Halmazelméleti alapfogalmak

A halmaz (sokaság) „jól meghatározott, megkülönböztetett dolgok (tárgyak, fogalmak, stb.) összessége”.
- A halmaz *alapfogalom*. Ez azt jelenti, hogy csak példákon keresztül magyarázzuk, szemléltetjük, de értelmezése nincs.
- A halmazelméletet, melyet önálló diszciplínává Cantor fejlesztett a XIX. század második felében, a matematika minden ága felhasználja.
(Georg Cantor német matematikus, 1845 – 1918).
- A halmazokat az ABC *nagybetűivel* jelöljük. Egy halmaz elemeit, az ABC *kisbetűivel* jelöljük.
- Azt a tényt, hogy *x elem az A halmaz eleme* (hozzátartozik az A halmazhoz) $x \in A$ jelöljük és „x eleme A halmaznak” olvassuk.
Az $x \notin A$ jelölés olvasata: x nem eleme A-nak (x elem nincs benne az A halmazban).

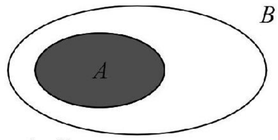
A halmaz megadása.
-A halmaz megadható az *elemei felsorolásával*, vagyis <u>szintetikus módon</u>.
A felsorolt elemeket { } zárójelbe írjuk. Minden elemet *csak egyszer* írunk le. A felsorolt elemek *sorrendje nem számít*. Az ilyen halmazokat *rendezetlen halmazok*nak nevezzük.
<u>**Például**</u>: {1, 2, 3}= {2, 1, 3}, stb.
Amennyiben a sorrend is számít, a halmazt rendezett halmaznak nevezzük, és ( ) zárójelbe írjuk. Rendezett halmazokkal a kombinatorikában foglalkozunk.
<u>**Például**</u>: (1, 2, 3)$\neq$ (2, 1, 3), stb
-A halmaz másik megadási módja az <u>analitikus</u> megadás, vagyis megadjuk a halmaz elemeinek *jellemző tulajdonságát*.
E jelölési mód formája: $\{x | p(x)\}$ vagy $\{x; p(x)\}$
Olvasd: „azon x elemek halmaza, amelyekre p(x)”, vagyis azon x elemek halmaza, amelyek rendelkeznek a p(x) tulajdonsággal.
Pl.
$$A = \{x | 10 < x \leq 35, x \vdots 5, x \in N\} = \{x \in N | 10 < x \leq 35, x \vdots 5\} = \{x \in N;\ 10 < x \leq 35,\ x \vdots 5\}$$
Kiolvasása: azon x számok, melyek 10 és 35 között vannak, utóbbit beleértve, amelyek oszthatók 5-tel és természetes számok.
Szabatosan, tömören fogalmazva: azon, 5-tel osztható természetes számok halmaza, amelyek 10 és 35 között vannak, beleértve az utóbbit.
Az A halmaz felsorolással megadva: $A = \{15, 20, 25, 30, 35\}$.
Egy halmazban lehet véges számú elem, végtelen számú (pl. a természetes számok halmazában), vagy egyetlen elemet sem tartalmaz.
Ez utóbbi neve *üres halmaz*, jele:Ø.

Ha az A halmaz minden eleme a B halmaznak is eleme, akkor azt mondjuk, hogy A **részhalmaza** B-nek. Jele: $A \subseteq B$.
Kiolvasása: „A halmaz részhalmaza B halmaznak”, „A benne van a B-ben”, „ B magában foglalja (tartalmazza) A-t”.

Ez az értelmezés tömörítve:

$(A \subseteq B) \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$.

Ugyanez Venn-Euler diagrammal:



$A \subset B$

- Az A halmaz részhalmazai között van az Ø és maga A halmaz is. Ezeket az A halmaz *nem valódi részhalmaza*inak nevezzük.
- Az A halmaz többi részhalmazának a neve az A *valódi részhalmaza*i. Ha azt akarjuk jelölni, hogy A halmaz valódi részhalmaza B-nek, akkor a $\subset$ részhalmaz jelet használjuk, vagyis: $A \subset B$.
- Az A halmaz *részhalmazainak a halmazá*t P(A) jelöli: Vagyis $P(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$.

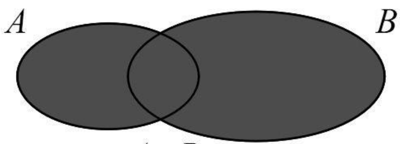
Tétel:

Ha az A halmaznak n eleme van ($n \geq 0$), akkor A részhalmazainak száma 2^n.
Ez az állítás matematikai indukcióval, Newton binom- képletével bizonyítható.
Pl.
Legyen A = {a, b, c}. Írjuk föl a P(A)-t. $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, A\}$.
Látható, hogy a megadott 3 elemes halmaznak $8 = 2^3$ darab részhalmaza van.
Általában egy *n* elemű *A* halmaz esetén *P(A)*-nak 2^n eleme van.

Két halmaz egyenlő, ha ugyanazokat az elemeket tartalmazza, vagyis egymásnak kölcsönösen részhalmazai: $(A = B) \overset{def}{\Leftrightarrow} (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$.

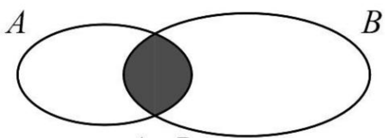
Halmazműveletek

1. Halmazok *egyesít*ett halmaza tartalmazza szóban forgó halmazok összes elemét
$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$



$A \cup B$

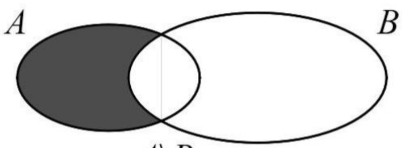
2. Két vagy több halmaz *metszet*e csak azon elemeket tartalmazza, amelyek mindenik halmazban előfordulnak.
$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$.



$A \cap B$

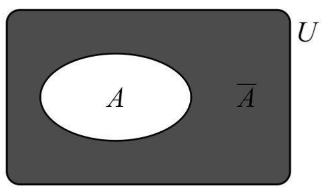
Az ábrán a mindkét irányban satírozott rész.
Ha két halmaz metszete az üres halmaz, azaz $A \cap B = \emptyset$ ezeket *diszjunkt halmazok*nak nevezzük.

3. Két halmaz *különbség*halmaza az első halmaz azon elemeit tartalmazza, amelyek nincsenek meg a második halmazban.
$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$. (jelöljük A \ B-vel is.)

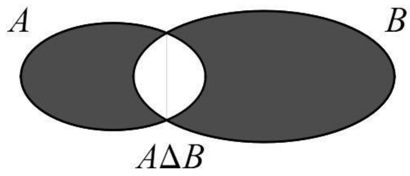


$A \setminus B$

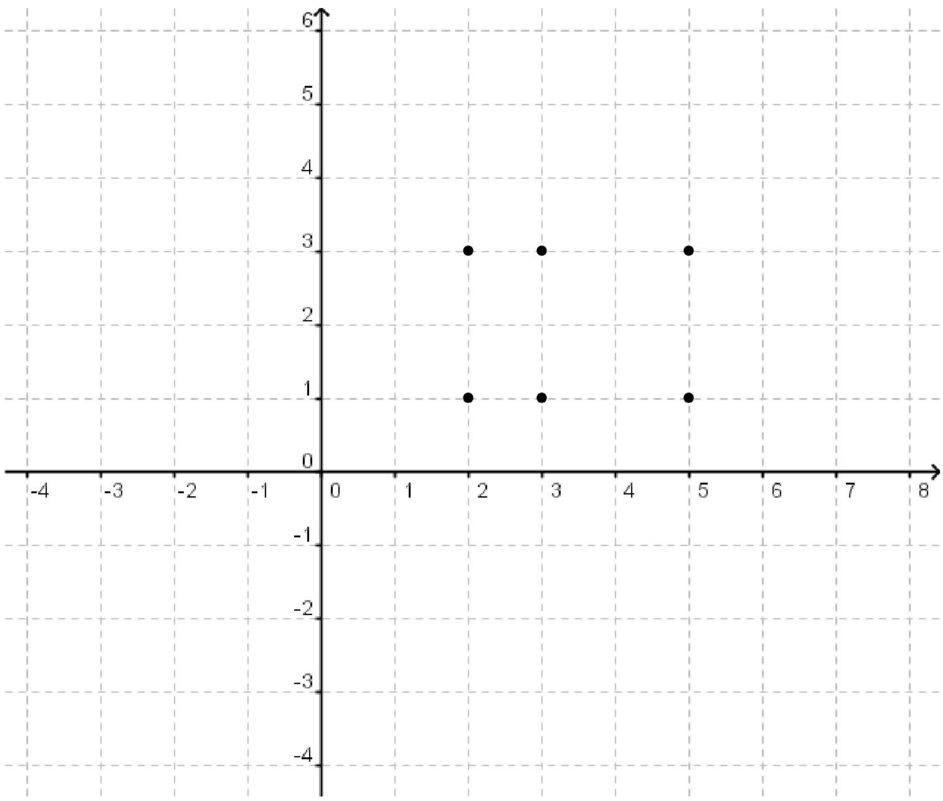
4. *Egy halmaznak adott halmazra vonatkozó kiegészítő (komplementer) halmaza* tulajdonképpen a két halmaz különbsége:
Ha $A \subset E$, *akkor* $C_E A = E - A = \{x \mid x \in E \wedge x \notin A\}$.



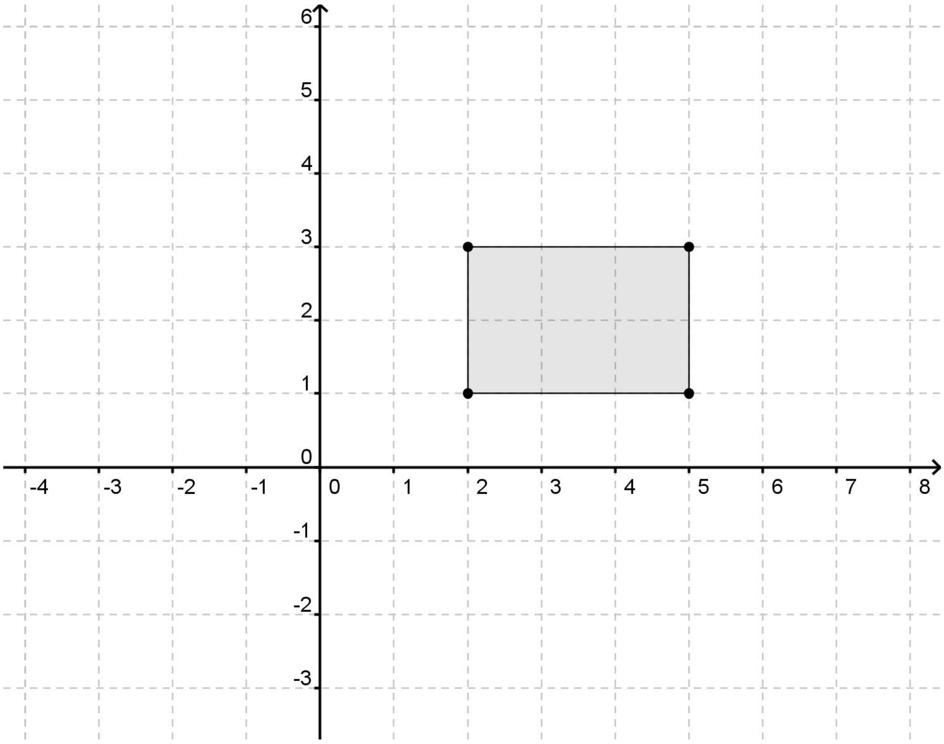
5. Két halmaz szimmetrikus különbségén azt értjük, ami benne van a két halmaz valamelyikében, de nincs benne a metszetben. Az értelmezése a következő: $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ vagy $A\Delta B=(A\cup B)\setminus(B\cap A)$



6. *Két halmaz Descartes-szorzata* a két halmaz elemeiből képezett rendezett elempárok halmaza. $A\times B=\{(x,y)|x\in A, y\in B\}$
Amennyiben ezek a halmazok számhalmazok, a Descartes-szorzat mértani ábrázolása derékszögű koordináta rendszerben lehetséges.
Ha A és B halmazok egész számokat tartalmaznak, akkor a sík rácspontjainak részhalmazát kapjuk ábraként.
Pl.
Ha A = {2, 3, 5}, B = {1, 3}, akkor
A × B = {(2,1); (2,3); (3,1); (3,3); (5,1); (5,3)}.
Az így kapott szorzat rácspontjai a mellékelt ábrán láthatók



Ha A és B zárt intervallumok, akkor az AxB képe egy téglalap, a belsejével együtt.
Pl.
Ha A = [2, 5], B = [1, 3], akkor az A × B szorzat mértani képe az ábrán látható téglalap és annak belseje.
Nyilvánvaló, hogy amennyiben nyílt, vagy félig nyílt, félig zárt intervallumokat veszünk, e szerint fog változni az, hogy a téglalap belsejéhez éppen melyik határszakasza fog hozzátartozni.



A halmazokkal végzett műveletek tulajdonságai:

$A \cup A = A,\ A \cup \emptyset = A$

$A \cup B = B \cup A$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$A \cap A = A,\ A \cap \emptyset = \emptyset$

$A \cap B = B \cap A$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Ha $A, B \subset E$, *akkor*

$C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$

$C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$

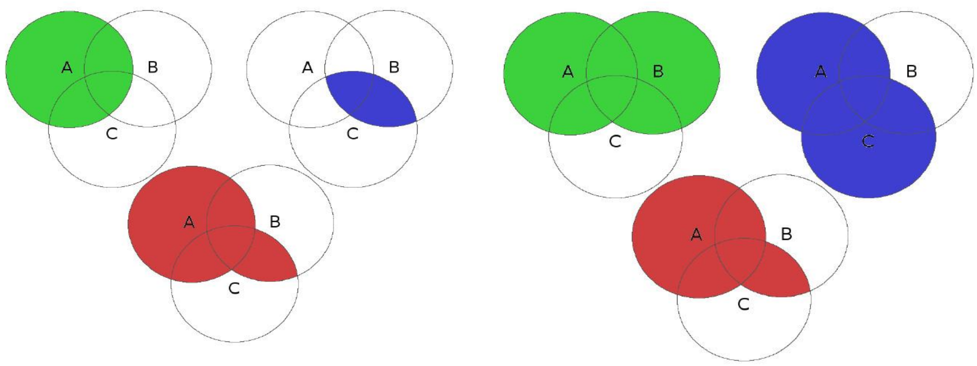
(de Morgan képletek)

Halmazelméleti összefüggések bizonyítása:

1. Példa

Igazolja Venn-diagram segítségével a következő összefüggést!

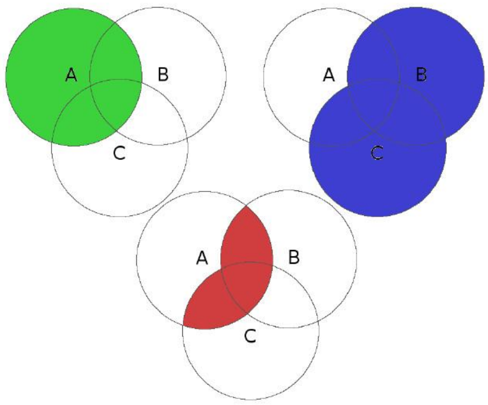
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

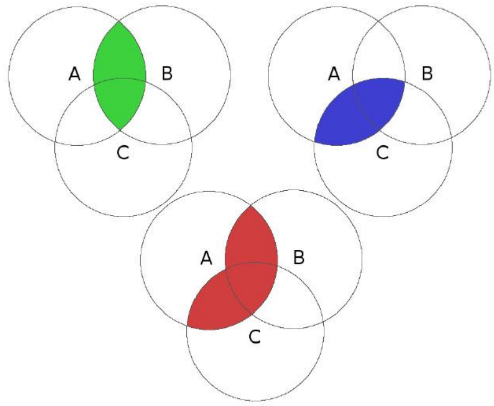


1. feladat

Igazolja Venn-diagram segítségével a következő összefüggést!

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

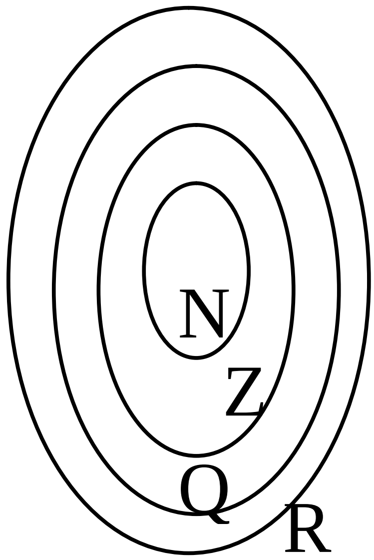




Bizonyítás axiomatikusan: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Igazolni fogjuk, dupla bennfoglaltatással, hogy
$M = A \cup (B \cap C) \subset (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cap (\mathrm{A} \cup \mathrm{C}) = \mathrm{N}$ és $\mathrm{N} = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cap (\mathrm{A} \cup \mathrm{C}) \subset A \cup (B \cap C) = M$
(1) Ha $x \in M = A \cup (B \cap C)$, akkor $x \in A \vee x \in (B \cap C)$, azért $x \in A \vee B \wedge C$ így $x \in (A \cup B) \vee x \in (B \cap C)$, tehát $x \in (A \cup B) \cap (\mathrm{A} \cup C) = N \quad \forall x$ esetén, azért $M \subset N$.
Fordítva:
(2) Ha $x \in (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cap (\mathrm{A} \cup \mathrm{C}) = \mathrm{N}$**,** akkor $x \in (A \cup B) \wedge x \in (\mathrm{A} \cup C)$, ezért $x \in A \vee B \wedge C$ így $x \in A \cup (B \cap C) = M \quad \forall x$ esetén, azért $N \subset M$. Tehát $M = N$

Nevezetes számhalmazok:

A *természetes számok* halmaza: $\mathbf{N} = \{0,1,2,3,...\}$
Az *egész számok* halmaza: $\mathbf{Z} = \{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$
A *racionális számok* halmaza: $\mathbf{Q}. = \left\{ \frac{a}{b} \middle| \ a,b \in Z, b \neq 0 \right\}$
Valós számok halmaza: **R**
Irracionális számok halmaza: **R \ Q**
Minden olyan számhalmaz esetében, ha a halmaz nem tartalmazza a 0-t, akkor a szokásos jelölés, hogy „megcsillagozzuk” a halmaz nagybetűjét: **N*** = **N** \ {0}.
A számhalmazok között fennáll a következő bennfoglalás: $N \subset Z \subset Q \subset R$.



Függvények

Ha az $A \neq \emptyset$ minden elemének megfeleltetünk a $B \neq \emptyset$ halmaz legfeljebb egy elemét, akkor az ilyen f megfeleltetést, függvénynek (leképezésnek) nevezzük. Az *A a függvény értelmezési tartománya* és a *B* a *függvény értékkészlete*.

Tehát egy függvényt *három elem határoz meg*: az A értelmezési tartomány, a B értékkészlet és a megfeleltetési törvény (eljárás).

A függvény jelölése $f : A \to B$ vagy $A \xrightarrow{f} B$.

Ha $a \in A$, akkor az $f(a) \in B$ értéket az a elem *képének* vagy *helyettesítési értéknek* nevezzük.

Ha az A halmaz számhalmaz, akkor az $f : A \to B$ függvényt *számfüggvénynek* nevezzük.

Ha $M \subseteq A$ akkor az M halmaz képe $f(M) = \left\{ f(x) \middle| x \in M \right\}$.

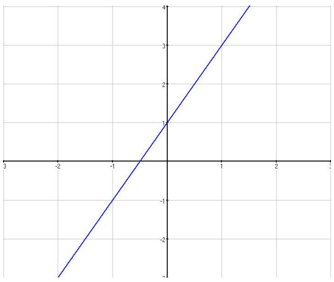
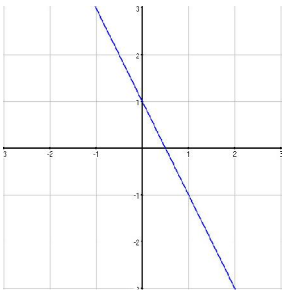
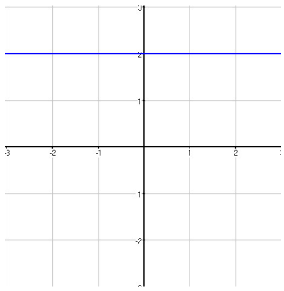
Az $\operatorname{Im}(f) = f(A) = \left\{ f(x) \middle| x \in A \right\}$ halmazt a függvény *képhalmazának* nevezzük, és $\operatorname{Im}(f) \subseteq B$.

A $G = \left\{ (x, y) \middle| x \in A, y = f(x) \right\} \subset A \times B$ halmazt az f *grafikonjának* nevezzük.

Az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásai az f függvény és az OX tengely metszéspontjának az x koordinátáját adja.

Az $f : A \to B$ függvényt monoton növekvőnek (csökkenőnek) nevezzük, ha $\forall x_1, x_2 \in A$ esetén $f(x_1) \leq f(x_2)$ illetve $f(x_1) \geq f(x_2)$. A monotonítás tanulmányozása végett az $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ tört előjelét szoktuk tanulmányozni.

Az $f : R \to R$, $f(x) = a \cdot x + b$ függvényt elsőfokú függvénynek nevezzük, amely szigorúan növekvő, ha $a > 0$ és szigorúan csökkenő, ha $a < 0$ és állandó, ha $a = 0$.

Az $f : R \to R$, $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, $a \neq 0$ függvényt másodfokú függvénynek nevezzük. Az $\boxed{a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a} \right)^2 + \dfrac{-\Delta}{4a}}$ a másodfokú függvény kannónikus alakja.

Az $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ másodfokú egyenlet megoldó képlete: $\boxed{x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$, ahol $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$

A másodfokú egyenlet felírása a gyökei segítségével, szorzótényezős alakban:

$$\boxed{a\cdot x^2+b\cdot x+c=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)}$$

A másodfokú egyenlet felírása az S és P segítségével: $\boxed{x^2-S\cdot x+P=0}$ ahol $\boxed{S=x_1+x_2}$ és $\boxed{P=x_1\cdot x_2}$

Az $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$ másodfokú egyenlet gyökei és együtthatói közötti összefüggések (Viéte-féle összefüggések): $\boxed{x_1+x_2=-\frac{b}{a},\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}}$

Az $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$ egyenletű parabola *csúcsának a koordinátái*: $\boxed{V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)}$

Ha $a>0$ akkor $\min\limits_{x\in R} f(x)=\min(ax^2+bx+c)=-\frac{\Delta}{4a}$ ha $x=-\frac{b}{2a}$

Ha $a<0$ akkor $\max\limits_{x\in R} f(x)=\max(ax^2+bx+c)=-\frac{\Delta}{4a}$ ha $x=-\frac{b}{2a}$

A másodfokú függvény előjeltáblázatai:

Ha $\Delta>0$ akkor az $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$ előjele:

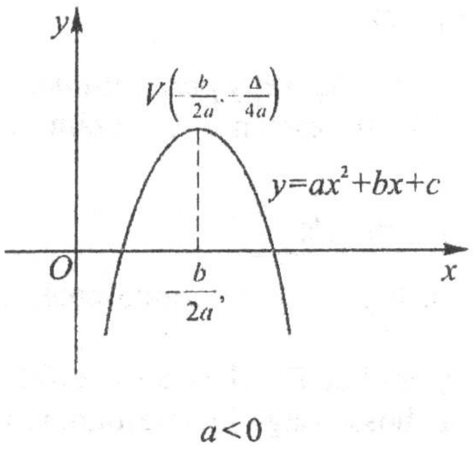
x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f(x)		„*a*” előjele	0	„– *a*” előjele	0	„*a*” előjele	

Ha $\Delta=0$ akkor az $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$ előjele:

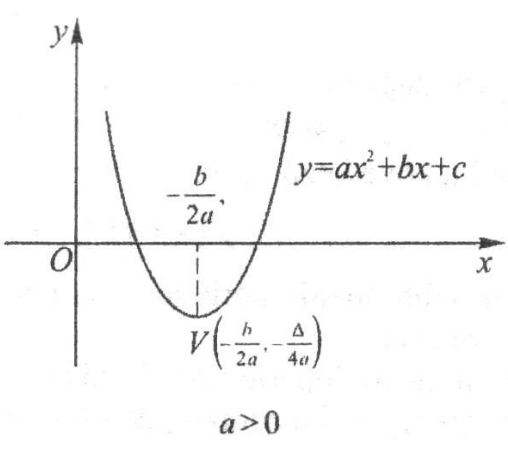
x	$-\infty$		$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
f(x)		„*a*” előjele	0	„*a*” előjele	

Ha $\Delta<0$ akkor az $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$ előjele:

x	$-\infty$		$+\infty$
f(x)		„*a*” előjele	



$a<0$



$a>0$

Ha *a* < *0* akkor a másodfokú függvény monoton növekvő, ha $x \in \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$, és monoton csökkenő, ha $x \in \left(-\frac{b}{2a}, \infty\right)$.

Ha *a* > *0* akkor a másodfokú függvény monoton csökkenő, ha $x \in \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$, és monoton növekvő, ha $x \in \left(-\frac{b}{2a}, \infty\right)$.

Egy $f : A \to B$ függvény páros, ha $f(-x) = f(x)$ minden $x \in A$ esetén.

Egy $f : A \to B$ függvény páratlan, ha $f(-x) = -f(x)$ minden $x \in A$ esetén.

Szürjektív, injektív, bijektív függvények

Az $f : A \to B$ fügvény *szürjektív*, ha $\forall y \in B$ esetén létezik $x \in A$ úgy, hogy $y = f(x)$. Akkor is szürjektív, ha $f(A) = B$.

Az $f : A \to B$ függvény *injektív*, ha $x_1, x_2 \in A$ és $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Az $f : A \to B$ függvény *bijektív*, ha szürjektív és injektív. Tehát bijektív, ha az f-en keresztül az A halmaz minden elemének, a B halmazból pontosan egy elem felel meg.(egy az egyel való leképezés).

Egy függvény akkor és csakis akkor invertálható, ha bijektív. Bármely függvény és inverze között fennáll: $f^{-1}(x) \circ f(x) = f(x) \circ f^{-1}(x) = x$.