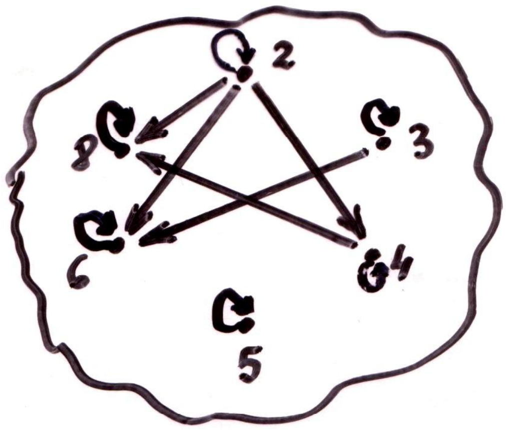
A relációelmélet alapjai

A ***reláció*** latin eredetű szó, jelentése ***kapcsolat***.

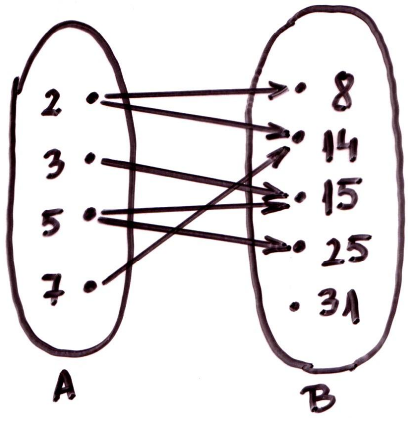
A reláció, két vagy több – nem feltétlenül különböző – halmaz elemei közötti viszonyt, kapcsolatot fejez ki.

A reláció értelmezése gráffal

1. példa: Legyen A={2, 3, 4, 5, 6, 8} és értelmezzünk egy $\Re$ relációt a következőképpen: $\Re$: „ y többszöröse az x-nek” , bármely x, y $\in$A esetén. Jelölje ezt **x→ y.**
Ábrázoljuk a relációt pontokkal és ezeket összekötő nyilakkal, az az nyíldiagrammal, vagyis gráffal!
Ez egy unáris reláció, ugyanazon halmaz elemei között fejez ki kapcsolatot.



2. példa: Legyen A={2, 3, 4, 5, 7} és B={8, 14, 15, 25, 31}és értelmezzünk egy $\Re$ relációt a következőképpen: $\Re$: „az x osztója az y-nak”, bármely x$\in$A és y$\in$B esetén.
Jelölje ezt **x → y.** Ábrázoljuk a relációt pontokkal és ezeket összekötő nyilakkal, az az nyíldiagrammal, vagyis gráffal!
Ez egy bináris reláció, mivel két halmaz között fejez ki kapcsolatot.



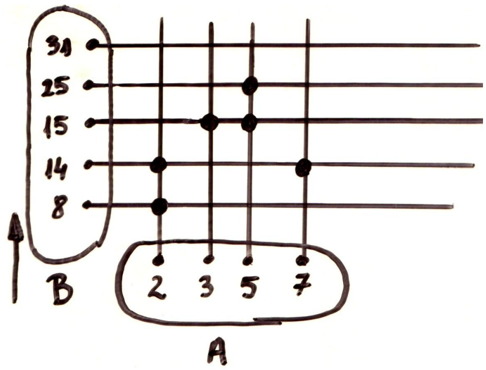
A reláció értelmezése táblázattal

3. példa: Ábrázoljuk a 2. példa relációját táblázattal!

A\B	8	14	15	25	31
2	x	x			
3			x		
5			x	x	
7		x			

A reláció értelmezése Descartes-féle diagrammal

4. példa: Ábrázoljuk a 2. példa relációját úgynevezett Descartes-féle diagrammal!



A relációban levő számok „találkozásánál” egy- egy pöttyöt teszünk.

A reláció értelmezése rendezett elempárokkal

A 2. példa esetén a relációban levő számpárok a következők:

$$\mathfrak{R} = \{(2,8); (2,14); (3,15); (5,15); (5,25); (7,14)\}$$

Feladat: Ha A={2, 3, 4, 5, 7} és B={8, 14, 15, 25, 31}, akkor írjuk fel az A×B Descares-féle szorzatot!

A×B={**(2,8); (2,14)**; (2,15); (2,25); (2,31); (3,8); (3,14); **(3,15);** (3,25); (3,31); (5,8); (5,14); **(5,15)**; **(5,25)**; (5,31); (7,8); **(7,14)**; (7,15); (7,25); (7,31)}

Észrevehető, hogy igaz, hogy $\mathfrak{R} \subset$ **A×B.** Ezért megadható a bináris reláció egy újabb értelmezése:

Az $\mathfrak{R}$ reláció, az **A×B** Descartes-féle szorzatnak egy részhalmaza.

Fontosabb relációk a matematikában

a) **Számok között:** egyenlő, kisebb, nagyobb, osztható, stb.
b) **Egy egyenes pontjai között**: megelőzi, követi, stb.
c) **Egyenesek között**: metsző, merőleges, párhuzamos, kitérő, stb.
d) **Síkok között**: párhuzamos, metsző, merőleges, stb.
e) **Síkbeli alakzatok között:** egybevágó (kongruens), hasonló, stb.
f) **Halmazok között:** részhalmaza, egyenlő, ugyanannyi eleme van, stb.

Relációk a hétköznapi életből

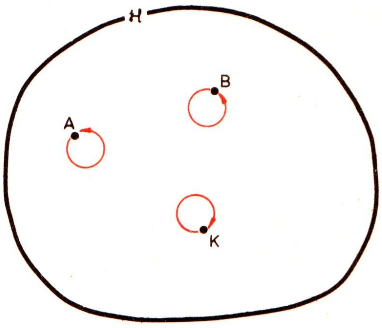
Barátja, házastársa, munkatársa, ugyanolyan magas, ugyanolyan tömegű, magasabb mint, ismerőse, 2 cm-rel magasabb, főnöke, felesége, iskolatársa, gondoskodik róla, apja, idősebb, nem alacsonyabb, stb.

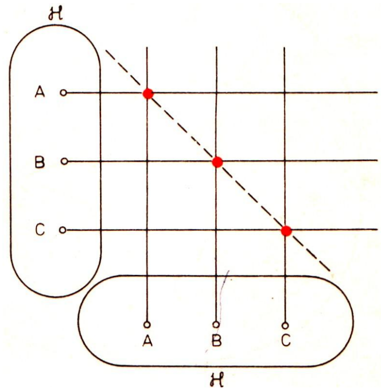
Relációk tulajdonságai

reflexív	**antireflexív** **irreflexív**
szimmetrikus	**antiszimmetrikus** **nem szimmetrikus** **(aszimetrikus)**
tranzitív	**nem tranzitív**
dichotom	**nem dichotom**

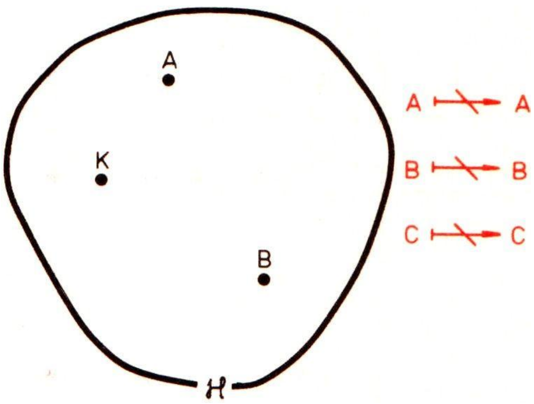
A relációs tulajdonságok értelmezése

1) Reflexív: x ℜ x minden x∈H esetén

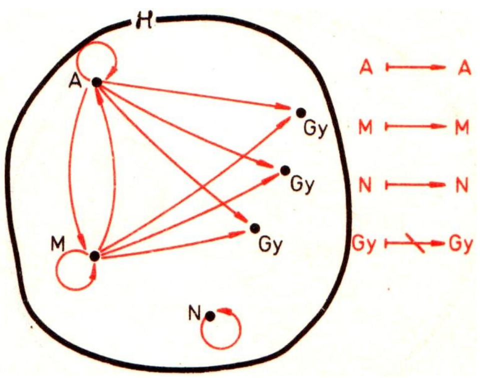


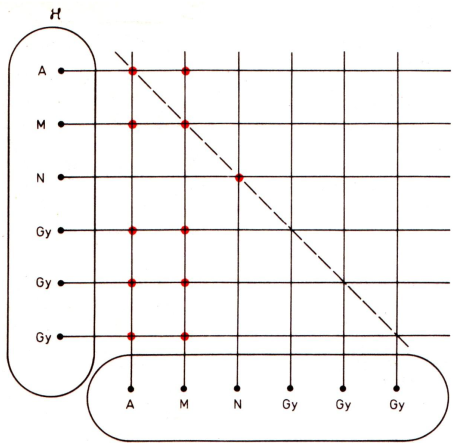


1a) Antireflexív: ha nem létezik x∈H úgy, hogy x ℜ x

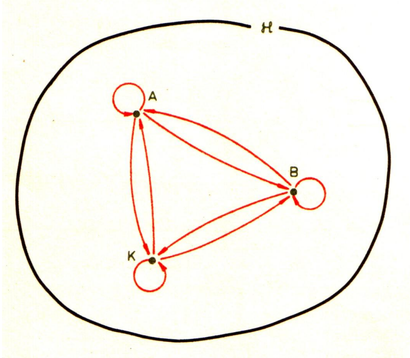


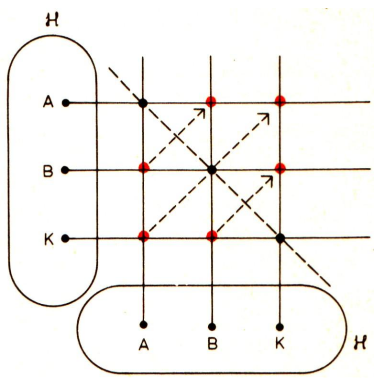
1b) Irreflexív: ha nem minden x∈H esetén igaz, hogy x ℜ x



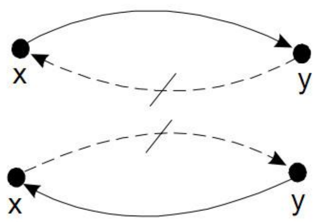


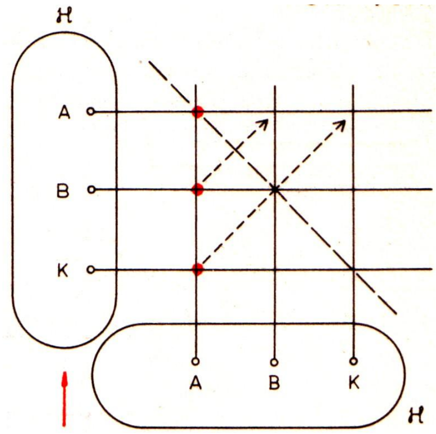
2) Szimmetria: ha x ℜ y, akkor y ℜ x



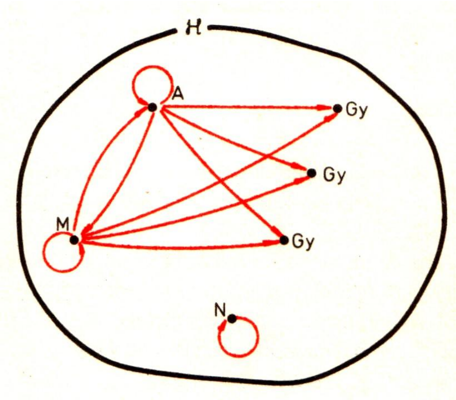


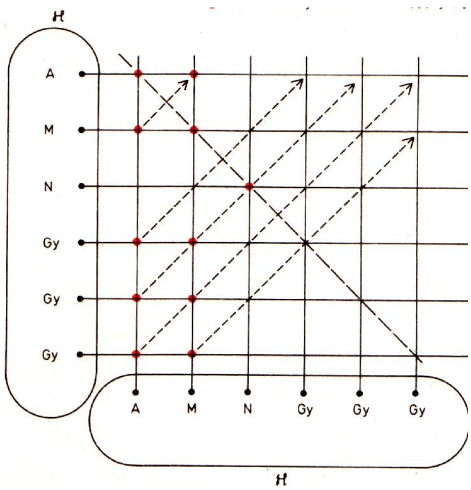
2a) Antiszimmetria: ha x $\Re$ y és y $\Re$ x , akkor x=y



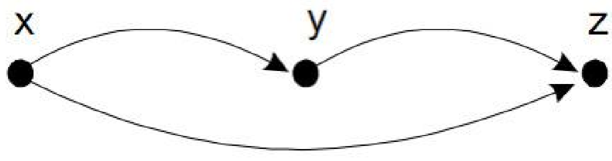


2b) Nem szimmetrikus, vagy aszimmetrikus: ha nem minden x∈H esetén áll fenn, hogy x $\Re$ y és y $\Re$ x

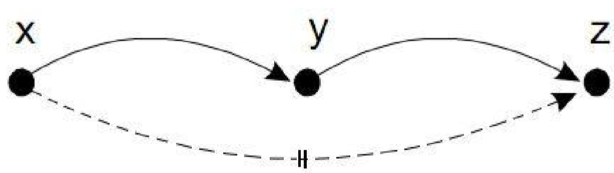




3) Tranzitív (láncszabály): ha x $\Re$ y és y $\Re$ z, akkor x $\Re$ z



3a) Nem tranzitív: ha x $\Re$ y és y $\Re$ z, akkor nem igaz, hogy x $\Re$ z

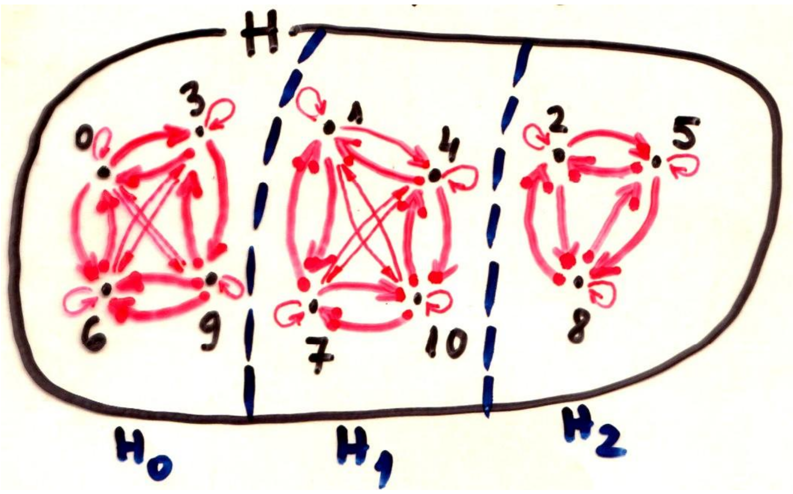


4) Dichotom: ha bármely x, y ∈H esetén x $\Re$ y vagy y $\Re$ x
Vagyis a gráfban bármely két pont között van él.

Reláció típusok

Ekvivalencia reláció	**Rendezési reláció**
1) Reflexív	**1) Reflexív**
2) Szimmetrikus	**2) Antiszimmetrikus**
3) Tranzitív	**3) Tranzitív**

5. példa: egy ekvivalencia reláció gráfja
Legyen H={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} és értelmezzük az $\mathfrak{R}$ relációt a következő képpen:
$\mathfrak{R}$: „x-nek és y-nak a 3-mal való osztási maradéka egyenlő” Jele: $x \equiv y \pmod 3$



A reláció ekvivalencia reláció, mert:
1) Reflexív: minden számnál van hurok, mert $x \equiv x \pmod 3$
2) Szimmetrikus: bármely két szám között van menet és jövet is nyíl, mert ha $x \equiv y \pmod 3$, akkor $y \equiv x \pmod 3$ is igaz
3) Tranzitív: mert ha $x \equiv y \pmod 3$ és $y \equiv z \pmod 3$, akkor $x \equiv z \pmod 3$

- **Ez a reláció a H halmazt a H_0, H_1, H_2 osztályokra bontja, amelyeket ekvivalencia osztályoknak nevezünk, ugyanis teljesülnek a következő axiómák:**

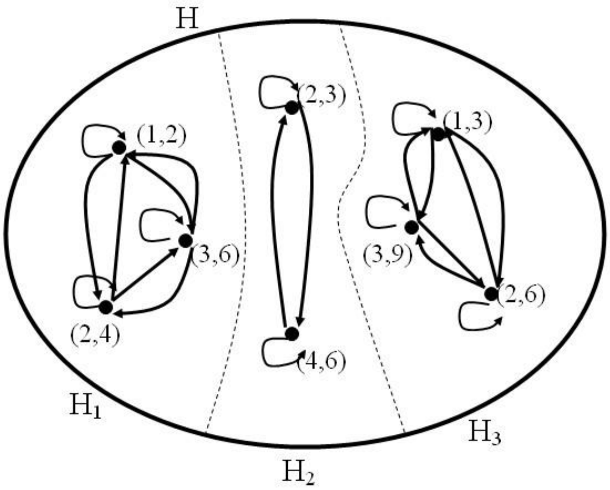
1) **H_0, H_1, H_2 egyike sem üres halmaz**
2) **$H_0 \cap H_1 = H_1 \cap H_2 = H_2 \cap H_1 = \emptyset$**
3) **$H_0 \cup H_1 \cup H_2 = H$**

Az ekvivalencia osztályokra bontás nem egyértelmű, ugyanazt a halmazt más reláció, más osztályokra bonthat.

A reláció értelmében, egy ugyanazon osztály elemei egymással egyenértékűek.

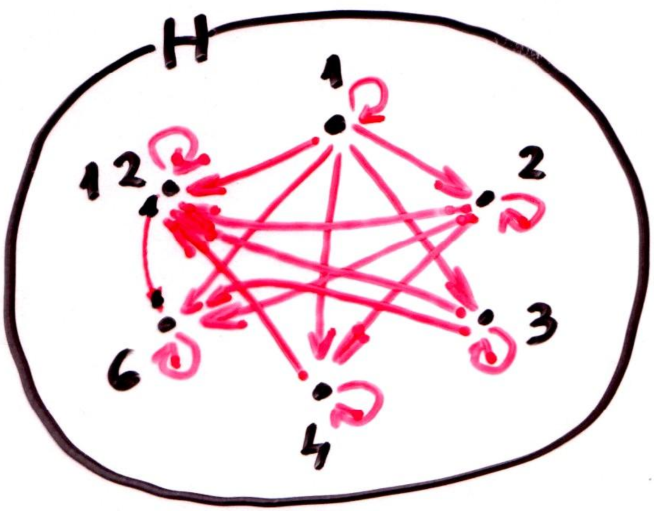
Minden ekvivalencia osztálynak van ú.n. reprezentánsa, ez lehet az illető halmaz bármelyik eleme.

<u>6. példa:</u> egy ekvivalencia reláció gráfja
Legyen H={(1,2};(1,3);(2,3);(2,4); (2,6); (3,6);(4,6);(6,9)} és értelmezzük az $\Re$ relációt a következő képpen**: (a,b) $\Re$ (c,d) $\Leftrightarrow$ ad= bc.** Készítsük el a reláció gráfját, és igazoljuk, hogy ekvivalencia reláció. Nevezzük meg az ekvivalencia osztályokat, és adjuk meg az osztályok egy-egy reprezentánsát.



A nyíldiagramról leolvasható, hogy a reláció reflexív, szimmetrikus és tranzitív, tehát ekvivalencia reláció.
Az osztályok a H_1, H_2, H_3 és a reprezentánsok például (1,2), (2,3), (1,3)

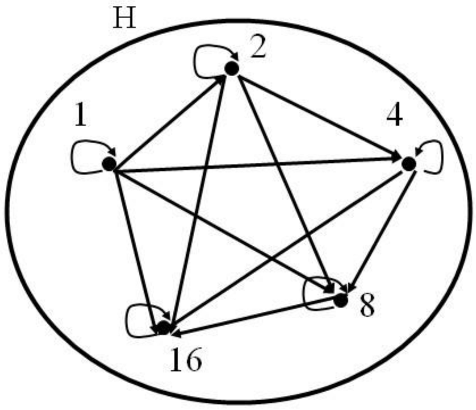
<u>7. példa</u>: egy rendezési reláció gráfja
Legyen H={1,2,3,4,6,12} és értelmezzük az $\Re$ relációt a következő képpen:
$\Re$: „ x osztja az y-t, minden x, y$\in$H" Jele: x$|$y



A reláció rendezési reláció, mert :
1) Reflexív: minden számnál van hurok, ugyanis **x$|$x** minden **x$\in$H** esetén
2) Antiszimmetrikus: semelyik két szám között nincs egyidőben menet és jövet is nyíl, mert ha **x$|$y és y$|$x**, akkor x= y.
3) Tranzitív: mert ha **x$|$y és y$|$z,** akkor **x$|$z**

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy például a 2 és a 3 *egyike sincs relációban a másikkal*, ezért a rendezési reláció *nem teljes*, *csak parciális* (mert a reláció nem dichotom).

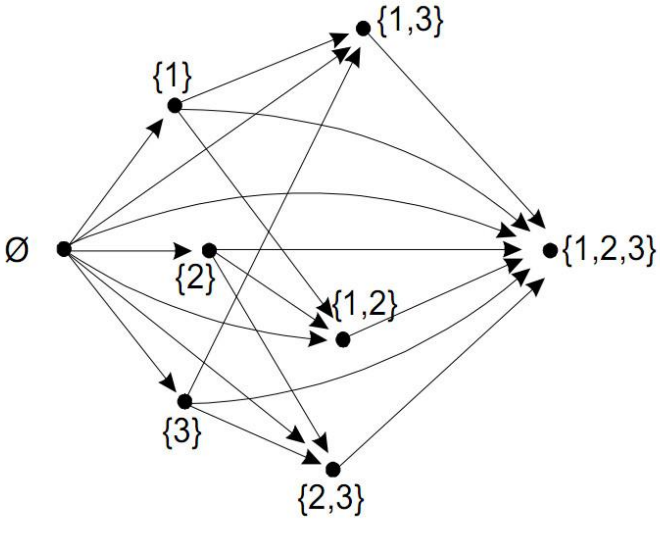
8. példa: egy rendezési reláció gráfja
Legyen H={1,2,4,8,16} és értelmezzük az $\Re$ relációt a következő képpen:
$\Re$: „ x osztja az y-t, minden x, y$\in$H” Jele: x$\mid$y



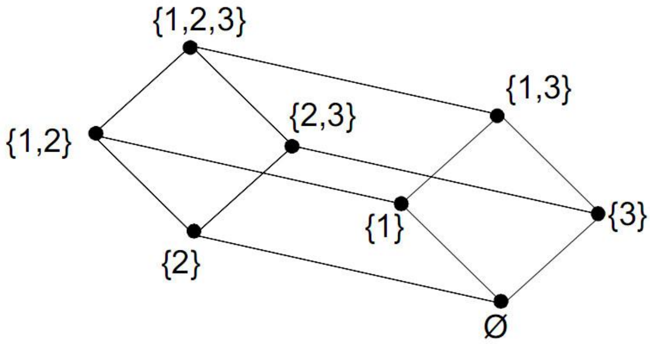
Leolvasható, hogy a reláció egy rendezési reláció.

Megjegyzés: A reláció ezúttal *teljes rendezés*, ugyanis bármelyik két szám relációban van egymással, a gráfon minden számot valamilyen irányban él köt össze.

9. példa: az A={1,2,3} halmaz P(A)={$\emptyset$, {1},{2},{3},{1,2},{1,3},{2,3},{1,2,3}} részhalmazain a $\subseteq$ reláció szintén rendezési reláció:



(P(A); $\subseteq$) Hasse diagrammja



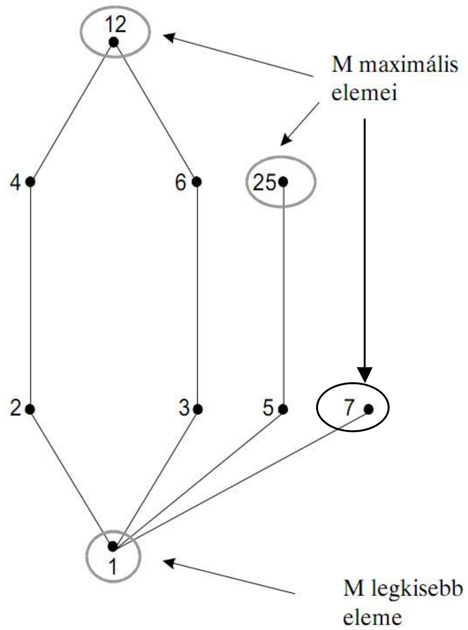
(P(A); $\subseteq$) rendezett halmaz, ha A={1,2,3}.

A Hasse diagrammban, ha x$\preccurlyeq$y, akkor y az x felett van. (Ezzel a nyilak elhagyhatók)
Azért, mert van hozzá vezető közvetett út

(a reflexivitási nyilak nincsenek az ábrán)

A diagramról leolvasható, hogy a reláció rendezési reláció, de csak *parciális rendezés*, mert pl. az egy elemű halmazok a $\subseteq$ reláció értelmében nem mérhetők össze.

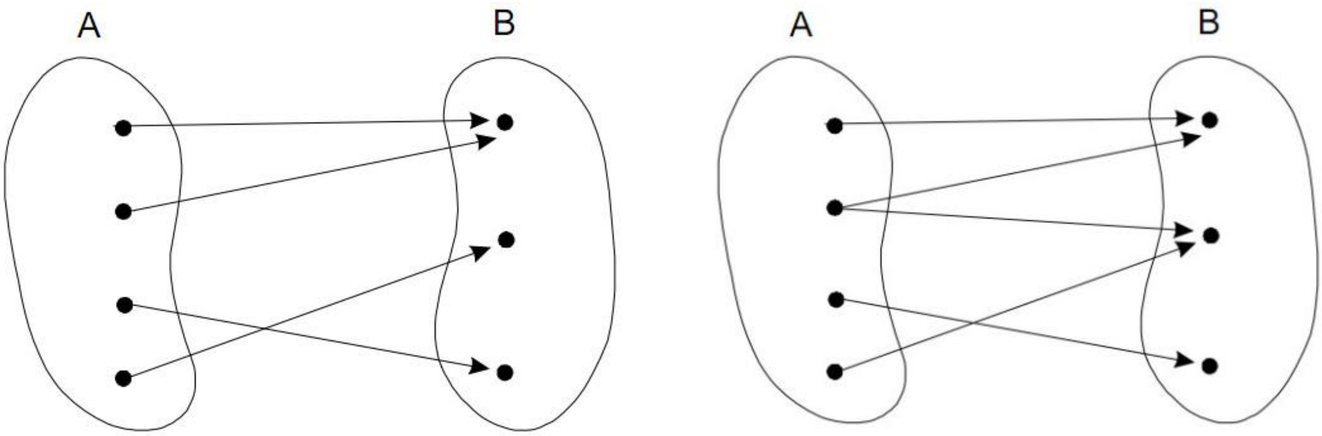
Rendezett halmaz néhány nevezetes eleme:



Egy (H, ≤) rendezett halmaz néhány nevezetes eleme:
Legyen **H={1,2,3,5,6,7,12,25}** és **x ≤ y** , ha **x osztja az y-t**.
Könnyen látható, hogy a ≤ egy rendezési reláció (csak parciális), és a reláció egy diagramja (irányítás nélkül) a mellékelt ábrán látható.
1) H legnagyobb eleme: M∈H, ha minden x-re x ≤ M
2) H legkisebb eleme: m∈H, ha minden x-re m ≤ x
3) H maximális eleme: β ∈H, ha nincs olyan x amelyre β ≤ x
4) H minimális eleme: α ∈H, ha nincs olyan x amelyre x ≤ α
Látható, hogy 1 legkisebb elem, mert minden x-re 1 ≤ x,
A 7, 25, 15 (nem dichotom elemek) maximális elemek, mert nincs olyan x amelyre 7≤ x, 12≤ x, 25≤ x (az oszthatóság értelmében).

Függvényrelációk (függvények)

Az (A,B,f) bináris relációt A-t B-be képező függvénynek nevezzük, ha minden a∈A-hoz *__legfeljebb egy__* b∈B létezik amelyre „a f b" reláció teljesül, és ezt így írjuk: f(a)=b



Azt mondjuk, hogy „b" az „a" képe, és „a" pedig a „b" őse.

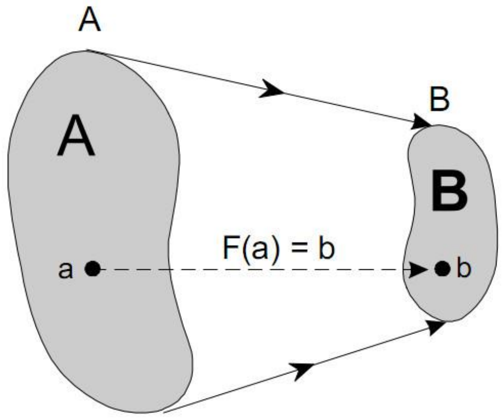
A baloldali reláció **függvény**, mert A minden pontjából legtöbb 1 nyíl vezet a B-be.
A jobboldali **nem függvény**, mert az A-nak van olyan pontja, ahonnan 1-nél több nyíl vezet B-be.

Az f függvény jelölése f:A→B vagy $A \xrightarrow{f} B$

Az A halmaz az f függvény értelmezési tartománya (doméniuma), és a B a függvény értékkészlete (kodoméniuma).

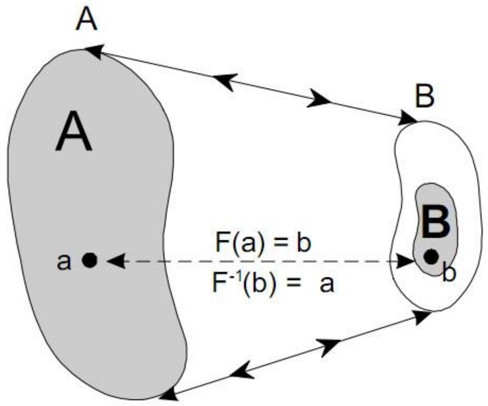
Függvények tulajdonságai

Szürjekció (ráképezés)



Minden b∈ B-nek van őse.

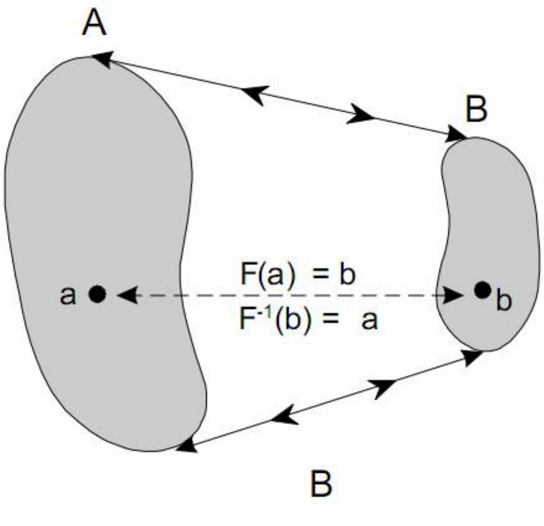
Injekció (kölcsönösen egyértelmű leképezés)



Különböző a∈ A elemek képei különbözőek:

Minden b∈ B-nek legfeljebb egy őse van.

Bijekció (kölcsönösen egyértelmű ráképezés)



Szürjektív és injektív.

A függvénytulajdonságok axiomatikus értelmezése

1) **Az f: A $\rightarrow$ B szürjektív, ha: minden b$\in$B esetén létezik a$\in$A úgy, hogy b=f(a)**
2) **Az f: A $\rightarrow$ B injektív, ha ($x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_1)$)$\equiv$ ($f(x_1) = f(x_1) \Rightarrow x_1 = x_2$)**
3) **Az f: A $\rightarrow$ B bijektív, ha szürjektív is és injektív is.**

Példa: Legyen f: A $\rightarrow$ B és $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$. Határozzuk meg az A és B legbővebb valós számhalmazokat úgy, hogy az f függvény bijektív legyen! Ekkor határozzuk meg az inverz függvényt is!

Az értelmezési tartomány A=R – {2}.

A **szürjektivítás**: bármely b$\in$B kép esetén kell létezzen olyan a$\in$A ős, amelyre b=f(a).
Vagyis $b = \frac{a-1}{a-2}$ ahonnan $a = \frac{2b-1}{b-1}$ és ez az ős csak akkor létezik, ha b $\neq$1, tehát ha B=R–{1}.
Az **injektivítás**: a könnyebben ellenőrizhető axióma $f(x_1) = f(x_1) \Rightarrow x_1 = x_2$ ami alapján $\frac{x_1-1}{x_1-2} = \frac{x_2-1}{x_2-2}$ ahonnan számolásokkal $x_1 = x_2$ adódik.
Tehát az f függvény A=R – {2}és B=R–{1} esetén szürjektív is és injektív is, az-az **bijektív**, és inverz függvénye: $f^{-1}(y) = \frac{2y-1}{y-1}$ és f^{-1}: B $\rightarrow$ A.