# A természetes számok halmaza (N)

A természetes számokat kétféleképpen vezethetjük be:

1) A Peano-féle axiómarendszerrel
2) Ekvivalencia osztályok segítségével

### 1) A természetes számok *axiomatikus értelmezés*e. *A Peano-axiómák*

*Az axiómarendszer alapfogalmai*: a természetes szám, a nulla (0), a rákövetkezés.

*Az axiómák*:

(1) A 0 természetes szám. ($0 \in N$)

(2) Minden természetes számnak van egy egyértelműen meghatározott rákövetkezője, mely szintén természetes szám. ($\forall\ n \in N\ \exists n' \in N$)

(3) Nincs olyan természetes szám, melynek a 0 rákövetkezője lenne. ($0 \neq n'\ \forall\ n \in N$)

(4) Különböző természetes számoknak a rákövetkezője is különböző.($n \neq m \Rightarrow n' \neq m'$)

(5) Ha a 0 rendelkezik valamely *T* tulajdonsággal, és a tulajdonság átöröklődik az n természetes számról az n' ($n'=n+1$) rákövetkezőjére, akkor minden természetes szám rendelkezik a T tulajdonsággal.

Az utolsó axióma tulajdonképpen a matematikai indukcióval történő bizonyítás alapelve is.

Ezeket az axiómákat Giuseppe Peano 1891-ben alkotta meg.

A természetes számok (nem negatív egész számok) halmazát N-nel jelöljük.

$$N^* = N - \{0\}$$

A természetes számok tulajdonságai beláthatók az axiómák alapján.

A 0 a legkisebb természetes szám.

A természetes számok halmaza végtelen, a halmazban nincs utolsó elem: a sorban kétszer ugyanaz a szám nem szerepelhet, de a továbbszámlálással nem kerülhetünk vissza a sor elejére.

A műveletek értelmezése:

Először is $n' = n+1$ minden n természetes szám esetén.

(1) A $+: N \times N \to N$ összeadást így értelmezzük:
    a) $n+0=n$, $\forall n \in N$ esetén    b) $n+m' = (n+m)'$, $\forall n, m \in N$ esetén
(2) A $\times: N \times N \to N$ szorzást így értelmezzük:
    a) $n \times 0=n$, $\forall n \in N$ esetén    b) $n \times m' = n \times m+m$, $\forall n, m \in N$ esetén
(3) A $\leq$ rendezési relációt így értelmezzük:
    $m \leq n \Leftrightarrow \exists k \in N$ úgy, hogy $n=m+k$

Tulajdonságok:

1) $(m+n)+p=m+(n+p)$ — 1') $(m\times n)\times p=m\times(n\times p)$ asszociativítás
2) $n+0=0+n=n$ — 2') $n\times 1=1\times n=n$ semleges elem létezése
3) $m+n= n+m$ — 3') $m\times n=n\times m$ kommutativítás
4) $m+k= n+k \Rightarrow m= n$ — 4') $m\times k=n\times k \Rightarrow m=n$ egyszerűsítési szabály
5) $k\times(m+n)= k\times m +k\times n$ — a szorzás disztributív az összeadásra

A **≤** rendezési reláció, mert:

a) $n \leq n$ reflexivítás
b) Ha $n \leq m$ és $m \leq n$ akkor $m= n$ antiszimmetria
c) Ha $n \leq m$ és $m \leq p$ akkor $n \leq p$ tranzitivítás vagy láncszabály

A trichotomia elve is teljesül:

Bármely $m, n\in N$ esetén (i) $m < n$ vagy (ii) $m= n$ vagy (iii) $m > n$

Az N rendezett halmaz $\Leftrightarrow$ bármely két eleme összehasonlítható

A **≤** rendezési reláció összefér a + és a × m**ű**veletekkel, mert:

(i) $m \leq n \Leftrightarrow m+ k \leq n+ k$ (ii) $m \leq n \Leftrightarrow m\times k \leq n\times k$ $\forall m, n, p\in N$

Az N jólrendezett halmaz $\Leftrightarrow$ az N bármely részhalmazának van egy legkisebb eleme

Tehát (N, +, ×, **≤**) jólrendezett kommutatív félgy**űrű** struktúra.

2) A természetes számok *értelmezés*e ekvivalencia osztályok segítségével

1. Értelmezés: Az A és B halmazokat ekvivalensnek mondjuk, és $A\sim B$ módon jelöljük, ha az A és B halmaz elemei között létezik egy-az eggyel való megfeleltetés, vagyis, létezik egy $f: A \to B$ függvény amely bijektív
2. Értelmezés: Egy A halmaz elemeinek a számát az illető halmaz számosságának nevezzük. Jele $|A|$ vagy cardA
3. Értelmezés: következő két kijelentés egyenértékű: $A \sim B \Leftrightarrow |A|= |B|$
4. Értelmezés: Egy halmaz véges (*véges számosságú*), ha létezik *n* természetes szám, amelyre $A\sim \{1,2,3,\ldots n\}$

   Például: $A= \{a_1, a_2, a_3\}$ esetén $|A|= 3$ mert létezik a 3 úgy, hogy $f(a_1)=1$, $f(a_2)=2$, $f(a_3)=3$ és ez bijektív függvény $f: A\to \{1,2,3\}$.
5. Értelmezés: Az N számossága vagy kardinálisa $|N| = \aleph_0$ (alef zéró)
6. Értelmezés: Egy végtelen A halmazt megszámlálhatóan végtelen halmaznak nevezünk, *ha számossága egyenlő a természetes számok halmazának számosságával* (vagyis a halmaz és *N* között van egy bijektív megfeleltetés). Tehát $A\sim N$.

   Például: Annak ellenére, hogy $2N \subset N$, mégis $|2N| = |N|$ vagyis ugyanannyi páros szám van mint amennyi természetes szám. Értelmezés szerint $2N=\{x | x= 2n, n\in N\}$.

Ennek az igazolására elegendő $2N$ *és* $N$ elemei között létrehozni egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést. Ez a következő:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \ldots & 2n\ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow\ldots & \updownarrow \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \ldots & n\ldots \end{array}$$

Vagyis létezik olyan f: N $\rightarrow$ 2N függvény amelyik bijektív, éspedig f(n)= 2n éppen megfelel.

Az előbbiekben láttuk, hogy:

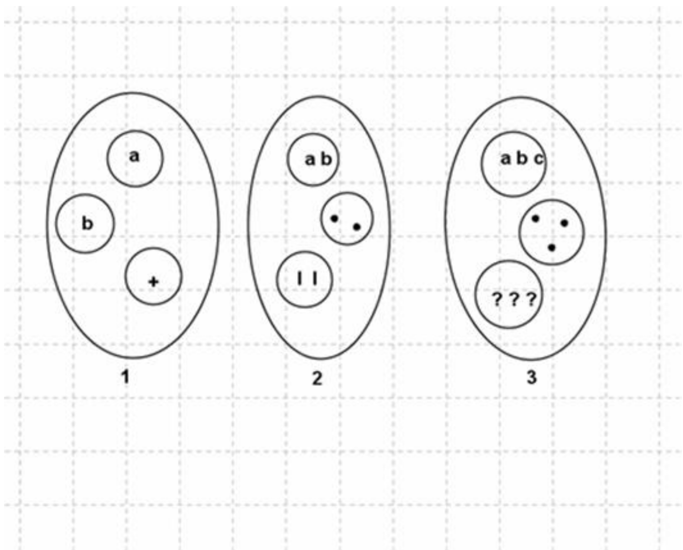
Az $A \subset N$ halmaz *ekvivalens* a $B \subset N$ halmazzal $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ ha az *A* halmaz bármely eleméhez hozzárendelhető a *B* halmaz egy és csakis egy eleme és fordítva. *Jele*: A ~ B. Továbbá A ~ B $\Leftrightarrow$ |A|= |B|

Tehát az A és B halmazok ekvivalensek, ha ugyanannyi elemet tartalmaznak.

Ez az „ugyanannyi" reláció (jele: ~ ) egy ekvivalencia reláció, mert:

a) Reflexív, hiszen A ~ A
b) Szimmetrikus, mert ha A ~ B, akkor B ~ A
c) Tranzitív, mert ha A ~ B és B ~ C, akkor A ~ C

Ez az „ugyanannyi" ekvivalencia reláció az N halmazt osztályokra bontja!




Ezeket az osztályokat ekvivalencia osztályoknak nevezzük.

Egy osztályba azok az elemek tartoznak, amelyek ekvivalensek, vagyis amelyek között létesíthető egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés.

Ha a szemlélethez folyamodunk, akkor belátható, hogy csak azok a halmazok tartoznak egy ekvivalencia osztályba, amelyek ugyanannyi elemet tartalmaznak.

*Értelmezés*

Az ekvivalencia osztályokat, illetve az azoknak megfelelő szimbólumot, *kardinális szám*nak, ***tő****szám*nak nevezzük.

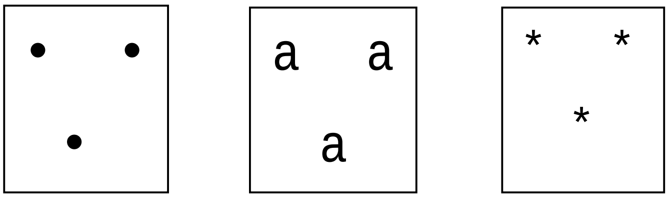
A fenti osztályok *kardinálisai* rendre az 1, 2 illetve 3 számok.

Megjegyzendő, hogy az 1 *szimbólum*, *szám*, *számjegy*, kiejtve az 1 szám *hangalak*ja, *betűkkel leírt alak*ja: egy. A számhoz hozzátartozik ennek a *számkép*e is: ◊ , ⍰ , | , • vagy bármilyen más jel.

Az üres halmaz szemléletesen egy olyan halmaz, amelyben egyetlen elem sincs, szimbóluma a 0.

*Tehát a természetes szám, az „ugyanannyi” ekvivalencia reláció által generált osztályoknak a reprezentánsa.*

Például:



A fenti ekvivalenciaosztály egy reprezentánsát jelölje 3, de lehetne az osztály bármelyik eleme.

A jelölések egységesítése:

Ø - megfelel a 0 szimbólum

{Ø} - megfelel az 1 szimbólum (egy eleme van: az üres halmaz.)

{Ø, {Ø}} - megfelel a 2 szimbólum, mert a halmaznak két eleme van: az üres halmaz és az üres halmazt tartalmazó halmaz

{Ø, {Ø}, {Ø, {Ø}}} - megfelel a 3 szám szimbólum, vagyis

Tehát:

0= card (Ø), 1= card ({Ø}), 2= card({Ø, {Ø}}), 3= card({Ø, {Ø}, {Ø, {Ø}}}),...stb.

És így tovább. Az így kapott halmazrendszer végtelen sok halmazból fog állni. *Bármely véges halmaz ekvivalens az előbbi halmazok valamelyikével.*

Két természetes számot egymásutáninak nevezünk, ha az előbbi sorozatban két egymás után következő halmaz számosságát jelöli. Jele n’ az n rákövetkezője. Tehát a természetes számok két értelmezése azonos.

# **Mű**veletek a természetes számok halmazában

*Összeadás*

*<u>Értelmezés</u>*

Legyen A és B két halmaz. Jelölje $|A| = a,\ |B| = b;\ \ a, b \in N\ \ és\ \ A \cap B = \emptyset$, vagyis A és B diszjunkt halmazok. Ekkor *a+b* természetes számon az $A \cup B$ halmaz számosságát értjük. Tehát $a + b = |A \cup B|$.

*Elnevezés*: *a, b* tagok, *a+b* összeg.

Pl. 2 + 3 = ?

$A = \{a, b\},\ B = \{c, d, e\}$. Látható, hogy
$|A| = 2\ \ és\ \ |B| = 3\ \ és\ \ A \cap B = \emptyset. \qquad |A \cup B| = |\{a, b, c, d, e\}| = 5.$

Tehát $2 + 3 = |A| + |B| = |A \cup B|$.

*<u>Tulajdonságok</u>:*

Bármely a, b, c természetes szám esetén:

(1) *a + b = b + a* *az összeadás kommutatív*, azaz egy összeadásban a tagok felcserélhetőek.

(2) *(a + b) +c = a + (b + c)* *az összeadás asszociatív*, vagyis az összeadásban a tagok csoportosíthatóak

(3) *a + 0 = 0 + a = a* egy számhoz 0-t adva összegként az eredeti számot kapjuk, vagyis *az összeadásban a 0 semleges elem.*

(4) ha *a + b = a*, akkor *b = 0*

(5) ha *a + b = 0*, akkor *a = 0 és b = 0* (ez a tulajdonság csak a természetes számok halmazában érvényes).

(6) ha *a + c = b + c*, akkor *a = b.*

*Szorzás*

*<u>Értelmezés</u>*

Az *A* és *B* halmazok esetén legyen $|A| = a,\ |B| = b.$ Az $a \cdot b$ (a szorozva b-vel) természetes számon az A×B halmaz /A és B halmazok Descartes-szorzata/ számosságát értjük. Vagyis $a \cdot b = |A \times B|$.

*Elnevezés: a, b tényezők (a –szorzandó, b –szorzó),* $a \cdot b$ *- szorzat.*

(Vannak akik jobbról, vannak akik balról szoroznak, de a kiolvasása $a \cdot b$: *„az a és b szorzata")*

Pl. $2 \cdot 3 = ?$

$A = \{a, b\},\ B = \{a, b, c\}$. Így $|A| = 2,\ |B| = 3$.

$a \cdot b = |A \times B| = |\{(a,a); (a,b); (a,c); (b,a); (b,b); (b,c)\}| = 6$.

*Tulajdonságok*

Bármely a, b, c természetes szám esetén:

(1) $a \cdot b = b \cdot a$

(2) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

(3) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ *a szorzás disztributív (széttagolható) az összeadásra nézve*

(4) $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ az *1 a szorzás semleges eleme*

(5) $a \cdot 0 = 0$

(6) ha $a \cdot b$ =0, akkor vagy a=0, vagy b=0, vagy mindkettő 0.

(7) ha $a \cdot b = a \text{ és } a \neq 0, \text{ akkor } b = 1$.

(8) ha $a \cdot b = 1$, akkor a=1 és b=1. Ez a tulajdonság nyilvánvalóan csak a természetes számok halmazában igaz.

(9) ha $a \cdot b = a \cdot c \text{ és } a \neq 0, \text{ akkor } b = c$. (egyszerűsítési szabály).

*Értelmezés*

Adottak *a, b* természetes számok. $b \geq 2$ esetén az $a \cdot b$ ( *a* szorozva *b*-vel) természetes számon egy *b* számú tagból álló összeget értünk, ahol minden összeadandó *a*-val egyenlő.

Vagyis $a \cdot b = b + b + b + \ldots + b$ (*a*-szor véve *b*-t).

Viszont a kommutativítás miatt $a \cdot b = b \cdot a = a + a + a + \ldots + a$ , vagyis *b*-szer véve *a*-t.

*Megjegyzés*

A szöveg (megfogalmazás, cselekvés) szintjén $a \cdot b \text{ és } b \cdot a$ más-más tartalommal bír, de a szorzat értéke ugyanannyi. Ha idejében rámutatunk arra, hogy a szorzás kommutatív, akkor a szorzótényezők eltérő módon való megnevezése (szorzandó, szorzó), már nem hordoz különösebb jelentőséget.

A legjobb megnevezés, már az elején: szorzótényezők.

*Kivonás*

*Értelmezés*

Legyenek A, B halmazok, $|A| = a,\ |B| = b$ , $A \subseteq B,\ tehát\ a \leq b$ . Ekkor az „*a-b”* természetes számon az *A-B* halmaz számosságát értjük.

*Elnevezés: „a” kissebbítendő, „b” kivonandó, „a-b” különbség.*

Pl.

$$A = \{a, b, c, d, e\};\ B = \{b, d, e\}.$$
$$5 - 3 = |A - B| = |\{a, c\}| = 2$$

vagyis a különbséghalmaznak 2 eleme van.

*Tulajdonságok*

(1) $a - b \neq b - a$ , (sőt a kivonás korlátozás nélkül nem mindig végezhető el N-ben.)

(2) $(a - b) - c \neq a - (b - c)$, vagyis a kivonás nem asszociatív

(3) $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$ , a szorzás disztributív a kivonásra nézve

(4) *a – 0 = a,* de nem mondjuk, hogy a 0 a kivonás semleges eleme, mert a – 0 = 0 – a = a nem teljesül, pontosan a kommutativítás meg nem léte miatt.

*Osztás*

*Értelmezés*

Adottak az *a, b* természetes számok, ahol b ≠ 0. Az *a:b* (*a*-ban a *b*) számon, azt a *c* természetes számot értjük, amelyre $c \cdot b = a$ .

*Elnevezések: a- osztandó, b- osztó, c- hányados.*

Pl. 8:4=?

Mivel $2 \cdot 4 = 8$, ezért 8:4=2

*Megjegyzés*

A maradékos osztás tétele alapján, ha *a, b* tetszőleges természetes számok, ahol b ≠ 0, egyértelműen léteznek *q, r* természetes számok úgy, hogy

$$a = b \cdot q + r,\ ahol\ 0 \leq m < b.$$

Ha r = 0, akkor $a \vdots b,\ b | a$ , vagy *b* többszöröse *a*-nak.

Ilyen esetben jelenti az *osztható* szó, hogy az *a szám maradék nélkül osztható b-vel*.

*Az osztás tulajdonságai:*

Az osztás nem végezhető el a természetes számok halmazán korlátozás nélkül.

(1) $a : b \neq b : a$,

(2) $(a : b) : c \neq a : (b : c)$

(3) *a:0* Ennek az osztásnak nincs értelme, mert nincs olyan *c* természetes szám, amelyre $c \cdot 0 = a,\ (a \neq 0)$. De matematikaelméleti megfontolásból a *0:0* osztás úgyszintén értelmetlen.

(4) $(a : b) : c \neq a : (b : c)$

(5) *0:a=0*

(6) *a:a=1,*

(7) *a:1=a,* (Itt sem állítható, hogy az 1 az osztás semleges eleme lenne).

(7) ha *a:b=1*, akkor *a=b*

(8) *(a+b):c=a:c+b:c* az osztás az összeadásra nézve jobbról disztributív (Hasonlóan a kivonásra nézve is jobbról disztributív az osztás.)

Megjegyzések

-Az értelmezés alapján az osztás a szorzás fordított műveletének nevezhető.

Az alsó tagozat két (halmazélméleti alapon értelmezett) osztása:

*a.) a bennfoglaló osztás*

Adott egy *a* elemű véges halmaz. Ebben a halmazban hozzuk létre a lehető legtöbb, pontosan *b* elemet tartalmazó részhalmazt (amennyiben lehetséges). Az így létrehozott részhalmazok számát *a:b*-vel jelöljük és azt mondjuk, hogy „*a*-ban a *b* megvan...”

*Példa*.: Hat ceruzát szétosztunk a gyerekek között úgy, hogy minden gyerek 2-2 ceruzát kapjon. Hány gyerek kapott ceruzát?

6c : 2c = 3. (A 3 itt darabszám.)

*b.) egyenlő részekre osztás*

Adott egy *a* elemű véges halmaz. Ezt a halmazt osszuk fel (ha lehet) *b* darab egyenlő számosságú részhalmazra. Ekkor a részhalmazok számosságát *a:b*-vel jelöljük és azt mondjuk „az *a* *b* egyenlő részre osztva”.

*Példa*:Hat ceruzát osszunk szét két gyerek között úgy, hogy mind a két gyerek ugyanannyit kapjon. Hány ceruzát kap egy gyerek?

6c : 2 = 3c (A 3 itt a ceruzák számát jelöli.)

A számfogalom bővítése

- A megadott értelmezések szerint *a természetes számok halmaza az összeadásra és a szorzásra nézve zárt*: vagyis bármely két természetes szám összege is és szorzata is természetes szám

- Ugyanez nem mondható el a természetes számok halmazában értelmezett kivonásról és osztásról.

- Az összeadás és szorzás lényeges tulajdonságai:

| | | |
|---|---|---|
| $a + b = b + a$ | $a \cdot b = b \cdot a$ | kommutativítás |
| $(a + b) + c = a + (b + c)$ | $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ | asszociativítás |
| $a + 0 = 0 + a = a$ | $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ | a semleges elem léte |

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ a disztributivítás: a két műveletet összekapcsoló tulajdonság

(2) A természetes számok halmazán az egyenlőség: a = b, ekvivalencia reláció.

(3) - A mindenkori számkörbővítés feladata az, hogy a fentebb felsorolt tulajdonságok továbbra is érvényben maradjanak – ezt nevezzük *a permanencia elv*ének.

- Továbbá: az N az új számhalmaznak részhalmaza legyen.

- Aztán: a bővített halmazban a természetes számokkal végzett műveletek eredménye ugyanaz legyen, mintha csak az N-ben dolgoztunk volna.

## Az egész számok halmaza (Z)

*Értelmezés*

A természetes számokból alkotott különbségek ekvivalancia osztályainak reprezentánsai az egész számok. Vagyis egy osztályt egy egész számmal jelölünk.

Pl.

- 2 = 0 - 2 = 1 - 3 = 2 - 4 = ... = 10 - 12 = ...

5 = 5 - 0 = 6 - 1 = 7 - 2 = ... =20 - 15 = ...

0= 0 - 0 = 1 - 1 = 2 - 2 = ...

Z={x| x=m-n és m,n∈N} és a reláció:

(m,n) $\Re$ (m',n') ⇔ m+n'=m'+n

Az egész számok halmaza tehát Z = {..., -n, ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ..., n. ...}

Z* = Z – {0}, $Z_+ = N^* = \{1,2,3,4,\ldots\}$, $Z_- = \{\ldots,-5,-4,-3,-2,-1\}$.

Mivel N ⊂Z, ezért az N-en végzett művelet értelmezések és tulajdonságok tovább öröklődnek. csupán a negatív számok esetén kell új értelmezéseket adnunk:

Szabályok:

1) 0+ (-a)= (-a) +a= -a
2) (-a) + (-b)= - (a+b)
3) a+ (-b)=(-b)+a= a-b ha a>b, 0 ha a=, -(b-a) ha a<b

1') 0× (-a)= (-a)×0= 0
2') (-a) × (-b)= (-b)× (-a)= a×b
3') a×(-b) = (-a)×b= -ab

<u>Tétel</u>: A Z halmaznak ugyanannyi eleme van mint az N halmaznak, vagyis |Z|= |N|= $\aleph_0$.

Bizonyítás: A következő egyértelmű megfeleltetést hozhatjuk létre:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 \ldots \end{array}$$

Vagyis létezik az f: N$\rightarrow$ Z, f(2n)= n és f(2n-1)= -n amely bijektív.

## *A racionális számok halmaza (Q)*

A racionális számok bevezetését az a követelmény teszi szükségessé, hogy az egész számok osztása minden esetben elvégezhető legyen ugyanazon a számhalmazon belül. (Nyilván, ha az osztó nulla, az osztás továbbra sem értelmezett.)

A racionális számok halmazától megköveteljük, hogy:

- tartalmazza az egész számok halmazát $(Z \subset Q)$

- két racionális szám hányadosa szintén racionális szám legyen

- az egész számokkal végzett műveletek eredménye változatlan maradjon, ha azokat a Q-ban megadott értelmezés szerint végezzük

- a műveletek Z-ben ismert tulajdonságai átöröklődjenek Q-ra is

A racionális számok halmaza: $Q = \left\{ \frac{a}{b} \middle| \ a, b \in Z, \ b \neq 0 \right\}$.

-Tulajdonképpen az $\frac{a}{b}$ alakú szám is *egy ekvivalencia osztály reprezentánsa*.

Pl. $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{-2}{-4} = \frac{5}{10} = \frac{-25}{-50} = \ldots = 0{,}5$ .

Vagyis egy-egy racionális számnak sokféle közönséges tört alakja van, ezek viszont mind ugyanazt az értéket képviselik (ugyanahhoz az ekvivalencia osztályhoz tartoznak), ugyanazt a racionális számot jelentik. „ratio” = arány (latin).

$Q = \left\{ \frac{m}{n} \middle| \ m, \mathrm{n} \in Z, \ n \neq 0 \right\}$ és a reláció:

$\frac{a}{b} \ \Re \ \frac{c}{d} \Leftrightarrow$ ad=bc

Ez egy ekvivalencia reláció!

-Nyilván, hogy $Z \subset Q$. $a \in Z$ *szám* $\frac{a}{1}$ alakban már racionális szám.

*Racionális számok egyenlősége*: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$ .

Adott racionális számmal egyelőt *bővítés*sel, vagy *egyszerűsítés*sel kapunk:

$^{k)}\frac{a}{b}=\frac{k\cdot a}{k\cdot b}$ bővítés, $\frac{k\cdot a}{k\cdot b}^{(k}=\frac{a}{b}$ egyszerűsítés.

*Irreducibilis tört*: tovább nem egyszerűsíthető.

Pl. $\frac{1}{2},\frac{5}{6},\frac{12}{17},-\frac{30}{11},\ldots$

A bővítés megadja a lehetőségét a *közös nevezőre hozás*nak:

Pl. $^{3)}\frac{5}{12}=\frac{15}{36},\quad ^{2)}\frac{7}{18}=\frac{14}{36}$

Ekkor a kapott törtek összehasonlíthatók, összeadhatók, illeve kivonhatók.

*A pozitív racionális számok viszonya 1-hez:*

$\frac{a}{b}$ *egységnyi tört*, ha a=b

$\frac{a}{b}$ *valódi tört*, ha a<b, (egységnél kisebb tort)

$\frac{a}{b}$ *áltört*, ha a>b, (egységnél nagyobb tört)

*Vegyes tört*: egy egész szám és egy valódi tört összege, pl. $2+\frac{3}{4}=2\frac{3}{4}$

A vegyes tört és az áltört közötti átalakítás az értelmezésből adódik:

$$2\frac{3}{4}=2+\frac{3}{4}=\frac{8}{4}+\frac{3}{4}=\frac{2\cdot 4+3}{4}$$

$$\frac{11}{4}=\frac{4+4+3}{4}=1+1+\frac{3}{4}=2+\frac{3}{4}=2\frac{3}{4}$$

vagyis 11:4 = 2, ahol a maradék 3.

**Mű**veletek racionális számokkal:

1) Összeadás: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$

2) Kivonás: $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$

(3) Szorzás: $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$

(4) Osztás: $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\times d}{b\times c}$

A rendezési reláció:

$$\frac{a}{b}\le\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{ad-bc}{bd}\le 0$$

Tétel: A Q halmaznak ugyanannyi eleme van mint az N halmaznak, vagyis |Q|= |N|= $\aleph_0$

Bizonyítás: Felírjuk a pozitív racionális számokat a következő módon:

$$\begin{array}{llllllll}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \ldots \\
\frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \frac{2}{6} & \frac{2}{7} & \ldots. \\
\frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \frac{3}{6} & \frac{3}{7} & \ldots \\
\frac{4}{1} & \frac{4}{2} & \frac{4}{3} & \frac{4}{4} & \frac{4}{5} & \frac{4}{6} & \ldots & \\
\ldots & & & & & & &
\end{array}$$

A következő sorrendet állítjuk föl:

$$\frac{1}{1};\frac{1}{2};\frac{2}{1};\frac{3}{1};\frac{2}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};\frac{2}{3};\frac{3}{2};\frac{4}{1};\frac{5}{1};\frac{4}{2};\frac{3}{3};\frac{2}{4};\frac{1}{5};\frac{1}{6};\ldots$$

Látható, hogy a sor átlósan halad, esetenként egyet le, illetve egyet jobbra lépve „szélesedik”.

Ha megtartjuk az ismétlődő számokat, (pl. $\frac{1}{1}=\frac{2}{2}=\frac{3}{3}=\ldots$ ) még úgy is a táblázatban „ugyanannyian vannak”, mint a természetes számok.

*Tizedes törtek*

A tizedes tört a közönséges tört *egy másik írásmódja*.

Egy pozitív tizedes tört általános alakja: $\overline{k,a_1a_2\ldots a_n\ldots}$, ahol k az egész rész, a tizedes vessző utáni rész a szám törtrésze.

(1) Első megközelítésben vesszük azokat a közönséges törteket, amelyek nevezője $10^n$ alakú, vagy ilyenné alakítható.

Jelölés: $\frac{1}{10}=0{,}1$ (ez az új írásmód), kiolvasása: „1 tized = 0 egész 1 tized”.

$1\frac{23}{100}=1{,}23$, kiolvasása: „1 egész 23 század”.

$\frac{142}{10}=14\frac{2}{10}=14{,}2$ $\qquad$ $\frac{2}{1000}=0{,}002$, (0 egész 2 ezred)

Ez a jelölésmód kihasználja a helyiértékes számírás minden előnyét, ami a műveletek végzésekor is jelentős.

Nemcsak azok a közönséges törtek végesek, amelyek nevezője a 10 valamely hatványa, hanem minden olya tört, amely bővítéssel ilyenné alakítható:

Pl. $\frac{2}{5} \overset{2)}{=} \frac{4}{10} = 0{,}4$ $\qquad \frac{3}{50} \overset{2)}{=} \frac{6}{100} = 0{,}06$

(A tizedes jegyek végéről a 0, vagy a nullák elhagyhatók.)

A fenti tizedes törteket *véges tizedes tört*ek nek nevezzük. Azon közönséges törtek írhatók véges alakba, melyek nevezője $2^n \cdot 5^m$ alakú, ahol $n, m \in N$.

(2) Azok a törtek, amelyek nevezője tényezőre bontásában sem a 2, sem az 5 hatványa nem szerepel.

Ezek átalakított (osztással kapott) alakja

$\overline{k,(a_1 a_2 ... a_n)}$,

ahol a ( )-be tett számjegyek ismétlődnek. A zárójelbe tett számok neve: *szakasz*.

Pl. $\frac{1}{3} = 0{,}333... = 0,(3);$ $\qquad \frac{47}{33} = 1{,}424242... = 1,(42)$

Ezeket a tizedes törteket *végtelen, tiszta szakaszos tizedes tört*nek nevezzük.

Kiolvasás: 1,(42): „1 egész 42, 42 a szakaszban”.

(3) Olyan közönséges törtek, amelyek nevezője tényezője bontásában a 2 és/vagy 5 hatványai mellett más prímtényezők hatványai is szerepelnek.

Ezekből alakulnak ki az ún. *vegyes szakaszos tizedes tört*nek.

Pl. $\frac{9}{55} = 0{,}1636363... = 0{,}1(63);$ $\qquad \frac{5}{6} = 0{,}8333... = 0{,}8(3)$.

*Visszaalakítások:*

a) *A véges tizedes törtek visszaalakítása* következik a jelölésből, abból, ahogy kiolvassuk:

$2{,}35 = 2\frac{35}{100} = \frac{235}{100};$ $\qquad 0{,}602 = \frac{602}{1000}$

b.) *A tiszta szakaszos tizedes törtek visszaalakítása*

*Levezetés*: Adott a $T = \overline{0,(a_1 a_2 a_3 ... a_n)}$ tört. Az egyenlőség mind a két oldalát megszorozzuk $10^n$ -nel.

$T = \overline{0,(a_1 a_2 a_3 ... a_n)}\ / \cdot 10^n$

$10^n \cdot T = \overline{a_1 a_2 a_3 ... a_n, a_1 a_2 a_3 ... a_n}$

Vonjuk ki a második egyenlőségből az elsőt:

$10^n \cdot T - T = \overline{a_1 a_2 a_3 ... a_n}$

Az egyenlőség bal oldalából kiemeljük a T-t: $T \cdot (10^n - 1) = \overline{a_1 a_2 a_3 ... a_n}$

A kapott egyenlőségből kifejezzük a szóban forgó T tizedes törtet:

$T = \frac{\overline{a_1 a_2 a_3 ... a_n}}{10^n - 1} = \frac{\overline{a_1 a_2 a_3 ... a_n}}{999...9}$, ahol a tört nevezőjében *n* db 9-es számjegy van.

Pl. $0,(3) = \frac{3}{9}$; $21,(02) = 21\frac{2}{99}$; $5,(125) = 5\frac{125}{999}$

c.) *A vegyes szakaszos tizedes törtek átalakítása*

*Levezetés:* A lépések azonosak az előző bizonyítás lépéseivel.

$T = \overline{0, a_1 a_2 ... a_k (b_1 b_2 .. b_l)} \quad / \cdot 10^{k+l} \quad / \cdot 10^k$

Tehát az adott törtek először 10-nek *k+l.*, másodszorra 10-nek *k.* hatványával szorozzuk és ezeket kapjuk:

$10^{k+l} \cdot T = \overline{a_1 a_2 ... a_k b_1 b_2 .. b_l , (b_1 b_2 .. b_l)}$

$10^k \cdot T = \overline{a_1 a_2 ... a_k , (b_1 b_2 .. b_l)}$

A fenti két egyenlőséget kivonjuk egymásból, és a következőket kapjuk:

$$10^{k+l} \cdot T - 10^k \cdot T = \overline{a_1 a_2 ... a_k b_1 b_2 ... b_l} - \overline{a_1 a_2 ... a_k}$$
$$10^k \cdot T (10^l - 1) = \overline{a_1 a_2 ... a_k b_1 b_2 ... b_l} - \overline{a_1 a_2 ... a_k}$$

$T = \frac{\overline{a_1 a_2 ... a_k b_1 b_2 ... b_l} - \overline{a_1 a_2 ... a_k}}{10^k \cdot 99...9}$, a nevezőben *l* db 9-es van.

Pl. $3{,}1(42) = 3\frac{142 - 1}{990}$, $\quad 0{,}15(93) = \frac{1593 - 15}{9900}$ .

*Összefoglalva:*

- minden természetes szám, illetve egész szám ugyanakkor racionális szám is (1 nevezőjű törtként írható).
- Minden közönséges tört racionális szám.
- Minden véges, vagy végtelen, de szakaszos tizedes tört – mivel átalakítható közönséges törtté – racionális szám is.
- Ha egy tizedes szám végtelen, de nem szakaszos, akkor az nem racionális szám.
  Pl. 0,101001000100000...
- A racionális számok halmazában a négy alapművelet elvégezhető, egyetlen kivételt a 0-val való osztás jelenti.

*Megjegyzések*

-Minden véges tizedes tört olyan végtelen tizedes törtnek tekinthető, amelyben csak véges számjegy nem nulla.

Pl. 15,341 = 15, 34100...0...

- Az 1 = 0,99...9... = 0,(9) felírás miatt bármely közönséges tört egyértelműen átalakítható tizedes törtté, ellenben a szakasz ne csak 9-est tartalmazzon.

- A végtelen nemszakaszos tizedes számok nem alakíthatók át közönséges törtté, mert ezek nem racionális számot, hanem irracionális számot állítanak elő.

Pl. 1,414213... a $\sqrt{2}$ irracionális számmal egyenlő.