Ismétléses kombináció

Hányféleképpen lehet *n* különböző elemből kiválasztani *k* elemet úgy, hogy a sorrend nem számít, és minden elemet többször is választhatunk? (Ezúttal k > n is lehetséges!)

0. Egy 10 fős csoportban hányféleképpen lehet 4 egyforma könyvet kiosztani, ha mindenki több könyvet is kaphat?

Az ismétléses kombináció képlete a következő gondolatmenet alapján könnyen megalkothatjuk az általános képletét.
Mindenki nevét írjuk rá egy-egy cédulára, és a cédulákat tegyük bele egy kalapba. Ha valakinek kihúztuk a nevét, megkapja a könyvét, és a céduláját visszatesszük a kalapba. Az utolsó húzás után már nem kell visszatenni a cédulát. Tehát négy húzás után 3-szor kell visszatenni a cédulát. Így ugyanannyi eset van, mintha 13 tanulóból kéne kiválasztani négyet:

$$C_{13}^{4} = 715$$

Sejtés: n = 14 k = 4 13 = n + k –1

$$C_{n}^{k,i} = C_{n+k-1}^{k}$$

n elemből kell kiválasztani k elemet úgy, hogy a sorrend nem számít, és minden elemet többször is választhatunk.
Az elemek nevét írjuk rá egy cédulára. A cédulákat tegyük bele egy kalapba. A kihúzott elem céduláját k – 1-szer tehetjük vissza, ha k–szor húztunk a kalapból. Ugyanannyi eset van a többszöri választásnál, ahányszor ki lehet választani n + k – 1 elemből k elemet, úgy hogy minden elemet csak egyszer választhatunk.

Általános képlet

***n* különböző elemből $C_{n}^{k;i} = C_{n+k-1}^{k}$ - féleképpen lehet kiválasztani *k* elemet úgy, hogy a sorrend nem számít, és minden elemet többször is választhatunk.**

1. Egy 30 fős létszámú osztályban 9 azonos tollat sorsolnak ki. Hányféleképpen történhet a tollak szétosztása, ha egy tanuló a.) csak egy tollat kaphat; b.) több tollat is kaphat?

a.) Mindegy, hogy milyen sorrendben választjuk ki a gyerekeket, mert a tollak egyformák.

A lehetőségek száma: $C_{30}^{9} = 14\,307\,150$

b.)

$$C_{30}^{9,i} = C_{30+9-1}^{9} = 163\,011\,640$$

2. 5 doboz mindegyikében 12 darab, 1- től 12- ig számozott gépalkatrész van. Hányféleképpen vehetünk ki minden dobozból egy-egy alkatrészt, ha a kivett alkatrészek sorrendjére nem vagyunk tekintettel?

$$C_{12}^{5,i} = C_{12+5-1}^{5} = C_{16}^{5} = \frac{16!}{5!11!}$$

3. Egy urnában 20 cédula van 1-től 20-ig megszámozva. Kihúzunk 5 cédulát úgy, hogy minden húzás után a cédulát visszatesszük. Hány esetben lesz a kihúzott legkisebb szám nagyobb 6-nál?

$$C_{20-4}^{5,i} = C_{14+5-1}^{5} = C_{18}^{5}$$

4. Egy osztályban a tanár elhatározta, hogy az első sorban űlő 4 tanulót fogja a táblához szólítani. A tanár 2 alkalommal szólít a táblához. Számítsuk ki, hányféle változatban mehettek a táblához, ha ugyanaz a személy kétszer is kimehetett, és a sorrendet nem vesszük figyelembe!

$$C_{4}^{2,i} = C_{4+2-1}^{2} = C_{5}^{2} = 10$$

5. Hányféleképpen osztható fel 10 000 Ft ösztöndíj 7 tanuló között akkor, ha az ösztöndíjaknak 100-Ft-tal oszthatóknak kell lenniük?

$$C_{7}^{100,i} = C_{100+7-1}^{100} = C_{106}^{100} = C_{106}^{6} = 1705900000$$

6. Egy országban 6 bank bocsájt ki 5000 Ft névértékű letéti jegyet. Hányféleképpen költhetünk el 25 000 Ft-ot letéti jegyek vásárlására?

$$C_{6}^{5,i} = C_{6+5-1}^{5} = C_{10}^{5} = 252$$

7. Hét azonos alkatrész mindegyikét négy különböző szín valamelyikére befestjük. Hányféle festés jöhet létre?

$$C_{4}^{7,i} = C_{7+4-1}^{7} = C_{10}^{7} = C_{10}^{3} = 120$$

8. Egy 18 fős társaság vezetőt választ 4 jelölt közül. Mindenki egy-egy jelöltre szavazhat. Hányféle szavazási eredmény születhet?

$$C_{4}^{18,i} = C_{18+4-1}^{18} = C_{21}^{18} = C_{21}^{3} = 1330$$

9. Egy 6 tagú kollektívában 6000 Ft szociális segély osztható fel. Hányféleképpen lehetséges ez akkor, ha:
a) a segélyeknek 100-zal oszthatónak kell lenniük
b) a segélyek 100-zal oszthatók, és aki kap, az 500 Ft-nál kevesebbet nem kaphat
c) a segélyek 100-zal oszthatók, és mindenki kap legalább 500 Ft segélyt.

a) $C_{6}^{60,i} = C_{6+60-1}^{60} = C_{65}^{60} = C_{65}^{5} = 8259888$ **(a 6000:100= 60 db 100 Ft-oshoz kiválasztunk 1-1 nevet).**
b) $C_{1}^{55,i} + C_{2}^{50,i} + C_{3}^{45,i} + C_{4}^{40,i} + C_{5}^{35,i} + C_{6}^{30,i} = 420357$ **(a segély kiosztható 1,2,3,4,5,6 személynek, mindegyik megkap 500 Ft-ot, a maradék 55, 50, 45, 40, 35, 30 db 100 Ft-oshoz 1-1 nevet rendelünk.**

c) $C_6^{30,i} = C_{6+30-1}^{30} = C_{35}^{30} = C_{35}^{5} = 324632$

10. Egy hallgatói közösségben 8 első-, 7 másod- és 7 harmadéves hallgató van. Hányféleképpen osztható ki köztük 5 jutalom, ha a jutalmazottak közt legfeljebb 2 elsőéves hallgató lehet, továbbá
a) a jutalmak <u>egyenlők</u> és egy személy <u>legfeljebb egyet</u> kaphat.
b) a jutalmak <u>egyenlők</u> és egy személy <u>többet is</u> kaphat.
c) a jutalmak <u>különbözők</u> és egy személy <u>legfeljebb egyet</u> kaphat.
d) a jutalmak <u>különbözők</u> és egy személy <u>többet is</u> kaphat.

a) $C_8^0 \cdot C_{14}^5 + C_8^1 \cdot C_{14}^4 + C_8^2 \cdot C_{14}^3 = 20202$

b) $C_8^0 \cdot C_{14}^{5,i} + C_8^1 \cdot C_{14}^{4,i} + C_8^2 \cdot C_{14}^{3,i} = 55896$ (kiválasztunk 0, 1, 2 elsőévest, kapnak 1-1 jutalmat, s a többihez egy-egy nevet rendelünk 14, 15, 16 főből)

c) $C_8^0 \cdot V_{14}^5 + C_8^1 \cdot V_{14}^4 \cdot V_5^1 + C_8^2 \cdot V_{14}^3 \cdot V_5^2 = 2424240$ (kiválasztunk 0, 1, 2 elsőévest, kapnak 1-1 jutalmat, a maradék a 14 hallgató közt osztandó ki)

d) $C_8^0 \cdot V_{14}^{5,i} + C_8^1 \cdot V_{15}^{4,i} \cdot V_5^1 + C_8^2 \cdot V_{16}^{3,i} \cdot V_5^2 = 2424240$ (mint a c) esetben, de a maradékból a kiválasztottak is kapnak).

11. Egy szervező bizottság tagjainak 3 darab 100 Ft-ost vásárlási utalványt osztanak ki. Ha egy személy több utalványt is kaphat, 64-gyel több kiosztási lehetőség adódik, mintha személyenként legfeljebb egy darab juttatható. Hány fős a bizottság?

$C_n^{3,i} - C_n^3 = 64$ ahonnan n= 8