$\frac{1}{\sqrt{e}-1}$-gyel, azaz $\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{\sqrt{e}-1}$.

Ki lehet mutatni, hogy $\frac{3n-1}{2n} < \frac{1}{n}x_n < 2-\frac{1}{n}$.

A feladatot jól oldotta meg: *Szilágyi László*.

EREDMÉNYEK

IX. oszt.

1.díj: Szakács Botond (Sz.M.); **2.díj:** Gábos János (Sz.M.); **3.díj:** Biró Ágnes (T.Á.); **Dicséret:** Péter Zsolt (Sz.M.), Kolcza Jenő (Sz.M.), Kerekes Péter (Sz.M.).

X. oszt.

1.díj: Csapó Hajnalka (M.Á.); **2.díj:** Lázár Emese (T.Á.); **3.díj:** Benk Szilárd (K.F.); **Dicséret:** Szabó Árpád (B.F.), Ráduly László (M.Á.), Szenes Erika (K.F.).

XI. oszt.

1.díj: Ivánka Gábor (M.Nicoară); **2.díj:** Ferencz Ildikó (Sz.M.); **3.díj:** Szilágyi Róbert (M.Á.); **Dicséret:** Fejér Izabella (Á.L.), Molnár Zoltán (Sz.M.), Balogh Attila (Sz.M.).

XII. oszt.

1.díj: Szilágyi László (B.F.); **2.díj:** Köpe Zoltán (Sz.M.); **3.díj:** Biró Ádám (Sz.M.); **Dicséret:** Buzogány Endre (T.Á.), Tóthpál László (Á.L.), Nyáguly Sándor (Á.L.).

A VÉGTELEN LESZÁLLÁS ELVE
("descente infinie")

Tusson Zoltán tanár, Székelyudvarhely

A módszert P. FERMAT használta legelőször, az $x^4+y^4=z^4$ egyenlet megoldása végett (erre a továbbiakban visszatérünk). Az említett módszer egy indirekt bizonyítási módszer; pontosabban a teljes indukció indirekt formája. Minden indirekt bizonyítás úgy kezdődik, hogy tagadjuk a következtetést és azzal fejeződik be, hogy (az előbbiből kifolyólag) valamilyen ellentmondáshoz jutunk (pl. a feltevéssel, egy axiómával, egy tétellel stb-vel jutunk ellentmondásba).

A módszer azon az egyszerű tulajdonságon alapszik, hogy a természetes számok halmaza (így bármely részhalmaza is) alulról korlátos, azaz van egy alsó határa (*inf* **N**).

A módszer lényege: a megoldandó feladatot, egy bizonyos eljárás alapján, kapcsolatba hozzuk a természetes számok egy végtelen csökkenő sorozatával; így egy lehetetlenséghez jutunk, amivel az indirekt bizonyítás véget ér.

A bemutatásra kerülő módszer főleg a számelmélet hasznos eszköze (pl. oszthatóságok, diofantoszi egyenletek és egyenletrendszerek stb) de -amint az alábbiakból is kiderül- a matematika más területén is alkalmazható.

Az idők folyamán a módszer számos változata jelent meg. Így nagyon gyakori az a változat, amikor pl. egy egyenlet megoldása során feltételezzük, hogy létezik egy legkisebb pozitív egész megoldás és valamilyen módon előállítunk egy ennél kisebb pozitív egész megoldást is.

A továbbiakban a módszer szépségét és hasznosságát megoldott feladatok által mutatjuk be. A jegyzet végén olyan feladatokat gyűjtöttünk össze, amelyek -a bemutatott feladatok mintájára- a szóbanforgó módszerrel megoldhatók.

1. feladat. *Igazoljuk, hogy $\sqrt{2}$ irracionális szám.*

Bizonyítás. Feltételezzük az ellenkezőjét, vagyis hogy léteznek olyan $p_1, q_1 \in N^*$ számok, amelyekre $\sqrt{2}=\frac{p_1}{q_1} \Leftrightarrow 2q_1^2=p_1^2$. Mivel a bal oldal páros szám p_1-nek párosnak kell lennie, vagyis létezik $p_2 \in N^*$ úgy, hogy $p_1=2p_2$ és így $q_1^2=2p_2^2$. Észrevehető, hogy $p_1>p_2$ és $q_1=2q_2$ $(q_2 \in N^*)$. Továbbá $2q_2^2=p_2^2$ és $q_1>q_2$. Folytatva az eljárást eljutnánk egy $p_1 > p_2 > \ldots > p_{n-1} > p_n > \ldots$ végtelen csökkenő, természetes számokból álló sorozathoz, ami abszurdum.

2. feladat. *Az x, y, z pozitív racionális számokra fennáll az* $x^3+3y^3+9z^3-9xyz=0$ *egyenlőség. Igazoljuk, hogy x=y=z=0.*

Bizonyítás. Feltételezhetjük, hogy $x,y,z \in N^*$ (ez elérhető közös nevezőre való hozással). Legyen (x_1,y_1,z_1) egy természetes számokból álló megoldáshalmaz. Így $x_1^3+3y_1^3+9z_1^3-9x_1y_1z_1=0$. Észrevehető, hogy $x_1=3x_2$ $(x_2 \in N^*)$, így $9x_2^3+y_1^3+3z_1^3-9x_2y_1z_1=0$. Továbbá $y_1=3y_2$ $(y_2 \in N^*)$, így szükségszerűen fenn kell állnia a $3x_2^3+9y_2^3+z_1^3-9x_2y_2z_1=0$ egyenlőséghek. Végül, $z_1=3z_2$ $(z_2 \in N^*)$, tehát $x_2^3+3y_2^3+9z_2^2-9x_2y_2z_2=0$. Ugyanakkor észrevehető, hogy $x_1>x_2$, $y_1>y_2$, $z_1>z_2$ és mivel az eljárás tovább folytatható, eljutunk az $x_1 > x_2 > \ldots > x_{n-1} > x_n > \ldots$ természetes számsorozathoz és ezzel állításunkat bizonyítottuk.

Érdemes megjegyezni, hogy mivel az $x_2^3+3y_2^3+9z_2^3-9x_2y_2z_2=0$ egyenlet az eredetivel azonos alakú, feltételezhettük volna, hogy (x_1,y_1,z_1) egy legkisebb megoldáshármas (pl. x_1 minimális), így az (x_2,y_2,z_2) megoldáshármas ellentmond ennek, s a feladatot a negatív racionális számok halmazán is megoldottuk.

3. feladat. *Igazoljuk, hogy a* $7(x^2+y^2)=z^2+t^2$ *egyenletnek nincs megoldása a szigorúan pozitív egész számok halmazán.*

Bizonyítás. A 7-tel való osztás során ha $z\neq 7z_1$ és $t\neq 7t_1$ $(z_1,t_1 \in N^*)$, akkor a z^2+t^2 számok 7-tel való osztási maradékai az {1, 2, 3, 4, 5, 6} halmaz elemei lehetnek. Mivel az egyenlet bal oldala osztható 7-tel, $z=7z_1$ és $t=7t_1$. De így $x^2+y^2=7(z_1^2+t_1^2)$ és az előbbi indoklás alapján $x=7x_1$, $y=7y_1$ $(x_1,y_1 \in N^*)$, így $7(x_1^2+y_1^2)=z_1^2+t_1^2$. Figyelembe véve, hogy $x>x_1$, $y>y_1$, $z>z_1$, $t>t_1$, folytatva az eljárást az $x>x_1>\ldots>x_n>\ldots$ természetes számsorozathoz jutunk, így állításunkat bizonyítottuk.

4. feladat. *Oldjuk meg a természetes számok halmazán az*

$x^2+y^2+z^2=2xyz$ *egyenletet!*

Megoldás. $x=y=z=0$ megoldás. Bebizonyítjuk, hogy más megoldás nincsen.

Feltételezzük az ellenkezőjét, vagyis, hogy $(x_0, y_0, z_0) \in \in N^*\times N^*\times N^*$ egy megoldáshármas

a) ha $x_0=2x_1$, $y_0=2y_1+1$, $z_0=2z_1+1$ az egyenlőség nem állhat fenn.

b) ha $x_0=2x_1$, $y_0=2y_1$, $z_0=2z_1+1$ az egyenlőség szintén nem állhat fenn.

Szimmetria miatt az egyenlőség minden olyan esetben lehetetlen, amikor nem mind a három szám páros. Tehát $x_0=2x_1$, $y_0=2y_1$, $z_0=2z_1$, vagyis $x_1^2+y_1^2+z_1^2=2^2x_1y_1z_1$. Hasonló módon fenn kell állnia az $x_1=2x_2$, $y_1=2y_2$, $z_1=2z_2$ egyenlőségeknek is, ahol $x_2, y_2, z_2 \in N^*$. Így $x_2^2+y_2^2+z_2^2=2^3.x_2y_2z_2$. Folytatva az eljárást, annak ellenére, hogy nem jutunk az eredeti egyenlettel egyező alakú egyenlethez, mégis eljuthatunk egy $x_0 > x_1 > x_2 > \ldots > x_{n-1} > x_n > \ldots$ természetes számsorozathoz, ami ellentmondást jelent.

5. feladat. *Legyenek* $r_1<r_2<\ldots<r_n<\ldots$ *természetes számok, továbbá a is természetes szám. Ha bármely* $k\in N^*$ *esetén* $A_k := =\{a+r_km \mid m\in N^*\}$, *igazoljuk, hogy az* $A_k (k\geq 1)$ *halmazoknak nincs közös elemük.*

Bizonyítás. Feltételezzük az ellenkezőjét, és legyen $x_0 \in \in\bigcap_{k\geq 1} A_k$. Következik, hogy $x_0 = a+r_1m_1 = a+r_2m_2 = a+r_3m_3 = \ldots \ldots = a+r_nm_n = \ldots$

Mivel $r_1<r_2<\ldots<r_n\ldots$, felírható, hogy $m_1>m_2>\ldots>m_n>\ldots$, vagyis a természetes számok egy végtelen sorozatához jutunk, ami abszurdum.

6. feladat. *Legyen* $a_1\in N$ *és* $a_{n+1}=\sqrt{1+a_n}$ *bármely* $n\in N^*$ *esetén. Igazoljuk, hogy a sorozatnak nem mindegyik tagja racionális szám.*

Bizonyítás. Feltételezzük az ellenkezőjét, vagyis azt, hogy $a_n\in Q^*$, $(\forall) n\in N^*$. Igazoljuk, hogy ekkor $a_n\in N^*$ is teljesül. A matematikai indukció módszerét használva, mivel $a_1\in N^*$, ha feltételezzük, hogy $a_n\in N^*$ és $a_{n+1}\in Q_+^*-N$, akkor $a_{n+1}=\frac{p}{q}$, $(p,q)=1$, $q>1$, $p,q\in N^*$ alapján a rekurzió szerint $\frac{p^2}{q^2}=1+a_n\in N^*$, ami ellentmondás. Tehát bármely $n\in N^*$ esetén $a_n\in N^*$. Igazoljuk, hogy a_n monoton csökkenő, vagyis $a_1>a_2>\ldots>a_n>a_{n+1}>\ldots$ és ez elég az ellentmondáshoz. Valóban, ha $a_2<a_1$, akkor $a_1^2-a_1-1>0$, ami $a_1\in N^*-\{1\}$ esetben igaz (ha $a_1=1 \Rightarrow a_2=\sqrt{2}\notin Q$, s így a feladat már indulásból banális). Feltételezve, hogy $a_{n-1}>a_n$, a rekurziós összefüggés alapján $a_n>a_{n+1} \Leftrightarrow \sqrt{1+a_{n-1}}>\sqrt{1+a_n}$ is belátható bármely $n\in N^*$ esetén.

7. feladat. *Igazoljuk, hogy az* $x^4+y^4=z^4$ *ún. Fermat egyenletnek nincs megoldása a szigorúan pozitív egész számok halmazán.*

Bizonyítás (vö. [1]). Elegendő bizonyítani, hogy az

$x^4+y^4=z^2$ egyenletnek nincs megoldása az N^*-on.

Legyen (x,y,z) egy pozitív egészekből álló megoldása az $x^4+y^4=z^2 \Leftrightarrow (x^2)^2+(y^2)^2=z^2$ egyenletnek. Így a Pitagorász-féle számhármasokról tanultak alapján (vö. [1], [2])

$$x^2=2mn,\ y^2=m^2-n^2,\ z=m^2+n^2,$$

ahol $(m,n)=1$ és különböző paritásúak. Vegyük észre, hogy nem lehet m páros és n páratlan, hiszen $y^2=4k-1$ alakú lenne, márpedig ilyen alakú teljes négyzet nincs. Tehát $n=2q$, és így $\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{m.n}{2}=mq$. Mivel $(m,n)=1$, $(m,q)=1$, így $m=s^2$, $q=t^2$ és $(s,t)=1$. Tehát $y^2=m^2-n^2 \Leftrightarrow (2t^2)^2+y^2=s^4$, $(2t^2,y)=1$. Látható, hogy $2t^2$, y, és s^2 pitagorászi számok, vagyis $2t^2=2M.N$, $s^2=M^2+N^2$ és $(M,N)=1$, de ez utóbbi miatt $M=\alpha^2$, $N=\beta^2$ $(\alpha,\beta\in N^*)$ és felírható, hogy $\alpha^4+\beta^4=s^2$, ahol $(\alpha,\beta,s)=1$. Mivel $s^2=m$, $z=m^2+n^2$, következik, hogy $s<z$, vagyis az adott egyenletnek egy újabb (α,β,s) megoldáshármasát kaptuk. Az eljárás tovább folytatható, vagy indulásból feltételezhető, hogy z értéke minimális.

8. feladat. *Igazoljuk, hogy két zérótól különböző természetes szám négyzetének összege és különbsége nem lehet egyidejűleg négyzetszám.*

Bizonyítás. Feltételezzük az ellenkezőjét, és keressük az $x^2+y^2=z^2$; $x^2-y^2=t^2$ egyenletrendszer megoldását a pozitív egész számok halmazán. Legyenek x, y, z, t azok a megoldások, amelyekre x^2+y^2 minimális. Belátható, hogy $\frac{z-t}{2}$, $\frac{z+t}{2}\in Z$ és $\frac{z-t}{2}$, $\frac{z+t}{2}$, x relatív prím pitagorászi számhármas. (vö. [2]), hiszen $\left(\frac{z-t}{2}\right)^2+\left(\frac{z+t}{2}\right)^2=x^2 \Leftrightarrow z^2+t^2=2x^2$ és ez igaz.

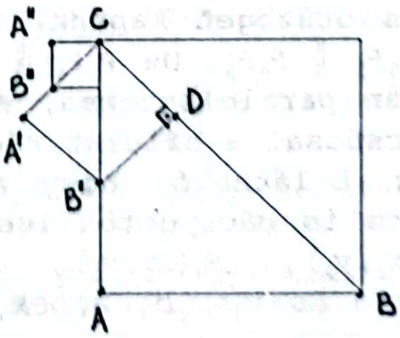
Így léteznek a különböző paritású $(m,n)=1$ számok úgy, hogy

$$y^2=\frac{z^2-t^2}{2}=2.\frac{z-t}{2}.\frac{z+t}{2}=2.2mn(m^2-n^2)=4mn(m-n)(m+n)$$

legyen, ebből pedig azonnal adódik, hogy m, n, $m-n$ és $m+n$ négyzetszámok ($(m,n)=1$!). Legyen $m=x_1^2$, $n=y_1^2$, ekkor $x_1^2+y_1^2$ és $x_1^2-y_1^2$ négyzetszámok, továbbá $0<x_1^2+y_1^2<x^2+y^2<0$, ami ellentmondás.

9. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy a négyzet oldala és átlója összemérhetetlenek* (vagyis nincs olyan egységszakasz, amely maradék nélkül ráférne a négyzet oldalára is és az áltójára is)!

Bizonyítás. A B pontból kiindulva, mérjük rá az oldalt az átlóra. Legyen a végpont D. Ez csak egyszer sikerül. Állítsunk a D pontban a BD-re merőlegest, amely az AC oldalt B'-ben metszi. A $B'DC$ háromszög egyenlő szárú és derékszögű (hiszen $B'DC\sphericalangle=90°$, $DCB'\sphericalangle=45° \Rightarrow DB'C\sphericalangle=45° \Rightarrow DC=DB'$). Ezt a háromszöget egészítsük ki $B'DCA'$ négyzetté. Az előző eljárást erre a négyzetre is megismételjük. Az eljárás végtelenségig folytatható. Minden alkalommal az átlón egy

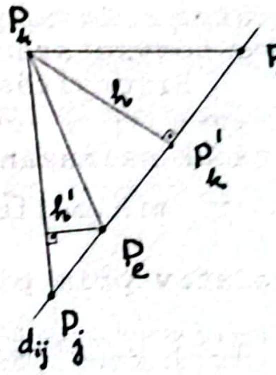


újabb maradék adódik, amely kisebb az előzőnél: $CD > CD' > CD'' > CD''' > \dots$

Tegyük fel, hogy a kiindulásul vett négyzet átlójának és oldalának van közös mértéke, vagyis a négyzet oldalának (jelöljük a-val) egy törtrésze, az e szakasz, a d átlóra is maradék nélkül ráfér, így $a=pe$, $d=qe$, $p,q \in N^* \Rightarrow CD = d-a = (q-p).e := k_1.e$, ahol $k_1 = q-p \in N^*$. Mivel a CD', CD'', ... szakaszok a megfelelő átló és négyzetoldal különbsége, a $CD' = k_2.e$, $CD'' = k_3.e$, ... adódik, és mivel $k_1 > k_2 > k_3 > \dots > k_n > \dots$, egy csökkenő pozitív egészekből álló sorozathoz jutunk, mellyel a bizonyítás véget ér.

10. feladat. *Ha* $P_1, P_2, \dots, P_n$ *véges ponthalmaz a síkban és a két* (P_i *és* P_j, $i,j \in \overline{1,n}$) *pontján átmenő,* d_{ij}*-vel jelölt egyenes átmegy még egy harmadik* P_e *ponton is, akkor az összes pont egy egyenesen van* (A.J.J. Sylvester feladata (1893), vö. [3])

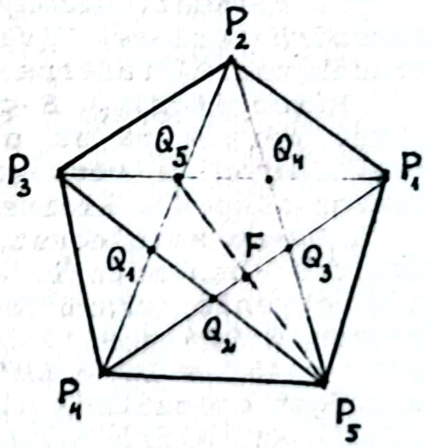
Bizonyítás. Tegyük fel az ellenkezőjet, tehát létezik három nem kollineáris pont. Képezzük az összes lehetséges háromszöget. Ezek közül kiválasztjuk azt a $P_iP_jP_k$ háromszöget, amely a legkisebb $P_kP_k' = h$-val jelölt magasságot tartalmazza. A feltételezés értelmében a d_{ij} még egy P_e ponton is átmegy. A d_{ij} egyenesen a P_i, P_j és P_e pontok közül legalább kettő a P_k' ugyanazon oldalán helyezkedik el. Az általánosság csorbítása nélkül feltételezhetjük, hogy ezek a P_j és P_e pontok, és hogy hármuk közül P_e van a legközelebb a P_k'-hez. Ekkor $P_jP_eP_k$ háromszög P_e-ből húzott magassága $h'<h$, ami ellentmondás.



11. feladat. *Legyen* xOy *derékszögű koordináta-rendszer a síkban és* a, b *két rögzített pozitív valós szám. Az* {(na, mb) | m,n ∈ **Z**} *halmaz pontjai egy derékszögű hálózatot alkotnak. Egy* n *oldalú szabályos sokszög* (n-szög)*, értelmezés szerint, akkor van a hálozatba írva, ha minden csúcsa rácspont.*

Igazoljuk, hogy nem létezik hálózatba írt szabályos ötszög.

Bizonyítás. Feltételezzük az ellenkezőjét. Legyen $P_1P_2P_3P_4P_5$ egy hálózatba írt ötszög. Meghúzva az ötszög mindegyik átlóját, egy $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5$ szabályos ötszöget kapunk. Mivel $P_3P_1 \parallel P_4P_5 \Rightarrow Q_5P_1 \parallel P_4P_5$. De $P_2P_4 \parallel P_1P_5$, így $P_4P_5P_1Q_5$ olyan paralelogramma, amelynek P_4, P_5, P_1 csúcsai a hálózat rácspontjai. Könnyen belátható, hogy a negyedik (Q_5) csúcs is rácsponton lesz. Ha $P_1(x_1,y_1)$, $P_4(x_2,y_2)$, $P_5(x_3,y_3)$, $Q_5(x_4,y_4)$, ahol $x_i=n_ia$ és $y_i=m_ib$, $a,b \in R$, $m_i,n_i \in Z$, $(\forall) i=\overline{1,4}$, akkor a P_1P_4 átló F felezőpontjának koordinátái:



$F\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$. A paralelogramma átlói felezik egymást, így Q_5 pontosan a P_5 F-re vonatkozó szimmetrikusa, vagyis

$$x_4 = x_1+x_2-x_3 = n_1a+n_2a-n_3a = (n_1+n_2-n_3)\,a := n_4a,$$
$$y_4 = y_1+y_2-y_3 = m_1b+m_2b-m_3b = (m_1+m_2-m_3)\,b := m_4b,$$

vagyis x_4, y_4 pontosan a rácspontoknak megfelelő koordináták. (Hasonló bizonyítás végezhető a többi Q_i pont esetén is.) Könnyen belátható, hogy a kapott $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5$ ötszög oldala kisebb az eredeti ötszög oldalánál. Így feltételezve, hogy az eredeti ötszög oldalának a hossza minimális, vagy figyelembe véve, hogy megismételve az eljárást egy adott számú lépés után az ötszög oldalhossza kisebb, mint $\min\{a,b\}$ (egy hálózati téglalap belsejébe kerül) mindenképpen ellentmondáshoz jutunk.

A módszer jobb elmélyítése végett, javasoljuk a következő feladatok megoldását:

Igazoljuk, hogy a következő egyenletek nem rendelkeznek megoldással a pozitív egész számok halmazán:

1) $x^3+2y^3+4z^3-4xyz=0$; 2) $x^2+9y^2-2z^2=3$; 3) $2x^2+3y^2=z^2$;
4) $x^2+y^2+z^2=x^2y^2$; 5) $a^4=b^4+c^2$; 6) $u^4-v^4=2t^2$; 7) $3x^2-y^2=5^z$;
8) $x^2+y^2+z^2+t^2=2xyzt$;
9) $6(x^2+y^2)=z^2+t^2$; igaz-e ez $5(x^2+y^2)=z^2+t^2$ -re is?

10) Ha $x,y,z\in \mathbf{N}$ és $x^2+y^2+1=xyz$, igazoljuk, hogy $z=3$.

11) Igazoljuk, hogy $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ nem racionális számok.

12) Bizonyítsuk be, hogy nem létezik olyan derékszögű háromszög, amelynek oldalai természetes számok, területe pedig négyzetszám!

13) Bizonyítsuk be, hogy három egymástól különböző természetes szám negyedik hatványa nem alkothat számtani sorozatot!

14) Bizonyítsuk be, hogy egy szabályos háromszög oldala és magassága összemérhetetlen.

15) Bizonyítsuk be, hogy ha egy síkbeli véges ponthalmaz tetszőleges három pontján átmenő kör átmegy még egy negyedik ponton is, akkor a halmaz összes pontjai egy körön vannak (Sylvester tételének egy analógja).

16) Igazoljuk, hogy ha $n \notin \{3,4,6\}$, akkor nem létezik hálózatba írt szabályos n-szög (vö. [3]).

17) Legyenek $a,b \in \mathbf{R}^*$ $(a,b)=1$ úgy, hogy $\frac{a}{b}$ tizedes szakaszos tört. Ha $n\in \mathbf{N}^*$ a legkisebb szám, amelyre $(10^n-1):b$, igazoljuk, hogy a szakasz pontosan n számjegyből áll.

18) Legyenek $(a,b)=1$, $a,b\in \mathbf{N}^*$. Igazoljuk, hogy a^2+b^2 bármely p prímosztója $p=x^2+y^2$ alakú, ahol $x,y\in \mathbf{N}$.

19) Milyen $a,b\in \mathbf{N}^*$ esetén lesz igaz, hogy $ab \mid a^2+b^2-a-b+1$?

SZAKIRODALOM

[1] *Kiss Ernő:* A számelmélet elemei, Dacia könyvkiadó, Kolozsvár, 1987.
[2] *Sárközi András - Surányi János:* Számelméleti feladatgyűjtemény, Tankönyvkiadó, Budapest, 1983.
[3] *Dr. Benkő József:* Síkbeli véges halmazokról, Matematikai Lapok, 8/1978.
[4] A XXIX NMO feladatainak megoldása, Középiskolai Matematikai Lapok, 7/1988.
[5] *Reimann István:* A geometria és határterületei, Gondolat Kiadó, Budapest, 1986.