mechanika matematikai alapjairól, foglalkozott funkcionálanalízissel, topológiával, jelentőset alkotott a játékelméletben, numerikus matematikában, majd a számítástechnikában. Élete végén az automaták általános elméletével foglalkozott, könyvet írt az agy és a számítógép kapcsolatáról.

1944 nyarán H. H. Goldstine az aberdeeni vasútállomáson ismeretlenül megszólította a híres matematikust, akit látásból ismert. Hosszasan elbeszélgettek, főleg Goldstine munkájáról. Neumannt minden új dolog érdekelte, rögtön átlátta az elektronikus számítógép kifejlesztésének fontosságát. Nem sokkal ezután Neumann bekapcsolódott a Philadelphiában folyó kutatásokba, és ezeknek egyik vezéralakja lett. Neki tulajdonítják a *tárolt program elvét*, amely a mai számítógépek fontos jellemzője. A számítógép központi tárolója egyaránt tartalmazza a programot, és a megoldandó feladat adatait. Az első számítógép, amely ezen az elven alapul az 1949-ben készült EDVAC volt. Az addig tervezett számítógépek csak a feladat adatait tartalmazták, a program "kívülről" jött, minden új feladat esetében a gépet újra kellett huzalozni, ez jelentette a programot. A ma legelterjedtebb számítógépeket, amelyek az utasításokat egymásután hajtják végre, Neumann-elvű gépeknek szokás nevezni.

Neumann János nem volt száraz, elzárkózó tudós, érdekelték a fejlődés filozófiai és morális vetületei is: "A fejlődés ellen nincs gyógymód. Szükségképpen meg kell hiúsulnia minden olyan törekvésnek, hogy automatikus biztonsági csatornákat találjunk a haladás jelenlegi robbanékony változatai számára... Előre kész receptet kérni nem lenne ésszerű. Csak a szükséges emberi tulajdonságokat határozhatjuk meg: türelem, rugalmasság, intelligencia."

ÖSSZEGEK RACIONÁLIS TÖRTFÜGGVÉNYKÉNT VALÓ FELÍRHATÓSÁGÁRÓL (II)

Dáné Károly tanár, Marosvásárhely és **Tuzson Zoltán** tanár, Székelyudvarhely

1. *Bevezetés.* Ez a jegyzet folytatása a szerzők azonos című jegyzetének, mely a MatLap 7/1997. számában jelent meg. Az illető cikkben az összegek racionális törtfüggvényként való felírhatóságát tanulmányozva, a következő szükséges feltételt állapítottuk meg:

Ha az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozatnak végtelenül sok 0-tól különböző tagja van és az $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ összeg felírható n racionális törtfüggvényeként, azaz léteznek a P és Q valós együtthatós polinomok úgy, hogy $S_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$, bármely $n \in N^*$ esetén, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

Belátható, hogy az $S_\alpha(n) = 1^\alpha + 2^\alpha + 3^\alpha + \ldots + n^\alpha$ $(\alpha \in R)$ összeg racionális törtfüggvényként való felírhatóságának kérdése nem dönthető el a fenti kritérium alapján. A jelen jegyzet célja ennek a kérdésnek a tanulmányozása.

2. *Az $S_\alpha(n) = 1^\alpha + 2^\alpha + 3^\alpha + \ldots + n^\alpha$ összeg vizsgálata*

Jegyzetünkben megállapítjuk a következőket:

A) $\alpha \in N$ esetén az $S_\alpha(n)$ összeg felírható n polinomfüggvényeként.

B) Ha $\alpha = -1$, vagy $\alpha \in R \setminus Z$, akkor az $S_\alpha(n)$ összeg nem írható fel n racionális törtfüggvényeként. Ennek bizonyítása képezi jegyzetünk tulajdonképpeni célját. A bizonyítás során három esetet különböztetünk meg, éspedig $\alpha=-1$, $\alpha>-1$, $\alpha<-1$, amit az $S_\alpha(n)$ sorozat konvergenciája indokol.

C) Ha $\alpha<-1$ egész szám, akkor módszereink nem elégségesek a felírhatóság kérdésének eldöntésére. Ezért szívesen vennénk, ha valaki ezt az esetet is tárgyalná, lehetőleg a líceumi tananyag keretein belül.

Bizonyítások, megjegyzések

A) $\alpha\in N$

Ezt az esetet a X. osztályos algebra tankönyv II. fejezetének 3. paragrafusa (Newton binomiális tétele és alkalmazásai) részletesen tárgyalja, ezért itt eltekintünk a bizonyítástól. Emlékeztetünk, hogy;

$$S_0(n)=n,\ S_1(n)=\frac{n(n+1)}{2},\ S_2(n)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\ S_3(n)=\frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

továbbá: $(n+1)^{\alpha+1}=1+C^1_{\alpha+1}S_\alpha(n)+C^2_{\alpha+1}S_{\alpha-1}(n)+\ldots+C^\alpha_{\alpha+1}S_1(n)+n$.

A tankönyv nem tartalmazza a következő képletet, amelyről részletesebben pl. az [1]-es és [2]-es dolgozatokban lehet olvasni:

$$S_\alpha(n)=\frac{1}{\alpha+1}n^{\alpha+1}+\frac{1}{2(\alpha+1)}C^1_{\alpha+1}n^\alpha+\frac{1}{\alpha+1}B_2C^2_{\alpha+1}n^{\alpha-1}+\ldots+\frac{1}{\alpha+1}B_\alpha C^\alpha_{\alpha+1}n,$$

ahol $B_2,B_3,\ldots,B_\alpha$ az ún. Bernoulli féle számok.

B₁) $\alpha=-1$

A bizonyítást reductio ad absurdum módszerrel végezzük. Feltételezzük, hogy létezik $P,Q\in R[X]$ úgy, hogy

$$S_n=S_{-1}(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=\frac{P(n)}{Q(n)},\quad (\forall)\,n\in N^*.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=+\infty\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{P(n)}{Q(n)}=+\infty\Rightarrow grP>grQ,$$

így $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P(n)}{nQ(n)}>0$ (véges vagy végtelen). Másrészt a Cesàro-Stolz tétel alapján: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$. Az így kapott ellentmondás azt mutatja, hogy az $S_{-1}(n)$ összeg n racionális törtfüggvényeként való felírása lehetetlen.

B₂) $\alpha>-1$, $\alpha\notin Z$.

A bizonyítás hasonlít az előző esethez.

Feltételezzük, hogy létezik P, $Q\in R[X]$ úgy, hogy

$$S_n=S_\alpha(n)=1^\alpha+2^\alpha+3^\alpha+\ldots+n^\alpha=\frac{P(n)}{Q(n)},\ \text{bármely } n\in N^* \text{ esetén.}$$

$$\alpha>-1\Rightarrow\lim_{n\to\infty}S_n=+\infty\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{P(n)}{Q(n)}=+\infty\Rightarrow grP>grQ\Rightarrow k=grP-grQ\in N^*\Rightarrow\alpha+1\neq k$$

(ugyanis $\alpha\notin Z$) $\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^{\alpha+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P(n)}{n^{\alpha+1}Q(n)}=\begin{cases}+\infty, & \text{ha } k>\alpha+1\\ 0, & \text{ha } k<\alpha+1\end{cases}$ (1).

Másrészt, a Cesàro-Stolz tétel alapján:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^{\alpha+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^\alpha}{(n+1)^{\alpha+1}-n^{\alpha+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha\left[(n+1)\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha-n\right]}=$$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha} \cdot \frac{1}{n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}-1\right]+\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha}}$ és $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}-1\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha$ alapján

kapjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^{\alpha+1}}=\frac{1}{\alpha+1}\in R^*$ (2).

(1) és (2) ellentmond egymásnak, aminek az az oka, hogy az $S_{\alpha}(n)$ összegről feltételezhetjük, hogy felírható n racionális törtfüggvényeként. Tehát ez a felírás ebben az esetben is lehetetlen.

Megjegyzés. (2) Riemann összegek segítségével is megkapható:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^{\alpha+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1^{\alpha}+2^{\alpha}+3^{\alpha}+\ldots+n^{\alpha}}{n^{\alpha}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha}=\int_0^1 x^{\alpha}\,dx=\left.\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_0^1=\frac{1}{\alpha+1}.$$

B₃) $\alpha<-1$, $\alpha\notin Z$.

Ennek az esetnek a vizsgálata lényegesen különbözik az előzőktől, ugyanis az $S_{\alpha}(n)$ összeg ebben az esetben konvergens. Előnyös $\beta=-\alpha>1$ jelölést használni:

$$S_{\alpha}(n)=H_{\beta}(n)=1+\frac{1}{2^{\beta}}+\frac{1}{3^{\beta}}+\ldots+\frac{1}{n^{\beta}}.$$

Ez az ún. hiperharmónikus összeg, melyről ismert, hogy konvergens. Határértékét a szakirodalomban rendszerint $\zeta(\beta)$-val jelölik és Riemann-féle dzeta függvénynek nevezik. Erről részletesen olvasható pl. [2]-ben és [3]-ban. Itt csupán annyit említünk, hogy $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$ és $\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}$.

A továbbiakban alkalmazni fogunk egy ritkábban használt, de igen fontos Cesaro-Stolz típusú tételt:

Segédtétel. Ha $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$ és $(b_n)_{n\ge1}$ szigorúan monoton (növekvő vagy csökkenő), továbbá létezik $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=A\in\overline{R}$, akkor az $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\ge1}$ sorozatnak is van határértéke és $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A\in\overline{R}$.

A segédtétel bizonyítása és további alkalmazások megtalálhatók [4]-ben.

Feltételezzük most, hogy $H_{\beta}(n)$ felírható n racionális törtfüggvényeként. Ezért $H_{\beta}(n)-\zeta(\beta)$ is rendelkezik ugyanezzel a tulajdonsággal, vagyis létezik $P,\ Q\in R[X]$ úgy, hogy $H_{\beta}(b)-\zeta(\beta)=\frac{P(n)}{Q(n)}$, bármely $n\in N^*$ esetén.

$$\lim_{n\to\infty}H_{\beta}(n)-\varsigma(\beta)=\lim_{n\to\infty}\frac{P(n)}{Q(n)}=0\Rightarrow grP<grQ\Rightarrow k=grQ-grP\in N^*\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}n^k\left(H_{\beta}(n)-\varsigma(\beta)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^kP(n)}{Q(n)}=l\in\mathrm{R}\setminus\{0\}\qquad(3)$$

Ha $k=\beta-1$, akkor a fentebb említett Cesàro-Stolz típusú segédtétel alapján:

$$\lim_{n\to\infty} n^{\beta-1}\left[H_\beta(n)-\zeta(\beta)\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{H_\beta(n)-\zeta(\beta)}{\frac{1}{n^{\beta-1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^\beta}}{\frac{1}{(n+1)^{\beta-1}}-\frac{1}{n^{\beta-1}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^\beta}}{\frac{1}{(n+1)^{\beta-1}}\left[1-\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\beta-1}\right]}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{1-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\beta-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-(1+x)^{\beta-1}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1-\beta)(1+x)^{\beta-2}}=\frac{1}{1-\beta}.$$

Ennek alapján: $\lim_{n\to\infty} n^k\left[H_\beta(n)-\zeta(\beta)\right]=\begin{cases}+\infty, & \text{ha } k>\beta-1\\ \frac{1}{1-\beta}, & \text{ha } k=\beta-1.\\ 0, & \text{ha } k<\beta-1\end{cases}$

Figyelembe véve a (3) alatt kapott eredményt, csakis $k=\beta-1$ lehetséges, ahonnan $\beta=k+1\in N^*$ következik ($k=grQ-grP$). Ez viszont ellentmondás, mivel $\beta=-\alpha$ és $\alpha\notin Z$.

Ezzel bebizonyítottuk az $\alpha<-1$, $\alpha\notin Z$-re vonatkozó állítást, amely szerint az $S_\alpha(n)$ összeg n racionális törtfüggvényeként való felírása lehetetlen.

3. *Nyílt kérdések*

Az előző bizonyítás során $\alpha<-1$, $\alpha\in Z$ nem vezet ellentmondásra. Ez természetesen nem jelenti azt, hogy az összeg felírható lenne n racionális törtfüggvényeként, csupán módszereink korlátaira mutat rá.

További két olyan összeg, melyek a vizsgálatokkal rokon összegek és amelyek racionális törtfüggvényként való felírhatóságát (vagy fel nem írhatóságát) nem tudtuk a bemutatott módszerekkel és eszközökkel bebizonyítani (megcáfolni):

$$E(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n \text{ és}$$

$$F_k(n)=1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\ldots+\frac{1}{n^k}-\frac{1}{1-k}\cdot n^{1-k};\ k\in(0,1).$$

SZAKIRODALOM

[1] *Bencze Mihály*: A Bernoulli-féle számok egy alkalmazása, Matematikai Lapok 7/1989

[2] *Tuzson Zoltán*: A $\zeta(2m)$ meghatározása elemi módszerekkel, Matematikai Lapok 10, 11, 12/1990

[3] *G.M.Fihtenholț*: Curs de calcul diferențial și integral, vol.II, Editura Tehnică, București, 1964

[4] *Irina Rizzoli*: Egy Stolz-Cesàro típusú tétel, Matematikai Lapok 3/1991