a nagy tudós számára sértetlenséget rendelt el. Kívánsága szerint sírkövére hengerbe írt gömböt véstek, emlékezetül egyik legkedveltebb felfedezésére, mely szerint a gömb köré írt henger teljes felszíne és térfogata egyenlő a gömbfelszín, illetve a gömb átmérőjével. Halála után alig 150 évvel, Róma Cicerót küldte quaestorként (gazdasági felügyelő) Szicíliába. Ekkorra Szirakuza lakói elfeledték Arkhimédészt. Cicero felkutatta sírhelyét. A sírkőbe vésett hengerről és a beleírt gömbről ismerte meg. A Cicero által megtalált és megjavított emléket az évszázadok tönkretették. Sírkőnél erősebb emléket állított magának nagy szelleme a matematikában és fizikában.

8. Apolloniosz (i.e. 260?-170?) az alexandriai iskola nagy görög matematikusa és csillagásza. Alexandriában és a kisázsiai Pergamoszban tanított. Fő műve a 8 kötetes "Konika" (A kúpszeletek), a koordináta-geometria előfutára. Műveit latinra Regiomontanus fordította.

9. Ptolemaiosz Klaudiosz (i.sz. 85?-168?) alexandriai csillagász, matematikus és geográfus. Hatalmas műve a Megala szüntakszisz (Nagy gyűjtemény), mely inkább az arab fordítás címén (Almagest) ismert, kiváló összefoglaló csillagászati munka. Szinte mindent tartalmaz, amit ezen a területen az ókor elért: trigonometriai táblázatokat és összefüggéseket, a gömb trigonometriájának alapjait, geometriai tételeket és geocentrikus világrendszerének felépítését is. "Geographia" című könyvében a Föld pontjait a szélesség és hosszúság segítségével határozta meg, tehát gömbi koordinátákat használt. Csillagászati műveit Peurbach kezdte fordítani, majd tanítványa, Regiomontanus fejezte be.

10. Diophantosz (250 körül) lehet, hogy elgörögösödött babiloniai volt. Alexandriában élt, ahol alkalma volt hindu és babiloniai kereskedőkkel kapcsolatot teremteni. "Arithmetica" című, 13 kötetes művéből csak az első hat maradt meg. Csak algebrával foglalkozott. Először használt algebrai jeleket. Őt tekintjük az első kezdetleges algebrai nyelv és jelrendszer megteremtőjének.

11. Hedzsra (arab kivándorlás), Mohamed Mekkából Medinába menekülésének (i.sz. 622) elnevezése. A hedzsra éve Omar kalifa (634-644) óta a mohamedán időszámítás kezdő éve.

12. Fibonacci (1170-1250?) néven (Bonacci fia) lett ismertté Leonardo Pisano (a pizai Leonardo) olasz matematikus. Apja a gazdag Pisának volt kereskedelmi ügynöke Algírban. Leonardo itt tanulta a matematika alapjait. Mint kereskedő bejárta Szíriát, Észak-Afrikát, Hispániát, Szicíliát. Vele született tudományszeretetével ismerte meg útjain a Kelet műveltségét és ezen belül matematikáját. Az összegyűjtött és általa kiegészített aritmetikai és algebrai ismereteket a "Liber Abaci" című művében foglalta össze. 1220-ban "Practica geometriae" című könyvében mértani felfedezéseit írta le.

13. Az abakusz számítótáblát jelent. Lényege az, hogy homokba, kőre vagy deszkalapra vonalakat húztak vagy mélyedéseket vágtak egymással párhuzamosan. A vonalak pótolták a számírásban hiányzó helyi értékeket. A vonalakra vagy mélyedésekbe és közökbe kavicsokkal, fakorongokkal (fabatka) vagy számolópénzekkel rakták ki a számok értékét és úgy végezték a műveleteket. Módszere hasonlít a mai iskolai korongos számológéphez.

ÁLTALÁNOS ISKOLÁK TANULÓI SZÁMÁRA

ALGEBRAI AZONOSSÁGOK SZEMLÉLTETÉSE

Tuzson Zoltán tanár, Székelyudvarhely

Számos olyan algebrai azonosság van, amelyet a tanulók gyakran használnak, de kevésbé értik azokat. Például az $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ mindenki számára nyilvánvaló, de kevésbé meggyőző. Vagy pl. nagyon sok tanulónak az $(a+b)^2=a^2+b^2$ hibás egyenlőség tűnik természetesnek az $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ egyenlőség helyett. Vajon, ha az egyes algebrai azonosságokat sikerülne szemléltetni könnyebben érthetőbbé és memorizálhatóbbá válnának-e a tanulók számára? Véleményünk szerint a szemléltetés nem csak a megértést szolgálja, hanem a már megtanult azonosságot még nyilvánvalóbbá teszi a tanulók előtt.

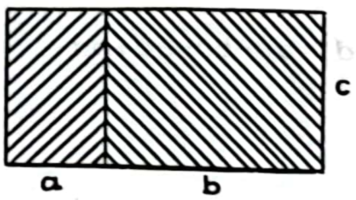
Legtöbb esetben rajzok és színes kartonlapok felhasználásával szemléltetünk. Ha még hatékonyabban akarunk eljárni egyes alakzatokat konkrétan feldarabolunk, átrendezünk. Ugyancsak az elmélyítést szolgálja, ha a szemléltetés mellett, az illető algebrai azonosságra konkrét mérőszámokkal szöveges feladatokat szerkesztünk és ezeket kétféleképpen - az azonosság bal- és jobb oldala szerint meg is oldjuk. A következő azonosságok szemléltetésénél csak a következő két ismert terület kiszámítási módját kell ismernünk:

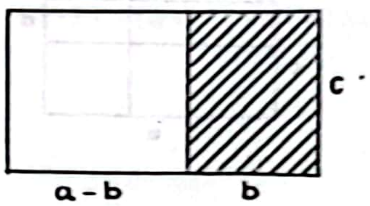
1) A téglalap területe a hosszúságának és a szélességének a szorzatával egyenlő. Sajátos esetben:

2) A négyzetlap területe egyik oldalhosszának önmagával való szorzatával egyenlő. ($x \cdot x := x^2$).

Megjegyezzük, hogy a szemléltetésre kerülő azonosságok bármely valós számra igazak, de mi csak pozitív számok esetén szemléltetünk.

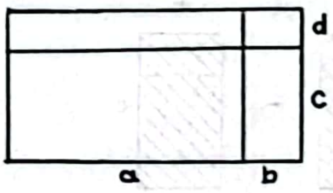
1) Összeg szorzása egy számmal; 2) Különbség szorzása egy számmal:





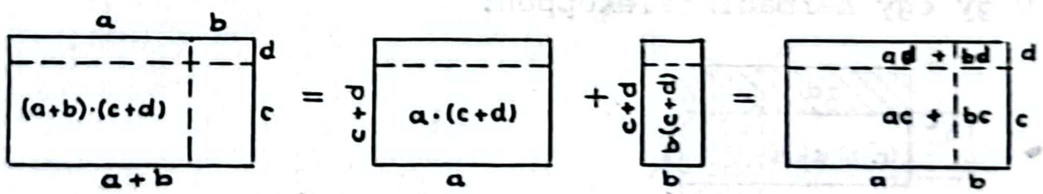
$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ $(a-b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$

3) Összeg szorzása összeggel:

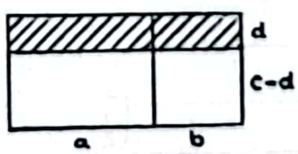


$(a+b)(c+d) = ac+bc+ad+bd.$

vagy másféleképpen szemléltetve:

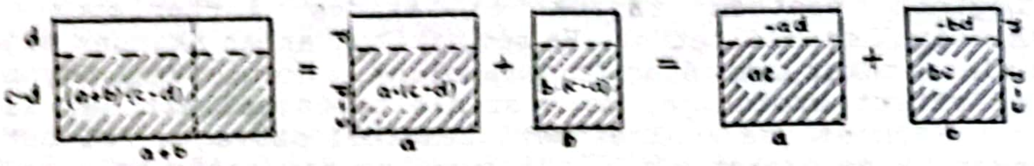


4) Összeg szorzása különbséggel:

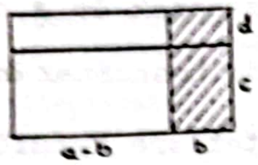


$(a+b)(c-d) = ac+bc-ad-bd$

vagy másképpen szemléltetve:



5) Különbség szorzása összeggel:

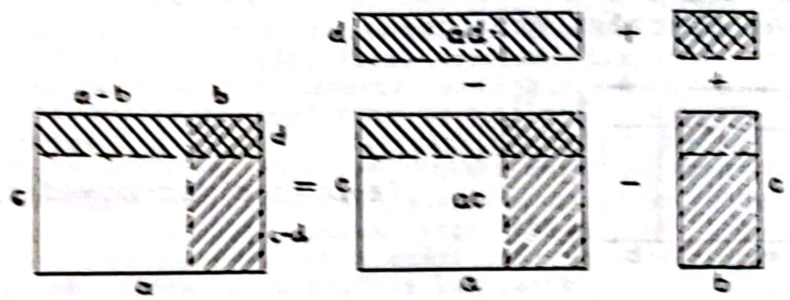


$(a-b)(c+d)=ac-bc+ad-bd.$

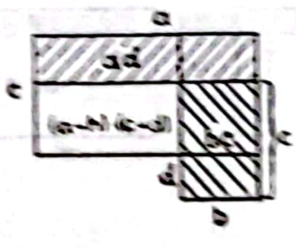
6) Különbség szorzása különbséggel:

$(a-b)(c-d)=ac-bc-ad+bd$

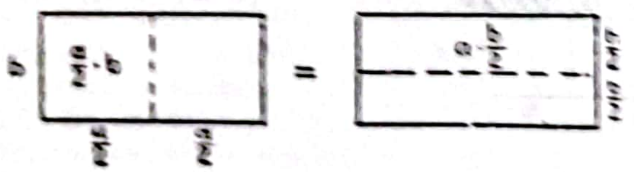
vagy másképpen szemléltetve:



vagy egy harmadikféleképpen:

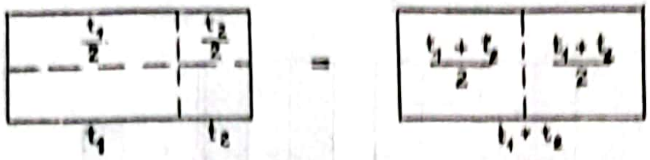


7) A szorzat osztása (jelen esetben az osztó 2):



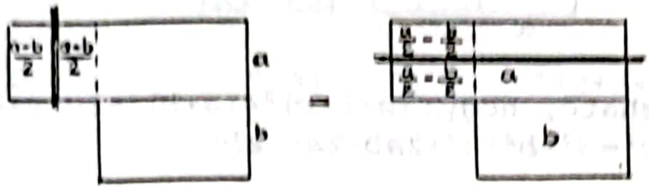
$$\frac{a\cdot b}{2}=\frac{a}{2}\cdot b=a\cdot\frac{b}{2}$$

8) Összeg osztása (jelen esetben is az osztó 2):



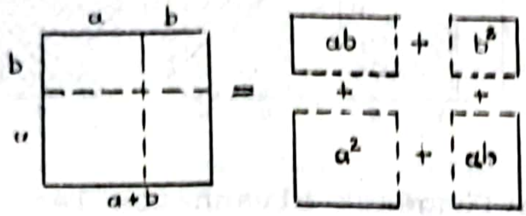
$$\frac{t_1}{2}+\frac{t_2}{2}=\frac{t_1+t_2}{2}$$

9) Különbség osztása:

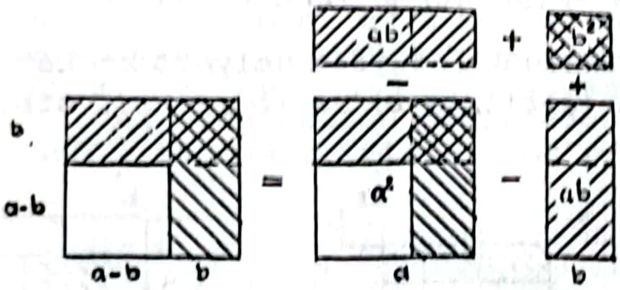


$$\frac{a-b}{2}=\frac{a}{2}-\frac{b}{2}$$

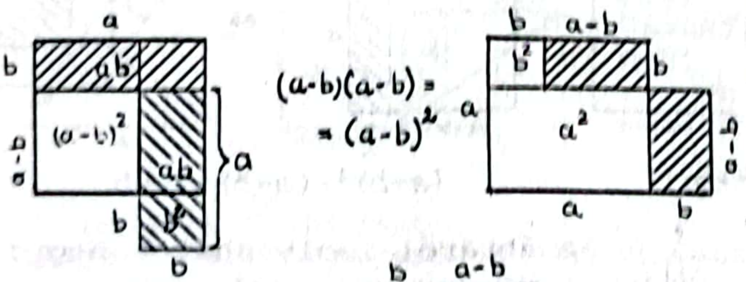
10) Rövidített számolási képletek:



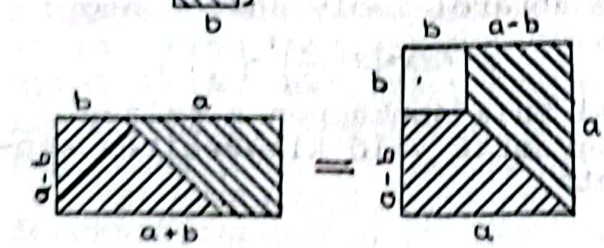
$$(a+b)\,(a+b)=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

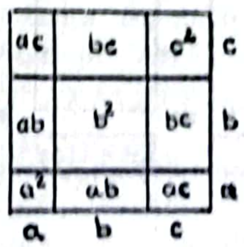


$$(a-b)\,(a-b)=(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$



$$(a+b)\,(a-b)=a^2-b^2$$

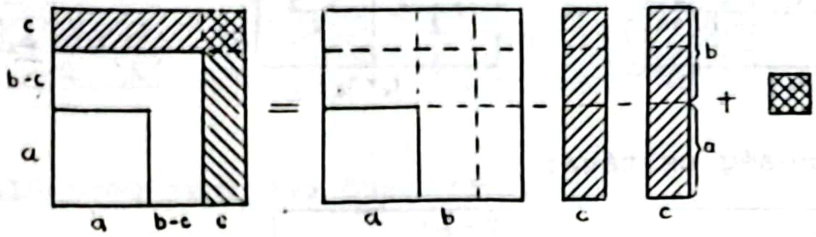




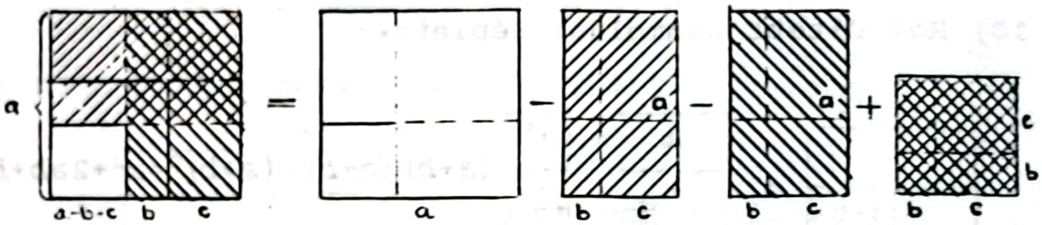
$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca.$$

Az előző képletek összevont alkalmazásával jól szemléltethetők a következő rövidített számolási képletek is:



Az ábráról leolvasható, hogy: $(a+b-c)^2=(a+b)^2-2c(a+b)+c^2=$ $=(a^2+2ab+b^2)-2(ac+bc)+c^2=a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$.

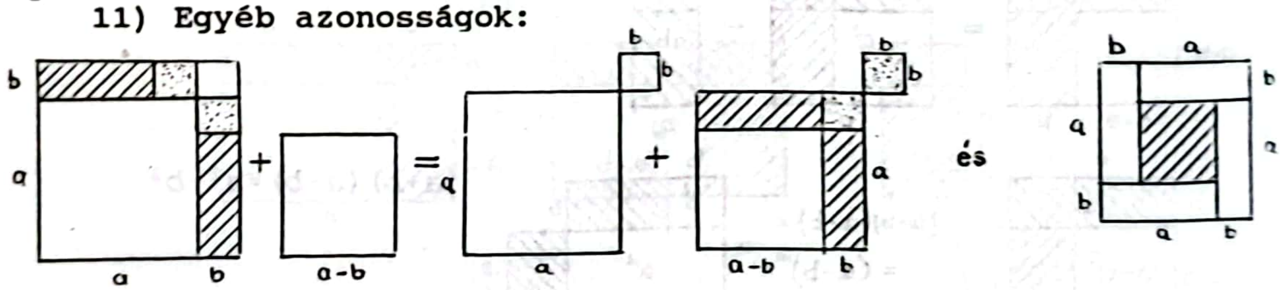


Az ábráról a következő összefüggések olvashatók le:

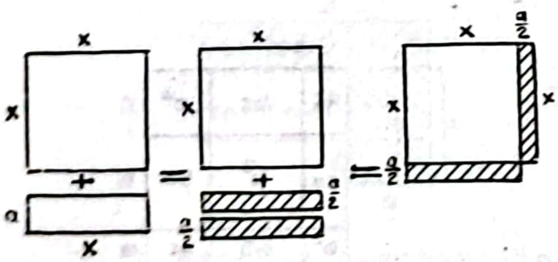
$(a-b-c)^2=a^2-2a(b+c)+(b+c)^2=a^2-2(ab+ac)+(b^2+2bc+c^2)=a^2+b^2+c^2-$ $-2ab-2ac+2bc$.

Ha térbeli ábrázolásokat használunk (négyzet helyett kockát, téglalap helyett téglatestet), az $(a+b)^3$, $(a-b)^3$, a^3+b^3, a^3-b^3, stb. képletei is szemléltethetők.

11) Egyéb azonosságok:



$(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$ $\qquad$ $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$



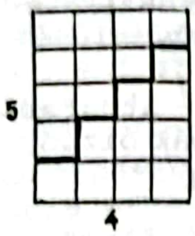
Az ábráról leolvasható, hogy:

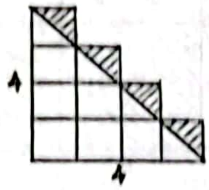
$$x^2+ax=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

ami tulajdonképpen a teljes négyzetté való kiegészítés képlete.

12) Természetes számok összege: $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{n^2}{2}+\dfrac{n}{2}$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$

Az alábbi ábrákon az $n=4$ esetet szemléltetjük:





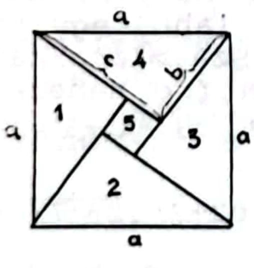
Az ábrákról leolvasható, hogy $1+2+3+4=\frac{4\cdot5}{2}$, illetve $1+2+3+4=$ $=\frac{4^2}{2}+\frac{4}{2}$.

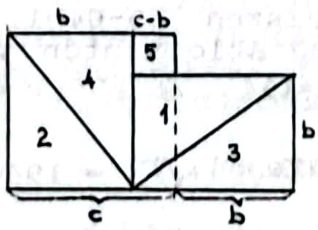
Hasonló "szembeillesztési" eljárással szemléltethető más, pozitív állandó különbségű számtani haladvány első n tagjának összegképlete is. Egyéb hasonló összegek szemléltetéséről a [3]-ban is olvashatunk.

Az előbbiek során gyakran használtunk olyan eljárást, amelyet szemléletesen fogalmazva így végeztünk: ollóval szétvágtunk egy papírsokszöglapot és a darabokból egy másikat illesztettünk össze.

Ezt a műveletet átdarabolásnak nevezzük. Egyszerű módon fogalmazva: két sokszöglapot egymásba darabolhatónak nevezünk, ha az egyik sokszöglapot véges sok részre osztva, amelyek maguk is sokszöglapok, ezek teljes felhasználásával, hézagmentesen és fedés nélkül kirakhatjuk a másik sokszöglapot. Erről részletesebben a [4], [6], [7]-ben olvashatunk.

Az átdarabolás segítségével nagyon szemléletesen bizonyítható Pitagorász tétele. Íme erre két mód:



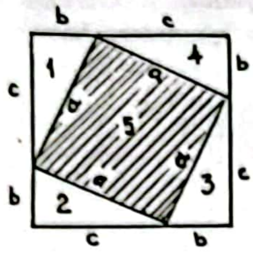


(a) ábra (b) ábra

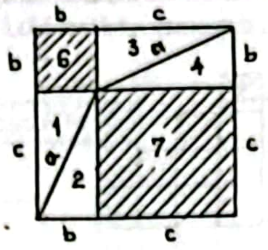
1) Ha az a) ábrán látható a, b, c méretű, kongruens 1, 2, 3, 4-es derékszögű háromszöglapokat (a szemléltetett módon) összeillesztjük, könnyen belátható, hogy egy négyzetet (5) zárnak közre, amelynek oldalhossza $(c-b)$-vel egyenlő.

A helyére tehát helyezzünk be, egy ekkora négyzetlapot. Ha most az (a) ábra öt alakzatát átrendezzük a (b) ábra szerint, akkor mivel az (a) ábra nagy négyzetének a területe a^2 és a (b) ábra két különálló négyzetének területösszege b^2+c^2, máris bizonyítottuk, hogy $a^2=b^2+c^2$ (vö.[8]).

2) Ha az 1, 2, 3, 4 kongruens, a, b, c méretekkel rendelkező derékszöglapokat a (c) ábra szerint illesztjük össze belátható, hogy a bevonalkázott a^2 területű négyzetlapot zárják közre. Ha azonban az előbbi négy háromszöglapot a (d) ábra szerint illesztjük össze, és kiegészítjük a 6 és 7 bevonalkázott, b^2, illetve c^2 területű négyzetlapokkal, ugyanakkora nagy négyzet-



(c) ábra

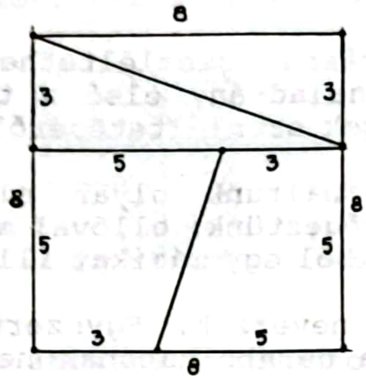


(d) ábra

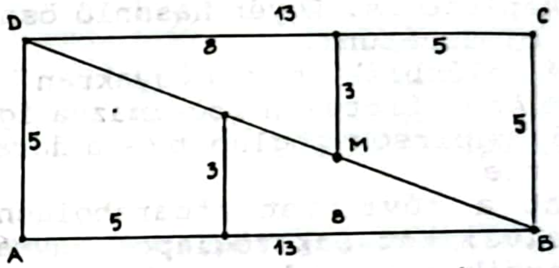
lapot kapunk, mint a (c) ábra nagy négyzetlapja. Így a bevonalkázott részek területeinek megfelelő egyenlőség alapján,

$a^2=b^2+c^2$.

Az átdarabolást gyakran használják bizonyos sokszöglapok (pl. négyszöglapok) területszámolási képleteinek a levezetésére. Mindezek mellett az átdarabolásnak is megvannak a maga buktatói, gyakran ellentmondáshoz juthatunk, ha helytelenül értelmezzük. Íme egy meggyőző példa:



(e) ábra



(f) ábra

Látszatra úgy tűnik, hogy az (e) ábrán látható négyzet átdarabolható az (f) ábrán látható téglalapba. De nézzük csak meg részletesebben! A négyzet területe $T=8\cdot 8=64$, a téglalap területe $T'=5\cdot 13=65$. Hol a hiba? Ott, hogy a szóban forgó négyzet nem darabolható át az *ABCD* téglalapba, pontosabban, valahol egy "1 négyzetegységnyi" rés marad, hiszen 65-64=1. Számolásokkal megmutatható, hogy ez a rés a *BD* átló mentén van (de nehezen érzékelhető!) hiszen: $BD^2=5^2+13^2=194$, $DM^2=3^2+8^2=73$, $MB^2=2^2+5^2=29$ így $DM+MB=\sqrt{29}+\sqrt{73}$.

Ha $DM+MB=DB$ lenne, akkor $\sqrt{194}=\sqrt{29}+\sqrt{73} \Leftrightarrow 194=102+2\cdot\sqrt{29\cdot 73} \Leftrightarrow \sqrt{2117}=46 \Leftrightarrow 2117=2116$.

Megjegyzés: Ha az (e) és (f) ábra 3, 5, 8 mérőszámai helyett 5, 8, 13-at veszünk, $T=13\cdot 13=169$ és $T'=(13+8)\cdot 8=168$ lesz, vagyis az átrendezés után nem hézag marad, hanem a darabok fedni fogják egymást.

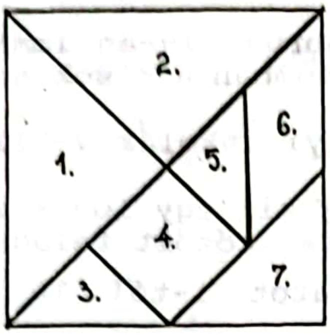
Az említett feladatok általánosíthatók (vö.[8]).

A továbbiakban tehát természetesen merül fel az átdarabolhatóság feltétele. A következő tétel értelmében a (c) és (d) ábra négyzetlapjainak az átdarabolhatósága biztosítva van, de az átdarabolás hogyanjára nem ad választ.

Nyilvánvaló, hogy az átdarabolt alakzatok területei egyenlőek. Vajon igaz-e ennek a fordítottja? Erre a választ (szinte egyidőben) Bolyai F. (1832) és Gerwin (1833) adták meg, de egyes források szerint (vö.[6]) a tétel első felfedezője W.Wallace angol matematikus volt, ő már 1807-ben közölte az alábbi eredményt:

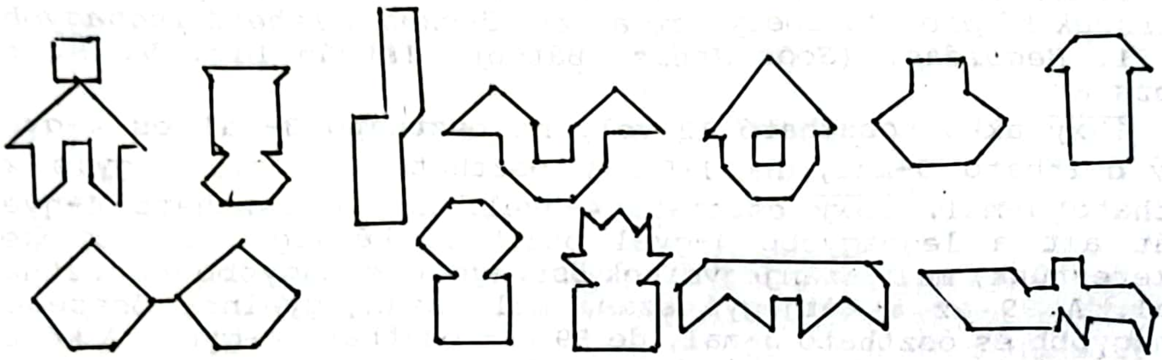
Tétel. Az egyenlő területű sokszöglapok egymásba átdarabolhatók. Erről részletesebben [4], [6], [7]-ben is olvashatunk.

Az átdarabolást az ún. kirakós játékok esetén is használjuk. Ennek egy meggyőző példája a TANGRAM nevű ősrégi kínai kirakós-játék. (vö. [5]), ami az ábrán szemléltetett 7 darabból áll. Ezek a lapocskák készülhetnek kartonból, fából vagy műanyagból. A játék igen egyszerű: a hét lap felhasználásával megadott formákat kell kirakni. Ezek lehetnek mértani vagy képzelet szülte alakzatok, emberek, állatok, számok, betűk stb. A játékosok új alakzatokat is taláhatnak ki, hiszen a kirakási lehetőségek száma végtelen. Nagyon gyakran két garnitúra játékkal két versenyző próbálja kirakni ugyanazt az alakzatot.



TANGRAM

Az [5]-ben - rövidített történelmi áttekintés mellett - közölt 775 feladat között pl. ilyenek is szerepelnek:
A tangrammal rakd ki:



Úgy tartják, hogy Napóleon Szent Ilona-szigetén szívesen tangrammozott. Úgyszintén Lewis Carol, az Alice csodaországban c. regény írója is sokat foglalkozott tangram feladványokkal.
Hasonló feladványokkal felnőttek, gyerekek egyaránt jól szórakozhatnak. Érdemes kipróbálni!

SZAKIRODALOM

[1] Hogyan tanítsuk a számtant az általános iskola felső osztályaiban? Közoktatásügyi Kiadóvállalat, Budapest, 1951 (336-339 old.)
[2] *Dr. Kántor Sándorné - Dr. Varga Tünde*: Gondolatok az ICME 6. kongresszusa után, Ma Ta 2/1989 (56-60 old.)
[3] *Reiman István*: A geometria határterületei, Gondolat kiadó, Budapest, 1986 (299-305 old.)
[4] *Hársing Lajos*: Tangram (két garnitúra játékkal), Garabonciás könyvkiadó, Budapest, 1988.
[5] *Laczkovich Miklós*: Sokszögek átdarabolása, KöMal 5/1990 (193-202 old)
[6] *Isaac J. Schoenberg*: Privelişti matematice, Editura Tehnică, Bucureşti, 1989 (9-14 old.)
[7] *Bitay László*: Matematikatörténeti mozaik, Dacia kiadó, Kolozsvár, 1984 (90-91 old.)
[8] Török Judit : A Fibonacci-sorozat