Valóban, tételezzük fel az ellenkezőjét, vagyis azt, hogy léteznek olyan a és n természetes számok, amelyek teljesítik a feltételeket és $a^n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ n)$. Feltételezhetjük, hogy n a legkisebb olyan természetes szám, amely teljesíti a feladat feltételeit.

Euler tételének értelmében $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ n)$ és mivel $n > 1$, $0 < \varphi(n) < n$. Legyen s a legkisebb olyan természetes szám, amelyre teljesülnek a következő feltételek: $0 < s < n$ és $a^s \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ n)$. Minthogy $a - 1$ és n relatív prímek $a \not\equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ n)$, tehát $s > 1$. A maradékkal való osztás tétele alapján $n = ks + r$, ahol $0 \leqslant r < s$. Tekintsük a következő azonosságot:

$$a^n - 1 = a^s - 1 + a^s (a^s - 1) + a^{2s} (a^s - 1) + \ldots + a^{(k-1)s} (a^s - 1) + \\ + a^{ks}(a^r - 1).$$

Az $a^n \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ n)$, $a^s \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ n)$ összefüggések, valamint az a tény, hogy a és n relatív prímek, a következő összefüggéshez vezetnek: $a^r \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ n)$, ahonnan $r = 0$, másképpen ellentmondana s értelmezésének.

Következésképpen $n = ks$ és $a^s \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ ks)$, ahonnan

$$a^s \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ s).$$

Hozzávéve még azt a feltevést is, hogy a és $a - 1$ relatív prímek az $n = ks$ számmal, következik, hogy a és $a - 1$ relatív prímek s-sel.

Tehát találtunk olyan $s < n$ számot, amely teljesíti az összes n-re kirótt feltételeket; ez a tény ellentmond annak a feltételnek, miszerint n a legkisebb ilyen szám. Következésképpen eredeti feltételezésünk nem igaz.

Az említett feladat megoldása azonnali, ha észrevesszük, hogy $2^n - 1$ páratlan szám, tehát n is páratlan kell legyen, azaz 2-vel és $2 - 1$-gyel relatív prím. Ebben az esetben tehát alkalmazható a tárgyalt általánosítás.

(Fordította: *Néda Ágnes*)

2. Egy érdekes számsorozatról

Írta: TUZSON ZOLTÁN tanuló, Marosvásárhely

Vegyünk a síkban egy egyenlő szárú derékszögű háromszöget, amely csúcsainak koordinátái: $A(a_0 ; x_0)$, $B(b_0 ; y_0)$ és $C(c_0 ; z_0)$.

Húzzuk meg az AA_1 magasságot. Az A_1 pont koordinátái:

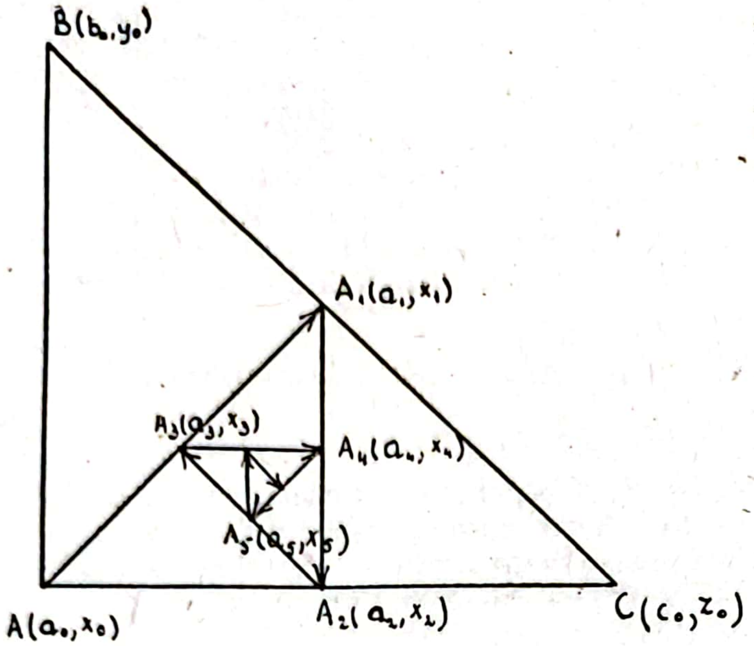
$$a_1 = \frac{b_0 + c_0}{2} \text{ és } x_1 = \frac{y_0 + z_0}{2}.$$

Ha meghúzzuk az A_1A_2 merőlegest is, az A_2 koordinátái:

$$a_2 = \frac{a_0 + c_0}{2} \text{ és } x_2 = \frac{x_0 + z_0}{2}.$$

Az A_2A_3 és A_3A_4 merőlegesek meghúzása után az A_3, illetve A_4 pont koordinátái:

$$a_3 = \frac{a_0 + a_1}{2} \text{ és } x_3 = \frac{x_0 + x_1}{2}, \text{ illetve } a_4 = \frac{a_1 + a_2}{2} \text{ és } x_4 = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$



Ha az előbbi eljárással meghúzzuk az A_4A_5, A_5A_6, $\ldots$, $A_{n-1}A_n$ merőlegeseket, az A_n pont koordinátáit a következő rekurziós összefüggések adják:

$$a_n = \frac{a_{n-3} + a_{n-2}}{2} \text{ és } x_n = \frac{x_{n-3} + x_{n-2}}{2}, n \geqslant 3, \ n \in N.$$

Ilymódon tehát egy rekurziós összefüggéssel megadott valós számsorozatot értelmezhetünk:

$$a_n = \frac{a_{n-3} + a_{n-2}}{2}, \text{ ahol}$$

$$a_1 = \frac{b_0 + c_0}{2} \text{ és } a_2 = \frac{a_0 + c_0}{2}, \qquad n \geqslant 3 \qquad (*)$$

(Hasonló a helyzet x_n esetében is.)

A fenti rajz szerint a merőlegesek $A_1, A_2, \ldots, A_n \ldots$ talppontjai hovatovább egy pont köré tömörülnek. Mi lehet ennek a pontnak a koordinátája a_0, b_0 és c_0 függvényében? Hogy a fenti kérdésre válaszolni tudjunk, tanulmányozzuk a (*) összefüggéssel értelmezett $(a_n)_{n\in N}$ sorozat konvergenciáját.

Az $(a_n)_{n\in N}$ rekurzív sorozat karakterisztikus egyenlete:

$$2r^3 - r - 1 = 0 \Leftrightarrow (r-1)(2r^2 + 2r + 1) = 0,$$

ahonnan: $a_n = M + N\left(\frac{-1+i}{2}\right)^n + P\left(\frac{-1-i}{2}\right)^n$ (lásd ML. 6/1975 sz., 208. old). Kiszámítva M, N, P-t az a_0, a_1 és a_2 függvényében, azt kapjuk, hogy

$$M = \frac{a_0 + 2a_1 + 2a_2}{5}; \ N = \frac{2a_0 - a_1 - a_2 + i(a_0 + 2a_1 - 3a_2)}{5};$$

$$P = \frac{2a_0 - a_1 - a_2 - i(a_0 + 2a_1 - 3a_2)}{5}.$$ Ugyanakkor:

$$(-1+i)^n = 2^{n/2}\left(\cos\frac{3n\pi}{4} + i\sin\frac{3n\pi}{4}\right) \text{ és}$$

$$(-1-i)^n = 2^{n/2}\left(\cos\frac{5n\pi}{4} + i\sin\frac{5n\pi}{4}\right).$$

Az előbbiekben *Moivre* képletét használtuk fel. Így:

$$a_n = M + 2^{-\frac{n}{2}} N\left(\cos\frac{3n\pi}{4} + i\sin\frac{3n\pi}{4}\right) + 2^{-\frac{n}{2}} P\left(\cos\frac{5n\pi}{4} + i\sin\frac{5n\pi}{4}\right),$$

ahol M, N, P a már említett fenti értékekkel egyenlő.

Ha n-et felírjuk a nyolcas osztóra vonatkozóan, vagyis n helyére $8k$, $8k+1, \ldots, 8k+7$-et írunk, és elvégezzük a műveleteket, figyelembe véve a $\cos\frac{3n\pi}{4}$, $\sin\frac{3n\pi}{4}$, $\cos\frac{5n\pi}{4}$ és $\sin\frac{5n\pi}{4}$ értékeit ezen n értékekre, kapjuk, hogy:

$$a_{8k} = M + \frac{2a_0 - a_1 - a_2}{5 \cdot 2^{4k-1}}, \qquad a_{8k+4} = M - \frac{2a_0 - a_1 - a_2}{5 \cdot 2^{4k+1}},$$

$$a_{8k+1} = M + \frac{-a_0 + 3a_1 - 2a_2}{5 \cdot 2^{4k}}, \qquad a_{8k+5} = M - \frac{-a_0 + 3a_1 - 2a_2}{5 \cdot 2^{4k+2}},$$

$$a_{8k+2} = M + \frac{-a_0 - 2a_1 + 3a_2}{5 \cdot 2^{4k}}, \qquad a_{8k+6} = M - \frac{-a_0 - 2a_1 + 3a_2}{5 \cdot 2^{4k+2}},$$

$$a_{8k+3} = M - \frac{-3a_0 - a_1 + 4a_2}{5 \cdot 2^{4k+1}}, \qquad a_{8k+7} = M + \frac{-3a_0 - a_1 + 4a_2}{5 \cdot 2^{4k+3}}.$$

Észrevehető, hogy a fenti általános tagokkal rendelkező nyolc sorozat konvergens, amikor $k \to \infty$, és mind a nyolcnak a határértéke M, ahol

$$M = \frac{a_0 + 2a_1 + 2a_2}{5}$$

Tehát az $(a_n)_{n\in N}$ sorozat felbontható nyolc olyan részsorozatra, amelyeknek a határértékei megegyeznek, következésképpen

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{a_0 + 2a_1 + 2a_2}{5}$; de $a_1 = \frac{b_0 + c_0}{2}$ és $a_2 = \frac{a_0 + c_0}{2}$, ahonnan felírható, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{2a_0 + b_0 + 2c_0}{5}$.

MEGOLDOTT FELADATOK (gimnáziumi tanulók részére)

E: 6309.* feladat (9/1978 sz., V. oszt.)

Három egymásután következő 10-es számrendszerbeli természetes szám szorzata $\overline{abaaba}$ *alakú. Határozzuk meg az ilyen alakú számokat, ha* $a < b$ *és* $a > 2$.

Ionel Mania tanár, Tg. Jiu

Megoldás (*Gaal Zsuzsánna*, 9. sz. Ált. Isk. VI. o., Marosvásárhely).

Három egymásután következő természetes szám szorzata mindig páros szám, mert legalább egy páros tényezőt tartalmaz. Tehát az a számjegyben végződő $\overline{abaaba}$ szám páros. Figyelembe véve azt, hogy $a > 2$, $a \in \{4, 6, 8\}$. A szorzat hárommal is osztható (bármely három egymásután következő szám közül egy mindig osztható 3-mal). Tehát az $\overline{abaaba}$ szám számjegyeinek összege, $4a + 2b$, 3-mal osztható. Így az alábbi esetek állhatnak fenn:

1) Ha $a = 4$, akkor $b \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Ha $b \in \{5, 6, 8, 9\}$, $4a + 2b$ nem osztható 3-mal. Tehát az első lehetséges értékek: $a = 4$ és $b = 7$ $(4 \cdot 4 + 2 \cdot 7 = 10 \cdot 3)$.

2) Ha $a = 6$, akkor $b \in \{7, 8, 9\}$. Ha $b \in \{7, 8\}$, $4a + 2b$ nem osztható 3-mal. Tehát $a = 6$ és $b = 9$.

3) Ha $a = 8$, akkor $b = 9$ és a $4a + 2b$ nem osztható 3-mal.