Haladványok

1. Számtani haladványok

Egy $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ sorozatban, ha $\boxed{a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ... = a_n - a_{n-1} = ... = r \neq 0}$, akkor a sorozatot *számtani sorozatnak* vagy *számtani haladványnak* nevezzük Az $r \neq 0$ valós számot *állandó különbségnek*, vagy *rációnak* nevezzük. Innen $\boxed{a_n = a_{n-1} + r}$ egy elsőrendű rekurzió.

Tehát egy számtani sorozat így néz ki:

$\boxed{a_1,\ a_1 + r,\ a_1 + 2r,\ a_1 + 3r,\ ...,\ a_1 + (n-1)r,\ ...}$

Tehát a számtani sorozat általános tagjának a képlete: $\boxed{a_n = a_1 + (n-1)r}$

1. Példa: Tekintsük a 2, 5, 8, 11, 14, …., a_n,… számtani sorozatot, ahol n természetes szám. Írjuk fel az általános tag képletét.

Látható, hogy $a_1 = 2$ és $r = 3$. Ezért $a_n = a_1 + (n-1)r = 2 + (n-1)\cdot 3 = 3n - 1$.

Legyen $\boxed{S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}$ a haladvány első n tagjának az összege.

Az összeg kiszámolása céljából vegyük észre, hogy:

$\boxed{a_n + a_1 = a_{n-1} + a_2 = a_{n-2} + a_3 = ... = 2a_1 + (n-1)r}$

Ez az észrevétel lehetővé teszi az első n tag összegének a meghatározását.
Előtte azonban nézzük a Gauss-féle számolási eljárást:

2. Példa: Számítsuk ki az $S_{100} = 1 + 2 + 3 + ... + 99 + 100$ összeget.

Látható, hogy $2S_{100} = (1 + 2 + 3 + ... + 99 + 10) + (100 + 99 + 98 + ... + 2 + 1) =$
$= (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + ... + (99 + 2) + (100 + 1) = 100 \times 101$

Tehát $2S_{100} = 100 \times 101$, ahonnan $S_{100} = \dfrac{100 \times 101}{2} = 5050$

Az eljárást megismételjük az általános estben is:

$$2S_n = (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n) + (a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_2 + a_1) =$$
$$= (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + ... + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) = n(a_1 + a_n)$$

Tehát $\boxed{S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}}$ minden n természetes szám esetén.

3. Példa: Számítsuk ki a következő összeget: $S = 1 + 4 + 7 + ... + 55 + 58$

Az összeg kiszámolása céljából meg kell állapítani, hogy hány tagja van az összegnek Ebből a célból vegyük észre, hogy $a_1 = 1,\ r = 3$ és így tovább $a_n = 1 + 3(n-1) = 3n - 2 = 58$ ahonnan $n = 20$, ezért az összegnek 20 tagja van, így $S_{20} = \dfrac{(a_1 + a_{20})\cdot 20}{2} = \dfrac{(1 + 58)\cdot 20}{2} = 590$

4. Példa: Számítsuk ki az *x*-et, ha $1 + 7 + 13 + ... + x = 280$

Legyen *x* az *n*-edik tag, tehát $x = a_1 + (n-1)r = 1 + (n-1)\cdot 6 = 6n - 5$. Tehát kiszámítandó az $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2} = \dfrac{(1 + x)\cdot n}{2} = \dfrac{(6n - 4)\cdot n}{2} = 3n^2 - 2n = 280$ ahonnan $n = 10$.

Legyen $a_{k-1},\ a_k,\ a_{k+1}$ egy sorozat három egymás utáni tagja. Ahhoz, hogy ezek számtani haladványba legyenek szükséges, hogy $a_k - a_{k-1} = a_{k+1} - a_k$ ahonnan $a_k = \dfrac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$. Fordítva: ha az $a_{k-1},\ a_k,\ a_{k+1}$ számok egy számtani haladvány egymás utáni tagjai, akkor $a_{k-1} = a_k - r,\ a_k = a_k,\ a_{k+1} = a_k + r$ és innen $a_k = \dfrac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$. Tehát $a_{k-1},\ a_k,\ a_{k+1}$

(ebben a sorrendben) akkor és csakis akkor egy számtani haladvány egymás utáni tagjai, ha $\boxed{a_k = \frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}}$ vagyis a középső tag a két szélsőnek a számtani középarányosa.

5. Példa: Igazoljuk, hogy ha az $a,\ b,\ c$ számok számtani haladványban vannak, akkor az $a^2 - bc,\ b^2 - ac,\ c^2 - ab$ számok is számtani haladványt képeznek.

Ennek szükséges és elégséges feltétele, hogy teljesüljön a következő összefüggés: $b^2 - ac = \frac{a^2 - bc + c^2 - ab}{2} \Leftrightarrow 2b^2 - a^2 - c^2 + bc + ab = 0$. De $b = \frac{a+c}{2}$, és ezt behelyettesítve kapjuk, hogy $2\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 - a^2 - c^2 + \frac{a+c}{2}c + a\frac{a+c}{2} = 0$ ami ellenőrizhető, hogy teljesül.

2. Mértani haladványok

Egy $b_1, b_2, ..., b_n, ...$ sorozatban, ha $\boxed{\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \frac{b_4}{b_3} = ... = \frac{b_n}{b_{n-1}} = ... = q \neq \pm 1}$, akkor a sorozatot *mértani sorozatnak* vagy *mértani haladványnak* nevezzük Az $q \neq \pm 1\ r \neq 0$ valós számot *állandó hányadosnak*, vagy *rációnak* nevezzük. Innen $\boxed{b_n = b_{n-1} \cdot q}$ is adódik.

Tehát egy mértani sorozat így néz ki:

$\boxed{b_1,\ b_1 \cdot q,\ \mathrm{b}_1 \cdot q^2,\ \mathrm{b}_1 \cdot q^3,\ ...,\ \mathrm{b}_1 \cdot q^{n-1},\ ...}$

Tehát a mértani sorozat általános tagjának a képlete: $\boxed{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}}$

6. Példa: Tekintsük a 2, 6, 18, 54, 162, ….,b_n ,… mértani sorozatot, ahol n természetes szám. Írjuk fel az általános tag képletét.

Látható, hogy $b_1 = 2$ és $q = 3$ ezért $b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1}$

Legyen $\boxed{S_n = b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n}$ a haladvány első n tagjának az összege.

7. Példa: Számítsuk ki az $S_{64} = 1 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^{62} + 2^{63}$ összeget.(**Sah feladványa**)

Írjuk fel az összeg kétszeresét: $2S_{64} = 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{63} + 2^{64}$ így

$2S_{64} - S_{64} = (2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{63} + 2^{64}) - (1 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^{62} + 2^{63}) = 2^{64} - 1$ (ez 20 jegyű szám)

Az S_n kiszámolása így történik:

$S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + ... + b_1q^{n-1} = b_1(1 + q + q^2 + ... + q^{n-2} + q^{n-1})$.

Jelölje $S = 1 + q + q^2 + ... + q^{n-2} + q^{n-1}$ így $qS = q + q^2 + q^3 + ... + q^{n-1} + q^n$. Tehát

$qS - S = (q + q^2 + q^3 + ... + q^{n-1} + q^n) - (1 + q + q^2 + ... + q^{n-2} + q^{n-1}) = q^n - 1$. Ezért kaptuk, hogy

$(q-1)S = q^n - 1$ ahonnan $S = \frac{q^n - 1}{q - 1}$, tehát $\boxed{S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}}$

8. Példa: Számítsuk ki: $S = 1 + 2 + 4 + 8 + ... + 512 + 1024$

Látható, hogy $b_1 = 1,\ q = 2,\ n = 11$ így $S_{11} = b_1 \cdot \frac{q^{11} - 1}{q - 1} = 2^{11} - 1$

Legyen $b_{k-1},\ b_k,\ b_{k+1}$ egy sorozat három egymás utáni tagja. Ahhoz, hogy ezek mértani haladványban legyenek szükséges, hogy $\frac{b_k}{b_{k-1}} = \frac{b_{k+1}}{b_k}$ ahonnan $b_k^2 = b_{k-1}b_{k+1}$ vagyis $b_k = \sqrt{b_{k-1}b_{k+1}}$. Fordítva, legyenek most $b_{k-1},\ b_k,\ b_{k+1}$ egy mértani sorozat egymás utáni tagjai (ebben a sorrendben). Akkor $b_{k-1}=\frac{b_k}{q}$, $b_k=b_k$, $b_{k+1}=b_k q$ ahonnan $b_k^2=b_{k-1}b_{k+1}$,

tehát $b_k=\sqrt{b_{k-1}b_{k+1}}$. Tehát b_{k-1}, b_k, b_{k+1} (ebben a sorrendben) akkor és csakis akkor egy mértani haladvány egymás utáni tagjai, ha $\boxed{b_k=\sqrt{b_{k-1}b_{k+1}}}$ vagyis a középső tag a két szélsőnek a mértani középarányosa.

3. **Harmonikus haladványok**

A számtani és a mértani haladványok és közepek közötti összefüggések alapján a harmonikus haladvány jellemző tulajdonsága a harmonikus középarányos segítségével történik:

Legyen c_{k-1}, c_k, c_{k+1} egy sorozat három egymás utáni tagja. A sorozatot akkor és csakis akkor nevezzük harmonikus haladványnak, ha $\boxed{\frac{2}{c_k}=\frac{1}{c_{k-1}}+\frac{1}{c_{k+1}}}$. Ennek alapján vegyük észre, hogy $\boxed{\frac{1}{c_{k+1}}-\frac{1}{c_k}=\frac{1}{c_k}-\frac{1}{c_{k-1}}=...=\frac{1}{c_3}-\frac{1}{c_2}=\frac{1}{c_2}-\frac{1}{c_1}=\frac{1}{g}}$. A $g\neq 0$ számot a haladvány rációjának nevezzük. Az elsőrendű rekurzió ezúttal így néz ki: $\boxed{c_{n+1}=\frac{c_n\cdot g}{c_n+g}}$ minden n ≥1 esetén. Tehát egy harmonikus sorozat így néz ki:

$$\boxed{c_1,\ \frac{c_1\cdot g}{c_1+g},\ \frac{c_1\cdot g}{2c_1+g},\ \frac{c_1\cdot g}{3c_1+g},\ ...,\ \frac{c_1\cdot g}{(n-1)c_1+g},\ ...}$$

Ez lépésről lépésre indukcióval is bizonyítható.

Tehát a harmonikus haladvány általános tagjának a képlete: $\boxed{c_n=\frac{c_1\cdot g}{(n-1)c_1+g}}$.

Vegyük észre a következő kapcsolatot a számtani és a harmonikus haladványok között: a $\frac{2}{c_k}=\frac{1}{c_{k-1}}+\frac{1}{c_{k+1}}$ harmonikus haladvány értelmezésében ha az $\frac{1}{c_i}=a_i$ jelölést végezzük, akkor $a_k=\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}$ adódik, ami éppen a számtani haladvány feltétel. Ennek alapján megfogalmazható a következő eredmény:

<u>Tétel:</u> Legyenek $c_1,c_2,...,c_n,...$ nullától különböző számok. Akkor a következő kijelentések ekvivalensek:

(i) $a_1,a_2,...,a_n,...$ számtani haladvány

(ii) $\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},\frac{1}{a_3},...,\frac{1}{a_n},...$ harmonikus haladvány.

Ha a számtani haladvány rációja *r*, akkor a harmonikus haladvány rációja $g=\frac{1}{r}$ lesz.

Ez a tétel lehetővé teszi a számpéldák szerkesztését is, pl.

$$\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_1+r},\frac{1}{a_1+2r},\frac{1}{a_1+3r},...,\frac{1}{a_1+(n-1)r},...$$

A legegyszerűbb harmonikus haladvány: $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},...,\frac{1}{n},...$.