GIMNÁZIUMI TANULÓK RÉSZÉRE:

RABLÓMESÉK

Tuzson Zoltán tanár, Székelyudvarhely

Az azonos mértani tulajdonságú pontok összessége: a mértani hely. Ezzel a fogalommal a gimnáziumi tanulók először a VI. osztályban találkoznak. A változó és rögzitett pontok, amelyek a feladatok szövegében szerepelnek, sokszor igen nagy nehézségeket okoznak, különösen a gimnáziumi tanulóknak, s ezért a tanulók nagy része mellőzi a mértani-helyes feladatok megoldását.

Az érdeklődés felkeltése végett három ilyen jellegű feladatot mutatunk be, vonzóbb megfogalmazásban, meseszerű szövegben.

1. *mese*. Két rabló az elrabolt kincset az erdő szélén rejti el. Kiszemelnek két, F_1 és F_2 fát. Az F_1F_2 egyenesen a két fa között egy C cöveket vernek be. Innen, az egyenes mentén, az egyik rabló az F_1 fa felé, a másik az F_2 fa felé indul el. Ezután menetirányukra merőlegesen (az F_1F_2 szakasz ugyanazon oldalán) mindkét rabló a megtett útjával egyenlő hosszúságú utat tesz meg. Így az egyik az A, a másik a B pontba érkezik. Ezután szembefordulnak egymással és az AB szakasz K felezőpontjában elássák a kincset (lásd az 1. ábrát), majd eltávoznak, elhagyván az erdőt. Az egyik nem bízott a társában, visszalopakodott és ellopta a C cöveket. Bizalmatlansága nem volt alaptalan. Később jött a másik rabló, hogy kiássa a kincset. Nem találva meg a C cöveket, csöppet sem keseredett el, néhány mérés után megtalálta a kincset. Hogyan?

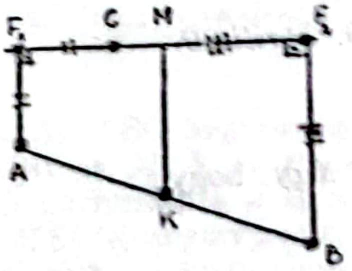
Ez a mese a Mértan tankönyv, VI. osztály számára, 123. old. 8. feladata alapján készült. A tankönyvben szereplő feladat szövege a következő:

Legyen M az AB szakasz változó pontja. Az AM és MB szakaszokra, mint oldalakra az AB egyenes által határolt ugyanazon félsíkban megszerkesztjük az $AMEF$ és $BMDC$ négyzeteket. Mutassuk ki, hogy az FC szakasz P felezőpontja egy rögzített pont, ha M az AB szakaszon változik.

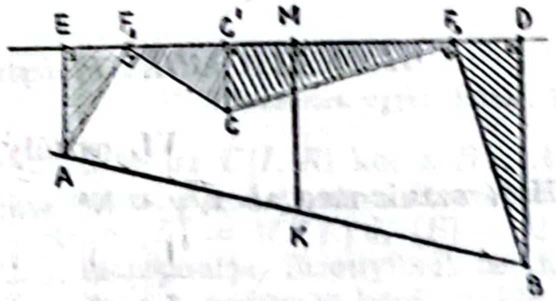
2. *mese*. A rablók ugyanúgy járnak el, mint az előző esetben, csak a C cöveket egy tetszőleges helyen, nem föltétlenül az F_1F_2 egyenes mentén verik földbe. (lásd a 2. ábrát).

Megoldás

Legyen $C' \in F_1F_2$ úgy, hogy $CC' \perp F_1F_2$; $AE \perp F_1F_2$, $BD \perp F_1F_2$, ahol $D, E \in F_1F_2$. Tekintsük az $M \in (F_1F_2)$ pontot úgy, hogy $KM \perp$ $\perp F_1F_2$, ahol K az AB szakasz felezőpontja.



1. ábra



2. ábra

Ekkor könnyen igazolható, hogy:

1. $EM \equiv MD$. Valóban, $KM \parallel AE \parallel BD$, Thalész tétele értelmében $1 = \frac{AK}{KB} = \frac{EM}{MD}$, vagyis M az ED szakasz felezőpontja. Tehát KM az $ABDE$ derékszögű trapéz középvonala.

2. $AEF_1\triangle \equiv CC'F_1\triangle$, mivel $CF_1 = F_1A$ és a rajtuk fekvő szögek páronként kongruensek. Tehát $AE \equiv F_1C'$. (i)

3. Hasonló módon a $BDF_2\triangle \equiv CC'F_2\triangle$, ahonnan következik, hogy $BD \equiv F_2C'$. (ii)

Felírható, hogy: (*) $KM = \frac{AE + BD}{2} = \frac{F_1C' + C'F_2}{2} = \frac{F_1F_2}{2}$, vagyis $F_1M = MF_2 = MK$.

Tehát a kincs kiásása úgy történik, hogy a rabló kiméri az F_1F_2 szakasz felét (a rajzon az M pont) ahonnan, az F_1F_2-re merőlegesen annyit halad előre (az F_1F_2 észbentartott oldalán), mint amennyi az $\frac{F_1F_2}{2}$ szakasz hossza, így a K pontba jut.

Az első feladat esetében $C \equiv C'$ (tehát nem kell hasonlóságot igazolni) és így $E \equiv F_1$, $D \equiv F_2$, felhasználva a (*) számolást az eljárás ugyanaz.

A tanulság tehát: akárhová is verjük le a C cöveket, és végezzük el az előírt eljárást, a kincs ugyanabba a K pontba kerül. Talán így jobban szemléltettük a fixpont fogalmát.

Befejezésül a „kincskeresőknek" még egy feladatot fogalmazunk meg (Charles W. Trigg: Ingeniozitate si surpriză în matematică című könyv 21. old. 36. feladata alapján).

3. *mese.*

Egy kalóz a tengerparton rejti el kincseit. Kiszemelt két egymáshoz hasonló Sz_1 és Sz_2 sziklát, valamint három kókuszpálmát, P_1-et, P_2-t és P_3-at. Ezután az $Sz_1Sz_2P_1$ háromszög külső tartományában felmérte az $A_1P_1 \equiv P_1Sz_1$, $A_1P_1 \perp P_1Sz_1$, valamint $B_1P_1 \equiv P_1Sz_2$, $B_1P_1 \perp P_1Sz_1$ szakaszokat. Összekötve A_1-et az Sz_2-vel, B_1-et az Sz_1-gyel, a metszéspontot K_1-gyel jelölte. Hasonló méréseket végzett el a P_2, illetve P_3-tól kiindulva, a kapott metszéspontokat K_2 vel, illetve K_3-mal jelölte. Ezután úgy döntött, hogy a kincset a $K_1K_2K_3$ köré írt kör középpontjában rejti el.

Évek múltán visszatért a partra és azt tapasztalta, hogy a vihar kitépte a pálmákat, de a két hasonló sziklát megtalálta.

Hogyan talál a kincsre?

MATEMATIKAI VERSENY, ORSZÁGOS SZAKASZ

GIMNÁZIUMOK, Ploieşti 1990. április 9.

VI. osztály

1. Határozzuk meg az $x, y \in \mathbf{N}^*$ számokat úgy, hogy:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}.$$

* * *