[3] *Călugăreanu G.*, Din generalizările constantei lui Euler, Gazeta Matematică 3/1935, 1–4.
[4] *Knopp K.*, Theory and applications of infinite series, Glasgow: Blackie, 1951.
[5] *Sireţchi Gh.*, Calcul diferenţial şi integral, vol. II, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985.
[6] *Tóth L.*, Asupra rapidităţii de convergenţă a unor şiruri de numere reale, Lucrările seminarului de „Didactica Matematicii", Cluj, 1987, 239–246.
[7] *Vernescu, A.*, Az Euler-állandót meghatározó sorozat konvergenciájának nagyságrendje, Matematikai Lapok 10–11/1983, 406–407.

A ξ (2m) MEGHATÁROZÁSA ELEMI MÓDSZEREK SEGÍTSÉGÉVEL

Tuzson Zoltán tanár, Székelyudvarhely

Az [1]-ben *Tóth László* tanár elemi módszerek segítségével bizonyítja az

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots+\frac{1}{n^4}+\ldots=\frac{\pi^4}{90}$$

$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\ldots+\frac{1}{n^6}+\ldots=\frac{\pi^6}{945} \qquad \text{stb.}$$

összefüggéseket, amelyeket *Leonard Euler* vezetett le először (egy bizonyítását lásd pl. [9]-ben a 620. oldalon).

A fenti eredmények bizonyítása általában a komplex függvénytan, hatványsorok és integrálok segítségével történik, éppen ezért figyelemre méltó az [1] elemi bizonyítása.

A szakirodalomban gyakran használatos a

$$\xi(s)=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\ldots+\frac{1}{n^s}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}, \text{ ahol } s\in(1,+\infty)$$

jelölés, ahol $\xi(s)$ az ún. Riemann féle „zeta" függvény (lásd. pl. [6], 422. oldal). Ez nem más, mint az

$$a_1\cdot 1^{-s}+a_2\cdot 2^{-s}+\ldots+a_n\cdot n^{-s}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot n^{-s}$$

ún. Dirichlet-sor sajátos esete, ahol $a_k=1$, $(\forall)\ k\in\mathbf{N}^*$.

Célkitüzésünk a továbbiakban az, hogy az [1]-ben ismertetett elemi módszerrel igazoljuk, hogy

$$\xi(2m)=1+\frac{1}{2^{2m}}+\frac{1}{3^{2m}}+\ldots+\frac{1}{n^{2m}}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}}=\frac{2^{2m-1}\cdot\pi^{2m}}{(2m)!}B_m$$

ahol $m\in\mathbf{N}^*$ és B_m az ún. Bernoulli-féle számokat jelöli.

Természetesen a fenti eredménynek több bizonyítása is van, de kevésbé elemiek (pl. [3]-ban Fourier-sorok, Gamma-függvény stb. segítségével).

A továbbiakban a Bernoulli-féle számok rövid ismertetését mutatjuk be. Ezen számok értelmezése több módon is lehetséges.

Pl a [9]-ben a 463. oldalon az $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$ sorbafejtést használva, mivel az $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ függvény is sorba fejthető, léteznek olyan β_k számok, amelyre

$$f(x) = \beta_0 + \frac{\beta_1}{1!} x + \frac{\beta_2}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\beta_n}{n!} x^n + \ldots$$

vagyis (1) $\frac{x}{e^x - 1} = \frac{1}{x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots} = \beta_0 + \frac{\beta_1}{1!} x + \frac{\beta_2}{2!} x^2 + \ldots$ tehát

$$(1') \qquad 1 = \left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \ldots\right) \cdot \left(\beta_0 + \frac{\beta_1}{1!} x + \frac{\beta_2}{2!} x^2 + \ldots\right).$$

Az (1) vagy (1') összefüggések által meghatározott β_k számokat *Bernoulli-féle számok*nak nevezik.

Mivel az így értelmezett β_k számok ily módon nehezen használhatók, ezért más definíciót kerestek.

Itt jut érvényre Euler zseniális ötlete, miszerint az azonosítási módszert a polinomok esetéből analógiával „átülteti" a „végtelen-fokú" polinomokra (hatványsorokra) is. Így jósolta meg először a $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ eredményt is (lásd pl. [7]-ben a 33. oldalon vagy [8]-ban az 1. oldalon).

Természetesen a sejtés nem bizonyítás erejű, de utat nyitott a további kibontakozások irányába. Így, ha az (1')-ben azonosítanánk mindkét oldalon az x együtthatóit a

$$(2) \qquad \beta_n = -\frac{1}{n+1}(C^0_{n+1}\beta_0 + C^1_{n+1}\beta_1 + \ldots + C^{n-1}_{n+1}\beta_{n-1}), \qquad \beta_0 = 1$$

összefüggéshez jutnánk. Éppen ezen okból kifolyólag a (2) összefüggést a Bernoulli-féle számok egy definíciójának tekinthetjük (lásd pl. [2]-ben).

Észrevehető, hogy $\beta_{2n+1} = 0$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$, továbbá pedig kiszámítható $\beta_1 = -\frac{1}{2}$, $\beta_2 = \frac{1}{6}$, $\beta_4 = -\frac{1}{30}$, $\beta_6 = \frac{1}{42}$, $\beta_8 = -\frac{1}{30}$, $\beta_{10} = \frac{5}{66}$ stb.

Az előbbiek alapján gyakran a $\beta_{2n} := (-1)^{n+1} B_n$ által értelmezett B_n számokat nevezik Bernoulli-féle számoknak (lásd pl. [3]-ban 387. oldalon vagy [9]-ben a 463. oldalon).

Így B_n-et tulajdonképpen a

$$(3) \qquad \frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{B_n}{(2n)!} x^{2n}$$

összefüggéssel értelmezik (lásd ugyanott). Mivel ez az értelmezés is kényelmetlen, a (3) alapján

$$x = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{B_n}{(2n)!} x^{2n}\right),$$

így Euler ötlete alapján ha azonosítjuk minkét oldalon x^{2n+1} együtthatóit, akkor a

$$(4) \qquad C^2_{2n+1} B_1 - C^4_{2n+1} B_2 + \ldots + (-1)^{n-2} C^{2n-2}_{2n+1} B_{n-1} + (-1)^{n-1} \cdot C^{2n}_{2n+1} B_n = \frac{2n-1}{2}, \quad B_1 = \frac{1}{6}$$

összefüggéshez jutunk, amelyet definíciónak tekintünk.

így

$$B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \quad B_4 = \frac{1}{30}, \quad B_5 = \frac{5}{66}; \ldots \text{ stb.}$$

A továbbiakban a (3), illetve (4) definíciók által bevezetett B_n alakú Bernoulli-féle számokat használjuk.

Természetesen felmerül a kérdés, hogy B_n megadható-e képlettel? A válasz az alábbiakból derül ki; ha a (4) összefüggésben n-nek rendre értékeket adunk az

$$(5)\quad \begin{cases} C_3^2 B_1 = \frac{1}{2} \\ C_5^2 B_1 - C_5^4 B_2 = \frac{3}{2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_{2n-1}^2 B_1 - C_{2n-1}^4 B_2 + \ldots + (-1)^{n-3} C_{2n-1}^{2n-2} B_{n-1} = \frac{2n-3}{2} \\ C_{2n+1}^2 B_1 - C_{2n+1}^4 B_2 + \ldots + (-1)^{n-2} C_{2n+1}^{2n-2} B_{n-1} + (-1)^{n-1} C_{2n+1}^{2n} B_n = \\ \qquad = \frac{2n-1}{2} \end{cases}$$

egyenletrendszerhez jutunk a $B_1, B_2, \ldots, B_n$ ismeretlenekkel. A Cramer-szabály értelmében $B_n = \frac{\Delta B_n}{\Delta}$, ahol

$$\Delta = \begin{vmatrix} C_3^2 & 0 & 0 \ldots\ldots\ldots & 0 & 0 \\ C_5^2 & -C_5^4 & 0 \ldots\ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_{2n-1}^2 & -C_{2n-1}^4 & \ldots\ldots & (-1)^{n-3} C_{2n-1}^{2n-2} & 0 \\ C_{2n+1}^2 & -C_{2n+1}^4 & \ldots\ldots\ldots & \ldots & (-1)^n C_{2n+1}^{2n} \end{vmatrix}$$

és Δ_{B_n} ugyanaz, mint Δ, csak az utolsó oszlopba a szabad tagokat írjuk be. Mivel Δ-ban a főátló egyik oldalán csupa 0 található, ezért azonnali számítások alapján kapjuk, hogy

$$(5')\quad B_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(2+2n)!!} \Delta_n, \text{ ahol } \Delta_n = \begin{vmatrix} C_3^2 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 1 \\ C_5^2 & C_5^4 & 0 \ldots & 0 & 3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_{2n-1}^2 & C_{2n-1}^4 & \ldots & C_{2n-1}^{2n-2} & 2n-3 \\ C_{2n+1}^2 & C_{2n+1}^4 & \ldots & C_{2n+1}^{2n-2} & 2n-1 \end{vmatrix}.$$

Természetesen, a Bernoulli-féle számokat az (5′) képletek segítségével is értelmezhetnénk.

Változócserékkel a (3)-mal egyenértékű más definíció is használatos, így pl. [3]-ban a 385. oldalon vagy [9]-ben a 464—465. oldalon az

$$(6)\quad x \cdot \operatorname{ctg} x = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{B_n}{(2n)!} (2x)^{2n}, \quad |x| < \pi$$

segítségével definiáljuk B_n-et. Ha ide beírnánk a

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \text{ és } \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

sorbafejtéseket és a

$$(6')\ x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\left(1-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{B_n}{(2n)!}(2x)^{2n}\right)$$

összefüggésben ismét Euler ötletét alkalmazva és azonosítva az x^{2n+1} együtthatóit, a

$$(7)\ \frac{C_{2n+1}^{2}}{2^{2n-2}}B_1-\frac{C_{2n+1}^{4}}{2^{2n-4}}B_2+\ldots+(-1)^{n-2}\frac{C_{2n+1}^{2n-2}}{2^2}B_{n-1}+(-1)^{n-1}C_{2n+1}^{2n}B_n=$$

$$=\frac{n}{2^{2n-1}},\quad B_1=\frac{1}{6}$$

összefüggéshez jutunk, amit definíciónak tekinthetünk. Ha az (5) mintájára egyenletrendszerrel meghatározzuk B_n alakját, belátható, hogy az (5')-hez jutnánk. A definíciók ekvivalenciája másként is igazolható.

A továbbiakban rátérünk a (*) bizonyítására, amihez csak a (7) definíció és XI. osztályos szintű fogalmak szükségesek.

Az [1]-ben használt módszert követve, az ismert $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^m=$ $=\cos m\alpha+i\sin m\alpha\ldots$ Moivre-féle képletből indulunk ki. A baloldalt Newton binomiális képlete alapján kifejtve, a valós és a képzetes részek azonosítása után a

$$(8)\ \sin m\alpha=\sin^m\alpha\,(C_m^1\operatorname{ctg}^{m-1}\alpha-C_m^3\operatorname{ctg}^{m-3}\alpha+C_m^5\operatorname{ctg}^{m-5}\alpha-\ldots)$$ összefüggéshez jutunk. Ha $m=2n+1$ és $\alpha\in\left\{\frac{\pi}{2n+1},\frac{2\pi}{2n+1},\ldots,\frac{n\pi}{2n+1}\right\}$, akkor $\sin m\alpha=0$ és $\sin\alpha\neq 0$, ezért a (8) alapján a

$$(9)\quad C_{2n+1}^{1}x^n-C_{2n+1}^{3}x^{n-1}+C_{2n+1}^{5}x^{n-2}-\ldots+(-1)^{n-2}C_{2n+1}^{2n-1}x+$$

$$+(-1)^{n-1}C_{2n+1}^{2n+1}=0$$

egyenlet gyökei $x_k=\operatorname{ctg}^2\frac{k\pi}{2n+1}$, ahol $k\in\{\overline{1,n}\}$.

A továbbiakban a Viète-féle összefüggések alapján, ha $s_1:=\sum\limits_{1}^{n}x_i$, $s_2:=\sum x_1x_2,\ldots,s_n:=x_1x_2\ldots x_n$, valamint ha $t_m^n:=x_1^m+x_2^m+\ldots+$ $+x_n^m$ bármely $m,n\in\mathbf{N}^*$ esetén, akkor

$$(10)\ t_m^n-s_1t_{m-1}^n+s_2t_{m-2}^n-\ldots+(-1)^{m-1}s_{m-1}t_1^n+(-1)^m\cdot ms_m=0,$$

$(\forall)\ m\leqslant n$, amennyiben $m,n\in\mathbf{N}$.

Ennek, a Newton-képlet néven ismert, összefüggésnek több bizonyítása lehetséges. Pl. [4]-ben szimmetrikus polinomok segítségével, vagy [5]-ben derivált segítségével vagy másképpen.

A mi esetünkben, mivel m egy előre rögzített szám, válasszuk meg m-et úgy, hogy $n\geqslant m$ (ezt a (9)-nél tesszük meg). Így a (9) alapján

$$t_m^n-\frac{C_{2n+1}^{3}}{C_{2n+1}^{1}}t_{m-1}^n+\frac{C_{2n+1}^{5}}{C_{2n+1}^{1}}t_{m-2}^n+\ldots+(-1)^{m-1}\frac{C_{2n+1}^{2m-1}}{C_{2n+1}^{1}}t_1^n+(-1)^m\frac{C_{2n+1}^{2m+1}}{C_{2n+1}^{1}}\cdot m=0,$$
(11)

$(\forall)\ m \leqslant n$. Azonban, ha $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, akkor $\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha$ vagy $\operatorname{ctg}\alpha < \frac{1}{\alpha} < \operatorname{cosec}\alpha$. De $\operatorname{cosec}^2\alpha = 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha$, így $\operatorname{ctg}^m \alpha < \frac{1}{\alpha^m} < (1 + \operatorname{ctg}^2\alpha)^m$, $(\forall)\ m \in N^*$. Ha most $\alpha = \frac{k\pi}{2n+1}$ értéket írjuk és összegezzük $k \in \{\overline{1, n}\}$ esetén, akkor az

$$x_k^m = \operatorname{ctg}^{2m}\frac{k\pi}{2n+1} < \left(\frac{2n+1}{k\pi}\right)^{2m} < \operatorname{cosec}^{2m}\frac{k\pi}{2n+1} = \left(1 + \operatorname{ctg}^2\frac{k\pi}{2n+1}\right)^m =$$

$$= (1 + x_k)^m \tag{12}$$

alapján eljutunk a következő egyenlőtlenséghez:

$$t_m^n = x_1^m + x_2^m + \ldots + x_n^m < \left(\frac{2n+1}{\pi}\right)^{2m} + \left(\frac{2n+1}{2\pi}\right)^{2m} + \ldots +$$

$$+ \ldots + \left(\frac{2n+1}{n\pi}\right)^{2m} < \sum_{k=1}^{n} (1 + x_k)^m. \tag{12'}$$

Azonban $\sum\limits_{k=1}^{n} (1 + x_k)^m = \sum\limits_{k=1}^{n} (1 + C_m^1 x_k + \ldots + C_m^m x_k^m) =$

$$= n + C_m^1 \sum_{k=1}^{n} x_k + \ldots + C_m^m \sum_{k=1}^{n} x_k^m = n + C_m^1 t_1^n + C_m^2 t_2^n + \ldots + C_m^m t_m^n,$$

ezért a (12') segítségével kapjuk, hogy:

$$\frac{\pi^{2m}}{(2n+1)^{2m}} \cdot t_m^n < \frac{1}{1^{2m}} + \frac{1}{2^{2m}} + \ldots + \frac{1}{n^{2m}} < \frac{\pi^{2m}}{(2n+1)^{2m}} \cdot (t_m^n + C_m^1 t_{m-1}^n + \ldots + C_m^{m-1} t_1^n + n). \tag{**}$$

Vegyük észre, hogy ha sikerül kiszámítani a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{t_m^n}{(2n+1)^{2m}} := a_m$ határértékeket, bármely $m \in N^*$ esetén, akkor a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_m^n + C_m^1 t_{m-1}^n + \ldots + C_m^{m-1} t_1^n + n}{(2n+1)^{2m}} = \lim_{n\to\infty} \frac{t_m^n}{(2n+1)^{2m}} + \lim_{n\to\infty} \frac{C_m^1}{(2n+1)^2} \cdot \frac{t_{m-1}^n}{(2n+1)^{2m-2}} +$$

$$+ \ldots + \lim_{n\to\infty} \frac{C_m^1}{(2n+1)^{2m-2}} \cdot \frac{t_1^n}{(2n+1)^2} + \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(2n+1)^{2m}} = a_m + 0 \cdot a_{m-1} + \ldots$$

$$\ldots + 0 \cdot a_1 + 0 = a_m$$

eredményre jutnánk, így a $(_{**})$ esetben alkalmazva a fogó-tételét, kiderül, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{2m}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi^{2m} \cdot t_m^n}{(2n+1)^{2m}}. \tag{13}$$

(mivel $n \geqslant m$ kezdettől teljesül, ha $n \to \infty$ méginkább).

A továbbiakban $m \in \mathbf{N}^*$ szerint teljes indukcióval igazoljuk, hogy

(14) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi^{2m}\cdot t_m^n}{(2n+1)^{2m}} = \frac{2^{2m-1}\cdot \pi^{2m}}{(2m)!} B_m, \ (\forall)\ m \in \mathbf{N}^*$$

Nyilván az $m = 1$ esetén a $\xi(2) = \frac{\pi^2}{6}$ már ismert.

A (11) összefüggés alapján azonnal belátható, hogy:

$$\frac{t_m^n}{(2n+1)^{2m}} = \frac{C^3_{2n+1} t^n_{m-1}}{(2n+1)^{2m+1}} - \frac{C^5_{2n+1} t^n_{m-2}}{(2n+1)^{2m+1}} + \ldots + (-1)^{m-1}\cdot \frac{C^{2m-1}_{2n+1} t_1}{(2n+1)^{2m+1}} +$$
$$+ (-1)^m \cdot \frac{mC^{2m+1}_{2n+1}}{(2n+1)^{2m+1}} = \frac{C^3_{2n+1}}{(2n+1)^3}\cdot\frac{t^n_{m-1}}{(2n+1)^{2m-2}} - \frac{C^5_{2n+1}}{(2n+1)^5}\cdot\frac{t^n_{m-2}}{(2n+1)^{2m-4}} +$$
$$+ \ldots + (-1)^{m-1}\frac{C^{2m-1}_{2n+1}}{(2n+1)^{2m-1}}\cdot\frac{t_1}{(2n+1)^2} + (-1)^m \frac{m\cdot C^{2m+1}_{2n+1}}{(2n+1)^{2m+1}},$$

így feltéve, hogy a (14) igaz $1, 2, \ldots, m-1$ esetén, valamint belátva, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{C^{2k+1}_{2n+1}}{(2n+1)^{2k+1}} = \frac{1}{(2k+1)!}, (\forall)\ k \in \{\overline{1, m}\}$, határértékre térve az előbbi összefüggésben, kapjuk, hogy:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{t_m^n}{(2n+1)^{2m}} = \frac{2^{m-3}\cdot B_{m-1}}{3!(2m-2)!} - \frac{2^{2m-5}B_{m-2}}{5!(2m-4)!} + \ldots$$
$$+ \ldots (-1)^{m-2}\frac{2B_1}{(2m-1)!\,2!} + (-1)^{m-1}\cdot\frac{m}{(2m+1)!}.$$

Mindkét oldalt $\frac{(2m+1)!}{2^{2m-1}}$-nel szorozva, kapjuk, hogy:

$$\frac{(2m+1)!}{2^{2m-1}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{t_m^n}{(2n+1)^{2m}} = \frac{C^{2m-2}_{2m+1}}{2^2}\cdot B_{m-1} - \frac{C^{2m-4}_{2m+1}}{2^4}\cdot B_{m-2} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{m-2}\frac{C^2_{2m+1}}{2^{2m-2}}\cdot B_1 + (-1)^{m-1}\frac{m}{2^{2m-1}}.$$

Felhasználva a (14) indukciós feltételt és a (7) definíciót, a

$$\frac{(2m+1)!}{2^{2m-1}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{t_m^n}{(2n+1)^m} = C^{2m}_{2m+1}B_m$$

összefüggéshez jutunk. Ezzel állításunkat igazoltuk.

Megjegyzések:

(1) Mivel $B_m = 2\cdot\frac{(2m)!}{(2\pi)^{2m}}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}} > 0,$

ezért a B_m Bernoulli-féle számok pozitívak.

(2) Mivel $B_m \in \mathbf{Q}_+^*$ és $\pi \notin \mathbf{Q}$, ezért $\zeta(2m) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}} \notin \mathbf{Q}$.

Nyitott kérdés a $\zeta(2m+1)$ racionális vagy irracionális volta, $m \geqslant 2$ pozitív egészre.

SZAKIRODALOM

[1] *Tóth László:* Néhány sor összegének a kiszámításáról, ML 1/1983.
[2] *Beneze Mihály:* A Bernoulli-féle számok egyik alkalmazása, ML, 7/1989.
[3] *Octav Mayer:* Teoria funcţiilor de o variabilă complexă, Editura Academiei R.S.R. Bucureşti, 1981.
[4] *C. Năstăsescu, C. Niţă:* Teoria calitativă a ecuaţiilor algebrice, Editura Tehnică, Bucureşti, 1974 (92. oldal).
[5] *Dumitru Buşneag, Ioan Maftei:* Teme pentru cercurile şi concursurile de matematică a elevilor, Scrisul Românesc, Craiova, 1983 (81. oldal).
[6] *Balázs Márton, Kolumbán József:* Matematikai analízis, Dacia könyvkiadó, Kolozsvár-Napoca, 1987 (422—423. oldal).
[7] *Pólya György:* Indukció és analógia, Gondolat kiadó, Budapest, 1988.
[8] *Benkő József:* Despre o identitate, GAMMA (XV), 1/1984, Brassó.
[9] *G. M. Fihtenholtz:* Curs de calcul diferenţial şi integral, vol. II. Editura Tehnică, Bucureşti, 1965.

AZONOSSÁG MEGOLDÁSA MINT DIOPHANTOSZI EGYENLET

Beneze Mihály tanár, Brassó

Legyen $S_n^k = 1^k + 2^k + \ldots + n^k$. Ismertesek a következő azonosságok: $S_n^3 = (S_n^1)^2$, $2(S_n^3)^2 = S_n^7 + S_n^5$, $3(S_n^2)^2 = 2S_n^5 + S_n^3$, $15(S_n^4)^2 = 6S_n^9 + 10S_n^7 - S_n^5$ stb. (lásd [2]).

A fentieket n ismeretlent tartalmazó diophantoszi egyenletek alakjában írjuk és a következőkben ezeket oldjuk meg.

1. *kijelentés.* Ha bármely n természetes számra $\sum_{k=1}^{n} x_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2$ és $x_n > 0$, akkor $x_k = k(k = \overline{1, n})$.

Bizonyítás. Legyen $n = 1$, akkor $x_1^3 = x_1^2$, ahonnan $x_1 = 1$. Feltételezzük, hogy $\sum_{k=1}^{n} x_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2$ megoldásai $x_k = k$ $(k = \overline{1, n})$ és igazoljuk, az állítást $n + 1$-re.

$$\sum_{k=1}^{n+1} x_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} x_k\right)^2, \text{ de mivel } x_k = k(k = \overline{1, n}), \text{ ezért}$$

$S_n^3 + x_{n+1}^3 = (S_n^1 + x_{n+1})^2$ vagy $x_{n+1}^2 - x_{n+1} - (n^2 + n) = 0$, aminek egyetlen pozitív megoldása $x_{n+1} = n + 1$, Q.E.D.

2. *kijelentés.* Ha bármely n természetes számra $2\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^4 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^5\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^7\right)$ és $x_n > 0$, akkor $x_k = k(k = \overline{1, n})$.

Bizonyítás. Legyen $n = 1$, akkor $x_1^3 + x_1 - 2 = (x_1 - 1)(x_1^2 + x_1 + 2) = 0$ egyenlet egyetlen megfelelő megoldása $x_1 = 1$. Az indukció módszerét használva feltételezzük, hogy $2\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^4 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^5\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^7\right)$ megoldásai $x_k = k(k = \overline{1, n})$. Most igazoljuk $n+1$-re: $2\left(\sum_{k=1}^{n+1} x_k\right)^4 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} x_k^5\right) + \left(\sum_{k=1}^{n+1} x_k^7\right)$, de

CamScannerrel szkennelve