AZ ML 17241. ÉS A KöMaL F. 2502. FELADATAINAK ÁLTALÁNOSÍTÁSÁRÓL

Tuzson Zoltán tanár, Pedagógiai Líceum, Székelyudvarhely

Az ML 6/1978. számában, 17241. sorszámmal az alábbi feladatot tűzték ki:

„*Legyenek* $a_1, a_3, \ldots, a_{2m-1}$ *valós számok úgy, hogy:*

$$a_1 \cos x + a_3 \cos 3x + \ldots + a_{2m-1} \cos (2m-1)x \geq 0,\ (\forall)\, x \in \mathbf{R}.$$

Igazoljuk, hogy $a_1 \cos x + a_3 \cos 3x + \ldots + a_{2m-1} \cos (2m-1)x = 0$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$."

A feladat általam küldött megoldását az ML 1/1979. száma közli:

A KöMaL 10/1984. számában, F. 2502. sorszámmal az alábbi feladatot közölték:

„*Adjuk meg az összes olyan* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *valós számot, amely mellett minden valós x-re*

$$a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_n \cos nx = 0\text{''}.$$

A megoldás (két módszer és egy megjegyzés) megtalálható a KöMAL 8–9/1985. számában.

Ezen feladatok közös általánosításához szeretnék néhány észrevételt fűzni.

A jegyzet fő célja az alábbiakban fogalmazható meg:

Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$, valamint $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ egymástól különböző, nem zérus valós számok. Értelmezzük bármely $x \in \mathbf{R}$ esetén az alábbi függvényeket:

(1) $c(x) = a_1 \cos \theta_1 x + a_2 \cos \theta_2 x + \ldots + a_n \cos \theta_n x$,

(2) $s(x) = b_1 \sin \theta_1 x + b_2 \sin \theta_2 x + \ldots + b_n \sin \theta_n x$

(3) $g(x) = c(x) + s(x)$.

Igazoljuk, hogy ha az (1), (2), (3)-nál értelmezett függvények valamelyike is bármely $x \in \mathbf{R}$ esetén előjeltartó vagy zéró, akkor az itt szereplő állandók mind zérók, vagyis ha

$$c(x) \gtreqless 0,\ (\forall)\, x \in \mathbf{R} \Rightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0;$$

$$s(x) \gtreqless 0,\ (\forall)\, x \in \mathbf{R} \Rightarrow b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$$

$$g(x) \gtreqless 0,\ (\forall)\, x \in \mathbf{R} \Rightarrow \begin{array}{l} a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0 \\ b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0. \end{array}$$

Mielőtt rátérnénk ezen kijelentések bizonyítására, szeretnénk rávilágítani arra, hogy az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz elemeinek helyettesítése a $\{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n\}$ halmaz valós számaival nem csupán átírás, sokkal fontosabb annál. Vizsgáljuk a következő érvelést:

Ha $\theta_1 = 1$, $\theta_2 = 2, \ldots, \theta_n = n$, akkor az (1)-ben értelmezett függvény periódusa 2π, míg ha $\theta_1 = \frac{p_1}{q_1}$, $\theta_2 = \frac{p_2}{q_2}, \ldots, \theta_n = \frac{p_n}{q_n}$ pozitív racionális számok és $q = [q_1, q_2, \ldots, q_n]$ a nevezők legkisebb közös többszöröse, akkor belátható, hogy $c(x + 2q\pi) = c(x)$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$, vagyis a periódus már függ a $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ értékektől. Végül irracionális $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ esetén csak nagyon sajátos esetben lesz $c(x)$ periodikus.

Mind a 17241., mind az F.2502. feladat megoldásai lényegesen támaszkodnak arra, hogy a $\cos kx$ kifejezésben $k \in \mathbf{N}^*$:

A továbbiakban az említett kijelentéseket három lépésben fogjuk igazolni: előbb a $\theta_k \in \mathbf{N}^*$ (érvényes $\theta_k \in \mathbf{Z}^*$) esetben, majd $\theta_k \in Q^*_+$ (érvényes $\theta_k \in Q^*_-$) esetben, végül pedig ha $\theta_k \in \mathbf{R}^* \setminus Q$.

1. Állítás

Ha $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbf{R}$ *és* $\theta_1 = 1,\ \theta_2 = 2, \ldots, \theta_n = n$, *érvényesek az alábbi eredmények:*

(i) $c(x) \geqslant 0,\ (\forall)\, x \in \mathbf{R} \Rightarrow c(x) = 0,\ (\forall)\, x \in \mathbf{R} \Rightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$

(ii) $s(x) \geqslant 0,\ (\forall)\, x \in \mathbf{R} \Rightarrow s(x) = 0,\ (\forall)\, x \in \mathbf{R} \Rightarrow b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$

(iii) $g(x) \geqslant 0,\ (\forall)\, x \in \mathbf{R} \Rightarrow g(x) = 0,\ (\forall)\, x \in \mathbf{R} \Rightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$
$b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0.$

Hasonlóan érvényesek az eredmények „$\leqslant$" jellel is.

Bizonyítás

A továbbiakban csak az (*i*) bizonyítását mutatjuk be, a teljes indukció módszerével, mivel az (*ii*) és (*iii*) bizonyítása ehhez hasonló. Ezek igazolását az olvasóra bízzuk.

Legyen tehát $n = 1$, így $a_1 \cos x \geqslant 0,\ (\forall)\, x \in \mathbf{R} \Rightarrow a_1 = 0$, tehát $a_1 \cos x = 0$.

Tételezzük fel, hogy $n - 1$, vagy annál kevesebb számú tag esetén érvényes a $c(x) \geqslant 0,\ (\forall)\, x \in \mathbf{R} \Rightarrow c(x) = 0,\ (\forall)\, x \in \mathbf{R}$ implikáció.

Igazoljuk ezt n számú tag esetén is. Tehát fennáll:

$$(*)\quad a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_n \cos nx \geqslant 0,\ (\forall)\, x \in \mathbf{R}.$$

A bizonyítás jobb áttekinthetősége kedvéért feltételezzük, hogy n páros (hasonlóan érvényes a bizonyítás páratlan n-re is).

Mivel (*) igaz, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$, legyen $x = \pi + y$. Tudjuk, hogy $\cos (2k\pi + \alpha) = \cos \alpha$ és $\cos ((2k + 1)\pi + \alpha) = -\cos \alpha$, ezért (*) alapján felírhatjuk, hogy:

$$(**)\quad -a_1 \cos y + a_2 \cos 2y - a_3 \cos 3y + \ldots + a_n \cos ny \geqslant 0,\quad (\forall)\, y \in \mathbf{R}\ \ (n \text{ páros})$$

Összeadva az előbbi két egyenlőtlenséget, felírhatjuk, hogy:

$$2(a_2 \cos 2y + a_4 \cos 4y + \ldots + a_n \cos ny) \geqslant 0,\ (\forall)\, y \in \mathbf{R}.$$

Legyen $2y = x$, ekkor:

$$a_2 \cos x + a_4 \cos 2x + \ldots + a_n \cos \frac{n}{2} x \geqslant 0,\ (\forall)\, x \in \mathbf{R},$$

azonban az indukciós feltevés alapján ebből kapjuk (mivel $(n - 1)$-nél kevesebb tag van), hogy:

$$(***)\quad a_2 \cos x + a_4 \cos 2x + \ldots + a_n \cos \frac{n}{2} x = 0,\ (\forall)\, x \in \mathbf{R}.$$

Visszatérve most a (*) egyenlőtlenséghez, a következő eredményre jutunk:

$$a_1 \cos x + a_3 \cos 3x + \ldots + a_{n-1} \cos (n - 1)\, x \geqslant 0,\ (\forall)\, x \in \mathbf{R}. \quad (1)$$

Legyen ezúttal is $x = \pi + y$, és felhasználva azt, hogy $\cos((2k+1)\pi + \alpha) = -\cos\alpha$, felírhatjuk:

$$(1')\quad -a_1\cos y - a_3\cos 3y - \ldots - a_{n-1}\cos(n-1)y \geqslant 0,\ (\forall)\, y \in \mathbf{R},$$

tehát

$$(1'')\quad a_1\cos x + a_3\cos 3x + \ldots + a_{n-1}\cos(n-1)x \leqslant 0,\ (\forall)\, x \in \mathbf{R};$$

így $\quad a_1\cos x + a_3\cos 3x + \ldots + a_{n-1}\cos(n-1)x = 0,\ (\forall)\, x \in \mathbf{R}.$

Figyelembe véve, a (***)-ot is, kapjuk, hogy $c(x) = 0,\ (\forall)\, x \in \mathbf{R}$.

A KöMaL 8–9/1985 számában közölt első megoldás alapján

$$c(x) = 0,\ (\forall)\, x \in \mathbf{R} \Rightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0.$$

Ennek a megoldása azon alapszik, hogy $\cos kx$ a $\cos x$-nek k-adfokú polinomja, így a

$$c(x) = 0,\ (\forall)\, x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow -a_n\cos nx = a_1\cos x + a_2\cos 2x + \ldots + a_{n-1}\cos(n-1)x,\ (\forall)\, x \in \mathbf{R}$$

A bal oldal $\cos x$-ben n-edfokú polinom, míg a jobb oldal legfennebb $(n-1)$-edfokú $\cos x$-ben. Mivel ebben az esetben $x_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n}$, $(\forall)\, k = \overline{1, n}$, a bal oldalnak gyökei, azt kapnánk, hogy egy legfennebb $(n-1)$-edfokú polinomnak n gyöke van, így szükségszerűen $a_n = 0$; hasonlóan, lépésről-lépesre $a_{n-1} = 0, \ldots, a_2 = 0,\ a_1 = 0$. Ezzel az (i) állítás mindkét implikációját beláttuk.

Következmény

Legyenek $\theta_1 = n_1,\ \theta_2 = n_2, \ldots, \theta_k = n_k$ egymástól különböző pozitív egészek. Ez esetben is érvényesek az 1. Állítás eredményei.

Valóban, ha most $c(x) = a_1\cos n_1x + a_2\cos n_2x + \ldots + a_k\cos n_kx \geqslant 0,\ (\forall)\, x \in \mathbf{R}$, mivel $n_i \neq n_j$, ha $i \neq j$, feltételezhető, hogy $n_1 < n_2 < \ldots < n_k \overset{\text{def}}{=} n$ ezért a $c(x) = a'_1\cos x + a'_2\cos 2x + \ldots + a'_n\cos nx$ alakhoz jutunk, ahol:

$$a'_\nu = \begin{cases} 0, & \text{ha } \nu \in \{n_1, n_2, \ldots n_k\} \\ a_t, & \text{ha } \nu = n_t,\ (\forall)\, t = \overline{1, k} \end{cases}$$

Mivel ez esetben érvényes az 1. Állítás, máris beláttuk újabb állításunkat. Hasonló a helyzet az (ii) és (iii) esetben is. Most kiterjesztjük az 1. Állítást a $\mathbf{Q}^*_+$-ra is.

2. Állítás

Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_k,\ b_1, b_2, \ldots, b_k \in \mathbf{R}$, *valamint* $\theta_\nu = \frac{p_\nu}{q_\nu}$, $p_\nu, q_\nu \in \mathbf{N}^*$, $(\forall)\, \nu = \overline{1, k}$.

Ez esetben érvényesek az alábbiak:

(j) $\quad c(x) \geqslant 0,\ (\forall)\, x \in \mathbf{R} \Rightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$

(jj) $\quad s(x) \geqslant 0,\ (\forall)\, x \in \mathbf{R} \Rightarrow b_1 = b_2 = \ldots = b_k = 0$

(jjj) $\quad g(x) \geqslant 0,\ (\forall)\, x \in \mathbf{R} \Rightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_k = b_1 = b_2 = \ldots = b_k = 0.$

A következmény helyes „$\leqslant$" esetben is.

Szintén csak (j)-vel foglalkozunk. Tehát:

$$a_1 \cos \frac{p_1}{q_1} x + a_2 \cos \frac{p_2}{q_2} x + \ldots + a_k \cos \frac{p_k}{q_k} x \geqslant 0, \ (\forall)\, x \in \mathbf{R}.$$

Legyen $q = [q_1, q_2, \ldots, q_k]$ a nevezők legkisebb közös többszöröse. Elvégezve az $x = qy$ változócserét, a

$$\frac{p_\nu \cdot q}{q_\nu} \overset{\text{def}}{=} n_\nu \in \mathbf{N}^*, \ (\forall)\, \nu = \overline{1, k}$$

jelöléssel belátható, hogy $n_i \neq n_j$, ha $i \neq j$. Így azt kapjuk, hogy:

$$a_1 \cos n_1 x + a_2 \cos n_2 x + \ldots + a_k \cos n_k x \geqslant 0, \ (\forall)\, x \in \mathbf{R}.$$

Ez azonban a már ismertetett következmény alapján az $a_1 \cos n_1 x + a_2 \cos n_2 x + \ldots + a_k \cos n_k x = 0$ eredményre vezet, ahonnan $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

Rátérünk most az irracionális eset bizonyítására, és érdekes módon, az elvártaktól eltérően, nem tudjuk használni azt, hogy a függvény folytonos, és racionális értékekkel nem tudunk irracionális értékekhez tartani, mert a függvény nem egyenletesen konvergens (nem az x változóról van szó, hanem a $\frac{p_k(n)}{q_k(n)} \in \mathbf{Q}$ értékekről).

A továbbiakban az előbbi eredményre támaszkodva, bizonyítsuk a következő állítást:

3. Állítás

Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbf{R}$, *valamint* $\theta_1 = \xi_1, \theta_2 = \xi_2, \ldots, \theta_n = \xi_n$ *egymástól különböző pozitív irracionális számok. Ez esetben:*

(k) $\quad c(x) \geqslant 0, \ (\forall)\, x \in \mathbf{R} \Rightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$

(kk) $\quad s(x) \geqslant 0, \ (\forall)\, x \in \mathbf{R} \Rightarrow b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$

(kkk) $\quad g(x) \geqslant 0, \ (\forall)\, x \in \mathbf{R} \Rightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n = b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0.$

Hasonlóan igaz az eredmény a „$\leqslant$" esetben is.

Bizonyítás

Ebben az esetben is indukciót alkalmazunk.

Legyen tehát:

$$(*) \quad a_1 \cos \xi_1 x + a_2 \cos \xi_2 x + a_n \cos \xi_n x \geqslant 0, \ (\forall)\, x \in \mathbf{R}$$

Igazoljuk, hogy $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

Az $n = 1$ esetben $a_1 \cos \xi_1 x \geqslant 0, (\forall)\, x \in \mathbf{R} \Rightarrow a_1 = 0$. Ez evidens.

Feltételezzük, hogy az implikáció igaz $(n - 1)$ vagy annál kevesebb számú tag esetén. Igazoljuk n számú tag esetén is. Fennáll tehát a $(*)$ egyenlőtlenség.

Legyen

$$\xi_1 x = y, \text{ és } \alpha_1 = \frac{\xi_2}{\xi_1}, \ \alpha_2 = \frac{\xi_3}{\xi_1}, \ldots, \alpha_{n-1} = \frac{\xi_n}{\xi_1}.$$

Ekkor érvényes lesz a következő egyenlőtlenség:

$$a_1 \cos y + a_2 \cos \alpha_1 y + \ldots + a_n \cos \alpha_{n-1} y \geqslant 0, \ (\forall)\, y \in \mathbf{R}. \tag{1}$$

Legyen most $y = \pi + t$, tehát ebben az esetben a következőt kapjuk:

$$(1') \quad -a_1 \cos t + a_2 \cos \alpha_1(\pi + t) + \cdots + a_n \cos \alpha_{n-1}(\pi + t) \geqslant 0, \ (\forall)\ t \in \mathbf{R}.$$

Figyelembe véve, hogy

$$\cos \alpha_k t + \cos \alpha_k(\pi + t) = 2 \cos \frac{\alpha_k \pi}{2} \cdot \cos \alpha_k \left(t + \frac{\pi}{2}\right),$$

összeadva az (1) és (1′) egyenlőtlenséget, kapjuk, hogy

$$\left(a_2 \cos \alpha_1 \frac{\pi}{2}\right) \cos \alpha_1 \left(t + \frac{\pi}{2}\right) + \left(a_3 \cos \frac{\alpha_2 \pi}{2}\right) \cos \alpha_2 \left(t + \frac{\pi}{2}\right) + \ldots +$$

$$+ \left(a_n \cos \frac{\alpha_{n-1}\pi}{2}\right) \cdot \cos \alpha_{n-1} \left(t + \frac{\pi}{2}\right) \geqslant 0, \ (\forall)\ t \in \mathbf{R}.$$

Bevezetve a $t + \frac{\pi}{2} = x$ változócserét és az $A_k = a_{k+1} \cdot \cos \frac{\alpha_k \pi}{2}$ jelölést, a következő eredményhez jutunk:

$$(**) \quad A_1 \cos \alpha_1 x + A_2 \cos \alpha_2 x + \ldots + A_{n-1} \cos \alpha_{n-1} x \geqslant 0, \ (\forall)\ x \in \mathbf{R}$$

Két (gyökeresen) különböző esetet kell megkülönböztetnünk:

(1) Ha $\cos \frac{\alpha_1 \pi}{2} = \cos \frac{\alpha_2 \pi}{2} = \ldots = \cos \frac{\alpha_{n-1}\pi}{2} = 0,$

akkor a (**) semmitmondó, $0 = 0$, tehát semmilyen információt nem ad $a_1, a_2, \ldots, a_n$-ről.

Azonban $\cos \frac{\alpha\pi}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\alpha\pi}{2} = (4k \pm 1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha \in \mathbf{Z}.$

Tehát ha fennáll (1), akkor $\alpha_k \in \mathbf{Z}$, vagyis $\frac{\xi_2}{\xi_1} = k_1, \frac{\xi_3}{\xi_1} = k_2, \ldots, \frac{\xi_n}{\xi_1} = k_{n-1}$, ahol $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1} \in \mathbf{N}^*$. Visszahelyettesítve a (*)-ba a $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ értékeket, és elvégezve a $\xi_1 x = y$ helyettesítést, visszajutunk a már tárgyalt esethez (természetes számra), miszerint $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

(2) Legyen $A = \{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$ az azon indexeinek halmaza, amelyre $\cos \frac{\alpha_{i_s}\pi}{2} \neq 0, \ (\forall)\ s = \overline{1, m}, \ m \leqslant n.$

Ezek szerint a (**)-ból csak ezek a tagok maradnak meg, vagyis

$$\sum_{k \in A} A_k \cos \alpha_k x = A_{i_1} \cos \alpha_{i_1} x + A_{i_2} \cos \alpha_{i_2} x + \ldots + A_{i_m} \cos \alpha_{i_m} x \geqslant 0, \ (\forall)\ x \in \mathbf{R}.$$

Az indukciós feltétel alapján következik, hogy:

$A_{i_1} = A_{i_2} = \ldots = A_{i_m} = 0 \Rightarrow a_{i_1} = a_{i_2} = \ldots = a_{i_m} = 0$. Visszatérve ezzel a (*) egyenlőtlenségbe, felírhatjuk, hogy:

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \notin A}}^{n} a_k \cos \xi_k x \geqslant 0, \ (\forall)\ x \in \mathbf{R}.$$

Az indukciós feltétel alapján $a_k = 0$, $(\forall)\, k \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus A$. Összegezve az előbbieket, felírható, hogy:

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0.$$

A továbbiakban egy alkalmazást adunk:

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ egymástól különböző irracionális számok, valamint $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$. Milyen esetben lesz periodikus a $c(x) = a_1 \cos \xi_1 x + a_2 \cos \xi_2 x + \ldots + a_n \cos \xi_n x$ összefüggéssel értelmezett valós függvény?

(Hasonlóan fogalmazható meg a feladat az $s(x)$ és $g(x)$ esetén is; így mind a bizonyítás, mind pedig az eredmény az előbbivel megegyezik).

Jelölje T a $c(x)$ periódusát, tehát $c(x) = c(x + T)$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$, vagyis

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cos \xi_k x = \sum_{k=1}^{n} a_k \cos \xi_k (x + T) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \sin \xi_k \frac{T}{2}\right) \sin \xi_k \left(x + \frac{T}{2}\right) = 0,$$

$(\forall)\, x \in \mathbf{R}$.

Vezessük be a következő jelölést: $A_k = a_k \sin \xi_k \frac{T}{2}$, és végezzük el az $x + \frac{T}{2} \to x$ változócserét, így az $A_1 \sin \xi_1 x + A_2 \sin \xi_2 x + \ldots + A_n \sin \xi_n x = 0$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$ eredményhez jutunk.

Ha $\sin \xi_n \frac{T}{2} \neq 0$, akkor a már bizonyítottak alapján (mi ugyan koszinuszra bizonyítottuk, de amint megjegyeztük, szinuszra is igaz) ezen $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ indexekre $a_k = 0$ lenne, ami azt jelentené, hogy tulajdonképpen ezek a tagok nem szerepelnek a $c(x)$ felírásban.

Tehát csak akkor jutunk periodikus függvényhez, ha $\sin \xi_k \cdot \frac{T}{2} = 0 \Rightarrow \xi_k \frac{T}{2} = m_k \pi \Rightarrow \frac{T}{2\pi} = \frac{m_1}{\xi_1} = \frac{m_2}{\xi_2} = \ldots = \frac{m_n}{\xi_n} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\beta}$, vagyis $\xi_k = m_k \beta$, $(\forall)\, k = \overline{1, n}$ és a periódus $T = \frac{2\pi}{\beta}$.

Következésképpen csak a

$c(x) = a_1 \cos m_1 \beta x + a_2 \cos m_2 \beta x + \ldots + a_n \cos m_n \beta x$ alakú függvények periodikusak $\left(T = \frac{2\pi}{\beta} \text{ periódussal}\right)$, ahol $m_1, m_2, \ldots, m_n \in \mathbf{N}^*$ és $\beta \in \mathbf{R}^*$.

Mielőtt befejeznénk jegyzetünket, szeretnénk megjegyezni, hogy a feladat a következő irányokban is általánosítható:

(1°) Az $s(x) = 0$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R} \Rightarrow b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$ és $c(x) = 0$, $(\forall) x \in \mathbf{R} \Rightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$ segítségével (felhasználva az Euler-féle összefüggést) igazolható a következő eset is. Ha $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbf{R}$ vagy $\mathbf{C}$ és $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{R}$ vagy $\mathbf{C}$ különbözőek, valamint $c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + c_n e^{\lambda_n x} = 0$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$ vagy $\mathbf{C}$, akkor $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$.

(2°) Igazolhatók az alábbi eredmények is:

Legyenek $P_1, P_2, \ldots, P_n \in \mathbf{R}[X]$ vagy $\mathbf{C}[X]$ polinomfüggvények, valamint $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ egymástól különböző valós számok. Ekkor, ha

$$P_1(x)\cos\lambda_1 x + P_2(x)\cos\lambda_2 x + \ldots + P_n(x)\cos\lambda_n x = 0,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}$$

vagy $\mathbf{C}$, akkor $P_1(x) = P_2(x) = \ldots = P_n(x) \equiv 0$.

(Hasonlóan érvényes szinusz esetén is).

(3°) Az előbbieknek egy még magasabb szintű általánosítása:

Legyenek $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x) \in \mathbf{R}[X]$ vagy $\mathbf{C}[X]$ polinomfüggvények, valamint $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{R}$ vagy $\mathbf{C}$ különbözőek.

Ha $P_1(z)\,e^{\lambda_1 z} + P_2(z)\,e^{\lambda_2 z} + \ldots + P_n(z)\,e^{\lambda_n z} = 0,\ (\forall)\ z \in \mathbf{R}$, vagy $\mathbf{C}$ akkor $P_1(z) = P_2(z) = \ldots = P_n(z) \equiv 0$.

A fentiek bizonyítása hosszadalmasabb, ezért most nem mutatjuk be, esetleg egy következő alkalommal.

AZ 1986. MÁRCIUS 15-I MEGYEI MATEMATIKAI VERSENYEN KITŰZÖTT FELADATOK MEGOLDÁSAI

Összeállították: **D. M. Bătineţu-Giurgiu**
I. V. Maftei, Marcel Ţena

A. A kitűzött feladatok

IX. osztály

1. Határozzuk meg mindazokat az (x, y) egész számpárokat, amelyek teljesítik a következő egyenlőséget:

$$x^2 - xy + y^2 = x + y$$

* * *

2. Legyen a, b, c három egész szám, $a > 0$. Igazoljuk, hogy ha az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletnek két különböző gyöke van a $(0, 2)$ intervallumban, akkor $a \geqslant 2$, $b \leqslant -3$ és $c \geqslant 1$.

Mircea Lascu és Liviu Vlaicu

3. Az ABC háromszögben, M és N a $[BC]$ és $[AC]$ oldalak felezőpontja és $P \in (AB)$ úgy, hogy $PA = 2PB$. Legyen $G = BN \cap AM$ és $Q = BN \cap CP$. Ha $BM \cdot BP = BQ \cdot BG$, igazoljuk, hogy AB akkor és csak akkor merőleges BC-re, ha $AB \equiv BC$.

D. M. Bătineţu-Giurgiu

4. Adott az ABC általános háromszög, valamint az $(AB$ és $(AC$ félegyeneseken az E és D pontok úgy, hogy $AE = AD = \dfrac{2AB \cdot AC}{AB + AC}$. Igazoljuk, hogy a DE, BC és az $\widehat{A}$ szög belső szögfelezője összefutók.

* * *

X. osztály

1. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} \log_3 x + \log_2 y = 2 \\ 3^x - 2^y = 23 \end{cases}$$

I. V. Maftei és Gh. Pantelimon