A SZIMMETRIA SZEREPE EGYES FELADATOK MEGOLDÁSÁNÁL

Írta: **Tuzson Zoltán** tanár, Székelyudvarhely

"A szimmetria - akármilyen tágan vagy szűken is értelmezzük - egyike azoknak a fogalmaknak, amelyek segítségével a történelem folyamán az emberek igyekeztek a rendet, szépséget és tökéletességet megérteni és megvalósítani."

Hermann Weyl

Nem a geometriai vagy csoportelméleti értelemben vett szimmetriával foglalkozunk, hanem olyan feladatok megoldását vizsgáljuk, amelyek valamilyen módon kapcsolatba hozhatók szimmetrikus függvényekkel vagy függvényrendszerekkel, szimmetrikus alakzatokkal

Ilyen esetekben a feladatmegoldás során az analógiával való gondolkodás játszik a legfontosabb szerepet, pontosabban a feladatok megoldásának nagy részét a belső analógiák képezik.

Mindenekelőtt tisztázzunk néhány fogalmat:

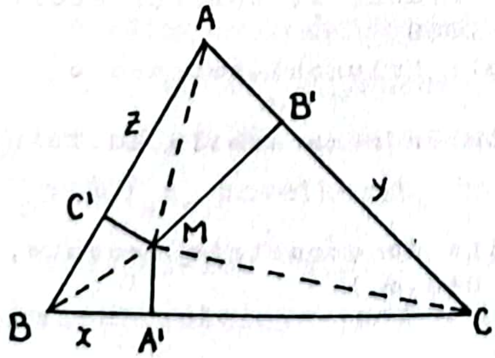
(1) Egy n változós f függvényt teljesen szimmetrikusnak nevezünk (egyszerűen szimmetrikusnak) ha változóinak az összes megengedett permutációjára az f függvény alakja nem változik. Ha ez a tulajdonság a változóknak csak egy részhalmazára érvényes, akkor parciális szimmetriáról beszélünk.

A fenti tulajdonság függvényrendszerre is kiterjeszthető.

(2) Az *analógia* mindenekelőtt a hasonlóság egy fajtája. Hasonlónak mondunk két dolgot, ha valamilyen tekintetben megegyeznek egymással, *analógnak* mondunk két dolgot, ha *megfelelő részeik egyforma kapcsolatban vannak.* Belső analógiáról beszélünk, ha az analógia egy ugyanazon rendszer keretén belül lép fel.

A továbbiakban bemutatott feladatok által azt szeretnénk szemléltetni és kihangsúlyozni, hogy a feladatmegoldás milyen nagymértékben függ a jelenlévő szimmetriától, és hogy milyen döntő szerepe van a szimmetriából fakadó analógiának. A szimmetria tehát a feladatmegoldás segédeszköze, mivel ötletet adhat a megoldáshoz, vagy ha észrevesszük az adatokban rejlő szimmetriát lerövidítheti a megoldást. Ugyanakkor ízelítőt szeretnénk adni azokból az ötletekből is, amelyeket ilyen típusú feladatok megoldása esetén használunk.

1. feladat. *Legyen* M *az* ABC *egyenlő oldalú háromszög belső tartományának egy változó pontja,* A',B',C' *pedig az* M *pont vetületei a* BC,CA,AB *oldalakra. Igazoljuk, hogy az* AC'+BA'+CB' *összeg állandó.*



Megoldás. Legyen $a=AB=BC=CA$ és $A'B=x$, $B'C=y$, $C'A=z$.

Igazolandó, hogy az $f(x,y,z)=x+y+z$ szimmetrikus függvény állandó. Először is vegyük észre, hogy az x,y,z szakaszok a háromszög oldalain "ugyanúgy", pontosabban analóg módon helyezkednek el, hiszen "szembeállva" az oldalakkal bal kéz felől vannak.

Írjuk fel a Pitagorász tételét a BMA' és CMA' háromszögekben: $BM^2=x^2+MA'^2$; $CM^2=A'C^2+MA'^2$, tehát $x^2-MB^2=(a-x)^2-MC^2$, vagyis

$$x=\frac{a^2+MB^2-MC^2}{2a} \qquad (1).$$

Szimmetriai meggondolások következtében, megfigyelve az (1) kifejezésben levő szakaszok szerepét, ha "szembeállunk" rendre a többi oldalakkal is, azonnal felírhatjuk az $y=\dfrac{a^2+MC^2-MA^2}{2a}$ (2) és $z=\dfrac{a^2+MA^2-MB^2}{2a}$ (3) analóg kifejezéseket.

Ezért az (1), (2), (3) alapján $f(x,y,z)=x+y+z=\frac{3}{2}a$ valóban állandó.

2. feladat. *Igazoljuk, hogy ha* $x,y,z\in(0,\frac{\pi}{2})$, *akkor*

$$\sin(x+y)\sin(x+z)\sin(y+z)\geq\sin2x\cdot\sin2y\cdot\sin2z.$$

Megoldás. A baloldali és a jobboldali szimmetrikus függvények láttán arra a következtetésre jutunk, hogy a feladatot a szimmetria figyelembevételével kell megoldani. A számtani és mértani középarányosok közti egyenlőség alapján felírható, hogy

$$\sin(x+y)=\sin x\cdot\cos y+\sin y\cdot\cos x\geq2\sqrt{\sin x\cdot\cos y\cdot\sin y\cdot\cos x}\iff$$

$\iff \sin(x+y)\geq\sqrt{\sin2x\cdot\sin2y}$ (1). A szimmetria figyelembevételével, felírva a $\sin(y+z)\geq\sqrt{\sin2y\cdot\sin2z}$ (2), $\sin(z+x)\geq\sqrt{\sin2z\cdot\sin2x}$ (3) analóg összefüggéseket, a megfelelő oldalak összeszorzása után a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk.

A feladat megoldása során tulajdonképpen az $(a+b)(b+c)(c+a)\geq\geq8abc$ Cèsaro-féle egyenlőtlenséget alkalmaztuk.

3. feladat. *Bontsuk fel szorzótényezőkre a következő polinomot:*

$$P(x,y,z)=x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)+2xyz.$$

Megoldás. Először tekintsük változónak csak az x-et, az y és z legyen paraméter. Mivel az $x=-y$ értékre $P(x,y,z)=0$, ezért Bézout-tétele értelmében $P(x,y,z)\,\vdots\,(x+y)$-nal. A szimmetria miatt $P(x,y,z)\,\vdots\,(y+z)$ és $P(x,y,z)\,\vdots\,(z+x)$ is igaz, így

$$P(x,y,z)\,\vdots\,(x+y)(y+z)(z+x).$$

Mivel $\mathrm{gr}P=3$, ezért létezik olyan $a\in\mathbb{R}$, amelyre $P(x,y,z)=a\cdot(x+y)\cdot\cdot(y+z)(z+x)$. Az $x=0$, $y=1$, $z=1$ sajátos értékekre $a=1$, így $P(x,y,z)==(x+y)(y+z)(z+x)$.

4. feladat. *Igazoljuk, hogy ha* $x+y+z=0$, *akkor*

$$x^{2n+1}+y^{2n+1}+z^{2n+1}\,\vdots\,x^3+y^3+z^3.$$

Megoldás: Mivel $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0$, azt kell igazolni, hogy $x^{2n+1}+y^{2n+1}+z^{2n+1}\,\vdots\,xyz$. Kiküszöbölve z-t, ez még így írható: $P(x,y)=x^{2n+1}+y^{2n+1}-(x+y)^{2n+1}\,\vdots\,xy(x+y)$. Ugyancsak Bézout-tétele értelmében, ha x változó és y paraméter, a $P(0,y)=0$ miatt $P(x,y)\,\vdots\,x$ és a $P(-y,y)=0$ miatt $P(x,y)\,\vdots\,(x+y)$. Analóg módon

$P(x,y)\vdots y$ is igaz. A megoldás során láthattuk, hogy a szimmetria miatt más változót is ki lehetett volna küszöbölni.

5. feladat. *Igazoljuk, hogy ha* $a,b,c>0$, *akkor*
$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\le abc.$$

Megoldás. Vegyük észre, hogy $a^2\ge a^2-(b-c)^2$ igaz. Ha még felírjuk a $b^2\ge b^2-(c-a)^2$ és $c^2\ge c^2-(a-b)^2$ analóg egyenlőtlenségeket is, akkor $a^2b^2c^2\ge(a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2$ azonnal adódik.

6. feladat. *Igazoljuk, hogy ha* a,b,c *egy háromszög oldalalhosszai és* $x,y,z\in R$ *úgy, hogy* $ax+by+cz=0$, *akkor* $xy+yz+zx\le 0$.

Megoldás. $ax+by+cz=0 \Leftrightarrow z=-\frac{1}{c}(ax+by)$, ennek alapján $xy+yz+zx\le 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow ax^2+(a+b-c)xy+by^2\ge 0$ (1) lesz a bizonyítandó egyenlőtlenség. Mivel a,b,c egy háromszög oldalai, ezért $a+b>c$ és ha $xy\ge 0$, akkor az (1) nyilvánvaló. Ha $xy<0$, akkor nem a z-t fejezzük ki, hanem y-t vagy az x-et és a szimmetria miatt, analógiával gondolkozva, mindkét esetben megoldottuk a feladatot, amennyiben $xz\ge 0$ vagy $yz\ge 0$. Ha azonban egyik sem teljesül, vagyis $xy<0$, $yz<0$, $zx<0$, akkor nyilvánvalóan következik, hogy $xy+yz+zx\le 0$. Ezzel a feladatot minden esetben megoldottuk.

7. feladat. *A természetes számok halmazán oldjuk meg a következő egyenletet*
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{2}\ .$$

Megoldás. A szimmetria miatt - az általánosság csorbítása nélkül - feltehető, hogy $x\ge y\ge z$. Így $\frac{3}{2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le\frac{3}{z}\Rightarrow z\le 2$. De $z\in\mathbf{N}^*$, tehát $z\in\{1,2\}$.

a) Ha $z=1$, akkor $\frac{1}{2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\le 2\cdot\frac{1}{y}\Rightarrow y\le 4$. De $y\in\mathbf{N}^*$, tehát $y\in\{1,2,3,4\}$. Kipróbálva ezeket az értékeket, csak az $y=3$; $x=6$ és $y=4$; $x=4$ megoldás.

b) ha $z=2$, akkor $1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\le 2\cdot\frac{1}{y}\Rightarrow y\le 2$. De $y\in\mathbf{N}^*$, tehát $y\in\{1,2\}\Rightarrow y=$ $=x=2$ megoldás.

Tehát a megoldáshármasok: $(6,4,1),(4,4,1),(2,2,2)$ és a szimmetria miatt az $(1,6,4),(4,6,1),(4,1,6),(1,4,6),(4,1,4),(1,4,4)$ is megoldások.

8. feladat. *A valós számok halmazán oldjuk meg a következő egyenletrendszert*: $x^2+2=3y$, $y^2+2=3z$, $z^2+2=3x$.

Megoldás. Ugyancsak szimmetriai okokból feltehető, hogy $x\ge y\ge z$. De így $(z^2+2):3\ge(x^2+2):3\ge(y^2+2):3 \Leftrightarrow z^2\ge x^2\ge y^2 \Rightarrow z\ge x\ge y$ (hiszen az egyenletrendszerből látható, hogy $x,y,z>0$). A két egyenlőtlenséglánc alapján $x=y=z$ az egyenletrendszer megoldásai lesznek, azaz $x=y=z=1$ vagy $x=y=z=2$.

9. feladat. *Oldjuk meg az* $x+y+z=a$, $x+\varepsilon y+\varepsilon^2 z=b$, $x+\varepsilon^2 y+\varepsilon z=c$ *egyen-*

letrendszert, ahol a, b, c∈R *és* ε *teljesíti az* $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$ *egyenlőséget.*

Megoldás. Természetesen, a behelyettesítési módszerrel is megoldhatnánk a feladatot, azonban a szimmetriára való tekintettel sokkal elegánsabb megoldást mutatunk be. Adjuk össze az egyenletek megfelelő oldalait: $3x=a+b+c$, vagyis $x=(a+b+c):3$.

Ha most a második egyenletet ε-nal, a harmadikat ε^2-nel szorzuk és így adjuk össze az első egyenlettel a $z=(a+\varepsilon b+\varepsilon^2 c):3$ adódik. A z és y-ban való szimmetria miatt $y=(a+\varepsilon^2 b+\varepsilon c):3$ ($\varepsilon^3=1$).

10. feladat. *A valós számok halmazán oldjuk meg a következő egyenletrendszert*

$$x(x+y+z)=20,\ y(x+y+z)=30,\ z(x+y+z)=50.$$

Megoldás. Összegezve az egyenletek megfelelő oldalait, felírható, hogy $(x+y+z)^2=100$, így $x+y+z=\pm10$, ezért $x=\pm2$, $y=\pm3$, $z=\pm5$. Mivel nincs teljes szimmetria, a megoldások nem permutálhatók.

11. feladat. *A valós számok halmazán oldjuk meg a következő egyenletrendszert:* $x\sqrt{yz}=4$, $y\sqrt{xz}=9$, $z\sqrt{xy}=16$.

Megoldás. Belátható, hogy $x,y,z>0$. Összeszorozva az egyenletek megfelelő oldalait, azt kapjuk, hogy $(xyz)^2=24^2$, ahonnan csak az $xyz=24$ felel meg. Visszahelyettesítés után kapjuk, hogy $x=\frac{2}{3}$, $y=\frac{27}{8}$, $z=\frac{32}{3}$.

12. feladat. *A valós számok halmazán oldjuk meg a következő egyenletrendszert:* $x+y+z=a$, $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^3+y^3+z^3=a^3$, *ahol* a *adott valós szám.*

Megoldás. A Viète-féle összefüggések segítségével, képezzük azt a harmadfokú egyenletet, amelynek gyökei pontosan x, y, z. Tehát $S_1=x+y+z=a$, így $S_2=xy+yz+zx=S_1^2:2-(x^2+y^2+z^2):2=0$, ezért x,y,z a $t^3-at^2+S_3=0$ egyenlet gyökei. Rendre $t=x$, $t=y$, $t=z$ értékekre, összegezés után az $(x^3+y^3+z^3)-a(x^2+y^2+z^2)+3S_3=0$ adódik, ahonnan $S_3=0$, így x,y,z a $t^3-at^2=0$ egyenlet gyökei. Végül is a szimmetria miatt a megoldáshármasok: (0,0,a), (0,a,0), (a,0,0) és csak ezek.

13. feladat. *Határozzuk meg a következő egyenletrendszer összes megoldásait:* $x+y+z+w=10$, $x^2+y^2+z^2+w^2=30$, $x^3+y^3+z^3+w^3=100$, $xyzw=24$.

Megoldás. Alkalmazhatnánk az előbbi feladat gondolatmenetét is, de vegyük észre, hogy (1,2,3,4) egy megoldás. Mivel az egyenletrendszer szimmetrikus x,y,z,w-ben, az (1,2,3,4) többi 23 permutációja is megoldás lesz. Más megoldás nincs, mert az egyenletek fokszámainak a szorzata pontosan 24.

14. feladat. *Határozzuk meg a következő kifejezések minimumait:*

a) $f(a,b,c)=\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}$; b) $g(x,y,z)=\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}$, *ha* $a,b,c,x,y,z>0$.

Megoldás. a) Mivel bármely $t>0$ esetén $t+\frac{1}{t}\geq 2$, felírható, hogy $f(a,b,c)=\left[\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right]+\left[\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right]+\left[\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right]\geq 2+2+2=6$ így min $f(a,b,c)=6$.

b) Vezessük be az $x+y=A$, $y+z=B$, $z+x=C$ jelöléseket. Így $x=\frac{1}{2}(A-B+C)$, $y=\frac{1}{2}(B-C+A)$, $z=\frac{1}{2}(C-A+B)$, $g(x,y,z)=\frac{1}{2}\left[\frac{A+B}{C}+\frac{B+C}{A}+\frac{C+A}{B}-3\right]\geq$ $\geq\frac{1}{2}(6-3)=\frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ min $g(x,y,z)=\frac{3}{2}$.

15. feladat. *A pozitív egész számok halmazán oldjuk meg a következő egyenletet:* $x^2+y^2=3(v^2+w^2)$.

Megoldás. Igazolni fogjuk, hogy az egyenletnek nincs megoldása az $\mathbf{N}^*$-on. Feltételezzük az ellenkezőjét, vagyis, hogy (x_0, y_0, v_0, w_0) természetes számokból álló megoldásnégyes. Ezért $x_0^2+y_0^2=3(v_0^2+w_0^2)$. Mivel $3|x_0^2+y_0^2$, következik, hogy $3|x_0^2$ és $3|y_0^2$ (hiszen ellenkező esetben $x_0^2=3p+1$, $y_0^2=3q+1$ $(p,q\in\mathbf{N})$, így $3\nmid x_0^2+y_0^2)$, valamint $3|x_0$ és $3|y_0$ is igaz lesz, tehát létezik $x_1, y_1\in\mathbf{N}^*$ úgy, hogy $x_0=3x_1$, $y_0=3y_1$, így $x_1<x_0$, $y_1<y_0$. Ezek szerint $9(x_1^2+y_1^2)=3(v_0^2+w_0^2)$, ahonnan $3|v_0^2+w_0^2$ és analóg módon létezik $v_1, w_1\in\mathbf{N}^*$ úgy, hogy $v_0=3v_1$, $w_0=3w_1$ valamint $v_1<v_0$, $w_1<w_0$, és $x_1^2+y_1^2=3(v_1^2+w_1^2)$. Érdekes módon, a szimmetria miatt, az eredeti egyenlettel hasonló alakú egyenlethez jutottunk. Ez pontosan elég annak igazolására, hogy nincs megoldás. A Fermat által alkalmazott *descente infinie* (végtelen leszállás) módszerével, ha megismételjük a fenti eljárást, egy $x_0>x_1>x_2>\dots$ végtelen, csökkenő természetes számsorozathoz jutunk, ami ellentmond annak, hogy a természetes számok halmaza alulról korlátos. Másképpen: ha (x_0, y_0, v_0, w_0) a legkisebb természetes megoldásnégyes, a megoldás elején kapott (x_1, y_1, v_1, w_1) már ellentmondás.

16. feladat. *A természetes számok halmazán oldjuk meg a következő egyenletet:* $3^x+3^y+3^z=513$.

Megoldás. Szimmetria okok miatt feltehető, hogy pl. $x\geq y\geq z$. Így $3^z(3^{x-z}+3^{y-z}+1)=3^3\cdot 19$, tehát $3^z=3^3$, vagyis $z=3$, ezért $3^{x-3}+3^{y-3}+1=$ $=19$ alapján $3^{y-3}(3^{x-y}+1)=3^2\cdot 2$, így $3^{y-3}=3^2$, ahonnan $y=5$, tehát $3^{x-5}+1=2$ $\Rightarrow$ $3^{x-5}=3$ $\Rightarrow$ $x=6$. Tehát $(6,5,3)$ megoldás, és a szimmetria miatt ennek permutációi $(6,3,5),(5,6,3),(5,3,6),(3,6,5),(3,5,6)$ is megoldások.

17. feladat. *Igazoljuk, hogy tetszőleges* a,b,c,d,e *egész számok esetén, ha* $9|a^3+b^3+c^3+d^3+e^3$, *akkor* $3|abcde$.

Megoldás. Feltételezzük az ellenkezőjét, vagyis azt, hogy $3\nmid abcde$. Így $3\nmid a \Rightarrow 3|a+1$ vagy $3|a-1 \Rightarrow 9|a^3+1$ vagy $9|a^3-1$. Felírva az analógjait is, azt kapjuk, hogy $a^3+b^3+c^3+d^3+e^3=9k\pm1\pm1\pm1\pm1\pm1$, vagyis $9|\pm1\pm1\pm1\pm1\pm1$, ami absurdum.

18. feladat. *Igazoljuk, hogy ha* $n\geq2$ *természetes szám és* $x\leq n$, $y\leq n$, *akkor az* $x^n+y^n=z^n$ *egyenletnek nincs pozitív egész megoldása.*

Megoldás. Szimmetria okok miatt legyen pl. $y\geq x$. Mivel $z>y$ és $z\in N^* \Rightarrow z\geq y+1 \Rightarrow z^n\geq y^n+C_n^1y^{n-1}+C_n^2y^{n-2}+\ldots+C_n^{n-1}y^1+1>y^n+ny^{n-1}>2y^n>x^n+y^n$.

A CAUCHY-EGYENLŐTLENSÉG EGY ÁLTALÁNOSÍTÁSÁRÓL (II)

Írta: **Tóth László**, egyet. tanársegéd, Kolozsvár

1. Legyenek a_{ij} pozitív valós számok, $i=1,2,\ldots,n$, $j=1,2,\ldots,k$, ahol k és n pozitív egész számok és $p_1,p_2,\ldots,p_k$ olyan pozitív valós számok, melyekre $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\ldots+\frac{1}{p_k}=1$. Ekkor fennáll az alábbi, J.L.W.V. Jensentől származó egyenlőtlenség [3]:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i1}a_{i2}\ldots a_{ik}\leq\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i2}^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}}\ldots\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}^{p_k}\right)^{\frac{1}{p_k}}. \qquad (1)$$

Ha $p_1=p_2=\ldots=p_k=k$, akkor innen visszakapjuk a [6] dolgozatban bizonyított egyenlőtlenséget, mely $k=2$-re a jól ismert Cauchy egyenlőtlenséget adja. Ha az (1)-ben $k=2$ és $p_1=p>0$, $p_2=q>0$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, továbbá $a_{i1}=a_i>0$, $a_{i2}=b_i>0$, $i=1,2,\ldots,n$, akkor a Hölder-egyenlőtlenséget kapjuk (lásd [2, 222.old]):

$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\leq\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}. \qquad (2)$$

Az alábbiakban, bemutatjuk az (1) egyenlőtlenség egy közvetlen bizonyítását.

2. Először is igazoljuk, hogy ha $r_1,r_2,\ldots,r_k$ pozitív valós számok és $r_1+r_2+\ldots+r_k=1$, akkor bármely $x_1,x_2,\ldots,x_k\geq0$ esetén

$$x_1^{r_1}x_2^{r_2}\ldots x_k^{r_k}\leq r_1x_1+r_2x_2+\ldots+r_kx_k. \qquad (3)$$