A Venn-Euler- diagram és a logikai szita

Ebben a részben a Venn-Euler diagramról, a logikai szitáról, és a két témakör kapcsolatáról írunk, számos jellemző, megoldott feladattal szemléltetve a leírtakat.

Az ábráknak nemcsak a geometriában van fontos szerepük, hanem a legkülönbözőbb feladatok megoldásában is segíthetik *a kiindulási adatok elrendezését*, *összefüggések felismerését*, megkönnyíthetik a feltárt összefüggések későbbi felidézését és ellenőrzését.

A matematika különböző területein már régóta használatosak az úgynevezett *Venn-* és *Venn-Euler-diagramok*, a *halmazok közötti kapcsolatok, viszonyok tükrözésére*, adott tulajdonsággal rendelkező halmazok és azok számosságának (elemei számának) meghatározására, valamint egyes állítások logikai értékének megállapítására, logikai következtetések vizsgálatára (ezért is nevezik ezeket még halmazábráknak is).

Egy *Venn-diagramot* körökkel, vagy más zárt görbékkel, vagy ennél általánosabb alakzatokkal, például *n egyszerű zárt görbével* adunk meg a síkon. Minden görbe belseje valamilyen halmazt ábrázol, a zárt görbén kívül eső rész pedig annak komplementerét.

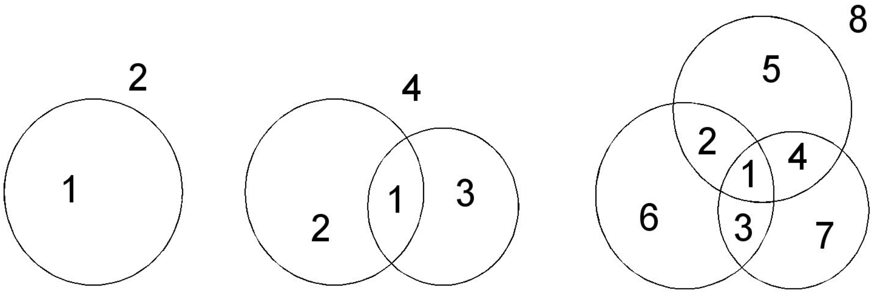
Az $\{A_1, A_2,..., A_n\}$ görbecsaládot *Venn-diagramnak* nevezzük, ha a görbék a síkot pontosan 2^n diszjunkt tartományra bontják, és a tartományok megegyeznek az összes lehetséges $X_1 \cap X_2 \cap ... \cap X_k$ alakú halmazzal, $k \in \{1, 2,..., n\}$, ahol minden X_i helyére az A_i egyszerű, zárt görbe belsejét vagy külsejét írhatjuk, $i \in \{1, 2,..., n\}$.

A körvonalakról az egyszerű zárt görbékre történő általánosítás okára nyomban rávilágít az alábbi észrevétel, mely már Venn 1880-as dolgozatában megtalálható:

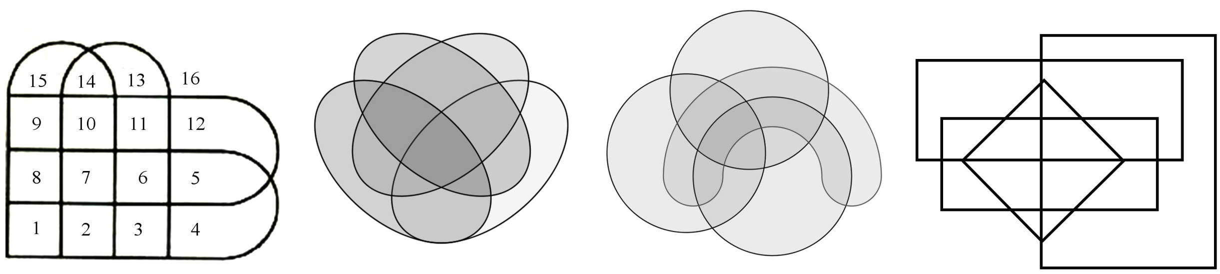
„Bármely diagramban legfeljebb három körvonal fordulhat elő.”

A bizonyítás lényege: n darab körvonal a síkot legfeljebb $n^2 - n + 2$ részre osztja .

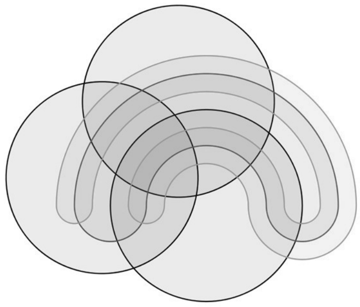
Ezért a Venn-diagram értelmezése alapján következik: $n \leq 3$. Az $n=1$, $n=2$ és $n=3$ eseteknek megfelelő diagramok a síkot rendre 2^1, 2^2, 2^3 részre osztják, lásd a következő ábrákat:



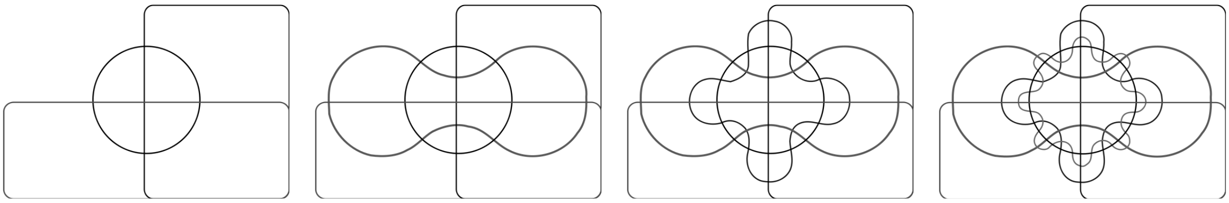
Másfajta görbékkel bármely *n* értékre lehet *n* görbét tartalmazó Venn-diagramot készíteni (lásd ugyanott). A probléma ellenben ott van, hogy az *n >3* szám növekedésével az ábrák egyre bonyolultabbak, nehezen használhatók feladatok megoldására. Nézzünk néhányat *n= 4* esetén:



Mind a négy ábra a síkot 16 diszjunk tartományra osztja, mind a négy eset általánosítható $n > 4$ esetén is, a második talán a legegyszerűbb és a legközelebb áll a körrel alkotott diagramokhoz, hiszen ez *ellipszisekkel* készült. A harmadik a „kifli” alak miatt általánosítható, a mellékelt ábrán látható az $n=5$ eset. A negyediket téglalapokból készítettük.

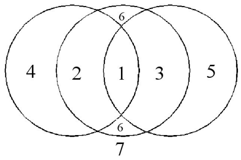


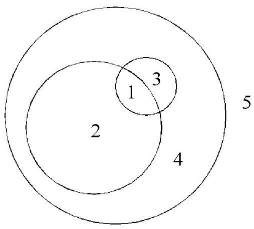
Említésre méltók Edwards konstrukciói, aki a Venn-diagramot gömbfelszínen készíti el, majd kivetíti a síkba. Az első három halmazt három egymást metsző főkör határolja, a negyediké meg úgy kanyarog, mint teniszlabdán a varrat. A visszavetítés után fogaskerék alakú halmazok keletkeznek, ahol minden egyes további halmaznak egyre több foga van. Íme néhány konstrukció:



Könnyen belátható, hogy $n > 3$ esetén az egyes tartományok azonosítása már körülményes.

Térjünk vissza a Venn-diagramok beindított tanulmányozásához. Az $X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_k$ alakú halmazokat *atomoknak* nevezzük. Ha a síkot n görbe p síkdarabra vágja és a létrejövő atomok száma a, akkor nyilvánvalóan $a \le p$. A Venn-diagramokra teljesül: $a = p = 2^n$. Ezenkívül az $a \le p \ne 2^n$ esetekben is használt diagramokkal is gyakran találkozhatunk. Íme néhány példa:





Az első esetben $a \le p \ne 2^n$ ($a = 7$, hiszen a 6-os számmal jelölt síkdarabok ugyanahhoz az atomhoz tartoznak), a második esetben $5 = a = p \ne 2^n$. Az ilyen típusú diagramot általában *Venn–Euler-diagramnak* nevezik. Ez a megnevezés inkább hazánkban honosodott meg, más országokban inkább tágabb értelemben vett, ugyancsak Venn-diagramoknak nevezik.

Érdemes megjegyezni, hogy az értelmezés szerinti Venn-diagram n görbéje által határolt síkbeli részek között minden lehetséges atom létezik. Más szóval a Venn-diagram esetén mindegyik $X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_k$ alakú halmaz létezik, míg a Venn–Euler-diagram esetén ez nem föltétlenül igaz. Tehát a Venn-diagramok az úgynevezett Venn–Euler-diagramok részhalmazát képezik. Az elkövetkezőkben bemutatjuk e diagramok néhány alkalmazási lehetőségét.

Egyik azonnali alkalmazását az úgynevezett logikai szita-formulák képezik.

A továbbiakban jelöljük $|X|$ vagy $card(X)$ az *X halmaz elemeinek a számát (számosságát)*. A kétkörös Ven-Euler diagramról leolvasható, hogy két halmaz esetén igaz, hogy $\boxed{|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|}$ (1) . Továbbá, ha $X \subset S$, akkor nyilvánvaló, hogy $|S - X| = |S| - |X|$, és most az $X = A \cup B$ választással, az $A, B \subset S$ feltételekkel, az (1) alapján kapjuk, hogy $\boxed{|S - (A \cup B)| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B|}$ (1’). Az (1) és (1’) összefüggéseket *másodrendű szita-formulának*, vagy egyszerűen *logikai szitának* hívjuk (a logikai szitára még használatos a *bennfoglalás-kizárás formula* elnevezés is).

Hasonló összefüggést állapíthatunk meg három halmaz esetén is, ha a három körös Ven-diagramot követjük. Ez alapján felírható, hogy

$\boxed{|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|C\cap A|+|A\cap B\cap C|}$ (2). Az előbbiek mintájára, az $A,B,C\subset S$ feltételek mellett levezethető a következő összefüggés is:

$\boxed{|S-(A\cup B\cup C)|=|S|-|A|-|B|-|C|+|A\cap B|+|B\cap C|+|C\cap A|-|A\cap B\cap C|}$ (2').

A (2) és a (2') képezik a harmadrendű szita-formulákat. Természetesen a szita-formula érvényes marad háromnál több tag esetén is. Ennek az általános alakja:

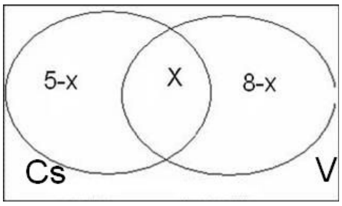
$$\boxed{\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\le j<j\le n}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\le j<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\ldots+(-1)^n\left|\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right|}$$ (3) és továbbá

$$\boxed{\left|S-\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\right|=|S|-\sum_{i=1}^{n}|A_i|+\sum_{1\le j<j\le n}|A_i\cap A_j|-\sum_{1\le j<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\ldots+(-1)^{n+1}\left|\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right|}$$ (3').

A (3) és a (3') *n-ed rendű szita-formulákat* a matematikai indukcióval is bizonyíthatjuk.

A továbbiakban olyan alkalmazásokat mutatunk be, amelyeknek a megoldása Ven-Euler diagrammal és a szita-formulával egyaránt elvégezhetők, de mutatunk be olyan feladatokat is, amelyeknél az egyik vagy a másik módszer előnyösebb.

1. feladat: Egy fagyisnál kétféle fagyiból lehet választani: csoki és vanília. 11-en állnak sorban a fagyisnál 5-en kértek csokis fagyit. Vaníliát 3-mal többen kértek mint csak csokist. Hányan kértek csokis és vaníliás fagyit is?



Megoldás: Jelölje Cs illetve V azok halmazát akik csokis illetve vaníliás fagyit vásároltak. Készítsük el a mellékelt ábrán látható Ven-Euler diagramot. Jelölje $|Cs\cap V|=x$ akkor $|Cs-V|=5-x$ és $|V-Cs|=8-x$, ezért az (5-x)+x+(8-x)=11 egyenletből x=2.

2. feladat: Hány darab olyan kétjegyű pozitív egész szám van, amely osztható 5-tel, vagy 6-tal, esetleg mind a kettővel?

Megoldás: Összesen 99-9=90 kétjegyű szám van, ebből kiszámoljuk, hogy hány 5-tel és 6-tal osztható kétjegyű szám van. Legyen A= {10,15,…,95} az *5-tel osztható kétjegyű számok* halmaza és B= {12,18,24,…,96} a *6-tal osztható kétjegyű* számok halmaza.

Tehát $A\cap B=\{30,60,90\}$ a 30-cal osztható kétjegyű számok halmaza. Ekkor $|A|=\left[\frac{99}{5}\right]-1=19-1=18$, $|B|=\left[\frac{99}{6}\right]-1=16-1=15$ (ki kellett vennünk az 5 és a 6 egyjegyű számokat), továbbá $|A\cap B|=\left[\frac{99}{30}\right]=3$. Az (1)-es szita-formula alapján felírható, hogy $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=18+15-3=30$. Tehát *30 kétjegyű szám osztható 5-tel vagy 6-tal.*

3. feladat: Hány darab olyan kétjegyű pozitív egész szám van, amely nem osztható sem 5-tel, sem 6-tal?

Megoldás: Erre a kérdésre úgy is válaszolhatunk, hogy figyelembe vesszük, hogy az előbbi feladat alapján 30 szám osztható 5-tel vagy 6-tal, tehát 90-30=60 nem osztható egyikkel sem. Ellenben a feladat megoldható a *komplementer szita-formulával*:

$|S-(A\cup B)|=|S|-|A|-|B|+|A\cap B|$, ahol $|A|=\left[\dfrac{99}{5}\right]-1=19-1=18$,

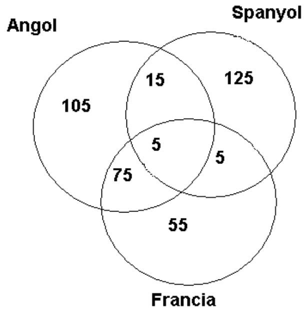
$|B|=\left[\dfrac{99}{6}\right]-1=16-1=15$, $|A\cap B|=3$, és a kétjegyű számok száma $|S|=90$. Tehát

$|S-(A\cup B)|=90-18-15+3=60$.

<u>4. feladat</u>: Hányféle képpen alakíthatunk ki 6 betűs szavakat az **a, e, m, o, u, y** betűkkel úgy, hogy ne tartalmazzák a **me** és **you** szavakat?

Megoldás: Legyenek S= az összes szó, A= a **me**-t tartalmazó szavak, B= a **you**-t tartalmazó szavak. A komplementer szitaképlet: $|S-(A\cup B)|=|S|-|A|-|B|+|A\cap B|$. De $|S|$=6!, $|A|$=5! (mert „**me**, a, o, u, y” száma 5), $|B|$=4! (mert „**you**, a, m, e” száma 4), $|A\cap B|$=3! (mert a „**me**, **you**, a” száma 3). Tehát a válasz: 720-120-24+6=582.

<u>5. feladat</u>: Az egyetemen 200-an tanulnak angolt, 150-en spanyolt és 140-en franciát. 80-an angolt és franciát, 20-an angolt és spanyolt, 10-en spanyolt és franciát, 5-en pedig mindhárom nyelvet tanulják. Hányan tanulnak összesen nyelvet?



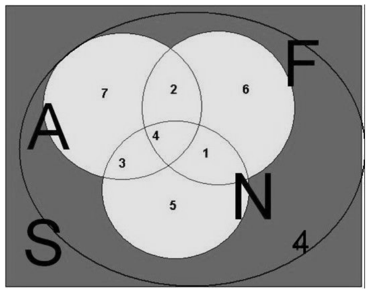
Megoldás: Bentről kifele haladva töltjük ki a halmazábrát. Először a „belső” 5- öt írjuk be. Ezután a 80- 5= 75-öt, a 20- 5= 15-öt, végül a 80-5= 75-öt. Ezután kitöltjük a „legkülső” tartományokat: 200- (5+15+75)= 105, 150- (5+5+15)=125, 140- (5+5+75)= 55. Ezután összeadva a tartományokban levő számokat 385 adódik.

A feladatot a szita-formulával is megoldhatjuk: legyenek A={angolul tudók}, S={spanyolul tudók}, F={franciául tudók}. Tehát:

$|A\cup S\cup F|=|A|+|S|+|F|-|A\cap S|-|S\cap F|-|F\cap A|+|A\cap S\cap F|=$

$=200+150+140-20-10-80+5=385$. Tehát ennyien tanulják valamelyik nyelvet.

<u>6. feladat</u>: Egy osztály 32 tanulója közül 16-an tanulnak angolul, 13-an franciául, 13-an németül. Az említett nyelvek közül 5-en németül és franciául is, 7-en németül és angolul is, 6-an angolul és franciául is tanulnak. Négyen mindhárom nyelvet tanulják. Hányan nem tanulják az említett nyelvek egyikét sem?

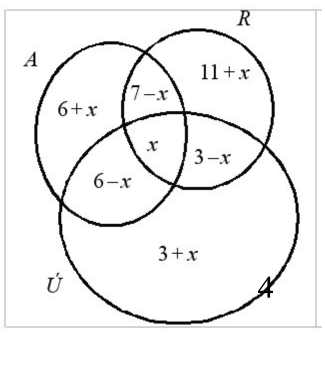


Megoldás: Bentről kifele haladva töltjük ki a halmazábrát. Először a belső 4-est írtuk be, azután 5-4=1, 7-4=3, 6-4=2, majd 16-(3+4+2)= 7, 13- (1+4+2)= 6, 13- 83+4+1)= 5. Az ábrán látható összes számok összege 28, és mivel 32- 28= 4, ezért ez a válasz. A szita-formulával $|S-(A\cup F\cup N)|=$

$=|S|-|A|-|F|-|N|+|A\cap F|+|F\cap N|+|N\cap A|-|A\cap F\cap N|=$

$=32-16-13-13+5+7+6-4=4$, vagyis ennyi tanuló nem tanulja a három nyelv közül egyiket sem.

<u>7. feladat</u>: Az osztályban 38 tanuló van. Mindenki űzi a következő sportágak valamelyikét: atlétika, röplabda, úszás. 19-en atletizálnak, 21-en röplabdáznak, 12 tanuló úszik; 7 tanuló atletizál és röplabdázik, 6 tanuló atletizál és úszik, 3 tanuló röplabdázik és úszik. Hány tanuló űzi mindhárom sportot?



Megoldás: Legyen $|A\cap B\cap C|=x$ és bentről kifele haladva töltjük ki a halmazábrát, majd összegezzük a benne látható kifejezéseket:

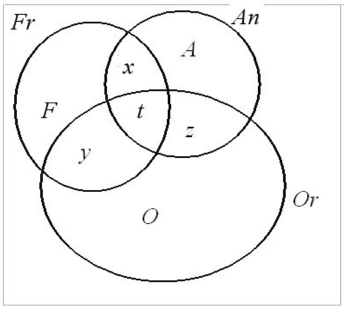
$(11+x)+(6+x)+(3+x)+(7-x)+(3-x)+(6-x)+x=38 \Rightarrow$ x=2

Szita-formulával is dolgozhatunk. Legyenek: A={atletizálók}, R={röplabdázók}, U={úszók}. Tehát felírható, hogy:

$\left|A\cup R\cup U\right| = |A| + |R| + |U| - |A\cap R| - |R\cap U| - |U\cap A| + \left|A\cap R\cap U\right|$.

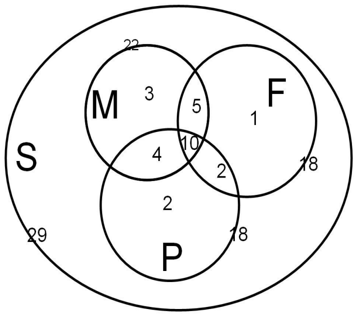
Beírva a számosságokat kapjuk, hogy:
$38 = 19 + 21 + 12 - 7 - 3 - 6 + \left|A\cap R\cap U\right|$, vagyis $\left|A\cap R\cap U\right| = 2$ tanuló űzi mindhárom sportot.

8. feladat: Egy osztály létszáma 30. Az osztályban három nyelvet tanulnak: angolt, oroszt és franciát, és minden diák tanulja legalább az egyik nyelvet. Angolul 14-en, oroszul 15-en, franciául 25-en tanulnak. Pontosan két nyelvet összesen 6 diák tanul. Hányan tanulják mindhárom nyelvet?



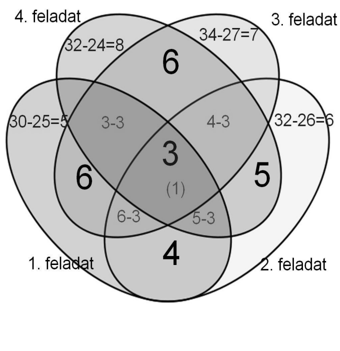
Megoldás: Legyen rendre Fr, An, Or a franciául, angolul, illetve oroszul beszélő tanulók halmaza; F, A, O a csak franciául, csak angolul, csak oroszul beszélő tanulók száma. Az x, y, z, t számok jelentése a diagramról leolvasható. A feltételek alapján:
F + A + O + x + y + z +t = 30; x + y + z = 6; F + x + y + t = 25; A + x + z + t = 14; O + y + z + t = 15. Ezért F + A + O = 30 – 6, F + A + O + 2 × 6 + 3 ×t = 54, ahonnan t = 9. Tehát ennyien tanulják mindhárom nyelvet.

9. feladat: Egy 29 fős osztálynak három kérdést tettek fel, mindenki igennel vagy nemmel válaszolhatott. A szereted-e a mateket kérdésre 22 igen, a szereted-e a fagyit kérdésre 18 igen, a szereted a palacsintát kérdésre 18 igen érkezett. Tudva azt, hogy azok közül akik szeretika mateket 7-en nem szeretik a fagyit és 8-an nem szeretik a palacsintát, valamint 12-en szeretik a fagyit és a palacsintát, de közülük 2 nem szereti a mateket. Hányan mondtak nemet mindhárom kérdésre?



Megoldás: Jelölje: S= az osztály tanulói, M= {szeretik a mateket}, F= {szeretik a fagyit}, P= {szeretik a palacsintát}. Tehát $|S| = 29,\ |M| = 22,\ |F| = 18,\ |P| = 18$. Vegyük észre, hogy:
$|M\cap F| = 22 - 7 = 15,\ |M\cap P| = 22 - 8 = 14,\ |F\cap P| = 12$ és
$|F\cap P\cap M| = 12 - 2 = 10$. A szita-formula alapján
$|S-(M\cup F\cup P)| = |S| - |M| - |F| - |P| + |M\cap F| + |F\cap P| + |P\cap M| +$
ahonnan kapjuk, hogy $|S-(A\cup B\cup C)| = 29 - (22 + 18 + 18) + (15 + 14 + 12) - 10 = 2$ vagyis ennyien mondtak nemet mindhárom kérdésre. A feladatot a Ven-diagrammal is megoldhatjuk, ha először a 10-et írjuk be, aztán a 14-10=4, 15-10=5, 12-10=2, majd sorra a 22-(4+10+5)=3, 18-(2+10+5)= 1, és végül a 18-(4+10+2)=2 értékeket. Ez összesen 27, így 29-27=2 a felelet.

10. feladat: A matematika dolgozatban 4 feladatot kellett megoldani.
a) Az 1. feladatot 30, a 2.-at 32, a 3.-at 34, a 4.-et 32 oldotta meg jól.
b) Az 1. és 2.-at 12, az 1. és a 3.-at 12, az 1. és a 4.-et 12, a 2. és a 3.-at 15, a 2. és a 4.-et 11, a 3. és 4.-et 10-en oldották meg helyesen.
c) Az 1., 2., 3. feladatokat 6-on, az 1., 2., 4. feladatokat 5-en, az 1., 3., 4. feladatokat 3-an, a 2., 3., 4. feladatokat 4-en oldották meg helyesen.
d) Az összes feladatot 3-an oldották meg hibátlanul.
e) Voltak 10-en akiknek egyetlen feladatot sem sikerült megoldani.
Hányan írtak dolgozatot matematikából?



Megoldás: A szita formulát alkalmazzuk 4 tagra, miszerint

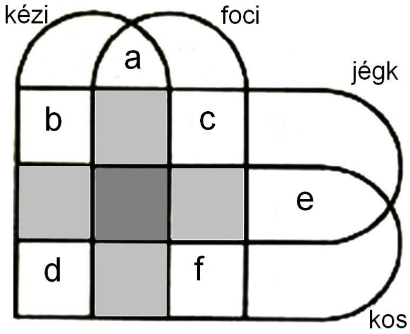
$$\left|\bigcup_{i=1}^{4} A_i\right| = \sum_{i=1}^{4}|A_i| - \sum|A_i\cap A_j| + \sum|A_i\cap A_j\cap A_k| - |A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4| =$$

$$= (30+32+34+32) - (12+12+12+15+11+10) + (6+5+3+4) - 3 = 71.$$

Tehát 71+10=81 tanuló írt dolgozatot matematikából. A feladatot

Venn-Euler diagrammal is megoldhatjuk, ha belülről kifele haladva töltjük ki a halmazábrát, de hamar rájövünk, hogy ez sokkal körülményesebb mint a három kör esetén.

<u>11. feladat</u>: Egy 24-es létszámú sportosztály tanulói négy sportágban szerepelnek: kézilabdáznak, fociznak, jégkorongoznak és kosárlabdáznak. Minden tanuló sportol, de senki sem szerepel kettőnél több sportágban. Tudjuk, hogy 9-en nem kézilabdáznak, 11-en nem fociznak, 16-an nem jégkorongoznak, 12-en pedig nem kosárlabdáznak. Tudjuk még, hogy 10-en fociznak, de nem kosaraznak, 11-en pedig kézilabdáznak, de ők sem kosaraznak. Hányan, és milyen összetételben űznek két-két sportágat?



Megoldás: A feltevésből azt kapjuk, hogy 24 – 9 = 15-en kézilabdáznak, 24 – 11 = 13-an fociznak, 24 – 16 = 8-an jégkorongoznak, 24 – 12 = 12-en pedig kosárlabdáznak. Mivel 15 + 13 + 8 + 12 = 48, és ez az összes tanulók számának a 2-szerese, következik, hogy mindenki pontosan két sportágban vesz részt, mert senki sem szerepel 2-nél több sportágban. Az ábrán látható halmazok az egyes sportágakban szereplő tanulókat jelölik, a betűk pedig a két-két sportágat űzők számát jelentik, a következőképpen: *a* – kézilabda-foci; *b* – kézilabda-jégkorong; *c* – foci-jégkorong; *d* – kézilabda-kosárlabda; *e* – jégkorong-kosárlabda; *f* – foci-kosárlabda.

$a+b+d=15$ (1), $a+c+f=13$ (2), $b+c+e=8$ (3), $d+e+f=12$ (4), $a+c=10$ (5), $a+b=11$ (6). Az 1. és 6. egyenlőségből azt kapjuk, hogy $d = 4$, a 2. és 5. alapján $f = 3$, a 4. alapján $e = 5$. De 12-en nem kosaraznak, tehát $a + b + c = 12$, de $a + c = 10 \Rightarrow b = 2$, $a = 9$ és $c = 1$.