Ha most az $y = \pi + t$ változócserét vezetjük be, felírható:

$$(2') \quad \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos \varphi_k (\pi + t) + b_k \sin \varphi_k (\pi + t)) - a_n \cos t - b_n \sin t \geq 0, \ (\forall) \, t \geq -\pi.$$

Felbontva a $\cos \varphi (\pi + t)$ és $\sin \varphi (\pi + t)$ összefüggéseket a (2) és (2') alapján, felírhatjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{n-1} (A_k \cos \varphi_k x + B_k \sin \varphi_k x) \geq 0, \ (\forall) \ x \geq 0,$$

ahol $A_k = a_k(1 + \cos \varphi_k \pi) + b_k \sin \varphi_k \pi$, $B_k = b_k(1 + \cos \varphi_k \pi) - a_k \sin \varphi_k \pi$, $k = \overline{1, n-1}$.

Lássuk be, hogy létezik $A_i \neq 0$ vagy $B_i \neq 0$; ugyanis ha:

$A_k = B_k = 0$, $(\forall)$ $k = \overline{1, n-1} \Rightarrow A_k \cdot b_k = 0$, $\quad - a_k \cdot B_k = 0 \Rightarrow (a_k^2 + b_k^2) \sin \varphi_k \pi = 0$

Így ha $a_k^2 + b_k^2 \neq 0$, $(\forall)$ $k = \overline{1, n-1} \Rightarrow \sin \varphi_k \pi = 0$, $(\forall)$ $k = \overline{1, n-1} \Rightarrow \varphi_k = m_k \pi$, $m_k \in Z$, ami abszurdumhoz vezet, hiszen azt kapnánk, hogy $\theta_i/\theta_j \in Q$, $(\forall)$ $i, j = \overline{1, n-1}$.

Ezért tehát (3) $a_j^2 + b_j^2 = 0 \Rightarrow a_j = b_j = 0$, azonban ezek szerint a $(**)$ egyenlőtlenség $(n-1)$ tagú lesz, vagyis érvényes lesz az indukciós feltétel alapján az, hogy $a_k = b_k = 0$, $(\forall)$ $k = \overline{1, n}$, kivéve a $k = j$ értéket (ez nincs az összegben) erre nyilván $a_j = b_j = 0$.

Ha $a_k^2 + b_k^2 = 0$, $(\forall)$ $k = \overline{1, n-1}$, nyilván $a_k = b_k = 0$, $(\forall)$ $k = \overline{1, n-1}$. Így visszatérve a $(**)$-ba, azt kapnánk, hogy $a_n = b_n = 0$.

Ezzel tehát igazoltuk, hogy minden esetben, ha $(**)$ igaz, akkor $a_k = b_k = 0$, $(\forall)$ $k = \overline{1, n}$, miszerint bizonyításunk véget ért.

Ha most az $S(x) = b_1 \sin \theta_1 x + b_2 \sin \theta_2 x + \ldots + b_n \sin \theta_n x$ esetet vizsgálnánk, ugyanígy végigvezethetnénk az előbbi gondolatmenetet, azonban ha a $C(x) = \frac{b_1}{\theta_1} \cos \theta_1 x + $ $+ \frac{b_2}{\theta_2} \cos \theta_2 x + \ldots + \frac{b_n}{\theta_n} \cos \theta_n x$ függvényt válasszuk, melynek az előbbiek alapján végtelen sok valós zérushelye van, akkor mivel $C'(x) = S(x)$, a Rolle-tétel értelmében a derivált egyenletnek a függvény két gyöke között van egy gyöke, vagyis $S(x)$-nek is végtelen sok zérushelye van.

Ha most a $g(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos \theta_k x + b_k \sin \theta_k x)$ esetet tárgyalnánk, akárcsak a koszinusz esetén, itt is az $x - x_0 = t$ változócserével, azt kapnánk, hogy $\sum_{k=1}^{n} (A_k \cos \theta_k t + B_k \sin \theta_k t) \geq 0$, $(\forall)$ $t \geq 0$, ahol $A_k = a_k \cos \theta_k x_0 + b_k \sin \theta_k x_0$ és $B_k = -a_k \sin \theta_k x_0 + b_k \cos \theta_k x_0$.

A matematikai indukció módszerét használva, itt is ellentmondáshoz jutunk, azonban ennek az elvégzését az olvasóra bízzuk, mivel pontosan úgy járunk el, mint a koszinusz esetén, amit már bizonyítottunk.

A MATEMATIKAI LAPOK ÉVI VERSENYÉN KITŰZÖTT FELADATOK
VIII. VERSENY, CURTEA DE ARGEŞ, 1987 (II)

Összeállította: *Marcel Ţena*

MATEMATIKAI KÉSZSÉGET ELLENŐRZŐ VERSENY
1987. augusztus 29

IX. és X. osztály

1. *Mutassuk meg, hogy az* $x^3 + y^3 + z^3 = 7xyz$ *egyenletnek végtelen sok gyöke van a* $Q^* \times Q^* \times Q^*$ *halmazban.*

Liviu Pîrşan

Az alábbiakban igazoljuk, hogy az általánosított másodfajú koszinusz-polinomnak, az $a_0 = 0$ esetben végtelen sok zérushelye van, majd levonjuk a következtetést a szinusz, illetve másodfajú trigonometrikus polinomok esetére is. (Ha $a_0 \neq 0$ akkor még a $C(x) = a_0 + a_1 \cos x + \ldots + a_n \cos nx$ polinom esetén sem mondhatunk semmit biztosan a zérushelyek számáról, hiszen például $a_0 = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + k^2$ választással már egyetlen zérushely sincsen).

Legyenek $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ nem mind nullák, $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n \in \mathbb{R}^*$ pedig olyan számok, amelyekre $\theta_i \neq \theta_j$, ha $i \neq j$ és $(\exists)\ \frac{\theta_i}{\theta_j} \notin Q$.

Ha
$$c: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ c(x) = c_1 \cos \theta_1 x + c_2 \cos \theta_2 x + \ldots + c_n \cos \theta_n x, \tag{*}$$

igazoljuk, hogy a $c(x) = 0$ egyenletnek végtelen sok megoldása van.

A reduktio ad absurdum módszerét használva, feltételezzük, hogy csak véges sok gyök van (hogy ilyen létezik, már igazoltuk) és legyen x_0 a legnagyobb pozitív gyök (ilyen is létezik, hiszen $\cos x$ páros).

Már eleve feltételezzük, (a koszinusz párossága miatt), hogy $\theta_k > 0$, $(\forall) k = \overline{1, n}$. Ugyanez feltételezhető a másik két esetben is. Ezek szerint feltételezzük, hogy $c(x) > 0$, $(\forall)\ x > x_0$ (nyilván a $c(x) < 0$ eset is ugyanígy bizonyítható).

Azonban az $x = x_0 + t$ változócserével, bármely $t \geqslant 0$ esetén

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \cos \theta_k(x_0 + t) \geqslant 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos \theta_k t + b_k \sin \theta_k t) \geqslant 0, \tag{**}$$

ahol $a_k = c_k \cdot \cos \theta_k x_0$, $b_k = -c_k \cdot \sin \theta_k x_0$.

Belátható, hogy az a_k és b_k nem mind nullák, hiszen csak a $\sin \theta_k x_0 = 0$, $(\forall)\ k = \overline{1, n}$ esetén kapnánk, hogy $x_0 \theta_k = m_k \pi$, $(\forall)\ k = \overline{1, n}$, ahonnan $\frac{\theta_i}{\theta_j} \in \mathbf{Q}$, $(\forall)\ i, j = \overline{1, n}$ esetén, ez pedig ellentmond a $(\exists)\ \frac{\theta_i}{\theta_j} \notin \mathbf{Q}$ feltételnek.

Az ML 11–12/1986. számának 435. oldalán igazoltuk (ugyan, csak a koszinusz esetén, de mint kijelentettük érvényes a szinusz és a trigonometrikus polinom esetén is), hogy ha a $(**)$ igaz $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$ esetén, akkor föltétlenül $a_k = b_k = 0$, $(\forall)\ k = \overline{1, n}$. Az eltérés itt csak annyiban áll, hogy bármely $t \geqslant 0$ esetén igaz a $(**)$. Az alábbiakban igazoljuk, hogy ez utóbbi esetben is $a_k = b_k = 0$, $(\forall)\ k = \overline{1, n}$. Itt a bizonyítás során nyilván arra kell vigyáznunk, hogy a változócserék során ne hagyjuk el a $[0, +\infty)$ intervallumot.

Indukcióval bizonyítunk. Legyen $n = 1$; így a $(**)$ szerint: $a_1 \cos \theta_1 x + b_1 \sin \theta_1 x \geqslant 0$, $(\forall)\ x \geqslant 0$. Ha $\theta_1 > 0$ mellett a $\theta_1 x = t$ változócserét végezzük, $a_1 \cos t + b_1 \sin t \geqslant 0$, $(\forall)\ t$, $t \geqslant 0$. (1)

Továbbá legyen $t = \pi + y$ így $-a_1 \cos y - b_1 \sin y \geqslant 0$, $(\forall)\ y \geqslant -\pi$. (2) Tehát az (1) és (2) alapján $(\forall)\ x \geqslant 0$ esetén $a_1 \cos x + b_1 \sin x = 0$, vagyis $a_1 = 0$ és $b_1 = 0$.

Feltételezzük, hogy $(n - 1)$ vagy annál kevesebb tag-párból álló $(**)$ összefüggés maga után vonja azt, hogy $a_k = b_k = 0$, $(\forall)\ k = \overline{1, n-1}$.

Igazolni fogjuk, hogy n számú tag-pár esetén is ugyanerre a következtetésre jutunk, vagyis $a_k = b_k = 0$, $(\forall)\ k = \overline{1, n}$. Ez ellentmondást jelent, hiszen a $c(x)$ nem azonosan nulla.

A bizonyítás könnyítése végett legyen $\frac{\theta_1}{\theta_2} \notin Q$. A $(**)$ felírható:

(1) $$\sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos \theta_k x + b_k \sin \theta_k x) + (a_n \cos \theta_n x + b_n \sin \theta_n x) \geqslant 0,\ (\forall)\ x \geqslant 0,$$ alakban.

Bevezetve az $x = \frac{y}{\theta_n}$ változócserét, felírhatjuk, hogy:

(2) $$\sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos \varphi_k y + b_k \sin \varphi_k y) + a_n \cos y + b_n \sin y \geqslant 0,\ (\forall)\ y \geqslant 0,$$

ahol $\varphi_k = \frac{\theta_k}{\theta_n}$.

AZ ÁLTALÁNOSÍTOTT TRIGONOMETRIKUS POLINOMOK ZÉRUSHELYEINEK SZÁMÁRÓL

Tuzson Zoltán tanár, Székelyudvarhely

A szakirodalomban ismeretesek és különös fontossággal rendelkeznek a $g(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, $a_k, b_k \in \mathbf{R}$, $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ alakú trigonometrikus polinomok, amelyeket $a_k = 0$, $(\forall)\ k = \overline{0, n}$ esetben szinusz-polinomnak, $b_k = 0$, $(\forall)\ k = \overline{1, n}$ esetén koszinusz-polinomnak nevezünk.

A polinom elnevezés elég kézenfekvő, hiszen Moivre képlete alapján meggyőződhetünk, hogy adott $n \in \mathbf{N}^*$ esetén $\cos nx = P_n(\cos x)$ és $\sin nx = \sin x \cdot Q_{n-1}(\cos x)$ alakra hozhatók, ahol P_n, illetve Q_{n-1} n, illetve $(n-1)$-edfokú polinomfüggvények.

A fentiekhez hasonlóan, adott a_k, $b_k \in \mathbf{R}$ nem mind nulla, $r_1, r_2, \ldots, r_n \in Q^*$, $r_i \neq r_j$, ha $i \neq j$ esetén vezessük be a

$$(1) \qquad g_1(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos r_k x + b_k \sin r_k x), \ g_1: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

függvényt, amelyet nevezzünk el elsőfajú általánosított trigonometrikus-polinomnak (illetve koszinusz vagy szinusz nevet írjuk, ha $b_k = 0$, $(\forall)\ k = \overline{1, n}$, illetve $a_k = 0$, $(\forall)\ k = \overline{0, n}$).

Ugyszintén adott $a_k, b_k \in \mathbf{R}$ és nem mind zérus $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n \in \mathbf{R}^*$ esetén, ahol ha $i \neq j$ $\theta_i \neq \theta_j$, ha létezik $\frac{\theta_i}{\theta_j} \notin \mathbf{Q}$, akkor a

$$(2) \qquad g_2: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \ g_2(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos \theta_k x + b_k \sin \theta_k x)$$

függvényt nevezzük másodfajú általánosított trigonometrikus-polinomnak (koszinusz, illetve szinusz).

Belátható, hogy g periodikus, éspedig $g(x + 2\pi) = g(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, valamint ha q az $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbf{Q}^*$ nevezőinek a legkisebb közös többszöröse, akkor g_1 is periodikus lesz, éspedig $g_1(x + 2q\pi) = g_1(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$. Ellenben, ha létezik olyan $\frac{\theta_i}{\theta_j}$, amely nem racionális, g_2 nem lesz periodikus (Ezt már az ML 11–12/1986. számában a 440. oldalon igazoltuk).

A g-re vonatkozóan, a zérushelyeket illetően, a Pólya György, Szegő Gábor: Feladatok és tételek az analízis köréből, II, Tankönyvkiadó, 1981 című könyv 101. oldalán a 14. számú feladatban azt kérik, hogy ha a_n és b_n közül legalább az egyik nem zérus, igazoljuk, hogy a $g(x) = 0$ egyenletnek $2n$ számú zérushelye van, ha mind a valós, mind a komplex értékeket számításba vesszük és a többszörös zérushelyeket multiplicitásuknak megfelelően számláljuk (az x-et és $(x + 2\pi)$-t nem tekintjük különbözőknek, tehát a $[0,2\pi)$ intervallum valós gyökeit vesszük.

Az idézett könyvben adott magasabbszintű bizonyítástól eltérően, ezt nem olyan nehéz belátni, hogy ha figyelembe vesszük a már említett $\cos kx = P_k(\cos x)$, $\sin kx = \sin x \cdot Q_{n-1}(\sin x)$ képleteket.

Belátható, hogy a g_1 is változócserével (a cos párossága és a sin páratlansága figyelembevételével) tulajdonképpen a g alakra hozható (nyilván van $a_i = 0$ és $b_j = 0$ is).

Azt, hogy a g, g_1, g_2 függvényeknek van valós zérushelyük, már bizonyítottuk az előbbiekben. A periodikusság miatt R-ben, mind a g mind a g_1 függvényeknek végtelen sok valós zérushelyük van (persze ha az x és $(x + 2k\pi)$-t különbözőknek vesszük). Ezért természetesen vethetjük fel a jegyzet központi célkitűzésének szánt kérdést: a $g_2(x) = 0$ egyenletnek végtelen vagy véges sok zérushelye van?

Ha azt nézzük, hogy a g, illetve g_1 esetén a periodikusság „okozta" a végtelen zérushelyszámot, akkor a g_2 nemperiodikussága miatt nem olyan evidens, hogy a $g_2(x) = 0$ egyenletnek végtelen sok zérushelye van.

Azonban, ha a $\sin x$, illetve a $\cos x$ függvények grafikus ábráját, illetve egy szinusz vagy koszinusz összeg (vagy lineáris kombináció) grafikus képét tekintjük, láthatjuk, hogy ezek végtelenszer metszik az Ox tengelyt.