Teoreme cu nume

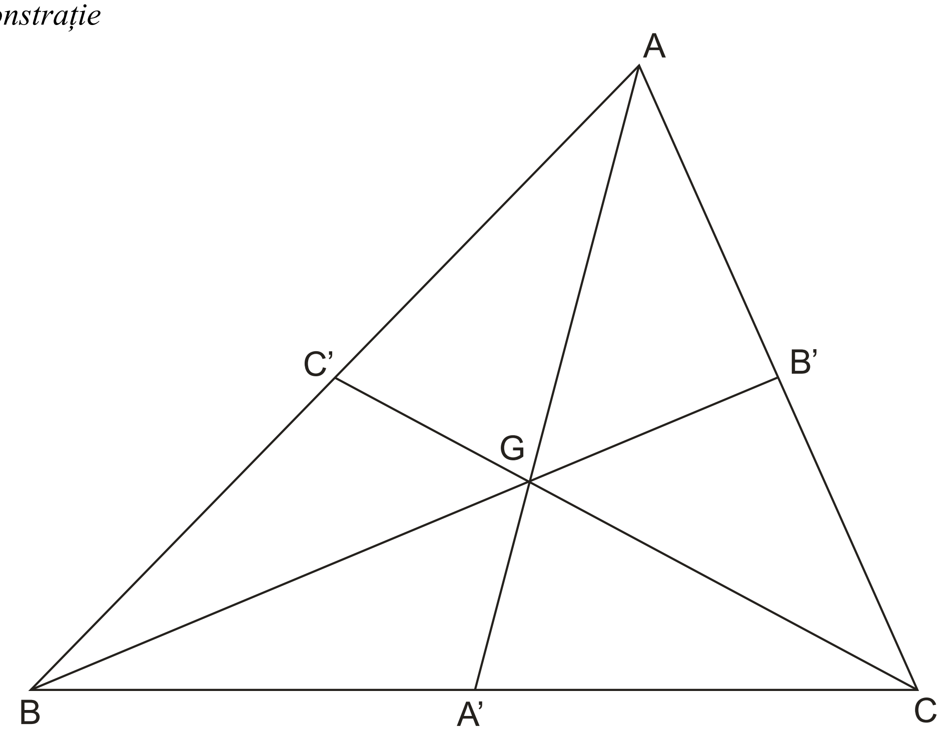
1. Problema (Năstăsescu IX, p 147, propoziția 5)
   Formula lui Chasles
   Pentru orice puncte M, N şi P avem $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$.

2. Problema (Năstăsescu IX, p 168, teoremă)
Vectorul de poziție al centrului de greutate al unui triunghi
Fie un triunghi ABC şi A', B', C' mijloacele laturilor $[BC], [CA]$ respectiv $[AB]$.

a) Medianele AA', BB' şi CC' sunt concurente în punctual G (centrul de greutate al triunghiului ABC) astfel încât: $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GA'}$, $\overrightarrow{GB} = -2\overrightarrow{GB'}$, $\overrightarrow{GC} = -2\overrightarrow{GC'}$
(G împarte fiecare mediană în raportul -2)

b) Vectorul de poziție al lui G față de un punct oarecare $P \in \mathcal{P}$ este dat de formula $\overrightarrow{PG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}\right)$.

Demonstrație



a) Notăm intersecția medianelor BB' şi CC' cu G. Din asemănarea triunghiurilor GBC şi $GB'C'$ deducem: $\frac{GB}{GB'} = \frac{GC}{GC'} = \frac{BC}{B'C'} = 2$, deoarece $B'C'$ este linie mijlocie în triunghiul ABC. Rezultă $\overrightarrow{GB} = -2\overrightarrow{GB'}$, $\overrightarrow{GC} = -2\overrightarrow{GC'}$.

Fie P un punct oarecare din plan. Avem

$\overrightarrow{PG} = \frac{1}{1-(-2)}\left(\overrightarrow{PB} - (-2)\overrightarrow{PB'}\right) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PB'}\right)$, unde $2\overrightarrow{PB'} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC}$, deci

$\overrightarrow{PG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}\right)$.

Notăm intersecția medianelor BB' şi AA' cu G'. Printr-un calcul analog obținem $\overrightarrow{PG'} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}\right)$. Rezultă $\overrightarrow{PG} = \overrightarrow{PG'}$, deci $G = G'$, adică medianele sunt concurente.

b) Formula vectorului de poziție a lui G rezultă de la a).

3. Problema (Năstăsescu IX, p 168)

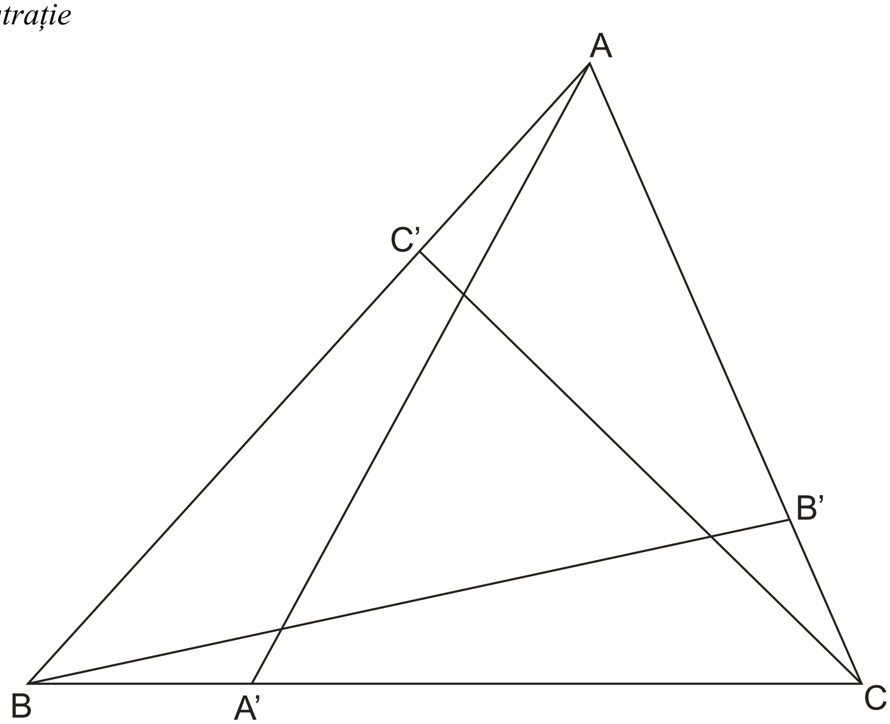
   Relația lui Leibniz.

   Pentru orice punct P din planul triunghiului ABC avem $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=3\overrightarrow{PG}$, unde G este centrul de greutate al triunghiului ABC.

4. Problema (Năstăsescu IX, p 169, teoremă)
   Teorema lui Pappus.
   Fie un triunghi ABC. Se consideră punctele $A' \in BC$, $B' \in AC$ şi $C' \in AB$, distincte

de vârfurile triunghiului, astfel încât avem $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \dfrac{\overline{C'A}}{C'B} = \lambda$. În aceste condiții, triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ au acelaşi centru de greutate.

Demonstrație



Fie G şi G' centrele de greutate al triunghiurilor ABC şi $A'B'C'$, iar P un punct oarecare din plan. Scriem relația lui Leibniz pentru G şi G'.

Obținem: $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 3\overrightarrow{PG}$, $\overrightarrow{PA'} + \overrightarrow{PB'} + \overrightarrow{PC'} = 3\overrightarrow{PG'}$.

Avem: $(1-\lambda)\overrightarrow{PA'} = \overrightarrow{PB} - \lambda\overrightarrow{PC}$

$(1-\lambda)\overrightarrow{PB'} = \overrightarrow{PC} - \lambda\overrightarrow{PA}$

$(1-\lambda)\overrightarrow{PA'} = \overrightarrow{PA} - \lambda\overrightarrow{PB}$

Prin adunare găsim $(1-\lambda)\left(\overrightarrow{PA'} + \overrightarrow{PB'} + \overrightarrow{PC'}\right) = (1-\lambda)\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}\right)$, deci $\overrightarrow{PG} = \overrightarrow{PG'}$, de unde $G = G'$.

5. Problema (Năstăsescu IX, p 172, teoremă)

Teorema lui Thales.

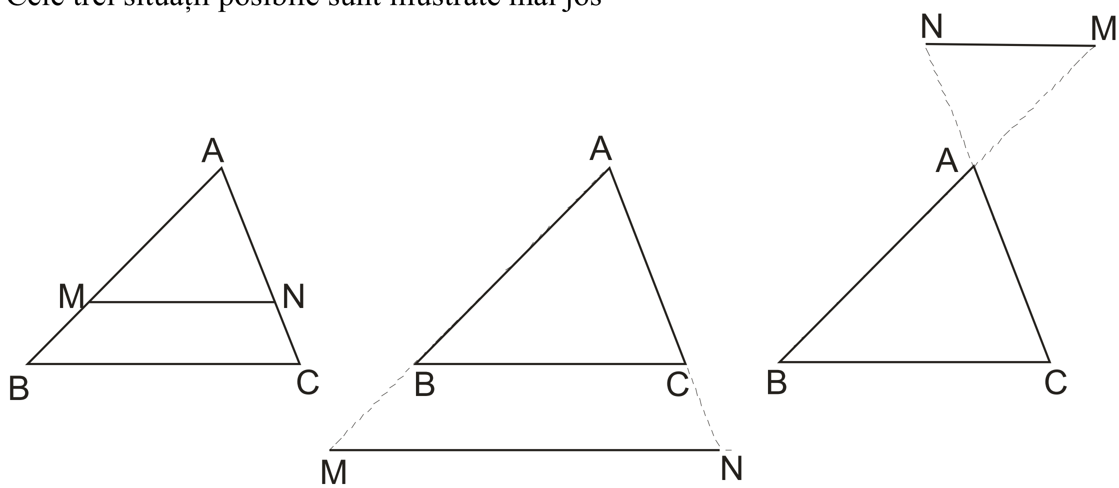
Se consideră un triunghi ABC şi o dreaptă d care nu trece prin niciunul dintre punctele A,B,C şi intersectează pe AB în M şi pe AC în N. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

a) Dreapta $MN \| BC$;

b) Avem relația $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{NA}}{\overline{NC}}$.

Demonstrație

Cele trei situații posibile sunt illustrate mai jos



1) Demonstrăm implicația $b) \Rightarrow a)$.

Notăm $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{NA}}{\overline{NC}} = \lambda$, unde $\lambda \neq 0$ (deoarece $M \neq A, N \neq A$). Rezultă relațiile,

$\overrightarrow{MA} = \lambda \overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{NA} = \lambda \overrightarrow{NC}$, de unde $\overrightarrow{MA} = \frac{\lambda}{1-\lambda} \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{NA} = \frac{\lambda}{1-\lambda} \overrightarrow{AC}$.

Avem $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{NA} = \frac{\lambda}{1-\lambda}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\lambda}{1-\lambda} \overrightarrow{BC}$. Prin urmare $MN \| BC$.

2) Demonstrăm implicația $a) \Rightarrow b)$.

Notăm $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = m$ şi $\frac{\overline{NA}}{\overline{NC}} = n$. Vom arăta $m = n$.

Presupunem, prin absurd, că $MN \| BC$ şi $m \neq n$. Fie pe dreapta AC unicul punct P astfel încât $\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = m$. Avem $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PC}}$, deci, conform implicației anterior demonstrate, avem $MP \| BC$. Rezultă că dreptele MN şi MP sunt confundate şi $P = N$, deci $m = n$, în contradicție cu presupunerea inițială.

6. Problema (Năstăsescu IX, p 174, teoremă)

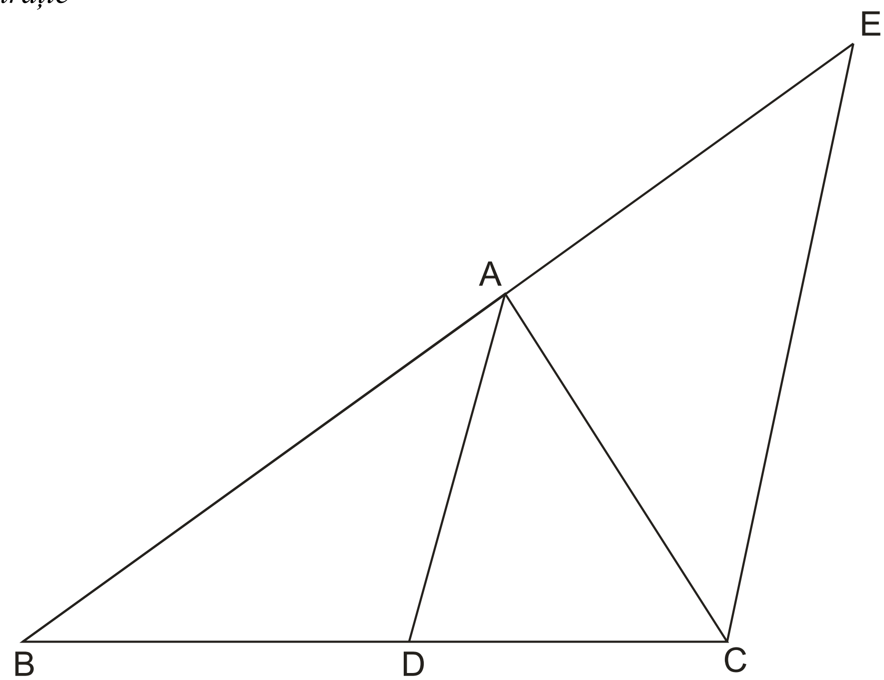
Teorema bisectoarei.

Fie un triunghi ABC şi un punct $D \in [BC]$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

a) Semidreapta $[AD$ este bisectoarea unghiului $\angle BAC$;

b) Avem relația $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

Demonstrație



1) Vom arăta că $a) \Rightarrow b)$. Prin punctul C construim paralela la AD până intersectează dreapta AB în E. Aplicăm teorema lui Thales în ΔBCE, unde $AD \| EC$. Obținem $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AE}$ (1)

Avem $\angle ACE \equiv \angle CAD$ (alterne interne), $\angle AEC \equiv \angle BAD$ (corespondente) şi $\angle CAD \equiv \angle BAD$ ($[AD$ bisectoare), deci $\angle CAD \equiv \angle AEC$. Prin urmare, ΔACE este isoscel, deci $AE = AC$, iar din (1) obținem $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

2) Vom arăta că $b) \Rightarrow a)$. Notăm $\frac{AB}{AC} = \lambda$. Rezultă că D împarte $\overline{BC}$ în raportul $-\lambda$.

Fie $[AD'$ bisectoarea unghiului $\angle BAC$. Conform 1), $\frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AC} = \lambda$, deci punctul D' împarte $\overline{BC}$ în raportul $-\lambda$. Prin urmare $D = D'$, deci $[AD$ este bisectoarea unghiului $\angle BAC$.

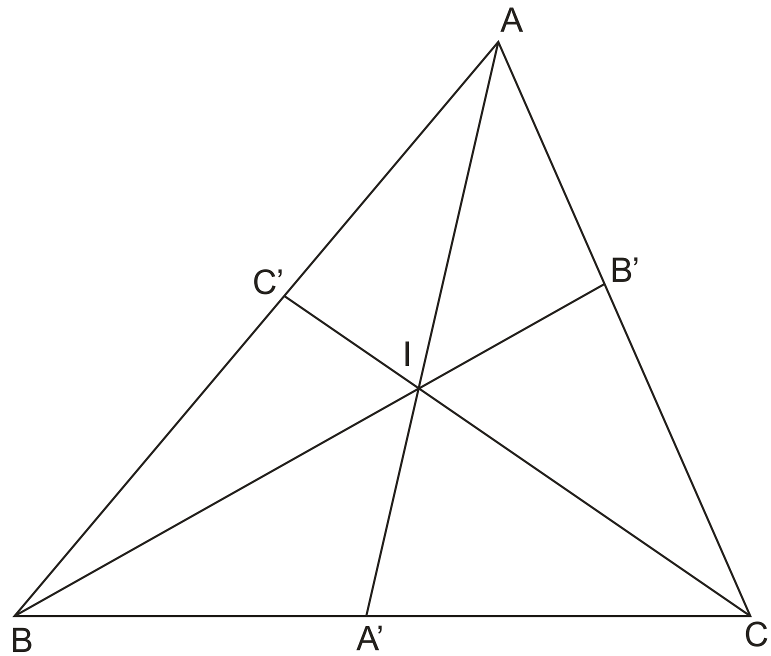
7. Problema (Năstăsescu IX, p 174, teoremă)

Vectorul de poziție al centrului cercului înscris în triunghi

Fie ABC un triunghi, I centrul cercului înscris în triunghi şi un punct oarecare $P \in$ P . Vectorul de poziție al punctului I față de P este dat de formula

$\overrightarrow{PI} = \dfrac{1}{a+b+c}\left(a\overrightarrow{PA} + b\overrightarrow{PB} + c\overrightarrow{PC}\right)$, unde am notat $AB = c$, $BC = a$ şi $AC = b$.

Demonstrație



În triunghiul ABC fie A', B', C' picioarele bisectoarelor din vârfurile A, B, C.

Conform teoremei bisectoarei avem: $\dfrac{A'B}{A'C} = \dfrac{c}{b}$, $\dfrac{B'C}{B'A} = \dfrac{a}{c}$, $\dfrac{C'A}{C'B} = \dfrac{b}{a}$.

Rezultă că punctul A' împarte segmental $\overline{BC}$ în raportul $-\dfrac{c}{b}$, deci

$\overrightarrow{AA'} = \dfrac{1}{1-\left(-\dfrac{c}{b}\right)}\left(\overrightarrow{AB} - \left(-\dfrac{c}{b}\right)\overrightarrow{AC}\right)$ adică $\overrightarrow{AA'} = \dfrac{b}{b+c}\overrightarrow{AB} + \dfrac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}$.

Din $\dfrac{A'B}{A'C} = \dfrac{c}{b}$ rezultă $\dfrac{A'B}{A'B + A'C} = \dfrac{c}{b+c}$. Avem $A'B + A'C = BC = a$, deci obținem $A'B = \dfrac{ac}{b+c}$, $A'C = \dfrac{ab}{b+c}$.

$[BI$ este bisectoare în triunghiul ABA', deci aplicând teorema bisectoarei, avem $\dfrac{IA}{IA'} = \dfrac{BA}{BA'} = c \cdot \dfrac{b+c}{ac} = \dfrac{b+c}{a}$.

Rezultă că punctual I împarte segmental $\overline{AA'}$ în raportul $-\frac{b+c}{a}$ deci

$$\overrightarrow{PI}=\frac{1}{1-\left(-\frac{b+c}{a}\right)}\left(\overrightarrow{PA}-\left(-\frac{b+c}{a}\right)\overrightarrow{PA'}\right)(1)$$

Cum $\frac{A'B}{A'C}=\frac{c}{b}$, rezultă că A' împarte segmentul $\overline{BC}$ în raportul $-\frac{c}{b}$ deci

$$\overleftarrow{PA'}=\frac{1}{1-\left(-\frac{c}{b}\right)}\left(\overrightarrow{PB}-\left(-\frac{c}{b}\right)\overrightarrow{PC}\right) \text{ deci } \overrightarrow{PA'}=\frac{b}{b+c}\overrightarrow{PB}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{PC} \quad (2)$$

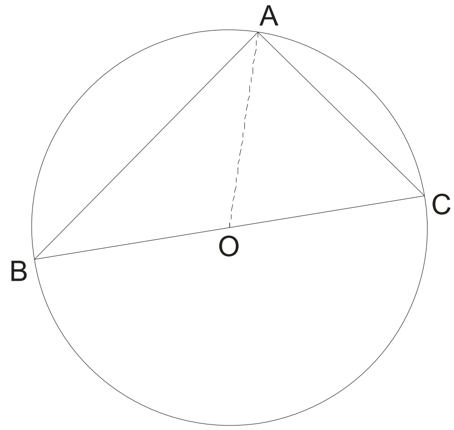
Înlocuind (2) în (1), avem $\overrightarrow{PI}=\frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{PA}+\frac{b+c}{a+b+c}\left(\frac{b}{b+c}\overrightarrow{PB}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{PC}\right)$ de unde obținem formula din enunț.

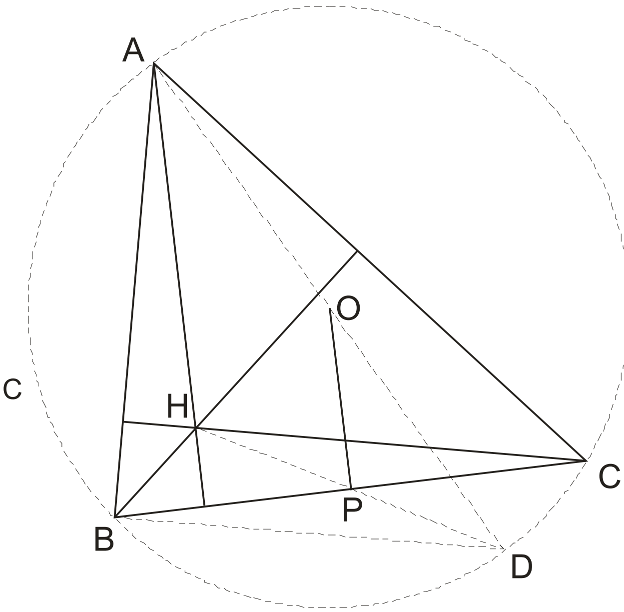
8. Problema (Năstăsescu IX, p 181, propoziție)

Relația lui Sylvester

În orice triunghi ABC, avem relația $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$, unde notăm centrul cercului circumscris cu O, centrul de greutate G şi ortocentrul cu H.

Demonstrație





În cazul când triunghiul ABC este dreptunghic, relația este evidentă. De exemplu dacă $m(\angle A)=90^0$, atunci $H=A$ şi O este mijlocul lui $[BC]$, iar relația se reduce la $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

Dacă triunghiul nu este dreptunghic, fie D punctual diametral opus lui A în cercul circumscris şi P mijlocul laturii $[BC]$.

Patrulaterul $BHCD$ are laturile opuse paralele (avem $BH\perp AC$ şi $DC\perp AC$, deci $BH\|DC$; analog $CH\perp AB$ şi $DB\perp AB$, deci $CH\|DB$), deci este parallelogram. Rezultă că mijlocul diagonalei $[HD]$ coincide cu mijlocul P al laturii $[BC]$.

În triunghiul AHD, OP este linie mijlocie, deci $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OP}$. Cum, $OB=OC$ rezultă $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OP}$, deci $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AH}$ sau $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}$, de unde $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$.

9. Problema (Năstăsescu IX, p 182, teoremă)
Dreapta lui Euler
În orice triunghi ABC, punctele O, G, H sunt coliniare (unde notăm centrul cercului circumscris cu O, centrul de greutate G şi ortocentrul cu H) şi avem $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$. Dreapta care conține punctele O, G, H se numeşte dreapta lui Euler a triunghiului ABC.

Demonstrație

Conform relației lui Leibniz, avem $3\overrightarrow{PG} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}, \forall P \in \mathrm{P}$. Pentru $P = O$, avem $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$, deci $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$. Prin urmare punctele O, G, H sunt coliniare şi sunt situate astfel:

Evident, dacă triunghiul ABC este echilateral, punctele O, G, H coincide, deci dreapta lui Euler nu este determinată.

10. Problema (Năstăsescu IX, p 183, teoremă)

Teorema lui Menelaus

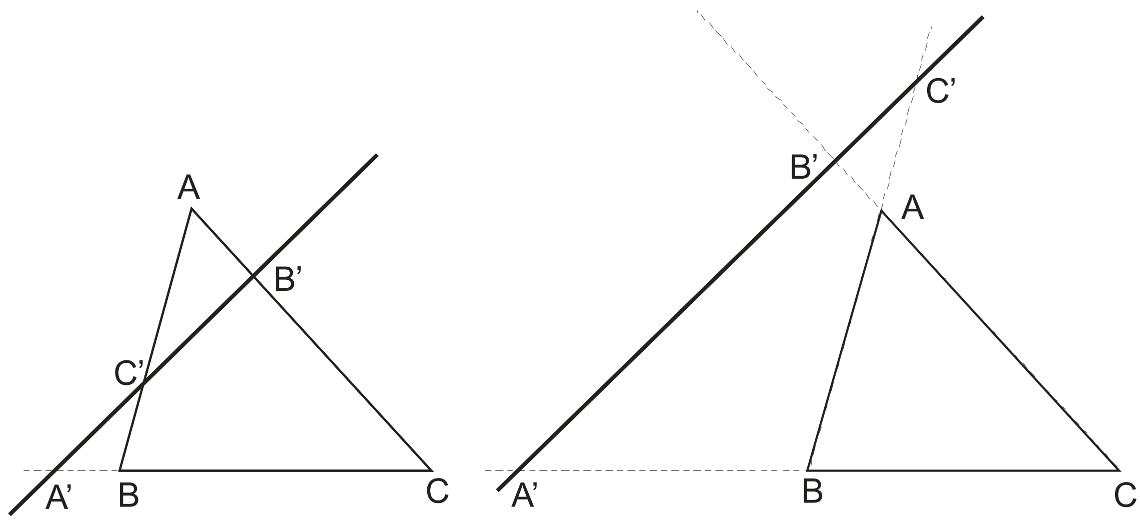
Fie un triunghi ABC şi trei puncte $A'\in BC$, $B'\in AC$ şi $C'\in AB$, diferite de vârfurile triunghiului. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) Punctele A', B', C' sunt coliniare.

b) Avem relaţia: $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\cdot\dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\cdot\dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}=1$.

Demonstraţie

Notăm $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}=m$, $\dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}=n$, $\dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}=p$.



1)Demonstrăm implicaţia $b)\Rightarrow a)$.

Presupunem că $mnp=1$ şi vom arăta că A', B', C' sunt coliniare.

Avem $\overrightarrow{B'C}=n\overrightarrow{B'A}$, deci $\overrightarrow{BB'}=\dfrac{1}{1-n}\left(\overrightarrow{BC}-n\overrightarrow{BA}\right)$.

Vom exprima $\overrightarrow{BC}$ în funcţie de $\overrightarrow{BA'}$, iar $\overrightarrow{BA}$ în funcţie de $\overrightarrow{BC'}$. Avem:

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{A'C}=\overrightarrow{BA'}+\dfrac{1}{m}\overrightarrow{A'B}=\left(1-\dfrac{1}{m}\right)\overrightarrow{BA'}$, deoarece $\overrightarrow{A'B}=m\overrightarrow{A'C}$.

$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{C'A}=\overrightarrow{BC'}+p\overrightarrow{C'B}=(1-p)\overrightarrow{BC'}$, deoarece $\overrightarrow{C'A}=p\overrightarrow{C'B}$.

Obţinem: $\overrightarrow{BB'}=\dfrac{m-1}{m(1-n)}\overrightarrow{BA''}-\dfrac{n(1-p)}{1-n}\overrightarrow{BC'}$.

Cum $mnp=1$, avem $\dfrac{m-1}{m(1-n)}-\dfrac{n(1-p)}{1-n}=1$. În adevăr $\dfrac{m-1}{m(1-n)}-\dfrac{n(1-p)}{1-n}=1\Leftrightarrow$ $m-1-mn(1-p)=m(1-n)\Leftrightarrow -1+mnp=0$.

În concluzie există $x,y\in R^*$, cu $x+y=1$ şi $\overrightarrow{BB'}=x\overrightarrow{BA'}+y\overrightarrow{BC'}$, deci punctele A', B', C' sunt coliniare.

2)Demonstrăm implicaţia $a)\Rightarrow b)$.

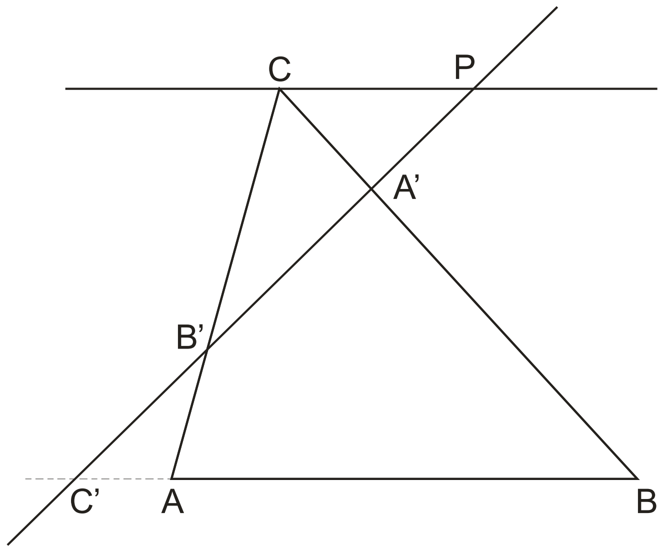
Presupunem, prin absurd, că există punctele A', B', C' care sunt coliniare şi totuşi $mnp\neq 1$.

Notăm $\frac{1}{mn} = q$, deci $mnq = 1$ şi $q \neq p$. Construim unicul punct $Q \in AB$ astfel încât $\frac{\overline{QA}}{\overline{QB}} = q$. Din $mnq = 1$ rezultă că A', B', Q sunt coliniare, iar din $q \neq p$ rezultă că $C' \neq Q$. Prin urmare dreptele $A'B'$ şi AB au în comun două puncte distincte, C' şi Q, deci ele coincid, ceea ce este fals.

11. Problema (manual IX EDP1989, p 43, pr3)
    Teorema lui Menelaus

Fie ABC un triunghi şi A', B', C' trei puncte coliniare astfel ca $A' \in BC$, $B' \in AC$ şi $C' \in AB$. Să se arate că: $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$.

Demonstrație



Se duce prin C o paralelă la AB care intersectează dreapta $A'B'$ în P. Din teorema fundamentală a asemănării rezultă: $\Delta CPA' \sim \Delta BC'A'$ şi deci $\frac{CP}{BC'} = \frac{A'C}{A'B}$ sau $CP = \frac{BC' \cdot A'C}{A'B}$.

Tot din teorema fundamentală a asemănării rezultă şi $\Delta CPB' \sim \Delta AC'B'$, de unde se obține $\frac{CP}{AC'} = \frac{CB'}{BA'}$ şi $CP = \frac{AC' \cdot CB'}{B'A}$.

Aşadar $\frac{BC' \cdot A'C}{A'B} = \frac{AC' \cdot CB'}{B'A}$, de unde rezultă $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$.

12. Problema (manual IX EDP1989, p 43, pr4)
    Reciproca teoremei lui Menelaus

Se consideră punctele A', B', C' situate pe dreptele BC, CA, AB determinate de laturile triunghiului ABC. Dacă două dintre ele sunt situate pe laturile triunghiului şi unul pe prelungirea unei laturi, sau toate trei pe prelungiri de laturi, şi este satisfăcută relația $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$, atunci cele trei puncte sunt coliniare.

Demonstrație

Putem admite că $A' \notin [BC]$; atunci $A'B \neq A'C$ şi ambele puncte B', C' se găsesc fie pe laturile triunghiului, fie pe prelungirile acestora. Dacă am avea $B'C' \| BC$, din teorema lui Thales ar rezulta $\frac{B'A}{B'C} = \frac{C'A}{C'B}$, ceea ce împreună cu $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$ ne-ar da $A'B = A'C$ în contradicție cu $A'B \neq A'C$. Deci $B'C'$ taie BC într-un punct A'' şi se observă $A'' \notin [BC]$ (căci $B'C'$ nu poate intersecta o singură latură sau toate cele trei). Putem scrie în virtutea teoremei lui Menelaus $\frac{A''B}{A''C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$.

Obținem $\frac{A''B}{A''C} = \frac{A'B}{A'C}$; ținând seama şi de $A'', A' \notin [BC]$ rezultă $A'' = A'$, deci punctele A', B', C' sunt coliniare.

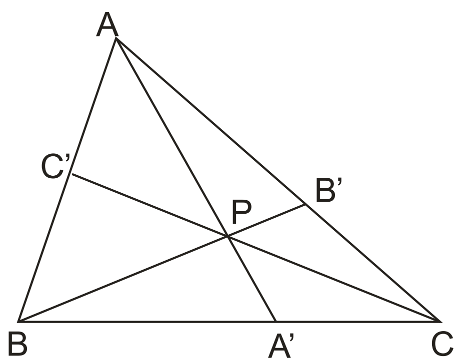
13. Problema (Năstăsescu IX, p184, propoziție)

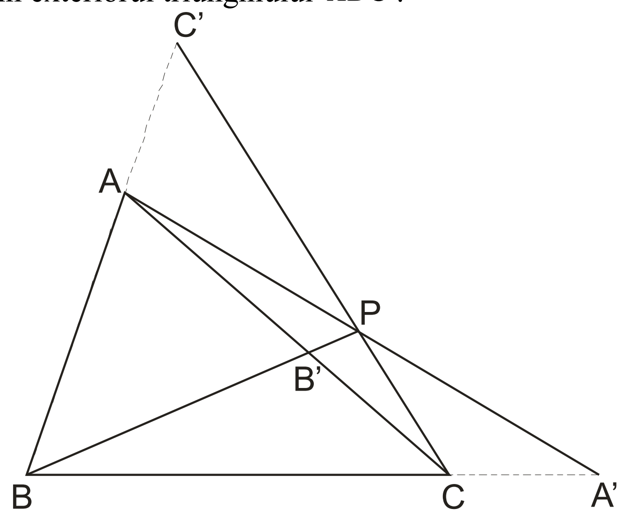
Relația lui Van Aubel

Fie un triunghi ABC şi punctele $A' \in BC$, $B' \in AC$ şi $C' \in AB$, diferite de vârfurile triunghiului, astfel încât dreptele AA', BB' şi CC' sunt concurente într-un punct P. Atunci avem relația $\frac{\overline{PA}}{\overline{PA'}} = \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} + \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$.

Demonstrație

Punctual P poate fi în interiorul sau în exteriorul triunghiului ABC.





Aplicăm teorema lui Menelaus în $\Delta ABA'$ cu transversala C', P, C şi apoi în $\Delta ACA'$ cu transversala B', P, B. Obținem:

$\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} \cdot \frac{\overline{CB}}{\overline{CA'}} \cdot \frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}} = 1$, de unde $\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PA'}} \cdot \frac{\overline{CA'}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PA'}} \cdot \frac{\overline{A'C}}{\overline{BC}}$ (1)

$\frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{BA'}} \cdot \frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}} = 1$, de unde $\frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PA'}} \cdot \frac{\overline{BA'}}{\overline{BC}}$ (2)

Adunând membru cu membru (1), (2) şi ținând cont că $\overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{BC}$ obținem:

$$\frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} + \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PA'}}\left(\frac{\overline{BA'}}{\overline{BC}} + \frac{\overline{A'C}}{\overline{BC}}\right) = \frac{\overline{PA}}{\overline{PA'}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PA'}}.$$

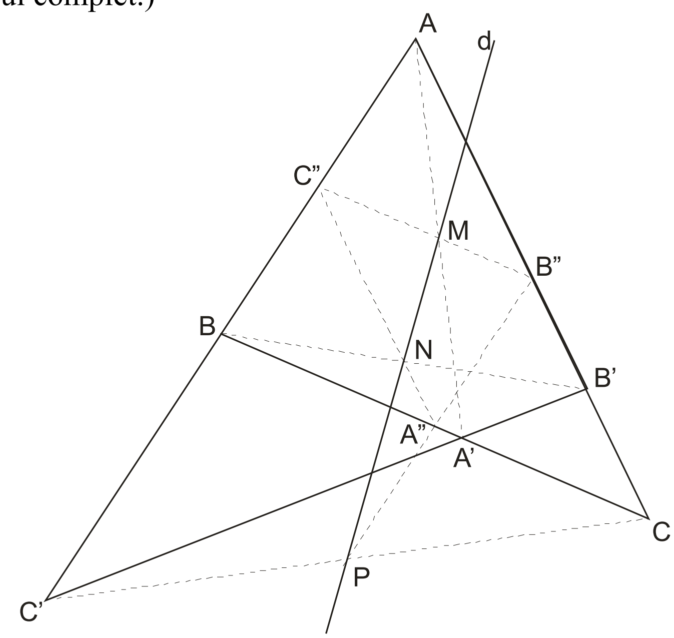
14. Problema (Năstăsescu IX, p185, teoremă)

Dreapta Newton-Gauss

Mijloacele celor trei diagonale ale unui patrulater complet sunt coliniare (dreapta formată cu aceste mijloace se numeşte dreapta Newton-Gauss a patrulaterului complet).

(Se numeşte patrulater complet figura formată din patru drepte, două câte două neparalele şi care sunt astfel încât câte trei dintre ele nu sunt concurente. Aceste drepte sunt laturile patrulaterului.

Laturile se intersectează două câte două în 6 puncte numite vârfurile patrulaterului. Pentru fiecare vârf format prin intersecția a două laturi se formează vârful opus, care este intersecția celorlalte două laturi. Prin urmare, cele 6 vârfuri se grupează două câte două în perechi de vârfuri opuse: (A,A'), (B,B'), C,C'. Segmentele AA', BB', CC' se numesc diagonalele patrulaterului complet.)



Demonstrație

Fie M mijlocul lui AA', N mijlocul lui BB', P mijlocul lui CC'. Avem de arătat că M,N,P sunt coliniare.

Pentru aceasta, considerăm mijlocul A'' al lui BC, mijlocul B'' al lui AC şi mijlocul C'' al lui AB. Rezultă că $M \in B''C''$, $N \in C''A''$, $P \in A''B''$. Aşadar, punctele M,N,P sunt pe laturile triunghiului $A''B''C''$. Coliniaritatea punctelor M,N,P revine, conform teoremei lui Menelaus, la relația $\frac{\overline{MB''}}{\overline{MC''}} \cdot \frac{\overline{NC''}}{\overline{NA''}} \cdot \frac{\overline{PA''}}{\overline{PB''}} = 1$ (1)

În triunghiul ABC, avem $B''C'' \| BC$ şi $M \in BC$, $A' \in BC$.

Rezultă $\frac{\overline{MB''}}{\overline{MC''}} = \frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}}$.

Similar vom avea $\frac{\overline{NC''}}{\overline{NA''}} = \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}}$ şi $\frac{\overline{PA''}}{\overline{PB''}} = \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}}$.

Înlocuind, rezultă că (1) este adevărată.

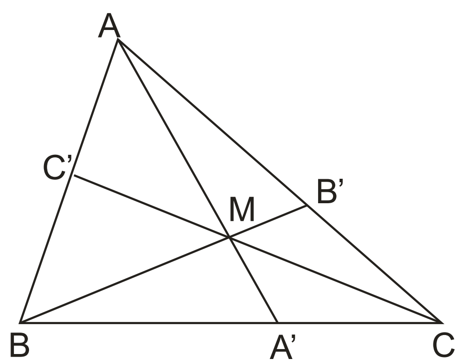
15. Problema (Năstăsescu IX, p190, teoremă)

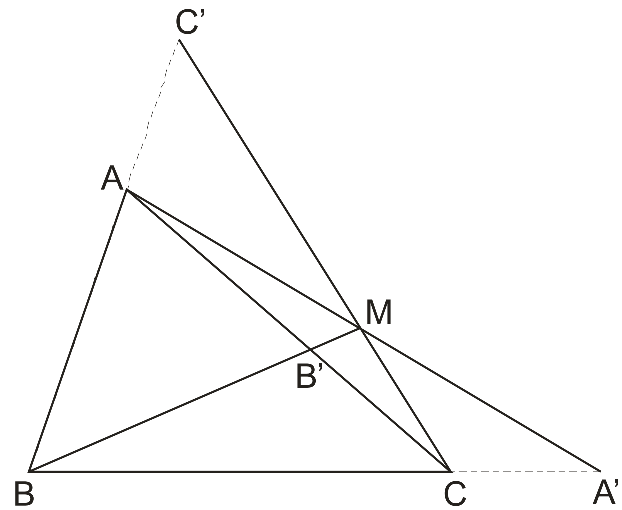
Teorema lui Ceva

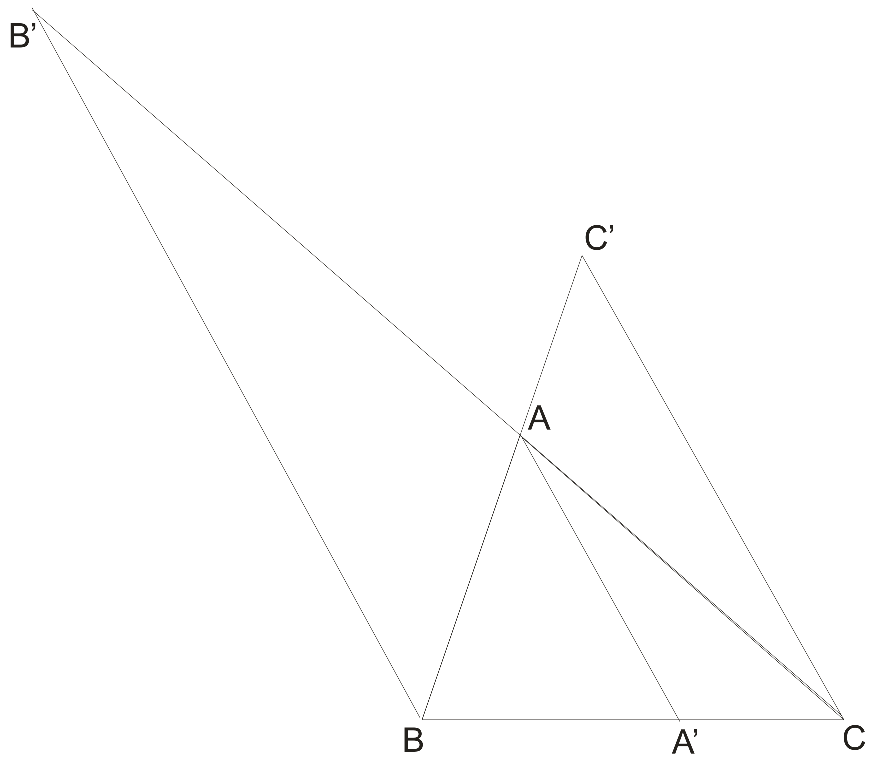
Fie un triunghi ABC şi trei puncte $A' \in BC$, $B' \in AC$ şi $C' \in AB$, diferite de vârfurile triunghiului. Următoarele afirmații sunt echivalente:

a) dreptele AA', BB', CC' sunt concurente sau paralele;

b) avem relația $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$.







Demonstrație

Vom demonstra implicația $a) \Rightarrow b)$.

1.1)Presupunem că AA', BB', CC' sunt concurente în M. Aplicăm teorema lui Menelaus în $\Delta ABA'$ pentru punctele C', C, M şi apoi în $\Delta ACA'$ pentru punctele B', B, M. Obținem:

$\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} \cdot \frac{\overline{CB}}{\overline{CA'}} \cdot \frac{\overline{MA'}}{\overline{MA}} = 1$, $\frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{BA'}} \cdot \frac{\overline{MA'}}{\overline{MA}} = 1$, de unde $\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} \cdot \frac{\overline{CB}}{\overline{CA'}} = \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{BA'}}$ sau $\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{BA'}}{\overline{CA'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CB}}$. Deoarece $\frac{\overline{BC}}{\overline{CB}} = -1$ şi $\frac{\overline{BA'}}{\overline{CA'}} = \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$, obținem $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$.

1.2)Presupunem că dreptele AA', BB', CC' sunt paralele.

Aplicând teorema lui Thales deducem $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC'}}$, $\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{BC'}}{\overline{BA}}$ de unde obținem $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC'}} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{BA}}$.

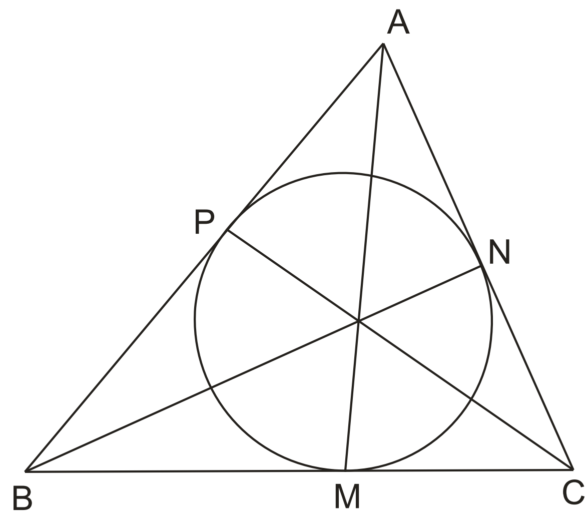
Prin urmare, avem $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{AC'}}{\overline{BC'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BA}} = -1$.

Implicația $b) \Rightarrow a)$ se demonstrează prin reducere la absurd.

16. Problema (Năstăsescu IX, p190, propoziție)

Punctual lui Gergonne

Dacă în triunghiul ABC notăm M, N şi P punctele de contact ale cercului înscris cu laturile $[BC]$, $[CA]$ şi $[AB]$, atunci dreptele AM, BN şi CP sunt concurente într-un punct (punctul lui Gergonne).



Demonstrație

Avem $AP = AN$ (tangentele din acelaşi punct la un cerc au lungimi egale), $BP = BM$, $CM = CN$.

Prin urmare $\frac{PA}{PB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1$, deci dreptele AM, BN şi CP sunt concurente sau paralele, conform teoremei lui Ceva. Cum $D \in (BC)$, $E \in (CA)$ şi $F \in (AB)$, cele trei drepte nu pot fi paralele, deci sunt concurente.