc aussi se traduit par l'accroissement moyen de f en x_0 admet une limite *finie*.

Définition 47.3

Dérivabilité

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit x_0 un élément de I. Lorsque l'une des deux conditions du théorème ci-dessus est vérifiée, on dit que f est *dérivable* en x_0. Le nombre ℓ s'appelle alors *le nombre dérivé de f en x_0* et on le note $f'(x_0)$.

Exemples 47.4.

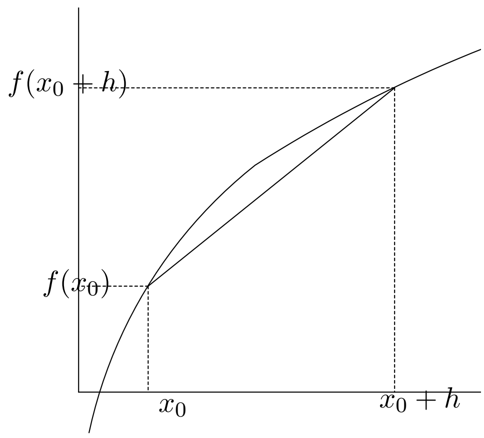


FIGURE 47.1 – Accroissement moyen de f

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}$. On étudie la dérivabilité en 0. Pour cela on évalue la limite de l'accroissement moyen de f en $x_0 = 0$:
$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}.$$
D'où :
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty.$$
La limite n'est pas finie. La fonction « racine carrée » n'est donc pas dérivable en 0.
2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$. On étudie la dérivabilité de cette fonction en 0. Nous avons, pour tout $h \neq 0$:
$$\frac{|0+h| - |0|}{|h|} = \frac{|h|}{h}.$$
Or la quantité $\frac{|h|}{h}$ n'a pas de limite en 0. En effet :
$$\lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} -\frac{h}{h} = -1.$$
L'accroissement moyen de la fonction f n'a pas de limite en 0. Par conséquent la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

2 Différentes interprétations du nombre dérivé

2.1 Interprétation graphique du nombre dérivé

Il représente le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x_0.
Le coefficient directeur de la sécante (AB) est :
$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Lorsque h tend vers 0 :

- le point B tend vers le point A
- la droite (AB) tend alors vers la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A
- l'accroissement moyen de f en x_0 tend vers $f(x_0)$. A la limite le point B est en A, la droite (AB) est tangente à $\mathcal{C}_f$ en A et son coefficient directeur est $f'(x_0)$.

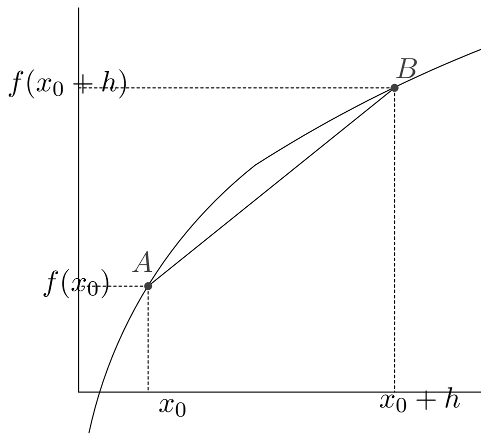


FIGURE 47.2 – Accroissement moyen de f

2.2 Interprétation numérique du nombre dérivé

On a vu que lorsque f est dérivable en x_0, on a :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varphi(x - x_0) \quad \text{où } \lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0.$$

Ainsi lorsque x est voisin de x_0, on a l'approximation :

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

L'application

$$x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

s'appelle *approximation affine de f en x_0*.

2.3 Détermination d'une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse x_0

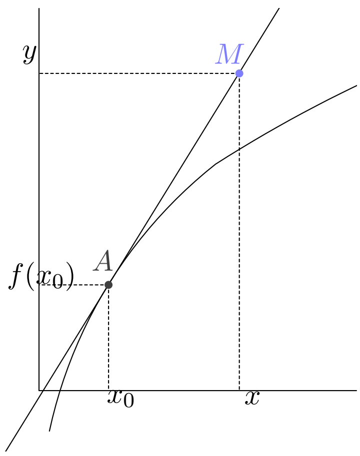


FIGURE 47.3 – Tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$

La méthode est classique : soit $M(x, y)$ un point quelconque de cette tangente T distinct de A. Le coefficient directeur de T est :

$$f'(x_0) = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0}.$$

D'où une équation de T :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

On constate que la tangente T n'est autre que la représentation graphique de l'approximation affine de f (en x_0).

Exemple 47.5. On se donne la fonction f définie sur tout $\mathbb{R}$ par :

$$x \mapsto f(x) = -x^2 + 3.$$

On cherche une équation de la tangente T au point d'abscisse $x_0 = 2$. On calcule $f'(2)$:

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{-(2+h)^2+3-(-2^2+3)}{h} = \frac{-4h-h^2}{h} = -4-h$$

donc

$$f'(2) = \lim_{h\to 0}(-4-h) = -4.$$

L'équation de T est donc :

$$y = f(2)+f'(2)(x-2) = -1-4(x-2) = -4x+7.$$

2 4 Interprétation cinématique du nombre dérivé

Supposons ici que f représente la loi horaire d'un mobile en déplacement. La vitesse moyenne du mobile entre les instants t_0 et t_0+h est alors :

$$\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}.$$

La vitesse instantanée du mobile au moment t_0 est donc donnée par :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} = f'(t_0).$$

Si f est une loi horaire d'un mobile en mouvement, le nombre dérivé en t_0 représente la vitesse instantanée du mobile à l'instant t_0.

3 Fonction dérivée

Définition 47.6

Fonction dérivée

Lorsqu'une fonction f admet un nombre dérivé en tout point x_0 d'un intervalle I, on dit que f est *dérivable sur* I. On définit alors la *fonction dérivée*, notée f', qui à tout point x_0 de I associe le nombre dérivé $f'(x_0)$.

Voici un théorème fondamental :

Théorème 47.7

Toute fonction f dérivable sur un intervalle I est continue sur I.

Développement

Démonstration du théorème 47.7. Soit $x_0 \in I$. Puisque f est dérivable en x_0 :

$$f(x_0+h) = f(x_0)+f'(x_0)h+h\varphi(h) \quad \text{où } \lim_{h\to 0}\varphi(h) = 0.$$

On pose $x = x_0+h$, il vient alors :

$$f(x) = f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+(x-x_0)\varphi(x-x_0) \quad \text{où } \lim_{x\to x_0}\varphi(x-x_0) = 0.$$

Par passage à la limite lorsque x tend vers x_0, on obtient :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}(f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+(x-x_0)\varphi(x-x_0)).$$

Or $\lim_{x\to x_0}(x-x_0)f'(x_0) = 0$ car $f'(x_0)$ est un nombre fini et :

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x-x_0) = 0.$$

D'où :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

La fonction f est donc continue en x_0. Ce raisonnement étant valable pour tout x_0 de I, on en déduit que f est continue sur I. □

Remarques 47.8.

1. La réciproque du théorème 47.7 est fausse. En effet, il existe des fonctions continues en un point x_0 et non dérivables en x_0. C'est le cas, par exemple, de la fonction « valeur absolue ».
2. Une fonction f peut être dérivable (et donc continue) sans que sa dérivée f' soit continue.

Exemple 47.9. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On montre que f est continue en 0. On a, pour tout réel $x \neq 0$:

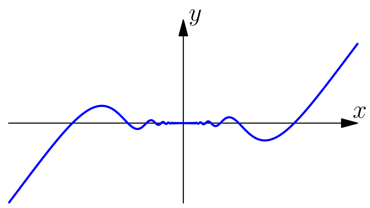


FIGURE 47.4 – Représentation graphique de la fonction $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$

$$\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1.$$

Donc :

$$x^2 \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq x^2.$$

D'après le théorème de comparaison des limites (en 0), on en déduit :

$$\lim_{x \to 0} |f(x)| = 0$$

puisque $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$. Donc :

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0).$$

Donc f est continue en 0. On montre que f est dérivable en 0. Pour tout réel $x \neq 0$, on a :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin \frac{1}{x}.$$

Or :

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Donc :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0.$$

Ce qui signifie que f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$. Cependant f' n'est pas continue en 0. En effet, pour tout $x \neq 0$, on a :

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \left(-\frac{1}{x^2} \right) \cos \frac{1}{x} = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

Nous savons que $\lim_{x \to 0} 2x \sin \frac{1}{x} = 0$, mais la quantité $\cos \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0. Donc f' n'a pas de limite en 0, ce qui signifie qu'elle n'est pas continue en 0.

Remarque 47.10. Si f est dérivable en x_0, alors l'application « coefficient directeur » φ définie par :

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

si $x \neq x_0$ et $\varphi(x_0) = f'(x_0)$ est continue en x_0 puisque

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = f'(x_0).$$

Théorème 47.11

Lien entre le signe de la dérivée et les variations de la fonction

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

1. f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$ sur I.
2. f est croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si $f' \geq 0$ (resp. $f' \leq 0$) sur I.
3. f est strictement croissante (resp. strictement décroissante sur I si et seulement si
   - $f' \geq 0$ sur I (resp. $f' \leq 0$)
   - L'ensemble $\{x \in I,\ f'(x) = 0\}$ ne contient aucun intervalle d'intérieur non vide.

Remarques 47.12.

1. Si $f' > 0$ sur I, sauf en des points isolés où elle s'annule, on a quand même la stricte croissance de f sur I,
2. il n'y a pas équivalence entre les conditions « $f' > 0$ » et « f est strictement croissante sur I ».

On applique les mêmes remarques pour « $f' < 0$ sur I ».

Exemples 47.13.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. On a $f'(x) = 3x^2$. La dérivée est toujours strictement positive sauf en 0 où elle s'annule. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Cet exemple montre donc qu'une fonction strictement croissante sur un intervalle I n'a pas nécessairement une dérivée strictement positive sur I.
2. On considère maintenant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} (x+1)^3 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } x \in [-1\,,1] \\ (x-1)^3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On a

$$g'(x) = \begin{cases} 3(x+1)^2 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } x \in [-1\,,1] \\ 3(x-1)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La dérivée g' est toujours positive. De plus, elle est nulle sur tout intervalle $[-1\,,1]$. Par consé-

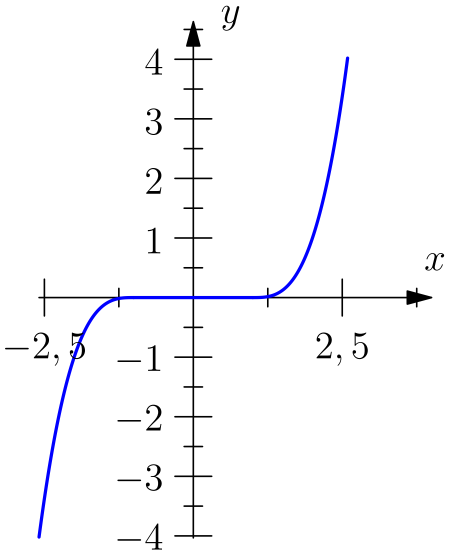


FIGURE 47.5 – Représentation graphique de la fonction g

quent, la fonction g est croissante (non strictement) sur $\mathbb{R}$.

3. Soit h la fonction définie sur $]-2\,,-1[\,\cup\,]1\,,2[$ par

$$h(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in \,]-2\,,-1[\\ 1 & \text{si } x \in \,]1\,,2[\end{cases}$$

On a clairement $h' = 0$ sur $]-2\,,-1[\cup]1\,,2[$. Cependant h n'est pas constante, d'où la nécessité de la condition « I est un intervalle » dans le théorème précédent.

Le théorème suivant donne une *condition nécessaire* pour que f ait un extremum local en x_0 :

Théorème 47.14

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si f admet un extremum local en un point x_0 intérieur à I alors $f'(x_0) = 0$.

Remarques 47.15. Avant de lire la démonstration, on donne quelques explications :

1. Si a et b représentent les extrémités de l'intervalle I (avec éventuellement $a = -\infty$ et/ou $b = +\infty$), l'intérieur de I est l'intervalle ouvert $]a\,,b[$.
2. Un extremum local est soit un maximum local, soit un minimum local. Une fonction f admet un maximum local en x_0, s'il existe un intervalle ouvert J du type $]x_0 - \varepsilon\,, x_0 + \varepsilon[$ (avec $\varepsilon > 0$) tel que pour tout x de J, on ait $f(x) \leq f(x_0)$. (On définit de façon analogue un minimum local). Une fonction peut avoir plusieurs maxima sur un même intervalle I. Le plus grand d'entre eux est appelé maximum global de f sur I.

Développement

Démonstration du théorème 47.14. Par hypothèse, f est dérivable en x_0 et :

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Comme x_0 est intérieur à I, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x_0 - \varepsilon\,, x_0 + \varepsilon[$ soit contenu dans I. Supposons que l'extremum local de f soit un maximum local. Pour $h \in \,]0\,,\varepsilon[$, on a :

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0.$$

Pour $h \in \,]-\varepsilon\,,0[$, on a :

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0.$$

Ceci montre que la dérivée à droite de f en x_0 est négative et que la dérivée à gauche de f en x_0 est positive. Et comme elles sont toutes deux égales à $f'(x_0)$, on a nécessairement

$$f'(x_0) \geq 0 \quad \text{et} \quad f'(x_0) \leq 0$$

d'où $f(x_0) = 0$.
Dans le cas où f admet un minimum local, on raisonne de même. □

Le théorème suivant donne une *condition suffisante* pour que f ait un extremum local en x_0.

Théorème 47.16

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Soit x_0 un point intérieur à I. Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe alors f a un extremum local en x_0.

Ce théorème est admis car il repose sur le théorème des accroissements finis.

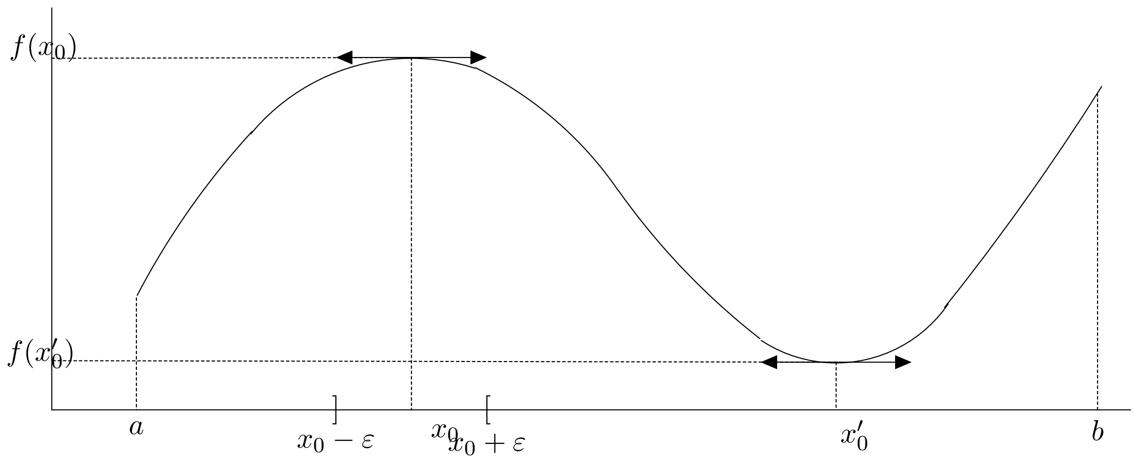


FIGURE 47.6 – Minimum local et maximum local d'une fonction

5 Dérivation d'une fonction composée et applications

Théorème 47.17

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et v une fonction dérivable sur un intervalle J contenant $u(I)$. La fonction $v\circ u$ est dérivable sur I et pour tout $x\in I$:

$$(v\circ u)'(x)=u'(x)v'(u(x)).$$

Développement

Démonstration du théorème 47.17. Soit $x_0\in I$. On écrit :

$$\frac{(v\circ u)(x)-(v\circ u)(x_0)}{x-x_0}=\frac{v(u(x))-v(u(x_0))}{u(x)-u(x_0)}\times\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}.$$

On pose $y_0=u(x_0)$ et $y=u(x)$, ainsi :

$$\frac{(v\circ u)(x)-(v\circ u)(x_0)}{x-x_0}=\frac{v(y)-v(y_0)}{y-y_0}\times\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}.$$

Or, v étant dérivable en y_0, on a :

$$\lim_{y\to y_0}\frac{v(y)-v(y_0)}{y-y_0}=v'(y_0)$$

et u étant dérivable en x_0, on a :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}=u'(x_0).$$

D'où :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(v\circ u)(x)-(v\circ u)(x_0)}{x-x_0}=u'(x_0)\times v'(y_0)=u'(x_0)\times v'(u(x_0))$$

c'est-à-dire

$$(v\circ u)'(x_0)=u'(x_0)\times v'(u(x_0)).$$

Ceci étant valable pour tout $x_0\in I$, on en déduit la dérivabilité de $v\circ u$ sur I et

$$(v\circ u)'(x)=u'(x)v'(u(x)).$$

□

Conséquence 47.18

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si $f=\sqrt{u}$ (où u est strictement positive sur I) alors f est dérivable sur I et $f'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$.
- Si $f=u^n$ (avec $n\in\mathbb{Z}^*$ et u ne s'annulant pas sur I si $n\leq -1$) alors f dérivable sur I et $f'=nu'u^{n-1}$.

Exemples 47.19.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :
$$f(x) = \sqrt{x^2 + x}.$$
On peut écrire $f = \sqrt{u}$ avec $u(x) = x^2 + x$. la fonction u est strictement positive sur $]0\,,+\infty[$. Donc f est dérivable sur $]0\,,+\infty[$ et on a $f' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$, ce qui donne :
$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}, \qquad \text{pour tout } x \in \,]0\,,+\infty[.$$
2. Dans la pratique, s'il n'y a pas d'ambiguïté avec les intervalles, on finit par ne plus préciser la composition :
$$f(x) = (2x^2 - x + 1)^6 \qquad f'(x) = 6(4x-1)(2x^2 - x + 1)^5.$$

6 Tableaux des dérivées usuelles et opérations sur les dérivées

Le tableau 47.1 nous donne les dérivées usuelles. Tous les résultats de ce tableau se démontre essentiellement avec la définition du nombre dérivé.

Fonction f	Fonction dérivée f'	Domaine de définition de f'
$f(x) = k$ (constante)	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{Z}^*$)	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$; $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}$
$f(t) = \cos(\omega t + \varphi)$	$f'(t) = -\omega \sin(\omega t + \varphi)$	$\mathbb{R}$
$f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$	$f'(t) = \omega \cos(\omega t + \varphi)$	$\mathbb{R}$
$f(t) = \tan(\omega t + \varphi)$	$f'(t) = \omega(1 + \tan^2(\omega t + \varphi))$	$\mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\frac{\pi}{2}-\varphi}{t},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

TABLE 47.1 – Dérivées de fonctions usuelles

Développement

Exemples de démonstration de dérivée de fonctions usuelles.

1. Si $f(x) = x^n$ lorsque $n > 0$, l'accroissement moyen de f en x s'écrit (on utilise la formule du binôme de Newton) :
$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{x^n + nx^{n-1}H + \mathrm{C}_n^2 x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n - x^n}{h} = nx^{n-1} + \mathrm{C}_n^2 x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}.$$
D'où :
$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} nx^{n-1}\mathrm{C}_n^2 x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1} = nx^{n-1}.$$
On aurait pu procéder par récurrence en utilisant la formule de dérivation d'un produit.
2. Si $f(x) = \sin(x)$. L'accroissement moyen de f en x s'écrit :
$$\frac{\sin(x+h) - \sin h}{h} = \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} = \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \frac{\sin h}{h}\cos x.$$
Or :
$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0.$$
D'où :
$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin h}{h} = \cos h.$$

$\square$

Le tableau 47.2 donne les opérations sur les dérivées lorsque u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I. Tous les résultats de ce tableau se démontrent essentiellement avec la définition du nombre dérivé.

Fonction	Dérivée	Conditions
$u+v$	$u'+v'$	
ku (k constante)	ku'	
uv	$u'v+uv'$	
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	$v \neq 0$ sur I
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	$v \neq 0$ sur I
u^n ($n \in \mathbb{Z}$)	$nu'u^{n-1}$	$u > 0$ sur I si $n \leq 0$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u > 0$ sur I
$v \circ u$	$u'(v' \circ u)$	

TABLE 47.2 – Opérations sur les dérivées

Développement

Exemples de démonstration sur les opérations de dérivées.

1. On veut montrer la relation $(uv') = u'v + uv'$. Pour tout x_0 de I, comme les fonctions u et v sont dérivables en x_0, on peut écrire :

$$u(x_0+h) = u(x_0) + u'(x_0)h + h\varphi(h) \quad \text{où } \lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0, \tag{47.1}$$
$$v(x_0+h) = v(x_0) + v'(x_0)h + h\psi(h) \quad \text{où } \lim_{h\to 0} \psi(h) = 0. \tag{47.2}$$

En multipliant (47.1) par (47.2), il vient :

$$\begin{aligned} u(x_0+h)v(x_0+h) &= (u(x_0) + u'(x_0)h + h\varphi(h))(v(x_0) + v'(x_0)h + h\psi(h)) \\ &= u(x_0)v(x_0) + (u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0))h + h\Phi(h) \end{aligned}$$

où

$$\Phi(h) = u(x_0)\psi(h) + u'(x_0)v'(x_0)h + u'(x_0)h\psi(h) + \varphi(h)v'(x_0)h + h\varphi(h)\psi(h).$$

Nous avons donc :

$$uv(x_0+h) = uv(x_0) + (u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0))h + h\Phi(h) \quad \text{où } \lim_{h\to 0} \Phi(h) = 0.$$

La fonction produit uv admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0, donc uv est dérivable en x_0. Ceci étant valable pour tout x_0 de I, on a uv dérivable sur I. On a donc :

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

2. On veut montrer la relation $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$. Pour tout $x \in I$, on pose $f(x) = \frac{1}{v(x)}$. On a :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{v(x+h)} - \frac{1}{v(x)}}{h} = \frac{v(x)-v(x+h)}{hv(x)v(x+h)}.$$

Or, puisque v est dérivable, on peut écrire :

$$v(x+h) = v(x) + v'(x)h + h\varphi(h).$$

Remplaçons $v(x) - v(x+h)$ par $-(v'(x)h + h\varphi(h))$; on obtient :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = -\frac{v'(x)h + h\varphi(h)}{hv(x)v(x+h)} = -\frac{v'(x)+\varphi(h)}{v(x)v(x+h)}.$$

D'où :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{v'(x)+\varphi(h)}{v(x)v(x+h)} = -\frac{v'(x)}{(v(x))^2}.$$

Donc f est dérivable et $f' = -\frac{v'}{v^2}$ d'où :

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}.$$

3. On veut montrer la relation $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$. On écrit :

$$\frac{u}{v} = u \times \frac{1}{v}$$

et on utilise la dérivée d'un produit et le résultat ci-dessus.

$\square$

7 Quelques inégalités

Exemples 47.20.

1. On va montrer les inégalités suivantes sur $[0\,,\frac{\pi}{2}]$:
   (a) $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$
   (b) $1 - \frac{2}{\pi}x \leq \cos x \leq \frac{\pi}{2} - x$.

   On note $I = [0\,,\frac{\pi}{2}]$. On étudie les fonction f et g sur I par $f(x) = x - \sin x$ et $g(x) = \sin x - \frac{2}{\pi}x$. On a, pour $x \in I$,

   $$f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$$
   $$g'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi} \quad \text{et} \quad g''(x) = -\sin x \leq 0.$$

   La fonction f' est positive sur I, donc f est croissante sur I et comme $f(0) = 0$, on en déduit que f est positive sur I, donc :

   $$\sin x \leq x, \qquad \text{pour tout } x \in I.$$

   La fonction g'' est négative sur I, donc g' est décroissante sur I. Or :

   $$g'(0) = 1 - \frac{2}{\pi} > 0 \quad \text{et} \quad g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{\pi} < 0.$$

   Comme g' est continue et strictement décroissante sur I, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in I$ tel que $g'(\alpha) = 0$. Donc g' est positive sur $[0\,,\alpha]$ puis négative sur $[\alpha\,,\frac{\pi}{2}]$. On en déduit que g est croissante sur $[0\,,\alpha]$ puis décroissante sur $[\alpha\,,\frac{\pi}{2}]$. Mais $g(0) = 0$ et $g(\frac{\pi}{2}) = 0$. Donc g est positive sur I :

   $$\frac{2}{\pi} \leq \sin x, \qquad \text{pour tout } x \in I.$$

   On montre de même que :

   $$1 - \frac{2}{\pi}x \leq \cos x \leq \frac{\pi}{2} - x, \text{ pour tout } x \in I.$$

2. On montre que pour tout $x \in [0\,,\frac{\pi}{2}[$, on a :

   $$x \leq \tan x.$$

   On pose $f(x) = \tan x - x$, pour $x \in J = [0\,,\frac{\pi}{2}[$. On a :

   $$f'(x) = \tan^2 x \geq 0, \qquad \text{pour tout } x \in J.$$

   Donc f est croissante sur J. En outre, $f(0) = 0$ donc f est positive sur J d'où le résultat.

Remarque 47.21. A l'aide de l'encadrement $\sin x \leq x \leq \tan x$ démontré ci-dessus pour $x \in [0\,,\frac{\pi}{2}[$, on en déduit que :

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}, \qquad \text{pour tout } x \in]0\,,\frac{\pi}{2}[.$$

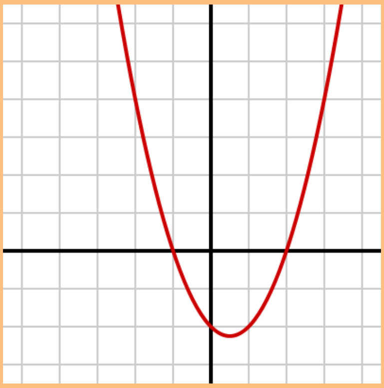
On montre que l'encadrement est aussi valable pour $x \in]-\frac{\pi}{2}\,,0[$. Le théorème des gendarmes permet alors de retrouver la limite importante :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

LEÇON

48

Fonctions polynômes du second degré



Niveau : Première S
Prérequis : notion de fonctions

1 Fonction trinômes du second degré

Définition 48.1

Fonction trinômes du second degré

On appelle *fonction trinôme du second degré* toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ qui peut s'écrire $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont trois nombres et $a \neq 0$.

Remarque 48.2. Une fonction trinôme est une fonction polynôme. On dit indifféremment fonction trinôme du second degré ou trinôme.

Exemples 48.3.

1. $f : x \mapsto (x+1)(x+2)$ et $g : x \mapsto (x-1)(x+1)$ sont des fonctions trinômes du second degré, car elles peuvent s'écrire $f(x) = x^2 + x - 2$ et $g(x) = x^2 - 1$.
2. $h : x \mapsto (x-1)^2 - (x+2)^2$ n'est pas une fonction trinôme du second degré, car, en développant, on obtient $h(x) = 6x - 3$.

Propriété 48.4

Pour tout trinôme $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, il existe deux nombres tels que :

$$f(x) = a[(x-\alpha)^2 - \beta].$$

Cette écriture est appelée *forme canonique* du trinôme

Développement

Démonstration de la propriété 48.4. Comme $a \neq 0$, on peut écrire

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

$x^2 + \frac{b}{a}x$ est le début du développement de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. En effet,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

d'où

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2.$$

Donc :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a[(x-\alpha)^2 - \beta] \end{aligned}$$

avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$. □

Exemple 48.5. On a :

$$2x^2 - 6x - 1 = 2\left(x^2 - 3x - \frac{1}{2}\right).$$

$x^2 - 3x$ est le début du développement de $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$. Donc :

$$2x^2 - 6x - 1 = 2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{1}{2}\right] = 2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{11}{4}\right].$$

D'où $\alpha = \frac{3}{2}$ et $\beta = \frac{11}{4}$.

D'après la propriété 48.4, la fonction trinôme du second degré $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, peut aussi s'exprimer par $x \mapsto a[(x-\alpha)^2 - \beta]$. Donc f est une fonction associée à la fonction $x \mapsto x^2$ par la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$.

Propriété 48.6

La courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$ s'obtient à partir de la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$ en effectuant une translation de vecteur $\alpha\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath}$, puis « une multiplication par a ».

Conséquence 48.7

Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, admet un axe de symétrie d'équation $x = -\frac{b}{2a}$.

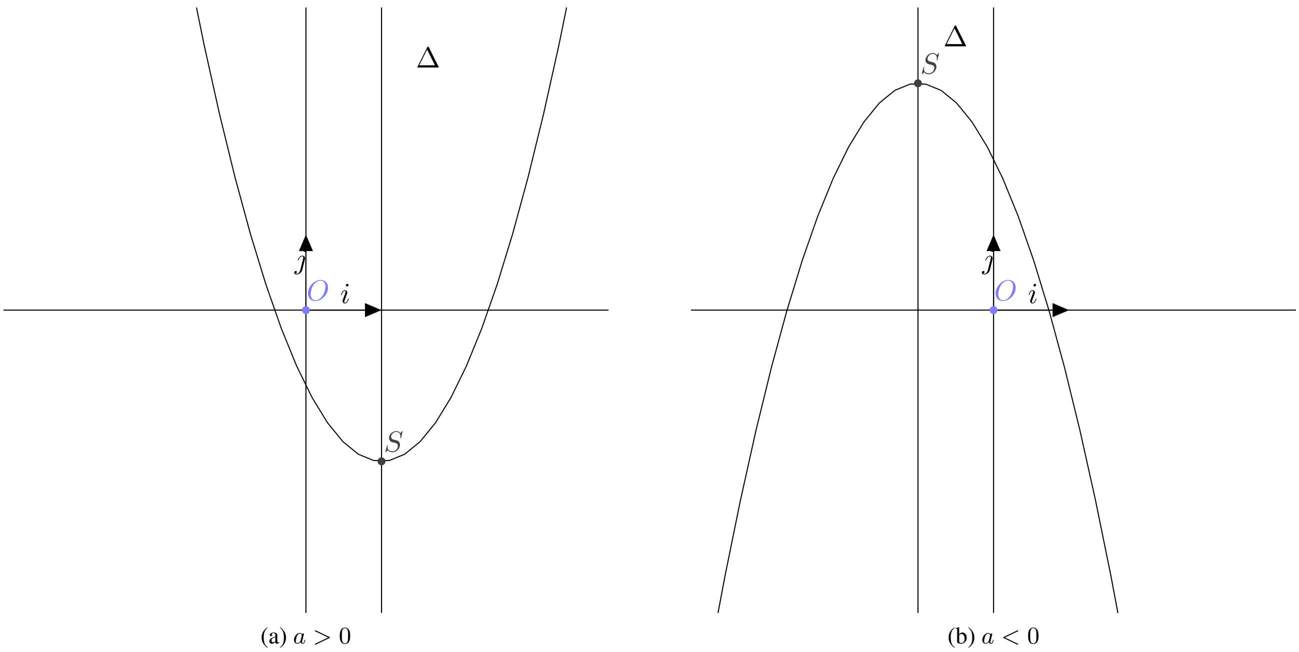


FIGURE 48.1 – L'axe de symétrie dans le repère (O, i, j) est $\Delta : x = -\frac{b}{2a}$ et les coordonnées de S dans le repère (O, i, j) est $S(-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a}))$

Définition 48.8

Parabole

Dans un repère du plan, la courbe représentative d'une fonction trinôme du second degré $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, s'appelle une *parabole*. Son équation est $y = ax^2 + bx + c$.

Remarque 48.9. On appelle aussi « parabole » la représentation de la fonction carré.

Propriété 48.10

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, une fonction trinôme. Les variations de f sur $\mathbb{R}$ sont :

– Si $a > 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
f		$\searrow$	$f(-\frac{b}{2a})$	$\nearrow$	

f a un *minimum*.

– Si $a < 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
f		$\nearrow$	$f(-\frac{b}{2a})$	$\searrow$	

f a un *maximum*.

Méthode 48.11

Pour donner le tableau de variations d'une fonction trinôme, il faut :

1. Ecrire $f(x)$ sous forme canonique : $f(x) = a[(x-\alpha)^2 + \beta]$.
2. Déduire le tableau de variations.

Exemple 48.12. On donne le tableau de variation de f définie par $f(x) = x^2 - 3x + 1$. On écrit $f(x)$ sous forme canonique

$$f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1$$

soit :

$$f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}.$$

Sachant que $a > 0$, f admet un minimum $f(\frac{3}{2})$, soit $-\frac{5}{4}$. On dresse le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
f		$\searrow$	$-\frac{5}{4}$	$\nearrow$	

2 Equations du second degré

Définition 48.13

Discriminant

On appelle *discriminant* de l'expression $ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, le nombre $b^2 - 4ac$, noté Δ.

Propriété 48.14

Soit l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, avec $a \neq 0$, de discriminant Δ.

– Si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions distinctes x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

On a $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

– Si $\Delta = 0$, l'équation a une seule solution x_0, $x_0 : \frac{-b}{2a}$. On a $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$.

– Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution. $ax^2 + bx + c$ ne se factorise pas.

Démonstration de la propriété 48.14. Soit l'équation $ax^2+bx+c=0$. L'équation s'écrit :

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=0.$$

En posant $\Delta=b^2-4ac$, elle s'écrit

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=0.$$

soit :

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0,\qquad \text{car } a\neq 0.$$

– Si $\Delta>0$, alors Δ est le carré de $\sqrt{\Delta}$:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2=\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right).$$

L'équation s'écrit

$$\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0.$$

Donc $x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=0$ ou $x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=0$, soit :

$$x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\quad\text{ou}\quad x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

– Si $\Delta=0$, $(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0$ s'écrit

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0.$$

Ce carré est nul si, et seulement si,

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)=0$$

soit $x=-\frac{b}{2a}$.

– Si $\Delta<0$, $(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a^2}$ est strictement positif donc ne s'annule jamais. Il n'y a pas de solution à l'équation.

□

Définition 48.15 On appelle *racine* d'un polynôme P toute solution de l'équation $P(x)=0$.

Exemples 48.16.

– Résoudre l'équation $3x^2-2x+5=0$. Pour cette équation, $a=3$, $b=-2$ et $c=5$, donc $\Delta=-56$. L'équation n'a pas de solution (le polynôme $3x^2-2x+5$ n'a pas de racine).

– Résoudre l'équation $x^2+2x-15=0$. Pour cette équation, $a=1$, $b=2$ et $c=-15$, donc $\Delta=64$. On a $x_1=\frac{-2-\sqrt{64}}{2}$ et $x_2=\frac{-2+\sqrt{64}}{2}$, soit $x_1=-5$ et $x_2=3$. L'équation a deux solutions (le polynôme $x^2+2x-15$ a deux racines).

Remarque 48.17. Pour résoudre certaines équations telles que $x^2-5=0$ ou $x^2-3x=0$, l'utilisation du discriminant n'est pas utile.

Méthode 48.18 Pour résoudre une équation du second degré,

1. Vérifier qu'il s'agit d'une équation du second degré et si l'utilisation du discriminant est utile.
2. Calculer le discriminant Δ et déterminer son signe.

Exemples 48.19.

1. On veut résoudre $2x^2 - 4x - 5 = 0$. Il s'agit d'une équation du second degré et on calcule le discriminant $b^2 - 4ac$:
$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 2 \times (-5)$$
car $a = 2$, $b = -4$ et $c = -5$, d'où $\Delta = 56$. Δ est strictement positif, il y a deux solutions distinctes données par les formules
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + \sqrt{56}}{4} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - \sqrt{56}}{4},$$
soit :
$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{14}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2 - \sqrt{14}}{2}.$$
2. On veut résoudre l'équation $4x^2 - 5 = 0$. Pour cette équation, le calcul du discriminant n'est pas utile. L'équation s'écrit $x^2 = \frac{5}{4}$. Il y a deux solutions opposées, soit :
$$x_1 = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = -\frac{\sqrt{5}}{2}.$$
3. On veut résoudre l'équation $\frac{4}{3}x^2 + 25 = 0$. Pour cette équation, le calcul du discriminant n'est pas utile. $\frac{4}{3}x^2 + 25$ est strictement positif, donc il n'y a pas de solutions.
4. On veut résoudre l'équation $3x^2 + 5x = 0$. Pour cette équation, le calcul du discriminant n'est pas utile, car elle se factorise immédiatement :
$$x(3x + 5) = 0$$
soit $x_1 = 0$ et $x_2 = -\frac{5}{3}$.

3 Signe du trinôme du second degré

Propriété 48.20

Soit $ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, de discriminant Δ. Le signe de $ax^2 + bx + c$ est :
- Si $\Delta < 0$, le signe de a pour tout x de $\mathbb{R}$ ($ax^2 + bx + c$ n'a pas de racine).
- Si $\Delta = 0$, le signe de a pour tout x de $\mathbb{R}$ sauf x_0 (x_0 est la racine de $ax^2 + bx + c$).
- Si $\Delta > 0$,
  - le signe de a pour tout x de $]-\infty\,, x_1[\cup]x_2\,, +\infty[$
  - le signe de $-a$ pour tout x de $]x_1\,, x_2[$

  (x_1 et x_2 sont les racines de $ax^2 + bx + c$ ($x_1 < x_2$)).

Développement

Démonstration de la propriété 48.20. $ax^2 + bx + c$ sous forme canonique s'écrit
$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)\right] - \frac{\Delta}{4a^2}$$
avec $a \neq 0$.
- Si $\Delta < 0$ alors $\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ est positif et le signe de $ax^2 + bx + c$ est celui de a.
- Si $\Delta = 0$ alors $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ et son signe est celui de a sauf pour $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

– Si $\Delta > 0$ alors $ax^2 + bx + c$ se factorise :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Soit $x_1 < x_2$, on a le tableau de signes ci-dessous :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x - x_1)(x - x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$a(x - x_1)(x - x_2)$		$\operatorname{sgn} a$	0	$\operatorname{sgn} -a$	0	$\operatorname{sgn} a$	

où $\operatorname{sgn} a$ est le signe de a.

□

Exemple 48.21. On note $f(x) = x^2 + x - 2$. On cherche le signe de f. $\Delta = 9$ et $f(x)$ a deux racines : -2 et 1. Le coefficient a de x^2 est positif. Donc $f(x) < 0$ pour tout x de $]-2\,,1[$ (« entre » les racines) ; $f(x) > 0$ pour tout x de $]-\infty\,,2[\cup]1\,,+\infty[$ (« à l'extérieur » des racines).

Méthode 48.22

On veut déterminer le signe d'un trinôme du second degré.

1. Si le cas est évident, le signe se déduit directement.
2. Sinon calculer le discriminant Δ.
   – Si $\Delta < 0$, le trinôme est toujours du signe de a.
   – Si $\Delta = 0$, le trinôme est toujours du signe de a et nul pour $x = -\frac{b}{2a}$.
   – Si $\Delta < 0$, le trinôme est du signe de a « à l'extérieur des racines » et du signe opposé à a « entre les racines ».

Exemples 48.23.

1. On cherche le signe de $2x^2 - 3x + 4$. On calcule le discriminant $\Delta = -23$. Δ étant négatif et le coefficient de x^2 positif : $2x^2 - 3x + 4$ est positif sur $\mathbb{R}$.
2. On veut résoudre l'inéquation $x^2 - 3 < 0$. L'équation $x^2 - 3 = 0$ se résout sans discriminant, elle admet deux racines :

$$x_1 = \sqrt{3} \quad \text{et} \quad x_2 = -\sqrt{3}.$$

   Le coefficient de x^2 est positif :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
signe de $x^2 - 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   L'inéquation $x^2 - 3 \leq 0$ a pour solution $[-\sqrt{3}\,,\sqrt{3}]$.
3. On veut résoudre l'inéquation $3x^2 - 2x + 4 < 0$. On calcule le discriminant $\Delta = -44$. Δ étant négatif et le coefficient de x^2 positif : $2x^2 - 3x + 4$ est positif sur $\mathbb{R}$. L'inéquation $3x^2 - 2x + 4 < 0$ n'a pas de solution.

4 Sur les paraboles

4.1 La parabole vue comme une conique

Définition 48.24

On appelle *conique*, l'ensemble des courbes qui s'obtiennent par l'intersection d'un cône de révolution avec un plan.

La parabole s'obtient en intersectant le plan de façon parallèle à l'une des génératrices du cône.

Définition 48.25

Soient D une droite et F un point n'appartenant pas à D, et soit P le plan contenant la droite D et le point F. On appelle *parabole de droite directrice* D et *de foyer* F l'ensemble des points M du plan P vérifiant :

$$\frac{d(M,F)}{d(M,D)} = 1$$

où $d(M,F)$ mesure la distance du point M au point F et $d(M,D)$ mesure la distance du point M à la droite D.

Remarque 48.26. La parabole est donc une conique dont l'excentricité e vaut 1.

4.2 Équations

1. À partir du foyer et de la directrice

Si la parabole est donnée par son foyer F et sa directrice $\mathcal{D}$, soit O le projeté orthogonal de F sur $\mathcal{D}$, on appelle le *paramètre de la parabole* (qu'on note p) la distance OF. On considère S le milieu de $[FO]$.

Propriété 48.27

Dans le repère orthonormé $(S, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ où $\vec{\jmath}$ a même direction et sens que $\overrightarrow{OF}$, l'équation de la parabole est :

$$y = \frac{x^2}{2p}.$$

2. À partir de l'équation générale

Soit l'équation :

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

dans un repère orthonormal. Si $B^2 - AC = 0$ alors cette équation est celle d'une parabole ou de deux droites parallèles.

Soit l'équation :

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

dans un repère orthonormal. Si $AC = 0$ avec AE ou DC non nul alors cette équation est celle d'une parabole.

Enfin, dans tout repère orthonormal, l'équation d'une droite est de la forme :

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad \text{avec } B^2 - AC = 0.$$

3. Équation polaire

Dans le repère $(O, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ où O est le foyer et l'axe polaire en est l'axe focal, l'équation de la parabole est :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = \frac{p}{1+\cos(\theta)}\vec{e_r}.$$

4.3 Quelques propriétés géométriques de la parabole

1. Cordes parallèles

Toutes les cordes parallèles ont leur milieu situé sur une droite perpendiculaire à la directrice. La tangente parallèle à cette direction a son point de contact sur cette droite. Les deux tangentes à la parabole aux extrémités d'une telle corde se coupent sur cette droite.

2. Tangente et bissectrice

Si A est un point sur une parabole définie par un foyer F et une directrice (d), alors la tangente de la parabole en A est la bissectrice intérieure de l'angle formée par F, A et le projeté orthogonal de A sur (d).

3. Propriété relative à l'orthoptique

Soient M et M' les points d'intersection d'une droite passant par le foyer de la parabole avec la parabole. Les deux tangentes de la parabole passant par M et M' se coupent sur la directrice en formant un angle droit entre elles. De plus, si on appelle H et H' les projetés respectifs de M et M' sur la directrice et O le point d'intersection des deux tangentes et de la directrice, alors O est le milieu $[HH']$.

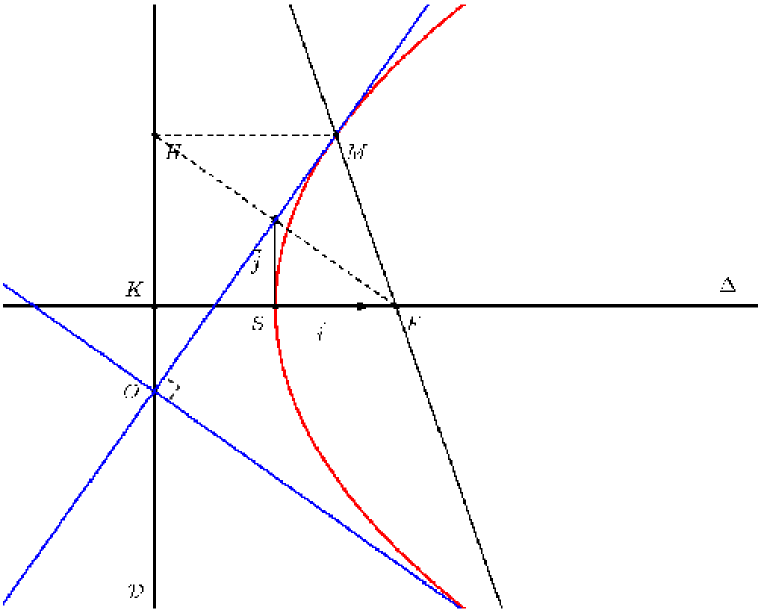


FIGURE 48.2 – En se déplaçant le long de sa directrice, la parabole est toujours vue sous un angle droit

4.4 Applications à la physique

La parabole est la trajectoire décrite par un objet que l'on lance si on peut négliger la courbure de la Terre, le frotement de l'air (vent, ralentissement de l'objet) et la variation de la gravitéa avec la hauteur.

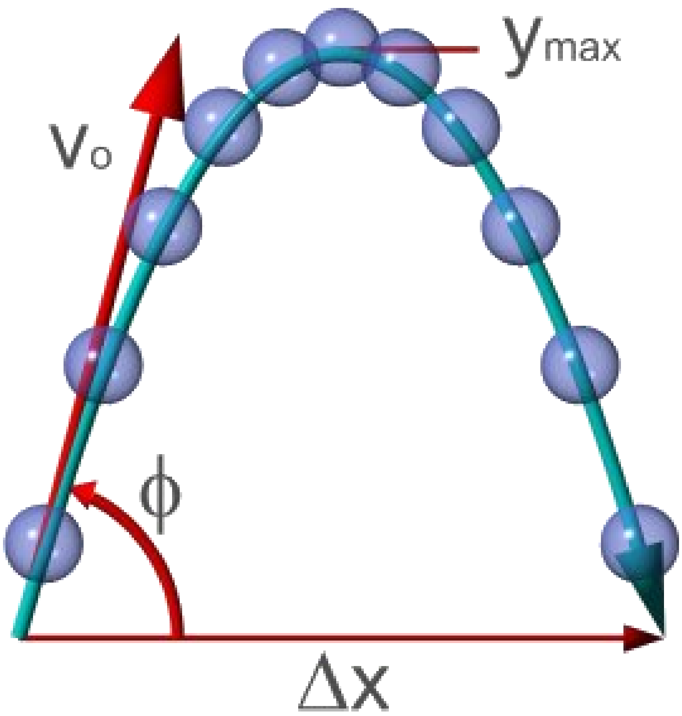
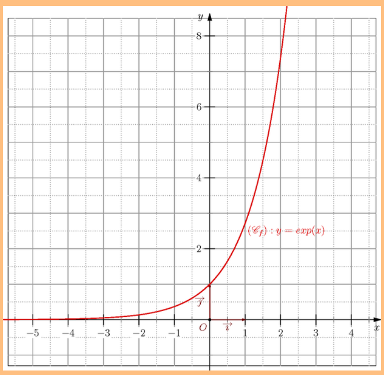


FIGURE 48.3 – Trajectoire parabolique

LEÇON 49

Fonctions exponentielles



Niveau : Terminale S et BTS

Prérequis : notions de dérivabilité, existence d'une solution d'équa diff, bijection, fonctions logarithmes, limites, théorème des valeurs intermédiaires

1 La fonction exponentielle

Définition 49.1 Soit a un nombre réel. On appelle solution sur l'intervalle I de l'*équation différentielle* $Y' = aY$ toute fonction dérivable sur I, qui vérifie sur I : $f' = af$.

Exemples 49.2.

1. La fonction nulle est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $Y' = 2Y$.
2. Les fonctions constantes sont des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $Y' = 0Y$.

Remarque 49.3. L'équation différentielle $Y' = aY$, notée aussi $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = ay$, exprime une proportionnalité entre la fonction et sa dérivée. Elle permet de modéliser de nombreux phénomènes (en physique,...).

Propriété 49.4 **Théorème d'existence**
Il existe une fonction f, dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle $Y' = Y$ et telle que $f(0) = 1$ que l'on appelle la *fonction exponentielle*.

Remarque 49.5. On notera provisoirement la fonction exponentielle $x \mapsto \exp(x)$.

Propriété 49.6 La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Développement

Démonstration de la propriété 49.6. Soit la fonction Φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\Phi(x) = \exp(x)\exp(-x).$$

Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\Phi'(x) = \exp'(x)\exp(-x) - \exp(x)\exp'(-x).$$

Or $\exp' = \exp$ donc $\Phi'(x) = 0$. La fonction Φ est constante sur $\mathbb{R}$ et égale à 1 car $\exp(0) = 1$. Puisque $\exp(x)\exp(-x) = 1$, la fonction $\exp$ ne s'annule jamais.
On démontre, par l'absurde, que la fonction $\exp$ est strictement positive. S'il existait x_0 tel que $\exp(x_0) \leq 0$, alors $\exp$ étant dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est continue sur $\mathbb{R}$. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $\exp$ sur $[0, x_0]$ ou $[x_0, 0]$, on trouverait une solution à l'équation $\exp(x) = 0$. Ceci est faux puisqu'on a montré que $\exp$ ne s'annule jamais, donc x_0 tel que $\exp(x_0) \leq 0$ n'existe pas. □

Propriété 49.7 Soit a un réel donné. Les solutions de l'équation différentielle $Y' = aY$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k\exp(ax)$ où k est une constante réelle.

Développement

Démonstration de la propriété 49.7. La fonction $f : x \mapsto k\exp(ax)$, où k est un réel, est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout x de $\mathbb{R}$, vérifie

$$f'(x) = ka\exp(ax)$$

soit $f'(x) = af(x)$. Donc f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $Y' = aY$. Soit g une autre fonction sur $\mathbb{R}$ de $Y' = aY$, donc, pour tout x de $\mathbb{R}$, $g'(x) = ag(x)$. Comme la fonction $\exp$ ne s'annule pas, on peut définir sur $\mathbb{R}$ la fonction $u : x \mapsto \frac{g(x)}{\exp(ax)}$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a, après simplification :

$$u'(x) = \frac{g'(x) - ag(x)}{\exp(ax)}.$$

Or $g'(x) = ag(x)$, donc, pour tout x de $\mathbb{R}$, $u'(x) = 0$. u est une fonction constante sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire $\frac{g(x)}{\exp(ax)}$ est constant, soit $g(x) = k\exp(ax)$. □

2 La notation e^x

Propriété 49.8

Pour tous nombres réels a et b, $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$.

Développement

Démonstration de la propriété 49.8. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \exp(x+b)$ où b est un nombre réel. g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a

$$g'(x) = \exp'(x+b) = \exp(x+b) = g(x)$$

g vérifie l'équation $Y' = Y$. Donc d'après la propriété 49.7, $g(x) = k\exp(x)$. Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$\exp(x+b) = k\exp(x)$$

et pour $x = 0$,

$$\exp(b) = k\exp(0).$$

or $\exp(0) = 1$ donc $k = \exp(b)$ et on a

$$\exp(x+b) = \exp(x)\exp(b).$$

□

Propriété 49.9

Le nombre réel $\exp(1)$ se note e. On a $\mathrm{e} \simeq 2,72$ et, pour tout x élément de $\mathbb{R}$,

$$\exp(x) = \mathrm{e}^x.$$

Remarques 49.10. Ainsi $\mathrm{e}^{\sqrt{2}}$ a un sens, c'est l'image de $\sqrt{2}$ par la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$. On a aussi :

$$\mathrm{e}^0 = 1,\ \mathrm{e}^1 = \mathrm{e},\ \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}},\ \mathrm{e}^{1/2} = \sqrt{\mathrm{e}}.$$

Conséquence 49.11

1. Pour tous nombres réels a et b :

$$\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a\mathrm{e}^b,\ \mathrm{e}^{-a} = \frac{1}{\mathrm{e}^a},\ \mathrm{e}^{a-b} = \frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}.$$

2. Pour tout nombre réel a et tout rationnel r : $\mathrm{e}^{ra} = (\mathrm{e}^a)^r$.

Développement

Démonstration.

– Tout d'abord, on montre que, pour tout nombre n entier naturel, on a la propriété « Pour tout réel a, $\exp(na) = (\exp(a))^n$ ». La propriété est vraie pour $n = 0$ car, par définition de la fonction exp : $\exp(0) = 1$. Supposons que, pour un entier k, on ait $\exp(ka) = (\exp(a))^k$. Alors, d'après la propriété 49.6, on a :

$$\exp((k+1)a) = \exp(ka + a) = \exp(ka)\exp(a).$$

Donc $\exp((k+1)a) = (\exp(a))^{k+1}$. La propriété est vérifiée pour $n = 0$. Si on la suppose vraie pour $n = k$, alors elle est vraie pour $n = k+1$, et donc par récurrence, elle est vraie pour tout nombre entier $n \geq 0$.

– Par définition, $\exp(1) = \mathrm{e}$ et d'après la propriété 49.6,

$$\exp(1) \times \exp(-1) = \exp(1-1) = 1.$$

Donc $\exp(-1) = \frac{1}{\mathrm{e}} = \mathrm{e}^{-1}$.

Si x est un entier positif, on peut écrire $x = na$ avec $a = 1$ et n entier positif.

$$\exp(x) = \exp(n \times 1) = (\exp(1))^n$$

Soit $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.
Si x est un entier négatif, on peut écrire $x = na$ avec $a = -1$ et n entier positif.

$$\exp(x) = \exp(n \times (-1)) = (\exp(-1))^n.$$

Or

$$(\exp(-1))^n = (\mathrm{e}^{-1})^n = \mathrm{e}^{-n}.$$

Soit $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.
Donc, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.

– Si x est un nombre rationnel, on peut écrire $x = pa$ avec $a = \frac{1}{q}$, q entier strictement positif et p un entier relatif.

$$\exp(qa) = (\exp(a))^q$$

Or $qa = 1$ donc $(\exp(a))^q = \mathrm{e}$. Soit $\exp(a) = \mathrm{e}^{1/q}$.

$$\exp(x) = \exp(pa) = (\exp(a))^p.$$

Soit

$$\exp(x) = \left(\mathrm{e}^{1/q}\right)^p = \mathrm{e}^{p/q} = \mathrm{e}^x.$$

Donc, pour tout x élément de $\mathbb{Q}$, $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.

– On admet que l'on peut étendre cette propriété à $\mathbb{R}$ et on convient de noter e^x le nombre $\exp(x)$ pour tout x élément de $\mathbb{R}$.

□

Exemples 49.12.

1. $\mathrm{e}^{x+1} = \mathrm{e}\mathrm{e}^x$
2. $\mathrm{e}^{x-2} = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^2}$
3. $\mathrm{e}^{2x} = (\mathrm{e}^x)^2$
4. $\mathrm{e}^{x/2} = \sqrt{\mathrm{e}^x}$.

Remarque 49.13. Ne pas confondre $\mathrm{e}^{(a^b)}$ et $(\mathrm{e}^a)^b$; ainsi $\mathrm{e}^{x^2} = \exp(x^2)$ alors que $(\mathrm{e}^x)^2 = \mathrm{e}^{2x}$.

3 Étude de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$

D'après sa définition, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est solution de l'équation différentielle $Y' = Y$ et telle que $f(0) = 1$, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue sur $\mathbb{R}$, et égale à sa dérivée.

Conséquence 49.14

1. $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. $\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$.

Développement

Démonstration de la conséquence 49.14. Le premier point découle immédiatement de la définition de la fonction exp. On a $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$ et d'après la propriété 49.6, exp est strictement positive. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est dérivable en 0 donc son taux de variation $\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^0}{x - 0}$ a pour limite en 0 le nombre dérivée de $x \mapsto \mathrm{e}^x$ en 0, soit :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1.$$

□

Propriété 49.15

Limites

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0.$$

Développement

Démonstration de la propriété 49.15.

– Pour étudier la limite en $+\infty$, on montre d'abord que, pour tout x, $\mathrm{e}^x \geq x$. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - x$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = \mathrm{e}^x - 1.$$

Comme $\exp$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{e}^0 = 1$, on obtient le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	1	$\nearrow$	

Comme, pour tout x, $f(x) \geq 0$, on a $\mathrm{e}^x \geq x$ et, d'après un des théorèmes « des gendarmes », on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty.$$

– Pour étudier la limite en $-\infty$, on pose $X = -x$ et on a $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{-X}$ et

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-X} = +\infty.$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, on a :

$$\lim_{X\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^X} = 0,$$

soit $\lim_{X\to+\infty} \mathrm{e}^{-X} = 0$. Donc :

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0.$$

□

On obtient le tableau de variations de la fonction $\exp$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
e^x	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

– La courbe représentative de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ passe par les points de coordonnées $(0, 1)$ et $(1, \mathrm{e})$.
– La tangente à la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ au point de coordonnées $(0, 1)$ a pour équation $y = x + 1$. De plus, pour h « assez petit » : $\mathrm{e}^h \approx 1 + h$.
– La courbe représentative de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est au dessus de l'axe des abscisses, qui est une droite asymptote.

Conséquence 49.16

1. Pour tout nombre réel x, $\mathrm{e}^x > 0$.
2. Pour tous nombres réels x et y : $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^y$ équivaut à $x = y$ et $\mathrm{e}^x > \mathrm{e}^y$ équivaut à $x > y$.

Exemples 49.17.

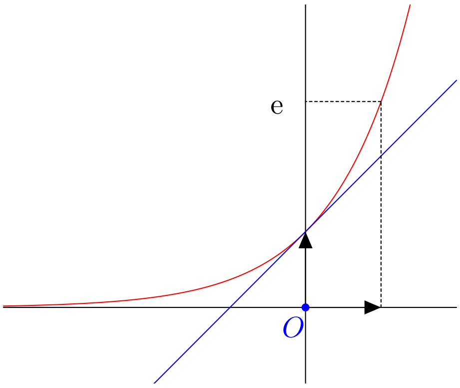


FIGURE 49.1 – Représentation graphique de la fonction exponentielle et de sa tangente en $x = 0$

1. $\mathrm{e}^{3x} = \mathrm{e}^{x+1}$ équivaut à $3x = x + 1$.
2. $\mathrm{e}^{x} \geq 1$ équivaut à $x \geq 0$.
3. $\mathrm{e}^{x} \leq 1$ équivaut à $x \leq 0$.

Propriété 49.18

Soit u une fonction définie sur un intervalle I. Si u est dérivable sur I, alors la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$ est dérivable sur I et sa dérivée est $x \mapsto u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$.

Développement

Démonstration de la propriété 49.18. D'après le théorème de la dérivée d'une fonction composée, $x \mapsto \mathrm{e}^{x}$ étant dérivable sur $\mathbb{R}$ et u dérivable sur I, $x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$ est dérivable sur I de dérivée $x \mapsto u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$. $\square$

Exemple 49.19. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{\sin x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto \cos x\mathrm{e}^{\sin x}$.

Propriété 49.20

Limites fondamentales

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{x}}{x} = +\infty$,
2. $\lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{x} = 0$.

Développement

Démonstration de la propriété 49.20. Dans la démonstration de la propriété 49.15, on a vu que, pour tout x, $\mathrm{e}^{x} \geq x$. Donc, pour tout x, $\mathrm{e}^{x/2} \geq \frac{x}{2}$ et, pour tout $x \geq 0$,

$$(\mathrm{e}^{x/2})^2 \geq \left(\frac{x}{2}\right)^2,$$

soit $\mathrm{e}^{x} \geq \frac{x^2}{4}$. Or, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{4} = +\infty$. D'après un des « théorèmes des gendarmes », on obtient

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{x}}{x} = +\infty.$$

On a $x\mathrm{e}^{x} = \frac{x}{\mathrm{e}^{-x}}$. En posant $X = -x$, on a $x\mathrm{e}^{x} = -\frac{X}{\mathrm{e}^{X}}$. Or

$$\lim_{X\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{X}}{X} = +\infty$$

donc

$$\lim_{X\to+\infty} \frac{X}{\mathrm{e}^{X}} = 0$$

et, par suite, $\lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{x} = 0$. $\square$

Conséquence 49.21 Pour tout nombre entier n strictement positif :

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.
2. $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$.

Développement

Démonstration de la conséquence 49.21.

1. Comme $e^x > 0$:
$$\frac{e^x}{x^n} = \left(\frac{e^{x/n}}{x}\right)^n$$
soit
$$\frac{e^x}{x^n} = \left(\frac{e^{x/n}}{\frac{nx}{n}}\right)^n.$$
Or $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ donc
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x/n}}{x/n} = +\infty.$$
En composant avec la fonction puissance, on obtient :
$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^{x/n}}{n\frac{x}{n}}\right)^n = +\infty$$
d'où
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty.$$
2. On pose $x = -X$, $x^n e^x = (-X)^n e^{-X}$, soit $x^n e^x = (-1)^n \frac{X^n}{e^x}$. Donc :
$$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = \lim_{X\to+\infty} (-1)^n \frac{X^n}{e^X}.$$
On vient de montrer que $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$, donc
$$\lim_{X\to+\infty} (-1)^n \frac{X^n}{e^X} = 0.$$
D'où : $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$.

□

Exemples 49.22.

1. Soit $f : x \mapsto \frac{e^x}{x^{10}}$,
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$
2. Soit $g : x \mapsto x^{1000}e^x$,
$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0.$$

Remarque 49.23. Pour les limites en $+\infty$ et et en $-\infty$, on retiendra que « $\exp$ l'emporte sur x ».

4 Applications

1. Déterminer le plus grand réel a tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait :

$$ax \leq \mathrm{e}^x.$$

2. Montrer que, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$\frac{\mathrm{e}^{x+y}}{xy} \geq \mathrm{e}^2.$$

3. *Moyenne arithmétique et géométrique, comparaison.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1, \dots, a_n)$ n réels positifs.

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \quad \text{(moyenne arithmétique)} \\ G_n &= \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \quad \text{(moyenne géométrique)} \end{aligned}$$

Prouver que $G_n \leq A_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Résoudre :

$$3^x + 4^x = 5^x \qquad (E_1)$$
$$3^x + 4^x + 5^x = 6^x \qquad (E_2)$$

L'équation

$$3^x + 4^x + 5^x + 6^x = 7^x \qquad (E_3)$$

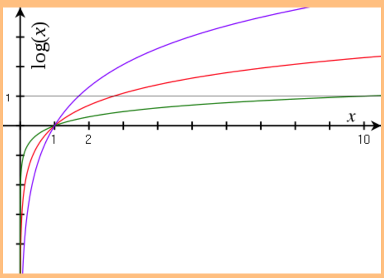
admet-elle une solution entière ?

5. Déterminer les entiers pour lesquels $2^n \geq n^2$.

6. Comparer π^{e} et e^{π}.

LEÇON 50

Fonctions logarithmes



Niveau : Terminale S et BTS

Prérequis : fonctions dérivées, fonctions exponentielles, primitives, intégrales, théorème des accroissement finis, résolution d'une équation du second degré.

1 Introduction de la fonction logarithme

1.1 Introduction du logarithme par les primitives

Théorème 50.1

La fonction « inverse », définie sur $]0\,,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ admet une unique primitive F qui vérifie la condition $F(1) = 0$.

L'argument principal est que toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Définition 50.2

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ (restriction de la fonction « inverse » à $]0\,,+\infty[$. La fonction *logarithme népérien* noté $\ln$ est *la* primitive F de f telle que $F(1) = 0$.

1.2 Introduction du logarithme par l'exponentielle

Propriété 50.3

Pour tout nombre réel a strictement positif, il existe un réel unique α tel que $\mathrm{e}^{\alpha} = a$. On appelle ce nombre *le logarithme népérien* de a. On le note $\ln a$.

Développement

Démonstration de la propriété 50.3. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc elle est continue de $\mathbb{R}$ vers l'intervalle $]0\,,+\infty[$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel a de l'intervalle $]0\,,+\infty[$, l'équation $\mathrm{e}^x = a$ admet des solutions. Or la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Il y a donc un et un seul nombre réel α tel que $\mathrm{e}^{\alpha} = a$. □

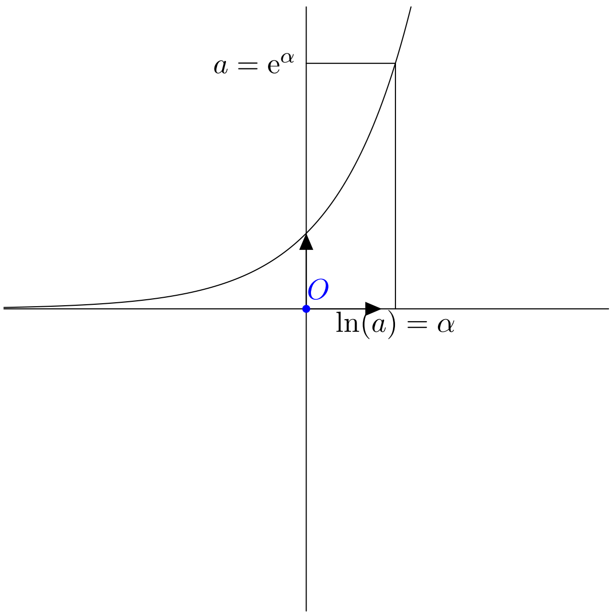


FIGURE 50.1 – Définition du logarithme népérien avec la fonction exponentielle

Exemples 50.4.

1. Le nombre α tel que $\mathrm{e}^{\alpha} = 3$ est $\ln 3$.
2. $\ln 5$ est le nombre dont l'image par la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est 5 ; ainsi $\mathrm{e}^{\ln 5} = 5$.

1.3 Conséquences des définitions du logarithme

On va se placer dans le cadre où on a introduit le logarithme par l'unique primitive F de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0\,,+\infty[$ qui vérifie la condition $F(1) = 0$.

Conséquence 50.5

1. La fonction primitive est définie sur le même intervalle que la fonction considérée, donc la fonction $\ln$ est définie sur $]0\,,+\infty[$.
2. $\ln(1) = 0$.
3. la fonction $\ln$ est dérivable sur $]0\,,+\infty[$ et $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ pour tout $x \in\,]0\,,+\infty[$. La fonction $\ln$ est continue sur $]0\,,+\infty[$ puisque dérivable sur cet intervalle
4. La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0\,,+\infty[$ puisque sa dérivée est strictement positive sur cet intervalle, ce qui permet une première esquisse de son tableau de variations :

x	0	1	$+\infty$
signe de la dérivée $\frac{1}{x}$	$\|$	$+$	$+$
variation de la fonction $\ln$	$\|$ $\nearrow$	0	$\nearrow$

5. Ainsi, nous en déduisons également le signe de la fonction $\ln$:
   - $\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$,
   - $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$,
   - $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$.
6. La fonction $\ln$ étant strictement croissante et continue, elle réalise une bijection de $]0\,,+\infty[$ sur l'intervalle image. On en déduit que pour tous réels a et b de $]0\,,+\infty[$, on a :
   - $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$,
   - $\ln a < \ln a \Leftrightarrow a < b$.

   En effet, si $a = b$ alors il est clair que $\ln a = \ln b$. De même, si $a < b$ alors (stricte croissante du $\ln$) $\ln a < \ln b$.

1.4 Des exemples

Exemples 50.6.

1. On veut déterminer l'ensemble de définition des fonctions f et g définies par :
   - $f(x) = \ln(x + 3)$
   - $g(x) = \ln(x^2 - x - 2)$.

   On pose $F(x) = x + 3$ et $G(x) = x^2 - x - 2$. Les deux fonctions f et g sont définies si le logarithme des deux fonctions F et G sont définies, ce qui équivaut à la positivité stricte des deux fonctions F et G.
   - $F(x) > 0 \Leftrightarrow x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$. Donc f est définie sur l'intervalle $]-3\,,+\infty[$.
   - $G(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 > 0$. On résout $x^2 - x - 2 = 0$. Le discriminant du trinôme est $\Delta = 1 - 4 \times (-2) = 1 + 8 = 9$. Donc :
   $$x_1 = \frac{1+3}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1-3}{2} = -1.$$
   Or le signe du coefficient de x^2 est positif donc $G(x) > 0 \Leftrightarrow x \in\,]-\infty\,,-1[\, \cup\, [2\,,+\infty]$. Donc g est définie sur l'intervalle $]-\infty\,,-1[\, \cup\, [2\,,+\infty]$.
2. On veut dériver la fonction f définie par $f(x) = 3 - x + \ln x$. La fonction f est dérivable car c'est une somme de fonctions dérivables. On rappelle que comme $x \mapsto \ln x$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$, la dérivée de la fonction logarithme est $x \mapsto \frac{1}{x}$. Donc :
$$f'(x) = -1 + \frac{1}{x} = \frac{-x+1}{x}.$$

3. On veut résoudre l'équation $\ln(2x+1) = \ln(3-x)$. Ceci est équivalent à résoudre le système d'équation/inéquation suivant :

$$\begin{cases} 2x+1 = 3-x \\ 2x+1 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases}$$

Or :

$$2x+1 = 3-x \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

et on vérifie les deux autres conditions du système :

$$2 \times \frac{2}{3} + 1 = \frac{7}{3} \quad \text{et} \quad 3 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3}.$$

Donc la solution de l'équation proposée est $x = \frac{2}{3}$.

2 Théorème fondamental

Théorème 50.7

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b.$$

On dit que la fonction logarithme transforme les produits en somme.

Développement

Démonstration du théorème 50.7. Pour tout réel a strictement positif, on pose la fonction G définie sur $]0\,,+\infty[$ par :

$$G(x) = \ln(ax).$$

La fonction G est dérivable (G est une composée de fonctions dérivables : $G = v \circ u$ avec $u(x) = ax$ et $v = \ln$) et :

$$G'(x) = a \times \frac{1}{ax} = \frac{1}{x}$$

La fonction G est donc une primitive de la fonction inverse tout comme la fonction $\ln$. Elles diffèrent donc d'une constante c :

$$G(x) = \ln x + c \Leftrightarrow \ln(ax) = \ln x + c.$$

On calcule la constante c, si $x = 1$, on a :

$$\ln a = \ln 1 + c = 0 + c,$$

d'où $c = \ln a$ et finalement :

$$\ln(ax) = \ln x + \ln a \quad \text{pour tout réel } x \in]0\,,+\infty[.$$

□

Remarque 50.8. Si a et b sont strictement négatifs, on a une relation analogue :

$$\ln(ab) = \ln(-a) + \ln(-b)$$

et plus généralement, pour tout réels a et b de $\mathbb{R}^*$:

$$\ln|ab| = \ln|a| + \ln|b|\,.$$

Conséquence 50.9

Pour tous réels a et b strictement positifs :

1. $\ln \frac{1}{b} = -\ln b$,
2. $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$,
3. $\ln a^p = p \ln a$, $(p \in \mathbb{Z})$,
4. $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$.

Développement

Démonstration de la conséquence 50.9.

1. $0 = \ln 1 = \ln(b \times \frac{1}{b}) = \ln b + \ln \frac{1}{b}$ d'où $\ln \frac{1}{b} = -\ln b$.
2. $\ln \frac{a}{b} = \ln(a \times \frac{1}{b}) = \ln a + \ln \frac{1}{b} = \ln a - \ln b$.
3. Si $p > 0$ alors
$$\ln a^p = \ln(a \times a \times \cdots \times a) = \ln a + \ln a + \cdots + \ln a = p \ln a.$$
Si $p < 0$ alors
$$\ln a^p = \ln \frac{1}{a^{-p}} = -\ln(a^{-p}) = -(-p) \ln a = p \ln a.$$
4. Voir la section 50.6.

□

3 Etude de la fonction $\ln$

3.1 Limites aux bornes de l'ensemble de définition $]0\,,+\infty[$

Théorème 50.10

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

où $x \to 0^+$ signifie x tend vers 0 par valeurs supérieures.

Développement

Démonstration du théorème 50.10. On établie le deuxième résultat. Soit p un entier naturel. On a $\ln 2^p = p \ln 2$. D'où :

$$\lim_{p \to +\infty} \ln 2^p = \lim_{p \to +\infty} p \ln 2 = +\infty.$$

Soit x un nombre réel tel que $x \geq 2^p$. La fonction $\ln$ est strictement croissante, donc $\ln x \geq \ln 2^p$. On passe à la limite :

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x \geq \lim_{p \to +\infty} \ln 2^p.$$

Or, $\lim_{p \to +\infty} \ln 2^p = +\infty$ donc $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.
Le premier résultat en découle simplement par changement de variable :

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = \lim_{x \to +\infty} \ln \frac{1}{x} = -\lim_{x \to +\infty} \ln x = -\infty.$$

□

Théorème 50.11

La fonction $\ln$ est une bijection (strictement croissante) de $]0\,,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

Développement

Démonstration du théorème 50.11. La stricte croissance et la bijectivité ont déjà été établies. En outre, comme

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$$

et comme la fonction $\ln$ est continue, elle prend toutes les valeurs intermédiaires entre $-\infty$ et $+\infty$. l'intervalle image de $]0\,,+\infty[$ par la fonction $\ln$ est donc $\mathbb{R}$. □

3.2 Le nombre e

Puisque la fonction $\ln$ est une bijection de $]0\,,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, pour tout réel $\ln x = \lambda$ admet une unique solution dans $]0\,,+\infty[$.

Définition 50.12

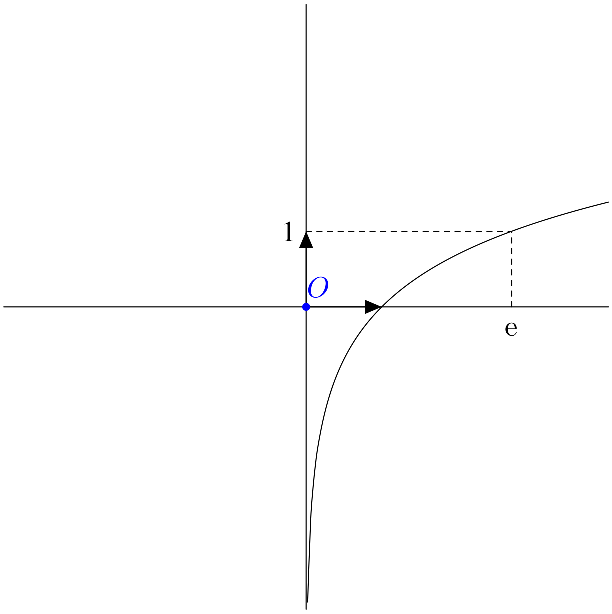
Base du logarithme népérien
On note e l'unique solution de l'équation $\ln x = 1$. Ce nombre e s'appelle *base* du logarithme népérien.

On a donc $\ln \mathrm{e} = 1$ et par la calculatrice, on obtient $\mathrm{e} \approx 2{,}718\ldots$. Plus généralement, $\ln \mathrm{e}^p = p \ln \mathrm{e} = p$.

Exemple 50.13. Soit à résoudre $\ln(x+3) = 9$, pour $x > -3$:

$$\ln(x+3) = \ln \mathrm{e}^9 \Leftrightarrow x+3 = \mathrm{e}^9 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^9 - 3 \approx 8100.$$

3.3 Représentation graphique de la fonction $\ln$



4 Limites de références

Lemme 50.14

La représentation graphique de la fonction $\ln$ est toujours située sous la première bissectrice $(y = x)$:

$$\ln x < x \text{ pour tout } x > 0.$$

Développement

Démonstration du lemme 50.14. On considère la fonction f définie sur $I =]0\,,+\infty[$ par $f(x) = x - \ln x$. Sa dérivée f' est définie sur I par :

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

On a $f'(x) > 0$ si et seulement si $x > 1$ d'où le tableau de variations de f :

x	0		1		$+\infty$
signe de f'	$\|\|$	$-$	0	$+$	
variations de f	$\|\|$	$\searrow$	1	$\nearrow$	

La fonction f admet un minimum m strictement positif en 1 :

$$m = f(1) = 1 - \ln 0 = 1.$$

Par conséquent, la fonction f est strictement positive pour tout réel x positif, d'où le lemme. $\square$

Remarque 50.15. On a même $\ln x \leq x - 1$, pour tout $x \in]0\,,+\infty[$.

Théorème 50.16

1. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$
2. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0, \qquad \text{(pour tout } n \in \mathbb{N}^*\text{)}.$$
3. $$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0$$
4. $$\lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0, \qquad \text{(pour tout } n \in \mathbb{N}^*\text{)}.$$
5. $$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1.$$

Développement

Démonstration du théorème 50.16. D'après le lemme précédent, on peut écrire, pour tout $x > 0$: $\ln\sqrt{x} < \sqrt{x}$:

$$\frac{1}{2}\ln x < \sqrt{x}$$

et pour $x > 1$, on a :

$$0 < \ln x < 2\sqrt{x} \Leftrightarrow 0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$, on a, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

On en déduit, comme simple conséquence que pour $n \geq 2$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{n-1}} \frac{\ln x}{x} = 0$$

car $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{n-1}} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. On établit maintenant la limite suivante à l'aide du changement de variable du type $X = \frac{1}{x}$:

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X} \ln\left(\frac{1}{X}\right) = \lim_{X\to+\infty} \left(-\frac{\ln X}{X}\right) = 0$$

d'après ce qui précède. On en déduit, comme simple conséquence que pour $n \geq 2$:

$$\lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = \lim_{x\to 0^+} x^{n-1} x \ln x = 0$$

car $\lim_{x\to 0^+} x^{n-1} = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$. Enfin, pour la dernière limite, on reconnaît l'accroissement moyen de la fonction $\ln$ en $x_0 = 1$ La limite est donc égale au nombre dérivé de la fonction $\ln$ en x_0 soit $\frac{1}{x_0}$:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1.$$

□

Remarque 50.17. La dernière limite peut s'écrire sous d'autres formes :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1 \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to+\infty} x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1.$$

Corollaire 50.18

Pour toute fonction polynôme P de degré supérieur ou égal à 1, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{P(x)} = 0.$$

Développement

Démonstration du corollaire 50.18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ le degré de P. Notons $P(x) = \sum_{p=0}^{n} a_p x^p$ (avec $a_n \neq 0$). Comme la limite en $+\infty$ d'une fonction polynôme P est égale à la limite de son terme de plus haut degré, nous avons

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{P(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{a_n x^n} = 0$$

puisque $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$. □

Exemples 50.19.

1. On veut étudier la limite suivante :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x}.$$

On a :

$$\frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{\ln(x+1)}{x+1} \times \frac{x+1}{x}.$$

Or, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = 1$ et

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \lim_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$$

D'où par produit,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = 0.$$

2. On veut étudier la limite suivante :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

En remarquant que $x = (\sqrt{x})^2$, nous avons :

$$\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \frac{2\ln\sqrt{x}}{x}.$$

En posant $X = \sqrt{x}$ ($X \to +\infty$), nous obtenons :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{X\to+\infty} 2\frac{\ln X}{X} = 0.$$

Par un raisonnement analogue, on peut montrer que :

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x = 0.$$

5 Dérivées et primitives

Théorème 50.20

Soit u une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I. La fonction définie par $\ln u$ est dérivable sur I et :

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}.$$

C'est une conséquence du théorème de dérivation d'une fonction composée.

Théorème 50.21

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Une primitive de $\frac{u'}{u}$ sur I est $\ln|u|$.

Pour la démonstration de ce théorème, on peut utiliser le précédent en dérivant $\ln|u|$. On distinguera les intervalles où $u > 0$ de ceux où $u < 0$.

Exemple 50.22. On veut dériver sur $]0\,,+\infty[$ la fonction

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) = \ln(x^2+1) - \ln(x).$$

On obtient :

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x}.$$

6 Exponentielles de base a

Définition 50.23

Pour tout nombre réel a strictement positif et tout nombre réel b, on pose :

$$a^b = \mathrm{e}^{b\ln a}.$$

Remarques 50.24.

1. Cette définition donne un sens à une écriture telle que $\pi^{\sqrt{2}}$.
2. Elle est cohérente avec la puissance rationnelle d'un nombre $3^{1/2} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\ln 3}$. Or $\frac{1}{2}\ln 3 = \ln\sqrt{3}$ donc $3^{1/2} = \mathrm{e}^{\ln\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

Exemples 50.25Sur calculatrice TI82

.

```
> Pi^(V^(2))=e^(V^(2)*ln(Pi))
1
> Pi^(V^(2))
5.047487267
> e^(3*ln(2))
8
> (-3)^5
-243
> (-3)^(Pi)
ERR:REP NONREEL
1:Quitter [EXE]
> 3^(-Pi)
.0317014678
```

Propriété 50.26

Pour tous nombres réels a et a' strictement positifs et tous nombres réels b et b' :

1. $\ln a^b = b \ln a$.
2. $a^{b+b'} = a^b a^{b'}$.
3. $a^{b-b'} = \frac{a^b}{a^{b'}}$
4. $(a^b)^{b'} = a^{bb'}$.
5. $(aa')^b = a^b a'^b$.
6. $\left(\frac{a}{a'}\right)^b = \frac{a^b}{a'^b}$.

Remarque 50.27. Les propriétés des puissances d'exposants entiers s'étendent, pour les nombres strictement positifs, aux puissances d'exposants réels.

Exemples 50.28.

1. $\left(\frac{1}{2}\right)^\pi = \frac{1}{2^\pi} = 2^{-\pi}$,
2. $3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}} = 3^{1-\sqrt{2}}$.

Définition 50.29

Exponentielle de base a

Soit a un nombre réel strictement positif et différent de 1. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto a^x$ par $a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$. On l'appelle fonction *exponentielle de base a*.

Exemples 50.30.

1. La fonction $f : x \mapsto 5^x$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $5^x = \mathrm{e}^{x \ln 5}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$f'(x) = \ln 5 \times \mathrm{e}^{x \ln 5} = \ln 5 \times 5^x.$$
2. La fonction $g : x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \mathrm{e}^{x \ln \frac{1}{2}} = \mathrm{e}^{-x \ln 2}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$g'(x) = -\ln 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

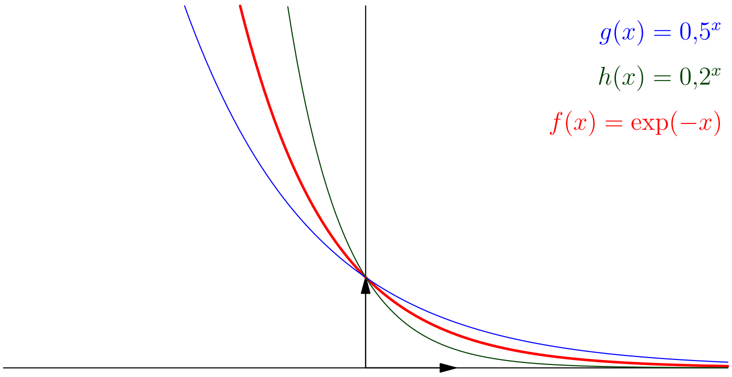
On peut tracer le tableau de variations de $x \mapsto a^x$ en distinguant deux cas :

1. Si $0 < a < 1$:

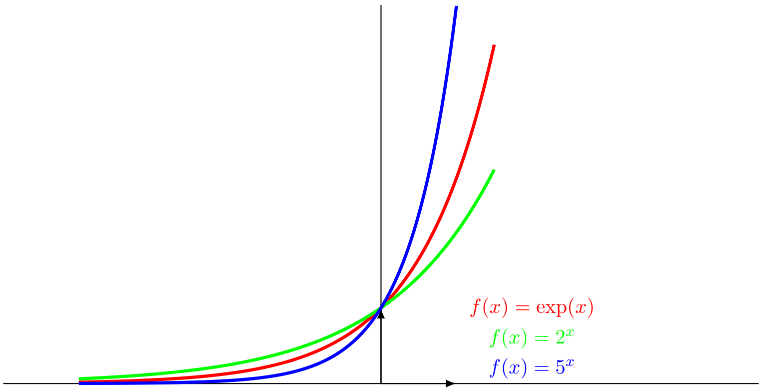
x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
a^x	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	a	$\searrow$	0

2. Si $1 < a$:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
a^x	0	$\nearrow$	a	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



(a) $0 < a < 1$



(b) $1 < a$

FIGURE 50.2 – Représentation graphique de $x \mapsto a^x$

7 Applications

7.1 Le logarithme n'est pas une fonction rationnelle

Proposition 50.31 La fonction logarithme népérien n'est pas une fonction rationnelle.

Développement

Démonstration. On raisonne par l'absurde : supposons que $\ln$ est rationnelle. Alors il existe deux fonctions P et Q telles que $\ln = \frac{P}{Q}$.

On a : $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ donc $\deg P \deg Q$. De même $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ donc $\deg P > \deg Q + 1$. $\square$

Remarque 50.32. On peut simplifier la démonstration sans utiliser les croissances comparées. On raisonne toujours par l'absurde en supposant que $\ln = \frac{P}{Q}$ avec P et Q deux polynômes premiers enter eux. En dérivant membre à membre on obtient :

$$\frac{1}{X} = \frac{P'Q - Q'P}{Q^2} \Leftrightarrow Q^2 = XP'Q - XQ'P.$$

7.2 Image d'une suite géométrique

Proposition 50.33 L'image d'une suite géométrique de raison $r > 0$ par la fonction logarithme est une suite arithmétique de raison $\ln r$.

Développement

Démonstration. La preuve est immédiate en utilisant les propriétés algébriques du logarithme. □

7 3 Approximation du logarithme népérien d'un réel

Proposition 50.34

Soit $a > 1$ et soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = a$ et pour tout $n > 0$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$. Alors la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie pour tout $n \geq 0$, $v_n = 2^n(u_n - 1)$ converge vers $\ln a$.

Développement

Démonstration. On montre tout d'abord que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 1.

$$\forall n > 0, \quad u_{n+1} - 1 = \sqrt{u_n} - 1 = \frac{u_n - 1}{\sqrt{u_n} + 1} \leq \frac{1}{2}(u_n - 1).$$

D'où, pour tout $n \geq 0$, $0 \leq u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (x - 1)$. Par le théorème de comparaison, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$. Montrons que $(v_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\ln(a)$. En étudiant les fonctions $f\colon h \mapsto h - \frac{h^2}{2} \leq \ln(1+h)$ et $g\colon h \mapsto h \leq \ln(1+h)$, on montre que :

$$\forall h > 0, h - \frac{h^2}{2} \leq \ln(1 + h) \leq h.$$

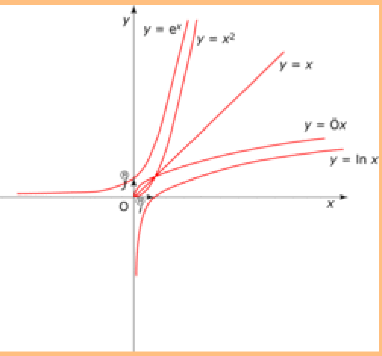
De cette inégalité, on en déduit que :

$$\forall n \geq 0, \quad -\frac{(a-1)^2}{2^{n+1}} \leq \ln(a) - v_n \leq 0.$$

Ce qui prouve que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0. □

LEÇON 51

Croissance comparée des fonctions réelles $x \mapsto \mathrm{e}^x$, $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto \ln x$



Niveau : Terminale S
Prérequis : fonctions exponentielles et logarithmes, théorème des gendarmes.

1 Introduction

1.1 Rappel sur les formes indéterminées

Propriété 51.1

Les formes indéterminées sont de quatre types :

1. du type $\infty - \infty$
2. du type $0 \times \infty$
3. du type $\frac{\infty}{\infty}$
4. du type $\frac{0}{0}$

1.2 Croissance comparée, à quoi ça sert ?

Les croissances comparées permettent de lever ce genre d'indétermination. Elles interviennent quand on calcule une limite :

– d'un rapport ou un produit d'une fonction puissance et un logarithme ;

– d'un rapport ou un produit d'une fonction puissance et une exponentielle.

On établit donc un « rapport de force » entre ces classes de fonctions. On va dire qu'une classe de fonction tend plus au moins rapidement vers l'infini qu'une autre classe de fonction. Du plus fort au plus faible, on a :

– exponentielles ;

– puissances ;

– logarithmes.

Cela se voit encore mieux sur un graphique (voir la figure 51.1).

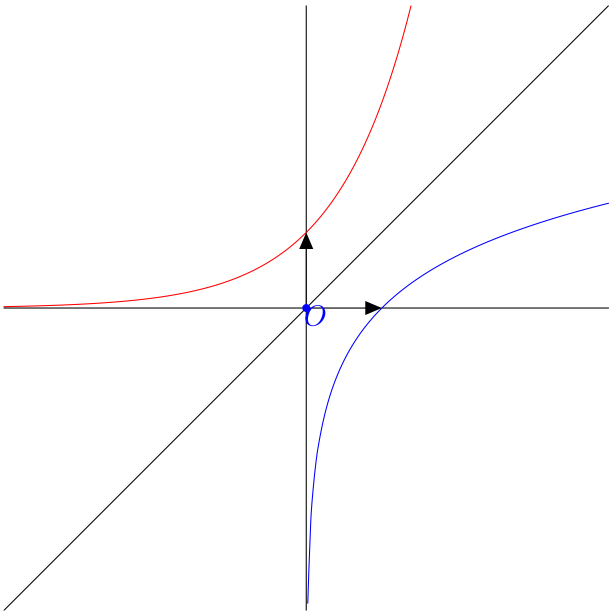


FIGURE 51.1 – Croissances comparées

Théorème 51.2

1.
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

2.
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0, \qquad \text{(pour tout } n \in \mathbb{N}^*\text{)}.$$

3.
$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0$$

4.
$$\lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0, \qquad \text{(pour tout } n \in \mathbb{N}^*\text{)}.$$

Développement

Démonstration du théorème 51.2. On peut écrire, pour tout $x > 0$: $\ln\sqrt{x} < \sqrt{x}$:

$$\frac{1}{2}\ln x < \sqrt{x}$$

et pour $x > 1$, on a :

$$0 < \ln x < 2\sqrt{x} \Leftrightarrow 0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$, on a, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

On en déduit, comme simple conséquence que pour $n \geq 2$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{n-1}} \frac{\ln x}{x} = 0$$

car $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{n-1}} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. On établit maintenant la limite suivante à l'aide du changement de variable du type $X = \frac{1}{x}$:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X} \ln\left(\frac{1}{X}\right) = \lim_{X\to+\infty} \left(-\frac{\ln X}{X}\right) = 0$$

d'après ce qui précède. On en déduit, comme simple conséquence que pour $n \geq 2$:

$$\lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = \lim_{x\to 0^+} x^{n-1} x \ln x = 0$$

car $\lim_{x\to 0^+} x^{n-1} = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$. Enfin, pour la dernière limite, on reconnaît l'accroissement moyen de la fonction $\ln$ en $x_0 = 1$ La limite est donc égale au nombre dérivé de la fonction $\ln$ en x_0 soit $\frac{1}{x_0}$:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1.$$

□

Corollaire 51.3

Pour toute fonction polynôme P de degré supérieur ou égal à 1, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{P(x)} = 0.$$

Développement

Démonstration du corollaire 51.3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ le degré de P. Notons $P(x) = \sum_{p=0}^{n} a_p x^p$ (avec $a_n \neq 0$). Comme la limite en $+\infty$ d'une fonction polynôme P est égale à la limite de son terme de plus haut degré, nous avons

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{P(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{a_n x^n} = 0$$

puisque $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$. □

Exemples 51.4.

1. On veut étudier la limite suivante :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x}.$$

On a :

$$\frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{\ln(x+1)}{x+1} \times \frac{x+1}{x}.$$

Or, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = 1$ et

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \lim_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$$

D'où par produit,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = 0.$$

2. On veut étudier la limite suivante :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

En remarquant que $x = (\sqrt{x})^2$, nous avons :

$$\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \frac{2\ln\sqrt{x}}{x}.$$

En posant $X = \sqrt{x}$ ($X \to +\infty$), nous obtenons :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{X\to+\infty} 2\frac{\ln X}{X} = 0.$$

Par un raisonnement analogue, on peut montrer que :

$$\lim_{x\to0^+} \sqrt{x}\ln x = 0.$$

3 Croissance comparée des fonctions puissances et exponentielles

Propriété 51.5

Limites fondamentales

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$,
2. $\lim_{x\to-\infty} x e^x = 0$.

Développement

Démonstration de la propriété 51.5. On a vu que, pour tout x, $\mathrm{e}^x \geq x$. Donc, pour tout x, $\mathrm{e}^{x/2} \geq \frac{x}{2}$ et, pour tout $x \geq 0$,

$$(\mathrm{e}^{x/2})^2 \geq \left(\frac{x}{2}\right)^2,$$

soit $\mathrm{e}^x \geq \frac{x^2}{4}$. Or, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{4} = +\infty$. D'après un des « théorèmes des gendarmes », on obtient

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty.$$

On a $x\mathrm{e}^x = \frac{x}{\mathrm{e}^{-x}}$. En posant $X = -x$, on a $x\mathrm{e}^x = -\frac{X}{\mathrm{e}^X}$. Or

$$\lim_{X\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty$$

donc

$$\lim_{X\to+\infty} \frac{X}{\mathrm{e}^X} = 0$$

et, par suite, $\lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$. □

Conséquence 51.6

Pour tout nombre entier n strictement positif :

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$.
2. $\lim_{x\to-\infty} x^n\mathrm{e}^x = 0$.

Développement

Démonstration de la conséquence 51.6.

1. Comme $\mathrm{e}^x > 0$:

$$\frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = \left(\frac{\mathrm{e}^{x/n}}{x}\right)^n$$

soit

$$\frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = \left(\frac{\mathrm{e}^{x/n}}{\frac{nx}{n}}\right)^n.$$

Or $\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty$ donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{x/n}}{x/n} = +\infty.$$

En composant avec la fonction puissance, on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{x/n}}{n\frac{x}{n}}\right)^n = +\infty$$

d'où

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty.$$

2. On pose $x = -X$, $x^n\mathrm{e}^x = (-X)^n\mathrm{e}^{-X}$, soit $x^n\mathrm{e}^x = (-1)^n\frac{X^n}{\mathrm{e}^x}$. Donc :

$$\lim_{x\to-\infty} x^n\mathrm{e}^x = \lim_{X\to+\infty} (-1)^n \frac{X^n}{\mathrm{e}^X}.$$

On vient de montrer que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$, donc

$$\lim_{X\to+\infty} (-1)^n \frac{X^n}{\mathrm{e}^X} = 0.$$

D'où : $\lim_{x\to-\infty} x^n\mathrm{e}^x = 0$.

□

Exemples 51.7.

1. Soit $f : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x}{x^{10}}$,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

2. Soit $g : x \mapsto x^{1000}\mathrm{e}^x$,

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0.$$

Remarque 51.8. Pour les limites en $+\infty$ et et en $-\infty$, on retiendra que « exp l'emporte sur x ».

Exemples 51.9.

1. Soit à calculer
$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x + x^2 + 1.$$
Ici, nous n'avons pas besoin des croissances comparées pour déterminer la limite car :
$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$$
et donc
$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x + x^2 + 1 = +\infty.$$
2. Soit à calculer
$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x - x^2.$$
Ici, on tombe sur une forme indéterminée du type $\infty - \infty$. On remarque alors que :
$$\mathrm{e}^x - x^2 = \mathrm{e}^x \left(1 - \frac{x^2}{\mathrm{e}^x}\right)$$
Or, par croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^x} = 0$, ainsi
$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x - x^2 = +\infty.$$
3. Soit à calculer
$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) - x^2 + 2x + 1.$$
Ici, on tombe sur une forme indéterminée du type $\infty - \infty$. On remarque alors que :
$$\ln(x) - x^2 + 2x + 1 = x^2 \left(\frac{\ln(x)}{x^2} - 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right).$$
Or, par croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ donc
$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) - x^2 + 2x + 1 = -\infty.$$
4. Soit à calculer
$$\lim_{x\to0^-} \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{1/x}.$$
On rencontre donc une forme indéterminée du type $+\infty \times 0$. On pose $u = \frac{1}{x}$, on a donc
$$\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{1/x} = u^2\mathrm{e}^u.$$
On a
$$\lim_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$
et, par croissances comparées, $\lim_{u\to-\infty} u^2\mathrm{e}^u = 0$. Donc, par composition :
$$\lim_{x\to0^-} \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{1/x} = 0.$$

5 Applications

5.1 Branches infinies des courbes des fonctions $\ln$ et $\exp$

Propriété 51.10

Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, les courbes représentatives des fonctions $\ln$ et $\exp$ admettent des branches paraboliques de directions respectives $(O, \vec{\imath})$ et $(O, \vec{\jmath})$.

Développement

Démonstration de la propriété 51.10. En effet,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty.$$

□

5.2 Détermination de limites

Exemples 51.11.

1. Soit à calculer
$$\lim_{x\to 0^+} x^x.$$
Comme $x > 0$, on peut écrire :
$$x^x = \mathrm{e}^{x\ln x}$$
Or, par croissances comparées :
$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0.$$
Donc, par composition
$$\lim_{x\to 0^+} x^x = 1.$$
2. Soit à calculer
$$\lim_{x\to+\infty} (\ln x)^{(\ln x)^{-\alpha}}, \qquad \text{avec } \alpha > 0.$$
On a tout d'abord :
$$\ln(x)^{-\alpha} = \mathrm{e}^{-\alpha\ln(\ln(x))}$$
et ainsi :
$$(\ln(x))^{(\ln x)^{-\alpha}} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-\alpha\ln(\ln(x))}\ln(\ln(x))}$$
Or, pour $\alpha > 0$,
$$\lim_{x\to+\infty} -\alpha\ln\ln(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \ln(\ln(x)) = +\infty$$
mais par croissances comparées, « l'exponentielle l'emporte sur le logarithme » donc :
$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha\ln(\ln(x))}\ln(\ln(x)) = 0$$
et par composition
$$\lim_{x\to+\infty} (\ln(x))^{(\ln(x))^{-\alpha}} = 1.$$
3. On considère la fonction définie sur $[0\,,1]$ par :
$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{\ln(x)}\right) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

On veut étudier la dérivabilité de f en 0 et 1. On a :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\ln(x)} = 0,$$

d'où

$$\lim_{x\to +\infty} \exp\left(\frac{1}{\ln x}\right) = 1$$

et

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\ln x} = -\infty,$$

d'où

$$\lim_{x\to 1^-} \exp\left(\frac{1}{\ln x}\right) = 0.$$

Donc f est continue sur $[0\,,1]$, de plus elle est dérivable sur $]0\,,1[$ avec :

$$f'(x) = \frac{-1}{x(\ln x)^2}\exp\left(\frac{1}{lnx}\right).$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty,$$

donc f est non dérivable en 0. Puisque $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\ln x} = -\infty$ alors,

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{-1}{(\ln x)^2}\exp\left(\frac{1}{\ln x}\right) = 0$$

d'où $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = 0$, elle est donc dérivable à gauche en 1.

5 3 Une intégrale convergente

On considère l'intégrale (dépendant de x) :

$$\varphi(h) := \int_1^h t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

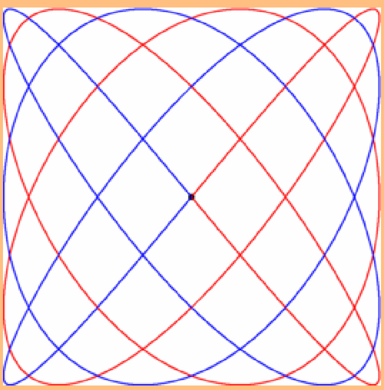
On montre que φ admet une limite finie en $+\infty$. Pour tout réel x fixé, $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est équivalent en $+\infty$ à $t \mapsto \frac{1}{t^2}$. On en déduit qu'il existe un réel $A > 1$ tel que pour tout $h > A$ on ait

$$0 \leq \varphi(h) \leq \int_A^h t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \leq \int_A^h \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{h} + \frac{1}{A} \leq \frac{1}{A}.$$

Donc φ est uniformément bornée, d'où le résultat.

LEÇON 52

Courbes planes définies par des équations paramétriques



Niveau : BTS

Prérequis : fonctions, fonctions dérivables, limites, transformations planes, trigonométrie, coniques

1 Fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ ou dans $\mathbb{R}^2$

Soit $f : I \to \mathbb{C}$. On pose $\mathrm{Re}\, f = u$ et $\mathrm{Im}\, f = v$. Les fonctions u et v ainsi définies sont à valeurs dans $\mathbb{R}$. On a, pour tout t dans I :

$$f(t) = u(t) + \mathrm{i}v(t).$$

Toute fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$, est ainsi associée à deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On note $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des couples de nombres réels

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y),\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}.$$

Soit $f : I \to \mathbb{R}^2$. la donnée d'une telle fonction f revient à la donnée de deux fonctions u et v, définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$, telles que, pour tout t dans I :

$$f(t) = (u(t), v(t)).$$

Dans $\mathbb{R}^2$, les règles de calcul sont les suivantes :

– la somme de deux couples est définie par :

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

– la produit d'un couple par un nombre réel est définie par :

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y).$$

Ces règles sont celles utilisées pour les coordonnées des vecteurs du plan depuis la classe de seconde. Ce qui a été énoncé concernant la continuité et la dérivabilité, dans le chapitre consacré au calcul différentiel et intégral s'applique aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, comme à celles à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

Définition 52.1

Dérivabilité

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ (respectivement $f : I \to \mathbb{R}^2$). On dit que f est *dérivable* en $t_0 \in I$ lorsque [a]

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(t_0 + h) - f(t_0))$$

existe et est un élément de $\mathbb{C}$ (respectivement un élément de $\mathbb{R}^2$).

a. La fraction $\frac{1}{h}$ n'étant pas définie pour $h = 0$, on ne prendra pas la précaution de signaler que les limites ci-après sont calculées pour $h \neq 0$

Définition 52.2

Dérivée

On suppose que $f : I \to \mathbb{C}$ (respectivement $f : I \to \mathbb{R}^2$) est dérivable en $t_0 \in I$. La dérivée de f en $t_0 \in I$, notée $f'(t_0)$ est définie par :

$$f'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(t_0 + h) - f(t_0)).$$

Théorème 52.3

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ (respectivement $f : I \to \mathbb{R}^2$). Soient $u : I \to \mathbb{R}$ et $v : I \to \mathbb{R}$ telles que $f = u + \mathrm{i}v$ (respectivement $f = (u, v)$). f est dérivable en $t_0 \in I$ si et seulement si u et v le sont, et dans ce cas :

$$f'(t_0) = u'(t_0) + \mathrm{i}v'(t_0) \quad \text{(respectivement } f'(t_0) = (u'(t_0), v'(t_0))\text{)}.$$

Développement

Démonstration du théorème 52.3. Soient $t_0 \in I$ et h un nombre réel différent de 0 tel que $t_0 + h \in I$. On sait que, par définition,

$$f'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}.$$

Or,

$$\frac{1}{h}(f(t_0 + h) - f(t_0)) = \frac{1}{h}(u(t_0 + h) - u(t_0)) + \mathrm{i}\left(\frac{1}{h}(v(t_0 + h) - v(t_0))\right)$$

(respectivement :

$$\frac{1}{h}(f(t_0 + h) - f(t_0)) = \left(\frac{1}{h}(u(t_0 + h) - u(t_0)), \frac{1}{h}(v(t_0 + h) - v(t_0))\right).)$$

D'où le résultat. □

Définition 52.4

Fonction de classe $\mathcal{C}^n$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{C}$ (respectivement, dans $\mathbb{R}^2$). On dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I lorsque f est n fois dérivable sur I et lorsque la dérivée n^{e} de f est continue sur I.

Théorème 52.5

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ (respectivement $f : I \to \mathbb{R}^2$). Soient u et v les fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$, telles que $f + u + \mathrm{i}v$ (respectivement $f = (u, v)$). f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si et seulement si u et v sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. Lorsque f est $\mathcal{C}^n$ sur I, pour tout tout entier k, $0 \leq k \leq n$,

$$f^{(k)} = u^{(k)} + \mathrm{i}v^{(k)} \quad \text{(respectivement } f^{(k)} = (u^{(k)}, v^{(k)})\text{).}$$

On peut démontrer ce théorème par récurrence sur l'ordre de la dérivée, en utilisant ce qui a été prouvé pour la dérivée.

Définition 52.6

Fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$

Soit f une fonction définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{C}$ (respectivement dans $\mathbb{R}^2$). On dit que f est *de classe* $\mathcal{C}^\infty$ sur I lorsque f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

2 Courbes paramètres : paramétrisation cartésienne

Le plan $\mathcal{P}$ est muni du repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 52.7

Fonction vectorielle

Soient u et v des fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit alors que la fonction $\vec{f}$ définie pour tout t dans I par :

$$\vec{f}(t) = u(t)\vec{\imath} + v(t)\vec{\jmath}$$

est une *fonction vectorielle*.

On constate à la lecture de cette définition qu'à toute fonction vectorielle correspond une unique fonction $f : I \to \mathbb{C}$ telle que, pour tout t dans I, $f(t)$ est l'affixe du vecteur $\vec{f}(t)$. De même, qu'à chaque fonction vectorielle définie sur I, correspond une unique fonction $f : I \to \mathbb{R}^2$, telle que, pour tout t dans I, $f(t)$ sont les coordonnées du vecteur $\vec{f}(t)$. Cette définition est donnée ici car elle figure dans certains sujets de BTS. Elle permet aussi de définir la notion de courbe paramétrée. Cependant, on pourrait définir la notion de courbe paramétrée sans faire explicitement référence aux fonctions à valeurs vectorielles.

Définition 52.8

Courbe paramétrée (paramétrisation cartésienne)

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ (respectivement $f : I \to \mathbb{R}^2$) une fonction de classe au moins $\mathcal{C}^0$ sur I. Soit $\overrightarrow{f}$ la fonction vectorielle définie sur I, telle que pour tout t dans I, $\overrightarrow{f}(t)$ a pour affixe $f(t)$ (respectivement $\overrightarrow{f}(t)$ a pour coordonnées $f(t)$). Le sous ensemble Γ de $\mathcal{P}$ défini par :

$$\Gamma = \left\{ M(t) \in \mathcal{P},\ \exists t \in I,\ \overrightarrow{OM(t)} = \overrightarrow{f}(t) \right\}$$

est une courbe paramétrée.

Définition 52.9

Vecteur position

Avec les notations de la définition 52.8, le vecteur $\overrightarrow{OM(t)}$ est appelé *vecteur position*.

Définition 52.10

Avec les notations de la définition précédente, f est une paramétrisation cartésienne de la courbe paramétrée Γ.

- Les coures représentatives des fonctions continues et à valeurs réels sont des courbes paramétrées. En effet, considérons $g : I \to \mathbb{R}$ continue. Alors, la courbe Γ représentative de g dans le repère $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ du plan $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points $M(t)$, $t \in I$, du plan dont les coordonnées sont, pour tout t dans I : $(t, g(t))$. Posons alors $f : I \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, g(t))$. f est une fonction continue sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. f est une paramétrisation de Γ.
- Tout cercle est une courbe paramétrée. Soit C le cercle de centre Ω et de rayon R. Notons (x_Ω, y_Ω) les coordonnées de Ω. Soit $f : [0\,, 2\pi[\to \mathbb{C}$ définie par :

  $$f(t) = x_\Omega + \mathrm{i} y_\Omega + R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}.$$

  f est une paramétrisation de C. On remarquera que $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x_\Omega + \mathrm{i} y_\Omega + R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi t}$, est une paramétrisation différente du même cercle C.

Exemple 52.11. Γ de paramétrisation

$$\begin{array}{rccl} f & : & [-\pi\,, \pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & t & \mapsto & (\sin t + \cos 2t, \cos t + \sin 2t) \end{array}$$

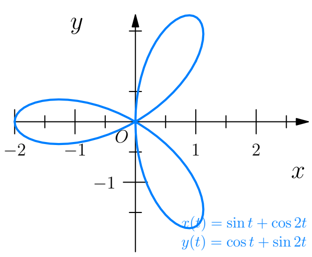


FIGURE 52.1 – Représentation graphique de Γ

Définition 52.12

Point régulier

Soit f une paramétrisation de la courbe Γ. Soit $P_0 \in \Gamma$ d'affixe (de coordonnées) $f(t_0)$. On dit que P_0 est un point régulier, dans la paramétrisation de f, lorsque $f'(t_0) \neq 0$, $(f'(t_0) \neq (0,0))$, f' désignant la dérivée de f.

Définition 52.13

Tangente à une courbe paramétrée

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ (respectivement $f : I \to \mathbb{R}^2$) de classe au moins $\mathcal{C}^1$ sur I. Soit Γ la courbe du plan paramétrée par f. Soit $t_0 \in I$. Soit P_0 le point régulier de Γ, dans la paramétrisation f, d'affixe (resp. de coordonnées) $f(t_0)$. Soit $\overrightarrow{V_0}$ le vecteur d'affixe (resp. de coordonnées) $f'(t_0)$. La *tangente à* Γ *en* P_0 est la droite D_0 passant par P_0 et de vecteur directeur $\overrightarrow{V_0}$.

Cette notion correspond à la notion habituelle de tangente lorsque la courbe Γ est la courbe représentative d'une fonction. En effet, si Γ est la courbe représentative de la fonction φ, $f : t \mapsto t + i\varphi(t)$ est une paramétrisation de Γ. On a alors $f' = 1 + i\varphi'$. Un vecteur directeur d'affixe $1 + i\varphi'$ correspond à un coefficient directeur de tangente égal à φ'.

Théorème 52.14

Soient u et v des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. La fonction vectorielle $\vec{f} = u\vec{\imath} + v\vec{\jmath}$ est de classe $\mathcal{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$ ou $n = +\infty$, si et seulement si les fonctions u et v le sont. Lorsque $\vec{f}$ est $\mathcal{C}^n$, on a pour tout entier k tel que $k \leq n$,

$$\vec{f}^{(k)} = u^{(k)}\vec{\imath} + v^{(k)}\vec{\jmath}.$$

Remarque 52.15. Le vecteur $\vec{V_0}$ de la définition 52.13 est égal à $\vec{f}'(t_0)$, si $\vec{f}$ est la fonction à valeurs vectorielles associée [1] à f.

Définition 52.16

Vecteur vitesse

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ (resp. $f : I \to \mathbb{R}^2$) une paramétrisation cartésienne de la courbe Γ. On suppose f au moins $\mathcal{C}^1$ sur I. Pour tout t dans I, le vecteur $\overrightarrow{V(t)}$ d'affixe (resp. de coordonnées) $f'(t)$ est appelé *vecteur vitesse au point de paramètre t*.

3 Courbe paramétrée : paramétrisation polaire

Le plan $\mathcal{P}$ est muni du repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 52.17

Courbe paramétrée (paramétrisation polaire)

Soient $\rho : I \to [0, +\infty[$ et $\theta : I \to \mathbb{R}$. Soit

$$f : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \rho(t)e^{i\theta(t)} \end{array}.$$

On suppose que f est de classe au moins $\mathcal{C}^0$. Alors, le sous-ensemble Γ de $\mathcal{P}$ défini par :

$$\Gamma = \left\{ M(t) \in \mathcal{P},\ \exists t \in I,\ \overrightarrow{OM(t)} = \rho(t)(\cos(\theta(t))\vec{\imath} + \sin(\theta(t))\vec{\jmath}) \right\}$$

est une courbe paramétrée.

Définition 52.18

Vecteur position

Avec les notations de la définition 52.17, le vecteur $\overrightarrow{OM(t)}$ est appelé *vecteur position*.

Définition 52.19

Paramétrisation polaire

Avec les notations de la définition 52.17, on dit que f est une paramétrisation *polaire* de Γ.

Exemple 52.20. Soient ρ et θ les fonctions définies sur $[0, 2\pi]$ par $\rho(t) = 1 + \cos t$ et $\theta(t) = t$. La courbe de paramétrisation polaire $f = \rho \exp(i\theta)$ est appelée *cardioïde*.

Théorème 52.21

Soient $\rho : I \to [0, +\infty[$ et $\theta : I \to \mathbb{R}$. Soit

$$f : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \rho(t)\exp(i\theta(t)). \end{array}$$

On suppose f dérivable en $t_0 \in I$. Alors :

$$f'(t_0) = \rho'(t_0)\exp(i\theta(t_0)) + i\rho(t_0)\theta'(t_0)\exp(i\theta(t_0)).$$

1. « associée » signifie : $\vec{f}(t)$ a pour coordonnées, pour affixe, $f(t)$, quel que soit t dans I.

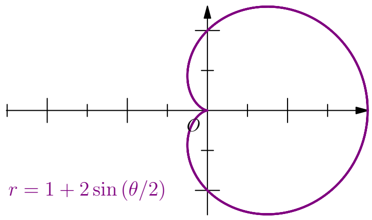


FIGURE 52.2 – Cardioïde

Pour la démonstration, il suffit d'utiliser la formule de dérivation d'un produit, ainsi que celle de dérivations des fonctions composées.

Théorème 52.22

Soient $\rho : I \to [0\,,+\infty[$ et $\theta : I \to \mathbb{R}$. Soit :

$$\begin{array}{cccc} f & : & I & \to & \mathbb{C} \\ & & t & \mapsto & \rho(t)\exp(\mathrm{i}\theta(t)) \end{array}$$

f est de classe $\mathcal{C}^n$ si et seulement si ρ et θ le sont.

La démonstration se fait par récurrence sur l'entier n, et elle utilise la dérivation d'un produit ainsi que la dérivation des fonctions composées.

Définition 52.23

Tangente à une courbe paramétrée

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ (respectivement $f : I \to \mathbb{R}^2$) de classe au moins $\mathcal{C}^1$ sur I. Soit Γ la courbe du plan paramétrée par f. Soit $t_0 \in I$. Soit P_0 le point régulier de Γ, dans la paramétrisation f, d'affixe (resp. de coordonnées) $f(t_0)$. Soit $\overrightarrow{V_0}$ le vecteur d'affixe (resp. de coordonnées) $f'(t_0)$. La *tangente à* Γ *en* P_0 est la droite D_0 passant par P_0 et de vecteur directeur $\overrightarrow{V_0}$.

Définition 52.24

Vecteur vitesse

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ (resp. $f : I \to \mathbb{R}^2$) une paramétrisation cartésienne de la courbe Γ. On suppose f au moins $\mathcal{C}^1$ sur I. Pour tout t dans I, le vecteur $\overrightarrow{V(t)}$ d'affixe (resp. de coordonnées) $f'(t)$ est appelé *vecteur vitesse au point de paramètre* t.

Remarque 52.25. Le théorème 52.21 permet de donner les coordonnées du vecteur vitesse dans un repère appelé *le repère mobile des coordonnées polaires*. En effet, posons pour tout t dans I :

$$\overrightarrow{u_{\theta(t)}} = \cos(\theta(t))\,\vec{\imath} + \sin(\theta(t))\,\vec{\jmath} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v_{\theta(t)}} = -\sin(\theta(t))\,\vec{\imath} + \cos(\theta(t))\,\vec{\jmath}.$$

Pour tout t dans I, ces deux vecteurs forment un repère orthonormé (direct) [2]. On a alors

$$\overrightarrow{OM(t)} = \rho(t)\overrightarrow{u_{\theta(t)}} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{V(t)} = \frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{OM(t)}) = \rho'(t)\overrightarrow{u_{\theta(t)}} + \rho(t)\theta'(t)\overrightarrow{v_{\theta(t)}}.$$

On remarque qu'en un point régulier où ρ' s'annule, le vecteur vitesse (qui dirige la tangente) est orthogonal au vecteur position.

2. Les deux vecteurs sont clairement de norme 1. Ils forment un angle de $\frac{\pi}{2}$ radians car $\cos(\alpha + \pi/2) = -\sin\alpha$ et $\sin(\alpha + \pi/2) = \cos\alpha$, quel que soit α dans $\mathbb{R}$.

4.1 L'ellipse

Proposition 52.26

La représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = a\cos(t) \\ y(t) = b\sin(t) \end{cases}, \quad t \in [0\,,2\pi[$$

est celle d'une ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a < b)$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Développement

Démonstration.

$$\frac{a^2\cos^2 t}{a^2} + \frac{b^2\sin^2 t}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \qquad \text{avec } t \in [0\,,2\pi[.$$

Donc :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t) = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ b\cos t \end{pmatrix}, \quad t \in [0\,,2\pi[.$$

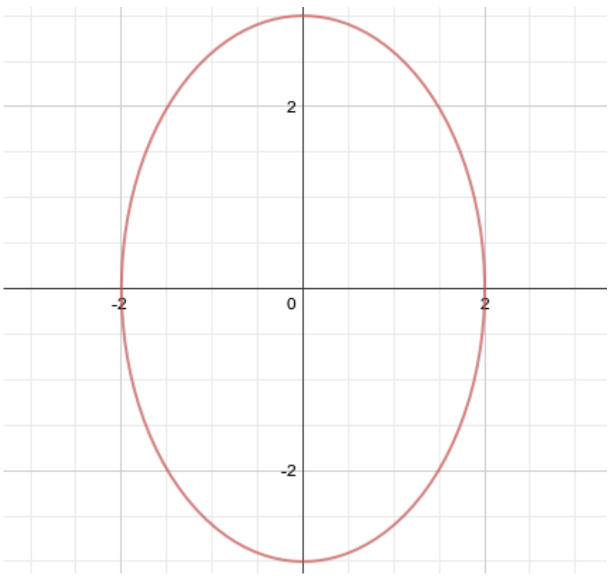
□

Remarque 52.27. Les points $M(0)$ et $N(\pi)$ admettent une tangente verticale et les points $P(\pi/2)$ et $Q(-\pi/2)$ une tangente horizontale.

Exemple 52.28. Considérons la courbe $\mathcal{C}$ définie par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = f(t) = 2\cos t \\ y = g(t) = 3\sin t \end{cases}, \quad (t \in \mathbb{R})$$

Voici sa représentation graphique :



On remarque deux axes de symétrie : l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées. On peut ainsi seulement étudier l'arc de courbe entre les points $(2,0)$ et $(0,3)$ (dans le sens direct). Cela revient à étudier sur l'intervalle $[0\,,\pi/2[$. Cela découle de la parité des fonctions coordonnées.

En généralisant, on peut réduire l'intervalle d'étude en mettant en relief les parités des fonctions communément appelées f et g.

4 2 Courbes de Lissajous

Définition 52.29

Courbe de Lissajous

Soient a, b, m et n des réels positifs. Les courbes d'équations paramétriques :

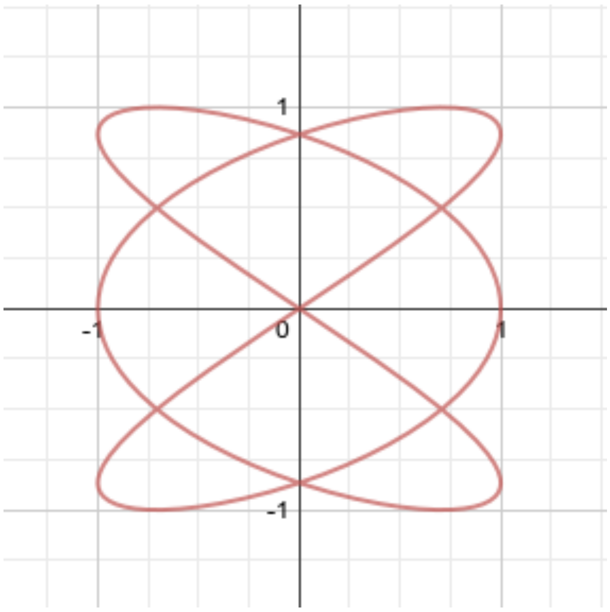
$$\begin{cases} x = f(t) = a\cos(mt) \\ y = g(t) = b\sin(nt) \end{cases} \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

sont appelées *courbe de Lissajous*

Exemple 52.30. On considère la courbe de Lissajous d'équations paramétriques suivantes :

$$\begin{cases} x = f(t) = \cos(3t) \\ y = g(t) = \sin(2t) \end{cases} \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

Voici la représentation graphique :



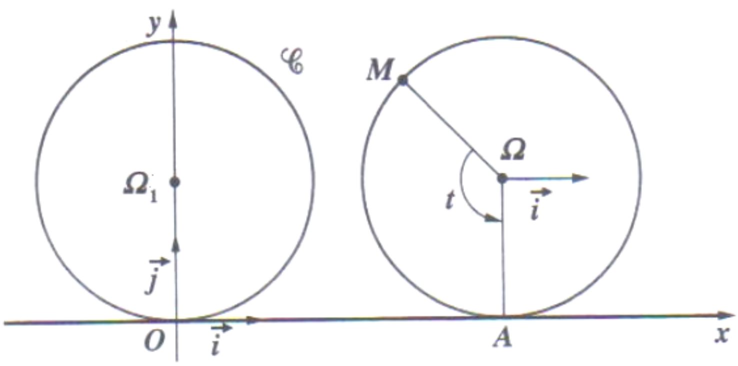
On remarque que f est $\frac{2\pi}{3}$-périodique et g est π-périodique. Le plus petit multiple commun à ces deux périodes est 2π. Donc f et g sont 2π-périodiques. L'étude de la courbe peut se limiter à un intervalle de longueur 2π. La périodicité implique que l'on repasse sur la courbe d'étude une infinité de fois.

4 3 Cycloïde

Définition 52.31

Cycloïde

Une *cycloïde* est la courbe décrite par un point M d'un cercle $\mathcal{C}$ et de rayon r, roulant sans glisser sur une droite.



On note t une mesure de l'angle $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega A})$ et r le rayon du cercle. On suppose $M = 0$ quand $t = 0$. Le cercle roulant sans glisser, la mesure algébrique $\overline{OA}$ est égale à la mesure algébrique de la partie de courbe $\widehat{MA}$.

On a $\widehat{MA} = rt$ donc $\overline{OA} = rt$. Le vecteur $\overrightarrow{O\Omega}$ a pour coordonnées (rt, r). De plus, on a :

$$(\vec{\imath}, \overrightarrow{\Omega M}) = -\frac{\pi}{3} - t \pmod{2\pi}.$$

Donc le vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$ a pour coordonnées $(r\cos(-\frac{\pi}{3} - t), r\sin(-\frac{\pi}{3} - t))$, soit $\Omega M(-r\sin t, -r\cos t)$.

Des coordonnées de $\overrightarrow{O\Omega}$ et de $\overrightarrow{\Omega M}$, on en déduire que les coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ sont : $(rt - r\sin t, r - r\cos t)$.

La cycloïde est donc définie par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = f(t) = r(t - \sin t) \\ y = g(t) = r(1 - \cos t) \end{cases}, \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

Dans la suite, on prend $r = 1$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} f(t + 2\pi) = t + 2\pi - \sin(t + 2\pi) = t + 2\pi + \sin(t) = f(t) + 2\pi \\ g(t + 2\pi) = 1 - \cos(t + 2\pi) = 1 - \cos t = g(t). \end{cases}$$

La courbe présente une périodicité qui s'explique ici. Dans les faits, l'ensemble d'étude est réduit à un intervalle de type $[-\pi\,, \pi]$, puis on trouve la courbe complète en effectuant des translations de vecteurs $2k\pi\vec{\imath}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

D'autre part, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} f(-t) = -f(t) \\ g(-t) = g(t) \end{cases}.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, les points de paramètres t et $-t$ sont symétriques par rapport à l'axe (Oy). La symétrie d'axe (Oy) s'explique alors par ces calculs. Dans les faits, l'ensemble d'étude est réduit un intervalle de type $[0\,, \pi]$, puis on trouve la courbe qui est parcouru par $M(t)$ par $t \in]-\pi\,, \pi[$ effectuant la symétrie d'axe (Oy).

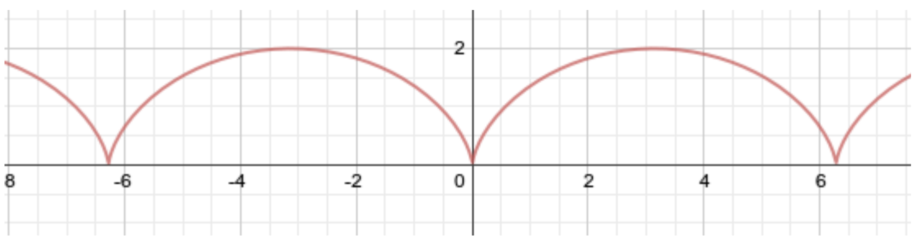
Après avoir étudié les sens de variations de f et g, on obtient le tableau de variations suivant :

t	0		π
$f'(t)$	0	$+$	2
f	0	$\nearrow$	π
$g'(t)$	0	$+$	0
g	0	$\nearrow$	2

La tangente en $\mathcal{C}$ au point $M(\pi)$ est dirigée par :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(\pi) &= f'(\pi)\vec{\imath} + g'(\pi)\vec{\jmath} \\ &= (1 - \cos\pi)\vec{\imath} + (\sin\pi)\vec{\jmath} \\ &= 2\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} = 2\vec{\imath} \end{aligned}$$

Elle est horizontale. D'où :



4.4 Longueur d'une partie de courbe

Définition 52.32

Soit $f\colon t \mapsto (x(t), y(t))$ une fonction et Γ la courbe paramétrée par f. La longueur de la courbe $\mathcal{C}$ entre les paramètres t_0 et t_1, notée L est :

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 52.33. Calculer la longueur d'une arche de cycloïde (entre $M(0)$ et $M(2\pi)$ par exemple) :

$$\begin{cases} x = f(t) = r(t - \sin t) \\ y = g(t) = r(1 - \cos t) \end{cases}, \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

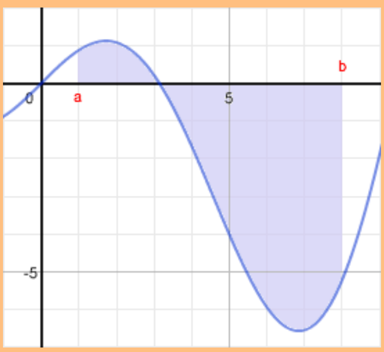
$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(1-\cos t)^2 + r^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} r\sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} r\sqrt{2 - 2\cos t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} r\sqrt{2 - 2(1 - 2\sin^2\tfrac{t}{2})}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} r\sqrt{4\sin^2\tfrac{t}{2}}\,\mathrm{d}t \\ &= r\int_0^{2\pi} 2\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = r\left[-4\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = (4+4)r = 8r. \end{aligned}$$

C'est en 1658 que Christopher Wren, savant et architecte britannique, célèbre pour son rôle dans la reconstruction de Londres après le grand incendie de 1666, démontra que la longueur d'une arche de cycloïde est égale à quatre fois le diamètre du cercle qui l'a générée.

LEÇON

53

Intégrales, primitives



Niveau : Terminale S

Prérequis : fonctions dérivées, étude de fonctions, fonctions exponentielles et logarithmes.

1 Primitives d'une fonction

1.1 Définitions et propriétés

Définition 53.1

Primitive d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle *primitive* de f sur I, une fonction F, dérivable sur I, telle que, pour tout x appartient à I, $F'(x) = f(x)$.

Exemples 53.2.

1. $F : x \mapsto \frac{1}{4}x^4$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto x^3$ puisque $F'(x) = f(x)$.
2. $F : x \mapsto 2\sqrt{x}$ est une primitive sur $]0\,,+\infty[$ de $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ puisque sur $F'(x) = f(x)$.

Théorème 53.3

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Exemple 53.4. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (puisqu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$), donc elle admet des primitives.

Propriété 53.5

Soit F une primitive de f sur un intervalle I.

– Pour tout nombre k, $x \mapsto F(x) + k$ est aussi une primitive de f sur I.
– Si G est une autre primitive de f sur I, alors il existe un nombre k tel que, pour tout x de I, $G(x) = F(x) + k$.

Développement

Démonstration de la propriété 53.5.

– Soit k un réel et H la fonction définie sur I par $H(x) = F(x) + k$. H est dérivable sur I car c'est une somme de fonctions dérivables et, pour tout x de I,
$$H'(x) = F'(x).$$
Puisque F est une primitive de f, on a : $F'(x) = f(x)$ donc $H'(x) = f(x)$: H est une primitive de f sur I.
– Soit G une primitive de f sur I. La fonction $G - F$ est dérivable et
$$(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = 0$$
puisque, pour tout x de I,
$$G'(x) = f(x) = F'(x).$$
Donc $G - F$ est une fonction constante sur I, c'est-à-dire qu'il existe un nombre k tel que, pour tout x de I, $G(x) - F(x) = k$.

□

Exemple 53.6. La fonction $x \mapsto \sin^2 x$ est une primitive de $f : x \mapsto 2\sin x \cos x$.

Les fonctions $x \mapsto \sin^2 x + \sqrt{2}$, $x \mapsto \sin^2 x - 1$, $x \mapsto -\cos^2 x$... sont aussi des primitives de f.

Propriété 53.7

Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I. Un réel x_0 de I et un réel y_0 étant données (appelés « conditions initiales »), il existe une *unique primitive* F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

Développement

Démonstration de la propriété 53.7. f admet des primitives sur I qui s'écrivent sous la forme $x \mapsto G(x) + k$ où G est l'une de ces primitives. La condition $F(x_0) = y_0$ conduit à $G(x_0) + k = y_0$. D'où

$$k = y_0 - G(x_0) \quad \text{et} \quad F : x \mapsto G(x) + y_0 - G(x_0).$$

F est l'unique primitive de f sur I vérifiant la condition. □

Pour une représentation graphique des primitives :

- les courbes de primitives de la fonction f sur I se déduisent l'une de l'autre par des translations de vecteur $\vec{v}(0, k)$.
- Pour tout point $A(x_0, y_0)$ avec $x_0 \in I$ (situé dans la bande), il existe une primitive unique dont la courbe représentative passa par A.

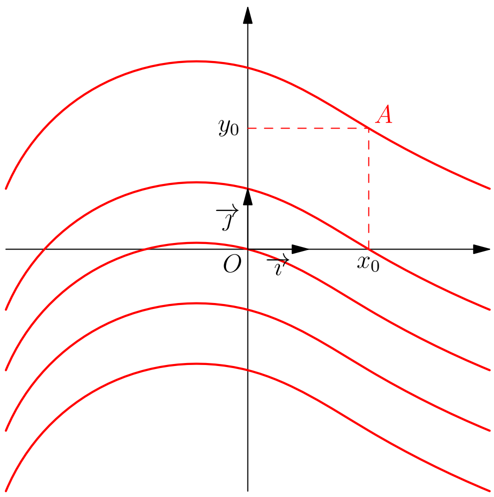


FIGURE 53.1 – Représentation de primitives d'une fonction

1.2 Tableaux de primitives et opérations sur les primitives

Les résultats du tableau 53.1 s'établissent en vérifiant que l'on a bien $F' = f$ sur l'intervalle considéré.

Fonction f	Fonction primitive F (c = constante)	Intervalle I
$f(x) = k$	$F(x) = kx + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$	$F(x) = \frac{1}{2}ax^2 + bx + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{Z}^*$ et $n = -1$)	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } n > 0\,; \\ ]-\infty\,,0[\text{ ou }]0\,,+\infty[& \text{si } n \leq -2 \end{cases}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + c$	$]0\,,+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + c$	$]-\infty\,,0[$ ou $]0\,,+\infty[$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \tan x + c$	$]\frac{\pi}{2} + k\pi\,, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi[$ ($k \in \mathbb{Z}$)
$f(t) = \cos(\omega t + \varphi)$ ($\omega \neq 0$)	$F(t) = \frac{1}{\omega}\sin(\omega t + \varphi) + c$	$\mathbb{R}$
$f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$ ($\omega \neq 0$)	$F(t) = -\frac{1}{\omega}\cos(\omega t + \varphi) + c$	$\mathbb{R}$
$f(t) = \mathrm{e}^x$	$F(x) = \mathrm{e}^x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x + c$	$]0\,,+\infty[$

TABLE 53.1 – Tableau des primitives usuelles

On considère dans le tableau 53.2 des fonctions u et v des fonctions dérivables sur un intervalle I.

Fonction	Une primitive	Conditions
$u' + v'$	$u + v$	
ku' (k constante)	ku	
$u'u^n$ ($n \in \mathbb{Z}$ et $n \neq -1$)	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	$u \neq 0$ sur I si $n \leq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$ sur I
$\frac{v'}{v^2}$	$-\frac{1}{v}$	$v \neq 0$ sur I
$u'\mathrm{e}^u$	e^u	
$\frac{u'}{u}$	$\begin{cases} \ln u \\ \ln(-u) \end{cases}$	$\begin{cases} \text{si } u > 0 \text{ sur } I \\ \text{si } u < 0 \text{ sur } I \end{cases}$
$u'(v' \circ u)$	$v \circ u$	

TABLE 53.2 – Opérations sur les primitives

2 Intégrale et aire

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, non nécessairement orthonormal.

Définition 53.8

Aire sous la courbe

Soit une fonction f, continue et positive sur un intervalle $[a\,,b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. *L'aire sous la courbe* $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[a\,,b]$ est l'aire du domaine plan $\mathcal{D}$ limité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. On note $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ cette aire et on lit *l'intégrale* (ou somme) de a à b de f.

Remarques 53.9.

1. Le domaine $\mathcal{D}$ peut aussi être considéré comme l'ensemble des points M du plan de coordonées (x, y) telles que $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$.
2. L'aire du domaine $\mathcal{D}$ est exprimée en unité d'aire ; une unité d'aire étant l'aire du rectangle construit à partir des vecteurs unités.

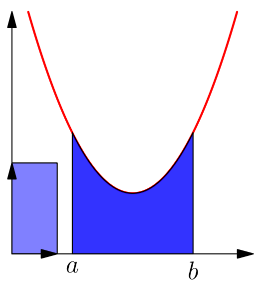
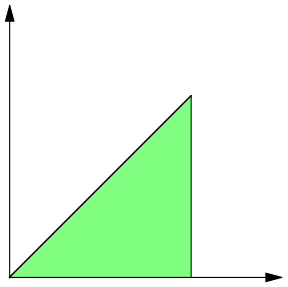


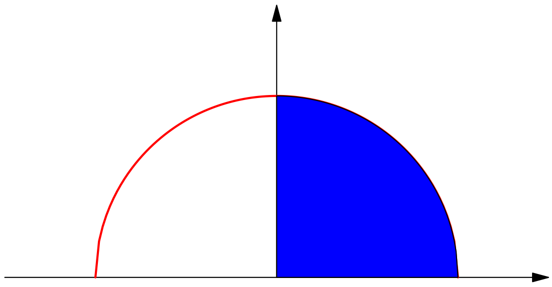
FIGURE 53.2 – Le domaine $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$. L'unité d'aire étant l'aire du rectangle construit à partir des vecteurs unités.

Exemples 53.10.

1. $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$ car l'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f définie par $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0\,,1]$ est l'aire d'un triangle rectangle isocèle dont les deux côtés de l'angle droit ont pour mesure 1.
2. $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$ car l'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f définie par $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ sur l'intervalle $[0, 1]$ est l'aire d'un quart de cercle de rayon 1.



(a) $\int_0^1 x \, \mathrm{d}x$



(b) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, \mathrm{d}x$

FIGURE 53.3 – Figure pour l'exemple

Propriété 53.11

Soit une fonction f continue, positive et croissante sur un intervalle $[a\,,b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. L'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[a\,,b]$ est égale à la limite commune des deux suites adjacentes (u_n) et (v_n) définie par :

$$u_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \quad \text{où } n \in \mathbb{N}^*.$$

Pour tout entier n non nul, on divise l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles de même longueur $\frac{b-a}{n}$. u_n correspond à l'aire des rectangles sous la courbe. v_n correspond à l'aire des rectangles au-dessus de la courbe. Pour tout n, on a

$$u_n \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq v_n.$$

Lorsque n augmente, l'écart entre l'aire des deux séries de rectangles et l'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ diminue.

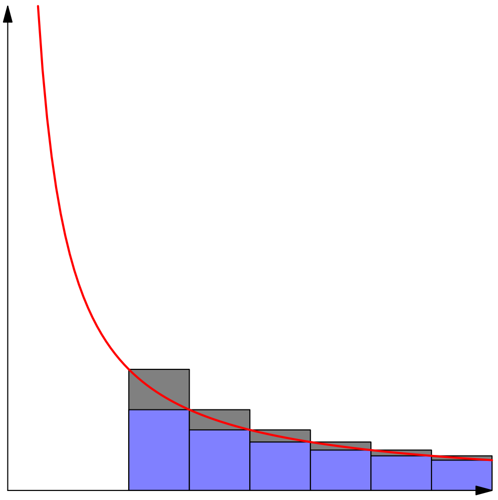


FIGURE 53.4 – Représentation des suites u_n et v_n

Remarques 53.12.

1. La propriété se généralise si f est seulement continue sur l'intervalle $[a, b]$.
2. Si la fonction f est continue, positive et décroissante sur l'intervalle $[a, b]$, on peut construire les deux suites de la même façon, mais c'est alors v_n qui correspond à l'aire des rectangles sous la courbe.

Propriété 53.13

Relation de Chasles, pour les aires

Soit une fonction f, continue et positive sur l'intervalle $[a\,,b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. Pour tout nombre c appartenant à l'intervalle $[a\,,b]$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

On découpe l'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[a\,,b]$ en aires sous la courbe sur les intervalles $[a\,,c]$ et $[c\,,b]$.

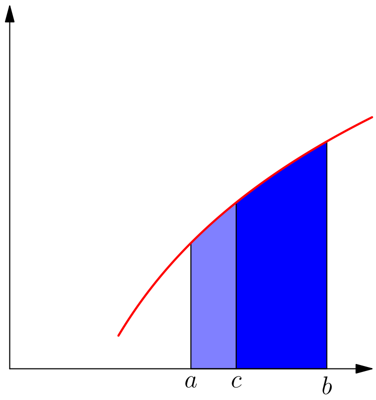


FIGURE 53.5 – Relation de Chasles

Exemple 53.14. Soit la fonction f dont la courbe représentative est donnée en figure 53.6. Alors :

$$\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 3$$

(en ajoutant les aires des deux trapèzes).

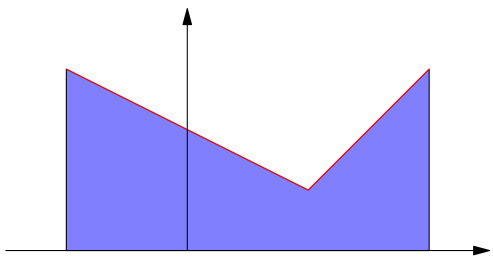


FIGURE 53.6 – Représentation graphique de f pour l'exemple

Définition 53.15

Valeur moyenne

Soit une fonction f, continue et positive sur un intervalle $[a\,,b]$. On appelle *valeur moyenne* de la fonction f sur l'intervalle $[a\,,b]$ le nombre réel

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

La valeur moyenne de la fonction f correspond à la valeur qu'il faut donner à une fonction constante g sur l'intervalle $[a\,,b]$ pour que l'aire sous la courbe représentative de g soit égale à l'aire sous la courbe représentative de f. L'aire du domaine hachuré est égale à l'aire du rectangle coloré.

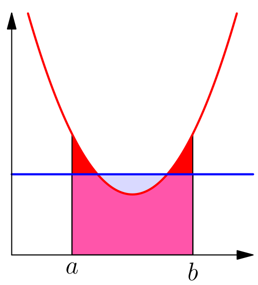


FIGURE 53.7 – Valeur moyenne

Définition 53.16

Soit une fonction f continue et *négative* sur l'intervalle $[a\,,b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. Le nombre $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est égal à *l'opposé* de l'aire du domaine $\mathcal{D}$ limité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Propriété 53.17

Soit une fonction f, continue et négative sur l'intervalle $[a\,,b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. L'aire du domaine $\mathcal{D}$ limité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à

$$\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Développement

Démonstration de la propriété 53.17. $\mathcal{C}_{-f}$, la courbe représentative de la fonction $-f$, est symétrique par rapport à l'axe des abscisses de $\mathcal{C}_f$, courbe représentative de f. L'aire du domaine $\mathcal{D}$ est égale, par symétrie, à l'aire sous la courbe $\mathcal{C}_{-f}$. Cette aire est donc $\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x$. D'après la définition 53.16, elle est aussi égale à $-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. □

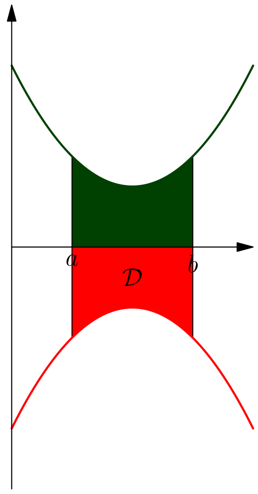


FIGURE 53.8 – Aire d'une fonction négative

Propriété 53.18

Soit une fonction f continue et négative sur l'intervalle $[a\,,b]$. La valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[a\,,b]$ est égale à :

$$-\frac{1}{b-a}\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple 53.19. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,,1]$ par $f(x) = -x^2$. Sachant que $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$, la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0, 1]$ est $-\frac{1}{3}$.

Propriété 53.20

Soit f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$ telles que $f > g$. L'aire du domaine $\mathcal{D}$ limité par les deux courbes représentatives des fonctions f et g, et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est, en unités d'aire,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Développement

Démonstration de la propriété 53.20. On découpe l'intervalle $[a\,,b]$ selon que les fonctions f et g sont toutes deux du même signes ou de signe contraire. Ainsi, dans la figure 53.9, l'aire entre les deux courbes est :

– sur l'intervalle $[a\,,c]$:

$$-\int_a^c -f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b -g(x)\,\mathrm{d}x\;;$$

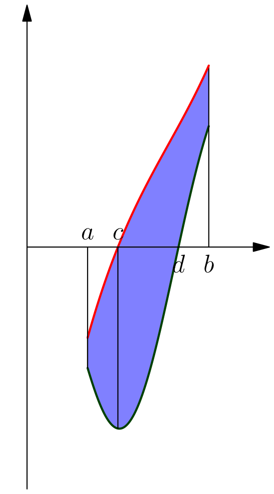


FIGURE 53.9 – Découpage des fonctions f et g selon leurs signes respectifs

- sur l'intervalle $[c\,,d]$:
$$\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^d -g(x)\,\mathrm{d}x\ ;$$
- sur l'intervalle $[d\,,b]$:
$$\int_d^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_d^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

En utilisant les propriétés précédentes, on obtient bien
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$
pour la valeur de l'aire du domaine $\mathcal{D}$. □

3 Intégrale et primitive

Propriété 53.21 Soit une fonction f continue, positive sur l'intervalle $[a\,,b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. L'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f sur l'intervalle $[a\,,b]$, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est égale en unité d'aire à $F(b)-F(a)$ où F est une primitive de f sur l'intervalle $[a\,,b]$.

Développement

Démonstration de la propriété 53.21. La démonstration est faite dans le cas où f est croissante sur l'intervalle $[a\,,b]$. On admettra le résultat dans le cas général. Pour tout x tel que $a \leq x \leq b$, on note $\mathcal{A}(x)$ l'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[a\,,b]$. Pour $h>0$:
$$hf(x) \leq \mathcal{A}(x+h)-\mathcal{A}(x) \leq hf(x+h)$$
soit
$$f(x) \leq \frac{\mathcal{A}(x+h)-\mathcal{A}(x)}{h} \leq f(x+h).$$
Pour $h<0$:
$$(-h)f(x+h) \leq \mathcal{A}(x)-\mathcal{A}(x+h) \leq (-h)f(x).$$
soit
$$f(x+h) \leq \frac{\mathcal{A}(x+h)-\mathcal{A}(x)}{h} \leq f(x).$$
Ainsi
$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathcal{A}(x+h)-\mathcal{A}(x)}{h} = f(x).$$

La fonction $\mathcal{A}$ est donc dérivable pour tout x de l'intervalle $[a\,,b]$ et sa dérivée est la fonction f. De plus, $\mathcal{A}(a) = 0$. Ainsi $\mathcal{A}$ est la primitive de f nulle en a. Soit F une primitive quelconque de f, on peut donc écrire $\mathcal{A}(x) = F(x) - F(a)$. L'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[a\,,b]$ vérifie donc

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

$\square$

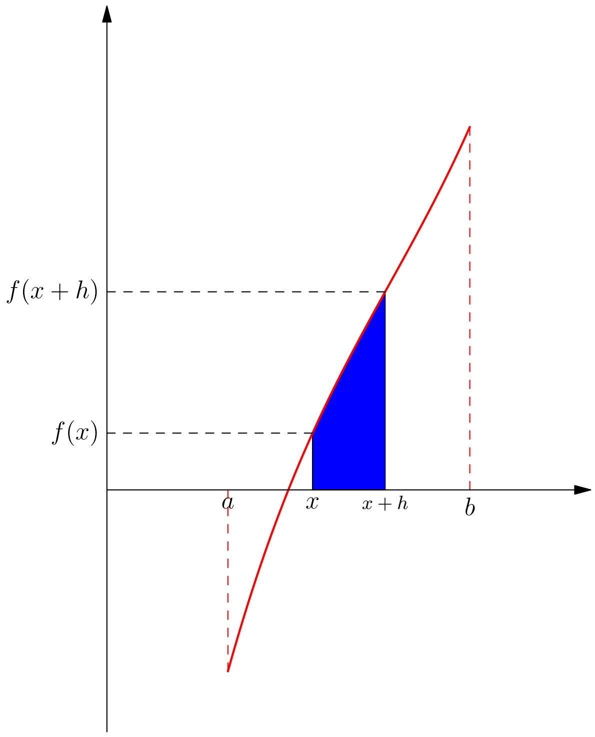


FIGURE 53.10 – Illustration de la démonstration

Remarques 53.22.

1. On utilise la notation :
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$
2. On a les égalités :
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^a -f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemples 53.23.

1. L'aire sous la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 1$, sur l'intervalle $[-1\,,2]$ est :
$$\int_{-1}^2 (x^2+1)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_{-1}^2 = \frac{8}{3} + 2 - \left(-\frac{1}{3} - 1\right) = 6.$$
2. L'aire sous la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x^4$ sur l'intervalle $[0\,,1]$ est :
$$\int_0^1 x^4\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{1}{5}.$$
3. L'aire du domaine limité par la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = -\frac{1}{x}$ et l'axe des abscisses sur l'intervalle $[1\,,2]$ est :
$$-\int_1^2 -\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln x]_1^2 = \ln 2.$$

Définition 53.24

Soit une fonction f continue sur un intervalle I et a un élément de I. Pour tout x appartenant à I, la fonction définie par $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est *l'unique primitive* de f sur I s'annulant en a. Si F est une primitive quelconque de f sur I, alors

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a).$$

Remarque 53.25. Si $x > a$ et f positive sur l'intervalle $[a\,,x]$, alors $F(x)$ peut s'interpréter comme l'aire sous la courbe représentative de f sur l'intervalle $[a\,,x]$, exprimée en unité d'aire. Quels que soient a et b, éléments de I,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Exemples 53.26.

1. Sur $\mathbb{R}$,
$$\int_a^x 1\,\mathrm{d}t = \int_a^x \mathrm{d}t = [t]_a^x = x - a.$$
2. Sur $\mathbb{R}$,
$$\int_0^x -t^2\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{3}t^3\right]_0^x = -\frac{1}{3}x^3.$$
3. Sur l'intervalle $]0\,,+\infty[$:
$$\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln x]_1^x = \ln x.$$
4. Sur $\mathbb{R}$:
$$\int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^t\right]_0^x = \mathrm{e}^x - 1.$$

4 Propriétés algébriques de l'intégrale

Propriété 53.27

Relation de Chasles

Soit une fonction f continue sur un intervalle I. Quels que soient a, b et c éléments de I :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque 53.28. Cette propriété prolonge la propriété 53.21, qui a été établie dans le cas où les intégrales correspondent à des aires.

Exemple 53.29.

$$\begin{aligned}\int_0^1 (|2-t| + |1-t|)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 (3-2t)\,\mathrm{d}t + \int_1^2 \mathrm{d}t + \int_2^3 (2t-3)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[3t - t^2\right]_0^1 + [t]_1^2 + \left[t^2 - 3t\right]_2^3 = 2 + 1 + 2 = 5.\end{aligned}$$

Propriété 53.30

Linéarité de l'intégrale

Soient deux fonctions f et g continues sur un intervalle I, a et b des éléments de I, et α et β deux nombres réels. Alors :

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple 53.31.

$$\int_0^{\pi/4} (\tan^2 u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/4} (1+\tan^2 u)\,\mathrm{d}u - \int_0^{\pi/4} \mathrm{d}u = [\tan u]_0^{\pi/4} - [u]_0^{\pi/4} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Propriété 53.32

Fonctions paires et impaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle I centré en 0. Pour tout élément a de I :

– si f est paire : $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$;

– si f est impaire : $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

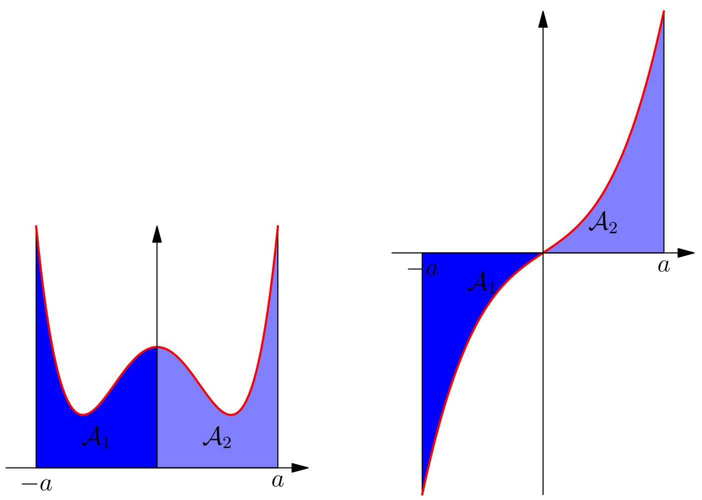
L'interprétation graphique est la suivante :

– Si f est paire et positive sur l'intervalle $[0\,,a]$, les aires $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont égales. Donc :

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = 2\mathcal{A}_2 = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

– Si f est impaire et positive sur l'intervalle $[0\,,a]$, les aires $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont égales. Donc :

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = 0.$$



(a) f paire (b) f impaire

FIGURE 53.11 – Intégrale de fonctions paires et impaires

Propriété 53.33

Fonctions périodiques

Soit f une continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période T. Pour tout nombre réel a :

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x.$$

– Si f est positive, $\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire sous la courbe représentative de f sur l'intervalle $[a\,,a+T]$. Par translations des domaines correspondants, on retrouve l'aire sous la courbe sur l'intervalle $[0\,,T]$.

– Si f est négative, on retrouve le résultat en considérant la fonction $-f$.

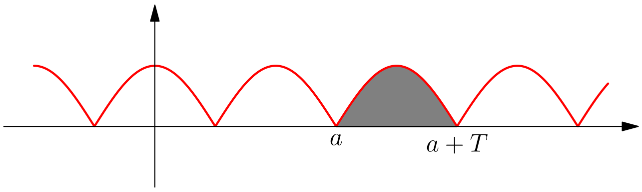


FIGURE 53.12 – Intégrales d'une fonction périodique

5 Intégrale et inégalités

Propriété 53.34

Soit une fonction f continue positive sur un intervalle $[a\,, b]$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

Remarques 53.35.

1. Ce résultat est immédiat, puisque $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est, par définition, l'aire sous la courbe représentative de f sur l'intervalle $[a\,, b]$.
2. On peut retrouver le résultat à partir de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur l'intervalle $[a\,, b]$. D'où $F' = f$, or f est positive, donc F est croissante sur l'intervalle $[a\,, b]$ et $F(b) \geq F(a)$.
3. **Attention !** Une fonction f peut très bien avoir une intégrale positive sur l'intervalle $[a\,, b]$, sans être elle-même positive sur tout cet intervalle.

Propriété 53.36

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,, b]$. Si $f \leq g$ alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque 53.37. On applique la propriété 53.34 à la fonction $g - f$ qui est positive, ainsi que la propriété de linéarité de l'intégrale.

Propriété 53.38

Inégalité de la moyenne

Soit une fonction f continue sur un intervalle I.

- Si les réels m et M sont tels que, pour tout x de l'intervalle I, on a $m \leq f(x) \leq M$, alors si $I = [a, b]$ avec $a < b$:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a).$$

- Si le réel M est tel que, pour tout x de l'intervalle I, on a $0 \leq |f(x)| \leq M$, alors pour tous éléments a et b de I :

$$0 \leq \left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq M\,|b-a|\,.$$

Remarques 53.39.

1. Dans le premier cas, on applique la propriété 53.36 à l'inégalité $m \leq f(x) \leq M$ sur l'intervalle $[a\,, b]$.
2. Dans le second cas, on applique la propriété 53.36 à l'inégalité $-M \leq f(x) \leq M$ sur l'intervalle $[a\,, b]$ ou $[b\,, a]$ selon que $a < b$ ou $a > b$.

Exemple 53.40. Soit la fonction inverse sur l'intervalle $[1\,,2]$. On a : $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq 1$, d'où

$$\frac{1}{2} \leq \int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leq 1,$$

soit $\frac{1}{2} \leq \ln 2 \leq 1$.

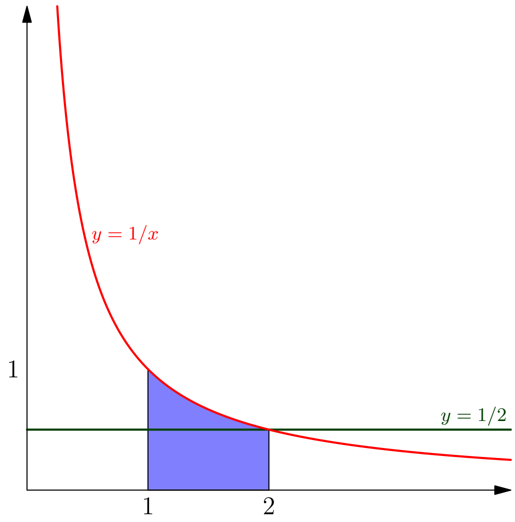


FIGURE 53.13 – $\frac{1}{2} \leq \int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leq 1$

Définition 53.41

Valeur moyenne

Soit une fonction f, continue sur un intervalle $[a\,,b]$. On appelle *valeur moyenne* de la fonction f sur l'intervalle $[a\,,b]$ le nombre réel

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque 53.42. Cette définition généralise la notion de valeur moyenne d'une fonction dans le cas où l'intégrale définissait une aire. Cette fois-ci, la formule est valable dans le cas où celle-ci a un signe non constant sur l'intervalle $[a\,,b]$.

Exemples 53.43.

1. La valeur moyenne de la fonction sinus sur l'intervalle $[0\,,\pi]$ est :

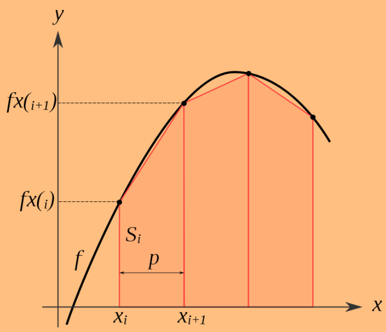
$$\frac{1}{\pi-0}\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[-\cos \pi\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi}.$$

2. La valeur moyenne de la fonction sinus sur l'intervalle $[-\pi\,,\pi]$ est 0.
3. La valeur moyenne de la fonction définie par $x \mapsto x^2-1$ sur l'intervalle $[-\frac{3}{2}\,,\frac{3}{2}]$ est :

$$\frac{1}{3}\int_{-3/2}^{3/2}(x^2-1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_{-3/2}^{3/2} = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_0^{3/2} = -\frac{1}{4}.$$

LEÇON 54

Techniques de calcul d’intégrales



Niveau : Terminale S - BTS

Prérequis : intégrales, accroissements finis, primitives, propriétés sur l’intégrale, trigonométrie, fonction polynôme, fonction exponentielle

1 Sommes de Riemann

Soit f une application continue définie sur un segment $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\sigma = (a_i)_{1\leq i\leq n}$ est une subdivision de $[a,b]$ (c'est-à-dire $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$), h est le pas de la sudivision σ ($h = \max(a_{i+1} - a_i)$) et pour tout $0 \leq i \leq n-1$, $\xi_i \in [a_i, a_{i+1}]$.

Définition 54.1

Somme de Riemann

On appelle *somme de Riemann* associée à $(f, \sigma, (\xi_i)_{0\leq i\leq n})$ le réel :

$$\sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i).$$

Théorème 54.2

$$\lim_{h\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)(\xi_i) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Développement

Démonstration. Montrons que la différence suivante peut être rendue aussi petite que voulue :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x - (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i) \right) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} (f(x) - f(\xi_i)) \right).$$

En passant aux valeurs absolues, on a la majoration suivante :

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i) \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} |f(x) - f(\xi_i)|\,\mathrm{d}x \right).$$

Or, du théorème de Heine appliqué à f continue sur le segment $[a,b]$, on déduit f uniformément continue sur $[a,b]$ (et donc aussi sur chaque $[a_{i+1}, a_i]$, c'est-à-dire :

$$\forall \mathbf{E} \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall (x,y) \in [a,b]^2, \quad (|x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Pour une subdivision σ de pas h tel que $0 < h < \eta$, on aura :

$$\forall x \in [a_i, a_{i+1}], \quad |x - \xi_i| \leq a_{i+1} - a_i \leq h < \eta.$$

Ce qui entraînera :

$$|f(x) - f(\xi_i)| \leq \varepsilon.$$

Dans ces conditions, on peut écrire :

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i) \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} \varepsilon\,\mathrm{d}x \right) = \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon (a_{i+1} - a_i) = \varepsilon (b - a).$$

Ceci prouve bien que :

$$\lim_{h\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Toute intégrale est donc une limite de somme de Riemann. □

Remarque 54.3. Le résultat ci-dessus reste valable si f est continue par morceaux. Il suffit de refaire la même démonstration avec des subdivisions adaptées à f.

Proposition 54.4

Cas particulier d'une subdivision régulière

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on particularise $a_i = a + i\frac{b-a}{n}$ et $\xi_i = a_i$ (donc $h = \frac{b-a}{n}$). On a alors :

$$a_{i+1} - a_i = \frac{b-a}{n}.$$

D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Proposition 54.5

Cas particulier des fonctions définies sur $[0\,,1]$

La formule ci-dessous devient alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Exemple 54.6. On veut étudier la limite de la somme :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i}.$$

On considère l'application f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \frac{1}{1+x}$. On a alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{i}{n}} = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i} = \ln 2.$$

2 Intégration par primitives

Théorème 54.7

Théorème fondamental du calcul intégral

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit $x_0 \in I$. La fonction F définie sur I par :

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

est l'unique primitive de f sur I s'annulant en x_0. Autrement dit : $F(x_0) = 0$, F est dérivable sur I et pour tout réel $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Développement

Démonstration. Soit $x_0 \in I$. Nous allons montrer que l'accroissement moyen $\frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1}$ admet une limite lorsque x tend vers x_i et que cette limite est précisément $f(x_1)$. Evaluons :

$$\left|\frac{F(x)-F(x_i)}{x-x_1} - f(x_1)\right| = \frac{1}{|x-x_1|}\left|\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x_0}^{x_1} f(t)\,\mathrm{d}t - (x-x_1)f(x_1)\right|.$$

En utilisant la relation de Chasles et la formule d'intégration pour une fonction constante, on peut écrire :

$$\left|\frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1} - f(x_1)\right| = \frac{1}{|x-x_1|}\left|\int_{x_1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x_1}^{x} f(x_1)\,\mathrm{d}t\right|.$$

Mais d'après la propriété de compatibilité avec l'addition :

$$\int_{x_1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x_1}^{x} f(x_1)\,\mathrm{d}t = \int_{x_1}^{x} (f(t) - f(x_1))\,\mathrm{d}t$$

D'où :

$$\left|\frac{F(x) - F(x_1)}{x - x_1} - f(x_1)\right| \leq \frac{1}{|x - x_1|} \int_{x_1}^{x} |f(t) - f(x_1)|\,\mathrm{d}t.$$

Or, f est continue en x_1 donc admet une limite finie en x_1. Cela signifie que tout intervalle ouvert $f(x_1)$ contient toutes les valeurs de $f(t)$ pour t assez proche de x_1.
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $I]f(x_1) - \varepsilon\,, f(x_1) + \varepsilon[$. Alors, il existe un réel η tel que pour tout $t \in]x_1 - \eta\,, x_1 + \eta[$, on ait :

$$f(t) \in]f(x_1) - \varepsilon\,, f(x_1) + \varepsilon[.$$

D'où :

$$\left|\frac{F(x) - F(x_1)}{x - x_1} - f(x_1)\right| \leq \varepsilon.$$

Comme ε peut être choisi aussi petit que voulu, on a bien :

$$\lim_{x \to x_1} \frac{F(x) - F(x_1)}{x - x_1} = f(x_1).$$

Donc F est dérivable en x_1, et $F(x_1) = f(x_1)$. Et comme ce raisonnement est valable pour tout $x_1 \in I$, F est bien une primitive de f sur I. □

Ce théorème admet deux corollaires fondamentaux suivantes :

Corollaire 54.8

Existence de primitives pour les fonctions continues
Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Corollaire 54.9

Formule de Newton-Leibniz
Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I. Alors pour tous a et b dans I :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Développement

Démonstration. Soit $x_0 \in I$ et G la primitive de f définie par :

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On sait que deux primitives F et G diffèrent d'une constante. Donc il existe un réel k tel que pour tout :

$$F(x) = G(x) + k.$$

On a alors :

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

□

Remarque 54.10. La quantité $F(b) - F(a)$ se note souvent $[F(t)]_a^b$.

Exemples 54.11.

a.

$$\int_0^1 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^t\right]_0^1 = \mathrm{e} - 1.$$

b.

$$\int_0^1 x^n = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

c.

$$\int_2^{\mathrm{e}} \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}t = \int_2^{\mathrm{e}} \frac{1/x}{\ln x}\,\mathrm{d}t = [\ln(\ln(t))]_2^{\mathrm{e}} = -\ln(\ln(2)).$$

Remarque 54.12. Le choix de la primitive F choisie n'influe pas le résultat de l'intégrale. En effet, si F et G sont deux primitives d'une même fonction f sur I, alors elles différent d'une constante. Les quantités $F(b)-F(a)$ et $G(b)-G(a)$ sont donc égales.

Théorème 54.13

Inégalité des accroissements finis

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I telle que f' soit continue sur I. S'il existe un réel M tel que $|f'| \leq M$ sur I alors : pour tous réels a et b de I, on a : $|f(b)-f(a)| \leq M\,|b-a|$.

Développement

Démonstration. Pour $a < b$, on a :

$$|f(b)-f(a)| = \left|\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t \leq M(b-a) \leq M\,|b-a|\,.$$

Pour $a > b$, ona :

$$|f(b)-f(a)| = \left|\int_b^a f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_b^a |f'(t)|\,\mathrm{d}t \leq M(a-b) \leq M\,|b-a|\,.$$

□

3 Intégration par parties

Définition 54.14

Classe $\mathcal{C}^1$

On dit qu'une fonction est de *classe* $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I si elle est dérivable sur I et si sa dérivée f' est continue sur I.

Théorème 54.15

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a\,,b]$, alors :

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t.$$

Développement

Démonstration du théorème 54.15. On sait que pour tout $t \in [a\,,b]$:

$$(uv)'(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t).$$

En intégrant de a à b :

$$\int_a^b (u(t)v(t))'\,\mathrm{d}t = \int_a^b u'(t)v(t) + u'(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

et d'après la linéarité de l'intégrale :

$$\int_a^b (u(t)v(t)')\,\mathrm{d}t = \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$[u(t)v(t)]_a^b = \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

D'où le théorème. □

Méthode 54.16

Pour intégrer par parties, il faut

– reconnaître, dans la fonction à intégrer, le produit d'une fonction u et d'une fonction dérivée v' ;
– appliquer la formule d'intégration par parties.

Exemples 54.17.

1. Soit à calculer :
$$I = \int_0^1 t\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t.$$
On pose $u(t) = t$ et $v'(t) = \mathrm{e}^t$. D'où $u'(t) = 1$ et $v(t) = \mathrm{e}^t$ (à une constante près) et ainsi :
$$I = \left[t\mathrm{e}^t\right]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = \mathrm{e} - (\mathrm{e} - 1) = 1.$$
2. Soit à calculer :
$$J(x) = \int_1^x \ln t \,\mathrm{d}t.$$
On pose $u(t) = \ln(t)$ et $v'(t) = 1$. D'où $u'(t) = \frac{1}{t}$ et $v(t) = t$ (à une constante près) et ainsi :
$$J(x) = [t \ln t]_1^x - \int_1^x \mathrm{d}t = x \ln x - (x - 1) = x \ln x - x + 1.$$

4 Intégration par changement de variables

Théorème 54.18

Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a\,,b]$, dont les valeurs sont dans $\mathbb{R}$. Alors :
$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) \,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) \,\mathrm{d}u.$$

La démonstration est hors programme du BTS et admise.

Remarque 54.19. Dans $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) \,\mathrm{d}u$, on pose $u = \varphi(t)$ (changement de variable qu'on donne ou qu'on doit trouver). Si t vaut a (resp. b) alors u vaut $\varphi(a)$ (resp. $\varphi(b)$), ce qui conduit à changer les bornes de l'intégrale. Ensuite $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \varphi'(t)$, ou encore (bien que cette écriture soit formellement incorrecte au niveau BTS), $\mathrm{d}u = \varphi'(t) \,\mathrm{d}t$, que l'on remplace dans l'intégrale.

Développement

Démonstration (hors programme). Posons $H(x) = \int_\alpha^x f(u) \,\mathrm{d}u$ où α et x sont deux éléments de I. La fonction f est continue sur I, donc la fonction H est dérivable sur I, on a $H'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$. On a :
$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) \,\mathrm{d}u = \int_{\varphi(a)}^{\alpha} f(u) \,\mathrm{d}u + \int_\alpha^{\varphi(b)} f(u) \,\mathrm{d}u = -\int_\alpha^{\varphi(a)} f(u) \,\mathrm{d}u + \int_\alpha^{\varphi(b)} f(u) \,\mathrm{d}u$$
soit :
$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) \,\mathrm{d}u = -H(\varphi(a)) + H(\varphi(b)) = -(H \circ \varphi)(a) + (H \circ \varphi)(b).$$
Posons $K = H \circ g$, nous obtenons :
$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) \,\mathrm{d}u = K(b) - K(a).$$

Comme la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[a,b]$ et puisque H est dérivable sur I, la fonction composée K est dérivable sur $[a\,,b]$ et on a :

$$K'(t) = H'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Par conséquent, la fonction K est une primitive sur $[a,b]$ de la fonction $(f\circ\varphi)\varphi'$.
De plus, les fonctions φ et φ' sont continues sur $[a,b]$ et la fonction f étant continue sur I alors la fonction K' est continue sur $[a,b]$ et on a :

$$K(b) - K(a) = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

soit encore :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^b f(\varphi'(t))\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

□

Exemples 54.20.

1. Soit à calculer

$$I = \int_0^1 \frac{1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t.$$

On met t^2+t+1 sous la forme canonique :

$$t^2+t+1 = \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right].$$

Ainsi

$$I = \int_0^1 \frac{1}{t^2+t+1} = \int_0^1 \frac{4}{3}\frac{1}{(\frac{2t}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}})^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{4}{3}\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{u^2+1}\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{d}u,$$

en posant $u = \frac{2t}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}$, d'où $\mathrm{d}u = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}t$

$$U = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan(u)\right]_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

2. Soit f une fonction T-périodique. Alors l'intégrale de f sur une période est constante ; par exemple :

$$\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{T/2} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{T/2}^T f(t)\,\mathrm{d}t$$

par la relation de Chasles

$$= \int_0^{T/2} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-T/2}^0 f(u+T)\,\mathrm{d}u$$

en posant $u = t - T$

$$= \int_{-T/2}^0 f(u)\,\mathrm{d}u + \int_0^{T/2} f(t)\,\mathrm{d}t$$

car $f(u+T) = f(u)$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 54.21Intégrale de Wallis

. Il s'agit, pour $n\in\mathbb{N}$, des intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n\,\mathrm{d}t,\ J_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n\,\mathrm{d}t,\ K_n = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n\,\mathrm{d}t,\ L_n = \int_{-1}^1 (t^2-1)^n\,\mathrm{d}t.$$

1. On va calculer I_n grâce à une intégration par parties. On a immédiatement :

$$I_0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos t \,\mathrm{d}t = 1.$$

Pour tout $n \geq 0$, on a, par intégration par parties $[u(t) = (\cos t)^{n+1}$ et $v'(t) = \cos t]$

$$I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{n+1} \cos t \,\mathrm{d}t = \Big[(\cos t)^{n+1} \sin t\Big]_0^t + (n+1) \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n (\sin t)^2 \,\mathrm{d}t$$

$$I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+2}) \Leftrightarrow I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

ou encore

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad \text{pour tout } n \geq 2.$$

On en déduit immédiatement :

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0 = \frac{\pi}{4},\ I_3 = \frac{2}{3} I_1 = \frac{2}{3},\ I_4 = \frac{3}{4} I_2 = \frac{3\pi}{16}.$$

Ainsi, on peut en déduire une formule générale :

– Si n pair $(n = 2p)$

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \cdots \times \frac{1}{2} I_0 = \frac{(2p)!\pi}{2^{2p+1}(p!)^2} = \frac{\mathrm{C}_{2p}^p \pi}{2^{2p+1}}.$$

– Si n impair $(n = 2p+1)$:

$$I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2p-2}{2p-1} \times \cdots \times \frac{2}{3} I_1 = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

2. On calcule J_n en se ramenant à I_n. En posant $u = \frac{\pi}{2} - t$, on obtient :

$$J_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n \,\mathrm{d}t = \int_{-\pi/2}^0 \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right)^n (-\,\mathrm{d}u) = \int_0^{\pi/2} (\cos u)^n \,\mathrm{d}u = I_n.$$

3. On calcule K_n en se ramenant à I_{2n+1}. On pose $u = \arcsin t$ ($t \mapsto \arcsin t$ est une bijection de $[-1\,,1]$ dans $[-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}]$). On a donc $t = \sin u$.

$$K_n = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n \,\mathrm{d}t = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos u)^{2n} \cos u \,\mathrm{d}u = 2I_{2n+1} = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

4. On calcule L_n en se ramenant à K_n.

$$L_n = \int_{-1}^1 (t^2-1)^n \,\mathrm{d}t = (-1)^n K_n = \frac{(-1)^n 2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

5 Intégration de fractions rationnelles

Exercice 54.22.

1. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$:

$$\frac{2x^2-4}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$$

2. (a) En déduire sur $]1\,,+\infty[$ une primitive F_1 de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2x^2-4}{(x-1)(x+1)^2}.$$

(b) Déterminer une primitive F_2 de f sur l'intervalle $]-1\,,1[$ puis une primitive F_3 sur l'intervalle $]-\infty\,,1[$.

3. Calculer la valeur exacte de

$$I=\int_{-4}^{-2}\frac{2x^2-4}{(x-1)(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

puis la valeur décimale approchée de 1 à 10^{-2} près par défaut.

Développement

Correction de l'exercice.

1.

$$\begin{aligned}\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{(x+1)^2}&=\frac{a(x+1)^2+b(x-1)(x+1)+c(x-1)}{(x-1)(x+1)^2}\\&=\frac{a(x^2+2x+1)+b(x^2-1)+cx-c}{(x-1)(x+1)^2}\\&=\frac{(a+b)x^2+(2a+c)x+a-b-c}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{2x^2-4}{(x-1)(x+1)^2}.\end{aligned}$$

L'égalité est vérifiée pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, la comparaison des coefficients respectifs donne :

$$\begin{cases}a+b=2\\2a+c=0\\a-b-c=-4\end{cases}$$

On exprime, à l'aide des deux premières équations, b et c en fonction de a et l'on reporte les expressions trouvées dans la troisième équation $b=2-a$ et $c=-2a$:

$$a-(2-a)-(-2a)=-4\Leftrightarrow 4a=-2\Leftrightarrow a=-\frac{1}{2}.$$

On en tire $b=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$ et $c=-2\left(-\frac{1}{2}\right)=1$. Ainsi,

$$a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{5}{2},\ c=1.$$

2. (a) On peut écrire, en utilisant les résultats de la première question :

$$f(x)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{x-1}+\frac{5}{2}\times\frac{1}{x-1}+\frac{5}{2}\times\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}.$$

Sur l'intervalle $]1\,,+\infty[$, $x-1>0$ et $x+1>0$. On en reconnaît dans les deux premiers quotients la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u>0$. Le troisième quotient est de la forme $\frac{u'}{u^2}$. Une primitive F_1 de f sur l'intervalle $]1\,,+\infty[$ est :

$$F_1(x)=-\frac{1}{2}\ln(x-1)+\frac{5}{2}\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}.$$

(b) Dans le cas général $x\mapsto\ln|u|$ est une primitive de $x\mapsto\frac{u'}{u}$ si $u\neq 0$.

$$F(x)=-\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{5}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{x+1}.$$

Si $u<0$, $\ln|u|=\ln(-u)$, on applique cette règle pour le calcul des primitives F de f : sur l'intervalle $]-1\,,1[$, $x-1<0$ et $x+1>0$:

$$F_2(x)=-\frac{1}{2}\ln(-x+1)+\frac{5}{2}\ln(x+1)-\frac{1}{x+1},$$

sur l'intervalle $]-\infty\,,-1[$, $x-1<0$ et $x+1<0$:

$$F_3(x)=-\frac{1}{2}\ln(-x+1)+\frac{5}{2}\ln(-x-1)-\frac{1}{x-1}.$$

3. L'intervalle $[-4\,,-2]$ est inclus dans l'intervalle $]-\infty\,,1[$. On utilise, pour primitive de f, la fonction F_3.

$$\begin{aligned} I = F_3(-2) + F_3(-4) &= \left(-\frac{1}{2}\ln 3 + \frac{5}{2}\ln 1 - \frac{1}{-1}\right) - \left(-\frac{1}{2}\ln 5 + \frac{5}{2}\ln 3 - \frac{1}{-3}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\ln 3 + 1 + \frac{1}{2}\ln 5 - \frac{5}{2}\ln 3 - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\ln 5 - 3\ln 3 + \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

La calculatrice donne $I \approx -1{,}824451$, ce qui signifie $-1{,}83 \leq I \leq -1{,}82$. La valeur décimale approchée par défaut de I à 10^{-2} près est : $I \approx -1{,}83$.

□

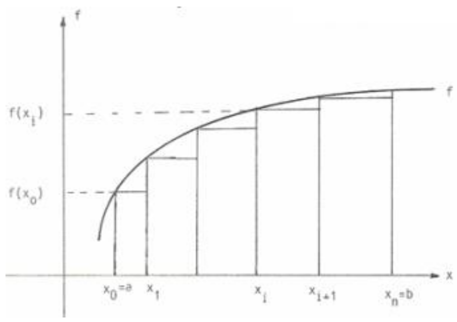
6 Calcul approché de l'intégrale

Dans cette section, on ne travaillera qu'avec des fonctions monotones (croissantes). Si la fonction n'est pas monotone, il suffit de subdiviser l'intervalle I.

6 1 Méthode des rectangles à gauche

On subdivise $[a,b]$ en n intervalles de longueur $\frac{b-a}{n}$. On construit $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ avec $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$. Soit R_k l'aire de $A_kB_kB_{k+1}A_{k+1}$. Soit :

$$AR_n = \sum_{k=0}^{n-1} R_k = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k).$$



Remarques 54.23.

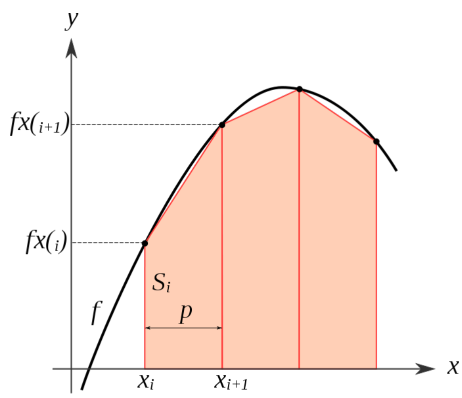
a. Si f est croissante, c'est une approximation par défaut et si f est décroissante, c'est une approximation par excès.

b. La méthode des rectangles à gauche fait penser aux sommes de Riemann vue en début de leçon.

6 2 Méthode des trapèzes

On construit $(x_i)_{1\leq i\leq n}$, $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$. Soit T_k l'aire du trapèze $A_kB_kB_{k+1}A_{k+1}$ et

$$AT_n = \sum_{=0}^{n-1} T_{=} \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i).\right)$$



Remarque 54.24. Plus rapide en terme de convergence par rapport à n mais on ne peut pas savoir si c'est une approximation par excès ou par défaut.

Exemple 54.25. On veut calculer :

$$F = \int (t^2 + 2t)\mathrm{e}^{\lambda t}\,\mathrm{d}t$$

où λ est un nombre réel non nul.

Puisque la fonction $x \mapsto x^2 + 2x$ est une fonction polynômé, cherchons F sous la forme $F(x) = P(x)\exp(\lambda x)$, où P est une fonction polynôme de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$. On doit avoir quel que soit x :

$$F'(x) = (P'(x) + \lambda P(x))\exp(\lambda x) = (x^2 + 2x)\exp(\lambda x),$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} x^2 = 2x = P'(x) + \lambda P(x) &= (2ax + b) + \lambda(ax^2 + bx + c) \\ &= \lambda a x^2 + (2a + \lambda b)x + b + \lambda c. \end{aligned}$$

Les coefficients a, b et c sont solutions du système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} \lambda a = 1 \\ 2a + \lambda b = 2 \\ b + \lambda c = 0 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} a = \frac{1}{\lambda} \\ b = \frac{2(\lambda-1)}{\lambda^2} \\ c = \frac{2(1-\lambda)}{\lambda^3} \end{cases}.$$

Il vient donc

$$F(x) = \left[\frac{1}{\lambda}x^2 + 2\frac{\lambda - 1}{\lambda^2}x + 2\frac{1-\lambda}{\lambda^3}\right]\exp(\lambda x).$$

Exemple 54.26. On veut calculer

$$\int (\sin t)^4\,\mathrm{d}t.$$

Nous avons l'identité :

$$8(\sin x)^4 = \cos 4x - 4\cos 2x + 3.$$

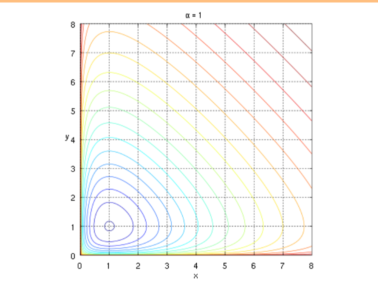
Il vient donc :

$$\int (\sin t)^4\,\mathrm{d}t = \frac{1}{8}\int \cos(4t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int \cos 2t\,\mathrm{d}t + \frac{3}{8}\int \mathrm{d}t = \frac{1}{32}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x.$$

LEÇON

55

Équations différentielles



Niveau : BTS

Prérequis : calcul différentiel

1 Préliminaires

1.1 Introduction

Définition 55.1

Equation différentielle d'ordre n

Une *équation différentielle d'ordre* n est une équation reliant une fonction y (n fois dérivable) à ses n premières dérivées.

Définition 55.2

Résolution

Résoudre une telle équation, c'est trouver toutes les fonctions y satisfaisant cette équation.

Si y est une fonction dérivable du temps, alors on note y' ou $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ sa dérivée première, y'' ou $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$ sa dérivée seconde,... On prend garde à éviter l'abus de notation classique : $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ n'est pas un nombre mais une fonction.

Exemple 55.3. Si $y(t) = \sin(3\pi t)$ alors $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) = y'(t) = 3\pi\cos(3\pi t)$.

1.2 Exemple fondamental

Exemple 55.4. Si l'on se place dans un circuit série RLC soumis à une tension $e(t)$, alors l'intensité $i(t)$ induite par cette différence de potentiel vérifie l'équation :

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(u)\,\mathrm{d}u = e(t). \tag{55.1}$$

Si le signal e est dérivable, on peut dériver cette équation et l'on obtient l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants suivante :

$$L\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2}(t) + R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{1}{C}i(t) = \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}(t).$$

ou, si l'on reprend les notations mathématiques :

$$Li''(t) + Ri'(t) + \frac{1}{C}i(t) = e'(t).$$

Remarques 55.5.

1. Si le signal e n'est pas dérivable, la démarche précédente ne peut s'appliquer. La théorie des distributions, qui contourne cet obstacle, permet de s'en sortir mais elle est hors programme. L'utilisation de la transformation de Laplace, dans ce cas-là, se révélera fort utile.
2. Si e est périodique, une autre manière de s'affranchir de sa non-dérivabilité est de lui substituer une somme de Fourier l'approchant. Celle-ci est non seulement dérivable, mais aussi sa simplicité permet de résoudre explicitement l'équation différentielle (de manière approchée).

2 Equations différentielles linéaires du premier ordre

2.1 Définitions et structure des solutions

Définition 55.6

Une *équation différentielle linéaire d'ordre* 1 est une équation (E) de la forme :

$$a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t) \tag{E}$$

où a, b et c sont des fonctions continues sur un intervalle I, avec $a(t) \neq 0$ sur I.

Définition 55.7

Equation homogène

L'*équation homogène* associée à (E) est l'équation sans second membre (E^*) :

$$a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0. \qquad (E^*)$$

Théorème 55.8

La *solution générale* de (E) est obtenue en ajoutant une solution particulière de (E) à la solution générale de (E^*).

Développement

Démonstration du théorème 55.8. Soit y_1 une solution particulière de (E). Elle vérifie donc

$$a(t)y_1'(t) + b(t)y_1(t) = c(t).$$

Ensuite :

$$\begin{aligned} y \text{ est une solution de } (E) &\Leftrightarrow a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t) \\ &\Leftrightarrow a(t)y'(t) + b(t)y(t) = a(t)y_1'(t) + b(t)y_1(t) \\ &\Leftrightarrow a(t)(y'(t) - y_1'(t)) + b(t)(y(t) - y_1(t)) = 0 \\ &\Leftrightarrow a(t)(y - y_1)'(t) + b(t)(y - y_1)(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow y^* = y - y_1 \text{ est solution de } (E^*). \end{aligned}$$

Ainsi, étant données la solution particulière y_1 de (E) et la solution générale de (E^*), la solution générale de (E) est bien de la forme $y = y^* + y_1$. □

2 2 Résolution de l'équation homogène

Coefficients constants On suppose ici que les deux fonctions a et b sont constantes avec $a \neq 0$. Dans ce cas l'équation (E^*) s'écrit $ay' + by = 0$, et l'intervalle d'étude est $\mathbb{R}$ car a est une constante. Supposons que y ne s'annule pas. On peut alors écrire $\frac{y'}{y} = -\frac{b}{a}$. Ensuite, puisque y ne s'annule pas, elle ne change pas de signe, et on peut supposer par exemple qu'elle est toujours strictement positive. Ainsi, nous pouvons primitiver notre relation en $\ln |y(t)| = \ln y(t) = -\frac{b}{a}t + k$, où k est une constante. Ceci montre alors que

$$y(t) = \exp\left(-\frac{b}{a}t + k\right).$$

Et si, pour finir, on note $K = \mathrm{e}^k$, alors $y(t) = K\mathrm{e}^{-(b/a)t}$.

Théorème 55.9

Les solution de $ay' + by = 0$ sont de la forme $K\mathrm{e}^{-(b/a)t}$, où K est une constante réelle.

Développement

Démonstration du théorème 55.9. Soit $y(t) = K\mathrm{e}^{-(b/a)t}$. On vérifie aisément que y est solution de (E^*) :

$$ay'(t) + by(t) = -\frac{b}{a}aK\mathrm{e}^{-(b/a)t} + bK\mathrm{e}^{-(b/a)t} = -bK\mathrm{e}^{-(b/a)t} + bK\mathrm{e}^{-(b/a)t} = 0.$$

Réciproquement, supposons que y soit solution de (E), ce qui signifie que $ay' + by = 0$. Posons $f(t) = y(t)\mathrm{e}^{(b/a)t}$. Cette fonction est dérivable, et :

$$f'(t) = y'(t)\mathrm{e}^{(b/a)t} + y(t)\frac{b}{a}\mathrm{e}^{(b/a)t}(ay' + by)(t) = 0.$$

Ainsi f est une constante K sur l'intervalle $\mathbb{R}$, c'est-à-dire $f(t) = K$, ou encore $y(t) = K\mathrm{e}^{-(b/a)t}$. □

Exemple 55.10. Les solutions de l'équation $2x' + x = 0$ sont de la forme $K\mathrm{e}^{-t/2}$.

Cas général Dans ce cas, l'équation (E^*) s'écrit :

$$a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0.$$

On peut, pour tout $t \in I$, écrire

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = -\frac{b(t)}{a(t)},$$

en supposant que y ne s'annule pas sur I. Notons $F(t)$ une primitive de $\frac{b(t)}{a(t)}$. Si y est strictement positive, on a comme dans le cas constant, $\ln y(t) = -F(t) + k$, et ainsi

$$y(t) = \exp(-F(t) + k).$$

Si l'on note $K = \mathrm{e}^k$, alors $y(t) = K\mathrm{e}^{-F(t)}$.

Théorème 55.11 Les solutions de $a'(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$ sont de la forme $K\mathrm{e}^{-F(t)}$, où K est une constante réelle et $F(t)$ une primitive de $\frac{b(t)}{a(t)}$.

Pour la démonstration, on pourra s'inspirer de la démonstration du théorème 55.9.

Exemple 55.12. Soit l'équation, définie sur $I =]-1\,,+\infty[$, par

$$(t+1)w' + (t-1)w = 0.$$

On a ici :

$$\frac{b(t)}{a(t)} = \frac{t-1}{t+1} = \frac{t+1-2}{t+1} = 1 - \frac{2}{t+1}.$$

Une primitive sur I est donnée par

$$F(t) = t - 2\ln|t+1| = t - 2\ln(t+1).$$

Les solutions de l'équation différentielle sont donc de la forme

$$w(t) = K\mathrm{e}^{-t+2\ln(t+1)} = K\mathrm{e}^{-t}(t+1)^2.$$

2 3 Recherche d'une solution particulière et solution générale

Il nous reste donc à trouver une solution particulière de (E), dans le cas où $c(t)$ est un polynôme ou un polynôme trigonométrique.

Le second membre est un polynôme On cherche une solution particulière d'un polynôme de même degré que $c(t)$.

Exemple 55.13. Soit l'équation

$$y'(x) - y(x) = x^2 - x - 1. \qquad (E)$$

1. L'équation homogène est
$$y' - y = 0 \qquad (E^*)$$
et ainsi les solutions sont de la forme $y^*(x) = K\mathrm{e}^x$.
2. ici $c(t) = x^2 - x - 1$, polynôme du second degré. On cherche donc une solution particulière y_1 sous la forme d'un polynôme du second degré $y_1(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. On remplace dans ($E$) :
$$y_1'(x) - y_1(x) = x^2 - x - 1 \Leftrightarrow 2\alpha x + \beta - \alpha x^2 - \beta x - \gamma = x^2 - x - 1$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha = 1 \\ 2\alpha - \beta = -1 \\ \beta - \gamma = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = -1 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$
Ainsi $y_1(x) = -x^2 - x$ est une solution particulière de (E).

3. La solution générale de (E) est donc donnée par
$$y(x) = y^*(x) + y_1(x) = K\mathrm{e}^x - x^2 - x,$$
où K est une constante réelle (qui ne pourra être déterminée qu'avec une condition initiale).

Le second membre est un polynôme trigonométrique On rappelle qu'un polynôme trigonométrique de degré n est un polynôme de la forme :
$$T(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx).$$

Exemple 55.14. Soit l'équation
$$y'(t) - 2y(t) = 13 \sin 3t \qquad (E)$$
sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$.

1. L'équation homogène est
$$y' - 2y = 0, \qquad (E^*)$$
et ainsi ses solutions sont de la forme $y^*(x) = K\mathrm{e}^{2t}$.
2. Ici $c(t) = 13\sin 3t$, polynôme trigonométrique possédant une seule fréquence. On cherche donc une solution particulière y_1 sous la forme d'un polynôme trigonométrique de même fréquence fondamentale $y_1(t) = A\cos 3t + B \sin 3t$. On remplace dans ($E$) :
$$y_1'(t) - 2y_1(t) = 13\sin 3t \Leftrightarrow -3A\sin 3t + 3B\cos 3t - 2A\cos 3t - 2B\sin 3t = 13\sin 3t$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3A - 2B = 13 \\ 3B - 2A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -3 \\ B = -2 \end{cases}$$
Ainsi $y_1(t) = -3\cos 3t - 2\sin 3t$ est une solution particulière de (E).
3. La solution générale de (E) est donc donnée par
$$y(t) = y^*(x) + y_1(x) = K\mathrm{e}^{2t} - 3\cos 3t - 2\sin 3t$$
où K est une constante réelle (qui ne pourra être déterminée qu'avec une condition initiale).

2.4 Utilisation d'une condition initiale

La donnée d'une condition initiale permet de déterminer exactement la solution de (E)+ condition initiale

Théorème 55.15 Etant donnée une condition initiale sur les solutions, une équation différentielle linéaire du premier ordre possède une *unique solution.*

Développement

Démonstration du théorème 55.15. On rappelle que les solutions de (E) sont données par
$$y(t) = K\mathrm{e}^{-F(t)} + y_1(t),$$
où $F(t)$ est une primitive de $\frac{b(t)}{a(t)}$ et y_1 une solution particulière de (E). Il s'agit donc de fixer K grâce à la condition initiale $y(t_0) = y_0$. On remplace :
$$y_0 = y(t_0) = K\mathrm{e}^{-F(t_0)} + y_1(t_0) \Leftrightarrow K = \frac{y_0 - y_1(t_0)}{\mathrm{e}^{-F(t_0)}}.$$
Ainsi la constante K est déterminer de manière unique. □

Exemple 55.16. On cherche la solution de l'équation de l'exemple 57.14 vérifiant $y(0) = 1$. On remplace cette condition initiale dans la solution générale de (E) :
$$1 = y(0) = K\mathrm{e}^0 - 3\cos 0 - 2\sin 0,$$
ce qui donne $1 = K - 3$ ou encore $K = 4$. Finalement la solution du problème de Cauchy est
$$y(t) = 4\mathrm{e}^{2t} - 3\cos 3t - 2\sin 3t.$$

3 Equations différentielles linéaires du second d'ordre à coefs constants

3 1 Définitions et structure des solutions

Définition 55.17

Une *équation différentielle linéaire d'ordre* 2 *à coefficients constants* est une équation (E) de la forme :

$$ay''(t) + by(t) + cy(t) = d(t), \qquad (E)$$

où a, b et c sont des constantes, avec $a \neq 0$.

Définition 55.18

Equation homogène
L'équation homogène associée à (E) est l'équation sans second membre :

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0. \qquad (E^*)$$

Théorème 55.19

La solution *générale* de (E) est obtenue en ajoutant une solution particulière de (E) à la solution générale de (E^*).

3 2 Résolution de l'équation homogène

Espace des solutions

Théorème 55.20

Si f et g sont deux solutions non proportionnelles de (E^*), alors *l'ensemble des solutions* de (E^*) est composé des fonctions de la forme $C_1 f + C_2 g$, où C_1 et C_2 sont des constantes réelles.

Développement

Démonstration du théorème 55.20. Si f et g sont deux solutions, il est facile de vérifier que $C_1 f + C_2 g$ est encore solution. Réciproquement, toute solution est de cette forme (admis). □

Remarque 55.21. Ainsi, si l'on trouve deux fonctions solutions non proportionnelles, on obtient *toutes* les solutions par combinaison linéaire de ces deux fonctions.

Equation caractéristique En se souvenant des fonctions solutions des équations différentielles du premier ordre, on est amené à chercher si des fonctions exponentielles sont solutions de (E^*). Posons donc $y(t) = \mathrm{e}^{rt}$ et supposons que cette fonction soit solution. On remplace dans (E^*) et on obtient

$$ar^2\mathrm{e}^{rt} + br\mathrm{e}^{rt} + c\mathrm{e}^{rt} = 0,$$

soit

$$\mathrm{e}^{rt}(ar^2 + br + c) = 0.$$

Puisqu'une exponentielle n'est jamais nulle, ceci signifie que $ar^2 + br + c = 0$.

Définition 55.22

Equation caractéristique
L'équation du second degré $ar^2+br+c = 0$ est appelée *équation caractéristique* de l'équation homogène (E^*).

Résolution de l'équation caractéristique et formes des solutions Soit Δ le discriminant de l'équation caractéristique.

– Si $\Delta > 0$, il y a donc deux solutions réels r_1 et r_2. Les deux fonctions $f_1(t) = \mathrm{e}^{r_1 t}$ et $f_2(t) = \mathrm{e}^{r_2 t}$ sont deux solutions de (E^*) qui ne sont pas proportionnelles car le rapport suivant n'est pas constant :

$$\frac{f_1(t)}{f_2(t)} = \frac{\mathrm{e}^{r_1 t}}{\mathrm{e}^{r_2 t}} = \mathrm{e}^{r_1 t - r_2 t} = \mathrm{e}^{(r_1 - r_2)t}.$$

Ainsi, les solutions de (E^*) sont de la forme

$$C_1 \mathrm{e}^{r_1 t} + C_2 \mathrm{e}^{r_2 t},$$

où C_1 et C_2 sont des constantes réelles.

– Si $\Delta = 0$, il y a une seule solution réelle double $r = -\frac{b}{2a}$, qui fournit déjà une solution $f_1(t) = \mathrm{e}^{rt}$ de (E^*). On cherche une deuxième solution sous la forme

$$f_2(t) = w(t) f_1(t) = w(t)\mathrm{e}^{rt}.$$

On remplace dans (E^*) :

$$\begin{aligned}
&y_2 \text{ solution de } (E^*)\\
\Leftrightarrow\, & a y_2''(t) + b y_2'(t) + c y_2(t) = 0\\
\Leftrightarrow\, & a[w''(t)\mathrm{e}^{rt} + 2w'(t) r \mathrm{e}^{rt} + w(t) r^2 \mathrm{e}^{rt}] + b[w'(t)\mathrm{e}^{rt} + w(t) r \mathrm{e}^{rt}] + c w(t)\mathrm{e}^{rt} = 0\\
\Leftrightarrow\, & a[w''(t) + 2w'(t) r + w(t) r^2] + b[w'(t) + w(t) r] + c w(t) = 0\\
\Leftrightarrow\, & a w''(t) + (2ar + b) w'(t) + (ar^2 + br + c) w(t) = 0\\
\Leftrightarrow\, & a w''(t) = 0
\end{aligned}$$

car $r = -\frac{b}{2a}$ est solution de l'équation caractéristique

$$\Leftrightarrow w'(t) = 0$$

car $a \neq 0$. Ainsi, on peut prendre $w(t) = t$, et $f_2(t) = w(t) f_1(t) = t\mathrm{e}^{rt}$. On vérifie aisément que f_1 et f_2 ne sont pas proportionnelles car le rapport $\frac{f_2(t)}{f_1(t)} = t$ n'est pas constant. Par conséquent, les solutions de (E^*) sont de la forme

$$C_1 \mathrm{e}^{rt} + C_2 t \mathrm{e}^{rt} = \mathrm{e}^{rt}(C_1 + C_2 t)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes réelles.

– Si $\Delta < 0$, il y a deux solutions complexes conjuguées $r_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$ et $r_2 = \alpha - \mathrm{i}\beta$, où α et β sont deux réels avec $\beta \neq 0$. Les fonctions $g_1(t) = \mathrm{e}^{r_1 t}$ et $g_2(t) = \mathrm{e}^{r_2 t}$ sont solutions de (E^*) à valeurs complexes. On obtient d'autres solutions par combinaison linéaire *complexe*, en particulier :

$$\begin{cases} f_1(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{r_1 t} + \mathrm{e}^{r_2 t})\\ f_2(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{r_1 t} - \mathrm{e}^{r_2 t}). \end{cases}$$

Ces deux nouvelles fonctions solutions sont à valeurs réelles et ne sont pas proportionnelles car leur rapport n'est pas une constante. Ainsi les solutions de (E^*) sont de la forme :

$$C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}(C_1\cos\beta t + C_2\sin\beta t),$$

où C_1 et C_2 sont des constantes réelles.

Conclusion

Théorème 55.23

Les solutions de l'équation $ay'' + by' = cy = 0$ avec $a \neq 0$ sont :

– Si $\Delta > 0$, $C_1\mathrm{e}^{r_1 t} + C_2\mathrm{e}^{r_2 t}$ où r_1 et r_2 sont les deux solutions ;

– Si $\Delta = 0$, $\mathrm{e}^{rt}(C_1 + C_2 t)$ où r est la solution double ;

– Si $\Delta < 0$, $\mathrm{e}^{\alpha t}(C_1\cos\beta t + C_2\sin\beta t)$ où α et β sont les parties réelle et imaginaire des solutions.

Remarque 55.24. Si l'on pose $C = \sqrt{C_1 + C_2}$ alors

$$\left(\frac{C_1}{C}\right)^2 + \left(\frac{C_2}{C}\right)^2 = 1$$

et on peut donc trouver un nombre φ tel que $\frac{C_1}{C} = \sin\varphi$ et $\frac{C_2}{C} = \cos\varphi$. Dans ces conditions :

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\alpha t}(C_1\cos\beta t + C_2\sin\beta t) &= C\mathrm{e}^{\alpha t}\left(\frac{C_1}{C}\cos\beta t + \frac{C_2}{C}\sin\beta\right)\\ &= C\mathrm{e}^{\alpha t}(\sin\varphi\cos\beta t + \cos\varphi\sin\beta t)\\ &= C\mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\beta t + \varphi).\end{aligned}$$

qui est une forme assez commode pour l'expression des solutions dans le cas $\Delta < 0$.

Exemple 55.25. Revenons à notre circuit série RLC, dont l'équation homogène est $Li'' + Ri' + \frac{1}{C}i = 0$. Le discriminant de l'équation cartéristique est $\Delta = R^2 - 4\frac{L}{C}$, et ainsi il s'annule lorsque $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

3 3 Recherche d'une solution particulière et solution générale

Le second membre est un polynôme On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de même degré que $d(t)$. On procède exactement de la même manière que dans l'exemple 55.13, par identification des coefficients du polynôme-candidat.

Le second membre est un polynôme trigonométrique Dans ce cas également, la méthode est identique à celle de l'exemple du premier degré. On cherche la solution sous la forme d'un polynôme trigonométrique semblable à $d(t)$.

Le second membre est une fonction exponentielle-polynôme Ici $d(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}P(t)$, où P est un polynôme. On cherche les solutions sous la forme $\mathrm{e}^{\lambda t}Q(t)$ où Q est un polynôme de degré celui de P plus 1. On procède ensuite par identification des coefficients de Q comme dans les cas précédents.

3 4 Utilisation d'une condition initiale

La donnée d'une condition initiale (généralement au temps $t_0 = 0$) permet de déterminer la solution de (E) + condition initiale (appelé problème de Cauchy) :

$$\begin{cases} ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t) \\ \begin{cases} y(t_0) \text{ fixé} \\ y'(t_0) \text{ fixé} \end{cases} \end{cases}.$$

Théorème 55.26 Etant données une condition initiale sur les solutions et une sur leurs dérivées, une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants possède une *unique solution.*

Développement

Démonstration du théorème 55.26. On se place dans le cas où $t_0 = 0$. Supposons par exemple que l'équation caractéristique possède deux solutions réelles r_1 et r_2 (cas $\Delta > 0$). Les solutions de (E) sont données par

$$y(t) = y_1(t) + C_1\mathrm{e}^{r_1 t} + C_2\mathrm{e}^{r_2 t},$$

où y_1 est une solution particulière. Il s'agit donc de déterminer exactement C_1 et C_2. Les conditions initiales donnent

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = y(0) - y_1(0) \\ r_1C_1 + r_2C_2 = y'(0) - y_1'(0) \end{cases}$$

Ce système possède toujours une solution unique car son déterminant est $r_2 - r_1 \neq 0$ car r_1 et r_2 sont différentes. Les cas $\Delta = 0$ et $\Delta < 0$ se traitent de la même manière. □

Exemple 55.27. Considérons l'équation

$$i''(t) - 2i'(t) + 5i(t) = 5\cos t \tag{E}$$

sur l'intervalle $I = [0\,, +\infty[$. On suppose de plus que $i(0) = i'(0) = 0$.

1. L'équation homogène associée est

   $$i'' - 2i' - 5i = 0 \tag{E^*}$$

   Ici, $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -16 < 0$. Les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique sont $1 \pm 2\mathrm{i}$. Ainsi les solutions de l'équation (E^*) sont de la forme :

   $$i^*(t) = \mathrm{e}^t(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t).$$

2. On cherche une solution particulière de (E) sous la forme $i_1(t) = A\cos t + B\sin t$ (polynôme trigonométrique). On obtient les équations

   $$\begin{cases} 4A - 2B = 5 \\ 4B + 2A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

   et finalement

   $$i_1(t) = \cos t - \frac{1}{2}\sin t.$$

3. La solution générale de (E) est donc

   $$i(t) = \cos t - \frac{1}{2}\sin t + \mathrm{e}^t(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t).$$

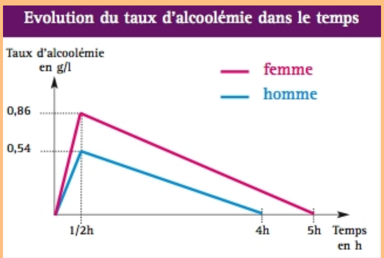
   On doit avoir $i(0) = 0$ donc $0 = 1 + C_1$ soit $C_1 = -1$. De plus, $i'(0) = 0$, ce qui donne $0 = -\frac{1}{2} + C_1 + 2C_2$ soit $C_2 = \frac{3}{4}$.

4. La solution du problème de Cauchy est donc

   $$i(t) = \cos t - \frac{1}{2} + \mathrm{e}^t\left(-\cos 2t + \frac{3}{4}\sin 2t\right).$$

LEÇON 56

Problèmes conduisant à la résolution d'équations différentielles



Niveau : Terminale S

Prérequis : équation différentielle, résolution, fonctions

1 Du double au triple

Exemple 56.1. Une grandeur (non nulle) y évolue à une vitesse proportionnelle à elle-même. On sait que cette grandeur double tous les dix ans. Combien de temps lui faut-il pour tripler ?

Développement

Solution. Par hypothèse, on a : $y' = ay$ où a est le coefficient de proportionnalité. On note t le temps (en années). On sait que les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont de la forme :

$$y(t) = C\mathrm{e}^{at}$$

où C est une constante (non nulle, sinon y serait nulle). Comme la grandeur double tous les dix ans, on a :

$$y(t+10) = 2y(t) \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{a(t+10)} = 2C\mathrm{e}^{at}.$$

En simplifiant par $C\mathrm{e}^{at}$, on a : $\mathrm{e}^{10a} = 2$, d'où :

$$a = \frac{\ln 2}{10}.$$

On a donc :

$$y(t) = C\mathrm{e}^{(\ln 2/10)t} = C2^{t/10}.$$

Cherchons maintenant le temps T pour lequel, on a :

$$y(t+T) = 3y(t) \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{a(t+T)} = 3C\mathrm{e}^{at} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{aT} = 3$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{\ln 3}{a} = \frac{10\ln 3}{\ln 2} \simeq 15,85 \quad \text{à } 10^{-2} \text{ près}.$$

Il faut donc attendre 15 ans, 10 mois et 6 jours (au jour près) pour que cette quantité triple. □

2 Loi de refroidissement de Newton

Exemple 56.2. La loi de refroidissement de Newton s'énonce ainsi : « *la vitesse de refroidissement d'un corps inerte est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et le milieu ambiant.* » On suppose que la température de l'air ambiant est constante égale à 25 C. Dans ces conditions, la température d'un corps passe de 100 C à 70 C en 15 minutes. Au bout de combien de temps se trouvera-t-il à 40 C ?

Développement

Solution. Notons $f(t)$ la température du corps à l'instant t (en minutes). Selon la loi de refroidissement de Newton, on a :

$$f'(t) = a(25 - f(t)).$$

Les solutions, sur $\mathbb{R}_+$, de cette équation différentielle sont de la forme :

$$f(t) = C\mathrm{e}^{-at} + 25.$$

A l'instant $t = 0$, le corps est à une température de 100 C :

$$f(0) = 100 \Leftrightarrow C + 25 = 100 \Leftrightarrow C = 75.$$

D'où, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$f(t) = 75\mathrm{e}^{-at} + 25.$$

On sait que 15 minutes plus tard, le corps est à $70°C$, ce qui permet de calculer a :

$$f(15) = 70 \Leftrightarrow 75\mathrm{e}^{-15a} + 25 = 70 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-15a} = \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow -15a = \ln\left(\frac{3}{5}\right) = \ln 3 - ln5 \Leftrightarrow a = \frac{\ln 5 - \ln 3}{15} \simeq\simeq 0{,}034 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

Déterminons maintenant le temps t à partir duquel le corps se trouve à une température de $40\,\mathrm{C}$. On résout l'équation :

$$f(t) = 40 \Leftrightarrow 75\mathrm{e}^{-at} + 25 = 40 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-at} = \frac{1}{5}$$

d'où

$$t = \frac{\ln 5}{a} = 15\frac{ln5}{\ln 5 - \ln 3} \simeq 47{,}26 \text{ à } 10^{-1} \text{ près.}$$

Il faut attendre 47 minutes (et 16 secondes, à la seconde près) que le corps atteigne la température de $40\,\mathrm{C}$. □

---

3 Dissolution d'une substance

Exemple 56.3. Une substance se dissout dans l'eau. On admet que la vitesse de dissolution est proportionnelle à la quantité non encore dissoute. À l'instant $t = 0$ (t en minutes), on place 20 grammes de cette substance dans une grande quantité d'eau. Sachant que les dix premiers gramme se dissolvent en cinq minutes, donner une expression de la quantité dissoute $f(t)$, en grammes, en fonction de t.

Développement

Solution. Comme la vitesse de dissolution est proportionnelle à la quantité non encore dissoute, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$f'(t) = a(20 - f(t)).$$

Les solutions sont de la forme, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$f(t) = C\mathrm{e}^{-at} + 20.$$

À l'instant initial, il n'y a pas encore de quantité dissoute donc :

$$f(0) = 0 \Leftrightarrow C + 20 = 0 \Leftrightarrow C = -20.$$

Comme les dix premiers grammes se dissolvent en cinq minutes, on a :

$$f(5) = 10 \Leftrightarrow -20\mathrm{e}^{-5a} + 20 = 10 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-5a} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{\ln 2}{5} \simeq 0,14 \quad \text{à } 10^{-2} \text{ près.}$$

On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$f(t) = 20\left(1 - \mathrm{e}^{-((\ln 2)/5)t}\right) = 20\mathrm{e}^{1-2^{-t/5}}.$$

□

---

4 Alcoolémie

Exemple 56.4. Le taux d'alcoolémie $f(t)$ (en gL^{-1}) d'une personne ayant absorbé, à jeun, une certaine quantité d'alcool vérifie, sur $\mathbb{R}_+$, l'équation différentielle :

$$y' + y = a\mathrm{e}^{-t} \qquad (E)$$

où t est le temps écoulé après l'ingestion (exprimé en heures), et a une constante qui dépend des conditions expérimentales.

1. On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:
$$g(t) = f(t)\mathrm{e}^t.$$
Démontrer que g est une fonction affine.
2. Exprimer $f(t)$ en fonction de t et de a.
3. Dans cette question, on suppose que $a = 5$.
   (a) Etudier les variations de f et tracer sa courbe. Déterminer le taux d'alcoolémie maximal et le temps au bout duquel il est atteint.
   (b) Donner une valeur du délai T (à l'heure près par excès) au bout duquel le taux d'alcoolémie de cette personne est inférieur à $0{,}5\,\mathrm{g}\mathrm{L}^{-1}$.

Développement

Solution.

1. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (les fonction f et l'exponentielle le sont) et on a, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:
$$g'(t) = f'(t)\mathrm{e}^t + f(t)\mathrm{e}^t = (f'(t) + f(t))\mathrm{e}^t$$
et comme f est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+$, $g'(t) = a$, d'où :
$$g(t) = at + b.$$
La fonction g est bien affine (sur $\mathbb{R}_+$).
2. On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:
$$f(t) = (at + b)\mathrm{e}^{-t}.$$
Or, à l'instant $t = 0$, l'alcool n'est pas encore dans le sang donc $f(0) = 0$:
$$b\mathrm{e}^{-t} = 0 \Leftrightarrow b = 0.$$
D'où $f(t) = at\mathrm{e}^{-t}$.
3. (a) Etudions les variations de f. Comme f est solution de (E), on a :
$$f'(t) = 5\mathrm{e}^{-t} - f(t) = 5\mathrm{e}^{-t} - 5t\mathrm{e}^{-t} = 5\mathrm{e}^{-t}(1 - t).$$
D'où :
$$f'(t) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - t \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 1.$$
La fonction f est croissante sur $[0\,,1]$ et décroissante sur $[1\,,+\infty[$. Elle admet donc un maximum en 1 et :
$$f(1) = \frac{5}{\mathrm{e}} \simeq 1{,}84 \quad \text{à } 10^{-2} \text{ près.}$$
Le taux d'alcoolémie maximal est de $1{,}84\,\mathrm{g}\mathrm{L}^{-1}$ atteint au bout d'une heure.

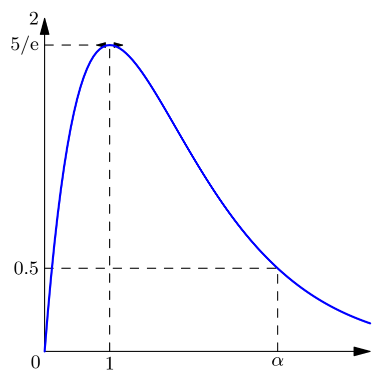


FIGURE 56.1 – Représentation graphique de la fonction f

(b) Nous devons résoudre l'inéquation :

$$f(t) \leq 0,5 \Leftrightarrow 5t\mathrm{e}^{-t} \leq 0,5 \Leftrightarrow t\mathrm{e}^{-t} \leq 0,1.$$

Ceci n'est pas possible formellement. Cependant, la fonction f est continue et strictement décroissante sur $[1\,,+\infty[$ et on a :

$$f(1) = \frac{5}{\mathrm{e}} > 0,5 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty} 5t\mathrm{e}^{-t} = 0.$$

Le théorème de bijection assure qu'il existe un unique réel α de $[1\,,+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0,5$. Le graphique permet de conjecturer :

$$\alpha \in \,]3\,,4[.$$

Ce qui peut se contrôle à la calculatrice :

$$f(3) \simeq 0{,}75(>0{,}5) \quad \text{et} \quad f(4) \simeq 0{,}37(<0{,}5).$$

On a donc bien $\alpha \in \,]3\,,4[$. Il faudra attendre 4 heures (à l'heure près par excès) pour pouvoir, par exemple, reprendre le volant...

□

5 Décharge d'un condensateur

Exemple 56.5. On considère un circuit électrique constitué d'un condensateur (de capacité C) se déchargent dans une résistance R. On note $u_C(t)$ la tension au borne du condensateur (en Volts) à l'instant t (en secondes). À l'instant $t = 0$, on sait que $u_C(0) = 3$ V. Exprimer $u_C(t)$ en fonction de t.

Développement

Solution. D'après la loi d'additivité des tensions, on a :

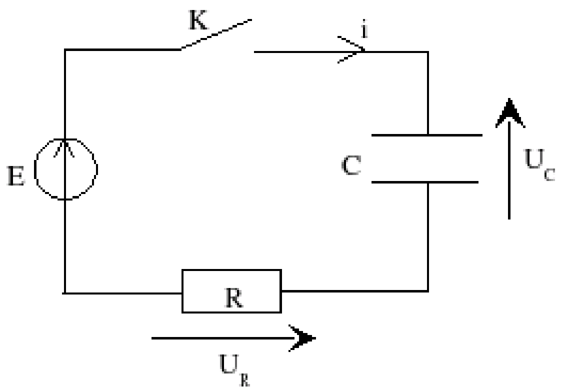


FIGURE 56.2 – Circuit RC

$$u_C + u_R = 0$$

(u_C et u_R désignent respectivement la tension aux bornes du condensateur et de la résistance). Notons $i(t)$ l'intensité du courant électrique dans le circuit à l'instant t. On sait que :

$$u_C(t) = \frac{q(t)}{C} \quad \text{et} \quad u_R(t) = Ri(t) = R\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}.$$

D'où :

$$u_C'(t) = \frac{1}{C}\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{RC}u_R(t) = -\frac{1}{RC}u_C(t).$$

On en déduit :

$$u_C(t) = K\mathrm{e}^{-t/RC} \quad (K \in \mathbb{R}).$$

La condition initiale $u_C(0) = 3$ nous donne $K = 3$, d'où :

$$u_C(t) = 3\mathrm{e}^{-t/RC}.$$

□

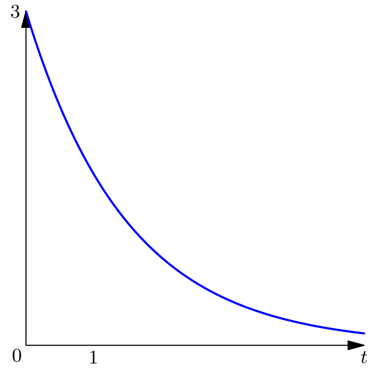


FIGURE 56.3 – Représentation graphique de u_C

6 Vitesse d'un parachutiste

Exemple 56.6. Un parachutiste tombe à une vitesse de $55\,\mathrm{ms}^{-1}$ au moment où son parachute s'ouvre. On fixe l'origine du temps ($t = 0$, en secondes) à ce moment là. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on note $v(t)$ la vitesse (en ms^{-1}) du parachutiste à l'instant t. On admet que la résistance de l'air est donnée par

$$R = \frac{Pv^2}{25}$$

où P est le poids du parachutiste avec son équipement ($P = mg$, $m =$ masse et $g = 9{,}81\,\mathrm{ms}^{-2}$).

1. Déterminer que v est solution, sur $\mathbb{R}_+$, de l'équation différentielle :

$$v' = g\left(1 - \frac{v^2}{25}\right). \tag{E}$$

2. On suppose que $v > 5$ sur $\mathbb{R}_+$, on pose sur $\mathbb{R}_+$:

$$z = \frac{1}{v-5}.$$

Déterminer une équation différentielle satisfaite par z sur $\mathbb{R}_+$ et la résoudre.

3. En déduire une expression de $v(t)$ en fonction de t et préciser sa limite lorsque t tend vers $+\infty$.

Développement

Solution.

1. D'après la relation fondamentale de la dynamique, on a :

$$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}.$$

En projetant les vecteurs sur un axe vertical, il vient :

$$mg - \frac{mgv^2}{25} = mv'.$$

On s'aperçoit que le problème est indépendant de la masse m du parachutiste avec son équipement.

$$v' = g\left(1 - \frac{v^2}{25}\right) = \frac{g}{25}(25 - v^2).$$

La fonction v est donc bien solution, sur $\mathbb{R}_+$, de l'équation différentielle :

$$v' = g\left(1 - \frac{v^2}{25}\right). \tag{E}$$

2. La fonction z est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (car v l'est) et on a :

$$z' = -\frac{v'}{(v-5)^2} = \frac{g}{25}\frac{(v^2-25)}{(v-5)^2} = \frac{g}{25}\frac{v+5}{v-5} = \frac{gz(v+5)}{25}.$$

Or,

$$v = \frac{1}{z} + 5 \Leftrightarrow v + 5 = \frac{1}{z} + 10.$$

D'où :

$$z' = \frac{gz(\frac{1}{z}+10)}{25} = \frac{g}{25}(10z+1).$$

On en déduit que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$z(t) = C\mathrm{e}^{2gt/5} - \frac{1}{10}.$$

La condition initiale $z(0) = \frac{1}{50}$ donne $C - \frac{1}{10} = \frac{1}{50} \Leftrightarrow C = \frac{3}{25}$.

3. D'où, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$v(t) = \frac{1}{\frac{3}{25}\mathrm{e}^{2gt/5} - \frac{1}{10}} + 5.$$

Comme $g > 0$, on a :

$$\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{2gt/5} = +\infty,$$

d'où :

$$\lim_{t\to+\infty} v(t) = 5.$$

La vitesse du parachutiste se stabilise rapidement vers $5\,\mathrm{ms}^{-1}$.

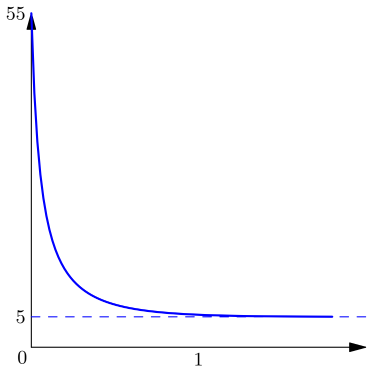


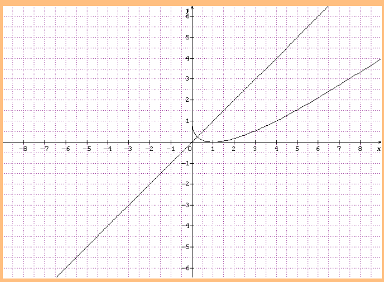
FIGURE 56.4 – Représentation graphique de v

□

LEÇON

57

Problèmes conduisant à l'étude de fonctions



Niveau : Lycée

Prérequis : Notions de fonctions, dérivées, limites, continuité, étude du signe d'une fonction

1 Plan d'étude d'une fonction

1.1 Domaine de définition, domaine d'étude

S'il n'est pas donné dans l'énoncé, il faut chercher le domaine (ou ensemble) de définition de la fonction à étudier. Ce peut être $\mathbb{R}$, un intervalle, ou une réunion d'intervalles.

- Les fonctions polynômes, sinus et cosinus sont définies sur $\mathbb{R}$.
- La fonction inverse est définie sur $]-\infty\,, 0[\, \cup\,]0\,, +\infty[$.

  Si l'expression de la fonction présente un dénominateur, celui-ci doit être *non nul*. En conséquence, les fonctions rationnelles sont définie pour toutes les valeurs qui n'annulent pas leur dénominateur.
- La fonction tangente $x \mapsto \tan x$ est définie sur $]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\,, \frac{\pi}{2} + 2k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$.
- La fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $[0\,, +\infty[$. Si l'expression de la fonction présente un radical, l'expression situé sous le radical doit être *positif ou nul*.
- La fonction logarithme népérien $x \mapsto \ln x$ est définie sur $]0\,, +\infty[$. Si l'expression de la fonction présente un *logarithme*, l'expression situé dans le logarithme doit être *strictement positive*.
- La fonction exponentielle $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Chacune de ces conditions, ou contraintes, peut entraîner la résolution d'une équation ou d'une inéquation. Ces conditions ou contraintes peuvent se cumuler.

1.2 Parité, périodicité, conséquences graphiques

Des informations sur la parité/périodicité d'une fonction peuvent s'avérer intéressante pour éventuellement restreindre le domaine d'étude de la fonction. Même si le texte ne le précise pas, il est essentiel d'avoir procédé à une telle étude.

Parité *Si le domaine de définition n'est pas symétrique par rapport à* 0*, il est inutile de chercher à étudier la parité de* f*, car l'existence de* $f(x)$ *et de* $f(-x)$ *n'est pas simultanément assurée pour tout* x *de l'ensemble de définition.*

Pour trouver la parité d'une fonction :

- Calculer $f(-x)$ en remplaçant dans l'expression de la fonction f, x par $-x$.
- Simplifier (notamment avec les puissances (exemple : $(-x)^2 = x^2$, $(-x)^3 = -x^3$,…)).
- Si on aboutit à l'expression de $f(x)$, alors la fonction est *paire*.
- Sinon, regarder si on n'aboutit pas à l'expression de $-f(x)$ (le calculer éventuellement). Si c'est le cas, alors la fonction est *impaire*.
- Sinon, f *n'est ni paire ni impaire*.

En cas de parité ou d'imparité, il suffit d'étudier f seulement sur l'intervalle $[0\,, +\infty[$ ou $]-\infty\,, 0]$, et de compléter son étude :

- par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées en cas de parité ;
- par symétrie par rapport à l'origine en cas d'imparité.

Périodicité Le caractère périodique de la fonction proviendra essentiellement du caractère périodique des fonctions trigonométriques (sinus, cosinus, tangente sont périodiques de période 2π), si l'expression de f en contient.

Pour démontrer que f est périodique de période T, calculer $f(x+T)$ en remplaçant dans l'expression de la fonction f, x par $x+T$ et montrer que l'on aboutit à l'expression de $f(x)$.

En cas de périodicité de la fonction f, si T est la période alors il suffira d'étudier f sur un intervalle d'amplitude T (de la forme $[x\,, x+T[$), de ne tracer qu'un « morceau » de la courbe représentative de f, et de compléter cette étude (respectivement ce tracé), par translations successives de vecteur $T\vec{\imath}$.

1.3 Limites et asymptote

Calculs de limites C'est *aux bornes* (finies ou infinies) de l'ensemble de définition de f que l'on étudie ses limites. Interviennent alors :

- les limites « usuelles » (tableau des limites usuelles) ;
- les opérations entre limites (limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une composée).

En cas de *forme indéterminée*, on utilise souvent les résultats :

- La limite en $\pm\infty$ d'un polynôme est celle de son terme de plus haut degré.
- La limite en $\pm\infty$ d'une fraction rationnelle (quotient de 2 polynômes) est celle du quotient simplifié des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.
- Pour les expressions faisant intervenir les radicaux (racines carrées), les méthodes employées suivent :
  - la factorisation par le terme du plus haut degré d'un polynôme figurant sous une racine carrée, ceci dans le but de « sortir de la racine » ce terme ;
  - la factorisation entre des termes « avec radicaux » et des termes « sans radicaux » ;
  - la multiplication par la quantité conjuguée en cas de forme indéterminée.

Asymptotes Connaître le comportement asymptotique d'une fonction aux bornes de son ensemble de définition permet d'aider à tracer sa courbe représentative.

asymptotes verticales S'il existe un nombre a de l'ensemble de définition tel que $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, alors la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$. Il est alors essentiel d'étudier les limites de f « à droite et à gauche » de a ($\lim_{x\to a^+} f(x)$ et $\lim_{x\to a^-} f(x)$). Les résultats diffèrent souvent.

asymptotes horizontales S'il existe un réel ℓ tel que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \ell$, alors la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$, $-\infty$ ou les deux.

asymptote oblique S'il existe deux nombres a et b tels que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - (ax+b) = 0$, alors la droite d'équation $y = ax+b$ est asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$, $-\infty$ ou les deux.

Enfin, si l'écriture de f se présente sous la forme $f(x) = ax+b+\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to\pm\infty} \varepsilon(x) = 0$ (c'est le cas dans l'exemple ci-dessus), alors puisque $f(x) - (ax+b) = \varepsilon(x)$, on a $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - (ax+b) = 0$, donc on peut affirmer que la droite d'équation $y = ax+b$ est *une asymptote oblique* à la courbe représentative de f.

Position de la courbe par rapport aux asymptotes Soit Δ une droite d'équation $y = ax+b$ asymptote (horizontale si $a = 0$ ou oblique si $a \neq 0$) à la courbe représentative de la fonction $\mathcal{C}_f$. Pour étudier la position relative de Δ et de $\mathcal{C}_f$, on doit étudier le signe de la différence $f(x)-(ax+b)$ (qui est le signe de $\varepsilon(x)$ dans le cas d'une asymptote oblique), signe qui dépend en général de x.

- Pour les valeurs de x telles que $f(x)-(ax+b) > 0$, c'est-à-dire $f(x) > (ax+b)$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de Δ...
- Pour les valeurs de x telles que $f(x)-(ax+b) < 0$, c'est-à-dire $f(x) < (ax+b)$, $\mathcal{C}_f$ est en dessous de Δ...

1.4 Variations de la fonction

On doit chercher les *intervalles* de $\mathcal{D}_f$ sur lesquels f est strictement croissante ou décroissante (voire constante).

Sans utiliser le calcul différentiel Certains résultats généraux permettent de conclure sur le sens de variations des fonctions :

- La somme de deux fonctions croissantes sur un même intervalle I est croissante sur cet intervalle I.
- La somme de deux fonctions décroissantes sur un même intervalle I est décroissante sur cet intervalle I.
- Si $f\colon I \to J$ et $g\colon J \to K$ ont même sens de variation, alors la composée $g\circ f$ est croissante. Si f et g ont des sens de variations contraires, alors leur composée est décroissante.

En utilisant les dérivées Déterminer les sous-ensemble de $\mathcal{D}_f$ sur lesquels f est dérivable. Les polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$, les fonctions rationnelles sur chaque intervalle de leur ensemble de définition, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $]0\,,+\infty[$, les fonctions sinus et cosinus sur $\mathbb{R}$.

Pour calculer la dérivée de f :

– En utilisant les résultats concernant les dérivées des fonctions usuelles (tableau des dérivées usuelles)

– En utilisant les résultats concernant les dérivées de somme, produit, quotient, compositions de fonctions. . .

– Dans le calcul de dérivée d'un quotient

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2},$$

on se retrouve avec un dénominateur strictement positif (quel que soit x appartenant à l'intervalle de dérivabilité, $(v(x))^2 > 0$). Alors la dérivée de f est du signe de $u'v - uv'$.

On essaiera de factoriser au maximum l'expression de $f'(x)$, le but étant d'en étudier le signe. On étudie le signe de $f'(x)$ en utilisant un tableau de signe et pour utiliser le théorème suivant :

Théorème 57.1

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors :

– si la dérivée est positive sur I, alors la fonction est croissante sur I ;

– si la dérivée est négative sur I, alors la fonction est décroissante sur I ;

– si la dérivée est nulle en toute valeur de I, alors la fonction est constante sur I.

On cherche les extrema locaux parmi les valeurs pour lesquelles la dérivée s'annule en changeant de signe.

1 5 Tableau de variation

On consigne tous les résultats obtenus jusqu'à présent en un tableau de variations de f. Ce tableau comporte sur la première ligne :

– les bornes de l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$

– les valeurs pour lesquelles f n'est pas définie, discontinue ou non dérivable

– les valeurs pour lesquelles $f'(x)$ s'annule ou change de signe.

Sur la deuxième ligne figure le signe de $f'(x)$ (« + » ou « - ») sur les intervalles ou $f'(x)$ est de signe constant (en précisant par un « 0 » les valeurs pour lesquelles elle s'annule).

Sur la troisième ligne, et dans chacun des intervalles le sens de variation de la fonction, indiqué par une flèche ascendante $\nearrow$ si f est strictement croissante et descendante $\searrow$ si f est strictement décroissante.

On doit inscrire les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

On tracera une double barre verticale à cheval sur les 2e et 3e lignes, sous une valeur de la première ligne, pour indiquer que ni f ni f' ne sont définies en cette valeur.

Cependant, si f est définie en cette valeur, mais non dérivable, on se serait contenté de tracer cette double barre sur la ligne de f' (à savoir la 2e).

On peut préciser quelques points remarquables (extrema, valeurs particulières).

x	$-\infty$		-1			1			3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$\|\|$		$-$	0	$+$	
$f(x)$			$0{,}5$			$\|\|$	$+\infty$				$-\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$		$\|\|$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				$+\infty$	$\|\|$			$4{,}5$		

TABLE 57.1 – Exemple de tableaux de variations

1.6 Equations des tangentes

L'équation de la tangente à la courbe représentative d'une fonction f au point de $\mathcal{C}_f$ de coordonnées $(a, f(a))$ est

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Remarque 57.2. Le *coefficient directeur* de la tangente au point a est la valeur du nombre dérivé $f'(a)$.

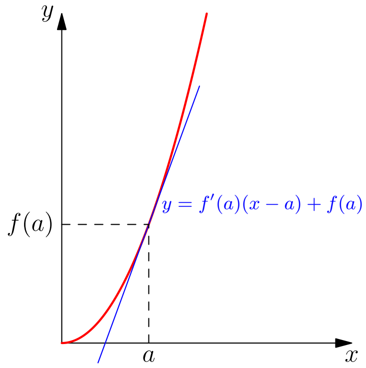


FIGURE 57.1 – Tangente à la fonction f au point a

1.7 Tracé de la courbe

Le repère, les axes Doivent toujours apparaître :

- les axes ;
- les vecteurs unitaires (attention à l'unité !) ;
- les flèches au bout des axes ;
- les noms des axes.

Si l'étude de f a montré par exemple que $f(x) > 0$ pour tout x appartenant à $\mathcal{D}_f$, alors seule la partie « des y positifs » nous intéresse. On fera donc coïncider l'axe des abscisses avec le bas de la page.

Tableau de valeurs Il est très utile de dresser un petit tableau des différentes valeurs de $f(x)$ pour différentes valeurs de x, ceci aidant à la précision du tracé de $\mathcal{C}_f$. Pour cela, il peut être utile d'employer une calculatrice.

Tracé des tangentes et des asymptotes Les tangentes et les asymptotes (si elles existent) aident au tracé de $\mathcal{C}_f$.

1.8 Résolution d'équations $f(x) = 0$

Il peut être demandé dans l'énoncé de démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α et de donner un encadrement de α. Pour répondre à cette question, il faut faire figurer :

- La *continuité* de la fonction f sur l'intervalle considéré. Cette continuité peut découler de la dérivabilité de la fonction f sur l'intervalle considéré.
- La stricte monotonie (croissance ou décroissance) de la fonction f sur l'intervalle considéré, afin d'assurer l'*unicité* de la solution.
- L'appartenance de 0 à l'intervalle d'arrivée, ce qui assure l'existence de la solution α.

Pour trouver un encadrement de la solution α de l'équation $f(x) = 0$, on peut utiliser la fonction `ZOOM` d'une calculatrice graphique, ou des tableaux de valeurs « de plus en plus précis » (jusqu'à obtenir un encadrement de α d'amplitude 10^{-1} (par exemple)).

Un exemple :

```
X     | Y_1
31    | -7509
32    | -5732
```

```
33    | -3763
34    | -1596
35    | 775
36    | 3356
37    | 6153
```

puis

```
X     | Y_1
34.2 | -1138
34.3 | -906.4
34.4 | -672.4
34.5 | -436.4
34.6 | -198.3
34.7 | 41.923
34.8 | 284.19
```

$f(34{,}6) < 0$ et $f(34{,}7) > 0$ donc

$$34,6 < \alpha < 34,7.$$

2 Problèmes conduisant à l'étude de fonctions

Exemple 57.3. La partie I est l'étude d'une fonction auxiliaire g nécessaire à l'étude de la fonction f définie sur $]0\,,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\ln x}{x}.$$

L'étude de la fonction f fait l'objet de la partie II. La partie III est l'étude de deux suites numériques associées.

Partie I On considère la fonction numérique g définie sur $]0\,,+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - 2\ln x.$$

1. Etudier le sens de variation de g.
2. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0\,,+\infty[$.

Partie II On considère la fonction numérique f définie sur $]0\,,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\ln x}{x}.$$

On appelle $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique 2 cm)

1. Déterminer la limite f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
2. (a) Déterminer la limite f en $+\infty$.
   (b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = \frac{x}{2}$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$.
   (c) Déterminer la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (Δ) sur $]0\,,+\infty[$. Montrer en particulier que (Δ) coupe $(\mathcal{C})$ en un point A que l'on déterminera.
3. Etudier le sens de variation de f. Dresser le tableau de variation de f.
4. Montrer qu'il existe un point B, et un seul, de la courbe $(\mathcal{C})$ où la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ est parallèle à (Δ). Préciser les coordonnées de B.
5. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α. Justifier l'encadrement :

$$0{,}34 < \alpha < 0{,}35.$$

6. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites (Δ) et (T).

Partie III On considère la suite numérique (x_n) définie par $x_n = \mathrm{e}^{(n-2)/2}$ pour tout nombre entier naturel n.

1. (a) Montrer que (x_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.
   (b) Montrer que (x_n) est une suite croissante.
2. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$a_n = 4\int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(f(x) - \frac{x}{2}\right) \mathrm{d}x.$$

   (a) Donner une interprétation géométrique de a_n.
   (b) Montrer que $a_n = \frac{2n+1}{2}$ pour tout nombre entier naturel n. En déduire que (a_n) est une suite arithmétique.

Développement

Solution à l'exercice 1.

Partie I g est la fonction numérique définie sur $]0\,,+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - 2\ln x.$$

1. g est dérivable sur $]0\,,+\infty[$ et on a :

$$g'(x) = 2x - 2\times\frac{1}{x} = 2\left(x - \frac{1}{x}\right) = \frac{2(x^2-1)}{x} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}.$$

Comme $x \in\,]0\,,+\infty[$, on a $x > 0$ et $x+1 > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $(x-1)$. On en déduit que $g'(x) < 0$ pour $x \in\,]0\,,1[$ et $g'(x) > 0$ pour $x]1\,,+\infty[$. Donc : g est décroissante sur $]0\,,1[$ et croissante sur $]1\,,+\infty[$.

2. On a $g(1) = 1^2 - 2\ln 1 = 1$. D'après le sens de variation de g, on a alors $g(x) \geq 1$ pour tout $x > 0$. Donc $g(x) > 0$ pour tout $x \in\,]0\,,+\infty[$.

Partie II f est la fonction numérique définie sur $]0\,,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\ln x}{x}.$$

$(\mathcal{C})$ est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique 2 cm).

1. On peut écrire

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\ln x}{x} = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}(1+\ln x).$$

On sait que

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to 0^+} 1+\ln x = -\infty,$$

d'autre part

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}(1+\ln x) = -\infty.$$

De plus $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{2} = 0$ et par conséquent :

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{2} + \frac{1}{x}(1+\ln x) = -\infty.$$

On peut en déduire que la courbe $(\mathcal{C})$ a pour asymptote verticale la droite d'équation $x = 0$ (Axe Oy).

2. (a) On peut écrire :

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}.$$

On sait que :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0\,; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty.$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2} + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} = +\infty.$$

(b) On a

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - \frac{x}{2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Donc : la droite (Δ) d'équation $y = \frac{x}{2}$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$.

(c) On a

$$f(x) - \frac{x}{2} = \frac{1+\ln x}{x}.$$

Donc :

$$f(x) = \frac{x}{2} \Leftrightarrow 1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{-1}.$$

Donc : (Δ) coupe $(\mathcal{C})$ au point A d'abscisses e^{-1} et d'ordonnée $\frac{\mathrm{e}^{-1}}{2}$. $x \in]0\,,+\infty[$ donc $f(x) - \frac{x}{2}$ est du signe $1 + \ln x$. La fonction $\ln$ étant strictement croissante, on a alors :

$$1 + \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow x > \mathrm{e}^{-1}$$

et

$$1 + \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x < -1 \Leftrightarrow x < \mathrm{e}^{-1}.$$

On en déduit que $f(x) > \frac{x}{2}$ pour $x > \mathrm{e}^{-1}$ et $f(x) < \frac{x}{2}$ pour $x < \mathrm{e}^{-1}$. Sur $]0\,,\mathrm{e}^{-1}[$, $(\mathcal{C})$ est au-dessous de (Δ) et sur $]\mathrm{e}^{-1}\,,+\infty[$, $(\mathcal{C})$ est au-dessus de (Δ).

3. Pour tout $x \in]0\,,+\infty[$, on a

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\ln x}{x}.$$

f est donc la somme et le quotient de fonctions dérivables sur $]0\,,+\infty[$ donc f est dérivable sur $]0\,,+\infty[$ et on a :

$$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{x}x - (1+\ln x)\times 1}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{1-1-\ln x}{x^2} = \frac{1}{2} - \frac{\ln x}{x^2} = \frac{x^2 - 2\ln x}{2x^2}.$$

Donc $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$. D'après la partie I, on sait que $g(x) > 0$ pour tout $x \in]0\,,+\infty[$ donc $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]0\,,+\infty[$. On en déduit que f est strictement croissante sur $]0\,,+\infty[$. On peut donner le tableau de variations de f :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	
f	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4. La tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisses b a pour coefficient directeur $f'(b)$. Cette tangente est parallèle à (Δ) si et seulement si elle a le même coefficient que (Δ).

$$f(b) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{b^2 - 2\ln b}{2b^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow b^2 - 2\ln b = b^2 \Leftrightarrow \ln b = 0 \Leftrightarrow b = 1.$$

Il existe donc un point B et un seul où la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}$ est parallèle à (Δ). B a pour abscisse 1 et pour ordonnée $f(1) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$.

5. f est une fonction continue et strictement croissante sur $]0\,,+\infty[$. Donc pour tout réel k dans l'intervalle $]\beta\,,\gamma[$ où

$$\beta = \lim_{x\to 0^+} f(x) \quad \text{et} \quad \gamma = \lim_{x\to+\infty} f(x),$$

l'équation $f(x) = k$ a une solution unique. Comme $0 \in]\beta\,,\gamma[= \mathbb{R}$, on en déduit que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α. La calculatrice donne $f(0,34) \approx -0,06$ donc $f(0,34) < 0$ et $f(0,35) \approx 0,03$ donc $f(0,35) > 0$. On en déduit que $f(0,34) < f(\alpha) < f(0,35)$ et comme f est strictement croissante : $0,34 < \alpha < 0,35$.

6. Voir la figure 57.2

Partie III La suite numérique (x_n) est définie par $x_n = \mathrm{e}^{(n-2)/2}$ pour tout nombre entier naturel n.

1. (a) On peut écrire pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} = \exp{(n+1-2)/2} = \mathrm{e}^{(n-2)/2+1/2} = \mathrm{e}^{(n-2)/2} \times \mathrm{e}^{1/2} = x_n \times \mathrm{e}^{1/2}.$$

On en déduit que (x_n) est une suite géométrique de raison $\mathrm{e}^{1/2}$. Son premier terme est $x_0 = \mathrm{e}^{(0-2)/2}$ donc $x_0 = \mathrm{e}^{-1}$.

(b) (x_n) est une suite géométrique de premier terme positif et de raison positive, donc (x_n) est une suite à termes positifs. On a $\mathrm{e}^{1/2} \geq 1$ donc $x_n \times \mathrm{e}^{1/2} \geq x_n$, c'est-à-dire $x_{n+1} \geq x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc la suite (x_n) est une suite croissante.

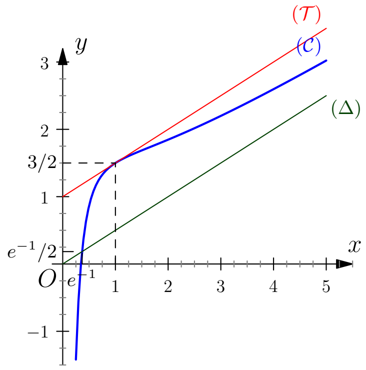


FIGURE 57.2 – Courbe représentative de la fonction $x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{1+\ln x}{x}$ et tangentes

2. Pour tout entier naturel n, on a :

$$a_n = 4\int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(f(x) - \frac{x}{2}\right) \mathrm{d}x.$$

(a) D'après la partie II, on sait que $f(x) - \frac{x}{2} \geq 0$ pour $x \geq \mathrm{e}^{-1}$. Comme la suite (x_n) est croissante, on a :

$$\mathrm{e}^{-1} \leq x_n \leq x_{n+1}.$$

Donc $\int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(f(x) - \frac{x}{2}\right) \mathrm{d}x$ est l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite (Δ) et les droites d'équations $x = x_n$ et $x = x_{n+1}$. L'unité du repère étant 2 cm, l'unité d'aire est 4 cm^2.

$$a_n = 4\int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(f(x) - \frac{x}{2}\right) \mathrm{d}x$$

est l'aire, en cm^2, de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite (Δ) et les droites d'équation $x = x_n$ et $x = x_{n+1}$.

(b)

$$a_n = 4\int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(f(x) - \frac{x}{2}\right) \mathrm{d}x = 4\int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(\frac{1+\ln x}{x}\right) \mathrm{d}x = 4\int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\ln x\right) \mathrm{d}x$$

$x \mapsto \frac{1}{x}$ a pour primitive $x \mapsto \ln x$. D'autre part, $\frac{1}{x} \times \ln x$ est de la forme $u'(x) \times u(x)$ donc $\frac{1}{x}\ln x$ a pour primitive $\frac{1}{2}u(x)^2 = \frac{1}{2}(\ln x)^2$. On a donc :

$$a_n = \left[4\ln x + 2(\ln x)^2\right]_{x_n}^{x_{n+1}} = 4\ln x_{n+1} + 2(\ln x_{n+1})^2 - 4\ln x_n - 2(\ln x_n)^2.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
a_n &= 4\ln \mathrm{e}^{(n-1)/2} + 2\left(\ln \mathrm{e}^{(n-1)/2}\right)^2 - 4\ln \mathrm{e}^{(n-2)/2} - 2\left(\ln \mathrm{e}^{(n-2)/2}\right)^2 \\
&= 4 \times \frac{n-1}{2} + 2\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 - 4 \times \frac{n-2}{2} - 2\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \\
&= 2n - 2 + \frac{n^2 - 2n + 1}{2} - 2n + 4 - \frac{n^2 - 4n + 4}{2} \\
&= 2 + \frac{n^2 - 2n + 1 - n^2 + 4n - 4}{2} = 2 + \frac{2n-3}{2} = \frac{4 + 2n - 3}{2}
\end{aligned}$$

donc $a_n = \frac{2n+1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que $a_n = n + \frac{1}{2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc

$$a_{n+1} = n + 1 + \frac{1}{2} = n + \frac{1}{2} + 1 = a_n + 1, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On en déduit que (a_n) est une suite arithmétique de raison 1.

□

Exemple 57.4. Une entreprise fabrique et vend un liquide L. Une étude a permis de modéliser le coût moyen de production par :

$$f(x) = 0{,}5x + \frac{8}{x}, \quad \text{où } x > 0.$$

Le coût moyen $f(x)$ est exprimé en milliers d'euros et la quantité produite x en hectolitres. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal du plan (unité 1 cm).

1. **Etude de la fonction coût moyen**
   (a) Etudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,,+\infty[$.
   (b) Déterminer les limites en f en 0 et en $+\infty$.
   (c) Donner le tableau de variations de f.
   (d) Montrer que la droite D d'équation $y = 0{,}5x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$. Etudier la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à D.
   (e) Construire $\mathcal{C}$ ainsi que D.
2. **Seuils de rentabilité pour l'entreprise**
   L'entreprise ne peut être bénéficiaire que si le prix de vente de l'hectolitre est supérieur au coût moyen de fabrication. Le prix de vente de l'hectolitre $p(x)$ est fonction de la quantité x vendue :
   $$p(x) = \begin{cases} -0{,}8x + 10 & \text{si } x \in \left]0\,,10\right[\\ 2 & \text{si } x \in [10\,,+\infty] \end{cases}$$
   où $p(x)$ est exprimé en milliers d'euros et x en hectolitres.
   (a) On note P la représentation graphique de la fonction p. Tracer P dans le repère précédent. La fonction p est-elle une fonction continue ? (Justifier à partir du graphique).
   (b) Déterminer graphiquement l'intervalle dans lequel doit se situer la production x pour que l'entreprise soit bénéficiaire.
   (c) Confirmer le résultat précédent par le calcul (on pourra se ramener à une inéquation du second degré).

Développement

Solution à l'exercice 2.

1. **Etude de la fonction coût moyen**
   (a) La fonction f est une fonction rationnelle, elle est dérivable sur $]0\,,+\infty[$. On sait que $f(x) = 0,5x + \frac{8}{x}$ donc :
   $$f'(x) = 0,5 - \frac{8}{x^2} = \frac{0,5x^2 - 8}{x^2} = \frac{0,5(x^2 - 16)}{x^2} = \frac{0,5(x-4)(x+4)}{x^2}$$
   $x^2 > 0$ pour tout réel x dans $]0\,,+\infty[$, le signe de $f'(x)$ est donc le signe du trinôme $0,5(x-4)(x+4)$. On a donc $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \left]0\,,4\right[$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \left]4\,,+\infty\right[$. Donc : f est strictement décroissante sur $]0\,,4[$ et strictement croissante sur $]4\,,+\infty[$.
   (b) $\lim_{x\to 0} 0,5x = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} \frac{8}{x} = +\infty$ donc :
   $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 0,5x + \frac{8}{x} = +\infty.$$
   De plus $\lim_{x\to+\infty} 0,5x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{8}{x} = 0$ donc
   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 0,5x + \frac{8}{x} = +\infty.$$
   (c) On a
   $$f(4) = 0,5 \times 4 + \frac{8}{4} = 2 + 2 = 4.$$
   On peut donner le tableau de variations de f :

x	0		4		1
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

   (d) On a
   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 0,5x = \lim_{x\to+\infty} \frac{8}{x} = 0.$$
   Donc : la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 0,5x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ quand x tend vers $+\infty$. Pour tout réel x dans $]0\,,+\infty[$, on a $x > 0$ donc $\frac{8}{x} > 0$ donc $f(x) - 0,5x > 0$ donc $f(x) > 0,5x$. On en déduit que la courbe $\mathcal{C}$ se trouve au-dessus de la droite $\mathcal{D}$.

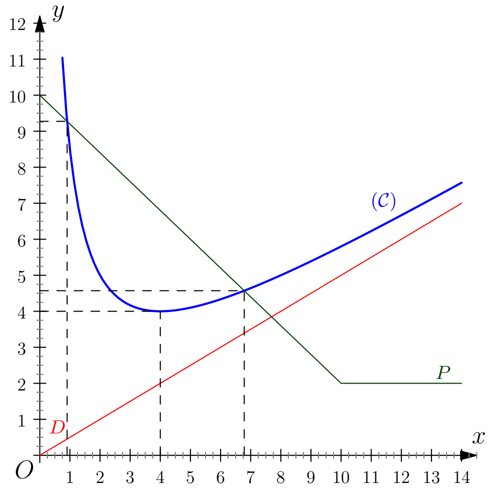


FIGURE 57.3 – Représentation graphique

(e) Voir la figure 57.3.

2. **Seuils de rentabilité pour l'entreprise**
   (a) P étant la représentation graphique de la fonction ρ, elle est constituée par
   - le segment de droite d'équation $y = -0,8x + 10$ pour $x \in \,]0\,,10[$ (on peut tracer ce segment en utilisant les points $A(0,10)$ et $B(10,2)$).
   - la demi-droite d'équation $y = 2$ pour $x \in [10\,,+\infty[$.

   La représentation graphique de ρ peut être tracée d'un seul trait (sans lever le crayon de la feuille), on en déduit que la fonction ρ est une fonction continue.

   (b) L'entreprise est bénéficiaire lorsque le prix est supérieur au coût moyen, c'est-à-dire lorsque la courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de la courbe P. On obtient graphiquement que l'entreprise est bénéficiaire lorsque $x \in [0.9\,,6.8]$.

   (c) Le tableau de variations de f justifie que $f(x) > 2$ pour tout $x \in \,]0\,,+\infty[$. Comme $\rho(x) = 2$ pour tout $x \geq 10$, l'entreprise ne peut pas être bénéficiaire lorsque $x \geq 0$. Pour $x \in \,]0\,,10[$, on peut écrire :

$$f(x) \leq \rho(x) \Leftrightarrow 0,5x + \frac{8}{x} \leq -0,8x + 10 \Leftrightarrow 1,3x - 10 + \frac{8}{x} \leq 0.$$

   Sachant que x est strictement positif, on obtient, en multipliant par x :

$$1,3x^2 - 10x + 8 \leq 0$$

   $1,3x^2 - 10x + 8$ est un trinôme du second degré dont le discriminant est :

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \times 1,3 \times 8 = 100 - 41,6 = 58,4$$

   On a donc $\Delta > 0$. On en déduit que ce trinôme a deux racines qui sont :

$$\alpha = \frac{10 - \sqrt{58,4}}{2,6} \approx 0,9 \quad \text{et} \quad \beta = \frac{10 + \sqrt{58,4}}{2,6} \approx 6,8.$$

   Ces deux racines étant dans l'intervalle $]0\,,10[$, on peut conclure que : $f(x) \leq \rho(x)$ pour $x \in [\alpha\,,\beta]$. On a donc confirmé par le calcul le résultat de la question précédente.

$\square$

Exemple 57.5.

Partie A Soit g la fonction définie sur $[0\,,+\infty[$ par :

$$g(x) = x^3 - 1200x - 100.$$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$. Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[20\,,40]$. Donner, en justifiant, une valeur approchée de α à l'unité près.
3. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B Soit f la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par :

$$f(x) = x + 50 + \frac{1200x + 50}{x^2}.$$

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (on prendra 1 cm pour 5 unités en abscisse et 1 cm pour 20 unités en ordonnée).

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que pour tout x de $]0\,,+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$$

   où g est la fonction définie dans la partie A.
3. Etudier les variations de f.
4. Montrer que la droite D d'équation $y = x + 50$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.
5. Construire $\mathcal{C}$ et D sur le même graphique.
6. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 130$. On donnera des valeurs approchées des solutions à l'unité près.

Partie C Le coût total de fabrication d'une quantité x d'un produit, exprimée en centaines d'unités, est définie sur $]0\,,100[$ par :

$$C(x) = \frac{x^3 + 50x^2 + 1200x + 50}{x}$$

$C(x)$ étant exprimé en centaines d'euros. Le coût moyen de fabrication par centaines d'objets est donc défini par :

$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x}.$$

1. Déterminer la quantité d'objets, à la centaine près, à fabriquer pour avoir un coût moyen minimum.
2. On suppose que le prix de vente d'une centaine d'objets est égale à 13000 €. Déterminer graphiquement, à la centaine près, le nombre minimum et le nombre maximum d'objets que l'entreprise doit fabriquer pour être rentable.

Développement

Solution à l'exercice 3.

Partie A g est définie sur $[0\,,+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - 1200x - 100.$$

1. La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ ou en $-\infty$ est égale à la limite de son terme de plus haut degré. Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty.$$

   g est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur $[0\,,+\infty[$:

$$g'(x) = 3x^2 - 1200 = 3(x^2 - 400) = 3(x-20)(x+20)$$

   $3x^2 - 1200$ est un trinôme du second degré dont les racines sont -20 et 20. On peut donner son signe en utilisant la règle du signe du trinôme. On en déduit que g est strictement décroissante sur $[0\,,20]$ et strictement croissante sur $[20\,,+\infty[$. On peut alors donner le tableau de variations de g :

x	0		20		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	-100	$\searrow$	$g(20)$	$\nearrow$	$+\infty$

   On a :

$$g(0) = -100 \quad \text{et} \quad g(20) = 8000 - 24000 - 100 = -16100.$$

2. On a :

$$g(20) = -16100 \quad \text{et} \quad g(40) = 15900.$$

g est continue et strictement croissante sur $[20\,,40]$ et prend ses valeurs dans $[-16100\,,15900]$. Comme $0 \in [-16100\,,15900]$, on en déduit que l'équation $g(x) = 0$ a une solution α dans $[20\,,40]$.
En utilisant une calculatrice, on peut remarquer :

$$g(34) = -1596 \quad \text{et} \quad g(35) = 775.$$

g est strictement croissante sur $[20\,,40]$: $g(34) < 0$ et $g(35) > 0$ donc $34 < \alpha < 35$. α a pour valeur approchée 34 à l'unité près.

3. Sur l'intervalle $[0\,,20]$, g est strictement décroissante et $g(0) = -100$ donc $g(0) < 0$. On en déduit que $g(x) < 0$ pour tout $x \in [0\,,20]$. Sur l'intervalle $[20\,,+\infty[$, g est strictement croissante et $g(\alpha) = 0$. Donc si $20 \leq x < \alpha$, on a $g(x) < 0$ et si $x > \alpha$, on a $g(x) > 0$. Donc $g(x) < 0$ pour $x \in [0\,,\alpha[$, $g(x) = 0$ pour $x = \alpha$ et $g(x) > 0$ pour $x \in]\alpha\,,+\infty[$.

Partie B f est définie sur $]0\,,+\infty[$ par :

$$f(x) = x + 50 + \frac{1200x + 50}{x^2}.$$

1. $\lim_{x\to 0^+} 1200x + 50 = 50$ et $\lim_{x\to 0^+} x^2 = 0$ par valeurs supérieurs ($x^2 > 0$). Donc :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1200x + 50}{x^2} = +\infty.$$

D'autre part, $\lim_{x\to 0^+} x + 50 = 50$, donc

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty.$$

De plus :

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1200x + 50}{x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1200x}{x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1200}{x} = 0.$$

D'autre part, $\lim_{x\to +\infty} x + 50 = +\infty$ donc

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$

2. f est une fraction rationnelle, donc elle est dérivable sur son ensemble de définition. $f(x) = x + 50 + \frac{1200x+50}{x^2}$, donc :

$$f'(x) = 1 + \frac{1200 \times (x^2) - (1200x + 50)(2x)}{(x^2)^2} = 1 + \frac{x(1200x - 2400x - 100)}{x^4} = 1 + \frac{-1200x - 100}{x^3}$$

donc, pour tout $x \in]0\,,+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{x^3 - 1200x - 100}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}.$$

3. Pour tout $x \in]0\,,+\infty[$, on a $x^3 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$. En utilisant les résultats de la partie A, on obtient le signe de $f'(x)$ et on peut donner le tableau de variations de f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

On sait que $\alpha = 34$ donc $f(\alpha) \approx f(34) \approx 119$.

4. On a $f(x) = x + 50 + \frac{1200x+50}{x^2}$ et on a vu que

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1200x + 50}{x^2} = 0.$$

On en déduit que la droite D d'équation $y = x + 50$ est asymptote à $\mathcal{C}$ quand x tend vers $+\infty$.

5. Voir la figure 57.4

Les solutions de l'équation $f(x) = 130$ sont les abscisses des points de la droite d'équation $y = 130$ et de la courbe $\mathcal{C}$. On observe graphiquement que l'équation $f(x) = 130$ a deux solutions qui sont environ 20 et 60.

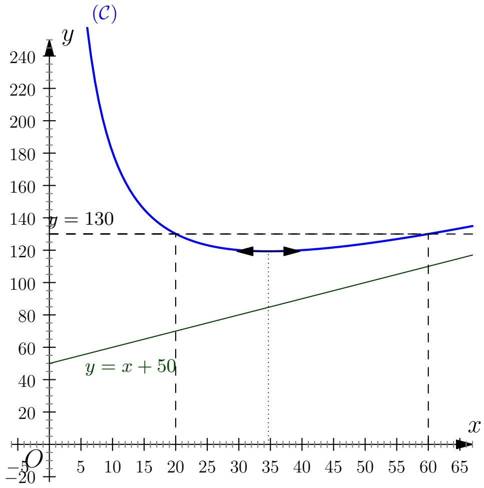


FIGURE 57.4 – Représentation graphique de f et asymptote D

Partie C 1. Pour $x \in]0\,,100[$, on a :

$$C(x) = \frac{x^3 + 50x^2 + 1200x + 50}{x}$$

et

$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{x^3 + 50x^2 + 1200x + 50}{x^2} = x + 50 + \frac{1200x + 50}{x^2} = f(x).$$

D'après les variations de la fonction f obtenues dans la partie B, le coût moyen minimum est obtenu pour α centaines objets. Sachant que $\alpha = 34$, on en déduit que, pour avoir un coût moyen minimum, il faut fabriquer environ 3400 objets.

2. On suppose que le prix de vente d'une centaine d'objets est 13000 €, c'est-à-dire 130 centaine d'euros. Pour que l'entreprise soit bénéficiaire, il faut que le coût moyen de chaque centaine d'objets soit inférieur à 130 centaines d'euros, c'est-à-dire $C_M(x) \leq 130$ ou encore $f(x) \leq 130$. D'après le graphique de la partie B, $f(x) \leq 130$, pour $x \in [20\,,60]$. Les quantités étant exprimées en centaines d'objets, on en déduit que l'entreprise est rentable lorsqu'elle fabrique au maximum 2000 objets et au maximum 6000 objets.

□

Exemple 57.6. Le but de cet exercice est d'étudier la fonction tangente et d'en établir quelques propriétés.

1. Résoudre, sur $]-\pi\,,\pi]$ l'équation :
$$\cos x = 0.$$
En déduire toutes les solutions, sur $\mathbb{R}$, de cette équation.

2. On considère la fonction tangente, notée $\tan$, définie par :
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{pour } x \in D \text{ où } D = \mathbb{R} \setminus \left\{\tfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$
On note C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   (a) Etudier la parité de cette fonction.
   (b) Démontrer que la fonction tangente est π-périodique.
   (c) Expliquer pourquoi on peut se contenter d'étudier la fonction tangente sur l'intervalle $I = [0\,, \frac{\pi}{2}[$.

3. Etudier les limites de la fonction tangente en 0^+ et en $\left(\frac{\pi}{2}\right)^-$. En déduire que la courbe C admet une asymptote Δ dont on précisera la nature et l'équation.

4. Compléter le tableau suivant :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\tan x$				

5. Montrer que, pour tout $x \in I$:

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2 x.$$

En déduire le tableau de variations de la fonction tangente sur l'intervalle I.

6. (a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

   (b) Démontrer que, pour tout $x \in I$, on a :

   $$\tan x \geq x$$

   (pour cela, on pourra étudier les variations de la fonction g définie sur I par $g(x) = \tan x - x$).

   (c) En déduire la position relative de la courbe C par rapport à sa tangente T.

7. Tracer les droites Δ et T puis la courbe C (on se placera entre les bornes -2π et 2π).

8. On rappelle que pour tous réels a et b, on a les formules d'additions suivantes :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

En déduire une formule liant $\tan(a+b)$ à $\tan a$ et $\tan b$ (pour des réels a et b tels que $a \in D, b \in D$ et $a + b \in D$).

9. Démontrer que pour tout $a \in \left]0\,, \frac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$\tan a = \frac{1 - \cos(2a)}{\sin(2a)}$$

En déduire la valeur exacte de $\tan \frac{\pi}{8}$ et de $\tan \frac{\pi}{12}$.

Développement

Solution à l'exercice 4.

1. On a :

$$S_{]-\pi,\pi]} = \left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\}.$$

D'où :

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Ce que l'on peut encore écrire :

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

2. (a) D est un ensemble symétrique par rapport à 0 et pour tout $x \in D$, on a :

   $$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x.$$

   Ce qui prouve que la fonction tangente est impaire sur D.

   (b) Pour tout $x \in D$, on a $x + \pi \in D$ et :

   $$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x.$$

   La fonction tangente est donc π-périodique.

   (c) Comme la fonction tangente est π-périodique, on peut se contenter de l'étudier sur une période par exemple $\left]-\frac{\pi}{2}\,, \frac{\pi}{2}\right[$. Comme elle est, de plus, impaire, on peut encore couper l'intervalle d'étude en deux et ne l'étudier que sur $\left[0\,, \frac{\pi}{2}\right[$. L'étude sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,, 0\right]$ s'en déduira par rapport à l'origine du repère.

3. On sait que :

$$\lim_{x\to 0^+} \sin x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} \cos x = 1$$

Donc, par quotient :

$$\lim_{x\to 0^+} \tan x = 0$$

On sait que :

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \sin x = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \cos x = 0$$

avec $\cos x > 0$. Donc, par quotient :

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan x = +\infty.$$

La courbe C admet donc une asymptote verticale Δ d'équation $x = \frac{\pi}{2}$.

4. D'après les valeurs remarquables de sinus et de cosinus, on a :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

5. La fonction tan est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u = \sin$ et $v = \cos$. Sa dérivée $\tan'$ sera donc égale à $\frac{u'v-uv'}{v^2}$, ce qui donne pour $x \in I$:

$$\tan'(x) = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}.$$

Et comme $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, il vient :

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Par ailleurs,

$$1 + \tan^2 x = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

D'où :

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2 x.$$

Sens de variation puisque $\frac{1}{\cos^2 x}$ est strictement positif pour tout réel x de I, on en déduit que la fonction tangente est strictement croissante sur I :

x	0 $\qquad$ $\frac{\pi}{2}$
signe de $\tan'$	$+$
variations de tan	$0 \nearrow +\infty$

6. (a) Une équation de la tangente à une courbe représentant une fonction f dérivable en x_0 est donnée par :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Avec $x_0 = 0$, cela donne : $y = f'(0)x + f(0)$. Ici, nos avons $\tan 0 = 0$ et $\tan' 0 = 1$ d'où :

$$T : y = x.$$

(b) La fonction g est dérivable sur I et pour tout $x \in I$:

$$g'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x.$$

Donc g est strictement croissante sur I.

(c) En conséquence, la courbe C est au dessus de sa tangente T sur I.

7. A partir de la courbe de la fonction tangente sur I, on complète par symétrie (par rapport à O) pour obtenir la courbe sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ puis par translation de vecteur $k\pi\vec{\imath}$ ($k \in \mathbb{Z}$) pour obtenir les autres morceaux.

8. On a, pour tous réels a et b tels que $a + b \in D$:

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}.$$

Comme $a \in D$ et $b \in D$, on peut diviser numérateur et dénominateur par $\cos a \cos b$ (qui est non nul) :

$$\tan(a+b) = \frac{\frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b}}{1 - \frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}} = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$$

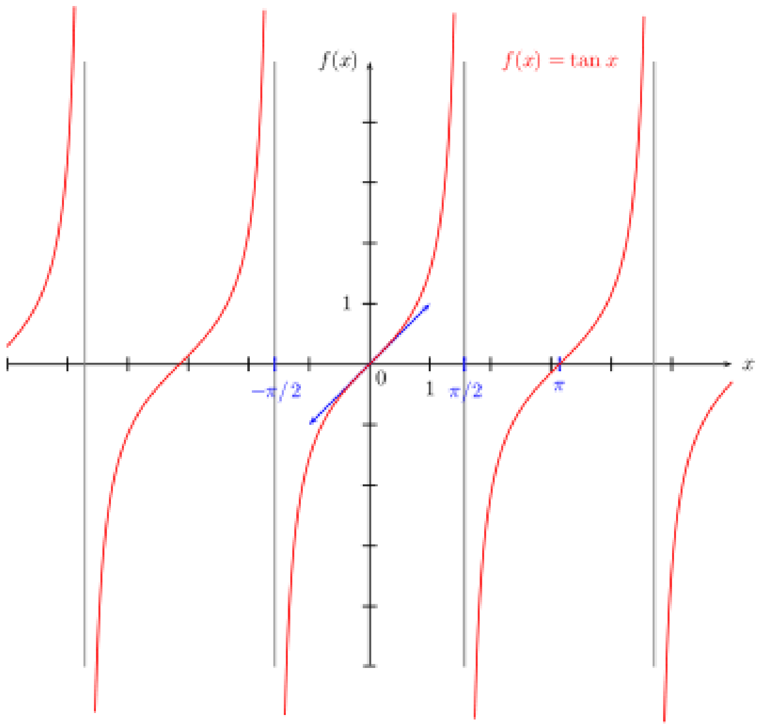


FIGURE 57.5 – Représentation graphique de $x \mapsto \tan x$

9. Partons du membre de droite. D'après les formules d'additions appliquées avec $b = a$, on obtient :

$$\frac{1-\cos(2a)}{\sin(2a)} = \frac{1-(\cos^2 a - \sin^2 a)}{2\sin a \cos a} = \frac{(1-\cos^2 a)+\sin^2 a}{2\sin a\cos a} = \frac{2\sin^2 a}{2\sin a\cos a} = \frac{\sin a}{\cos a} = \tan a.$$

En particulier avec $a = \frac{\pi}{8}$, cela donne :

$$\tan\frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}-1$$

et avec $a = \frac{\pi}{12}$, cela donne :

$$\tan\frac{\pi}{12} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2-\sqrt{3}.$$

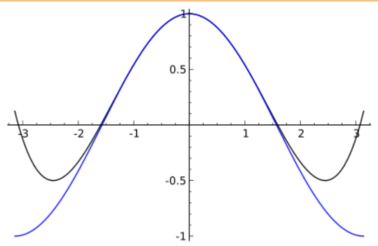
□

VI

Analyse BTS

LEÇON 58

Développements limités



Niveau : BTS
Prérequis : dérivation, fonctions trigonométriques

1 Introduction

1.1 Dérivée

Remarque 58.1. Nous cherchons à approcher, localement, une fonction par un polynôme.

La définition suivante nous rappelle que nous savons déjà le faire en degré 1.

Théorème 58.2

Soit I un intervalle, soit $f\colon I \to \mathbb{R}$, et soit x_0 un point intérieur à I. On dit que f est *dérivable* en x_0 s'il existe un nombre a et une fonction ε vérifiant :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + ah + h\varepsilon(h)$$

où $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Remarque 58.3. Ici le polynôme d'approximation est $P(h) = ah$ et le reste est $h\varepsilon(h)$. Graphiquement, ceci signifie que l'on approche au voisinage de x_0 la courbe de f par sa tangente en x_0.

1.2 Compléments

Définition 58.4

Classe

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f\colon I \to \mathbb{R}$. On dit que f est de *classe* $\mathcal{C}^n$ si f est n fois dérivable sur I et si ses n premières dérivées sont continues sur I.

Remarque 58.5. Dans la définition précédente, n peut prendre la valeur ∞, avec une signification évidente.

Proposition 58.6

Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ un polynôme. Alors P est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, noté $P \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, et l'on a la formule de Taylor des polynômes :

$$P(x) = \frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots + P'(0) + P(0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

Développement

Démonstration de la proposition 58.6. Un polynôme est dérivable, et sa dérivée est encore un polynôme. Ainsi tout polynôme est $\mathcal{C}^\infty$. De plus, il est facile de voir que $P^{(k)}(0) = k!a_k$. □

2 Formules de Taylor

2.1 Formules de Taylor avec reste intégral

Théorème 58.7

Soit $f\colon [a\,,b] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Alors :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Développement

Démonstration du théorème 58.7. On procède par récurrence.

Si $n = 0$ alors la formule devient :

$$f(b) = f(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^0}{0!} f^{(1)}(t)\,\mathrm{d}t = f(a) + \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(a) + [f(b) - f(a)],$$

et ainsi elle est vérifiée.

Hérédité Supposons maintenant que la formule soit vraie pour un n donné, et que f soit de classe $\mathcal{C}^{n+2}$. On peut alors intégrer par parties le reste d'ordre n :

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{n!(n+1)} f^{(n+1)}(t)\right]_a^b - \int_a^b -\frac{(b-t)^{n+1}}{n!(n+1)} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons bien la formule de Taylor avec un ordre supplémentaire.

□

Définition 58.8

Partie principale, reste intégral

Le polynôme

$$f(a) + (b-a)f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

est appelé *partie principale*, et l'intégrale $\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$ est appelée *reste intégral* d'ordre n.

2.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème 58.9

Soit $f\colon [a\,,b] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, et soit M le maximum de $\left|f^{(n+1)}\right|$ sur $[a\,,b]$. Alors :

$$\left| f(a) - \left[f(a) + (b-a)f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \right] \right| \leq M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Développement

Démonstration du théorème 58.9. La formule de Taylor avec reste intégral permet de démarrer :

$$\begin{aligned}\left| f(a) - \left[f(a) + (b-a)f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \right] \right| &\leq \left| \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_a^b \left|\frac{(b-t)^n}{n!}\right| \left|f^{(n+1)}(t)\right| \mathrm{d}t \\ &\leq \frac{M}{n!} \int_a^b (b-t)^n\,\mathrm{d}t \leq \frac{M}{n!} \left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{n+1} \right]_a^b \\ &\leq \frac{M}{n!} \frac{(b-a)^{n+1}}{n+1} \leq M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

Ce qui était bien la majoration recherchée. □

Remarque 58.10. Cette formule permet de contrôler l'erreur commise lors de l'approximation de $f(b)$ par la partie principale (polynôme).

2.3 Formule de Taylor-Young

Théorème 58.11

Soit $I = [\alpha, \beta]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, soit a un point intérieur à I, et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Alors :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{h^n}{n!} + h^n\varepsilon(h) \quad \text{avec } \lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0.$$

Développement

Démonstration du théorème 58.11. On écrit d'abord la formule de Taylor avec reste intégral pour $b = a + h$:

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^{a+h}\frac{(a+h-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ensuite, on note M le maximum de $f^{(n+1)}$ sur I, et on s'occupe du reste en reprenant la preuve du théorème 58.9 :

$$\left|\int_a^{a+h}\frac{(a+h-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq M\frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ceci signifie bien que :

$$\varepsilon(h) := \frac{1}{h^n}\left(f(a+h) - \left[f(a) + f'(a)h + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{h^n}{n!}\right]\right)$$

tend vers 0 quand h tend vers 0, puisque

$$|\varepsilon(h)| \leq \frac{1}{|h|^n}M\frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{M}{(n+1)!}|h|.$$

□

Remarque 58.12. Dans cette formule, on ne connaît pas explicitement le reste $h^n\varepsilon(h)$. On sait juste qu'il tend plus vite vers 0 que h^n, ce qui signifie que si h est petit, ce reste est négligeable.

Définition 58.13

Développement limité

Lorsqu'on a écrit une fonction grâce à la formule du théorème 58.11, on dit que l'on a effectué un *développement limité* (DL) de f en a d'ordre n.

Remarques 58.14.

1. Le DL d'une fonction est unique.
2. Le $\varepsilon(h)$ du reste est une notation générique : il signifie « une fonction qui tend vers 0 lorsque h tend vers 0 ». Ce ε ne sera pas forcément le même d'une fonction à l'autre !
3. On veut souvent le DL d'une fonction en 0 : la formule du théorème 58.11 devient alors :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + x^n\varepsilon(x).$$

3 Opérations sur les développements limités

On peut obtenir assez facilement des DL de fonctions en les décomposant. On se contente de traiter des DL en 0.

3.1 Somme

Elle se fait naturellement. Par exemple, si

$$f(x) = 1 + x + 2x^2 - 5x^3 + x^3\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad g(x) = -x + x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

alors

$$f(x) + g(x) = 1 + 3x^2 + x^2\varepsilon(x).$$

On ne peut obtenir qu'un DL d'ordre le plus faible des deux (ici d'ordre 2, alors que celui de f est d'ordre 3).

3.2 Produit

Il suffit de multiplier classiquement les deux DL, en mettant dans le reste les termes de degrés supérieurs au plus faible des deux ordres. Prenons un exemple :

$$f(x) = x + x^2 + x^2\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad g(x) = 2x + x\varepsilon(x).$$

On obtient :

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (x + x^2 + x^2\varepsilon(x))(2x + x\varepsilon(x)) \\ &= 2x^2 + x^2\varepsilon(x) + 2x^3 + x^3\varepsilon(x) + 2x^3\varepsilon(x) + x^3\varepsilon(x)\varepsilon(x) = 2x^2 + x^2\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Attention ! Les ε ne sont pas les mêmes ! On ne développe pas les termes de degrés supérieurs à 2.

3.3 Quotient

Au niveau BTS, cette méthode n'est pas exigible sans indications. Il faut effectuer une division par puissances croissantes des parties principales des deux DL. Voir le DL de la fonction tangente pour un exemple.

3.4 Intégration

On intègre terme par terme. Plus précisément, si

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x)$$

et si F est une primitive de f, alors

$$F(x) = F(0) + a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + \cdots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1} + x^{n+1}\varepsilon(x).$$

Voir le DL de la fonction logarithme pour un exemple. La preuve de cette affirmation se fait simplement en effectuant le DL de F par la formule de Taylor-Young.

3.5 Composition

Au niveau BTS, cette méthode n'est pas exigible sans indications. Pour obtenir un DL de $f \circ g$, on substitue le DL de g dans celui de f. Voir la remarque sur $(\ln \circ \exp)$ dans le DL de la fonction logarithme pour un exemple.

4 Développements limités usuels

Ce sont les DL en 0 qui sont au programme.

4.1 Exponentielle

Comme $\exp' = \exp$ et $\mathrm{e}^0 = 1$, la formule de Taylor-Young donne (pour tout n) :

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x).$$

4 2 Logarithme

On rappelle que :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + x^{n-1}\varepsilon(x).$$

On intègre tout ça et on obtient (en se souvenant que $\ln(1+0) = 0$) :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x).$$

On remarque que

$$\ln\left[1 + \left(t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + t^n\varepsilon(t)\right)\right] = \cdots = t + t^n\varepsilon(t)$$

en remplaçant x par $\left(t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + t^n\varepsilon(t)\right)$ dans la formule précédente (évident car $\ln(\mathrm{e}^t) = t$).

4 3 Puissance

On peut calculer que :

$$[(1+x)^\alpha]^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.$$

La formule de Taylor-Young donne :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x).$$

4 4 Fonctions trigonométriques

Les dérivées successives du (co)sinus, sont, soit un sinus, soit un cosinus. La formule de Taylor-Young donne :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x),$$
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\varepsilon(x).$$

Remarquons que :

1. en intégrant $\cos(x)$, on obtient bien $\sin(x)$;
2. le DL de $\sin(x)$ ne comporte que des puissances impaires (le sinus est impair !) ;
3. le DL de $\cos(x)$ ne comporte que des puissances paires (le cosinus est pair !) ;
4. on retrouve la formule bien connue $\sin(x) \simeq x$ si x est petit ;
5. on pourrait retrouver ces DL à partir des formules d'Euler complexes.

Ensuite, par division euclidienne par puissances croissantes de $\sin(x)$ et $\cos(x)$, on trouve :

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + x^8\varepsilon(x).$$

Les calculs dans cette formule deviennent vite complexes...

5 Applications

5 1 Position relative de courbes

Les développements limités permettent de déterminer :

– la position relative d'une courbe par rapport à une de ses tangentes ;

– la position relative d'une courbe par rapport à une autre.

Exemple 58.15. Soit la fonction f définie pour tout $x \in]-1\,,+\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 - 5x + 5\ln(1+x).$$

Étudier les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et de la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = -\frac{3}{2}x^2$ au voisinage du point O.

On pourra au préalable étudier la fonction f sur son domaine de définition

5 2 Calcul de limites

Exemple 58.16. Calculer :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x^2} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

Développement

Solution.

a.

$$\frac{\sin x}{x^2} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{6} + o(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty.$$

b.

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^2 = \mathrm{e}^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \mathrm{e}^{x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^2+\left(\frac{1}{x}\right)^2\varepsilon(x)\right)} = \mathrm{e}^{1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{x}\varepsilon(x)}$$

Or, quand $x \to +\infty$, $\frac{1}{x} \to 0$. Donc :

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}^{1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{x}\varepsilon(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}.$$

□

6 Pour finir : un exercice de BTS

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,,+\infty[$ par

$$f(x) = (x-1)^2 + 2\ln x.$$

1. Déterminer, en posant $X = x - 1$, le développement limité de $f(x)$, d'ordre 3, au voisinage de $x = 1$.
2. (a) Déterminer, au voisinage de $x = 1$, une équation de la tangente T à la courbe représentative C de la fonction f au point d'abscisse 1.

   (b) Etudier la position relative de la courbe C et de la tangente T au voisinage de $x = 1$.
3. Etudier, la position relative de la courbe C et de la parabole P d'équation :

$$y = (x-1)^2.$$

4. Représenter graphiquement la courbe C, la tangente T et la parabole P dans un repère orthonormal.

Développement

Correction de l'exercice.

1. En posant $X = x - 1$, soit $x = X + 1$, on obtient :

$$(x-1)^2 + 2\ln x = X^2 + 2\ln(1+X).$$

Quand x tend vers 1 alors X tend vers 0 et le cours donne, au voisinage de 0, le développement limité d'ordre 3 suivant :

$$\ln(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + X^3\varepsilon(X) \text{ avec } \lim_{X\to 0}\varepsilon(X) = 0,$$

on en déduit

$$f(x) = g(X) = X^2 + 2\left[X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3}\right] + 2X^3\varepsilon(X) \text{ avec } \lim_{X\to 0}\varepsilon(X) = 0$$

$$f(x) = g(X) = 2X + \frac{2X^3}{3} + 2X^3\varepsilon(X) \text{ avec } \lim_{X\to 0}\varepsilon(X) = 0.$$

On revient à la variable initiale x :

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x - 2 + \frac{2}{3}(x-1)^3 + 2(x-1)^3\varepsilon'(x-1) \quad \text{ avec } \lim_{x\to 1}\varepsilon'(x-1) = 0 \\ &= 2x - 2 + \frac{2}{3}(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + 2(x-1)^3\varepsilon'(x-1) \\ &= -\frac{8}{3} + 4x - 2x^2 + \frac{2}{3}x^3 + 2(x-1)^3\varepsilon'(x-1) \quad \text{ avec } \lim_{x\to 1}\varepsilon'(x-1) = 0. \end{aligned}$$

2. (a) Il suffit d'appliquer le cours pour déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $X = 0$: $y = 2X$, soit, en revenant à la variable initiale :

$$y = 2x - 2.$$

(b) Au voisinage de 0, étudier la position relative de la courbe représentative de la fonction f et de la tangente à cette courbe en $X = 0$ revient à étudier le signe du premier terme qui succède à $2X$ dans le développement limité précédent, c'est-à-dire le signe de $\frac{X^3}{3} = \frac{(x-1)^3}{3}$. Au voisinage de 1,

   - la courbe est en dessous de la tangente si $x < 1$;
   - la courbe est au dessus de la tangente si $x > 1$.

3. Pour déterminer la position relative de la courbe et de la parabole donnée dans le texte, il suffit d'étudier le signe de la différence $f(x) - (x-1)^2 = 2\ln x$. La méthode ici est générale et pas seulement au voisinage de 1. Même au voisinage de 1, elle serait plus simple que celle d'utiliser le développement limité et permet, peut-être, d'éviter des erreurs de calculs.
   - Si $x \in \left]0\,,1\right[$, $\ln x < 0$, la courbe est en dessous de la parabole ;
   - si $x \in \left]1\,,+\infty\right[$, $\ln x > 0$, la courbe est au dessus de la parabole ;
   - si $x = 1$, $\ln x = 0$, la courbe et la parabole se coupent.

4. On appelle C la courbe représentative de la fonction f, P la parabole et T la tangente à C au voisinage de $x = 1$.

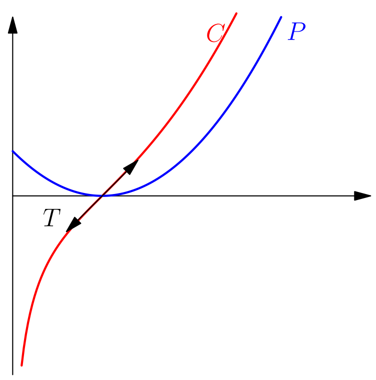


FIGURE 58.1 – Représentation graphique de C, T et P

□

LEÇON 59

Séries numériques

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k}$$

Niveau : BTS

Prérequis : suites, suites géométriques

1 Généralités

Définition 59.1

Séries numériques
On appelle *série* de terme général u_n, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles définies par $S_n = u_0 + \cdots + u_n$. On la note $\sum u_n$.

Remarques 59.2.

a. Les premiers termes de la série sont alors : $S_0 = u_0$, $S_1 = u_0 + u_1$, $S_2 = u_0 + u_1 + u_2 \dots$

b. La série peut être définie sur $\mathbb{N}$ ou à partir d'un rang n_0.

Exemple 59.3. La série de terme général $\frac{1}{n}$ est la suite (S_n) des sommes

$$S_n = u_1 + \cdots + u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Cette série est définie à partir du rang 1, elle est définie sur $\mathbb{N}^*$.

Définition 59.4

Séries convergentes
On dit que la dérie de terme général u_n est *convergente* si la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ est convergente. Dans ce cas $S = \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k$ est appelée *somme* de la série. Dans le cas contraire, on dit qu'elle est *divergente*.

Propriété 59.5

Pour qu'une série converge, il faut au moins que son terme général tende vers 0.

Développement

Démonstration. Si $\sum u_n$ converge vers S alors (S_n) converge vers S et (S_{n-1}) aussi. La différence $S_n - S_{n-1}$ est égale à u_n et tend vers 0. □

Remarque 59.6. Lorsque le terme général ne tend pas vers 0, on dit que la séire diverge *grossièrement*.

Exemple 59.7. La série $\sum \cos \frac{1}{n}$ diverge car :

$$\lim_{n\to+\infty} \cos \frac{1}{n} = 1 \neq 0.$$

2 Séries géométriques

Définition 59.8

Séries géométriques
On appelle *séries géométriques* les séries de terme général $u_n = q^n$. Le terme q se nomme la *raison* de la série.

Exemple 59.9. La série de terme général $u_n = \frac{1}{2^n}$ est une série géométrique.

Propriété 59.10

Une série géométrique de raison q ne converge que si $|q| < 1$, sa somme est dans ce cas :

$$S = \frac{1}{1-q}.$$

Développement

Démonstration.

- Lorsque $q = 1$ alors $S_n = (n+1)$ donc la suite (S_n) diverge.
- Lorsque $q = -1$ alors S_n prend alternativement les valeurs 1 et 0 donc (S_n) diverge.
- Lorsque $|q| > 1$ alors (q^n) diverge donc (S_n) diverge. En effet :

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

  d'après le cours sur les suites géométriques.
- Lorsque $|q| < 1$ alors q^n tend vers 0 donc S_n tend vers $S = \frac{1}{1-q}$.

□

Exemple 59.11. La série de terme général $u_n = \frac{1}{2^n}$ converge car $q = \frac{1}{2}$ vérifie $|q| < 1$. Sa somme est :

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Ce qui signifie que :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = 2.$$

3 Séries de Riemann

Définition 59.12

Séries de Riemann
On appelle *séries de Riemann* les séries de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exemples 59.13.

a. $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann avec $\alpha = 2$.
b. $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann avec $\alpha = 1/2$.

Propriété 59.14

La série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ converge lorsque $\alpha > 1$, diverge lorsque $\alpha \leq 1$.

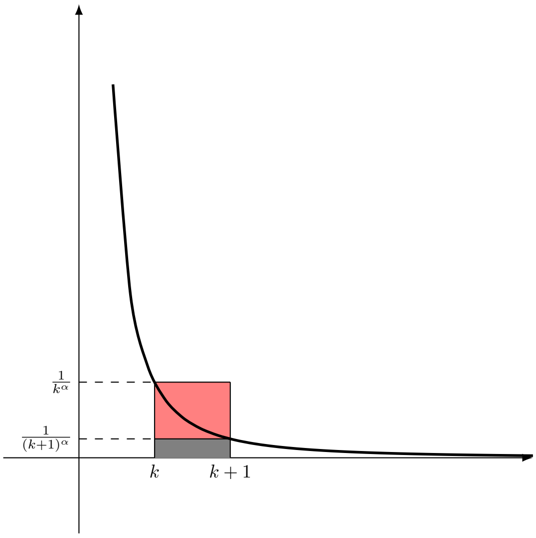
Exemples 59.15.

a. La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ avec $\alpha = 2$ converge.
b. Par contre, la série de Riemann $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ avec $\alpha = 1/2$ diverge.
c. La série de Riemann $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Développement

Démonstration. On encadre l'aire sur la courbe de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ où α est un nombre positif. Dans le cas contraire, la série diverge grossièrement car son terme général ne tend pas vers zéro.

Encadrons l'aire sous la courbe représentant $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ par deux rectangles.



$$\frac{1}{2^\alpha} \times 1 \leq \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \leq \frac{1}{1^\alpha} \times 1$$
$$\frac{1}{3^\alpha} \times 1 \leq \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \leq \frac{1}{2^\alpha} \times 1$$
$$\frac{1}{4^\alpha} \times 1 \leq \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \leq \frac{1}{3^\alpha} \times 1$$
$$\vdots \quad \vdots$$
$$\frac{1}{n^\alpha} \times 1 \leq \int_{n-1}^n \frac{\mathrm{d}x}{x^n} \leq \frac{1}{(n-1)^\alpha} \times 1$$

En effectuant la somme, on obtient :

$$S_n = 1 + \sum_{k=2}^n u_k \leq 1 + \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}.$$

– Pour $\alpha > 1$, on a :

$$S_n \leq 1 + \left[\frac{-1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}\right]_1^n$$

donc

$$S_n \leq \frac{1}{(\alpha-1)}\left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \leq 1 + \frac{1}{(\alpha-1)}$$

donc (S_n) est majorée or elle est croissante donc elle converge.

– pour $\alpha = 1$, on a de la même façon :

$$\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leq S_n$$

donc $\ln(n+1) \leq S_n$ et ainsi $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, la suite (S_n) diverge.

– enfin pour $\alpha < 1$, on a :

$$\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \leq S_n$$

donc $\frac{1}{(\alpha-1)}(1-0) \leq S_n$ donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ la suite (S_n) diverge.

□

4 Séries alternées

Définition 59.16 On appelle *séries alternées* les séries pouvant s'écrire sous la forme $\pm\sum(-1)^n a_n$ où a_n garde un signe constant positif.

Exemple 59.17. La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est une série alternée.

Propriété 59.18

Pour qu'une série alternée $\sum (-1)^n a_n$ converge, il suffit que le terme a_n tend vers 0 en décroissant

Développement

Démonstration (admis en BTS). Pour prouver le critère, on note (U_n) la suite partielle d'ordre n de la série. Les hypothèses faites sur les termes généraux donnent successivement

$$0 le U_0, \quad 0 \leq U_1 \leq U_0, \quad 0 \leq U_1 \leq U_2 \leq U_0$$

et, plus généralement,

$$0 \leq U_1 \leq U_3 \leq \cdots \leq U_{2n+1} \leq U_{2n+3} \leq \cdots \leq U_{2n+2} \leq U_{2n} \leq \cdots \leq U_2 \leq U_0.$$

Ainsi les suites $(U_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(U_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont l'une décroissante, l'autre décroissante. Leur différence tend, par hypothèse, vers 0. Le théorème des suites adjacentes s'applique et montre que ces deux suites convergent vers une limite commune U. Mais alors la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet elle-même pour limite U.
Ensuite, l'inégalité concernant le reste se lit directement dans les inégalité précédentes, en soustrayant U_n à U_{n+1} et à U. La remarque sur le signe du reste en découle. $\square$

Exemple 59.19. $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente car dans ce cas, $a_n = \frac{1}{n}$ donc $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ en décroissant.

Définition 59.20

Séries absolument convergentes
On dit qu'une série alternée $\sum u_n$ est absolument convergente lorsque $\sum |u_n|$ converge.

Exemple 59.21. $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente car $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann absolument convergente.

Remarque 59.22. Lorsqu'une série est convergente mais non absolument convergente, on dit qu'elle est semi-convergente. C'est le cas par exemple de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$.

5 Critères pour les séries à termes positifs

5.1 Généralités

Définition 59.23

On parle de *série à termes positifs* lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geq 0$.

Remarque 59.24. La définition reste valable sur $u_n \geq 0$ à partir d'un certain rang n_0.
Dans ce cas, la suite des sommes partielles (S_n) est croissante. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$. Donc il suffit de montrer que (S_n) est majorée pour que (S_n) converge.

Propriété 59.25

a. Si $u_n \leq v_n$, et si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge aussi.
b. Si $u_n \leq v_n$ et si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge aussi.

Développement

Démonstration. Soit $\sum v_n$ une série convergente à termes positifs alors (T_n) définie par $T_n = v_0 + \cdots + v_n$ converge donc (T_n) est majorée. Il existe M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n \leq M$. Or $u_n \leq v_n$ donc $S_n \leq T_n \leq M$. Finalement (S_n) est croissante et majorée donc elle converge.
Soit $\sum u_n$ une série divergente à termes positifs alors (S_n) définie par $S_n = u_0 + \cdots + v_n$ diverge or (S_n) n'est pas majorée. De plus $u_n \leq v_n$ donc $S_n \leq T_n$ donc (T_n) n'est pas majorée, elle diverge. □

Exemple 59.26. La série de terme général $\frac{1}{3^n+n}$ converge car :

$$\frac{1}{3^n+n} \leq \frac{1}{3^n}$$

et $\frac{1}{3^n}$ est le terme général d'une série géométrique convergente.

Exemple 59.27. La série de terme général :

$$u_n = \frac{n+1}{n^2-n}$$

est divergente car $u_n \geq \frac{n}{n^2}$ donc :

$$u_n \geq \frac{1}{n}$$

or $\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente.

5.2 Régle de D'Alembert

Propriété 59.28

a. Si $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = L < 1$ alors la série $\sum u_n$ converge.

b. Si $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = L > 1$ alors la série $\sum u_n$ diverge.

Développement

Démonstration (admise en BTS). Soit (u_n) une série réelle à termes strictement positifs telle que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L \geq 0$.

- Si $L < 1$, il existe k tel que $L < k < 1$ et N entier naturel tel que pour $n > N$: $a_n < ka_{n-1} < k^{n-N}a_N$, donc la série $\sum a_{n+N}$ converge, d'où le résultat pour $\sum a_n$.
- Si $L > 1$, il existe k tel que $1 < k < L$ et N entier naturel tel que pour $n > N$: $a_n > ka_{n-1} > k^{n-N}a_N$, donc la suite ne tend pas vers 0.

□

Exemple 59.29. Soit $\sum \frac{1}{n!}$, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 0 < 1.$$

Cette série converge.

Remarques 59.30.

a. Cette règle permet de prévoir la convergence mais ne donne pas la somme.

b. Cette règle ne permet pas de conclure lorsque :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 1$$

Exemple 59.31. La série de terme général $u_n = \frac{1}{n!}$ converge car :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1}$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1.$$

5.3 Règle du n^α

Propriété 59.32

a. S'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = L \in \mathbb{R}$ alors $\sum u_n$ converge.
b. S'il existe $\alpha \leq 1$ tel que $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n > 0$ alors $\sum u_n$ diverge.

Exemples 59.33.

a. La série de terme général $\frac{1}{n^2+1}$ converge car :

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 u_n = 1 \in \mathbb{R}$$

et ici $\alpha = 2 > 1$.

b. La série de terme général $\frac{1}{5n+\sqrt{n}}$ diverge car :

$$\lim_{n\to+\infty} n u_n = 15 > 0$$

et ici $\alpha = \frac{1}{2}$.

c. La série de terme général $u_n = \frac{n+2}{4n^3-2n+1}$ converge car :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} u_n = \frac{1}{4} \in \mathbb{R}$$

or $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente donc la série $\sum u_n$ converge.

LEÇON

60

Séries de Fourier

Niveau : BTS

Prérequis : séries, intégrales, trigonométrie

1 Introduction

1.1 Joseph Fourier

FIGURE 60.1 – Joseph Fourier

Joseph FOURIER (1768-1830), étudia à l'Ecole Royale Militaire d'Auxerre, et dès l'âge de treize ans, manifesta un intérêt certain pour les mathématiques, mais hésita à devenir prête (il entra à Saint-Benoît-sur-Loir, qu'il quitta en 1789). En 1793, il se joint à un comité révolutionnaire mais, sous la Terreur, faillit être guillotiné (la mort de Robespierre lui permit d'en réchapper). Il eut, à l'Ecole Normale Supérieure, Lagrange et Laplace comme professeurs, obtint un poste à l'Ecole Centrale de Travaux Publics, puis enseigna à l'Ecole Polytechnique. Il participa à la campagne d'Egypte sous Napoléon, fut nommé préfet de l'Isère et, là, étudia la théorie de la propagation de la chaleur, ce qui le mena à la décomposition des fonctions périodiques.

1.2 Première approche

Considérons les fonctions indexées par n définies par :

$$S_n(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} \sin[(2k+1)2\pi t].$$

Considérons ensuite le signal en créneau f de période 1 (voir la figure 60.2) :

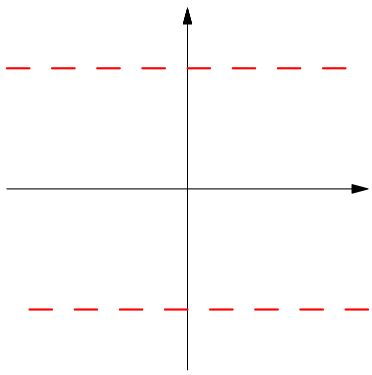
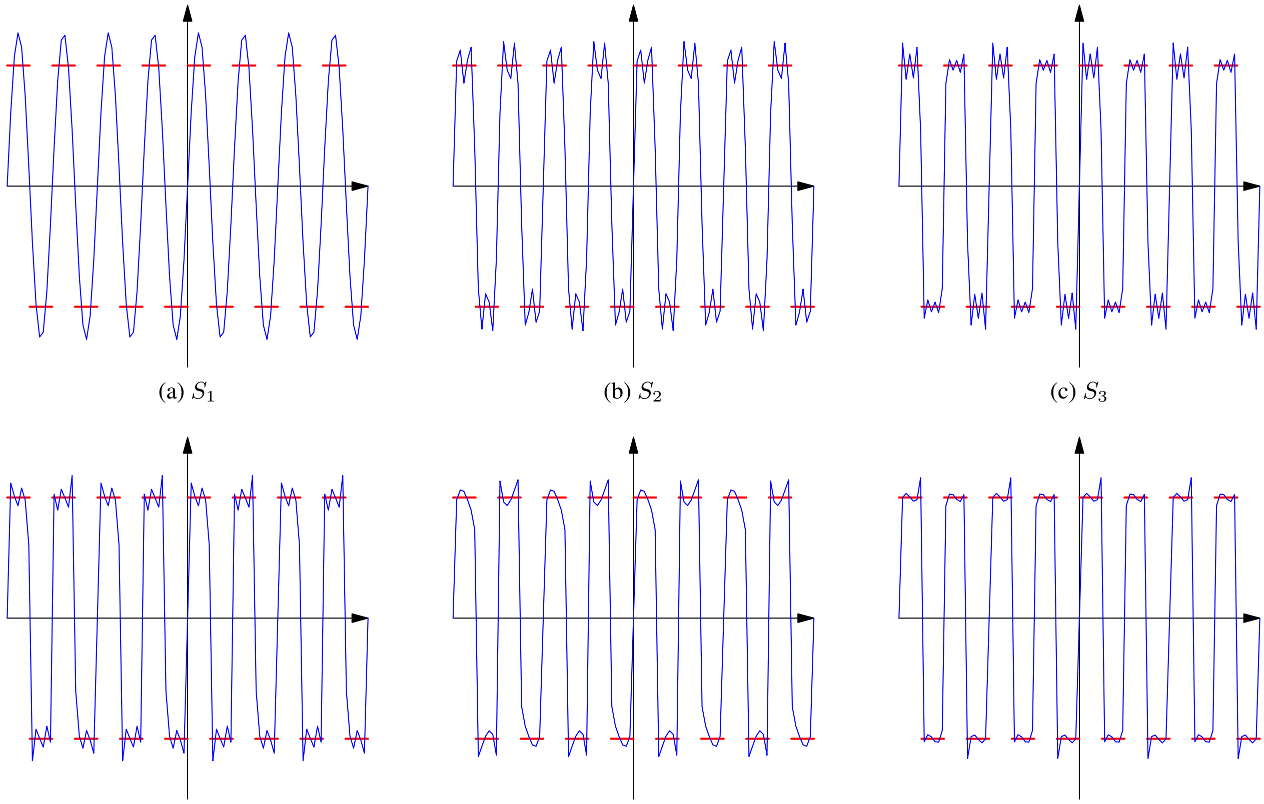


FIGURE 60.2 – Signal f en créneau de période 1

Ce signal est discontinu, donc a fortiori non dérivable. Nous allons l'approcher par ses *sommes de Fourier* S_n, qui sont des fonctions sinusoïdales (polynômes trigonométriques, infiniment dérivables et commodes pour les calculs). Traçons donc quelques unes de ces sommes, et observons leurs allures (voir la figure 60.3)

Nous pouvons déjà noter que, pus n est grand, plus la somme de Fourier semble se rapprocher du signal en créneau. Plus précisément, S_n *converge* vers f en tout point de continuité de f. Cela dit, près d'une discontinuité de f, il reste toujours une « crête », de plus en plus proche de la discontinuité, mais d'amplitude constante (environ 9% du saut de discontinuité). C'est le *phénomène de Gibbs* (Josiah Willard Gibbs, américain, 1839-1903). Ceci conduit à faire des moyennes de Césaro des sommes de Fourier (appelées sommes de Fejér), rendant la convergence bien meilleure (mais c'est hors programme).



(a) S_1 (b) S_2 (c) S_3 (d) S_4 (e) S_5 (f) S_{11}

FIGURE 60.3 – Approximation du signal f avec les sommes de Fourier

2 Coefficients de Fourier

Dans cette partie, nous allons définir la somme de Fourier $S_N(f)$ d'une fonction périodique f : nous étudierons la convergence de cette somme vers f dans la prochaine section (mais il faut garder à l'idée que $S_N(f)$ est une approximation de f).

2.1 Formes exponentielle et réelle ; somme de Fourier

Dans la suite, soit f une fonction T-périodique continue par morceaux, et soit $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Définition 60.1

Coefficients de Fourier complexes

Pour n dans $\mathbb{Z}$, on définit les nombres complexes :

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega n t}\,\mathrm{d}t.$$

Ces nombres sont appelés les *coefficients de Fourier complexes* de f.

Remarque 60.2. Vu que $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega n t}$ est aussi T-périodique, on pouvait l'intégrer sur n'importe quel intervalle de longueur T, par exemple $[-T/2\,,T/2]$. Le choix est purement pratique et dépend du signal considéré.

Définition 60.3

Somme de Fourier

Soit $N \in \mathbb{N}$. La *somme de Fourier* d'ordre N de f est la fonction définie par :

$$S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega n x}.$$

Proposition 60.4

Soit n dans $\mathbb{N}$. On a les résultats suivants :

1. $c_n(f) + c_{-n}(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(\omega nt)\,\mathrm{d}t$;
2. $\mathrm{i}(c_n(f) - c_{-n}(f)) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(\omega nt)\,\mathrm{d}t$.

Développement

Démonstration de la proposition 60.4.

1.

$$\begin{aligned}c_n(f) + c_{-n}(f) &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega nt}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega nt}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega nt} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega n})\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)2\cos(\omega nt)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(\omega nt)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\mathrm{i}(c_n(f) + c_{-n}(f)) &= \mathrm{i}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega nt}\,\mathrm{d}t - \mathrm{i}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega nt}\,\mathrm{d}t\\ &= -\mathrm{i}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega nt} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega nt})\,\mathrm{d}t = -\mathrm{i}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)2\mathrm{i}\sin(\omega nt)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(\omega nt)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

On conclut à chaque fois grâce aux formules d'Euler. □

On définit, pour n dans $\mathbb{N}^*$, des nombres réels (appelés *coefficients de Fourier réels*) par :

$$\begin{aligned}a_0(f) &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t;\\ a_n(f) &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(\omega nt)\,\mathrm{d}t;\\ b_n(f) &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(\omega nt)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Corollaire 60.5

Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On en déduit les égalités fondamentales suivantes :

$$\begin{aligned}c_n(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega nx} + c_{-n}(f)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega nx} &= a_n(f)\cos(\omega nx) + b_n(f)\sin(\omega nx);\\ c_0(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t &= a_0(f).\end{aligned}$$

Développement

Démonstration du corollaire 60.5. On calcule directement, en utilisant la relation $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i}\sin t$, et en n'oubliant pas que $\cos(-t) = \cos t$:

$$\begin{aligned}c_n(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega nx} + c_{-n}(f)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega nx} &= c_n(f)[\cos(\omega nx) + \mathrm{i}\sin(\omega nx)] + c_{-n}(f)[\cos(\omega nx) - \mathrm{i}\sin(\omega nx)]\\ &= [c_n(f) + c_{-n}f]\cos(\omega nx) + \mathrm{i}[c_n(f) - c_{-n}(f)]\sin(\omega nx)\\ &= a_n(f)\cos(\omega nx) + b_n(f)\sin(\omega nx).\end{aligned}$$

Ensuite :

$$c_0(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}0\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t = a_0(f).$$

□

Remarque 60.6. Le coefficient $c_0(f) = a_0(f)$ est la *valeur moyenne* de f.

Soit N dans $\mathbb{N}^*$. On obtient le résultat fondamental suivant :

$$S_N(f)(x) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{N} [a_n(f)\cos(\omega n x) + b_n(f)\sin(\omega n x)] \tag{60.1}$$

et en particulier $S_N(f)$ est une fonction *à valeurs réels* (ce qui n'était a priori pas évident).

Développement

Justification de l'équation (60.1). On calcule directement :

$$S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega n x} = c_0(f) + \sum_{n=1}^{N} [c_n(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega n x} + c_{-n}(f)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega n x}].$$

ce qui mène directement au résultat en utilisant le corollaire précédent. □

Définition 60.7

Fondamental et harmonique

Le terme $a_1(f)\cos(\omega x) + b_1(f)\sin(\omega x)$ est appelé le *fondamental* (de fréquence $\frac{1}{T}$). Pour $b \geq 2$, le terme $a_n(f)\cos(\omega n x) + b_n(f)\sin(\omega n x)$ est appelé *harmonique* de rang n (c'est un signe de fréquence $\frac{n}{T}$, multiple du fondamental).

2.2 Propriété des coefficients

Proposition 60.8

On retrouve les coefficients complexes à partir des coefficients réels grâce aux formules, valables pour n dans $\mathbb{N}^*$:

$$c_n(f) = \frac{1}{2}[a_n(f) - \mathrm{i}b_n(f)];$$
$$c_{-n}(f) = \frac{1}{2}[a_n(f) + \mathrm{i}b_n(f)].$$

Pour la preuve, on pourra se servir de la proposition 60.4.

Proposition 60.9

Les coefficients complexes d'indices opposés sont conjugués :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}.$$

Proposition 60.10

Energie de l'harmonique

L'*énergie* de l'harmonique de rang $n \geq 1$ est (par définition) le nombre :

$$E_n(f) = |c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2 = \frac{a_n(f)^2 + b_n(f)^2}{2}.$$

Définition 60.11

Spectre des fréquences

Le *spectre des fréquences* de f s'obtient en représentant les fréquences $\frac{n}{T}$ des harmonique en abscisse et

$$|c_n(f)| + |c_{-n}(f)| = \sqrt{a_n(f)^2 + b_n(f)^2}$$

en ordonnée.

Théorème 60.12

Lemme de Riemann-Lebesgue

Les coefficients de Fourier tendent vers 0 à l'infini :

$$\lim_{n\to+\infty} |c_n(f)| = \lim_{n\to-\infty} |c_n(f)| = \lim_{n\to+\infty} a_n(f) = \lim_{n\to+\infty} b_n(f) = 0.$$

La démonstration de ce théorème est hors programme et admise.

Remarques 60.13.

1. Ainsi, lorsque n est grand, l'harmonique de rang n est négligeable (son amplitude est petite). Mais attention, ceci ne veut pas dire que l'importance des harmoniques va forcément en décroissant (une harmonique de rang élevé peut-être dominante).
2. En pratique, on va négliger les termes de rangs « élevés » de la somme de Fourier. Tout dépend du degré de précision souhaité. En général, on fait un spectre des fréquences, et par une application pifométrique du plus bel effet, on oublie les harmoniques qui représentent un « faible » pourcentage de l'énergie totale.
3. En fait, plus f est régulière (c'est-à-dire dérivable), plus on est assuré de la décroissance rapide des coefficients de Fourier (l'idée est de comparer $c_n(f)$ et $c_n(f')$, puis par extension, $c_n(f)$ et $c_n(f^{(k)})$)x.

Proposition 60.14

Parité du signal

1. Si f est une fonction paire, alors ses coefficients $b_n(f)$ sont nuls, et donc ses sommes de Fourier ne sont composées que de cosinus.
2. Si f est une fonction impaire, alors ses coefficients $a_n(f)$ sont nuls, et donc ses sommes de Fourier sont composées que de sinus.

Développement

Démonstration de la proposition 60.14. On prouve la deuxième assertion. On peut calculer les coefficients de Fourier de f en intégrant sur $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. Ensuite puisque $t \mapsto \cos(\omega nt)$ est paire, on remarque $t \mapsto f(t)\cos(\omega nt)$ est impaire ; ainsi son intégrale, sur un intervalle symétrique comme $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$, est nulle. Ce qui signifie que $a_n(f) = 0$. □

Exemple 60.15. Les sommes de Fourier du signal en créneau considéré dans l'introduction ne sont composées que de sinus, puisque ce signal est impair.

3 Théorème de convergence

3.1 Egalité de Bessel-Parseval

Définition 60.16

Norme euclidienne

La *norme euclidienne* de f est le nombre réel :

$$\|f\| = \left(\frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2 \,\mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

Remarques 60.17.

1. Les coefficients de Fourier sont en fait définis grâce à un produit scalaire (hors programme) sur l'espace des fonctions T-périodiques continues par morceaux, et la norme de f est issue de ce produit scalaire, d'où son qualificatif « euclidienne ».

2. La norme euclidienne de f est la *valeur efficace* du signal f sur une période.
3. Le carré de la valeur efficace de f est l'*énergie* du signal f sur une période : $E(f) = \|f\|^2$.

Théorème 60.18

Egalité de Bessel-Parseval

On a l'égalité fondamentale suivante :

$$\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = a_0(f)^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n(f)^2 + b_n(f)^2}{2}.$$

Remarques 60.19.

1. On récupère au passage le lemme de Riemann-Lebesgue. En effet, puisque les séries considérées convergent, leurs termes généraux tendent vers 0.
2. Cette égalité nous permettra de calculer la somme de quelques séries usuelles, l'idée étant de créer un signal périodique dont les coefficients de Fourier sont « semblables » aux termes de la série étudiée.

Remarques 60.20. En termes physiques, l'énergie d'un signal périodique f est la somme des énergies des harmoniques et du carré de la valeurs moyenne :

$$E(f) = a_0(f)^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} E_n(f).$$

3 2 Convergence des séries de Fourier

Définition 60.21

$\mathcal{C}^1$ par morceaux

On dit que f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux s'il existe une subdivision $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = T$ de l'intervalle $[0\,,T]$ telle que, pour $0 \leq i \leq p-1$, la restriction de f à $]x_i\,, x_{i+1}[$ est prolongeable par continuité sur $[x_i\,, x_{i+1}]$ en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Théorème 60.22

Dirichlet

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors, quel que soit x, la série de Fourier $S_N(f)(x)$ converge vers la demi-somme des limites à droites et à gauche de f en x. Formellement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{N\to+\infty} S_N(f)(x) = \frac{f(x^+) - f(x^-)}{2}.$$

La preuve de ce théorème est hors programme et admise.

Corollaire 60.23

Si f est continue en x, alors $S_N(f)(x)$ converge vers $f(x)$ lorsque N tend vers l'infini.

Remarques 60.24.

1. La vérification systématique des conditions du théorème de Dirichlet n'est pas un objectif du programme du BTS. On retiendra que tout honnête signal périodique les satisfait...
2. Le théorème confirme, sous certaines conditions, que les sommes de Fourier de f en sont des approximations. Mais encore une fois attention, si f n'est pas continue, la convergence est simple (c'est-à-dire se traite pour un x donné), mais pas uniforme (c'est-à-dire partout de la même manière). En effet, il se produit le phénomène de Gibbs aux discontinuités. Par contre, si f est continue, alors il n'y a pas de phénomène de Gibbs, et la convergence de la série de Fourier de f est uniforme.

4 Sommes de Fourier de signaux usuels

On détermine ici les sommes de Fourier de deux signaux électriques classiques.

4.1 Signal en créneau

Description du signal C'est le signal qu'on a étudié dans l'introduction.

Calcul des coefficients On calcule les coefficients de Fourier de f :

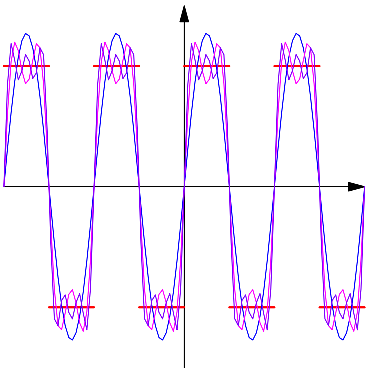
$$\begin{aligned}
a_n &= 0 \quad \text{car } f \text{ est impaire ;}\\
b_n &= \frac{2}{1}\int_{-1/2}^{1/2} f(t)\sin\left(\frac{2\pi}{1}nt\right)\mathrm{d}t = 4\int_0^{1/2} f(t)\sin(2\pi nt)\,\mathrm{d}t \quad \text{par parité de la fonction intégrée}\\
&= 4\int_0^{1/2}\sin(2\pi nt)\,\mathrm{d}t = 4\left[-\frac{\cos(2\pi nt)}{2\pi n}\right]_{t=0}^{t=1/2}\\
&= \frac{4}{2\pi n}(-\cos(\pi n)+\cos 0) = \frac{2}{\pi n}(1-(-1)^n) \quad \text{car } \cos(\pi n) = (-1)^n\\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair}\\ \frac{4}{\pi n} & \text{si } n \text{ est impair}\end{cases}.
\end{aligned}$$

Ainsi, on trouve :

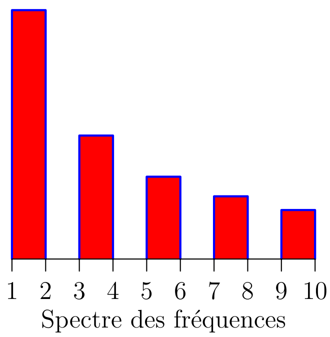
$$S_N(x) = \sum_{\substack{n=1\\ n \text{ impair}}}^{N} \frac{4}{\pi n}\sin(2\pi nx),$$

ce qui correspond bien à la formule de l'introduction. Puisque f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux mais pas continue, sa somme de Fourier converge simplement (théorème de Dirichlet).

Représentations graphiques Voir la figure 60.4.



(a) f, S_1, S_2, S_3



(b) Spectre des fréquences

FIGURE 60.4 – Représentations graphiques des séries de Fourier et du spectre des fréquences du signal créneau

4.2 Signal en triangle

Description du signal On considère le signal 2π-périodique f, défini sur $[-\pi\,,\pi]$ par $f(t) = |t|$. Il faut observer immédiatement que :

1. la fonction f est paire, donc ses coefficients b_n sont nuls ;
2. la fonction f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continue, ce qui assure une convergence uniforme de sa série de Fourier.

Calcul des coefficients Calculons :

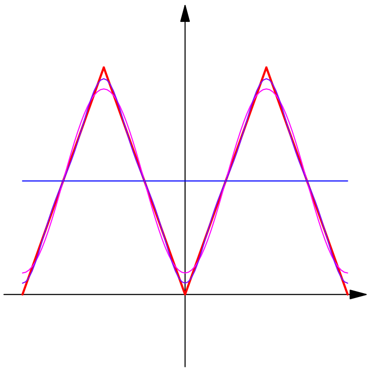
$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|\,\mathrm{d}t = 2\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}|t|\,\mathrm{d}t \text{ par parité de la fonction valeur absolue}\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t|\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(nt)\,\mathrm{d}t \quad \text{par parité de la fonction intégrée}\\
&= \frac{2}{\pi}\left[t\frac{\sin(nt)}{n}\right]_{t=0}^{t=\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(nt)}{n}\,\mathrm{d}t \quad \text{en intégrant par parties}\\
&= -\frac{2}{\pi n}\left[\frac{-\cos(nt)}{n}\right]_{t=0}^{t=\pi} \quad \text{car } \sin(n\pi)=0\\
&= \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n-1) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair,}\\ -\frac{4}{\pi n^2} & \text{si } n \text{ est impair.}\end{cases}
\end{aligned}
$$

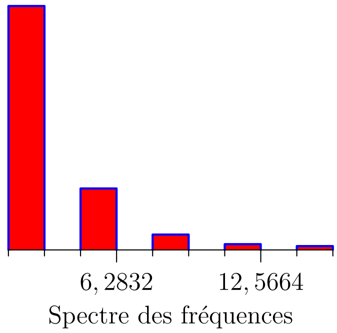
Ainsi, on trouve :

$$S_N(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{\substack{n=1\\ n \text{ impair}}}^{N} \frac{4}{\pi n^2}\cos(nx).$$

Représentations graphiques Voir la figure 60.5



(a) f, S_1, S_2, S_3



(b) Spectre des fréquences

FIGURE 60.5 – Représentations graphiques des séries de Fourier et du spectre des fréquences du signal triangle

Energies et approximation L'énergie du signal f sur une période est :

$$E = \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{\pi^2}{3}.$$

L'énergie de l'harmonique de rang n est nulle si n est pair. Si n est impair, elle vaut :

$$E_n = \frac{a_n^2+b_n^2}{2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{4}{\pi n^2}\right)^2 = \frac{8}{n\pi^2 n^4}.$$

La formule de Parseval appliquée à f donne :

$$\frac{\pi}{3} = E = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} E_n = \frac{\pi^2}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{8}{\pi^2 n^4}.$$

(on note au passage que cette égalité permet de calculer la somme d'une série numérique). Ce qui nous intéresse, c'est de savoir où tronquer la série de Fourier. Pour cela, on calcule :

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{\pi^2}{3} \simeq 3{,}289\,9;\\
a_0^2 &= \frac{\pi^2}{4} \simeq 2{,}467\,4 \quad \text{soit } 75\% \text{ de } E;\\
a_0^2 + E_1 &= \frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2} \simeq 3{,}278\,0 \quad \text{soit environ } 99{,}64\% \text{ de } E;\\
a_0^2 + E_1 + E_3 &= \frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2} + \frac{8}{81\pi^2} \simeq 3{,}288\,0 \quad \text{soit environ } 99{,}94\% \text{ de } E.
\end{aligned}
$$

On peut donc raisonnablement approcher f par la valeur moyenne et le fondamental, c'est-à-dire S_1.

LEÇON

61

Transformation de Laplace

Niveau : BTS

Prérequis : Notion de fonctions, intégrales, intégration par parties

1 Introduction à la leçon

Définition 61.1

Fonction causale

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que f est causale si, pour tout $t < 0$, on a $f(t) = 0$.

Exemple 61.2. La fonction *échelon unité* qu'on notera $\mathcal{U}$ définie par :

$$t \mapsto \begin{cases} \mathcal{U}(t) = 0, & \text{si } t < 0 \\ \mathcal{U}(t) = 1, & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

est une fonction causale. On donne une représentation graphique en figure 61.1

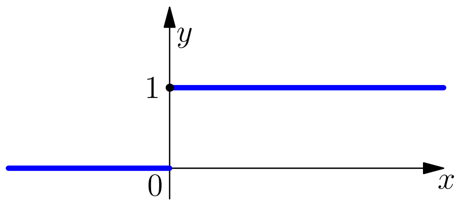


FIGURE 61.1 – Fonction échelon unité

Définition 61.3

Intégrale généralisée

Soit f une fonction définie sur $[a, +\infty[$. Si $\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est un réel A, on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et on a :

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = A.$$

Si $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ ne converge pas vers un réel (pour $x \to +\infty$) alors on dit qu'elle diverge.

2 Transformée de Laplace de fonctions usuelles

Définition 61.4

Transformée de Laplace d'une fonction causale

Soit f une fonction causale à valeurs réelles. On appelle *transformée de Laplace* de f, la fonction F de la variable réelle (ou complexe) p définie par :

$$\mathcal{L}(f)(p) = \mathcal{L}(t \mapsto f(t))(p) = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t.$$

Développement

Justification de l'existence de la transformation de Laplace. On suppose que $f \in \mathcal{E}$, c'est-à-dire f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\forall f \in \mathcal{E},\ \exists M_f, r_f,\ \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad |f(x)| \leq M_f \mathrm{e}^{r_f x}.$$

On montre que $\mathcal{L}(f)(p)$ existe si $p > r_f$: la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-px}\,\mathrm{d}x$$

est absolue [1] si $p > r_f$ puisque
$$\left|f(x)\mathrm{e}^{-px}\right| \leq M_f\mathrm{e}^{(r_f-p)x} \quad \text{et} \quad r_f - p < 0$$
et $\mathrm{e}^{(r_f-p)x}$ est d'intégrale absolument convergente dès que $r_f - p < 0$.

□

Remarque 61.5. La notation utilisée confère à la transformation de Laplace un rôle d'opérateurs de fonction. Si on note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ et qui ont une croissance au plus exponentielle [2] et $\mathcal{C}^\infty(0)$ l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ qui tendent vers 0 ainsi que toutes leurs dérivées en $+\infty$ alors :
$$\begin{array}{rcccl} \mathcal{L} & : & \mathcal{E} & \to & \mathcal{C}^\infty(0) \\ & & f & \mapsto & \mathcal{L}(f) \end{array}$$
où
$$\begin{array}{rcccl} \mathcal{L}(f) & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & p & \mapsto & \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t \end{array}.$$

Proposition 61.6

Table de transformée de Laplace
Le tableau 61.1 fournit une table de transformée de Laplace de fonctions usuelles.

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)(p)$	Domaine de validité de p
$\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{1}{p}$	$p > 0$
$t^n\mathcal{U}(t)$, $n \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$	$p > 0$
$\mathrm{e}^{-at}\mathcal{U}(t)$, $a \in \mathbb{R}$	$\dfrac{1}{p+a}$	$p + a > 0$
$\cos(\omega t)\mathcal{U}(t)$, $\omega \in \mathbb{R}$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$	$p > 0$
$\sin(\omega t)\mathcal{U}(t)$, $\omega \in \mathbb{R}$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$p > 0$

TABLE 61.1 – Table de transformée de Laplace de fonctions usuelles

Développement

Etablissement des transformées de Laplace.

– Soit $p > 0$. On considère sur $[0\,,+\infty[$ la fonction échelon-unité $\mathcal{U}(t)$ qui vaut 1 sur $\mathbb{R}_+$, donc on a :
$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t \mapsto \mathcal{U}(t))(p) &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\mathrm{e}^{-pt}}{-p}\right]_0^x = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{-px}}{-p} + \frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

– On veut démontrer que $\mathcal{L}(t \mapsto t^n\mathcal{U}(t))(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (même pour $n \in \mathbb{N}$, si on considère que $0! = 1$). Pour cela, on fait une démonstration par récurrence.

Initialisation On considère la fonction f_1 définie par $f_1(t) = t\mathcal{U}(t)$. On obtient :
$$\mathcal{L}(t \mapsto f_1(t))(p) = \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t.$$

1. On rappelle que la convergence absolue d'une intégrale si $\int_a^x |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge quand $x \to +\infty$
2. c'est-à-dire
$$\forall f \in \mathcal{E},\ \exists M_f, r_f,\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\quad |f(x)| \leq M_f\mathrm{e}^{r_f x}.$$

On va intégrer par parties en considérant $u(t) = t$ et $v'(t) = \mathrm{e}^{-pt}$. On obtient $u'(t) = 1$ et $v(t) = -\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-pt}$ d'où

$$\begin{aligned}
\int_0^x t\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{-t\mathrm{e}^{-pt}}{p}\right]_0^x + \frac{1}{p}\int_0^x \mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{-t}{p}\mathrm{e}^{-pt} - \frac{1}{p}\frac{\mathrm{e}^{-pt}}{p}\right]_0^x = \mathrm{e}^{-px}\left(-\frac{x}{p} - \frac{1}{p^2}\right). \\
\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t &= \lim_{n\to+\infty}\left[\mathrm{e}^{-px}\left(\frac{-x}{p} - \frac{1}{p^2}\right) + \frac{1}{p^2}\right] = \frac{1}{p^2}.
\end{aligned}$$

Hérédité On suppose que pour $f_n : t \mapsto t^n\mathcal{U}(t)$, $\mathcal{L}(f_n)(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$ pour un rang n fixé dans $\mathbb{N}$. On montre que $f_{n+1} : t \mapsto t^{n+1}\mathcal{U}(t)$ a pour transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}(f_{n+1})(p) = \frac{(n+1)!}{p^{n+2}}.$$

On considère :

$$\mathcal{L}(f_{n+1})(p) = \int_0^{+\infty} t^{n+1}\mathcal{U}(t)\,\mathrm{d}t$$

On va faire une intégration par parties, en posant $u(t) = t^{n+1}$ et $v'(t) = \mathrm{e}^{-pt}$ d'où $u'(t) = (n+1)t^n$ et $v(t) = -\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-pt}$. On obtient :

$$\int_0^x t^{n+1}\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{t^{n+1}\mathrm{e}^{-pt}}{p}\right]_0^x + \frac{n+1}{p}\int_0^x t^n\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t.$$

Or, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\mathcal{L}(f_n)(p) = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x t^n\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \frac{n!}{p+1}$$

et, de plus, par croissance comparée,

$$\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{t^{n+1}\mathrm{e}^{-pt}}{p}\right]_0^x = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^{n+1}\mathrm{e}^{-pt}}{p} = 0.$$

D'où :

$$\mathcal{L}(f_{n+1})(p) = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x t^{n+1}\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \frac{n+1}{p}\frac{n!}{p^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{p^{n+2}}.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{L}(f_n)(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$.

– On pose $g : t \mapsto \mathrm{e}^{-at}\mathcal{U}(t)$. On veut calculer $\mathcal{L}(g)(p)$ pour $a \in \mathbb{R}$.

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-at}\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{e}^{(-a+p)t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{a+p}\mathrm{e}^{-(a+p)t}\right]_0^x,$$

donc pour [3] p tel que $p + a > 0$, on obtient :

$$\mathcal{L}(g)(p) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{a+p}\mathrm{e}^{-(a+p)x} + \frac{1}{p+a}\right) = \frac{1}{p+a}.$$

– Soit $p > 0$. On pose $c : t \mapsto \cos(\omega t)\mathcal{U}(t)$ et $s : t \mapsto \sin(\omega t)\mathcal{U}(t)$. On considère :

$$I_C = \int_0^x \cos\omega t\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad I_s = \int_0^x \sin\omega t\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t.$$

3. Si $p + a < 0$ alors

$$\begin{aligned}
\int_0^x \mathrm{e}^{-at}\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t &= \int_0^x \mathrm{e}^{-(p+a)t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{-(p+a)}\mathrm{e}^{-(p+a)t}\right]_0^x \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-(p+a)x}}{-(p+a)} + \frac{1}{p+a} = \frac{1}{p+a}(\mathrm{e}^{-(p+a)x} + 1).
\end{aligned}$$

Or $p + a < 0$ donc $-(p+a)x > 0$, d'où

$$\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-(p+a)x} = +\infty$$

et donc $\mathcal{L}(g)(p)$ n'est pas convergente pour $p + a < 0$.

On calcule I_C par intégration par parties en posant $u(t) = \cos\omega t$ et $v'(t) = \mathrm{e}^{-pt}$ d'où $u'(t) = -\omega\sin\omega t$ et $v(t) = -\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-pt}$ et :

$$I_C = \left[-\frac{1}{p}\cos\omega t\mathrm{e}^{-pt}\right]_0^x - \frac{\omega}{p}I_S = -\frac{1}{p}\cos\omega x\mathrm{e}^{-px} + \frac{1}{p} - \frac{\omega}{p}I_S.$$

On calcule I_S de la même manière en posant $u(t) = \sin\omega t$ et $v'(t) = \mathrm{e}^{-pt}$. On obtient $u'(t) = \omega\cos\omega t$ et $v(t) = -\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-pt}$ donc :

$$I_S = \left[-\frac{1}{p}\sin\omega t\mathrm{e}^{-pt}\right]_0^x + \frac{\omega}{p}I_C = -\frac{1}{p}\sin\omega x\mathrm{e}^{-px} + \frac{\omega}{p}I_C.$$

On remplace maintenant I_S dans l'expression de I_C, on obtient :

$$I_C = -\frac{1}{p}\cos\omega x\mathrm{e}^{-px} + \frac{1}{p} - \frac{\omega}{p}\left(-\frac{1}{p}\sin\omega x\mathrm{e}^{-px} + \frac{\omega}{p}I_C\right)$$

donc :

$$\left(1 + \frac{\omega^2}{p^2}\right)I_C = -\frac{1}{p}\cos\omega x\mathrm{e}^{-px} + \frac{\omega}{p^2}\sin\omega x\mathrm{e}^{-px} + \frac{1}{p}.$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, pour $p > 0$, $\cos\omega x\mathrm{e}^{-px}$ et $\sin\omega x\mathrm{e}^{-px}$ tendent vers 0 (car cos et sin sont bornées) et donc :

$$\mathcal{L}(c)(p) = \int_0^{+\infty}\cos\omega t\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \frac{1/p}{1 + (\omega^2/p^2)} = \frac{p}{p^2 + \omega^2}.$$

On pourrait calculer I_S en utilisant les calculs précédents, on obtiendrait :

$$\mathcal{L}(s)(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

□

3 Propriétés de la transformée de Laplace

Propriété 61.7

Linéarité de $\mathcal{L}$

L'opérateur des transformées de Laplace est linéaire, c'est-à-dire soient f et g deux fonctions admettant des transformées de Laplace et λ et μ deux réels, on a :

$$\mathcal{L}(\lambda f + \mu g)(=)\lambda\mathcal{L}(f)(+)\mu\mathcal{L}(g)(.)$$

Développement

Démonstration de la propriété 61.7. Pour montrer la linéarité de $\mathcal{L}$, on n'utilise juste la linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\lambda f + \mu g)() &= \int_0^{+\infty}(\lambda f + \mu g)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\left[\lambda f(t)\mathrm{e}^{-pt} + \mu g(t)\mathrm{e}^{-pt}\right]\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty}\lambda f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty}\mu g(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t + \mu\int_0^{+\infty}g(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \lambda\mathcal{L}(f)(+)\mu\mathcal{L}(g)(.)\end{aligned}$$

□

Proposition 61.8

Transformée de $f(\alpha t)\mathcal{U}(t)$

Soient f admettant une transformée de Laplace F et $\alpha > 0$ réel. On a alors :

$$\mathcal{L}(t \mapsto f(\alpha t)\mathcal{U}(t))(=)\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Développement

Démonstration de la proposition 61.8. On calcule :

$$\mathcal{L}(t \mapsto f(\alpha t)\mathcal{U}(t))(=) \int_0^{+\infty} f(\alpha t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t.$$

On fait un changement de variable $\alpha t = u$, on obtient $\alpha\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}u$ soit $\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{d}u$. De plus, pour $t = 0$, on a $u = 0$, et pour t tendant vers $+\infty$, u tend vers $+\infty$. On obtient alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t \mapsto f(\alpha t)\mathcal{U}(t))() &= \int_0^{+\infty} f(u)\mathrm{e}^{(-pu)/\alpha}\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} f(u)\mathrm{e}^{-\frac{p}{\alpha}u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right).\end{aligned}$$

□

Proposition 61.9

Transformée de $f(t)\mathrm{e}^{-at}\mathcal{U}(t)$

Soient f admettant une transformée de Laplace F et $a \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$\mathcal{L}(t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-at}\mathcal{U}(t))(=)F(p+a).$$

Développement

Démonstration de la proposition 61.9. On a :

$$\mathcal{L}(t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-at}\mathcal{U}(t))(=) \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-at}\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-(a+p)t}\,\mathrm{d}t = F(p+a).$$

□

Proposition 61.10

Translation

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ causale admettant une transformée de Laplace F. Alors :

$$\mathcal{L}(t \mapsto f(t-\tau)\mathcal{U}(t-\tau))(=)F(p)\mathrm{e}^{-\tau p}.$$

Développement

Démonstration de la proposition 61.10. On calcule :

$$\mathcal{L}(t \mapsto f(t-\tau)\mathcal{U}(t-\tau))(=) \int_0^{+\infty} f(t-\tau)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\int_0^{x} f(t-\tau)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t.$$

En posant $t - \tau = u$, on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{-\tau}^{x-\tau} f(u)\mathrm{e}^{-p(u+\tau)}\,\mathrm{d}u.$$

La fonction f étant causale, on peut écrire que u est nul sur $[-\tau, 0]$, d'où :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f(t-\tau)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t &= \lim_{x\to+\infty}\int_0^{x-\tau} f(u)\mathrm{e}^{-pu}\mathrm{e}^{-p\tau}\,\mathrm{d}u \\ &= \mathrm{e}^{-p\tau}\lim_{x\to+\infty}\int_0^{x-\tau} f(u)\mathrm{e}^{-pu}\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-p\tau}F(p).\end{aligned}$$

□

4 Intégration et dérivation de transformée de Laplace

On va voir dans cette section que la transformée de Laplace transforme l'intégration et la dérivation en division et multiplication par une variable réelle p.

Proposition 61.11

Transformation d'intégrales

Soient f une fonction admettant F comme transformée de Laplace et a un réel. Alors :

$$\mathcal{L}(t \mapsto \mathcal{U}(t) \int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u)(=)\frac{F(p)}{p},$$

$$\mathcal{L}(t \mapsto \mathcal{U}(t) \int_a^t f(u)\,\mathrm{d}u)(=)\frac{F(p)}{p} + \frac{1}{p}\int_a^0 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

La démonstration est admise.

Proposition 61.12

Dérivée de la transformée de la Laplace

Soit f une fonction admettant F comme transformée de Laplace. Alors

$$\mathcal{L}(t \mapsto t^n f(t))(=)(-1)^n F^{(n)}(p).$$

La démonstration est aussi admise.

Proposition 61.13

Transformation de dérivées premières et secondes

Soient f admettant F comme transformée de Laplace et f deux fois dérivable. Alors

1. $\mathcal{L}(t \mapsto f'(t)\mathcal{U}(t))(=)pF(p) - f(0^+)$
2. $\mathcal{L}(t \mapsto f''(t)\mathcal{U}(t))(=)p^2F(p) - pf(0^+) - f'(0^+)$

où $f(0^+) = \lim\limits_{x\to 0, x>0} f(x)$.

Développement

Démonstration de la proposition 61.13. On calcule :

$$\mathcal{L}(t \mapsto f'(t)\mathcal{U}(t))(=)\int_0^{+\infty} f'(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t.$$

Pour cela, on intègre par parties en posant $u'(t) = f'(t)$ et $v(t) = \mathrm{e}^{-pt}$, on obtient :

$$\mathcal{L}(t \mapsto f'(t)\mathcal{U}(t))(=)\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)\mathrm{e}^{-pt}\right]_0^x + p\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t.$$

En admettant que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-px} = 0$, on obtient :

$$\mathcal{L}(t \mapsto f'(t)\mathcal{U}(t))(=) - f(0^+) + pF(p).$$

Si on applique ce résultat à $f''(t)\mathcal{U}(t)$, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t \mapsto f''(t)\mathcal{U}(t))() &= -f'(0^+) + p\mathcal{L}(t \mapsto f'(t)\mathcal{U}(t))(\\ ) &= -f'(0^+) + p[-f(0^+) + pF(p)] = p^2F(p) - pf(0^+) - f'(0^+).\end{aligned}$$

□

5.1 Résolution d'équations différentielles

Comme dit dans l'introduction du cours, la transformation de Laplace permet de ramener la résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants à la résolution d'équations affines (dont les solutions sont des fonctions rationnelles de p). Avant d'appliquer les transformées de Laplace pour la résolution d'équations différentielles, on va donner une méthode pour la recherche d'original de fonctions.

Définition 61.14

Original d'une fonction

Soit f une fonction causale qui admet comme transformée de Laplace F. On dit que f est l'*original* de F.

Proposition 61.15

Méthode de recherche d'original d'une fonction

Si la fonction est de la forme $\frac{A(p)}{B(p)}$, la méthode la plus utilisée est de décomposer la fraction rationnelles en éléments simples et ensuite on utilise les formules suivantes (f est l'original de F) :

1. On utilise la table 61.1 en reconnaissant $f(t)$ par $F(p)$.
2. On peut aussi utiliser les propriétés de la section précédente.

Exemples 61.16.

1. Soit à trouver l'original de la fonction

$$p \mapsto F(p) = \frac{2}{(p+1)(p+2)}.$$

$\frac{2}{(p+1)(p+2)}$ peut se décomposer sous la forme $\frac{a}{p+1} + \frac{b}{p+2}$.

$$\frac{a}{p+1} + \frac{b}{p+2} = \frac{(a+b)p + 2a + b}{(p+1)(p+2)}$$

d'où en identifiant avec l'expression de $F(p)$:

$$\begin{cases} a+b &= 0 \\ 2a+b &= 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \end{cases}.$$

D'où :

$$F(p) = \frac{2}{p+1} - \frac{2}{p+2}.$$

Si on note f son original, on obtient :

$$f(t) = 2\mathrm{e}^{-t}\mathcal{U}(t) - 2\mathrm{e}^{-2t}\mathcal{U}(t).$$

2. Soit à trouver l'original de

$$F(p) = \frac{p+1}{(p^2+2)(p+2)}.$$

$\frac{p+1}{(p^2+2)(p+2)}$ peut s'écrire sous la forme

$$\frac{ap+b}{p^2+2} + \frac{c}{p+2} = \frac{(a+c)p^2 + (2a+b)p + 2b + 2c}{(p^2+2)(p+2)}$$

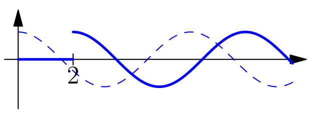
d'où

$$\begin{cases} a+c &= 0 \\ 2a+b &= 1 \\ 2b+2c &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{6} \\ b = \frac{2}{3} \\ c = -\frac{1}{6} \end{cases}.$$

Donc
$$F(p) = \frac{1}{6}\frac{p}{p^2+2} + \frac{2}{3}\frac{1}{p^2+2} - \frac{1}{6}\frac{1}{p+2}$$
que l'on peut écrire pour faire apparaître la forme $\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$:
$$F(p) = \frac{1}{6}\frac{p}{p^2+2} + \frac{2}{3\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{p^2+2} - \frac{1}{6}\frac{1}{p+2}.$$
Si on note $f(t)$ l'original de $F(p)$, on a :
$$f(t) = \left(\frac{1}{6}\cos\sqrt{2}t + \frac{\sqrt{2}}{3}\sin\sqrt{2}t - \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-2t}\right)\mathcal{U}(t).$$

3. Soit à chercher l'original de la fonction
$$F(p) = \frac{p}{p^2+4p+5}.$$
On va tout d'abord mettre sous forme canonique p^2+4p+5. On a : $p^2+4p+5 = (p+2)^2+1$, donc $F(p) = \frac{p}{(p+2)^2+1}$ soit en transformant en éléments simples
$$F(p) = \frac{p+2}{(p+2)^2+1} - \frac{2}{(p+2)^2+1}.$$
$\frac{p+2}{(p+2)^2+1}$ est de la forme $G(p+2)$ avec $G(p) = \frac{p}{p^2+1}$. On obtient donc :
$$g(t) = \cos(t)\mathcal{U}(t).$$
De même $\frac{1}{(p+2)^2+1}$ est de la forme $H(p+2)$ avec $H(p) = \frac{1}{p^2+1}$ et donc :
$$h(t) = \sin t\mathcal{U}(t).$$
Ainsi, on aboutit à :
$$f(t) = \cos t\mathrm{e}^{-2t}\mathcal{U}(t) - 2\sin(t)\mathrm{e}^{-2t}\mathcal{U}(t).$$

4. Soit à chercher l'original de :
$$F(p) = \frac{p}{p^2+1}\mathrm{e}^{-2p}.$$
$\frac{p}{p^2+1}$ est la transformée de Laplace de $\cos t\mathcal{U}(t)$. $F(p)$ est donc de la forme $H(p)\mathrm{e}^{-\tau p}$ avec $h(t) = \cos t\mathcal{U}(t)$ et $\tau = 2$. On obtient donc :
$$f(t) = \cos(t-2)\mathcal{U}(t-2).$$



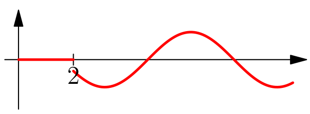


FIGURE 61.2 – Le graphe de la fonction $t \mapsto \cos(t-2)\mathcal{U}(t-2)$ et $t \mapsto \cos(t)\mathcal{U}(t-2)$. On dit que $t \mapsto \cos(t-2)\mathcal{U}(t-2)$ est « *en retard* » sur $\cos(t)\mathcal{U}(t)$ (en pointillé sur le graphe de gauche)

Exemple 61.17. On veut résoudre l'équation différentielle suivante :
$$\frac{1}{2}i''(t) + i'(t) + i(t) = (t+1)\mathcal{U}(t) \qquad (E)$$
où i est une fonction causale, continue et deux fois dérivables sur $]0\,,+\infty[$, vérifiant $i(0^+) = 1$ et $i'(0^+) = 0$. On va, tout d'abord, trouver la transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto f(t) = (t+1)\mathcal{U}(t)$. On par linéarité :
$$\mathcal{L}(t \mapsto f(t))(=)\mathcal{L}(t \mapsto (t+1)\mathcal{U}(t))(=)\mathcal{L}(t \mapsto t\mathcal{U}(t))(+)\mathcal{L}(t \mapsto \mathcal{U}(t))(=)\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}.$$

On va ensuite, à l'aide de la transformée de Laplace I de i, trouver celle de la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{2}i''(t) + i'(t) + i(t).$$

On pose $I(p) := \mathcal{L}(tt \mapsto i(t))()$. D'après les formules de dérivées, on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t \mapsto i'(t))() &= pI(p) - i(0^+) = pI(p) - 1,\\ \mathcal{L}(t \mapsto i''(t))() &= p^2 I(p) - pi(0^+) - i'(0^+) = p^2 I(p) - p.\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t \mapsto \tfrac{1}{2}i''(t) + i'(t) + i(t))() &= \frac{1}{2}\mathcal{L}(t \mapsto i''(t))(+)\mathcal{L}(t \mapsto i'(t))(+)\mathcal{L}(t \mapsto i(t))(\\ ) &= \frac{1}{2}I(p) + \frac{1}{2}p + pI(p) - 1 + I(p)\\ &= I(p)\left(1 + p + \frac{1}{p^2}\right) - \left(\frac{1}{2}p + 1\right).\end{aligned}$$

On va enfin calculer $I(p)$ en se servant de l'équation différentielle (E) :

$$\frac{1}{2}i''(t) + i'(t) + i(t) = (t+1)\mathcal{U}(t).$$

Comme $\mathcal{L}$ est un opérateur injectif (on l'admettra) :

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}(t \mapsto \frac{1}{2}i''(t) + i'(t) + i(t))(=)\mathcal{L}(t \mapsto (t+1)\mathcal{U}(t))(\\ ) \Leftrightarrow\ & I(p)\left(1 + p + \frac{1}{2}p^2\right) - \left(\frac{1}{2}p + 1\right) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}\\ \Leftrightarrow\ & I(p)\left(1 + p + \frac{1}{2}p^2\right) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p} + \frac{1}{2}p + 1 \qquad (61.1)\end{aligned}$$

Dans le membre de droite, on met sous même dénominateur de la forme p^2.

$$\begin{aligned}(61.1) \Leftrightarrow I(p)\left(1 + p + \frac{1}{2}p^2\right) &= \frac{1}{p^2} + \frac{p}{p^2} + \frac{1}{2}\frac{p^3}{p^2} + 1\frac{p^2}{p^2}\\ \Leftrightarrow I(p)\left(1 + p + \frac{1}{2}p^2\right) &= \frac{1}{p^2}\left(1 + p + \frac{p^3}{2} + p^2\right) \qquad (61.2)\end{aligned}$$

On peut maintenant exprimer $I(p)$ en fonction de p :

$$\begin{aligned}(61.2) \Leftrightarrow I(p) &= \frac{1}{\frac{2+2p+p^2}{2}}\frac{1}{p^2}\left(1 + p + p^2 + \frac{p^3}{2}\right)\\ &= \left(\frac{2}{2+2p+p^2}\right)\frac{1}{p^2}\left(\frac{2+2p+2p^2+p^3}{2}\right)\\ &= \frac{1}{p^2(p^2+2p+2)}(2+2p+2p^2+p^3)\end{aligned}$$

En faisant la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{2+2p+2p^2+p^3}{p^2(p^2+2p+2)}$, on observe que :

$$\frac{2+2p+2p^2+p^3}{p^2(p^2+2p+2)} = \frac{1}{p^2} + \frac{p+1}{p^2+2p+2}.$$

On a alors :

$$I(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{p+1}{p^2+2p+2}.$$

Enfin, on calcule l'expression de $i(t)$ grâce à l'expression de $I(p)$, cela revient à trouver l'original de la fonction $I(p)$:

$$I(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{p+1}{p^2+2p+2}$$

donc

$$i(t) = t\mathcal{U}(t) + \cos t\mathrm{e}^{-t}\mathcal{U}(t) = (t + \cos t\mathrm{e}^{-t})\mathcal{U}(t).$$

Exemple 61.18. Soit à résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = 3x + 2y \\ y' = x + 2y \end{cases} \tag{S}$$

avec conditions initiales $x(0) = 3$ et $y(0) = 0$. On supposera que les fonctions x et y du système sur $[0, +\infty[$ sont prolongées par la fonction nulle sur $]-\infty, 0[$, elles deviennent ainsi des fonctions causales que l'on note toujours x et y. On suppose que les fonctions x et y admettent respectivement les transformées de Laplace X et Y.

On va tout d'abord calculer $X(p)$ et $Y(p)$. On aura

$$\begin{cases} pX(p) - 3 = 3X(p) + 2Y(p) \\ pY(p) = X(p) + 2Y(p) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X(p)(p-3) - 2Y(p) = 3 \\ X(p) + (2-p)Y(p) = 0 \end{cases}.$$

On résout par substitution :

$$\begin{cases} X(p) = (p-2)Y(p) \\ (p-2)(p-3)Y(p) - 2Y(p) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X(p) = (p-2)Y(p) \\ Y(p) = \frac{3}{(p-2)(p-3)-2} \end{cases}.$$

D'où :

$$Y(p) = \frac{3}{p^2 - 5p + 4} = \frac{3}{(p-1)(p-4)}$$

et

$$X(p) = \frac{3(p-2)}{(p-1)(p-4)}.$$

On va enfin trouver $x(t)$ et $y(t)$ par recherche des originaux de $X(p)$ et $Y(p)$. On décompose en éléments simplex :

$$\frac{a}{p-1} + \frac{b}{p-4} = \frac{p(a+b) - 4a - b}{(p-1)(p-4)}.$$

En identifiant avec l'expression de $X(p)$, on obtient

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ -4a - b = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

et

$$X(p) = \frac{1}{p-1} + \frac{2}{p-4}.$$

En identifiant avec l'expression de $Y(p)$, on obtient :

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ -4a - b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$$

et

$$Y(p) = \frac{-1}{p-1} + \frac{1}{p-4}.$$

De ces résultats, on peut tirer $x(t)$ et $y(t)$:

$$x(t) = (\mathrm{e}^t + 2\mathrm{e}^{4t})\mathcal{U}(t) \quad \text{et} \quad y(t) = (-\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{4t})\mathcal{U}(t).$$

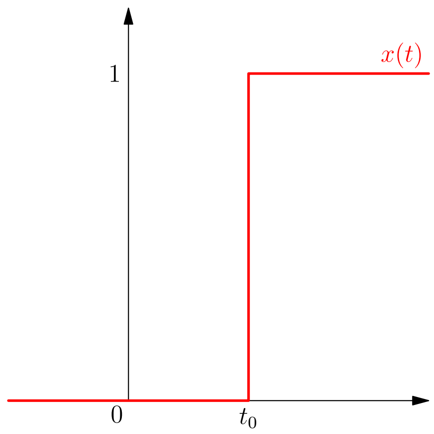


FIGURE 61.3 – Exemple de signal

5 3 Application en physique, théorie du signal

Avant d'introduire un dernier exemple qui est une application physique de la transformée de Laplace, on a besoin de quelques concepts de base de la théorie des signaux.

Définition 61.19

Signal

On appelle *signal*, une grandeur physique contenant de l'information et évoluant généralement dans le temps.

Mathématiquement, un signal peut être représenté par une fonction du temps, $x(t)$ à valeurs réels ou complexes (voir figure 61.3).

Exemples 61.20.

- Un courant circulant dans une branche d'un circuit électrique.
- La position ou vitesse d'un mobile au cours du temps.

Définition 61.21

Système physique

On appelle *système physique*, un dispositif physique qui fournit des signaux de sortie à partir de signaux d'entrée.

Le système physique à une entrée et une sortie (qu'on appelle aussi *système « entrée-sortie »* peut être représenté par le schéma figure 61.4.

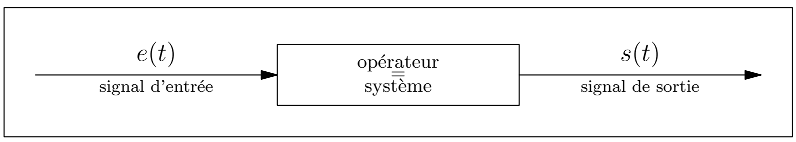


FIGURE 61.4 – Système « entrée sortie »

Exemples 61.22.

- Un circuit électrique transforme un courant ou une tension en un autre courant ou une autre tension, les grandeurs d'entrée et de sortie peuvent être différentes.
- Un haut-parleur est un système dit électro-acoustique transformant une tension électrique d'entrée en un signal acoustique.

Exemple 61.23. Système « entrée-sortie » ; fonction de transfert

Soit un système « entrée-sortie » où le signal d'entrée $t \mapsto e(t)$ et le signal de sortie $t \mapsto s(t)$ sont des fonctions causales. On suppose que les fonctions e et s admettent des transformées de Laplace E et S. On définit la fonction de transfert H du système par $S(p) = H(p)E(p)$ (représentant le rapport entre la transformée de Laplace de la fonction de sortie et celle d'entrée). Ici, on supposera que $H(p) = \frac{1}{1+2p}$. La fonction e est définie par $t\mathcal{U}(t)$. On va définir $S(p)$. On fait la transformée de Laplace de e.

$$\mathcal{L}(e)(=)E(p) = \frac{1}{p^2}.$$

On en déduit donc que

$$S(p) = \frac{1}{1+2p}\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2(1+2p)}.$$

On décompose $\frac{1}{p^2(1+2p)}$ en éléments simples. Pour cela, on cherche des constantes A, B et C tels que pour tout $p \geq 0$,

$$\frac{1}{p^2(1+2p)} = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{C}{2p+1}.$$

On a :

$$\begin{aligned}\frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{C}{2p+1} &= \frac{A(2p+1) + Bp(2p+1) + Cp^2}{p^2(2p+1)} \\ &= \frac{p^2(2B+C) + p(2A+B) + A}{p^2(2p+1)}.\end{aligned}$$

Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} 2B+C &= 0 \\ 2A+B &= 0 \\ A &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -2 \\ C = 4 \end{cases}.$$

Donc

$$S(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{2}{p} + \frac{4}{2p+1}.$$

Maintenant, on peut en déduire $s(t)$ par recherche d'originaux :

$$S(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{2}{p} + \frac{4}{2(p+\frac{1}{2})} = \frac{1}{p^2} - \frac{2}{p} + 2\frac{1}{p+\frac{1}{2}}.$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}S(t) &= t\mathcal{U}(t) - 2\mathcal{U}(t) + 2\mathrm{e}^{-t/2}\mathcal{U}(t) \\ &= (t - 2 + 2\mathrm{e}^{-t/2})\mathcal{U}(t).\end{aligned}$$

LEÇON

62

Courbes de Bézier

Niveau : BTS
Prérequis : aucun

1 Barycentres

Définition 62.1

Barycentre de deux points pondérés

Soient A et B des points du plan. Soient α et β des nombres réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$. Le *barycentre* des points pondérés (A, α), (B, β) est l'unique point G du plan défini par l'égalité :

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}.$$

Développement

L'ensemble des points M du plan tels que :

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \vec{0}$$

est :

$$\begin{aligned}\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \vec{0} &\Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{MA} + \beta(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}\\ &\Leftrightarrow (\alpha+\beta)\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

Cette dernière égalité définit un unique point M dans le plan. On remarquera que le barycentre G de (A, α), (B, β) appartient, lorsque $A \neq B$ à la droite (AB), puisque les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

Définition 62.2

Barycentre dans le cas général

Soit n un nombre entier naturel ≥ 2. Soient, $A_1, A_2, \dots, A_n$ des points du plan et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des nombres réels tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$. Le *barycentre* des points pondérés (A_1, λ_1), (A_2, λ_2), …, (A_n, λ_n) est l'unique point G du plan défini par l'égalité :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i\overrightarrow{GA_i} = \vec{0}.$$

Développement

On peut montrer, en utilisant la relation de Chasles, que :

$$\overrightarrow{A_1G} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}\sum_{i=2}^n \lambda_i\overrightarrow{A_1A_i},$$

ce qui permet d'obtenir à la fois l'existence et l'unicité.

Définition 62.3

Isobarycentre

On dit que G est *l'isobarycentre* des points $A_1, A_2, \dots, A_n$ lrosque G est le barycentre de :

$$(A_1, 1), (A_2, 1), \dots, (A_n, 1).$$

2 Polynôme de Bernstein

Définition 62.4

Polynômes de Bernstein

Les *polynômes de Bernstein* sont définis par les formules suivantes :

$$B_{i,n}(t) = \mathrm{C}_n^i t^i (1-t)^{n-i}, \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{N}, i \leq n.$$

Développement

Rappel : coefficient binomial

Le coefficient

$$\mathrm{C}_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

est appelé *coefficient binomial*.

Théorème 62.5

Soit n un nombre entier naturel. Pour tout t dans $[0,1]$:

$$\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t) = 1.$$

Développement

On a :

$$\sum_{i=0}^{n} B_{k,n}(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{C}_n^k t^i (1-t)^{n-i} = (t+1-t)^n = 1$$

d'après la formule du binôme de Newton.

Propriété 62.6

On peut montrer par récurrence que :

$$B_{0,n} = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \geq 1,\ B_{i,n}(0) = 0,$$

ainsi que :

$$B_{i,n}(1) = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \leq n-1,\ B_{i,n}(1) = 0.$$

Théorème 62.7

Pour tout entier naturel n :

$$B'_{0,n}(0) = -n \quad \text{et} \quad B'_{n,n}(1) = n.$$

Pour tout $n \geq 1$:

$$B'_{1,n}(0) = n \quad \text{et} \quad B'_{n-1,n}(1) = -n.$$

Pour tout $n \geq 4$ et pour tout i vérifiant $2 \leq i \leq n-2$:

$$B'_{i,n}(0) = B'_{i,n}(1) = 0.$$

3 Courbes de Bézier

3.1 La naissance des courbes de Bézier

Développement

La naissance des courbes de Bézier

Dans les années 60, les ingénieurs Pierre BÉZIER et Paul DE CASTELJAU travaillant respectivement chez Renault et Citroën, réfléchissent au moyen de définir de manière la plus concise possible la forme d'une carroserie.

Le principe a été énoncé par BÉZIER mais l'algorithme de construction, lui, a été énoncé par son collègue de la marque aux chevrons qui n'a d'ailleurs été dévoilé que bien plus tard, la loi du secret industriel ayant primé sur le développement scientifique…

Pour la petite histoire, alors que Pierre BÉZIER (diplômé de l'ENSAM et de SUPÉLEC), à l'origine des premières machines à commandes numériques det de la CAO a été mise à l'écart par sa direction. Il se consacra alors presque exclusivement aux mathématiques et à la modélisation des surfaces et obtint même un doctorat en 1977.

Paul DE CASTELJAU était lui aussi un mathématicien d'origine, ainci élève de la Rue d'ULM, a été un temps employé par l'industrie automobile.

FIGURE 62.1 – Pierre BÉZIER & Paul DE CASTELJAU

Aujourd'hui, les courbes de Bézier (courbe paramétrique aux extremités imposées avec des points de contrôle qui définissent les tangentes à cette courbes à des instants donnés) sont très utilisées en informatique.

3 2 Définition et propriétés des courbes de Bézier

Définition 62.8

Courbe de Bézier

Soient $P_0, P_1, \dots, P_n$ des points du plan $\mathcal{P}$. Soient $B_{0,n}, B_{1,n}, \dots, B_{n,n}$ les $n+1$ polynômes de Bernstein de degré n. On appelle *courbe de Bézier* pilotée par les points $P_0, P_1, \dots, P_n$, la courbe Γ décrite par les points $M(t)$, barycentres [a] des points pondérés :

$$(P_0, B_{0,n}(t)), (P_1, B_{1,n}(t)), \dots, (P_n, B_{n,n}(t))$$

avec $t \in [0,1]$. En d'autres termes :

$$\Gamma = \left\{ M(t) \in \mathcal{P},\ \exists t \in [0,1],\ \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t)\overrightarrow{M(t)P_i} = \vec{0} \right\}.$$

a. Ces barycentres sont bien définis puisque la somme des coefficients vaut 1 pour tout t dans $[0,1]$.

Définition 62.9

Points de contrôle

Les points $P_0, \dots, P_n$ de la définition 62.8 sont les *points de contrôle* de la courbe de Bézier.

Théorème 62.10

Soit O un point quelconque de $\mathcal{P}$. Alors, pour tout t dans $[0,1]$:

$$\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t)\overrightarrow{M(t)P_i} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t)\overrightarrow{OP_i}.$$

Développement

Démonstration. Il suffit d'introduire par relation de Chasles, le point O dans chaque vecteur de l'égalité de gauche, et d'utiliser le fait que $\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t) = 1$, pour obtenir l'égalité de droite. □

Ce théorème souligne qu'une courbe de Bézier est une courbe paramétrée, puisque le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, l'égalité de droite correspond à celle de la définition d'une courbe paramétrée.

Les résultats obtenus dans la session précédente permettent d'établir les propriétés suivantes des courbes de Bézier :

Théorème 62.11

On suppose que $n \geq 2$ et que les points $P_0, P_1, \ldots, P_n$ ne sont pas tous confondus. Avec les notations de la définition 62.8, on a :

a. $M(0) = P_0$ et $M(1) = P_n$;

b. soit k le plus petit des nombrs entiers i tels que $P_0 \neq P_i$, alors $\overrightarrow{P_0P_k}$ dirige la tangente à Γ en P_0 ;

c. soit p le plus grand des nombres entiers i tels que $P_n \neq P_i$, alors $\overrightarrow{P_pP_n}$, dirige la tangente à Γ en P_n.

3 3 À quoi ressemble une courbe de Bézier ?

La figure 62.2 nous donne des exemples de courbes de Bézier pilotées par quatre points : A, B, C et D.

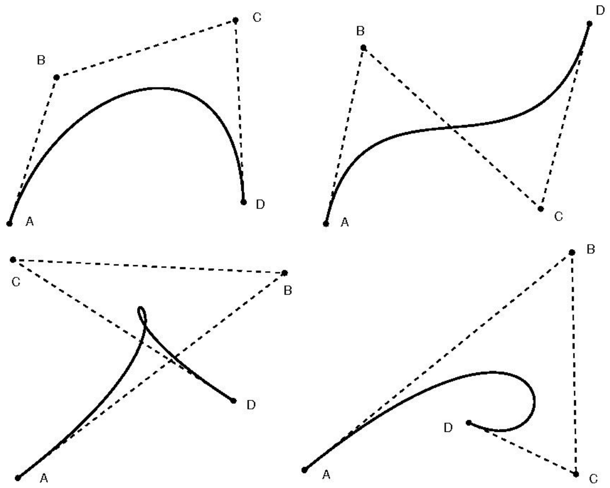


FIGURE 62.2 – Exemple de courbes de Bézier pilotées par quatre points

Les points de contrôle, hormis le premier point et le dernier point, ne sont, en général, pas des points de la courbe de Bézier.

3 4 Construction par barycentres successifs

Théorème 62.12

Soient P_0, P_1, …, P_n des points du plan. On suppose $n \geq 1$. Pour tout t dans $[0,1]$, on note $P(t)$ le barycentre de

$$(P_0, B_{0,n-1}(t)), \ldots, (P_{n-1}, B_{n-1,n-1}(t))$$

et on note $Q(t)$ le barycentre de

$$(P_1, B_{0,n-1}(t)), \ldots, (P_n, B_{n-1,n-1}(t)).$$

Les points $P(t)$ et $Q(t)$ parcourent les courbes de Bézier pilotées respectivement par P_0, …, P_{n-1} et $P_1, \ldots, P_n$ quand t parcourt $[0,1]$. Alors, pour tout t dans $[0,1]$, le point $M(t)$, barycentre de $(P(t), 1-t)$ et $(Q(t), t)$ est aussi le barycentre de

$$(P_0, B_{0,n}(t)), \ldots, (P_n, B_{n,n}(t));$$

autrement dit : le barycentre $M(t)$ de $(P(t), 1-t)$, $(Q(t), t)$ parcourt la courbe de Bézier Γ pilotée par les points $P_0, \ldots, P_n$ quand t parcourt $[0,1]$.

Développement

Démonstration. Comme $M(t)$ est le barycentre de $(P(t), 1-t)$, $(Q(t), t)$, on a :

$$(1-t)\overrightarrow{M(t)P(t)} + t\overrightarrow{M(t)Q(t)} = \vec{0}.$$

On en déduit :

$$\overrightarrow{OM(t)} = (1-t)\overrightarrow{OP(t)} + t\overrightarrow{OQ(t)}.$$

Dans cette dernière égalité, utilisons le fait que les points $P(t)$ et $Q(t)$ sont des points courants de courbes de Bézier. On obtient :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM(t)} &= (1-t)\sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t)\overrightarrow{OP_i} + \sum_{j=0}^{n-1} B_{j,n-1}(t)\overrightarrow{OP_{j+1}} \\
&= (1-t)\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}(1-t)^{n-1-k}\overrightarrow{OP_i} + t\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!}t^{k-1}(1-t)^{n-1-(k-1)}\overrightarrow{OP_k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{C}_{n-1}^{k} t^k (1-t)^{n-k}\overrightarrow{OP_k} + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_{n-1}^{k-1} t^k (1-t)^{n-k}\overrightarrow{OP_k} \\
&= (1-t)^n\overrightarrow{OP_0} + \left(\sum_{k=1}^{n-1} [\mathrm{C}_{n-1}^{k} + \mathrm{C}_{n-1}^{k-1}] t^k (1-t)^{n-k}\overrightarrow{OP_k}\right) + t^n\overrightarrow{OP_n}.
\end{aligned}$$

Comme $\mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_{n-1}^{k} + \mathrm{C}_{n-1}^{k-1}$, on en déduit le théorème la dernière expression obtenue pour $\overrightarrow{OM(t)}$. □

Le théorème 62.12 permet de fabriquer de proche en proche, pour chaque valeur t dans $[0,1]$, le point correspondant de la courbe de Bézier pilotée par P_0, P_1, ..., P_n. Par exemple, pour $t = 1/2$, on obtient la figure 62.3.

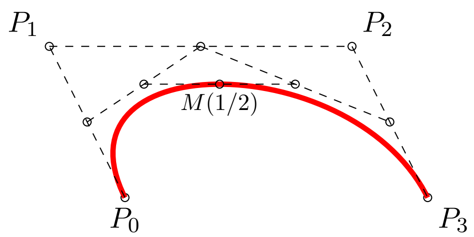


FIGURE 62.3 – Construction de la courbe de Bézier par barycentres successifs

En effet, lorsque $t = 1/2$, $1-t = 1/2$, et les barycentres successifs correspondent aux miliuex. On remarque sur ce dessin que la tangente à la courbe de Bézier au point $M(1/2)$ est $(P(1/2)Q(1/2))$. Ce phénomène n'est pas dû au hasard et résulte du théorème suivant :

Théorème 62.13

Avec les notations du théorème précédent, on a :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{OM(t)} = n\overrightarrow{P(t)Q(t)}.$$

Donc, pour tout t dans $[0,1]$ tel que $P(t) \neq Q(t)$, la droite $(P(t)Q(t))$ est tangente à la courbe de Bézier Γ au point $M(t)$.

Développement

Démonstration. En écrivant $\overrightarrow{OM(t)} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k t^k (1-t)^{n-k}\overrightarrow{OP_k}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{OM(t)} &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k (kt^{k-1}(1-t)^{n-k} - (n-k)t^k(1-t)^{n-1-k})\overrightarrow{OP_k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\mathrm{C}_n^k t^{k-1}(1-t)^{n-k}\overrightarrow{OP_k}t - \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)\mathrm{C}_n^k t^k (1-t)^{n-1-k}\overrightarrow{OP_k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n\mathrm{C}_{n-1}^{k-1} t^{k-1}(1-t)^{n-1-(k-1)}\overrightarrow{OP_k} - \sum_{k=0}^{n-1} n\mathrm{C}_{n-1}^{k} t^k (1-t)^{n-1-k}\overrightarrow{OP_k} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} n\mathrm{C}_{n-1}^{j} t^j (1-t)^{n-1-j}\overrightarrow{OP_{j+1}} - \sum_{k=0}^{n-1} n\mathrm{C}_{n-1}^{k} t^k (1-t)^{n-1-k}\overrightarrow{OP_k} \\
&= n\overrightarrow{OQ(t)} - n\overrightarrow{OP(t)} = n\overrightarrow{P(t)Q(t)}.
\end{aligned}$$

4 Construction d'une courbe de Bézier sur GeoGebra

On veut construire sur GeoGebra la courbe de Bézier pilotée, par exemple, par quatre points : A, B, C et D.

a. Tout d'abord, on place les points A, B, C et D sur le repère avec l'outil « *Nouveau point* ».

b. Ensuite, on crée un curseur de variable t qui prend les valeurs de 0 à 1 par incrément de ε (où $0 < \varepsilon < 1$).

c. On tape les coordonnées du point M qui va nous décrire la courbe de Bézier pilotée par les points A, B, C et D :

```
((1 - t)^3*x(A) + 3*(1 - t)^2*t*x(B) + 3*(1 - t)*t^2*x(C)
      + t^3*x(D), (1- t)^3*y(A) + 3*(1 - t)^2*t*y(B)
                        + 3*(1 - t)*t^2*y(C) + t^3*y(D))
```

d. On peut faire bouger le curseur t pour voir comment se déplace M dans l'enveloppe convexe décrite par les points A, B, C et D.

e. En cliquant droit sur le point M, on peut activer l'option « *Trace activée* » pour obtenir une courbe qui est, donc, la courbe de Bézier pilotée par les points A, B, C et D. En cliquant droit sur le curseur t, on peut activer l'option « *Animer* » pour que le point M bouge automatiquement.

f. Plus ε est petit, plus le tracé est « continu ».

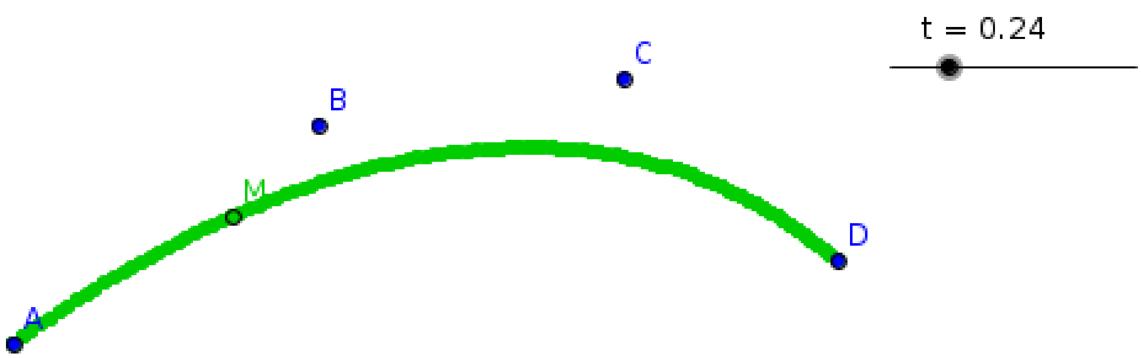


FIGURE 62.4 – Exemple d'une courbe de Bézier pilotée par quatre points construite sous GeoGebra

Exercices d'entrainement

1 Calculer et représenter la courbe de Bézier dont les points de contrôle sont les suivants :

1. $P_0(-1,0)$, $P_1(0,1)$ et $P_2(1,0)$.
2. $P_0(-1,0)$, $P_1(0,3)$ et $P_2(1,0)$.
3. $P_0(0,0)$, $P_1(2,1)$ et $P_3(0,1)$.

2 Soit le plan rapporté à un repère orthogonal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, les unités étant $\|\vec{\imath}\| = 2$ cm et $\|\vec{\jmath}\| = 1$ cm. On considère les points

$$A_0 = O(0,0),\ A_1 = (0,-4),\ A_2(1,1) \quad \text{et} \quad A_3(2,5).$$

1. Montrer que la représentation paramétrique de la courbe de Bézier associée aux points A_0, A_1, A_2, A_3 est :

$$\begin{cases} x(t) = -t^3 + 3t^2 \\ y(t) = -10t^3 + 27t^2 - 12t \end{cases}, \quad t \in [0,1].$$

2. **a.** Déterminer les variations des fonctions x et y. On dressera le tableau de variations conjointes de x et y. Les calculs seront données à 10^{-1} près.

   b. Préciser les points où la courbe admet une tangente parallèle à l'un des axes de coordonnées.

   c. Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point A_3.
3. Déterminer, à 10^{-1} près, l'abscisse du point d'intersection, autre que O, de la courbe de Bézier, avec l'axe des abscisses.
4. Tracer dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ la courbe de Bézier ainsi étudiée.

3 Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On prendra pour unité graphique deux centimètres.

On considère dans ce repère les points $A(4,10)$, $B(2,5)$, $M(3,10)$ et $N(2,9)$.

L'objectif du problème est de relier les points O et A à l'aide de deux courbes de Bézier $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ qui se raccordent en B.

- $\mathcal{C}_1$ est la courbe de Bézier définie à partir des points de contrôle A, M, N et B.
- $\mathcal{C}_2$ est une coubre de Bézier reliant O et B, ayant en B une tangente parallèle à l'axe des ordonnées et en O une tangente qui a pour équation $y = x$.

1. **a.** Justifier que la tangente en A à la courbe $\mathcal{C}_1$ est parallèle à l'axe des abscisses.

   b. Justifier que les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ qui satisfont aux conditions données admettent la même tangente en B.

2. **Tracé de $\mathcal{C}_1$**

   a. On considère la courbe définie paramétriquement pour t dans $[0,1]$ par :

$$\begin{cases} x(t) = t^3 - 3t + 4 \\ y(t) = -2t^3 - 3t^2 + 10 \end{cases}$$

   Étudier les variations des deux fonctions définies sur $[0,1]$ par $x(t)$ et $y(t)$.

   b. Montrer que la courbe ainsi définie passe par les points A et B et préciser les tangentes en ces points.

   On admettera (on ne demande pas de faire les calculs) que la courbe considérée est la courbe de Bézier associée aux points de contrôle A, M, N, B.

   c. Tracer $\mathcal{C}_1$. La représentation graphique sera la plus précise possible.

3. **Tracé de $\mathcal{C}_2$**

   $\mathcal{C}_2$ satisfait aux conditions données en introduction et définie par trois points de contrôle O, T et B.

   a. Caractériser géométriquement le point T. Déterminer les coordonnées de ce point.

   b. Construire géométriquement les points M_1 et M_2 de $\mathcal{C}_2$ qui correspondent aux valeurs $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$ du paramètre.

   c. Donner l'allure de $\mathcal{C}_2$.

4 n étant un entier et i un entier inférieur ou égal à n, on appelle fonctions polynômes de Bernstein de degré n, les fonctions $\mathcal{B}_{i,n}$ définies sur $[0,1]$ par :

$$\mathcal{B}_{i,n} = \mathrm{C}_n^i t^i (1-t)^{n-i}$$

où C_n^i désigne le coefficient binomial $\frac{n!}{i!(n-i)!}$.

1. **a.** Donner les expressions $\mathcal{B}_{i,n}(t)$ lorsque $n = 4$ sous forme de produit de polynômes du premier degré, puis sous forme développée et ordonnée.

   b. Résoudre chacune des équations $\mathcal{B}_{i,4}(t) = 0$ pour $0 \leq i \leq 4$.
2. Dans le plan rapport à un repère orthonormal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère les points de contrôle :

$$P_0(3,0),\ P_1(0,1),\ P_2(-1,0),\ P_3(0,-1) \quad \text{et} \quad P_4(3,0)$$

   et la courbe $\mathcal{C}$, l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que :

$$\overrightarrow{OM(t)}(t) = \sum_{i=0}^{i=4} \mathcal{B}_{i,4}(t)\overrightarrow{OP_i},$$

   t étant une variable réelle de l'intervalle $[0,1]$.
   On prendra une unité graphique de 3 cm sur chaque axe pour le tracé.

a. Soit les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0,1]$ par :

$$\begin{cases} f(t) = 12t^2 - 12t + 3 \\ g(t) = 8t^3 - 12t^2 + 4t \end{cases}.$$

Vérifier qu'une représentation paramétrique de $\mathcal{C}$ est :

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}.$$

b. Étudier les variations des fonctions f et g pour t appartenant à l'intervalle $[0,1]$, et résumer les études des fonctions f et g dans un tableau commun.

c. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{P_0P_1}$ et $\overrightarrow{P_3P_4}$ sont des vecteurs directeurs des tangentes à la courbe $\mathcal{C}$ respectivement aux points de la courbe $\mathcal{C}$ correspondant aux valeurs 0 et 1 du paramètre t.

3. Construire la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On précisera les points où la tangente est parallèle à un axe de repère.

5 Courbe de Bézier et équations différentielles

Le plan est muni d'un repère orthonormé. On prendra pour unité graphique 4 cm. La figure sera complétée au fur et à mesure des questions posées.

L'équation différentielle :

$$y' + \frac{1}{5-x}y = \frac{5-x}{2\sqrt{x}}$$

admet pour solution sur l'intervalle $[0,5;4,5]$ une fonction f qui vérifie $f(1) = 4$ et $f(4) = 2$. *On ne demande pas de justifier.*

PARTIE I

1. En utilisant l'équation différentielle, calculer $f'(1)$ et $f'(4)$.

Montrer que les tangentes à la courbe représentative de f aux points A d'abscisse 1 et B d'abscisse 4 ont pour équations respectives :

$$y = x + 3 \quad \text{et} \quad y = -\frac{7}{4}x + 9.$$

Placer les points A et B et tracer les tangentes correspondantes.

2. On veut approximer l'arc de courbe (γ) de la courbe représentative de f dont les abscisses sont comprise entre 1 et 4 par une courbe de Bézier ayant en A et B les mêmes tangentes que la courbe (γ).

a. La courbe de Bézier est définie par trois points de contrôle A, C et B.

Construire le point C sur la figure.

Déterminer par le calcul les coordonnées exactes du point de contrôle C.

b. On décide de définir la courbe de Bézier par 4 points de contrôle $A(1,4)$, $M_1(2,5)$, $M_2(3,\alpha)$, $B(4,2)$.

Démontrer que les points A, M_1 et C sont alignés.

Déterminer α pour que la droite (M_2B) soit tangente à la courbe (γ) en B.

PARTIE II

Pour des raisons techniques, on modifie un point de contrôle et on choisit les quatre points de contrôle suivants :

$$A_0(1,4),\ A_1(2,5),\ A_2 = \left(3, \tfrac{7}{2}\right) \quad \text{et} \quad A_3(4,2).$$

La courbe de Bézier (Γ) associée est formée des points $M(t)$ définis pour t dans $[0,1]$ par :

$$\overrightarrow{OM(t)} = \sum_{k=0}^{3} \mathrm{C}_3^k t^k (1-t)^{3-k} \overrightarrow{OA_k}.$$

On admet que les coordonnées $(x(t), y(t))$ d'un point $M(t)$ de la courbe (Γ) sont :

$$\begin{cases} x(t) = 3t + 1 \\ y(t) = \frac{5}{2}t^3 - \frac{15}{2}t^2 + 3t + 4 \end{cases}$$

On ne demande pas de faire les calculs.

1. Calculer $x'(t)$ et $y'(t)$ pour t dans $[0,1]$.

2. Calculer les coordonnées du point E de la courbe (Γ) correspondant à la valeur $\frac{1}{2}$ du paramètre et le coefficient directeur de la tangente à la courbe (Γ) en ce point.

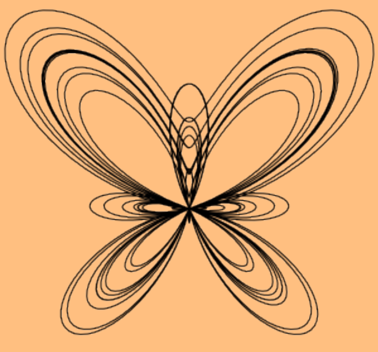
3. Déterminer les coordonnées du point F de la courbe (Γ) où la tangente a pour coefficient directeur 0,1. Placer le point F et la tangente à (Γ) en F sur la figure.

4. Donner l'allure de la courbe (Γ) approximant l'arc de courbe (γ).

LEÇON

63

Exemples d'études de courbes



Niveau : Terminale S et BTS
Prérequis : Étude d'une fonction, dérivées, limites, courbes paramètrées, courbe de Bézier

1 Etude d'une fonction

Exemple 63.1. La partie I est l'étude d'une fonction auxiliaire g nécessaire à l'étude de la fonction f définie sur $]0\,,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\ln x}{x}.$$

L'étude de la fonction f fait l'objet de la partie II. La partie III est l'étude de deux suites numériques associées.

Partie I On considère la fonction numérique g définie sur $]0\,,+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - 2\ln x.$$

1. Etudier le sens de variation de g.
2. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0\,,+\infty[$.

Partie II On considère la fonction numérique f définie sur $]0\,,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\ln x}{x}.$$

On appelle $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique 2 cm)

1. Déterminer la limite f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
2. (a) Déterminer la limite f en $+\infty$.
   (b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = \frac{x}{2}$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$.
   (c) Déterminer la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (Δ) sur $]0\,,+\infty[$. Montrer en particulier que (Δ) coupe $(\mathcal{C})$ en un point A que l'on déterminera.
3. Etudier le sens de variation de f. Dresser le tableau de variation de f.
4. Montrer qu'il existe un point B, et un seul, de la courbe $(\mathcal{C})$ où la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ est parallèle à (Δ). Préciser les coordonnées de B.
5. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α. Justifier l'encadrement :
$$0{,}34 < \alpha < 0{,}35.$$
6. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites (Δ) et (T).

Partie III On considère la suite numérique (x_n) définie par $x_n = \mathrm{e}^{(n-2)/2}$ pour tout nombre entier naturel n.

1. (a) Montrer que (x_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.
   (b) Montrer que (x_n) est une suite croissante.
2. Pour tout entier naturel n, on pose :
$$a_n = 4\int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(f(x) - \frac{x}{2}\right) \mathrm{d}x.$$
   (a) Donner une interprétation géométrique de a_n.
   (b) Montrer que $a_n = \frac{2n+1}{2}$ pour tout nombre entier naturel n. En déduire que (a_n) est une suite arithmétique.

Développement

Solution.

Partie I g est la fonction numérique définie sur $]0\,,+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - 2\ln x.$$

1. g est dérivable sur $]0\,,+\infty[$ et on a :

$$g'(x) = 2x - 2\times\frac{1}{x} = 2\left(x - \frac{1}{x}\right) = \frac{2(x^2-1)}{x} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}.$$

Comme $x \in\,]0\,,+\infty[$, on a $x > 0$ et $x+1 > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $(x-1)$. On en déduit que $g'(x) < 0$ pour $x \in\,]0\,,1[$ et $g'(x) > 0$ pour $x]1\,,+\infty[$. Donc : g est décroissante sur $]0\,,1[$ et croissante sur $]1\,,+\infty[$;

2. On a $g(1) = 1^2 - 2\ln 1 = 1$. D'après le sens de variation de g, on a alors $g(x) \geq 1$ pour tout $x > 0$. Donc $g(x) > 0$ pour tout $x \in\,]0\,,+\infty[$.

Partie II f est la fonction numérique définie sur $]0\,,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\ln x}{x}.$$

$(\mathcal{C})$ est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique 2 cm).

1. On peut écrire

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\ln x}{x} = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}(1+\ln x).$$

On sait que

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to 0^+} 1+\ln x = -\infty,$$

d'autre part

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}(1+\ln x) = -\infty.$$

De plus $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{2} = 0$ et par conséquent :

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{2} + \frac{1}{x}(1+\ln x) = -\infty.$$

On peut en déduire que la courbe $(\mathcal{C})$ a pour asymptote verticale la droite d'équation $x = 0$ (Axe Oy).

2. (a) On peut écrire :

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}.$$

On sait que :

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0\,;\ \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{2} = +\infty.$$

Donc

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{2} + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} = +\infty.$$

(b) On a

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) - \frac{x}{2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Donc : la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = \frac{x}{2}$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$.

(c) On a

$$f(x) - \frac{x}{2} = \frac{1+\ln x}{x}.$$

Donc :

$$f(x) = \frac{x}{2} \Leftrightarrow 1+\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{-1}.$$

Donc : $(\mathcal{D})$ coupe $(\mathcal{C})$ au point A d'abscisses e^{-1} et d'ordonnée $\frac{\mathrm{e}^{-1}}{2}$. $x \in\,]0\,,+\infty[$ donc $f(x) - \frac{x}{2}$ est du signe $1+\ln x$. La fonction $\ln$ étant strictement croissante, on a alors :

$$1+\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow x > \mathrm{e}^{-1}$$

et

$$1+\ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x < -1 \Leftrightarrow x < \mathrm{e}^{-1}.$$

On en déduit que $f(x) > \frac{x}{2}$ pour $x > \mathrm{e}^{-1}$ et $f(x) < \frac{x}{2}$ pour $x < \mathrm{e}^{-1}$. Sur $]0\,,\mathrm{e}^{-1}[$, $(\mathcal{C})$ est au-dessous de $(\mathcal{D})$ et sur $]\mathrm{e}^{-1}\,,+\infty[$, $(\mathcal{C})$ est au-dessus de $(\mathcal{D})$.

3. Pour tout $x \in]0\,,+\infty[$, on a
$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\ln x}{x}.$$
f est donc la somme et le quotient de fonctions dérivables sur $]0\,,+\infty[$ donc f est dérivable sur $]0\,,+\infty[$ et on a :
$$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{x}x - (1+\ln x)\times 1}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{1-1-\ln x}{x^2} = \frac{1}{2} - \frac{\ln x}{x^2} = \frac{x^2 - 2\ln x}{2x^2}.$$
Donc $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$. D'après la partie I, on sait que $g(x) > 0$ pour tout $x \in]0\,,+\infty[$ donc $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]0\,,+\infty[$. On en déduit que f est strictement croissante sur $]0\,,+\infty[$. On peut donner le tableau de variations de f :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	
f	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4. La tangente $(\mathcal{T})$ à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisses b a pour coefficient directeur $f'(b)$. Cette tangente est parallèle à $(\mathcal{D})$ si et seulement si elle a le même coefficient que $(\mathcal{D})$.
$$f(b) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{b^2 - 2\ln b}{2b^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow b^2 - 2\ln b = b^2 \Leftrightarrow \ln b = 0 \Leftrightarrow b = 1.$$
Il existe donc un point B et un seul où la tangente $(\mathcal{T})$ à la courbe $\mathcal{C}$ est parallèle à $(\mathcal{D})$. B a pour abscisse 1 et pour ordonnée $f(1) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$.

5. f est une fonction continue et strictement croissante sur $]0\,,+\infty[$. Donc pour tout réel k dans l'intervalle $]\beta\,,\gamma[$ où
$$\beta = \lim_{x\to 0^+} f(x) \quad \text{et} \quad \gamma = \lim_{x\to+\infty} f(x),$$
l'équation $f(x) = k$ a une solution unique. Comme $0 \in]\beta\,,\gamma[= \mathbb{R}$, on en déduit que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α. La calculatrice donne $f(0,34) \approx -0,06$ donc $f(0,34) < 0$ et $f(0,35) \approx 0,03$ donc $f(0,35) > 0$. On en déduit que $f(0,34) < f(\alpha) < f(0,35)$ et comme f est strictement croissante : $0,34 < \alpha < 0,35$.

6. Voir la figure 63.1

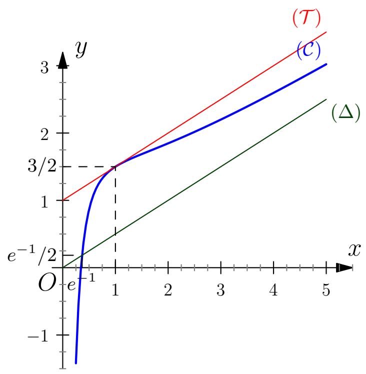


FIGURE 63.1 – Courbe représentative de la fonction $x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{1+\ln x}{x}$ et tangentes

Partie III La suite numérique (x_n) est définie par $x_n = \mathrm{e}^{(n-2)/2}$ pour tout nombre entier naturel n.

1. (a) On peut écrire pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$x_{n+1} = \exp{(n+1-2)/2} = \mathrm{e}^{(n-2)/2+1/2} = \mathrm{e}^{(n-2)/2} \times \mathrm{e}^{1/2} = x_n \times \mathrm{e}^{1/2}.$$
On en déduit que (x_n) est une suite géométrique de raison $\mathrm{e}^{1/2}$. Son premier terme est $x_0 = \mathrm{e}^{(0-2)/2}$ donc $x_0 = \mathrm{e}^{-1}$.

   (b) (x_n) est une suite géométrique de premier terme positif et de raison positive, donc (x_n) est une suite à termes positifs. On a $\mathrm{e}^{1/2} \geq 1$ donc $x_n \times \mathrm{e}^{1/2} \geq x_n$, c'est-à-dire $x_{n+1} \geq x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc la suite (x_n) est une suite croissante.

2. Pour tout entier naturel n, on a :
$$a_n = 4\int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(f(x) - \frac{x}{2}\right) \mathrm{d}x.$$

(a) D'après la partie II, on sait que $f(x) - \frac{x}{2} \geq 0$ pour $x \geq \mathrm{e}^{-1}$. Comme la suite (x_n) est croissante, on a :

$$\mathrm{e}^{-1} \leq x_n \leq x_{n+1}.$$

Donc $\int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(f(x) - \frac{x}{2}\right) \mathrm{d}x$ est l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite (Δ) et les droites d'équations $x = x_n$ et $x = x_{n+1}$. L'unité du repère étant 2 cm, l'unité d'aire est 4 cm^2.

$$a_n = 4 \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(f(x) - \frac{x}{2}\right) \mathrm{d}x$$

est l'aire, en cm^2, de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite (Δ) et les droites d'équation $x = x_n$ et $x = x_{n+1}$.

(b)

$$a_n = 4 \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(f(x) - \frac{x}{2}\right) \mathrm{d}x = 4 \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(\frac{1 + \ln x}{x}\right) \mathrm{d}x = 4 \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x} \ln x\right) \mathrm{d}x$$

$x \mapsto \frac{1}{x}$ a pour primitive $x \mapsto \ln x$. D'autre part, $\frac{1}{x} \times \ln x$ est de la forme $u'(x) \times u(x)$ donc $\frac{1}{x} \ln x$ a pour primitive $\frac{1}{2} u(x)^2 = \frac{1}{2} (\ln x)^2$. On a donc :

$$a_n = \left[4 \ln x + 2(\ln x)^2\right]_{x_n}^{x_{n+1}} = 4 \ln x_{n+1} + 2(\ln x_{n+1})^2 - 4 \ln x_n - 2(\ln x_n)^2.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
a_n &= 4 \ln \mathrm{e}^{(n-1)/2} + 2\left(\ln \mathrm{e}^{(n-1)/2}\right)^2 - 4 \ln \mathrm{e}^{(n-2)/2} - 2\left(\ln \mathrm{e}^{(n-2)/2}\right)^2 \\
&= 4 \times \frac{n-1}{2} + 2\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 - 4 \times \frac{n-2}{2} - 2\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \\
&= 2n - 2 + \frac{n^2 - 2n + 1}{2} - 2n + 4 - \frac{n^2 - 4n + 4}{2} \\
&= 2 + \frac{n^2 - 2n + 1 - n^2 + 4n - 4}{2} = 2 + \frac{2n - 3}{2} = \frac{4 + 2n - 3}{2}
\end{aligned}$$

donc $a_n = \frac{2n+1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que $a_n = n + \frac{1}{2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc

$$a_{n+1} = n + 1 + \frac{1}{2} = n + \frac{1}{2} + 1 = a_n + 1, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On en déduit que (a_n) est une suite arithmétique de raison 1.

□

Exemple 63.2. Une entreprise fabrique et vend un liquide L. Une étude a permis de modéliser le coût moyen de production par :

$$f(x) = 0{,}5x + \frac{8}{x}, \quad \text{où } x > 0.$$

Le coût moyen $f(x)$ est exprimé en milliers d'euros et la quantité produite x en hectolitres. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal du plan (unité 1 cm).

1. **Etude de la fonction coût moyen**
   (a) Etudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,,+\infty[$.
   (b) Déterminer les limites en f en 0 et en $+\infty$.
   (c) Donner le tableau de variations de f.
   (d) Montrer que la droite D d'équation $y = 0{,}5x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$. Etudier la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à D.
   (e) Construire $\mathcal{C}$ ainsi que D.
2. **Seuils de rentabilité pour l'entreprise**
   L'entreprise ne peut être bénéficiaire que si le prix de vente de l'hectolitre est supérieur au coût moyen de fabrication. Le prix de vente de l'hectolitre $p(x)$ est fonction de la quantité x vendue :

$$p(x) = \begin{cases} -0{,}8x + 10 & \text{si } x \in]0\,,10[\\ 2 & \text{si } x \in [10\,,+\infty] \end{cases}$$

   où $p(x)$ est exprimé en milliers d'euros et x en hectolitres.

(a) On note P la représentation graphique de la fonction p. Tracer P dans le repère précédent. La fonction p est-elle une fonction continue ? (Justifier à partir du graphique).

(b) Déterminer graphiquement l'intervalle dans lequel doit se situer la production x pour que l'entreprise soit bénéficiaire.

(c) Confirmer le résultat précédent par le calcul (on pourra se ramener à une inéquation du second degré).

Développement

Solution.

1. **Etude de la fonction coût moyen**

(a) La fonction f est une fonction rationnelle, elle est dérivable sur $]0\,,+\infty[$. On sait que $f(x) = 0,5x + \frac{8}{x}$ donc :

$$f'(x) = 0,5 - \frac{8}{x^2} = \frac{0,5x^2 - 8}{x^2} = \frac{0,5(x^2 - 16)}{x^2} = \frac{0,5(x-4)(x+4)}{x^2}$$

$x^2 > 0$ pour tout réel x dans $]0\,,+\infty[$, le signe de $f'(x)$ est donc le signe du trinôme $0,5(x-4)(x+4)$. On a donc $f'(x) < 0$ pour tout $x \in\,]0\,,4[$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x \in\,]4\,,+\infty[$. Donc : f est strictement décroissante sur $]0\,,4[$ et strictement croissante sur $]4\,,+\infty[$.

(b) $\lim_{x\to 0} 0,5x = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} \frac{8}{x} = +\infty$ donc :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 0,5x + \frac{8}{x} = +\infty.$$

De plus $\lim_{x\to+\infty} 0,5x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{8}{x} = 0$ donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 0,5x + \frac{8}{x} = +\infty.$$

(c) On a

$$f(4) = 0,5 \times 4 + \frac{8}{4} = 2 + 2 = 4.$$

On peut donner le tableau de variations de f :

x	0		4		1
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	$\|\|$	$+\infty$ $\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

(d) On a

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 0,5x = \lim_{x\to+\infty} \frac{8}{x} = 0.$$

Donc : la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 0,5x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ quand x tend vers $+\infty$. Pour tout réel x dans $]0\,,+\infty[$, on a $x > 0$ donc $\frac{8}{x} > 0$ donc $f(x) - 0,5x > 0$ donc $f(x) > 0,5x$. On en déduit que la courbe $\mathcal{C}$ se trouve au-dessus de la droite $\mathcal{D}$.

(e) Voir la figure 63.2.

2. **Seuils de rentabilité pour l'entreprise**

(a) P étant la représentation graphique de la fonction ρ, elle est constituée par

- le segment de droite d'équation $y = -0,8x + 10$ pour $x \in\,]0\,,10[$ (on peut tracer ce segment en utilisant les points $A(0,10)$ et $B(10,2)$.
- la demi-droite d'équation $y = 2$ pour $x \in [10\,,+\infty[$.

La représentation graphique de ρ peut être tracée d'un seul trait (sans lever le crayon de la feuille), on en déduit que la fonction ρ est une fonction continue.

(b) L'entreprise est bénéficiaire lorsque le prix est supérieur au coût moyen, c'est-à-dire lorsque la courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de la courbe P. On obtient graphiquement que l'entreprise est bénéficiaire lorsque $x \in [0.9\,,6.8]$.

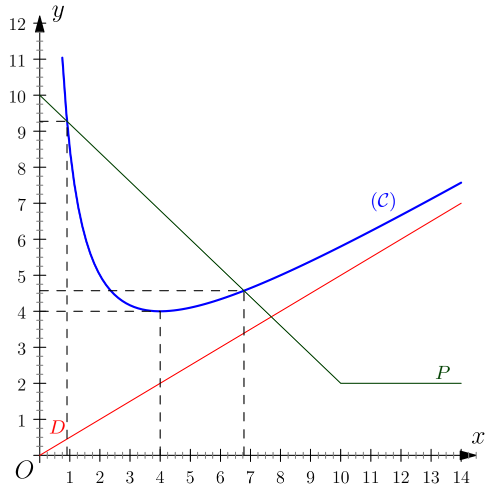


FIGURE 63.2 – Représentation graphique

(c) Le tableau de variations de f justifie que $f(x) > 2$ pour tout $x \in]0\,,+\infty[$. Comme $\rho(x) = 2$ pour tout $x \geq 10$, l'entreprise ne peut pas être bénéficiaire lorsque $x \geq 0$. Pour $x \in]0\,,10[$, on peut écrire :

$$f(x) \leq \rho(x) \Leftrightarrow 0,5x + \frac{8}{x} \leq -0,8x + 10 \Leftrightarrow 1,3x - 10 + \frac{8}{x} \leq 0.$$

Sachant que x est strictement positif, on obtient, en multipliant par x :

$$1,3x^2 - 10x + 8 \leq 0$$

$1,3x^2 - 10x + 8$ est un trinôme du second degré dont le discriminant est :

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \times 1,3 \times 8 = 100 - 41,6 = 58,4$$

On a donc $\Delta > 0$. On en déduit que ce trinôme a deux racines qui sont :

$$\alpha = \frac{10 - \sqrt{58,4}}{2,6} \approx 0,9 \quad \text{et} \quad \beta = \frac{10 + \sqrt{58,4}}{2,6} \approx 6,8.$$

Ces deux racines étant dans l'intervalle $]0\,,10[$, on peut conclure que : $f(x) \leq \rho(x)$ pour $x \in [\alpha\,,\beta]$. On a donc confirmé par le calcul le résultat de la question précédente.

□

2 Etude de courbes paramétrées

Exemple 63.3. On considère la courbe (Γ) définie par la représentation graphique :

$$\begin{cases} x = f(t) = \cos(2t) - 2\cos(t) \\ y = g(t) = \sin(2t) - 2\sin(t) \end{cases}$$

où t est un réel appartenant à l'intervalle $[-\pi\,,\pi]$.

1. Montrer que la courbe (Γ) admet un axe de symétrie en calculant $f(-t)$ et $g(-t)$.
2. (a) Calculer $f'(t)$.
   (b) Etablir le signe de $f'(t)$ sur l'intervalle $[0\,,\pi]$, en déduire les variations de f sur $[0,\pi]$.
3. (a) Calculer $g'(t)$.
   (b) Déterminer le signe $g'(t)$ sur l'intervalle $[0\,,\pi]$, en déduire les variations de g sur $[0\,,\pi]$.
4. Dresser sur l'intervalle $[0,\pi]$ le tableau de variations conjointes des fonctions f et g.
5. Déterminer un vecteur directeur de la tangente à la courbe (Γ) aux points B, C et D de paramètres
$$t_B = \frac{\pi}{3},\ t_C = \frac{2\pi}{3} \quad \text{et} \quad t_D = \pi.$$

6. Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm. Tracer les tangentes aux points A, B, C et D puis la courbe (Γ). *On admet que la tangente à la courbe* (Γ) *au point A de paramètre $t_A = 0$ a pour vecteur directeur* $\vec{\imath}$.

Développement

Solution.

1.
$$\begin{cases} f(-t) = \cos(-2t) - 2\cos(-t) = \cos(2t) - 2\cos t = f(t) \\ g(-t) = \sin(-2t) - 2\sin(-t) = -\sin(2t) + 2\sin t = -g(t) \end{cases}$$

Les points $M(t)$ et $M(-t)$ ont pour coordonnées respectives :

$$(f(t), g(t)) \quad \text{et} \quad (f(t), -g(t)).$$

On constate que les points $M(t)$ et $M(-t)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses pour tout $t \in [-\pi\,,\pi]$. (Γ) admet l'axe des abscisses pour symétrie. On pourra donc étudier les fonctions f et g sur l'intervalle $[0\,,\pi]$ et compléter le graphique par symétrie.

2. (a) f est dérivable sur $[0\,,\pi]$ et sa dérivée est définie par :

$$f'(t) = -2\sin(2t) + 2\sin t.$$

On connaît la formule

$$\sin(2t) = 2\sin t\cos t.$$

donc

$$f'(t) = -4\sin t\cos + 2\sin t \Leftrightarrow f'(t) = 2\sin t[1 - 2\cos t].$$

(b) Sur $[0\,,\pi]$, $\sin t \geq 0$ donc $f'(t)$ est du signe de $1 - 2\cos t$. Dans l'intervalle $[0\,,\pi]$, la fonction cosinus est décroissante.

$$1 - 2\cos t \geq 0 \Leftrightarrow \cos t \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} \leq t \leq \pi.$$

Sur $[0\,,\pi/3]$, $f'(t) \leq 0$; f décroît et sur $[\pi/3\,,\pi]$, $f'(t) \geq 0$, f croît.

3. (a) g est dérivable sur $[0\,,\pi]$ et sa dérivée vérifie :

$$g'(t) = 2\cos 2t - 2\cos t,$$

on applique la formule $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$:

$$g'(t) = 2(2\cos^2 t - 1) - 2\cos t = 2(2\cos^2 t - \cos t - 1).$$

La dérivée s'annule si $\cos t = 1$, on peut factoriser $g'(t)$ par $\cos(t) - 1$:

$$g'(t) = 2(\cos(t) - 1)(2\cos(t) + 1).$$

(b) Sachant que $-1 \leq \cos t \leq 1$, on en déduit $\cos t - 1 \leq 0$ donc $g'(t)$ est du signe contraire à celui de $2\cos t + 1$.

$$g'(t) \geq 0 \Leftrightarrow 2\cos t + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \cos t \leq -\frac{1}{2}.$$

Dans l'intervalle $[0\,,\pi]$, la fonction cosinus est décroissante, l'inéquation se traduit par $t \geq \frac{2\pi}{3}$ donc sur $[0\,,\pi]$:

– si $t \in [2\pi/3, \pi]$, $g'(t) \geq 0$, g croît

– si $t \in [0\,, 2\pi/3]$, $g'(t) \leq 0$, g décroît.

4. On peut dresser les tableaux de variations de f et g sur $[0\,,\pi]$:

t	0		$\pi/3$		$2\pi/3$		π
$f'(t)$	0	$-$	0	$+$	$2\sqrt{3}$	$+$	0
$f(t)$	$-1/2$	$\searrow$	$-3/2$	$\nearrow$	$1/2$	$\nearrow$	3
Points	A		B		C		D

t	0		$\pi/3$		$2\pi/3$		π
$g'(t)$	0	$-$	-2	$-$	0	$+$	4
$g(t)$	0	$\searrow$	$\sqrt{3}/2$	$\searrow$	$-3\sqrt{3}/2$	$\nearrow$	0
Points	A		B		C		D

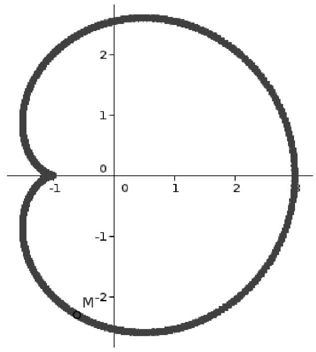


FIGURE 63.3 – Représentation graphique de Γ

5. Aux points B et D correspondant respectivement à $t = \frac{\pi}{3}$ et $t = \pi$, la dérivée de f s'annule mais pas la dérivée de g, en chacun de ces points la tangente admet pour vecteur directeur $\vec{\jmath}$. En B et D, la tangente à (Γ) est parallèle à l'axe des ordonnées. Au point C correspondant à $t = \frac{2\pi}{3}$, la dérivée de g s'annule mais pas celle de f. La tangente en C à la courbe admet pour vecteur directeur le vecteur $\vec{\imath}$. En C la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
6. L'étude précédente permet de tracer l'arc de courbe correspondant à l'intervalle $[0\,,\pi]$. La symétrie par rapport à l'axe des abscisses permettra de tracer la courbe (Γ) en entier. On a admis, dans le texte, que la tangente en A est confondue avec l'axe des abscisses.

□

---

3 Etude de courbes de Bézier

Exemple 63.4. Soit le plan rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, les unités étant $\|\vec{\imath}\| = 2$ cm et $\|\vec{\jmath}\| = 1$ cm. On considère les points

$$A_0 = O(0,0)\ ,\ A_1(0,-4)\ ,\ A_2(1,1) \text{ et } A_3(2,5).$$

1. Montrer que la représentation paramétrique de la courbe de Bézier associée aux points A_0, A_1, A_2, A_3 est :
$$\begin{cases} x(t) = -t^3 + 3t^2 \\ y(t) = -10t^3 + 27t^2 - 12t \end{cases} \quad , \quad t \in [0\,,1].$$
2. (a) Déterminer les variations des fonctions x et y. On dressera le tableau des variations conjointes de x et y. Les calculs seront données à 10^{-1} près.
   (b) Préciser les points où la courbe admet une tangente parallèle à l'un des axes de coordonnées.
   (c) Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point A_3.
3. Déterminer, à 10^{-1} près, l'abscisse du point d'intersection, autre que O, de la courbe de Bézier, avec l'axe des abscisses.
4. Tracer dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ la courbe de Bézier ainsi étudiée.

Développement

Solution.

1. On utilise la formule du cours :
$$\overrightarrow{OM} = \sum_{i=0}^{i=3} \mathrm{C}_3^i t^i (1-t)^{3-i} \overrightarrow{OA_i},$$

on en déduit :

$$\begin{cases} x(t) = (1-t)^3 \times 0 + 3t(1-t)^2 \times 0 + 3t^2(1-t) \times 1 + t^3 \times 2 \\ y(t) = (1-t)^3 \times 0 + 3t(1-t)^2(-4) + 3t^2(1-t) \times 1 + t^3 \times 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = 3t^2 - 3t^3 + 2t^3 \\ y(t) = -12t(1-2t+t^2) + 3t^2 - 3t^3 + 5t^3 \end{cases}$$

En conclusion, une représentation graphique de la courbe de Bézier demandée est :

$$\begin{cases} x(t) = -t^3 + 3t^2 \\ y(t) = -10t^3 + 27t^2 - 12t \end{cases}.$$

2. (a) Les fonctions x et y sont dérivables sur l'intervalle $[0\,,1]$. On a :

$$x'(t) = -3t^2 + 6t = 3t(-t+2).$$

$x'(t)$ s'annule pour $t = 0$ et $t = 2$. Sur l'intervalle $[0\,,1]$, $3t \geq 0$ et $-t+2 \geq 0$. On en déduit $x'(t) \geq 0$; la fonction x croît sur $[0\,,1]$.

De plus,

$$y'(t) = -30t^2 + 54t - 12 = 6(-5t^2 + 9t - 2).$$

Le polynôme entre parenthèse est un polynôme du second degré dont le discriminant est $\Delta = 81 - 40 = 41$. Donc $y'(t)$ s'annule pour $t' = \alpha = \frac{-9+\sqrt{41}}{-10} \approx 0{,}26$ et $t'' = \frac{-9-\sqrt{41}}{-10} \approx 1,5$. $y'(t)$ est du signe de -5 pour les valeurs de t à l'extérieur des racines et du signe contraire à l'intérieur. On en déduit sur l'intervalle $[0\,,1]$: $y'(t) \leq 0$ sur $[0\,,\alpha]$ et $y'(t) \geq 0$ sur $[\alpha\,,1]$.

On peut dresser le tableau de variations conjointes de x et y.

t	0		α		1
$x'(t)$	0	$+$		$+$	3
$y'(t)$	-12	$-$	0	$+$	12
$x(t)$	0	$\nearrow$	$0,18$	$\nearrow$	2
$y(t)$	0	$\searrow$	$-1,47$	$\nearrow$	5
points	O		B		A_3

(b) Au point O où $t = 0$, la dérivée de x s'annule mais pas celle de y. Un vecteur directeur de la tangente en A_1 à la courbe est $\vec{\jmath}$. La tangente en O à la courbe est parallèle à l'axe des ordonnées.

Au point B où $t = \alpha$, la dérivée de y s'annule mais pas celle de x, la tangente à la courbe en B admet pour vecteur directeur $\vec{\imath}$. La tangente à la courbe en B est parallèle à l'axe des abscisses.

(c) Au point A_3, d'après le cours, un vecteur directeur de la tangente à la courbe est $\overrightarrow{A_2A_3}$ de coordonnées $(1,4)$, cette tangente a donc pour coefficient directeur 4, son équation réduite sera de la forme $y = 4x + b$.

Comme A_3 appartient à la tangente, ses coordonnées vérifient l'équation de la tangente :

$$5 = 4 \times 2 + b,$$

on en déduit $b = -3$. Une équation de la tangente T en A_3 à la courbe de Bézier est $y = 4x - 3$.

3. La courbe coupe l'axe des abscisses quand $y(t) = 0$ soit $-t(10t^2 - 27t + 12) = 0$, ce qui se traduit par :

$$t = 0 \text{ (il s'agit ici du point } O \text{ non demandé) ou } 10t^2 - 27t + 12 = 0.$$

Le polynôme du second degré admet pour discriminant $\Delta = 27^2 - 4 \times 10 \times 12 = 249$.

$$t' = \frac{27 - \sqrt{249}}{20} \approx 0,56 \quad \text{et} \quad t'' = \frac{27 + \sqrt{249}}{20} \approx 2,1.$$

$t'' \notin [0\,,1]$, cette valeur ne convient pas.

En arrondissant les valeurs trouvées à 10^{-1} près, quand $t = t'$, le point d'intersection, autre que O, de la courbe avec l'axe des abscisses est :

$$D(0.77, 0).$$

4. La figure 63.4 nous donne le tracé de la courbe de Bézier pilotée par les points A_0, A_1, A_2, A_3 et la tangente T en A_3 à la courbe de Bézier.

□

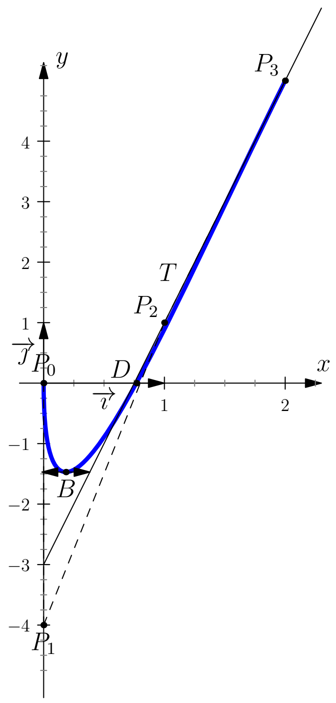


FIGURE 63.4 – Courbe de Bézier pilotée par les points A_0, A_1, A_2, A_3 donnés par l'énoncé

4 Etude de la cycloïde

Exemple 63.5.

1. Un cercle $(\mathcal{C})$, de rayon $R > 0$, roule sans gliser sur l'axe (Ox). On note I le point de contact entre $(\mathcal{C})$ et (Ox) et on note Ω le centre de $(\mathcal{C})$ (Ω et I sont mobiles). M est un point donné de $(\mathcal{C})$ (M est mobile, mais solidaire de $(\mathcal{C})$). On pose $t = (\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega I}})$.
   Déterminer une paramétrisation de la courbe décrite par le point M (on prendra t pour paramètre).
2. Étudier et construire l'axe paramétré :

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases}$$

où R est un réel strictement positif donné.

Développement

Solution.

1. La condition de roulement sans glissement se traduit par $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{MI}$ ou encore $x_\Omega = Rt$. On en déduit que :

$$x_M = x_\Omega + x_{\overrightarrow{\Omega M}} = Rt + R\cos(2\pi - \tfrac{\pi}{2} - t) = Rt - R\sin t = R(t - \sin t)$$
$$y_M = y_\Omega + y_{\overrightarrow{\Omega M}} = R + R\sin(2\pi - \tfrac{\pi}{2} - t) = R - R\cos t = R(1 - \cos t).$$

2.
   - Pour tout réel t, $M(t)$ existe.
   - Pour tout réel t, $M(t + 2\pi) = M(t) + \vec{u}$ où $\vec{u}(2\pi R, 0)$. Par sute, on trace la courbe quand t décrit $[0\,, 2\pi]$ et la courbe complète est obtenue par translations de vecteurs $k\vec{u}$, $k \in \mathbb{Z}$.
   - Pour tout réel t, $M(-t) = (-x(t), y(t)) = x_{(0y)}(M(t))$. On trace la courbe quand t décrit $[0\,, \pi]$ puis on complète par réflexion d'axe (Oy) puis par translations.
   - **Étude des points singuliers.** Pour $t \in [0\,, \pi]$,

$$x'(t) = R(1 - \cos t) = 2R\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$$
$$y'(t) = R\sin t = 2R\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right).$$

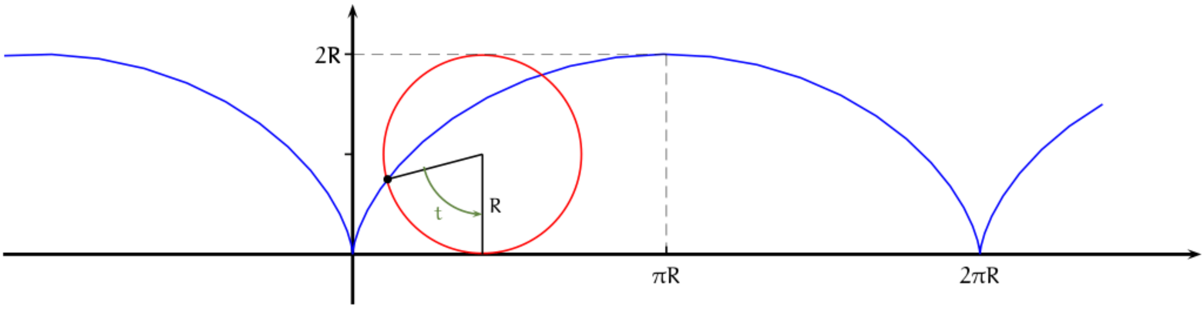
Le point $M(t)$ est régulier si et seulement si $t \in [0\,,\pi]$. Dans ce cas, la tangente en $M(t)$ est dirigée par $\begin{pmatrix} 2R\sin^2(t/2) \\ 2R\sin(t/2)\cos(t/2) \end{pmatrix}$ ou encore par $\begin{pmatrix} \sin(t/2) \\ \cos(t/2) \end{pmatrix}$. Étudions également le point singulier $M(0)$. Pour $t \in [0\,,\pi]$,

$$\frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)} = \frac{R(1-\cos t)}{R(t-\sin t)} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^2/2}{t^3/6} = \frac{3}{t}.$$

Ainsi

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)} = +\infty$$

et la tangente en $M(0)$ est dirigée par $(0,1)$. Ainsi, dans tous les cas, la tangente en $M(t)$ est dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} \sin(t/2) \\ \cos(t/2) \end{pmatrix}$. Par symétrie, $M(0)$ est un point de rebroussement de première espèce. Sinon, x et y sont des fonctions croissantes sur $[0\,,\pi]$.



La cycloïde $\begin{cases} x = R(t-\sin t) \\ y = R(1-\cos t) \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

□

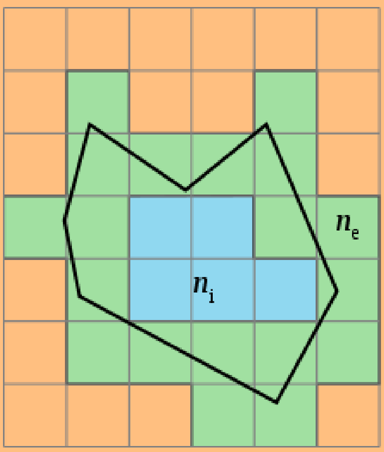
VII

Miscellaneous

LEÇON

64

Aires



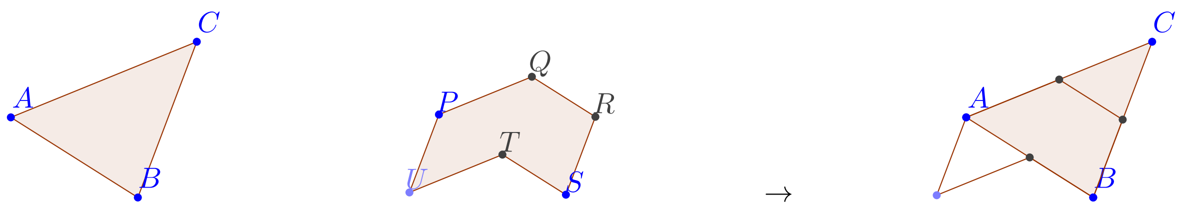
Niveau : Sixième - Terminale S (Intégrale et aire)
Prérequis : quadrilatère, fonctions

1 Comparer les aires

1.1 Egalité d'aires

Définition 64.1 On dit que deux figures ont la même aire si en découpant l'une d'entre elle, on peut recomposer l'autre.

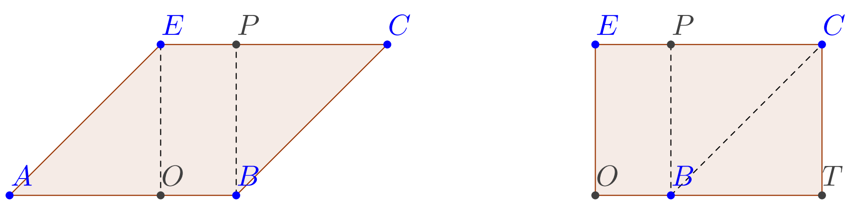
Exemple 64.2. Les polygones ABC et $PQRSTU$ ont la même aire car si on découpe le triangle PTU, et on le place sur le segment $[QR]$, on obtient le triangle ABC.



1.2 Transformer l'aire d'une figure en celle d'un rectangle

Proposition 64.3 On peut toujours découper un polygone en un rectangle de même aire.

Exemple 64.4. Dans le parallélogramme $ABCE$, on a découpé le triangle AEO qu'on a collé sur le segment CB. On obtient ainsi le rectangle $OECT$.



Proposition 64.5 **Découpage de Dudeney (1902)**
On peut découper un triangle équilatéral en quatre morceaux pour qu'il puisse former un rectangle.

Développement

On va expliciter la construction de Dudeney. On se donne un triangle ABC équilatéral de côté 2. On note E et D les milieux de $[AC]$ et de $[AB]$. On construit I sur $[BC]$ tel que $EI^4 = 3$. Pour cela,

- On construit M le symétrique de A par rapport à (BC). Ainsi $AM = 2\sqrt{3}$.
- On construit le cercle $(\mathcal{C}_2)$ de centre M passant par B, donc de rayon 2. On note P l'intersection de la droite (AM) et du cercle $(\mathcal{C}_2)$ différent de A.
- On note Q le milieu de $[AP]$ et on construit $(\mathcal{C}_1)$ le cercle de centre Q passant par A ($(\mathcal{C}_1)$ a pour rayon $1+\sqrt{3}$).
- On note O l'intersection du cercle $(\mathcal{C}_1)$ et de la parallèle à (BC) passant par M. On a alors $OM = 2\sqrt[4]{3}$.
- Soit N le milieu de $[OM]$ alors MN est la longueur EI cherchée.

On note F le projeté orthogonal de D sur $[EI]$ et G le point de $[EI]$ tel que $EG = IF$. H est l'antécédent sur $[BC]$ de G par projection orthogonale sur (EI).

On donne une suite d'instructions à faire sur Geogebra pour réaliser la construction précédente :

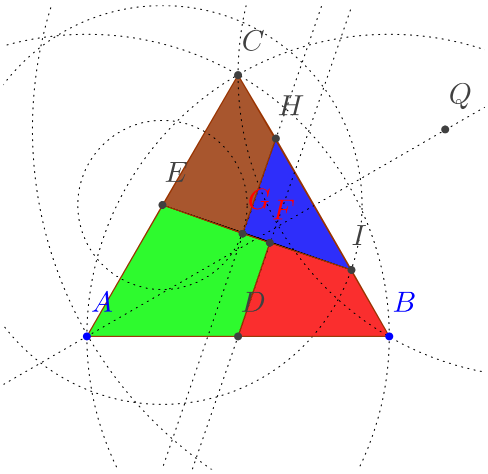


FIGURE 64.1 – Construction de Dudeney

```
A = (0,0)
B = (2,0)
Cercle[A,2]
Cercle[B,2]
# On selectionne un des deux points
d'intersection des deux cercles
construits et on le nomme C
Polygone[A,B,C]
D = MilieuCentre[A,B]
E = MilieuCentre[A,C]
# Construction du point I
M = Symetrie[A,a]
C_2 = Cercle(M,B)
Droite[A,M]
# On selectionne le point
d'intersection de (AM) et du cercle
C_2 different de A et on le nomme P
Q = MilieuCentre[A,P]
C_1 = Cercle[Q,A]
Droite[M,a]
# On selectionne un des deux points
d'intersection de la droite
parallele a (BC) passant par M et du
cercle C_1 et on le nomme O
N = MilieuCentre[O,M]
Segment[M,N]
Cercle(E,g)
I = Intersection(a,k)
# Fin de la construction du point I
Segment[E,I]
Perpendiculaire[D,h]
F = Intersection[i,h]
Segment[I,F]
Cercle(E,j)
G = Intersection[h,p]
Perpendiculaire[G,h]
H = Intersection[a,l]
Segment[G,H]
Segment[D,F]
```

1.3 Inégalité

Définition 64.6

On dit que deux figures n'ont pas la même aire si en essayant de découper une des figures pour la reconstituer en l'autre figure, les deux surfaces ne sont pas superposables [a].

a. c'est-à-dire qu'une des deux surfaces « dépassent » l'autre

Exemple 64.7. Dans la figure 64.2, les deux figures n'ont pas la même aire car si on les superpose, la surface d'une des deux figures dépassent l'autre.

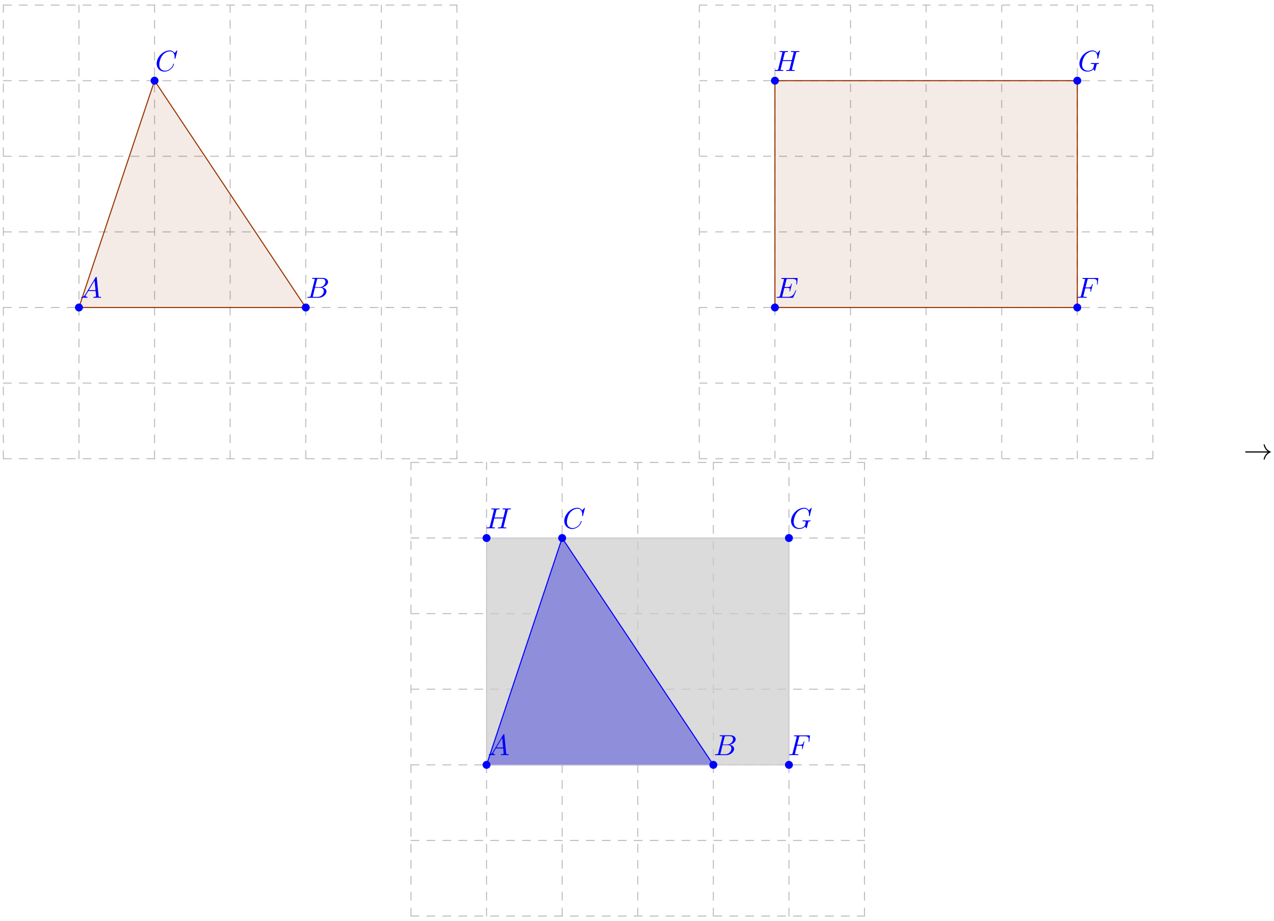


FIGURE 64.2 – Deux figures qui n'ont pas la même aire

1.4 Les multiples

Définition 64.8

Soit A_1 (resp. A_2) l'aire de deux polygones P_1 (resp. P_2). On dit que les deux aires sont multiples l'un de l'autre s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A_1 = kA_2$.

Exemple 64.9. La figure 64.3 nous montre deux figures dont les aires sont multiples.

1.5 Les partages

Définition 64.10

Soit un polygone P et A son aire. On dit qu'on partage le polygone P en des polygones $(P_1, \dots, P_n)$ avec aires $(A_1, \dots, A_n)$ si pour tout $1 \leq i \leq n$, $P_i \subset P$ (les polygones P_i sont dans le polygone P) et il existe $0 < k_i < 1$, tels que $A_i = k_i A$ et $\sum_{i=1}^{n} k_i = 1$.

Exemple 64.11. Soit $ABCD$ le rectangle de la figure 64.4. On dit que $(P_1, \dots, P_7)$ partage le rectangle.

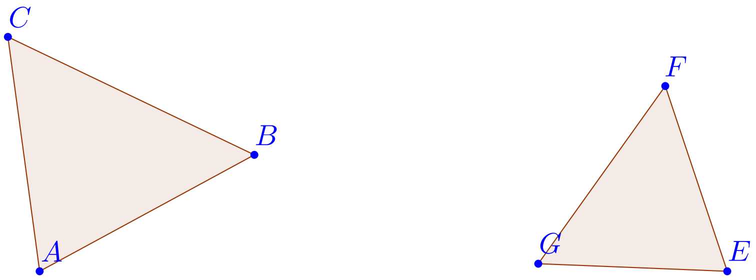


FIGURE 64.3 – Aires multiples

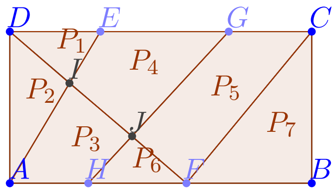


FIGURE 64.4 – Partage du rectangle en polygones $(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7)$

2 Mesurer une aire

2.1 Principe

Définition 64.12

Aire d'une surface
L'aire d'une surface est la mesure de sa surface, dans une unité d'aire donnée.

Définition 64.13

Mesurer une aire d'un polygone, c'est compter le nombre de carré unité (on précisera l'unité plus tard) qui sont inscrit dans ce polygone.

2.2 Méthode

Définition 64.14

On se donne un polygone et un carré unité. Pour calculer l'aire de ce polygone, il faut le partager avec autant de carré unité que l'on peut (quitte à ce que la surface de ce carré dépasse la figure).

Définition 64.15

On se donne un polygone et un carré unité. Pour calculer l'aire de ce polygone, on peut le découper pour en faire un rectangle et ensuite compter le nombre de carré unité inscrit dans le rectangle.

Exemple 64.16. L'aire du triangle ABC de la figure 64.5 est 6 car en le découpant, on peut former un rectangle qui contient 6 carré unité $DEFG$.

3 Calculer une aire

3.1 Aire d'un rectangle

Définition 64.17

Aire d'un rectangle
Un rectangle de longueur L et de largeur l a pour aire $L \times l$.

Développement

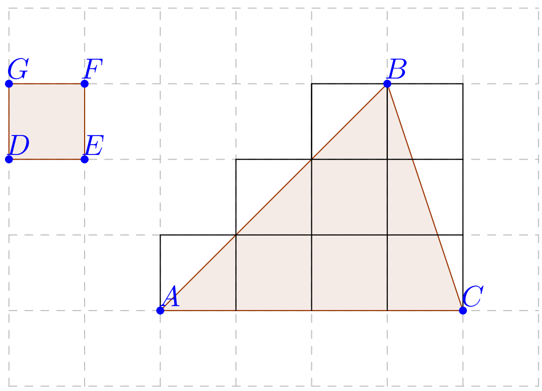


FIGURE 64.5 – Mesurer l'aire d'une figure

Démonstration. Soit un rectangle de longueur L et de largeur l. Sur la longueur, on peut inscrit L carré unité et sur la largeur, l carré unité. Donc, le nombre de carrés unité qu'on peut inscrire dans le rectangle est Ll et ainsi, l'aire du rectangle est Ll. □

Exemple 64.18. L'aire du rectangle de la figure 64.6 est de 8.

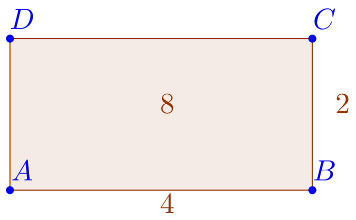


FIGURE 64.6 – Aire d'un rectangle

3 2 Aire d'un triangle rectangle

Définition 64.19 L'aire d'un triangle rectangle de base b et de hauteur h est $\frac{b\times h}{2}$.

Développement

Démonstration. Un triangle rectangle de base b et de hauteur h ($b > h$) est un rectangle de longueur b et de largeur h qu'on a coupé en deux (l'hypoténuse du triangle rectangle correspond à une des diagonales du rectangle). Donc, comme l'aire du rectangle est $b \times h$, l'aire du triangle rectangle est $\frac{1}{2}(b \times h)$. □

Exemple 64.20. L'aire d'un triangle rectangle de base 4 et de hauteur 2 est :

$$A = \frac{1}{2}(4 \times 2) = 4.$$

3 3 Aire des polygones

On montre dans l'exemple suivant comment transformer certains polygones en rectangle pour pouvoir calculer leur aire.

Exemples 64.21.

1. L'aire d'un parallélogramme a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur. Soit $ABCD$ un parallélogramme, E et F les projections orthogonales de C et D sur (AB). Le rectangle $FECD$ a même aire que le parallélogramme, car les triangles ADF et BCE sont isométriques. D'où

$$\text{Aire}(ABCD) = AB \times DF = a \times h \quad \text{où } a = AB = CD \text{ et } h = DF = CE.$$

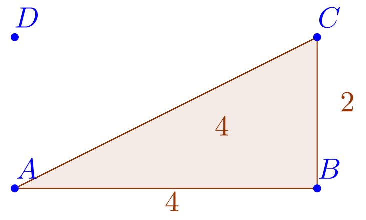


FIGURE 64.7 – Aire du triangle rectangle

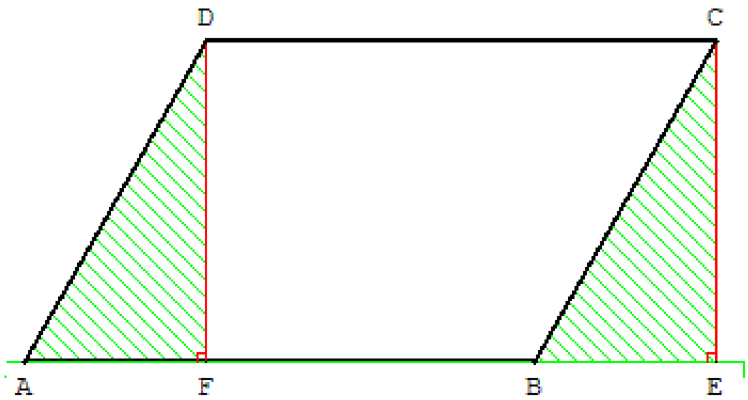


FIGURE 64.8 – Transformation d'un parallélogramme en rectangle

2. La surface d'un trapèze a pour mesure le produit de la moyenne des bases par sa hauteur. Si $b = AB$, $b' = CD$ et $h = HE$ alors
$$\text{Aire}(ABCD) = \frac{b+b'}{2} \times h.$$
Soit $ABCD$ un trapèze de grande base $[AB]$, et de petite base $[CD]$ parallèle à (AB) et I et J les milieux des côtés $[BC]$ et $[AD]$. D'après la propriété de Thalès, IJ est égal à la moyenne des bases. Soient E et F les projections orthogonales de J et I sur (AB) ainsi que G et H les projections orthogonales de I et J sur (CD). Le rectangle $EFGH$ a même aire que le trapèze $ABCD$ car les triangles rectangles IGC et IFB sont isométriques, de même que les triangles JHD et JEA.

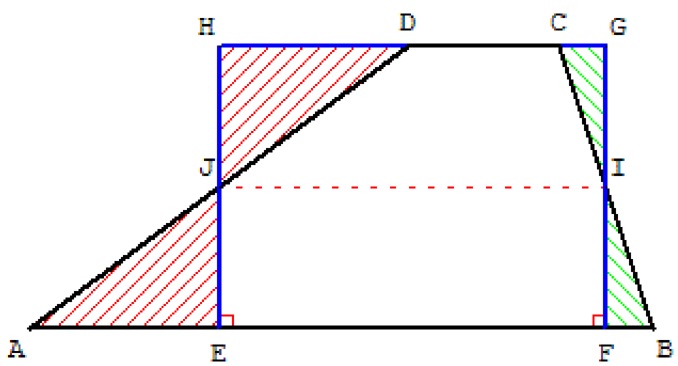


FIGURE 64.9 – Transformation d'un trapèze en rectangle

3 4 Unités

Définition 64.22 L'unité légale de mesure d'aire est le mètre carré (m^2).

Remarques 64.23.

1. Si les longueurs du polygones sont en cm alors l'aire du polygone s'exprime en cm^2.

2. On peut exprimer aussi l'aire en ares et hectares (ce sont les mesures agraires). On a ainsi :

$$1 \text{ are} = 1 \text{ dam}^2 = 100 \text{ m}^2.$$
$$1 \text{ hectare} = 1 \text{ hm}^2 = 10000 \text{ m}^2.$$

Proposition 64.24

Conversion d'unités d'aires

Passer d'une unité supérieure d'aire, c'est multiplier par 100 l'unité d'aire utilisée.

Pour changer d'unités d'aire, on a alors besoin du tableau de conversions des unités d'aires :

Exemple 64.25.

km²		hm²		dam²		m²		dm²		cm²		mm²	
			5	2	0								
							0	0	4	0	3		

Ainsi,

$$520 \text{ ares} = 520 \text{ dam}^2 = 5{,}2 \text{ hm}^2 = 5{,}2 \text{ hectares}.$$
$$0{,}0403 \text{ m}^2 = 4{,}03 \text{ dm}^2 = 403 \text{ cm}^2.$$

3.5 Aire d'un cercle (ou de disque)

Définition 64.26

Le nombre π est défini comme le rapport entre la circonférence du cercle et son rayon.

Définition 64.27

L'aire du disque de rayon R est $\pi \times R^2$.

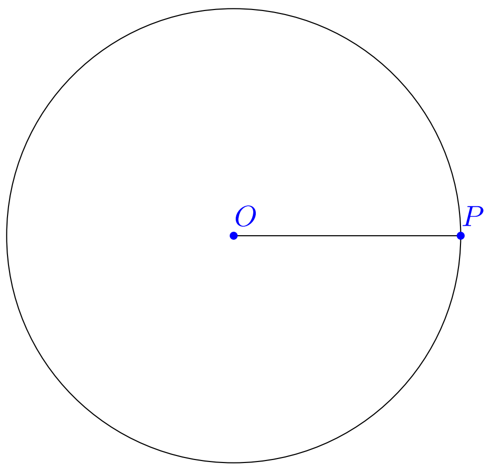


FIGURE 64.10 – L'aire du cercle de rayon 3 cm est 9π cm²

4 Intégrale et aire

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, non nécessairement orthonormal.

Définition 64.28

Aire sous la courbe

Soit une fonction f, continue et positive sur un intervalle $[a\,,b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. *L'aire sous la courbe* $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[a\,,b]$ est l'aire du domaine plan $\mathcal{D}$ limité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. On note $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ cette aire et on lit *l'intégrale* (ou somme) de a à b de f.

Remarques 64.29.

1. Le domaine $\mathcal{D}$ peut aussi être considéré comme l'ensemble des points M du plan de coordonées (x, y) telles que $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$.
2. L'aire du domaine $\mathcal{D}$ est exprimée en unité d'aire ; une unité d'aire étant l'aire du rectangle construit à partir des vecteurs unités.

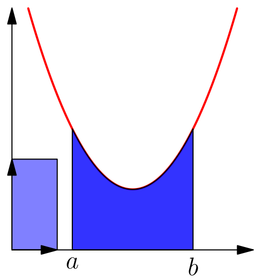
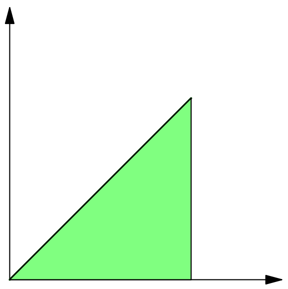


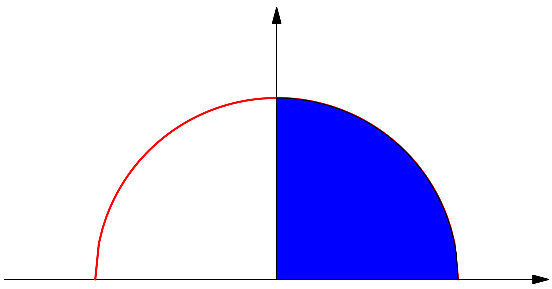
FIGURE 64.11 – Le domaine $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$. L'unité d'aire étant l'aire du rectangle construit à partir des vecteurs unités.

Exemples 64.30.

1. $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$ car l'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f définie par $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0\,,1]$ est l'aire d'un triangle rectangle isocèle dont les deux côtés de l'angle droit ont pour mesure 1.
2. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$ car l'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f définie par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ sur l'intervalle $[0, 1]$ est l'aire d'un quart de cercle de rayon 1.



(a) $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$



(b) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

FIGURE 64.12 – Figure pour l'exemple

Propriété 64.31

Soit une fonction f continue, positive et croissante sur un intervalle $[a\,,b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. L'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[a\,,b]$ est égale à la limite commune des deux suites adjacentes (u_n) et (v_n) définie par :

$$u_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \quad \text{où } n \in \mathbb{N}^*.$$

Pour tout entier n non nul, on divise l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles de même longueur $\frac{b-a}{n}$. u_n correspond à l'aire des rectangles sous la courbe. v_n correspond à l'aire des rectangles au-dessus de la courbe. Pour tout n, on a

$$u_n \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq v_n.$$

Lorsque n augment, l'écart entre l'aire des deux séries de rectangles et l'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ diminue.

Remarques 64.32.

1. La propriété se généralise si f est seulement continue sur l'intervalle $[a, b]$.

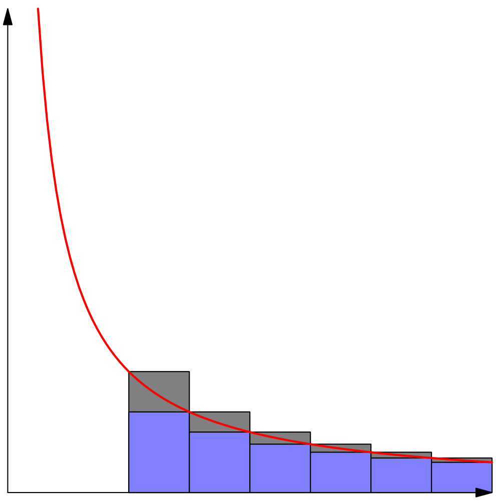


FIGURE 64.13 – Représentation des suites u_n et v_n

2. Si la fonction f est continue, positive et décroissante sur l'intervalle $[a, b]$, on peut construire les deux suites de la même façon, mais c'est alors v_n qui correspond à l'aire des rectangles sous la courbe.

Propriété 64.33

Relation de Chasles

Soit une fonction f, continue et positive sur l'intervalle $[a\,,b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. Pour tout nombre c appartenant à l'intervalle $[a\,,b]$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

On découpe l'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[a\,,b]$ en aires sous la courbe sur les intervalles $[a\,,c]$ et $[c\,,b]$.

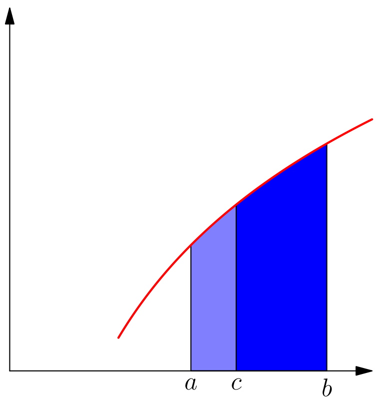


FIGURE 64.14 – Relation de Chasles

Exemple 64.34. Soit la fonction f dont la courbe représentative est donnée en figure 64.15. Alors :

$$\int_{-1}^2 f(x) = \mathrm{d}x = \int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$$

(en ajoutant les aires des deux trapèzes).

Définition 64.35

Valeur moyenne

Soit une fonction f, continue et positive sur un intervalle $[a\,,b]$. On appelle *valeur moyenne* de la fonction f sur l'intervalle $[a\,,b]$ le nombre réel

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

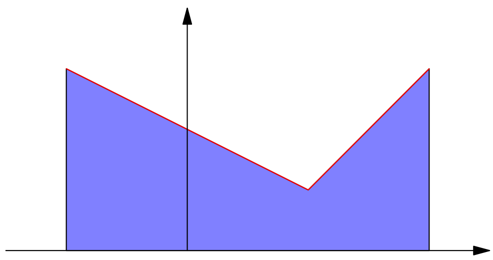


FIGURE 64.15 – Représentation graphique de f pour l'exemple

La valeur moyenne de la fonction f correspond à la valeur qu'il faut donner à une fonction constante g sur l'intervalle $[a\,,b]$ pour que l'aire sous la courbe représentative de g soit égale à l'aire sous la courbe représentative de f. L'aire du domaine hachuré est égale à l'aire du rectangle coloré.

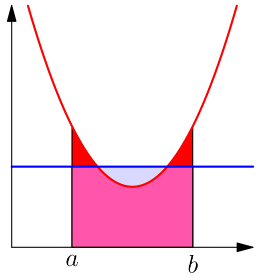


FIGURE 64.16 – Valeur moyenne

Définition 64.36

Soit une fonction f continue et *négative* sur l'intervalle $[a\,,b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. Le nombre $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est égal à *l'opposé* de l'aire du domaine $\mathcal{D}$ limité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Propriété 64.37

Soit une fonction f, continue et négative sur l'intervalle $[a\,,b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. L'aire du domaine $\mathcal{D}$ limité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à

$$\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Développement

Démonstration de la propriété 64.37. $\mathcal{C}_{-f}$, la courbe représentative de la fonction $-f$, est symétrique par rapport à l'axe des abscisses de $\mathcal{C}_f$, courbe représentative de f. L'aire du domaine $\mathcal{D}$ est égale, par symétrie, à l'aire sous la courbe $\mathcal{C}_{-f}$. Cette aire est donc $\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x$. D'après la définition 64.36, elle est aussi égale à $-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. □

Propriété 64.38

Soit une fonction f continue et négative sur l'intervalle $[a\,,b]$. La valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[a\,,b]$ est égale à :

$$-\frac{1}{b-a}\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple 64.39. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,,1]$ par $f(x) = -x^2$. Sachant que $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$, la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0, 1]$ est $-\frac{1}{3}$.

Propriété 64.40

Soit f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$ telles que $f > g$. L'aire du domaine $\mathcal{D}$ limité par les deux courbes représentatives des fonctions f et g, et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est, en unités d'aire,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

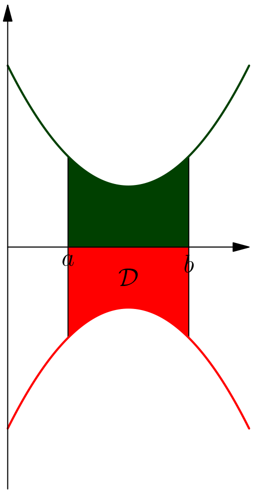


FIGURE 64.17 – Aire d'une fonction négative

Développement

Démonstration de la propriété 64.40. On découpe l'intervalle $[a\,,b]$ selon que les fonctions f et g sont toutes deux du même signe ou de signe contraire. Ainsi, dans la figure 64.18, l'aire entre les deux courbes est :

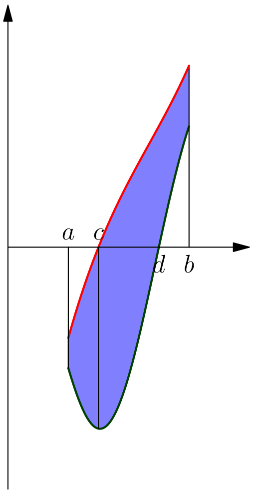


FIGURE 64.18 – Découpage des fonctions f et g selon leurs signes respectifs

- sur l'intervalle $[a\,,c]$:
$$-\int_a^c -f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b -g(x)\,\mathrm{d}x\ ;$$
- sur l'intervalle $[c\,,d]$:
$$\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^d -g(x)\,\mathrm{d}x\ ;$$
- sur l'intervalle $[d\,,b]$:
$$\int_d^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_d^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

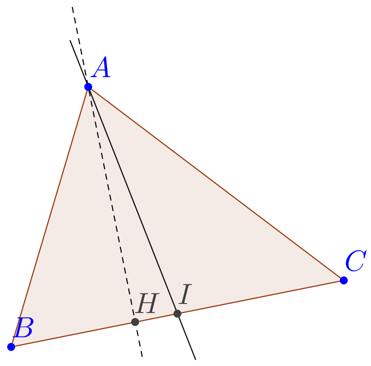
En utilisant les propriétés précédentes, on obtient bien
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$
pour la valeur de l'aire du domaine $\mathcal{D}$. □

5 Compléments

5.1 Partage de la médiane

Théorème 64.41

Soit ABC un triangle et (AI) la médiane issue de A. L'aire du triangle ABI est égale à l'aire du triangle ACI.



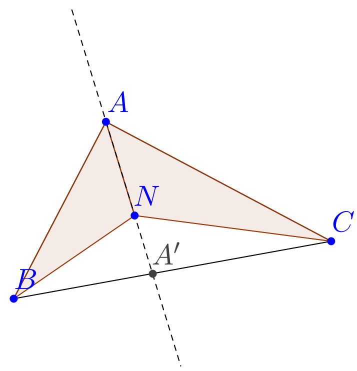
Développement

Démonstration.] On considère les deux triangles ABI et ACI. On appelle H le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC). Comme I est le milieu du segment $[BC]$, on a $BI = CI$. L'aire du triangle ABI est égale à $\frac{BI \times AH}{2}$. L'aire du triangle ACI est égale à $\frac{CI \times AH}{2}$. Comme $BI = CI$, ces deux aires sont égales. [1] □

5.2 Théorème du chevron

Théorème 64.42

Soit N un point intérieur au triangle ABC et A' le point d'intersection de la droite (AN) et du segment $[BC]$. Alors le rapport des aires des triangles ANB et de ANC est égal au rapport des distances BA' et CA'.



Pour démontrer le théorème 64.42, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 64.43

Si deux triangles ont un sommet commun A et des bases $[BC]$ et $[CC']$ portés par une même droite, alors le rapport de leurs aires est égal au rapport des longueurs de leurs bases.

Développement

1. Une autre façon élémentaire de le démontrer est de remarquer que ces deux triangles sont les moitiés de deux parallélogrammes de côté commun (AI) et translatés l'un de l'autre.

Démonstration du lemme 64.43. On doit étudier trois cas :

1. Si l'une des bases est un multiple entier de l'autre, on applique plusieurs fois le partage de la médiane.
2. Si les deux bases sont commensurables (c'est-à-dire sont multiples d'une même grandeur prise comme unité), on applique deux fois le premier cas.
3. Si les deux bases sont incommensurables, on obtient le résultat par passage à la limite (tout irrationnel peut être considéré comme la limite d'une suite de rationnels). Il y a ici un « saut » incontournable (le même celui que l'on fait quand on généralise la formule de l'aire d'un rectangle : aire = base × hauteur).

□

Démonstration du théorème du chevron. On applique le lemme 64.43 aux triangles $AA'B$ et $AA'C$ et ensuite, aux triangles ANB et ANC. □

5 3 Formule de Pick

Théorème 64.44

Soit un polygone construit sur une grille de points équidistants (c'est-à-dire des points de coordonnées entières) tel que tous ses sommets soient des points de la grille. L'aire A de ce polygone est donnée par :

$$A = i + \frac{1}{2}b - 1,$$

où i est le nombre de points intérieurs du polygone et b le nombre points du bord du polygone.

Exemple 64.45. Dans la figure 64.19, nous avons $i = 9$ et $b = 14$. Ainsi, l'aire est

$$A = 9 + \frac{14}{2} - 1 = 9 + 7 - 1 = 15.$$

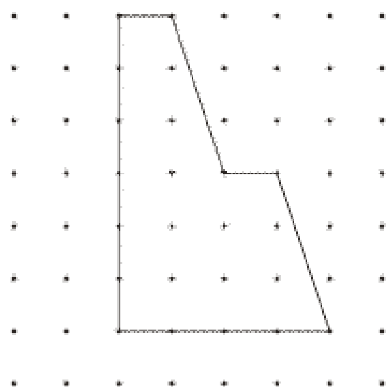
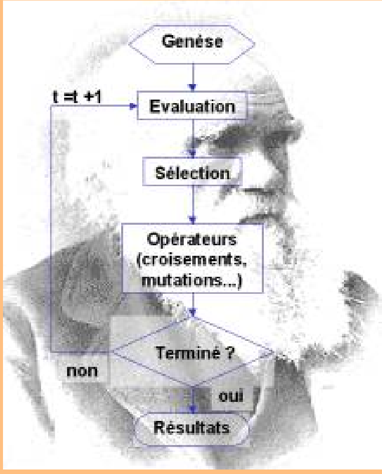


FIGURE 64.19 – Polygone dans un réseau

LEÇON

65

Exemples d'algorithmes



Niveau : Toutes les classes du lycée

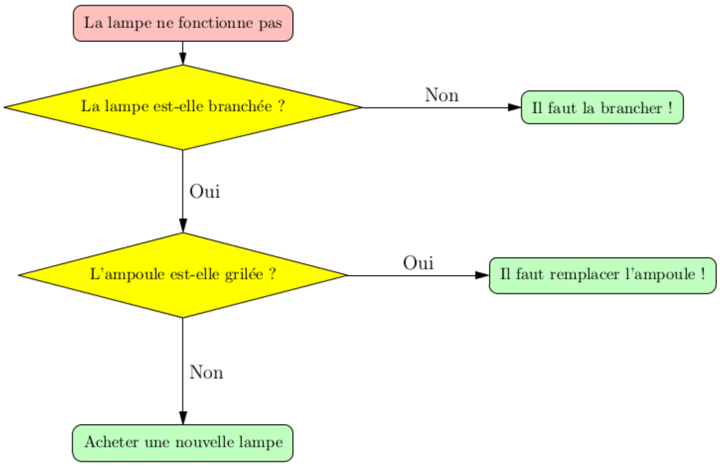
Prérequis : notions de programmation, notions d'arithmétique (PGCD), notions d'analyse (fonctions, croissance), notions de probabilités (calcul de probabilités et loi forte des grands nombres)

1 Définition d'un algorithme

Définition 65.1

Algorithme
Un *algorithme* est une suite finie d'opérations et d'instructions permettant de résoudre un problème.

Exemple 65.2. On donne l'exemple d'un algorithme (un peu tordu) pour savoir ce qu'on doit faire quand une lampe ne fonctionne plus mis sous forme d'un organigramme.



Dans ce qui va suivre, les algorithmes seront programmés grâce au logiciel de calcul formel, Xcas.

2 Algorithmes en arithmétique

2.1 Algorithme d'Euclide

Soient a et b deux entiers relatifs. L'algorithme d'Euclide permet de calculer le plus grand commun diviseur des entiers a et b.

Remarque 65.3. Puisque l'algorithme a pour objet le calcul d'un PGCD, il est possible de se restreindre aux entiers positifs, un PGCD de deux entiers relatifs étant égal au PGCD de leurs valeurs absolues.

Description de l'algorithme.

– Le cas où a et b est nul est trivial car $\mathrm{PGCD}(a, 0) = a$.
– On définit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence telle que $a_0 = a$ et $a_1 = b$ puis tant que a_{n+1} n'est pas nul, a_{n+2} est défini comme le reste de la division euclidienne de a_n par a_{n+1}.
On commence donc par calculer le reste de la division de a par b, qu'on note r ; puis on remplace a par b, puis b par r et on réapplique le procédé depuis le début.
On obtient ainsi une suite, qui vaut 0 à un certain rang ; le PGCD cherché est le terme précédent de la suite.

Développement

Démonstration. On montre que l'algorithme s'arrête à un moment donné.
La définition meme de la suite (a_n) par division euclidienne montre que, pour tout n tel que a_{n+1} est non nul, il existe un entier q_{n+2} tel que $a_n = q_{n+2} \times a_{n+1} + a_{n+2}$ avec de plus $0 \leq a_{n+2} < a_{n+1}$ pour tout n tel que a_{n+1} non nul. La suite d'entiers naturels (a_n) est donc strictement décroissante (tant qu'elle est non nulle) à partir du rang 1, et donc vaut 0 à un certain rang. L'existence d'un deernier reste non nul est ainsi établie. □

Exemple 65.4. On calcule, par exemple, le PGCD de 1071 et de 1029 à l'aide de l'algorithme d'Euclide :

$$1071 = 1029 \times 1 + 42$$
$$1029 = 42 \times 24 + 21$$
$$42 = 21 \times 2 + 0$$

Il faut prendre le dernier reste avant le zéro donc $\mathrm{PGCD}(1071, 1029) = 21$.

Voici l'algorithme implémenté sur Xcas :

```
pgcdeuclide(a,b):={
  local r;
  tantque b <> 0 faire
    r := irem(a,b)
    a := b
    b := r
  ftantque
    retourne(a)
}
```

```
pgcdeuclide(1071,1029)
                              21
```

2.2 Crible d'Eratosthène

Pour dresser la liste des nombres premiers entre 2 et 100, la méthode du crible d'Eratosthène consiste à :

- écrire la liste des nombres entiers inférieurs ou égal à 100 ;
- éliminer successivement les multiples propres de 2, de 3, ... puis ceux de p, où p est le premier nombre non encore élimié, etc.

Les entiers éliminés (en rouge) sont les entiers non premiers entre 2 et 100. Les entiers (en vert) sont donc les nombres premiers inférieur à 100.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

FIGURE 65.1 – Crible d'Erastosthène pour les entiers inférieurs ou égaux à 100

Remarques 65.5.

a. Pour éliminer les multiples propre de 7, commencer à 7^2, car les multiples inférieurs ont déjà été éliminés.

b. Il est possible de savoir à l'avance « jusqu'où aller ». En effet, grâce au critère d'arrêt, tout entier composé n admet un diviseur premier p tel que :

$$2 \leq p \leq n.$$

Si $n \leq 10$, alors $\sqrt{n} \leq \sqrt{100} = 10$. Tous les entier non premier sera éliminé en tant que multiple propre de 2, 3, 5, 7 et 11.

On peut écrire un algorithme qui permet d'établir le crible d'Eratosthène (qu'on peut implémenter sur Xcas) :

```
erato(n):={
local j,k,P;
P:=[seq(k,k=1..n)];
P[0]:=0;
pour j de 2 jusque floor(sqrt(n)) faire
  si P[j-1]>=1 alors
    pour k de 2 jusque floor(n/j) faire
      P[j*k-1]:=0;
    fpour;
   fsi;
fpour;
retourne(select(x->(x>=1),P));
}:;
```

```
erato(100)
     [2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,
                                               73,79,83,89,97]
```

3 Algorithmes en analyse et probabilités

3 1 Dichotomie

1. Problème

Soient $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) < f(b)$. On veut calculer m tel que $f(m) = 0$. Pour cela, on construit deux suites (a_n) et (b_n) convergentes vers m.

2. Principe

- On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
- Soit m_0 le milieu de $[a, b]$:
  - Si $f(m_0) > 0$ alors on pose $a_1 = a_0$ et $b_1 = m_0$
  - Sinon on pose $a_1 = m_0$ et $b_1 = b_0$.
- Ainsi de suite, si on veut construire le k^{e} terme de la suite, on pose m_{k-1} le milieu de $[a_{k-1}, b_{k-1}]$:
  - Si $f(m_{k-1}) > 0$ alors $a_k = a_{k-1}$ et $b_k = m_{k-1}$
  - Sinon on pose $a_k = m_{k-1}$ et $b_k = b_{k-1}$.

3. L'algorithme sur Xcas

```
dicho(F,p,a,b):={
local aa,bb,k,f;
aa:=a;
bb:=b;
epsilon:=1e-100;
f:=unapply(F,x);
k:=0;
tantque evalf(bb-aa,p)>10^(-p) faire
si sign(evalf(f((bb+aa)/2),p))==sign(evalf(f(bb),p))
alors bb:=evalf((aa+bb)/2,p);
sinon aa:=evalf((aa+bb)/2,p);
k:=k+1;
```

```
fsi;
ftantque;
retourne evalf((bb+aa)/2,p)+" est la solution trouvee apres " +k+ "
    iterations";
}:;
```

```
dicho(x^4-x^2+x-4,5,0,5)
         1.47198 est la solution trouvee apres 11 iterations
```

et sa version récursive :

```
dicho_rec(f,a,b,eps,compteur):={
  si evalf(b-a)<eps alors 0.5*(b+a),compteur+1
     sinon si f(a)*f(0.5*(b+a))>0
         alors dicho_rec(f,0.5*(b+a),b,eps,compteur+1)
         sinon dicho_rec(f,a,0.5*(b+a),eps,compteur+1)
         fsi
  fsi
}:;
```

```
dicho_rec(x->x^4-x^2+x-4,0,5,10^(-6),0)
                             (1.47198408842,24)
```

4. Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 65.6

Théorème des valeurs intermédiaires

Soient I un intervalle, a et b dans I tels que $a < b$. Soit f une application *continue* sur l'intervalle I. Soit λ, un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe (au moins) un réel c dans $[a\,,b]$ tel que $f(c) = \lambda$.

Développement

Démonstration du théorème 67.9. Supposons $f(a) < f(b)$. Nous allons construire deux suites adjacentes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par l'algorithme suivant :

- Si le milieu m de l'intervalle $[a\,,b]$ est tel que $f(m) \geq m$ alors on pose $a_1 = a$ et $b_1 = m$.
- Sinon, on pose $a_1 = m$ et $b_1 = b$.

On recommence le découpage :

- Si le milieu m de l'intervalle $[a_1\,,b_1]$ est tel que $f(m) \geq \lambda$ alors on pose $a_2 = a_1$ et $b_2 = m$.
- Sinon, on pose $a_2 = m$ et $b_2 = b_1$.

On a ainsi :

$$a \leq a_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq b_1 \leq b \quad \text{et} \quad f(a_2) \leq \lambda \leq f(b_2).$$

En réitérant le procédé, on construit ainsi une suite de segments emboîtés [1] :

$$[a\,,b] \supset [a_1\,,b_1] \supset \cdots \supset [a_n\,,b_n] \supset \cdots .$$

De plus, par construction, la longueur de $[a_n\,,b_n]$ est $\frac{b-a}{2^n}$. Les segments $[a_n\,,b_n]$ ont donc des longueurs qui tendent vers 0. Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont donc adjacentes.
Notons c leur limite commune (ce réel c est dans l'intervalle $[a\,,b]$). Montrons que $f(c) = \lambda$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f(a_n) \leq \lambda \leq f(b_n)$$

et par passage à la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n)\lambda \leq \lim_{n\to+\infty} f(b_n).$$

Or, f est continue en c donc :

$$f(c) \leq \lambda \leq f(c)$$

et ainsi $f(c) = \lambda$. On a bien montré qu'il existe un réel c dans $[a\,,b]$ tel que $f(c) = \lambda$. □

1. Il s'agit d'une méthode de *dichotomie*.

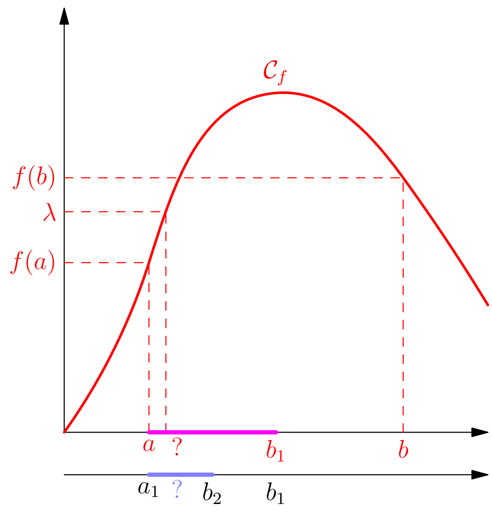


FIGURE 65.2 – Illustration de la suite construite

Remarques 65.7.

a. Le théorème des valeurs intermédiaires nous dit que l'équation $f(x) = \lambda$ $(f(a) < \lambda < f(b))$ admet au moins une solution dans $[a\,,b]$.

b. L'hypothèse de continuité est *indispensable* dans le théorème. Essayer d'applique le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction « partie entière » avec $a = 0$, $b = 1$ et $\lambda = \frac{1}{2}\dots$

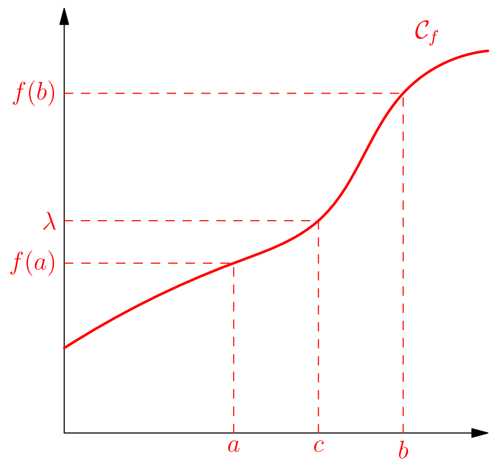


FIGURE 65.3 – Cas d'une fonction monotone

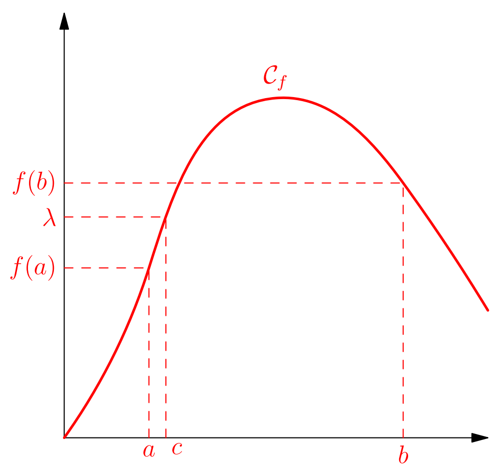


FIGURE 65.4 – Cas d'une fonction non monotone

Exemple 65.8. Tout polynôme de polynôme P (à coefficients réels) de degré impair admet (au moins) une racine réelle. En effet, comme le degré de P est impair, on a :

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty.$$

En conséquence, il existe un réel $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x < a$, on ait $P(x) < 0$ et un réel $b \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > b$, on ait $P(x) > 0$. Comme P est une fonction continue, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer l'existence d'un réel $c \in \left]a\,,b\right[$ tel que $P(c) = 0$.

Remarque 65.9. Le théorème des valeurs intermédiaires n'admet pas de réciproque. Une fonction f peut très bien vérifier la propriété des valeurs intermédiaires sans être continue. Considérer par exemple la fonction f définie sur $I = \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ x_0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \text{ où } x_0 \in [-1\,,1].$$

On peut montrer (en exercice) que la fonction f est non continue en 0 et vérifie pourtant la propriété des valeurs intermédiaires. En effet, soient a et b deux réels avec $a < b$.

- Si a et b sont non nuls et de même signe, alors c'est immédiat (puisque dans ce cas f est continue sur $[a\,,b]$).
- Si $a = 0$ (et $b > 0$) alors on prend un réel λ compris entre $f(a) = x_0$ et $f(b)$. Comme $\lambda \in [-1\,,1]$, on peut toujours trouver un réel $X \geq \frac{1}{b}$ tel que $\sin X = \lambda$. En posant $x = \frac{1}{X}$, il vient bien $f(x) = \lambda$ avec $x \in [a\,,b]$.
- On raisonne de même si on a un intervalle $[a\,,0]$ ou $[a\,,b]$ lorsqu'il contient 0.

5. C'est plus, c'est moins !

L'utilisateur du programme choisit un nombre au hasard entre 1 et 100. Donner un algorithme qui permet à l'ordinateur de détecter le nombre choisi par l'utilisateur.

Pour cela, on va utiliser la méthode de dichotomie.

```
plusmoins(n) fonction
  local a,b,m;
  a := 0;
  b := 100;
  m := (a+b)/2;
  tantque m <> n faire
      si m < n alors
        a := m+1;
        m := floor((a+b)/2)
      sinon
        b := m-1;
        m := floor((a+b)/2)
        fsi
   ftantque
     retourne(m)
ffonction:;
```

```
plusmoins(80)
                        80
```

3 2 Le lièvre et la tortue

Le jeu du lièvre et de la tortue est le suivant :

- À chaque tour, on lance un dé,
- si le 6 sort, le le lièvre gagne la partie, sinon la tortue avance d'une case,
- la tortue gagne quand elle a avance 6 fois.

Sous Xcas, on peut programmer le jeu de la manière suivante :

```
jeutortue():={
  local T,k;
  T := 0;
  pour k de 1 jusque 6 faire
    si floor(hasard(1,7)) <> 6 alors
      T := T+1;
   fsi;
  fpour;
  si T <> 6 alors
    retourne("le gagnant est le lièvre")
  sinon
    retourne("le gagnant est la tortue")
  fsi
}
:;
```

```
jeutortue()
                    le gagnant est le lièvre
```

La question se pose : quelle est la probabilité pour que la tortue gagne ? On note T_G l'événement :

$$T_G = \{\text{la tortue gagne la partie}\}\,.$$

Pour que la tortue avance d'une case, il faut que le dé ne tombe pas sur le 6 donc sur, 1, 2, 3, 4 et 5. Donc, si on note :

$$T_C = \{\text{la tortue avance d'une case}\}\,,$$

la probabilité que l'événement T_C ait lieu est de :

$$P(T_C) = \frac{5}{6}.$$

Ainsi,

$$P(T_G) = P(T_C)^6 = \left(\frac{5}{6}\right)^6 = \frac{5^6}{6^6} \approx 0,335.$$

On peut vérifier le résultat en lançant un grand nombre de fois l'algorithme et en calculant la proportion de jeux gagnants pour la tortue. La loi forte des grands nombres nous dira que plus le nombre de jeux est grand, plus cette proportion tend vers la probabilité $P(T_G)$.

```
probatortue(n):={
  local g,T,k,simu,pourcent;
  T := 0;
  pour simu de 1 jusque n faire
  g := 0;
  pour k de 1 jusque 6 faire
    si floor(hasard(1,7)) <> 6 alors
      g := g+1;
   fsi;
  fpour;
  si g == 6 alors
    T := T+1;
  fsi
    fpour
pourcent := evalf(T/n*100);
retourne("la tortue gagne " +pourcent+ "% des parties")
}

:;
```

```
probatortue(20000)
Temps mis pour l'évaluation: 5.68
                la tortue gagne 33.91% des parties
```

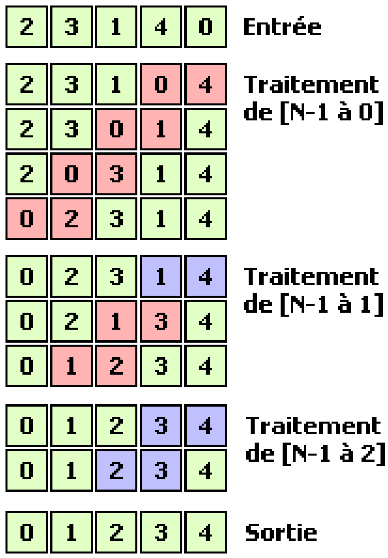
4 Algorithme de tri

On se donne une liste numérique que l'on suppose ou non désordonnée. Le but de cette section est de donner des algorithmes qui permettent de tri dans l'ordre croissant la liste numérique.

4 1 Tri à bulles

Le principe du tri à bulles est de tester si le k^{e} élément de la liste est plus grand que le $(k+1)^{\text{e}}$ élément de la liste. S'il est plus grand, on transpose les deux éléments et on vérifie avec les éléments précédents de la liste s'il est plus petit.

On s'arrête dès que tous les éléments de la liste sont rangés par ordre croissant.



La complexité de cet algorithme est en $\mathcal{O}(n^2)$.

On donne un algorithme implémenté sur Xcas :

```
bulle(L):={
local LT,compteur,k,temp;
LT:=L;
compteur:=0;
pour k de 0 jusque size(LT)-2 faire
si LT[k]>LT[k+1] alors
temp:=LT[k];
LT[k]:=LT[k+1];
LT[k+1]:=temp;
k:=-1;
compteur:=compteur+1;
fsi;
fpour;
retourne(LT,compteur);
}:;
```

```
L := [4,3,2,1]
                [4,3,2,1]
bulle(L)
```

```
([1,2,3,4],6)
```

4 2 Tri par insertion

On part d'une liste non triée et on veut créer une liste L dans laquelle on va insérer les éléments de l'ancienne liste mais cette fois-ci dans l'ordre croissant.

Pour le premier élément de la liste, on l'insère dans la nouvelle liste L sans restriction.

Pour les suivants (appelons k cet élément), on teste si l'élément de tête de liste L est supérieur à k. Si oui, alors on insère l'élément k en tête de liste, sinon on enlève la tête de liste (ce qui nous donne une liste L') et on teste si l'élément de tete de la liste L' est supérieur à k.

L'algorithme s'arrête si tous les éléments de l'ancienne liste ont été mise dans la nouvelle liste (cette fois-ci, cette nouvelle est triée dans l'ordre croissant).

On dit que cet algorithme est un algorithme *récursif*.

3	7	2	6	5	1	4
3	7	2	6	5	1	4
2	3	7	6	5	1	4
2	3	6	7	5	1	4
2	3	5	6	7	1	4
1	2	3	5	6	7	4
1	2	3	4	5	6	7

La complexité de cet algorithme est en $\mathcal{O}(n\log(n))$.

On donne un algorithme implémenté sur Xcas :

```
insere(element,liste):={

if(liste==[])
  then{[element]}
  else{
    if(element<=head(liste))
      then{prepend(liste,element)}
      else{prepend(insere(element,tail(liste)),head(liste))}

}
}:;
```

```
tri_insertion(liste):={
if(liste==[])
then{[]}
else{insere(head(liste),tri_insertion(tail(liste)))}
}:;
```

```
tri_insertion([1,2,3,1])
                            [1,1,2,3]
```

5 Cryptographie : Le code César

Le code César est la méthode de cryptographie qui consiste en une substitution mono-alphébtique, où la substitution est définie par un décalage de lettres. Par exemple, si on remplace A par D, on remplace B par E, C par F, D par G et ainsi de suite. Donnons un exemple à partir de ce décalage de 3 lettres.

Texte clair	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Texte codé	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C

On donne un algorithme implémenté sur Xcas :

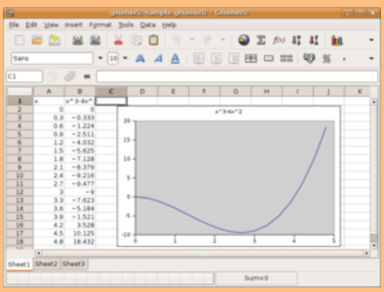
```
code:= (c)->{ return(asc(c)-32) }:;
decode:= (k)->{return(char(k+32)) }:;
jules_cesar:= (message,cle)->
{ local s,j,messcode;
s:=size(message);
messcode:="";
for (j:=0;j<s;j:=j+1) {
messcode:=append(messcode,decode(irem(cle+code(message[j]),95)));
};
return(messcode);
}:;
```

Par exemple, on code le texte « lecontermine » en code César avec un décalage de 3 lettres.

```
jules_cesar("lecontermine",3)
                        ohfrqwhuplqh
```

LEÇON 66

Exemples d’utilisation d’un tableur



Niveau : Tous niveaux

Prérequis : utilisation du tableur, statistiques, étude d’une fonction, suites, pgcd, arithmétique

1 Le tableur pour les collégiens

1.1 Une enquête auprès des 5e

Un professeur de mathématiques fait une enquête dans son collège qui comporte 520 élèves. Il interroge les cinquièmes qui sont en nombre de 180.

1. Quel est la population étudiée ? *La population est les élèves de 5e.*
2. Quel est l'effectif total ? *L'effectif total est de 180.*

Voici maintenant les résultats de l'enquête :

Matières	*Effectif*
Français	4
Histoire-Géo	12
Anglais	3
Mathématiques	25
Sciences Phy	25
SVT	11
Arts Plastiques	20
Musique	30
Sports	50
Total	180

1. Regrouper les données sur un tableur. *Pour répondre à cette question, il faut se servir du tableur. On met dans une colonne les matières et dans une autre les sous-effectifs.*

```
A1 : Matieres
B1 : Effectif
A2 : Francais
B2 : 4
A3 : Histoire Geo
B3 : 12
A4 : Anglais
B4 : 3
A5 : Mathematiques
B5 : 25
A6 : Sciences Phy
B6 : 25
A7 : SVT
B7 : 11
A8 : Arts Plastiques
B8 : 20
A9 : Musique
B9 : 30
A10 : Sports
B10 : 50
A11 : Total
B11 : SOMME(B2:B10)
```

2. Combien d'élèves aiment le français ? *4.*
3. Quel est la matière préféré des cinquièmes ? *Les Sports.*
4. Combien d'élèves aiment les matières scientifiques (Mathématiques, Sciences Physiques, SVT) ? $25 + 25 + 11 = 61$.
5. Faire un histogramme des données. *Pour cela, il faut sélectionner le tableau avec les effectifs mais sans le total. Ensuite, on va dans les menus* `Insertion > Diagramme` *et on sélectionne* `Colonne`. *Normalement, le logiciel nous livre l'histogramme.*

Matières	*Effectifs*
Français	4
Histoire-Géo	12
Anglais	3
Mathématiques	25
Sciences Phy	25
SVT	11
Arts Plastiques	20
Musique	30
Sports	50
TOTAL	180

FIGURE 66.1 – Tableau des résultats sur OpenOffice.org Calc

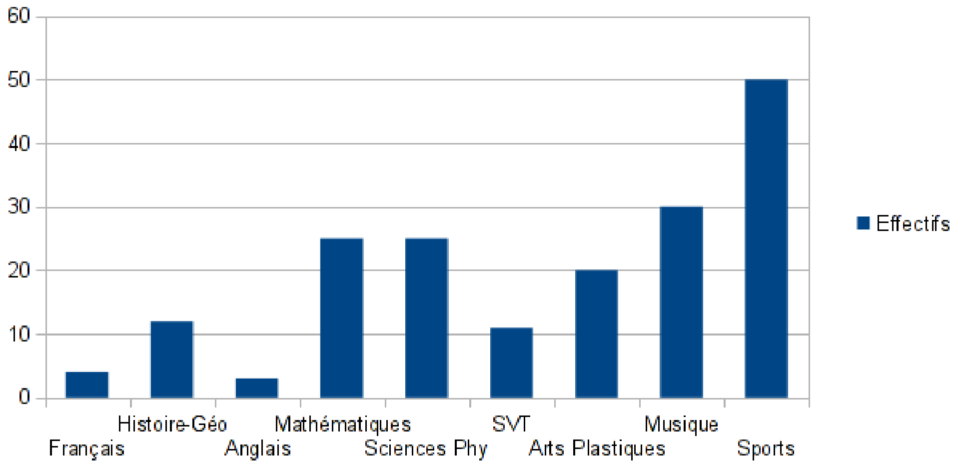


FIGURE 66.2 – Histogramme des données

1.2 Algorithme d'Euclide

L'algorithme d'Euclide permet de calculer le PGCD de deux nombres.

Théorème 66.1

Théorème d'Euclide

Soient a et b deux entiers naturels non nuls. La suite des divisions euclidiennes :

- de a par b : $a = bq_0 + r_0$,
- de b par r_0 (si $r_0 \neq 0$) : $b = r_0 q_1 + r_1$
- de r_0 par r_1 (si $r_1 \neq 0$) : $r_0 = r_1 q_2 + r_2$
- $\dots$
- de r_{n-1} par r_n (si $r_n \neq 0$) : $r_{n-1} = r_n q_{n+1} + r_{n+1}$.

Fini par s'arrêter, un des restes r_i étant nul. Le dernier reste non nul est alors le $\mathrm{PGCD}(a, b)$ (si $r_0 = 0$ alors $\mathrm{PGCD}(a, b) = b$).

On peut calculer le PGCD de deux nombres grâce à un tableur. Par exemple, on veut calculer le PGCD de 250 et 110. Pour cela, on suit les instructions suivantes :

```
A1 : 250
B1 : 110
C1 : MOD(250;110)
A2 : =B1
B2 : =C1
```

On fait glisser (déplacer le petit carré en bas à droite de la cellule) la case C1 sur les cases C2—C5, puis on fait glisser la case A2 sur les cases A3—A5 et la case B2 sur les cases B3—B5. On supprime les cases marquées `#VALEUR !` en C5 et les cases B5 et A5.

250	110	30
110	30	20
30	20	10
20	10	0

FIGURE 66.3 – Algorithme d'Euclide sur OpenOffice.org Calc

Ainsi, on obtient que $\mathrm{PGCD}(250, 110) = 10$ (lire la dernière case non nulle de la colonne C).

1.3 Les lapins de Fibonacci

On considère, quand $t = 0$, un couple A de jeunes lapins. Le mois suivant ($t = 1$), les deux lapins sont adultes, le couple est appelé B. A $t = 2$, deux jeunes lapins naissent et on a deux couples B et A. Pour chaque mois suivant, chaque couple A devient B et chaque B devient BA. Les couples sont, successivement, A, B, BA, BAB, $BABBA$, $BABBABAB$ etc. Les nombres de couples de lapins sont

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots.$$

Définition 66.2

Nombres de Fibonacci

Ces nombres sont appelés les *nombres de Fibonacci*

On construit ainsi la suite F telle que $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$ et pour tout entier naturel n, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Définition 66.3

Suite de Fibonacci

La suite (F_n) définie par :

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

est appelé *suite de Fibonacci*. Les termes de la suite sont les *nombres de Fibonacci.*

On peut représenter ce problème sur un tableur.

```
A1 : 0
B1 : 1
C1 : =A1+B1
A2 : =B1
B2 : =C1
```

On fait ensuite glisser la cellule C1 sur la cellule C2 puis on fait glisser les cellules A2-B2-C2 (ensemble !) jusqu'aux cellules AX-BX-CX où X est un nombre entier que l'on veut. La colonne C nous donne les premiers nombres de Fibonacci.

0	1	**1**
1	1	**2**
1	2	**3**
2	3	**5**
3	5	**8**
5	8	**13**
8	13	**21**
13	21	**34**
21	34	**55**
34	55	**89**
55	89	**144**
89	144	**233**
144	233	**377**
233	377	**610**
377	610	**987**

FIGURE 66.4 – Nombres de Fibonacci dans un tableur OpenOffice.org Calc

2 Le tableur pour les lycéens

2 1 Suite de Syracuse

Soit a un nombre entier. La suite de Syracuse associé à l'entier a est définie par :

$$u_0 = a, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n}{2} \\ u_{n+1} = 3u_n + 1 \end{cases}, \ \forall n \geq 0.$$

La conjecture de Syracuse (qui n'a pas encore été démontré à ce jour) prévoit que, quelle que soit la valeur de a, la suite soit périodique de période 3 (qu'on appelle séquence $4, 2, 1$) à partir d'un certain rang.

Grâce à un tableur, on peut donner les premiers termes de la suite de Syracuse associé à $a = 250$.

```
A1 : 250
A2 : =SI(MOD(A1;2)=0;A1/2;3*A1+1)
```

Puis on fait glisser la cellule A2 vers la cellule AX où X est un nombre entier que l'on veut (voir la figure 66.5).

On veut maintenant la courbe représentative de la suite, c'est-à-dire en abscisse, le numéro du terme et en ordonnées, la valeur du terme. On utilise toujours le tableur. On fait glisser la colonne des termes de la suite jusqu'à ce qu'on obtienne 1. On sélectionne ensuite la colonne entière des termes et on clique sur `Insertion > Diagramme`. On construit un diagramme `Ligne`. Le logiciel propose un graphique avec ou sans relier les points. On choisit le graphique où on a relié les points (voir la figure 66.6).

Ce n'est pas terminé ! On nous demande maintenant quel est le maximum de la suite de Syracuse associée à $a = 250$ et de le placer dans la cellule D2 (voir la figure 66.7).

```
C2 : Maximum :
D2 : =MAX(A1:A110)
```

250
125
376
188
94
47
142
71
214
107
322
161
484
242
121
364
182
91
274
137
412
206
103
310
155
466
233
700
350
175
526

FIGURE 66.5 – Les premiers termes de la suite de Syracuse associé à $a = 250$ calculés par le tableur OpenOffice.org Calc

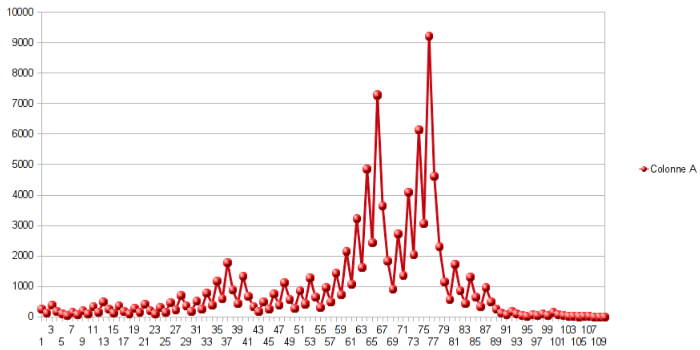


FIGURE 66.6 – Courbe représentative de la suite de Syracuse associée à $a = 250$

Maximum :	9232

FIGURE 66.7 – Maximum de la suite de Syracuse associée à $a = 250$ calculée par le tableur OpenOffice.org Calc

2.2 Tableau de valeurs et courbe de fonction

On veut donner le tableau de valeurs de la fonction $f : x \mapsto x^2$. On va, pour cela, utiliser un tableur. Sur la première ligne, on met les valeurs de 0.5 à 0.5 en partant de -5 à 5.

```
A1 : -5
B1 : -4,5
...
T1 : 4,5
U1 : 5
A2 : A1^2
```

puis on fait glisser la cellule A2 jusqu'à la cellule U2 et on obtient le tableau de valeurs de f.

5	-4,5	-4	-3,5	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
25	20,25	16	12,25	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9	12,25	16	20,25	25

FIGURE 66.8 – Tableau de valeurs de la fonction $f : x \mapsto x^2$

Ensuite, on veut tracer la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x^2$ sur l'intervalle $[-5\,,5]$. On utilise le tableau de valeurs qu'on a construit précédemment. On sélectionne le tableau entier puis on va construire un graphique (`Insertion > Diagramme`). On sélectionne le graphique `Ligne` et l'option « *Lignes lisses* ». Dans l'onglet « *Plage de données* », il faut sélectionner l'option « *Séries en données en lignes* » et « *Première ligne comme étiquette* ».

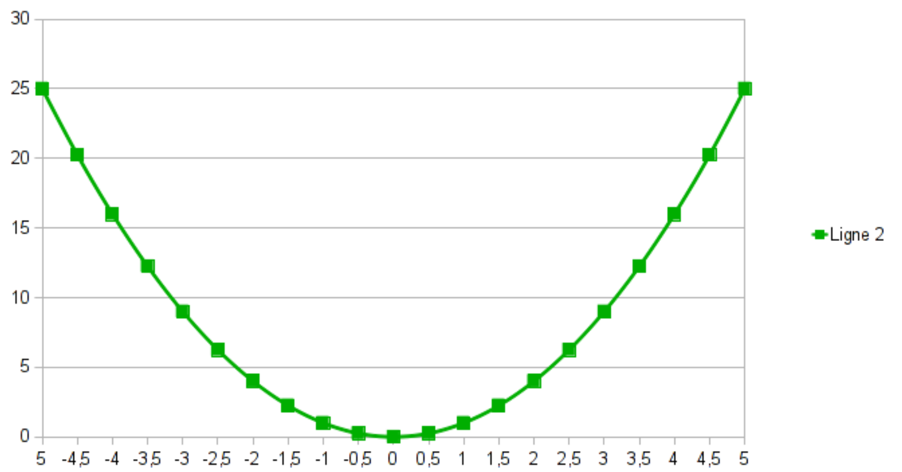


FIGURE 66.9 – Courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x^2$ sur l'intervalle $[-5\,,5]$

3 Le tableur pour les techniciens supérieurs

3.1 Régression linéaire

Sur un tableur, on donne la masse d'un objet en fonction du temps :

Temps (s)	*Masse (g)*
0	0
5	22
10	53
15	88
20	125
25	163
30	202
35	245
40	296
45	352
50	412

On construit le graphique sans relier les points :

- On sélectionne les deux colonnes du tableau.
- `Insertion > Diagramme`
- On sélectionne le diagramme `Ligne` sans relier les points.
- Dans l'onglet « *Plage de données* », on coche l'option « *Séries de données en colonnes* », « *Première ligne comme étiquette* » et « *Première colonne comme étiquette* ».

On veut ensuite l'ajustement linéaire des données statistiques (c'est-à-dire la droite qui minimise le carré des distances des points). Pour cela, on clique droit sur les points et on sélectionne « *Insérer une courbe de tendance* ». La courbe doit être « *Linéaire* » et on peut afficher l'équation de la droite.

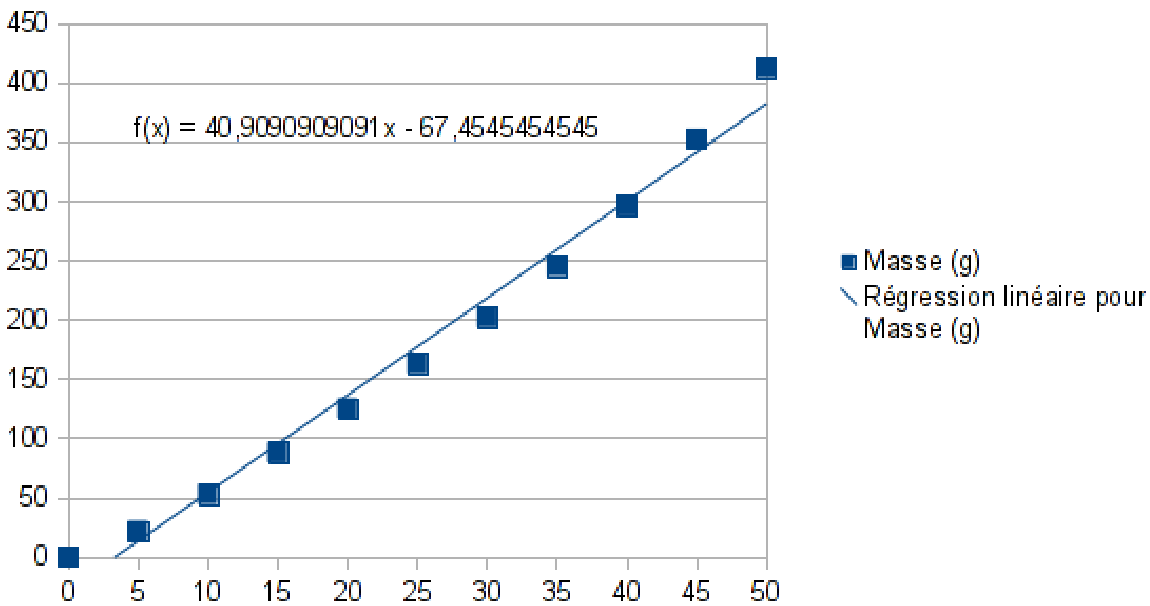
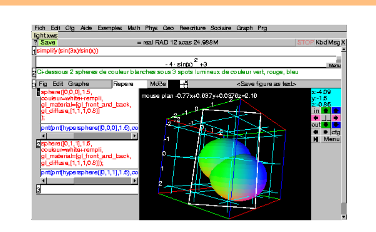


FIGURE 66.10 – Ajustement linéaire sur les données statistiques

LEÇON 67

Exemples d'utilisation d'un logiciel de calcul formel



Niveau : Lycée - BTS

Prérequis : notions de programmation, notions d'arithmétique (PGCD), notions d'analyse (fonctions, croissance), suites, équations différentielles, lois normales, notions de probabilités (calcul de probabilités et loi forte des grands nombres), calcul matriciel, résolution de systèmes d'équations

On utilise principalement un logiciel de calcul formel pour vérifier des résultats ou pour faire découvrir de nouvelles notions aux élèves.

Dans cette leçon nous allons utiliser le logiciel de clacul formel XCAS (disponible ici : http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac_fr.html.)

Bien entendu, il existe d'autres logiciels de calcul formel comme MAPLE, MAXIMA ou encore MATHEMATICA.

1 Arithmétique et algèbre linéaire

1.1 Introduction du PGCD en 3^e^

Voici une activité donnée à des élèves de 3^e^ qui permet de découvrir le PGCD. Comme l'utilisation de Xcas n'est pas recommandé en classe de collège, il y a des indications pour taper les bonnes commandes.

1. Trouver tous les diviseurs de 145 (on pourra utiliser la commande `L:=divisors(145)` qui crée une liste L qui contient tous les diviseurs de 145).
2. Trouver tous les diviseurs de 464 (on pourra utiliser la commande `M:=divisors(464)` qui crée une liste M qui contient tous les diviseurs de 464).
3. Quels sont les éléments communs de L et de M ? (pour obtenir les éléments communs de deux listes, on peut taper la commande `I := L intersect M`) ?
4. Quel est le plus grand élément de la liste I ? (pour obtenir le plus grand élément d'une liste I, on peut taper la commande `max(I)`).
5. On appelle PGCD de deux entiers naturels (Plus grand commun diviseur), le plus grand diviseur communs de ces deux nombres. Quel est le PGCD de 145 et 464 ? (on peut obtenir le PGCD de a et b, on peut taper la commande `gcd(a,b)`).
6. Choisir deux entiers naturels non nuls. Quel est leur PGCD ?

Développement

Éléments de réponses sur l'activité

1.
```
L := divisors(145)
```
$$[1, 5, 29, 145]$$

2.
```
M := divisors(464)
```
$$[1, 2, 4, 8, 16, 29, 58, 116, 232, 464]$$

3.
```
I := L intersect M
```
$$[1, 29]$$

4.
```
max(I)
```
$$29$$

5.
```
gcd(145,464)
```
$$29$$

6.
```
gcd(27,125)
```
$$1$$

1 2 Egalité de Bézout

Définition 67.1

Egalité de Bézout

On appelle *égalité de Bézout*, une équation du type :

$$ax + by = \text{PGCD}(a, b)$$

avec a et b deux entiers nautrels non nuls et x et y deux entiers inconnus.

Développement

Théorie sur l'égalité de Bézout

Théorème 67.2

Bachet-Bézout

Étant donnés deux entiers relatifs a et b, si d est le PGCD de a et b alors il existe deux entiers relatifs x et y tels que $ax + by = d$.

Remarque 67.3. a et b sont premiers entre eux si et seulement si deux entiers relatifs x et y tels que $ax + by = 1$.

Théorème 67.4

Résolution des équations diophantiennes

On se donne une équation diophantienne :

$$ax + by = c$$

a. Si $\delta = \text{PGCD}(a, b) \nmid c$ alors l'équation n'a pas de solution.

b. Si $\delta \mid c$ alors les solutions de cette équation sont les couples d'entiers relatifs de la forme :

$$\left(U + \frac{b}{\delta} \times k, V - \frac{a}{\delta} \times k\right)$$

où k est un entier relatif et (U, V) les solutions particulières de l'égalité $ax + by = c$.

On souhaite résoudre l'égalité de Bézout suivante : $45x + 75y = 15$. Xcas permet de donner une solution particulière de l'égalité de Bézout grâce à la commande `bezout_entiers`.

Développement

Résolution de l'égalité de Bézout $45x + 75y = 15$

On remarque que $\text{PGCD}(45, 75) = 15$ grâce à l'algorithme d'Euclide. Donc l'équation diophantienne $45x + 75y = 15$ est équivalente à $3x + 5y = 1$. Une solution particulière peut être donnée grâce à Xcas :

```
bezout_entiers(45,75)
```

$$[2, -1, 15]$$

$$(x = 2, y = -1),$$

Ainsi :

$$3(x - 2) + 5(y + 1) = 0.$$

On en déduit que :

$$3(2 - x) = 5(y + 1)$$

Les nombres 3 et 5 étant premiers, 3 divise $(y + 1)$ et 5 divise $(2 - x)$. Il existe donc deux entiers k et k' tels que :

$$2 - x = 5k \quad \text{et} \quad y + 1 = 3k'$$

Si on remplace dans la précédente équation :

$$3 \times 5k = 5 \times 3k',$$

ceci montre que $k = k'$ et donc :

$$2 - x = 5k \quad \text{et} \quad y + 1 = 3k,$$

ou encore :

$$x = -5k + 2 \quad \text{et} \quad y = 3k - 1.$$

Réciproquement, on voit que :

$$3(-5k + 2) + 5(3k - 1) = -15k + 6 + 15k - 5 = 1.$$

Les solutions sont donc exactemnet les couples :

$$(x = -5k + 2; y = 3k - 1).$$

1.3 Résolution de systèmes d'équations

On souhaite résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = 150 \\ 3x + 2y - z = 100 \\ -2x + 3y + 2z = 300 \end{cases}$$

On peut résoudre ce système d'équations grâce à la méthode du Pivot de Gauss. Nous allons dans cette leçon, utiliser le logiciel XCAS pour résoudre ce système linéaire par deux méthodes :

1. résolution directe du système linéaire

```
resoudre_systeme_lineaire([x+y+z=150,3*x+2*y-z=100,-2*x+3*y+2*z
   =300],[x,y,z])
                        [125/8,125/2,575/8]
```

2. par le calcul matriciel

```
A := [[1,1,1],[3,2,-1],[-2,3,2]]
                           [[1,1,1],
                            [3,2,-1],
                            [-2,3,2]]
det(A)
                               16
inv(A)
                      [[7/16,1/16,-3/16],
                       [-1/4,1/4,1/4],
                       [13/16,-5/16,-1/16]]
B := [150,100,300]
                        [150,100,300]
inv(A)*B
                        [125/8,125/2,575/8]
```

2 Analyse et probabilité

2.1 Suites et convergence

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \end{cases}$$

Calculer les 5 premiers termes de la suite ? Quelle est la limite de (u_n) quand $n \to +\infty$?

On donne un petit programme pour obtenir les termes de la suite (u_n) :

```
u(n):={
si n==0 alors 1;
sinon sqrt(1+u(n-1));
fsi
}
:;
```

```
seq([u(k),evalf(u(k))],k=0..4)
[1,1.0],[sqrt(2),1.41421356237],[sqrt(1+sqrt(2)),1.55377397403],[
   sqrt(1+sqrt(1+sqrt(2))),1.59805318248],[sqrt(1+sqrt(1+sqrt(1+
   sqrt(2)))),1.61184775413]
```

La suite semble converger vers :

```
u(1000)
                              1.61803398875
```

qui correspond au nombre d'or :

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618.$$

2 2 Étude d'une fonction

Utilisation de Xcas pour étudier les fonctions

Exercice 67.5. À tout nombre réel m, on associe la fonction f_m définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f_m(x) = \frac{x^2+m}{x-1}.$$

1. **a.** Déterminer la fonction dérivée de f_m.

b. Suivant les valeurs de m, dresser le tableau de variation de f_m.

2. Pour quelles valeurs de m, la fonction f_m admet-elle un maximum et un minimum locaux ?

Développement

Solution.

```
f(m,x) := (x^2+m)/(x-1)
          (m,x)->(x^2+m)/(x-1)
```

1. **a.**

```
diff(f(m,x),x)
             2*x/(x-1)-(x^2+m)/(x-1)^2
```

b. Si $m < 1$:

```
resoudre(2*x/(x-1)-(x^2-2)/(x-1)^2>0)
                          list[x<1,x>1]
```

la dérivée de f_m est toujours positive donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Si $m = -1$:

```
resoudre(2*x/(x-1)-(x^2-1)/(x-1)^2>0)
               Inéquation est constante par rapport àx
```

Si $m > -1$:

```
resoudre(2*x/(x-1)-(x^2)/(x-1)^2>0)  // m=0
              list[x<0,x>2]
resoudre(2*x/(x-1)-(x^2+2)/(x-1)^2>0)  // m=2
              list[x<(-(sqrt(3))+1),x>(sqrt(3)+1)]
```

La fonction dérivée f_m est négative sur l'intervalle $I = [-\sqrt{m}+1\,,\sqrt{m}+1]$ et positive sur $J = \mathbb{R} \setminus I$.
(Faire les tableaux de variations en exercice).
Pour tracer la fonction f_0 dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on peut taper :

```
plot(f(0,x),x)
```

2. f_m admet un maximum et un minimum locaux quand $m \geq -1$ atteint en $x = -\sqrt{m}+1$ et $x = \sqrt{m}+1$.

```
(-sqrt(m)+1,f(-sqrt(m)+1,m))
            ( -(sqrt(m))+1,(m^2-(sqrt(m))+1)/(m-1))
(sqrt(m)+1,f(sqrt(m)+1,m))
          (sqrt(m)+1,(m^2+sqrt(m)+1)/(m-1))
```

□

2 3 Résolution d'équations différentielles

Résoudre les équations différentielles suivantes sur le logiciel Xcas :

1.

$$\begin{cases} y' + y * \cos(t) = \frac{1}{2}\sin(2t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

2.

$$y'' - 9y = 6\mathrm{e}^{-3x}$$

Développement

Solution.

1.

```
deSolve([y'+y*cos(t)=sin(2*t)/2,y(0)=1],y)
(-2*(-2*cos(t)+sin(2*t))*1/2*1/cos(t)*1/2*1/cos(t)*2*cos(t)*cos(t)*exp(-x*cos(
   t))+sin(2*t))/(cos(t)*2)
```

2.

```
deSolve(y''-9y=6*exp(-3x),y)
     (3*c_0+c_1+1)*exp(3*x)/6+(-6*x+3*c_0-c_1-1)*exp(-3*x)/6
```

□

2 4 Probabiltés

1. Simuler un lancer de pièces ou un lancer de dés

Pour simuler un lancer de

– pièces (2 faces : pile (0) ou face (1)) :

```
rand(1)
                              0
```

– dès (6 faces : $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$) :

```
rand(6) + 1
                    5
```

1. Calculer la fréquence d'apparition du 3 dans un lancer de dés.
2. On considère une pièce biaisé telle que la face pile à 1 chance sur 5 de tomber et la face « face » à 4 chances sur 5 de tomber.

   Donner un programme qui permet de simuler ce lancer.

Développement

Solution.

1.

```
freq3(n) fonction
  local k,r,nb;
     k := 1;
     nb := 0;
     tantque k <> n faire
       r := rand(6)+1;
       si r = 3 alors
         nb := nb + 1;
       fsi
         k := k+1;
     ftantque
  retourne (nb/n);
ffonction:;
```

Pour obtenir la fréquence d'appartition de 3, il faut exécuter le programme pour de grandes valeurs de n (résultat de la loi forte des grandes nombres).

```
freq3(20000)
Temps mis pour l'évaluation: 0.68
                  831/5000
evalf(831/5000)
                   0.1662
```

proche de $\frac{1}{6} \approx 0,1666$.

2. Le programme ci-dessous permet de simuler un lancer de cette pièce biaisé.

```
lancerpiecebiaise() fonction
  local k;
  k := rand(5)+1
    si k = 1 alors
      retourne("pile")
      sinon
      retourne("face")
      fsi
ffonction:;
```

```
lancerpiecebiaise()
                     face
```

□

2. Lois normales

Lorsqu'une variable aléatoire X suit une loi normale centrée réduite, on a :

```
P(X <= x) = normal_cdf(x)
```

et

```
P(x <= X <= y) = normal_cdf(x,y)
```

Exercice 67.6. À l'aide de Xcas, calculer $P(3400 \leq X \leq 4000)$ si $X \sim \mathfrak{N}(< 3700, 182)$.

Développement

Démonstration. On centre la variable aléatoire :

$$P(3400 \leq X \leq 4000) = P\left(\frac{3400-3700}{182} \leq \frac{X-3700}{182} \leq \frac{4000-3700}{182}\right).$$

Soit $T = \frac{X-3700}{182} \sim \mathfrak{N}(0,1)$, donc :

$$P(3400 \leq X \leq 4000) = P\left(\frac{3400-3700}{182} \leq T \leq \frac{4000-3700}{182}\right) = P\left(-\frac{300}{182} \leq T \leq \frac{300}{182}\right).$$

On utilise ensuite la propriété suivante $P(-a \leq T \leq a) = 2\Phi(a) - 1$.

$$P(3400 \leq X \leq 4000) = 2\Phi\left(\frac{300}{182}\right) - 1.$$

On calcule $\Phi\left(\frac{300}{182}\right)$ sur Xcas :

```
evalf(normal_cdf(300/182))
                              0.950359734043
```

et donc :

$$P(3400 \leq X \leq 4000) \approx 2 \times 0,95 - 1 \approx 0,9.$$

□

3 Algorithmes

3.1 Algorithme d'Euclide

Soient a et b deux entiers relatifs. L'algorithme d'Euclide permet de calculer le plus grand commun diviseur des entiers a et b.

Remarque 67.7. Puisque l'algorithme a pour objet le calcul d'un PGCD, il est possible de se restreindre aux entiers positifs, un PGCD de deux entiers relatifs étant égal au PGCD de leurs valeurs absolues.

Description de l'algorithme.

– Le cas où a et b est nul est trivial car $\mathrm{PGCD}(a,0) = a$.
– On définit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence telle que $a_0 = a$ et $a_1 = b$ puis tant que a_{n+1} n'est pas nul, a_{n+2} est défini comme le reste de la division euclidienne de a_n par a_{n+1}.
  On commence donc par calculer le reste de la division de a par b, qu'on note r ; puis on remplace a par b, puis b par r et on réapplique le procédé depuis le début.
  On obtient ainsi une suite, qui vaut 0 à un certain rang ; le PGCD cherché est le terme précédent de la suite.

Démonstration. On montre que l'algorithme s'arrête à un moment donné.
La définition meme de la suite (a_n) par division euclidienne montre que, pour tout n tel que a_{n+1} est non nul, il existe un entier q_{n+2} tel que $a_n = q_{n+2} \times a_{n+1} + a_{n+2}$ avec de plus $0 \leq a_{n+2} < a_{n+1}$ pour tout n tel que a_{n+1} non nul. La suite d'entiers naturels (a_n) est donc strictement décroissante (tant qu'elle est non nulle) à partir du rang 1, et donc vaut 0 à un certain rang. L'existence d'un deernier reste non nul est ainsi établie. □

Exemple 67.8. On calcule, par exemple, le PGCD de 1071 et de 1029 à l'aide de l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned}1071 &= 1029 \times 1 + 42\\ 1029 &= 42 \times 24 + 21\\ 42 &= 21 \times 2 + 0\end{aligned}$$

Il faut prendre le dernier reste avant le zéro donc $\mathrm{PGCD}(1071, 1029) = 21$.

Voici l'algorithme implémenté sur Xcas :

```
pgcdeuclide(a,b):={
  local r;
  tantque b <> 0 faire
    r := irem(a,b)
    a := b
    b := r
  ftantque
    retourne(a)
}
```

```
pgcdeuclide(1071,1029)
                        21
```

3 2 Dichotomie

1. Problème

Soient $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) < f(b)$. On veut calculer m tel que $f(m) = 0$. Pour cela, on construit deux suites (a_n) et (b_n) convergentes vers m.

2. Principe

- On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
- Soit m_0 le milieu de $[a, b]$:
  - Si $f(m_0) > 0$ alors on pose $a_1 = a_0$ et $b_1 = m_0$
  - Sinon on pose $a_1 = m_0$ et $b_1 = b_0$.
- Ainsi de suite, si on veut construire le k^{e} terme de la suite, on pose m_{k-1} le milieu de $[a_{k-1}, b_{k-1}]$:
  - Si $f(m_{k-1}) > 0$ alors $a_k = a_{k-1}$ et $b_k = m_{k-1}$
  - Sinon on pose $a_k = m_{k-1}$ et $b_k = b_{k-1}$.

3. L'algorithme sur Xcas

```
dicho(F,p,a,b):={
local aa,bb,k,f;
aa:=a;
bb:=b;
```

```
epsilon:=1e-100;
f:=unapply(F,x);
k:=0;
tantque evalf(bb-aa,p)>10^(-p) faire
si sign(evalf(f((bb+aa)/2),p))==sign(evalf(f(bb),p))
alors bb:=evalf((aa+bb)/2,p);
sinon aa:=evalf((aa+bb)/2,p);
k:=k+1;
fsi;
ftantque;
retourne evalf((bb+aa)/2,p)+" est la solution trouvee apres " +k+ "
    iterations";
}:;
```

```
dicho(x^4-x^2+x-4,5,0,5)
         1.47198 est la solution trouvee apres 11 iterations
```

et sa version récursive :

```
dicho_rec(f,a,b,eps,compteur):={
  si evalf(b-a)<eps alors 0.5*(b+a),compteur+1
     sinon si f(a)*f(0.5*(b+a))>0
         alors dicho_rec(f,0.5*(b+a),b,eps,compteur+1)
         sinon dicho_rec(f,a,0.5*(b+a),eps,compteur+1)
         fsi
  fsi
}:;
```

```
dicho_rec(x->x^4-x^2+x-4,0,5,10^(-6),0)
                            (1.47198408842,24)
```

4. Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 67.9

Théorème des valeurs intermédiaires
Soient I un intervalle, a et b dans I tels que $a < b$. Soit f une application *continue* sur l'intervalle I. Soit λ, un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe (au moins) un réel c dans $[a\,,b]$ tel que $f(c) = \lambda$.

Développement

Démonstration du théorème 67.9. Supposons $f(a) < f(b)$. Nous allons construire deux suites adjacentes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par l'algorithme suivant :

- Si le milieu m de l'intervalle $[a\,,b]$ est tel que $f(m) \geq m$ alors on pose $a_1 = a$ et $b_1 = m$.
- Sinon, on pose $a_1 = m$ et $b_1 = b$.

On recommence le découpage :

- Si le milieu m de l'intervalle $[a_1\,,b_1]$ est tel que $f(m) \geq \lambda$ alors on pose $a_2 = a_1$ et $b_2 = m$.
- Sinon, on pose $a_2 = m$ et $b_2 = b_1$.

On a ainsi :

$$a \leq a_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq b_1 \leq b \quad \text{et} \quad f(a_2) \leq \lambda \leq f(b_2).$$

En réitérant le procédé, on construit ainsi une suite de segments emboîtés [1] :

$$[a\,,b] \supset [a_1\,,b_1] \supset \cdots \supset [a_n\,,b_n] \supset \cdots.$$

1. Il s'agit d'une méthode de *dichotomie*.

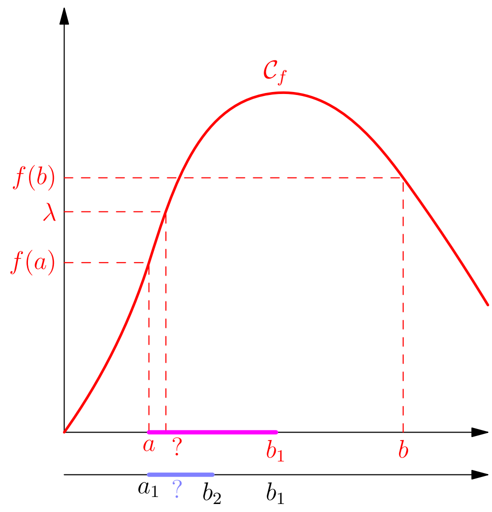


FIGURE 67.1 – Illustration de la suite construite

De plus, par construction, la longueur de $[a_n\,, b_n]$ est $\frac{b-a}{2^n}$. Les segments $[a_n\,, b_n]$ ont donc des longueurs qui tendent vers 0. Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont donc adjacentes.
Notons c leur limite commune (ce réel c est dans l'intervalle $[a\,, b]$). Montrons que $f(c) = \lambda$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f(a_n) \leq \lambda \leq f(b_n)$$

et par passage à la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n)\lambda \leq \lim_{n\to+\infty} f(b_n).$$

Or, f est continue en c donc :

$$f(c) \leq \lambda \leq f(c)$$

et ainsi $f(c) = \lambda$. On a bien montré qu'il existe un réel c dans $[a\,, b]$ tel que $f(c) = \lambda$. □

Remarques 67.10.

a. Le théorème des valeurs intermédiaires nous dit que l'équation $f(x) = \lambda$ $(f(a) < \lambda < f(b))$ admet au moins une solution dans $[a\,, b]$.

b. L'hypothèse de continuité est *indispensable* dans le théorème. Essayer d'applique le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction « partie entière » avec $a = 0$, $b = 1$ et $\lambda = \frac{1}{2}$...

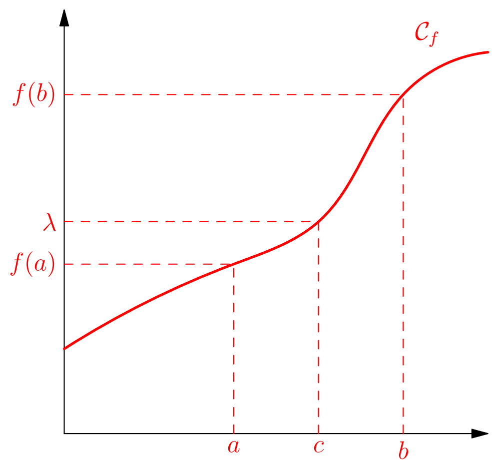


FIGURE 67.2 – Cas d'une fonction monotone

Exemple 67.11. Tout polynôme de polynôme P (à coefficients réels) de degré impair admet (au moins) une racine réelle. En effet, comme le degré de P est impair, on a :

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty.$$

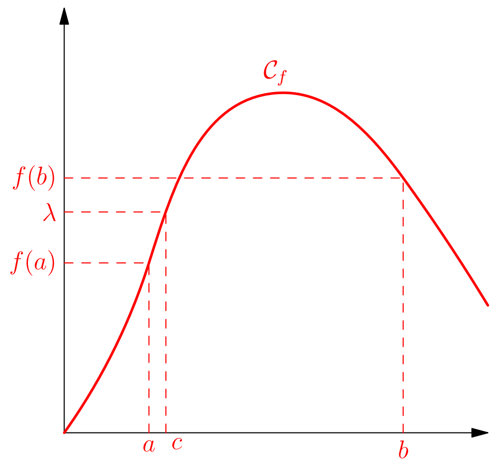


FIGURE 67.3 – Cas d'une fonction non monotone

En conséquence, il existe un réel $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x < a$, on ait $P(x) < 0$ et un réel $b \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > b$, on ait $P(x) > 0$. Comme P est une fonction continue, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer l'existence d'un réel $c \in]a\,,b[$ tel que $P(c) = 0$.

Remarque 67.12. Le théorème des valeurs intermédiaires n'admet pas de réciproque. Une fonction f peut très bien vérifier la propriété des valeurs intermédiaires sans être continue. Considérer par exemple la fonction f définie sur $I = \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ x_0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \text{ où } x_0 \in [-1\,,1].$$

On peut montrer (en exercice) que la fonction f est non continue en 0 et vérifie pourtant la propriété des valeurs intermédiaires. En effet, soient a et b deux réels avec $a < b$.

- Si a et b sont non nuls et de même signe, alors c'est immédiat (puisque dans ce cas f est continue sur $[a\,,b]$).
- Si $a = 0$ (et $b > 0$) alors on prend un réel λ compris entre $f(a) = x_0$ et $f(b)$. Comme $\lambda \in [-1\,,1]$, on peut toujours trouver un réel $X \geq \frac{1}{b}$ tel que $\sin X = \lambda$. En posant $x = \frac{1}{X}$, il vient bien $f(x) = \lambda$ avec $x \in [a\,,b]$.
- On raisonne de même si on a un intervalle $[a\,,0]$ ou $[a\,,b]$ lorsqu'il contient 0.

5. C'est plus, c'est moins !

L'utilisateur du programme choisit un nombre au hasard entre 1 et 100. Donner un algorithme qui permet à l'ordinateur de détecter le nombre choisi par l'utilisateur.

Pour cela, on va utiliser la méthode de dichotomie.

```
plusmoins(n) fonction
  local a,b,m;
  a := 0;
  b := 100;
  m := (a+b)/2;
  tantque m <> n faire
      si m < n alors
        a := m+1;
        m := floor((a+b)/2)
      sinon
        b := m-1;
        m := floor((a+b)/2)
        fsi
   ftantque
     retourne(m)
ffonction:;
```

```
plusmoins(80)
                              80
```

LEÇON

68

Différents types de raisonnement en mathématiques

Niveau : Lycée
Prérequis : vocabulaire de la logique : assertion, implication, équivalence, quantificateurs, négation

1 Introduction

La place de la logique et du raisonnement est très importante dans les programmes du secondaire. En effet, l'étude des formes diverses de raisonement et la nécessité de distinguer implication et causalité sont essentielles à la formation mathématique.

Ainsi, les mathématiques vont permettent de distinguer le vrai du faux grâce à la mise en place d'une démarche logique qui mène à la conclusion. Cette démarche doit être convaincante pour tous : il s'agit du raisonnement. Le raisonnement est le moyen de valider ou d'infirmer une hypothèse et de l'expliquer à autrui. Reste à savoir quel type de raisonnement il faut mener pour arriver au résultat attendu.

2 Raisonnement direct

Définition 68.1

Raisonnement direct

On veut montrer que l'assertion « $P \Rightarrow Q$ est vraie. On suppose que P est vraie et on veut monntrer qu'alors Q est vraie. C'est la méthode la plus fréquemment utilisée.

Remarque 68.2. Dans le cas où P est fausse alors l'assertion « $P \Rightarrow Q$ est vraie, quelque soit la valeur de vérité de Q.

Exemples 68.3.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $16n^2 - 48n + 33 \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{Q}_*^+$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > x$.

Développement

Résolutions.

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Puisqu'un produit, une somme et une différence d'entiers naturels relatifs sont des entiers relatifs, on en déduit que $16n^2 - 48n + 33$ est un entier relatif.
   D'autre part, on a l'égalité :
   $$16n^2 - 48n + 33 = 4(2n-3)^2 - 3.$$
   Puisque, $n \in \mathbb{Z}$, $2n-3 \in \mathbb{Z}^*$ et donc $|2n-3| \leq 1$. D'où $(2n-3)^2 \leq 1$. Il s'en suit que l'on a
   $$4(2n - 3ř^2 - 3 \leq 4 - 3 = 1.$$
   Donc : $16n^2 - 48n + 33 \in \mathbb{N}$. On a ainsi démontré que pour tout entier relatif n, $16n^2 - 48n + 33 \in \mathbb{N}$.
2. Soit $x \in \mathbb{Q}_*^+$. Il existe deux entiers p, q ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$) tel que $x = \frac{p}{q}$. Comme q est un entier strictement positif, $q \geq 1$, alors $p = xq \geq x$. En particulier, $p > 0$. D'où $2p > P$. Il vient $2p > x$. Comme $2p \geq 0$, $2p \in \mathbb{N}$. Donc $n = 2p$ convient.

□

3 Raisonnement par disjonction des cas (ou cas par cas)

Définition 68.4

Raisonnement par disjonction des cas

Si l'on souhaite vérifier une assertion $P(x)$ pour tous les x dans un ensemble E, on montre l'assertion pour les x dans une partie A de E puis pour tous les x n'appartenant pas à A. C'est la *méthode de disjonction* ou du cas par cas.

Remarque 68.5. Finalement, on partitionne E en $E = A \cup E \setminus A$.

Exemples 68.6.

1. Montrer que pour tout $(a,b) \in \mathbb{N}^2$, $ab(a^2-b^2)$ est divisible par 3.
2. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\max(x,y) = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|).$$

Développement

Résolutions.

1.

1er cas a **ou** b est multiple de 3. Si $3 \mid a$ alors $3 \mid ab(a^2-b^2)$ et si $3 \mid b$ alors $3 \mid ab(a^2-b^2)$. Dans ce premier cas, l'assertion eset vraie.

2e cas a **et** b ne sont pas multiples de 3. Tout entier naturel s'écrit sous la forme $3k$, $3k+1$, $3k+2$ où $k \in \mathbb{N}$. Comme a et b ne sont pas multiples de 3, ils s'écrivent sous la forme $3k+1$ ou $3k-1$ (qui revient à la forme $3k+2$). On peut alors montrer, en distinguant les cas, que a^2-b^2 est divisible par 3.

- Si $a = 3k+1$ et $b = 3k'+1$ avec $k, k' \in \mathbb{N}$:

$$a^2 - b^2 = (3k+1)^2 - (3k'+1)^2 = 9(k^2 - k'^2) + 6(k-k') = 3(3(k^2-k'^2) + 2(k-k')).$$

  Donc $3 \mid a^2 - b^2$ et par suite, $3 \mid ab(a^2-b^2)$.
- Si $a = 3k+1$ et $b = 3k'-1$ avec $k, k' \in \mathbb{N} \dots$
- Si $a = 3k-1$ et $b = 3k'-1$ avec $k, k' \in \mathbb{N} \dots$
- Si $a = 3k-1$ et $b = 3k'+1$ avec $k, k' \in \mathbb{N} \dots$

2.

1er cas $x \leq y$. Comme $x \leq y$, $x - y \leq 0$ et donc $|x-y| = -(x-y)$. D'où :

$$\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y-(x-y)) = y$$

qui est bien le max entre x et y dans ce cas.

2e cas $x > y$. Comme $x > y$, $x-y > 0$ et donc $|x-y| = x-y$. D'où :

$$\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y+(x-y)) = x,$$

qui est bien le max entre x et y dans ce cas.

On conclut finalement que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\max(x,y) = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$.

Remarque 68.7. On aurait pu prouver de la même manière que $\min(x,y) = \frac{1}{2}(x+y-|x-y|)$.

□

4 Raisonnement par contraposition

Définition 68.8

Raisonnement par contraposition

Le *raisonnement par contraposition* permet de démontrer qu'une implication de type $(P \Rightarrow Q)$ est vraie. Ce raisonnement est basé sur l'équivalence suivante :

l'assertion $(P \Rightarrow Q)$ est équivalente à $(\neg Q \Rightarrow \neg P)$

Donc si l'on souhaite montrer l'assertion « $P \Rightarrow Q$ », on montre en fait que si $\neg Q$ est vraie alors $\neg P$ est vraie.

Exemples 68.9.

1. Montrer que $(\forall \varepsilon > 0,\ |a| \leq \varepsilon) \Rightarrow (a = 0)$.
2. Soit p un nombre premier. Montrer que :

$$(\forall k,\ 0 \leq k \leq n,\ p \mid \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}) \Rightarrow (\forall k,\ 0 \leq k \leq n,\ p \mid a_k) \vee (\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ p \mid b_i).$$

Développement

Résolutions.

1. Prenons l'énoncé contraposé : $(a \neq 0) \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0,\ |a| > \varepsilon)$. Ceci est immédiat. En effet, si on a $a \neq 0$, il suffit de prendre $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$. On a bien $\varepsilon > 0$ et $|a| > \frac{|a|}{2} = \varepsilon$.
2. Procédons par contraposée, ce qui donne à démontrer :

$$(\exists k,\ 0 \leq k \leq n,\ p \nmid a_k) \wedge (\exists i,\ 0 \leq i \leq n,\ p \nmid b_i) \Rightarrow (\exists k,\ 0 \leq k \leq n,\ p \nmid \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}).$$

Si p ne divise pas tous les a_k, soit r le premier indice tel que p ne divise pas a_r (donc p divise tous les précédents). De même, soit s le premier indice tel que p ne divise pas b_s. Alors p ne divise pas $a_0 b_{r+s} + \cdots + a_r b_s + \cdots + a_{r+s} b_0$ puisqu'il divise tous ces termes sauf $a_r b_s$. On utilise la propriété qui nous dit qu'un nombre premier divise un produit de facteurs alors il divise l'un de ses facteurs. On a donc trouvé $k = r + s$ tel que p ne divise pas $\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$.

□

5 Raisonnement par l'absurde

Définition 68.10

Raisonnement par l'absurde

Le *raisonnement par l'absurde* pour montrer l'implication « $P \Rightarrow Q$ » repose sur le principe suivant : on suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse et on cherche une contradiction. Ainsi, si P est vraie alors Q doit être vraie et donc « $P \Rightarrow Q$ » est vraie.

Exemples 68.11.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est continue sur $\mathbb{R}$ mais ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Montrer que f garde un signe constant strict sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $n \geq 1$ un entier naturel. On se donne $(n+1)$ réels $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de $[0\,,1]$ vérifiant $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq 1$. Montrer qu'il y a deux de ces réels qui sont distants de moins de $\frac{1}{n}$.

Développement

Résolutions.

1. On veut prouver « f est stricteent positive sur $\mathbb{R}$ **ou** f est strictement négative sur $\mathbb{R}$ ». Supposons que ce résultat soit faux. On suppose donc :

$$(\exists a \in \mathbb{R},\ f(a) \leq 0) \quad \text{et} \quad (\exists b \in \mathbb{R},\ f(b) \geq 0).$$

Mais comme on sait que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, on est certain que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ (et par conséquence $a \neq b$.
Ainsi f est continue sur le segment d'extrémités a et b et $f(a)$ et $f(b)$ ont des signes opposés. Par le théorème des valeurs intermédiaires, on peut affirmer l'existence d'un réel c tel que $f(c) = 0$.
Ce qui est absurde car f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Par un raisonnement par l'absurde, on a montré que si f est continue et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ alors f garde un signe constant.

2. On veut montrer qu'il existe i tel que $1 \leq i \leq n$ et $x_i - x_{i-1} \leq \frac{1}{n}$. Supposons que ce résultat soit faux, c'est-à-dire montrons que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad x_i - x_{i-1} > \frac{1}{n}.$$

On a :

$$x_n - x_0 = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + (x_1 - x_0) > n \times \frac{1}{n} = 1.$$

Ce qui est absurde car la longueur de l'intervalle ne peut excéder 1. La propriété initiale est donc vraie.

□

Remarque 68.12. Dans la pratique, on peut choisir indifféremment entre un raisonnement par contraposition ou par l'absurde.

6 Raisonnement par utilisation d'un contre-exemple

Définition 68.13

Contre-exemple

Si l'on veut montrer qu'une assertion du type « $\forall x \in E,\ P(x)$ » est vraie alors pour chaque x de E, il faut montrer que $P(x)$ est vraie.

Par contre, pour montrer que cette assertion est fausse, il suffit de trouver un $x \in E$ tel que $P(x)$ soit fausse.

Trouver un tel x, c'est trouver un *contre-exemple* à l'assertion « $\forall x \in E,\ P(x)$ ».

Exemples 68.14.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si ($f \geq 0$ et $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$) alors f est identiquement nulle sur $[0\,,1]$.

2. Si $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont deux suites qui n'admettent pas de limite alors la suite $(u_n v_n)_{n\geq 0}$ n'admet pas de limite.

Développement

Solution.

1. Pour montrer que cette implication est fausse, il suffit de donner un contre-exemple. On prend la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \,]0\,,1] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On a bien $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ mais f n'est pas identiquement nulle sur $[0\,,1]$.

2. Pour montrer que cette implication est fausse, il suffit de donner un contre-exemple. On prend les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n = (-1)^n$. Ces deux suites n'admettent pas de limites. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n v_n = (-1)^n (-1)^n = (-1)^{2n} = 1.$$

Donc, la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1 et elle a pour limite 1.

□

Définition 68.15

Principe de récurrence

Le *principe de récurrence* permet de montrer qu'une assertion $P(n)$, dépendante de n, est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La démonstration par récurrence se déroule en 3 étapes :

Étape 1 - Initialisation : On prouve que $P(0)$ est vraie.

Étape 2 - Hérédité : On suppose $n \geq 0$ donné avec $P(n)$ vraie et on démontre que l'assertion $P(n+1)$ est vraie.

Étape 3 - Conclusion : On rappelle que, par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarques 68.16.

a. Le principe de récurrence est basé sur la construction de $\mathbb{N}$. En effet, un des axiomes pour définir $\mathbb{N}$ est le suivant : « Soit A une partie de $\mathbb{N}$ qui contient 0 et telle que si $n \in A$ alors $n+1 \in A$, on a : $A = \mathbb{N}$.

b. La récurrence présentée ci-dessus est une récurrence dite simple mais il existe aussi des récurrences doubles, triples, etc….

Dans ce cas, par exemple pour une récurrence triple, les trois étapes deviennent :

Étape 1 - Initialisation : On prouve que $P(0)$, $P(1)$ et $P(2)$ sont vraies.

Étape 2 - Hérédité : On suppose $n \geq 3$ donné avec $P(n-3)$, $P(n-2)$ et $P(n-1)$ vraies et on démontre que l'assertion $P(n)$ est vraie.

Étape 3 - Conclusion : On rappelle que, par le principe de récurrence triple, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Lorsqu'on ne sait pas à l'avance combien de rangs il faut supposer vrais avant d'en déduire l'hérédité, on utilise le principe de récurrence forte. Dans l'étape 2 d'hérédité, on fixe $n \geq 0$ et on suppose que, pour tout $0 \leq k \leq n$, $P(k)$ est vraie et on montre que $P(n+1)$ est vraie. Dans la conclusion, on invoque le principe de récurrence forte.

Exemples 68.17.

1. Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} S_0 = 1 \\ \\ S_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k S_k. \end{cases}$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: « $S_n \leq n!$ » est vraie.

2. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ la suite de fonctions polynomes définie par :

$$\begin{cases} f_0(x) = 2 \\ f_1(x) = x \\ f_{n+2}(x) = x f_{n+1}(x) - f_n(x), \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^n + \frac{1}{x^n}$.

Développement

Résolutions.

1. On montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: « $S_n \leq n!$ » est vraie.

Initialisation $S_0 = 1 \leq 0! = 1$. $P(0)$ est vraie.

Hérédité Fixons $n \geq 0$. On suppose que, pour tout $0 \leq k \leq n$, $P(k)$ est vraie et on veut montrer que $P(n+1)$ est vraie :

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k S_k \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} k! \quad \text{car, pour tout } 0 \leq k \leq n,\ S_n \leq k!, \text{ d'après l'hyp. de récurrence.}$$

D'où :

$$S_{n+1} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!}.$$

Or, $0 \leq k \leq n$, $(n-k)! \geq 1$, donc $\frac{1}{(n-k)!} \leq 1$. Il vient alors :

$$S_{n+1} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \leq n! \sum_{k=0}^{n} 1 = n! \times n = (n+1).$$

Donc, $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion Par le principe de récurrence forte sur $\mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. En exercice ! (utiliser la récurrence double)

□

8 Raisonnement par analyse-synthèse

Définition 68.18

Raisonnement par analyse-synthèse

Pour justifier l'existence et parfois l'unicité d'une solution, on peut être amené à déterminer la forme de cele-ci (forme qui n'est pas nécessairement donnée dans l'énoncé). On raisonne par *analyse-synthèse*.

Analyse : On suppose qu'il existe au moins une solution et on essaie d'en tirer le maximum de renseignement la concernant. Cette étape assure parfois *l'unicité*.

Synthèse : On reporte dans le problème la ou les solutions trouvées précédemment, ce qui permet de déterminer s'il y a bien une solution au problème, puis une unique ou plusieurs. Cette étape assure *l'existence*.

Exemples 68.19.

1. Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ peut s'écrire d'une seule façon sous la forme $f = p + i$, où p est une fonction paire et i est une fonction impaire.
2. Recherche de lieu géométrique, par double inclusion.

Théorème 68.20

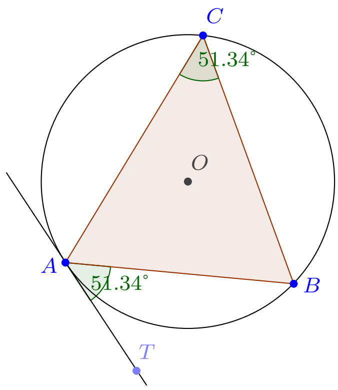
Arc capable

Soient A et B deux points distincts du plan $\mathcal{P}$ fixés et $\theta \in \mathbb{R}$. On note

$$E_\theta = \left\{ M \in \mathcal{P},\ (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \theta \pmod{\pi} \right\}.$$

a. Si $\theta \equiv 0 \pmod{\pi}$ alors $E_0 = (AB) \setminus \{A, B\}$.

b. Si $\theta \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ alors E_θ est le cercle passant par A et B, privé des points A et B, tagent à la droite (AT) en A où T est un point du plan défini par $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) \equiv \theta \pmod{\pi}$.



Développement

Démonstration.

1. Analyse : Supposons qu'il existe une fonction p paire et i impaire telles que $f = p + i$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = p(x) + i(x).$$

Comme p est paire et i est impaire, on en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x).$$

On a donc :

$$\begin{cases} f(x) = p(x) + i(x) \\ f(-x) = p(x) - i(x) \end{cases}.$$

Par somme, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}.$$

Par différence, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Pour l'instant, nous avons juste prouvé que si f se décompose sous la forme $f = p + i$ avec p paire et i impaire alors nécessairement p et i sont définies à partir de f comme précédemment. Elles sont donc uniques mais leur existence n'est pas encore démontrée.

Synthèse : Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définissons à partir de f deux fonctions p et i par les relations suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

On vérifie que c'est bien une solution du problème posé :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad p(x) + i(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = f(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad p(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = p(x),$$

p est donc bien une fonction paire.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad i(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -i(x),$$

i est donc bien une fonction impaire. Ceci prouve qu'on a bien l'existence d'une solution et exactement d'une seule solution d'après la partie synthèse.

Conclusion : Par analyse-synthèse, on a démontré que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, il existe un unique couple (p, i) tel que $f = p + i$ avec p est une fonction paire et i est une fonction impaire.

2. **a.** immédiat

b.

Analyse : Soit $M \in \mathcal{P} \setminus \{A, B\}$ tel que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \equiv \theta \pmod{\pi}$. Soit O le centre du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit (intersection des médiatrices) au triangle MAB. On a, d'après le théorème de l'angle au centre :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv 2\theta \pmod{2\pi}.$$

Dans le triangle ABO, on a :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) + (\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \pi \pmod{2\pi}.$$

Comme ABO est un triangle isocèle, on a que :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) \equiv \frac{\pi}{2} - \theta \pmod{\pi}.$$

Autrement dit, la tangente au cercle en A fait un angle θ avec (AB). Donc M appartient au cercle passant par A et B de centre O, tangent à la droite (AT) en A, où T est un point du plan défini par $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) \equiv \theta \pmod{\pi}$. D'où $E_\theta \subset \mathcal{C} \setminus A, B$.

Synthèse : Réciproquement, soit $M \in \mathcal{C} \setminus \{A, B\}$. On note $\theta' = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$. D'après ce qui précède,

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) \equiv \frac{\pi}{2} - \theta' \pmod{\pi} \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) \equiv \frac{\pi}{2} - \theta \pmod{\pi}.$$

D'où $\theta = \theta'$ et $M \in E_\theta$. Ainsi, $\mathcal{C} \setminus \{A, B\} \setminus E_\theta$.

Finalement, $E_\theta = \mathcal{C} \setminus \{A, B\}$.

□

9 Propositions de questions posées par le Jury

1. On estime à 1100000 le nombre d'habitants dans la métropole lilloise. On suppose que peronne ne possède plus de 800000 cheveux sur sa tête. Que peut-on affirmer ?
2. Démontrer, par l'absurde, que $\sqrt{2}$ est irrationnel. On pourra supposer que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ et définir l'ensemble $A = \left\{n \in \mathbb{N}^*,\ n\sqrt{2} \in \mathbb{N}\right\}$.
3. Peut-on calculer $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$?
4. Existe-il $\alpha, \beta \notin \mathbb{Q}$ tel que $\alpha^\beta \in \mathbb{Q}$?
5. Montrons par récurrence sur $n \geq 1$ que dans toute boite de n crayons de couleur, tous les crayons sont de la même couleur.

   Initialisation : La propriété est vraie pour $n = 1$.

   Hérédité : Supposons la propriété vraie au rang $n \geq 1$. On considère alors une boite de $(n+1)$ crayons de couleur, que l'on numérote de 1 à $n+1$. En enlevant le dernier crayon, on obtient une sous-boite qui, par hypothèse de récurrence, ne contient que des crayons de la même couleur. De même en enlevant le premier crayon. Les couleurs des deux sous-boites sont identiques, car il s'agit de la couleur des crayons communs aux deux sous-boites. D'où le résultat.

   Où est l'erreur ?

LEÇON

69

Applications des mathématiques à d'autres disciplines

Niveau : Terminale S

Prérequis : fonctions, équations différentielles, fonctions exponentielles, logarithmes, congruences, graphes

1 Démographie : fonction logistique

La fonction logistique est une famille de fonctions découverte par Verhulst. C'est une fonction de la forme :

$$t \mapsto f(t) = \frac{k}{1 + a\mathrm{e}^{-bt}}$$

avec

- t le temps ;
- $f(t)$ le nombre de personnes (bactéries, cellules) présentes au temps t ;
- $b > 0$, b dépend du taux de natalité et du taux de mortalité ($b = \alpha - \omega$, α naissance, ω mort)
- $k > 0$ dépend du type de population et de la contrainte liée au territoire (ou l'environnement) ;
- a provient de l'équation différentielle $(a > 0)$ car en effet, ces fonctions sont des solutions à l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y' = by\left(1 - \frac{y}{k}\right) \\ y(0) = y_0 \end{cases}.$$

Cette modélisation du développement d'une population est une amélioration de la modélisation faite par Malthus qui prenait comme équation différentielle : $y' = by$.

Cependant, cette modélisation n'est valable que si on considère que le territoire permet un développement infini (suivant la fonction exponentielle) de la population.

C'est pour cela que l'on ajoute la constante k que l'on peut aussi voir comme étant le nombre maximal de personnes qui peuvent vivre sur le territoire.

Développement

Résolution de l'équation différentielle. On veut résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y' = by\left(1 - \frac{y}{k}\right) & (E) \\ y(0) = y_0 \end{cases}.$$

On pose $z = \frac{1}{y}$ (l'on peut car y représente un nombre de personnes qui ne peut jamais s'annuler).

$$(E) \Leftrightarrow -\frac{z'}{z^2} = \frac{b}{z}\left(1 - \frac{1}{kz}\right) \Leftrightarrow z' = b\left(\frac{1}{k} - z\right) \quad (E')$$

Les solutions de (E') sont : $z : t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-bt} + \frac{1}{k}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ donc les solutions de (E) sont

$$y : t \mapsto \frac{1}{\lambda \mathrm{e}^{-bt} + \frac{1}{k}} = \frac{k}{\frac{\lambda}{k}\mathrm{e}^{-bt} + 1}.$$

On pose $a = \frac{\lambda}{k}$ donc $y(t) = \frac{k}{a\mathrm{e}^{-bt}+1}$. De plus, $y(0) = y_0$ donc $y_0 = \frac{k}{a+1} \Rightarrow a = \frac{k}{y_0} - 1$.

Remarque 69.1. $a > 0$ car $\frac{k}{y_0} > 1$ du fait que :

$$\begin{cases} k := \text{ population maximale} \\ y_0 := \text{ population initiale} \end{cases}$$

$\square$

2.1 Fonction de Gompetz

Cette fonction modélise la croissance des cellules d'ue tumeur. Elle de type :

$$t \mapsto x(t) = A\exp(k\exp(-at))$$

avec :

- x : biomasse
- t : temps
- A : taille maximale de la tumeur (10^{11})
- a : taux de croissance $(0,003\ \mathrm{j}^{-1})$
- $k = \ln\left(\frac{x_0}{A}\right)$.

Cette fonction est la solution à l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} x' = ax\ln\left(\frac{A}{x}\right) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Développement

Démonstration. Résolution de l'équation différentielle On veut résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} x' = ax\ln\left(\frac{A}{x}\right) & (E) \\ x(0) = x_0 \end{cases}.$$

Pour cela, on pose $y = \ln x$.

$$x' = ax\ln\left(\frac{A}{x}\right) \Leftrightarrow \frac{x'}{x} = A(\ln A - \ln x) \Leftrightarrow y' = a(\ln A - y) \qquad (E')$$

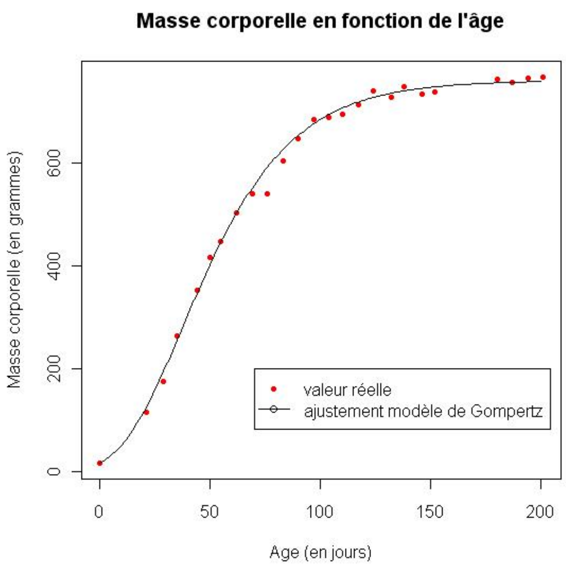
Les solutions de (E') sont :

$$y\colon t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-at} + \ln A, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Les solution de (E) sont :

$$x\colon t \mapsto \exp(\lambda\mathrm{e}^{-at} + \ln A) = A\exp(\lambda\exp(-at)).$$

De plus, $x(0) = x_0$ donc $x_0 = A\mathrm{e}^{\lambda} \Rightarrow \lambda = \ln\left(\frac{x_0}{A}\right)$. □



22 Phénotype-génotype et probabilités

On a un gène avec 2 allèles : A et a. A est prédominant sur a. La transmission d'une allèle du parent à l'enfant est aléatoire.

1. Déterminer la loi du génotype d'un enfant lorsque les deux parents ont pour génotype Aa.

2. On se place dans une population où les proportions des génotypes AA, Aa et aa sont respectivement p, q et r.

a. Sachant qu'un individu a le phénotype A, déterminer le loi de son génotype.

b. Même question avec un individu du phénotype aa.

c. Un enfant a 2 parents ayant le phénotype A, déterminer la loi de son phénotype.

d. Un enfant ayant 2 parents avec les phénotypes A et a, déterminer la loi de son phénotype.

e. Déterminer la loi du phénotype d'un enfant choisi au hasard.

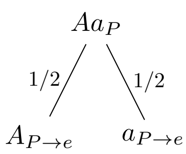
Développement

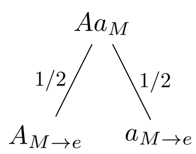
Solution.

1. On note :

- AA_P : « le père a pour phénotype AA »
- AA_M : « la mère a pour phénotype AA »
- $A_{P\to e}$ « le père donne A à son enfant »
- AA_e : « l'enfant a pour génotype AA ».

Les dons des allèles sont indépendants.





$$P(AA_e) = P(A_{P\to e} \cap A_{M\to e}) = P(A_{P\to e}) \times P(A_{M\to e}) = \frac{1}{4}$$

$$P(aa_e) = P(a_{P\to e} \cap a_{M\to e}) = \frac{1}{4}$$

$$P(Aa_e) = P((A_{P\to e} \cap a_{M\to e}) \cup (A_{M\to e} \cap a_{P\to e})) = P(A_{P\to e} \cap a_{M\to e}) + P(A_{M\to e} \cap a_{P\to e}) = \frac{1}{2}.$$

2. Pour un individu quelconque :

géno	AA	Aa	aa
P	$1/4$	$1/2$	$1/4$

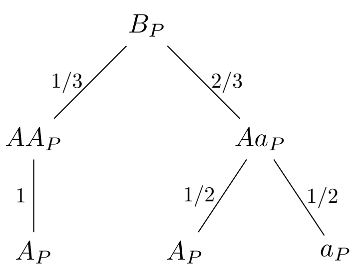
a. On note B : « individu du phénotype A » et b : « individu du phénotype a ».

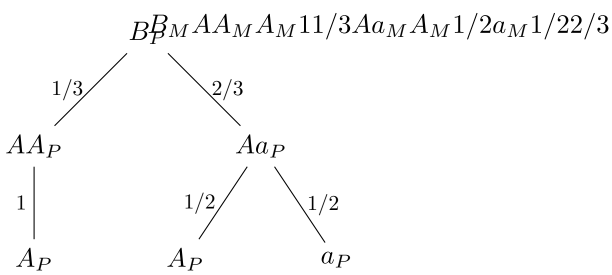
$$P(B) = P(AA \cup Aa) = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad P(b) = P(aa) = \frac{1}{4}.$$

$$P_B(AA) = \frac{P(AA \cap B)}{P(B)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}\ ;\ P_B(aa) = 0\ ;\ P_B(Aa) = \frac{2}{3}.$$

b. $P_B(AA) = 0$; $P_B(Aa) = 0$; $P_b(aa) = 1$.

c. On note B_P : « le père est du phénotype A ».





Ici :

$$P(A_P) = \frac{2}{3} = P(A_M)$$
$$P(a_P) = \frac{1}{3} = P(a_M)$$
$$P(b_e) = P(a_P \cap a_M) = \frac{1}{9}\ ;\ p(B_e) = \frac{1}{9}.$$

d.

$$\begin{array}{ccc} b_P & \qquad & b_M \\ 1\big| & & 1\big| \\ aa_P & & aa_M \\ 1\big| & & 1\big| \\ a_P & & a_M \end{array}$$

Si on a B_P et b_M :

$$P(b_e) = P(a_P \cap a_M) = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}.$$

Si on a b_P et B_M, on a :

$$P(b_e) = P(a_P \cap a_m) = 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

e. Pour cette question, on balaye les 6 cas possibles de génotypes :

$$(AA_P, AA_M),\ (Aa_P, AA_M),\ (aa_P, AA_M),\ (aa_P, Aa_M),\ (Aa_P, Aa_M),\ (aa_M, aa_P).$$

On peut construire l'arbre de probabilités (long à faire !).

□

---

3 Cryptographie : système RSA

3 1 Théorème

Théorème 69.2

Soient p et q deux nombres premiers et soit $n = pq$. On conidère $e \in \mathbb{N}$ tel que $1 < e < (p-1)(q-1)$ et $\mathrm{PGCD}(e, (p-1)(q-1)) = 1$. Alors :

(i) il existe un unique $d \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq d \leq (p-1)(q-1)$ et $ed \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)}$.

(ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^{ed} \equiv m \pmod{n}$.

Développement

Démonstration.

(i) On a : $\mathrm{PGCD}(e, (p-1)(q-1)) = 1$ donc d'après le théorème de Bézout, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $ue + v(p-1)(q-1) = 1$. Donc $eu \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)}$, donc il existe un unique d tel que $1 \leq d \leq (p-1)(q-1)$ et $ed = 1 \pmod{(p-1)(q-1)}$.

(ii) $n \mid m^{ed} - m$ si et seulement si p et q divisent $m^{ed} - m$ car p, q permiers.

Cas 1 : $p \mid m$ alors il est évident que $m^{ed} \equiv m \pmod{p} \equiv 0 \pmod{p}$.

Cas 2 : $p \nmid m$ alors d'après le petit théorème de Fermat, $m^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ et

$$m^{ed} \equiv m^{1+k(p-1)(q-1)} \equiv m(m^{p-1})^{k(q-1)} \equiv m \pmod{p},$$

de même pour q, d'où le résultat.

□

3.2 Principe

A veut envoyer un message à B, B choisit p, q et e, il caclule e et diffuse n et e. A choisit $m < n$ (m est le message), il calcule c tel que $1 \leq c < n$ et $m^e \equiv c \pmod{n}$, il diffuse c. B calcule c^d. Or :

$$c^d \equiv m^{ed} \pmod{n} \equiv m \pmod{n}.$$

3.3 Exemple

$p = 41$, $q = 53$, $n = 2173$, $e = 1427$, $d = 1089$.

$$M = \underbrace{356}_{m_3}\underbrace{453}_{m_2}\underbrace{213}_{m_1}$$

$$m_1^e \equiv 1273 \pmod{n} \quad c_1 = 1273$$

$$m_2^e \equiv 907 \pmod{n} \quad c_2 = 0907$$

$$m_3^e \equiv 1297 \pmod{n} \quad c_3 = 1297$$

donc $c = 127309071297$.

4 Physique et équations différentielles

4.1 Désintégration des noyaux radioactifs

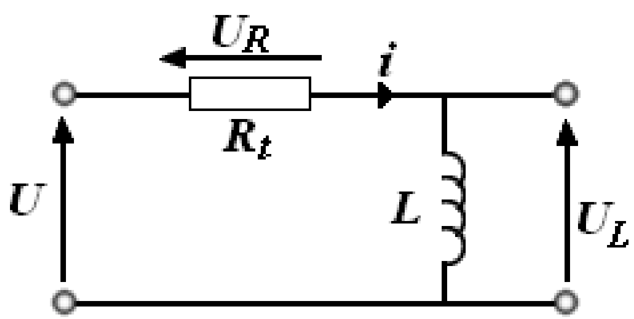
Soit $N(t)$ le nombre de noyaux radioactifs dans le corps au temps t. On note λ la constante radioactive (t^{-1}), $t_{1/2}$ le temps tel que $N(t_{1/2}) = \frac{N_t}{2}$. Il existe un tableau donnant les temps de demi-vie ($t_{1/2}$) de tous les noyaux radioactifs. De plus $t_{1/2}$ et λ sont liés par $\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$. N vérifie l'équation différentielle :

$$\begin{cases} N' = -\lambda N \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

donc $N(t) = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

Application : datation au carbone 14 : $t_{1/2} = 5730$ ans.

4.2 Circuit RL



L'équation différentielle qui régit le circuit est la suivante :

$$U = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + R_t.i$$

avec :

- U la tension aux bornes du montage, en V ;
- i l'intensité du courant électrique en A ;
- L l'inductance de la bobine en H ;
- R_t la résistance totale du circuit en Ω.

5.1 Théorie des graphes

Une entreprise doit respecter pour les mois de mai, juin et juillet, une commande de 2 chalets par mois.

L'entreprise peut stocker au maximum 2 chalets. Le stock coûte 60 € par chalet par mois.

L'entreprise peut construire un maximum de 4 chalets par mois. Le premier chalet coûte 1500 € pour sa construction mais les chalets suivants que l'on construit dans le même mois ne coûte que 500 € par chalet.

À la fin du mois du juillet, l'entreprise ne doit plus avoir de chalet en stock.

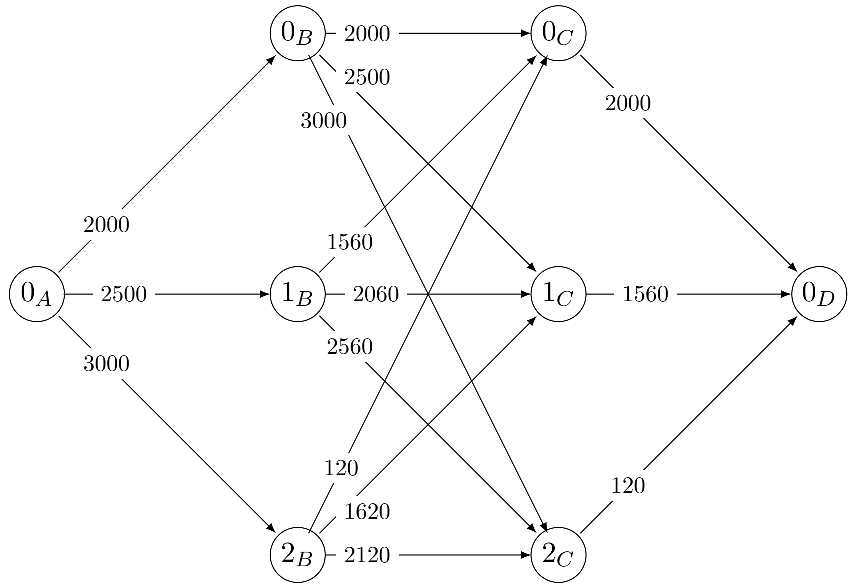
Comment faire pour minimiser les coûts ?

On utilise un graphe pondéré orienté pour visualiser la situtation.

Les sommets représentent le nombre de chalets mis en stock.

Les indices A, B, C et D représentent « début de mai », « fin de mai », « fin de juin » et « fin de juillet ».

On pondère avec les coûts entre 2 mois (en comptant le stock sur le mois suivant).



On cherche la chaîne la plus courte, on utilise donc l'algorithme de Dijkstra pour la trouver :

0_A	0_B	1_B	2_B	0_C	1_C	2_C	0_D
0							
	2000 (0_A)	2500 (0_A)	3000 (0_A)	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
				3120 (2_B)	4500 (0_B)	5000 (0_B)	
							5120 (2_C)
							5120 (0_C)

Il existe donc 2 chaînes de poids minimal :

$$0_A - 2_B - 0_C - 0_D \quad \text{et} \quad 0_A - 0_B - 2_C - 0_D.$$

Il y a donc deux possibilité :

- construire 4 chalets en mai, en stocker 2, ne rien construire en juin, en construire 2 en juillet.
- construire 2 chalets en mai, en construire 4 en juin, en stocker 2, ne rien construire en juillet.

5.2 Suite arithmético-géométrique

Une entreprise compte 220000 employées. Cette entreprise veut diminuer le nombre d'employés et pour cela, elle ne remplace pas tous les départs à la retraite. L'objectif de l'entreprise est de diminuer de 45000 le nombre de postes. Les départs à la retraite représente 3% par an et l'entreprise fait 300 nouvelles embauches.

Quand l'entreprise atteindra-t-elle son objectif ?

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose u_n le nombre de personnes dans l'entreprise après n années. On a donc :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 0,97 u_n + 300 \\ u_0 = 220000 \end{cases}$$

Ensuite, on résout classiquement : on pose $v_n = u_n - 10000$.

(la résolution est à faire en exercice !)

BIBLIOGRAPHIE

[Bel] J.-P. BELTRAMONE & al., *Déclic, Mathématiques, Term. S, Enseignements spécifique et de spécialité*, Hachette Éducation, 2012.

[Bou] C. BOULONNE, *Les Maths en Stage*, 2010/2012, Licence Creatives Commons, http://cboumaths.wordpress.com.

[Sig] E. SIGWARD & al., *Odyssée, Mathématiques Term. ES/L, Enseignement spécifique et de spécialité*, Hatier, 2012.

[Taq] P. TAQUET & al., *Mathématiques, BTS Groupement A*, Hachette Technique, 2010.

[Mer] D.-J. Mercier, *Objectif CAPES MATHS, Préparation intensive à l'entretien*, 31 août 2012.

[Her] F. HERBAUT, *Souvenirs des oraux de CAPES 2011*.