

## Analitikus és szintetikus bizonyítás

Olyan esetben, amikor egy feladat bizonyítása (megoldása) során az előzményekből az állítás közvetlenül következik, direkt bizonyításról beszélünk.

Anélkül, hogy kitérnénk a logikai sémák bemutatására és formális alkalmazására, a következőkben aritmetikai feladatokon szemléltetve két fontos direkt bizonyítási módszert mutatunk be.

### A szintetikus (progresszív) módszer

A módszert röviden *szintézisnek* is nevezik. A szintézis olyan eljárás, amelynek alkalmazásakor az okról a következményekre térünk át.

*E bizonyítás lényege:* a feltételekből (premisszákból), adatokból és olyan ismert eredményekből, definíciókból, axiómákból indulunk ki, amelyekből logikailag megalapozott lépésekkel eljutunk a következményhez (az állításhoz vagy konklúzióhoz). Ha az így nyert  $K_1$  következmény azonos a kiindulási feladat állításával, a bizonyítás véget ért. Ha nem, akkor  $K_1$ -et tekintjük kiindulásnak, és az előbbi módon egy  $K_2$  következményhez jutunk. Az eljárást addig folytatjuk, amíg el nem jutunk egy olyan  $K_n$  következményhez, amely megegyezik a bizonyítandó állítással.

**Sematikusan:**  $A \Rightarrow K_1 \Rightarrow K_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow K_n = B$

A meghatározó feladatok megoldásakor is az előzőek szerint járunk el, de esetükben az adatokból levezetett következménylánccal addig haladunk, amíg meghatározzuk a feladat ismeretlenjeit.

A szintetikus módszer lényegét a következő feladaton szemléltetjük:

#### 1. feladat

Egy gazda ősszel egyik kertjéből 1278 kg burgonyát, egy másiktól pedig 356 kg-mal kevesebbet gyűjtött be. A burgonya egy részét kilónként 800 tallérért eladta. Így a bevétele 320 000 tallér volt. A megmaradt burgonyamennyiség egyharmadát egyenlően osztotta szét a három fia között. Hány kg burgonyát kaptak a fiúk külön-külön?

*Szintetikus megoldás.* A megoldás a következő lépésekben történik:

a) A második kertből begyűjtött burgonyamennyiség:

$$1278 - 356 = 922 \text{ (kg).}$$

b) A két kertből begyűjtött burgonya mennyisége:

$$1278 + 922 = 2200 \text{ (kg).}$$

c) Az eladott burgonya mennyisége:

$$320\,000 : 800 = 400 \text{ (kg).}$$

d) A gazdának maradt burgonya mennyisége:

$$2200 - 400 = 1800 \text{ (kg).}$$

e) A fiainak szétosztott burgonya mennyisége:

$$1800 : 3 = 600 \text{ (kg).}$$

f) Az egy fiúnak jutó burgonya mennyisége:

$$600 : 3 = 200 \text{ (kg).}$$

Ezzel megkaptuk a megoldás logikai menetét (*gondolatmenetét*) is. Műveletsor formájában:

$$\{[1278 + (1278 - 356) - (320\,000 : 800)] : 3\} : 3 = 200.$$

A szintetikus módszernek számos előnye és hátránya van. Előnye, hogy a bizonyítás (megoldás) logikai szempontból kifogástalan, a gondolatmenet tömör és szabatos. Hátrányai

közé tartozik, hogy a kiindulási feltétel megválasztása gyakran mesterkéltnek tűnik. Nagy a távolság a kiindulási lépés és a konklúzió, illetve a végeredmény között, így a közöttük lévő kapcsolatok észrevétele nehezebb.

Formál logikai szempontból a módszer egyszerű, világosan le van szögezve, mit és hogyan végezzünk el, de pszichológiailag az előbbieken vázoltak miatt problematikus a tanulók számára, hiszen a „Miből induljunk ki?” kérdésre gyakran nehéz olyan elfogadható választ adni, amelynek értelmét mindjárt látják a tanulók is.

Mondhatni, hogy a szintetikus módszer az önálló bizonyítási (megoldási) képesség fejlesztését csekély mértékben mozdítja elő, és nem kimondottan gondolkodást és kreativitást fejlesztő módszer.

### **Az analitikus (regresszív) módszer**

A módszert röviden *analízisnek* is nevezik. Az analízis olyan eljárás, mely segítségével a következményekről az okokra térünk át, megkeressük a következmények okát, eredetét.

Az *analízis lényege a következő*: a konklúziókhöz (állításunkhoz) vagy a megoldás érdekében keresünk olyan  $E_1$  elégséges feltételt, amelyből eljutunk a bizonyítandó állításhoz, illetve meghatározzuk a feladat ismeretlenjét. Ha igaz az  $E_1$  feltétel, akkor a feladatot megoldottuk. Ha nem, akkor az előbb leírt módon keresünk további  $E_2, E_3, \dots$  elégséges feltételt. Ha találunk egy olyan  $E_n$  feltételt, amely elégséges feltétele az  $E_{n-1}$  feltételnek, továbbá  $E_n$  közvetlenül következik a feltevésből, illetve az adatokból vagy a már ismert eredményekből, axiómákból, akkor a feladatot bizonyítottuk, illetve megoldottuk tekintjük.

$$\text{Sematikusan: } B \Leftarrow E_1 \Leftarrow E_2 \Leftarrow \dots \Leftarrow E_n \Leftarrow A$$

Az elmondottakat ugyancsak az 1. feladat segítségével szemléltetjük.

### **Analitikus vizsgálódás**

A feladat megválaszolása érdekében:

a) elegendő kiszámolni, hogy hány kg burgonyát kapott a három fiú összesen. Ennek megválaszolása érdekében;

b) elegendő kiszámolni, hogy hány kg burgonya maradt az eladás után. Ennek megválaszolására;

c<sub>1</sub>) elegendő kiszámolni, hogy hány kg burgonyát adtak el és

c<sub>2</sub>) elegendő kiszámolni, hogy hány kg burgonya volt összesen;

d) a c<sub>1</sub>) megválaszolása érdekében elegendő elvégezni a  $320\,000 : 800 = 400$  osztást;

e) a c<sub>2</sub>) megválaszolására elegendő kiszámolni, hogy hány kg burgonya termelt a második kertben;

f) ennek megválaszolása érdekében elegendő elvégezni az  $1278 - 356 = 922$  kivonást.

Ezzel analitikus vizsgálódásunk véget ért.

Megkaptuk a feladat „nyitját”, továbbá a megoldáshoz elégséges feltételek láncolatát is.

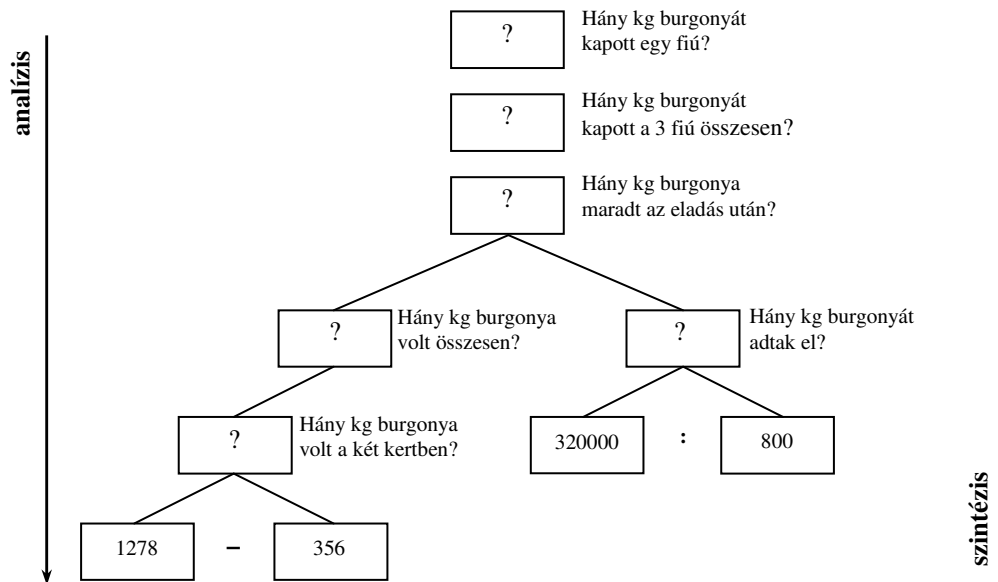
Ettől a pillanattól a feladatunk szintetikusán megoldható. Tehát az analízis művelete nem választható el a szintézis műveletétől, ezek kölcsönösen összefüggnek, feltételezik egymást. Éppen ezért a két módszert közös néven *analizáló-szintetizáló tevékenységként* emlegetik.

Formál logikai szempontból az analízis módszere nehezebb a tanulók számára, hiszen fordított irányú okoskodást igényel. Pszichológiai-didaktikai szempontból viszont egyszerűbb és természetesebb. A tanulók világosan látják, hogy mivel kell elkezdni a feladat bizonyítását (megoldását), és az egész bizonyítás (megoldás) során célirányos, tudatos minden lépés. Az eljárás szerkezete igen egyszerű: a „Mit kell bizonyítani (meghatározni)?” alapkérdésekre kell megfelelő választ adni. Ez a módszer nagymértékben fejleszti az önálló

gondolkodást, kimondottan  *kreatív jellegű.*

Összegezve eddigi észrevételeinket belátható, hogy az analízis és a szintézis egymás *fordított műveletei*, melyek szükségszerűen kiegészítik egymást. Éppen ezért feladatmegoldásaink során célszerű vizsgálódásainkat analízissel kezdeni és a bizonyítást szintézissel rögzíteni.

Analizáló-szintetizáló tevékenységünket az 1. feladat esetén így sematizálhatjuk:



### Feladatok:

**Oldjuk meg szintetikusán a következő feladatokat, minden alkalommal pontozva a fontosabb lépéseket, műveleteket!**

**2.** Egy farmon az állatok naponta 45028 liter vizet isznak meg. Egy tehénnek naponta 50 liter vízre, egy lónak 10 literrel több vízre van szüksége, egy juh pedig 8 liter vizet iszik. A farmon 250 tehén és 48 ló van. Hány juh van a farmon? (E: 3706 juh)

**3.** Két szántóföldön, egy 48 hektároson és egy 80 hektároson cukorrépát termesztettek. Az első szántóföldről 500 q/ha répát, a második szántóföld 4 ha-ról annyit gyűjtöttek, mint az első 3 ha-ról. Tudjuk, hogy 100 kg répából 16 kg cukor készül. Mennyivel több cukrot kapunk az egyik szántóföld répáiból, mind a másik szántóföld répáiból? (E: 96000 kg)

**4.** Egy tanuló házilag ragasztót készít. Ebből a célból összekever 100 g asztalosenyvet, 6-szor több lisztet és 4-szer több vizet mint lisztet. Mennyi ragasztót készített, ha eredetileg 30 g asztalosenyvet használt? Belefér-e az egész ragasztó egy 750 g-os borkánba? (E: 930 g)

**5.** Egy fajtisza York fajtájú disznó naponta 850 g-ot hízik. Menyt fog nyomni a disznó 1 év és 2 hónapos korában, ha a hízlalása július 1.-én kezdődött, amikor 6 hónapos volt, és a tömege 70 kg volt? (276 kg 550 g)

- 6.** Egy országban 2203200 diófa van, átlagtermésük fánként 650 kg dió. Ennek a tizedéből olajat préselnek. Tudjuk, hogy 100 kg dióból 15 kg dióbél jön ki, és 100 kg dióbélből 30 liter olajat préselnek ki. Milyen mennyiségű olajat kapnak összesen? (E: 2181168 liter)
- 7.** Egy országban 954 100 tonna szőlőt termeltek. ha ennek a mennyiségnek a feléből bort készítettek volna, akkor minden 100 kg szőlőből 70 l bort kaptak volna. A másik felét csemegének eladták volna fogyasztásra. Ha 1 liter bort 6 lejért adtak volna el és 1 kg szőlőt pedig 3 lejért, akkor mennyi lett volna az összbevétel? (E: 3434760000 lej)
- 8.** Egy családban a két szülőnek 3 gyermeke van. A felnőttek naponta 300 g kenyeret fogyasztanak, a gyerekek fejenként 350 grammot. Elhatározták, hogy 325 napra búzatartalékot gyűjtenek a kenyérből készítés céljából. Mennyi búzát kell tartalékoljanak, ha 100 kg búzából 130 kg kenyér lesz? (E: 500 kg)
- 9.** Egy farmon 30 ló és 40 tehén van, amelyek takarmányként lucernával táplálnak 6 hónapig, naponta 8 kg lucernával. Mekkora területet kell bevenni lucernával ahhoz, hogy biztosítsák az állatok szükségleteit tudva azt, hogy a hektáronkénti lucerna hozam 27 q/ha ? (E: 37 ha)
- 10.** Egy farmon 1400 tyúk, 1219 liba és 756 ruca van. Egy tyúk évente 36 kg gabonát használ el, egy ruca 12 kg-mal többet, és egy liba 12 kg-mal többet mint egy ruca. Mennyi gabonát fogyasztanak el a tyúkok, libák és rucák? (E:159828 kg)
- 11.** Egy család 5 ludat, 2 pulykát és 3 tyúkot vesz, amiért 452 lejt fizetett. Egy pulyka annyiba került, mind egy lúd és egy tyúk együtt, és egy tyúk 20 lejjel olcsóbb mint egy lúd. mennyit fizettek az egyes állatokért külön-külön? (E: 72, 46, 26 lej)
- 12.** Egy varrodában kétféle de egyenlő hosszúságú selymet kaptak, egy első és egy második osztályút. összesen 780 métert. Egy méter második osztályú selyem 30 lej, 5 méter első osztályú selyem annyiba kerül, mint 7m második osztályú. Összesen mennyit fizettek a selymekért? (E: 28080 lej)
- 13.** Egy téglalap alakú gyümölcsöst 210 m hosszú kerítés vesz körül. A kert szélessége kétszer kisebb a hosszúságánál. A gyümölcsöst két részre akarják felosztani úgy, hogy az egyik rész 450 m $\times$ m-el legyen nagyobb mint a másik. Mekkora a két terület felszíne? (E: 1450, 1000 m $\times$ m)
- 14.** Egy téglalap alakú gyümölcsöst 214 m hosszú kerítés vesz körül. A szélessége 7 méterrel nagyobb mint a hosszúság harmadrésze. A gyümölcsöst 3 részre akarják osztani úgy, hogy kettő egyforma és a harmadik 600 m $\times$ m-el nagyobb legyen mint az előző kettő. Mekkora az egyes földterületek? (E: 450, 450, 1500 m $\times$ m)
- 15.** Feljavítottak 3 országutat, egy 60 km, egy 84 km és egy 72 km hosszúságút. Számítsuk ki, hogy mennyibe került mindegyik út feljavítása, ha a harmadik feljavításáért 10800 lejjel kevesebbet fizettek mint a másodikért, és 1 km feljavítás mindhárom úton ugyanannyiba kerül. (E: 54000, 75600, 64800 lej)

- 16.** Egy 225 literes boros hordóból megtöltöttek 60 darab 75 dl-es üveget és 220 másfajta ürtartalmú üveget, továbbá 4 liter bor elfolyt a töltögetésekkor. Milyen ürtartalmúak a második üvegek? (E: 80 dl)
- 17.** Egy rövidárú üzletben egy napon eladtak 120 m bársonyt, méterét 50 lejért; 45 m szövetet és vásznat aminek 12 lej métere. Mindezért összesen 9966 lejt kaptak. Mennyi vásznat adtak el, ha tudjuk, hogy 1 m szövet ára 20 lejjel több mint 1 m bársony? (E: 68 m)
- 18.** Egy berbécstől 17 kg 300 g gyapjút kaptak, egy másik berbécstől 3 kg 200 g-mal többet. Egy rendruha előállításához szükséges szövetet 4 kg 200 g gyapjúból kapunk. Hány darab rendruhát lehet előállítani a szóban forgó gyapjúból? (E: 9)
- 19.** Egy öntözött krumpliföldről amely 8 ár, 288 q krumplit gyűjtöttek be. Egy 52 ár nagyságú, nem öntözött földről 156 q krumplit gyűjtöttek. Hányszor több krumplit gyűjtöttek be 1 ár öntözött területről mint 1 ár nem öntözöttről? (E: 12 szer)
- 20.** Egy répa termesztéséhez egy 30 cm×30 cm-es négyzet alakú földterület kell. Hány darab répát tudnak termesztani egy téglalap alakú parcellán, amelynek a hosszúsága 180m és a szélessége 10 m-el kisebb mint a hosszúságnak a fele? (E: megközelítőleg 160000 répa)
- 21.** Egy olyan falat akarnak téglából készíteni, amelynek a hosszúsága 12 m, szélessége 5 dm és magassága 24 m. Hány darab téglára lesz szükség, ha tudjuk, hogy 1 m×m×m-be 600 darab téгла megy be? Mennyi malterre lesz szükség ha tudjuk, hogy a malter a téгла térfogatának a hatod része? 86400 téгла, 24 m×m×m malter)
- 22.** Egy kirándulás alkalmából egy autóbussznak a benzintartályában csak 10 liter benzin volt, a z órája 12953 km-et mutatott. Útközben a vezető még 70 l benzint tett a tankba. A kirándulásból visszatérve az óra 13453 km-t mutatott, és a tartályban még 15 liter benzin volt. Mennyi volt a benzinfogyasztás 100 km-en? (E: 13)
- 23.** Egy vízzel telt edényből kiöntve a tartalmának a negyedét, a tömege 2050 g, de ha a víz felét öntenénk ki, akkor a tömege 1450 g lenne. Mennyi az eredeti víz tömege és az edény tömege külön-külön? (E: 2400, 250 g)
- 24.** Egy háztető két darab 8m×4m-es téglalapból áll, amit cseréppel akarnak befödni. Egy négyzetméter befödésére 15 cserép szükséges. Egy cserép tömege 2 kg. A cserepeket a gyártól a házig egy szekér szállítja, amelyik üresen 310 kg, megrakva pedig 790 kg. Hány utat kell megtegyen a szekér? (E: 4 utat)
- 25.** Két tartályban tej van, az elsőben kétszer több mint a másodikban. Miután az elsőből kivettek 30 litert a másodikból pedig 20 litert, akkor az első tartályban 3-szor több tej maradt mint a másodikban. Mennyi tej volt a tartályokban a kezdetben? (E: 60l, 30 l)
- 26.** Egy cukorgyárhoz három Kft adta be a cukorrépa termését. Az első 860 q-t, a második kétszer többet, a harmadik pedig felét annak, amennyit az első két Kft beadott. Mennyi cukorrépa gyűlt be összesen? (E: 387 t)

27. Egy rövidárú üzletbe ugyanannyi pénzt vételeztek be az eladott vászonért mint az eladott selyemért. Tudjuk, hogy 1 m selyem 18 lejbe került, és 1m vászon 4 lejjel olcsóbb. Összesen 40 m-el kevesebb selymet adtak el, mint vásznat. Mennyi volt az összbevétel? (E:  $18-4=14$ ,  $14 \times 40=560$ ,  $18-14=4$ ,  $560:4=140$ ,  $140+40=180$ )

28. Egy téglalap alakú gyümölcsösbe 4950 almafa csemétét ültettek, és 90 csemétét hektáronként. Ha a gyümölcsös hossza 1100 m, akkor mennyi a szélessége? (E: 500 m)

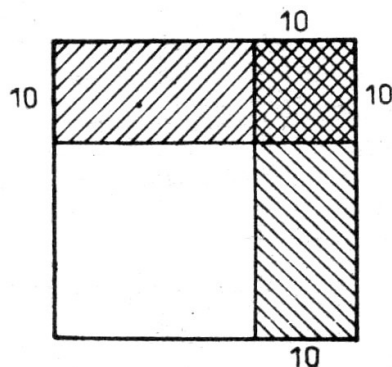
29. Egy borshordó amelyik csöpög, percenként 5 cseppet veszít. Tudjuk, hogy 20 csepp bor éppen 1 cl bor. A hordó hétfő reggel 8 órától csütörtök reggel 8 óráig csöpögött. A bor litere 8 lej. Mennyi a borgazda vesztesége a csöpögésből? (86 lej 40 bani)

30. Egy üdülőtelepen 30felnőttnek 20 napi elszállásolásáért ugyanannyit költöttek, mint 40 gyermeknek 18 napi elszállásolásáért. Mennyibe fog kerülni 45 felnőtt 21 napos elszállásolása, ha 15 gyerek 12 napos elszállásolásáért 2700 lejt fizettek? (E: 17010 lej)

31. Egy szőlőtermelő szövetkezet egy négyzet alakú földdarabot telepített be szőlővel, négyzetméterenként 2 tövet ültetve. A következő évben 10-10 méterrel meghosszabbítják a négyzet oldalait (tehát továbbra is négyzet maradt), és ebbe még 1000 db szőlővesszőt ültettek. mekkora területet ültettek be az első évben, és mennyi lett a két év alatt összesen beültetve? Hány tövet ültettek el az első évben, hány szőlőtő lett a másodikban elültetve? Mekkora az első évben a négyzet oldala, és mekkora lett a második évben?

**Megoldás:**

1000 db tőhöz ( $1000 : 2 =$ ) 500 m<sup>2</sup> terület kell, mivel ez egy négyzet 10 m-es toldásából keletkezett, mely 2 db 10 m széles téglalapot és a sarkon egy ( $10 \cdot 10 =$ ) 100 m<sup>2</sup>-es négyzetet ad kétszeresen eredményül. Az eredeti négyzet oldala  $\left( \frac{500 - 100}{2} : 10 = \right)$  20 m.



62. ábra

Tehát: az első évben ( $20 \cdot 20 =$ ) 400 m<sup>2</sup> területet, a két év alatt ( $400 + 500 =$ ) 900 m<sup>2</sup> területet ültettek be, 800 tővel, illetőleg összesen 1800 tővel. A négyzet oldalai pedig 20 m és 30 m.

Egyenlettel ( $x$  az első év négyzetének oldala):

$$\begin{aligned} (x + 10)^2 &= x^2 + 500 \\ x^2 + 20x + 100 &= x^2 + 500 \\ 20x &= 400 \\ x &= 20 \text{ (méter)}. \end{aligned}$$

**32.** Három tanuló egy céllövő versenyen vett részt. Mindegyik 36-szor lőtt a céltáblára. Minden találatért 5 pont jár, minden rossz lövésért 4 pont levonás jár. Az eredmények a következők voltak:

András: 108 pontot kapott

Béla: 0 pontot kapott

Cecil: 9 pontot veszített.

Hány találata volt a tanulóknak külön-külön? Írd fel a megoldást műveletsorban is!

Megoldás:

András:  $36 - \{[(36 \times 5) - 108] : (5 + 4)\} = 28$  találat

Béla:  $36 - \{[(36 \times 5) - 0] : (5 + 4)\} = 16$  találat

Cecil:  $36 - \{[(36 \times 5) - (-9)] : (5 + 4)\} = 15$  találat.