

Skatulya-elv

Sava Grozdev

Egy alapvető szabály, azaz elv azt állítja, hogy: **ha m testet szétosztunk n csoportba és $m > n$, akkor legalább két test azonos csoportba fog kerülni.**

Ezt az elvet különböző országokban különbözőképpen nevezik. Például Franciaországban úgy ismerik, mint a "fiókok elvét", Angliában mint a "galambdúcok elvét" míg Bulgáriában és Oroszországban mint Dirichlet-elvet. Az elv a nagy német matematikussal, *Gustav Lejeune-Dirichlet-vel* (1805 – 1859) áll kapcsolatban, bár már előtte is jól ismerték az elvet. Dirichlet érdeme nem az előbbi egyszerű tény felfedezése volt, hanem az alkalmazása számos érdekes probléma megoldásában a számelmélet terén. Dirichlet maga nem költöztetett papagájokat vagy nyulakat ketrecekbe és nem osztott szét dobozokat fiókokba. Egy tudományos művében fogalmazott meg egy érvelési eljárást, ami ezen az elven alapult, ami később az ő nevét viselte. Ez a prímszámok számtani sorozatokban való előfordulásáról szól. A következő tétel Dirichletnek köszönhető: **az $an + b$ sorozat, ahol az a és b számok relatív prímszámok, végtelen sok prímszámot tartalmaz.** Ez a tétel nem kerül bizonyításra ebben a jegyzetben.

A "fiókok nyelvét" használva, a skatulya-elv kimutatja egy bizonyos tulajdonságokkal rendelkező fiók létezését. Így ez tulajdonképpen a létezés bizonyítása. Azonban ez az elv nem ad egy algoritmust arra, hogy meg is találjuk a kívánt fiókot, és következésképpen nem konstruktív tulajdonságú. Ugyanis, a létezés konstruktív bizonyítása közelebb áll a gondolkodáshoz és meggyőzőbb. Úgy tűnik, hogy ez a legfőbb oka annak, hogy a skatulya-elv számos alkalmazása váratlannak látszik. A következő feladatok ilyen alkalmazásokhoz tartoznak.

1. Feladat Legyenek az a , b , c és d számok egész számok. Bizonyítsuk be, hogy a következő szorzat:

$$(b - a)(c - a)(d - a)(c - b)(d - b)(d - c)$$

osztható 12-vel.

Megoldás: A fentebb felírt szorzat 6 tényezője a 4 egész számból minden lehetséges módon képezett párokból áll. A skatulya-elv értelmében a négy szám közül legalább kettő megegyezik a 3-mal való osztási maradékaik szerint. Így a különbségük 3 többszöröse. Ezután vagy legalább 3 szám azonos paritású, és ebben az esetben 3 különbség páros, vagy a 4 szám olyan, hogy közülük kettő páros és kettő páratlan.

2. Feladat Egy diák 17 ceruzát vesz 4 különböző színben. Határozzuk meg n legnagyobb lehetséges értékét, hogy biztosan állítható legyen, hogy a diák legalább n darab ugyanolyan színű ceruzát vett!

Megoldás: Ha a diák legfeljebb 4 azonos színű ceruzát vett, akkor összesen maximum $4 \cdot 4 = 16$ ceruzát vehetett. Ez egy ellentmondás, mert $16 < 17$. Következésképpen $n > 4$ és a legkisebb lehetséges érték $n = 5$. A fiókok ebben az esetben az eltérő színű ceruzák, azaz négy van belőlük. 17 ceruzát elhelyezve 4 fiókba azt kapjuk, hogy legalább egy fiókban nem kevesebb, mint 5 ceruza lesz.

Az előző feladat megoldásában a skatulya-elv következő, általánosabb formáját használtuk ki: **ha m testet osztunk szét n csoportba, és $m > nk$, ahol k egy természetes szám, akkor legalább $k + 1$ test fog kerülni az egyik csoportba.**

3. Feladat Adott 145 pont egy 4 m x 3 m kiterjedésű téglalap belsejében. Lehetséges-e lefedni egyszerre 4 pontot egy 50 cm x 50 cm kiterjedésű négyzettel?

Megoldás: A válasz igen. Elegendő a téglalapot 48 darab 50 cm x 50 cm kiterjedésű négyzetre osztani. A skatulya-elv kimondja, hogy legalább 4 pont egy négyzetbe fog esni.

4. Feladat Egy 5 x 5 kiterjedésű négyzet 25 egységnégyzetre van osztva, amik mind pirosra vagy kékre vannak festve. Bizonyítsuk be, hogy létezik 4 olyan egyszínű négyzet, amik 2 sor és 2 oszlop kereszteződésénél fekszenek az eredeti négyzetben.

Megoldás: Először tekintsük az egyik oszlop egységnégyzeteit a fiókoknak. A skatulya-elv alapján következik, hogy a kiválasztott oszlopban dominálni fog az egyik szín. Hasonló módon dominálni fog az egyik szín a többi oszlopban is. Ezután most az 5 oszlop fogja a fiókokat jelenteni, míg a szétosztandó tulajdonságok az egyes oszlopok domináló színei. A skatulya-elv értelmében következik, hogy a domináló szín legalább 3 oszlopban ugyanaz. Így 3 ilyen oszlop van, és mindegyikben legalább 3 ugyanolyan színű egységnégyzet van. Tegyük fel, hogy ez a szín a kék! Továbbá, számozzuk meg az eredeti négyzet sorait 1-től 5-ig és tekintsünk 5 fiókot ugyanezekkel a számokkal megszámozva! Ezután rendeljük a három tekintett oszlopban található kék egységnégyzetekhez azoknak a soroknak számát, amelyekhez tartoznak. Így a feladat 9 (vagy több) egész szám 5 fiókba, az 1, 2, 3, 4 és 5 számokhoz való hozzárendelésére egyszerűsödik. Minden egész számot a megfelelő számmal jelzett fiókba kell helyezni. Most be kell bizonyítanunk, hogy létezik 2 olyan fiók, hogy mindegyikben legalább 2 szám van. Első ránézésre látható, hogy létezik olyan fiók, amiben legalább 2 szám van. Két eset lehetséges. Az elsőben feltesszük, hogy létezik egy olyan fiók, amiben legalább 3 szám van. Ekkor a visszamaradó 6 számot a 4 visszamaradó fiókba kell szétosztani. A skatulya-elv értelmében következik, hogy az egyik fiók legalább 2 számot tartalmaz. Ez a fiók a 3 számot tartalmazó fiókkal együtt megoldja a feladatot. A második esetben tekintsünk egy olyan fiókot, amiben 2 szám van. A visszamaradó 7 számot ekkor a visszamaradó 4 fiókba kell szétosztani. A skatulya-elv értelmében az egyik fiók legalább 2 számot tartalmaz, és így készen is van a feladat.

5. Feladat Adott egy 5 x 41 kiterjedésű téglalap, ami 205 darab egységnégyzetre van osztva, amelyek mindegyike pirosra vagy kékre van festve. Bizonyítsuk be, hogy létezik 9 olyan azonos színű egységnégyzet, amik 3 oszlop és 3 sor kereszteződésénél fekszenek az eredeti négyzetben.

Megoldás: Mint az előző feladatban, itt is igaz, hogy mind a 41 oszlopban dominálni fog valamelyik szín. Legalább 21 oszlopban egy és ugyanaz a szín fog dominálni, mivel a színek száma 2. Tegyük fel, hogy ez a szín a kék szín! Legalább 3 kék egységnégyzet van mind a 21 tekintett oszlopban. Számozzuk meg mind a 21 oszlopban található kék egységnégyzeteket 1-től 5-ig aszerint, hogy melyik sor tartalmazza őket. Így mind a 21 oszlophoz egy számhármasság van rendelve. Minden számhármasság a kék egységnégyzetek számaiból állnak. Így az összes számhármasság száma 21. Másrésztől a lehetséges számhármasságok száma az 1, 2, 3, 4 és 5 számok felhasználásával 10 darab. A skatulya-elv alapján következik, hogy ezekből legalább 3 megegyezik. Így készen is vagyunk.

6. Feladat 44 királynő van elhelyezve egy 8 x 8-as sakktáblán. Mutassuk meg, hogy bármelyik királynő legalább egy másikat ütni fog!

Megoldás: Minden királynő legalább 21 mezőt ural. Azt a mezőt is figyelembe véve, amelyen a királynő áll, összesen 22 ellenőrzés alatt álló mezőt kapunk. Tegyük fel, hogy létezik olyan királynő, amely egyetlen másikat sem üt! A visszamaradó mezők száma: $64 - 22 = 42$. De nekünk 43 másik királynőnk van, így a skatulya-elv értelmében következik, hogy legalább az egyikük a tekintett királynő által ütésben tartott mezőkön helyezkedik el. Ez egy ellentmondás.

7. Feladat Határozzuk meg a királyok számának lehetséges legnagyobb számát egy közönséges sakktáblán úgy, hogy egyik sem üt egyetlen másikat sem.

Megoldás: Minden király legalább 4 mezőt ural. A király által uralt mezők száma akkor pontosan 4, ha a király a sakktábla négy csúcsának valamelyikén helyezkedik el (ellenkező esetben a király több mint 4 mezőt ural). Bontsuk fel a táblát 16 darab 2 x 2-es négyzetre.

Következik, hogy nem lehetséges, 16-nál több királyt elhelyezni a feladat feltételei szerint, mivel 2 király nem lehet egy és ugyanazon a 2×2 -es négyzeten. Egy példa a 16 király elhelyezésére:

X		X		X		X	
X		X		X		X	
X		X		X		X	
X		X		X		X	

8. feladat Igazolja, hogy bármely 12 különböző kétjegyű egész szám között van 2 olyan, aminek a különbsége egy olyan kétjegyű egész, amelynek megegyeznek a számjegyei.

Megoldás: Ha a skatulyáknak a 11-el való osztás maradékosztályait tekintjük, akkor skatulya-elv szerint nyilván lesz a kiválasztott 12 egész szám két olyan, amelyeknek ugyanaz a maradéka. Ennek a két számnak a különbsége osztható 11-el, ugyanakkor, ennek különbségnek, mint 11-el osztható számnak, megegyeznek a számjegyei.

9. feladat Az 1-től 10 –ig terjedő természetes számokat tetszőleges sorrendben egymás alá írjuk egy oszlopban. Minden számot összeadunk az oszlopban elfoglalt helyét jelölő sorszámmal. Igazolja, hogy legalább két ilyen összeg ugyanazzal a számjeggyel végződik.

Megoldás: Tegyük fel, hogy ezek az összegek mind különböző számjeggyel végződnek. Ezek szerint az összegek utolsó számjegyei közt a 0, 1, ..., 9 mindegyike pont egyszer fordul elő. Ellenkező esetben a skatulya elv szerint két különböző összeg ugyanarra a számjegyre végződik. Ebből az következik, hogy az adott összegeket összeadva, ezek összege ugyanarra a számjegyre végződik, mint az $1 + 2 + \dots + 9 = 45$ összeg, tehát az 5-re. Másrészt az 1-től 10-ig terjedő egészek összege 55. Az oszlopban elfoglalt helyüket jelző sorszámok összege is 55. Tehát ennek a kettőnek az összege, a 110, a 0-ra végződik. Ez ellentmond a feltételnek.

10. Feladat Igazolja, hogy létezik egy olyan természetes szám, ami a 2004 többszöröse és a tízes számrendszerben a 0 és az 1-en kívül nincs más számjegye.

Megoldás: Tekintsünk 2005 olyan egész számot, amely a tízes számrendszerben csupán 1, 2, ..., vagy 2005 1-es számjegyből áll, vagyis vegyük a következő számokat: 1, 11, 111, ..., 11111...1. A skatulya elvből következik, hogy legalább kettőnek ugyanaz az osztási maradéka modulo 2004. Ennek a két számnak a pozitív különbsége teljesíti a kívánt feltételt, azaz csupán a 0 és 1-es számjegyekből áll.

11. Feladat Igazolja, hogy 52 nemnegatív egész szám közt van 2 olyan, aminek a különbsége vagy az összege 100 többszöröse. Igaz-e az állítás 51 nemnegatív egészre is?

Megoldás: Tekintsük a 0-tól 99-ig terjedő számokat, amelyek a 100-al való osztás lehetséges maradékait jelentik. Vegyünk 51 skatulyát és tegyük az első skatulyába azokat a számokat, amelyeknek a 100-al való osztási maradéka 0, a második skatulyába azokat az egészeket, amelyeknek a 100-al való osztási maradéka 1 vagy 99, a harmadik skatulyába kerülnek azok az egészek, amelyeknek a 100-al való osztási maradéka 2 vagy 98, és így tovább, végül azokat az egészeket, amelyeknek a 100-al való osztási maradéka 50, tegyük az első skatulyába. A skatulya elv értelmében legalább egy skatulyába lesz legalább két egész szám. Ha ezeknek ugyanaz a 100-al való osztási maradéka, akkor a különbségük, ellenkező esetben az összegük osztható 100-al. Az állítás nem igaz 51 egész szám esetére, amint azt a 0, 1, 2, ..., 50, mint ellenpélda is mutatja.

12. Feladat Adott 2006 tetszőleges pozitív egész szám, amelyek egyike sem osztható 2006-al. Igazolja, hogy egy részüket (vagy az összezt) összeadva az összegük osztható 2006-al.

Megoldás: Jelölje az adott számokat $a_1, a_2, \dots, a_{2006}$ majd tekintsük a következő 2006 egészszől álló sorozatot:

$$a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_{2006}.$$

Ezeknek az összegeknek a 2006-al való lehetséges osztási maradékainak száma 2006. Ha valamelyik összeg 0 maradékot ad (beleértve az első, egytagú összeget is), akkor a feladatot megoldottuk. Ellenkező esetben a sorozatban az első tag, a feladat feltétele alapján nem lehet 0, de nem is lehet a 2006-al való osztási maradéka 0. Most ha minden összeg osztási maradéka modulo 2006 különbözik 0-tól, akkor a skatulya elv szerint két összegnek ugyan az osztási maradéka. Ebben az esetben vehetjük ennek a két tagnak, (összegeknek) a különbségét, ami már teljesíti a feladat feltételét.

13. Feladat Adottak az 1, 2, ..., 200 számok, és kiválasztunk 101-et közülük. Igazolja, hogy a kiválasztott számok között van legalább két olyan, amelyek közül az egyik a másoknak osztója.

Megoldás: Ha az a egy 200-nál kisebb páratlan szám, jelöljük az $\{a, 2a, 4a, 8a, 16a, 32a, 64a, 128a\}$ halmazt A -val. Az 1 és 200 közti egész számok mindegyikére létezik egy olyan páratlan egész $a < 200$, amelyre a megfelelő A tartalmazza az adott számot. Mivel 100 ilyen különböző A halmaz lehetséges (az 1 és 200 közti páratlan egészek száma 100) és a feladat szerint 101 egészet választunk ki, a skatulya elv szerint, legalább két kiválasztott egész szám ugyanabba az A halmazba tartozik. Másrészt bármely két szám közül, amelyek ugyanabba az A halmazba tartoznak az egyik a másinak osztója

14. Feladat. Adott 986 különböző pozitív egész szám, amelyek nem nagyobbak, mint 1969. A legnagyobb szám páratlan. Igazolja, hogy van köztük három olyan, amelyek közül az egyik a másik kettő összege.

Megoldás: Jelölje a legnagyobb egészet a . Ez egy páratlan szám a feladat feltétele szerint. Vegyük az adott a és a többi szám különbségeit. Ezeknek a különbségeknek a száma 985 és mind különbözők. Az eredetileg adott számokkal együtt összesen 1971 egészről van szó. Mivel $1971 > 1969$, a skatulya elv alapján legalább 2 szám köztük egyenlő. Következik, hogy legalább egy a különbségek közül egyenlő az egyik eredetileg választott számmal, azaz van olyan b , és c köztük, amire $a - b = c$. Ugyanakkor $b \neq c$, mivel a páratlan. Tehát $a = b + c$ és kész a bizonyítás. Jegyezzük meg, hogy a 986, az egészek száma nem csökkenthető. Ha ez a szám 985, akkor vehetjük az 1969 alatti páratlan számokat, ezek összesen 985-en vannak. Másrészt bármely két páratlan szám összege páros, tehát nem teljesül a feladat állítása.

15. Feladat Adott a 10 x 10-es sakktábla, és úgy írunk pozitív egészeket a sakktábla mezőire, hogy bármely két függőleges, vagy vízszintes szomszéd különbsége ne haladja meg az 5-öt. Igazolja, hogy legalább két szomszéd egyenlő lesz.

Megoldás: Jelölje a és b a sakktáblára írt legnagyobb és legkisebb számot. Ha nincs két egyenlő köztük, akkor $a - b \geq 99$. Kössük most össze az a és b számokat tartalmazó mezőket a lehető legrövidebb olyan utat tartalmazó lépésekkel, amely csak vízszintes és függőleges irányba halad a mezőkön. A lehető leghosszabb ilyen út 18 lépést jelenthet, (9 vízszintes és 9 függőleges lépés). Ez azt is jelenti, hogy az a úgy érhető el a b -ből, hogy 18-szor legfeljebb 5-el növelem az adott számot, vagyis $a \leq b + 18 \cdot 5$. Következik, hogy $b + 90 \geq b + 99$. Ez nyilván lehetetlen, tehát legalább két szomszédos szám egyenlő kell legyen.

16. Feladat Az 1-től n^2 -ig terjedő egész számokat tetszőlegesen helyezzük el az $n \times n$ -es sakktábla mezőin. Tekintsük a következő kijelentést: Létezik két olyan szomszédos oldallal rendelkező mező, amelyeken a rajtuk lévő két szám különbsége nagyobb, mint 5. Igazolja, hogy

- Az állítás nem mindig teljesül az $n = 5$ esetben;
- Az állítás mindig igaz az $n > 5$ esetben.

Megoldás: a) Vegyük az 5×5 –ös sakktablát és írjuk sorba a számokat, 1-től 5-ig az első sorba, 6-tól 10-ig a második sorba és így tovább, végül a 21-től a 25-ig az utolsó sorba. A maximális különbség így 5-el egyenlő.

b) Az előző feladathoz hasonló módon az a mező amelyik az n^2 egészet tartalmazza, az 1-et tartalmazó mezőről legfeljebb $2(n-1)$ mezőn keresztül érhető el. Mivel az 1-et most $n^2 - 1$ -el növeljük, a skatulyaelvből következik, hogy lesz egy olyan lépés, ahol az emelés nem kevesebb mint $\frac{n^2 - 1}{2(n-1)} = \frac{n+1}{2}$. Ha $n \geq 10$ akkor az $\frac{n+1}{2}$ nagyobb mint 5 és

következésképpen, az állítás mindig teljesül. Amikor $n = 9$ a növekedés 1 és 81 között $81 - 1 = 80$ és legfeljebb 16 lépésben elérhető (8 vízszintes és 8 függőleges lépés). Ha a lépések száma legfeljebb 15, akkor a skatulya elv szerint van egy olyan ahol az emelés nem kevesebb $\frac{80}{15}$. Ez a szám nyilván nagyobb mint 5. Tegyük fel, hogy pontosan 16 lépés van.

Ekkor $80 : 16 = 5$ és ha létezik egy olyan lépés, ahol a növekedés kevesebb mint 5, akkor a teljes növekedés 76, legalábbis a fennmaradó 15 lépésben. A skatulya elv alapján, van legalább egy lépés, ahol az emelkedés nem kevesebb, mint $76 : 15$, azaz az emelkedés több mint 5. Végül tekintsük azt az esetet, amikor nincs sem olyan lépés amelyben a növekedés több mint 5, sem olyan, amikor kevesebb. Tehát minden lépésben 5 az emelkedés, vagyis az 1-ből kiindulva a szomszédos mezőkön a számok a következők lesznek 6, 11, 16, 21 és így tovább. Másrészt nem csak ez a lehetséges út 1 és 81 között, hanem több ilyen út létezik. Ez azt jelenti, hogy a megfelelő mezőkön az egész számok nem mind ugyanazok, vagyis a növekedés nem 5, és minden lépésben meg lehet ismételni a gondolatmenetet. Következik, hogy az állítás igaz $n = 9$ esetén is. Hasonló úton bebizonyítható, hogy az állítás az $n = 6, 7$ és 8 esetekben is igaz.

Megjegyzés. Igaz a következő általános eredmény: Ha az 1-től n^2 -ig terjedő egészeket ($n > 2$) az $n \times n$ sakktablára írjuk, akkor, létezik két oldalszomszédos mező, amelyen a számok különbsége nem kevesebb mint n . (Gerver, M. L., A problem with integers in a table (oroszul), Qwant, **12**, 1971, 24 – 27). Ennek az állításnak a bizonyítása elég bonyolult, de az alapötletét a következő feladatból megismerhetjük:

17. Feladat Az 1 –től 16-ig terjedő egészeket leírjuk az 4×4 sakktabla mezőire, úgy, hogy van legalább 2 olyan, szomszédos oldallal rendelkező mező, amelyben a számok különbsége nem kevesebb mint 4.

Megoldás:

1	2	*	
3	*		
*			*
		*	4

Helyezzük el az ábra szerint az 1, 2, 3, 4 számokat és jelöljük csillaggal a szóba jöhető szomszédjait. Függetlenül attól, hogy az 1, 2, 3, 4 hogyan helyeztük el, a csillagok száma nem lehet kevesebb, mint 4. A skatulya elv alapján legalább egy csillag helyére olyan szám kerül, ami nem lehet kisebb, mint 8 (ugyanis a szóba jöhető 5, 6 és 7 mindössze 3 csillagot foglal le). Ezzel kész a bizonyítás.

18. Feladat. Az osztályterem padlója tetszőlegesen feketére és fehérre van festve. Igazolja, hogy van legalább két ugyanolyan színű pont, amelyek közt a távolság éppen 1 m.

Megoldás: Vegyünk egy 1 m oldalú egyenlő szárú háromszöget. A skatulya elv értelmében, kettő a csúcsai közül azonos színű, és kész a bizonyítás.

19. Feladat Az osztályterem padlója tetszőlegesen feketére és fehérre van festve. Igazolja, hogy van legalább 3 azonos színű kollineáris pont, amelyre az egyik a másik kettő közti szakasz felezőpontja.

Megoldás: Tekintsünk 5 kollineáris A, B, C, D és E pontot a padlón, úgy hogy B és D azonos színűek (mondjuk fehérek) és $AB = BD = DE$ és $BC = CD$. Ha most az A, C és E pontok közül legalább az egyik fehér, akkor ez a B és D pontokkal együtt eleget tesz a feladat feltételének. Ha viszont mind a három fekete, akkor éppen ez a három pont felel meg a feladat feltételének.

20. Feladat Adott 7 szakasz, amelyeknek a hossza nagyobb, mint 10 cm, de ugyanakkor kisebb, mint 1 m. Igazolja, hogy van köztük három olyan, amellyel háromszög szerkeszthető.

Megoldás: Jelöljük a szakaszokat növekvő sorrendben: $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_7$. Használni fogjuk azt, hogy három egymást követő a_k, a_{k+1} és a_{k+2} szakasz ($a_k \leq a_{k+1} \leq a_{k+2}$) akkor és csakis akkor lehet egy háromszög három oldala, ha $a_k + a_{k+1} > a_{k+2}$. Tegyük fel, hogy az adott szakaszok közül semelyik három (egymás utáni nagyságú) nem lehet egy háromszög három oldala, tehát $a_k + a_{k+1} \leq a_{k+2}$ minden $k = 1, 2, 3, 4$ és 5 értékre. Az következik, hogy $a_1 \geq 10$ és $a_2 \geq 10$ akkor $a_3 \geq 20, a_4 \geq 30, a_5 \geq 50, a_6 \geq 80$ és $a_7 \geq 130$, ami ellentmondás.

21. Feladat. Igazolja, hogy bármely konvex sokszöglap esetén legalább 2 olyan oldallap van, amelyeknek azonos számú csúcsa van.

Megoldás: A sokszöglapok oldallapjai sokszögek. Tegyük fel, hogy bármely oldallap párnak különböző számú csúcsa van. Tekintsük azt az oldallapot, amelynek maximális számú csúcsa van, és jelöljük ezt a számot n -el. Az következik, hogy a kiválasztott oldallapnak n éle van, tehát a sokszöglapnak n oldallapjával szomszédos. A feltétel szerint a szomszédos oldallapoknak $3, 4, 5, \dots, n-2$ vagy $n-1$ csúcsa lehet. Mivel itt 3-tól $n-1$ ig csak $n-3$ szám van, a skatulyaelv alapján legalább két szomszédos oldallapnak azonos számú csúcsa van. Ez ellentmondás.

22. Feladat Egy szabályos ikoszagon (20 oldalú sokszög – iko a görög nyelven húszat jelent) 9 csúcsa pirosra van festve. Igazolja, hogy van olyan piros csúcsú háromszög, amely egyenlő szárú.

Megoldás: Számozzuk az ikoszagon csúcsait 1-től 20-ig az óramutató járásával megegyező irányban. Ezek közt azok a csúcsok, amiket 1, 5, 9, 13 és 17; amiket 2, 6, 10, 14 és 18; amiket 3, 7, 11, 15 és 19; és amiket 4, 8, 12, 16 és 20 jelöl, 4 szabályos ötszöget határoznak meg. Mivel 9 csúcsot festettünk pirosra, a skatulya elvből következik, hogy a 9 csúcs közül legalább 3 ugyanahhoz az ötszöghöz tartozik. Másrészt egy szabályos ötszög bármely 3 csúcsa egy egyenlő szárú háromszöget alkot.

23. Feladat Egy körnek több köríve pirosra van festve (egyes körívek átfedhetik egymás). Ha a kifestett körívek hosszának az összege kevesebb, mint a kör kerületének a fele, akkor igazolja, hogy van a körnek olyan átmérője, aminek a végpontjai nincsenek befestve.

Megoldás: Fessük kis ugyanúgy pirosra a már kifestett húroknak a kör középpontjára vonatkozó szimmetrikus húrjait. Az így kifestett húrok hosszának az összege nem éri le a kör teljes kerületét, tehát van a körön egy olyan pont, ami nincs ezután sem kifestve. Ez a pont, az átmérősen ellentétes ponttal együtt eleget tesz a feladat feltételének.

24. Feladat Egy gömb alakú bolygó felszínének több mint a fele szárazföld, a többi tenger. Igazolja, hogy a gömbnek legalább két, átmérősen ellentétes pontja a szárazföldre esik

Megoldás: Jelöljük a szárazföld pontjait az A halmazzal. Legyen B a gömb azon pontjainak a halmaza, amelyek az A halmazbeli pontoknak átmérősen ellentétes pontjai. Mivel az A halmaz a gömb nagyobb részét lefedi, az átmérősen ellentétes pontokra ugyanez igaz, tehát a B szintén a nagyobb részét fedi le a gömb felszínének. Ha van a B halmazban olyan pont, amelyik a szárazföldön van, akkor kész a bizonyítás. Ha nincs ilyen pont, akkor az azt jelenti, hogy a bolygó nagyobb részét tenger borítja, és ez ellentmond a feladat feltételének.

25. Feladat Egy 6×6 négyzet 36 zárt egységnyezetre bontható (az oldalai pontjait is hozzávesszük). Számítsa ki az olyan egységnyezeteknek a maximális számát, amelyek úgy festhetők ki kékre, hogy két kék egységnyezetnek nincs közös pontja (csúcsoknál sem).

Megoldás: Osszuk fel a négyzetet 9 darab 2×2 négyzetre, amik a skatulyák lesznek. Egy ilyen skatulya nem tartalmazhat egynél több kékre festett négyzetet. Következik, hogy a keresett szám legfeljebb 9 . Az alábbi példa egy lehetőséget szemléltet, amiben a kék négyzeteket **X** jelöli:

X		X		X	
X		X		X	
X		X		X	

26. Feladat Igazolja, hogy nem lehet lefedni egy a oldalú egyenlő oldalú háromszöget 5 olyan egyenlő oldalú háromszöggel, aminek az oldala kisebb mint $\frac{1}{2}a$.

Megoldás: Legyen $\triangle ABC$ az a oldalú egyenlő oldalú háromszög, és M , N és P rendre az AB , BC és AC oldalak középpontja. Tegyük fel, hogy az $\triangle ABC$ háromszög lefedhető 5 egyenlő oldalú háromszöggel, amelynek oldala kisebb mint $\frac{1}{2}a$. A skatulyaelvből következik, hogy az A , B , C , M , N és P összesen 6 pont közül legalább 2 az 5 háromszög egyikének belsejében van. Ekkor annak a háromszögnek az oldala nem lehet kisebb, mint $\frac{1}{2}a$, ami ellentmondás.

27. Feladat Adott egy 1 oldalú négyzet és abban 101 pont, amelyek közt bármely 3 nem kollineáris. Igazolja, hogy van köztük 3 amelyek egy olyan háromszöget alkotnak, aminek a területe nem nagyobb, mint $0,01$.

Megoldás: Osszuk fel a négyzetet 50 egybevágó téglalpra. Ez megtehető például ha a négyzet egyik oldalát 10 egyenlő részre osztjuk, és a szomszédos oldalát 5 egyenlő részre osztjuk, majd az oldalakkal párhuzamosan felosztjuk a négyzetet 50 egybevágó téglalpra, amelyeknek a méretei $0,2 \times 0,1$. A skatulyaelv alapján, legalább három pont esik legalább az egyik ilyen téglalpra. De egy téglalapba írt háromszög területe nem haladhatja meg a téglalap területének a felét, vagyis a konkrét példában a $0,01$ értéket. Ezzel befejeztük a bizonyítást..

Az előző feladatban a következő tulajdonságot használtuk fel egy sajátos esetben (téglalpra):

Lemma. Ha egy háromszög egy paralelogramma belsejében van, akkor a háromszög területe nem haladja meg a paralelogramma területének a felét.

Bizonyítás: Ha a háromszög egyik oldala a paralelogrammának az egyik oldalán van, akkor nem lehet hosszabb, mint az adott oldal. Ugyanakkor a háromszög magassága sem lehet

nagyobb, mint a paralelogramma magassága. Most az állítás nyilvánvaló. Ha a háromszög oldala a paralelogramma egyik oldalával párhuzamos, akkor, a kérdést egy kisebb paralelogrammára vezethetjük vissza. Az az eset maradt csupán, amikor a háromszög egyik oldala sincs a paralelogrammának egyik oldalán sem, és nem is párhuzamos vele. Ebben az esetben olyan párhuzamosokat veszünk, amelyek a paralelogramma oldalaival párhuzamosak és áthaladnak a háromszög csúcsain. Egyik ilyen párhuzamos a háromszöget két olyan háromszögre bontja, amelyeknek az egyik oldala már párhuzamos a paralelogramma oldalával, és ugyanakkor maga a paralelogrammát magát is felbonthatjuk két kisebb paralelogrammára, amikben külön, külön igaz a már belátott állítás.

28. Feladat A konvex 10 oldalú sokszög egy 1 oldalú négyzetben van. Igazolja, hogy a 10 oldalú sokszög csúcsai közt van három olyan, amelyek egy olyan háromszöget alkotnak, aminek a területe nem haladja meg a 0,08 értéket.

Megoldás: Jelölje a 10 oldalú sokszög csúcsait $A_1 A_2 \dots A_{10}$. Mivel a konvex sokszög a négyzetben van, a kerülete nem haladhatja meg a négyzet kerületét, azaz 4-et. Vegyük rendre a sokszög két-két szomszédos oldalának összegét, azaz tekintsük a következő 10 számot: $A_1 A_2 + A_2 A_3, A_2 A_3 + A_3 A_4, \dots, A_{10} A_1 + A_1 A_2$. Ezeknek a számoknak az összege a sokszög kerületének a kétszeresével egyenlő, tehát nem lehet több mint 8. A skatulya-elv alapján, legalább az egyik ilyen szám nem lehet több, mint 0,8. Legyen n az a szám, amire $A_n A_{n+1} + A_{n+1} A_{n+2} \leq 0,8$. Használjuk fel továbbá, hogy egy háromszög területe nem lehet nagyobb, mint két oldalának a fél szorzata. Tulajdonképpen a háromszög területe az egyik oldal és a magasság szorzatának fele, de a magasság nem lehet hosszabb, mint a mellette lévő oldalak bármelyike. Létezik tehát egy olyan n az 1 és 8 között, amire az $A_n A_{n+1} A_{n+2}$

háromszög területe nem nagyobb, mint $\frac{1}{2} ab$, ahol $A_n A_{n+1} = a$ és $A_{n+1} A_{n+2} = b$. Másrészt az

$a + b \leq 0,8$. Mivel $(a + b)^2 \geq 4ab$, következik, hogy $\frac{1}{2} ab \leq \frac{(a + b)^2}{8} \leq \frac{0,8 \times 0,8}{8} = 0,08$ és ezzel kész a bizonyítás.

29. Feladat Egy 4×4 –es táblát lefedünk 13 dominólappal, amelyeknek a mérete 1×2 és a dominólapok bármelyik fele pontosan egy mezőt fed le. Igazolja, hogy az egyik dominólap levehető úgy, hogy a tábla minden mezője lefedve maradjon.

Megoldás: Kétféleképpen fedhetjük le a 13 dominólappal a táblát. Ha egy dominólap úgy helyezkedik el, hogy mind a két felét pontosan fedi egy másik dominólap, vagy két másik fél dominó, akkor ezt minden gond nélkül eltávolíthatjuk, és a tábla lefedve marad. A második eset az, ha nincs egy olyan dominólap sem, amit lefed egy másik dominólap, vagy két másik dominólap fele. Ebben az esetben 13 olyan fél-dominólap van, amit nem fed le egy másik dominólap fele, és így 13 olyan mező van, amit csak egyetlen dominólap egyik fele fed le. A fennmaradó 3 mezőt ($4 \times 4 - 13 = 3$) 13 fennmaradó féldominólappal fedünk. A skatulya-elv értelmében ezek közül legalább az egyiket 5 féldominólap fedi le, azaz 5 dominólap játszik szerepet ennek a mezőnek a lefedésében. Azonban bármely mező csak négy különböző helyzetű dominólapal fedhető le, a lefedésben a dominólapnak az alsó, vagy a felső, vagy a baloldali, vagy a jobboldali fele szerepel. Így legalább két dominólap azonos helyzetben van, tehát teljesen lefedi egymást, és így az egyik eltávolítható.

30. Feladat A síkot egység-négyzetekre osztjuk, (azt szokás mondani, hogy egy egész hálót értelmezünk a síkon). Az egység-négyzetek csúcsait csomóknak mondjuk. Bizonyítsuk be, hogy bármely 5 csomó esetén létezik 2 olyan köztük, amelyeket összekötő szakasz felezőpontja szintén egy csomó.

Megoldás: Tekintsük az 5 csomó koordinátáit. Ezek mind egész számok, amelyeknek a 2-vel való osztási maradéka 0 vagy 1. Az 5 csomó esetén a maradékokra csak 4 lehetőség van: (0,0), (0,1), (1,0) és (1,1). A skatulya-elv szerint legalább két csomó, legyenek ezek az $M =$

(a,b) és $N = (c,d)$ egybeesnek modulo 2, azaz az a és c , illetve a b és d egész számoknak ugyanaz a 2-vel való osztási maradéka. Következik, hogy az $\frac{a+c}{2}$ és $\frac{b+d}{2}$ egész számok.

Következésképpen $\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$, az MN középpontja egy csomó.

31. Feladat Adott két 2 egybevágó 16 oldalú szabályos sokszög és mindegyiknek 7-7 csúcsa ki van színezve pirosra. Igazolja, hogy a két 16 oldalú sokszög olyan módon hozható fedésben, hogy az egyik sokszögnek legalább 4 piros csúcsa a másik sokszög négy piros csúcsával esik egybe.

Megoldás: A 16 oldalú szabályos sokszögek 16 különböző forgatásnak megfelelően 16 módon hozhatók fedésbe úgy, hogy a csúcsaik egybeesnek. Ha most minden ilyen forgatás után az egybeeső csúcsok közt legfeljebb 3 piros, akkor az ilyen csúcs-párok száma legfeljebb $16 \times 3 = 48$. Másrészt a lehetséges párok száma $7 \times 7 = 49$. Következik, hogy van olyan forgatás, amikor az egybeeső piros csúcs- párok száma legalább 4.

