metszéspontjában található, $r=T/p$, ahol $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$ a félkerület. (8) A háromszög BC oldalához írt kör, középpontja az A szög belső, illetve a B és C szögek külső szögfelezőinek I_a metszéspontjában található. $r_a=T:(p-a)$. (9) Körbeírható vagy húrnégyszög. (10)-(11) $\hat{A}+\hat{C}=\hat{B}+\hat{D} \Leftrightarrow ABCD$ körbeírható. (12) A négy oldal oldalfelező merőlegesének a metszéspontjában. (13) $ABCD$ körbeírható $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \hat{A}_1=\hat{B}_2$, $\hat{A}_2=\hat{D}_1$, $\hat{B}_1=\hat{C}_2$, $\hat{C}_1=\hat{D}_2$. (14) Ptolemájosz első két tétele: $ABCD$ körbeírható $\Leftrightarrow$ $AC\cdot BD = AB\cdot CD+AD\cdot BC$, illetve $AC:BD = (AB\cdot AD+BC\cdot BD):(AB\cdot BC+AD\cdot DC)$ (15) Kör köré írt négyszög. (16) $ABCD$ kör köré írható $\Leftrightarrow$ $AD+BC=AB+CD$. (17) Az A, B, C, D szögek belső szögfelezőinek a metszéspontjában.

Az említett tulajdonságok bizonyítása a tankönyvekben is megtalálható.

MEGOLDOTT FELADATOK (Általános iskolák tanulói részére)

E: 10433. feladat (2/1992. sz., V. oszt.)

Határozzuk meg azokat az A, B, C, D *tízes számrendszerbeli számjegyeket, amelyekre* $\overline{ABCD}+\overline{ABC}+\overline{AB}+A=1991$.

Tuzson Zoltán tanár, Székelyudvarhely

Megoldás (*Vajda Zsuzsánna*, Székely Mikó Kollégium V. o., Sepsiszentgyörgy)

$$\overline{ABCD}+\overline{ABC}+\overline{AB}+A=1991 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1000A+100B+10C+D+100A+10B+C+10A+B+A=1991 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1111A+111B+11C+D=1991.$$

Az A értéke nem lehet zéró, mert a feladatban szereplő számok első számjegye. Az A értéke 1 és csakis 1 lehet, mert $A=2$-re a baloldali kifejezés értéke nagyobb, mint 1991. Így $A=1$-re azt kapjuk, hogy:

$$1111+111B+11C+D=1991.$$

Az egyenlőség mindkét oldalából 1111-et levonva, felírható, hogy

$$111B+11C+D=880.$$

Következik, hogy $B<8$. Belátható, hogy $B=7$, mivel ha $B=6$, akkor $666+99+9=774<880$ (C és D legnagyobb értéke 9 lehet). Ekkor:

$$777+11C+D=880 \Leftrightarrow 11C+D=103.$$

Az utolsó egyenlőségből $C=9$, mert ha $C=8$, akkor $88+D=103$, és így D nem lehet számjegy.

Tehát $99+D=103$, vagyis $D=4$.

A keresett számjegyek: $A=1$, $B=7$, $C=9$ és $D=4$.

E: 10457. feladat (3/1992. sz., V. oszt.)

Határozzuk meg azokat a tízes számrendszerbeli $\overline{abc}$ *alakú számokat, melyekre az*

(11) Milyen fordított tulajdonságot ismersz az előbbi állításról?
(12) Hol van a 29. ábrán látható kör középpontja?
(13) Milyen szükséges és elégséges körbeírhatósági feltételt ismersz még? (Nézd a 30. ábrát!)
(14) Milyen körbeírhatósági tételek fűződnek PTOLEMÁJOSZ nevéhez?
(15) Hogyan nevezik a 31. ábrán látható $ABCD$ négyszöget?
(16) Milyen tulajdonságokkal rendelkeznek az előbbi négyszög oldalai? Igaz-e ennek a tulajdonságnak a fordítottja?
(17) Hol található a 31. ábrán látható kör középpontja?

Próbáld bizonyítani is a fent elhangzott tulajdonságokat!

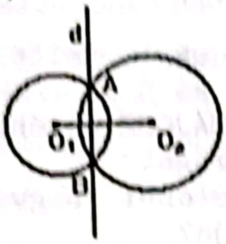
(E) *Feleletek*

(A).(1) AB húr, olyan szakasz, amely a kör két különböző pontját köti össze; CD átmérő, olyan húr, amely áthalad a kör középpontján (leghosszabb húr); OE sugár, az átmérő hosszának a felével egyenlő, a kör középpontját a kör egy tetszőleges pontjával összekötő szakasz. (2) Az egyenes és a kör kölcsönös helyzetét tanulmányozzák. (3) Sorra: külső, érintő, metsző egyenesek. (4) Sorra: $OM>R$, $OM=R$, $OM<R$. (5) Két kör kölcsönös helyzetét vizsgálják. (6) Sorra: külső, érintő, metsző, belső érintő, belső, koncentrikus körök. (7) Az O_1O_2 szakaszt centrálisnak nevezik. (8) Rendre $O_1O_2>R_1+R_2$, $O_1O_2=R_1+R_2$, $O_1O_2<R_1+R_2$ (ha $R_1\leq R_2$, akkor $R_2<O_1O_2+R_1$), $R_2=O_1O_2+R_1$, $O_1O_2<|R_2-R_1|$, $O_1O_2=0$ (zéró).

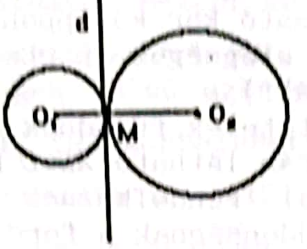
(B).(1) Az érintő merőleges az érintési pontban húzott sugárra. (2) Külső pontból húzott két érintő kongruens. (3) Egy húrra merőleges átmérő felezi a húrt. (4) Ha egy átmérő felezi a húrt, akkor merőleges rá. (5) Egyenlő hosszúságú húrok a kör középpontjától egyenlő távolságra vannak. (6) Ha két húr a kör középpontjától egyenlő távolságra van, akkor kongruensek. (7) Középponti, kerületi, belső és külső szögek. (8) Rendre: $A\hat{O}B=AmB$, $A\hat{M}B=\frac{1}{2}AmB$, $A_1\hat{M}B_1=\frac{1}{2}(A_1mB_1-A_2nB_2)$, $A_1\hat{M}A_2=\frac{1}{2}(A_1mA_2+B_1nB_2)$. (9) Párhuzamos húrok által közrezárt körívek kongruensek.

(C).(1) A félkörbe írt háromszög derékszögű, és fordítva. (2) Belső, illetve külső pontnak a körre vonatkozó hatványa: $A_1P\cdot PB_1=A_2P\cdot PB_2=\ldots$ állandó; ezt az állandót a P pont körre vonatkozó hatványának nevezik, ρ-val jelölik és $\rho=d^2-R^2$, ahol pl. $d=d(O,A_3B_3)$. (3) Hatványtengely. (4) A két körre vonatkozóan egyenlő hatvánnyal rendelkező síkbeli pontok mértani helye. (5) H=hatványközéppont, $H=A_1B_1\cap A_2B_2$, $K=A_1'B_1'\cap A_2'B_2'$, $d=HK$, ugyanakkor d merőleges az O_1O_2 centrálisra. (6) A háromszög köré írt kör, középpontja az oldalfelező merőlegesek O metszéspontjában található, $R=abc/4T$, ahol $a=BC$, $b=CA$, $c=AB$, T az ABC_Δ területe. (7) A háromszögbe írt kör, középpontja a belső szögfelezők I

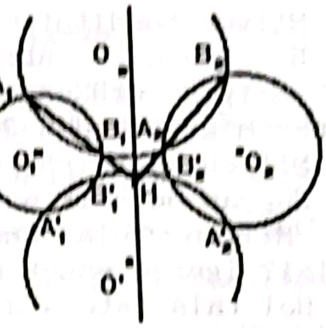
[23]



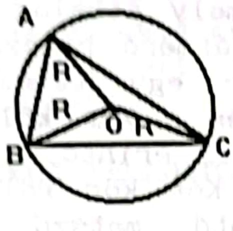
[24]



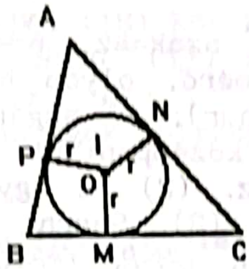
[25]



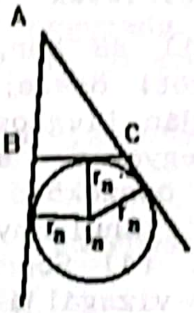
[26]



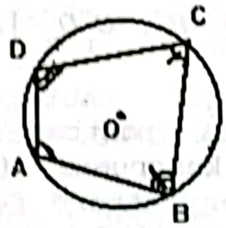
[27]



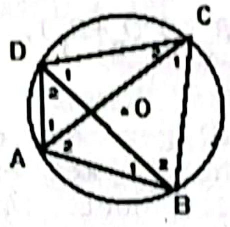
[28]



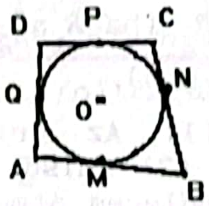
[29]



[30]



[31]



Kérdések

(1) Milyen tulajdonság kapcsolódik a 20. ábra rajzához?

(2) Milyen eredményeket ismersz a 21. és 22. ábrákhoz kapcsolódóan?

(3) Hogy nevezik a 23., 24., 25. ábrákon látható *d* egyenest?

(4) Milyen tulajdonségokkal rendelkeznek a 23., 24., 25. ábrák *d* egyenesei?

(5) Hogyan nevezik a 25. ábra *H* pontját? Hogyan szerkesszük meg? Hát a *d*-t?

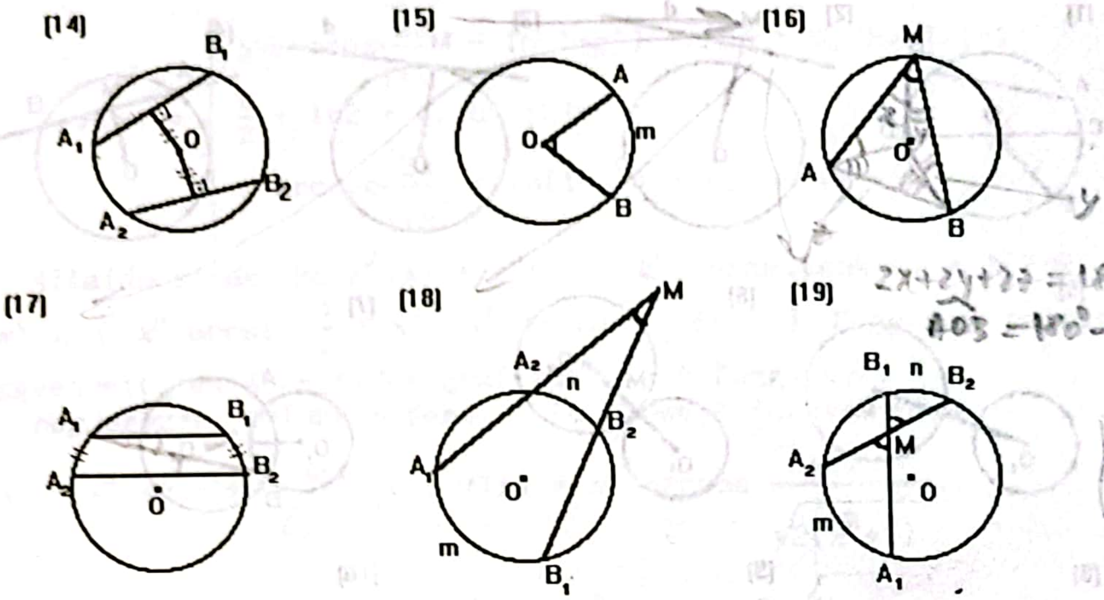
(6) Hogyan nevezik a 26. ábrán látható *R* sugarú kört? Hol a középpontja? Milyen képletet ismersz az *R* kiszámítására?

(7) Mi a neve a 27. ábrán látható *r* sugarú körnek? Hol a kör középpontja? Milyen képletet ismersz az *r* kiszámítására?

(8) Hogyan nevezik a 28. ábrán látható r_a sugarú kört? Hol a kör középpontja? Milyen képletet ismersz az r_a kiszámítására?

(9) Hogyan nevezik a 29. ábrán látható négyszöget?

(10) Milyen tulajdonsággal rendelkeznek a fenti négyszög szögei?



$2x+2y+2z=180^\circ$

$\widehat{AOB}=180^\circ-2z=2(x+y)=$

$=2\,\widehat{AMB}$

$\boxed{\widehat{ANB}=\frac{\widehat{AOB}}{2}}$

Kérdések

(1) Milyen tulajdonságot szemléltet a 11. ábra?

(2) Milyen tulajdonságot szemléltet a 12. ábra?

(3) Fogalmazz meg egy tulajdonságot a 13. ábrán látottakkal kapcsolatban!

(4) Fogalmazd meg az előbbi tulajdonság fordítottját is!

(5) Fogalmazz meg egy tulajdonságot a 14. ábrán látottakkal kapcsolatban!

(6) Fogalmazd meg az előbbi tulajdonság fordítottját is!

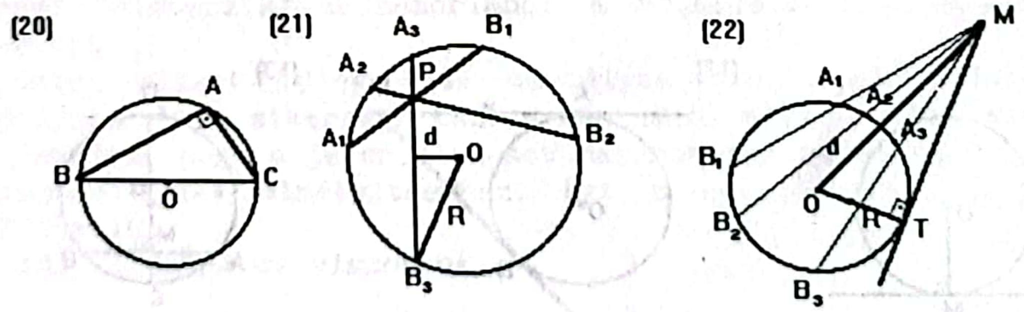
(7) Nevezzük meg a 15., 16., 18., 19. ábrákon látható szögeket!

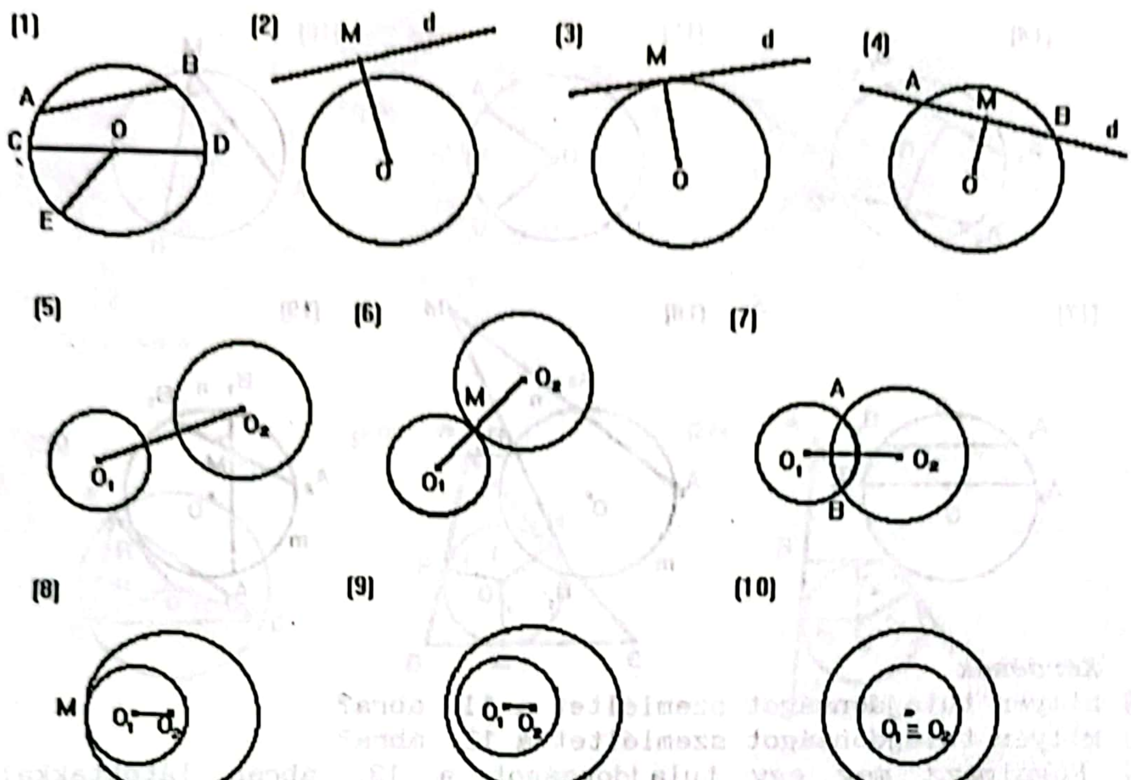
(8) Mit mondhatunk a 15., 16., 18., 19. ábrákon látható szögek mértékéről?

(9) Jelentsd ki azt a tulajdonságot, amelyet a 17. ábra szemléltet!

A fent megfogalmazott tulajdonságokat próbáld bizonyítani is!

(C) *Fogalmak és fontosabb tulajdonságok*

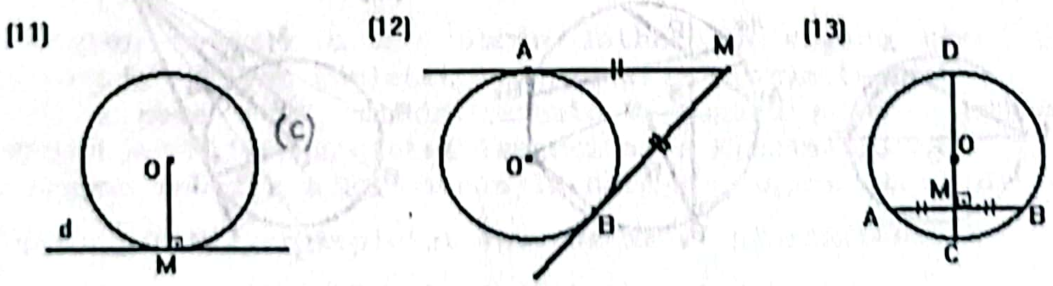




Kérdések

(1) Nevezzétek meg az 1. ábra *AB*, *CD* és *OD* fogalmait!
(2) Milyen viszonyt fejeznek ki a 2., 3., 4. ábra rajzai?
(3) Hogyan nevezik a 2., 3., 4. ábrák egyeneseit?
(4) Mit mondhatunk a 2., 3., 4. ábrákon látható OM szakasz hosszáról?
(5) Milyen viszonyt fejeznek ki az 5.-10. ábrák rajzai?
(6) Hogyan nevezik az 5.-10. ábrákon látható köröket?
(7) Hogyan nevezik az 5.-10 ábrákon látható O_1O_2 szakaszt?
(8) Mit mondhatunk az 5.-10. ábrákon látható O_1O_2 szakasz hosszáról?

(B) *Fogalmak és alaptulajdonságok*



ad. abs. OM ⊥ d (1)
Legyen M' ∈ d úh. OM' ⊥ d (2)
(1)∧(2) ⇒ R = OM > OM'
⇓
M' ∈ Int C(O,R)
ellentmondás, mert
d ∩ Int C(O,R) = ∅

$$F(x)=\begin{cases} x\cdot\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}-\ln(1+x^2)+\ln 4+C, & \text{ha } |x|>1\\ \dfrac{\pi}{2}+\ln 2+C, & \text{ha } |x|=1\\ x\cdot\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}+\ln(1+x^2)+C, & \text{ha } |x|<1\end{cases}$$

Általánosítás. Ha $f^2(x)+g^2(x)=k^2$, számítsuk ki a $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)\in\{\, x^n\cdot\arcsin\frac{1}{k}\cdot f(x),\ x^n\cdot\arccos\frac{1}{k}\cdot f(x)\,\}$ függvény primitív függvényeit, és ábrázoljuk grafikusan a h függvényt.

Megjegyzés. Példák a fenti tulajdonságú függvényekre:

$$f(x)=x^n\cdot\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2(x^2+1)}},\quad f(x)=x^n\cdot\arccos\frac{x-1}{\sqrt{2(x^2+1)}},$$

$$f(x)=x^n\cdot\arcsin 2x\sqrt{1-x^2},\quad f(x)=x^n\cdot\arccos 2x\sqrt{1-x^2},$$

$$f(x)=x^n\cdot\arcsin(3x-4x^3),\quad f(x)=x^n\cdot\arccos(3x-4x^3).$$

GIMNÁZIUMI TANULÓK RÉSZÉRE:

EMLÉKEZTETŐ ÁBRÁK A KÖRREL KAPCSOLATOS ISMÉTLÉSEKHEZ

Tuzson Zoltán tanár, Székelyudvarhely

Célunk olyan (körrel kapcsolatos) fogalmak, tulajdonságok felidézése, átismétlése, kibővítése és rendszerezése, amelyekre bármely középiskolás tanulónak szüksége lehet.

Ismert tény, hogy a fogalmak - és általában az ismereteink - gondolatainkban nem izoláltan léteznek, hanem bonyolult, összefüggő rendszerek formájában. Ezért valamilyen fogalom közvetett módon is "előránthatő" a memóriából, vagyis egy felidézett fogalom maga után vonhatja más fogalmak megjelenését is.

Éppen erre alapozva, célszerűnek találom olyan rajzok - ún. emlékeztető ábrák - készítését, amelyek rövid idő alatt, könnyűszerrel "előveszik" a memóriából a megfelelő fogalom lényeges ismérveit.

Jelen cikket főleg VII. osztályos tanulóknak ajánlom, de megjegyzem, hogy sikeresen tudtam használni a IX. osztályban is.

Remélem, hogy a jelen cikk sok hasznos ismeretet felfrissít és hozzájárul ezek elmélyítéséhez. Ezt a célt segítik a föltett kérdések is.

(A) *Fogalmak és viszonyok*