

## Feladatok relációkkal

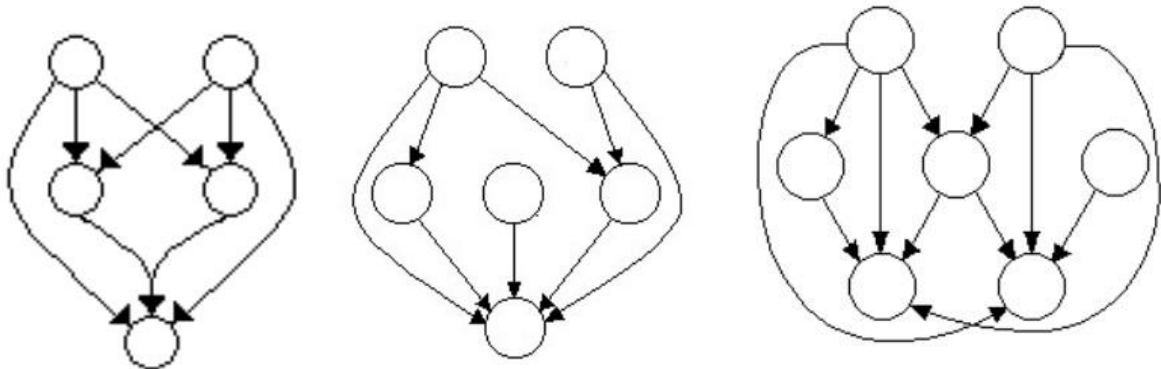
1. Szöcske, Breki, Bolha és Nyuszi versenyeztek, hogy ki tud nagyobbat ugrani. Breki kisebbet ugrott, mint Bolha; Bolha ugyanakkorát ugrott, mint Szöcske; Szöcske alulmaradt Nyuszival szemben. Állapítsuk meg a helyes sorrendet!
2. A nagydíjért futott lóversenyen Titán egy testhossal Sellő előtt futott be. Kozmosz fél testhossal Sellő után végzett. Fiaszó egy testhossal megelőzte Cicerót, aki Sellővel és olimpiával egyszerre ért célhoz. Kézenfekvő, hogy melyik versenyző nyerte a versenyt?
3. Egy távugró versenyen 6 sportoló elhatározta, hogy eldönti az egymás közötti erőviszonyokat. Az eredmények a következők voltak:
  - Huszár úr megverte Sakkost, és kikapott Mattváritól.
  - Sakkos megverte Patthelyit, és kikapott Huszár úrtól.
  - Mattvári megverte Huszárt, és kikapott Károly bácsitól.
  - Patthelyi megverte Futó szakit, és kikapott Sakkostól.

Határozzuk meg a sportolók sorrendjét a távugrás versenyen!

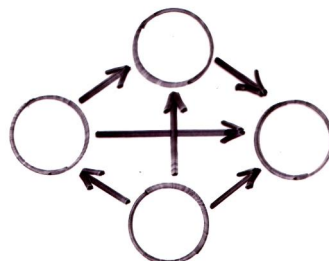
4. Ádám és barátai 5 hajóval vettek részt az ideai palicsi vitorlásversenyen. Az eredményekről azt tudjuk, hogy:
  - Laci és Géza hajója a Béláé után ért célba.
  - Ádám hajója gyorsabb volt mint a Marcié, de lassúbb mint a Béla vitorlása.
  - Laci megelőzte Ádámot, Géza pedig Marci mögött ért célba.

Milyen lett az öt barát egymáshoz viszonyított sorrendje?

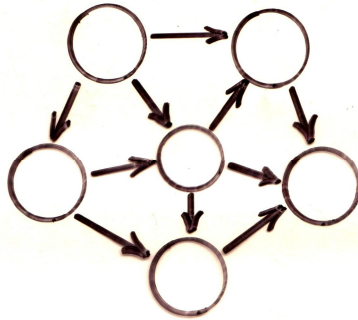
5. Öt különböző magasságú gyerekről tudjuk, hogy Béla magasabb, mint Elemér; Dani magasabb, mint Csaba; Andrásnál egy gyerek magasabb, három gyerek pedig alacsonyabb. Állítsuk magasság szerint növekvő sorrendbe a gyerekeket!
6. Töltsük ki pozitív egész számokkal az üres karikákat úgy, hogy ha egyik számtól nyíl vezet egy másikhoz, akkor a második szám osztója az elsőnek, ha pedig nem vezet nyíl, akkor nem osztója.



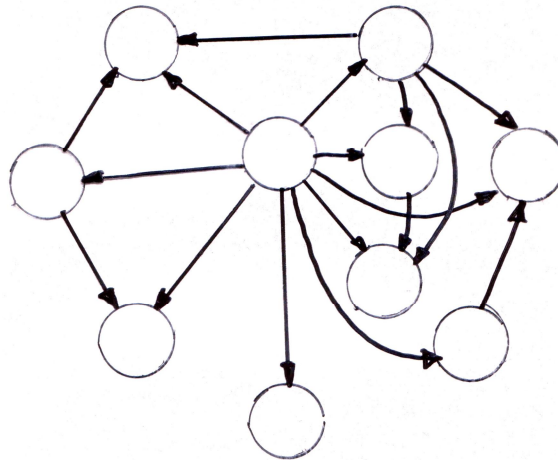
7. Írjál számokat a karikákba, ha a nyíl a kisebbtől vezet a nagyobb szám felé.



8. Helyezd el a karikákba a 3, 4, 5, 6, 8, 10 számokat, ha a nyíl a kisebbik számtól vezet a nagyobbikhoz. Hány megoldás van?



9. Helyezd el 1-től 10-ig a számokat, ha a nyíl a (valódi) többszörös felé mutat!



10. Ha  $A = \{\text{óra, ablak, kutya, ló, dió, asztal}\}$  akkor létesítsünk olyan relációt az elemek között, amelyik azt fejezi ki, hogy az első szó utolsó betűje megegyezik a második szó kezdőbetűjével. Ábrázold is a relációt nyíldiagrammal! Milyen tulajdonságokkal rendelkezik a reláció?

11. Négy gyerekről tudjuk, hogy\_ Alpár alacsonyabb mint Béla, de magasabb Csabánál. Dani magasabb Alpárnál, de Bélánál alacsonyabb. Állítsd növekvő sorrendbe a gyerekeket.

12. Négy gyerekről a következőket tudjuk:

Kati magasabb mint Jancsi  
 Zoli alacsonyabb mint Laci  
 Zoli magasabb mint Jancsi  
 Kati alacsonyabb mint Laci

Állítsd magasság szerint csökkenő sorrendbe a gyerekeket!

13. Festéktüszentő Hapci Benő 5 szép színes pöttyöt tüszentett Picur táskájára. A lila lett a legkisebb. A sárga kisebb volt, mint a zöld. A kék viszont a sárgánál és a zöldnél is nagyobb, de kisebb, mint a piros. Írd fel az öt színt nagyság szerinti sorrendben!

1) Legyen  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ . Ábrázoljuk nyíldiagrammal és Descartes-diagrammal is, a következő relációkat:

- „x háromszorosa y-nak”
- „x négyvel kisebb y-nál”
- „x osztója y-nak”
- „ $x+y=10$ ”
- „x és y-nak a négyvel való osztási maradéka ugyanaz”

Az előbbi relációk esetén tanulmányozzuk a tulajdonságaikat! Az ekvivalencia osztály esetén soroljuk fel az osztályokat is!

2) Az  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  halmazon értelmezzük az  $(m,n)R(p,q) \Leftrightarrow m+q=n+p$  relációt. Igazoljuk, hogy ekvivalencia reláció.

3) A  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  halmazon értelmezzük az  $(x,y)R(z,t) \Leftrightarrow xt=yz$  relációt. Igazoljuk, hogy ez ekvivalencia reláció.

4) Tekintsük a következő relációkat:

- $R_1 = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5)\}$
- $R_2 = \{(1,3), (1,5), (2,4), (3,1), (3,5), (4,2), (5,1), (5,3)\}$
- $R_3 = \{(1,1), (1,4), (2,2), (2,5), (3,3), (4,1), (4,4), (5,2), (5,5)\}$
- $R_4 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)\}$

Milyen tulajdonságaik vannak ezeknek a relációknak?

Melyik ekvivalencia reláció, és milyen osztályokat határoz meg?

**4.19. Feladat.** Határozza meg a következő ekvivalenciarelációkhoz tartozó osztályozást.

- $\{(a, b) \mid 4 \mid b - a\}$  a  $\mathbb{Z}$  halmazon;
- $\{(a, b) \mid |a| = |b|\}$  az  $\mathbb{Z}$  halmazon;
- $\{(a, b) \mid ab > 0\}$  az  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  halmazon;
- $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \text{ páros}\}$  a  $\mathbb{Z}$  halmazon;
- $\{(H, H') \mid |H| = |H'|\}$  az  $A = \{H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6\}$  halmazon, ahol  $H_1 = \{1, 2\}$ ,  $H_2 = \emptyset$ ,  $H_3 = \{a, b\}$ ,  $H_4 = \{0\}$  és  $H_5 = \{1, 2, 3\}$ ,  $H_6 = \{3, 4, 5\}$ ;
- $\{(a, b) \mid a\text{-nak és } b\text{-nek van közös prímosztója}\}$  a  $B = \{2, 3, 8, 9, 14, 15, 19, 26\}$  halmazon;
- $\{(a, b) \mid a \text{ és } b \text{ számjegyeinek összege egyenlő}\}$  a  $C = \{71, 301, 216, 4, 121, 54, 602, 315\}$  halmazon;
- $\{(x, y) \mid \sin^2 x = \sin^2 y \text{ vagy } \cos^2 x = \cos^2 y\}$  az  $\mathbb{R}$  halmazon.

**Megoldás.**

- $\{4k \mid k \in \mathbb{Z}\}, \{4k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}, \{4k + 2 \mid k \in \mathbb{Z}\}, \{4k + 3 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ;
- $\{k, -k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$ ;
- $\{\mathbb{R}^-, \mathbb{R}^+\}$ ;
- $\{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}, \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ;
- $\{H_2, H_4, H_1, H_3, H_5, H_6\}$ ;
- $\{2, 8, 14, 26\}, \{3, 9, 15\}, \{19\}$ ;
- $\{301, 121, 4\}, \{71, 602\}, \{216, 54, 315\}$ ;
- $\{(x, \pm x + k\pi) \mid k \in \mathbb{Z} \mid x \in \mathbb{R}\}$ .



**4.5. Feladat.** Legyen  $\varrho = \{(a, b) \mid a \text{ osztója } b\text{-nek}\}$  az  $A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$  halmazon értelmezett reláció. Adja meg a  $\varrho$  reláció gráfját. Vizsgálja meg reflexivitás, szimmetria, antiszimmetria, tranzitivitás és dichotómia szempontjából.

**Megoldás.** A reláció reflexív, nem szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, tranzitív és nem dichotom.

**4.6. Feladat.** Vizsgálja meg az alábbi relációkat reflexivitás, szimmetria, antiszimmetria, tranzitivitás és dichotómia szempontjából. Ezek alapján állapítsa meg, hogy melyik reláció ekvivalencia, részbenrendezés, illetve rendezés.

- |  |   |
|--|---|
| (a) $\{(a, b) \mid ab = 1\}$ az $\mathbb{R}$ halmazon;   | (b) $\{(a, b) \mid 4 \mid b - a\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon;     |
| (c) $\{(a, b) \mid a + 5 \leq b\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon;                                    | (d) $\{(a, b) \mid a < b\}$ az $\mathbb{R}$ halmazon;           |
| (e) $\{(a, b) \mid a \leq b\}$ az $\mathbb{R}$ halmazon;                                       | (f) $\{(a, b) \mid ab \geq 0\}$ az $\mathbb{R}$ halmazon;       |
| (g) $\{(a, b) \mid \frac{a}{b} < 0\}$ az $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazon;                | (h) $\{(x, y) \mid  x  +  y  < 3\}$ a $\mathbb{Q}$ halmazon;    |
| (i) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 10\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon;                                  | (j) $\{(a, b) \mid  a  =  b \}$ az $\mathbb{R}$ halmazon;       |
| (k) $\{(a, b) \mid  a - b  < 2\}$ az $\mathbb{R}$ halmazon;                                    | (l) $\{(a, b) \mid a - b < a^2\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon;      |
| (m) $\{(a, b) \mid a - b \leq a^2\}$ az $\mathbb{R}$ halmazon;                                 | (n) $\{(a, b) \mid 3 <  a - b \}$ a $\mathbb{Q}$ halmazon;      |
| (o) $\{(a, b) \mid 2 \mid a + b\}$ az $\mathbb{N}$ halmazon;                                   | (p) $\{(x, y) \mid 2 \mid x^2 + y^2\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon; |
| (q) $\{(x, y) \mid xy \geq 2\}$ az $\mathbb{R}$ halmazon;                                      | (r) $\{(x, y) \mid x - 3 \geq y\}$ az $\mathbb{R}$ halmazon;    |
| (s) $\{(a, b) \mid a^2 + 2b \leq b^2 + 2a\}$ az $\mathbb{N}$ halmazon;                         | (t) $\{(a, b) \mid  a - b  = 1\}$ az $\mathbb{N}$ halmazon.     |
| (u) $\{(x, y) \mid (\sin^2 x - \sin^2 y)(\cos^2 x - \cos^2 y) = 0\}$ az $\mathbb{R}$ halmazon. |   |

**Megoldás.**

- (a) nem reflexív, szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, nem tranzitív, nem dichotom
- (b) reflexív, szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, tranzitív, nem dichotom, ekvivalenciareláció
- (c) nem reflexív, nem szimmetrikus, antiszimmetrikus, tranzitív, nem dichotom
- (d) nem reflexív, nem szimmetrikus, antiszimmetrikus, tranzitív, nem dichotom
- (e) reflexív, nem szimmetrikus, antiszimmetrikus, tranzitív, dichotom, rendezés
- (f) reflexív, szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, nem tranzitív, nem dichotom
- (g) nem reflexív, szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, nem tranzitív, nem dichotom
- (h) nem reflexív, szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, nem tranzitív, nem dichotom
- (i) nem reflexív, szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, nem tranzitív, nem dichotom
- (j) reflexív, szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, tranzitív, nem dichotom
- (k) reflexív, szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, nem tranzitív, nem dichotom
- (l) nem reflexív, nem szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, nem tranzitív, nem dichotom
- (m) reflexív, nem szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, nem tranzitív, dichotom
- (n) nem reflexív, szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, nem tranzitív, nem dichotom
- (o) reflexív, szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, tranzitív, nem dichotom, ekvivalenciareláció
- (p) reflexív, szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, tranzitív, nem dichotom, ekvivalenciareláció
- (q) nem reflexív, szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, nem tranzitív, nem dichotom
- (r) nem reflexív, nem szimmetrikus, antiszimmetrikus, tranzitív, nem dichotom
- (s) reflexív, nem szimmetrikus, antiszimmetrikus, tranzitív, dichotom, rendezés
- (t) nem reflexív, szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, nem tranzitív, nem dichotom
- (u) reflexív, szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, tranzitív, nem dichotom, ekvivalenciareláció