Geometria

A geometria vagy mértan a geo+metros= földmérés szóból ered, görög tudósok és egyiptomi földmérnökök tapasztalataira épül.

Az euklideszi geometria **alapfogalmakra**, **alaprelációkra** és **axiómákra** épül.

- **alapfogalmak**: például egyenes, szög, sík, stb.
- **alaprelációk**: például illeszkedik, párhuzamos, merőleges, stb.
- **axiómák** (bizonyítás nélkül elfogadunk, mert nyilvánvalóak) például két különböző pont meghatároz egy egyenes, három különböző pont meghatároz egy síkor, egy egyeneshez, egy külső ponton át csakis egy párhuzamos fektethető, stb.

A fontosabb eredményeket **tételek** formájában fogalmazzuk meg, például Pitagorász tétele: Ha egy háromszögben A=90°, akkor $a^2= b^2+ c^2$; Thálesz tétel, három merőleges tétele, stb. A tételeket **bizonyítani** kell!

Létezik külön síkgeometria és külön térgeometria, más-más axiómákra épülnek.

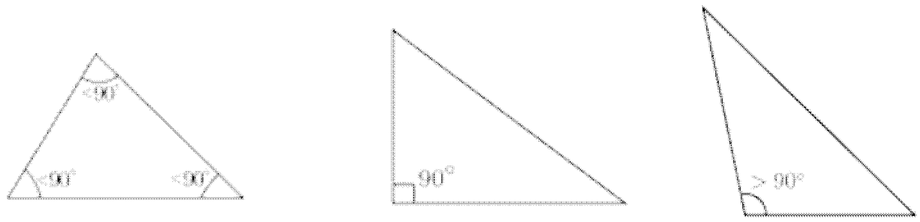
Alakzatok és osztályozásuk és tulajdonságaik

A síkbeli alakzatokat még síkidomoknak, a térbeli alakzatokat testeknek is nevezzük.

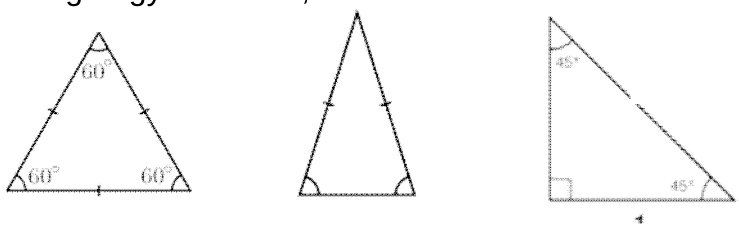
Legegyszerűbb síkbeli alakzatok: **vonalak**, melyek lehetnek nyitott vagy zárt, egyszerű vagy összetett, törött vonalak vagy görbe vonalak, stb.

A legfontosabb alakzatok a **háromszögek**, amelyek lehetnek

- **általános**: hegyesszögű, derékszögű, tompaszögű

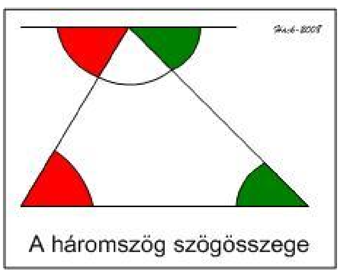


- **sajátos vagy speciális** háromszögek: szabályos (egyenlő oldalú), egyenlő szárú, derékszögű-egyenlőszárú, stb.

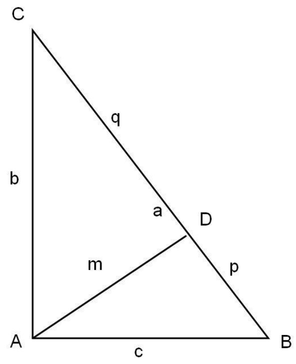


Tétel: *a háromszög belső szögeinek az összege 180°.*

Bizonyítása a párhuzamossági axiómával:



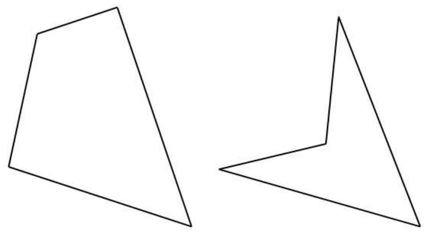
Tétel: *legyenek* ***a, b, c*** *a háromszög oldalainak a hossza. Akkor érvényes a* ***háromszög egyenlőtlenség****:* ***a+ b> c, b+ c> a, c+ a> b***



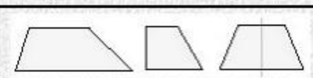
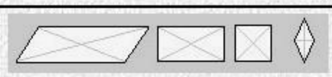
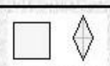
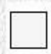
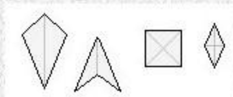
Összefüggések a derékszögű háromszögben:
- Pitagorász tétele: $a^2= b^2+ c^2$
- Befogó tétele: $b^2= a \times q$, $c^2= a \times p$
- 1. Magasságtétel: $m^2= p \times q$
- 2. Magasságtétel: $m = \frac{b \times c}{a}$
- Terület: $T = \frac{a \times m}{2} = \frac{b \times c}{2}$

Pitagorászi számhármasok: (3k, 4k, 5k);(5k, 12k, 13k); (9k, 40k, 41k), stb.

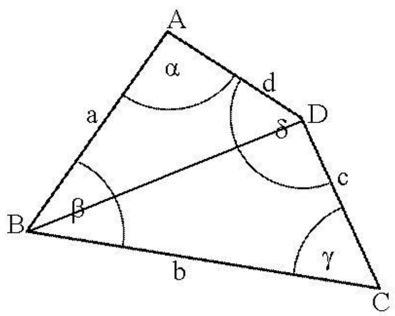
További fontos alakzatok a **négyszögek**: lehetnek **konvex** vagy **konkáv**, általános vagy sajátos.



Sajátos négyszögek:

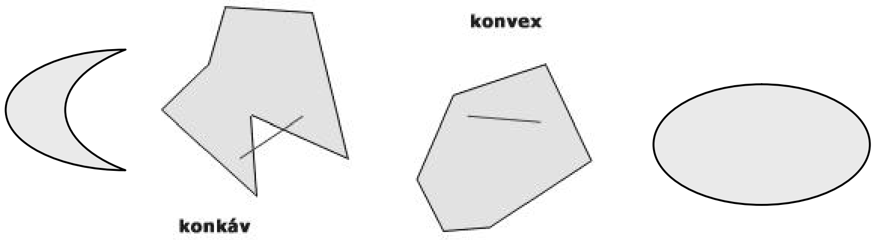
Trapézok:	Olyan négyszögek, amelyeknek van két párhuzamos oldala.	
Paralelogrammák:	Olyan négyszögek, amelyeknek szemközti oldalai párhuzamosak.	
Téglalapok:	Olyan négyszögek, amelyeknek egyenlők a szögei.	
Rombuszok:	Olyan négyszögek, amelyeknek egyenlők az oldalai.	
Négyzetek:	Olyan négyszögek, amelyeknek szögei és az oldalai is egyenlők.	
Deltoidok:	Olyan négyszögek, amelyeknek van csúcsai átmenő szimmetriatengelye.	

Tétel: a négyszög belső szögeinek az összege $\alpha + \beta + \delta + \gamma = 360°$



Bizonyítása: felbontjuk két háromszögre

Sokszögek:
Különös fontossággal bírnak a **konvex** és **konkáv** alakzatok:

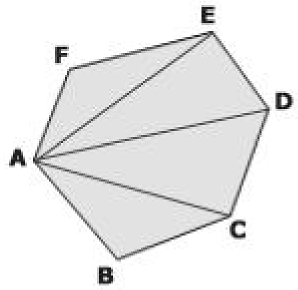


A speciális alakzatok egy osztályát a **sokszögek** képezik.

Tétel: *egy n oldalú konvex sokszög átlóinak a száma* $\frac{n(n-3)}{2}$

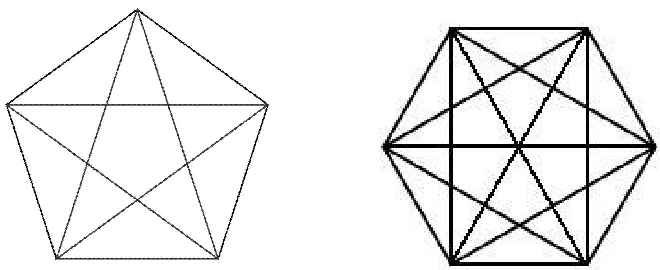
Az átlók száma: $1+2+3+\ldots+(n-1)-n=\frac{n(n-1)}{2}-n=\frac{n(n-3)}{2}$

Tétel: *egy "n" oldalú konvex sokszög belső szögeinek összege = (n - 2)180°*

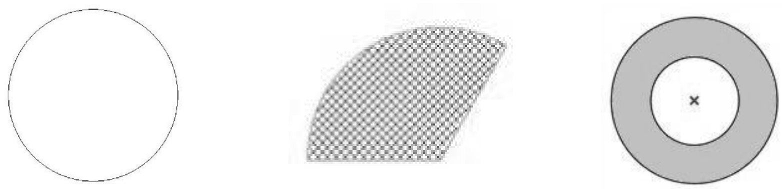


A bizonyítása: a konvex sokszöget egy csúcsból kiinduló átlókkal háromszögekre bontjuk. A háromszög belső szögeinek az összege 180°.

Osztályozásuk: konvex és konkáv, általános és szabályos.
A **szabályos sokszögek** lehetnek konvex vagy konkáv (csillag) sokszögek:



A **kör, körcikk, körgyűrű**:



Kör kerülete: $K=2\pi R$, területe $T=\pi R^2$, ahol $\pi=\frac{K}{D}\approx 3{,}14$, *D=2R*

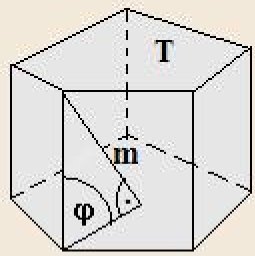
Mértani testek (idomok)

Nem szabályos síklapú testek (szögletes testek)

Hasáb

$$A = P + 2T$$

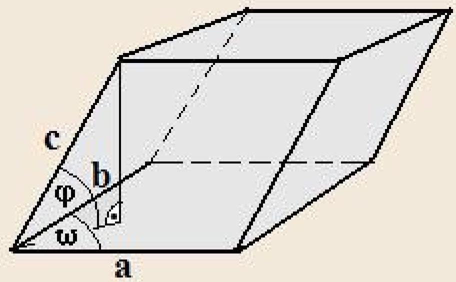
$$V = Tm \quad = T \sin\varphi$$



Paralelepipedon

$$A = 2\,[(ab) + (ac) + (bc)]$$

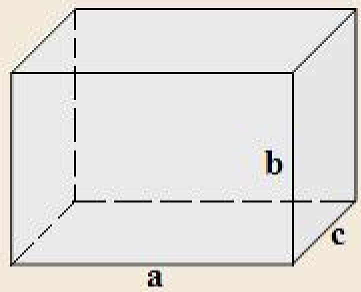
$$V = abc \sin\omega \sin\varphi$$



Tégla

$$A = 2\,[(ab) + (ac) + (bc)]$$

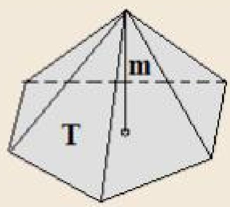
$$V = a\,b\,c$$



Gúla

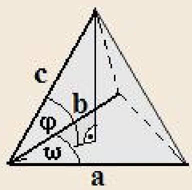
$$A = P + T$$

$$V = \frac{Tm}{3}$$



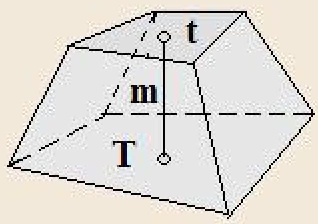
Tetraéder

$$V = \frac{abc \sin\omega \sin\varphi}{6}$$



Csonka gúla

$$V = \frac{m}{3}\left(T + \sqrt{Tt} + t\right)$$

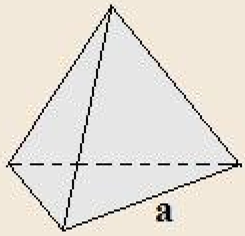


Szabályos síklapú testek
(szögletes testek)

Szabályos tetraéder

$A = \sqrt{3}a^2$ $\qquad R = \frac{\sqrt{6}}{4} a$

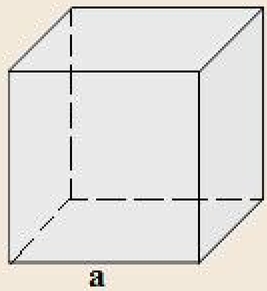
$V = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$ $\qquad r = \frac{1}{3} R$



Kocka (Hexaéder)

$A = 6a^2$ $\qquad R = \frac{\sqrt{3}}{2} a$

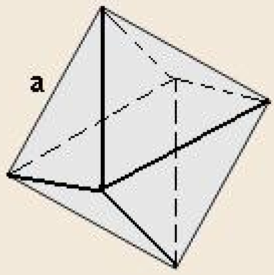
$V = a^3$ $\qquad r = \frac{1}{2} a$



Oktaéder

$A = 2\sqrt{3}a^2$ $\qquad R = \frac{\sqrt{2}}{2} a$

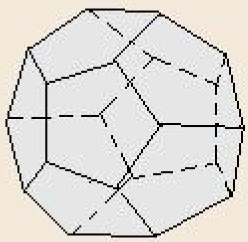
$V = \frac{\sqrt{2}}{3} a^3$ $\qquad r = \frac{\sqrt{6}}{6} a$



Dodekaéder

$A = 3\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}\,a^2$ $\qquad R = \frac{1+\sqrt{5}}{4} a$

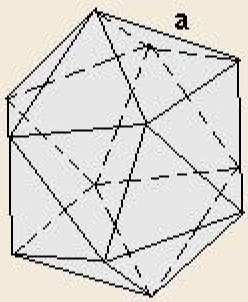
$V = \frac{15+7\sqrt{5}}{4} a^3$ $\qquad r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}\, a$



Ikozaéder

$A = 5\sqrt{3}a^2$ $\qquad R = \frac{1+\sqrt{5}}{4} a$

$V = \frac{5}{12}(3+\sqrt{5})\, a^3$ $\qquad r = \frac{\sqrt{42+18\sqrt{5}}}{12} a$

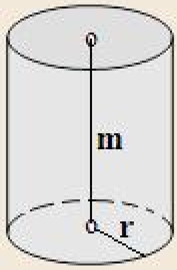


Görbe felületű testek

Forgáshenger

$$A = 2\pi r(m + r)$$

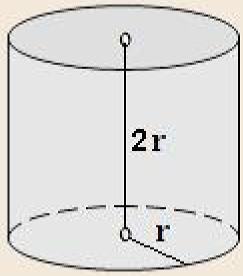
$$V = \pi r^2 m$$



Egyenlő oldalú henger

$$A = 6\pi r^2$$

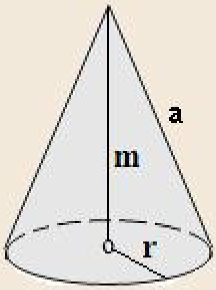
$$V = 2\pi r^3$$



Forgáskúp

$$A = \pi r(a + r)$$

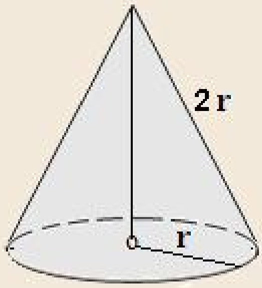
$$V = \frac{\pi r^2 m}{3}$$



Egyenlő oldalú kúp

$$A = 3\pi r^2$$

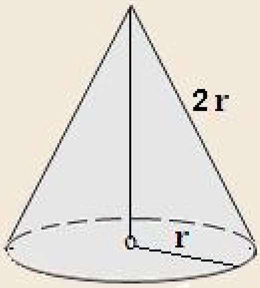
$$V = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} r^3$$



Egyenlő oldalú kúp

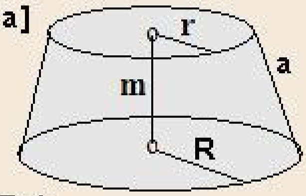
$$A = 3\pi r^2$$

$$V = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} r^3$$



Csonka kúp

$$A = \pi[R^2 + r^2 + (R + r)a]$$

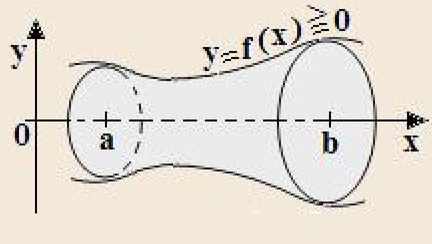


$$V = \frac{\pi}{3} m(R^2 + r^2 + Rr)$$

Forgástest, - felület

$$A_p = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

$$V = \pi \int_a^b [f(X)]^2\,dx$$

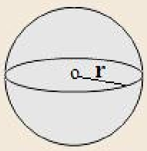


Gömb felületű testek

Gömb

$$A = 4\pi r^2 = \pi d^2$$

$$V = \frac{4\pi}{3} r^3 = \frac{\pi}{6} d^3$$

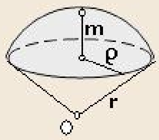


Gömbszelet (süveg)

$$A = 2\pi r m + \pi\varrho^2$$

$$V = \frac{\pi}{6} m(3\varrho^2 + m^2)$$

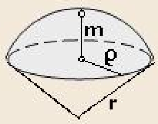
$$V = \frac{\pi}{3} m^2(3r - m)$$



Gömbcikk

$$A = 2\pi r m + \pi\varrho r$$

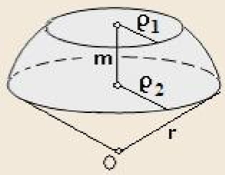
$$V = \frac{2\pi}{3} r^2 m$$



Gömbréteg (öv)

$$A = 2\pi r m + \pi\varrho_1^2 + \pi\varrho_2^2$$

$$V = \frac{\pi}{6} m(m^2 + 3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2)$$



Síkbeli transzformációk

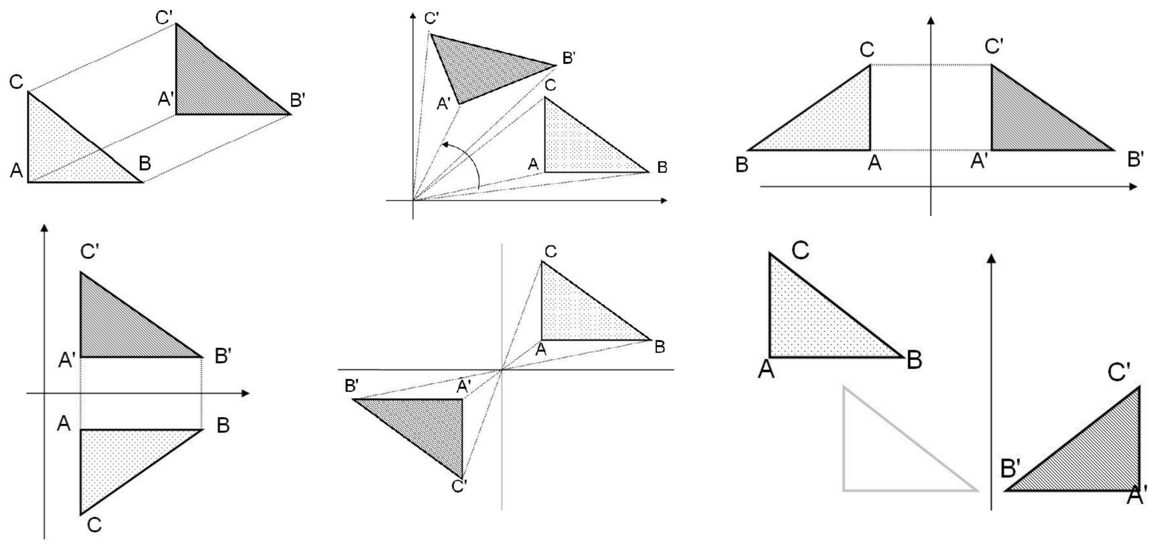
A geometriai transzformációk geometriai alakzatok átformálásáról szólnak. Mérete: megmaradhat, nyúlhat, kicsinyűlhet. Alakja változik vagy nem.

A geometriai transzformáció olyan $T:\Pi \to \Pi$ függvény, amelynek a Π értelmezési tartománya és az értékkészlete is ponthalmaz. Jelölje $M' = T(M)$ egy M pont transzformáltjának a képét.

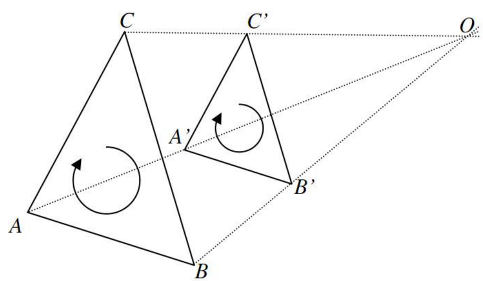
A transzformációknak típusai:

1) <u>Egybevágósági transzformációk</u>: nevezzük azokat a geometriai transzformációkat, melyben bármely két pont távolsága egyenlő a képeik távolságával, vagyis $d(A,B) = d(T(A),T(B))$ (izometria). Ezért az egybevágósági transzformációkat szokás **távolság tartó** transzformációknak is nevezni.

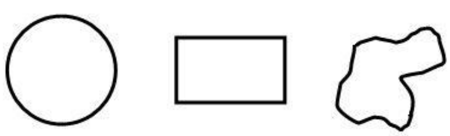
<u>Típusai</u>: **eltolás, forgatás, tengelyes tükrözés, középpontos tükrözés, csúsztatva tükrözés és identitás.**



2) <u>Hasonlósági transzformációk</u>: bármely **szögtartó** transzformáció. Előállítható egy **középpontos hasonlósági transzformáció** és egybevágósági transzformáció egymás utáni végrehajtásával. Fennáll: az $|A'B'| = k \cdot |AB|$, ahol k>0 hasonlósági arány. Ha $k \in (0,1)$ akkor kicsinyítés, ha k=1 akkor kongruencia, ha k> 1 akkor nyújtás.



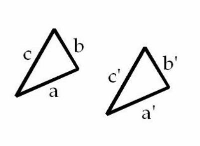
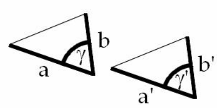
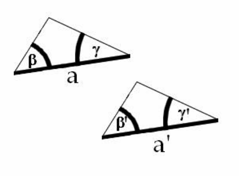
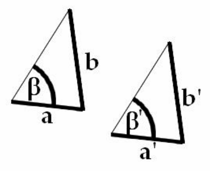
3) <u>Topológiai vagy folytonos transzfromáció</u>: az alakzatoknak egymásba való átvitelének az a módja, amelyben megengedett a nyújtás, csavarás, összenyomás, de nem megengedett a szakítás, lyukasztás, ragasztás, stb.



<u>Def.:</u> Két alakzat *egybevágó*, ha van olyan egybevágósági transzformáció, amely az egyik alakzatot a másikba viszi. (Jele: $A \cong B$)

<u>Háromszögek egybevágóságának alapesetei:</u>

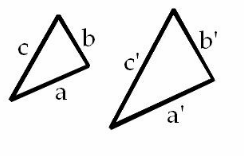
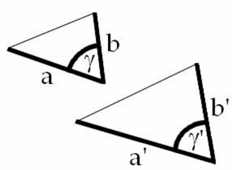
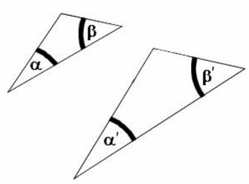
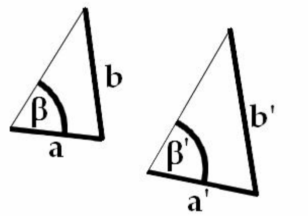
Két *háromszög* akkor és csak akkor *egybevágó,* ha a következő feltételek egyike teljesül:

(1) megfelelő oldalaik hossza páronként egyenlő;		$a = a'$ $b = b'$ $c = c'$
(2) két-két oldaluk hossza páronként egyenlő, és az ezek által bezárt szögek egyenlők;		$a = a'$ $b = b'$ $\gamma = \gamma'$
(3) egy-egy oldaluk hossza és a rajtuk fekvő két szögük páronként egyenlő;		$a = a'$ $\beta = \beta'$ $\gamma = \gamma'$
(4) két-két oldaluk hossza páronként egyenlő, és a két-két oldal közül a hosszabbal szemközti szögek egyenlők.		$a = a'$ $b = b'$ $\beta = \beta'$ $(a < b, \ \ a' < b')$

<u>Def.:</u> Két alakzat *hasonló*, ha van olyan hasonlósági transzformáció, amely az egyik alakzatot a másikba viszi. (Jele: $A \approx B$)

<u>Háromszögek hasonlóságának alapesetei:</u>

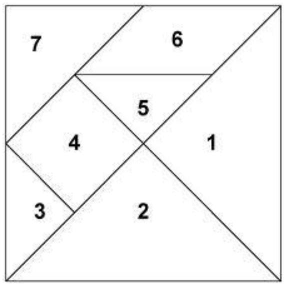
Két *háromszög* akkor és csak akkor *hasonló,* ha a következő feltételek egyike teljesül:

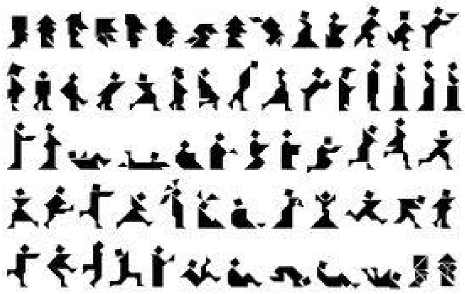
(1) megfelelő oldalaik hosszának *aránya* páronként egyenlő;		$a : a' = b : b' = c : c'$
(2) két-két oldalhosszuk *aránya* egyenlő, és az ezek által bezárt szögek egyenlők;		$a : a' = b : b'$ $\gamma = \gamma'$
(3) két-két szögük páronként egyenlő nagyságú;		$a = a'$ $\beta = \beta'$
(4) két-két oldalhosszuk *aránya* egyenlő, és e két-két oldal közül a hosszabbal szemközti szögek egyenlők.		$a : a' = b : b'$ $\beta = \beta'$ $(a < b, \ \ a' < b')$

Alakzatok átdarabolása

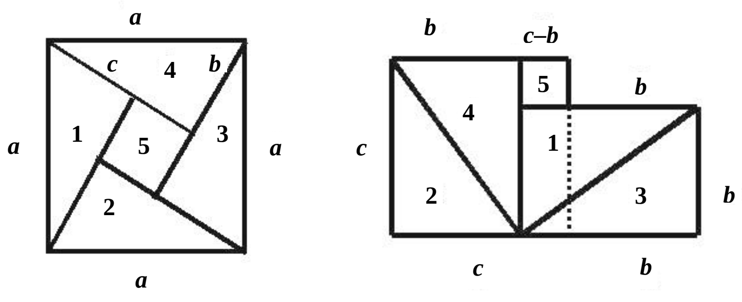
Az alakzatok átdarabolási művelete a következő részműveletekből: ***feldarabolás, átrendezés és összeillesztés***.

Példa erre az ősrégi kínai **Tangram** nevű kirakós játék:

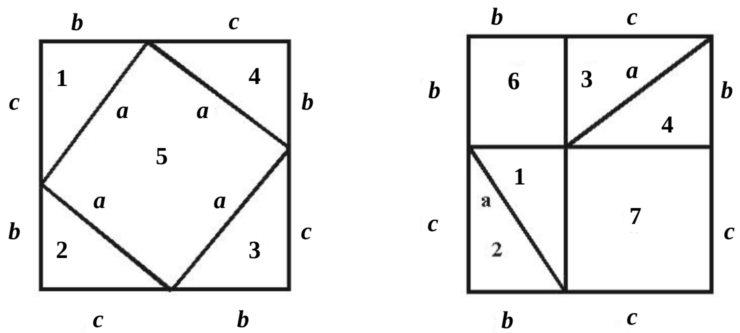




Pitagorász tétele is bizonyítható átdarabolással:



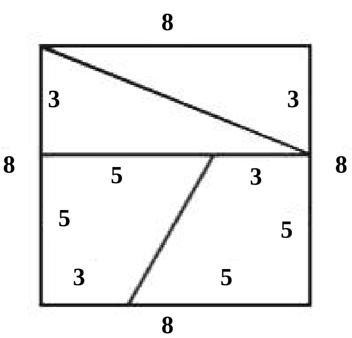
$$T_a = T_b + T_c$$

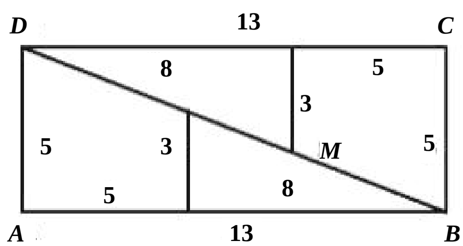


$$T_5 = T_6 + T_7$$

Az átdarabolhatóság feltétele: **Bolyai-Gerwin Tétele**: Az egyenlő területű sokszöglapok átdarabolhatók egymásba.

Egy átdarabolási paradoxon:





Leolvasható, hogy $T_1 := 8 \times 8 = 64$ és $T_2 := 5 \times 13 = 65$ mivel a BD átló mentén hézag marad, ugyanis igazolható, hogy ha ténylegesen $DM + MB = DB$ lenne, akkor $\sqrt{194} = \sqrt{29} + \sqrt{73}$ lenne, vagyis $194 = 102 + 2 \cdot \sqrt{29 \cdot 73} \Leftrightarrow \sqrt{2117} = 46 \Leftrightarrow 2117 = 2116$, ami lehetetlen.

(Bővebben a témakört lásd pl. a TK 191.- 194. és 228.- 244. oldalon)