MATEMATIKAI LAPOK

IFJÚSÁGI FOLYÓIRAT

XCVIII.(XLI) évfolyam 1993.január

KEDVES OLVASÓ!

A megszokott "újévi szerkesztőségi üzenet" helyett, *Boga Emese* szatmárnémeti (10.sz. Ált. Isk.) tanuló 1992. dec. 12-én írt levelét közöljük:

"Tisztelt Szerkesztőség!

Kezdőként írom levelemet a Matematikai Lapoknak. Először fordult elő, hogy a feladatok (nagyrészének) megoldásait beküldöm. Tulajdonképpen már régóta vásárolom a lapot, s általában meg is oldok néhány feladatot, de eddig nem tartottam fontosnak, hogy be is küldjem.

Mint 8. osztályos tanuló, nagy segítségemre vannak a hozzám szóló cikkek és a megoldott feladatok. Úgy érzem, egyre jobban formálódik a feladatmegoldói készségem, amire líceumban nagy szükségem lesz majd. Mellesleg, a líceumban majd ezek a jól eltett Matematikai Lapok sokat fognak használni, szinte "kenyerünk" lesz a tanulásban.

Nekem tetszik a lap, szívesen rááldozom néhány fagyi árát, mert megéri. Remélem, sokáig vehetem még kezembe az új számokat.

Megeshet, hogy a megoldások kivitelezésébe hiba csúszott, de ezért elnézést kérek, időre van szükségem, hogy belejöjjek. Igyekszem az ilyen jellegű hibáimat korrigálni, remélem sikerül.

Kellemes karácsonyi ünnepeket és boldog új esztendőt kívánok a szerkesztőség minden tagjának.

Tisztelettel:

Boga Emese"

KONVEX FÜGGVÉNYEK ÖSSZEGEZÉSÉRŐL

Tóth László egyet. tanársegéd, Kolozsvár
Tuzson Zoltán tanár, Székelyudvarhely

1.*Bevezetés*. Legyen $S_p(n)=1^p+2^p+\ldots+n^p$ az első n természetes szám p-edik hatványösszege, ahol $p\in N^*$. Több módszer is ismeretes az $S_p(n)$ összegek kiszámítására, lásd [4], [6]. Igazolható, hogy

(1) $$S_p(n)=\frac{1}{p+1}\left(n^{p+1}+\frac{1}{2}C^1_{p+1}n^p+C^2_{p+1}B_2n^{p-1}+\ldots+C^p_{p+1}B_pn\right),$$

ahol $B_2,\ldots,B_p$ a Bernoulli számok, lásd pl. [2].

Innen következnek az alábbi határértékek, melyeket a Cesáro-Stolz tétellel is kiszámíthatunk:

(2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{S_p(n)}{n^{p+1}}=\frac{1}{p+1},$$

(3) $$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{S_p(n)}{n^{p+1}}-\frac{1}{p+1}\right)=\frac{1}{2}, \text{ stb.}$$

A (2) képlet akkor is érvényes, ha $p>-1$ valós szám; valóban

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_p(n)}{n^{p+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p=\int_0^1 x^p\,dx=\frac{1}{p+1}$$

és (2) hamis, ha $p\le -1$, hiszen ekkor $\lim_{n\to\infty}\frac{S_p(n)}{n^{p+1}}=\infty$. Felmerül a kérdés: milyen p valós számok esetén áll fenn a (3) összefüggés?

Ebben a dolgozatban általánosabb összefüggések következményeként levezetjük az

(4) $$\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}+\frac{n^p}{2}\le S_p(n)-\frac{n^{p+1}}{p+1}\le 1-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^p-\frac{1}{p+1}+\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^p$$

kettős egyenlőtlenséget, mely tetszőleges $n\in\mathbf{N}^*$ és $p\ge 1$ (illetve $0<p\le 1$) esetén érvényes, s melyből a fogó-tétel alkalmazásával (3) helyessége következik, bármely $p\in\mathbf{R}$, $p>0$ esetén. Megjegyezzük, hogy (3) nem áll fenn, ha $p\le 0$, lásd [1], 5. következmény.

2. *A Hadamard-egyenlőtlenségek*. Alkalmazni fogjuk az alábbi, Hadamard nevét viselő kettős egyenlőtlenséget, melyre gyakran hivatkoznak bizonyítás nélkül, ezért a teljesség kedvéért megadjuk a bizonyítást is.

Ha $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ kétszer deriválható konvex függvény, akkor

(5) $$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\le\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Bizonyítás (lásd [7]). A Lagrange-féle középértéktétel alapján és használva, hogy f' növekvő függvény, bármely $x,y\in[a,b]$ esetén

$$(x-y)f'(y)\le f(x)-f(y)\le(x-y)f'(x).$$

Legyen most $y=\frac{a+b}{2}$ és integráljunk x szerint. Így

$$f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx\le\int_a^b f(x)\,dx-(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f'(x)\,dx.$$

Itt $\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx=0$, s ezzel (5) bal oldala bizonyított.

Továbbá, parciálisan integrálva:

$$\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f'(x)\,dx=\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\Big|_a^b-\int_a^b f(x)\,dx=\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))-\int_a^b f(x)\,dx,$$

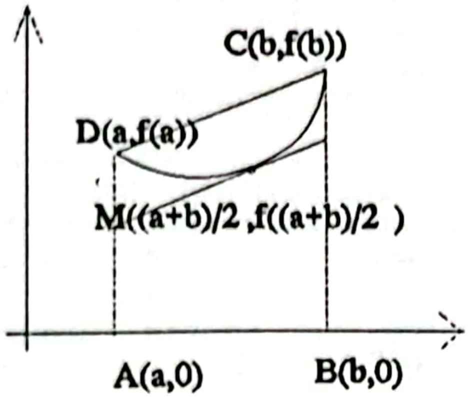
s így

$$2\int_a^b f(x)\,dx\le(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)),$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\le\frac{1}{2}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f(a)+f(b)}{4},$$

de f konvex függvény, így $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{f(a)+f(b)}{2}$, vö. [8], s ezzel bizonyított (5) jobb oldala is.

A Hadamard-egyenlőtlenségnek egyszerű geometriai értelmezése



van. Ha f pozitív konvex függvény, akkor f grafikus képe által az $[a,b]$ intervallumon meghatározott görbevonalú trapéz területe kisebb, mint az $ABCD$ trapéz területe és nagyobb, mint az $M\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ pontban húzott érintő által meghatározott trapéz területe.

Ha f konkáv függvény, akkor (5)-ben az egyenlőtlenségek fordított irányúak.

3. *Konvex függvények összegezése.*

Adott a valós szám esetén legyen $f:[a,\infty)\to R$ *kétszer deriválható konvex függvény. Ekkor bármely* $n\in N^*$ *és* h *pozitív valós szám esetén*

$$(6) \qquad \frac{f(a)+f(a+nh)}{2} \le \sum_{i=0}^{n} f(a+ih) - \frac{1}{h}\int_a^{a+nh} f(x)\,dx \le$$

$$\le f(a) - \frac{1}{2}f\left(a+\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{2}f\left(a+nh+\frac{h}{2}\right).$$

Bizonyítás. a) Az f függvényre alkalmazzuk a Hadamard-egyenlőtlenségeket az $[a+ih, a+(i+1)h]$ intervallumon:

$$f\left(a+ih+\frac{h}{2}\right) \le \frac{1}{h}\int_{a+ih}^{a+(i+1)h} f(x)\,dx \le \frac{f(a+ih)+f(a+(i+1)h)}{2}.$$

Összegezve $i=0,1,2,\ldots,(n-1)$-re, felírható, hogy

$$(7) \qquad \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a+ih+\frac{h}{2}\right) \le \frac{1}{h}\int_a^{a+nh} f(x)\,dx \le \sum_{i=0}^{n} f(a+ih) - \frac{f(a)+f(a+nh)}{2},$$

s innen (6) első egyenlőtlensége következik. Továbbá, használva, hogy f konvex, felírható, hogy

$$f(a+ih) \le \frac{1}{2}f\left(a+ih-\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{2}f\left(a+ih+\frac{h}{2}\right).$$

Összegezve $i=1,2,\ldots,n$-re:

$$\sum_{i=1}^{n} f(a+ih) \le \sum_{i=1}^{n-1} f\left(a+ih+\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{2}f\left(a+\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{2}f\left(a+nh+\frac{h}{2}\right),$$

majd mindkét oldalhoz hozzáadva $f(a)$-t:

$$\sum_{i=0}^{n} f(a+ih) \le \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a+ih+\frac{h}{2}\right) + f(a) - \frac{1}{2}f\left(a+\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{2}f\left(a+nh+\frac{h}{2}\right).$$

A kapott összefüggést (7)-tel összevetve (6) második egyenlőtlensége következik.

Ha f kétszer deriválható konkáv függvény, akkor (6)-ban az egyenlőtlenségek fordított irányúak.

Ha f *kétszer deriválható konvex (vagy konkáv) függvény,*

$$\lim_{n\to\infty} f(a+nh) = \infty \quad \textit{és} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{f\left(a+nh+\frac{h}{2}\right)}{f(a+nh)} = 1, \; \textit{akkor}$$

(8) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{f(a+nh)}\left(\sum_{i=0}^{n} f(a+ih)-\frac{1}{h}\int_a^{a+nh} f(x)\,dx\right)=\frac{1}{2} \quad \text{és}$$

(9) $$\sum_{i=0}^{n} f(a+ih)=\frac{1}{h}\int_a^{a+nh} f(x)\,dx+\frac{f(a+nh)}{2}+o(f(a+nh)).$$

Valóban, $f(a+nh)$-val osztva a (6) egyenlőtlenségeket és használva a feltételeket, valamint a fogó-tételt épp a (8) határértéket kapjuk. A (9) becslés azonnal következik (8)-ból, itt $o(f(a+nh))$ olyan függvényt jelöl, mely $n\to\infty$ esetén $f(a+nh)$-val osztva nullához tart.

4. *Alkalmazások.* a) Ha $f(x)=x^p$, $p\in R$, $p\geq 1$ konvex függvény, akkor (6), (8) és (9) alkalmazásával kapjuk, hogy

(10) $$\frac{a^p+(a+nh)^p}{2}-\frac{a^{p+1}}{h(p+1)}\leq \sum_{i=0}^{n}(a+ih)^p-\frac{(a+nh)^{p+1}}{h(p+1)}\leq$$
$$\leq a^p-\frac{1}{2}\left(a+\frac{h}{2}\right)^p-\frac{a^{p+1}}{h(p+1)}+\frac{1}{2}\left(a+nh+\frac{h}{2}\right)^p,$$

(11) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{p+1}}\sum_{i=0}^{n}(a+ih)^p=\frac{1}{h(p+1)}.$$

(12) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}\left(\sum_{i=0}^{n}(a+ih)^p-\frac{(a+nh)^{p+1}}{h(p+1)}\right)=\frac{1}{2},$$

(13) $$\sum_{i=0}^{n}(a+ih)^p=\frac{(a+nh)^{p+1}}{h(p+1)}+\frac{n^p}{2}+o(n^p).$$

Továbbá ha $a=h=1$ és n helyett $(n-1)$-et írunk, akkor visszakapjuk a bevezetésben szereplő (4), (2), (3) összefüggéseket, és a következő becsléshez jutunk:

(14) $$\sum_{k=1}^{n}k^p=\frac{n^{p+1}}{p+1}+\frac{n^p}{2}+o(n^p).$$

Ha $p\in(0,1)$, akkor $f(x)=x^p$ konkáv függvény, (10)-ben az egyenlőtlenségek fordított irányúak, a (11), (12), (13) és (14) összefüggések pedig érvényben maradnak.

b) Ha $a=h=1$ és $n:=n-1$, akkor (6) alkalmazásával tetszőleges f kétszer deriválható konvex függvényre bármely $n\in N^*$ esetén

(15) $$\frac{f(1)+f(n)}{2}\leq\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\,dx\leq f(1)-\frac{1}{2}f\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{2}f\left(n+\frac{1}{2}\right).$$

Ha f konkáv függvény, akkor (15)-ben az egyenlőtlenségek fordított irányúak. Például az $f(x)=\ln x$ konkáv függvény esetén

$$\frac{1}{2}\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}\leq\sum_{k=1}^{n}\ln k-n\ln n+n-1\leq\frac{1}{2}\ln n \quad \text{vagy}$$

(16) $$n^n e^{-n+1}\sqrt{\frac{2n+1}{3}}\leq n!\leq n^n e^{-n+1}\sqrt{n},\quad (\forall)\, n\in N^*.$$

Ebből nem vezethető le a $\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,e^n}{n^n\sqrt{n}}=\sqrt{2\pi}$ Stirling formula, de következik, hogy $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}$ és (16) eléggé éles egyenlőtlenségeket ad, bármely $n\in N^*$ esetén.

c) Alkalmazzuk a (15) egyenlőtlenségeket az $f(x)=x\ln x$ konvex függvényre:

$$\frac{n\ln n}{2}+\frac{n^2}{2}\ln n-\frac{n^2}{4}+\frac{1}{4} \le \sum_{k=1}^{n} k\ln k \le \frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(n+\frac{1}{2}\right) + \frac{n^2}{2}\ln n - \frac{n^2}{4}+$$

$$+ \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\ln\frac{3}{2} \text{ vagy}$$

(17) $$e^{\frac{1}{4n}} \le e^{\frac{n}{4}} n^{-\frac{n+1}{2}}(1^1.2^2\ldots n^n)^{\frac{1}{n}} \le e^{\frac{1}{4n}}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4n}}.\sqrt{\frac{2n+1}{2n}}.\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{3}{4n}},$$

$(\forall)\, n\in \mathbf{N}^*$.

Határértékre térve belátható, hogy

(18) $$\lim_{n\to\infty} e^{\frac{n}{4}} n^{-\frac{n+1}{2}}(1^1.2^2\ldots n^n)^{\frac{1}{n}} = 1,$$

lásd [5], 77.old., 15. feladat.

5. *Sorozatok konvergenciájának nagyságrendje.* Vezessük be a következő jelölést:

$$\Delta_n=\int_a^b f(x)\,dx-\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right),\quad (\forall)\, n\in \mathbf{N}^*.$$

Igazoljuk a következő állítást:

Ha $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ *kétszer deriválható konvex függvény, akkor tetszőleges* $n\in \mathbf{N}^*$ *esetén*

(19) $$\frac{b-a}{2n}\left(f\left(a+\frac{b-a}{2n}\right)-f\left(b+\frac{b-a}{2n}\right)\right) \le \Delta_n \le \frac{b-a}{2n}(f(a)-f(b)).$$

Bizonyítás. A (6) egyenlőtlenségekben válasszuk meg h-t úgy, hogy $h=\frac{b-a}{n}$, tehát most h függ n-től. A számítások elvégzése után éppen a (19) egyenlőtlenségeket kapjuk.

Továbbá n-nel szorozva és határértékre térve ($n\to\infty$) az előbbi egyenlőtlenségekben az f függvény folytonossága miatt kapjuk, hogy

(20) $$\lim_{n\to\infty} n\Delta_n=-\frac{b-a}{2}(f(b)-f(a)),$$

vö. [5], 76.old., 10. feladat, mely a Δ_n sorozat konvergenciájának nagyságrendjéről ad információt.

Speciálisan megválasztott konvex (konkáv) függvényekre érdekes összefüggéseket kapunk (vö. [3]).

a) Ha $f(x)=\frac{1}{x+1}$, $x\in[0,1]$ konvex függvény, akkor

(21) $$\lim_{n\to\infty} n\left(\ln 2-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n}\right)=\frac{1}{4}.$$

b) Ha $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$, $x\in[0,1]$ konkáv függvény, akkor

(22) $$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\pi}{4}-\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}\right)=\frac{1}{4}.$$

c) Ha $f(x)=\ln x$, $x\in[1,2]$ konkáv függvény, akkor

(23) $$\lim_{n\to\infty} n\left(2\ln 2-1-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)=-\frac{\ln 2}{2}.$$

d) Az $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$, $x\in[0,1]$ konvex függvényre

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{(k+n)^2}\right)=\frac{3}{8}. \tag{24}$$

SZAKIRODALOM

[1] *Andrica, D. és Tóth, L.*, " $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n$" típusú sorozatok konvergenciájának nagyságrendje, Mat. Lapok 10-11-12/1990, 346-351.

[2] *Bencze, M.*, A Bernoulli féle számok egy alkalmazása, Mat. Lapok 7/1989, 237-238.

[3] *Chiţescu, I., Chiriţă, M. és Constantinescu, A.*, A Riemann-integrál néhány alkalmazása, Mat. Lapok 4/1988, 137-145.

[4] *Năstăsescu, C., Niţă, C. és Popa, S.*, Algebra, tankönyv a X. osztály számára, Didaktikai és Pedagógiai Kiadó, Bukarest, 1985, 69-70 old.

[5] *Pólya, Gy. és Szegő, G.*, Feladatok és tételek az analízis köréből, I. kötet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1980.

[6] *Sándor, J.*, Véges összegek, Mat. Lapok 9/1987, 345-353.

[7] *Sándor, J.*, Some integral inequalities, Elemente der Mathematik (Basel) 43(1988), 177-180.

[8] *Stoica, T., Stănăşilă, O. és Gussi, Gh.*, A matematikai analízis elemei, tankönyv a XI. osztály számára, Didaktikai és Pedagógiai Kiadó, Bukarest, 1985, 185-187 old.

SZABÁLYOS RÁCS-SOKSZÖGEK ÉS IRRACIONÁLIS SZÁMOK

Sándor József tanár, Székelyudvarhely

A Középiskolai Matematikai Lapok 10/1986. számában Bogdán László [1] elegáns geometriai módszert mutat be arra vonatkozóan, hogy a síkban vagy térben mikor lehet egy rács-sokszög szabályos. (Rácspontoknak nevezzük a koordinátarendszernek azokat a pontjait, melyeknek koordinátái egész számok. Egy sokszög rács-sokszög, ha csúcsai mind rácspontok.) Hasonló eljárásokkal Kárteszi F. [4] és Scherrer W. [8] is foglalkoztak.

Annak bizonyítása, hogy nem létezik szabályos rács-háromszög a síkban, $\sqrt{3}$ irracionalitására támaszkodik. Megmutatjuk, hogy a többi szabályos rács-sokszög esetében is a kérdés bizonyos irracionális számokkal áll kapcsolatban.

A sík egy egyenesét rács-egyenesnek nevezzük, ha tartalmaz két különböző rácspontot. Nyílván, egy ilyen egyenesnél az abszcisszatengellyel bezárt szög tángense is racionális. Ebből következik, hogy bármely két rács-egyenes hajlásszögének tángense is racionális. Valóban, u, v -vel jelölve a rács-egyenesek abszcissza tengellyel bezárt hajlásszögét, az általuk bezárt szög $u-v$ és a $\operatorname{tg}(u-v)=\dfrac{\operatorname{tg}u-\operatorname{tg}v}{1+\operatorname{tg}u.\operatorname{tg}v}$ képlet alapján $\operatorname{tg}(u-v)$ racionális szám. Ha most egy n-oldalú rács-sokszög minden szöge egyenlő, akkor két egymásutáni oldal hajlászöge $\dfrac{2\pi}{n}$, s az előbbiek alapján $\operatorname{tg}\dfrac{2\pi}{n}$ racionális szám. Ez csak $n = 4$, 8 esetén lehetséges, amint kiderül az alábbiakból.