miatt, létezik $k_r \in \mathbf{N}^*$ úgy, hogy $T = k_r T_r$. Ha még $g_r(x) = 0$, $\forall(x) \in \mathbf{R}$ is fennáll, akkor $T = k_s T_s$ alapján $\frac{T_r}{T_s} \in \mathbf{Q}^*$ lenne, ami ismét ellentmond (1)-nek.

Ha $g_r(x)$ nem azonosan nulla, akkor az indukciós feltételt egybevetve az előbbiekkel, a (3) összegből ismét a $\frac{T_r}{T_s} \in \mathbf{Q}^*$ ellentmondáshoz jutunk.

Következmények:

(1). A [12]-ben tanulmányozott $\mathfrak{C}(x) = a_1 \cos \xi_1 x + a_2 \cos \xi_2 x + \ldots + a_n \cos \xi_n x$ általánosított koszinusz-polinom akkor és csakis akkor periodikus, ha $\xi_i / \xi_j \in \mathbf{Q}^*$ bármely $i, j \in \overline{\{1, n\}}$.

Ha $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$ a [11]-ben jelzett feladatot, ha emellett $\xi_k = \sqrt{k}$, bármely $k \in \overline{\{1, n\}}$, a [10]-beli feladatot oldjuk meg.

(2) A Tételnél használt bizonyításból kiderül, hogy ha adott $n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$ esetén $g_1, g_2, \ldots, g_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ nem állandó folytonos periodikus függvények, amelyek teljesítenek egy $g_1(x) + g_2(x) + \ldots + g_n(x) = 0$, bármely $x \in \mathbf{R}$ alakú periodikus azonosságot, akkor a g_k periódusai páronként összemérhetők.

(3) Ha $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n \in \mathbf{R}^*$ és $\theta_i \neq \theta_j$, ha $i \neq j$, valamint $\theta_i / \theta_j \notin \mathbf{Q}$, akkor ha $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ periodikus függvény, (folytonos és nem állandó), valamint: $c_1 f(\theta_1 x) + c_2 f(\theta_2 x) + \ldots + c_n f(\theta_n x) = 0$, bármely $x \in \mathbf{R}$ esetén, akkor $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$.

(4) A tétel bizonyításához hasonlóan igazolható:

Ha $f_k : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^*$, bármely $k \in \overline{\{1, n\}}$ folytonos, nem állandó periodikus függvények, a $P_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^*$, $P_n(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \ldots f_n(x)$ függvény akkor és csakis akkor periodikus, ha az f_k periódusai páronként összemérhetők.

SZAKIRODALOM

[1] *Balogh Zoltán, Bodor György Csaba:* Sűrű halmazok, Egyenletes eloszlás, ML 7–8/1987 (272. oldal).
[2] GM 10/1969, 378. oldal, A-sorozat.
[3] *Gh. Sireţchi:* Calcul diferenţial şi integral, vol. 2, Editura ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 184. oldal.
[4] *Buletin matematic,* Inspectoratul şcolar al judeţului Dîmboviţa, Tîrgovişte, 1987, vol. 1, 3. oldal.
[5] *Pólya György, Szegő Gábor:* Feladatok és tételek az analízis köréből, I. kötet, Tankönyvkiadó, 1980. (118. oldal, 166. és 170. feladatok, 119. oldal. 174., 121. oldal 182. feladatok).
[6] KöMal 1/1987, 24. oldal.
[7] *Molnár Emil:* Matematikai versenyfeladatok gyűjteménye 1947–1970, Tankönyvkiadó, 309. és 203. oldalak).
[8] *Dorin Andrica:* Sorozatokról, amelyeknél a határérték-pontok halmaza egy intervallum, ML 11/1979, 405. oldal.
[9] *Vasile Pop:* Asupra funcţiilor periodice, GM seria A, 1–2/1982, 54. oldal.
[10] ML 2/1977, 16513. feladat ((átvéve a Matematikai v skole 5/1976–3)
[11] *Gergely Erzsébet:* Periodikus függvényekről, ML 12/1982, 477. old.
[12] *Tasson Zoltán:* Az ML 17241. és KöMal 2502. feladatainak általánosításáról, ML 11–12/1986, 440. oldal.

MATEMATIKAI VERSENY – HELYI SZAKASZ, BUCUREŞTI, 1989. II. 19.

IX. osztály

1. Legyen $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$
a) Mutassuk ki, hogy az $f : \mathbf{R} \setminus Q \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ függvény nem injektív

Igazoljuk, hogy ha (5) igaz, bármely $x \in \mathbf{R}$ esetén, akkor $a = 0$.

Az (5)-ből felírható, hogy $na = f_1(nx + T) - f_1(x)$, $(\forall)x \in [0, T_1]$. Az $f_1 : [0, T_1] \to \mathbf{R}$ függvény folytonos a $[0, T_1]$ zárt intervallumon, így Weierstrass tétele értelmében eléri szélsőértékét, vagyis. $M_1 = \max |f_1(t)|$. Ezért $|na| = |f_1(x + nt) - f_1(x)| \leqslant 2M_1$, bármely $n \in \mathbf{N}$ esetén, $t \in [0, T_1]$ ez pedig szintén ellentmondás lenne, hacsak nem $a = 0$.

Ha $a = 0$, akkor az (5) alapján $f_1(x + T) = f_1(x)$ és az (1) alapján $f_2(x + T) = f_2(x)$, bármely $x \in \mathbf{R}$ esetén. De T_1, illetve T_2 az f_1, illetve f_2 főperiódusai, ezért az 1. Segédtétel értelmében $T/T_1 \in \mathbf{Q}^*$ és $T/T_2 \in \mathbf{Q}^*$, ahonnan $T_1 / T_2 \in \mathbf{Q}^*$ ellentmondásra jutunk (Ha pl. $T = T_1$ akkor a fenti, vagy a $T = T_2 \Rightarrow T_1 = T_2$ ellentmondáshoz jutunk).

A jegyzet központi eredménye:

Tétel: *Legyenek* $n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$ *és* $f_k : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $k \in \overline{\{1, n\}}$ *folytonos, nem állandó, periodikus függvények.*

Az $S_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $S_n(x) := f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$ *függvény akkor és csakis akkor periodikus, ha az* f_k *periódusai páronként összemérhetők.*

Bizonyítás: A feltétel elégséges, ugyanis, ha rendre T_k-val jelöljük az f_k főperiódusait, akkor ha $\frac{T_i}{T_j} \in \mathbf{Q}^*$, bármely $i, j \in \overline{\{1, n\}}$ esetén, a 2. segédtétel értelmében az állítás nyilvánvaló.

Azt, hogy a feltétel szükséges is, a matematikai indukció módszerével igazoljuk:

$n = 2$ esetén a 3. segédtétel ad választ. Feltételezzük, hogy az állítás igaz $k \leqslant n$ függvény esetén, vagyis ha $\sum_{i=1}^{k} f_i(x)$ periodikus, akkor $\frac{T_i}{T_j} \in \mathbf{Q}^*$ bármely $i = \overline{\{1, k\}}$ esetén. Igazoljuk az állítást $k = n + 1$ tagú függvényösszeg esetén.

Feltételezzük, hogy az $f_1(x) + \ldots f_n(x) + f_{n+1}(x)$ összeg periodikus, anélkül, hogy $\frac{T_i}{T_j} \in \mathbf{Q}^*$ lenne, bármely $i, j = \overline{\{1, n + 1\}}$ esetén, tehát létezik legalább két olyan $r, s \in \overline{\{1, n + 1\}}$ index, amelyekre $\frac{T_r}{T_s} \notin \mathbf{Q}^*$ (1). Legyen $T > 0$ a szóbanforgó függvényösszeg periódusa, ezért $\sum_{i=1}^{n+1} f_i(x + T) = \sum_{i=1}^{n+1} f_i(x)$, vagyis $\sum_{i=1}^{n+1} g_i(x) = 0$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$, (2) ahol $g_i(x) = f_i(x + T) - f_i(x)$, $(\forall)\, i = \overline{\{1, n + 1\}}$. Észrevehető, hogy a g_i függvényeknek T_i periódusa, bármely $i = \overline{\{1, n + 1\}}$ esetén. A (2) alapján belátható, hogy $g_m(x) = -\sum_{\substack{i=1\\ i \neq m}}^{n+1} g_i(x)$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$, $m \notin \{r, s\}$ (3)

Azonban a g_m periodikus, így az egyenlőség jobb oldalán található, legfennebb n tagú összeg is ($g_i(x) = 0$ is lehetséges!) periodikus. Így az indukciós feltétel alapján, ha T_i' jelöli a g_i főperiodusait bármely $i = \overline{\{1, n + 1\}}$ esetén, akkor $\frac{T_i'}{T_j'} \in \mathbf{Q}^*$, bármely $i, j \in \overline{\{1, n + 1\}} - \{m\}$ esetén, így $\frac{T_r}{T_s} \in \mathbf{Q}^*$, ami ellentmond (1)-nek.

Ha a (3) összegben pl. $g_r(x) = 0$, bármely $x \in \mathbf{R}$ értékre, akkor $f_r(x + T) = f_r(x)$, bármely $x \in \mathbf{R}$ esetén és f_r-nek T_r periodikus volta

Ennek alapján: $f(x + nT_1) = f(x) \Leftrightarrow f(x + \theta_n T_1) = f(x)$, ugyanis T_1 periódusa az f-nek ezért $n_\theta \cdot T_1$ is az.

Az $x = 0$ értékre és az $a := f(0)$ jelöléssel $f(\theta_n \cdot T_1) = a$.

Azonban $(\theta_n)_n$ sűrű a $[0, 1]$-en, ezért $(\theta_n T_1)_n$ sűrű a $[0, T_1]$-en, így létezik $k \in \mathbf{N}^*$ és $n_k \in \mathbf{N}^*$ úgy, hogy bármely $x \in [0, T_1]$ esetén $\lim\limits_{k\to\infty} (\theta_{n_k} \cdot T_1) = x$ (lásd pl. [1]-ben).

Az f folytonossága miatt az $f(\theta_{n_k} T_1) = a$ egyenlőségben határértékre térve $f(x) = a$, bármely $x \in [0, T_1]$ esetén. De az f függvény T_1 periódusú, ezért $f(x) = a$, bármely $x \in \mathbf{R}$ esetén, ami ellentmond annak, hogy f nem állandó. Tehát a $T_1 / T_2 \notin \mathbf{Q}^*$ feltevés hamis.

2. Segédtétel: Adott $n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$ esetén legyenek rendre $T_1, T_2, \ldots, T_n > 0$ az $f_1, f_2, \ldots, f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ nem állandó, folytonos periodikus függvények főperiódusai úgy, hogy $T_i/T_j \in \mathbf{Q}$ bármely $i, j \in \overline{\{1, n\}}$.

Ebben az esetben léteznek $l_1, l_2, \ldots, l_n$ pozitív egészek úgy, hogy $l_1 T_1 = l_2 T_2 = \ldots = l_n T_n$ és az egyenlőségek közös T értéke az $S_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $S_n(x) := f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$ függvény periódusa legyen.

Bizonyítás: A $T_i/T_j \in \mathbf{Q}^*$ miatt $\dfrac{T_n}{T_k} = \dfrac{p_k}{q_k}$, bármely $k \in \{\overline{1, n}\}$, ahol $p_k, q_k \in \mathbf{Q}^*$, így $T_n = \dfrac{p_k}{k} \cdot T_k$.

Tehát ha $l_n := [q_1, q_2, \ldots, q_n]$ (az lk.k.t. jelölése)és $l_k := \dfrac{l_n \cdot p_k}{q_k}$ bármely $k \in \{\overline{1, n}\}$ esetén, akkor $l_k \in \mathbf{N}^*$ és $T := l_k \cdot T_k$ periódusa lesz $S_n(x)$-nek, ugyanis:

$$S_n(x + T) = \sum_{k=1}^{t} f_k(x + T) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x + l_k \cdot T_k) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = S_n(x)$$

bármely $x \in \mathbf{R}$ esetén.

3. Segédtétel: Ha $T_1 \neq T_2$ rendre az $f_1, f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ folytonos nem állandó függvények főperiodusai, az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. $f(x) := f_1(x) + f_2(x)$ függvény akkor és csakis akkor periodikus ha $T_1 / T_2 \in \mathbf{Q}^*$.

Bizonyítás: Feltételezzük az ellenkezőjét, jelölje $\theta = \dfrac{T_1}{T_2} \notin \mathbf{Q}^*$. Legyen $T > 0$ az f egy periódusa, tehát $f(x + T) = f(x) \Leftrightarrow f_1(x) - f_1(x + T) = f_2(x + T) - f_2(x)$ (1) bármely $x \in \mathbf{R}$ esetén.

Az $x = mT_1 + nT_2$ választással, az $f_1(x + nT_1) = f_1(x)$ és $f_2(x + mT_2) = f_2(x)$ alapján az (1) így írható:

$$f_1(nT_2) - f_1(nT_2 + T) = f_2(mT_1 + T) - f_2(mT_1) \ (2), \text{ ahol } m,n \in \mathbf{N}.$$

Mivel a bal oldal csak n-től, míg a jobb oldal csak m-től függ, ezért az $m = 0$ értékre $a := f_2(0) - f_2(T)$ jelöléssel a (2) így írható: $f_1(nT_2 + T) = f_1(nT_2) + a$ (3) bármely $n \in \mathbf{N}$ értékre.

Az 1. Segédtételben használt gondolatmeneteket követve:

$$nT_2 = n \cdot \frac{T_2}{T_1} \cdot T_1 = n\theta T_1 = [n\theta] \cdot T_1 + \{n\theta\} \cdot T_1 = n_\theta \cdot T_1 + \theta_n T_1,$$

bármely $n \in \mathbf{N}$ esetén a (3)-ból $f_1(\theta_n T_1 + T) = f_1(\theta_n T_1) + a$ (4) adódik, ahonnan a $(\theta_n T_1)_n$ sűrűsége miatt (lásd ugyancsak az 1. Segédtételben) azonnal adódik, hogy $f_1(x + T) = f_1(x) + a$ (5) bármely $x \in [0, T_1]$, sőt mi több, bármely $x \in \mathbf{R}$ esetén, ugyanis f_1-nek T_1 periódusa.

Belátható, hogy bármely $t = \frac{m}{10^n}$ periódusa f-nek, bármely m, n egész esetén, azonban $\inf\{\sigma_f\} = 0$ miatt az f függvény egyetlen pontban sem folytonos.

Az előbbi tulajdonság következménye:

2. *Tulajdonság*: Bármely nem állandó folytonos és periodikus $f: \mathbf{R} \to \mathbf{M}$ függvénynek van főperiódusa.

Az [1]-ben említették Kronecker-tételét, miszerint egy θ irracionális szám esetén az $X_{nm} = n \cdot \theta + m$ összefüggéssel értelmezett $(x_{nm})_{m,n \in \mathbf{N}}$ sorozat elemeiből képezett halmaz sűrű az $\mathbf{R}$-en.

Sőt mi több, ha $\frac{x}{y}$ irracionális, akkor az állítás érvényes az $x_{mn} = mx + ny$ esetén is. (lásd pl. [3]-ban).

Ugyancsak az [1]-ben olvashatunk az előbbi tétel egy következményéről, amelyet Jordan-tétel néven is ismernek (lásd pl. [4]), éspedig:

Ha $\theta \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, akkor a $\theta_n = \{n\theta\}$ képlettel értelmezett $(\theta_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sorozat elemeiből képezett halmaz sűrű a $[0, 1]$-en (A $\{x\}$ az x valós szám törtrészét jelöli).

Említsük meg, hogy a $(\theta_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ sorozat szorosan kapcsolódik a geometriai számelmélethez, a diofantoszi approximációhoz (lásd pl. [7]-ben) valamint a Liouville tételhez a transzcendes számokkal kapcsolatosan (lásd ugyanott!).

Jordan-tételének bizonyítása a számegyenesnek a körre való „feltekerési" módszerrel megtalálható pl. a [6]-ban.

Léteznek olyan $(x_n)_n$ sorozatok is, amelyeket $x_n = \{g(n) \cdot \theta\}$ képlettel értelmezünk (g adott tulajdonságokkal rendelkező függvény, lásd. pl. [5]) és elemeinek halmaza sűrű a $[0, 1]$-en. Adott intervallumon sűrű sorozatok szerkesztése például a [8]-ban is található.

1. Segédtétel: Ha $f: \mathbf{R} \to M$ folytonos, nem állandó periodikus függvény és $T_1 \neq T_2$ az f függvénynek két periódusa, akkor $\frac{T_1}{T_2} \in \mathbf{Q}^*$, ahol $\mathbf{Q}^* := \mathbf{Q} \setminus \{0\}$.

Bizonyítás: A bizonyítást a 2. Tulajdonság segítségével végezhetnénk, hiszen f folytonos, ezért létezik $T_0 > 0$ főperiódus, tehát léteznek $p, q \in \mathbf{N}^* : \mathbf{N} \setminus \{0\}$ úgy, hogy $T_1 = p \cdot T_0$ és $T_2 = q \cdot T_0$, ahonnan $T_1/T_2 \in \mathbf{Q}^*$.

Azonban a 2. Tulajdonság bizonyítása (lásd pl. [9]) pontosan az 1. Segédtétel segítségével történik, vagy mint az 1. Tulajdonság következménye, de ekkor hosszadalmas.

Éppen ezért az előbbiektől független bizonyítást mutatunk be.

Feltételezzük, hogy $T_1/T_2 \notin \mathbf{Q}^*$ és legyen $\theta := \frac{T_1}{T_2}$. Mivel T_1 és T_2 periódusai az f-nek, ezért:

$$f(x + T_1) = f(x) \quad \text{és} \quad f(x + T_2) = f(x),$$

bármely $x \in \mathbf{R}$ esetén, ahonnan

$$f(x + nT_1) = f(x), \quad \text{és} \quad f(x + nT_2) = f(x)$$

azonnal adódik, bármely $x \in \mathbf{R}$ és $n \in \mathbf{N}$ értékre.

Jelöljük $n_\theta = [n\theta]$ és $\theta_n = \{n\theta\}$-val az $n\theta$ egész, illetve törtrészét.

Akkor $nT_2 = n \cdot \frac{T_1}{T_2} \cdot T_1 = n\theta T_1 = [n\theta] \cdot T_1 + \{n\theta\} T_1 = n_\theta T_1 + \theta_n T_1$.

FOLYTONOS PERIODIKUS FÜGGVÉNYEK ÖSSZEGÉNEK PERIODIKUSSÁGÁRÓL

Tuzson Zoltán tanár, Odorhei

Az [1] cikkben a következőket olvastam: „Érdekes lenne igazolni például, hogy ha $f_i: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ folytonos periodikus függvények, amelyeknek periódusai páronként összemérhetetlenek, akkor a függvények összege nem periodikus".

A továbbiakban az előbbi felhívásra adok választ, megfogalmazva egy szükséges és elégséges feltételt, ami mellett a szóbanforgó függvény-összeg periodikus.

A fölvetett kérdés kapcsán, a következő alapfogalmakat használjuk:

1. *Értelmezés:* Az $f: \mathbf{R} \to M$ $(M \subseteq \mathbf{R})$ függvényt periodikusnak nevezzük, ha létezik olyan $T \neq 0$ valós szám, amelyre $f(x+T) = f(x)$, bármely valós x értékre.

A T számot az f periódusának nevezzük. Nyilvánvaló, hogy a $-T$ és $k \cdot T$ is periodusa f-nek, bármely k egész esetén.

Természetesen a definíció megfogalmazható az $f: E \to F$ esetben is, ahol $E \subseteq \mathbf{R}$ egy additív csoport.

2. *Értelmezés:* Az $f: \mathbf{R} \to M$ függvénynek egy $T_0 > 0$ periódusát főperiódusnak nevezzük, ha az f bármely $T > 0$ periódusa esetén létezik n pozitív egész úgy, hogy $T = n \cdot T_0$.

Tehát a főperiódus a legkisebb pozitív periódus. Vannak függvények, amelyek nem rendelkeznek főperiódussal, például a Dirichlet függvény:

$$f: \mathbf{R} \to \{0, 1\}, \quad f(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in Q \\ 0, & \text{ha } x \notin Q \end{cases}$$

Az f-nek minden racionális szám periódusa, ellenben nincs egy legkisebb pozitív periódusa.

Ha egy függvénynek van főperiódusa, akkor az egyértelmű, valamint ha T_0 egy függvény főperiódusa, akkor az illető függvény minden periódusa a T_0-nak egész számú többszöröse (lásd pl. a IX. oszt. Geometria tankönyv 133. oldalán).

A periodikus függvények közül fontosak azok, amelyek folytonosak a valós számegyensen vagy ennek egy részén. Ezzel kapcsolatos a következő két tulajdonság:

1. *Tulajdonság:* Tekintsük az $f: E \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ nem állandó periodikus függvényt, amely folytonos az E halmaznak legalább egy pontjában. Ha $\{\sigma_f\}$ jelöli az f függvény pozitív periódusainak halmazát, akkor létezik $\min \{\sigma_f\} > 0$ (lásd pl. [2]).

Tehát létezik főperiódus, sőt a nulla nem torlódási pontja a $\{\sigma_f\}$-nek.

Ez a tulajdonság lehetővé teszi olyan függvények szerkesztését, amelyek egyetlen pontban sem folytonosak, pl:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in E \\ 0, & \text{ha } x \in Q \setminus E \\ -1, & \text{ha } x \in R \setminus Q, \end{cases}$$

ahol

$$E = \left\{ x \mid x = \frac{k}{10^n}, k \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N} \right\}, \; f: \mathbf{R} \to \{-1, 0, 1\}.$$