A matematikai logika alapjai

- A logika a gondolkodás törvényeivel foglalkozó tudomány
- A matematikai logika a logikának az az ága, amely a formális logika vizsgálatára matematikai módszereket alkalmaz.
- Tárgya a kijelentéskalkulus és predikátumkalkulus

A kijelentéskalkulus elemei

- Kijelentésen, ítéleten vagy állításon olyan zárt kijelentő mondatot értünk, amely egyértelműen igaz vagy hamis.
- A mondatot olyan szimbólumok összessége, aminek értelmet tulajdonítunk.
- Egy kijelentő mondatban valamiről állítunk valamit, vagyis jelen van az alany és az állítmány.
- Egy kijelentő mondatot zártnak nevezünk, ha jól meghatározott dolgokra vonatkozik.
- Egy kijelenés egyértelműen igaz vagy hamis azt jelenti, hogy:
  - (a) nem lehet egyidőben igaz is és hamis is (ellentmondástalanság elve)
  - (b) nem lehet az, hogy se igaz se hamis ne legyen (kizárt harmadik elve)

Példák:

Döntsd el melyik állítás, melyik igaz, melyik hamis és melyik nem állítás:

1) „Bármely háromszög szögeinek az összege 180°”
2) „3+2=5” 3) „2>5” 4) „x+2=5 és x=3”
5) „x+3=4” 6) „x-1<4” 7) „ Nyiss ajtót!”
8) „Az arany atomja sárga”
9) „2100-ban október 1-én esni fog az eső”

Logikai érték (igazságérték)

- Ha egy kijelentés igaz, akkor azt mondjuk, hogy logikai értéke 1 vagy i.
- Ha pedig hamis, akkor a logikai értéke 0 vagy h.

Paradoxonok

- A paradoxonok olyan mondatok, amelyek egyidőben igazak is és hamisak is
- Keressük meg a következő keretben látható mondat igazságértékét:

Most hazudok

a) Ha igaz lenne, akkor „most hazudok”, tehát nem mondok igazat, tehát a mondat hamis.
b) Ha hamis lenne, akkor nem igaz, hogy „most hazudok”, tehát igazat mondok, vagyis a mondat igaz.

Tehát ha valaki azt mondja, hogy „most hazudok”, akkor ezzel igazat is mond meg hazudik is, vagyis a mondatnak nincs igazságértéke.

Az előző példa a Bertrand-Russel féle paradoxon egy változata volt.

- A paradoxon egy olyan mondat, amely a szemléletnek, vagy valamely matematikai tételnek látszólag ellentmond.

- Előállhat hibás bizonyítás következtében, vagy úgy, hogy eleve helytelen feltételekből indulunk ki.

- Az előbbi példa esetén nem állításunk volt, hanem csak mondat, ennek nincs logikai értéke.

A borbély paradoxon

- Egy faluban él egy borbély, aki megborotválja a falu összes lakóját, aki nem borotválják meg saját magukat. Ki borotválja meg a borbélyt?

- Mivel a borbély is a falu lakója, ezért őt is a borbély kell megborotválja.
- Másfelől a borbély csak olyanokat borotvál, akik nem borotválják meg magukat.
- Tehát a borbély meg is borotválkozik meg nem is ☺

Kijelentéskalkulus

- Adott kijelentésekből új kijelentések származtathatók, ha ezeket összekapcsoljuk az „és”, a „vagy”, a „nem”, a „ha… akkor…” és az „akkor…és csakis akkor…” szavakkal.

- Ilyen összekapcsolásokkal, elemi kijelentésekből úgynevezett összetett kijelentéseket kapunk, amelyeknek a logikai értéke csak az összetevő elemi kijelentések logikai értékétől függ.

Logikai műveletek

A kijelentések jelölése: p, q, r, … vagy A, B, C,… vagy a Görög ABC kisbetűivel.

A fontosabb logikai műveletjelek:
(1) Negáció vagy tagadás: **non p** vagy $\neg p$
(2) Konjunkció vagy összekapcsolás: $p \wedge q$
(3) A diszjunkció vagy szétválasztás: $p \vee q$
(4) A kondicionálás vagy feltételes állítás (implikáció): $p \Rightarrow q$
(5) A bikondicionálás vagy kettős feltételes állítás (ekvivalencia) : $p \Leftrightarrow q$

Logikai táblázatok (igazságtáblázatok)

- A **$\neg p$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \Rightarrow q$, $p \Leftrightarrow q$ összetett kijelentések logikai értékeit a következő táblázatokkal értelmezzük:**

p	**$\neg$p**
1	**0**
0	**1**

p	q	**$p \wedge q$**
1	**1**	**1**
1	0	0
0	1	0
0	0	0

p	q	**$p \vee q$**
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	**0**	**0**

p	q	**$p \Rightarrow q$**
1	1	1
1	**0**	**0**
0	1	1
0	0	1

p	q	**$p \Leftrightarrow q$**
1	**1**	**1**
1	0	0
0	1	0
0	**0**	**1**

Tehát:
1) A **$p \wedge q$ állítás csak akkor <u>igaz</u> ha p igaz <u>és</u> q igaz**
2) A **$p \vee q$ állítás csak akkor <u>igaz</u> ha p igaz <u>vagy</u> q igaz**
3) A **$p \Rightarrow q$ állítás csak akkor <u>hamis</u> ha p igaz és q hamis**
4) A **$p \Leftrightarrow q$ állítás csak akkor <u>igaz</u> ha**
(p igaz <u>és</u> q igaz) vagy **(p hamis <u>és</u> q hamis)**

Ellentmondás és logikai törvény

- <u>1. Értelmezés</u>: egy összetett állítást, amely az őt összetevő egyszerű állítások minden értékére hamis, ellentmondásnak vagy antilogiának nevezzük.
<u>Például:</u> $p \neg\wedge p \equiv 0$

- <u>2. Értelmezés:</u> egy összetett állítást, amely az őt összetevő egyszerű állítások minden igazságértékére igaz, logikai törvénynek vagy tautológiának nevezzük.
<u>Például:</u> $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q \equiv 1$

Ez logikai táblázattal is ellenőrizhető!

<u>A tautológiák segítségével állítjuk össze a logika axiómarendszerét, elveit és törvényeit!</u>

Alaptulajdonságokat kifejező tautológiák

(1) $p \vee q \equiv q \vee p$ a diszjunkció kommutativítása

(1) $p \wedge q \equiv q \wedge p$ a konjunkció kommutativítása

(1) $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ a diszjunkció asszociatív

(1) $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ a konjunkció asszociatív

(1) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ a diszjunkció disztributív a konjunkcióra

(1) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ a konjunkció disztributív a diszjunkcióra

A logika egy axióma rendszere

(I.) $(p \vee q) \Rightarrow p$

(II.) $p \Rightarrow (p \vee q)$

(III.) $(p \vee q) \Rightarrow (q \vee p)$

(IV.) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(r \vee p) \Rightarrow (r \vee q)]$

Logikai alapelvek (törvények)

(1) $p \equiv p$ az azonosság elve

(2) $\neg(\neg p) \equiv p$ a kétszeres tagadás elve

(3) $p \vee \neg p \equiv 1$ a kizárt harmadik elve

(4) $p \neg \wedge p \equiv 0$ az ellentmondástalanság elve

(5) $(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \neg \Rightarrow p)$ a kontrapozició elve

(6) $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$ leválasztási elv („modus ponens”)

(7) $(p \wedge q) \Rightarrow p$ a konjunkció redukálási elve

(8) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ láncszabály („szillogizmus elve”)

(9) $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \neg \wedge q)$ De Morgan I. törvénye

(10) $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q)$ De Morgan II. törvénye

Fontosabb következtetési sémák

1) **$[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$ leválasztási elv („modus ponens”)**

1) **$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ láncszabály („szillogizmus elve”)**

1) **$[(p \Rightarrow q) \wedge (p \rceil \Rightarrow q)] \rceil \Rightarrow p$ „reductio ad absurdum”**

1) **$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\rceil q \rceil \Rightarrow p)$ kontrapozició**

1) **$[(p \vee q) \rceil \wedge p] \Rightarrow q$ diszjunktív szillogizmus**

1) **$[(p \Rightarrow q) \rceil \wedge q] \rceil \Rightarrow p$ „modus tollens”**

Ellenőrizd logikai táblázattal, hogy az előbbiek tautológiák!

Predikátumkalkulus

- Tekintsük a következő mondatokat:
  1) „x+2<3”   2) „x osztja y” 3) „x=y+z”

Egy olyan mondatot amelyben egy vagy több változó szerepel, és azzal a tulajdonsággal rendelkezik, hogy a benne szereplő változó(k) adott értékeire igaz, más értékeire hamis kijelentést kapunk, predikátumnak, logikai föggvénynek vagy nyitott mondatnak nevezzük.

Jelölések: $p(x)$, $q(x)$,… unáris predikátum,
$p(x,y)$, $q(x,y)$,… bináris predikátum
$p(x, y, z)$, $q(x, y,z)$,… ternáris predikátum, stb.

A predikátumkalkulus alapműveletei

(1) $(\rceil p)(x) = \rceil p(x) \ \forall x \in H$

(2) $(p \wedge q)(x) = p(x) \wedge q(x) \ \forall x \in H$

(3) $(p \vee q)(x) = p(x) \vee q(x) \ \forall x \in H$

(4) $(p \Rightarrow q)(x) = (p(x) \Rightarrow q(x)) \ \forall x \in H$

(5) $(p \Leftrightarrow q)(x) = (p(x) \Leftrightarrow q(x)) \ \forall x \in H$

A $\rceil, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ műveleteket ugyanúgy értelmezzük mint a kijelentések esetén

Kvantorok

- <u>1. példa</u>: azt, hogy p(x): $(x+1)^2=x^2+2x+1$ igaz <u>minden</u> $x\in R$ esetén úgy írjuk, hogy: $(\forall \mathbf{x}\in R)\ (x+1)^2=x^2+2x+1$

Általában ha egy p(x) predikátum igaz <u>minden</u> $x\in H$ esetén úgy írjuk, hogy $(\forall \mathbf{x}\in H)\ p(x)$
A (∀) **jelt (olvasd „bármely") <u>univerzális kvantornak</u> nevezzük**

- <u>2. példa</u>: azt, hogy q(x): $\mathbf{x^2}=1$ igaz <u>valamely</u> $x\in R$ esetén úgy írjuk, hogy: $(\exists \mathbf{x}\in R)\ \mathbf{x^2}=1$

Általában ha egy q(x) predikátum igaz <u>valamely</u> $x\in H$ esetén úgy írjuk, hogy $(\exists\ \mathbf{x}\in H)\ p(x)$
A (∃) **jelt (olvasd „létezik") <u>egzisztenciális kvantornak</u> nevezzük**

Tagadási alaptulajdonságok:

A két kvantor esetén fennállnak a következő tagadási tulajdonságok:

(1) $\rceil((\forall x\in H)\ p(x)) \equiv (\exists\ x\in H)\ \rceil p(x)$

(2) $\rceil((\exists\ x\in H)\ p(x)) \equiv (\forall\ x\in H)\ \rceil p(x)$

Ezt a két tulajdonságot a bizonyítások során az ellenpéldával történő cáfolási módszernél alkalmazzuk.

Ellenpéldával való cáfolás
Példák:

Igazak-e a következő állítások?
Ha úgy tűnik, hogy nem akkor cáfold meg!

1) **Minden olyan négyszög, amelynek van két derékszöge, körbeírható.**

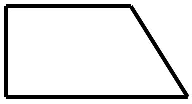
2) **Ha két négyszög szögei egyenlők, akkor a két négyszög hasonló.**

3) **Ha két háromszög hasonló, és van két egyenlő oldaluk, akkor a két háromszög kongruens.**

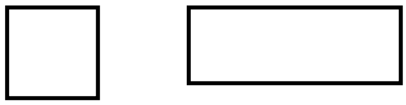
4) **Minden olyan négyszög amelyben van két-két egyenlő szög, az paralelogramma.**

Ellenpéldák

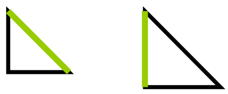
1) Minden olyan négyszög, amelynek van két derékszöge, körbeírható. NEM
Van olyan négyszög, amelynek <u>van két derékszöge</u>, <u>de nem írható körbe</u>!



2) Ha két négyszög szögei egyenlők, akkor a két négyszög hasonló. NEM
Van két olyan négyszög, amelynek <u>szögei egyenlők</u>, <u>de nem hasonlóak</u>!



3) Ha két háromszög hasonló, és van két egyenlő oldaluk, akkor a két háromszög kongruens. NEM
Van két hasonló háromszög, amelynek <u>van két egyenlő oldaluk</u>, <u>de nem kongruensek</u>!



4) Minden olyan négyszög amelyben van két-két egyenlő szög, az paralelogramma. NEM
Van olyan négyszög, amelyben <u>van két-két egyenlő szög</u>, <u>de nem paralelogramma</u>!

<u>További példák:</u>

1) $(\forall\ \mathbf{x}\in R)\ (\forall\ \mathbf{y}\in R)\ (x+y)2=x2+2xy+y2$

2) $(\exists\ \mathbf{x}\in R)\ (\exists\ \mathbf{y}\in R)\ (x-1)2+ (y-2)2 =0$

3) $\neg(\exists\ \mathbf{x}\in R)\ (\exists\ \mathbf{y}\in R)\ (x2 +y2 <0\ ) \equiv (\forall\ \mathbf{x}\in R)\ (\forall\ \mathbf{y}\in R)\ (x2 +y2 \geq 0\ )$

4) $\neg(\forall\ \mathbf{x}\in R)\ (\forall\ \mathbf{y}\in R)\ (x\cdot y< 0\ ) \equiv (\exists\ \mathbf{x}\in R)\ (\exists\ \mathbf{y}\in R)\ (x \cdot y \geq 0\ )$

5) $\neg(\forall\ \mathbf{x}\in R)\ (\exists\ \mathbf{y}\in R)\ (x2 =y2 +1) \equiv (\exists\ \mathbf{x}\in R)\ (\forall\ \mathbf{y}\in R)\ (x2 \neq y2 +1)$

6) $\neg(\exists\ \mathbf{x}\in R)\ (\forall\ \mathbf{y}\in R)\ (x+y=1) \equiv (\forall\ \mathbf{x}\in R)\ (\exists\ \mathbf{y}\in R)\ (x+y \neq 1)$

Tételekről

- Az olyan állításokat, amelyeket bizonyítás nélkül elfogadunk, axiómáknak vagy alapigazságoknak nevezzük.

- A matematika fontosabb eredményeit tételekben fogalmazzák meg.

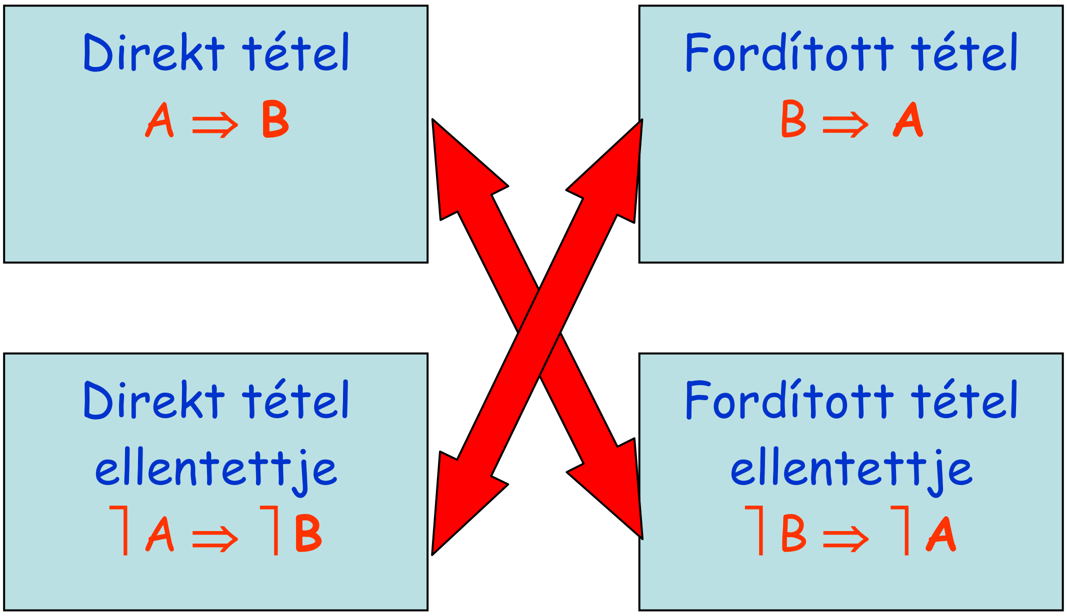
- Azokat az állításokat amelyek levezethetők definíciókból és axiómákból, tételeknek nevezzük.

- Minden tételnek 2 összetevője van:
  1) feltétel vagy premissza
  2) következmény vagy konklúzió

A tétel logikai szerkezete: A $\Rightarrow$ **B**

A tételben megfogalmazott eredményeket bizonyítani kell!

A bizonyítás azt jelenti, hogy kapcsolatba hozzuk olyan állításokkal, amelyeknek igaz voltát már beláttuk (más tételek), vagy bizonyítás nélkül elfogadunk (axiómák).



Logikai táblázatokkal igazolható, hogy:
1) $(A \Rightarrow \mathbf{B}) \equiv (\neg B \Rightarrow \neg \mathbf{A})$
2) $(B \Rightarrow \mathbf{A}) \equiv (\neg A \Rightarrow \neg \mathbf{B})$

Példák:

- Direkt tétel: Ha két háromszög kongruens, akkor a területeik egyenlők. (i)

- Fordított tétel: Ha két háromszög területe egyenlő, akkor kongruensek. (h, adj ellenpéldát!)

- Direkt tétel ellentett tétele: Ha két háromszög nem kongruens, akkor területeik nem egyenlők. (h)

- Fordított tétel ellentett tétele: Ha két háromszög területe nem egyenlő, akkor nem kongruensek. (i)

A „reductio ad absurdum” (a lehetetlenségre való visszavezetés)

- Az indirekt bizonyítási módszerek közé tartozik.
- A módszer lényege:
  - Bizonyítandó, hogy $A \Rightarrow B$ igaz
  - Tegyük föl, hogy B nem igaz ($\rceil B$)
  - Ezen feltételre támaszkodva, korrekt következtetéseket végezve, ellentmondásra jutunk.
- Mivel juthatunk ellentmondásba?

1) A kiinduló feltétellel (A)
2) Valamilyen ismert tétellel
3) Valamilyen axiómával

Példák:

1) Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{2}$ nem racionális.

Bizonyítás:

Feltételezzük az ellenkezőjét, vagyis, hogy

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \qquad \text{ahol } (p,q)=1$$

Négyzetre emeléssel: $2q^2=p^2$, ahonnan muszáj, hogy p=2r legyen, így $2q^2=4r^2$ vagyis $q^2=2r^2$ ahonnan muszáj, hogy q=2s legyen, de így ellentmondásra jutottunk a feltevéssel, hogy (p,q)=1

2) Igazoljuk, hogy $10^{2013}+5$ nem négyzetszám!

Bizonyítás:

Feltételezzük az ellenkezőjét vagyis, hogy $10^{2013}+5=k^2$

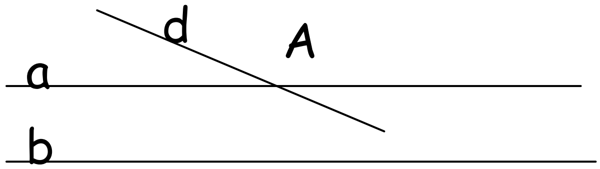
vagyis $100\ldots005=k^2$ de $(1+5) \vdots 3$, így $k^2 \vdots 3$, ezért $k \vdots 3$

$100\ldots005 \vdots 9$, de ez azt jelentené, hogy $(1+5) \vdots 9$ és ez absurdum.

Az előbbiekben a 9-cel való osztási szabállyal jutottunk ellentmondásba.

3) Igazoljuk, hogy ha egy d egyenes, két párhuzamos *a*, és *b* egyenesek közül metszi az egyiket, akkor metszi a másikat is.

Bizonyítás:



Feltételezzük az ellenkezőjét vagyis, hogy $a \cap d = \{A\}$ az egyetlen metszéspont, tehát a *b* egyenest nem metszi.

De ha nem metszi, akkor párhuzamos vele, tehát d!!b

De ekkor az A ponton át a *b* egyeneshez *d* is és *a* is párhuzamos, vagyis az A ponton 2 párhuzamos húzható, a b-hez, ez ellentmond a párhuzamossági axiómának.

<u>Direkt és indirekt bizonyítás</u>

1) <u>Direkt bizonyítással bizonyítandó, hogy A $\Rightarrow$ **B**</u>

- A bizonyítás menete <u>szintetikusan</u>:

$$A \Rightarrow \mathbf{E_1} \Rightarrow \mathbf{E_2} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \mathbf{E_k} \Rightarrow \mathbf{B}$$

ahol E_1, E_2, …, E_k eredmények amik levezethetők.

- A bizonyítás menete <u>analitikusan</u>:

$$B \Leftarrow \mathbf{E_1} \Leftarrow \mathbf{E_2} \Leftarrow \ldots \Leftarrow \mathbf{E_k} \Leftarrow \mathbf{A}$$

ahol E_1, E_2, …, E_k elégséges feltételek.

<u>Példa:</u>

Igazoljuk, hogy ha a>0 akkor a+1/a≥2

<u>Direkt bizonyítás szintetikusan</u>:

$$a > 0 \Rightarrow \frac{(a-1)^2}{a} \geq 0 \Rightarrow \frac{a^2-2a+1}{a} \geq 0 \Rightarrow a-2+\frac{1}{a} \geq 0 \Rightarrow a+\frac{1}{a} \geq 2$$

<u>Direkt bizonyítás analitikusan</u>:

$$a+\frac{1}{a} \geq 2 \Leftarrow a-2+\frac{1}{a} \geq 0 \Leftarrow \frac{a^2-2a+1}{a} \geq 0 \Leftarrow \frac{(a-1)^2}{a} \geq 0 \Leftarrow a > 0$$

<u>Analitikus szintetikus bizonyítás egyben</u>:

$$a+\frac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow a-2+\frac{1}{a} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a^2-2a+1}{a} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(a-1)^2}{a} \geq 0 \Leftrightarrow a > 0$$

2) Indirekt bizonyítással bizonyítandó, hogy $\rceil B \Rightarrow \rceil \mathbf{A}$

A bizonyítás menete szintetikusan:

$\rceil B \Rightarrow \mathbf{E_1} \Rightarrow \mathbf{E_2} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \mathbf{E_k} \Rightarrow \rceil \mathbf{A}$

ahol E_1, E_2, …, E_k eredmények amik levezethetők.

A bizonyítás menete analítikusan:

$\rceil \mathbf{A} \Leftarrow \mathbf{E_1} \Leftarrow \mathbf{E_2} \Leftarrow \ldots \Leftarrow \mathbf{E_k} \Leftarrow \rceil B$

ahol E_1, E_2, …, E_k elégséges feltételek.

Példa:

Az $a>0 \Rightarrow a+1/a\geq 2$ helyett $a+1/a<2 \Rightarrow a<0$

Direkt bizonyítás szintetikusan:

$$a+\frac{1}{a}<2 \Leftarrow a-2+\frac{1}{a}<0 \Leftarrow \frac{a^2-2a+1}{a}<0 \Leftarrow \frac{(a-1)^2}{a}<0 \Leftarrow a<0$$

Direkt bizonyítás analitikusan:

$$a<0 \Rightarrow \frac{(a-1)^2}{a}<0 \Rightarrow \frac{a^2-2a+1}{a}<0 \Rightarrow a-2+\frac{1}{a}<0 \Rightarrow a+\frac{1}{a}<2$$

Analitikus szintetikus bizonyítás egyben:

$$a+\frac{1}{a}<2 \Leftrightarrow a-2+\frac{1}{a}<0 \Leftrightarrow \frac{a^2-2a+1}{a}<0 \Leftrightarrow \frac{(a-1)^2}{a}<0 \Leftrightarrow a<0$$

Feladat:

Az előbbiek mintájára igazoljuk, hogy

Ha $a<0$, akkor $a+1/a\leq -2$

Kezdjük az analitikus bizonyítással, majd folytassuk a szintetikussal!