FELADATOK A „RELÁCIÓK, GRÁFOK” TÉMAKÖRHÖZ

1. rész

A feladatsorban használt jelölések:

$$\mathbb{R}^- = \{r \in \mathbb{R} \mid r < 0\}, \quad \mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\},$$

$$[a;b] = \{r \in \mathbb{R} \mid a \leq r \leq b\},$$

ahol $a, b \in \mathbb{R}$ és $a \leq b$.

4.1. Feladat. Adja meg az $\alpha = \{(x,y) \mid x+2 = 3y^2\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ megfeleltetés inverzét. Tartalmazza-e az $\alpha^2 (= \alpha\alpha)$ megfeleltetés a $(3,7)$, $(1,-1)$ és $(-5,3)$ számpárokat?

Megoldás. $\alpha^{-1} = \{(x,y) \mid y+2 = 3x^2\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Az $(1,-1) \in \alpha^2$, mert $(1,1), (1,-1) \in \alpha$. A többi számpárt nem tartalmazza.

4.2. Feladat. Határozza meg az $\alpha\beta$ megfeleltetés-szorzatot, valamint a β megfeleltetés inverzét, ha α és β az alábbi megfeleltetések:
(a) $\alpha = \{(a,b) \mid a \leq b\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{R}, \quad \beta = \{(a,b) \mid a = b^2\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R};$
(b) $\alpha = \{(a,b) \mid a^2 = b\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{Z}, \quad \beta = \{(a,b) \mid a \leq b^2\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{R};$
(c) $\alpha = \{(a,b) \mid \sin a = b\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{N}, \quad \beta = \{(a,b) \mid b \geq |a|\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{R};$
(d) $\alpha = \{(x,y) \mid y^2 < x\} \subseteq \mathbb{R} \times [-2;2], \quad \beta = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 4\} \subseteq [-2;2] \times [0;2];$
(e) $\alpha = \{(x,y) \mid y = \cos x\} \subseteq [0, \frac{1}{2}\pi] \times \mathbb{R}^+, \quad \beta = \{(x,y) \mid x = y+1 \text{ vagy } y = 1\} \subseteq \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+.$

Megoldás.
(a) $\alpha\beta = \{(a,b) \mid \ a \leq b^2\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{R}, \quad \beta^{-1} = \{(a,b) \mid b = a^2\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R};$
(b) $\alpha\beta = \{(a,b) \mid a^2 \leq b^2,\ a^2 \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \beta^{-1} = \{(a,b) \mid b \leq a^2\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{Z};$
(c) $\alpha\beta = \{(a,b) \mid a = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z};\ b \geq 1\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \beta^{-1} = \{(a,b) \mid a \geq |b|\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{N};$
(d) $\alpha\beta = \{(x,y) \mid 4 - y^2 < x\} \subseteq \mathbb{R} \times [0;2], \quad \beta^{-1} = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 4\} \subseteq [0;2] \times [-2;2];$
(e) $\alpha\beta = \{(x,y) \mid y = 1\} \subseteq [0; \frac{1}{2}\pi] \times \mathbb{R}^+, \quad \beta^{-1} = \{(x,y) \mid y = x+1 \text{ vagy } x = 1\} \subseteq \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+.$

4.3. Feladat. Határozza meg az alábbi α és β relációk $\alpha\beta$ és $\beta\alpha$ szorzatát. (E: az emberek halmaza, H: egy adott sík egyeneseinek halmaza)
(a) $\alpha = \{(x,y) \mid x \text{ az } y \text{ gyermeke}\}, \quad \beta = \{(x,y) \mid y \text{ az } x \text{ apja}\}$ az E halmazon;
(b) $\alpha = \beta = \{(e,f) \mid e \text{ merőleges } f\text{-re}\}$ a H halmazon;
(c) $\alpha = \{(x,y) \mid x = 2y\}, \quad \beta = \{(x,y) \mid x = 2^y\}$ az $\mathbb{R}$ halmazon;
(d) $\alpha = \{(x,y) \mid 10x = y\}, \quad \beta = \{(x,y) \mid x = \lg y\}$ az $\mathbb{R}$ halmazon;
(e) $\alpha = \{(x,y) \mid y = x^2\}, \quad \beta = \{(x,y) \mid y - 1 = 3x\}$ az $\mathbb{R}$ halmazon;
(f) $\alpha = \{(x,y) \mid y = |x|\}, \quad \beta = \{(x,y) \mid -8x = y+1\}$ az $\mathbb{R}$ halmazon;

Megoldás.
(a) $\alpha\beta = \{(x,y) \mid y \text{ az } x \text{ nagyapja}\}, \quad \beta\alpha = \{(x,y) \mid y \text{ az } x \text{ apai nagyszülője}\};$
(b) $\alpha\beta = \beta\alpha = \{(e,f) \mid e = f \text{ vagy } e \text{ párhuzamos } f\text{-fel}\};$
(c) $\alpha\beta = \{(x,y) \mid \frac{x}{2} = 2^y\}, \quad \beta\alpha = \{(x,y) \mid x = 2^{2y}\};$
(d) $\alpha\beta = \{(x,y) \mid 10x = \lg y\}, \quad \beta\alpha = \{(x,y) \mid x = \lg \frac{y}{10}\};$
(e) $\alpha\beta = \{(x,y) \mid y - 1 = 3x^2\}, \quad \beta\alpha = \{(x,y) \mid y = (3x+1)^2\};$
(f) $\alpha\beta = \{(x,y) \mid -8|x| = y+1\}, \quad \beta\alpha = \{(x,y) \mid y = |-8x-1|\}.$

4.4. Feladat. Adjon meg a gráfjával az $A = \{a,b,c,d\}$ halmazon egy olyan relációt, amely

(a) reflexív, tranzitív, de nem szimmetrikus;
(b) antiszimmetrikus, tranzitív, de nem dichotom;
(c) dichotom, de nem reflexív.

Megoldás. HF

4.5. Feladat. Legyen $\varrho = \{(a, b) \mid a \text{ osztója } b\text{-nek}\}$ az $A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ halmazon értelmezett reláció. Adja meg a ϱ reláció gráfját. Vizsgálja meg reflexivitás, szimmetria, antiszimmetria, tranzitivitás és dichotómia szempontjából.

Megoldás. A reláció reflexív, nem szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, tranzitív és nem dichotom.

4.6. Feladat. Vizsgálja meg az alábbi relációkat reflexivitás, szimmetria, antiszimmetria, tranzitivitás és dichotómia szempontjából. Ezek alapján állapítsa meg, hogy melyik reláció ekvivalencia, részbenrendezés, illetve rendezés.

(a) $\{(a, b) \mid ab = 1\}$ az $\mathbb{R}$ halmazon;
(b) $\{(a, b) \mid 4 \mid b - a\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon;
(c) $\{(a, b) \mid a + 5 \leq b\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon;
(d) $\{(a, b) \mid a < b\}$ az $\mathbb{R}$ halmazon;
(e) $\{(a, b) \mid a \leq b\}$ az $\mathbb{R}$ halmazon;
(f) $\{(a, b) \mid ab \geq 0\}$ az $\mathbb{R}$ halmazon;
(g) $\{(a, b) \mid \frac{a}{b} < 0\}$ az $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazon;
(h) $\{(x, y) \mid |x| + |y| < 3\}$ a $\mathbb{Q}$ halmazon;
(i) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 10\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon;
(j) $\{(a, b) \mid |a| = |b|\}$ az $\mathbb{R}$ halmazon;
(k) $\{(a, b) \mid |a - b| < 2\}$ az $\mathbb{R}$ halmazon;
(l) $\{(a, b) \mid a - b < a^2\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon;
(m) $\{(a, b) \mid a - b \leq a^2\}$ az $\mathbb{R}$ halmazon;
(n) $\{(a, b) \mid 3 < |a - b|\}$ a $\mathbb{Q}$ halmazon;
(o) $\{(a, b) \mid 2 \mid a + b\}$ az $\mathbb{N}$ halmazon;
(p) $\{(x, y) \mid 2 \mid x^2 + y^2\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon;
(q) $\{(x, y) \mid xy \geq 2\}$ az $\mathbb{R}$ halmazon;
(r) $\{(x, y) \mid x - 3 \geq y\}$ az $\mathbb{R}$ halmazon;
(s) $\{(a, b) \mid a^2 + 2b \leq b^2 + 2a\}$ az $\mathbb{N}$ halmazon;
(t) $\{(a, b) \mid |a - b| = 1\}$ az $\mathbb{N}$ halmazon.
(u) $\{(x, y) \mid (\sin^2 x - \sin^2 y)(\cos^2 x - \cos^2 y) = 0\}$ az $\mathbb{R}$ halmazon.

Megoldás.

(a) nem reflexív, szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, nem tranzitív, nem dichotom
(b) reflexív, szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, tranzitív, nem dichotom, ekvivalenciareláció
(c) nem reflexív, nem szimmetrikus, antiszimmetrikus, tranzitív, nem dichotom
(d) nem reflexív, nem szimmetrikus, antiszimmetrikus, tranzitív, nem dichotom
(e) reflexív, nem szimmetrikus, antiszimmetrikus, tranzitív, dichotom, rendezés
(f) reflexív, szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, nem tranzitív, nem dichotom
(g) nem reflexív, szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, nem tranzitív, nem dichotom
(h) nem reflexív, szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, nem tranzitív, nem dichotom
(i) nem reflexív, szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, nem tranzitív, nem dichotom
(j) reflexív, szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, tranzitív, nem dichotom
(k) reflexív, szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, nem tranzitív, nem dichotom
(l) nem reflexív, nem szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, nem tranzitív, nem dichotom
(m) reflexív, nem szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, nem tranzitív, dichotom
(n) nem reflexív, szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, nem tranzitív, nem dichotom
(o) reflexív, szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, tranzitív, nem dichotom, ekvivalenciareláció
(p) reflexív, szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, tranzitív, nem dichotom, ekvivalenciareláció
(q) nem reflexív, szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, nem tranzitív, nem dichotom
(r) nem reflexív, nem szimmetrikus, antiszimmetrikus, tranzitív, nem dichotom
(s) reflexív, nem szimmetrikus, antiszimmetrikus, tranzitív, dichotom, rendezés
(t) nem reflexív, szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, nem tranzitív, nem dichotom
(u) reflexív, szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, tranzitív, nem dichotom, ekvivalenciareláció

4.7. Feladat. Igazolja, hogy a $\varrho = \{(a, b) \mid |a - b| < 3\}$ reláció az $\mathbb{R}$ halmazon szimmetrikus. Adja meg a ϱ reláció inverzét és komplementerét. Vizsgálja meg, hogy szimmetrikusak-e ezek a relációk.

Megoldás. $\varrho^{-1} = \{(a, b) \mid |b - a| < 3\}$, $\overline{\varrho} = \{(a, b) \mid |a - b| \geq 3\}$ az $\mathbb{R}$ halmazon, szimmetrikus.

4.8. Feladat. Legyen X tetszőleges halmaz, ϱ pedig egy szimmetrikus reláció X-en. Bizonyítsa be, hogy ϱ inverze és komplementere is szimmetrikus.

Megoldás. HF

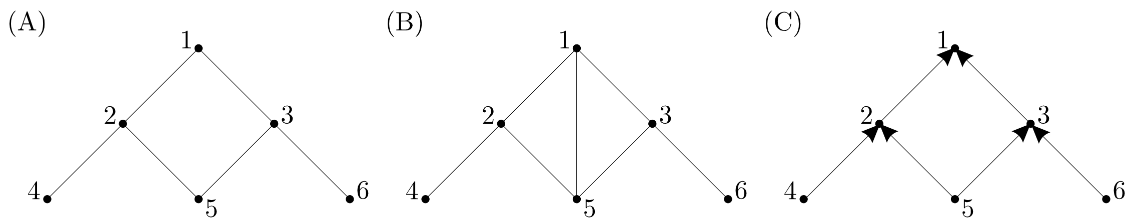
4.9. Feladat. Reflexív-e reflexív relációk szorzata, inverze? Mit mondhatunk az antszimmetrikus relációkról?

Megoldás. Reflexív mindkettő. Antiszimmetrikus reláció inverze antiszimmetrikus.

4.10. Feladat. Legyen $\varrho = \{(a, b) \mid a - b = 2\}$ reláció az $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazon. Rajzolja fel a ϱ gráfját, adja meg (ne csak a gráfjával)
(a) ϱ szimmetrikus lezártját;
(b) ϱ tranzitív lezártját;
(c) ϱ szimmetrikus lezártjának tranzitív lezártját;
(d) ϱ tranzitív lezártjának szimmetrikus lezártját.

Megoldás.
(a) $\varrho_1 = \{(a, b) \mid |a - b| = 2\}$ az $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazon;
(b) $\varrho_2 = \{(a, b) \mid a - b = 2$ vagy $a - b = 4\}$ az $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazon;
(c) $\varrho_3 = \{(a, b) \mid 2 \mid a - b\}$ az $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazon;
(d) $\varrho_4 = \{(a, b) \mid 2 \mid a - b\}$ az $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazon.

4.11. Feladat. Melyik ábra adja meg egy részbenrendezett halmaz Hasse diagramját? Melyek ezen részbenrendezett halmaz minimális elemei?



Megoldás. (A), minimális elemek: 4, 5, 6.

4.12. Feladat. Adjon meg Hasse diagramjával olyan részbenrendezett halmazt, melynek alaphalmaza $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, továbbá 3 minimális és egy legnagyobb eleme van.

Megoldás. HF

4.13. Feladat. Adja meg az alábbi részbenrendezett halmazok Hasse-diagramját. Melyek a minimális, maximális, legkisebb, legnagyobb elemek? Adja meg a duális részbenredezett halmaz Hasse-diagramját is.
(a) $(A; \subseteq)$, ahol $A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 4\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$;
(b) $(B; \mid)$, ahol $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 12, 24, 36\}$;
(c) $(C; \sqsubseteq)$, ahol $C = \{123, 211, 321, 467, 512, 861, 999\}$, és $a \sqsubseteq b$ pontosan akkor teljesül, ha a minden számjegye kisebb vagy egyenlő, mint b megfelelő számjegye;
(d) $(D; \leq)$, ahol $D = \{(1, 1), (\frac{1}{2}, 2), (0, -1), (\frac{1}{3}, 3), (2, 2)\}$, és $\leq$ a komponensenkénti részbenrendezés.

Megoldás.
(a) Minimális elem: $\emptyset$, maximális elemek: $\{1, 4\}, \{1, 2, 3\}$, legkisebb elem: $\emptyset$, legnagyobb elem nincs;
(b) minimális elemek: 2, 3, 5, maximális elemek: 5, 24, 36, legkisebb és legnagyobb elem nincs;
(c) minimális elemek: 123, 211, 321, maximális elem: 999, legkisebb elem nincs, legnagyobb elem: 999;
(d) minimális elem: $(0, -1)$, maximális elemek: $(2, 2), (\frac{1}{3}, 3)$, legkisebb elem: $(0, -1)$, legnagyobb elem nincs.

4.14. Feladat. Legyen $D_6 = (A; \mid)$ és $P = (B; \leq)$ részbenrendezett halmaz, ahol $A = \{2, 3, 6\}$ és $B = \{0, 1, 3\}$. Adja meg a D_6 és a P részbenrendezett halmazok direkt szorzatának Hasse diagrammját. Melyek a minimális, maximális, legkisebb, legnagyobb elemek?

Megoldás. Minimális elemek: $(2, 0), (3, 0)$, maximális elem: $(6, 3)$, legkisebb elem nincs, legnagyobb elem: $(6, 3)$.

4.15. Feladat. Az alábbi relációk közül melyik terjeszthető ki részbenrendezéssé
(a) $\alpha = \{(a, b) \mid a - a^2 \leq b\} \subseteq \{-1, 0, 1\} \times \{-1, 0, 1\}$;
(b) $\beta = \{(a, b) \mid a - a^2 < b\} \subseteq \{-1, 0, 1\} \times \{-1, 0, 1\}$;

(c) $\gamma = \{(v, w) \mid \sqrt{2}w = (1 + i)v\} \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$;
(d) $\delta = \{(m, n) \mid \text{van olyan } \alpha \in \mathbb{N},\ \text{amelyre } m \mid n^\alpha\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$?

Megoldás.
(a) α nem terjeszthető ki részbenrendezéssé, mert $(1, 0), (0, 1) \in \varrho$;
(b) β kiterjeszthető: $\beta \cup \{(0, 0)\}$ részbenrendezés;
(c) γ nem terjeszthető ki részbenrendezéssé;
(d) δ nem terjeszthető ki részbenrendezéssé.

4.16. Feladat. Adja meg a
(a) $(\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}; \subseteq)$;
(b) $(\{0, 1, 2, 3, 6, 12, 24, 36, 48\}; \mid)$
részbenrendezett halmaz Hasse diagramját. Hányféleképpen terjeszthető ki rendezéssé? Adja meg egy kiterjesztését.

Megoldás. A részbenrendezett halmaz
(a) $2 \cdot 2$-féleképpen;
(b) $2 \cdot 3$-féleképpenterjeszthető ki rendezéssé.

4.17. Feladat. Adjon meg az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazon olyan osztályozást, melynek pontosan 2 osztálya (blokkja) van. Adja meg a kapott osztályozáshoz tartozó ekvivalenciareláció gráfját.

Megoldás. HF

4.18. Feladat. Határozza meg a következő osztályozásokhoz tartozó ekvivalenciarelációt.
(a) $C_1 = \{\{\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3, x^2 + 4x + 6, \frac{3}{2}x^2 + 6x + 9\}, \{\frac{5}{3}x + 5, x + 3\}, \{\frac{1}{3}x^2 + x + \frac{1}{3}, x^2 + 3x + 1\}\}$ az $\{\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3, x^2 + 4x + 6, \frac{3}{2}x^2 + 6x + 9, \frac{5}{3}x + 5, x + 3, \frac{1}{3}x^2 + x + \frac{1}{3}, x^2 + 3x + 1\}$ halmazon;
(b) $C_2 = \{\{(1, -3), (-2, 6), (\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})\}, \{(\frac{1}{2}, -\frac{3}{5}), (5, -6)\}\}$ a $\{(-2, 6), (\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}), (\frac{1}{2}, -\frac{3}{5}), (1, -3), (5, -6)\}$ halmazon;
(c) $C_3 = \{\{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, 1, i\}, \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1 + i, 1 - i\}\}$ a $\{-\sqrt{2}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, i, 1, 1 + i, 1 - i, \sqrt{2}\}$ halmazon;
(d) $C_4 = \{\{f \in \mathbb{R}[x] \mid f^* = n\} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ az $\mathbb{R}[x]$ polinomgyűrűn.

Megoldás.
(a) $(f, g) \in \varrho_{C_1} \iff f \sim g$;
(b) $((a, b), (c, d)) \in \varrho_{C_2} \iff$ van olyan $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, amelyre $(a, b) = (\alpha c, \alpha d)$;
(c) $(v, w) \in \varrho_{C_3} \iff |v| = |w|$;
(d) $(f, g) \in \varrho_{C_4} \iff f^* = g^*$.

4.19. Feladat. Határozza meg a következő ekvivalenciarelációkhoz tartozó osztályozást.
(a) $\{(a, b) \mid 4 \mid b - a\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon;
(b) $\{(a, b) \mid |a| = |b|\}$ az $\mathbb{Z}$ halmazon;
(c) $\{(a, b) \mid ab > 0\}$ az $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazon;
(d) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \text{ páros}\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon;
(e) $\{(H, H') \mid |H| = |H'|\}$ az $A = \{H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6\}$ halmazon, ahol $H_1 = \{1, 2\}$, $H_2 = \emptyset$, $H_3 = \{a, b\}$, $H_4 = \{0\}$ és $H_5 = \{1, 2, 3\}$, $H_6 = \{3, 4, 5\}$;
(f) $\{(a, b) \mid a\text{-nak és } b\text{-nek van közös prímosztója}\}$ a $B = \{2, 3, 8, 9, 14, 15, 19, 26\}$ halmazon;
(g) $\{(a, b) \mid a \text{ és } b \text{ számjegyeinek összege egyenlő}\}$ a $C = \{71, 301, 216, 4, 121, 54, 602, 315\}$ halmazon;
(h) $\{(x, y) \mid \sin^2 x = \sin^2 y \text{ vagy } \cos^2 x = \cos^2 y\}$ az $\mathbb{R}$ halmazon.

Megoldás.
(a) $\{\{4k \mid k \in \mathbb{Z}\},\ \{4k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\},\ \{4k + 2 \mid k \in \mathbb{Z}\},\ \{4k + 3 \mid k \in \mathbb{Z}\}\}$;
(b) $\{\{k, -k\} \mid k \in \mathbb{N}_0\}$;
(c) $\{\mathbb{R}^-, \mathbb{R}^+\}$;
(d) $\{\{2k \mid k \in \mathbb{Z}\},\ \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}\}$;
(e) $\{\{H_2\}, \{H_4\}, \{H_1, H_3\}, \{H_5, H_6\}\}$;
(f) $\{\{2, 8, 14, 26\},\ \{3, 9, 15\}, \{19\}\}$;
(g) $\{\{301, 121, 4\},\ \{71, 602\}, \{216, 54, 315\}\}$;
(h) $\{\{(x, \pm x + k\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\} \mid x \in \mathbb{R}\}$.

4.20. Feladat. Legyen $\varrho = \{(a, b) \mid a \text{ osztója } b\text{-nek}\}$ reláció az $A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ halmazon. Ekvivalenciareláció-e ϱ, illetve $\varrho \cap \varrho^{-1}$ az A halmazon? Ha valamelyik reláció ekvivalencia, adja meg a hozzá tartozó osztályozást.

Megoldás. $\varrho \cap \varrho^{-1}$ ekvivalenciareláció, osztályozás: $\{\{-4\},\ \{-3, 3\},\ \{-2, 2\},\ \{-1, 1\},\ \{0\}\}$.

4.21. Feladat. Legyen ϱ tetszőleges részbenrendezés az A halmazon. Bizonyítsa be, hogy $\varrho \cap \varrho^{-1}$ ekvivalenciareláció A-n.

Megoldás. HF