A TÉGLALAPMÓDSZER (I)

Tuzson Zoltán tanár, Székelyudvarhely

Miután a tanulók elsajátították a téglalap néhány elemi tulajdonságát, valamint területének kiszámítását, a téglalapmódszer nagyban hozzájárulhat a megfelelő matematikai modellek felállításához és optimizálásához.

Ez a módszer különösen akkor előnyös, ha a feladatban két mennyiség szorzata szerepel, ugyanis ekkor a szorzatot egy olyan téglalap területével szemléltethetjük, amelynek oldalhosszai az adott mennyiségek.

A téglalapmódszer lényege a következő: egy téglalapot átalakíthatunk egy vagy több téglalappá úgy, hogy a területe egyenlő az adott téglalap területével, illetve két vagy több téglalap területének összegével.

A módszer segítségével látványosan és könnyűszerrel lehet megoldani különféle problémacsoportot. Jelen esetben azonban csak két problémacsoportra térünk ki:

1) Mozgással kapcsolatos feladatok megoldására.

2) Keverési feladatok megoldására.

Mindkét esetben elemi feladatok megoldásával próbálok rávilágítani a módszer hatékonyságára.

1. A téglalapmódszer alkalmazása mozgással kapcsolatos feladatok megoldására

Mozgással kapcsolatos feladatokon olyan feladatokat értünk, amelyeknek adatai, illetve ismeretlenjei között az út (jelöljük: s), a sebesség (jelöljük: v), és az idő (jelöljük: t) szerepel. (Nyilván, csak az elemi osztályos feladatokra gondolunk.)

Az ilyen típusú feladatok megoldásánál a kisiskolások a fizikában tanult képleteket (pl. egyenes vonalú egyenletes mozgás esetén $s = v \cdot t$ (1); $v = \frac{s}{t}$ (2); $t = \frac{s}{v}$ (3)) teljesen formálisan alkalmazzák.

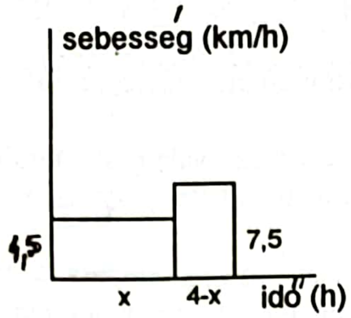
Sok esetben, a feladatmegoldások során, szakaszos ábrázolás segítségével tehetjük érthetőbbé egyes feladatok megoldását, azonban - jelen esetben - ennél hatékonyabb a téglalapmódszer.

Ha a téglalap oldalhosszainak minden esetben az időt, illetve a sebességet választjuk, a téglalap területének mérőszáma a megtett út mérőszámát adja meg.

A feladatmegoldásokat az is megkönnyíti, ha a téglalapokat az idő-sebesség viszonyítási rendszerben (úgynevezett koordináta-rendszerben) helyezzük el anélkül, hogy ennek a "koordináta jellegét" mélyrehatóbban kihasználnánk. Csupán a számegyenes irányítottságára, valamint a "nagyság" kifejezésére használjuk, de a módszer ennek mellőzésével is alkalmazható.

1. példa. *Jancsi evezni indul a folyóra. Mindössze 4 óra szabadideje van erre. A vízfolyás irányában 7,5 km/h sebességgel tud evezni, ellenben az árral szemben csak 4,5 km/h sebességgel. Ha az evezést az árral szemben kezdi meg, mennyi idő múlva kell visszatérnie ahhoz, hogy időben megérkezzen ? Számítsuk ki az indulási hely és a visszafordulási pont közötti távolságot.*

Megoldás.

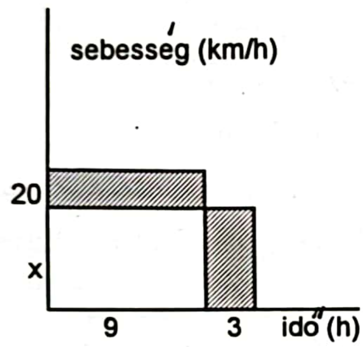


Jelöijük x-szel azt az időt, ami a visszafordulásig eltelt. Nyilvánvaló, hogy visszafelé, így 4 - x időegységnyit evezett. Vegyük az első téglalap alapjának az eltelt időt (x-et), magasságának pedig az ár ellenében történő sebesség mérőszámát (a 4,5-öt), továbbá a második téglalap alapjának a visszaevezéskor eltelt időt ((4 - x)-et), magasságának pedig a visszaevezési sebesség mérőszámát (a 7,5-öt).

Mivel mindkét téglalap területe ugyanazon hosszúságú utat jelképezi (az első a menet, a második a jövet közben megtett utat), ezért a két téglalap területe egyenlő. Tehát: $4,5\cdot x = 7,5\cdot(4-x)$, ahonnan $12\cdot x = 30$ ezért x = 2,5 (óra), vagyis Jancsinak ennyi idő múlva kell visszafordulnia. A visszafordulásig megtett út valamelyik téglalap területe, azaz $2,5\cdot 4,5 = (4-2,5)\cdot 7,5 = 11,25$ (km).

2. példa. *Egy autó egy bizonyos távolságot* 12 *óra alatt tesz meg. Ha* 20 *km/h-val gyorsabban haladt volna, az utat* 3 *órával kevesebb idő alatt tette volna meg. Számítsuk ki az autó sebességét.*

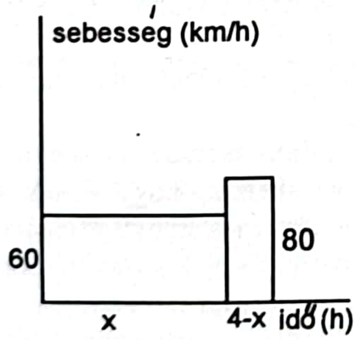
Megoldás.



Vegyük a téglalap alapjának az eltelt idő mérőszámát (12), magasságának pedig az ismeretlen sebesség mérőszámát (az x-et). Így a téglalap területének mérőszáma a megtett út mérőszámát adja meg. Ha a téglalap alapját 3-mal csökkentjük, magasságát pedig 20-szal növeljük, ugyanazt az utat, illetve területet kapjuk. Ez azt jelenti, hogy az ábrán látható két árnyékolt téglalap területe egyenlő. Tehát: $3\cdot x = 9\cdot 20$, ahonnan $x = 60$ (km/h), a kért sebesség.

3. példa. *Egy autó,* 250 *km utat* 4 *óra alatt tett meg. Az út egy részén az autó sebessége* 60 *km/h, más részén pedig* 80 *km/h. Milyen távolságot tett meg* 60 *km/h sebességgel ? Hát* 80 *km/h sebességgel ?*

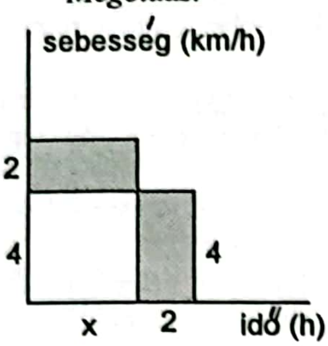
Megoldás.



Jelölje x azt az időt, ami eltelt addig, amíg az autó 60 km/h sebességgel haladt. Így 4 - x annak az időnek a mérőszáma, ami eltelt addig, amíg az autó 80 km/h sebességgel haladt. A mellékelt ábrán látható két téglalap területe, a kétféle sebességgel megtett utat szemlélteti (még ha a sebesség szakaszonként változott is). A feladat alapján az összterület a 250 km utat jelképezi. Tehát: $60\cdot x + 80\cdot(4-x) = 250$, ahonnan $20\cdot x = 70$, így x = 3,5 (óra) és 4 - x = 0,5 (óra) a 60 km/h, illetve a 80 km/h sebességgel megtett időt jelenti. Ezért, a kisebbik sebességgel $60\cdot 3,5 = 210$ km-t, a nagyobbikkal pedig 40 km-t tett meg.

4. példa. *Két személy, az A városból a B városba gyalogolt. Az első gyalogos* 4 *km/h sebességgel haladt és* 2 *órával később ért a B városba, mint a második. Ha a második gyalogos sebessége* 6 *km/h, milyen távol van egymástól a két város ?*

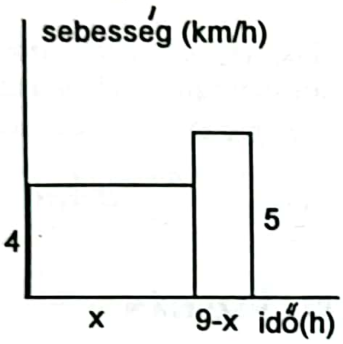
Megoldás.



Jelölje x annak az időnek a mérőszámát, amennyi addig telik el, ameddig a második gyalogos elérkezik a B városba. Az általa megtett utat az x alapú, 6 magasságú téglalap jelképezi, míg az első gyalogos által megtett utat az $x+2$ alapú 4 magasságú téglalap szemlélteti. Mivel mindketten ugyanazt az utat tették meg, ezért a két árnyékolt téglalap területe egyenlő. Tehát: $2 \cdot x = 2 \cdot 4$, ahonnan $x = 4$ (óra). Így a két város közötti távolság: $6 \cdot 4 = 24$ (km).

5. példa. *Egy gyalogos, két helység közötti távolságot menet-jövet 9 óra alatt tett meg. Menet 4 km/h átlagsebességgel, jövet 5 km/h átlagsebességgel haladt. Milyen távol van egymástól a két helység ?*

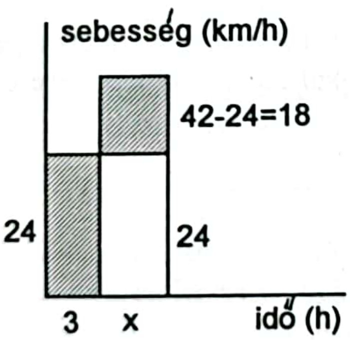
Megoldás:



Jelölje x a menet irányában eltelt idő mértékszámát, így jövet $9 - x$ lesz a visszatéréshez szükséges idő mértékszáma. A mellékelt ábrán az x alapú és 4 magasságú, illetve a $9 - x$ alapú és 5 magasságú téglalapok területe, a menet, illetve a jövet megtett utat jelentik, amelyek egyenlőek. Tehát: $4 \cdot x = 5 \cdot (9 - x)$, ahonnan $9 \cdot x = 45$, így $x = 5$ (óra). A két helység közötti távolság $5 \cdot 4 = (9-5) \cdot 5 = 20$ km.

6. példa. *Az A városból egy motorbiciklis indul el, 24 km/h sebességgel. 3 óra múlva, az A városból egy másik motorbiciklis is elindul, 42 km/h sebességgel. Mennyi idő múlva és az A várostól milyen távolságra éri utol a második motorbiciklis az elsőt ?*

Megoldás.



Jelölje x annak az időnek a mérőszámát, amennyi eltelt a második motorbicikli indulásától a találkozásig. Az első motorbiciklis által megtett utat a $3 + x$ alapú és 24 magasságú téglalap, míg a második motorbiciklis által megtett utat az x alapú és 42 magasságú téglalap területe jelenti. Mivel mindketten ugyanezt az utat tették meg, ezért a szóban forgó két téglalap területe is egyenlő, így a mellékelt ábra két árnyékolt téglalapjának a területei egyenlőek. Tehát: $18 \cdot x = 3 \cdot 24$, ahonnan $x = 4$ (óra), így $3 + 4 = 7$ óra múlva találkoztak, az A várostól $24 \cdot 7 = 168$ km-re.

A bemutatott módszerrel még sok, másfajta megfogalmazású feladat is megoldható.

FELADATOK

1. Egy szekér Déstől Kolozsvárig 8 km/h sebességgel, visszafelé pedig 7 km/h sebességgel tette meg az utat. Összesen 15 órát ment. Milyen távol van Dés Kolozsvártól ?

2. Két repülő egyidőben száll fel. Az egyik sebessége 323 km/h, a másiké 250 km/h. Mennyi ideig repültek, ha az első repülő 365 km-rel több utat tett meg, mint a második ?

3. Az A kikötőből a B kikötő felé két hajó indul. Az első sebessége 25 km/h, a másodiké 20 km/h. Az első hajó 4 órával hamarabb jut el a B kikötőbe, mint a második. Határozzuk meg a két kikötő közötti távolságot.

4. Egy repülő felszállása után 2 órával, ugyanabból a helyből, ugyanabba az irányba egy másik repülő is felszáll, amelyik 6 óra múlva utoléri az elsőt. Mennyi a második repülő sebessége, ha az első repülőé 360 km/h ?

5. Misi egy könyvet olvas. Ha naponta 15 oldalt olvasna el, a könyvet 4 nappal később olvasná ki annál, mint ha naponta 20 oldalt olvasna el. Hány oldalas a könyv ?

6. Andris matematika feladatokat old meg. Ha naponta bizonyos számú feladatot oldana meg, 20 nap alatt nem lenne mit megoldania, azonban ha naponta 3-mal több feladatot oldana meg, már 15 nap alatt befejezné a megoldásokat. Hány feladatot kellett megoldania Andrisnak ?

7. Ha egy vonat 54 km/h sebességgel haladna, akkor a menetrendhez képest egy fél órával hamarabb, ha viszont 36 km/h sebességgel haladna, akkor másfél órával több idő alatt tenné meg két állomás között az utat. A menetrend szerint mekkora kell legyen a vonat sebessége ? (A vonat egyenletes mozgást végez).

8. Egy vonat, egyenes vonalú egyenletes mozgással haladva, az A és B városok közötti 238 km távolságot 7 óra alatt teszi meg. Az első vonat A városból való elindulása után 2 órával elindul egy másik vonat is, amelyik az elsőt az A várostól 136 km távolságra éri utol. Mennyi volt a második vonat sebessége ?

(folytatjuk)

LÍCEUMOK IX. OSZTÁLYÁBA VALÓ FELVÉTELI VIZSGÁN KITŰZÖTT FELADATOK

1996. július

Összeállította: Péterffy Enikő tanárnő, Kolozsvár

A tételeket a Tanügyminisztérium állította össze. Ezek minden líceum részére egységesek és kötelezők voltak. A Minisztérium a tételekkel együtt "javítókulcsot" is küldött, amelyeket az alábbiakban minden feladat után feltüntetünk.

A kitűzött feladatok

I. 1. Számítsátok ki:

a) $6+6:2\cdot3-3\cdot5$; b) $\frac{6}{12}+\frac{5}{15}+\frac{4}{24}$; c) $\frac{\sqrt{18}-3}{\sqrt{2}-1}-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3}\right):\frac{\sqrt{3}-1}{3}-\frac{\sqrt{80}}{2\sqrt{5}}$. (1,50 p)

2. Egy osztályban 18 lány van, ez az osztály létszámának 60%-a. Hány tanuló van ebben az osztályban ? (0,75 p)

3. Határozzátok meg azt a legkisebb természetes számot, amelynek a 12, 18 és 40 számokkal való osztási maradéka minden esetben 7. (0,50 p)

II. 1. Oldjátok meg a természetes számok halmazán:

a) $2(x+8)=5x+1$; b) $x-1\geq\frac{3x-5}{2}$. (1,25 p)

2. Adott a következő függvény: $f:R\to R$, $f(x)=2x-1$.