$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho(t)^2 dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho\left(t+\frac{\pi}{2}\right)^2 dt\right] = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\rho(t)^2+\rho\left(t+\frac{\pi}{2}\right)^2\right]dt \le$$

$$\le \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d^2 dt = d^2 \cdot \frac{\pi}{4} = r^2\pi = T(C),$$

ahol $r=\frac{d}{2}$ és C egy r sugarú körlap.☺

SZAKIRODALOM

[1] *Boboc,N. / Colojoară,I.* : Matematika. Tankönyv a XII. osztály számára. A matematikai analízis elemei. Tankönyvkiadó, Bukarest, 1990.
[2] *Coţa,A. / Radó Márta / Răduţiu,M. / Vornicescu,Fl.* : Matematika. Mértan és trigonometria. Tankönyv a IX. osztály számára. Tankönyvkiadó, Bukarest, 1990.
[3] *Edgar,G.A.* : Measure, Topology, and Fractal Geometry. Springer-Verlag New York Inc., 1990.

KÉT FOLYTONOS PERIODIKUS FÜGGVÉNY FOLYTONOS FÜGGVÉNYÉRŐL

Tuzson Zoltán tanár, Székelyudvarhely

Az [1] cikkben a 277. oldalon a következőket olvastam: "10. *feladat*. Mutassuk ki, hogy az

$$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\sin\pi x+\sin\pi\sqrt{2}x$$

nem periodikus.

11. *feladat*. Mutassuk ki, hogy az előbbi feladatban szereplő függvény nem veszi fel a 2 értéket, de 2-höz bármilyen közel vannak értékei."

A feladatok útmutatással vannak ellátva, megoldásuk az [5]-ben is megtalálható.

Mivel több hasonló feladatot is adtak fel matematikai versenyeken, (lásd pl. [3] - [6]), ezért a továbbiakban az említett két feladat egy-egy általánosítását mutatom be.

Mindenekelőtt vegyük észre, hogy a [2]-ben található tétel a 10. feladatnak egy általánosítását képezi, többtagú periodikus függvényösszeg segítségével.

A továbbiakban egy más irányú általánosítással foglalkozunk, összegfüggvény helyett más függvényt tanulmányozunk.

Az említett két feladat általánosítását a következő két eredmény képezi:

1. tétel. *Legyenek* T_1 *és* T_2 *rendre az* $f_1, f_2:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *folytonos függvények pozitív periódusai és* $\varphi:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ *mindkét változó szerint külön-külön folytonos függvény úgy, hogy az* $x\to\varphi(f_1(x),a)$ *és* $x\to\varphi(b,f_2(x))$ *függvények egyike sem állandó egyetlen* a, b *rögzített valós számra sem. Az*

$$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x):=\varphi(f_1(x),f_2(x))$$

függvény akkor és csakis akkor periodikus, ha $\frac{T_1}{T_2}\in\mathbf{Q}^*$.

Bizonyítás. A feltétel elégséges, ugyanis ha $\frac{T_1}{T_2} \in Q^*$, akkor léteznek a p, q egészek úgy, hogy $\frac{T_1}{T_2} = \frac{p}{q}$. Így azonban $T := qT_1 = pT_2$ periódusa lesz az f-nek, ugyanis

$$f(x+T) = \varphi(f_1(x+qT_1), f_2(x+pT_2)) = \varphi(f_1(x), f_2(x)) = f(x)$$

bármely valós x értékre, hiszen T_1 periódusa f_1-nek és T_2 az f_2-nek.

Fordítva, feltételezzük az állítás ellenkezőjét, vagyis, hogy $\frac{T_2}{T_1} := \theta \notin Q$ és f periodikus. Legyen $T>0$ az f egy periódusa. Tehát

$$\varphi(f_1(x+T), f_2(x+T)) = \varphi(f_1(x), f_2(x)) \qquad (1)$$

bármely valós x értékre.

Az $x=mT_1+nT_2$ választással (m, n pozitív egészek) az (1) így írható:

$$\varphi(f_1(nT_2+T), f_2(mT_1+T)) = \varphi(f_1(nT_2), f_2(nT_1)) \qquad (2)$$

ahol $m, n \in N$.

Jelölje $a_n := [n\theta]$ és $b_n := \{n\theta\}$ az $n\theta$ egész, illetve törtrészét. Akkor $nT_2 = n\frac{T_2}{T_1}T_1 = n\theta T_1 = [n\theta]T_1 + \{n\theta\}T_1 := a_nT_1 + b_nT_1$. Ennek alapján $f_1(nT_2+T) = f_1(b_nT_1+T)$ és $f_1(nT_2) = f_1(b_nT_1)$, ugyanis T_1 periódusa az f_1-nek, ezért a_nT_1 is az.

Hasonlóan, ha $\alpha_m := \left[\frac{m}{\theta}\right]$ és $\beta_m := \left\{\frac{m}{\theta}\right\}$ az $\frac{m}{\theta}$ egész, illetve törtrészét jelöli, akkor az

$$mT_1 = m\frac{T_1}{T_2}T_2 = \frac{m}{\theta}T_2 = \left[\frac{m}{\theta}\right]T_2 + \left\{\frac{m}{\theta}\right\}T_2 = \alpha_mT_2 + \beta_mT_2$$

alapján $f_2(mT_1+T) = f_2(\beta_mT_2+T)$ és $f_2(mT_1) = f_2(\beta_mT_2)$, ugyanis T_2 periódusa az f_2-nek, ezért α_mT_2 is az.

Ennek alapján a (2) összefüggés így alakul:

$$\varphi(f_1(b_nT_1+T), f_2(\beta_mT_2+T) = \varphi(f_1(b_nT_1), f_2(\beta_mT_2)) \qquad (3)$$

ahol $m, n \in N$. Azonban $\{b_nT_1 : n \in N^*\}$ és $\{\beta_mT_2 : m \in N^*\}$ sűrű a $[0, T_1]$, illetve a $[0, T_2]$ intervallumokon, így bármely $p, q \in N^*$ és bármely $x \in [0, T_1]$, $y \in [0, T_2]$ esetén létezik $n_p, m_q \in N^*$ úgy, hogy $\lim_{p\to\infty}(b_{n_p} \cdot T_1) = x$, illetve $\lim_{q\to\infty}(\beta_{m_q} \cdot T_2) = y$ (lásd pl. [1]-ben).

Mivel a $\varphi: R^2 \to R$ kétváltozós függvény mindkét változó szerint (külön-külön) folytonos, valamint $f_1, f_2 : R \to R$ folytonos függvények, a (3)-ban $n=n_p$ és $m=m_q$ esetén rendre határértékre térve, felírható, hogy

$$\varphi(f_1(x+T), f_2(y+T)) = \varphi(f_1(x), f_2(y)), \qquad (4)$$

bármely $x \in [0, T_1]$ és $y \in [0, T_2]$ esetén. Az összefüggés bármely $x, y \in R$ esetén igaz, ugyanis T_1 periódusa f_1-nek és T_2 az f_2-nek.

Mivel $\frac{T_1}{T_2} \notin Q$, a $\frac{T_1}{T}$ és $\frac{T_2}{T}$ értékek közül legalább az egyik

CamScannerrel szkennelve

nem racionális. Legyen például $\frac{T_1}{T} \notin Q$.

Vegyük észre, hogy létezik olyan $y_0 \in R$, amelyre $f_2(y_0+T) = f_2(y_0)$, ugyanis ellenkező esetben, az f_2 folytonossága miatt f_2 Darboux tulajdonságú, tehát $f_2(y) > f_2(y+T)$, bármely $y \in R$-re vagy $f_2(y) < f_2(y+T)$, bármely $y \in R$ esetén. Nézzük az első változatot. Az $y=y_1$ választással, amelyre

$$f_2(y_1) = m_2 = \min_{y \in [0,T_2]} f_2(y) = \min_{x \in R} f_2(x),$$

az $f_2(y_1+T) < m_2$ ellentmondáshoz jutunk, tehát feltételezésünk hamis.

Hasonlóan járunk el a második esetben is.

Legyen tehát $y_0 \in R$ úgy, hogy $f_2(y_0+T) = f_2(y_0) := a$. A (4) összefüggés alapján

$$\varphi(f_1(x+T), a) = \varphi(f_1(x), a),$$

bármely $x \in R$ esetén. Azonban ez nem jelentene mást, mint hogy az $F_1(x) := \varphi(f_1(x), a)$ folytonos, nem állandó függvénynek T periódusa. Azonban az $f_1(x+T_1) = f_1(x)$ miatt $F_1(x+T_1) = F_1(x)$, bármely valós x értékre, vagyis T_1 is periódusa az F_1-nek. Mivel T_1 és T periódusai az F_1 folytonos, nem állandó függvénynek, ezért $\frac{T_1}{T} \in Q$, (lásd pl. [2]-ben az 1. segédtétel), ami ellentmondás, tehát bizonyításunk véget ért.

2. tétel. *Ha* T_1 *és* T_2 *az* $f_1, f_2 : R \to R$ *folytonos függvények pozitív periódusai úgy, hogy* $\frac{T_1}{T_2} \notin Q$ *és* $\varphi : R^2 \to R$ *folytonos, akkor az* $f : R \to R$, $f(x) := \varphi(f_1(x), f_2(x))$ *függvény esetén* $\inf_{x \in R} f(x) = m$ *és* $\sup_{x \in R} f(x) = M$, *ahol* m, *illetve* M *a* φ *függvény legkisebb, illetve legnagyobb értéke a* $D = [m_1, M_1] \times [m_2, M_2]$ *halmazon,*

$$m_i := \min_{x \in [0,T_i]} f_i(x) \text{ és } M_i := \max_{x \in [0,T_i]} f_i(x),\ i \in \{1,2\}.$$

A φ függvény leszűkítése folytonos a D halmazon, így Weierstrass II. tétele következtében (lásd pl. [7]-ben a 121.o. 3.3.8 tételét) van értelme m-ről és M-ről beszélni.

Ha $\frac{T_2}{T_1} := \theta \notin Q$, legyenek $a, b \in R$ olyan értékek, melyekre $f_1(a) = \alpha$ és $f_2(b) = \beta$, ahol $\varphi(\alpha, \beta) = \max_D \varphi(x, y) = M$.

Igazolni fogjuk, hogy az $x_n = b + nT_2$ általános tagú sorozat esetén $f(x_n)$ bármilyen közel lehet M-hez, pontosabban minden $k \in N^*$ esetén létezik $n_k \in N^*$ úgy, hogy $\lim_{k \to \infty} f(n_k) = M$.

Valóban, ha $n_\theta := [n\theta]$ és $\theta_n := \{n\theta\}$ az $n\theta$ egész, illetve törtrészét jelöli, akkor az 1. tételben használt gondolatmenet alapján $nT_2 = n_\theta T_1 + \theta_n T_1$, így

$$f_1(x_n) = f_1(b+nT_2) = f_1(b+\theta_n T_1),$$

valamint

$$f_2(x_n) = f_2(b+nT_2) = f_2(b) = \beta,$$

ugyanis T_1 periódusa f_1-nek, T_2 pedig az f_2-nek. Tehát

$$f(x_n) = \varphi(f_1(x_n), f_2(x_n)) = \varphi(f_1(b+\theta_n T_1), \beta), \tag{5}$$

bármely $n\in N^*$ esetén. Azonban $\{\theta_n : n\in N\}$ a $[0,1]$ intervallumon sűrű, ezért $\{\theta_n T_1 : n\in N\}$ a $[0, T_1]$-en sűrű, így bármely $x_0\in[0,T_1]$ esetén létezik $n_k\in N^*$ úgy, hogy $\lim_{k\to\infty}(\theta_{n_k}\cdot T_1) = x_0$.

Vegyük észre, hogy $x_0 := a-b-\left[\frac{b-a}{T_1}\right]T_1 \in [0, T_1]$; ugyanis, ha $[x]$ az x valós szám egész részét jelöli, akkor $x-1 < [x] \le x$, és az $x=\frac{b-a}{T_1}$ választással azonnal adódik, hogy $x_0\in[0,T_1]$.

A φ és az f_1 folytonossága alapján az (5) összefüggésben $n=n_k$ esetén határértékre térve:

$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty}\varphi(f_1(b+\theta_{n_k}T_1), \beta) = \varphi(f_1(b+x_0), \beta) = \varphi(f_1(a), \beta) =$
$= \varphi(\alpha, \beta) = M$.

Hasonlóan igazolhatjuk, hogy f bármilyan közel lehet m-hez is.

Megjegyzések.

A $\varphi(x, y) = x+y$ sajátos esetben az $f := f_1+f_2$ függvénynek akkor és csak akkor van globális maximuma, illetve minimuma és $\min_{x\in R} f(x) = m_1+m_2$, illetve $\max_{x\in R} = M_1+M_2$, ha léteznek olyan $u, v\in R$ értékek, amelyekre egyidőben $f_1(u) = m_1$ és $f_2(u) = m_2$, illetve egyidőben $f_1(v) = M_1$ és $f_2(v) = M_2$.

Amennyiben az $f_1(x) = \sin x$ és $f_2(x) = \sin(x\sqrt{2})$ függvényeket választjuk, következik, hogy a [4] és [6]-ban található $f(x) = \sin x + \sin(x\sqrt{2})$ függvénynek nincsenek globális szélsőértékei, ugyanis nem találhatók olyan $u, v\in R$ értékek, amelyekre $\sin u = \sin(u\sqrt{2}) = 1$, illetve $\sin v = \sin(v\sqrt{2}) = -1$ legyen (mindkét esetben a $\sqrt{2}\in Q$ ellentmondáshoz jutnánk).

Azonban a $g(x) = \cos x + \cos(x\sqrt{2})$ függvénynek már van globális maximuma, ugyanis létezik olyan $v\in R$, amelyre $\cos v = \cos(v\sqrt{2}) =$ $= 1$, mégpedig $v=0$. Globális minimuma a $\cos u = \cos(u\sqrt{2}) = -1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \sqrt{2}\in Q$ miatt nincsen.

Befejezésül megemlítjük, hogy itt a $\frac{T_1}{T_2}\notin Q$ feltételnek kulcsszerepe volt, ugyanis ellenkező esetben (az 1. tétel szerint) az $x \to f(x) = \varphi(f_1(x), f_2(x))$ függvény folytonos és periodikus, ezért Weierstrass tétele értelmében f biztosan eléri a szélsőértékeit.

SZAKIRODALOM

[1]. *Balogh Zoltán, Bodor György Csaba:* Sűrű halmazok, egyenletes elosztás, ML 7-8/1987.

[2]. *Tuzson Zoltán:* Folytonos periodikus függvények összegének periodikusságáról, ML 5/1989.

[3]. *Molnár Emil:* Matematikai versenyfeladatok gyűjteménye, 1947 - 1970, Tankönyvkiadó, 1983 (57. o. 83. feladat).

[4]. *Fried Katalin, Pogáts Ferenc:* Középiskolai matematikai versenyek 1980 - 1984, Tankönyvkiadó, 1986 (430. o. 261. feladat).

[5]. *G.H.Bancov:* Kronecker tételéről, KVANT 7/1986 (5-7. old.).

[6]. A matematika tanítása 2/1986 (64. o. 1106. feladat).

[7]. *Balázs Márton, Kolumbán József:* Matematikai analízis, Dacia Könyvkiadó, Kolozsvár-Napoca, 1978.