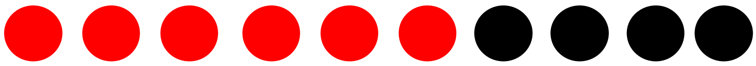
Ismétléses permutáció

1. Hányféleképpen lehet sorba rendezni 6 piros és 4 fekete golyót?



Ha mind a 10 golyó különböző színű lenne, akkor 10! - féle módon állíthatnánk sorba őket. Az azonos színűek egymás közötti sorrendje mindegy, ezért az esetek száma annyiad részre csökken, ahányféleképpen az egyszínű golyókat a saját helyükön felcserélhetjük.

$$P_{10}^{6,4} = \frac{10!}{6! \cdot 4!}$$

2. Hányféleképpen lehet sorba rakni egy fehér, két zöld és három kék golyót?

Ha mind a 6 golyó különböző színű lenne, akkor 6·5·4·3·2·1=720 lehetőségünk volna. A két zöld golyót 2·1 = 2, a három kéket pedig 3·2·1=6-féleképpen lehet sorba rakni. Mivel az azonos színűeket egyformának tekintjük, az egymás közötti sorrendjeiket nem különböztetjük meg, a 720-t el kell osztani annyival amennyiszer az egyszínű golyókat a saját helyükön sorba rendezhetjük, azaz összesen 720:(2·6) = 60 lehetőség van.

Röviden: $P_6^{3,2,1} = \dfrac{6!}{3! \cdot 2!}$

3. Hányféleképpen lehet sorba rendezni az ALMACSUTKA szó betűit?

10 betűt 10! féleképpen lehetne sorba rendezni, ha nem lennének köztük egyformák. A betűből 3 db van.

Ha a 3 A betűt felcseréljük a saját helyén, akkor ugyanazt a betűtízest kapjuk: $A_1LM\ A_2CSUTK\ A_3 = A_3LM\ A_2CSUTK\ A_1$

Ezt bármelyik betűtízesnél eljátszhatjuk ugyanazt a „szót” kapjuk. Emiatt az esetek száma annyiad részére csökken, ahányféleképpen fel lehet cserélni a saját helyükön az egyforma betűket.

$$P_{10}^{3} = \frac{10!}{3!}$$

4. Hányféleképpen lehet sorba rendezni a MATEMATIKA szó betűit?

10 betűt 10! féleképpen lehetne sorba rendezni, ha nem lennének köztük egyformák. A betűből 3 db van, M és T betűből 2 db van.

$M_1\ A_1T_1\ E\ M_2\ A_2T_2I\ K\ A_3$

Ha a 3 A betűt felcseréljük a saját helyén, akkor ugyanazt a betűtízest kapjuk: $M_1\ A_2T_1\ E\ M_2\ A_1T_2I\ K\ A_3$

Bármelyik betűtízesben a három A betűt 3!–szor cserélhetjük fel a saját helyükön úgy, hogy ugyanazt a betűtízest kapjuk.

Ezért az esetek számát (10!) el kell osztani, ha a 3!-sal.

Bármelyik betűtízesben a 2 T betűt 2! –szor cserélhetjük fel a saját helyükön, úgy hogy ugyanazt a betűtízest kapjuk. Emiatt
Ezért az esetek számát (10!) el kell osztani, ha a 2!-sal.

Bármelyik betűtízesben a 2 M betűt 2! –szor cserélhetjük fel a saját helyükön, úgy hogy ugyanazt a betűtízest kapjuk. Emiatt
Ezért az esetek számát (10!) el kell osztani, ha a 2!-sal.

Tehát az összes esetek számát megkapjuk, ha a 10!-t elosztjuk 3!·2!·2!-sal

$$P_{10}^{3,2,2} = \frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 2!}$$

5. Hányféleképpen lehet sorba rendezni a taníthatatlan szó betűit?

taníthatatlan ⇒ 13 betű. 4db t, 4 db a és 2db n betű van köztük.

A lehetőségek száma: $P_{13}^{4,4,2,1,1,1} = P_{13}^{4,4,2} = \frac{13!}{4!\cdot 4!\cdot 2!}$

6. Hány nyolcjegyű páratlan szám készíthető 4 darab 0-ból és 4 darab 1-esből?

Hely	1. csak az 1	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8. csak 1
A lehetőségek száma	1							1

Az első helyen nem lehet 0 tehát csak egyessel kezdődhet a szám. Az utolsó helyen csak 1 lehet, mert páratlan számot akarunk.
Annyi számot készíthetünk, amennyiféleképpen a maradék 6 számjegyet sorba rendezhetjük.
$0, 0, 0, 0, 1, 1, \cancel{1}, \cancel{1}$

$$P_6^{4,2} = \frac{6!}{4!\cdot 2!}$$

7. Határozzuk meg az 1, 2, 2, 3, 3, 3 elemek permutációinak számát. (Hányféleképpen lehet sorba rendezni ezeket, a számokat?) Ezek között hány olyan van, amelyben az első helyen a 2 számjegy áll?

$P_6^{2,3} = \frac{6!}{2!\cdot 3!}$ **– féleképpen lehet sorba rendezni a számokat.**
Ha az első helyen kettes van, akkor annyi ilyen szám létezik, ahányszor sorba rendezhetjük a 2 mögött a maradék öt számjegyet. $1, 2, \cancel{2}, 3, 3, 3$

Az adott számokból $\frac{5!}{3!} = 20$ **olyan számot készíthetünk, amelyikben az első helyen 2 áll.**

8. Egy szabályos dobókockát 14-szer feldobunk.
a) Hány olyan dobássorozat létezik, amelyben 3-szor 6-ost, 2-szer 5-öst, 4-szer 2-est, a többi esetben 1-est dobunk?
b) Hány olyan eset van, amikor a két 5-ös az első és az utolsó dobás?

a) $P_{14}^{3,2,4,5} = \frac{14!}{3!2!4!5!} = 2522520$ b) $P_{12}^{3,4,5} = \frac{12!}{3!4!5!} = 27720$

9. Egy pénzérmét 12-szer feldobunk, s 10-szer fej, 2-szer írás adódik
a) Hányféleképpen lehetséges ez?
b) Hányféleképpen valósulhat ez meg akkor, ha az első és az utolsó dobás fej?
c) Hány olyan dobássorozat létezik, ahol a két középső dobás fej?
d) Hány olyan eset lehetséges, mikor a két írás egymás után áll?

a) $P_{12}^{10,2} = \frac{12!}{10!2!} = 66$ b) $P_{10}^{8,2} = \frac{10!}{8!2!} = 45$ c) $P_{10}^{8,2} = \frac{10!}{8!2!} = 45$ d) $P_{11}^{10} = \frac{11!}{10!} = 11$

10. **Hány nyolcjegyű szám képezhető a 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1 számjegyekből?**

$P_8^{4,4} - P_7^{3,4} = 35$

11. **A 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2 számjegyekből hány**
a) tetszőleges b) valódi c) valódi páratlan d) valódi páros
hétjegyű szám képezhető?

a) $P_7^{2,3,2} = 210$ b) $P_7^{2,3,2} - P_6^{3,2} = 150$ c) $P_6^{2,2,2} - P_5^{2,2} = 60$

d) $(P_6^{2,3} - P_5^{3}) + (P_6^{2,3} - P_5^{2,3}) = 90$

12. **6 piros, 3 fehér, 2 kék golyót hányféleképpen lehet egymás mellé helyezni, hogy a hat piros golyó ne kerüljön egymás mellé?**

$P_{11}^{6,3,2} - P_6^{3,2,1} = 4560$

13. **Hányfélképpen olvasható ki a táblázatból a KOLLOKVIUM szó, ha a táblázat bal felső betűjétől indulunk ki, és az egyes lépéseket csak jobbra vagy lefelé tehetjük?**

1. megoldás: $P_9^{4,5} = \frac{9!}{4!5!} = 126$

„lllljjjjj”

2. megoldás, rekurzív számlálással:

K 1	O 2	L 3	L 4	O 5	K
1 O	L	L	L	K	V
2 L	L	O	K	V	I
3 L	O	K	V	I	U
4 O	K	V	I	U	M

K	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6
1	3	6	10	15	21
1	4	10	20	35	56
1	5	15	35	70	126

14. **Hányfélképpen olvasható ki a táblázatból a KOLLOKVIUM szó, ha a táblázat bal felső betűjétől indulunk ki, és az egyes lépéseket csak jobbra vagy lefelé tehetjük, de minden lépésben irányt változtatunk?**

Az egyetlen kiolvasási lehetőség a K-tól indulva: jl-jl-jl-jl-j

15. **Hányféleképpen juthatunk el a sakktábla bal felső sarkából a jobb alsó sarkába, ha csak jobbra, illetve felülről lefele haladhatunk?**

Amíg a bal felső sarokból eljutunk a jobb alsó sarokba, addig 7 alkalommal kell jobbra lépnünk egy mezőt és hét alkalommal lefelé egyet. A feladatnak megfelelő utak egyértelműen jellemezhetők azzal, hogy hányadik lépésben lépünk lefelé illetve mikor jobbra. Jelöljük a jobbra-lépéseket „j” jellel és a lefele lépéseket „l” jellel. Ezzel a feladatnak megfelelő utakhoz bijektív módon hozzárendelhetünk egy-egy 7 „j”-ból és 7 „l”-ből álló jelsorozatot.

Ezek száma pedig $P_{14}^{7,7} = \frac{14!}{7!7!} = 3432$