

Műveletek az N, Z és Q halmazokon

- 0) Egy számsorozat néhány tagja ... 91, 93, 96, 98, 101, Szerepelnek-e a sorozatban a 2013 és 2014 számok?
- 1) Leírjuk egymás után a természetes számokat: 12345678910111213...
Milyen számjegy áll a 99. helyen?
- 2) Megszámoztuk egy könyv oldalait 1-től 100-ig.
a) hány számjegyet használtunk fel?
b) Hány 1-es számjegyet használtunk?
- 3) Egy könyv oldalainak a megszámozásához 1212 számjegyet használtunk. Hány oldalas a könyv?
- 4) (i) Írjuk fel a természetes számokat a következő háromszögbe:

```

      1
     2 3 4
    5 6 7 8 9
   10 11 12 13 14 15 16

```

- a) Milyen számok állnak a 30. sorban?
b) Hányadik sorban és hányadik elem a 2013?
- (ii) Írjuk fel a természetes számokat a következő háromszögbe:

```

      1
     2 3
    4 5 6
   7 8 9 10
  11 12 13 14 15

```

- a) Milyen számok állnak a 30. sorban?
b) Hányadik sorban és hányadik helyen szerepel a 2013?
- (iii) Írjuk fel a páros számokat a következő háromszögbe:

```

      2
     4 6
    8 10 12
   14 16 18 20
  22 24 26 28 30

```

- a) Milyen számok lesz a 13. sor utolsó eleme?
b) Számítsd ki ebben a sorban a számok összegét!
- (iv) Írjuk fel a páratlan számokat a következő háromszögbe:

```

      1
     3 5
    7 9 11
   13 15 17 19
  21 23 25 27 29

```

- a) Milyen szám áll a 2013. sor közepén?
b) Milyen szám áll a 2013. sor elején és a végén?
c) Milyen szám áll a 2014. sor elején és végén?
d) Mennyi a 2013. sorban levő számok összege?

5) Igazold, hogy ha 63 pozitív egész szám összege 2000, akkor van közöttük legalább két egyforma szám.

6) Igazoljuk, hogy a következő szám racionális:

a) $A = \sqrt{2+4+6+\dots+1992+997}$ b) $B = \sqrt{100+2+4+6+\dots+198}$

7) Számítsuk ki a következő törtek értékét:

a) $A = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{98} - \frac{1}{100}}{-\frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{9} + \frac{1}{12} - \dots - \frac{1}{147} + \frac{1}{150}}$ b) $B = \frac{2 \cdot 3 + 4 \cdot 6 + 6 \cdot 9 + \dots + 2000 \cdot 3000}{3 \cdot 5 + 6 \cdot 10 + 9 \cdot 15 + \dots + 3000 \cdot 5000}$

c) $C = \frac{0,1+0,2+0,3+\dots+0,9}{0,01+0,02+0,03+\dots+0,09}$ d) $D = \frac{1111+2222+3333+\dots+9999}{11+22+33+\dots+99}$

8) Számítsuk ki a következő törtek értékét:

a) $A = \frac{1}{10^{-99}+1} + \frac{1}{10^{-98}+1} + \dots + \frac{1}{10^0+1} + \dots + \frac{1}{10^{98}+1} + \frac{1}{10^{99}+1}$

b) $B = \left(\frac{1}{19} + \frac{2}{19} + \dots + \frac{18}{19}\right) + \left(\frac{1}{20} + \frac{2}{20} + \dots + \frac{19}{20}\right) + \left(\frac{1}{21} + \frac{2}{21} + \dots + \frac{20}{21}\right) + \left(\frac{1}{22} + \frac{2}{22} + \dots + \frac{21}{22}\right)$

9) Számítsuk ki:

a) $A = (2+1) \cdot (2^2+1) \cdot (2^4+1) \cdot (2^8+1) \cdot (2^{16}+1) \cdot (2^{32}+1)$

b) $B = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2$

c) $C = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{99^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{100^2}\right)$

10) Számítsuk ki:

a) $A = -1 - 2 + 3 + 4 - 5 - 6 + 7 + 9 - \dots - 97 - 98 + 99 + 100$

b) $B = 2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{100}}\right)$

c) $C = \left(2 - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \dots - \frac{2013}{2012}\right) - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2012}\right)$

11) Számítsuk ki:

a) $A = \frac{1}{10} \cdot \left(-\frac{2}{15}\right) \cdot \left(\frac{3}{20}\right) \cdot \left(-\frac{4}{25}\right) \cdot \dots \cdot \left(-\frac{1990}{9955}\right) \cdot 5^{1990}$

b) $B = \frac{(-2)^1 + (-2)^2 + (-2)^3 + \dots + (-2)^{100}}{2^1 + 2^3 + 2^5 + \dots + 2^{99}}$

12) Számítsuk ki: $S = 1 + 11 \cdot 12 - 11^2 \cdot 12 + 11^3 \cdot 12 + \dots + 11^{19} \cdot 12 - 11^{20} \cdot 12 + 11^{21}$

13) Számítsuk ki a következő törteket:

a) $\frac{1234567890}{1234567891^2 - 1234567890 \cdot 1234567892}$ b) $\frac{423134 \cdot 846267 - 423133}{423133 \cdot 846267 + 423134}$

14) Számítsuk ki:

a) $S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{8 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 10}$

b) $S_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36} + \frac{1}{60} \dots + \frac{1}{270}$

c) Igazold: $S = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{100} < 0,99$

15) Igazoljuk, hogy $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \notin N$ egyetlen $n \in N^* - \{1\}$ esetén sem.

16) Igazoljuk, hogy: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{10} = \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{20}$

17) Milyen tizedes törtet állítanak elő a következő közösleges törtek?

a) $\frac{1}{10n+1}$ b) $\frac{1}{n^2+n+1}$ c) $\frac{1}{n^3-n}$

18) Milyen számjegy áll a következő törtek tizedes alakjában a tizedes vessző utáni 2013.

helyen? a) $\frac{1}{7}$ b) $\frac{3}{35}$

19) Igazoljuk, hogy a következő szám négyzetszám:

$$a = \frac{1}{7} + \frac{9}{14} + \frac{10}{21} + \dots + \frac{70}{441} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{63} \right)$$