Kombinatorika

A kombinatorikában csak *rendezett halmazokkal* foglalkozunk. Azt mondjuk, hogy az $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ halmaz egy rendezett halmaz, ha az elemek bármely sorrendcseréjére új halmazt kapunk (úgy mondjuk: *számít a sorrend*)

1.Permutációk ismétlés nélkül és ismétléssel *(sorrendi kérdések)*

Pl.1.)

Az 1, 2, 3 számjegyekből, ismétlés nélkül, hány háromjegyű szám írható?

1 2 3	2 3 1	3 1 2
1 3 2	2 1 3	3 2 1

F. 6 db. van.

A fenti példában előállítottuk **3 elem ismétlés nélküli permutáció*i***t: 3 elemet 3 helyre rendeztünk úgy, hogy egy elem csak egyszer szerepelhetett.

A permutációk számának megállapítása:

-a helyek sorszáma:	I.	II.	III.
	↑	↑	↑
	3-ból választok	2-ből választok	1-ből „választok”

Tehát a permutációk száma: 3·2·1 = P_3 **(„**permutáció 3 elemből”).

Ugyanazt jelöli a **3! („3 faktoriális”)** is.

Pl.2.)

Az ALOM szó betűiből hány négybetűs, nem föltétlenül értelmes szót lehet fölírni? (tegyük föl, hogy a betűk kártyákon állnak, tehát nem ismétlődhetnek.)

ALOM	L…	M…	O…
ALMO	L…	M…	O…
AOLM	L…	M…	O…
AOML	L…	M…	O…
AMLO	L…	M…	O…
AMOL	L…	M…	O…

Látható, hogy négy oszlop van, mivel a 4 betűből bármelyik állhat az első helyen. Hogy a maradék 3 helyre a fennmaradó 3 betűt 6 féle módon lehet elhelyezni, azt már az előző feladatban láthattuk.

Másképpen gondolkodva:

I.	II.	III.	IV.
..	..	..	..
4-ből	3-ból	2-ből	1-ből

választunk

$$P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24\ (db)$$

Tehát a felsorolt formák: 4 elem ismétlés nélküli permutációi (valójában a 24-ből csak 6-ot soroltunk föl, a többi csak el van kezdve).

1. **Értelmezés:** Legyen $A=(a_1,a_2,...,a_n)$ tetszőleges *n* elemű rendezett halmaz. Az n elem valamely sorrendben való felsorolása az A halmaz egy ismétlés nélküli *permutációja*. Az A halmaz összes permutációinak a számát P_n -nel jelöljük, és

$$\boxed{P_n=n!} \quad \text{ahol} \quad \boxed{n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n} \quad \text{és} \quad \boxed{0!=1}$$

Pl.3.)
Az ALMA szó betűiből négybetűs szavakat alkotunk. Hányat lehet?

Fel lehet írni mind a 24-et, de közülük 12-t ki kell húzni: ennyi esetben kapunk olyant, amit már előzőleg megkaptunk.

Így gondolkodhatunk:
Vesszük úgy, mintha mind a 4 betű különböző lenne, de az így kapható számot osztani kell 2!-sal, jelen esetben 2-vel. Ha rögzítjük két nem ismétlődő betű pozícióját: A$\boxed{\text{LM}}$A, minden esetben pontosan feleannyi felírás van, mert A-t A-val felcserélve nem kapunk új felírásokat.

Egészen pontosan: annyiszor kevesebb permutáció van, ahányszor az ismétlődő betűk a fennmaradt helyekre elhelyezhetők lennének, ha azok különbözők volnának.
Amit így felírtunk **4 elem permutációi** (4 elemet 4 helyre rendeztünk), amelyek közül **kettő ismétlődött.**

Jele: $P_4^{2,1,1}=P_4^2=\frac{4!}{2!}=\frac{24}{2}=12$

Pl.4.)
Adottak a következő számkártyák: $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{3}$ $\boxed{3}$. Hány ötjegyű szám alkotható ezekből?

Itt az $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ kártyák minden rögzített pozíciója esetén hatszor kevesebb eset van ($P_3=6$).

Tehát $P_5^{3,1,1}=\frac{5!}{3!}=\frac{120}{6}=20$.

Pl.5.)
Az 1, 2 számjegyekből hány olyan ötjegyű szám írható föl, amelyben az 1-es háromszor, a 2-es pedig kétszer szerepel?

$P_5^{3,2}=\frac{5!}{3!\cdot 2!}=\frac{120}{(3\cdot 2\cdot 1)\cdot(2\cdot 1)}=10$

2. **Értelmezés**: Legyen $A=(a_1,a_2,...,a_n)$ tetszőleges *n* elemű rendezett halmaz. Ennek elemeiből olyan sorozatokat alkotunk, amelyben az a_1 elem k_1-szer, az a_2 elem k_2-ször,…, az a_n elem k_n-szer fordul elő. Az így kapott sorozatokat az n elem *ismétléses permutációjának* nevezzük. Ezek száma:

$$\boxed{P_n^{k,k_2,...,k_n}=\frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot ...\cdot k_n!}}$$

Pl.6.)

Adott a mellékelt elrendezés. Hányféleképpen olvasható ki A VIZSGA szó, ha csak *jobbra* vagy *lefelé* lehet haladni?

V I Z S
I Z S G
Z S G A

A V-től az A-ig haladva 5 lépéslehetőség. Ebből az elrendezést figyelve 3 történhet jobbra és 2 lefelé. Tehát a lépések száma: $P_5^{3,2} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = 10$

-A feladat ugyanaz, mintha a j, j, j, l, l betűket rendezném 5 helyre (jobbra 3×, lefelé 2×), tehát valóban $P_5^{3,2}$-ről van szó.

-***Másképpen megoldva (rekurzív számlálással):*** indexeljük a betűket azzal a számmal, amely azt mutatja, hogy az illető betűhöz *hányféle módon juthatunk*. Az utolsó betű (A) indexe megadja az összlehetőségek számát:

$$\begin{matrix} V_1 & I_1 & Z_1 & S_1 \\ I_1 & Z_2 & S_3 & G_4 \\ Z_1 & S_3 & G_6 & A_{10} \end{matrix}$$

Látható, hogy az eredmény így is 10.

2.Variációk ismétlődés nélkül és ismétlődéssel *(kiválasztási és sorrendi kérdések)*

Pl.1.)

Van négy számkártya: $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$. Hány háromjegyű szám rakható ki ezekből?

☺ ☺ ☺
↑ ↑ ↑
4-ből 3-ból 2-ből
Választunk

4·3·2 = 24 (db)

2 3 4	2 3 5	2 4 5	3 4 5
2 4 3	.	.	.
3 2 4	.	.	.
3 4 2	.	.	.
4 2 3	.	.	.
4 3 2	.	.	.
6 db	6 db	6 db	6 db

Amit felírtunk **4 elem 3-ad osztályú variációi, ismétlés nélkül**. (4 elemből 3 helyre választottunk, ismétlődés nélkül)

Jele: $V_4^3 = 4\cdot 3\cdot 2 = 24\ (db)$

3. Értelmezés: Legyen $A=(a_1,a_2,...,a_n)$ tetszőleges n elemű rendezett halmaz. Ezek elemeivel $k \le n$ elemű részhalmazokat képezünk, amelyeknél a sorrend is számít. V_n^k -val jelöljük az összes ilyen halmazok számát, és n elemnek k-ad osztályú *ismétlés nélküli* variációjának hívjuk. A variációk száma: $\boxed{V_n^k = \underbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot...\cdot(n-k+1)}_{k-tag}}$

Tehát **n különböző elem k-ad osztályú variációi**: n elemből választunk k helyre és minden elem csak egyszer szerepelhet.

Az előbbi képletből levezethető: $\boxed{V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$

Pl.2.)
A 2, 3, 4, 5 számjegyek felhasználásával hány háromjegyű szám írható fel?
(a számjegyek ismétlődhetnek).

☺ ☺ ☺
4-ből 4-ből 4-ből Tehát ismétléssel 4 elemből választunk 3 helyre.
választok

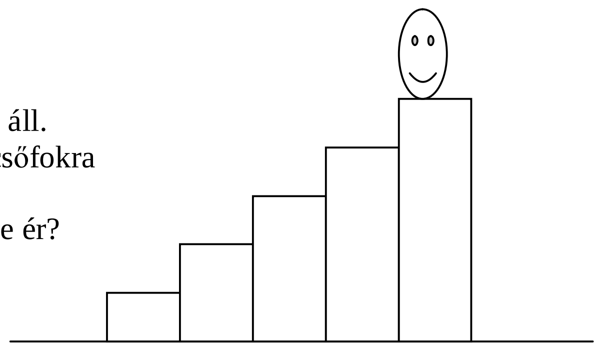
$V_4^{3,i} = 4\cdot4\cdot4 = 4^3 = 64(db)$
Itt **4 elem ismétléses variációi**ról van szó.

4. Értelmezés: Legyen $A=(a_1,a_2,...,a_n)$ tetszőleges n elemű rendezett halmaz. Ezek elemeivel $k \le n$ elemű részhalmazokat képezünk, amelyeknél a sorrend is számít, és *egy elem többször is előfordulhat*. $V_n^{k,i}$ -val jelöljük az összes ilyen halmazok számát, és n elemnek k-ad osztályú *ismétléses variációjának* hívjuk, és

$$\boxed{V_n^{k,i} = n^k}$$

Az **ismétléses variáció**nál n elemből választunk k helyre, de a kiválasztott elemek megint szerepelhetnek.

Pl.3.)
Egy nyuszika egy öt fokozatú lépcső tetején áll. Ugrándozik lefelé úgy, hogy bármelyik lépcsőfokra ráugorhat, vagy át is ugorhatja. Hányféle ugráskombinációt próbálhat ki, amíg a földre ér?



Minden lépcsőfoknál 2 lehetőség közül
Választhat: *vagy ráugrik, vagy nem.*
Tehát 2 lehetőségből választ 4 helyre:
$V_2^{4,i} = 2^4 = 16$,
vagy: I. II. III. IV. (lépcsőfok)
$2\cdot 2\cdot\ 2\cdot\ 2$

Pl.4.)
Dobókockával dobunk egymás után négyszer és az eredményeket (a dobások számjegyét) egymás mellé írjuk. Így minden négy dobás után egy-egy négyjegyű számot kapunk. Hány esetben lesz a kapott négyjegyű szám 4-gyel osztható?

A 4-gyel való oszthatóság szabálya alapján a „jó végződések”: 12, 16, 24, 32, 36, 44, 52, 56, 64. *Tehát 9 db jó végződés van*.

$\underbrace{I. \quad II.}_{6 \text{ból választunk}} \quad \underbrace{III. \quad IV.}_{9 \text{ jó végződés}}$ Az első két hely esetén 6-ból választunk: $V_6^{2,i} = 6^2 = 36$.

Tehát Ö = 9·36 = 324 jó szám van.

Pl.5.)
Adott a következő elrendezés. Hányféle képpen olvasható ki belőle a MATEK szó, ha csak jobbra vagy lefele léphetünk?

M A T E K
A T E K
T E K
E K
K

4 lépés van M-től K-ig. Minden esetben kétféle lehetőség van. Tehát $V_2^{4,i} = 2^4 = 16$.

Másképpen megoldva (rekurzív számlálással):
Indexeljük a betűket azzal a számmal, amely azt mutatja, hogy az illető betűhöz hányféle módon juthatunk.

$M_1\ A_1\ T_1\ E_1\ K_1$
$A_1\ T_2\ E_3\ K_4$
$T_1\ E_3\ K_6$
$E_1\ K_4$
K_1

Bármelyik K-hoz jutunk, az mind jó, tehát a K betűk indexeit összeadjuk
Ö = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16

3.Kombinációk ismétlés nélkül és ismétléssel *(kiválasztási kérdések)*

Pl.1)
Az **A, B, C, D** tanulókból 3 tagú csoportokat képezünk. Hány ilyen csoport van?
F. 4 db, éspedig: {A, B, C}; {A,. B, D}; {A, C, D}; {B, C, D}.

Az egyszer kiválasztott 3 betűt itt nem kell átrendezni más sorrendbe, mint a variációknál, tehát annyiszor kevesebb eset van. Ez annyi, mint ahányszor a 3 elemet a megadott 3 sorrendbe tudtuk volna helyezni, vagyis P_3-szor kevesebb eset van.

> **5. Értelmezés:** Legyen $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ tetszőleges *n* elemű rendezett halmaz. Ezek elemeivel $k \le n$ elemű részhalmazokat képezünk, amelyeknél a sorrend NEM számít. C_n^k -val jelöljük az összes ilyen halmazok számát, és n elemnek k-ad osztályú *ismétlés nélküli* kombinációjának hívjuk.

Ezek számát C_n^k, *vagy* $\binom{n}{k}$ jelöli és $\boxed{C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}}$

A feladat: n elemből k elemet tartalmazó részhalmazokat alkotni.

Másképpen: n elemből válasszunk ki k darabot úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendje nem számít.

Megjegyzés

Pl.2.)

Osszunk szét 5 tanuló között 3 egyforma ajándékot úgy, hogy minden gyerek csak 1-1 ajándékot kaphat. Hányféle módon lehet?

Most a tanulókból választunk az ajándékokhoz. Mivel az ajándékok egyformák, a kiválasztott 3 tanuló között nem kell cserélgetni az ajándékokat, tehát nem variációról, hanem kombinációról van szó.

$$C_5^3 = \frac{V_5^3}{P_3} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 1} = 10$$

Pl.3.)

Osszunk szét 5 tanuló között 3 egyforma ajándékot úgy, hogy minden gyerek tetszőleges számú ajándékot kaphat. Hányféle módon lehet?

-Kaphatnak a tanulók 1-1 ajándékot (mint az előbb), ezek száma: $C_5^3 = \frac{V_5^3}{P_3} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 1} = 10$

-Kaphat egy tanuló 2 ajándékot és egy tanuló 1-et. Így az 5 tanulóból 2-t választunk.

Az így kapott számot megduplázzuk, mert az első kaphat kettőt és a második egyet, vagy fordítva.

$$2\cdot C_5^2 = 2\cdot\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1} = 20$$

-Kaphat egy tanuló 3 ajándékot -5 féle képpen.

Tehát összesen 10 + 20 + 5 = 35 eset van.

Amit ebben az esetben felírtunk, az **5 elem 3-ad osztályú ismétléses kombinációja** voltak.

Megfigyelhető, hogy $35 = C_{5+3-1}^3 = C_7^3 = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} = 35$

5. Értelmezés: Legyen $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ tetszőleges *n* elemű rendezett halmaz. Ezek elemeivel $k \le n$ elemű részhalmazokat képezünk, amelyeknél a sorrend NEM számít, és *egy elem többször is előfordulhat.* $C_n^{k,i}$ -val jelöljük az összes ilyen halmazok számát, és n elemnek k-ad osztályú *ismétléses kombinációjának* hívjuk, és $\boxed{C_n^{k,i} = C_{n+k-1}^k}$

Tehát az ismétléses kombinációk számának kiszámítása visszavezetődik a nem ismétléses kombináció képletére.

Pl.4.)
Egy urnában 20 cédula van 1-20-ig megszámozva. Kihúzunk 5 cédulát úgy, hogy minden húzás után a kihúzott cédulát visszatesszük. Hány esetben lesz a kihúzott legkisebb szám nagyobb 6-nál?

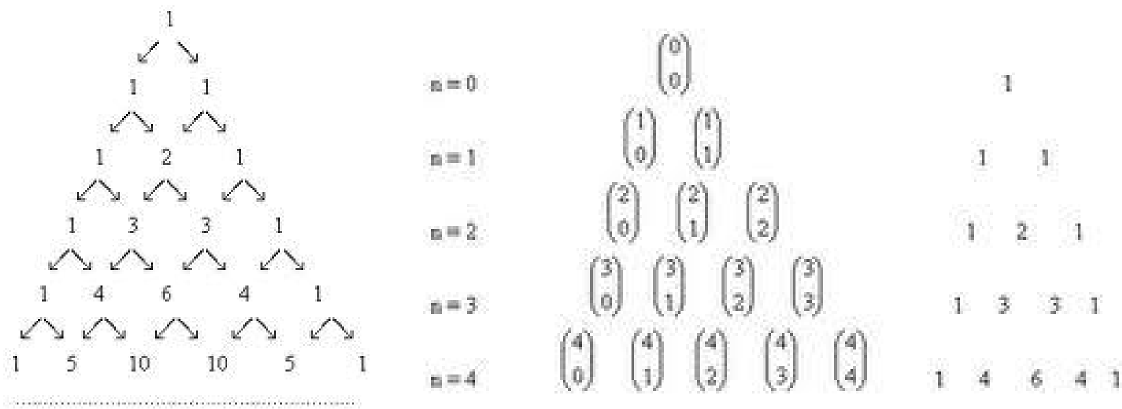
14 db olyan cédula van, amelyen hatnál nagyobb számok vannak. Tehát 14 elemből kell 5-ös sorozatokat alkotni, ahol a sorrend nem számít, vagyis kombinációról van szó. Mivel minden húzás után visszatevődik a már kihúzott cédula, ezért ismétléses a kombináció.
A válasz tehát: $C_{14}^{5,i} = C_{14+5-1}^{5} = C_{18}^{5} = 8568$.

Megjegyzés:
Könnyen memorizálhatjuk faktoriálisok nélkül is a következő képleteket:

$V_n^1 = n$, $V_n^2 = n(n-1)$, $V_n^3 = n(n-1)(n-2)$ és így tovább
$C_n^1 = n$, $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2\cdot 1}$, $C_n^3 = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}$ és így tovább.

Newton binomiális képlete

Az $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, ..., $(a+b)^n$ binomok kifejtésére szolgál. Előbb B. Pascal adta meg a kifejtésben az együtthatókat, az úgynevezett Pasca-háromszögben, amit Newton kombinációk segítségével is megadott.



A Newton binomiális képlete a következő:
$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-2} a^2 b^{n-2} + C_n^1 a b^{n-1} + b^n$ vagy röviden:
$(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$, és az általános tag képlete: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$.
Jó tudni, hogy: $C_n^k = C_n^{n-k}$.